مبانی نظریهٔ الکترومغناطیس

POWEREN.IR

جان ار. ریتس، فردریک جِی. میلفورد، رابرت دبلیو. کریستی

ترجمهٔ

جلال صمیمی، ابوالقاسم جمشیدی

مسیب جمشیدی‌پور، ناصر علیزاده قمصری

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

فیزیک
۴۰

مرکز نشر دانشگاهی
۴۷۷

Foundations of Electromagnetic Theory
John R. Reitz, Frederick J. Milford, Robert W. Christy
Third Edition
Addison-Wesley, 1979

مبانی نظریهٔ الکترومغناطیس
تألیف جان ار. ریتس، فردریک جِی. میلفورد، رابرت دبلیو. کریستی
ترجمهٔ دکتر جلال صمیمی، دکتر ابوالقاسم جمشیدی، مسیب جمشیدی‌پور، ناصر علیزاده قمصری
ویراستهٔ دکتر جلال صمیمی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۶۸
چاپ دهم ۱۳۸۳
تعداد ۲۰۰۰
حروفچینی: بینش‌نو
لیتوگرافی: تندیس
چاپ و صحافی: مازیار
حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

ریتس، جان Reitz, John R.
مبانی نظریهٔ الکترومغناطیس / جان ار. ریتس، فردریک جی. میلفورد، رابرت دبلیو. کریستی؛ ترجمهٔ جلال صمیمی... [و دیگران]. ــ تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸.
سیزده، ۶۹۵ ص. : مصور، جدول، نمودار. ــ (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۴۷۷. فیزیک؛ ۴۰)
فهرست‌نویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
عنوان اصلی: Foundations of electromagnetic theory, 3rd ed.
این کتاب در سال ۱۳۵۵ تحت عنوان «اصول تئوری الکترومغناطیس» توسط دانشگاه فردوسی مشهد منتشر شده است.
نمایه.
چاپ دهم: ۱۳۸۳. ISBN 964-01-0477-9
۱. نظریهٔ الکترومغناطیس. الف. میلفورد. فردریک J. Milford, Frederick ب. کریستی، رابرت W. Christy, Robert ج. صمیمی، جلال، ۱۳۱۹ ـ ، مترجم. د. مرکز نشر دانشگاهی.ه. عنوان. و. عنوان: اصول تئوری الکترومغناطیس.
۶الف۹ر/QC۶۷۰ ۵۳۰/۱۴۱
۱۳۶۸
کتابخانهٔ ملی ایران ۲۶۹۵ ـ ۶۸م*

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست

عنوان	صفحه
پیشگفتار	۱
۰۱ آنالیز برداری	۵
۱۰۱ تعریفها	۵
۲۰۱ جبر برداری	۶
۳۰۱ شیب	۱۰
۴۰۱ انتگرال گیری برداری	۱۴
۵۰۱ واگرایی	۱۶
۶۰۱ تاو	۱۹
۷۰۱ عملگر دیفرانسیلی برداری ∇	۲۲
۸۰۱ عملیات تکمیلی	۲۴
۹۰۱ خلاصهٔ مطالب	۲۸
مسائل	۲۹
۰۲ الکتروستاتیک	۳۳
۱۰۲ بارالکتریکی	۳۳

عنوان	صفحه

۲.۲ قانون کولن	۳۴
۳.۲ میدان الکتریکی	۳۷
۴.۲ پتانسیل الکتروستاتیکی	۴۰
۵.۲ رساناها و عایقها	۴۳
۶.۲ قانون گاؤس	۴۴
۷.۲ کاربرد قانون گاؤس	۴۷
۸.۲ دوقطبی الکتریکی	۵۰
۹.۲ بسط میدانهای الکتریکی برحسب چند قطبیها	۵۳
۱۰.۲ تابع دلتای دیراك	۵۶
۱۱.۲ خلاصهٔ مطالب	۵۸
مسائل	۶۱
۳. حل مسائل الکتروستاتیك	۶۶
۱.۳ معادلهٔ پواسون	۶۷
۲.۳ معادلهٔ لاپلاس	۶۸
۳.۳ معادلهٔ لاپلاس بایك متغیرمستقل	۷۰
۴.۳ حل معادلهٔ لاپلاس درمختصات کروی. هماهنگهای منطقه‌ای	۷۱
۵.۳ کرهٔ رسانا درمیدان الکتریکی یکنواخت	۷۴
۶.۳ هماهنگهای استوانه‌ای	۷۶
*۷.۳ معادلهٔ لاپلاس درمختصات قائم	۷۷
*۸.۳ معادلهٔ لاپلاس درفضای دوبعدی. جواب عمومی	۷۹
۹.۳ تصویرهای الکتروستاتیکی	۸۰
۱۰.۳ بارنقطه‌ای وکرهٔ رسانا	۸۳
۱۱.۳ بارهای خطی و تصویرهای خطی	۸۵
۱۲.۳ دستگاه رساناها. ضرایب پتانسیل	۸۷
۱۳.۳ جوابهای معادلهٔ پواسون	۸۹

عنوان	صفحه

۱۴.۳ خلاصهٔ مطالب	۹۰
مسائل	۹۱
منابع	۹۴
۴. میدان الکتروستاتیك در محیطهای دی‌الکتریك	۹۶
۱.۴ قطبش	۹۷
۲.۴ میدان خارجی یك محیط دی‌الکتریك	۹۸
۳.۴ میدان الکتریکی درداخل یك دی‌الکتریك	۱۰۲
۴.۴ قانون گاؤس در دی‌الکتریکها. جابه‌جایی الکتریکی	۱۰۶
۵.۴ پذیرفتاری الکتریکی وثابت دی‌الکتریك	۱۰۸
۶.۴ بارنقطه‌ای دریك شارهٔ دی‌الکتریك	۱۱۱
۷.۴ شرایط مرزی حاکم بربردارهای میدان	۱۱۳
۸.۴ مسائل مربوط به‌مقادیرمرزی در دی‌الکتریکها	۱۱۶
۹.۴ کرهٔ دی‌الکتریك دریك میدان الکتریکی یکنواخت	۱۱۷
*۱۰.۴ نیروی وارد بریك بارنقطه‌ای واقع دریك دی‌الکتریك	۱۱۹
۱۱.۴ خلاصهٔ مطالب	۱۲۲
مسائل	۱۲۴
۵. نظریهٔ میکروسکوپی دی‌الکتریکها	۱۲۸
۱.۵ میدان مولکولی در دی‌الکتریك	۱۲۸
۲.۵ دوقطبیهای القایی. یك مدل ساده	۱۳۲
۳.۵ مولکولهای قطبی. فرمول لانژون - دبی	۱۳۴
*۴.۵ قطبش دائمی . فروالکتریسیته	۱۳۷
۵.۵ خلاصهٔ مطالب	۱۴۰
مسائل	۱۴۲

عنوان	صفحه

۶. انرژی الکتروستاتیکی	۱۴۳
۱.۶ انرژی پتانسیل گروهی از بارهای نقطه‌ای	۱۴۴
۲.۶ انرژی الکتروستاتیکی یك توزیع بار	۱۴۶
۳.۶ چگالی انرژی میدان الکتروستاتیکی	۱۴۹
۴.۶ انرژی دستگاه رساناهای باردار. ضرایب پتانسیل	۱۵۱
۵.۶ ضرایب ظرفیت و ضرایب القا	۱۵۴
۶.۶ خازنها	۱۵۴
۷.۶ نیروها و گشتاورنیروها	۱۵۷
*۸.۶ نیروی وارد برتوزیع بار	۱۶۱
*۹.۶ تعبیرترمودینامیکی انرژی الکتروستاتیکی	۱۶۲
۱۰.۶ خلاصهٔ مطالب	۱۶۳
مسائل	۱۶۵
۷. جریان الکتریکی	۱۷۰
۱.۷ ماهیت جریان	۱۷۱
۲.۷ چگالی جریان. معادلهٔ پیوستگی	۱۷۳
۳.۷ قانون اهم. رسانندگی	۱۷۵
۴.۷ جریانهای پایا درمحیطهای پیوسته	۱۷۹
۵.۷ نزدیك شدن به‌تعادل الکتروستاتیکی	۱۸۳
۶.۷ شبکه‌های مقاومت وقوانین کیرشهوف	۱۸۵
۷.۷ نظریهٔ میکروسکوپی رسانش	۱۹۰
۸.۷ خلاصهٔ مطالب	۱۹۴
مسائل	۱۹۷
۸. میدان مغناطیسی جریانهای پایا	۲۰۲
۱.۸ تعریف میدان مغناطیسی	۲۰۲

عنوان	صفحه

۲.۸ نیروهای وارد بر رساناهای حامل جریان	۲۰۶
۳.۸ قانون بیو و ساوار	۲۱۰
۴.۸ کاربردهای مقدماتی قانون بیووساوار	۲۱۲
۵.۸ قانون مداری آمپر	۲۱۸
۶.۸ پتانسیل برداری مغناطیسی	۲۲۱
۷.۸ میدان مغناطیسی یك مدار درفواصل دور	۲۲۳
۸.۸ پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی	۲۲۵
۹.۸ شارمغناطیسی	۲۲۷
۱۰.۸ خلاصهٔ مطالب	۲۲۸
مسائل	۲۳۱
۹. خواص مغناطیسی ماده	۲۳۶
۱.۹ مغناطش	۲۳۶
۲.۹ میدان مغناطیسی ناشی ازمادهٔ مغناطیده	۲۴۰
۳.۹ پتانسیل مغناطیسی نرده‌ای وچگالی قطب مغناطیسی	۲۴۴
۴.۹ چشمه‌های میدان مغناطیسی. شدت مغناطیسی	۲۴۵
۵.۹ معادلات میدان	۲۴۷
۶.۹ پذیرفتاری و تراوایی مغناطیسی. پسماند	۲۴۸
۷.۹ شرایط مرزی برای بردارهای میدان	۲۵۵
۸.۹ مسائل مقادیرمرزی شامل مواد مغناطیسی	۲۵۸
۹.۹ مدارهای جریان شامل محیطهای مغناطیسی	۲۶۴
*۱۰.۹ مدارهای مغناطیسی	۲۶۸
*۱۱.۹ مدارهای مغناطیسی شامل آهنرباهای دائم	۲۷۱
۱۲.۹ خلاصهٔ مطالب	۲۷۴
مسائل	۲۷۶

عنوان	صفحه

*۱۰. نظریهٔ میکروسکوپی مغناطیس	۲۸۱
۱.۱۰ میدان مولکولی در درون ماده	۲۸۲
۲.۱۰ منشأ دیامغناطیس	۲۸۴
۳.۱۰ منشأ پارا مغناطیس	۲۸۶
۴.۱۰ نظریهٔ فرومغناطیس	۲۸۸
۵.۱۰ حوزه‌های فرومغناطیسی	۲۹۱
۶.۱۰ فریتها	۲۹۴
۷.۱۰ خلاصهٔ مطالب	۲۹۵
مسائل	۲۹۶
۱۱. القای الکترومغناطیسی	۲۹۸
۱.۱۱ القای الکترومغناطیسی	۲۹۹
۲.۱۱ خودالقا	۳۰۴
۳.۱۱ القای متقابل	۳۰۷
۴.۱۱ فرمول نویمن	۳۰۹
۵.۱۱ القاگرها دراتصالهای متوالی و موازی	۳۱۰
۶.۱۱ خلاصهٔ مطالب	۳۱۳
مسائل	۳۱۴
۱۲. انرژی مغناطیسی	۳۱۹
۱.۱۲ انرژی مغناطیسی مدارهای جفت شده	۳۲۰
۲.۱۲ چگالی انرژی درمیدان مغناطیسی	۳۲۳
۳.۱۲ نیروها و گشتاورنیروهای وارد برمدارهای صلب	۳۲۵
*۴.۱۲ اتلاف پسماند	۳۲۹
۵.۱۲ خلاصهٔ مطالب	۳۳۳
مسائل	۳۳۴

عنوان	صفحه

۱۳. جریانهای کند تغییر	۳۳۸
۱.۱۳ مقدمه	۳۳۸
۲.۱۳ رفتار گذرا ورفتارحالت پایا	۳۴۰
۳.۱۳ قوانین کیرشهوف	۳۴۰
۴.۱۳ رفتار گذرای مقدماتی	۳۴۲
۵.۱۳ رفتارحالت پایای یك مدارسادهٔ متوالی	۳۴۶
۶.۱۳ اتصالهای متوالی وموازی مقاومتهای ظاهری	۳۴۹
۷.۱۳ توان و ضرایب توان	۳۵۱
۸.۱۳ تشدید	۳۵۲
*۹.۱۳ القاهای متقابل درمدارهای ac	۳۵۵
*۱۰.۱۳ معادلات حلقه‌ای و گره‌ای	۳۶۰
*۱۱.۱۳ مقاومت‌ظاهری نقطهٔ تحریك و مقاومت‌ظاهری انتقال	۳۶۴
۱۲.۱۳ خلاصهٔ مطالب	۳۶۴
مسائل	۳۶۷
۱۴. فیزیك پلاسما	۳۷۱
۱.۱۴ خنثایی الکتریکی درپلاسما	۳۷۳
۲.۱۴ مدارهای ذره وحرکت رانشی (سوقی) درپلاسما	۳۷۵
۳.۱۴ آینه‌های مغناطیسی	۳۸۱
۴.۱۴ معادلات هیدرومغناطیسی	۳۸۲
۵.۱۴ اثر تنگش	۳۸۶
۶.۱۴ دستگاههای محصورسازی مغناطیسی برای گداخت گرما هسته‌ای کنترل شده	۳۸۹
۷.۱۴ نوسانهای پلاسما وحرکت موجی	۳۹۰
۸.۱۴ کاربردکاوه‌ها برای اندازه‌گیریهای پلاسما	۳۹۵
۹.۱۴ خلاصهٔ مطالب	۴۰۱

عنوان	صفحه

مسائل	۴۰۲
۱۵. خواص الکترومغناطیسی ابررساناها	۴۰۴
۱.۱۵ تاریخ ابررسانایی	۴۰۴
۲.۱۵ رسانندگی کامل وخاصیت دیامغناطیسی کامل ابررساناها	۴۰۷
۳.۱۵ مثالهایی شامل طرد کامل شار	۴۰۹
۴.۱۵ معادلات لندن	۴۱۳
*۵.۱۵ مثالهایی شامل معادلات لندن	۴۱۷
۶.۱۵ خلاصهٔ مطالب	۴۲۲
مسائل	۴۲۳
۱۶. معادلات ماکسول	۴۲۴
۱.۱۶ تعمیم قانون آمپر. جریان جابه‌جایی	۴۲۴
۲.۱۶ معادلات ماکسول و مبانی تجربی آنها	۴۲۷
۳.۱۶ انرژی الکترومغناطیسی	۴۲۸
۴.۱۶ معادلهٔ موج	۴۳۲
۵.۱۶ شرایط مرزی	۴۳۷
۶.۱۶ معادلهٔ موج باچشمه‌ها	۴۴۲
۷.۱۶ خلاصهٔ مطالب	۴۴۹
مسائل	۴۵۱
۱۷. انتشارامواج الکترومغناطیسی	۴۵۶
۱.۱۷ امواج تخت تکفام درمحیطهای نارسانا	۴۵۶
۲.۱۷ قطبش	۴۶۲
۳.۱۷ چگالی و شارانرژی	۴۶۵
۴.۱۷ امواج تخت تکفام در محیطهای رسانا	۴۶۸
*۵.۱۷ امواج کروی	۴۷۵

عنوان	صفحه

۶.۱۷ خلاصهٔ مطالب	۴۸۴
مسائل	۴۸۶
۱۸. امواج درناحیه‌های مرزدار	۴۸۹
۱.۱۸ انعکاس وشکست درمرز دومحیط نارسانا. فرود عمودی	۴۸۹
۲.۱۸ انعکاس وشکست درمرز دومحیط نارسانا. فرود مایل	۴۹۳
۳.۱۸ زاویهٔ بروستر. زاویهٔ حد	۵۰۱
۴.۱۸ ضرایب فرنل مختلط. انعکاس ازیك سطح رسانا	۵۰۳
۵.۱۸ انعکاس‌وانتقال توسط یك لایهٔ نازك. تداخل	۵۱۴
۶.۱۸ انتشاربین دوصفحهٔ رسانای موازی	۵۲۲
۷.۱۸ موجبرها	۵۲۸
۸.۱۸ مشددهای حفره‌ای	۵۳۲
۹.۱۸ خلاصهٔ مطالب	۵۳۴
مسائل	۵۳۷
۱۹. پاشندگی نوری درمواد	۵۴۱
۱.۱۹ مدل نوسانگرهماهنگ درود ـ لورنتس	۵۴۱
۲.۱۹ جذب تشدیدی توسط بارهای مقید	۵۴۸
۳.۱۹ نظریهٔ الکترون آزاد درود	۵۵۷
*۴.۱۹ واهلش دی‌الکتریکی. رسانش الکترولیتی	۵۶۴
۵.۱۹ روابط کرامرز ـ کرونیگ	۵۷۰
۶.۱۹ خلاصهٔ مطالب	۵۷۶
مسائل	۵۷۷
۲۰. گسیل تابش	۵۸۱
۱.۲۰ تابش ازیك دوقطبی نوسان‌کننده	۵۸۱
۲.۲۰ تابش ازیك آنتن نیم موج	۵۸۶

عنوان	صفحه

۳.۲۰ تابش ازیك گروه بارمتحرك	۵۸۸
*۴.۲۰ میدانهای منطقه‌های نزدیك و بینابین	۵۹۳
۵.۲۰ میرایی تابشی. سطح مقطع تامسون	۵۹۶
۶.۲۰ خلاصهٔ مطالب	۶۰۰
مسائل	۶۰۲
۲۱. الکترودینامیك	۶۰۵
۱.۲۱ پتانسیلهای لینارد ـ ویشرت	۶۰۵
۲.۲۱ میدان یك بارنقطه‌ای باحرکت یکنواخت	۶۰۸
۳.۲۱ میدان بارنقطه‌ای شتابدار	۶۱۳
۴.۲۱ میدانهای تابش برای سرعتهای کم	۶۱۶
۵.۲۱ خلاصهٔ مطالب	۶۱۹
مسائل	۶۱۹
۲۲. نظریهٔ خاص نسبیت	۶۲۱
۱.۲۲ فیزیك قبل ازسال ۱۹۰۰	۶۲۲
۲.۲۲ تبدیل لورنتس واصول موضوعی نسبیت خاص انیشتین	۶۲۵
۳.۲۲ هندسهٔ زمان ـ مکان	۶۳۰
۴.۲۲ تبدیل لورنتس به‌عنوان یك تبدیل متعامد	۶۳۲
۵.۲۲ شکل هموردای معادلات الکترومغناطیس	۶۳۴
۶.۲۲ قانون تبدیل برای میدان الکترومغناطیسی	۶۳۹
۷.۲۲ میدان یك بارنقطه‌ای باحرکت یکنواخت	۶۴۱
۸.۲۲ خلاصهٔ مطالب	۶۴۳
مسائل	۶۴۵
پیوست ۱ تبدیل مختصات، بردارها، وتانسورها	۶۴۷
پیوست ۲ دستگاههای یکاها	۶۵۴

عنوان	صفحه

پیوست۳ عملگرهای دیفرانسیلی برداری	۶۵۹
پیوست۴ تابع دلتای دیراك	۶۶۱
پیوست۵ الکتریسیته‌دارکردن ساکن	۶۶۴
جواب مسائل شمارهٔ فرد	۶۶۶
فهرست راهنما	۶۷۹

POWEREN.IR

پیشگفتار

با اینکه معادلات ماکسول حدود یك صد سال پیش فرمولبندی شده است، ولی مبحث الکترومغناطیس همچنان در حال تغییر است. امروزه دانشجویان سالهای آخر دوره‌های کارشناسی علوم، که روی سخن ما با آنهاست، با درکی کیفی ازپدیده‌های اتمی مطالعهٔ این مبحث را شروع می‌کنند. درعین حال، این دانشجویان در ریاضیات نیززمینهٔ خوبی کسب کرده‌اند و برای اولین بار درموقعیتی هستند که بتوانند بعضی مسائل مهم فیزیك کلاسیك را حل کنند. این کتاب حاصل تدریس درسهایی دربارهٔ الکتریسیته ومغناطیس به‌دانشجویان رشتهٔ فیزیك در انستیتوی تکنولوژی کیس وکالج دارتموث است. درس الکترومغناطیس برای گسترش مفاهیم آنالیز برداری، معادلات دیفرانسیلی پاره‌ای، ومسائل مقادیر مرزی بسیارمناسب‌است. بخشهایی ازکتاب که به‌این مسائل‌مربوط می‌شود طوری نوشته شده‌اند که به‌معلومات قبلی چندانی نیازندارند.

به‌اعتقاد ما روش صحیح آموزش دراین سطح تکیهٔ بیشتر برآزمایشهای تجربی‌است، و ما نیز با ارائهٔ دقیق مبانی، همین روش را دنبال کرده‌ایم. همچنین، برای‌ایجاد ارتباط میان‌جنبه‌های صوری‌مبحث ومسائل، تعدادی مثال‌مناسب منظورکرده‌ایم. درك کامل‌میدانهای الکتریکی ومغناطیسی در داخل ماده تنها پس از درك ماهیت اتمی مواد امکان‌پذیر است. از اینرو، درتکوین نظریهٔ ماکروسکوپی مفاهیم مقدماتی اتمی راآزادانه به‌کار برده‌ایم.

میدان الکتریکی ایستا درمحیطهای مادی‌را بلافاصله پس‌ازمیدان الکتریکی درخلأ آورده‌ایم، وهمین‌طور درمورد میدان مغناطوستاتیکی، ولی خواننده می‌تواند هر دو مورد خلأ را با هم قبل‌از مطالعهٔ میدانهای الکتریکی ومغناطیسی درماده مطالعه‌کند. برای این منظور می‌توان فصلهای ۴، ۵، ۶، ۷ (بجز بخشهای ۱.۷ و ۲.۷)، ۹، و ۱۰ را بعداز فصل ۸، یا حتی بعداز فصل ۱۱ مطالعه‌کرد. رفتار الکترومغناطیسی ماکروسکوپی دی‌الکتریکها، رساناها، مواد مغناطیسی، پلاسماها، وابررساناها به‌ترتیب درفصلهای ۴، ۷، ۹، ۱۴، و۱۵ بررسی شده‌اند. بحث ساده‌ای‌ازنظریهٔ میکروسکوپی‌این مواد (بجزابررساناها) نیزدرفصلهای ۵، ۷، ۱۰، و ۱۴ آمده است.

کتاب دراین ویرایش با افزودن مطالب بیشتری دربارهٔ امواج الکترومغناطیسی تغییرات اساسی کرده است. دوفصل مربوط به معادلات ماکسول درکتاب قبل در اینجا به

پنج فصل افزایش یافته است. از اینرو این کتاب را هم می‌توان در یك نیمسال تدریس کرد و هم به‌عنوان یك درس دونیمسالی که در نیمسال دوم آن بیشتر انتشار وتولید تابش مورد نظر باشد.

قسمت عمده‌ای از فیزیك نوین (ومهندسی) را میدانهای الکترومغناطیسی وابسته به‌زمان که درآنها جریان جا به جایی ماکسول نقش مهمی ایفا می‌کنند تشکیل می‌دهد. فصلهای ۱۶ تا ۲۰ مربوط می‌شوند به‌کاربرد امواج، مخصوصاً در ارتباط با نورشناسی که هم‌اکنون از لحاظ فنی از میکروموج پیشی گرفته‌است. درفصلهای ۱۶ و ۱۷ معادلات موج کتاب قبلی باتفصیل بیشتر ارائه ومفهوم تبدیلات پیمانه‌ای معرفی شده‌است. برمفاهیم تابع دی‌الکتریك مختلط و ضریب شکست مختلط تأکید بیشتری شده و در نتیجه فرمولها ساده‌تر و مفاهیم روشنتر شده‌اند. در فصل ۱۸ مسائل با مقادیر مرزی به تفصیل بررسی و مثالهای جالبی دربارهٔ صافیهای نوری وموجبرها منظور شده است. درفصل ۱۹ نظریهٔ میکروسکوپی کلاسیك انتشار موج عرضی در ماده (دی الکتریکها، رساناها، پلاسماها) آمده است. دراین فصل، فصلهای ۵ و ۷ به میدانهای وابسته به‌زمان تعمیم داده می‌شود و روابط پاشندگی کرامرز ـ کرونیگ برای تابع پاسخ خطی نیز به‌اختصاربررسی می‌شود. در فصل ۲۰ که مربوط به تولید تابش توسط آنتنها و بارهای شتابدار است، مطالب جدیدی دربارهٔ میدانهای القا، میرایی تابشی، و پراکندگی تامسون اضافه شده است.

ترتیب مطالب دربقیهٔ کتاب کمی تغییر کرده‌است به‌طوری که مبحث میدانهای ایستا وجریانهای پایا قبل از معرفی قانون القای فاراده در فصل ۱۱ می‌آید، وکاربرد این‌قانون درمورد جریانهای کند تغییر در مدارهای ac، پلاسماها، و ابررساناها به دنبال آن در فصلهای ۱۳، ۱۴، و۱۵ توضیح داده می‌شود. فرمولبندی نسبیتی الکترومغناطیس درآخر کتاب آمده است، هرچندکه در هرمرحله‌ای پس از فصل ۱۶ می‌توان آن را مطالعه‌کرد. به بعضی از جنبه‌های نسبیتی در بررسیهای جدید نیروی مغناطیسی (در فصل ۸) و قانون فاراده (درفصل ۱۱) ازپیش اشاراتی شده‌است.

ازجمله تغییرات دیگر نسبت به‌ویرایشهای قبلی این کتاب معرفی تابع دلتای دیراك درفصل ۲ است و استفاده ازآن برای ساده‌کردن بعضی ازاثباتهای بعدی. تبدیلات متعامد به مطالب پیوست منتقل شده است که خواننده می‌تواند آن را در صورت تمایل همراه با فصل ۱ مطالعه‌کند. ازنمادگذاری عملگردل برای مشتق‌گیری برداری استفاده شده‌است. تمام جدولهای داده‌ها وهمچنین ارجاعات به‌سایرکتب روزآمد شده، ودرسرتاسرکتاب‌از نمادگذاری و یکاهای بین‌المللی (SI) استفاده شده است. (باوجود این، به‌یکاهای گاؤسی نیز ارجاع شده است، زیرا از این یکاها درکتب و نشریات جاری فیزیك به طورگسترده استفاده می‌شود.) دربخش خلاصهٔ مطالب درانتهای هرفصل ایده‌ها و فرمولهای اساسی آن فصل مشخص شده‌اند. حدود صدوسی‌مسئله به‌مسائل‌افزوده شده‌است که به گسترش وکاربرد بیشتر مفاهیم کمك می‌کند.

برای کمك به‌خواننده، مسائل مشکلتر با ستاره مشخص شده‌اند. بخشها وفصلهایی

از کتاب که باستاره مشخص‌شده‌اند برای تکوین‌مطالب بعدی آن‌ضروری نبستند ومی‌توان درمطالعهٔ فشردهٔ کتاب آنها را حذف کرد.

ج. ر. ریتس — دیربورن، میشیگان
ف. ج. میلفورد — کلومبوس، اوهایو
ر. و. کریستی — هانوور، نیوهامشایر

ژانویهٔ ۱۹۷۹

۱

آنالیز برداری

در مطالعهٔ الکتریسیته و مغناطیس می‌توانیم با به‌کار بردن نمادهای آنالیز برداری تا حد زیادی پیچیدگی نمادگذاریها راکاهش دهیم. آنالیز برداری ، علاوه براین کوتاه‌نویسی باارزش، مفاهیم فیزیکی موجود درمعادلات راهم نشان می‌دهد. دراین فصل مبانی آنالیز-برداری را به‌طور مختصر، اما جامع، توضیح می‌دهیم ومقدمات لازم برای مطالعهٔ مبحث الکتریسیته و مغناطیس را فراهم می‌کنیم. برای کسانی که باآنالیز برداری آشنا هستند این فصل مرور خوبی است وآنها را با نمادگذاریهای کتاب نیز آشنا می‌کند.

۱.۱ تعریفها

درفیزیك مقدماتی معمولا باچندنوع کمیت مخصوصاً باتقسیم بندی کمیتها به‌دو دستهٔ برداری ونرده‌ای آشنا می‌شویم. دراینجاکافی‌است که‌کمیت نرده‌ای را به‌صورت زیرتعریف کنیم

کمیت نرده‌ای کمیتی است که با استفاده از بزرگی آن کاملا مشخص می‌شود.

جرم، زمان، حجم، ومانند آن چند نمونه ازکمیتهای نرده‌ای‌اند. میدان نرده‌ای که ازتعمیم سادهٔ مفهوم کمیت نرده‌ای نتیجه می‌شود، تابعی‌است ازمکان که درهرنقطه‌ازفضا بابزرگی‌اش درآن نقطه‌کاملامشخص می‌شود.

بردار را می‌توانیم به‌صورت زیرتعریف کنیم

بردار کمیتی است که با استفاده از بزرگی و جهت آن کاملا مشخص می‌شود.

به‌عنوان مثالهایی از بردار می‌توان از بردار مکان نسبت به‌یك نقطهٔ ثابت، شتاب، نیرو، و مانندآن نام برد. میدان برداری، که از تعمیم بردار نتیجه می‌شود، تابعی است از مکان که درهر نقطه ازفضا با بزرگی وجهت کاملا مشخص می‌شود.

این تعریفها را می‌توان دقیقتر و کاملتر ارائه‌کرد؛ در واقع، ما در پیوست ۱ تعریفهای دقیقتری مبتنی برخواص تبدیل ارائه کرده‌ایم. به‌علاوه، گاهی به کمیتهای پیچیده‌تری چون تانسورها نیز برمی‌خوریم. ولی برای منظور ما تا فصل ۲۲ کمیتهای نرده‌ای و برداری کاملا مناسب وکافی‌اند.

۲.۱ جبر برداری

چون خواننده با جبر کمیتهای نرده‌ای آشناست، برای گسترش جبر برداری ازآن استفاده می‌کنیم. برای این کار ابتدا نمایشی از بردارها ارائه می‌دهیم. به‌همین دلیل دستگاه مختصات سه‌بعدی دکارتی (قائم) را معرفی می‌کنیم. این دستگاه سه‌بعدی را با سه متغیر x، y، z، ویا برحسب مورد با x_1، x_2، و x_3 نمایش‌خواهیم داد. دراین‌دستگاه هر بردار بامؤلفه‌های x، y، و z مشخص‌می‌شود. ازاینرو، بردار[1] $\mathbf{V}$ بامؤلفه‌های V_x، V_y، V_z اش مشخص می‌شود، که در آن $V_x=|\mathbf{V}|\cos\alpha_1$، $V_y=|\mathbf{V}|\cos\alpha_2$، و $V_z=|\mathbf{V}|\cos\alpha_3$ و αها زاویهٔ میان بردار $\mathbf{V}$ وهریك ازمحورهای مختصات‌اند. کمیت نرده‌ای $|\mathbf{V}|=\sqrt{V_x^2+V_y^2+V_z^2}$، برابراست با بزرگی یا طول بردار $\mathbf{V}$. درمیدانهای برداری هریك ازمؤلفه‌ها را بایدتابعی از x، y، و z در نظر گرفت. دراینجا باید تأکید کنیم که فقط به‌منظورسادگی درفهم‌مطلب بردارها را دردستگاه مختصات دکارتی نمایش می‌دهیم. درواقع، کلیهٔ تعریفها وعملیاتی که روی‌آنها انجام می‌دهیم به انتخاب دستگاه مختصات خاصی بستگی ندارند.

حاصل‌جمع دوبردارطبق تعریف برداری‌است که مؤلفه‌های‌آن عبارت‌اند ازمجموع مؤلفه‌های مربوط به‌دوبرداراصلی. اگر حاصل جمع $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را با $\mathbf{C}$ نشان دهیم، داریم

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B} \tag{۱.۱}$$

و

$$C_x=A_x+B_x,\quad C_y=A_y+B_y,\quad C_z=A_z+B_z \tag{۲.۱}$$

این تعریف کاملا معادل است با قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع درجمع بردارها.

تفریق برداری را بااستفاده از بردار منفی بردار تعریف می‌کنیم. بردار منفی هر بردار، برداری است که مؤلفه‌های‌آن با منفی مؤلفه‌های بردار اصلی برابرند. بنابراین، اگر $\mathbf{A}$ یك بردار باشد، $-\mathbf{A}$ به‌صورت زیرتعریف می‌شود

---

۱. کمیتهای برداری با حروف سیاه مشخص می‌شوند.

$$(-\mathbf{A})_x = -A_x,\ (-\mathbf{A})_y = -A_y,\ (-\mathbf{A})_z = -A_z \qquad (۳.۱)$$

بنابراین، عمل تفریق برداری‌را به‌کمك جمع یك بردار بامنفی بردار دیگرتعریف می‌کنیم و به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B}) \qquad (۴.۱)$$

از شرکت‌پذیری وجابه‌جایی‌پذیری اعداد حقیقی نتیجه می‌شودکه جمع (وتفریق) برداری نیز شرکت‌پذیر وجابه‌جایی‌پذیراست. این‌مطلب بانماد گذاری برداری به‌صورت زیرنوشته می‌شود

$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=(\mathbf{A}+\mathbf{C})+\mathbf{B}=\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C} \qquad (۵.۱)$$

به‌عبارت دیگر، همان‌طورکه درطرف راست رابطهٔ بالا دیده می‌شود، وجود پرانتزها غیرضروری است.

اکنون به‌فرایندضرب می‌پردازیم وملاحظه می‌کنیم‌که ساده‌ترین ضربها عبارت‌است از ضرب یك‌کمیت نرده‌ای در یك بردار. نتیجهٔ این عمل، برداری است‌که هرمؤلفهٔ آن برابر است با حاصل‌ضرب‌آن‌کمیت نرده‌ای درمؤلفهٔ متناظر از بردار اصلی. اگر c کمیت نرده‌ای و $\mathbf{A}$ بردار باشد، حاصل‌ضرب $c\mathbf{A}$ بردار $\mathbf{B}=c\mathbf{A}$ است‌که به‌صورت زیرتعریف می‌شود

$$B_x=cA_x,\ B_y=cA_y,\ B_z=cA_z \qquad (۶.۱)$$

واضح است‌که هرگاه $\mathbf{A}$ یك میدان برداری و c یك میدان نرده‌ای باشد، آنگاه $\mathbf{B}$ یك میدان جدیدبرداری است‌که الزاماً مضرب ثابتی ازمیدان اصلی نخواهد بود.

حال اگر بخواهیم دو بردار را در یکدیگر ضرب‌کنیم، دو امکان پیش می‌آیدکه ضرب برداری و ضرب نرده‌ای نامیده می‌شوند. ابتدا ضرب نرده‌ای را بررسی می‌کنیم. توجه‌کنیدکه این نام از ماهیت نرده‌ای حاصل‌ضرب گرفته شده‌است، اگرچه گاهی ضرب داخلی وضرب نقطه‌ای نیز به‌آن گفته می‌شود. تعریف ضرب نرده‌ای، که به‌صورت $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ نوشته می‌شود، چنین است

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \qquad (۷.۱)$$

این تعریف معادل است باحاصل‌ضرب بزرگی دو بردار در کسینوس زاویهٔ میان‌آنها، که تعریف دیگر و شایدآشناتری است. اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ برهم عمود باشند داریم

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$$

ضرب نرده‌ای جابه‌جایی‌پذیر است. طول $\mathbf{A}$ برابر است با

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}$$

حاصل‌ضرب برداری دو بردار یك بردار است و به‌همین دلیل آن را ضرب برداری می‌گویند. نامهای دیگر آن ضرب‌خارجی‌وضرب‌ضربدری‌است. ضرب برداری‌را به‌صورت $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ می‌نویسند. هرگاه $\mathbf{C}$ حاصل‌ضرب برداری $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ باشد، آنگاه $\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$، یا

$$C_x = A_yB_z - A_zB_y,\ C_y = A_zB_x - A_xB_z,\ C_z = A_xB_y - A_yB_x \qquad (۸.۱)$$

لازم به‌تذکر است که ضرب برداری دو بردار به‌ترتیب قرارگرفتن دوعامل ضرب بستگی دارد و با تعویض ترتیب آنها حاصل‌ضرب منفی می‌شود

$$\mathbf{B}\times\mathbf{A} = -\mathbf{A}\times\mathbf{B}$$

درنتیجه

$$\mathbf{A}\times\mathbf{A} = 0$$

این‌تعریف‌باتعریف زیرهم‌ارزاست. بزرگی‌حاصل‌ضرب‌برداری برابراست باحاصل‌ضرب بزرگی دو بردار در سینوس زاویهٔ میان آنهـا، وجهت‌آن با قاعدهٔ پیچ راستگرد مشخص می‌شود.[۱]

ضرب برداری رامی‌توان به‌کمك دترمینان به‌راحتی به‌خاطر سپرد. اگر $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ بردارهای یکه، یعنی بردارهایی با بزرگی واحد و به‌ترتیب درجهات x، y، و z باشند، داریم

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad (۹.۱)$$

اگر این دترمینان را با قواعد معمولی حساب کنیم، نتیجه دقیقاً همان تعریف ما از ضرب برداری خواهد بود.

عملیات جبری بالا را می‌توان به‌صور مختلف با یکدیگر ترکیب‌کرد. اکثرنتایجی که بدین طریق به‌دست می‌آیند بدیهی‌اند، اما دونوع ضرب سه‌گانهٔ برداری وجود دارد که به‌خاطر اهمیتشان لازم است ازآنها صریحاً یادکنیم. به‌راحتی می‌توان نشان داد کـه

---

۱. $\mathbf{A}$ را از طریق کوچکترین زاویه‌ای‌که با $\mathbf{B}$ می‌سازد به طـرف $\mathbf{B}$ می‌چرخانیم. اگر پیچ راستگردی به‌همین ترتیب بپیچد، درجهتی عمود بردو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ پیش می‌رود. این راستا راستای $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ است.

حاصلضرب سه‌گانهٔ نرده‌ای $D=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ با دترمینان زیر برابراست

$$D=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}=-\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\times\mathbf{C} \qquad (۱۰.۱)$$

این حاصل‌ضرب با تعویض جای علائم ضرب نرده‌ای و برداری ویا تعویض جای بردارها باجایگشت دوری تغییر نمی‌کند؛ به‌پرانتزها نیازی نیست زیرا ضرب برداری کمیت نرده‌ای در بردار تعریف نشده است. ضرب سه‌گانهٔ جالب توجه دیگر عبارت است از ضرب سه‌گانهٔ برداری $\mathbf{D}=\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$. با به‌کاربردن مکرر تعریف حاصل‌ضرب برداری، یعنی معادلهٔ (۸.۱)، نتیجه می‌گیریم

$$\mathbf{D}=\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \qquad (۱۱.۱)$$

که غالباً به قاعدهٔ «بك ـ کب» مشهور است. توجه کنید که درضرب سه‌گانهٔ برداری وجود پرانتزها ضروری است، زیرا بدون آنها نمی‌توانیم ضرب را درست تعریف کنیم.

دراینجا ممکن است این پرسش مطرح شود که آیا تقسیم برداری امکان‌پذیراست یا نه. بدیهی است که تقسیم یك بردار بریك کمیت نرده‌ای را می‌توانیم به‌صورت ضرب بردار در عکس آن کمیت نرده‌ای تعریف کنیم. ولی تقسیم یك بردار بر بردار دیگر تنها وقتی ممکن است که دو بردار با هم موازی باشند. از طرف دیگر، می‌توانیم با نوشتن جوابهای عمومی برای معادلات برداری عملیاتی خیلی شبیه به‌تقسیم انجام دهیم. معادلهٔ زیر را درنظر بگیرید

$$c=\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} \qquad (۱۲.۱)$$

که درآن c یك کمیت نرده‌ای معلوم، $\mathbf{A}$ یك بردار معلوم، و $\mathbf{X}$ یك بردار مجهول است. حل عمومی این معادله به‌صورت زیراست

$$\mathbf{X}=\frac{c\mathbf{A}}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}+\mathbf{B} \qquad (۱۳.۱)$$

که درآن $\mathbf{B}$ برداری است بابزرگی اختیاری و عمود بر $\mathbf{A}$؛ یعنی، $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$. عملیاتی که انجام دادیم خیلی شبیه است به عملیات تقسیم c بر $\mathbf{A}$، به‌عبارت درست‌تر ما صورت کلی بردار $\mathbf{X}$ را طوری پیدا کرده‌ایم که درمعادلهٔ (۱۲.۱) صدق کند. دراینجا جواب منحصر به فردی وجود ندارد، و این واقعیت وجود بردار $\mathbf{B}$ را توجیه می‌کند. به همین طریق می‌توانیم معادلهٔ برداری زیررا درنظر بگیریم

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{X} \tag{۱۴.۱}$$

که درآن $\mathbf{A}$ و $\mathbf{C}$ دو بردار معلوم و $\mathbf{X}$ برداری مجهول است. هرگاه $\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}=0$ باشد جواب عمومی این معادله عبارت خواهد بود از

$$\mathbf{X}=\frac{\mathbf{C}\times\mathbf{A}}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}+k\mathbf{A} \tag{۱۵.۱}$$

که درآن k یك کمیت نـرده‌ای اختیاری است. ولی، اگر $\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}\neq 0$، جـوابی وجود ندارد. این نتیجه نیز تقریباً همان خارج قسمت $\mathbf{C}$ بر $\mathbf{A}$ است؛ ضریب k حاکی از آن است که جواب معادله منحصر به‌فرد نیست. اگر $\mathbf{X}$ الزاماً هم درمعادلهٔ (۱۲.۱) و هم در معادلهٔ (۱۴.۱) صدق کند، آن وقت جواب (چنانچه جوابی وجود داشته باشد) منحصر به‌فرد است و به‌صورت زیر خواهد بود

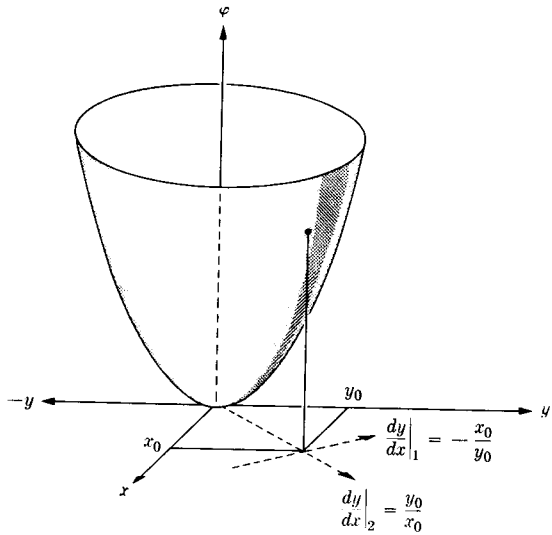
$$\mathbf{X}=\frac{\mathbf{C}\times\mathbf{A}}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}+\frac{c\mathbf{A}}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} \tag{۱۶.۱}$$

۳.۱ شیب

اکنون مطالب بالا را به مشتق گیری و انتگرال گیری، یعنی به حساب دیفرانسیل وانتگرال برداری تعمیم می‌دهیم. ساده‌ترین تعمیم، رابطهٔ میان یك میدان برداری خاص و مشتقهای یك میدان نرده‌ای است. ابتدا بهتر است با مفهوم مشتق جهتی یك تابع چند متغیری آشنا شویم. مشتق جهتی عبارت است ازآهنگ تغییر تابع در یك جهت مشخص، و برای تابع نرده‌ای φ معمولا آن را به‌صورت $d\varphi/ds$ نمایش می‌دهند؛ باید توجه کرد که $d\mathbf{s}$ تغییر مکان بی‌نهایت کوچکی است درجهت مورد نظر، و ds بزرگی نرده‌ای $d\mathbf{s}$ است. هرگاه dx، dy، و dz مؤلفه‌های $d\mathbf{s}$ باشند، آنگاه

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{ds}&=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)-\varphi(x,\ y,\ z)}{\Delta s}\\&=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds}\end{aligned}$$

برای روشن شدن مفهوم مشتق جهتی، یك تابع نرده‌ای دومتغیری را درنظر بگیرید. مثلاً، $\varphi(x,\ y)$ یك میـدان نرده‌ای دو بعدی را نمایش می‌دهـد. φ را می‌توانیم به صورت تابعی از x و y رسم کنیم، همان طورکه تابع $\varphi(x,\ y)=x^2+y^2$ را در شکل ۱.۱ رسم کرده‌ایم. مقدار مشتق جهتی در نقطهٔ x_0، y_0 به‌جهت بستگی دارد. اگر جهت متناظر با $dy/dx=-x_0/y_0$ را انتخاب کنیم، نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید



شکل ۱۰۱ نمایش تابع $\varphi(x, y)=x^2+y^2$ برحسب x و y در نمودار سه بعدی.

$$\left.\frac{d\varphi}{ds}\right|_{x_0, y_0} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds}=\left[2x_0-2y_0\frac{x_0}{y_0}\right]\frac{dx}{ds}=0 \qquad (\text{۱۷.۱ الف})$$

و چنانچه جهت متناظر با $dy/dx=y_0/x_0$ را انتخاب کنیم خواهیم داشت

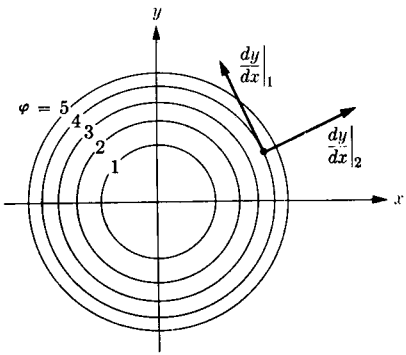
$$\left.\frac{d\varphi}{ds}\right|_{x_0, y_0} = \left(2x_0+2\frac{y_0^2}{x_0}\right)\sqrt{\frac{x_0^2}{x_0^2+y_0^2}}=2\sqrt{x_0^2+y_0^2} \qquad (\text{۱۷.۱ ب})$$

زیرا $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$. به‌عنوان‌سومین امکان $dy/dx=\alpha$ را انتخاب می‌کنیم، دراین صورت

$$\left.\frac{d\varphi}{ds}\right|_{x_0, y_0} = (2x_0+2\alpha y_0)(1+\alpha^2)^{-1/2} \qquad (\text{۱۷.۱ ج})$$

اگر از این عبارت نسبت به α مشتق بگیریم ونتیجه را مساوی صفر قرار دهیم، مقدار α، که به‌ازای آن مقدار مشتق جهتی بیشینه یا کمینه می‌شود، به دست می‌آید. پس از انجام عملیات‌رابطهٔ $\alpha=y_0/x_0$ به‌دست‌می‌آید، یعنی‌جهتی که‌آهنگ‌تغییرات‌تابع $\varphi=x^2+y^2$ بیشینه می‌شود جهت شعاعی‌است. اگرجهت شعاعی به‌سمت خارج باشد این بیشینه، بیشینه آهنگ افزایش و اگر به طرف داخل باشد بیشینه آهنگ کاهش یا کمینه آهنگ افزایش است. درجهتی که با $dy/dx=-x_0/y_0$ مشخص می‌شودآهنگ تغییر x^2+y^2 برابر صفر است. این جهت بردایرهٔ $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$ مماس است. واضح است‌که روی

این منحنی، تابع $\varphi = x^2 + y^2$ تغییر نمی‌کند. جهتی که در آن $d\varphi/ds$ صفر است جهت منحنی $\varphi = \text{const.}$ را در نقطهٔ مورد نظر معین می‌کند. این خطوط، که در مورد تابع $x^2 + y^2$ دایره‌ای هستند با خطوط تراز یا خطوط ارتفاع ثابتی که در نقشه‌های توپوگرافی دیده می‌شود کاملاً شبیه‌اند. شکل ۲.۱ تابع $\varphi = x^2 + y^2$ را نشان می‌دهد که به صورت نقشهٔ خطوط تراز ترسیم شده است.



شکل ۲.۱ تابع $\varphi(x, y)$ مربوط به شکل ۱.۱ که به‌صورت نقشهٔ خطوط ترازدوبعدی رسم شده است.

مفهوم خطوط تراز را می‌توانیم به یك تابع سه متغیری که در آن سطوح $\varphi(x, y, z) = \text{const.}$ سطوح تراز یا سطوح هم پتانسیل نامیده می‌شوند تعمیم دهیم. قیاس سه‌بعدی شکل ۲.۱ تنها راه عملی ترسیم میدان نرده‌ای برای فضای سه بعدی است.

اکنون می‌توانیم شیب تابع نرده‌ای را به‌صورت زیر تعریف کنیم

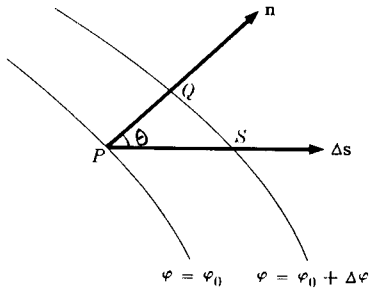
شیب تابع نرده‌ای φ برداری است که بزرگی آن برابر بیشینهٔ مشتق جهتی در نقطهٔ موردنظر و جهت آن جهت بیشینهٔ مشتق جهتی در آن نقطه است.

واضح است که جهت شیب در هر نقطه عموداست بر سطح تراز φ در آن نقطه. متداولترین نمادهای شیب ∇ و grad است، که از این‌دو ما غالباً دومی را به‌کار خواهیم برد. مشتق جهتی برحسب شیب با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\frac{d\varphi}{ds} = |\text{grad}\,\varphi|\cos\theta \qquad (۱۸.۱)$$

که در آن θ زاویهٔ میان جهت $d\mathbf{s}$ و جهت شیب است. این رابطه مستقیماً از روی شکل ۳.۱ نتیجه می‌شود. اگر $d\mathbf{s}$ را بردار تغییرمکانی که بزرگی آن ds است بگیریم، معادلهٔ (۱۸.۱) را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{d\varphi}{ds} = \text{grad}\,\varphi \cdot \frac{d\mathbf{s}}{ds} \qquad (۱۹.۱)$$



شکل ۳.۱ قسمتهایی از دو سطح ترازتابع $\varphi(x, y, z)$. در اینجا $|\mathrm{grad}\,\varphi|$ در نقطهٔ P مساوی است با حد $\Delta\varphi/\overline{PQ}$ وقتی که $\overline{PQ} \to 0$، و $d\varphi/ds$ برابراست با حد متناظر $\Delta\varphi/\overline{PS}$.

به‌کمك این معادله می‌توان شکل صریح شیب را در هردستگاه مختصاتی که درآن شکل $d\mathbf{s}$ معلوم باشد، پیدا کرد. دردستگاه‌مختصات قائم می‌دانیم که $d\mathbf{s} = \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz$. همچنین می‌دانیم که

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

از این معادله ومعادلهٔ (۱۹.۱) نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = (\mathrm{grad}\,\varphi)_x\,dx + (\mathrm{grad}\,\varphi)_y\,dy + (\mathrm{grad}\,\varphi)_z\,dz$$

اگر ضرایب دیفرانسیلهای متغیرهای مستقل در دو طرف این معادله را مساوی هم قرار دهیم، درمختصات قائم خواهیم داشت

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \qquad (۲۰.۱)$$

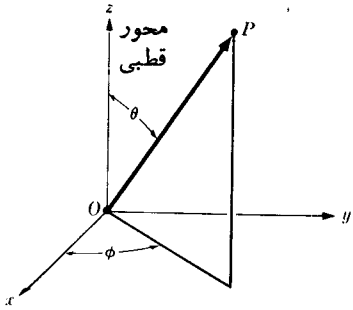
درموارد پیچیده‌تر هم روش‌کارهمین است. درمختصات قطبی‌کروی، که درآن r، θ، و ϕ مطابق شکل ۴.۱ تعریف می‌شوند، داریم

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}dr + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial\phi}d\phi, \qquad (۲۱.۱)$$

و

$$d\mathbf{s} = \mathbf{a}_r\,dr + \mathbf{a}_\theta\,r\,d\theta + \mathbf{a}_\phi\,r\sin\theta\,d\phi, \qquad (۲۲.۱)$$

که درآن $\mathbf{a}_r$، $\mathbf{a}_\theta$، و $\mathbf{a}_\phi$ به‌ترتیب بردارهای یکه‌درجهات r، θ، و ϕاند. بااستفاده از معادلهٔ (۱۹.۱) ومساوی قراردادن ضرایب متغیرهای‌مستقل، نتیجه می گیریم که درمختصات



شکل ۴.۱ تعریف مختصات قطبی r، θ، و ϕ.

کروی

$$\operatorname{grad}\varphi=\mathbf{a}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\mathbf{a}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\mathbf{a}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi} \qquad (۲۳.۱)$$

۴.۱ انتگرال‌گیری برداری

البته، جنبه‌های دیگری ازمشتق‌گیری وجود داردکه درآنها نیز سروکار ما با برداراست، با وجود این بهتر است ابتدا انتگرال برداری را بررسی کنیم. در اینجا بسته به نوع دیفرانسیلی‌که درانتگرال ظاهر می‌شود می‌توانیم سه نوع انتگرال را در نظر بگیریم‌که عبارت‌اند از انتگرالهای خطی، سطحی، وحجمی. انتگرالده می‌تواند بردار یا یك‌کمیت نرده‌ای باشد؛ اما، بعضی ترکیبهای انتگرالده‌ها ودیفرانسیلها سبب پیدایش انتگرالهایی می‌شوندکه جالب‌توجه نیستند. انتگرالهایی‌که دراینجا موردنظرند عبارت‌اند ازانتگرال خطی بردار، انتگرال‌سطحی بردار، وانتگرالهای حجمی‌بردارها وکمیتهای نرده‌ای‌هردو.

اگر $\mathbf{F}$ بردار باشد، انتگرال خطی $\mathbf{F}$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\int_{a\,C}^{b}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} \qquad (۲۴.۱)$$

که درآن C منحنیی است‌که انتگرال درامتدادآن محاسبه می‌شود، a و b نقاط مبدأ و انتها در روی این منحنی‌اند، و $d\mathbf{l}$ بردارتغییرمکان بی‌نهایت‌کوچکی‌است درامتداد منحنی C. چون $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}$ کمیتی نرده‌ای است، واضح است‌که نتیجهٔ انتگرال گیری نیز کمیتی نرده‌ای خواهد بود. تعریف انتگرال خطی با تعریف ریمانی انتگرال معین مشابه است. قطعه‌ای از منحنی C میان a و b را به تعداد زیادی عنصرکوچك $\Delta\mathbf{l}_i$ تقسیم می‌کنیم؛ در داخل هر عنصر نقطه‌ای را انتخاب می‌کنیم و مقدار $\mathbf{F}$ را درآن نقطه به‌دست می‌آوریم. حاصل ضرب نرده‌ای هرعنصر در $\mathbf{F}$ متناظر باآن را تعیین، ومجموع این حاصل‌ضربها را محاسبه می‌کنیم. سپس انتگرال خطی را به‌صورت حد این مجموع وقتی تعداد عناصر بی‌نهایت زیاد شود وهرعنصر به‌سمت صفر میل‌کند تعریف می‌کنیم. این تعریف را به‌طور

فشرده می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\int_{a\,C}^{b} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \Delta\mathbf{l}_i$$

لازم به‌تذکر است که معمولا انتگرال خطی نه‌تنها به‌نقاط حدی a و b بلکه به‌خود منحنی C، که عمل انتگرال‌گیری روی آن انجام می‌شود نیز بستگی دارد. انتگرال خطی روی یك منحنی بسته آنقدر مهم است که نماد خاصی، به‌صورت زیر، برای نمایش آن در نظر گرفته شده است

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} \qquad (۲۵.۱)$$

انتگرال روی یك منحنی بسته ممکن است صفر باشد یا نباشد؛ آن بردارهایی که برای آنها انتگرال خطی روی هرمنحنی بسته‌ای صفراست از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. از اینرو غالباً به‌انتگرالهای خطی روی منحنیهای بستهٔ نامشخص برمی‌خوریم، به‌عنوان مثال

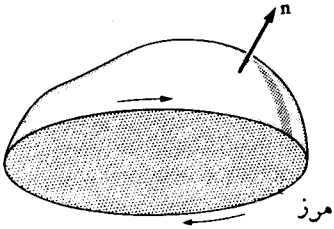
$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} \qquad (۲۶.۱)$$

این نمادگذاری فقط درمواردی مفید است که انتگرال، در محدودهٔ نسبتاً وسیعی، به شکل منحنی C بستگی نداشته باشد. درصورت وجود ابهام، بهتراست منحنی مسیررا مشخص کنیم. روش اساسی برای محاسبهٔ انتگرالهای خطی پیداکردن یك توصیف یك پارامتری از منحنی و آنگاه استفاده از این توصیف برای بیان انتگرال خطی به‌صورت مجموع سه انتگرال یك بعدی معمولی است. بجز درموارد بسیار ساده، این روش بسیار طولانی و پردردسر است، لیکن خوشبختانه محاسبهٔ انتگرالها بااین روش به‌ندرت ضرورت پیدا می‌کند. همچنان‌که بعداً خواهیم دید، اغلب می‌توان نشان دادکه انتگرال خطی به مسیر میان دو حد انتگرال بستگی ندارد. درصورت اخیر می‌توان برای سهولت انتگرال‌گیری مسیر ساده‌ای اختیار کرد.

اگر بازهم $\mathbf{F}$ بردار باشد، انتگرال سطحی $\mathbf{F}$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,da \qquad (۲۷.۱)$$

که‌در آن S سطحی‌است که انتگرال‌گیری روی آن‌انجام می‌شود، da سطح بی‌نهایت کوچکی است از S و $\mathbf{n}$ برداریکهٔ عمود بر da است. درموردانتخاب‌جهت $\mathbf{n}$ ابهام‌دوگانه‌ای وجود داردکه‌چنانچه سطح S بسته باشد باانتخاب $\mathbf{n}$ در راستای عمود برسطح ودرجهت خارج



شکل ۵.۱ رابطهٔ بردار عمود برسطح، **n**، و جهت گردش روی مرز.

آن، این ابهام از بین می‌رود. هر گاه S بسته نباشد اما متناهی باشد، در آن صورت یك خط مرزی دارد و سوی عمود تنها نسبت به سوی مثبت دلخواهی که برای پیمودن این خط مرزی انتخاب می‌شود مهم است. در این صورت سوی مثبت عمود، جهت پیشروی یك پیچ راستگرد است چنانچه پیچ در جهت سوی مثبت انتخابی روی منحنی مرزی بچرخد. این مطلب در شکل ۵.۱ نشان داده شده است. انتگرال سطحی **F** روی سطح بستهٔ S را گاهی به‌صورت زیر می‌نویسند

$$\oint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,da$$

آنچه را دربارهٔ انتگرال خطی گفتیم عیناً می‌توانیم برای انتگرال سطحی نیز تکرار کنیم. انتگرال سطحی کمیتی نرده‌ای است؛ مقدار آن معمولا به سطح S بستگی دارد، و مواردی که در آنها این بستگی وجود ندارد از اهمیت خاصی برخوردارند. انتگرال سطحی را دقیقاً همانند انتگرال خطی تعریف می‌کنیم. فرمولبندی کامل آن‌را به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ دانشجو واگذار می‌کنیم.

هر گاه **F** بردار و φ یك کمیت نرده‌ای باشد، دو انتگرال حجمی مورد نظر عبارت‌اند از

$$J=\int_V \varphi\,dv, \qquad \mathbf{K}=\int_V \mathbf{F}\,dv \tag{۲۸.۱}$$

بدیهی است که J یك کمیت نرده‌ای، و **K** بردار است. تعریف این انتگرالها مستقیماً به انتگرال ریمانی در فضای سه بعدی تبدیل می‌شود؛ اما توجه داشته باشید که درمورد **K** به‌ازای هر مؤلفهٔ **F** یك انتگرال وجود دارد. با این انتگرالها به‌حد کافی آشنا هستیم و نیازی به توضیح بیشتر نیست.

۵.۱ واگرایی

عملگر مهم دیگری که اساساً نوعی مشتق‌گیری است واگرایی است. واگرایی بردار **F**، که به‌صورت div **F** نوشته می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

واگرایی هر بردار حد انتگرال سطحی آن بردار در واحد حجم است هرگاه حجم محصور شده توسط آن سطح به سمت صفر میل کند، یعنی

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,da$$

واضح است که واگرایی، یك تابع نرده‌ای نقطه‌ای (میدان نرده‌ای) است، و در نقطهٔ حدی سطح انتگرال‌گیری تعریف می‌شود. تعریف بالا چندین خاصیت دارد: به انتخاب خاصی ازدستگاه محورهای مختصات بستگی ندارد، و ازآن می‌توان برای یافتن صورت صریح عملگرواگرایی درهردستگاه مختصات خاصی استفاده کرد.

درمختصات قائم،عنصرحجم $\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$ مبنای مناسبی برای یافتن‌صورت صریح واگرایی به‌دست می‌دهد. هرگاه یکی‌از گوشه‌های این مکعب مستطیل درنقطهٔ x_0، y_0، و z_0قرار داشته باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}
F_x(x_0+\Delta x,\ y,\ z)&=F_x(x_0,\ y,\ z)+\Delta x\left.\frac{\partial F_x}{\partial x}\right|_{x_0,y,z}\\
F_y(x,\ y_0+\Delta y,\ z)&=F_y(x,\ y_0,\ z)+\Delta y\left.\frac{\partial F_y}{\partial y}\right|_{x,y_0,z}\\
F_z(x,\ y,\ z_0+\Delta z)&=F_z(x,\ y,\ z_0)+\Delta z\left.\frac{\partial F_z}{\partial z}\right|_{x,y,z_0}
\end{aligned}\qquad(۲۹.۱)$$

که در آن جمله‌هایی که نسبت به Δx، Δy، و Δz از مرتبه‌های بالاترند حذف شده‌اند. چون عنصرهای سطح $\Delta y\ \Delta z$ برمحور x و $\Delta z\ \Delta x$ برمحـور y و $\Delta x\ \Delta y$ برمحور z عمودند، تعریف واگرایی به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{F}=\lim_{V\to 0}\frac{1}{\Delta x\ \Delta y\ \Delta z}\Big\{&\int F_x(x_0,y,z)\,dy\,dz\\
&+\Delta x\ \Delta y\ \Delta z\frac{\partial F_x}{\partial x}+\int F_y(x,\ y_0,\ z)\,dx\,dz\\
&+\Delta x\ \Delta y\ \Delta z\frac{\partial F_y}{\partial y}+\int F_z(x,\ y,\ z_0)\,dx\,dy\\
&+\Delta x\ \Delta y\ \Delta z\frac{\partial F_z}{\partial z}-\int F_x(x_0,\ y,\ z)\,dy\,dz\\
&-\int F_y(x,\ y_0,\ z)\,dx\,dz-\int F_z(x,\ y,\ z_0)\,dx\,dy\Big\}
\end{aligned}\qquad(۳۰.۱)$$

علامت منفی در سه انتگرال آخر بدین دلیل آمده است که دراین حالتها بردار عمودی که به‌سمت خارج ازحجم کشیده می‌شود، درجهت منفی محورهاست. این حد به‌راحتی محاسبه می‌شود ودرنتیجه واگرایی درمختصات قائم به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z} \qquad (۳۱.۱)$$

در مختصات کروی نیز روش‌کار به‌همین طریق است. حجم محصور توسط بازه‌های مختصاتی Δr، $\Delta\theta$، $\Delta\phi$ را به‌عنوان حجم انتگرال گیری انتخاب می‌کنیم. این حجم مساوی‌است با $r^2\sin\theta\,\Delta r\ \Delta\theta\ \Delta\phi$. چون سطح محصور توسط این بازه‌های مختصاتی به‌مقادیر مختصات بستگی دارد (توجه کنید که درمورد مختصات قائم چنین نیست) بهتر است که $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\Delta a$ را به‌صورت صریح آن

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\Delta a=F_r r^2\sin\theta\,\Delta\theta\,\Delta\phi+F_\theta r\sin\theta\,\Delta\phi\ \Delta r+F_\phi r\ \Delta r\ \Delta\theta \qquad (۳۲.۱)$$

بنویسیم. از این رابطه آشکارا پیداست که به‌جای F_r باید $r^2F_r\sin\theta$ را به صورت سری تایلور بسط دهیم. به‌همین‌ترتیب، درجمله‌های دیگر نیز باید ضریب حاصل‌ضربهای بازه‌های مختصاتی بسط داده شود. پس از انجام این بسطها و استفاده از آنها در محاسبهٔ انتگرال سطحی موجود در تعریف واگرایی، نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\lim_{V\to 0}\frac{1}{r^2\sin\theta\ \Delta r\ \Delta\theta\ \Delta\phi}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(F_r r^2\sin\theta)\ \Delta r\ \Delta\theta\ \Delta\phi\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta r\sin\theta)\,\Delta\theta\ \Delta r\ \Delta\phi+\frac{\partial}{\partial\phi}(F_\phi r)\ \Delta\phi\ \Delta r\ \Delta\theta\right\} \qquad (۳۳.۱)$$

بعداز محاسبهٔ حد، صورت صریح واگرایی درمختصات کروی چنین خواهد بود

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi} \qquad (۳۴.۱)$$

این‌روش یافتن صورت صریح واگرایی درهردستگاه مختصاتی قابل‌استفاده است مشروط براینکه شکل عنصرهای حجم وسطح یا عنصرهای طول معلوم باشند.

معنی فیزیکی واگرایی را می‌توان باذکر مثالی ازمکانیك شاره‌ها به‌راحتی توضیح داد. اگر $\mathbf{V}$، سرعت شاره، تابعی‌ازمکان و ρ چگالی شاره باشد، $\oint_S \rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,da$ مقدار کل شاره‌ای است که در واحد زمان، حجم محصور به‌وسیلهٔ سطح S را ترك می‌کند. اگر شاره تراکم ناپذیر باشد ، انتگرال سطحی مقدار کل چشمهٔ شاره در درون سطح بسته‌را

به‌دست می‌دهد. تعریف بالا برای واگرایی نشان می‌دهد که واگرایی را می‌توان به معنی حد قدرت چشمه در واحد حجم یا چگالی چشمهٔ یك شارهٔ تراکم‌ناپذیر در نظر گرفت.

اکنون می‌توانیم قضیهٔ فوق‌العاده مهمی را درمورد واگرایی بیان و اثبات کنیم.

قضیهٔ واگرایی. انتگرال واگرایی یك بردار در حجم V برابر است باانتگرال سطحی مؤلفهٔ قائم آن بردار روی سطحی که V را محصور می‌کند؛ یعنی

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F}\, dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, da$$

حجم موردنظر را به‌تعداد بسیارزیادی سلول کوچك تقسیم می‌کنیم. فرض کنید حجم سلول iام برابر ΔV_i و به‌وسیلهٔ سطح S_i محصور شده باشد. آنگاه واضح است که

$$\sum_i \oint_{S_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, da = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, da \qquad (۳۵.۱)$$

که در آن درهرانتگرال طرف‌چپ، جهت عمودبه‌سمت خارج ازحجم موردنظر است. چون جهت به‌سمت خارج یك سلول برای سلول مجاور جهت به سمت داخل است، جمع تمام جمله‌های طرف چپ معادلهٔ (۳۵.۱) صفر می‌شود (مگر آن جمله هایی که از سطح S به وجود می‌آیند) و معادلهٔ (۳۵.۱) دراساس ثابت می‌شود. اکنون برای اثبات قضیهٔ واگرایی تعداد سلولها را به‌بینهایت میل می‌دهیم به‌طوری که حجم هرسلول به‌سمت صفر میل کند

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, da = \lim_{\Delta V_i \to 0} \sum_i \left\{ \frac{1}{\Delta V_i} \oint_{S_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, da \right\} \Delta V_i \qquad (۳۶.۱)$$

درحد، جمع‌روی i به‌انتگرال روی حجم V تبدیل می‌شود و نسبت انتگرال سطحی روی S_i به ΔV_i به‌واگرایی $\mathbf{F}$ تبدیل خواهد شد. بنابراین

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, da = \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} \cdot dv \qquad (۳۷.۱)$$

که همان قضیهٔ واگرایی است. ما از این قضیه درفرصتهای دیگری هم درتوسعهٔ جنبه‌های نظری الکتریسیته و مغناطیس و هم به هنگام محاسبهٔ انتگرالها استفاده خواهیم کرد.

۶.۱ تاو

سومین عملگر دیفرانسیلی برداری جالب توجه تاو است. تاو یك بردار را، که به‌صورت

$\operatorname{curl}\mathbf{F}$ نوشته می‌شود، چنین تعریف می‌کنند

تاو هر بردار عبارت است از حد نسبت انتگرال سطحی ضرب برداری آن بردار در بردار یکهٔ عمود برسطح بسته (درجهت خارج آن سطح)، به حجم محصور به‌وسیلهٔ آن سطح، وقتی‌که حجم به‌سمت صفر میل‌کند؛ یعنی

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_S \mathbf{n}\times\mathbf{F}\,da \qquad (۳۸.۱)$$

این تعریف و تعریف واگرایی کاملا به‌هم شبیه‌اند، با این تفاوت که به جای ضرب نرده‌ای بردار در بردار یکهٔ عمود برسطح در جهت خارج، از ضرب برداری استفاده شده است. غیراز این‌مورد، از هرجهت دیگری این دوتعریف یکسان‌اند. تعریف متفاوت ولی هم‌ارز دیگری از تاو وجود داردکه بیشترمفید است. این تعریف به‌صورت زیراست

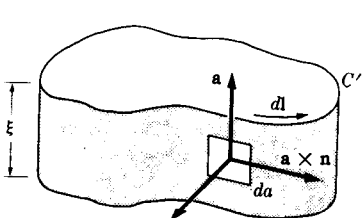
مؤلفهٔ $\operatorname{curl}\mathbf{F}$ در راستای بردار یکهٔ $\mathbf{a}$ برابر است با حد انتگرال خطی در واحد سطح هنگامی‌که سطح محصور به خط (که بر $\mathbf{a}$ عمود است) به‌سمت صفر میل‌کند؛ یعنی

$$\mathbf{a}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{F}=\lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} \qquad (۳۹.۱)$$

که درآن منحنی C که مرز سطح S است در صفحهٔ عمود بر $\mathbf{a}$ قرار دارد. همان‌طورکه در شکل ۶.۱ دیده می‌شود، باانتخاب منحنی تخت C و حجمی که دراثر تغییر مکان این منحنی در فاصلهٔ ξ در راستای عمود برصفحهٔ خودش به‌وجود می‌آید، می‌توان به‌راحتی نشان دادکه دو تعریف بالا هم‌ارزند. اگر $\mathbf{a}$ براین صفحه عمود باشد، از ضرب نرده‌ای $\mathbf{a}$ در تعریف اول تاو، معادلهٔ (۳۸.۱) به‌دست می‌آید

$$\mathbf{a}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{F}=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\times\mathbf{F}\,da \qquad (۴۰.۱)$$

چون $\mathbf{a}$ با عمود برتمام سطوح مرزی، بجز سطح نوار باریك محصور میان منحنیهای C و C'، موازی است فقط انتگرال روی سطح اخیر به‌محاسبه نیازدارد. توجه‌کنیدکه‌برای



شکل ۶.۱ حجمی که دراثر تغییرمکان منحنی C درراستای‌بردار یکهٔ عمودش، $\mathbf{a}$، به‌وجود می‌آید.

این‌سطح $\mathbf{a}\times\mathbf{n}\,da$ درست برابراست با $\xi\,d\mathbf{l}$، که در آن $d\mathbf{l}$ تغییرمکان بی‌نهایت کوچکی روی منحنی C است. علاوه براین، چون $V=\xi S$، بنابراین، حد انتگرال حجمی درست برابراست با

$$\mathbf{a}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{F}=\lim_{V\to 0}\frac{1}{\xi S}\oint \xi\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}$$

که با حذف ξها این رابطه به صورت تعریف دوم تاو درمی‌آید. این هم‌ارزی را می‌توان بدون استفاده از حجم خاصی که دراینجا به‌کار بردیم نیز نشان داد، اما در این صورت بسیاری از سادگی راه حل بالا ازبین خواهد رفت.

صورتهای مختلف تاو در دستگاههای مختصات مختلف را می‌توان با روشی خیلی شبیه به‌همان روشی که در مورد واگرایی به‌کار بردیم محاسبه کرد. در دستگاه مختصات قائم راحت‌تر است که ازحجم $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ استفاده کنیم. برای مؤلفهٔ x تاو فقط سطوح عمودبرمحورهای y و z دخالت دارند. بایادآوری $\mathbf{j}\times\mathbf{k}=-\mathbf{k}\times\mathbf{j}=\mathbf{i}$، جمله‌های غیرصفرمؤلفهٔ x تاو از سطوح مکعب مستطیل چنین نتیجه می‌دهند

$$(\operatorname{curl}\mathbf{F})_x=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\{[-F_y(x,\,y,\,z+\Delta z)+F_y(x,\,y,\,z)]\,\Delta x\,\Delta y$$
$$+[F_z(x,\,y+\Delta y,\,z)-F_z(x,\,y,\,z)]\,\Delta x\,\Delta z\}$$
$$(۴۱.۱)$$

با استفاده از بسط سری تایلور و محاسبهٔ حد، مؤلفهٔ x تاو به‌دست می‌آید

$$(\operatorname{curl}\mathbf{F})_x=\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\qquad(۴۲.۱)$$

مؤلفه‌های y و x درست به‌همین ترتیب محاسبه می‌شوند

$$(\operatorname{curl}\mathbf{F})_y=\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\quad،\quad(\operatorname{curl}\mathbf{F})_z=\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\qquad(۴۳.۱)$$

تاودرمختصات قائم برابربسط دترمینان سه در سهٔ زیراست. باتوجه به‌این موضوع، شکل تاو درمختصات قائم را می‌توانیم به‌راحتی به‌خاطر بسپریم

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}\qquad(۴۴.۱)$$

مسئلهٔ پیدا کردن شکل تاو در سایر دستگاههای مختصات فقط اندکی پیچیده‌تر است و آن را به عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم.

مانند قضیهٔ واگرایی، دراینجا نیز به قضیهٔ مفید ومهمی درمورد تاو برمی‌خوریم که به قضیهٔ استوکس معروف است.

قضیهٔ استوکس. انتگرال خطی یك بردار روی یك منحنی بسته برابر است با انتگرال سطحی مؤلفهٔ قائم تاو آن بردار روی هر سطحی که توسط این منحنی محصور شده باشد؛ یعنی

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}=\int_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,da \qquad (۴۵.۱)$$

که درآن C منحنی بستهٔ پیرامون سطح S است. اثبات این قضیه‌کاملا شبیه‌است به‌اثبات قضیهٔ واگرایی. سطح S را به تعداد زیادی سلول تقسیم می‌کنیم. مساحت سلول iام را ΔS_i، و منحنی محصورکنندهٔ آن را C_i می‌نامیم. چون همهٔ این منحنیها را باید در یك جهت دور زد، واضح است که جمع کل انتگرالهای خطی روی C_iها درست معادل‌است با انتگرال خطی روی منحنی مرزی اصلی، و سایر مقادیر با همدیگر حذف می‌شوند. بنابراین

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}=\sum_i \oint_{C_i} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}$$

آنچه باقی می‌ماند تعیین حد است وقتی که تعداد سلولها نامتناهی شود به‌نحوی که سطح هرسلول به سمت صفر میل کند. نتیجهٔ فرایند تعیین حد به صورت زیراست

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}=\lim_{\Delta S_i\to 0}\sum_i \frac{1}{\Delta S_i}\oint_{C_i}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}\,\Delta S_i$$

$$=\int_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,da$$

که همان قضیهٔ استوکس است. این قضیه، مانند قضیهٔ واگرایی، هم در توسعهٔ نظریهٔ الکترومغناطیس مفید است و هم در محاسبهٔ انتگرالها به‌کار می‌آید. لازم به‌تذکر است که قضایای واگرایی و استوکس، هردو، اساساً انتگرال‌گیری پاره‌ای هستند.

۷.۱ عملگر دیفرانسیلی برداری ∇

اکنون برای سه‌نوع مشتق‌گیری برداری، یعنی شیب، واگرایی، و تاو ــ که دربارهٔ آنها

بحث کردیم، نماد گذاری دیگری را معرفی می کنیم. این نماد جدید ، عملگر دیفرانسیلی برداری دل نام دارد و در دستگاه مختصات قائم به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (۴۶.۱)$$

دل، از یك طرف عملگر دیفرانسیلی است، زیرا تنها در جلو تابعی از (x، y، و z) که برروی‌آن عمل مشتق گیری انجام می‌شود قرارمی‌گیرد و از طرف دیگر بردار است زیرا ازقوانین جبربرداری پیروی می کند.[1] معادله‌های (۲۰.۱)، (۳۱.۱)، و (۴۴.۱)، برحسب دل، به‌صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\text{grad} = \nabla$$

$$\nabla\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \qquad [۲۰.۱]$$

$$\text{div} = \nabla\cdot$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \qquad [۳۱.۱]$$

$$\text{curl} = \nabla\times$$

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad [۴۴.۱]$$

عملیاتی که با دل بیان می‌شوند خود به انتخاب دستگاه مختصات خاصی بستگی ندارند. هراتحادی که با استفاده از نمـایش دکارتی قابل اثبات باشد، مستقل از دستگاه مختصات برقرار است . دل را می‌توان در دستگاه مختصات متعـامد و غیردکارتی (منحنی‌الـخط) به‌صورتی مشابه با معادلهٔ (۴۶.۱) با عناصر فاصلهٔ مناسب بیان کرد ، اما باید توجه کرد که بردارهای یکه در چنین دستگاه مختصاتی خود تابعی از مکان‌اند و باید از آنها مشتق گرفته شود.[2] قضیه‌های انتگرالی مهم، برطبق معادلات (۱۹.۱)، (۴۵.۱)، و (۳۷.۱)،

---

۱. همچنـان که در پیوست ۱ نشان داده شده است ، دل از لحاظ خواص تبدیل نیز بردار محسوب می‌شود.

۲. برای یك بحث مقدماتی دراین باره رجوع کنید به:

H. T. Yang, *Am. J. Phys*, **40**, 1972, 109.

عبارت‌اند از

$$\int_{aC}^{b} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = \int_{a}^{b} d\varphi = \varphi\Big|_{a}^{b} = \varphi_b - \varphi_a \qquad (۴۷.۱)$$

$$\int_{S} \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,da = \oint_{C} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} \qquad [۴۵.۱]$$

$$\int_{V} \nabla\cdot\mathbf{F}\,dv = \oint_{S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,da \qquad [۳۷.۱]$$

ازاین معادلات، انتگرال مشتق یك تابع در یك ناحیهٔ n بعدی، برحسب مقادیر خود تابع در مرز $(n-۱)$ بعدی آن ناحیه، به‌ازای n برابر با ۱، ۲، و ۳، به‌دست می‌آید. چون عملگر دل از قواعد برداری پیروی می‌کند، بهتر است آن را درمحاسباتی که شامل آنالیز برداری‌اند به‌کار ببریم، وازاین به‌بعد شیب، واگرایی، وتاو رابرحسب ∇ بیان می‌کنیم. همچنین‌لازم به‌تذکر است که ∇ یك عملگر خطی است واگر a و b کمیتهای نرده‌ای ثابت باشند، داریم

$$\nabla(a\varphi+b\psi) = a\nabla\varphi + b\nabla\psi$$

$$\nabla\cdot(a\mathbf{F}+b\mathbf{G}) = a\nabla\cdot\mathbf{F} + b\nabla\cdot\mathbf{G}$$

$$\nabla\times(a\mathbf{F}+b\mathbf{G}) = a\nabla\times\mathbf{F} + b\nabla\times\mathbf{G}$$

۸.۱ عملیات تکمیلی

عملیات مربوط به‌تعیین‌شیب، واگرایی، وتاوازمیدانهای مناسب‌را می‌توان به‌طورتکراری انجام داد. به‌عنوان مثال می‌توانیم واگرایی‌شیب یك میدان نرده‌ای را حساب‌کنیم. نتیجهٔ بعضی از این عملیات تکراری برروی میدانهای خوشرفتارصفراست. یکی از این عملیات آنقدر اهمیت داردکه نام خاصی برای آن انتخاب شده است ؛ بقیه را برحسب عملیات ساده‌تری می‌توان بیان‌کرد. یك عملیات دوگانهٔ مهم عبارت است از واگرایی شیب یك میدان نرده‌ای. این عملگر مرکب به عملگرلاپلاسی معروف است ومعمولاآن‌را بانماد $\nabla^۲$ نمایش می‌دهند

$$\nabla\cdot\nabla = \nabla^۲$$

در مختصات قائم داریم

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \qquad (۴۸.۱)$$

این عملگر در مبحث الکتروستاتیك بسیار پراهمیت است ودرفصل ۳ به‌تفصیل دربارهٔ آن صحبت خواهیم کرد.

تاو شیب هرمیدان نرده‌ای صفر است. صحت این حکم را می‌توان با نوشتن آن در دستگاه مختصات قائم به‌راحتی تحقیق کرد. اگرمیدان نرده‌ای‌را با φ نمایش دهیم، آنگاه

$$\nabla\times(\nabla\varphi)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z}\end{vmatrix}=\mathbf{i}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial y}\right)+\ldots=0 \qquad (۴۹.۱)$$

که درستی حکم اصلی را اثبات می‌کند. برحسب نمادگذاری عملگرها

$$\nabla\times\nabla=0$$

واگرایی هرتاو نیز برابر صفر است. درستی این‌مطلب دردستگاه مختصات قائم بانوشتن

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)+\ldots=0 \qquad (۵۰.۱)$$

یا

$$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{F}=\nabla\times\nabla\cdot\mathbf{F}=0$$

مستقیماً ثابت می‌شود.عملیات‌مرتبهٔ دوم دیگری نیز امکان‌پذیراست و آن‌محاسبهٔ‌تاوِ تاو یك میدان برداری‌است. به‌عنوان تمرین می‌توانید نشان دهیدکه در دستگاه مختصات قائم

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})-\nabla^2\mathbf{F} \qquad (۵۱.۱)$$

که درآن لاپلاسی هربردار، برداری‌است‌که مؤلفه‌های قائم آن لاپلاسیهای مؤلفه‌های قائم بردار اصلی‌اند. در هردستگاه مختصاتی غیراز مختصات قائم، لاپلاسی یك بردار با معادلهٔ (۵۱.۱) تعریف می‌شود.

راه دیگری که به‌کمك آن می‌توان‌کاربرد عملگرهای دیفرانسیلی برداری را تعمیم داد استفاده‌ازآنها درضربهای مختلف دوبرداروکمیتهای نرده‌ای‌است. ترکیب‌عملگرهای دیفرانسیلی‌وحاصل‌ضربها به‌شش صورت مختلف امکان‌پذیراست، که درجدول ۱.۱ آمده‌اند. این اتحادها را می‌توان در مختصات قائم به‌راحتی اثبات‌کرد و این خود تضمینی خواهد

جدول ۱.۱ اتحادهای دیفرانسیلی برداری

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi \tag{۱.۱.۱}$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0 \tag{۲.۱.۱}$$

$$\nabla \times \nabla\varphi = 0 \tag{۳.۱.۱}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F} \tag{۴.۱.۱}$$

$$\nabla(\varphi\psi) = (\nabla\varphi)\psi + \varphi\nabla\psi \tag{۵.۱.۱}$$

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) \tag{۶.۱.۱}$$

$$\nabla \cdot (\varphi\mathbf{F}) = (\nabla\varphi) \cdot \mathbf{F} + \varphi\nabla \cdot \mathbf{F} \tag{۷.۱.۱}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F} \tag{۸.۱.۱}$$

$$\nabla \times (\varphi\mathbf{F}) = (\nabla\varphi) \times \mathbf{F} + \varphi\nabla \times \mathbf{F} \tag{۹.۱.۱}$$

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot G)\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} + (G \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} \tag{۱۰.۱.۱}$$

بود برای صحت اعتبار آنها در هردستگاه مختصات دیگر. با کاربرد مکرر اتحادهای جدول ۱.۱، مشتق ضرب بیش ازدوتابع، یا مشتق درجهٔ دوم یا بالاترهرتابع را می‌توان محاسبه‌کرد. بنابراین، جدول ۱.۱ کامل است. از روی قواعد جبر برداری و مشتق‌گیری عادی، فرمولهای این جدول را می‌توان به‌راحتی به‌خاطر سپرد. تنها مورد ابهام ممکن است در(۶.۱.۱) باشدکه درآن $\mathbf{F} \cdot \nabla$ ظاهر می‌شود (نه $\nabla \cdot \mathbf{F}$).

چند نوع تابع خاص غالباً در نظریهٔ الکترومغناطیس به‌کار می‌روند و در اینجا مشتقهای مختلف آنها را بررسی می‌کنیم. برای تابع $\mathbf{F} = \mathbf{r}$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{r} &= 3 \\ \nabla \times \mathbf{r} &= 0 \\ \mathbf{G} \cdot \nabla\mathbf{r} &= \mathbf{G} \\ \nabla^2\mathbf{r} &= 0 \end{aligned} \tag{۵.۲.۱}$$

برای تابعی که تنها به‌فاصلهٔ $r=|\mathbf{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ بستگی دارد

$$\varphi(r) \quad \text{یا} \quad \mathbf{F}(r): \nabla=\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{d}{dr} \tag{۵۳.۱}$$

برای تابعی که به‌شناسهٔ $\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}$ بستگی دارد، و درآن $\mathbf{A}$ بردار ثابتی است

$$\nabla=\mathbf{A}\frac{d}{d(\mathbf{A}\cdot\mathbf{r})}: \mathbf{F}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}) \quad \text{یا} \quad \varphi(\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}) \quad \text{برای} \tag{۵۴.۱}$$

برای تابعی که به شناسهٔ $\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ بستگی دارد، و در آن $\mathbf{r}'$ به عنوان یك مبدأ ثابت تلقی می‌شود

$$\nabla=\nabla_R \tag{۵۵.۱}$$

$$\nabla_R=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial X}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial Y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial Z}$$

که درآن $\mathbf{R}=X\mathbf{i}+Y\mathbf{j}+Z\mathbf{k}$. اگر $\mathbf{r}$ به‌جای $\mathbf{r}'$ به‌عنوان مبدأ ثابت درنظر گرفته‌شود

$$\nabla=-\nabla' \tag{۵۶.۱}$$

که درآن

$$\nabla'=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x'}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y'}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z'}$$

چندین امکان برای بسط قضیهٔ واگرایی وقضیهٔ استوکس وجود دارد، جالبترین آنها قضیهٔ گرین است که به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\int_V (\psi\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\psi)\,dv=\oint_S(\psi\nabla\varphi-\varphi\nabla\psi)\cdot\mathbf{n}\,da \tag{۵۷.۱}$$

این قضیه نتیجهٔ کاربرد قضیهٔ واگرایی درمورد بردار زیر است

$$\mathbf{F}=\psi\nabla\varphi-\varphi\nabla\psi$$

باقراردادن $\mathbf{F}$ در قضیهٔ واگرایی، به‌دست می‌آوریم

$$\int_V \nabla\cdot[\psi\nabla\varphi-\varphi\nabla\psi]\,dv=\oint_S(\psi\nabla\varphi-\varphi\nabla\psi)\cdot\mathbf{n}\,da \tag{۵۸.۱}$$

بااستفاده از اتحاد مربوط به‌قضیهٔ واگرایی برای ضرب یك کمیت نرده‌ای در یك بردار (جدول ۱.۱) نتیجه می‌شود

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \varphi) - \nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) = \psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi \qquad (۵۹.۱)$$

از ترکیب روابط (۵۸.۱) و (۵۹.۱) قضیهٔ گرین به‌دست می‌آید. چند قضیهٔ انتگرالی دیگردرجدول ۲.۱ آمده است.

جدول ۲.۱ قضیه‌های انتگرالی برداری

$$\int_s \mathbf{n} \times \nabla \varphi \, da = \oint_c \varphi \, d\mathbf{l} \qquad (۱.۲.۱)$$

$$\int_v \nabla \varphi \, dv = \oint_s \varphi \mathbf{n} \, da \qquad (۲.۲.۱)$$

$$\int_v \nabla \times \mathbf{F} \, dv = \oint_s \mathbf{n} \times \mathbf{F} \, da \qquad (۳.۲.۱)$$

$$\int_v (\nabla \cdot \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} \, dv = \oint_s \mathbf{F}(\mathbf{G} \cdot \mathbf{n}) \, da \qquad (۴.۲.۱)$$

دراینجا بحث کوتاه آنالیز برداری‌را به‌پایان می‌بریم. برای سهولت،اثبات بسیاری از نتایج را به صورت تمرین در پایان فصل آورده‌ایم. روش ما مبتنی برسودمندی نتایج بوده است تا دقت فوق‌العاده زیاد. آنچه راکه لازم نبوده‌است حذف کرده‌ایم.

۹.۱ خلاصهٔ مطالب

سه‌نوع مشتق‌گیری برداری مختلف شیب،واگرایی، و تاو رامی‌توان باعملگر دیفرانسیلی برداری دل، ∇، بیان‌کرد

$$\nabla \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

دل عملگری خطی است. کاربرد مکرر آن، یا کاربرد آن در حاصل‌ضرب توابع، فرمولهایی را به‌دست می‌دهد که می‌توان آنها را درمختصات قائم به‌دست آورد؛ اما این فرمولها به دستگاه مختصات بستگی ندارند. این فرمولها را می‌توان به‌کمك قواعد جبر برداری و مشتق گیری عادی به‌خاطر سپرد. به خاطر سپردن مشتق چند تابع خاص سودمند است. مهمترین قضایای انتگرالی‌درمورد مشتقها عبارت‌اند از

$$\int_{a_C}^{b}\nabla\varphi\cdot d\mathbf{l}=\varphi\Big|_a^b$$

$$\int_S\nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,da=\oint_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}\qquad\text{(قضیهٔ استوکس)}$$

$$\int_V\nabla\cdot\mathbf{F}\,dv=\oint_S\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,da\qquad\text{(قضیهٔ واگرایی)}$$

اینها تعمیمهایی از قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال‌اند.

مسائل

۱.۱ بردارهای زیر ازمبدأ مختصات تا نقاط A، B، C، و D داده شده‌اند

$$\mathbf{A}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B}=۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}$$

$$\mathbf{C}=۳\mathbf{i}+۵\mathbf{j}-۲\mathbf{k}$$

$$\mathbf{D}=\mathbf{k}-\mathbf{j}$$

نشان دهید که خطوط $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ موازی‌اند ونسبت طول آنها را پیدا کنید.

۲.۱ ثابت کنید که بردارهای زیر برهم عمودند

$$\mathbf{A}=\mathbf{i}+۴\mathbf{j}+۳\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B}=۴\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۴\mathbf{k}$$

۳.۱ نشان دهید که بردارهای زیر اضلاع یك مثلث قائم‌الزاویه هستند

$$\mathbf{A}=۲\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{i}-۳\mathbf{j}-۵\mathbf{k}$$

$$\mathbf{C}=۳\mathbf{i}-۴\mathbf{j}-۴\mathbf{k}$$

۴.۱ با به‌توان ۲ رساندن طرفین معادلهٔ زیر و تعمیم نتیجهٔ حاصل «قانون کسینوسها» را ثابت کنید

$$\mathbf{A}=\mathbf{B}-\mathbf{C}$$

۵.۱ نشان دهید که

$$\mathbf{A}=\mathbf{i}\cos\alpha+\mathbf{j}\sin\alpha$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{i}\cos\beta+\mathbf{j}\sin\beta$$

بردارهای یکه‌ای هستند که درصفحهٔ xy قراردارند وبامحور x زوایای α و β می‌سازند. به‌کمك ضرب نرده‌ای فرمول مثلثاتی $\cos(\alpha-\beta)$ را به‌دست آورید.

۶.۱ اگر $\mathbf{A}$ برداری ثابت و $\mathbf{r}$ برداری از مبدأ مختصات تا نقطهٔ (x, y, z) باشد، نشان دهید که رابطهٔ زیر معادلهٔ یك صفحه است

$$(\mathbf{r}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{A}=۰$$

۷.۱ با تعریفی که از $\mathbf{A}$ و $\mathbf{r}$ درمسئلهٔ ۶.۱ داده شد، ثابت کنید که رابطهٔ زیر معادلهٔ یك کره است

$$(\mathbf{r}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{r}=۰$$

۸.۱ بااستفاده ازضرب نرده‌ای، کسینوس زاویهٔ میان قطرمکعب با یکی از اضلاع آن را پیدا کنید.

۹.۱ بااستفاده‌از ضرب برداری برای معادلهٔ برداری $\mathbf{A}+\mathbf{C}=\mathbf{B}$ ، قانون سینوسها را درمثلث ثابت کنید.

۱۰.۱ اگر $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، $\mathbf{C}$ بردارهایی از مبدأ مختصات تا نقاط A، B، C باشند ، نشان دهید که عبارت زیر برصفحهٔ ABC عمود است

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})+(\mathbf{B}\times\mathbf{C})+(\mathbf{C}\times\mathbf{A})$$

۱۱.۱ با جا نشانی مستقیم ثابت کنید که معادلهٔ (۱۵.۱) جواب معادلهٔ (۱۴.۱) است. [توجه کنید که معادلهٔ (۱۴.۱) مستلزم عمود بودن $\mathbf{C}$ بر $\mathbf{A}$ است.]

۱۲.۱ ثابت کنید که هر گاه

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=0$$

باشد، بردارهای $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، و $\mathbf{C}$ نسبت به‌هم استقلال خطی ندارند. آیا بردارهای زیر به‌طور خطی از یکدیگر مستقل‌اند؟

$$\mathbf{A}=\mathbf{j}+3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{i}-2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{C}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

۱۳.۱ نشان دهید که بردار یکهٔ عمود برسطح $\varphi(\mathbf{r})=\text{const.}$ عبارت است از

$$\mathbf{n}=\nabla\varphi/|\nabla\varphi|$$

برای بیضیوار زیر $\mathbf{n}$ را پیدا کنید

$$\varphi=ax^2+by^2+cz^2$$

۱۴.۱ شیب φ را درمختصات استوانه‌ای، باتوجه به‌رابطهٔ $ds=dr\mathbf{a}_r+r\,d\theta\mathbf{a}_\theta+dz\mathbf{k}$ پیدا کنید. بایدتوجه داشت که معانی r و θ دراینجا با آنچه درمعادلات (۲۱.۱) و (۲۲.۱) آمده‌است متفاوت‌اند. درمختصات کروی r بزرگی بردار شعاعی ازمبدأ و θ زاویهٔ قطبی است. در مختصات استوانه‌ای r فاصلهٔ عمودی از محور استوانه و θ زاویهٔ سمت حول این محور است.

۱۵.۱ با استفاده از تعریف واگرایی رابطه‌ای برای $\nabla\cdot\mathbf{F}$ در مختصات استوانه‌ای به‌دست آورید.

۱۶.۱ واگرایی و تاو بردار زیررا به‌دست آورید

$$\mathbf{i}(x^2+yz)+\mathbf{j}(y^2+zx)+\mathbf{k}(z^2+xy)$$

۱۷.۱ آیا $\nabla\times\mathbf{F}$ برای هرتابع برداری $\mathbf{F}$ الزاماً بر $\mathbf{F}$ عمود است؟ توضیح دهید.

۱۸.۱ برای دوتابع نرده‌ای φ و ψ ثابت کنید که

$$\nabla^2(\varphi\psi)=\varphi\nabla^2\psi+\psi\nabla^2\varphi+2\nabla\varphi\cdot\nabla\psi$$

۱۹.۱ اگر $\mathbf{r}$ بردار ازمبدأ مختصات تا نقطهٔ (x, y, z) باشد، روابط زیررا ثابت کنید

$$\nabla\cdot\mathbf{r}=3 \qquad \nabla\times\mathbf{r}=0 \qquad (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{r}=\mathbf{u}$$

[توجه : $\mathbf{u}$ می‌تواند هربرداری باشد.]

۲۰.۱ اگر $\mathbf{A}$ برداری ثابت باشد نشان دهید که

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{r})=\mathbf{A}$$

۲۱.۱ اتحادهای (۷.۱.۱) و (۹.۱.۱) از جدول ۱.۱ را ثابت کنید.

۲۲.۱ اگر r بزرگی بردار از مبدأ تا نقطهٔ (x, y, z)، و $f(r)$ یك تابع اختیاری برحسب r باشد، ثابت کنید که

$$\nabla f(r)=\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{df}{dr}$$

۲۳.۱ ثابت کنید که

$$\nabla\cdot\mathbf{F}(r)=\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\frac{d\mathbf{F}}{dr}$$

۲۴.۱ ثابت کنید که اگر $\xi=\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}$ باشد داریم

$$\nabla\varphi(\xi)=\mathbf{A}\frac{d\varphi}{d\xi}$$

۲۵.۱ صحت معادلهٔ (۵.۱.۱) را درمختصات قائم تحقیق کنید. دراین مختصات $\nabla^2\mathbf{F}$ به صورتی است که درمتن کتاب تعریف شده است.

۲۶.۱ اتحادهای (۲.۲.۱) و (۴.۲.۱) در جدول ۲.۱ را ثابت کنید. (راهنمایی: از قضیهٔ واگرایی و یك یا چند اتحاد ازجدول ۱.۱ استفاده کنید.)

۲

الکتروستاتیك

۱.۲ بار الکتریکی

الکتریسیته‌دارشدن اجسام براثر مالش اولین بـار در دوران باستان مشاهده شد و تاریخ دقیق آن معلوم نیست؛ اما این یك تجربهٔ عادی است که وقتی یك شانهٔ کائوچویی سخت را با پارچهٔ پشمی مالش دهیم شانه ریزه‌های کوچك کاغذ را جذب کند. در اثرمالش این دو جسم به یکدیگر (به عبارت دقیقتر، در اثر ایجاد تماس نزدیك میان این دو جسم) هم کائوچو و هم پشم خاصیت جدیدی پیدا می‌کـنند؛ یعنی باردار می‌شوند. از این آزمایش برای معرفی مفهوم بار الکتریکی استفاده می‌شود. اما، در این فرایند بارآفریده نمی‌شود، بارکل، یا مجموع بارهای دو جسم هنـوز همان‌قدر است که پیش‌از الکتریسیته‌دار شدن بوده‌است. اکنون بامطالعهٔ فیزیك نوین می‌دانیم که ذره‌های باردار میکروسکوپی ، یعنی الکترونها، از پشم به‌کائوچو منتقل می‌شوند، پشم‌را به‌طورمثبت وشانهٔ‌کائوچویی‌را به‌طور منفی باردار می‌کنند.

بار، یکی از خواص اساسی وسرشتی ذره‌های بنیادی سازندهٔ ماده است. در واقع، تمام مواد از پروتون، نوترون و الکترون درست شده‌اند و دو تا از این ذره‌ها باردارند. گرچه درمقیاس میکروسکوپی، مـاده از تعداد بسیار زیادی ذرهٔ باردار درست شده است ولی در مشاهدات ماکروسکوپی نیروهای الکتریکی قوی وابسته به‌این ذره‌هاکاملا از نظر پنهان است. دلیل این مطلب آن است که دونوع بار مثبت ومنفی وجود دارد و دریك قطعه مادهٔ معمولی ازهردونوع تقریباً به‌یك‌اندازه‌موجوداست. بنابراین، ازدیدگاه ماکروسکوپی لفظ بار به بار خالص یا بار اضافی اطلاق می‌شود. وقتی می‌گوییم جسمی باردار است، منظور ما این است که جسم بار اضافی ، یعنی الکترون (بار منفی) یا پروتون (بار مثبت)

اضافی دارد. دراین فصل وفصلهای بعد، معمولا بارالکتریکی را با نماد q نشان می‌دهیم.

مشاهدات تجربی نشان می‌دهند که بار نه به‌وجود می‌آید و نه نابود می‌شود. بارکل دستگاه بسته تغییر نمی‌کند. از دیدگاه ماکروسکوپی بارها را می‌توان به راههای مختلف دسته‌بندی وترکیب کرد، اما به‌هرحال می‌توان حکم کرد که در یك دستگاه بسته بارخالص بقا دارد.

۲.۲ قانون کولن

در اواخر قرن هجدهم علوم تجربی به‌درجه‌ای از رشد و پیشرفت رسیده بود که بتوان مشاهدات دقیقی دربارهٔ نیروهای‌میان بارهای الکتریکی به‌عمل‌آورد. نتایج این مشاهدات را، که در آن زمان فوق‌العاده مجادله‌آمیز بودند، می‌توان به صورت زیرخلاصه کرد: (الف) دونوع، و فقط دونوع بارالکتریکی وجود دارد که اکنون به‌بارهای مثبت و منفی معروف‌اند. (ب) دو بار نقطه‌ای نیروهایی بریکدیگر وارد می‌کنند؛ خط اثر این نیروها در امتداد خطی واقع است که آن دو بار را به‌هم وصل می‌کند و بزرگی این نیروها با عکس مجذور فاصلهٔ آنها متناسب است. (ج) این‌نیروها با حاصل‌ضرب بارهانیزمتناسب، برای بارهای همنام دافعه، وبرای بارهای ناهمنام جاذبه‌اند. دو حکم آخر، به‌اضافهٔ حکم اول به‌عنوان مقدمه، به افتخار شارل آگوستن کولن (۱۱۱۵–۱۱۸۵/۱۷۳۶–۱۸۰۶) که از پیشروان الکتریسیته در قرن هجدهم بود، به‌نام قانون کولن معروف‌اند. قانون کولن برای بارهای نقطه‌ای را می‌توان به‌کمك نمادهای برداری فصل اول به‌صورت زیر فرمولبندی کرد

$$\mathbf{F}_1 = C\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \qquad (۱.۲)$$

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

که درآن $\mathbf{F}_1$ نیروی وارد بربار q_1، $\mathbf{r}_{12}$ بردار از q_2 به q_1، r_{12} بزرگی این بردار، و C ضریب ثابت تناسب است که دربارهٔ آن بعداً به‌تفصیل صحبت خواهد شد. درمعادلهٔ (۱.۲) با تقسیم بردار $\mathbf{r}_{12}$ بر بزرگیش بردار یکه‌ای در جهت $\mathbf{r}_{12}$ درست کرده‌ایم که به‌کرات ازآن استفاده خواهیم کرد. اگر بخواهیم نیروی وارد بر q_2 را به‌دست آوریم فقط لازم است شاخصهای پایین ۱ را به ۲ و ۲ را به ۱ تبدیل کنیم. درك این روش نمادگذاری‌مهم‌است، زیرا درآینده می‌توانیم به‌کمك آن متغیرهای میدان وچشمه‌را به‌طور جداگانه دنبال کنیم.

قانون کولن درمورد بارهای نقطه‌ای به‌کار می‌رود. از لحاظ معنای ماکروسکوپی «بار نقطه‌ای» باری است که ابعاد فضایی آن درمقایسه باهرطول دیگری درمسئله موردنظر بسیار کوچك‌است و ما نیز «بارنقطه‌ای» را به‌همین معنی به‌کارمی‌بریم. تاآنجاکه می‌دانیم،

قانون کولن درمورد برهم‌کنشهای ذرات بنیادی، مانند پروتونها و الکترونها نیز صادق است. معادلهٔ (۱.۲) درمورد دفع الکتروستاتیکی میان هسته‌ها درفواصل بیش‌از 10^{-14}m نیز صدق می‌کند، درفواصل کمتر نیروهای پرقدرت و کوتاه‌برد هسته‌ای عمل می‌کنند.

معادلهٔ (۱.۲) یك قانون تجربی است. باوجود این شواهد نظری وتجربی هردو نشان می‌دهند که قانون عکس مجذور فاصله دقیق است، یعنی نمای r_{12} دقیقاً ۲ است. در یك تجربهٔ غیرمستقیم[1] معلوم شده‌است که نمای r_{12} با ۲ نمی‌تواند بیش‌از یك در 10^{15} اختلاف داشته باشد.

مقدار ثابت C درمعادلهٔ (۱.۲) به‌بحث مختصری نیازمند است، زیرا دستگاه یکاها توسط آن مشخص می‌شود. فرض‌کنید یکاهای نیرو و طول همانهایی هستندکه به یکی از دستگاههای متداول در مکانیك تعلق دارند؛ در اینجا مستقیمترین روش آن است که C را برابر با ۱ قرار دهیم و یکای بار الکتریکی را طوری انتخاب کنیم که معادلهٔ (۱.۲) با تجربه سازگار باشد. این روشی است‌که در دستگاه یکاهای گاؤسی به‌کار می‌رود. از روشهای دیگری نیزمی‌توان استفاده‌کرد واحتمالا مزایایی هم‌خواهند داشت؛ مثلامی‌توان یکای بار را از قبل مشخص کرد. در ۱۹۰۱/۱۲۸۰ جورجی نشان دادکه تمام یکاهای معمولی الکتریکی نظیر آمپر، ولت، اهم، هنری، ومانند آنها را می‌توان با یکی ازدستگاه یکاهای مکانیکی (مثلا با دستگاه mks یا متر ـ کیلوگرم ـ ثانیه) ترکیب کرد و دستگاه یکاهایی برای کلیهٔ مسائل الکتریکی و مغناطیسی تشکیل داد. مزیت این دستگاه‌آن است که نتایج محاسبات مدارهای‌الکتریکی برحسب همان‌یکاهای‌الکتریکی‌که درآزمایشگاهها به‌کار می‌روند به‌دست می‌آید. دراین‌کتاب ما دستگاه یکاهای گویا شدهٔ mks یا دستگاه جورجی را به‌آن صورتی‌که به نام SI (دستگاه بین‌المللی) معروف است به‌کار خواهیم برد. چون در این دستگاه q برحسب کولن (C)، $\mathbf{r}$ برحسب متر، و $\mathbf{F}$ برحسب نیوتون (N) اندازه‌گیری می‌شود واضح است‌که C باید ابعاد $m \cdot N^{2}/C^{-2}$ را داشته باشد. اندازهٔ یکای بار، یعنی کولن، با آزمایشهای مغناطیسی تعیین می‌شود؛ با توجه به‌اندازهٔ کولن لازم است‌که

$$C = ۸٫۹۸۷۴ \times ۱۰^{۹}\, N \cdot m^{۲}/C^{۲}$$

باشد. برای‌آنکه بعضی ازمعادلات دیگرساده شوند به‌جای ثابت C مقدار به‌ظاهرپیچیده $1/4\pi\varepsilon_{0}$ را قرار می‌دهیم. ثابت ε_{0} که گذردهی خلأ نام داردکراراً در معادلات ظاهر خواهد شد. مقدار عددی‌آن برابر است با $۸٫۸۵۴ \times ۱۰^{-۱۲}\, C^{۲}/N \cdot m^{۲}$. درپیوست

---

1. E. R. Williams, J. E. Faller, and H. A. Hill: 1971, *Phys. Rev. Lett*, **26**, 721.

قبلا نیز آزمایشهای مشابهی انجام شده است. ماکسول نمای ۲ را با تقریب ۱ در ۲۰۰۰۰ محرز ساخت.

۲ ما تعاریف کولن، آمپر، تراوایی، وگذردهی خلأ را به‌صورتی منطقی به‌یکدیگر و به سرعت نور مربوط کرده‌ایم. چون فرمولبندی منطقی این تعاریف به شناخت پدیده‌های مغناطیسی و انتشار امواج الکترومغناطیسی احتیاج دارد، فعلا داخل در بحث آنها نمی‌شویم. در پیوست ۲ ما دربارهٔ دستگاه گاؤسی بحث کرده‌ایم. تا فصل ۴، هرفرمولی‌را می‌توانیم به‌راحتی با قراردادن $1/4\pi$ به‌جای ε_0 به‌فرمولی در یکاهای گاؤسی تبدیل کنیم.

اگر بیش از دو بارنقطه‌ای وجود داشته باشند، نیروهای متقابل را با به‌کار بردن مکرر معادلهٔ (۱.۲) به‌دست می‌آوریم. مخصوصاً اگردستگاهی با N بار داشته باشیم نیروی وارد بر بار iام از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\mathbf{F}_i = q_i \sum_{j\neq i}^{N} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r^3_{ij}} \qquad (۲.۲)$$

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$$

که درآن جمع سمت راست مربوط است به‌تمام بارها به‌استثنای بار iام. البته، این‌همان اصل برهمنهی نیروهاست که بنابه‌آن کل نیروی وارد بریك جسم برابر است با حاصل جمع برداری تك‌تك نیروهای وارد برآن.

برهم‌کنش یك بار نقطه‌ای با یك توزیع پیوستهٔ بار تعمیم ساده‌ای است از ایدهٔ N بار نقطه‌ای درحال برهم‌کنش. ما این پیکربندی را عمداً انتخاب می‌کنیم تا از برخی اشکالات موجود در بررسی برهم‌کنش دو توزیع بار پیوسته احترازکنیم. قبل از اینکه در این بحث بیشتر پیش برویم باید مفهوم بار پیوسته را بررسی کنیم. می‌دانیم که بار ـ الکتریکی به‌صورت مضربهایی از یك بار پایه، یعنی بارالکترون، یافت می‌شود. به‌عبارت دیگر، اگرهر بار الکتریکی‌را به‌دقت مطالعه‌کنیم معلوم می‌شود که مقدارآن مضرب درستی است از مقدار بار الکترون. درمطالعات فیزیك ماکروسکوپی، گسستگی بار هیچ اشکالی ایجاد نمی‌کند زیرا مقدار بارالکترون $1{,}6019 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ است، که مقداری است فوق‌العاده کوچك. کوچکی این واحد مبنا بدین معنی است که بارهای ماکروسکوپی بدون استثنا از تعداد فوق‌العاده زیادی بار الکترونی تشکیل شده‌اند. و این به‌نوبهٔ خود به این معناست که دریك توزیع بار ماکروسکوپی هرعنصر بسیارکوچك حجم، تعداد بسیارزیادی الکترون دارد. پس می‌توان توزیع بار رابایك تابع چگالی بار توصیف کرد که تعریف آن عبارت است ازحد بار در واحد حجم، وقتی که حجم بی‌نهایت کوچك باشد. باوجود این درکاربرد چنین تعریفی درمورد مسائل اتمی باید دقت کرد، زیرا دراین موارد فقط تعداد کمی الکترون دخالت دارند وفرایند محاسبهٔ حد بی‌معنی است. چنانچه این موارد اتمی راکنار بگذاریم، می‌توانیم فرض کنیم که هرقطعه از بار را می‌توان بینهایت مرتبه تقسیم وسپس توزیع بار را به‌کمك توابع نقطه‌ای زیر توصیف کرد:

چگالی بارحجمی که بارابطهٔ زیر

$$\rho=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta V} \qquad (۳.۲)$$

وچگالی بار سطحی که با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$\sigma=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta S}. \qquad (۴.۲)$$

ازآنچه دربارهٔ q گفته شد معلوم می‌شود که ρ و σ چگالیهای بارخالص یا باراضافی‌اند. لازم به‌یادآوری است که درمواد جامد نوعی حتی چگالی بار بسیار بزرگ ρ، تنها با تغییر چگالی موضعی الکترون به‌اندازهٔ تقریباً یك قسمت در 10^9 قسمت به‌دست می‌آید.

اگر بار در حجم V با چگالی حجمی ρ، و در روی سطح S که حجم V را محصور می‌کند با چگالی سطحی σ توزیع شده باشد آنگاه نیروی وارد از طرف این توزیع باربر بارنقطه‌ای q واقع درنقطهٔ $\mathbf{r}$ بااستفاده از معادله (۲.۲)،و پس از قراردادن $\rho_j\,dv'_j$ (یا $\sigma_j\,da'_j$) به‌جای q_j ومحاسبهٔ حد به‌دست می‌آید

$$\mathbf{F}_q=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\rho(\mathbf{r}')\,dv'+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_S\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\sigma(\mathbf{r}')\,da'. \qquad (۵.۲)$$

در این معادله متغیر $\mathbf{r}'$ برای تعیین موضع نقطه‌ای در درون توزیع بار به‌کار رفته است، یعنی این متغیر نقش نقطهٔ چشمهٔ $\mathbf{r}_j$ درمعادلهٔ (۲.۲) را به‌عهده دارد. در نظر اول ممکن است چنین به‌نظر برسد که اگرنقطهٔ $\mathbf{r}$ در داخل توزیع بار باشد اولین انتگرال معادلهٔ (۵.۲) باید واگرا شود. اما اینطور نیست؛ سهم ناحیهٔ انتگرال گیری در نزدیکی $\mathbf{r}$ قابل چشمپوشی است و در نتیجه انتگرال خوشرفتاراست (مسئلهٔ ۵.۲).

واضح است که نیروی وارد بربار q که با معادلهٔ (۵.۲) داده شده است با مقدار q متناسب‌است؛ همین‌مطلب نیزدرمورد معادلهٔ (۲.۲) صادق است. این‌نکته سبب می‌شود که ما یك میدان برداری مستقل از بار q، یعنی نیروی وارد برواحد بار، را تعریف کنیم. این میدان برداری، که به میدان الکتریکی معروف است، دربخش زیر به تفصیل بررسی می‌شود.

۳.۲ میدان الکتریکی

میدان الکتریکی در هرنقطه به‌صورت زیر تعریف می‌شود: حد نسبت نیروی وارد بربار آزمون که درآن نقطه قرارداده شود به‌اندازهٔ این بار، وقتی که مقدار بارآزمون به‌سمت صفرمیل کند. نمادمتداول برای میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ است. بانمادگذاری برداری،تعریف

$\mathbf{E}$ به‌صورت زیر است

$$\mathbf{E}=\lim_{q\to 0}\frac{\mathbf{F}_q}{q} \qquad (۶.۲)$$

در تعریف $\mathbf{E}$ عمل حدگیری به‌این دلیل منظورمی‌شود که اطمینان حاصل شود بارآزمون برتوزیع بار مولد $\mathbf{E}$ اثر نمی گذارد. مثلا، اگر بار مثبت روی سطح جسم رسانایی‌توزیع شده باشد (رسانا جسمی است که درآن باربه‌آزادی حرکت می کند)، آوردن‌بارآزمون به‌نزدیکی این رسانا موجب می‌شودکه بار به‌صورت جدیدی روی رسانا توزیع شود. اگر میدان الکتریکی را به‌کمك نسبت نیرو به بار برای یك بار آزمون متناهی محاسبه کنیم ، میدان حاصل به توزیع جدید بار مربوط می‌شود نه به توزیع بار اصلی. درحالت خاص وقتی یکی از بارهای موجود در توزیع بار را بتوان به عنوان بارآزمون درنظر گرفت، عمل‌حدگیری دیگرضرورتی نخواهد داشت. دراین حالت میدان‌الکتریکی در محل بارآزمون میدانی است که سایر بارهای این توزیع بار تولید می کنند. البته در این حالت هیچگونه تغییری در توزیع بار ایجاد نمی‌شود، زیرا توزیع بار مناسب همان است که تحت تأثیرتمامی توزیع بار،و ازجمله خود باری‌که به‌عنوان بارآزمون‌انتخاب شده است به‌وجود می‌آید. در برخی موارد خاص دیگر، مخصوصاً وقتی‌که توزیع بار مشخص شده باشد، نیرو بااندازهٔ بارآزمون متناسب خواهد بود. دراین موارد نیزمحاسبهٔ حد غیرضروری‌است. اما اگرتردیدی وجود داشته‌باشد همیشه برای حصول اطمینان بهتر است‌که ازعمل حدگیری استفاده شود.

معادله‌های (۲.۲) و (۵.۲) روش ساده‌ای برای محاسبهٔ میدان الکتریکی ناشی‌از یك توزیع بار مفروض به‌دست می‌دهند. فرض‌کنیدکه توزیع بارعبارت باشد از N بار نقطه‌ای q_1، q_2، ...، q_N که به ترتیب در نقاط $\mathbf{r}_1$، $\mathbf{r}_2$، ...، $\mathbf{r}_N$ قرار دارند و یك توزیع حجمی بار باچگالی بار $\rho(\mathbf{r}')$ درحجم V، ویك توزیع سطحی بارکه باچگالی سطحی $\sigma(\mathbf{r}')$ درروی سطح S مشخص شده‌است. اگربارآزمون q درنقطهٔ $\mathbf{r}$ قرارداشته باشد، نیروی وارد برآن ازطرف این توزیع بارهای معلوم عبارت است از

$$\mathbf{F}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}q_i\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\rho(\mathbf{r}')\,dv'$$

$$+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_S\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\sigma(\mathbf{r}')\,da' \qquad (۷.۲)$$

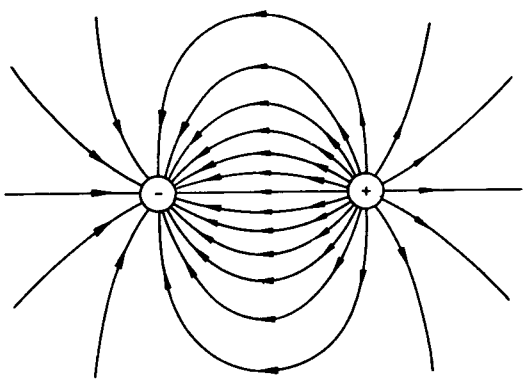
میدان الکتریکی در $\mathbf{r}$ عبارت است از حد نسبت این نیرو برمقدار بارآزمون q. چون این نسبت مستقل از q است، میدان الکتریکی در $\mathbf{r}$ عبارت است از

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\rho(\mathbf{r}')\,dv'$$

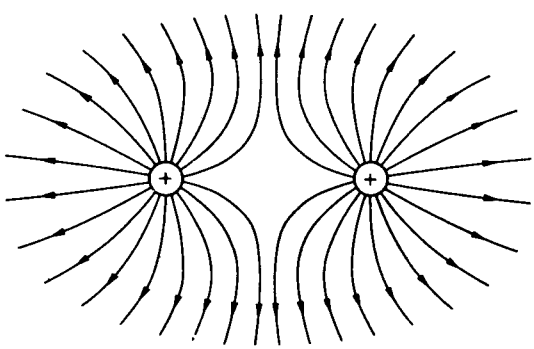
$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_s \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\sigma(\mathbf{r}')\,da' \qquad (8.2)$$

معادلهٔ(۸.۲) خیلی کلی است. دراغلب مواردبه‌یك یاچند جمله ازآن احتیاجی نخواهدبود.

کمیتی که هم‌اکنون تعریف کردیم را می‌توان در هرنقطه از فضا در نزدیکی یك دستگاه بار یا یك توزیع بار محاسبه کرد. بدین ترتیب $\mathbf{E}=\mathbf{E}(\mathbf{r})$ یك تابع برداری نقطه‌ای یا یك میدان برداری است. این‌میدان چند خاصیت ریاضی جالب توجه دارد که



(الف)



(ب)

شکل ۱.۲ رسم میدان الکتریکی به‌کمك خطوط نیرو.

ما آنها را دربخشهای بعداز این ودرفصل بعدبررسی خواهیم کرد، مایکل فاراده (۱۱۷۰–۱۷۹۱/۱۲۴۶–۱۸۶۷) برای کمك به‌تجسم ساختارمیدان الکتریکی وابسته به‌یك توزیع بار خاص مفهوم خطوط نیرو را مطرح کرد. خط نیرو یك خط (یا یك منحنی) فرضی‌است که طوری رسم می‌شودکه جهت آن در هرنقطه معرف جهت میدان الکتریکی درآن نقطه است.

به‌عنوان مثال، ساختار میدان الکتریکی مربوط به‌یك بارنقطه‌ای مثبت منفرد q_1 را درنظر بگیرید. خطوط نیرو، خطوطی شعاعی‌اندکه از q_1 به‌طور شعاعی خارج می‌شوند. به‌همین طریق، خطوط نیروی مربوط به‌یك بارنقطه‌ای منفی منفرد نیز خطوطی شعاعی‌اند، ولی دراین مورد جهت خطوط به‌سمت داخل (یعنی به‌سمت بار منفی) است. این دو مثال خیلی ساده‌اند ولی به‌هرحال خاصیت مهمی از خطوط میدان را نشان می‌دهند: خطوط نیروبه‌چشمه‌های میدان الکتریکی، یعنی به‌بارهایی که میدان‌را تولیدمی کنند، ختم‌می‌شوند.

شکل ۱.۲ دو میدان الکتریکی ساده راکه به کمك خطوط نیرو رسم شده‌اند نشان می‌دهد.

۴.۲ پتانسیل الکتروستاتیکی

درفصل ۱ دیدیم که اگر تاو یك بردار صفر شود، آن بردار را می‌توان به‌صورت شیب یك تابع نرده‌ای نوشت. میدان الکتریکیی که با معادلهٔ (۸.۲) داده شده‌است واجد این شرط است. برای تحقیق این مطلب باید توجه کردکه محاسبهٔ تاو معادلهٔ (۸.۲) مستلزم مشتق گیری نسبت به $\mathbf{r}$ است. این‌متغیردرمعادله فقط درتوابعی به‌صورت $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3$ ظاهر می‌شود، پس‌کافی است که نشان دهیم توابعی که به‌این صورت‌اند تاوشان صفراست. با استفاده از فرمول تاو حاصل‌ضرب (ضرب بردار در کمیت نرده‌ای) از جدول ۱.۱ به‌دست می آید

$$\nabla\times\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}=\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\nabla\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')+\left[\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right]\times[\mathbf{r}-\mathbf{r}'] \quad (۹.۲)$$

یك محاسبهٔ مستقیم (مسئله ۹.۱) نشان می‌دهد

$$\nabla\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=0 \quad (۱۰.۲)$$

و نیز (مسئلهٔ ۲۲.۱)

$$\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}=-3\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5} \quad (۱۱.۲)$$

این نتایج، همراه با درنظرگرفتن اینکه حاصل‌ضرب برداری هربردار دریك بردارموازی

با آن صفر است، برای اثبات رابطهٔ زیر کافی است

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{3}}=0 \qquad (۱۲.۲)$$

چون سهم هر جمله از معادلهٔ (۸.۲) در ایجاد میدان الکتریکی به صورت تابع $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{3}$ است، بنابراین ثابت می‌شود که تاو میدان الکتریکی صفر است. معادلهٔ (۱۲.۲) نشان می‌دهد که یك تابع نرده‌ای وجود دارد که شیب آن با میدان الکتریکی برابر است. آنچه باید انجام داد پیدا کردن این تابع است. یعنی، اکنون می‌دانیم که تابعی وجود دارد که در رابطهٔ زیر صدق می‌کند

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=-\nabla\varphi(\mathbf{r}) \qquad (۱۳.۲)$$

اما هنوز باید شکل این تابع φ را پیدا کنیم. بنا به قرارداد، علامت منها را در معادلهٔ (۱۳.۲) منظور می‌کنند و تابع φ را تابع پتانسیل الکتروستاتیکی می‌نامند.

محاسبهٔ پتانسیل الکتروستاتیکی ناشی از بار نقطه‌ای q_1 راحت است؛ این پتانسیل به‌صورت تابع زیر است

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} \qquad (۱۴.۲)$$

که صحت آن با مشتق گیری مستقیم به‌راحتی قابل تحقیق است. به کمك این تابع می‌توان به‌راحتی حدس زد که پتانسیلی که میدان الکتریکی (۸.۲) را به‌وجود می‌آورد به‌صورت زیر است

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv'$$

$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S\frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}da' \qquad (۱۵.۲)$$

که صحت آن را هم با مشتق گیری مستقیم می‌توان تحقیق کرد. شاید اینطور به‌نظر برسد که معادله‌های (۱۴.۲) و (۱۵.۲) را به‌نحوی نسبتاً دلخواه به‌دست آورده‌ایم. اما چون تنها چیزی که از φ می‌خواهیم این است که در معادلهٔ (۱۳.۲) صدق کند، و چون صحت این مطلب هم مستقیماً تحقیق شده است، بنابراین روش پیدا کردن φ اهمیت چندانی ندارد.

به‌مجرد آنکه موجودیت پتانسیل الکتروستاتیکی φ محرز شد، می‌توان آن را مستقیماً به‌دست آورد. چون می‌دانیم φ وجود دارد، می‌توانیم بنویسیم

$$\int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = -\int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r}' \qquad (۱۶.۲)$$

که‌در آن ref معرف نقطهٔ‌مرجعی‌است که در آن مقدار φ برابر صفر است. برطبق تعریف شیب

$$\nabla\varphi \cdot d\mathbf{r}' = d\varphi \qquad (۱۷.۲)$$

با قراردادن معادلهٔ (۱۷.۲) درمعادلهٔ (۱۶.۲)، انتگرال سمت راست معادلهٔ (۱۶.۲) به‌انتگرال یك دیفرانسیل کامل تبدیل می‌شود که به‌راحتی قابل محاسبه است. نتیجه عبارت خواهد بود از

$$-\int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r}' = -\varphi(\mathbf{r}) = \int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \qquad (۱۸.۲)$$

که درواقع معکوس معادلهٔ (۱۳.۲) است. چنانچه میدان الکتروستاتیکی ناشی از بار نقطه‌ای را درمعادلهٔ (۱۸.۲) به‌کار بریم ونقطهٔ مرجع یا حد پایین انتگرال‌را دربینهایت فرض کنیم، ومقدار پتانسیل‌را درآنجا صفراختیار کنیم، نتیجه می‌شود

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ} r} \qquad (۱۹.۲)$$

البته، این معادله حالت خاصی ازمعادلهٔ (۱۴.۲) است، یعنی حالتی که در آن $\mathbf{r}_{۱}$ برابر صفراست. این اثبات را برای به‌دست‌آوردن معادلهٔ (۱۵.۲) نیزمی‌توان به‌کار برد، ولی این روش بسیار پیچیده‌تر ازآن‌است که دراینجا توضیح داده شود.

جنبهٔ جالب ومفید دیگر پتانسیل الکتروستاتیکی رابطهٔ نزدیك‌آن با انرژی پتانسیل وابسته به‌نیروی الکتروستاتیکی پایستار است. انرژی‌پتانسیل وابسته به‌هر نیروی پایستار دلخواه به‌صورت زیراست

$$U(\mathbf{r}) = -\int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \qquad (۲۰.۲)$$

که در آن $U(\mathbf{r})$ انرژی پتانسیل نقطهٔ $\mathbf{r}$ است نسبت به مرجعی که انرژی پتانسیل آن را به اختیار صفر گرفته‌ایم. چون درمورد الکتروستاتیك $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$، نتیجه می‌شود که اگر نقطهٔ مرجع برای پتانسیل الکتروستاتیکی وبرای انرژی پتانسیل یکی‌فرض شود، آنگاه‌پتانسیل الکتروستاتیکی درست برابر با انرژی پتانسیل درواحد بارالکتریکی خواهد بود. گاهی از این ایده برای معرفی پتانسیل الکتروستاتیکی استفاده می‌شود. باوجود این، به نظر ما با تعریف پتانسیل الکتروستاتیکی با معادلهٔ (۱۳.۲) اهمیت پتانسیل الکتروستاتیکی در محاسبهٔ میدان الکتروستاتیکی تأکید می‌شود. البته شکی نیست که هردو روش در تحلیل

نهایی یکسان‌اند.

سودمندی پتانسیل الکتروستاتیکی درمحاسبهٔ میدانهای الکتریکی ازمقایسهٔمعادلات (۸.۲) و (۱۵.۲) معلوم می‌شود. معادلهٔ (۸.۲) یك معادلهٔ برداری است و برای پیدا کردن میدان الکتریکی بااستفاده ازآن باید برای هرجمله سه مجموع، یا سه انتگرال،را محاسبه کرد. حتی درساده‌ترین موارد، این روش مشکل و پردردسراست ودر برخی‌موارد محاسبهٔ انتگرالها تقریباً کاری است ناممکن. از سوی دیگر، معادلهٔ (۱۵.۲) یك معادلهٔ نرده‌ای‌است وهرجملهٔ آن شامل تنها یك مجموع یا یك‌انتگرال‌است. به‌علاوه،تمام مخرجها دراین‌معادله به‌صورت $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ اندکه محاسبهٔ انتگرالهارا درمقایسه با مخرجهای معادلهٔ (۸.۲) ساده می‌کند. این ساده‌کردن گاهی به‌اندازهٔ تفاوت میان محاسبه‌کردن یا محاسبه نکردن انتگرالهاست. ممکن است ایراد گرفته شودکه بعداز محاسبهٔ انتگرالهای معادلهٔ (۱۵.۲) هنوزلازم است‌که از نتیجهٔ حاصل مشتق گرفته شود؛ ولی باتوجه به‌این نکته‌که اگر تابعی مشتق داشته باشد مشتق‌گیری از آن همیشه ممکن است و در واقع مشتق‌گیری عموماً از انتگرال‌گیری به‌مراتب راحت‌تراست، به‌این ایراد پاسخ داده می‌شود. درفصل ۳ خواهیم دیدکه درمسائلی‌که در آنها توزیع بارالکتریکی مشخص نیست،بلکه بایدآن را درجریان مسئله پیداکرد، اهمیت پتانسیل الکتروستاتیکی حتی بیشترخواهد بود.

دردستگاه mks یکای انرژی نیوتون متر یا ژول‌است. یکای پتانسیل ژول‌برکولن است، اما به‌دلیل آنکه این یکا زیاد به‌کار می‌رود نام ویژهٔ ولت (V) را به‌آن داده‌اند. یکای میدان الکتریکی نیوتون برکولن یا ولت برمتراست.

۵.۲ رساناها و عایقها

تا آنجاکه به رفتار الکتروستاتیکی مربوط می‌شود مواد را می‌توان به‌دو رده تقسیم کرد. رساناها و عایقها (دی‌الکتریکها). رساناها،مثل فلزها، موادی هستندکه تعداد بسیارزیادی حامل بار اساساً آزاد دارند. این حاملهای بار(که دراکثرموارد الکترون‌اند) می‌توانند در سرتاسرجسم رسانا آزادانه حرکت‌کنند. میدانهای الکتریکی (حتی بی‌نهایت‌کوچك) براین حاملها اثر می‌کنند و مادامی‌که میدان برآنها اثر می‌کند به حرکت خود ادامه می‌دهند. وقتی به‌کمك یك چشمهٔ انرژی خارجی میدان الکتریکی پایا در رسانا برقرار می‌شود، این حاملهای‌آزاد جریان الکتریکی را حمل می‌کنند.

دی الکتریکها موادی هستندکه درآنها تمام ذرات باردار به نحوی نسبتاً محکم به مولکولهای‌تشکیل‌دهندهٔاین‌موادمقیدشده‌اند. این ذرات باردار ممکن است تحت تأثیر میدان الکتریکی اندکی جابه‌جا شوند، اماازمجاورت مولکولهایی‌که به‌آنها مقیدند دور نمی‌شوند. به بیان دقیقتر، این تعریف فقط درمورد یك دی الکتریك ایده‌آل یعنی دی - الکتریکی‌که در حضور میدان الکتریکی خارجی به هیچ‌وجه رسانایی ازخود نشان ندهد صادق‌است. دی الکتریکهای فیزیکی واقعی رسانایی ضعیفی ازخود نشان می‌دهند،هرچند در یك دی‌الکتریك واقعی معمولی رسانایی تقریباً 10^{20} مرتبه ازرسانایی دریك‌رسانای

خوب کمتر است. چون 10^{20} ضریب فوق‌العاده بزرگی است، بنابراین غالباً کافی است بگوییم که دی‌الکتریکها نارسانا هستند.

خواص الکتریکی برخی مواد (نیمرساناها والکترولیتها) درحد فاصل میان‌رساناها و دی‌الکتریکها قراردارد. رفتاراین مواد دریك‌میدان الکتریکی ایستا خیلی به‌رفتاراجسام رسانا شبیه است. اما پاسخ‌گذرای آنها ازپاسخ رساناها اندکی کندتراست، برای این‌مواد مدت بیشتری طول می‌کشد تا دریك میدان الکتریکی ایستا به‌حالت تعادل برسند.

در این فصل و نیز در چهار فصل بعد رفتار مواد در میدانهـای الکتروستاتیکی را بررسی می‌کنیم. قطبش دی الکتریکها، هرچند دراصل پدیدهٔ ساده‌ای است، ولی اثرات نسبتاً پیچیده‌ای تولید می‌کند. بنابراین، بحث دربارهٔ آن‌را تافصل ۴ به‌عقب می‌اندازیم. اما رساناها را می‌توان برحسب مفاهیمی که تاکنون بسط داده‌ایم مطالعه‌کرد.

چون بار می‌تواندآزادانه در جسم رسانا حرکت کـند، حتی تحت تأثیر میدانهای الکتریکی بسیار ضعیف نیز حاملهای بار (الکترونها یا یونها) آنقدر به‌حرکت خودادامه می‌دهند تا به‌مواضعی برسندکه در آنجا برایند نیروهای وارد برآنها صفرشود. وقتی این ذرات به حالت سکون رسیدند، در داخل جسم میدان الکتریکی وجـود ندارد. این بدان علت است‌که داخل جسم هیچگاه از تجمع حاملهای بار تهی نمی‌شود، و چنانچه میدانی وجود داشته باشد، حاملهای باربه‌حرکت خود ادامه خواهند داد. از اینرو در شرایط ایستا میدان الکـتریکی در درون جسم رسانا صفر است. به‌عـلاوه، چون در درون جسم رسانا $\mathbf{E}=0$ است، پتانسیل الکتریکی در تمام نقاط درون جسم رسانا یکسان است. به‌عبارت دیگر، در شرایط ایستا، هرجسم رسانایی یك ناحیهٔ هم پتانسیل را در فضا تشکیل می‌دهد.

۶.۲ قانون گاؤس

میان انتگرال مؤلفهٔ عمودی میدان الکتریکی برروی یك سطح بسته و مقدار کل بارهای درون این‌سطح رابطهٔ مهمی وجود دارد. اکنون این رابطه را، که به قانون گاؤس معروف است، به‌تفصیل بیشتری بررسی می‌کنیم. میدان الکتریکیی که بارنقطه‌ای q واقع در مبدأ مختصات درنقطهٔ $\mathbf{r}$ تولید می‌کند برابراست با

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3} \qquad (۲۱.۲)$$

اگر انتگـرال سطحی مؤلفهٔ عمودی این میدان الکتریکی را برروی سطح بسته‌ای (نظیر سطحی که درشکل ۲.۲ نشان داده شده‌است) که مبدأ مختصات، ودرنتیجه بار q، را دربر می‌گیرد حساب‌کنیم، خواهیم داشت

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,da=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}\,da \qquad (۲۲.۲)$$

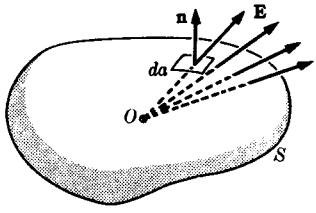
مقدار $(\mathbf{r}/r)\cdot\mathbf{n}\,da$ تصویر سطح da است بر صفحه‌ای عمود بر $\mathbf{r}$. از تقسیم تصویر سطح da بر r^2 زاویهٔ فضاییی که da را دربرمی‌گیرد به‌دست می‌آید. این زاویهٔ فضایی را با $d\Omega$ نشان می‌دهیم. به‌طوری که ازشکل ۳.۲ پیداست، زاویهٔ فضاییی که da را دربر-می‌گیرد برابراست بازاویهٔ فضاییی که da' رادربرمی‌گیرد. دراینجا da' عنصری ازسطح کرهٔ S'، به‌شعاع r' و به‌مرکز مبدأ مختصات، است. بنابراین، می‌توان نوشت

$$\oint_S \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}\,da=\oint_{S'}\frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n}}{r'^3}\,da'=4\pi$$

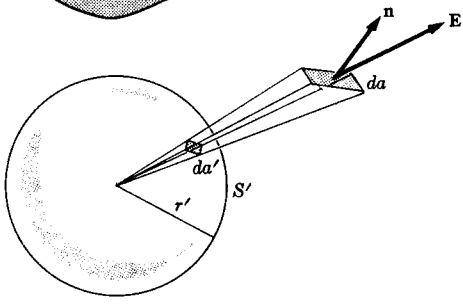
که نشان می‌دهد درحالت خاصی که در بالا توصیف شد نتیجه می‌شود

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,da=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi=\frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (۲۳.۲)$$

اگر q درخارج ازسطح S باشد، ازشکل ۴.۲ پیداست که می‌توان S را به‌دو ناحیهٔ S_1 و S_2 تقسیم کرد، به‌طوری که هریك ازآن دونسبت به‌بارنقطه‌ای q بازاویهٔ فضایی یکسانی فراگرفته شوند. اما برای S_2 جهت بردار عمود بر سطح به سمت q است، در حالی که برای S_1 به‌سمت دور از q است. بنابراین، درانتگرال سطحی سهمهای مربوط به S_1 و S_2 مساوی ولی مختلف‌العلامه‌اند، ودر نتیجه مقدارکل انتگرال صفر می‌شود. پس اگر



شکل ۲.۲ سطح بستهٔ فرضی S که یك بار نقطه‌ای واقع درمبدأ مختصات را دربرگرفته است.



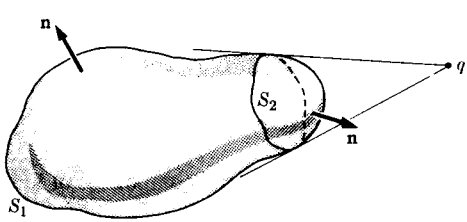
شکل ۳.۲ رسم سطح کروی S' برای کمك به محاسبهٔ زاویهٔ فضاییی که سطح da را دربرمی‌گیرد.

سطحی بارنقطه‌ای q را احاطه کند، انتگرال سطحی مؤلفهٔ عمودی میدان الکتریکی برابر q/ε_0 است، درحالی‌که اگر q در خارج ازسطح قرار گیرد، مقدار این انتگرال سطحی صفرخواهد بود. حکم بالادرمورد هرنوع سطح بسته‌ای، حتی سطوح کاو، نیزصادق‌است. شکل ۵.۲ صحت این گفته را نشان می‌دهد.

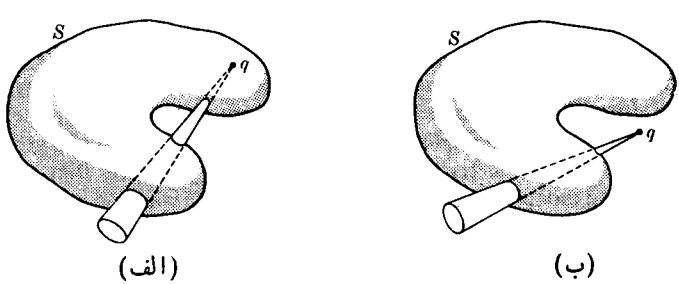
اگرسطح بستهٔ S چندین بار نقطه‌ای q_1، q_2، . . .، q_N را دربر گیرد، آنگاه میدان الکتریکی کل توسط جملهٔاول معادلهٔ (۸.۲) داده می‌شود. هریك ازبارها یك زاویهٔ فضایی کامل(4π) را دربرمی گیرد وبنابراین معادلهٔ (۲۳.۲) به‌صورت زیر درمی‌یاد

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,da=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \qquad (۲۴.۲)$$

این نتیجه را می‌توان به‌راحتی به‌توزیع پیوسته‌ای از بارها، که بایك چگالی بار مشخص شده است، نیز تعمیم داد. اگر هرعنصر ρdv از بار را به‌منـزلهٔ یك بار نقطه‌ای در نظر بگیریم، در این صورت سهم چنین باری در انتگرال سطحی مؤلفهٔ عمودی میدان الکتریکی روی هرسطح بسته برابر است با $\rho dv/\varepsilon_0$، مشروط برآنکه این بار در داخل سطح قرارداشته باشد. بنابراین، انتگرال سطحی کل مساوی است باجمع کلیهٔ جمله‌هایی بدین صورت که از بارهای واقع در داخل سطح ناشی می‌شوند. از اینرو، اگر S سطح



شکل ۴.۲ سطح بستهٔ S را می‌تـوان به‌دو سطح S_1 وS_2 تقسیم کرد، به‌طوری که هریك‌ازآن‌دوبا زاویهٔ‌فضایی یکسانی به‌رأس q فراگرفته شوند.



شکل ۵.۲ عنصرزاویهٔ فضایی‌که سطح S را بیش از یك‌بار قطع می‌کند.

بسته‌ای باشد که حجم V را دربرگیرد، داریم

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,da=\frac{1}{\varepsilon_\circ}\int_V \rho\,dv \qquad (۲۵.۲)$$

معادله‌های (۲۴.۲) و(۲۵.۲) به‌قانون گاؤس معروف‌اند. جملهٔ سمت چپ، یعنی انتگرال مؤلفهٔ عمودی میدان الکتریکی برروی سطح S، را گاهی شار میدان الکتریکی از سطح S می‌نامند.

بااستفاده از قضیهٔ واگرایی، قانون گاؤس را می‌توان به‌صورت دیگری نیز بیان کرد. قضیهٔ واگرایی، معادلهٔ (۳۷.۱)، حاکی از آن است که

$$\oint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,da=\int_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dv$$

اگر این قضیه را درمورد انتگرال سطحی مؤلفهٔ عمودی $\mathbf{E}$ به‌کاربریم، نتیجه می‌شود

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,da=\int_V \nabla\cdot\mathbf{E}\,dv \qquad (۲۶.۲)$$

و با قراردادن آن درمعادلهٔ (۲۵.۲) به‌دست می‌آید

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{E}\,dv=\frac{1}{\varepsilon_\circ}\int_V \rho\,dv \qquad (۲۷.۲)$$

معادلهٔ (۲۷.۲) باید برای همهٔ حجمها ، یعنی برای هر حجم V که انتخاب می‌کنیم ، صادق باشد. این مطلب تنها درصورتی صادق است که انتگرالده‌های طرف راست وطرف چپ این معادله برابر باشند. بنابراین، برای آنکه معادلهٔ (۲۷.۲) برای هرحجمی که انتخاب شود معتبر باشد باید داشته باشیم

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{1}{\varepsilon_\circ}\rho \qquad (۲۸.۲)$$

این نتیجه را می‌توان شکل دیفرانسیلی قانون گاؤس در نظر گرفت.

۷.۲ کاربرد قانون گاؤس

معادلهٔ (۲۸.۲)، یا دقیقتر گفته باشیم، شکل تعمیم یافته‌ای از آن، که‌در فصل ۴ به‌دست خواهیم آورد یکی از معادلات اساسی الکتریسیته ومغناطیس است. قانون گاؤس در این

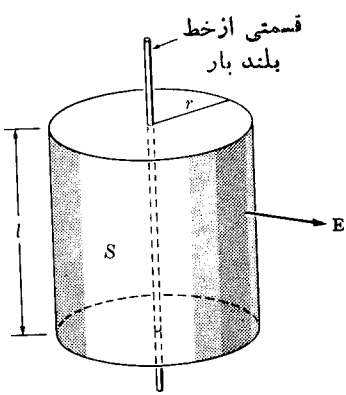
نقش مهم است ، ولی اهمیت آن به همینجا ختم نمی‌شود بلکه فایدهٔ عملی نیز دارد. جنبهٔ عملی این قانون به‌طور عمده در آن است که در وضعیتهایی که تقارن کافی دارند ، روش بسیار راحتی برای محاسبهٔ میدان الکتریکی فراهم می‌آورد. به عبارت دیگر، در برخی وضعیتهای بسیار متقارن که از لحاظ فیزیکی حائز اهمیت‌اند میدان الکتریکی‌رامی‌توان، به‌جای انتگرالهایی که در بالا داده شد یا روشهای فصل ۳، با استفاده از قانون گاؤس محاسبه کرد. محاسبهٔ میدان الکتریکی بااستفاده از قانون گاؤس بسیار راحت است.

برای‌آنکه بتوانیم از قانون گاؤس در محاسبهٔ میدان الکتریکی استفاده کنیم ، باید آنچنان سطح بسته‌ای‌انتخاب کنیم که مؤلفهٔ عمودی میدان الکتریکی‌درتمام نقاط آن سطح صفر یا یك تك مقدار ثابت باشد. به‌عنوان مثال، یك خط بار بسیار بلندکه چگالی بار آن در یکای واحد طول λ است، (شکل ۶.۲) را در نظر می‌گیریم. تقارن وضعیت به‌وضوح نشان می‌دهدکه میدان الکتریکی شعاعی‌است و به‌مکان درامتداد سیم و نیز به‌مکان زاویه‌ای حول سیم بستگی ندارد. این مطالب سبب می‌شوند تا سطحی مانند شکل ۶.۲ را انتخاب کنیم. محاسبهٔ انتگرال مؤلفهٔ عمودی میدان الکتریکی برای این‌سطح آسان‌است. دوسطح مستدیر در دوانتها درمقدار انتگرال سهمی ندارند، زیرا میدان الکتریکی با این سطوح موازی است. چون $\mathbf{E}$ شعاعی است و به‌مکان سطح‌استوانه‌ای بستگی ندارد، سهم سطح جانبی استوانه درمقدار انتگرال برابر $2\pi r l E_r$ است. بنابراین، قانون گاؤس به‌صورت زیردرمی‌آید

$$2\pi r l E_r = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \qquad (۲۹.۲)$$

از معادلهٔ (۲۹.۲) می‌توانیم E_r را محاسبه کنیم

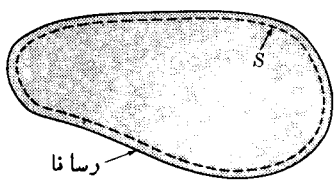
$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad (۳۰.۲)$$



شکل ۶.۲ سطح استوانه‌ای که به‌کمك قانون گاؤس برای محاسبهٔ میدان الکتریکی ناشی از یك خط بلند بار به‌کارمی‌رود.

باحل مسئلهٔ ۴.۲، که متضمن کاربرد مستقیم معادلهٔ (۸.۲) است، می‌توانیم به‌مزیت استفاده از قانون گاؤس برای صرفه جویی درکار پی ببریم.

نتیجهٔ مهم دیگری که ازقانون گاؤس به‌دست می‌آید، آن است که بار (بارخالص) در یك جسم رسانای باردارروی سطح خارجی آن قرارمی گیرد. دربخش ۵.۲ دیدیم که میدان الکتریکی درداخل اجسام رسانا صفراست. درهرجایی در درون جسم رسانا می‌توان یك سطح گاؤسی رسم کرد؛ مطابق قانون گاؤس، بارخالص محصور درهریك ازاین سطوح صفر است. سطح گاؤسی S را مطابق شکل ۷.۲ رسم می‌کنیم. بار خالص درون این سطح نیز صفراست. تنها جایی که بارها می‌توانند بدون نقض قانون گاؤس درآنجا قرارگیرند، سطح جسم رساناست. چون درداخل باری وجود ندارد، می‌توانیم قسمتی ازماده را بدون آنکه چیزی تغییر کند حذف کنیم. بنابراین، بار یك پوستهٔ رسانا باید تماماً درسطح خارجی آن قرار بگیرد.

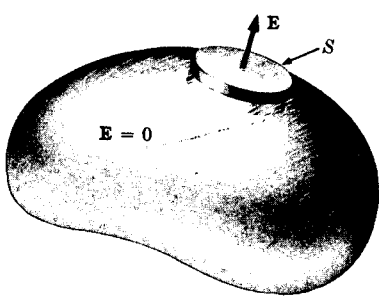


شکل ۷.۲ سطح گاؤسی S که در داخل جسم رسانای باردار رسم شده است.

میدان الکتریکی درست درخارج ازیك جسم رسانای باردار باید برسطح رسانا عمود باشد. این مطلب ازآنجا ناشی می‌شود که سطح رسانا یك سطح هم پتانسیل است، و $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. فرض کنید σ تابع چگالی سطحی باردرسطح جسم رسانا باشد. اگرقانون گاؤس را برای سطح کوچك S، درشکل ۸.۲ به‌کاربریم داریم

$$E\Delta S = \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)\Delta S$$

که درآن ΔS سطح یکی ازقاعده‌های قرص کوچك است. درنتیجه میدان الکتریکی درست



شکل ۸.۲ کاربرد قانون گاؤس برای سطح بستهٔ S که سطح جسم رسانای بارداری را قطع می‌کند.

درخارج جسم رسانا برابراست با

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_{\circ}} \qquad (۳۱.۲)$$

۸.۲ دوقطبی الکتریکی

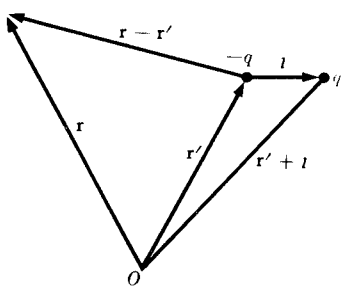
دو بارالکتریکی مساوی ومختلف‌العلامه که درفاصلهٔ کمی ازیکدیگر قرار گیرند یك‌دوقطبی الکتریکی تشکیل می‌دهند. توزیع‌میدان الکتریکی وپتانسیل‌ناشی ازچنین پیکربندی‌باری را می‌توان بااستفاده ازفرمولهـای بخشهای ۳.۲ و ۴.۲ به‌دست‌آورد. فرض‌کنید، مطابق شکل ۹.۲، بار $-q$ درنقطهٔ $\mathbf{r}'$ وبار q درنقطهٔ $\mathbf{r}'+\mathbf{l}$ قرار گرفتـه است؛ دراین صورت میدان الکتریکی درنقطهٔ‌اختیاری $\mathbf{r}$ را می‌توان باکاربرد مستقیم‌معادلهٔ (۸.۲) به‌دست‌آورد. میدان الکتریکی در $\mathbf{r}$ عبارت است از

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\left\{\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{l}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{l}|^{۳}}-\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{۳}}\right\} \qquad (۳۲.۲)$$

معادلهٔ (۳۲.۲) شکل صحیح میدان الکتریکی به‌ازای هرمقدار از q وهر مقدار از فاصلهٔ $\mathbf{l}$ است؛ اما، تعبیرآن چندان راحت نیست. آنچه مورد نظرما است میدان دوقطبی است، و در دوقطبی فاصلهٔ $\mathbf{l}$ درمقایسهٔ با $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ کوچك‌است؛ بنابراین، می‌توان معادلهٔ (۳۲.۲) را بسط داد وتنها اولین جملهٔ غیرصفرآن‌را نگه داشت. چـون استفاده ازاین شیوه عمومیت دارد، به‌تفصیل آن‌را بررسی می‌کنیم. اشکال عمده دربسط این عبارت ازمخرج اولین‌جملهٔ معادلهٔ (۳۲.۲) ناشی می‌شود. معکوس این مخرج را می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{l}|^{-۳}=[(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^{۲}-۲(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\mathbf{l}+\mathbf{l}^{۲}]^{-۳/۲}$$

$$=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-۳}\left[۱-\frac{۲(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\mathbf{l}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{۲}}+\frac{\mathbf{l}^{۲}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{۲}}\right]^{-۳/۲}$$



شکل ۹.۲ شکل هندسی لازم برای محاسبهٔ، $\mathbf{E}(\mathbf{r})$، میدان الکتریکـی ناشی ازدوبار نقطه‌ای.

شکل اخیر این عبارت را به‌راحتی می‌توان بااستفاده ازقضیهٔ دو جمله‌ای بسط داد و فقط جمله‌هایی ازآن‌راکه برحسب $\mathbf{l}$ خطی‌اند نگه داشت. نتیجهٔ این بسط به‌صورت زیر است

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{l}|^{-3}=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-3}\left\{1+\frac{3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\mathbf{l}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{2}}+\cdots\right\} \quad (۳۳.۲)$$

که درآن ازجمله‌هایی که شامل $\mathbf{l}^2$اند صرفنظر شده است. باقرار دادن معادلهٔ (۳۳.۲) در معادلهٔ (۳۲.۲) و دو باره با نگه داشتن جمله‌هایی که برحسب $\mathbf{l}$ خطی‌اند، نتیجه می گیریم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\mathbf{l}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{5}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-\frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{3}}+\cdots\right\} \quad (۳۴.۲)$$

این معادله‌آن قسمت ازمیدان الکتریکی یك دو قطبی الکتریکی متناهی را به‌دست می‌دهد که بافاصلهٔ میان دوبار متناسب است. جمله‌های دیگری نیزوجود دارندکه باتوانهای‌دوم، سوم، و بالاترفاصله متناسب‌اند. اما چنانچه فاصلهٔ میان دوبارکوچك بـاشد، سهم مربوط به‌جمله‌های توانهای بالاتربسیارکم خواهد بود. درحد، وقتی $\mathbf{l}$ به‌سمت صفر میل می کند تمام جمله‌ها صفرمی‌شوند، مگرآنکه باربی‌نهایت شود. درحد، وقتی $\mathbf{l}$ به‌صفر نزدیك شود ودرعین حال q بی‌نهایت شود، ولی به‌طریقی‌که مقدار $q\mathbf{l}$ ثابت بماند، تمام جمله‌ها بجز آنهایی که‌برحسب $\mathbf{l}$ خطی‌اند صفرمی‌شوند. دراین‌حد یك دوقطبی‌نقطه‌ای‌تشکیل‌می‌شود. دوقطبی نقطه‌ای بارخالص ندارد، درفضا گسترش‌ندارد وفقط با گشتاور دوقطبی‌اش به‌طور کامل مشخص می‌شود؛ این گشتاور برابر است باحد $q\mathbf{l}$ وقتی $\mathbf{l}$ به‌سمت صفر میل کند. برای نمایش‌گشتاور دوقطبی الکتریکی نماد $\mathbf{p}$ را به‌کارمی‌بریم ومی‌نویسیم

$$\mathbf{p}=q\mathbf{l} \quad (۳۵.۲)$$

می‌توانیم معادلهٔ (۳۴.۲) را، برحسب‌گشتاور دوقطبی به‌صورت زیربنویسیم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{5}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{3}}\right\} \quad (۳۶.۲)$$

توزیع پتانسیل ناشی ازیك دوقطبی نقطه‌ای نیزحـائز اهمیت است. برای به‌دست آوردن این پتانسیل می‌توانیم تابعی پیدا کنیم که شیب آن باسمت راست معادلهٔ (۳۶.۲) برابرباشد. اما، راه ساده‌ترآن است که معادلهٔ (۱۵.۲) را درمورد توزیع بار متشکل از دوبارنقطه‌ای، که به‌فاصلهٔ کمی ازیکدیگرقراردارند، به‌کاربریم. بااستفاده ازنمادگذاری معادلهٔ (۳۲.۲)،توزیع پتانسیل بارابطهٔ زیرداده می‌شود

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{l}|}-\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right] \quad (۳۷.۲)$$

با بسط جملهٔ اول، درست به‌همان طریقی که درمورد جملهٔ اول معادلهٔ (۳۲.۲) انجام شد، ونگه‌داشتن فقط آن جمله‌هایی کـه برحسب $\mathbf{l}$ خطی‌اند، معـادلهٔ (۳۷.۲) به صورت زیر درمی‌آید

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\mathbf{l}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{۳}} \qquad (۳۸.۲)$$

این معادله باهمان درجهٔ تقریب معادلهٔ (۳۴.۲) معتبراست؛ یعنی ازجمله‌های متناسب با $\mathbf{l}^{۲}$ وتوانهای بالاتر $\mathbf{l}$ صرفنظرشده است. برای دوقطبی‌نقطه‌ای $\mathbf{p}$، معادلهٔ (۳۸.۲) دقیق است؛ ولی بهتراست آن را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{۳}} \qquad (۳۹.۲)$$

معادلهٔ (۳۹.۲) پتانسیل $\varphi(\mathbf{r})$ حاصل ازیك دوقطبی الکتریکی را به‌دست می‌دهد؛ به‌کمك این پتـانسیل می‌توانیم میدان الکتریکی [معـادلهٔ (۳۶.۲)] را حساب‌کنیم. پیدا کردن انرژی پتـانسیل یك دوقطبی الکتریکـی که در یك میدان الکتریکی خارجی قرار گرفته است، نیزجالب توجه است. درمورد دوبار $q-$ در نقطـهٔ $\mathbf{r}$ و q در نقطهٔ $\mathbf{r}+\mathbf{l}$، واقع در میدان الکتریکی‌که باتـابع پتانسیل $\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ توصیف می‌شود، انرژی پتانسیل برابراست با

$$U=-q\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r})+q\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}+\mathbf{l}) \qquad (۴۰.۲)$$

چنانچه $\mathbf{l}$ درمقایسه با $\mathbf{r}$ کوچك باشد، تابع $\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}+\mathbf{l})$ را می‌توان برحسب $\mathbf{l}$ بسط داد و فقط دوجملهٔ اول‌را نگه داشت. نتیجهٔ این بسط عبارت است از

$$\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}+\mathbf{l})=\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r})+\mathbf{l}\cdot\nabla\varphi_{\text{ext}} \qquad (۴۱.۲)$$

که درآن باید مقدارشیب درنقطهٔ $\mathbf{r}$ منظورشود. اگرحاصل این بسط را درمعادلهٔ (۴۰.۲) به‌کاربریم، نتیجه می‌شود

$$U=q\mathbf{l}\cdot\nabla\varphi_{\text{ext}} \qquad (۴۲.۲)$$

درحالت حدی، برای یك دوقطبی نقطه‌ای داریم

$$U(\mathbf{r})=\mathbf{p}\cdot\nabla\varphi_{\text{ext}} \qquad (۴۳.۲)$$

که، البته رابطهٔ دقیقی است. با توجه به‌اینکه میدان الکتریکی برابر است بـا منفی شیب

پتانسیل الکتروستاتیکی، شکل دیگرمعادلهٔ (۴۳.۲) به‌صورت زیراست

$$U(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \qquad (۴۴.۲)$$

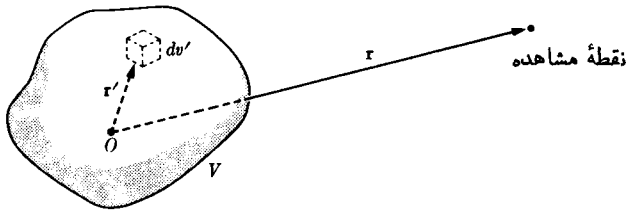
بنابراین، این انرژی، انرژی پتانسیل دوقطبی $\mathbf{p}$ در میدان الکتریکی خارجی $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ است، که درآن $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ درمحل دوقطبی محاسبه می‌شود.

لازم به‌تذکراست‌که در این بخش ما درمورد دو پتانسیل متفاوت بحث کردیم. در معادله‌های (۳۷.۲)، (۳۸.۲) و (۳۹.۲) دربارهٔ پتانسیل الکتروستاتیکی حاصل از یك دو قطبی الکتریکی بحث شد. در معادله‌های (۴۰.۲) تـا (۴۳.۲) فرض کردیم که دو قطبی درمیدان الکتریکی موجودی که باتابع پتانسیل $\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ توصیف می‌شود، قرار گرفته است. این میدان الکتریکی ازبارهای دیگری غیرازبارهای تشکیل دهندهٔ دوقطبی ناشی می‌شود. درواقع برای اینکه از نتیجهٔ بی‌نهایت احترازکنیم، باید ازمیدان حاصل از خود دو قطبی چشمپوشی شود. این مطلب ممکن است مارا به‌مسائل پیچیدهٔ مربوط به‌خود نیروها و خود انرژیها بکشاندکه فعلا نمی‌توانیم دربارهٔ آنها بحث کنیم. اما باید توجه داشت که‌انرژی پتانسیل حاصل ازبرهم‌کنش یك دو قطبی الکتریکی بامیدان خودش ازاثر نیروهای وارد بردوقطبی از جانب خود دو قطبی ناشی می‌شود. این‌گونه نیروهـا، که در مبحث دینامیك به‌نیروهای داخلی معروف‌اند، درحرکت کلی دوقطبی تأثیرنمی‌گذارند. فعلا بررسی بیشتر این موضوع برای ما ضروری نیست.

۹.۲ بسط میدانهای الکتریکی برحسب چند قطبیها

ازتعریفی‌که دربالا برای گشتاور دو قطبی الکتریکی به‌دست دادیم پیداست که برخی از جنبه‌های توزیع پتانسیل ناشی ازیك توزیع‌بارمشخص‌را می‌توان برحسب گشتاور دوقطبی الکتریکی‌آن به‌راحتی بیان‌کرد. برای انجـام این‌کار، البته ضروری است‌که گشتاور دو قطبی الکتریکی یك توزیع بار دلخواه را تعریف کنیم. به‌جـای اینکه بدون هیچ منظور خاصی تعریفی به‌دست بدهیم، بهتراست بسط معینی‌ازپتانسیل الکتروستاتیکی ناشی ازیك توزیع باردلخواه‌را درنظربگیریم. برای‌کاستن از تعداد مختصات مکانی، توزیع باری را درحوالی مبدأ مختصات درنظرمی‌گیریم. شرط دیگری که منظورخواهیم‌کرد این است‌که توزیع بارکلا درکره‌ای به‌شعاع a احاطه شده است ودرآن مقدار a در مقایسه با فاصلهٔ مبدأ تا نقطهٔ مشاهده‌کوچك است. یك نقطهٔ اختیاری درداخل توزیع باررا با $\mathbf{r}'$، چگالی بار درآن نقطه را با $\rho(\mathbf{r}')$، ونقطهٔ مشاهده را با $\mathbf{r}$ نشان می‌دهیم (شکل ۱۰.۲). پتانسیل درنقطهٔ $\mathbf{r}$ عبارت است از

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv' \qquad (۴۵.۲)$$



شکل ۱۰.۲ بار در حجم V با چگالی $\rho(\mathbf{r}')$ جایگزیده شده است، میدان الکتریکی را باید در نقطهٔ $\mathbf{r}$ محاسبه کرد.

که در آن dv' برای نمایش عنصرحجم در توزیع بار به‌کار رفته است و V کل حجمی است که توزیع بار اشغال کرده است. باتوجه به‌شرطی که در بالا قائل شدیم، مبنی بر آنکه نقطهٔ مشاهده دور از مبدأ مختصات قرار دارد، مقدار $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}$ را می‌توان به‌صورت رشته‌ای از توانهای صعودی r'/r بسط داد. نتیجهٔ این بسط عبارت است از

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}=(r^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'+r'^2)^{-1/2}$$

$$=\frac{1}{r}\left\{1-\frac{1}{2}\left[-\frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2}+\frac{r'^2}{r^2}\right]+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}[\quad]^2+\cdots\right\} \qquad (۴۶.۲)$$

که در اینجا تنها سه‌جملهٔ اول‌را صریحاً نوشته‌ایم. توجه کنید که هرچند $(r'/r)^2$ درمقایسهٔ با $2\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}/r^2$ قابل چشمپوشی است، باوجود این نمی‌توان آن را از داخل کروشهٔ اول حذف کرد، زیرا که مرتبهٔ آن بامرتبهٔ بزرگترین جمله در کروشهٔ بعدی یکی است. با قرار دادن معادلهٔ (۴۶.۲) در معادلهٔ (۴۵.۲) وحذف جمله‌های با توان سوم و بالاتر $\mathbf{r}'$ نتیجه می‌شود

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\left\{\frac{1}{r}+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^3}+\frac{1}{2}\left[\frac{3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^2}{r^5}-\frac{r'^2}{r^3}\right]+\cdots\right\}\rho(\mathbf{r}')dv' \qquad (۴۷.۲)$$

چون $\mathbf{r}$ به‌متغیر انتگرال‌گیری یعنی به $\mathbf{r}'$ بستگی ندارد، همهٔ آنچه راکه به $\mathbf{r}$ وابسته است می‌توان از زیر نماد انتگرال بیرون آورد. درنتیجه خواهیم داشت

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r}\int_V\rho(\mathbf{r}')dv'+\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\int_V\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')dv'\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\frac{x_ix_j}{r^5}\int_V(3x'_ix'_j-\delta_{ij}r'^2)\rho(\mathbf{r}')dv'\right\} \qquad (۴۸.۲)$$

که درآن x_i و x_j مؤلفه‌های قائم $\mathbf{r}$ و x'_i و x'_j مؤلفه‌های قائم $\mathbf{r}'$اند و δ_{ij} به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\delta_{ij}=\begin{Bmatrix} ۰, & i\neq j \\ ۱, & i=j \end{Bmatrix}$$

تعبیر معادلهٔ (۴۸.۲) آسان است. اولین انتگرال دراین معادله عبارت است از بارکل، و اولین جمله عبارت است ازپتانسیلی که اگر بارکل درمبدأ مختصات متمرکز بود، حاصل می‌شد. دومین انتگرال خیلی شبیه به گشتاور دو قطبی الکتریکی است که در بخش ۸.۲ تعریف شد، ودرنتیجه‌آن را گشتاور دوقطبی توزیع بار می‌نامند. به‌عنوان یك تعریف، این انتگرال بیانگرتعمیمی است ازتعریف دوبار نقطه‌ای مساوی ومختلف‌العلامه که قبلا به‌آن اشاره کردیم. اما به‌راحتی می‌توان نشان دادکه هردو تعریف درمورد دوبارنقطه‌ای مساوی ومختلف‌العلامه نتیجه‌یکسانی به‌دست می‌دهند. جملهٔ دوم درمعادلهٔ (۴۸.۲) پتانسیلی‌است که ازیك دوقطبی نقطه‌ای، چنانچه‌درمبدأ مختصات قرارداشته و گشتاورآن با گشتاور دو قطبی توزیع بار برابر باشد حاصل می‌شود. توجه به‌این نکته جالب است که اگر بارکل صفر باشد، گشتاور دو قطبی توزیع بار به‌مبدأ مختصات بستگی نخواهد داشت. برای تحقیق صحت این مطلب دستگاه مختصات جدیدی را درنظر بگیرید که مبدأ آن نسبت به‌دستگاه مختصات قدیم در $\mathbf{R}$ قرار داشته باشد. اگر نقطه‌ای را نسبت به‌دستگاه قدیم با $\mathbf{r}'$ وهمان نقطه را نسبت به‌دستگاه جدید با $\mathbf{r}''$ نشان‌دهیم، خواهیم داشت

$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}''+\mathbf{R} \qquad (۴۹.۲)$$

گشتاور دوقطبی نسبت به‌دستگاه قدیم برابرمی‌شود با

$$\mathbf{p}=\int_V \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')dv'=\int_V(\mathbf{r}''+\mathbf{R})\rho(\mathbf{r}')\,dv'=\int_V \mathbf{r}''\rho\,dv'+\mathbf{R}Q \qquad (۵۰.۲)$$

که صحت حکم بالا را ثابت می‌کند.

جملهٔ سوم معادلهٔ (۴۸.۲) را می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$\sum_{i=۱}^{۳}\sum_{j=۱}^{۳}\frac{۱}{۲}\frac{x_ix_j}{r^۵}Q_{ij} \qquad (۵۱.۲)$$

که درآن

$$Q_{ij}=\int_V(۳x'_ix'_j-\delta_{ij}r'^۲)\rho(\mathbf{r}')dv' \qquad (۵۲.۲)$$

Q_{ij} نه مؤلفهٔ متناظر با i و j (برابر با ۱، ۲، ۳) دارد. ازاین نه مؤلفه، شش مؤلفهٔ آن دو به دو برابرند وبنابراین فقط شش مؤلفهٔ متمایز باقی می‌ماند. مجموعهٔ این کمیتها تانسور گشتاور چهار قطبی[1] را تشکیل می‌دهد که معرف بسط مفهوم گشتاور دوقطبی است. البته گشتاورهای ازمرتبه‌های بالاتر نیزوجود دارند که ازنگه داشتن جمله‌های مرتبهٔ بالاتر در بسط معادلهٔ (۴۸.۲) به‌دست می‌آیند. این چندقطبیهای مرتبهٔ بالاتردرفیزیك‌هسته‌ای‌اهمیت دارند، اما دراین‌کتاب بیش ازاین دربارهٔ آنها گفتگو نخواهد شد.

چنانکه معادلهٔ (۴۸.۲) نشان می‌دهد، چند قطبیهای الکتریکی برای محاسبه تقریبی میدان الکتریکی توزیع باربه‌کارمی‌روند. باوجود این‌کاربردهای متعدد دیگری نیزدارند، ولی همهٔ این‌کاربردها براین‌اساس‌اند که یك توزیع بارگستردهٔ واقعی‌را بابارهای‌نقطه‌ای، دوقطبیهای نقطه‌ای وغیره به‌طور تقریبی برابر بگیریم. این تقریبها غالباً حل مسائل بسیار مشکل‌را ممکن می‌سازند.

۱۰.۲ تابع دلتای دیراك

درعبارتهای‌کلی مربوط به‌میدان و پتانسیل الکتریکی، درمعادله‌های (۸.۲) و (۱۵.۲)، میان بارهای نقطه‌ای و توزیعهای پیوستهٔ بار تمایز قائل شده‌ایم. به‌خاطر صرفه جویی در نمادگذاری، حتی اگر دلیل دیگری هم نباشد، بهتر است بارهای نقطه‌ای را به‌صورت حالت خاصی ازتابع چگالی بارکلی $\rho(\mathbf{r})$ بیان‌کنیم. تابع دلتای دیراك، $\delta(\mathbf{r})$، از عهدهٔ انجام این کار برمی‌آید، وعلاوه برآن این تابع ابزارریاضی باارزشی‌است برای‌انجام بسیاری ازمحاسبات. برای این منظورمی‌نویسیم

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r}) \qquad \text{(بارنقطه‌ای)} \qquad (۵۳.۲)$$

که درآن

$$\delta(\mathbf{r}) = ۰ \qquad \text{برای } \mathbf{r} \neq ۰$$

$$\int \delta(\mathbf{r}')\, dv' = ۱ \qquad (۵۴.۲)$$

واضح است‌که این رابطه یك بیان ریاضی برای مفهوم فیزیکی بار نقطه‌ای در $\mathbf{r} = ۰$ به‌دست می‌دهد؛ جمع کلی چگالی بار برابر q است، اما تمامی بار درست در مبدأ قرار دارد. اگرتابع دلتا، همه جا، بجزدریك تك نقطه صفر باشد ودر عین حال انتگرال غیر

---

۱. تانسورها تعمیمی ازبردارها هستند و در پیوست ۱ بحثی مقدماتی دربارهٔ آنها ارائه شده است.

صفر[1] داشته باشد، یك تابع ریاضی کاملا تکین است. بـاوجود این، این تـابع یك شیء ریاضی مجاز است که کاربرد آن بهمشکلاتی نمی‌انجامد، بهشرط آنکه دقت کنیم و از آن، مثلا، مثل یك تابع پیوسته مشتق‌گیری نکنیم. یك نوع ازاین‌تابع می‌تواند چگالی سطحی بار $\sigma(\mathbf{r})$، یعنی توزیع باری که بجز درروی سطحی معین همه‌جا صفراست، را نمایش‌دهد. بااین تعمیمها، گرفتن انتگرال تنها برروی $\rho(\mathbf{r})$ درمعادله‌هـای (۸.۲) و (۱۵.۲) کافی است. برای این‌کاربرد توجه کنید که

$$\int F(\mathbf{r}')\,\delta(\mathbf{r}')\,dv' = F(\circ) \qquad (۵۵.۲)$$

که درآن F تابعی برداری یا نرده‌ای است، زیرا انتگرالده جزدر $\mathbf{r}'=\circ$ صفر می‌شود، به‌علاوه

$$\int F(\mathbf{r}')\,\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_\circ)\,dv' = F(\mathbf{r}_\circ) \qquad (۵۶.۲)$$

بنابراین اگر $\rho(\mathbf{r}')=q_i\,\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_i)$ باشد، برای بار نقطه‌ای q_i در $\mathbf{r}_i$، داریم

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\int \frac{q_i\,\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv' = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\,\frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}$$

خواص دیگری ازتابع دلتارا می‌توان به‌عنوان نتایجی ازصورت دیفرانسیلی‌قانون گاؤس به‌دست آورد

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{۱}{\varepsilon_\circ}\rho \qquad [۲۸.۲]$$

برای بارنقطه‌ای q در $\mathbf{r}=\circ$، بااستفاده ازمعادلهٔ (۲۱.۲)، داریم

$$\nabla\cdot\frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\,\frac{\mathbf{r}}{r^۳} = \frac{۱}{\varepsilon_\circ}q\,\delta(\mathbf{r})$$

یا

$$\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^۳} = ۴\pi\,\delta(\mathbf{r}) \qquad (۵۷.۲)$$

---

۱. انتگرال ریمانی‌چنین تابعی، اگروجود داشته‌باشد، صفراست ولی‌انتگرال‌گیری‌را می‌توان توسط انتگرال کلیتر لبگ (Lebesgue) انجام داد. برای خواص دیگرتابع دلتا به‌پیوست ۴ مراجعه کنید.

همچنین، چون

$$\nabla \frac{1}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta(\mathbf{r}) \qquad (۵۸.۲)$$

معادله‌های (۵۷.۲) و (۵۸.۲) آنقدر مهم‌اند که ارزش دارد آنهـا را به‌طور مستقیمتری به‌دست آوریم. مشتق‌گیری مستقیم نشان می‌دهد که واگرایی همه جا صفر است مگر درمبدأ، یعنی به‌ازای $r \neq 0$

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \mathbf{r}$$

$$= -\frac{3}{r^4} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r} + \frac{3}{r^3} = 0$$

و به‌ازای $r = 0$ نتیجه برابراست با $-\infty + \infty$ که نامعین است. ولی از کاربرد قضیهٔ واگرایی درمورد یك کرهٔ کوچك به‌شعاع R دراطراف مبدأ به‌دست می‌آید

$$\int_v \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}\, dv = \oint_s \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} da = \frac{1}{R^2} \oint_s da = 4\pi$$

چون شعاع R هرقدرهم که کوچك باشد انتگرال حجمی 4π است، انتگرالده را می‌توان به‌صورت $4\pi\,\delta(\mathbf{r})$ نمایش‌داد واین امر بامعادلهٔ (۵۷.۲) سازگاراست. به‌بیان دیگر، تابع دلتا این‌امکان‌را فراهم‌می‌کند که قضیهٔ‌واگرایی‌را درمورد $\mathbf{r}/r^3$ به‌کار ببریم، حتی‌درناحیه‌ای که‌حاوی نقطهٔ تکین درمبدأ است. هرجاکه باانتگرال روی‌واگرایی $\mathbf{r}/r^3$، یاروی‌لاپلاسی $1/r$، برمی‌خوریم تابع دلتا بسیارسودمند خواهد بود.

۱۱.۲ خلاصهٔ مطالب

الکتروستاتیك برقانون‌کولن مبتنی است. طبق این قـانون نیروی الکتروستاتیکی وارد بربارنقطه‌ای q در $\mathbf{r}$، ازطرف بارنقطه‌ای q_1 درمبدأ، به‌صورت زیراست

$$\mathbf{F}_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q q_1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

که درآن ε_0 دردستگاه یکاهای mks برابر $8.854 \times 10^{-12}\ C^2/N \cdot m^2$ و دردستگاه گاؤسی برابر $1/4\pi$ است. بهتر آن‌است که بار q را به‌عنوان بارآزمون درنظربگیریم و میدان الکتریکی $\mathbf{E}$، متناظر بانیروی الکتریکی $\mathbf{F}_e$، را به‌کمك آن ازرابطهٔ زیرتعریف کنیم

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$$

میدان الکتروستاتیکی ناشی ازبارنقطه‌ای q_1 واقع در $\mathbf{r}_1 = 0$، درنقطهٔ $\mathbf{r}$، عبارت است از

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

تاو و واگرایی $\mathbf{E}$ هردو حائزاهمیت اساسی‌اند

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$$

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 4\pi\,\delta(\mathbf{r})$$

که درآن تابع دلتای دیراك باروابط زیرتعریف می‌شود

$$\delta(\mathbf{r}) = 0 \qquad \mathbf{r} \neq 0 \quad \text{به‌ازای}$$

$$\int \delta(\mathbf{r})\, dv = 1$$

تابع دلتا این خاصیت را داردکه برای هرتابع F داریم

$$\int F(\mathbf{r})\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\, dv = F(\mathbf{r}_0)$$

ازاین رو برای یك بار نقطه‌ای به‌دست می‌آید

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_1\,\delta(\mathbf{r})$$

۱. قانون کولن را می‌توان به‌دستگاههایی که چندین بار نقطه‌ای دارند، یا به توزیع

پیوسته‌ای باچگالی بار $\rho(\mathbf{r})$ تعمیم داد. دراینجا $\rho(\mathbf{r})$ به‌صورتی تعریف می‌شود که در آن عنصر باردرعنصرحجم dv عبارت خواهد بود از

$$dq = \rho(\mathbf{r})\, dv$$

برای بارنقطه‌ای q_i در $\mathbf{r}_i$، داریم

$$\rho(\mathbf{r}) = q_i\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

چون نیروها ومیدانها جمع‌پذیرند، بنابراین

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\, \rho(\mathbf{r}')\, dv'$$

از آنجا که ∇ عملگری خطی است، داریم

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\, \rho(\mathbf{r})$$

اینها معادلات دیفرانسیلی اساسی‌اندکه بایدهمهٔمیدانهای الکتروستاتیکی درهرنقطه‌به‌طور موضعی درآنها صدق کنند. (درواقع، معادلهٔ واگرایی حتی برای میدانهای وابسته به‌زمان نیزصادق است، ویکی ازچهارمعادلهٔ اساسی ماکسول به‌حساب می‌آید.)

۲. قانون گاؤس باانتگرال گرفتن از دو طرف معادلهٔ واگرایی روی حجم اختیاری V، و به‌کاربردن قضیهٔ واگرایی به‌دست می‌آید وبه‌صورت زیر است

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, da = \frac{1}{\varepsilon_0}\, Q$$

که درآن

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r})\, dv$$

و Q بارکل موجود درداخل حجم V است، حجمی که توسط S محصور شده است. در موارد خاصی که بتوان بادلایل‌کافی استدلال کردکه بزرگی و راستای $\mathbf{E}$ نسبت به‌سطح انتخابی S ثابت‌است، این‌قانون عملا برای محاسبهٔ E به‌کارمی‌رود، وهمچنین نشان‌می‌دهد که باریك رسانا باید روی سطح بیرونی‌آن قرارگیرد.

۳. تابع پتانسیل الکتروستاتیکی $\varphi(\mathbf{r})$ از معادلهٔ تاو نتیجه می‌شود، به طوری که

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi$$

برای میدان مفروض $\mathbf{E}$

$$\varphi(\mathbf{r})=-\int_{r_0}^{r}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

درمورد یك توزیع بارمشخص

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dv'$$

محاسبهٔ این انتگرال ازمحاسبهٔ انتگرال مربوط به $\mathbf{E}$ راحت‌تر است. پتانسیل نرده‌ای φ با رابطهٔ زیر به‌انرژی پتانسیل U، مربوط به‌نیروی الکتروستاتیکی پایستار، ربط پیدا می‌کند

$$U=q\varphi$$

۴. در فاصلهٔ دور از ناحیه‌ای که در آن بارهای چشمه ρ قرار گرفته‌اند، بسط φ برحسب چند قطبیها مفید است

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r}+\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}+\cdots\right]$$

که درآن

$$\mathbf{p}=\int_V\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\,dv'$$

گشتاور دوقطبی توزیع باراست. معمولا اولین جملهٔ غیرصفر در بسط بیشترین اهمیت را دارد. ما تنها دوجملهٔ اول‌را بررسی می‌کنیم.

مسائل

۱.۲ دو ذره هریك به‌جرم m و بار q، بادونخ هریك به‌طول l از نقطه‌ای مشترك آویزان شده‌اند. زاویهٔ θ راکه هرنخ باخط قائم می‌سازد پیدا کنید.

۲.۲ بار دو کرهٔ رسانای کوچک همسان به‌ترتیب برابر است با $2.5 \times 10^{-9}C$ و $-5.0 \times 10^{-9}C$. وقتی این دو کره درفاصلهٔ ۴ سانتیمتری از یکدیگر قرار گیرند چه نیرویی به یکدیگر وارد می‌کنند؟ اگر آنها را به‌هم نزدیک کنیم تا تماس حاصل کنند و بعد به‌اندازهٔ ۴ سانتیمتر آنها را از یکدیگر دور کنیم، چه نیرویی به یکدیگر وارد خواهند کرد؟

۳.۲ سه بار نقطه‌ای که بار هریک از آنها $3 \times 10^{-9}C$ است درسه رأس مربعی به‌ضلع ۱۵cm قرار گرفته‌اند. مقدار وجهت میدان الکتریکی را دررأس بدون بار این مربع پیدا کنید.

۴.۲ خط بار بسیار طویلی با چگالی بار یکنواخت λ در واحد طول مفروض است. با انتگرال گیری مستقیم میدان الکتریکی را درفاصلهٔ r ازاین خط بارپیدا کنید.

۵.۲ (الف) قرصی مدور به‌شعاع R چگالی سطحی باریکنواخت σ دارد. میدان الکتریکی را درنقطه‌ای واقع برمحور قرص و درفاصلهٔ z از صفحهٔ آن پیدا کنید. (ب) استوانه‌ای قائم به‌شعاع R وارتفاع L درامتداد محور z قرار دارد. چگالی حجمی بار این استوانه نسبت به‌مبدئی واقع درمرکز آن نایکنواخت است وبه‌صورت تابع $\rho(z) = \rho_0 + \beta z$ داده می‌شود. نیروی وارد بر بار نقطه‌ای q راکه درمرکز این استوانه قرار گرفته‌است محاسبه کنید.

۶.۲ یك پوستهٔ کروی رسانای نازك به‌شعاع R به‌طوریکنواخت باردار شده است و بار کل آن Q است. باانتگرال‌گیری مستقیم، پتانسیل را درنقطه‌ای اختیاری واقع در (الف) داخل پوسته و (ب) خارج پوسته پیدا کنید.

۷.۲ دوبارنقطه‌ای $-q$ و $+1/2\, q$ به‌ترتیب درمبدأ مختصات ودرنقطهٔ $(a, 0, 0)$ قرارگرفته‌اند. درچه نقطه‌ای روی محور x میدان الکتریکی صفرمی‌شود؟ در صفحهٔ x - y سطح هم‌پتانسیلی راکه ازاین نقطه می گذرد رسم کنید. آیا این نقطه، نقطهٔ کمینهٔ واقعی پتانسیل است؟

۸.۲ نشان دهیدکه سطح هم پتانسیل $\varphi = 0$ درمسئلهٔ قبل کروی شکل‌است. مختصات‌مرکز این کره را پیدا کنید.

۹.۲ استوانه‌ای قائم به‌شعاع R و ارتفاع L، باچگالی باریکنواخت ρ، مفروض است. پتانسیل الکتروستاتیکی را در نقطه‌ای واقع برمحور استوانه ولی خارج از توزیع بار محاسبه کنید.

۱۰.۲ میدان الکتریکی درتمام نقاط یك ناحیه ازفضا موازی محور x است. ثابت کنید که دراین ناحیه میدان الکتریکی به‌مختصات y و z بستگی ندارد. اگردراین ناحیه‌ازفضا باری وجود نداشته باشد ثابت کنیدکه میدان به‌متغیر x نیز بستگی نخواهد داشت.

۱۱.۲ بافرض اینکه قدرت دی‌الکتریکی هوا (یعنی آن مقدارمیدان الکتریکی که‌دربالاتر

از آن هوارسانا می‌شود) مساوی $3\times10^{6}\,V/m$ باشد، (الف) حداکثر پتانسیلی را که یك کرهٔ رسانای منزوی به‌شعاع $10\,cm$ می‌تواند داشته باشد چقدر است؟ (ب) شعاع رسانایی که بتواند یك کولن بار داشته باشد چقدر است؟

۱۲.۲ حفره‌ای دردرون یك جسم رسانا موجود است. اگر بار نقطه‌ای q را در داخل حفره قراردهیم، ثابت کنید باری به‌مقدار $-q$ درسطح آن القا می‌شود (ازقانون گاؤس استفاده کنید).

۱۳.۲ میدان الکتریکی درجو درنزدیکی سطح زمین تقریباً $200\,V/m$ وجهت آن به‌طرف پایین است. درارتفاع $1400\,m$ میدان الکتریکی درجو فقط $20\,V/m$ و به‌سمت پایین است. چگالی متوسط باردرجو درارتفاع کمتراز $1400\,m$ چقدراست؟ آیا این بار بیشتر ازیونهای مثبت تشکیل شده است یا ازیونهای منفی؟

۱۴.۲ دوصفحهٔ رسانای نامتناهی وموازی به‌فاصلهٔ d ازیکدیگرقراردارند. اگر چگالی سطحی باردرسطوح داخلی این صفحات به‌ترتیب σ و $-\sigma$ ویکنواخت باشدمیدان الکتریکی را درفضای میان دوصفحه به‌دست آورید. ثابت کنید که میدان الکتریکی درفضای خارج دو صفحه صفر است. [میدان الکتریکیی که دو صفحهٔ رسانای باردار موازی ومتناهی درفضای میان دوصفحه تولید می‌کنند اساساً بامیدان الکتریکیی که دربالا به‌دست آمد یکسان است، مشروط به‌آنکه ابعاد سطوح این صفحه‌ها درمقایسه‌بافاصلهٔ d میان آنها بزرگ باشند؛ چنین آرایشی‌را خازن می‌نامند (رك فصل ۶).]

۱۵.۲ چگالی حجمی بار در یك توزیع بارکروی تابعی است که فقط به r، فاصلهٔ از مرکز توزیع، بستگی دارد. به‌عبارت دیگر $\rho=\rho(r)$. اگر $\rho(r)$ به صورت تابعی که در زیرمی‌آید باشد، میدان الکتریکی را به‌صورت تابعی از r به‌دست آورید. بافرض اینکه پتانسیل الکتریکی دربینهایت صفراست، یعنی $\varphi(\infty)=0$، با انتگرال‌گیری از نتیجهٔ بالا پتانسیل الکتروستاتیکی، $\varphi(r)$ را پیدا کنید.

(الف) به‌ازای $0\leqslant r\leqslant R$، $\rho=A/r$ و A مقدار ثابتی است؛
به‌ازای $r>R$، $\rho=0$

(ب) به‌ازای $0\leqslant r\leqslant R$، $\rho=\rho_0$ (یعنی ثابت است)؛
به‌ازای $r>R$، $\rho=0$.

۱۶.۲ میله‌ای گرد باطول بینهایت و شعاع R دارای چگالی بار یکنواخت ρ است. با استفاده از قانون گاؤس میدان الکتریکی را در فواصل $r>R$ و $r<R$ به‌دست آورید.

۱۷.۲ تاو و واگرایی بردار $\mathbf{r}/r^{a}$ را حساب کنید. کدام چگالی باری، $\rho(r)$، میدان الکتریکی زیررا تولید می‌کند

$$\mathbf{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^a}$$

پتانسیل این میدان کدام است؟

۱۸.۲ فرض کنید که نما درمیدان کولنی دقیقاً ۳ نیست بلکه برابر است با $a=3-\delta$، که درآن $\delta \ll 1$. انتگرال $\nabla\cdot\mathbf{E}$ را درحجم کره‌ای به‌شعاع R که‌بار q درمرکز آن‌قرار دارد، حساب کنید.

۱۹.۲ پتانسیل استتارشدهٔ کولنی، که به‌صورت زیر است

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-r/\lambda}}{r}$$

معمولا درمحیط رسانا پدیدارمی‌شود. میدان الکتریکی وچگالی بارمربوط به‌این پتانسیل را به‌دست‌آورید.

۲۰.۲ بااستفاده ازمعادلهٔ (۳۹.۲) برای پتانسیل حاصل ازدوقطبی $\mathbf{p}$، طرحی از مقاطع سطوح هم‌پتانسیل‌را درصفحه‌ای‌که حاوی دوقطبی باشد، رسم کنید. برای سهولت‌می‌توان دوقطبی‌را درمبدأ مختصات قرارداد. بااستفاده ازنتایج به‌دست‌آمده بعضی از خطوط نیرو را رسم کنید. نتیجه‌را باشکل ۱.۲ مقایسه کنید.

۲۱.۲ (الف) نشان دهیدکه بردوقطبی $\mathbf{p}$، که در میدان خارجی $\mathbf{E}_{ext}$ قرار گرفته است، نیرویی برابر با $\mathbf{p}\cdot\nabla\mathbf{E}_{ext}$ وارد می‌شود. (ب) نشان دهیدکه گشتاورنیروی وارد براین دو قطبی دراین میدان عبارت است از

$$\tau=\mathbf{r}\times[\mathbf{p}\cdot\nabla\mathbf{E}_{ext}]+\mathbf{p}\times\mathbf{E}_{ext}$$

که درآن $\mathbf{r}$ فاصلهٔ برداری دوقطبی است ازنقطه‌ای‌که گشتاور نیرو نسبت به‌آن محاسبه می‌شود. کمیت $\mathbf{p}\times\mathbf{E}_{ext}$، که به‌مختصات نقطه‌ای‌که گشتاورنیرونسبت به‌آن محاسبه می‌شود بستگی ندارد، جفت چرخشی وارد بردوقطبی نامیده می‌شود.

۲۲.۲ سه‌بار دریك آرایش خطی قرارگرفته‌اند. بار $-2q$ در مبدأ مختصات و دوبار دیگرکه مقدار هریك $+q$ است، به‌ترتیب درنقاط $(0, 0, l)$ و $(0, 0, -l)$ واقع‌اند. رابطهٔ نسبتاً ساده‌ای برای پتانسیل $\varphi(\mathbf{r})$ که درفواصل $|\mathbf{r}|\gg l$ صادق باشد پیدا کنید و سطوح هم پتانسیل‌آن را درصفحهٔ $x-z$ رسم کنید.

۲۳.۲ تانسورگشتاورچهارقطبی توزیع بارمسئلهٔ ۲۲.۲ را پیدا کنید.

۲۴.۲ بااستفاده ازتوابع δ درمورد توزیع بارهای نقطه‌ای، نشان دهیدکه گشتاوردوقطبی

یك زوج بار نقطه‌ای، یعنی $\mathbf{p}=ql$، از تعریف کلی زیر نتیجه می‌شود

$$\mathbf{p}=\int \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\,dv'$$

۲۵.۲ فرض کنید مولکولی عبارت است از بار $2q$ — درمبدأ مختصات ودوبار $+q$ که درنقاط $\mathbf{l}_1$ و $\mathbf{l}_2$ قراردارند و $|\mathbf{l}_1|=|\mathbf{l}_2|=l$ است.
(الف) گشتاور دوقطبی مولکول را پیدا کنید.
(ب) برای مولکول H_2O، $l=0.958\times10^{-10}\,\mathrm{m}$ وزاویهٔ میان $\mathbf{l}_1$ و $\mathbf{l}_2$ برابر 105° است. اگر $|\mathbf{p}|=6.14\times10^{-30}\,\mathrm{C\cdot m}$ باشد، بارمؤثر q را به‌دست آورید.

۲۶.۲ میدان الکتریکی دوقطبی نقطه‌ای‌را بامحاسبهٔ شیب تابع زیر به‌دست‌آورید

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$$

۳

حل مسائل الکتروستاتیك

برای حالتی که درآن توزیع بار در همه جا مشخص شده است حل مسائل الکتروستاتیك کاملاساده‌است زیرا، همان‌طورکه دیدیم، پتانسیل ومیدان الکتریکی مستقیماً باانتگرالهایی برروی این توزیع بارمحاسبه می‌شوند

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \qquad (۱.۳)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')dq'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \qquad (۲.۳)$$

ولی بسیاری ازمسائل که درعمل به‌آنها برمی‌خوریم ازاین نوع نیستند. چنانچه توزیع بار ازقبل مشخص نشده باشد، ممکن است لازم شود قبل ازتعیین توزیع بار ابتدا میدان الکتریکی را محاسبه کنیم. مثلا یك مسئلهٔ الکتروستاتیك ممکن است شامل چند جسم رسانا باشدکه پتانسیل یا بارکل هریك ازآنها معلوم باشد، اماتوزیع بارهای سطحی به‌طورکلی معلوم نخواهد بود وقبل ازحل‌کامل مسئله به‌دست نخواهد آمد.

هدف ما دراین فصل معرفی راه دیگری است برای حل مسائل الکتروستاتیك. برای این‌کار نخست معادلهٔ دیفرانسیل اصلی راکه پتانسیل φ می‌باید درآن صدق کند به‌دست می‌آوریم. در اینجا از بحث دربارهٔ اجسام دی‌الکتریك چشم می‌پوشیم. این گونه مسائل را درفصل ۴ حل خواهیم کرد.

۱.۳ معادلهٔ پواسون

کلیهٔ روابط اساسی لازم برای مطالعهٔ این فصل‌را در فصل گذشته به‌دست آورده‌ایم. یکی ازاین روابط اساسی شکل دیفرانسیلی قانون گاؤس است که به‌صورت زیراست

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \qquad (۳.۳)$$

به‌علاوه، دریك میدان الکتروستاتیکی محض، $\mathbf{E}$ را می‌توان به‌صورت منفی شیب پتانسیل φ نوشت

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi \qquad (۴.۳)$$

ازترکیب روابط (۳.۳) و (۴.۳) نتیجه می‌شود

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (۵.۳ \text{ الف})$$

بهتراست واگرایی شیب را به‌صورت یك تك عملگر دیفرانسیلی مثلابه‌صورت $\nabla \cdot \nabla$ یا ∇^2 درنظربگیریم. نماد ∇^2 بیشتربه‌کارمی‌رود وبه عملگرلاپلاسی معروف است:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (۵.۳ \text{ ب})$$

بدیهی است که لاپلاسی، یك عملگر نرده‌ای است. معادلهٔ (۵.۳ ب) یك معادلهٔ دیفرانسیلی است کـه به‌معادلهٔ پواسون مشهوراست. عملگر ∇^2 شامل مشتق گیری نسبت به‌بیش ازیك متغیراست. بنابراین، معادلهٔ پواسون معادله‌ای است بامشتقات پاره‌ای که بادردست داشتن بستگی تابعی $\rho(x, y, z)$ وشرایط مرزی مناسب می‌توان آن‌را حل کرد.

عملگر ∇^2 درست نظیر ∇ و $\nabla \cdot$ و $\nabla \times$ به‌دستگاه مختصات خاصی بستگی ندارد. برای حل یك مسئلهٔ معین باید عملگر ∇^2 را برحسب x، y، z، یا r، θ، ϕ ویا مانند آنها نوشت. انتخاب هردستگاه به‌خصوصی ازمختصات اختیاری است، اما چنانچه بادر نظـر گرفتن تقارن خاص موجود درمسئله، دستگاه مختصات مناسبی انتخاب شود حل آن بسیار راحت خواهد بود. شکل $\nabla^2 \varphi$ در دستگاههای مختصـات مختلف را می‌توانیم به‌راحتی باتأثیر دادن عملگر $\nabla \cdot$ برشیب φ پیداکنیم. با به‌کار بردن عبارات مربوط فصل ۱ نتایج زیر به‌دست می‌آید:

در دستگاه مختصات قائم:

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \qquad (۶.۳)$$

دردستگاه مختصات کروی:

$$\nabla^2\varphi\equiv\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} \tag{۷.۳}$$

دردستگاه مختصات استوانه‌ای:

$$\nabla^2\varphi\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \tag{۸.۳}$$

برای یافتن شکل لاپلاسی دردستگاههای مختصات پیچیده‌تر خواننده می‌تواند به منابع پایان این فصل مراجعه کند. باید توجه داشت که r و θ درمعادلات (۷.۳) و (۸.۳) معانی متفاوتی دارند؛ درمختصات کروی، r بزرگی بردار شعاعی نسبت به‌مبدأ مختصات و θ زاویهٔ قطبی است. درمختصات استوانه‌ای r فاصلهٔ عمود از محور استوانه و θ زاویهٔ سمت درحول این محوراست.

۲.۳ معادلهٔ لاپلاس

دربعضی مسائل الکتروستاتیک که شامل رساناها هستند، تمام بارها یا درروی سطح رساناها یافت می‌شوند و یا به‌صورت بارهای نقطه‌ای ثابت‌اند. دراین موارد ρ دراکثر نقاط فضا مساوی صفر است، و هرجا که چگالی بارصفر باشد معادلهٔ پواسون به‌صورت ساده‌تر زیر درمی‌آید

$$\nabla^2\varphi=0 \tag{۹.۳}$$

که به معادلهٔ لاپلاس معروف است.

فرض کنید N رسانا درپتانسیلهای φ_I، φ_{II}، . . .، φ_N قراردارند. مسئله‌ای که‌می‌خواهیم حل کنیم پیدا کردن پتانسیل درتمام نقاط فضای خارج از رساناهاست. برای انجام این‌کار باید جوابی برای معادلهٔ لاپلاس پیدا کنیم که مقدار آن درروی سطح رساناها به φ_I، φ_{II}، . . .، φ_N تبدیل شود. می‌توان نشان داد که چنین جوابی برای معادلهٔ لاپلاس جوابی یکتاست، یعنی هیچ جواب دیگری برای معادلهٔ لاپلاس وجود ندارد که درهمان شرایط مرزی صدق کند. اثبات این حکم درزیر خواهدآمد. جواب معادلهٔ لاپلاس که بدین طریق به‌دست می‌آید در درون رساناها صدق نمی‌کند، زیرا رساناها بارسطحی دارند، و این بدان معناست که شیب φ از یك طرف به‌طرف دیگر سطح ناپیوستگی دارد (بخش ۷.۲). اما قبلا دیدیم که فضای داخل هررسانا ناحیه‌ای است باپتانسیل ثابت و بنابراین جواب

مسئلهٔ ما کامل است.

دو روش را برای حل معادلهٔ لاپلاس به‌تفصیل شرح می‌دهیم. روش اول پیدا کردن یك جواب کلی برای معادلهٔ (۹.۳) است به‌وسیلهٔ ترکیب جوابهای خصوصی معادله در دستگاه مختصاتی که تقارن موجود در مسئله آن را ایجاب می‌کند؛ روش دوم روش تصویرهاست. علاوه براین ، جواب کلی مسئله را، در فضای دو بعدی، به‌دست می‌آوریم. ولی قبل ازپرداختن به‌این روشهای خاص به‌اثبات بعضی خواص مهم جواب معادلهٔ لاپلاس می‌پردازیم.

قضیهٔ اول. اگر φ_1، φ_2، ...، φ_n همگی جوابهای معادلهٔ لاپلاس باشند آنگاه φ،

$$\varphi = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \cdots + C_n\varphi_n \qquad (10.3)$$

که درآن C ها ثابتهای اختیاری‌اند نیزجواب این معادله خواهد بود.

اثبات این مطلب مستقیماً ازتساویهای زیر نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\nabla^2\varphi &= \nabla^2 C_1\varphi_1 + \nabla^2 C_2\varphi_2 + \cdots + \nabla^2 C_n\varphi_n \\ &= C_1\nabla^2\varphi_1 + C_2\nabla^2\varphi_2 + \cdots + C_n\nabla^2\varphi_n \\ &= 0\end{aligned}$$

بااستفاده ازقضیهٔ اول می‌توان دویا چند جواب از معادلهٔ لاپلاس را طوری باهم ترکیب کردکه جواب حاصل درمجموعه‌ای ازشرایط مرزی صدق کند. دربخشهای آینده مثالهایی دراین مورد خواهید دید.

قضیهٔ دوم (قضیهٔ یکتایی). دوجواب معادلهٔ لاپلاس‌که در شرایط مرزی یکسانی صدق کنند یا باهم برابرند یا اختلافشان عدد ثابتی است.

برای اثبات این قضیه ناحیهٔ بسته‌ای به‌حجم V_0 راکه درخارج ازسطوح‌رساناهای گونا گون موجود درمسئله، یعنی S_I، S_{II}، ...، S_N قرار گرفته وتوسط سطح S مسدود شده است درنظرمی‌گیریم. سطح اخیرمی‌تواند یا دربینهایت قرارداشته باشد یا سطحی واقعاً فیزیکی باشدکه حجم V_0 را درمیان گرفته‌است. فرض‌کنید φ_1 و φ_2 دوجواب‌معادلهٔ لاپلاس در فضای V_0اند و علاوه بر این شرایط مرزی یکسانی بر روی سطوح S، S_I، S_{II}، ...، S_N دارند. این‌شرایط مرزی با تعیین مقدار φ ویا $\partial\varphi/\partial n$ برروی این سطوح مرزی مشخص می‌شوند.

تابع جدید $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$ را تعریف می‌کنیم . بدیهی است که در فضای V_0،

$\nabla^2\Phi=\nabla^2\varphi_1-\nabla^2\varphi_2=0$ است. به‌علاوه یا Φ و یا $\mathbf{n}\cdot\nabla\Phi$ درروی سطوح‌مرزی‌صفر می‌شود. اکنون قضیهٔ واگرایی‌را درمورد بردار $\Phi\nabla\Phi$ به‌کارمی‌بریم

$$\int_{V_0}\nabla\cdot(\Phi\nabla\Phi)\,dv=\int_{s+s_1+\ldots s_N}\Phi\nabla\Phi\cdot\mathbf{n}da$$
$$=0$$

نتیجه صفراست زیرا انتگرال دوم مساوی صفرمی‌شود. واگرایی را می‌توان برطبق معادلهٔ (۷.۱.۱) ازجدول ۱.۱ طوری بسط دادکه نتیجه زیر به‌دست بیاید

$$\nabla\cdot(\Phi\nabla\Phi)=\Phi\nabla^2\Phi+(\nabla\Phi)^2$$

اما $\nabla^2\Phi$ در تمام نقاط V_0 صفر است، پس قضیهٔ واگرایی دراین حالت به صورت زیر درمی‌آید

$$\int_{V_0}(\nabla\Phi)^2\,dv=0$$

اما $(\nabla\Phi)^2$ درهرنقطه در V_0 باید صفریا مثبت باشد، وچون انتگرال آن مساوی صفراست، واضح است که فقط $(\nabla\Phi)^2=0$ امکان‌پذیرخواهد بود.

قضیه دراساس ثابت شده‌است. تابعی که شیب آن درتمام نقاط صفرباشد نمی‌تواند تغییر کند؛ پس درتمام نقاط V_0، مقدار Φ همان مقداری است‌که در روی سطوح مرزی دارد. اگرشرایط مرزی بامشخص‌کردن φ_1 و φ_2 در روی سطوح مرزی S، S_1، ...، S_N داده شده باشند، آنگاه چون Φ درروی این سطوح صفر است مقدارآن درسراسر V_0 مساوی صفرخواهد بود. چنانچه شرایط مرزی برحسب $\partial\varphi_1/\partial n$ و $\partial\varphi_2/\partial n$ داده شده باشند، آنگاه $\nabla\Phi\cdot\mathbf{n}=0$ درهمهٔ نقاط V_0 برابرصفراست ودرروی مرزها. تنهاجواب موافق باحکم اخیراین است‌که Φ برابرباعدد ثابتی باشد.

۳.۳ معادلهٔ لاپلاس بایك متغیر مستقل

اگر φ فقط تابعی ازیك متغیر باشد، معادلهٔ لاپلاس به‌یك معادلهٔ دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود. حالتی را درنظر بگیرید که φ به‌صورت $\varphi(x)$، یعنی تابعی از یك مختص قائم x باشد. دراین صورت معادلهٔ لاپلاس وجواب عمومی‌آن عبارت است از

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}=0 \quad \text{و} \quad \varphi(x)=ax+b \qquad (۱۱.۳)$$

که درآن a و b ثابتهایی‌اند که بادرنظر گرفتن شرایط مرزی انتخاب می‌شوند. این‌همان نتیجه‌ای است که درفصل قبل برای پتانسیل میان دوصفحهٔ رسانای باردار که برمحور x عمود بودند پیدا کردیم.

درسایردستگاههای مختصات، وقتی φ تابعی ازیك متغیر باشد، وضع ازاین بغرنجتر نخواهد بود. درمختصات کروی که درآن φ به‌صورت $\varphi(r)$ است، معادلهٔ لاپلاس وجواب عمومی آن چنین می‌شود

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right)=0 \Rightarrow \varphi(r)=-\frac{a}{r}+b \qquad (۱۲.۳)$$

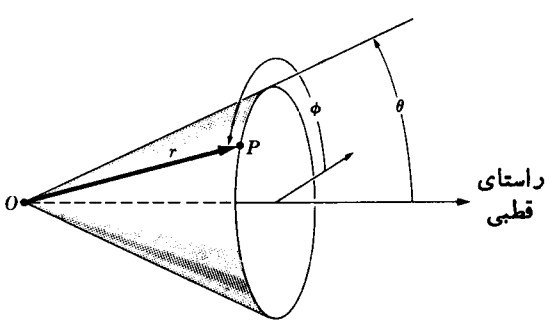
حل عمومی معادلهٔ لاپلاس درمختصات استوانه‌ای‌را برای تابعی که مستقل از θ و z است، یعنی برای $\varphi(r)$، به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

۴.۳ حل معادلهٔ لاپلاس درمختصات کروی . هماهنگهای منطقه‌ای

اکنون به‌حل معادلهٔ لاپلاس که درآن φ تابعی ازبیش ازیك متغیراست برمی‌گردیم. بسیاری ازمسائل مورد علاقهٔ ما رساناهایی به‌شکل کره یا استوانه هستند، و بنابراین به‌جوابهای معادلهٔ لاپلاس در مختصات کروی یا استوانه‌ای نیازدارند. ابتدا مسئله را در مختصات کروی حل می‌کنیم، اما بهتراست این بحث را به‌مواردی محدودکنیم که درآنها φ به‌زاویهٔ سمت ϕ بستگی نداشته باشد. چنین محدودیتی ردهٔ مسائلی‌راکه می‌توانیم حل کنیم محدود می‌کند، اما بسیاری ازمسائل جالب فیزیك دراین رده قرار می‌گیرند ومسائل پیچیده‌تر نیز درواقع از محدودهٔ این کتاب خارج‌اند.

برای موردکروی، φ به‌صورت $\varphi(r, \theta)$ است که درآن r بردارشعاع ازمبدأ ثابت O و θ زاویهٔ قطبی است (رك شکل ۱.۳). دراین مورد، بااستفاده ازمعادلهٔ (۷.۳)، معادلهٔ لاپلاس به‌صورت زیرنوشته می‌شود

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)=0 \qquad (۱۳.۳)$$



شکل ۱.۳ محل نقطهٔ P برحسب مختصات کروی r، θ، ϕ.

این معادلهٔ بامشتقات پاره‌ای به‌روشی حل می‌شود که به‌جداسازی متغیرها معروف است. جوابی‌را به‌صورت $\varphi(r, \theta)=Z(r)P(\theta)$ فرض می‌کنیم و آن‌را درمعادلهٔ (۱۳.۳)قرار می‌دهیم، نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{r^2}P(\theta)\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right)+\frac{Z(r)}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)=0 \qquad (۱۴.۳)$$

توجه کنید که مشتقات پاره‌ای با مشتقات کلی جایگزین شده‌اند، زیرا Z و P هریك تابعی ازیك متغیرند. معادلهٔ (۱۴.۳) را، پس از تقسیم کردن آن بر $\varphi(r, \theta)$ وضرب کردن آن در r^2، به‌صورت زیردرمی‌آوریم

$$\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right)=-\frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) \qquad (۱۵.۳)$$

سمت چپ این معادله فقط تابعی از r وسمت راست آن فقط تابعی از θ است. تنها راه برای آنکه تابعی از r بتواند باتابعی از θ به‌ازای همهٔ مقادیر r و θ برابرباشد این‌است که‌هردوتابع ثابت باشند. پس‌هریك ازدوطرف معادلهٔ (۱۵.۳)را مساوی k قرارمی‌دهیم؛ k «ثابت جداسازی» است.

همهٔ مقادیر k لزوماً جوابهایی‌که از نظرفیزیکی قابل قبول باشند به‌دست نمی‌دهند. ابتدا معادلهٔ θ را درنظر بگیرید

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+kP=0 \qquad (۱۶.۳)$$

این معادله به‌معادلهٔ لژاندر معروف است و تنها جوابهای قابل قبول فیزیکی تعریف شدهٔ آن درگسترهٔ‌کامل θ (ازصفرتا π) به $k=n(n+1)$ مربوط می‌شوند، که درآن nعددی درست و مثبت است. جواب مربوط به‌مقدار خاص n را با $P_n(\theta)$ نشان خواهیم داد. جوابهای معادلهٔ (۱۶.۳) به‌ازای مقادیردیگرk، درحوالی $\theta=0$ یا $\theta=\pi$ بد رفتارند و به‌ازای این مقادیر بینهایت یا مبهم می‌شوند.[1] این‌جوابها باشرایط مرزی فیزیکی سازگار نیستند وباید آنها راکنار گذاشت.[2]

---

۱. بحث اینجاخیلی خلاصه‌بود. خوانندهٔ علاقه‌مند به‌بحث مفصل معادلهٔ لژاندر می‌تواندبه‌کتبی که بیشترجنبهٔ ریاضی دارند مثلا، به‌کتابهایی‌که در فهرست پایان این فصل‌آمده است مراجعه کند. معادلهٔ لژاندر، باتغییر متغیر $x=\cos\theta$ معمولا به‌صورتی متفاوت نوشته می‌شود، و در این‌صورت جوابهای‌آن را با $P_n(x)$ یا $P_n(\cos\theta)$ نمایش می‌دهند.

۲. این حکم نیازمند توضیح بیشتری است. در برخی مسائل الکتروستاتیکی ناحیهٔ اطراف $\theta=0$ و $\theta=\pi$ را می‌توان به‌طور طبیعی، مثلا به‌کمك سطوح رسانای مخروطی شکل، کنار گذارد. تحت این شرایط ممکن است جوابهای معادلهٔ (۱۶.۳) به‌ازای سایرمقادیر k قابل استفاده باشند. این قبیل مسائل را دراینجا بررسی نمی‌کنیم.

جوابهای قابل قبول (یعنی، $P_n(\theta)$) چندجمله‌ایهایی‌اند برحسب $\cos\theta$ که معمولا چند جمله‌ایهای لژاندر نامیده می‌شوند. چهارتابع اول لژاندر درجدول ۱.۳ آمده است. ازمعادلهٔ (۱۶.۳) پیداست که می‌توان P_n را درهرعدد ثابت دلخواهی ضرب کرد.

جدول ۱.۳ چندجمله‌ایهای لژاندر به‌ازای $n=0, 1, 2, 3$

n	$P_n(\theta)$
۰	۱
۱	$\cos\theta$
۲	$\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$
۳	$\frac{1}{2}(5\cos^3\theta-3\cos\theta)$

اکنون به‌معادلهٔ شعاعی برمی‌گردیم

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right)=n(n+1)Z \qquad (17.3)$$

دراین معادله ماصورت صریح k را که به‌جوابهای قابل قبولی برای θ منجر می‌شود، به‌کار برده‌ایم. بررسی معادلهٔ (۱۷.۳) نشان می‌دهد که دوجواب مستقل آن عبارت‌اند از

$$Z_n=r^n \quad \text{و} \quad Z_n=r^{-(n+1)}$$

جوابهای معادلهٔ لاپلاس به‌صورت حاصل ضرب $\varphi_n(r,\theta)=Z_n(r)\times P_n(\theta)$ به‌دست می‌آیند، که درآن باید دقت شود Z و P هردو مربوط به‌یك مقدار n باشند. رعایت این امر الزامی است، زیرا هر دو طرف معادلهٔ (۱۵.۳) با یك مقدار ثابت، یعنی $n(n+1)$، برابرند.

درنتیجهٔ بحث بالا، ما معادلهٔ لاپلاس را دردستگاه مختصات کروی حل کرده‌ایم و جوابهایی‌را که به‌هماهنگهای منطقه‌ای معروف‌اند به‌دست آورده‌ایم

$$\varphi_n=r^nP_n(\theta) \quad \text{یا} \quad \varphi_n=r^{-(n+1)}P_n(\theta) \qquad (18.3)$$

دراین جوابها $P_n(\theta)$ یکی از چند جمله‌ایهای جدول ۱.۳ است و n عدد صحیح مثبت یا صفراست. هماهنگهای منطقه‌ای مجموعهٔ کاملی ازتوابع را تشکیل می‌دهند؛ یعنی جواب عمومی معادلهٔ لاپلاس را می‌توان برطبق قضیهٔ اول بابرهم نهی این جوابها به‌دست آورد،

مشروط به‌اینکه مسئلهٔ فیزیکی مفروض تقارن سمتی مناسب را داشته باشد. اکنون چندتایی ازاین‌هماهنگها را به‌خوبی می‌شناسیم: یکی‌ازجوابهای مربوط به $n=0$ (یعنی $\varphi=\text{const.}$) جواب بدیهی معادلهٔ لاپلاس است که درهر دستگاه مختصاتی معتبر است. هماهنگ منطقه‌ای r^{-1} پتانسیل بارنقطه‌ای است؛ و $r^{-2}\cos\theta$ پتانسیل دوقطبی است.

۵.۳ کرهٔ رسانا درمیدان الکتریکی یکنواخت

مفید بودن هماهنگهای منطقه‌ای برای حل مسائل الکتروستاتیکی باتقارن سمتی را با حل مسئلهٔ کرهٔ رسانای بی‌باردرمیدان الکتریکی $\mathbf{E}_0$، که درآغازیکنواخت‌است، نشان می‌دهیم. خطوط میدان یکنواخت موازی یکدیگرند، لیکن حضورجسم رسانا میدان را طوری‌تغییر می‌دهد که خطوط میدان برسطح جسم رسانا، که یك سطح هم پتانسیل است، عمود شوند. اگرراستای میدان الکتریکی یکنواخت‌آغازی را راستای قطبی (راستای z) اختیار کنیم، ومبدأ مختصات را برمرکز کره منطبق بگیریم، آنگاه ازتقارن مسئله پیداست که پتانسیل به‌زاویهٔ سمتی ϕ بستگی ندارد و می‌توان آن را به‌صورت مجموعه‌ای از هماهنگهای منطقه‌ای نوشت.

رسانای‌کروی، به‌شعاع a، یك سطح هم‌پتانسیل است؛ پتانسیل آن را با φ_0 نشان می‌دهیم. مسئلهٔ ما یافتن جوابی‌است برای معادلهٔ لاپلاس درناحیهٔ خارجی این کره، که مقدارآن درروی خودکره به φ_0 تبدیل شود، ودرفواصل خیلی دورصورت حدی صحیح پیداکند. این جواب‌را به‌طور صوری می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$\varphi(r,\theta)=A_1+C_1r^{-1}+A_2r\cos\theta+C_2r^{-2}\cos\theta$$

$$+\frac{1}{2}A_3r^2(3\cos^2\theta-1)+\frac{1}{2}C_3r^{-3}(3\cos^2\theta-1)+\cdots \quad (۱۹.۳)$$

که درآن Aها و Cها ثابتهای دلخواه‌اند. وقتی‌که r بزرگ باشد، میدان الکتریکی تنها اندکی نسبت به‌صورت اولیهٔ خود تغییر شکل می‌یابد، و پتانسیل آن همان پتانسیل مربوط به‌میدان الکتریکی یکنواخت خواهد بود.

$$[\mathbf{E}(r,\theta)]_{r\to\infty}=\mathbf{E}_0=E_0\mathbf{k}$$

$$[\varphi(r,\theta)]_{r\to\infty}=-E_0z+\text{const.}$$

$$=-E_0r\cos\theta+\text{const.} \quad (۲۰.۳)$$

بنابراین، برای‌آنکه معادله‌های (۱۹.۳) و (۲۰.۳) به‌ازای مقادیر بزرگ r در توافق

باشند، باید $A_2 = -E_0$ باشد؛ به‌علاوه تمام Aها، از A_3 به بالا باید مساوی صفر قرار داده شوند.

جملهٔ $C_1 r^{-1}$ یك میدان الکتریکی شعاعی تولید می‌کند که، همان طوری که انتظار می‌رود، فقط باجسم رسانای کروی دارای بـارخالص در توافق است. چون در این مسئله باجسم کروی بی‌بارسروکارداریم، ثابت C_1 را بـاید مساوی صفر قرار دهیم. روی سطح کره، $\varphi = \varphi_0$ و پتانسیل باید از زاویهٔ θ مستقل باشد. می‌توان کاری کرد که دوجمله‌ای که شامل $\cos\theta$ هستند یکدیگررا خنثی کنند، لیکن جمله‌هـایی‌راکه شامل توانهای معکوس بالاتری از r هستند نمی‌توان بـایکدیگر حذف کرد زیرا توابع لژاندر متفاوتی دارند. تنها امکان‌آن است که تمام C_iها به‌ازای $i \geqslant 3$ مساوی صفرقرارداده شوند. دراین‌صورت معادلهٔ (۱۹.۳) به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\varphi(r, \theta) = A_1 - E_0 r\cos\theta + C_2 r^{-2}\cos\theta \qquad \text{برای } r \geq a$$

$$\varphi(a, \theta) = \varphi_0 \tag{۲۱.۳}$$

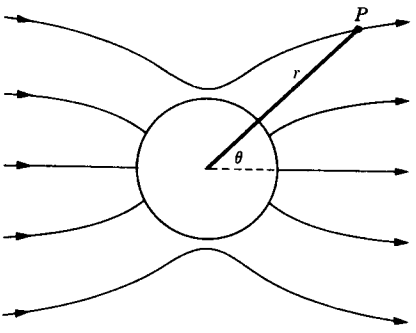
چون هردو عبارت باید به‌ازای $r = a$ مساوی شوند، پس $A_1 = \varphi_0$ و $C_2 = E_0 a^3$.

ازرابطهٔ‌نهایی پتانسیل نه‌تنها می‌توان میدان‌الکتریکی‌را درتمام نقاط فضا حساب کرد (شکل ۲.۳) بلکه چگالی سطحی باررروی کرهٔ رسانارا نیزمی‌توان محاسبه‌کرد

$$\left.\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = E_0\left(1 + 2\frac{a^3}{r^3}\right)\cos\theta \\ E_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -E_0\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad \text{به ازای } r \geqslant a \tag{۲۲.۳}$$

$$\sigma(\theta) = \varepsilon_0 E_r|_{r=a} = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta \tag{۲۳.۳}$$

جمع کل بار روی سطح کره، یعنی



شکل ۲.۳ خطوط شار الکتریکـی برای موردی‌که در آن کرهٔ رسانا در میدان‌الکتریکی یکنواخت‌قراردارد.

$$Q=a^{2}\int_{0}^{\pi}\sigma(\theta)\,2\pi\sin\theta\,d\theta$$

آشکارا مساوی صفر است، واین بافرض اولیهٔ ما سازگاری دارد.

۶.۳ هماهنگهای استوانه‌ای

معادلهٔ لاپلاس درمختصات استوانه‌ای‌را نیز می‌توانیم باروش جداسازی متغیرها حل کنیم. دراینجا هم مناسب خواهد بودکه فقط به‌یافتن جوابهای ردهٔ محدودی ازمسائل بپردازیم، یعنی به‌مسائلی‌که در آنها پتانسیل به‌متغیر z بستگی ندارد. این جوابها برای مسائلی که شامل رسانا یا سیم استوانه‌ای خیلی درازند مناسب‌اند نه برای مسائلی‌که شامل یك قطعهٔ کوتاه استوانه‌ای هستند.

چنانچه پتانسیل به z بستگی نداشته باشد، معادلهٔ لاپلاس در مختصات استوانه‌ای به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial\theta^{2}}=0 \qquad (۲۴.۳)$$

باقراردادن $\varphi=Y(r)\,S(\theta)$ معادلهٔ بالا به‌صورت زیرتبدیل می‌شود

$$\frac{r}{Y}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dY}{dr}\right)=-\frac{1}{S}\frac{d^{2}S}{d\theta^{2}}=k \qquad (۲۵.۳)$$

که دراینجا نیز k نقش ثابت جداسازی‌را ایفا می‌کند. معادلهٔ θ بسیارساده‌است؛ جوابهای آن عبارت‌اند از $\cos k^{1/2}\theta$ و $\sin k^{1/2}\theta$. اما برای‌اینکه این‌جوابها ازلحاظ فیزیکی معنی داشته باشند، هریك باید تابعی تك مقداری ازمتغیر θ باشند در نتیجه

$$\cos k^{1/2}(\theta+2\pi)=\cos k^{1/2}\theta$$

$$\sin k^{1/2}(\theta+2\pi)=\sin k^{1/2}\theta$$

یا، به‌عبارت دیگر، پس ازآنکه θ همهٔ گسترهٔ خود از صفر تا 2π را طی‌کرد، تابع باید به‌طور هموار به‌مقدار خود در $\theta=0$ برسد. این درصورتی امکان‌پذیراست که $k=n^{2}$ و n عددی صحیح باشد. به‌علاوه می‌توانیم n را مثبت (یاصفر) قراردهیم بی‌آنکه هیچ یك ازاین جوابها را ازدست بدهیم.

حال به‌معادلهٔ r برمی‌گردیم، به‌راحتی می‌توانیم تحقیق‌کنیم که $Y(r)$ مساوی r^{n} یا r^{-n} است، جزدر حالت $n=0$، که در این صورت $Y(r)=\ln r$ یا $Y(r)=\text{const.}$

بنابراین، جوابهای لازم برای معادلهٔ لاپلاس، یا به اصطلاح هماهنگهای استوانه‌ای، عبارتند از

$$1 \qquad \ln r$$

$$r^n \cos n\theta \qquad r^{-n} \cos n\theta$$

$$r^n \sin n\theta \qquad r^{-n} \sin n\theta$$

این توابع مجموعهٔ کاملی برای متغیرهای r و θ در مختصات استوانه‌ای تشکیل می‌دهند، وپتانسیل $\varphi(r,\theta)$ را می‌توان مطابق قضیهٔ اول به‌صورت برهم نهی هماهنگهای استوانه‌ای نوشت.

۷.۳* معادلهٔ لاپلاس درمختصات قائم

درمختصات قائم می‌توان باقراردادن

$$\varphi(x, y, z) = f_1(x) f_2(y) f_3(z)$$

متغیرها را ازیکدیگرجدا کرد که بدین وسیله معادلهٔ لاپلاس به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\frac{1}{f_1(x)} \frac{d^2 f_1}{dx^2} + \frac{1}{f_2(y)} \frac{d^2 f_2}{dy^2} = -\frac{1}{f_3(z)} \frac{d^2 f_3}{dz^2} \qquad \text{(۲۶.۳ الف)}$$

طرف چپ این معادله تابعی است از x و y، وطرف راست آن‌فقط تابع z است. درنتیجه هردوطرف باید مساوی یك مقدار ثابت، k، باشند. این اولین ثابت جدا سازی است. دو معادله‌ای که ازمعادلهٔ (۲۶.۳ الف) به‌دست می‌آیند عبارت‌اند از

$$\frac{d^2 f_3}{dz^2} + k f_3 = 0 \qquad \text{(۲۶.۳ ب)}$$

$$\frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{dy^2} = k - \frac{1}{f_1} \frac{d^2 f_1}{dx^2}$$

معادلهٔ دوم طوری نوشته شده است که درآن متغیرهای x و y ازهم جدا شده‌اند. اینك هریك از دوطرف این‌معادله‌را مساوی $-m$ (ثابت دوم‌جداسازی) قرارمی‌دهیم. بنابراین، داریم

---

* بخشهای ستاره‌دار را می‌توان حذف کرد بی‌آنکه به‌پیوستگی مطالب خدشه وارد شود.

$$\frac{d^2 f_2}{dy^2}+mf_2=0 \qquad (۲۶.۳ ج)$$

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2}-(k+m)f_1=0 \qquad (۲۶.۳ د)$$

معادلات (۲۶.۳ ب)، و (۲۶.۳ ج) و (۲۶.۳ د) به‌راحتی قابل حل‌اند. یکی از جوابهای نوعی $\varphi(x, y, z)$ به‌صورت زیراست

$$\varphi(x, y, z)=Ae^{-(k+m)^{1/2}x}\cos m^{1/2}y\cos k^{1/2}z \qquad (۲۷.۳)$$

هفت جواب مستقل دیگر برای زوج ثابت جداسازی $(m، k)$ را بایکی ازجانشانیهای‌زیر می‌توان‌به‌دست آورد: $+(k+m)^{1/2}x$ به‌جای $-(k+m)^{1/2}x$؛ $\sin m^{1/2}y$ به‌جای $\cos m^{1/2}y$؛ و $\sin k^{1/2}z$ به‌جای $\cos k^{1/2}z$.

تاکنون محدودیتی برای k و m قائل نشدیم، ولی شرایط مرزی مسئله معمولا k (یا m) را به مجموعهٔ گسسته‌ای ازمقادیرمثبت یامنفی، محدود می‌کند. لازم به‌توضیح است که این شرایط مرزی‌اندکه در واقع جوابهای مناسب برای معادلهٔ با مشتقات پاره‌ای را تعیین می‌کنند، تابع

$$\varphi(x, y, z)=\sum_p\sum_q A_{pq}e^{-(p^2+q^2)^{1/2}x}\cos py\cos qz$$

به‌ازای مقادیرثابت x و y، بسط رشتهٔ فوریه تابع زوج دلخواهی از z است.

جوابهای خصوصی، یعنی معادلهٔ (۲۷.۳)، نمایانگر پتانسیلهای ساده‌ای نیستند و ما نیزسعی نداریم آنها را باوضعیتهای فیزیکی ارتباط دهیم. حالتی‌که هردو ثابت‌جداسازی صفرباشند جالبتراست. لذا توجه خودرا به‌این حالت معطوف می‌کنیم. ازمعادلهٔ (۲۶.۳د) روشن است که $f_1(x)=a_1x$، یا $f_1(x)=\text{const}$. جوابی برای آن معادله است. از معادلهٔ (۲۶.۳ ج)، جواب $f_2(y)$ را به‌دست می‌آوریم و به‌همین ترتیب تا به‌آخر. بدین ترتیب

$$\varphi(x, y, z)=A_1xyz+A_2xy+A_3yz+A_4xz$$
$$+A_5x+A_6y+A_7z+A_8 \qquad (۲۸.۳ \text{ الف})$$

که درآن Aها اعداد ثابت دلخواهی‌اند. این جواب را می‌توانیم برای حالتی‌که سه صفحهٔ رسانا یکدیگررا بازاویهٔ قائمه قطع می‌کنند به‌کار ببریم. هرگاه این سه صفحه، صفحات مختصات xy، yz، و zx و هرسه درپتانسیل یکسانی باشند، آنگاه

$$\varphi(x, y, z)=A_1xyz+A_8 \qquad (۲۸.۳ \text{ ب})$$

تعیین چگالی سطحی بار روی صفحات مختصات، به‌طوری که بامعادلهٔ (۲۸.۳ ب)سازگار باشد، به‌صورت تمرین به‌خواننده واگذار می‌شود.

*۸.۳ معادلهٔ لاپلاس درفضای دوبعدی . جواب عمومی

اگرپتانسیل فقط تابعی ازدومختص قائم باشد، معادلهٔ لاپلاس به‌صورت زیرنوشته می‌شود

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=0 \qquad \text{(۲۹.۳ الف)}$$

جواب عمومی این معادله‌را می‌توانیم ازطریق تبدیل به‌مجموعهٔ جدیدی از متغیرهای مستقل به‌دست‌آوریم. درعین حال، باید تأکیدکردکه چنین تبدیلی فقط درحالت دوبعدی به‌ساده شدن معادله منجرمی‌شود. فرض کنید

$$\xi=x+iy \qquad \eta=x-iy$$

که درآن $i=\sqrt{-1}$ عدد موهومی واحد است. برحسب این متغیرها

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2}{\partial \xi\,\partial \eta}+\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2}{\partial \xi\,\partial \eta}-\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

و

$$\nabla^2 \varphi=4\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi\,\partial \eta}=0 \qquad \text{(۲۹.۳ب)}$$

بدیهی است که جواب عمومی معادلهٔ (۲۹.۳ب) عبارت است از

$$\varphi=F_1(\xi)+F_2(\eta)=F_1(x+iy)+F_2(x-iy) \qquad (۳۰.۳)$$

که درآن F_1 و F_2 توابعی دلخواه‌اند. توابع F_1 و F_2 به‌طور کلی کمیات مختلطی‌هستند. ولی به‌کمک‌آنها می‌توان به‌طریق زیردو تابع حقیقی به‌دست‌آورد: اول فرض می‌کنیم $F_2(x-iy)=F_1(x-iy)$، یعنی فرض می‌کنیم وابستگی دو تابع F_1 و F_2 به‌شناسه‌هایشان یکسان باشد. دراین‌صورت

$$\varphi_1=F_1(x+iy)+F_1(x-iy)=2\mathrm{Re}\,[F_1(x+iy)]$$

که Re نمایش «قسمت حقیقی» تابع است. به‌علاوه، دومین تابع پتانسیل حقیقی عبارت است از

$$\varphi_2 = -i[F_1(x+iy) - F_1(x-iy)] = 2\,\mathrm{Im}[F_1(x+iy)]$$

که در آن Im «قسمت موهومی» تابع است. پس هم قسمت حقیقی و هم قسمت موهومی هر تابع مختلط $F(x+iy)$ جوابهای معادلهٔ لاپلاس‌اند.

جوابهایی که بدین‌طریق پیدامی‌شوند به‌هیچ دستگاه مختصات‌خاصی منحصر نیستند. مثلا هماهنگهای استوانه‌ای بخش (۷.۳) از توابع مختلط[1] $(x+iy)^n = r^n e^{in\theta}$ و $\ln(x+iy) = \ln r + i\theta$ به‌دست می‌آیند. ازطرف دیگروقتی لازم شودکه مسئلهٔ‌خاصی را درفضای دوبعدی حل کنیم، هیچ روش استانداردی برای پیداکردن‌تابع مختلط‌مناسب نداریم. این روش آن قدرجوابهای متعدد تولید می‌کندکه نمی‌توان همه را برشمرد و جوابهایی‌راکه در شرایط مرزی مسئله صدق نمی‌کنند جداکرد و کنار گذاشت. در موارد ساده توابع مورد لزوم‌را می‌توان به‌روش‌آزمایش وخطا به‌دست‌آورد؛ درموارد دیگر، روش نگاشت همدیس می‌تواند مفید باشد (بررسی این روش از محدودهٔ این‌کتاب خارج است).

۹.۳ تصویرهای الکتروستاتیکی

برای مجموعه‌ای از شرایط مرزی مفروض جواب معادلهٔ لاپلاس یکتاست، به‌طوری که اگربتوانیم به‌هر طریق جوابی به‌صورت $\varphi(x, y, z)$ پیداکنیم، وچنانچه این φ در تمام شرایط مرزی صدق‌کند، آنگاه جواب‌کامل معادله به‌دست‌آمده است. روش تصویرها بی‌آنکه به‌طورمشخص معادلهٔ دیفرانسیلی را حل‌کند راهی‌برای به‌دست‌آوردن این جواب به‌دست می‌دهد. این روش به‌طور کلی درحل تمام مسائل الکتروستاتیک قابل استفاده نیست، اما آن‌قدر مسائل جالب درمحدودهٔ‌آن قرارمی‌گیردکه جا دارد دراینجا درموردآن بحث کنیم.

فرض‌کنیم بتوان پتانسیل را به‌صورت

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_1(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')\,da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \qquad (۳۱.۳)$$

نوشت، که درآن φ_1 یا تابعی است مشخص ویا به راحتی قابل محاسبه است، و انتگرال

---

۱. مختصات استوانه‌ای و قائم، به‌طریق معمول، با روابط زیر به‌یکدیگر مربوط می‌شوند: $x = r\cos\theta$، $y = r\sin\theta$.

معرف پتانسیلی است که بارهای سطحی تمام رساناهای موجود درمسئله به‌وجود می‌آورند. تابع σ مجهول است. در مواردی ممکن است بتوان به‌جای جملهٔ آخر معادلهٔ (۳۱.۳) پتانسیل φ_2 را، که به‌توزیع بارمشخصی مربوط می‌شود، قرارداد واساس روش بارتصویری همین است. این امروقتی امکان‌پذیراست که سطح تمام رساناها برسطوح هم پتانسیل حاصل ازترکیب $\varphi_1+\varphi_2$ منطبق باشند. بارهای مشخصی که φ_2 را ایجاد می‌کنند به بارهای تصویری معروف‌اند. بدیهی است، این بارها وجود خارجی ندارند. مکان ظاهری آنها در داخل رساناهای مختلف‌است وپتانسیل $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$ فقط برای ناحیهٔ خارج ازاین‌رساناها جواب قابل قبول مسئله است.

به‌عنوان مثالی ازاین روش، مسئلهٔ بارنقطه‌ای q که درنزدیکی یك صفحهٔ رسانای نامتناهی قراردارد را حل می‌کنیم. برای فرمولبندی ریاضی مسئله فرض کنید که صفحهٔ نامتناهی برصفحهٔ yz منطبق وبارنقطه‌ای روی محور x وبه‌فاصلهٔ $x=d$ ازمبدأ مختصات قرارداشته باشد (شکل ۳.۳ الف). پتانسیل این مسئله به‌ازای رابطهٔ زیر با معادلهٔ (۳۱.۳) سازگاراست

$$\varphi_1(x,\ y,\ z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\ r_1}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} \qquad (۳۲.۳)$$

حال مسئلهٔ دیگری‌را درنظرمی‌گیریم، وآن مسئلهٔ دوبار نقطه‌ای (q و $-q$) است که به‌فاصلهٔ $2d$ ازیکدیگرقراردارند (شکل ۳.۳ب) پتانسیل مربوط به‌این دوبار، یعنی

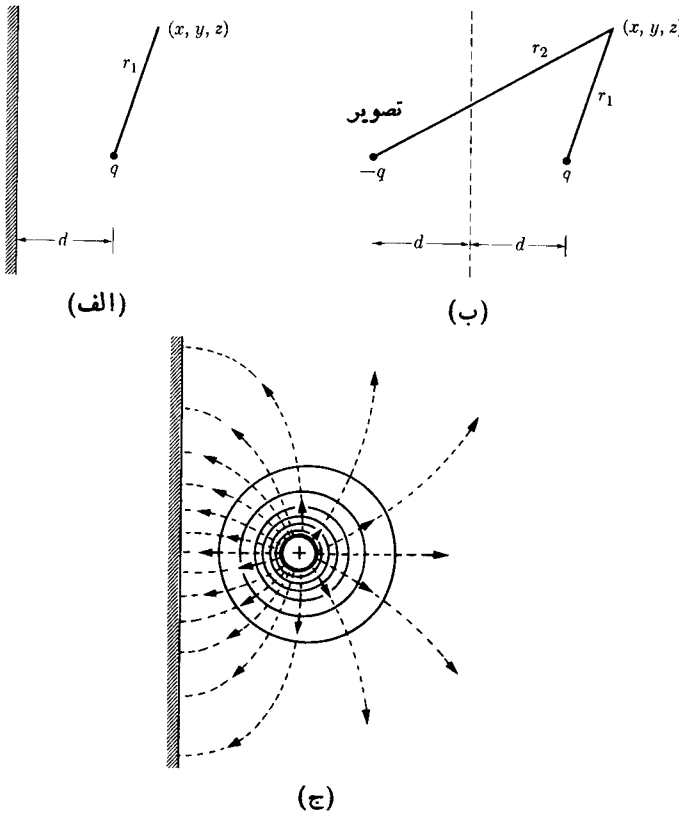
$$\varphi(x,\ y,\ z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \qquad (۳۳.۳)$$

نه‌تنها درهمهٔ نقاط خارج ازبارها در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند، بلکه مقدار آن روی صفحهٔ عمود منصف خط واصل میان دوبار به‌مقدار ثابتی (یعنی صفر) تبدیل می‌شود. پس معادلهٔ (۳۳.۳) در شرایط مرزی مسئلهٔ اصلی صدق می‌کند. چون جوابهای معادلهٔ لاپلاس منحصر به‌فردند، معادلهٔ (۳۳.۳) پتانسیل صحیح برای سراسر نیم فضای خارج از صفحهٔ رساناست. بار $-q$ که پتانسیل

$$\varphi_2(x,\ y,\ z)=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}} \qquad (۳۴.۳)$$

را تولیدمی‌کند، تصویر بارنقطه‌ای q نامیده‌می‌شود. طبعاً این تصویرواقعیت خارجی‌ندارد و معادلهٔ (۳۳.۳) پتانسیل مربوط به‌فضای داخل و یا سمت چپ صفحهٔ رسانای شکل ۳.۳ الف را به‌درستی به‌دست نمی‌دهد.

درفضای خارج ازرسانا میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را می‌توان بامحاسبهٔ منفی شیب معادلهٔ



شکل ۳.۳ مسئلهٔ بار نقطه‌ای و صفحهٔ رسانا که به‌روش تصویری حل شده است: (الف) مسئلهٔ اصلی، (ب) مکان بار تصویری، (ج) خطوط نیرو (خط چینها) و سطوح هم‌پتانسیل (خطوط پیوسته).

(۳۳.۳) به‌دست آورد. از آنجا که سطح صفحهٔ رسانا معرف فصل مشترکی است که دو جواب معادلهٔ لاپلاس، یعنی $\varphi = 0$ و معادلهٔ (۳۳.۳)، را به‌یکدیگر مربوط می‌کند، ناپیوستگی میدان الکتریکی توسط چگالی بار سطحی σ درروی این صفحه تأمین می‌شود

$$\sigma(y, z) = \varepsilon_0 E_x|_{x=0} = -\frac{qd}{2\pi(d^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad (۳۵.۳)$$

خطوط نیرو وسطوح هم‌پتانسیل مربوط به‌مسئلهٔ اصلی درشکل (۳.۳ ج) نشان‌داده‌شده‌اند. اینها درست همان خطوط نیرو وسطوح هم پتانسیل مربوط به مسئلهٔ دو بار نقطه‌ای (شکل ۳.۳ب)اند، بااین تفاوت که درمورد مسئلهٔ اخیر خطوط شاردرفضای سمت چپ صفحه نیز

ادامه دارند. ازروی شکل پیداست که تمام خطوط شار الکتریکی که در شرایط عادی می‌بایست روی بار تصویری متمرکزشوند به‌وسیلهٔ صفحهٔ رسانای شکل ۳.۳ج قطع می‌شوند. بنابراین، کل‌بارواقع برصفحهٔ رسانا با $q-$ یعنی‌بابارِ بارتصویری برابراست. همین نتیجه را می‌توان از طریق ریاضی، باانتگرال‌گیری ازمعادلهٔ (۳۵.۳) روی تمامی سطح، به‌دست‌آورد (مسئلهٔ ۱۴.۳).

بدیهی است که بارنقطه‌ای q نیروی جاذبه‌ای برصفحه وارد می‌کند، زیرا علامت بارسطحی‌القایی مخالف باعلامت‌بارنقطه‌ای q است. مطابق قانون‌کنش و واکنش‌نیوتون، این نیروازلحاظ مقداربرابراست بانیرویی‌که صفحه بربار q وارد می‌کند. از آنجا که میدان ناشی ازبارنقطه‌ای برخود این بارنیرویی واردنمی‌کند، درنتیجه

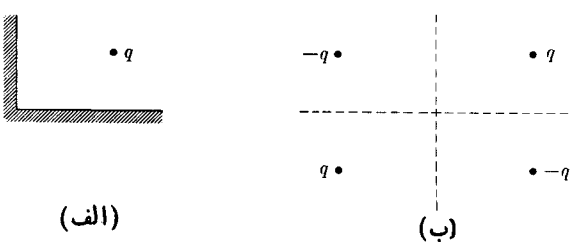
$$\mathbf{F} = -q\nabla\varphi_{۲} \qquad (۳۶.۳)$$

که این درست همان نیرویی است‌که ازطرف بارتصویری به‌بارنقطه‌ای وارد می‌شود.

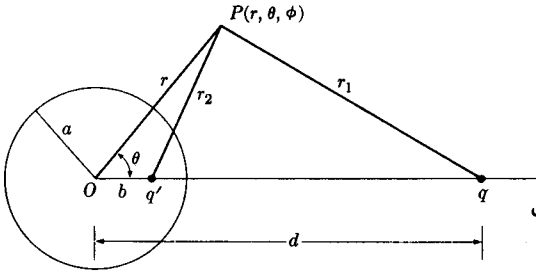
مسئلهٔ دیگری‌که با روش تصویری به‌راحتی قابل حل است تعیین میدان الکتریکی بارنقطه‌ای q است‌که درنزدیکی تقاطع دو صفحهٔ رسانای عمود برهم قرار گرفته است. (شکل ۴.۳ الف). مکان بارهای تصویری لازم در شکل ۴.۳ ب نشان داده شده است. به‌راحتی مشاهده می‌شودکه دوصفحهٔ نقطه‌چین دراین شکل سطوح باپتانسیل صفرندکه‌از ترکیب پتانسیلهای بار q وسه بارتصویری ناشی می‌شوند.

۱۰.۳ بارنقطه‌ای وکرهٔ رسانا

مشکل اساسی درحل مسائل به‌روش تصویری پیداکردن‌گروهی از بارهای تصویری است که همراه بابارهای مشخص شدهٔ اصلی بتوانند سطوح هم‌پتانسیلی را برروی رساناها تشکیل بدهند. این‌روش فقط درمواردی‌که شکل‌هندسی‌آنها ساده است سرراست است. مسئلهٔ بارنقطه‌ای q درنزدیکی کرهٔ رسانا یکی ازاین موارد است؛ در این مورد فقط یك بار تصویری منفرد لازم است تا سطح کره را به‌سطح پتانسیل صفر تبدیل‌کند. برای آنکه پتانسیل‌کره به‌مقدارثابت دیگری تبدیل شود، به‌بار تصویری دیگری احتیاج است.



شکل ۴.۳ بارنقطه‌ای درداخل‌گوشهٔ قائمه.



شکل ۵.۳ بار نقطه‌ای q در نزدیکی کرهٔ رسانا. q' بار تصویری است.

ابتدا ما مقدار ومکان بار تصویری q' ی‌را به‌دست می‌آوریم که همراه با بار نقطه‌ای درهمهٔ نقاط سطح کره پتانسیل صفررا تولید کند. در شکل ۵.۳ وضع هندسی مسئله نشان داده شده است. بار نقطه‌ای q درفاصلهٔ d ازمرکز کره‌ای به‌شعاع a قرار گرفته است. از تقارن‌مسئله پیداست که بارتصویری q' باید برروی خطی که بارنقطه‌ای q را به‌مرکز کره وصل می‌کند قراربگیرد.

بااستفاده ازمختصات کروی، باقرار دادن مبدأ درمرکز کره، نتایج مطلوب به‌دست می‌آید. محورقطبی را خطی می‌گیریم که بارنقطه‌ای q را به‌مبدأ وصل می‌کند. فاصلهٔ بار تصویری q' تامرکز کره، یعنی b، ومقدار بار q' را باید برحسب مقادیرمعلوم q، d، و a پیداکنیم. پتانسیلی که بارهای q و q' درنقطهٔ دلخواه P تولید می‌کنند برابراست با

$$\varphi(r, \theta, \phi)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}}+\frac{q'}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}\right] \qquad (۳۷.۳)$$

درروی سطح کره، $r=a$، وبرای تمام مقادیر θ و ϕ، پتانسیل $\varphi(a, \theta, \phi)=0$ است. اما بنابرمعادلهٔ (۳۷.۳)، $\varphi(a, \theta, \phi)$ فقط وقتی می‌تواند به‌ازای تمام مقادیر صفر شود که دوجذر بایکدیگرمتناسب باشند، واین درصورتی ممکن است که $b=a^2/d$، زیرا در این صورت

$$\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}=\frac{a}{d}\sqrt{d^2+a^2-2ad\cos\theta}$$

درنتیجه

$$b=\frac{a^2}{d} \qquad (۳۸.۳)$$

و به‌علاوه

$$q'=-\frac{a}{d}q \qquad (۳۹.۳)$$

ازاین معادلات می‌توان برای مشخص‌کردن مکان و مقدار بارتصویری اول استفاده‌کرد.

می‌توان بی‌آنکه ماهیت هم‌پتانسیل بودن سطح‌کروی برهم بخورد، بار تصویری دیگری، q''، را درمرکزکره قرارداد. مقدار q'' اختیاری است و می‌توان آن‌را طوری انتخاب‌کردکه باشرایط مرزی مسئله سازگار باشد. لذا جواب کاملی برای مسئلهٔ بار نقطه‌ای وکرهٔ رسانا به‌دست‌آمده است؛ پتانسیل در همهٔ نقاط خارج‌کره عبارت است از

$$\varphi(r,\ \theta,\ \phi)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r_1}+\frac{q'}{r_2}+\frac{q''}{r}\right] \qquad (۴۰.۳)$$

پتانسیل خودکرهٔ رسانا عبارت است از

$$\varphi(a,\ \theta,\ \phi)=\frac{q''}{4\pi\varepsilon_0\ a} \qquad (۴۱.۳)$$

وچگالی بارسطحی روی‌کره برابراست با

$$\sigma(\theta,\ \phi)=-\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=a} \qquad (۴۲.۳)$$

همهٔ‌خطوط میدان،که به‌طورعادی می‌بایست روی بارهای تصویری متمرکزشوند، به‌وسیلهٔ کره قطع می‌شوند؛ بنابراین بار کل Q روی سطح‌کره، با جمع بارهای تصویری برابر است

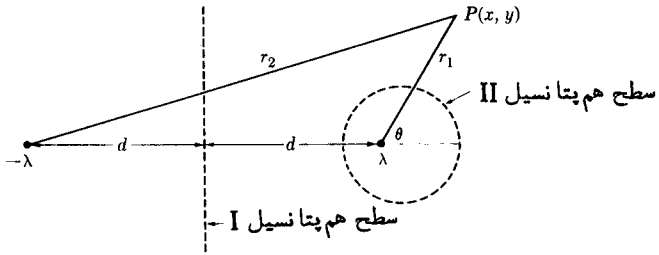
$$Q=q'+q'' \qquad (۴۳.۳)$$

این نتیجه‌را می‌توان مستقیماً باانتگرال‌گیری ازمعادلهٔ (۴۲.۳) تحقیق‌کرد.

دومورد خاص و جالب این مسئله عبارت‌اند از کرهٔ رسانای متصل به‌زمین، یعنی موردی‌که $q''=0$ ، $\varphi(a)=0$ است؛وکرهٔ رسانای‌بدون‌بار، یعنی موردی‌که $q''=-q'$ است.

۱۱.۳ بارهای خطی و تصویرهای خطی

تاکنون روش تصویری‌ما به‌مسائل مربوط به‌بارهای‌نقطه‌ای، ودرنتیجه تصویرهای‌نقطه‌ای، محدود بود. دراین بخش چند مسئله را بررسی می‌کنیم که درحل‌آنها می‌توان از روش بارهای تصویری خطی استفاده‌کرد. دوخط موازی و بی‌نهایت دراز در نظر می‌گیریم که بار درواحدطول‌آنها به‌ترتیب برابر λ و $-\lambda$ است (شکل ۶.۳). در هرنقطه پتانسیل از معادلهٔ زیربه‌دست می‌آید



شکل ۶.۳ دراینجادوخط بارموازی وبی‌نهایت دراز(بابارهای λ و λ− در واحد طول)که برصفحهٔ کاغذ عمودند نشان داده شده‌اند.

$$g = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}[\ln r_1 - \ln r_2] = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_2} \qquad (۴۴.۳)$$

که درآن r_1 و r_2 فواصل عمودی نقطهٔ مورد نظرازدوخط بارند. برای پیداکردن سطوح هم‌پتانسیل معادلهٔ (۴۴.۳) را مساوی مقدار ثابتی قرار می‌دهیم، که مستلزم برقراری شرط زیراست

$$\frac{r_1}{r_2} = M \qquad (۴۵.۳)$$

که درآن M مقداری است ثابت. پس سطوح هم پتانسیل را می‌توان با معادلهٔ (۴۵.۳) مشخص کرد.

سطح هم‌پتانسیل متناظربا $M = 1$ صفحه‌ای است‌که درست دروسط فاصلهٔ میان دو بارخطی قرار گرفته است ودرشکل ۶.۳ به‌صورت سطح هم‌پتانسیل I نشان داده‌شده‌است. پتانسیل این صفحه صفراست. بنابراین، مسئلهٔ مربوط به‌خط باربسیاردرازی‌که موازی یك صفحهٔ رسانا قرارگرفته‌است حل‌شده تلقی می‌شود. درنیم فضای مقابل‌صفحهٔ رسانا پتانسیل به‌درستی ازمعادلهٔ (۴۴.۳) به‌دست می‌آید. فرض‌کنید خط باری‌که درسمت راست شکل دیده می‌شود همان خط باری باشدکه به‌فاصلهٔ d از صفحهٔ رسانا قرار گرفته است. دراین صورت خط بارسمت چپ درحکم تصویرآن است. دراینجا نیزبارکل روی صفحهٔ رسانا مساوی است بابار بارتصویری.

حال سطوح هم‌پتانسیلی‌را بررسی می‌کنیم‌که باسایرمقادیر M متناظرند. صورت عمومی چنین سطوحی بانوشتن r_1 و r_2 در دستگاه مختصات قائم به‌دست می‌آید. برای سهولت، مبدأ مختصات را روی خط بارمثبت می‌گیریم وفرض می‌کنیم‌که این باربرمحور z منطبق است، وخط باردار دیگردر $x = -2d$ و $y = 0$ قراردارد. در این صورت

$$r_1^2 = x^2 + y^2$$

و

$$r_2^2=(x+2d)^2+y^2$$

بنابراین معادلهٔ (۴۵.۳) پس ازکمی عملیات جبری به‌صورت زیردرمی‌آید

$$x^2+y^2-\frac{4M^2xd}{1-M^2}=\frac{4M^2d^2}{1-M^2} \qquad (۴۶.۳)$$

این معادله، معادلهٔ یك استوانهٔ مستدیراست که به‌موازات محور z قرار گرفته است. اگر M کمترازیك باشد، آنگاه استوانه خط بارمثبت را در میان می‌گیرد، درست مانند سطح هم‌پتانسیل II درشکل ۶.۳. محوراستوانه ازنقطه‌ای بامختصات زیرمی‌گذرد

$$x=\frac{2M^2d}{1-M^2}, \qquad y=0 \qquad (۴۷.۳)$$

و شعاع استوانه مساوی است با

$$R_c=\frac{2Md}{1-M^2} \qquad (۴۸.۳)$$

اکنون ما می‌توانیم مسائل جالب توجه متعددی راکه بارساناهای استوانه‌ای سروکاردارند حل‌کنیم، ولی دراینجا فقط به‌بحث دربارهٔ یکی ازآنها می‌پردازیم. مسئله‌ای را در نظر می‌گیریم که درآن رسانای استوانه‌ای طویلی درنزدیکی یك صفحهٔ رسانا و موازی با آن قرارگرفته است. بار استوانه‌در واحد طول λ است. از شکل ۶.۳ می‌توان برای نمایاندن این مسئله استفاده‌کرد؛ دراینجا دوجسم رسانا برسطوح نقطه چین منطبق‌اند. در این مورد هردو خط بار بارهای تصویری‌اند وپتانسیل در ناحیهٔ خارج از استوانه درسمت راست صفحهٔ رسانا ازمعادلهٔ (۴۴.۳) به‌دست می‌آید. واضح است که بارالقایی در صفحه برابر است با $-\lambda$ درواحد طول درامتداد محور z.

۱۲.۳ دستگاه رساناها.ضرایب پتانسیل

دربخشهای گذشته دربارهٔ چند روش مهم برای پیداکردن جوابهای معادلهٔ لاپلاس بحث کردیم. این روشها، باهمهٔ کلیتی که‌دارند، درعمل به‌مسائلی محدود می‌شوند که در آنها رساناها شکلهای نسبتاً ساده‌ای‌دارند. وقتی شکل رساناها پیچیده باشد، موضوع حل‌کامل ریاضی‌آنها منتفی است؛ باوجود این تنها به‌این دلیل که پتانسیل در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند، می‌توان برخی نتایج دربارهٔ دستگاه به‌دست‌آورد. درواقع، دراینجا نشان‌خواهیم

داد که رابطه‌ای خطی میان پتانسیل هریك ازرساناها و بارهای رساناهای مختلف دستگاه وجود دارد. ضرایب این رابطه، که به ضرایب پتانسیل مشهورند، فقط تابع شکل هندسی دستگاه‌اند، و بااینکه همیشه قابل‌محاسبه نیستند، ولی‌می‌توان آنهارا به‌طورعددی یامستقیماً به‌وسیلهٔ آزمایش تعیین کرد.

فرض کنید N رسانا باوضع هندسی ثابت وجود دارند. همچنین فرض کنید تمام رساناها بدون بارند، بجز رسانای j ام که دارای بار Q_{j_0} است، جواب مناسب معادلهٔ لاپلاس را درفضای خارج از سطوح رساناها بانماد $\varphi^{(j)}(x, y, z)$ و پتانسیل هریك از رساناها را با $\varphi_1^{(j)}, \varphi_2^{(j)} \ldots \varphi_j^{(j)}, \ldots \varphi^{(j)}{}_N$ نشان می‌دهیم. حال باررسانای jام را به λQ_{j_0} تغییرمی‌دهیم. چون λ عددی ثابت‌است‌تابع $\lambda p^{(j)}(x, y, z)$ در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند؛ این تابع درشرایط مرزی جدید نیزصدق می‌کند واین نکته را می‌توان از استدلال‌زیرنتیجه گرفت: پتانسیل‌درتمام نقاط فضا در λ ضرب شده‌است؛ پس تمام‌مشتقهای پتانسیل (وبه‌خصوص شیب‌آن) در λ ضرب شده‌اند. چون $\sigma = \varepsilon_0 E_n$، نتیجه می‌شود که تمام چگالیهای باردر λ ضرب‌شده‌اند. بنابراین باررسانای j ام λQ_{j_0} است وبقیهٔ‌رساناها همچنان بی‌بارمی‌مانند.

جوابی ازمعادلهٔ لاپلاس‌که باشرایط مرزی خاص تطبیق‌کند یکتاست؛ پس جواب صحیح را، $\lambda\varphi^{(j)}(x, y, z)$، برای مسئلهٔ تغییریافته خودپیدا کرده‌ایم. نتیجهٔ جالب‌توجهی که ازاین بحث می‌گیریم این است‌که پتانسیل هررسانا متناسب است با Q_j، بار رسانای j، یعنی

$$\varphi_i^{(j)} = p_{ij} Q_j, \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \qquad (۴۹.۳)$$

که درآن p_{ij} ثابتی است‌که فقط به‌شکل هندسی بستگی دارد.

همین استدلال را می‌توان برای موردی که رسانای k ام باردار باشد، یعنی $Q_k = \nu Q_{k_0}$، وبقیهٔ رساناها بی‌بار باشند به‌کاربرد. در اینجا جواب مناسب معادلهٔ لاپلاس $\nu\varphi^{(k)}(x, y, z)$ است‌که درآن $\varphi^{(k)}$ جواب برای مورد $\nu = 1$ است. بنابراین آشکار است‌که

$$\lambda\varphi^{(j)}(x, y, z) + \nu\varphi^{(k)}(x, y, z) \qquad (۵۰.۳)$$

جواب مناسبی است برای موردی‌که هردو رسانای j ام و k ام باردار باشند. باردیگر به‌یکتا بودن جواب معادلهٔ لاپلاس برای مجموعهٔ مفروض از شرایط مرزی برمی‌گردیم. ازاین رو، معادلهٔ (۵۰.۳) جواب منحصر به‌فرد این مورد است، و پتانسیل هر رسانا را می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$\varphi_i = p_{ij} Q_j + p_{ik} Q_k, \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \qquad (۵۱.۳)$$

این نتیجه را می‌توان مستقیماً به‌موردی‌که درآن همهٔ N رسانا باردار باشند تعمیم داد

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} Q_j \qquad (۵۲.۳)$$

این همان رابطهٔ خطی میان پتانسیل و باراست که درجستجویش بودیم؛ ضرایب p_{ij} را ضرایب پتانسیل می‌نامند. در فصل ۶ نشان خواهیم دادکه آرایهٔ (ماتریس) این ضرایب متقارن است، یعنی $p_{ji} = p_{ij}$.

۱۳.۳ جوابهای معادلهٔ پواسون

دربخشهای گذشته منحصراً دربارهٔ معادلهٔ لاپلاس وجوابهای آن گفتگو کردیم. معادلهٔ لاپلاس درموردآن دسته ازمسائل الکتروستاتیك به‌کارمی‌رودکه در آنها همهٔ بار روی سطوح رساناها قرارگرفته، یا به‌صورت بارهای نقطه‌ای یا بارهای خطی متمرکز است. (درفصل آینده خواهیم دیدکه هر گاه ناحیهٔ میان رساناها بایك‌یاچند محیط دی‌الکتریك ساده‌پرشده باشد، دراین صورت نیزمعادلهٔ لاپلاس دراین محیطها صادق خواهد بود.)

اینك به‌مسئله‌ای ازالکتروستاتیك می‌پردازیم که درآن قسمتی از بار (بار مشخص شده ازقبل) باتابع معلوم $\rho(x, y, z)$ داده شده‌است وبقیهٔ بار (بار القایی) روی سطوح رساناها قراردارد. چنین مسئله‌ای احتیاج به‌حل معادلهٔ پواسون دارد. جواب عمومی این معادله را می‌توان به‌صورت حاصل جمع انتگرالی ازنوع معادلهٔ (۱.۳) روی بارمشخص شده‌ازقبل وجواب عمومی معادلهٔ لاپلاس نوشت. اما جواب معادلهٔ لاپلاس را باید طوری انتخاب کردکه کل پتانسیل درتمام شرایط مرزی مسئله صدق کند.

وقتی که همهٔ بار ازقبل مشخص شده باشد، یعنی وقتی که $dq = \rho(x, y, z)dv$ در همهٔ نقاط فضا معلوم باشد، آنگاه معادلهٔ (۱.۳) نمایندهٔ جواب کامل معادلهٔ پواسون است، واین انتگرال را می‌توان (یا به صورت تحلیلی یا به‌صورت عددی) محاسبه کرد. اما موردی وجود داردکه درآن معادلهٔ پواسون‌را می‌توان به‌طریقی مستقیمترازحل کردن‌معادلهٔ (۱.۳) به‌دست‌آورد؛ این مورد وقتی پیش می‌آید که هم ρ و هم φ فقط توابعی از یك متغیرمستقل باشند. به‌عنوان مثالی ازاین مورد، فرض می‌کنیم دردستگاه مختصات کروی ρ فقط تابعی ازمتغیر r است وفرض می‌کنیم تمامی باربا‌تقارن کروی توزیع شده است. در این صورت معادلهٔ (۵.۳ ب) به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(r) \qquad (۵۳.۳)$$

فرض می‌کنیم که بارکل محدود است، یعنی یا بار تا بی‌نهایت ادامه ندارد و یاچگالی بار برای مقادیر بزرگ r سریعاً به‌سمت صفرمیل کند. دراین صورت، بادر دست داشتن $\rho(r)$، می‌توان ازمعادلهٔ (۵۳.۳) مستقیماً انتگرال گرفت و دوثابت انتگرال گیری را به کمك دو

مطلب زیرمعین کرد: (۱) استفاده ازقانون گاؤس برای میدان الکتریکی درشعاع معین، (۲) استفاده ازاین واقعیت که $\varphi \to 0$ وقتی که $r \to \infty$.

۱۴.۳ خلاصهٔ مطالب

معادلات دیفرانسیل برداری مرتبهٔ اول اساسی، یعنی $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ و $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$، را می‌توان باهم ادغام کرد و به‌صورت یك معادلهٔ دیفرانسیل نرده‌ای مرتبهٔ دوم، یعنی معادلهٔ پواسون، درآورد

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

که درآن $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. اگر $\rho(\mathbf{r})$ تابعی مفروض درناحیهٔ V باشد، معادلهٔ پواسون دارای جواب خصوصی زیراست

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dv'$$

واین موضوع را می‌توان باعمل کردن ∇^2 برسمت راست این عبارت در زیر انتگرال ملاحظه کرد. به‌این جواب خصوصی می‌توان هرجوابی از معادلهٔ همگن متناظر آن، یعنی معادلهٔ لاپلاس

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

را افزود. جواب مناسب معادلهٔ لاپلاس جوابی است که سبب برآورده شدن شرایط مرزی مفروض در مرز V بشود. اگر φ یا $\partial\varphi/\partial n$ در یك مرز بسته مشخص شده باشد، جواب یکتاست.

۱. اگر ناحیهٔ V همهٔ فضا را دربر گیرد، شرط مرزی مناسب عبارت است از $\varphi = 0$ در $r = \infty$. جواب معادلهٔ لاپلاس که دراین شرط صدق کند صفراست، لذا جواب خصوصی جواب کامل است.

۲. اگرهمه جا درداخل V، $\rho = 0$ باشد، جواب کامل آن عبارت است از آن جوابی از معادلهٔ لاپلاس که درداخل V پیوسته باشد ودرمرز V در شرایط تعیین شده صدق کند. در صورتی که مرز از رساناها تشکیل شده باشد، شرایط تعیین شده در روی مرز به صورت $\varphi = \text{const.}$ است.

۳. جوابهای تحلیلی معادلهٔ لاپلاس ممکن است از ترکیبهای خطی مجموعه‌ای از توابع پایه ساخته شوند، که این توابع با در نظر گرفتن تقارنهای موجود در مسئلهٔ به خصوص

انتخاب می‌شوند. مجموعهٔ هماهنگهای منطقه‌ای برای مرزهای کروی وتقارن سمتی‌مفیدند، و هماهنگهای استوانه‌ای برای مرزهای استوانه‌ای وتقارن محوری. قضیهٔ یکتـایی نشان خواهد دادکه چه وقت توابعی به‌تعدادکافی ازمجموعهٔ نامتناهی توابع، مورد استفاده‌قرار گرفته‌اند.

۴. روش تصویرها شگردی است که به‌کمك آن یك پیکربندی ازبارهای تصویری‌مجازی درخارج از V چنان طرح‌ریزی می‌شودکه میدان پتانسیل ناشی از این بارها و بارهـای واقعی داخل V، روی مرزهـای مفروض V درشرایط مرزی مربوط به φ صدق کند. قضیهٔ یکتایی تضمین می کندکه میدان داخل V میدان صحیحی است. این روش را تنها می‌توان در موارد معدودی به‌کاربردکه درآنها تقارن منـاسب وجود داشته باشد. ساده‌ترین مثال عبارت است ازبارنقطه‌ای درمقابل صفحه‌ای رسانا.

۵. وقتی همهٔ بارها روی سطوح رسانا قراردارند، معادلهٔ لاپلاس حکم می کندکه پتانسیل رساناها توابعی خطی ازبارررساناها باشند

$$\varphi_i = \sum_j P_{ij} Q_j$$

مسائل

۱.۳ دوپوستهٔ رسانای باردارکروی هم مرکز به‌شعاعهای r_a و r_b به‌ترتیب پتـانسیلهای φ_a و φ_b دارند. اگر $r_b > r_a$ باشد، مطلوب است پتانسیل درنقاط واقع میان دوپوسته، و درنقاط $r > r_b$.

۲.۳ دوپوستهٔ طویل‌استوانه‌ای باردار وهم محوربه‌شعاعهای r_a و r_b به‌ترتیب‌پتانسیلهای φ_a و φ_b دارند. پتانسیل‌را درنقاط میان دوپوسته پیداکنید.

۳.۳ اگر φ_1 یکی ازجوابهای معادلهٔ لاپلاس باشد. ثابت‌کنیدکه مشتق پاره‌ای φ_1 نسبت به‌یك یاچند مختصه ازمختصات قائم (نظیر $\partial\varphi_1/\partial x$، $\partial^2\varphi_1/\partial x^2$، $\partial^2\varphi_1/\partial x\partial y$ و مانند آنها) نیزجواب معادلهٔ لاپلاس است.

۴.۳ فرض‌کنیدکه درتمامی ناحیهٔ V_0، φ در معـادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند. ثابت‌کنیدکه مقدار φ درهرنقطهٔ O برابراست بامیانگین مقادیرآن برروی سطح‌کره‌ای به‌مرکز O که تماماً در V_0 قرارداشته باشد

$$\varphi(\mathrm{O}) = \frac{1}{4\pi R^2}\oint \varphi \, da$$

دراین رابطه R شعاع کره است. (راهنمایی: درمعادلهٔ (۵۷.۱) فرض‌کنیدکه $\psi = 1/r$.)

نشان دهید که درنتیجه φ در V_0 هیچ بیشینه یا کمینه‌ای ندارد.

۵.۳ تابع

$$F(u)=(1-2xu+u^2)^{-1/2}$$

را تاجملهٔ u^3، به‌صورت رشتهٔ تیلور برحسب u بسط دهید. توجه کنید که ضرایب این بسط، چهارچند جمله‌ای نخستین ازچند جمله‌ایهای لژاندر $P_n(x)$اند. دراقع $F(u)$ تابع مولد تمام چند جمله‌ایهای لژاندر است:

$$F(u)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)u^n$$

۶.۳ نشان دهید که نیمی‌ازهماهنگهای منطقه‌ای بامشتق گیری پی‌درپی r^{-1} نسبت به‌مختصهٔ قائم z تولید می‌شوند ($z=r\cos\theta$).

۷.۳ $\nabla^2\varphi$ درمختصات استوانه‌ای (معادلهٔ ۸.۳) را ازصورت آن درمختصات قائم (معادلهٔ ۶.۳) به‌کمك تغییرمتغیر $x=r\cos\theta$، $y=r\sin\theta$ به‌دست‌آورید.

۸.۳ یك‌چهارقطبی محوری متشکل است ازمجموعهٔ بارهای نقطه‌ای q، $-2q$، q واقع برمحور z، درفواصل l، ۰، $-l$ ازمبدأ مختصات. پتانسیل این‌چهارقطبی‌را حساب کنید. پتانسیل‌را فقط درفواصل $r\gg l$ حساب کنید ونشان‌دهید که‌این پتانسیل بایکی‌ازهماهنگهای منطقه‌ای متناسب است.

۹.۳ فرض کنید که یك دوقطبی نقطه‌ای درمرکزیك پوستهٔ رسانای کروی متصل به‌زمین قرار گرفته است. پتانسیل‌را درداخل پوسته پیدا کنید. (راهنمایی: برای برآوردن شرایط مرزی برروی پوسته ازهماهنگهای منطقه‌ای‌که درمبدأ منتظم‌اند استفاده کنید.)

۱۰.۳ نشان دهید که برای یك کرهٔ رسانای بی‌بار، وقتی درمیدانی الکتریکی که درآغاز یکنواخت است قرار گیرد، پتانسیل ناشی ازکره برابراست باپتانسیل یك‌دوقطبی نقطه‌ای. گشتاور دوقطبی القایی کره‌را پیدا کنید.

۱۱.۳ یك کرهٔ رسانا به‌شعاع a راکه حاوی بارکل Q است دریك میدان الکتریکی E_0 که در آغاز یکنواخت است قرارمی‌دهیم. پتانسیل را در تمام نقاط واقع در خارج کره پیدا کنید.

۱۲.۳ یك استوانهٔ رسانای طویل به‌شعاع a راکه بارخالص ندارد، درمیدان الکتریکی $\mathbf{E}_0$ که در آغاز یکنواخت است قرار می‌دهیم. جهت $\mathbf{E}_0$ برمحور استوانه عمود است. پتانسیل را درنقاط خارج استوانه، و همچنین چگالی بار را درسطح استوانه محاسبه کنید.

*۱۳.۳ نشان دهید که $\mathrm{Im}\, A[(x+iy)]^{1/2} = Ar^{1/2} \sin\theta/2$ درمعادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند، ولی میدان الکتریکی ناشی ازاین تابع دره $\theta =$ ناپیوستگی دارد. (توجه کنید که r و θ دراینجا مختصات استوانه‌ای‌اند). این تابع را می‌توان برای توصیف پتانسیل در لبهٔ یك صفحهٔ رسانای باردار به‌کاربرد که صفحهٔ رسانا فقط برای مقادیرمثبت x برصفحهٔ xz منطبق باشد. چگالی بار برروی این صفحه را پیدا کنید. تعدادی ازسطوح هم‌پتانسیل و تعدادی ازخطوط نیرورا رسم کنید.

۱۴.۳ بارنقطه‌ای q درفاصلهٔ d ازیك صفحهٔ نامتناهی متصل به‌زمین قرار دارد. بارکل القایی درصفحه را باانتگرال گیری مستقیم ازتابع چگالی سطحی بارمحاسبه کنید.

۱۵.۳ دوبارنقطه‌ای q_1 و q_2 درنزدیکی یك صفحهٔ رسانای نامتناهی متصل به‌زمین، قرار دارند. بارهای تصویری لازم‌را برای‌آنکه این صفحه به‌یك سطح با پتانسیل ثابت تبدیل شود پیدا کنید. آیا ازنتیجه‌ای که به‌دست آورده‌اید می‌توانید توزیع بار تصویری مورد لزوم را برای موردی که یك جسم باردار به‌شکل دلخواه با چگالی بار ρ در مقابل یك صفحهٔ رسانای نامتناهی قراردارد، پیشگویی کنید؟

۱۶.۳ دوصفحهٔ رسانای متصل به‌زمین بایکدیگرزاویهٔ $60°$ می‌سازند وبارنقطه‌ای q میان آنها قراردارد. مکان بارهای تصویری که میدان الکتریکی میان این دوصفحه را می‌دهند، تعیین کنید.

۱۷.۳ بارنقطه‌ای q میان دوصفحهٔ رسانای موازی متصل به‌زمین قرارگرفته است. فاصلهٔ دوصفحه از یکدیگر d است. مکان تعداد بی‌نهایت بارهای تصویری را پیدا کنید. نیروی وارد بربار q را برحسب یك‌رشتهٔ بی‌نهایت بیان کنید.

۱۸.۳ نیرویی‌راکه یك بارنقطه‌ای q ویك کرهٔ رسانای بی‌بار به‌شعاع a به‌یکدیگر وارد می‌کنند پیدا کنید. بارنقطه‌ای درفاصلهٔ r از مرکز کره قرار دارد و $r > a$. یك عبارت تقریبی پیدا کنید که برای $r \gg a$ معتبر باشد.

۱۹.۳ نشان دهید که مسئلهٔ کره رسانای بی‌بار در میدان الکتریکی $\mathbf{E}_0$ راکه در آغاز یکنواخت است، می‌توان به‌کمك تصاویرحل کرد. (راهنمایی: میدان الکتریکی یکنواخت درحوالی مبدأ مختصات را می‌توان تقریباً بامیدان دوبار نقطه‌ای Q و $-Q$ که روی‌محور z وبه‌ترتیب درنقاط $z = -L$ و $z = +L$ قراردارند، مساوی‌فرض کرد. هرچه L بزرگتر باشد $(L \to \infty)$، میدان یکنواخت‌ترمی‌شود. واضح است که $E_0 = Q/2\pi\epsilon_0 L^2$.)

۲۰.۳ بارنقطه‌ای q درداخل یك پوستهٔ رسانای کروی وبه‌فاصلهٔ r ازمرکزآن قراردارد.

---

* مسائل ستاره‌دار مشکلترند.

شعاع داخلی پوسته a است. نشان دهید که این مسئله‌را می‌توان به‌شیوهٔ تصویری حل کرد؛ چگالی سطحی بار σ راکه درروی سطح داخلی پوسته القا می‌شود، پیدا کنید. (پتانسیل پوستهٔ کروی را نمی‌توان‌کاملا برحسب q وتصویرآن مشخص‌کرد، زیرا بارهای ثابت خارج ازکره نیزمی‌توانند درایجاد پتانسیل‌کره سهیم‌باشند. باوجود این سهم این بارهای خارجی فقط جملهٔ جملهٔ ثابتی در پتانسیل است). بارکل القا شده در سطح داخلی پوسته را به دو طریق به‌دست آورید: (الف) بااستدلال فیزیکی؛ (ب) باانتگرال‌گیری مستقیم σ برروی سطح.

۲۱.۳ استوانهٔ رسانای بلندی‌که بار در واحد طول آن λ است موازی با یك صفحهٔ رسانای نامتناهی متصل به‌زمین قراردارد. فاصلهٔ محور استوانه ازصفحه برابر x_0 وشعاع استوانه برابر a است. مکان بارتصویری خطی را پیداکنید ومقدارثابت M را (که تعیین کنندهٔ پتانسیل استوانه است) برحسب a و x_0 به‌دست‌آورید.

۲۲.۳ توزیع کروی باری باچگالی بارثابت ρ به‌ازای $r \leqslant R$ مشخص می‌شود. برای شعاعهای بزرگتر از R چگالی بار صفر است. با انتگرال‌گیری از معادلهٔ پواسون، پتانسیل $\varphi(r)$ را حساب کنید. نتیجه را با محاسبهٔ انتگرال معادلهٔ (۱.۳) امتحان کنید. (راهنمایی: برای‌محاسبهٔ رابطهٔ (۱.۳) ناحیهٔ باررا به‌پوسته‌های کروی هم‌مرکز به‌ضخامت dr تقسیم کنید.)

۲۳.۳ دوقطبی $\mathbf{p}$ عمود بریك صفحهٔ رسانای نامتناهی وبه‌فاصلهٔ d از آن قرار دارد صفحه به‌زمین متصل است (یعنی پتانسیل آن صفراست). نیروی وارد برصفحه ازطرف‌این دوقطبی را محاسبه کنید.

۲۴.۳ بار یك طوفان تندری درارتفاع h_1 برابر $+Q$ ومستقیماً درزیرآن درارتفاع h_2 برابر $-Q$ است. رابطه‌ای برای میدان الکتریکی قائم E_0 درسطح زمین وبه‌فاصلهٔ d از این‌طوفان پیدا کنید. برای $h_1 = 5000\,\mathrm{m}$ و $h_2 = 3000\,\mathrm{m}$ و $Q = 15\,\mathrm{C}$، منحنی‌تغییرات E_0 را از $d = 0$ تا $d = 20\,\mathrm{km}$ رسم کنید.

۲۵.۳ فرض کنید که $\varphi(x, y, z)$ درمعادلهٔ لاپلاس صدق می کند. نشان دهید که مقدار φ در (x, y, z) تقریباً برابراست با میانگین مقادیرآن درشش نقطهٔ مجاور $(x\pm d, y, z)$، $(x, y\pm d, z)$، $(x, y, z\pm d)$. (راهنمایی: بسط رشتهٔ تیلور $\varphi(x+d, y, z)$ را تاجملهٔ d^3 محاسبه‌کنید، وبطورمشابه برای پنج نقطهٔ‌دیگر؛ سپس نتایج‌را باهم‌جمع کنید.) برنامه‌های‌کامپیوتری برای محاسبهٔ عددی φ می‌توانند براین نتیجه مبتنی باشند.

منابع

کتابهای درسی زیر به خاطر (۱) بحث کاملتر دربارهٔ معادلهٔ لژاندر. (۲) صورت کلی

معادلهٔ لاپلاس درمختصات متعامدمنحنی‌الخط، و (۳) بحث کاملتردربارهٔ حل معادلهٔ لاپلاس، توصیه می‌شوند

Mathematical Physics, by E. Butkov, Reading, Mass: Addison -Wesley, 1968.

Electromagnetic Theory, by J. A. Stratton, New York: Mc Graw-Hill, 1941.

Classical Electricity and Magnetism, Second Edition, by W. Panofsky and M. Phillips, Reading Mass: Addison-Wesley. 1962.

۴

میدان الکتروستاتیک درمحیطهای دی الکتریك

تاکنون مسائلی‌راکه شامل محیطهای دی‌الکتریکی بودند بررسی نکرده‌ایم وتنها مواردی راکه درآنها میدان الکتریکی منحصراً یا به‌وسیلهٔ بارهای درون یك توزیع مشخص یا در اثر بارهای آزاد واقع برسطوح رساناها تولید می‌شود مورد بحث قرار داده‌ایم. اکنون می‌خواهیم مورد عمومیتری‌را بررسی کنیم.

مادهٔ دی‌الکتریك‌ایده‌آل‌آن است‌که بارآزاد نداشته باشد . با وجود این محیطهای دی‌الکتریکی ازمولکولها ومولکولها نیزبه‌نوبهٔ خودازموجودات بارداری (هسته‌های‌اتمی والکترونها) تشکیل شده‌اند، ومولکولهای دی‌الکتریك یقیناً تحت‌تأثیرمیدانهای الکتریکی قرارمی‌گیرند. میدان الکتریکی موجب می‌شودکه نیرویی به‌هرذرهٔ باردارورارد شود،ذرات بابارمثبت درجهت میدان رانده می‌شوندوذرات با بارمنفی درجهت مخالف آن، به‌گونه‌ای که قسمتهای مثبت ومنفی هرمولکول ازمواضع‌حالت تعادل خودخارج ودردوجهت‌مخالف جابه‌جا می‌شوند. اما مقداراین جابه‌جایی‌ها(که دربیشترموارد ازکسرکوچکی ازقطریك مولکول‌تجاوزنمی‌کنند) به‌علت‌ایجاد نیروهای‌قوی‌بازگرداننده‌ای‌که دراثرتغییرپیکربندی مولکولها به‌وجود می‌آیند، محدود است. گاه ازاصطلاح «بار مقید»، در مقابل «بارآزاد» یك رسانا، استفاده می‌شود تا تأکید شود که این بارهای مولکولی نمی‌توانند خیلی دور بروند، یا ازجسم دی‌الکتریك جدا شوند. تأثیر کلی ازلحاظ ماکروسکوپی‌را می‌توان‌این طورتجسم کردکه تمامی بارمثبت دی‌الکتریك نسبت به‌بارمنفی‌آن جابه‌جا شده است. در این صورت گفته می‌شود دی‌الکتریك قطبیده شده است.

دی‌الکتریك قطبیده، باوجودی‌که به‌طور متوسط ازلحاظ الکتریکی خنثاست، اماهم درنقاط خارج وهم‌درداخل دی‌الکتریك میدان الکتریکی ایجاد می‌کند. درنتیجه، باوضعی روبه‌رو می‌شویم که به‌ظاهرناهنجاراست: قطبیدگی‌دی‌الکتریك به‌میدان‌الکتریکی‌کل‌موجود

درمحیط بستگی دارد، درحالی که قسمتی ازاین میدان الکتریکی به‌وسیلهٔ‌خود دی‌الکتریك ایجاد می‌شود. به‌علاوه‌میدان الکتریکی دی‌الکتریك، درنقاط دوراز آن ممکن است توزیع بار آزاد درروی اجسام رسانارا تغییردهد، و این به‌نوبهٔ خود میدان الکتریکی‌را در درون دی‌الکتریك عوض‌خواهدکرد. هدف اصلی‌این‌فصل پیداکردن روشهایی کلی برای‌بررسی این وضعیت غریب است.

۱.۴ قطبش

عنصرحجمی کوچکی چون Δv ازمحیطی دی‌الکتریك‌راکه روی‌هم‌رفته ازحیث الکتریکی خنثاست درنظرمی گیریم. هرگاه محیط قطبیده شود جدایی میان بارهای مثبت ومنفی تحقق می‌یابد، وعنصرحجم با گشتاور دوقطبی الکتریکی

$$\Delta\mathbf{p}=\int_{\Delta v}\mathbf{r}\,dq \qquad (۱.۴)$$

مشخص می‌شود. مطابق آنچه دربخش ۹.۲ دیدیم، میدان‌الکتریکیی که به‌وسیلهٔ Δv در نقاط دور (یعنی درفواصلی از Δv که نسبت به‌ابعاد عنصرحجم بسیار بزرگ‌اند) ایجاد می‌شود، بااین کمیت ($\Delta\mathbf{p}$) تعیین می‌شود.

چون $\Delta\mathbf{p}$ به‌اندازهٔ عنصرحجم بستگی دارد، بهتراست با $\mathbf{P}$، یعنی گشتاور دو قطبی الکتریکی درواحد حجم

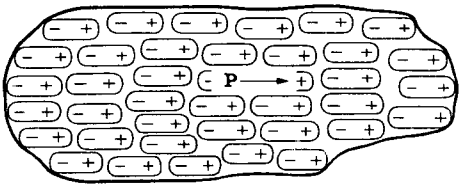
$$\mathbf{P}=\frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta v} \qquad (۲.۴)$$

کار کنیم. به‌بیان دقیقتر، $\mathbf{P}$ باید به‌عنوان‌حد این کسر تعریف‌شود وقتی‌که حجم Δv ازلحاظ ماکروسکوپی بسیار کوچك شود. بدین ترتیب $\mathbf{P}$ به‌یك تابع‌نقطه‌ای $\mathbf{P}(x, y, z)$ تبدیل می‌شود. $\mathbf{P}$ را معمولا قطبش الکتریکی، یافقط قطبش، محیط می‌نامند.ابعادآن‌بار برواحد سطح ویکای‌آن دردستگاه mks کولن برمترمربع است.

واضح است‌که $\mathbf{P}(x, y, z)$کمیتی برداری‌است‌که در هرعنصر حجم، با $\Delta\mathbf{p}$ هم‌جهت است. $\Delta\mathbf{p}$ به‌نوبهٔ خود باجهت جابه‌جایی بارمثبت نسبت به‌بار منفی هم‌جهت است (ر ك شکل ۱.۴).

اگرچه Δv ازلحاظ ماکروسکوپی بسیار کوچك فرض می‌شود، ولی باوجود این تعداد بسیارزیادی مولکول دارد. گاهی مطلوب است‌که دربارهٔ گشتاور دوقطبی الکتریکی یك تك مولکول صحبت شود، یعنی

$$\mathbf{p}_m=\int_{\text{مولکول}}\mathbf{r}\,dq \qquad (۳.۴)$$



شکل ۱.۴ قطعه‌ای ازمادهٔ دی‌الکتریك قطبیده. هر عنصر حجم به صورت یك دو قطبی $\Delta\mathbf{p}$ نشان داده شده است.

زیرا مولکول یکی از واحدهای کوچك وخنثای الکتریکی است که مـادهٔ دی‌الکتریك را تشکیل می‌دهد. ازرابطهٔ (۱.۴) پیداست که گشتاور دوقطبی مربوط به‌عنصر Δv از رابطهٔ $\Delta\mathbf{p}=\sum\mathbf{p}_m$ به‌دست می‌آید، که درآن عمل جمع‌بندی شامل تمام مولکولهای درون‌عنصر Δv است. بنابراین

$$\mathbf{P}=\frac{1}{\Delta v}\sum_m \mathbf{p}_m \qquad (۴.۴)$$

دراین مورد درفصل ۵ بازهم گفتگوخواهد شد.

بااینکهٔ شکل ۱.۴ هرعنصر حجم یك دی‌الکتریك قطبیده را به‌صورت یك دو قطبی کوچك نشان می‌دهد، شاید آموزنده‌تر باشد که دی‌الکتریك‌را مرکب ازمولکولهایی‌تجسم کنیم وفرض کنیم که هردوقطبی شکل ۱.۴ یك تك مولکول است.

۲.۴ میدان خارجی یك‌محیط دی‌الکتریك

قطعه‌ای متناهی‌ازجسم یك دی‌الکتریك قطبیده، یعنی جسمی که درهر نقطهٔ $\mathbf{r}'$ باقطبش $\mathbf{P}(\mathbf{r}')$ مشخص می‌شود را، درنظرمی گیریم. قطبش باعث ایجاد میدان الکتریکی می‌شود، و هدف ما این است که این میدان را درنقطهٔ $\mathbf{r}$، خارج از جسم دی‌الکتریك پیدا کنیم (ر ك شکل ۲.۴). همان‌طورکه درفصل ۲ انجام شد، بهتر است ابتدا پتانسیل $\varphi(\mathbf{r})$ را پیدا کنیم، و میدان الکتریکی‌را بامحاسبهٔ منفی شیب φ به‌دست آوریم.

هرعنصرحجم $\Delta v'$ ازمحیط دی‌الکتریك بـا گشتاور دوقطبی $\Delta\mathbf{p}=\mathbf{P}\Delta v'$ مشخص می‌شود، وچون فاصلهٔ نقطهٔ (x, y, z) ازعنصر $\Delta v'$ نسبت به‌ابعاد $\Delta v'$ بسیاربزرگ‌است، این کمیت (یعنی گشتاور دو قطبی) به‌طورکامل سهم $\Delta v'$ را درایجاد پتانسیل تعیین می‌کند

$$\Delta\varphi(\mathbf{r})=\frac{\Delta\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{۴\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^۳}=\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\Delta v'}{۴\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^۳} \qquad (۵.۴)$$

دراینجا $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ برداری است که جهت آن به‌طرف خارج ازحجم $\Delta v'$ است واندازهٔ آن‌از رابطهٔ زیربه‌دست می‌آید

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|=\sqrt{(x-x')^۲+(y-y')^۲+(z-z')^۲} \qquad (۶.۴)$$

پتانسیل کل درنقطهٔ $\mathbf{r}$ ازجمع سهمهای مربوط به‌تمام قسمتهای دی‌الکتریك به‌دست‌می‌آید

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_0}\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \qquad (7.4)$$

این نتیجه درست است، و φ را می‌توان مستقیماً از رابطهٔ (۷.۴) به‌دست آورد مشروط برآنکه شکل تابعی $\mathbf{P}$ معلوم باشد. اما بهتراست معادلهٔ (۷.۴) را بایك تبدیل ریاضی‌ساده به‌شکل نسبتاً متفاوتی بنویسیم.

اگر $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ بامعادلهٔ (۶.۴) داده شده باشد، آنگاه

$$\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)=+\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \qquad (8.4)$$

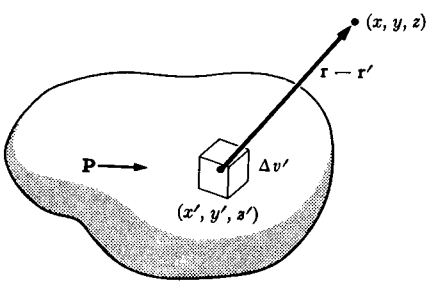
است که صحت آن را می‌توان با به کاربردن مستقیم عملگر شیب در دستگاه مختصات قائم امتحان کرد. درعملگر ∇' مشتقهای نسبت به‌مختصات پریم‌دار دخیل‌اند. درشرایطی ممکن است محاسبهٔ شیب نسبت به مختصات بدون پریم مطلوب باشد که ما آن‌را مطابق معمول با ∇ نشان می‌دهیم. واضح است که نتیجهٔ عمل ∇' برروی هرتابعی از $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ برابر است با عمل $-\nabla$ برروی همان تابع. عملگر ∇ را بعداً برای محاسبهٔ میدان الکتریکی در نقطهٔ $\mathbf{r}$ لازم خواهیم داشت. اما در محاسبهٔ انتگرال معادلهٔ (۷.۴) در حجم دی‌الکتریك، V_0، نقطهٔ $\mathbf{r}$ ثابت نگاه داشته می‌شود؛ لذا انتگرالدهٔ معادلهٔ (۷.۴) را می‌توان با استفاده از معادلهٔ (۸.۴) به‌صورت زیر تبدیل کرد

$$\frac{\mathbf{P}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}=\mathbf{P}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \qquad (9.4)$$

ازاتحاد برداری (۷.۱.۱) ازجدول ۱.۱ داریم

$$\nabla'\cdot(f\mathbf{F})=f\nabla'\cdot\mathbf{F}+\mathbf{F}\cdot\nabla' f \qquad (10.4)$$

که درآن f یك تابع نقطه‌ای نرده‌ای و $\mathbf{F}$ یك تابع نقطه‌ای برداری اختیاری است. بااستفاده ازاین اتحاد، (۹.۴) را می‌توان بازهم‌به‌صورت دیگری تبدیل کرد. دراینجانیز پریم معرف مشتق‌گیری نسبت به‌مختصات پریم‌دار است. فرض کنید $f=(1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$



شکل ۲.۴ میدان الکتریکی در (x, y, z) را می‌توان باجمع کردن سهم مربوط به‌عناصرحجمی مختلف $\Delta v'$ در V_0، به‌دست آورد. سطح V_0 با S_0 نشان داده شده است.

و $\mathbf{F}=\mathbf{P}$، دراین صورت انتگرالده، یعنی معادلهٔ (۹.۴)، به‌شکل زیردرمی‌آید

$$\frac{\mathbf{P}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{3}}=\nabla'\cdot\left(\frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)-\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla'\cdot\mathbf{P} \qquad (۱۱.۴)$$

وسرانجام پتانسیل، معادلهٔ (۷.۴)، را به‌صورت زیر می‌توان نوشت

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}}\oint_{S_{0}}\frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{n}\,da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}}\int_{V_{0}}\frac{(-\nabla'\cdot\mathbf{P})\,dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \qquad (۱۲.۴)$$

که درآن بااستفاده ازقضیهٔ واگرایی، انتگرال حجمی جملهٔ $\nabla'\cdot(\mathbf{P}/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$ به‌یك انتگرال سطحی تبدیل شده‌است، والبته $\mathbf{n}$ برداریکّهٔ عمودبرعنصرسطح da' است که‌جهت آن به‌سمت خارج (خارج دی‌الکتریك) است.

کمیتهای $\mathbf{P}\cdot\mathbf{n}$ و $-\nabla\cdot\mathbf{P}$ که درانتگرالهای معادلهٔ(۱۲.۴) دیده می‌شوند دوتابع نرده‌ای‌اند که ازبردارقطبش $\mathbf{P}$ نتیجه می‌شوند. بهتراین است که این مقادیر را بانمادهای خاصی مشخص‌کنیم، وچون این مقادیر به‌ترتیب ابعاد بارالکتریکی درواحد سطح و بار الکتریکی درواحد حجم دارند می‌توان نوشت

$$\sigma_{P}\equiv\mathbf{P}\cdot\mathbf{n}=P_{n} \qquad (۱۳.۴)$$

و

$$\rho_{P}\equiv-\nabla\cdot\mathbf{P} \qquad (۱۴.۴)$$

و σ_P و ρ_P را چگالیهای بار قطبشی نامید. چگالی سطحی بارقطبشی ازآن مؤلفهٔ قطبش که برسطح مربوط عمود است به‌دست می‌آید، وچگالی حجمی بار قطبشی معیاری است از نایکنواختی قطبش درداخل ماده.

اکنون پتانسیل ناشی ازمادهٔ دی‌الکتریك، یعنی رابطهٔ زیر

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}}\left[\oint_{S_{0}}\frac{\sigma_{P}\,da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}+\int_{V_{0}}\frac{\rho_{P}\,dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}}\int\frac{dq'_{p}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \qquad (۱۵.۴)$$

طوری نوشته شده است که به‌وضوح نشان می‌دهد این‌پتانسیل ناشی ازیك توزیع باراست. به‌عبارت دیگر، مادهٔ دی‌الکتریك به‌وسیلهٔ توزیع مناسبی از بارهای قطبشی جایگزین شده است.

اگرچه معادلهٔ (۱۵.۴) بااستفاده از تبدیلات ریاضی به‌دست‌آمده‌است، باوجوداین

باید بتوانیم σ_P و ρ_P را صرفاً برمبنای استدلال فیزیکی نیزدرك کنیم. اینکه یك چگالی بارسطحی وجود دارد ازشکل ۱.۴ پیداست. ازروی این شکل دیده می‌شود که این بارهای سطحی ازانتهاهای دوقطبیهایی که سمتگیری مشابهی دارند تشکیل شده است. بدین‌ترتیب برروی هرسطحی که با بردارقطبش موازی‌نیست یك‌چگالی بارالکتریکی به‌وجود می‌آید. اکنون به ρ_P برمی گردیم؛ انتظارمی‌رودکه $\rho_P\,\Delta v'$ باراضافی یا بارخالص ایجاد شده در عنصر $\Delta v'$ را به‌دست بدهد. این موضوع را به‌صورت زیر توضیح می‌دهیم: چگالیهای بار ρ^+ و ρ^- را طوری تعریف می کنیم که به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ بارمثبت کل و بار منفی کل کل‌درواحدحجم باشند. یعنی ρ^+ نشان‌دهندهٔ تمام هسته‌های اتمی درواحد حجم‌دی‌الکتریك، وبه‌طور مشابه، ρ^- نشان‌دهندهٔ تمام‌الکترونها در واحد حجم دی‌الکتریك است. درحالت ناقطبیده، هرعنصرحجمی ازلحاظ الکتریکی خنثاست ؛ پس

$$\rho_\circ^+(x',\ y',\ z')+\rho_\circ^-(x',\ y',\ z')=\circ \qquad (۱۶.۴)$$

شاخصهای پایین (صفر) نشان‌دهندهٔ چگالیهادرحالت ناقطبیده‌اند. فرض کنید به‌علت‌قطبیده شدن، بارهای‌مثبت به‌اندازهٔ $\delta^+(x,\ y,\ z)$ وبارهای منفی به‌اندازهٔ $\delta^-(x,\ y,\ z)$ جابه‌جا شوند. مقدار بارمثبتی که ازعنصر سطح da' عبورمی کند برابراست با $\rho_\circ^+\delta^+\,.\,\mathbf{n}\,da'$، بنابراین، افزایش بار مثبت حاصل ازفرایند قطبیدگی درحجم $\Delta v'$ برابراست با

$$-\oint_{\Delta s}\rho_\circ^+\vec{\delta}^+\,.\,\mathbf{n}\,da' \qquad (۱۷.۴)$$

که درآن ΔS سطحی است که حجم $\Delta v'$ را محصورمی کند. به‌همین ترتیب جابه‌جا شدن بارهای منفی باعث ازدیاد بار (یا نقصان بارمنفی) درحجم $\Delta v'$ می‌شودکه مقدارآن‌برابر است با

$$\oint_{\Delta s}(-\rho_\circ^-)\vec{\delta}^-\,.\,\mathbf{n}\,da \qquad (۱۸.۴)$$

افزایش‌کلی بارحجم $\Delta v'$ دراثرجابه‌جا شدن بارهای مثبت ومنفی مساوی حاصل جمع معادله‌های (۱۷.۴) و(۱۸.۴) است که، بااستفاده‌ازمعادلهٔ (۱۶.۴)، آن‌رامی‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$-\oint_{\Delta s}\rho_\circ^+(\vec{\delta}^+-\vec{\delta}^-)\,.\,\mathbf{n}da'=-\nabla\cdot[\rho_\circ^+(\vec{\delta}^+-\vec{\delta}^-)]\,\Delta v' \qquad (۱۹.۴)$$

اما $\vec{\delta}^+-\vec{\delta}^-$ تغییرمکان نسبی چگالی بارهای مثبت ومنفی است، ودرنتیجه $\rho_\circ^+(\vec{\delta}^+-\vec{\delta}^-)$ معادل همان چیزی‌است که ما آن‌را قطبش $\mathbf{P}$ نامیدیم. پس $\rho_P\Delta v'$ برابراست با بارخالص درعنصرحجم دی‌الکتریك قطبیده.

درنظراول ممکن است عجیب به‌نظر بیاید که با اینکه در آغاز باعنصرهـای حجمیی شروع کردیم که ازلحاظ الکتریکی خنثی بودند، اما درپایان به‌عنصرهای حجمیی رسیدیم که بارخالص دارند. طبق گفتهٔ قبلی ما، دی‌الکتریك تشکیل شده‌است ازعنصرهای دوقطبی $\Delta\mathbf{p}$ و لازم بود که هر $\Delta\mathbf{p}$ ازلحاظ الکتریکی خنثی باشد تامعادلهٔ (۱۵.۴) به‌طور صحیح پتانسیل را به‌دست بدهد. حال می‌بینیم تا وقتی که $\nabla\cdot\mathbf{P}$ صفرنشود، هریك از عنصرهای حجم به‌طورانفرادی باردار به‌نظرمی‌آیند. منشأ این تناقض ظاهری درتبدیل ریاضی‌معادلهٔ (۱۱.۴) نهفته‌است؛ دراین معادله سهم‌هرعنصرحجم تبدیل‌می‌شودبه‌یك جملهٔ حجمی‌متفاوت ویك جملهٔ سطحی. جمع کل باردرحجم وبرروی سطح عنصرحجم هنوزهم صفر است؛ اما وقتی عنصرهای حجمی مختلف را روی‌هم می گذاریم تایك قطعهٔ مـاکروسکوپی از مادهٔ دی‌الکتریك تشکیل بدهند، متوجه می‌شویم که پتانسیل حاصل از «سطوح داخلی» مختلف یکدیگررا حذف می کنند. سرانجام چیزی که برای ما باقی می‌ماند سهم آن عنصرهـای حجمیی است که به‌طور مؤثر باردارند وسهم آن سطوحی که مربوط به‌مرزهای واقعی‌جسم دی‌الکتریك‌اند.

مقدار کل بارقطبشی یك جسم دی‌الکتریك، یعنی

$$Q_P=\int_{V_0}(-\nabla'\cdot\mathbf{P})\,dv'+\oint_{S_0}\mathbf{P}\cdot\mathbf{n}\,da' \qquad (۲۰.۴)$$

باید مساوی صفرشود، زیرا فرض اولیه ما این بود که دی‌الکتریك، روی‌هم رفته، از لحاظ الکتریکی خنثی است. این نتیجه مستقیماً ازصورت معادلهٔ (۲۰.۴)، که به‌وضوح درنتیجهٔ قضیهٔ واگرایی صفرمی‌شود، پیداست.

اکنون برای پتانسیل الکتروستاتیکی $\varphi(\mathbf{r})$ ناشی از یك نمونهٔ دی‌الکتریك قطبیده دوعبارت متمایزداریم، یعنی معادلات (۷.۴) و (۱۵.۴). این دو معـادله هردو درست‌اند، لیکن برای ما دربیشترموارد رابطهٔ دوم مناسبتراست. میدان الکتریکـی $\mathbf{E}$ را می‌توان از روی منفی شیب معادلهٔ (۱۵.۴) حساب کرد. چون φ تابعی‌است از مختصات (x, y, z)، شیب مربوط عبارت است از $-\nabla$. مختصات بی پریم فقط به صورت تابع $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ ظاهرمی‌شوند. بنا براین، باتوجه به‌اینکه $\nabla(1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)=-\nabla'(1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$ وبا به‌کار بردن معادلهٔ (۸.۴)، نتیجه می گیریم که

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{S_0}\frac{\sigma_P(\mathbf{r}-\mathbf{r}')da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}+\int_{V_0}\frac{\rho_P(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right] \qquad (۲۱.۴)$$

۳.۴ میدان الکتریکی در داخل یك دی‌الکتریك

پیش از آنکه بتوانیم عبارتی برای میدان الکتریکی در داخـل یك محیط قطبیده به‌دست

آوریم ، لازم است این میدان را دقیقاً تعریف کنیم. البته آنچه مورد نظر ماست میدان الکتریکی ماکروسکوپی است، یعنی میدان الکتریکی میانگین در ناحیهٔ کوچکی از دی‌الکتریك که باوجود کوچکی شامل تعداد زیادی مولکول است. راه دیگری که شاید هم راه بهتری باشد این است که میدان الکتریکی را مستقیماً برحسب یك آزمایش ماکروسکوپی تعریف کنیم: میدان الکتریکی (ماکروسکوپی) عبارت است ازحد نیروی وارد بر واحد بار یك بار آزمون واقع درداخل دی‌الکتریك، وقتی که بارآزمون آن‌قدر کوچك است که خودش برتوزیع بار تأثیری ندارد. این بارآزمون باید ازلحاظ ماکروسکوپی ابعاد بسیار کوچکی داشته باشد (یعنی همان چیزی که بار «نقطه‌ای» می‌نامیم)، اما درمقایسه با اندازهٔ یك مولکول بزرگ خواهد بود.

با اینکه عبارت بالا تعریف اساسی میدان الکتریکی ماکروسکوپی $\mathbf{E}$ است، به‌کار بردن مستقیم این تعریف برای به‌دست آوردن عبارتی برای میدان الکتریکی کاری است مشکل، زیرا ابتدا باید نیروی وارد بریك جسم باردار باابعاد بزرگ را حساب کنیم و بعد وقتی اندازهٔ آن جسم کوچك می‌شود حدآن‌را به‌دست‌آوریم. بنابراین لازم‌است برای‌یافتن عبارتی تحلیلی که درجستجوی آن هستیم، خاصیت دیگری ازمیدان الکتریکی‌را به‌کاربریم، وبدین ترتیب $\mathbf{E}$ را برحسب بارهای قطبشی محیط به‌دست‌بیاوریم. بعداً (دربخش ۱۰.۴)، نشان خواهیم دادکه مقداری‌راکه $\mathbf{E}$ نامیده‌ایم با «تعریف اساسی نیرو» مطابقت دارد.

میدان الکتروستاتیکی در دی‌الکتریك باید همان خواص اساسی را داشته باشدکه درمورد $\mathbf{E}$ در خلأ صادق بود؛ به‌خصوص اینکه $\mathbf{E}$ میدانی است که بقا دارد و در نتیجه می‌توان آن‌را ازیك پتانسیل نرده‌ای به‌دست‌آورد. بنابراین

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

یا، به‌طور معادل

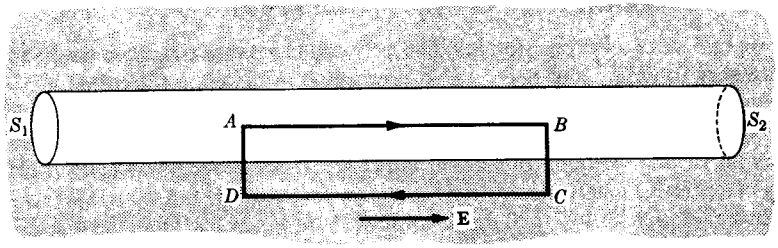
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

حال رابطهٔ اخیررا برای مسیر $ABCD$ که درشکل ۳.۴ نشان‌داده شده است به‌کارمی‌بریم. دراین شکل AB درحفرهٔ سوزنی شکلی که درداخل‌دی‌الکتریك تعبیه شده‌است، و CD در داخل خود محیط دی‌الکتریك قراردارد. چون‌قطعات AD و BCرا می‌توان به‌طوردلخواه کوچك فرض کرد، انتگرال خطی تبدیل می‌شود به

$$\mathbf{E}_v \cdot \mathbf{l} - \mathbf{E}_d \cdot \mathbf{l} = 0$$

یا به‌طورمعادل

$$E_{vt} = E_{dt} \qquad (۲۲.۴)$$



شکل ۳.۴ مسیر $ABCD$ که قسمتی از آن درداخل حفرهٔ سوزنی شکل‌وبخش دیگر آن درداخل دی‌الکتریك قرار دارد. در یك محیط دی‌الکتریك همسانگرد (بخش ۵.۴) قطبش $\mathbf{P}$ با $\mathbf{E}$ هم جهت است، به‌طوری‌که برای امتداد حفرهٔ سوزنی‌که‌نشان داده شده است، برروی دیواره‌هـای استوانه‌ای $\sigma_p = 0$ است. در یـك دی‌الکتریك ناهمسانگرد، σ_p الزاماً صفر نیست، اما مقدار آن در مؤلفهٔ طولی میدان الکتریکی درداخل حفره تأثیری ندارد.

که شاخصهای پایین v و d به‌ترتیب نشان دهندهٔ خلأ و دی‌الکتریك‌اند، وشاخص پایین t نمایندهٔ مؤلفهٔ مماسی است.

معادلهٔ (۲۲.۴) به‌امتداد حفرهٔ سوزنی شکل بستگی ندارد. اگر «سوزن» درامتداد $\mathbf{E}$ قرار گیرد، $E_{dt} = E_d$؛ به‌علاوه، به‌علت تقارن، میدان در داخل حفره در امتداد سوزن است، یعنی $E_{vt} = E_v$. بنابراین به‌این نتیجهٔ مهم می‌رسیم که:

میدان الکتریکی درداخل یك دی‌الکتریك برابر است بامیدان الکتریکی درداخل یك حفرهٔ سوزنی شکـل در داخل دی‌الکتریك، مشروط به آنکه محور حفره موازی امتداد میدان الکتریکی باشد.[1]

ازاین‌رو واضح‌است که مسئلهٔ محاسبهٔ میدان الکتریکـی در داخل یك دی‌الکتریك به‌مسئلهٔ تعیین میدان درداخـل یك حفرهٔ سوزنی شکل واقع در داخل دی‌الکتریك تبدیل می‌شود. لیکن میدان الکتریکی داخل حفره، میدان خارجی دی‌الکتریك است و بنابراین برای تعیین آن می‌توان ازنتایج بخش ۲.۴ استفاده کرد. درست مـانند بخش ۲.۴، فرض می‌کنیم قطبش دی‌الکتریك باتابع مفروض $\mathbf{P}(x', y', z')$ داده شده باشد، و پتانسیل و میدان الکتریکی ناشی ازاین قطبش‌را حساب می‌کنیم. اگرنقطهٔ $\mathbf{r}$ که پتانسیل و میدان را درآن محاسبه می‌کنیم درمرکزحفره باشد، بااستفاده ازمعادلهٔ (۱۵.۴)، پتانسیل‌الکتریکی

---

۱. چنین بیانی فقط برای دی الکتریکهای همسانگـرد دقیقاً درست است (بخش ۵.۴) برای دی‌الکتریکهای ناهمسانگرد استدلال تقارن باشکست روبه‌رو می‌شود، و نتیجه‌گیری فوق باید چنین تعمیم داده شود: میدان الکتریکی در داخل یك دی‌الکتریك برابر است با مؤلفهٔ طولی میدان الکتریکی در داخل یك حفرهٔ سوزنی شکل در دی‌الکتریك، مشروط بر آنکـه محور حفره موازی امتداد میدان الکتریکی داخل دی‌الکتریك باشد.

را به‌دست می‌آوریم

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_0-V_1}\frac{\rho_P(x',\ y',\ z')\,dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_0+S'}\frac{\sigma_P(x',\ y',\ z')\,da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

(۲۳.۴)

دراین معادله V_0-V_1 حجم دی‌الکتریك است که حجم «سوزن» از آن کم شده است، S_0 سطح خارجی دی‌الکتریك است و $S'=S_1+S_2+S_c$ سطح کل سوزن است. از شکل ۳.۴ پیداست که برروی سطح جانبی S_c سوزن، $\sigma_P=0$ است؛ به‌علاوه سوزن رامی‌توان به‌دلخواه نازك ساخت به‌گونه‌ای که ازسطوح S_1 و S_2 آن نیز بتوان صرفنظر کرد. بنابراین فقط سطوح خارجی دی‌الکتریك مؤثرخواهند بود وانتگرال سطحی معادلهٔ (۲۳.۴) از نظرشکل باانتگرال سطحی معادلهٔ (۱۵.۴) یکی خواهد شد. در انتگرال حجمیِ معادلهٔ (۲۳.۴) ازحجم حفره چشمپوشی می‌شود، باوجود این، همچنانکه به‌راحتی دیده می‌شود، سهم حجم حفره درمقداراین انتگرال قابل چشمپوشی است. چگالی بار ρ_P محدوداست؛ کمیت $dv'/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ در نقطهٔ میدان (یعنی در $\mathbf{r}'=\mathbf{r}$) واگرا نمی‌شود زیرا حجم یك نقطه، صفری است ازمرتبه‌ای بالاتر از $\lim|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$، و سرانجام حجم سوزن V_1 را می‌توان بانازك کردن حفره به‌دلخواه کوچك کرد. بنابراین نیازی‌هم به‌کنار گذاشتن حجم V_1 نیست و معادلهٔ (۲۳.۴) به‌صورت معادلهٔ (۱۵.۴) درمی‌آید. به‌عبارت دیگر، معادلهٔ (۱۵.۴)، اعم ازاینکه نقطهٔ $\mathbf{r}$ درداخل دی‌الکتریك واقع باشد یا در خارج آن، پتانسیل $\varphi(\mathbf{r})$ را به‌دست می‌دهد.

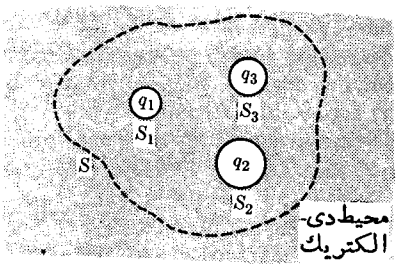
میدان الکتریکی $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ را با محاسبهٔ منفی شیب معادلهٔ (۲۳.۴) می‌توان به‌دست آورد. اما این میدان باآنچه از معادلهٔ (۲۱.۴) حاصل می‌شود تفاوت ناچیزی دارد. بنابراین معادلهٔ (۲۱.۴) میدان الکتریکی ناشی ازمحیط را درنقطهٔ $\mathbf{r}$ تعیین می‌کند، خواه $\mathbf{r}$ درداخل دی‌الکتریك باشد یا درخارج آن.

محاسبات مربوط به‌معادلات (۱۵.۴) و (۲۱.۴) در مواردی که $\mathbf{P}(x,\ y,\ z)$ تابع مکانی معلومی باشد، بسیار راحت است. (چند نمونه ازاین قبیل موارد را می‌توان درمیان مسائل آخراین فصل پیدا کرد). اما دربیشترموارد قطبش ازاعمال میدان الکتریکی‌خارجی برروی محیط دی الکتریك ناشی می‌شود [یعنی، $\mathbf{P}(x',\ y',\ z')$ تابعی است از میدان الکتریکی ماکروسکوپی کل $\mathbf{E}(x',\ y',\ z')$]، و در چنین شرایطی وضع بسیار پیچیده‌تر خواهد بود. اولا لازم‌است که شکل تابعی $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ را بدانیم؛ اما این شکل تابعی‌را دراکثر موارد به‌طورتجربی می‌دانیم وازاین لحاظ هیچ اشکالی وجود ندارد. اشکال اصلی‌ازاینجا ناشی می‌شود که $\mathbf{P}$ به‌میدان الکتریکی‌کل، ازجمله به‌آن قسمت ازمیدان که خود محیط دی‌الکتریك تولید می‌کند، بستگی دارد واین همان قسمت ازمیدان است که ما می‌خواهیم آن را محاسبه‌کنیم. پس نمی‌توانیم $\mathbf{P}$ را حساب کنیم زیراکه $\mathbf{E}$ را نمی‌دانیم، وبرعکس.

واضح است که برای حل این مسئله باید راه دیگری انتخاب کنیم. دربخشهای آینده دراین‌باره صحبت خواهیم کرد.

۴.۴ قانون گاؤس در دی‌الکتریکها. جابه‌جایی الکتریکی

درفصل ۲ رابطهٔ مهمی میان شارالکتریکی وبار، موسوم به‌قانون گاؤس، به‌دست آوردیم. طبق این قانون شارالکتریکی ازهرسطح بستهٔ دلخواه متناسب است با بـارکل واقع در داخل این سطح.درکاربرد قانون گـاؤس در مورد نـاحیه‌ای که بارهـای آزاد نهفته در دی‌الکتریکها دارد، باید دقت کردکه تمام بارهایی که در داخل سطح گاؤس قرار دارند منظورشوند، اعم ازبارقطبشی وبارنهفته در دی‌الکتریکها.



شکل ۴.۴ رسم سطح گاؤسی S درداخل محیط دی‌الکتریك.

در شکـل ۴.۴ سطح خطچین S یك‌سطح فرضی بسته است که در داخـل محیط دی‌الکتریك قرار دارد. مقداری بار (Q) درحجم محدود شده به S قرار داده‌ایم و فرض می‌کنیم کـه این بارها برروی سطوح سه رسانا به مقادیر q_1، q_2، و q_3 توزیع شده‌اند. بنابرقانون گاؤس داریم

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,da=\frac{1}{\varepsilon_0}(Q+Q_P) \qquad (۲۴.۴)$$

که درآن Q مقدارکل بارنهفته دردی‌الکتریك است، یعنی

$$Q=q_1+q_2+q_3$$

و Q_P بارقطبشی است

$$Q_P=\int_{S_1+S_2+S_3}\mathbf{P}\cdot\mathbf{n}\,da+\int_V(-\nabla\cdot\mathbf{P})\,dv \qquad (۲۵.۴ \text{ الف})$$

دراینجا V حجـم دی‌الکتریك محاط در S است. در S هیـچ مرز دی‌الکتریکی وجود ندارد، بنابراین انتگرال سطحی درمعادلهٔ (۲۵.۴ الف) شامل سطح S نخواهدشد. چنانچه انتگرال حجمی درمعادلهٔ (۲۵.۴ الف)را بااستفاده ازقضیهٔ واگرایی به‌یك انتگرال سطحی تبدیل کنیم، باید مواظب باشیم که سهم تمام سطوحی که حجـم V را در

بر گرفته‌اند، یعنی سطوح S، S_1، S_2، و S_3 در نظر بگیریم. واضح است که سه سطح آخر، جملهٔ اول معادلهٔ (۲۵.۴ الف) را حذف می‌کنند، به گونه‌ای که

$$Q_P = -\oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}\, da \qquad (۲۵.۴ \text{ ب})$$

از ترکیب این نتیجه با معادلهٔ (۲۴.۴) نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\oint_S (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n}\, da = Q \qquad (۲۶.۴)$$

معادلهٔ (۲۶.۴) بیان می‌کند که شار بردار $\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ از یك سطح بسته برابر است با بار خالص نهفته در حجمی که توسط این سطح محصور شده است. این بردار آن‌قدر مهم است که نام و نماد خاصی برای آن انتخاب شده‌است. بنا براین، مایك بردار میدان ماکروسکوپی جدید $\mathbf{D}$، به‌نام جابه‌جایی الکتریکی تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \qquad (۲۷.۴)$$

که یکای آن همان یکای $\mathbf{P}$ یعنی یکای بار در واحد سطح است.[1]

معادلهٔ (۲۶.۴) برحسب $\mathbf{D}$ چنین می‌شود

$$\oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}\, da = Q \qquad (۲۸.۴)$$

و این نتیجه را گاهی قانون گاؤس برای بردار جابه‌جایی الکتریکی، یا به‌طور ساده قانون گاؤس می‌نامند. معادلهٔ (۲۸.۴) را می‌توان برای ناحیه‌ای از فضا که با هر سطح بستهٔ S محصور شده باشد به‌کار برد؛ هر گاه آن‌را برای ناحیهٔ کوچکی که در آن بارهای محصور با چگالی ρ توزیع شده‌اند به‌کار بریم، آنگاه قانون گاؤس به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}\, da = \rho\, \Delta V$$

از تقسیم این معادله بر ΔV و محاسبهٔ حد آن نتیجه می‌گیریم

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad (۲۹.۴)$$

---

۱. در دستگاه یکاهای گاؤسی، $\mathbf{D}$ به صورت $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$ تعریف می‌شود و $\mathbf{D}$، $\mathbf{E}$، و $\mathbf{P}$، همگی یکای یکسانی دارند که عبارت است از یکای بار در واحد سطح و در خلأ $\mathbf{D} = \mathbf{E}$.

این نتیجه را گاهی صورت دیفرانسیلی قانون گاؤس می‌نامند.

مزیت بیان صورتهای انتگرالی ودیفرانسیلی قانون گاؤس، یعنی معادلات (۲۸.۴) و (۲۹.۴)، برحسب بردار $\mathbf{D}$ دراین است که فقط بار Q یا چگالی بار ρ که در محیط دی‌الکتریك قرارداده‌ایم، صریحاً درمعادلات ظاهرمی‌شوند. این بار همان چیزی است که ما معمولاً آن را ازاین پس به‌طورساده بار(یا چگالی بار) خواهیم نامید. هرگاه لازم شود که میان این‌بار و بار قطبشی محیط Q_p یا بار کل $Q+Q_p$ تمایز قائل شویم، بار Q را بارخارجی خواهیم نامید. مقصود ما از«خارجی» این نیست که این بارالزاماً خارج ازمرز فیزیکی جسم قراردارد، منظورما این است که این بار، اضافه بربارهایی است که ترکیب اتمی جسم خنثی را تشکیل می‌دهند.[1] از آنجا که در بسیاری از مسائل بارهای خارجی معلوم‌اند، خوب است میدان الکتروستاتیکی کلی درهرنقطه درداخل محیط دی‌الکتریك برحسب مجموع دوقسمت زیربیان شود

$$\mathbf{E}(x, y, z)=\frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{D}(x, y, z)-\frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{P}(x, y, z) \qquad (۳۰.۴)$$

که جملهٔ اول، $\mathbf{D}(1/\varepsilon_0)$، از طریق واگرایی‌اش به‌چگالی بار خارجی مربوط می‌شود و جملهٔ دوم، یعنی $\mathbf{P}(-1/\varepsilon_0)$ متناسب است باقطبش محیط. در خلأ میدان الکتریکی کلا به‌وسیلهٔ جملهٔ اول (۳۰.۴) داده می‌شود.

۵.۴ پذیرفتاری الکتریکی وثابت دی‌الکتریك

درمقدمهٔ این فصل گفتیم که قطبش هرمحیط دی‌الکتریك در اثر میدان الکتریکی موجود در محیط ایجاد می‌شود. درجهٔ قطبش نه‌تنها به‌میدان الکتریکی، بلکه به‌خواص مولکولهای سازندهٔ جسم دی‌الکتریك نیزبستگی دارد. ازلحاظ ماکروسکوپی، رفتارجسم بایك رابطهٔ تجربی به نام معادلهٔ ساختمندی، یعنی $\mathbf{P}=\mathbf{P}(\mathbf{E})$، که در آن $\mathbf{E}$ میدان الکتریکی

---

۱. بارخارجی‌را غالباً بار «آزاد» می‌نامند، و بارقطبشی‌راگاهی مترادف با بار مقید به‌کار می‌برند. در الکتروستاتیك این ابهام دردسر زیادی به وجود نمی‌آورد، زیرا بار خارجی برروی یك رسانا آزاد است (یعنی، آزاد است که به اطراف حرکت کند) و بار قطبشی در دی‌الکتریك مقید است. اما، در دی‌الکتریك بارخارجی‌آزاد نیست، اگرآزاد بود فوراً به‌سمت سطح می‌رفت وبه‌خارج نشت می‌کرد. همچنین، بیشترمحیطهای رسانا علاوه بربارهای آزادی که رفتارالکتروستاتیکی شیٔ رسانا را معین می‌کنند، بارهای مقیدی دارند که در شرایط دیگر به‌قطبیدگی کمك می‌کنند (فصل ۷). درمیدانهای وابسته به‌زمان (فصل ۱۹)، بسیارمهم‌است که موضوع تمایز میان بارهای خارجی و قطبشی با موضوع تمایز میان بارهای‌آزاد و مقید اشتباه نشود. لذا ما منحصراً دراین معنا از اصطلاح بار خارجی استفاده خواهیم کرد.

ماکروسکوپی است کاملا مشخص می‌شود. این رابطه یك رابطهٔ نقطه‌ای است، و اگر $\mathbf{E}$ در جسم از نقطه‌ای به‌نقطهٔ دیگر تغییر کند $\mathbf{P}$ هم به‌تبعیت از آن تغییر می‌کند.

برای بیشتر مواد وقتی $\mathbf{E}$ صفر شود $\mathbf{P}$ صفر خواهد شد. چون این رفتار معمولی مواد است ما بحث خود را در اینجا به موادی که از این نوع‌اند محدود می‌کنیم. (دربارهٔ دی‌الکتریکهایی که قطبش دائمی‌دارند در بخش ۴.۵ به‌اختصار بحث خواهد شد.) به‌علاوه اگر ماده همسانگرد باشد، قطبش باید همان جهتی‌را داشته باشد که میدان الکتریکی مولد آن دارد. این نتایج‌را می‌توان درمعادلهٔ ساختمندی زیر

$$\mathbf{P}=\chi(E)\mathbf{E} \qquad (۳۱.۴)$$

که در آن کمیت نرده‌ای $\chi(E)$ پذیرفتاری الکتریکی نام دارد خلاصه کرد. بسیاری‌ازمواد از لحاظ الکتریکی همسانگردند؛ این دسته شامل شاره‌ها و اجسام جامد چند بلوری و بی‌شکل، و برخی بلورهامی‌شوند. بررسی خواص الکتریکی‌اجسام ناهمسانگرد خارج‌از سطح این کتاب است.

از ترکیب روابط (۳۱.۴) و (۲۷.۴) رابطه‌ای برای $\mathbf{D}$ دریك محیط همسانگرد پیدا می‌کنیم

$$\mathbf{D}=\varepsilon(E)\mathbf{E} \qquad (۳۲.۴)$$

$$\varepsilon(E)=\varepsilon_{\circ}+\chi(E) \qquad (۳۳.۴)$$

که در آن کمیت $\varepsilon(E)$ گذردهی جسم نامیده می‌شود. بدیهی است که یکاهای ε، $\varepsilon_{\circ}$، و χ همه یکسان‌اند.

بااینکه دقت کردیم که χ و ε را به‌صورت $\chi(E)$ و $\varepsilon(E)$ بنویسیم، با وجود این تجربه نشان‌داده است که، به‌استثنای مواردی که میدان بسیارقوی‌است، غالباً χ و ε به‌میدان الکتریکی بستگی ندارند. به‌عبارت دیگر χ و ε ثابتهای مشخصهٔ جسم‌اند. این‌نوع اجسام دی‌الکتریکهای خطی نام دارند، وازروابط زیر تبعیت می‌کنند

$$\mathbf{P}=\chi\mathbf{E} \qquad (۳۱.۴ \text{ الف})$$

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E} \qquad (۳۲.۴ \text{ الف})$$

بنابراین رفتارالکتریکی هرماده یا باگذردهی ε ویا باپذیرفتاری χ به‌طور کامل مشخص می‌شود. لیکن مناسبتر آن است که کمیت بی بعد K را که با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود به‌کاربریم

$$\varepsilon=K\varepsilon_{\circ} \qquad (۳۴.۴)$$

جدول ۱۰۴ خواص اجسام دی‌الکتریک[1] (ثابت دی‌الکتریک K و استقامت دی‌الکتریک E_{max})

جسم	K	E_{max} برحسب ولت برمتر
اکسید آلومینیوم	۴٫۵	۶×۱۰^{۶}
شیشه*	۵ — ۱۰	۹×۱۰^{۶}
نایلون	۳٫۵	۱۹×۱۰^{۶}
پلی‌اتیلن	۲٫۳	۱۸×۱۰^{۶}
کوارتز (SiO_2)	۴٫۳	
سدیوم کلرید	۶٫۱	
گوگرد	۴٫۰	
چوب*	۲٫۵ — ۸٫۰	
الکل اتیلیک (۰°C)	۲۸٫۴	
بنزن (۰°C)	۲٫۳	
آب مقطر (۰°C)	۸۷٫۸	
آب مقطر (۲۰°C)	۸۰٫۱	
هوا (۱ جو)	۱٫۰۰۰۵۹	۳×۱۰^{۶}
هوا (۱۰۰ جو)	۱٫۰۵۴۸	
گاز کربنیک (۱ جو)	۱٫۰۰۰۹۸۵	

۱. داده‌ها از کتاب زیر گرفته شده‌اند

Handbook of Chemistry and Physics, 58 th edition, CRC Press, Inc., Cleveland, Ohio.

* برای اجسامی نظیر شیشه و چوب ترکیب شیمیایی متغیر است؛ بنابراین برای ثابتهای دی‌الکتریک گستره‌ای وجود دارد. از این مطلب نباید نتیجه گرفت که دی‌الکتریک غیر خطی است.

K را ضریب دی الکتریك یاثابت دی‌الکتریك می‌نامند.ازرابطهٔ (۳۳.۴) دیده می‌شود که

$$K=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\circ}}=1+\frac{\chi}{\varepsilon_{\circ}} \qquad (۳۵.۴)$$

ثابتهای دی‌الکتریك چند جسم متداول در جدول ۱.۴ داده شده‌اند. مسائل این کتاب بجز درچند مورد که برای آنها بردار قطبش $\mathbf{P}$ مشخص شده است، به دی‌الکتریکهای خطی محدود می‌شوند.

اگرمیدان الکتریکی دریك دی‌الکتریك‌را خیلی قوی کنیم، این میدان الکترونهارا به‌طور کامل از مولکولها بیرون می کشد، وجسم به‌رسانا تبدیل می‌شود. حداکثر میدان الکتریکی که یك دی‌الکتریك می‌تواند تحمل کند بی آنکه درهم بشکند ، استقامت دی‌الکتریك نامیده می‌شود. استقامت دی‌الکتریك، $E_{\max}$، برای تعدادی ازمواد درجدول ۱.۴ آمده است.

۶.۴ بار نقطه‌ای در یك شارهٔ دی‌الکتریك

یکی ازساده‌ترین مسائل مربوط به‌دی‌الکتریك که می‌توان مورد بررسی قرارداد، مسئلهٔ بار نقطه‌ای q است در یك محیط دی‌الکتریك نامتناهی همسانگرد همگن. فرض می کنیم که محیط دی‌الکتریك خطی است وباثابت دی‌الکتریك K مشخص می‌شود. بااینکه این مسئله خیلی ساده است، اما به‌هرحال آموزنده خواهد بود.

اگر بارنقطه‌ای q درخلأ قرارداشت، میدان الکتریکی یك میدان شعاعی خالص بود. اما چون $\mathbf{E}$، $\mathbf{D}$، و $\mathbf{P}$ درهرنقطه باهم موازی‌اند، ماهیت شعاعی بودن میدان براثر وجود محیط تغییرنمی کند. به‌علاوه براثرتقارن موجود درمسئله $\mathbf{E}$، $\mathbf{D}$، و $\mathbf{P}$ فقط می‌توانند به‌فاصله ازبارنقطه‌ای بستگی داشته باشند نه به‌مختصات زاویه‌ای. اکنون قانون گاؤس، معادلهٔ (۲۸.۴)، را برای یك سطح کروی به‌شعاع r که q درمرکزآن قرار دارد به‌کار می‌بریم. برای سهولت فرض می کنیم که q درمبدأ مختصات باشد. دراین صورت

$$۴\pi r^{۲}D=q$$

و

$$D=\frac{q}{۴\pi r^{۲}}$$

یا

$$\mathbf{D}=\frac{q}{۴\pi r^{۳}}\mathbf{r} \qquad (۳۶.۴)$$

اکنون میدان الکتریکی وقطبش‌را به‌راحتی می‌توانیم به‌دست‌آوریم

$$\mathbf{E}=\frac{q}{4\pi K\varepsilon_{0}r^{3}}\mathbf{r} \qquad (۳۷.۴)$$

$$\mathbf{P}=\frac{(K-1)q}{4\pi Kr^{3}}\mathbf{r} \qquad (۳۸.۴)$$

بنابراین، میدان الکتریکی درمقایسه باحالتی‌که محیط دی‌الکتریکی وجود ندارد به‌نسبت ضریب K کوچکترمی‌شود.

اکنون‌آموزنده است‌که این مسئله را باتفصیل بیشتری بررسی‌کنیم تا ببینیم چرا وجود دی‌الکتریك میدان الکتریکی را تضعیف می‌کند. منشأ میدان الکتریکی در کلیهٔ بارهاست، بارهای خارجی وبارهای قطبشی. بارخارجی همان بارنقطه‌ای q است. اما بار قطبشی‌ازدوقسمت تشکیل‌می‌شود، یك‌قسمت مربوط‌است‌به‌چگالی حجمی $\rho_P=-\nabla\cdot\mathbf{P}$ وقسمت دیگر مربوط است به‌چگالی سطحی $\sigma_P=\mathbf{P}\cdot\mathbf{n}$ در روی سطح دی‌الکتریك که بابار نقطه‌ای در تماس است. با به‌کار بردن رابطهٔ (۳۸.۴)، می‌بینیم که به ازای $r\neq 0$، $\nabla\cdot\mathbf{P}$ صفرمی‌شود ودرنتیجه دراین حالت هیچ چگالی حجمی بار قطبشی وجود ندارد.

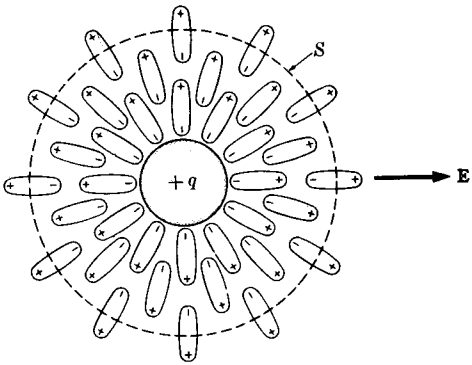
بارنقطه‌ای q ازنظرماکروسکوپی نقطه‌ای است. فرض‌کنیدکه در مقیاس مولکولی این نقطه بزرگ است ومی‌توانیم برای‌آن یك‌شعاع مانند b درنظر بگیریم‌که سرانجام‌آن را به‌سمت صفرمیل خواهیم داد. دراین‌صورت بارقطبشی سطحی‌کل ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$Q_P=\lim_{b\to 0}4\pi b^{2}(\mathbf{P}\cdot\mathbf{n})_{r=b}=-\frac{(K-1)q}{K} \qquad (۳۹.۴)$$

بارکل‌که عبارت است از

$$Q_P+q=\frac{1}{K}q \qquad (۴۰.۴)$$

ازلحاظ ماکروسکوپی به‌مانند یك بارنقطه‌ای ظاهرمی‌شود، واکنون معلوم می‌شود که‌چرا میدان الکتریکی، درمقایسه‌باحالتی‌که محیط‌دی‌الکتریك وجودندارد، به‌نسبت K کوچکتر می‌شود. نمودارطرح واره‌ای از بارنقطه‌ای q درمحیط دی‌الکتریکی در شکل ۵.۴ نشان داده شده است.



شکل ۵.۴ نمودار طرح‌واره‌ای که طرز قرار گرفتن مولکولهای قطبیده را در محیط دی‌الکتریکی که‌بار نقطه‌ای q را درمیان گرفته است نشان می‌دهد.

۷.۴ شرایط مرزی حاکم بر بردارهای میدان

قبل از آنکه بتوانیم مسائل پیچیده‌تر را حل کنیم، باید بدانیم که بردارهای میدان **E** و **D** درعبور از فصل مشترك دومحیط چگونه تغییر می‌کنند. دومحیط ممکن است دو دی‌الکتریك باویژگیهای متفاوت، یا یك دی‌الکتریك ویك رسانا باشند. خلأ را می‌توان دی‌الکتریکی باگذردهی ε_0 درنظر گرفت.

دومحیط ۱ و ۲ را درنظر بگیرید که به‌نحوی که درشکل ۶.۴ نشان داده شده است باهم درتماس‌اند. فرض‌می‌کنیم‌یك چگالی‌سطحی بارخارجی، σ، وجود دارد که می‌تواند ازنقطه‌ای به‌نقطهٔ دیگر برروی فصل مشترك دو محیط تغییر کند. سطح قرص مانندکوچکی مانند S را درنظرمی‌گیریم که فصل مشترك‌را قطع کند ومساحتی برابر ΔS از آن را دربر گیرد. ارتفاع این قرص درمقایسهٔ باشعاع قاعده‌های آن، آن‌قدرکوچك فرض می‌شود که می‌توان از آن صرفنظر کرد. مقدار بارمحصوردراین سطح برابراست با

$$\sigma\,\Delta S+\frac{1}{2}(\rho_1+\rho_2)\times \text{حجم}$$

اما حجم قرص بسیار کوچك است ومی‌توان از جملهٔ آخر صرفنظر کرد. به‌کار بردن قانون گاؤس برای سطح S نتیجه می‌دهد

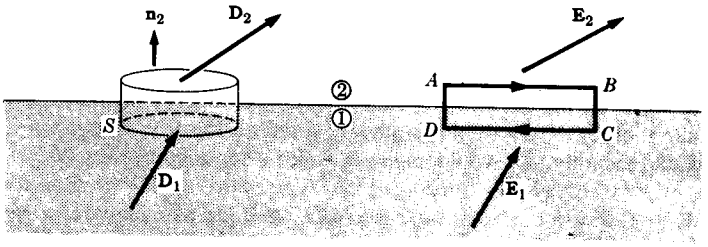
$$\mathbf{D}_2\cdot\mathbf{n}_2\,\Delta S+\mathbf{D}_1\cdot\mathbf{n}_1\,\Delta S=\sigma\,\Delta S$$

یا

$$(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)\cdot\mathbf{n}_2=\sigma \qquad \text{(۴۱.۴ الف)}$$

چون $\mathbf{n}_2$ می‌تواند معرف بردار عمود برفصل مشترك باشد داریم

$$D_{2n}-D_{1n}=\sigma \qquad \text{(۴۱.۴ ب)}$$



شکل ۶.۴ شرایط مرزی حاکم بر بردارهای میدان در فصل مشترك دومحیط را می‌توان با به‌کاربردن قانون گاؤس برای سطح S، وانتگرال‌گیری از $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$ برروی مسیر $ABCDA$ به‌دست آورد.

بنابراین، ناپیوستگی مؤلفهٔ عمود $\mathbf{D}$ با چگالی سطحی بار خارجی در روی فصل مشترك مشخص می‌شود. به‌عبارت دیگر، اگر باری برروی فصل مشترك وجود نداشته باشد، مؤلفهٔ عمود $\mathbf{D}$ پیوسته است.

چون میدان الکتروستاتیکی $\mathbf{E}$ را می‌توان از منفی شیب پتانسیل به‌دست آورد، انتگرال خطی $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$ برروی هر مسیر بسته‌ای صفراست. این نتیجه را در مسیر مستطیلی $ABCDA$ درشکل ۶.۴ به‌کار می‌بریم. در این مسیر، طولهای AB و CD مساوی Δl و قطعه‌های AD و BC بسیار کوچك وقابل صرفنظر فرض می‌شوند؛ بنابراین

$$\mathbf{E}_2\cdot\Delta\mathbf{l}+\mathbf{E}_1\cdot(-\Delta\mathbf{l})=0$$

یا

$$(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)\cdot\Delta\mathbf{l}=0 \qquad \text{(۴۲.۴ الف)}$$

پس نتیجهٔ مطلوب عبارت است از

$$E_{2t}=E_{1t} \qquad \text{(۴۲.۴ ب)}$$

یعنی، مؤلفهٔ مماسی میدان الکتریکی درعبور ازفصل مشترك پیوسته است.

نتایج بالا برای دو محیط دلخواه به‌دست آمده‌اند، لیکن جالب است ببینیم که این معادلات برای موردی که یکی ازدو محیط رسانا باشد به‌چه صورت درمی‌آیند چون هیچ نیروی مولکولی باز گرداننده‌ای به‌بارهای آزاد جسم رسانا وارد نمی‌شود، به‌نظرمی‌رسد که برای رسانا درمعادلهٔ (۳۱.۴) داریم $\chi=\infty$، و نیز طبق معادلهٔ (۳۳.۴)، $\varepsilon=\infty$. اگرمحیط ۱ را رسانا فرض کنیم، آنگاه نتیجه می‌گیریم که مقادیر (متناهی) $\mathbf{P}_1$ و $\mathbf{D}_1$ هرچه باشند، $\mathbf{E}_1=0$ است، همچنان که قبلا در فصل ۲ نیز با استدلال متفاوتی به‌همین نتیجه

رسیدیم. چون $\mathbf{E}_1$ صفر است، معادلهٔ (۴۲.۴ ب) به‌صورت زیر در می‌آید

$$E_{2t} = 0 \qquad (۴۳.۴)$$

ولی جابه‌جایی $\mathbf{D}_1$ با این روش تعیین نمی‌شود؛ اگر ما فعلاً آن‌را به‌طور دلخواه صفر بگیریم، معادلهٔ (۴۱.۴ ب) به‌معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$D_{2n} = \sigma \qquad (۴۴.۴)$$

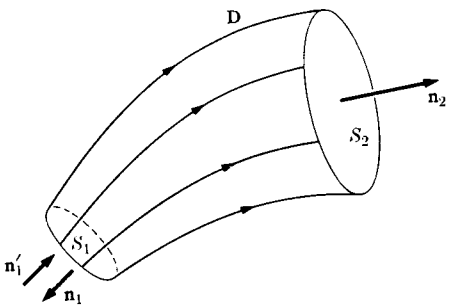
که در آن σ چگالی بارسطحی کل بر سطح رسانا است ولی شامل بارسطحی قطبشی بر سطح دی‌الکتریك نمی‌شود. روش دیگر آن است که مسئلهٔ دی‌الکتریك را حل کنیم و آنگاه K_1 را به‌سمت بینهایت میل دهیم (رك مسئله‌های ۱۲.۴ و ۱۴.۴). دراین‌صورت σ معرف بارقطبشی رسانا (به‌علاوهٔ هر بارخارجی واقع بر سطح رسانا) خواهد بود. از لحاظ فیزیکی نتیجهٔ این دو روش یکسان خواهد بود. توجه کنید که بنا به‌معادلهٔ (۴۳.۴)، میدان در داخل دی‌الکتریك همواره بر سطح رسانا عمود است.

بنا به‌دلایل فیزیکی محض واضح است که پتانسیل φ درعبور از فصل مشترك دومحیط باید پیوسته باشد. این مطلب ناشی از آن است که اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ میان دونقطهٔ خیلی نزدیك به‌هم $-\mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{l}$ است، که در آن $\Delta\mathbf{l}$ فاصلهٔ دونقطه است، وطبق آنچه در بالا گفته شد دلیلی وجود ندارد که انتظارداشته باشیم $\mathbf{E}$ در فصل مشترك بینهایت شود. در واقع پیوستگی پتانسیل یك شرط مرزی است، ولی این شرط از شرایطی که قبلا به‌دست آوردیم مستقل نیست. این شرط دربیشترموارد با (۴۲.۴ ب) معادل است.

ازبحث فوق‌وازبحث بخشهای گذشته می‌توان نتیجه گرفت که جابه‌جایی الکتریکی $\mathbf{D}$ با بارخارجی رابطهٔ نزدیك دارد. حال می‌خواهیم خاصیت مهمی از $\mathbf{D}$ را ثابت کنیم، یعنی این خاصیت‌راکه شار $\mathbf{D}$ درناحیه‌هایی ازفضاکه در آن بار خارجی وجود ندارد پیوسته است. برای این‌کار مجدداً ازقانون گاؤس کمك می‌گیریم و خطوط جابه‌جایی را درناحیه‌ای ازفضا رسم می‌کنیم. خطوط جابه‌جایی خطوطی موهومی‌اند و به‌طریقی رسم می‌شوند که جهت هریك ازآنها درهرنقطه باجهت $\mathbf{D}$ در آن نقطه یکی باشد. حال یك لولهٔ جابه‌جایی را درنظرمی‌گیریم، یعنی حجمی‌راکه ازاطراف باخطوط $\mathbf{D}$ محصورشده ولی به‌وسیلهٔ این خطوط قطع نشده است (شکل ۷.۴). لوله ازدو انتها به‌سطوح S_1 و S_2 ختم می‌شود. با به‌کاربردن قانون گاؤس خواهیم داشت

$$\int_{S_2} \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\,da - \int_{S_1} \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}'\,da = Q \qquad (۴۵.۴)$$

هرگاه درناحیهٔ محصور شده بار خارجی وجود نداشته باشد، آنگاه $Q=0$ است، و همان شاری که از S_1 وارد لوله می‌شود از S_2 خارج می‌شود. وقتی بار خارجی وجود



شکل ۷.۴ لولهٔ شار جابه‌جایی.

داشته باشد، این بار ناپیوستگی در شار جابه‌جایی‌را تعیین می‌کند؛ ازاین رو خطوط جابه‌جایی به‌بارهای خارجی‌منتهی‌می‌شوند. ازطرف دیگر، خطوط نیرو یا به‌بارهای‌خارجی ختم می‌شوند و یا به‌بارهای قطبشی.

۸.۴ مسائل مربوط به‌مقادیرمرزی در دی‌الکتریکها

معادلهٔ اساسی‌که دراین فصل به‌دست‌آمده است عبارت است از

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad (۴۶.۴)$$

که درآن ρ چگالی بارخارجی‌است. اگردی‌الکتریکهایی که باآنهاسروکار داریم، خطی، همسانگرد، وهمگن باشند آنگاه $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$، که درآن ε ثابت مشخصهٔ جسم‌است، ومی‌توان نوشت

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon}\rho \qquad (۴۷.۴)$$

اما میدان الکتروستاتیکی $\mathbf{E}$ را می‌توان ازیك پتانسیل نرده‌ای φ به‌دست‌آورد، یعنی

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

به‌طوری‌که

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho \qquad (۴۸.۴)$$

ازاین‌رو پتانسیل در دی‌الکتریك در معادلهٔ پواسون صدق می‌کند؛ تنها تفاوت میان معادلهٔ (۴۸.۴) و رابطهٔ نظیرآن برای پتانسیل درخلأ آن است‌که ε جانشین ε_0 شده است (ρ و چگالی بارخارجی است نه‌چگالی بار کل).

دربیشترموارد جالب توجه، دی‌الکتریك شامل باری که درحجم آن توزیع شده‌باشد نیست. یعنی در داخل جسم دی‌الکتریك $\rho = 0$. بارها برسطوح رساناها قرار دارند یا به‌صورت بارهای‌نقطه‌ای درداخل دی‌الکتریك نهفته شده‌اند. تحت این شرایط، درسراسر جسم دی‌الکتریك، پتانسیل درمعادلهٔ لاپلاس صدق می کند

$$\nabla^2 \varphi = 0 \qquad (۴۹.۴)$$

دربعضی مسائل ممکن است یك چگالی سطحی بار، σ، برروی سطح جسم دی‌الکتریك یا برروی فصل مشترك دوجسم دی‌الکتریك وجود داشته باشد، لیکن این مطلب تغییری‌در وضع موجود ایجاد نمی کند، ومعادلهٔ (۴۹.۴) بازهم، تا هنگامی که $\rho = 0$ باشد، صادق است.

بنا براین مسئلهٔ الکتروستاتیکی برای محیطهای دی‌الکتریك خطی، همسانگرد، و همگن تبدیل می‌شود به‌مسئلهٔ پیداکردن جوابهای معادلهٔ لاپلاس در هر یك ازاین محیطها والحاق جوابهای مربوط به‌محیطهای مختلف به وسیلهٔ شرایط مرزی بخش گذشته. مسائل متعددی وجود دارندکه می‌توان‌آنهارا به‌این‌طریق حل کرد؛ یك نمونه ازاین مسائل را در اینجا حل می کنیم ونمونه‌های دیگررا می‌توان درمسائل انتهای فصل یافت.

۹.۴ کرهٔ دی‌الکتریك در یك میدان الکتریکی یکنواخت

می‌خواهیم نحوهٔ تغییرشکل خطوط نیرورا هنگامی که یك کرهٔ دی‌الکتریك به‌شعاع a در ناحیه‌ای‌ازفضا قرارمی‌دهیم که درآن میدان الکتریکی در ابتدا یکنواخت $\mathbf{E}_0$ وجود دارد، تعیین کنیم. فرض کنید دی‌الکتریك خطی، همسانگرد، وهمگن‌است وبا ثابت دی‌الکتریك K مشخص می‌شود، و به‌علاوه بارهم ندارد. مبدأ مختصات را می‌توانیم مرکز کره فرض کنیم وجهت $\mathbf{E}_0$ را به‌عنوان جهت قطبی (محور z) درنظر بگیریم؛ دراین صورت پتانسیل را می‌توان به‌صورت مجموعی ازهماهنگهای منطقه‌ای نوشت. درست نظیر آنچه دربخش ۵.۳ دیدیم، باانتخاب دو هماهنگ اول تمام شرایط مرزی می‌توانند برآورده شوند. برای ناحیهٔ خلأ (ناحیهٔ ۱) درخارج کره می‌نویسیم

$$\varphi_1(r, \theta) = A_1 r \cos\theta + C_1 r^{-2} \cos\theta \qquad (۵۰.۴)$$

وبرای ناحیهٔ دی‌الکتریك (ناحیهٔ ۲) می‌نویسیم

$$\varphi_2(r, \theta) = A_2 r \cos\theta + C_2 r^{-2} \cos\theta \qquad (۵۱.۴)$$

ضرایب A_1، A_2، C_1، و C_2 مجهول‌اند وبایدبه‌کمك شرایط‌مرزی محاسبه‌شوند. هماهنگ r^{-1} ضروری نیست زیرا وجودآن مستلزم وجود بارخالص برروی کره است. می‌توانیم

به معادلات (۵۰.۴) و (۵۱.۴) یك عدد ثابت اضافه کنیم ولی چون خواهیم دید که عدد ثابت یکسانی درهردومعادله لازم داریم، می‌توانیم بی‌آنکه عمومیت مطلب‌ازدست برود، آن ثابت‌را مساوی صفربگیریم.

درفواصل دور ازکره، میدان الکتریکی حالت یکنواختی خود را حفظ می‌کند و $\varphi_1 \to -E_0 r\cos\theta$. بنابراین $A_1 = -E_0$. به‌علاوه جز در موردی که $C_2 = 0$، پتانسیل ومیدان الکتریکی مربوط به‌آن درمرکزکره بینهایت می‌شوند، واین بدان معنی است‌که درمرکزباید یك دوقطبی نقطه‌ای وجود داشته باشد، یعنی یك دو قطبی که‌گشتاور آن‌با ΔV متناسب نباشد. ولی مسلماًدراین مسئله دوقطبی نقطه‌ای موجود نیست؛ همان‌طور که دربخش ۳.۴ گفته شد، پتانسیل ومیدان ماکروسکوپی دریك دی‌الکتریك بدون بار نقطه‌ای، بینهایت نمی‌شوند. بنابراین $C_2 = 0$، و ضرایب باقیماندهٔ A_2 و C_1 ازشرایط مرزی بخش ۷.۴ به‌دست می‌آیند.

لازمهٔ پیوستگی پتانسیل در فصل مشترك میان دی‌الکتریك وخلاء این است که در $r = a$ داشته باشیم $\varphi_1 = \varphi_2$، یا

$$-E_0 a + C_1 a^{-2} = A_2 a \qquad (۵۲.۴)$$

چون مؤلفهٔ قائم $\mathbf{D}$ درفصل مشترك $D_r = -\varepsilon(\partial\varphi/\partial r)$ است، پیوستگی D_r (اینکه‌هیچ گونه باری درسطح دی‌الکتریك وجود ندارد) مستلزم این‌است که در $r = a$، $D_{1r} = D_{2r}$ باشد. یا

$$E_0 + 2C_1 a^{-3} = -KA_2 \qquad (۵۳.۴)$$

پیوستگی E_t در $r = a$ بامعادلهٔ (۵۲.۴) معادل است.

باترکیب معادلات (۵۲.۴) و (۵۳.۴) نتیجه می‌گیریم که

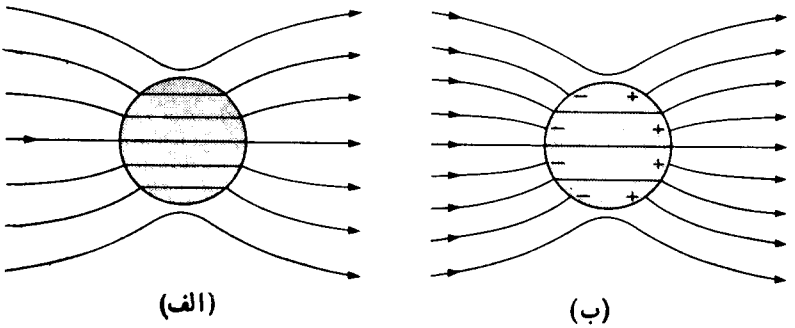
$$A_2 = -\frac{3E_0}{K+2} \qquad (۵۴.۴)$$

و

$$C_1 = \frac{(K-1)a^3 E_0}{K+2} \qquad (۵۵.۴)$$

پس مسئله حل شده‌است. پتانسیل ازمعادلات (۵۰.۴) یا (۵۱.۴) به‌دست می‌آیدوثابتهای A_1، C_1، A_2، و C_2 نیز همگی معلوم‌اند. مؤلفه‌های $\mathbf{E}$ و $\mathbf{D}$ را در هر نقطهٔ (r, θ, ϕ) بامشتق‌گیری می‌توان به‌دست آورد. از معادلهٔ (۵۴.۴)، وباتوجه به اینکه $C_2 = 0$، چنین نتیجه می‌شودکه میدان الکتریکی درداخل کره با $\mathbf{E}_0$ هم جهت است وبارابطهٔ زیرمشخص می‌شود

$$\mathbf{E}_2 = \frac{3}{K+2}\mathbf{E}_0 \qquad (۵۶.۴)$$



شکل ۸.۴ میدان الکتریکی یکنواخت در اثرحضور یك کرهٔ دی‌الکتریك تغییر شکل‌یافته است: (الف) خطوط جابه‌جایی الکتریکی. (ب) خطوط میدان‌الکتریکی.

خطوط جابه‌جایی وخطوط نیرودرشکل (۸.۴) نشان داده شده‌اند.

*۱۰.۴ نیروی وارد بر یك بار نقطه‌ای واقع در یك دی‌الکتریك

اکنون در وضعی هستیم که می‌توانیم نیروی وارد بریك رسانای باردار کوچك‌کروی را که درداخل یك دی‌الکتریك خطی وهمسانگرد نهاده شده است حساب کنیم. در حد، وقتی که جسم رسانا ازلحاظ ماکروسکوپی بی‌اندازه‌کوچك است نتیجهٔ این محاسبات، نیروی وارد بریك بارنقطه‌ای را به‌دست می‌دهد.

ابتدا میدان الکتریکی وچگالی بارسطحی دریك نقطهٔ معین ازسطح‌رسانارا باروش شرایط مرزی که دربخش پیش گفته شد، به‌دست می‌آوریم، وسپس‌نیروی $\mathbf{F}$ را باانتگرال‌گیری ازمیدان برروی سطح رسانا محاسبه می‌کنیم

$$\mathbf{F}=\oint_s \mathbf{E}'\,\sigma\,da \qquad (۵۷.۴)$$

دراینجا $\mathbf{E}'$ میدان‌الکتریکی درروی سطح da است‌که میدان ناشی ازخود عنصر سطحی بار ازآن‌کم شده است. به‌عبارت دیگر

$$\mathbf{E}'=\mathbf{E}-\mathbf{E}_s \qquad (۵۸.۴)$$

که درآن $\mathbf{E}_s$ میدان الکتریکی ناشی ازخود عنصرسطحی بار، یعنی $\sigma\,da$ است. این‌نکته که میدان $\mathbf{E}'$ شامل $\mathbf{E}_s$ نباشد مهم است، زیرا کمیت $\mathbf{E}_s\,\sigma\,da$ نمایندهٔ برهم‌کنش عنصر

سطحی بار $\sigma\, da$، با میدان خودش است. این خود ـ برهم‌کنش طبعاً هیچ نیروی خاصی برعنصروارد نمی‌کند، اما تنش سطحی تولید می‌کند

$$\mathcal{F}_S = \sigma E_S \qquad (۵۹.۴)$$

این تنش ناشی ازدفع متقابل الکترونها (یا یونهای مثبت اضافی) درلایهٔ سطحی است.این تنش بانیروهای قوی چسبندگی درمادهٔ سازندهٔ عنصرخنثی می‌شود. باید متذکر شد که در فصلهای ۲ و ۳ وقتی نیروهای وارد براجسام باردار را محاسبه می‌کردیم، به‌طور ضمنی خود ـ میدان $\mathbf{E}_S$ راکم می‌کردیم؛ ازاین‌رو، هنگام محاسبهٔ نیروی وارد بریك بارنقطه‌ای، میدان ناشی از بارنقطه‌ای‌راکنارمی‌گذاردیم بحث مفصلترنیروهای وارد براجسام باردار را به‌بخش ۸.۶ واگذارمی‌کنیم.

ممکن است چنین به‌نظر رسدکه خود ـ میدان عنصر سطحی باردار $\sigma\, da$ به‌دلیل بی‌نهایت‌کوچك بودن این عنصرقابل چشمپوشی است. اما این امر واقعیت ندارد. مطمئناً عنصرازلحاظ ماکروسکوپی کوچك است، لیکن باهمهٔ این کوچکی ابعادش به‌حد صفر نمی‌رسند. برای نقطه‌ای‌که مستقیماً درروی عنصر سطح است این عنصر مثل یك صفحهٔ نامتناهی است، یعنی عنصر سطح یك زاویهٔ 2π را دربرمی‌گیرد، بنابراین

$$\mathbf{E}_S = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\mathbf{n} \qquad (۶۰.۴)$$

دراینجا $\mathbf{n}$ بردارعمود برعنصرسطح و ε گذردهی جسم دی‌الکتریك است که بااین سطح درتماس است. بنابراین تنش $\mathcal{F}_S$ با σ^2 متناسب است و همیشه، بدون توجه به‌علامت σ، به‌صورت یك‌کشش عمل می‌کند.

هدف ما در اینجا محاسبهٔ نیروی وارد بریك رساناست. بااستفاده از شرایط مرزی بخش ۷.۴، میدان الکتریکی کل درست درخارج ازجسم رسانا بامعادلهٔ زیر داده می‌شود

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\mathbf{n} \qquad (۶۱.۴)$$

ازترکیب (۵۸.۴)، (۶۰.۴)، و (۶۱.۴) نتیجه می‌گیریم که

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{2}\mathbf{E}$$

و نیروی وارد بررسانا عبارت است از

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}\oint_S \mathbf{E}\sigma\, da \qquad [۵۷.۴ \text{ الف}]$$

اکنون یك رسانای کروی کوچك را درنظر می‌گیریم که در درون دی‌الکتریك با ابعاد نامتناهی نهاده شده است. بار کل برروی این رسانا Q، وشعاع آن a فرض می‌شود. چون درنهایت می‌خواهیم نتیجه‌را درحدی محاسبه کنیم که در آن a بسیار کوچك می‌شود، و چون تغییرات میدان الکتریکی (اگر وجود داشته باشند) در یك مقیاس ماکروسکوپی صورت می‌گیرند، کافی است حالتی را بررسی کنیم که درآن میدان الکتریکی در حوالی رسانا، در بدو امر، یکنواخت است. این میدان یکنواخت را با $\mathbf{E}_\circ$ نشان می‌دهیم. مسئله شبیه است به‌مسئلهٔ مقادیرمرزی که دربخش ۵.۳ حل کردیم، بااین تفاوت که در اینجا کرهٔ رسانا دریك دی‌الکتریك با گذردهی ε نهاده (یاغوطه‌ور) شده است و به‌علاوه بارخالص آن Q است.

درمقایسه با بخش ۵.۳ عبارات زیر به‌راحتی تعیین می‌شوند:

برای پتانسیل

$$\varphi(r,\theta)=\varphi_\circ-E_\circ r\cos\theta+\frac{E_\circ a^3}{r^2}\cos\theta+\frac{Q}{4\pi\varepsilon r} \qquad (۶۲.۴)$$

برای میدان الکتریکی

$$E_r=E_\circ(1+2a^3/r^3)\cos\theta+Q/4\pi\varepsilon r^2 \qquad (۶۳.۴)$$

$$E_\theta=-E_\circ(1-a^3/r^3)\sin\theta$$

وبرای چگالی سطحی باربرروی سطح کره

$$\sigma(\theta)=\varepsilon E_r|_{r=a}=3\varepsilon E_\circ\cos\theta+Q/4\pi a^2 \qquad (۶۴.۴)$$

اکنون می‌توان نیرورا ازمعادلهٔ (۵۷.۴ الف) به‌دست‌آورد. به‌علت تقارن، تنها مؤلفهٔ غیر صفرنیرو درجهت $\theta=0$ است، یعنی درجهت محور z

$$F_z=\frac{1}{2}\int_\circ^\pi (E_r)_{r=a}\cos\theta\sigma(\theta)\,2\pi a^2\sin\theta\,d\theta$$

$$=E_\circ Q \qquad (۶۵.۴ \text{ الف})$$

یا

$$\mathbf{F}=Q\mathbf{E}_\circ \qquad (۶۵.۴ \text{ ب})$$

این نتیجه درحد، وقتی که a بسیار کوچك شود، تغییر نمی‌کند. بنابراین، میدان الکتریکی در دی‌الکتریك، $E_\circ$، باتعریف بنیادی، یعنی نیروی وارد بریك بارکوچك‌آزمون Q تقسیم

بر بزرگی بار Q، سازگار است.

۱۱.۴ خلاصهٔ مطالب

رفتار الکتروستاتیکی یك محیط دی‌الکتریك به‌کمك گشتاور دوقطبی در واحد حجم، یا قطبش آن کاملا مشخص می‌شود

$$\mathbf{P}=\frac{d\mathbf{p}}{dv}$$

این کمیت، چگالی بارقطبشی تولید می‌کند

$$\rho_P=-\nabla\cdot\mathbf{P},\ \ (\sigma_P=\mathbf{n}\cdot\mathbf{P})$$

که دراثر آنها پتانسیل زیرحاصل می‌شود

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int\frac{\rho_P(\mathbf{r}')\,dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}+\oint\frac{\sigma_P(\mathbf{r}')\,da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]$$

میدان Eی کل، ناشی ازبارهای خارجی وبارقطبشی درمعادلهٔ زیرصدق می‌کند

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho+\rho_P)$$

اکنون میدان برداری $\mathbf{D}$ را به‌صورت مناسب زیرتعریف می‌کنیم

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$$

به گونه‌ای که

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$$

که در آن تنها بارهای خارجی به‌عنوان چشمه در نظر گرفته می‌شوند. درمعادلهٔ تاو $\nabla\times\mathbf{E}=0$ تغییری حاصل نمی‌شود زیرا این معادله حاوی چگالی بار نیست، برای حل معادلات میدان، برای هر جسم بخصوصی باید یك معادلهٔ ساختمندی به‌صورت زیر معلوم باشد

$$\mathbf{P}=\mathbf{P}(\mathbf{E})$$

درآن‌صورت چهارمعادلهٔ آخر، بادرنظرگرفتن شرایط مرزی زیر

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

$$E_{2t} - E_{1t} = 0$$

برای تعیین $\mathbf{E}$ و $\mathbf{D}$ در داخل وخارج دی‌الکتریکها کافی‌اند.

۱. شکل انتگرالی قانون گاؤس به‌صورت زیردرمی آید

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}\, da = Q$$

که در آن Q فقط بارخارجی درداخل سطح S را شامل می‌شود. معادلهٔ تاوهنوزهم تعریف پتانسیلی‌را به‌صورت زیر به‌دست می‌دهد.

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$$

۲. اکثراجسام دی‌الکتریك خطی‌اند وپذیرفتاری ثابتی دارند

$$\mathbf{P} = \chi\mathbf{E}$$

وقتی این معادلهٔ ساختمندی با تعریف $\mathbf{D}$ ترکیب شود رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$$

که در آن

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \chi$$

برای اکثر دی‌الکتریکهای معمولی، ثابت دی‌الکتریك، یعنی

$$K = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

مقداری بین ۱ و ۱۰۰ دارد، وبرای‌تمام دی‌الکتریکها $K \geqslant 1$ $(\chi \geqslant 0)$. درخلأ، $K = 1$ $(\chi = 0)$. رفتارالکتروستاتیکی‌رساناها رامی‌توان بافرض‌اینکه K بینهایت است، به‌دست آورد.

۳. دریك محیط خطی

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon}\rho$$

و

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

روشهای ریاضی برای حل معادلات پواسون ولاپلاس شبیه به‌روشهای بیان شده درفصل ۳ است، به‌شرط آنکه شرایط مرزی مناسب درفصل مشترك دی‌الکتریك در نظر گرفته شوند. این شرایط عبارت‌اند از

$$K_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = K_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}$$

و

$$\varphi_2 = \varphi_1$$

(که باشرط $E_{2t} = E_{1t}$ هم‌ارزاست).

مسائل

۱.۴ یك میلهٔ دی‌الکتریك باریك که سطح مقطع آن A است روی محور x از $x=0$ تا $x=L$ قرار دارد. قطبش میله درامتداد طول‌آن بـا رابطهٔ $P_x = ax^2+b$ داده می‌شود. چگالی حجمی بارقطبشی وچگالی سطحی بارقطبشی درهریك ازدوسرمیله‌را حساب‌کنید و صریحاً نشان دهیدکه‌کل بارقطبشی دراین حالت صفراست.

۲.۴ یك مکعب دی‌الکتریك به‌ضلع L به صورت شعاعی $\mathbf{P} = A\mathbf{r}$ قطبیده شده است، که درآن A یك ضریب ثابت، $\mathbf{r} = \mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z$ و مبدأ مختصات درمرکـز مکعب است. همهٔ چگالیهای بارقطبشی‌را محاسبه‌کنید و صریحاً نشان دهیدکه‌کل بارقطبشی صفراست.

۳.۴ میلهٔ دی‌الکتریك استوانه‌ای شکلی به‌طول L وشعاع R درامتداد طولش قطبیده‌شده است. اگرقطبش یکنواخت وبزرگی آن P باشد، میدان الکتریکی ناشی ازاین قطبش را درنقطه‌ای برروی محورمیله محاسبه‌کنید.

۴.۴ ثابت‌کنیدکه دریك جسم دی‌الکتریك به‌حجم V و سطح خارجی S رابطهٔ زیر میان قطبش $\mathbf{P}$ وچگالیهای بارقطبشی ρ_P و σ_P برقراراست

$$\int_V \mathbf{P}\,dv = \int_V \rho_P\mathbf{r}\,dv + \int_S \sigma_P\mathbf{r}\,da$$

دراینجا $\mathbf{r} = \mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z$ بردارمکان از مبدأ مختصـات است. [راهنمایی: $\nabla\cdot(x\mathbf{P})$

را طبق معادلهٔ (۱۰.۴) بسط دهید.]

۵.۴ دوقطعه دی‌الکتریك نیم نامتناهی‌را تقریباً در وضع تماس قرارداده‌ایم به‌طوری‌که میان آنها شکاف باریکی بافاصلهٔ ثابت وجود دارد. قطبش $\mathbf{P}$ در سراسر قطعه‌ها مقداری است ثابت و بابردار عمود برسطوحی‌که شکاف میان دوقطعه را دربرمی‌گیرند زاویهٔ γ می‌سازد. میدان الکتریکی‌را درشکاف میان دوقطعه محاسبه کنید.

۶.۴ یك رسانای استوانه‌ای طویل به‌شعاع a راکه بار الکتریکی در واحد طول آن λ است دریك محیط دی‌الکتریك باگذردهی ε قرار می‌دهیم. میدان الکتریکی را در فاصلهٔ $r>a$ ازمحوراستوانه محاسبه‌کنید.

۷.۴ دومحیط دی‌الکتریك باثابتهای دی‌الکتریك K_1 و K_2 بافصل مشترکی ازیکدیگر جدا شده‌اند. فصل مشترك آنها بارخارجی ندارد. رابطه‌ای میان زوایای θ_1 و θ_2، که زوایای میان یك خط اختیاری جابه‌جایی وخط عمود برفصل مشترك‌اندرا پیدا کنید: θ_1در محیط ۱ و θ_2 درمحیط ۲.

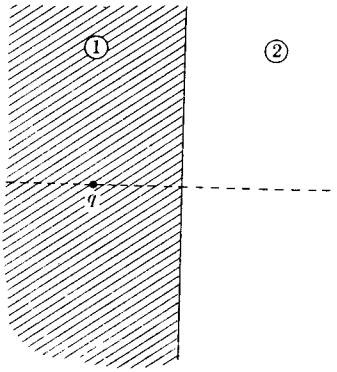
۸.۴ یك کابل هم‌محوربامقطع دایره‌ای یك‌دی‌الکتریك‌مرکب دارد. شعاع‌خارجی‌رسانای داخلی‌آن برابر a است، که باورقه‌ای ازیك جسم دی‌الکتریك با ثابت دی‌الکتریك K_1 وشعاع خارجی b احاطه شده است. روی این‌لایه ورقه‌ای ازیك دی‌الکتریك دیگرباثابت دی‌الکتریك K_2 وشعاع‌خارجی c قراردارد. اگراختلاف‌پتانسیل U_0 میان دو رسانا برقرار شود، قطبش درهرنقطه ازدو محیط دی‌الکتریك‌را محاسبه‌کنید.

***۹.۴** دومحیط دی‌الکتریك باگذردهیهای ε_1 و ε_2 به‌وسیلهٔ فصل مشترك تختی ازهم جدا شده‌اند. فصل مشترك بارخارجی ندارد. درمحیطی‌که با ε_1 مشخص می‌شود، بار نقطه‌ای q را به‌فاصلهٔ d ازفصل مشترك قرارمی‌دهیم. برای سهولت صفحهٔ yz راکه ازمبدأ مختصات می‌گذرد همان فصل مشترك‌می‌گیریم و q را درروی محور x در $x=-d$ قرارمی‌دهیم. اگر

$$r=\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}\,,\qquad r'=\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}$$

باشد، درآن‌صورت به‌راحتی‌می‌توان نشان‌داد که عبارت $(1/4\pi\varepsilon_1)[(q/r)+(q'/r')]$ برای تمام نقاط محیط ۱، به استثنای مکان q، در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند. به‌علاوه $q''/4\pi\varepsilon_2 r$ درمحیط ۲ در معادلهٔ لاپلاس صادق است. نشان دهیدکه پتانسیلهای بالا در تمام شرایط مرزی صدق می‌کنند وبااین عمل q' و q'' را تعیین کنید (شکل ۹.۴).

۱۰.۴ یك دی‌الکتریك استوانه‌ای طویل به‌شعاع a و باثابت دی‌الکتریك K را در یك میدان الکتریکی یکنواخت $\mathbf{E}_0$ قرارمی‌دهیم. محور استوانه عمود برجهت $\mathbf{E}_0$ قرار داده می‌شود. استوانه بار خارجی ندارد. میدان الکتریکی را درنقاط داخل وخارج استوانه به‌دست آورید.



شکل ۹.۴

۱۱.۴ دو قطبی نقطه‌ای $\mathbf{p}$ در مرکز یك دی‌الکتریك جامد کروی به‌شعاع a و با ثابت دی‌الکتریك K قرار دارد. میدان الکتریکی را در نقاط داخل و خارج کره پیدا کنید. (راهنمایی: میدان در نقاط خارج میدانی دوقطبی است؛ در داخل، علاوه بر میدان دوقطبی یك جملهٔ دیگر نیز لازم است.)

۱۲.۴ نشان دهید که در جواب به‌دست آمده در بخش ۹.۴، برای دی‌الکتریك کروی در میدانی که در آغاز یکنواخت است، اگر K به‌سمت بینهایت میل کند، نتیجه با آنچه در بخش ۵.۳ برای کرهٔ رسانا به‌دست آمد یکی است.

۱۳.۴ برهٔ تختی از یك جسم با ثابت دی‌الکتریك K_1 از هر دو طرف توسط جسمی با ثابت دی‌الکتریك K_2 محصور شده است. میدان الکتریکی در محیط ۲، $\mathbf{E}_2$، به صورت یکنواخت و عمود بر مرزها داده شده است. میدان $\mathbf{E}_1$، قطبش $\mathbf{P}_1$، و بار قطبشی در محیط ۱ را پیدا کنید.

۱۴.۴ نشان دهید که در مسئلهٔ ۱۳.۴ اگر K_1 به‌سمت بینهایت میل کند، نتیجه از لحاظ فیزیکی با معادلهٔ (۴۴.۴) سازگار است.

۱۵.۴ دو صفحهٔ رسانای موازی که به‌فاصلهٔ d از یکدیگر قرار دارند در اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ نگه داشته شده‌اند. یك بره از جسم دی‌الکتریکی را که ثابت دی‌الکتریك آن K و ضخامت یکنواخت آن t است ($t<d$) میان این دو صفحه قرار می‌دهیم. بردارهای میدان $\mathbf{E}$ و $\mathbf{D}$ در دی‌الکتریك و همچنین در خلأ میان دی‌الکتریك و یکی از صفحات را پیدا کنید. از اثرهای لبه که از نامتناهی بودن صفحات ناشی می‌شود، چشم بپوشید.

۱۶.۴ دو صفحهٔ رسانای موازی که به‌فاصلهٔ d از یکدیگر قرار دارند در اختلاف پتانسیل $\nabla\varphi$ نگه داشته شده‌اند. یك بره از جسم دی‌الکتریکی با ثابت دی‌الکتریك K و ضخامت d

را میان دوصفحه وارد می‌کنیم؛ این بره حجم میان صفحات را کاملا پر نمی‌کند. مطلوب است محاسبهٔ میدان الکتریکی: (الف) در دی‌الکتریك، (ب) در ناحیهٔ خلأ میان صفحات. چگالی بار σ را در آن قسمتی از صفحه پیدا کنید که (ج) با دی‌الکتریك، و (د) با خلأ در تماس است. (ه) σ_P را بر روی سطح برهٔ دی‌الکتریك پیدا کنید.

۱۷.۴ یك کرهٔ رسانا به‌شعاع R در یك محیط دی‌الکتریك مایع با گذردهی ε_1 تا نیمه غوطه‌ور است. در ناحیهٔ بالای مایع گازی است با گذردهی ε_2. بار کل بر روی کره Q است. یك میدان الکتریکی شعاعی متناسب با عکس مجذور فاصله به‌دست آورید که در تمام شرایط مرزی صدق کند. چگالی بارهای آزاد، مقید، و کل را برای تمام نقاط واقع بر سطح کره پیدا کنید. نشان دهید که این میدان الکتریکی، میدان واقعی است.

۱۸.۴ میدان الکتریکی یکنواخت $\mathbf{E}_0$ را در محیطی با ثابت دی‌الکتریك K برقرار ساخته‌ایم. ثابت کنید که در حفره‌ای کروی در درون این محیط میدان عبارت است از

$$\mathbf{E}=\frac{3K\mathbf{E}_0}{2K+1}$$

***۱۹.۴** قطبش دائم یك کرهٔ دی‌الکتریك به‌شعاع R برابر $\mathbf{P}$ است که از حیث مقدار و جهت یکنواخت است. کرهٔ قطبیده یك میدان الکتریکی تولید می‌کند. این میدان را در داخل و خارج کره پیدا کنید. در داخل کره، میدان الکتریکی را که در جهت مخالف قطبش است، میدان واقطبندگی می‌گویند. (راهنمایی: چون در تمام نقاط $\nabla\cdot\mathbf{P}$ صفر است، پتانسیل الکتروستاتیکی در داخل و خارج کره در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند. فرض نکنید که دی‌الکتریك با یك ثابت دی‌الکتریك مشخص می‌شود.)

۲۰.۴ در متن کتاب نشان داده شد که قطبش به‌صورت $\mathbf{P}=\rho_0^+(\vec{\delta}^+-\vec{\delta}^-)$ است. این رابطه را در مورد کرهٔ مسئله ۱۹.۴ که به‌طور یکنواخت قطبیده‌شده است به‌کار ببرید و میدان خارجی دوقطبی را مستقیماً پیدا کنید.

۵

نظریهٔ میکروسکوپی دی‌الکتریکها

در فصل پیش به‌جنبه‌های ماکروسکوپی قطبش دی‌الکتریکها پرداختیم، و نشان دادیم که چگونه درموارد متعدد می‌توان قطبش‌را بامعرفی ثابت دی‌الکتریك به‌حساب آورد.ازاین راه توانستیم میدان الکتریکی‌را مستقیماً با بررسی توزیع بارخارجی محاسبه کنیم. درفصل ۴ چند بار به‌مولکول دی‌الکتریك اشاره شد، ولی مطالعهٔ میکروسکوپی ماده به تفصیل صورت نگرفت، وتصویر کلیی که عرضه شد ازدید ماکروسکوپی بود. اکنون می‌خواهیم ماهیت مولکولی دی‌الکتریك را بررسی کنیم وببینیم میدان الکتریکیی که مولکول‌راقطبیده می‌کند چگونه به میدان الکتریکی ماکروسکوپی مربوط می‌شود. همچنین، براساس یك مدل سادهٔ مولکولی می‌توان رفتار خطی مشخصهٔ ردهٔ بزرگی از اجسام دی‌الکتریك را درك کرد.

۱.۵ میدان مولکولی در دی‌الکتریك

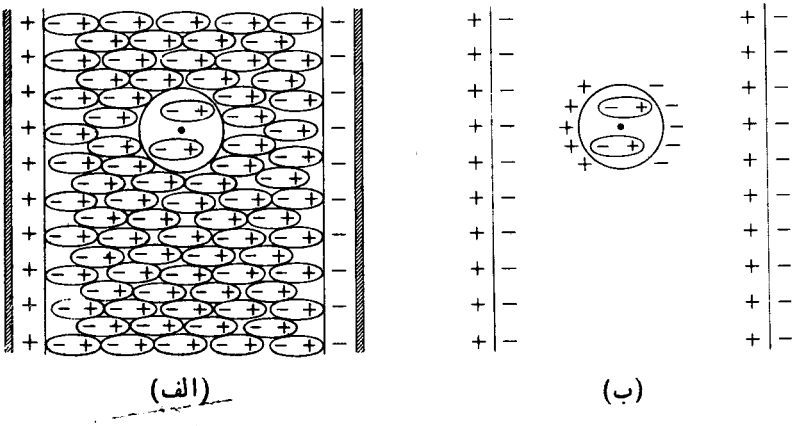
میدان الکتریکیی که یك مولکول دی‌الکتریك را قطبیده می‌کند به میدان مولکولی $\mathbf{E}_m$ موسوم است. $\mathbf{E}_m$ میدان الکتریکی درمحل هریك ازمولکولها در دی‌الکتریك است؛ این میدان از همهٔ چشمه‌های خارجی و همهٔ مولکولهای قطبیده در دی‌الکتریك، به‌استثنای مولکولی که درنقطهٔ مورد مطالعه قرار دارد، ناشی می‌شود. واضح است که لزومی ندارد $\mathbf{E}_m$ همان میدان الکتریکی ماکروسکوپی باشد زیرا، همان‌طورکه دربخش ۳.۴ بحث‌شد، میدان الکتریکی ماکروسکوپی به‌نیروی وارد بربارآزمونی مربوط می‌شودکه در مقایسه باابعاد مولکولی بسیاربزرگ است.

میدان‌مولکولی‌را می‌توان به‌روش زیرمحاسبه کرد. قطعهٔ کوچکی ازجسم‌دی‌الکتریك را می‌بریم وحفره‌ای کروی دراطراف نقطه‌ای که میدان مولکولی‌را می‌خواهیم درآنجا محاسبه کنیم ایجاد می کنیم. آنچه راکه از جسم دی‌الکتریك به‌جا می‌ماند به‌منزلهٔ محیطی پیوسته در نظر خواهیم گرفت، یعنی آن را ازدید ماکروسکوپی بررسی می کنیم. حال دی‌الکتریك را مولکول به‌مولکول دوباره درحفره سرجایش قرار می‌دهیم، بجز مولکول مرکزحفره که در آنجا می‌خواهیم میدان مولکولی را پیدا کنیم. مولکولهایی را که بدین ترتیب سرجایشان می گذاریم نه به‌منزلهٔ یك‌محیط پیوسته، بلکه به‌صورت دوقطبیهای‌مجزا درنظرخواهیم گرفت. روشی که مختصراً به‌آن اشاره شد فقط درصورتی قابل توجیه است که نتیجهٔ محاسبات‌آن به‌اندازهٔ حفره بستگی نداشته باشد؛ خواهیم دیدکه تحت شرایط خاصی این امردر واقع صحت دارد.

فرض‌کنید قطعهٔ نازکی ازیك دی‌الکتریك‌را باقرار دادن آن در میدان الکتریکی یکنواخت موجود میان دوصفحهٔ موازی با بارهای مخالف، نظیرشکل ۱.۵ الف، قطبیده می‌کنیم. همچنین فرض کنید قطبش در مقیاس ماکروسکوپی یکنواخت باشد (یعنی $\nabla\cdot\mathbf{P}=0$) و $\mathbf{P}$ موازی میدانی‌باشدکه مولدآن است. آن قسمت از دی‌الکتریك‌راکه در خارج‌حفره قراردارد می‌توان‌بادستگاهی از بارهای قطبشی نظیرشکل۱.۵ب تعویض‌کرد، بنابراین، میدان الکتریکی درمرکزحفره را می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$\mathbf{E}_m=\mathbf{E}_x+\mathbf{E}_d+\mathbf{E}_s+\mathbf{E}' \qquad (۱.۵)$$

دراینجا $\mathbf{E}_x$ میدان الکتریکی‌اصلی مربوط به‌صفحات موازی باردار، $\mathbf{E}_d$ میدان واقطبندهٔ مربوط به‌بار قطبشی واقع برسطوح خارجی دی‌الکتریك، $\mathbf{E}_s$ مربوط به بار قطبشی واقع



شکل ۱.۵ تعویض دی‌الکتریك خارج‌از «حفره» بادستگاهی‌ازبارهای قطبشی.

برسطح S حفره، و $\mathbf{E}'$ مربوط به‌تمامی دوقطبیهای داخل حفره است. گرچه با شکل صریح $\mathbf{E}_x$ کاری نداریم، ولی واضح است که اگر ابعاد صفحات در مقایسه با فاصلهٔ میان آنها بزرگ باشد، $E_x=(1/\varepsilon_\circ)\sigma$ خواهد بود، که درآن σ چگالی سطحی بار است. میدان واقطبنده نیز بادوصفحهٔ موازی بار به‌وجود می‌آید که چگالی سطحی آنها برابر است با σ_p. چون $\sigma_p=P_n=\pm P$، پس

$$\mathbf{E}_d=-\frac{1}{\varepsilon_\circ}\mathbf{P} \qquad (۲.۵)$$

میدان الکتریکی ماکروسکوپی درون دی‌الکتریك را بدون شاخص پایین، یعنی به‌صورت $\mathbf{E}$ می‌نویسیم. ازآنجا که مؤلفهٔ قائم جابه‌جایی الکتریکی $\mathbf{D}$ در فصل مشترك خلأ-دی‌الکتریك پیوسته است، و چون در خلأ و درست نزدیك به قطعهٔ دی‌الکتریك $\mathbf{D}=\varepsilon_\circ\mathbf{E}_x$ است، پس

$$\varepsilon_\circ\mathbf{E}_x=\varepsilon_\circ\mathbf{E}+\mathbf{P} \qquad (۳.۵)$$

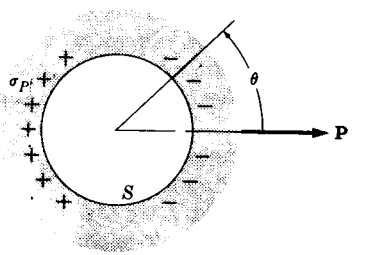
ازترکیب معادلات (۱.۵)، (۲.۵)، و (۳.۵) نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{E}_m=\mathbf{E}+\mathbf{E}_s+\mathbf{E}' \qquad (۴.۵)$$

معادلهٔ فوق میدان مولکولی را به میدان الکتریکی ماکروسکوپی درون جسم دی‌الکتریك ربط می‌دهد. این نتیجه کاملا عمومیت دارد و به‌وضع هندسی شکل ۱.۵ محدود نمی‌شود؛ باوجود این روش بالاآموزنده وبرای موضوعی که دربخش ۴.۵ دربارهٔ آن بحث خواهد شد مفید است.

میدان $\mathbf{E}_s$ ازچگالی بارقطبشی، $\sigma_P=P_n$، واقع برسطح کروی S نتیجه می‌شود. با استفاده‌ازمختصات کروی‌وانتخاب جهت قطبی‌درجهت $\mathbf{P}$، نظیرشکل ۲.۵، نتیجه می‌شود که

$$d\mathbf{E}_s=\frac{(-P\cos\theta)}{4\pi\varepsilon_\circ r^3}\,\mathbf{r}\,da \qquad (۵.۵)$$



شکل ۲.۵ محاسبهٔ سهم سطح «حفره» درایجاد $\mathbf{E}_m$.

که در آن $\mathbf{r}$ برداری است ازسطح کره به‌مرکز آن. از روی تقارن به‌وضوح نتیجه می‌شود که درانتگرال معادلهٔ (۵.۵) برروی تمامی سطح فقط آن مؤلفه از $d\mathbf{E}_s$ که درامتداد $\mathbf{P}$ قراردارد سهیم خواهد بود. چون $da = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$، پس

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\mathbf{P}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3\varepsilon_0}\mathbf{P} \qquad (6.5)$$

بالاخره به‌جملهٔ آخر معادلهٔ (۴.۵) می‌رسیم که به‌دوقطبیهای الکتریکی داخل سطح S مربوط می‌شود. چند موردمهم وجود دارد که درآنها این جمله صفرمی‌شود. اگر تعداد دوقطبیها در حفره زیاد، وسمتگیری آنها موازی با یکدیگرولی توزیع آنها درفضا کتره‌ای باشد، وهیچ همبستگیی میان مکان دوقطبیها وجود نداشته باشد، درآن‌صورت $\mathbf{E}' = 0$ خواهدبود. این وضعی است که در گازهاومایعات ممکن است حکمفرما باشد. همین‌طورا گردوقطبیهای داخل حفره درمکانهای منظم اتمی یك بلورمکعبی[1] قرار گرفته باشند، بازهم $\mathbf{E}' = 0$ خواهد بود. برای بحث بیشتر به‌مسئلهٔ ۲.۵ رجوع کنید.

درحالت کلی، $\mathbf{E}'$ صفرنیست واگرماده شامل چندین نوع مولکول باشد، $\mathbf{E}'$ ممکن است در مکانهای مولکولی مختلف متفاوت باشد. به عنوان مثال، وجود این جمله سبب می‌شود که کربنات کلسیوم رفتارالکتریکی ناهمسانگرد داشته باشد. اما منظور ما در اینجا بسط نظریهٔ مواد ناهمسانگرد نیست ، بنابراین، مطالعات بعدی خود را به‌گروه نسبتاً بزرگی ازموادکه‌درآنها $\mathbf{E}' = 0$ است محدودمی کنیم. بنابراین، معادلهٔ (۴.۵) به‌صورت زیرخلاصه می‌شود

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\mathbf{P} \qquad (7.5)$$

لازم به‌تذکراست که اگر «حفرهٔ» کروی را فقط با برداشتن یك مولکول ایجاد می کردیم، این نتیجه مستقیماً باروش بالا به‌دست می‌آمد. ولی درآن صورت حفره آن‌قدر کوچك بودکه تعویض بقیهٔ دی‌الکتریك بادستگاهی ازبارهای قطبشی قابل توجیه نبود.

گشتاور دوقطبی یك مولکول در واحد میدان قطبنده را قطبش‌پذیری، α ، می‌نامند. به‌عبارت دیگر

$$\mathbf{p}_m = \alpha\mathbf{E}_m \qquad (8.5)$$

---

۱. بلورهایی که بالاترین درجهٔ تقارن را دارند به‌دستگاه بلورهای مکعبی متعلق‌اند.

اگر N مولکول درواحد حجم موجود باشد، در آن صورت قطبش $\mathbf{P}=N\mathbf{p}_m$ است، و ازترکیب این نتیجه بامعادلات (۷.۵) و (۸.۵) به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{P}=N\alpha\left(\mathbf{E}+\frac{1}{3\varepsilon_0}\mathbf{P}\right) \qquad (۹.۵)$$

این‌معادله‌رامی‌توان برحسب ثابت‌دی‌الکتریك، K،بازنویسی کرد،زیرا $\mathbf{P}=(K-1)\varepsilon_0\mathbf{E}$. بدین ترتیب معادلهٔ (۹.۵) به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\alpha=\frac{3\varepsilon_0(K-1)}{N(K+2)} \qquad (۱۰.۵)$$

که‌به‌معادلهٔ کلاؤسیوس ـ موساتی[1] معروف‌است. واضح‌است‌که معادلهٔ (۱۰.۵) یك خاصیت مولکولی، یعنی قطبش پذیری مولکولی را برحسب مقادیری بیان می‌کندکه می‌توان آنها را برمبنایی ماکروسکوپی تعیین کرد.

۲.۵ دوقطبیهای القایی. یك مدل ساده

مولکولهای دی‌الکتریکهـا را به دو گروه قطبی و غیر قطبی رده‌بندی می‌کنند. مولکول قطبی آن است‌که، حتی هنگامی‌که میدان قطبندهٔ $\mathbf{E}_m$ صفر است یك‌گشتاور دوقطبی دائمی داشته باشد. دربخش بعد پاسخ دی‌الکتریك قطبی دربرابرمیدان الکتریکی خارجی‌مطالعه خواهد شد، ولی دراین بخش ما بایك مسئلهٔ تاحدودی راحت‌تر، شامل مولکولهای غیر ـ قطبی،که درآنها «گرانیگاههـای» توزیع بارهای مثبت ومنفی به‌طور عـادی بریکدیگر منطبق‌اند، سروکارداریم. مولکولهای متقارن H_2، N_2، و O_2، یامولکولهای‌تك اتمی He، Ne، و Ar، جزو این گروه‌اند.

اعمال میدان الکتریکی بردی‌الکتریك سبب جابه‌جایی نسبی بارهای مثبت و منفی درمولکولهای غیرقطبی می‌شود، و دو قطبیهای مولکولیی‌که بدین نحو پدید می‌آیند بـه دوقطبیهای القایی موسوم‌اند. ساده‌ترین نوع مولکولی که می‌توان تصورکرد مولکولی است‌که از یك اتم خنثی تشکیل شده‌باشد. می‌توان یك مدل‌کلاسیك ساده برای‌اتم‌ساخت وازاین مدل عبارتی برای‌گشتاور دوقطبی القایی وبنابراین عبارتی برای قطبش‌پذیری آن به‌دست‌آورد. اگرچه این مدل مخصوص بررسی مولکولهای تك‌اتمی است، ولی می‌توان آن‌را برای مولکولهای دواتمی متقارن نیز، بابه‌کار بردن‌آن به‌طور جداگانه برای هریك از اتمهای مولکول وبه‌دست‌آوردن قطبش‌پذیریهای اتمی، به‌کاربرد. دراین‌صورت‌قطبش‌ـ پذیری مولکولی عبارت است ازحاصل‌جمع‌آنها، یا دوبرابر قطبش پذیری اتمی.

---

1. Clausius - Mossotti

هراتم متشکل است ازیك هستهٔ فوق‌العاده کوچك با بارمثبت که‌الکترونهای مداری که دائم درحال حرکت‌اندآن‌را درمیان گرفته‌اند. چون الکترونها مدار خود را در مدتی فوق‌العاده کوتاه (درحدود 10^{-15}s) طی می‌کنند، واضح است که دراتم «ایستای» معادل بارِ هرالکترون درسراسرمدار خودش توزیع شده است. مکانیك کوانتومی به‌ما می‌آموزد که هرچند این تصویراساساً صحیح است، ولی تا حدودی ساده وخام است. الکترونهادر واقع درمدارهایی جایگزیده نشده‌اند، بلکه بااحتمالی متناهی درهرقسمت ازاتم‌می‌توانند واقع باشند. بنابراین، پاسخ اتم به‌یك میدان الکتروستاتیکی یا به میدانهـای الکتریکی باتغییرات کند رابدین‌گونه می‌توان بررسی کردکه تصورکنیم هرالکترون درسراسر مدار خود دراتم توزیع شده‌است، وهرمدارقسمت قابل توجهی ازحجم اتم‌را دربرگرفته‌است. خلاصهٔ کلام، مدل کلاسیك ساده‌ای ازاتم که بااین تصویرسازگارباشد عبارت است ازیك بارنقطه‌ای مثبت (هسته) که درابری ازبارهای منفی باتقارن‌کروی احاطه شده است ودر این ابرچگالی بارتاشعاع اتمی R_0 اساساً یکنواخت و برای شعاعهای بزرگترصفر است.

اکنون در وضعی هستیم که بتوانیم قطبش‌پذیری این «اتم» رامحـاسبه‌کنیم. فرض کنید بارالکتریکی هسته Ze است، که درآن e قدرمطلق بارالکترون و Z عدد اتمی‌است. چون اتم ازلحاظ الکتریکی خنثی است، بارکل درابرالکترونی $-Ze$ خواهد بود. اگر اتم درمیدان قطبندهٔ $\mathbf{E}_m$ قرارداده شود، هسته نسبت به‌مرکز ابربار جابه‌جا می‌شود؛ مقدار این جابه‌جایی‌را x می‌نامیم. این جابه‌جایی درامتداد $\mathbf{E}_m$ خواهدبود. فرض‌کنید دراثنای این جابه‌جایی ابربارمثل یك‌جسم صلب حرکت‌کند. یعنی‌دراثرمیدان قطبنده ابرتغییرشکل ندهد. جابه‌جایی x رامی‌توان ازروی تعادل نیروهای‌وارد برهسته محاسبه‌کرد؛ این‌نیروها عبارت‌اندازنیروی ZeE_m که درجهت میدان‌عمل می‌کند، ونیروی‌الکتروستاتیکی میان‌هسته و ابربارکه می‌کوشد پیکربندی اولیه را حفظ‌کند. بنابرقانون‌گاؤس، بار منفی‌ای‌که هسته را جذب می‌کندآن بخش ازابر است‌که درون‌کرهٔ به‌شعاع x قرار دارد، واگر چگـالی الکترونی درابریکنواخت باشد، این باربرابرمی‌شود با Zex^3/R_0^3. پس

$$\frac{(Ze)\,(Zex^3/R_0^3)}{4\pi\varepsilon_0 x^2}=ZeE_m \qquad (۱۱.۵)$$

یا

$$Zex=4\pi\varepsilon_0 R_0^3\,E_m \qquad (۱۲.۵)$$

چون گشتاوردوقطبی اتمیی که در این فرایند ایجاد می‌شود عبارت است از $\mathbf{p}_m=Zex$، از مقایسهٔ این معادله بامعادلهٔ (۸.۵) نتیجه می‌شود

$$\alpha=4\pi\varepsilon_0 R_0^3 \qquad (۱۳.۵)$$

مدل اتمی بالا را می‌توانیم ازطریق مقایسهٔ نتایج حاصل از آن بانتایج حاصل از

منابع دیگر بیازماییم. مثلا از ترکیب معادلهٔ (۱۳.۵)، با معادلهٔ کلاؤسیوس ـ موساتی (۱۰.۵) می‌توان α را حذف کرد؛ معادلهٔ حاصل شعاع اتمی R_0 را برحسب کمیتهای معلوم تجربی پیشگویی می‌کند. R_0ی که به‌این طریق به‌دست می‌آید با نتایج حاصل از آزمایشهای دیگر، در مواردی که مدل بالا برای آنها مخصوصاً مناسب است، به‌نحوی معقول توافق دارد؛ مرتبهٔ بزرگی R_0 درحدود یك آنگستروم یعنی 10^{-10} m است (مسئلهٔ ۱.۵).

قطبش‌پذیری که درمعادلهٔ (۱۳.۵) به‌دست آمد ثابت، ومستقل ازمیدان قطبنده است. بنابراین، معادلهٔ (۱۳.۵) به‌مقدار ثابتی برای K منجر می‌شود، و دی‌الکتریکی که بدین گونه توصیف شود خطی است.

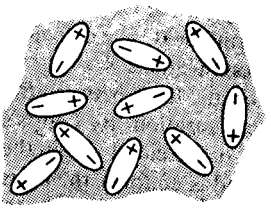
۳.۵ مولکولهای قطبی. فرمول لانژون ـ دبی[1]

همان‌طور که دربخش گذشته اشاره‌شد، هرمولکول قطبی گشتاوردوقطبی دائمی دارد، هر مولکول قطبی ازحداقل دونوع اتم مختلف تشکیل‌شده‌است؛ دراثنای تشکیل مولکول ممکن است برخی ازالکترونهای یك اتم به‌طور کامل یا به‌طور جزئی به‌اتم دیگر منتقل شوند و پس ازاین انتقال آرایش الکترونی حاصل به‌نحوی باشدکه مراکز بارهای مثبت و منفی در مولکول برهم‌منطبق نباشند. اگرمیدان الکتریکی وجود نداشته‌باشد، یك قطعهٔ ماکروسکوپی از دی‌الکتریك قطبی قطبیده نخواهد بود، زیرا همان‌طور که درشکل ۳.۵ دیده می‌شود، سمتگیری تك‌تك دوقطبیها کره‌ای است. این قطبش به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{P}=\frac{1}{\Delta v}\sum \mathbf{p}_m \qquad (۱۴.۵)$$

که در آن جمع‌بندی روی تمام مولکولهای موجود درعنصر حجم Δv صورت می‌گیرد. وقتی $\mathbf{p}_m$ها دارای سمتگیری کره‌ای باشند، حاصل جمع صفر می‌شود.

اگر دی‌الکتریك قطبی تحت تأثیر میدانی الکتریکی قرار گیرد، برهریك ازدوقطبیهای



شکل ۳.۵ توزیع کره‌ای دو قطبیهای دائمی.

1. Langevin - Debye

آن گشتاور نیرویی وارد می‌شود، و گرایش این گشتاورها چنان است که می‌خواهند دوقطبیها را بامیدان همسو کنند. اگرمیدان به‌اندازهٔ کافی قوی باشد ممکن است دوقطبیها کاملا همسو شوند که در آن‌صورت قطبش به‌مقدار اشباعی زیرخواهد رسید

$$\mathbf{P}_s = N\mathbf{p}_m \qquad (۱۵.۵)$$

که در آن N تعداد مولکولها در واحد حجم است. این اثر سمتگیری علاوه براثرهای دو قطبی القایی است که معمولا موجودند. فعلا ما ازسهم مربوط به‌دو قطبی القـایی، صرفنظر می‌کنیم، ولی بعداً اثر آن‌را نیزخواهیم افزود.

درشدت میدانهایی که به‌طورمعمول با آنها برمی‌خوریم، قطبش هردی‌الکتریك‌قطبی معمولا ازمقدار اشباعی‌آن بسیار کمتراست، و اگردمای جسم افزایش داده شود قطبش آن حتی کمترهم می‌شود. فقدان همسویی کامل دوقطبیها ناشی از انرژی گرمایی مولکولهاست که در جهت ایجاد سمتگیریهای کتره‌ای برای دوقطبیها عمل می‌کند. میانگین گشتاور دو قطبی مؤثرمولکولی را می‌توان به‌کمك یکی از اصول مکانیك آماری محاسبه‌کرد. برطبق این‌اصل، در دمای T احتمال اینکه مولکولی باانرژی مولکولی به‌خصوص E یافت شود، متناسب است با

$$e^{-E/kT} \qquad (۱۶.۵)$$

که در آن k ثابت بولتزمن و T دمای مطلق‌است. دراینجا ازارائه بحث کاملی دربارهٔ مبنای این اصل خودداری می‌کنیم؛ چنـانچه خواننده با توزیع ماکسولی سرعت در گـاز کامل آشنایی داشته‌باشد قبلاباین اصل برخورد کرده‌است. طبق قانون توزیع ماکسول،احتمال اینکه سرعت مولکول v بـاشد متناسب است با $e^{-mv^2/2kT}$. ولی در گـازکامل مـاکسول مولکولها فقط انرژی جنبشی $\frac{1}{2}mv^2$ دارند؛ در حالت کلی E در معادلهٔ (۱۶.۵) باید هم انرژی جنبشی E_k وهم انرژی پتانسیل U را شامل شود، و عامل بالا به صورت زیر درآید

$$e^{-E_k/kT}e^{-U/kT} \qquad (۱۷.۵)$$

انرژی پتانسیل یك دوقطبی دائمی $\mathbf{p}_0$ درمیدان الکتریکی $\mathbf{E}_m$ عبارت است از

$$U = -\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E}_m = -p_0 E_m \cos\theta \qquad (۱۸.۵)$$

که در آن θ زاویهٔ میان $\mathbf{p}_0$ ومیدان‌الکتریکی است. چون‌انرژی جنبشی مولکولی به‌میدان الکتریکی بستگی ندارد، می‌توان توزیع سرعت را در محاسبات زیرکاملا نادیده گرفت. گشتاور دوقطبی مؤثریك دو قطبی مولکولی عبارت است ازمؤلفهٔ آن درامتداد میدان، یعنی $p_0 \cos\theta$. پس بااستفاده ازاصل بالا، مقدارمیانگین این کمیت عبارت می‌شود از

$$\langle p_\circ \cos\theta\rangle = \frac{\int p_\circ \cos\theta e^{+P_\circ E_m \cos\theta/kT}\, d\Omega}{\int e^{+P_\circ E_m \cos\theta/kT}\, d\Omega} \qquad (۱۹.۵)$$

که درآن $d\Omega$ عنصرزاویهٔ فضایی است که می‌توان به‌جای‌آن $2\pi \sin\theta\, d\theta$ را قرار داد وحدود θ میان صفرو π است. چون $p_\circ$، E_m و kT درانتگرال گیری ثابت‌اند، به‌آسانی می‌توان انتگرالهارا محاسبه‌کرد. برای سهولت نماد زیررا تعریف می‌کنیم

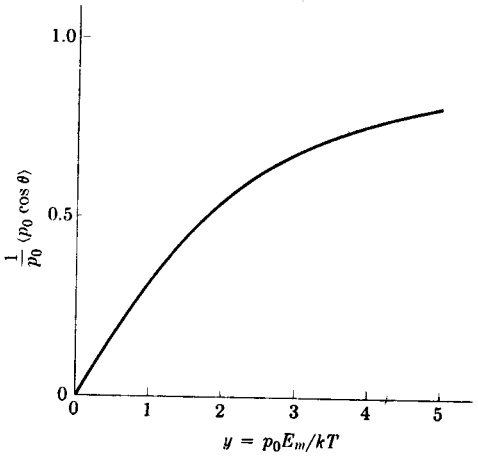
$$y = \frac{p_\circ E_m}{kT} \qquad (۲۰.۵)$$

پس معادلهٔ (۱۹.۵) نتیجهٔ زیررا به‌دست می‌دهد

$$\langle p_\circ \cos\theta\rangle = p_\circ \left[\coth y - \frac{1}{y}\right] \qquad (۲۱.۵)$$

که به‌فرمول لانژون معروف است. این تابع در شکل ۴.۵ رسم شده است. از روی شکل پیداست که‌معادلهٔ (۲۱.۵) درواقع، درمیدانهای‌خیلی قوی‌اثراشباعی ازخود نشان‌می‌دهد. ولی به‌ازای مقادیر کوچك y منحنی خطی است، و همین ناحیهٔ خطی است‌که در دماهای معمولی حائز اهمیت است. گشتاور دوقطبی مولکولی $p_\circ$ برای اکثر اجسام قطبی طوری است‌که به‌ازای همهٔ مقادیر شدت میدان، حتی به‌ازای شدتهایی که نزدیك به‌استقامت دی‌الکتریك ماده‌اند، تازمانی‌که دما بالاتراز ۲۵۰K باشد داریم $y \ll 1$. ازاین رو، هر جسم دی‌الکتریکی‌که شامل مولکولهای قطبی باشد عموماً خطی است.

چون‌فقط ناحیهٔ‌خطی معادلهٔ (۲۱.۵) مهم‌است، بهتراست‌که $\coth y$ را به‌صورت یك رشتهٔ توانی بسط دهیم، و فقط جملات اول آن را نگه داریم (مسئلهٔ ۴.۵). جملهٔ اول رشته جملهٔ‌آخررا درمعادلهٔ (۲۱.۵) حذف می‌کند. درنتیجه



شکل ۴.۵ رسم تابع‌لانژون. مقدار مجانبی به ازای $y \to \infty$ برابر یك است.

$$\langle p_\circ \cos\theta\rangle \approx \frac{1}{3} p_\circ y = \frac{p_\circ^2 E_m}{3kT} \qquad \text{(۲۲.۵ الف)}$$

چون $\langle p_\circ \cos\theta\rangle$ میانگین گشتاور دوقطبی مؤثر هرمولکول است، بنابراین قطبش مساوی است با $\mathbf{P}=N\langle p_\circ \cos\theta\rangle$، و در جهت $\mathbf{E}_m$ خواهد بود. بدین ترتیب معادلهٔ (۲۲.۵ الف) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{N}\mathbf{P} = \frac{p_\circ^2}{3kT}\mathbf{E}_m \qquad \text{(۲۲.۵ ب)}$$

ازمقایسهٔ این معادله بامعادلهٔ (۸.۵) آشکارمی‌شود که قطبش‌پذیری، α (یعنی گشتاور دوقطبی مولکولی درواحد میدان قطبنده)، برابراست با

$$\alpha = \frac{p_\circ^2}{3kT} \qquad (۲۳.۵)$$

این نتیجه را باچشمپوشی از گشتاورهای دوقطبی القایی به‌دست‌آورده‌ایم، ومعرف چیزی است که ما آن را قطبش‌پذیری سمتگیری می‌نامیم. اثرات دوقطبیهای القایی نظیر آنچه در بخش قبل بررسی شد، منجر به‌چیزی می‌شوند که می‌توان آن را قطبش پذیری تغییر شکل ($\alpha_\circ$) نامید. پس درحالت کلی، قطبش‌پذیری مولکولی کل برابر است با

$$\alpha = \alpha_\circ + \frac{p_\circ^2}{3kT} \qquad (۲۴.۵)$$

رابطهٔ بالا به‌معادلهٔ لانژون ـ دبی موسوم‌است ودرتعبیرساختارهای مولکولی‌اهمیت بسیاری دارد.

*۴.۵ قطبش دائمی. فروالکتریسیته

دربخش ۱.۵ دیدیم که میدان مولکولی $\mathbf{E}_m$ سبب قطبیدگی تك‌تك مولکولهامی‌شود. رابطهٔ میان $\mathbf{E}_m$ ومیدان‌الکتریکی ماکروسکوپی $\mathbf{E}$ درمعادلهٔ (۷.۵) داده‌شده‌است. دراکثرموارد قطبش با $\mathbf{E}$ متناسب است، لذا وقتی‌که $\mathbf{E}$ به‌سمت صفرمیل کند $\mathbf{E}_m$ هم صفر می‌شود. ولی تحت بعضی شرایط معادلهٔ (۷.۵) بایك قطبش دائمی (یاخود به‌خودی) نیزسازگاراست. وقتی $\mathbf{E}$ را برابرصفرقراردهیم خواهیم داشت

$$\mathbf{E}_m = \frac{1}{3\varepsilon_\circ}\mathbf{P}_\circ \qquad (۲۵.۵)$$

یعنی، به‌عبارت دیگر، اگر قطبش $\mathbf{P}_\circ$ وجود داشته باشد، این قطبش سبب ایجاد میدان الکتریکی درمحل مولکول می‌شود و این میدان به‌نوبهٔ خود سبب قطبیده شدن مولکول خواهدشد. به‌طورقطع یك‌میدان قطبنده وجود دارد، اما چنانچه این میدان باعث به‌وجود آمدن قطبشی غیراز $\mathbf{P}_\circ$ شود، درآن‌صورت جواب خود سازگارنخواهد بود. لذا اگر N تعداد مولکولها درواحد حجم باشد، خواهیم داشت

$$\mathbf{P}_\circ = N\alpha\mathbf{E}_m = \frac{N\alpha}{۳\varepsilon_\circ}\mathbf{P}_\circ \qquad (۲۶.۵)$$

این رابطه وقتی صادق خواهدبودکه رابطهٔ زیر

$$\mathbf{P}_\circ = ۰$$

یا رابطهٔ زیربرقرارباشد

$$\frac{N\alpha}{۳\varepsilon_\circ} = ۱ \qquad (۲۷.۵)$$

ازاین‌رو، معادلهٔ (۲۷.۵) شرط قطبش دائمی است.[۱]

دراکثرمواد $N\alpha/۳\varepsilon_\circ$ کوچکترازواحد است، ودرنتیجه رفتار دی‌الکتریك معمولی حاصل می‌شود. باوجود این، در معدودی جامد بلورین شرط (۲۷.۵) صادق است. این قبیل اجسام‌را فروالکتریك می‌نامند، زیرا خواص الکتریکی آنها شبیه خواص مغناطیسی اجسام فرومغناطیس است. تیتانیت باریوم، $BaTiO_۳$، بهترین نمونهٔ شناخته شدهٔ اجسام فروالکتریکی است که در دمای زیر $۱۲۰^\circ C$ گشتاور دوقطبی خود به‌خودی دارد. این‌دما به‌نقطهٔ کوری[۲] جسم معروف است.

حالت قطبیدهٔ مادهٔ فروالکتریك نسبتاً پایداراست وحالتی است که می‌تواند برای مدت زیادی دوام داشته باشد. این امرممکن است تاحدی شگفت‌آور باشد زیرا یك‌جسم قطبیده تحت تأثیرمیدان واقطبندهٔ خود قرارمی گیرد و، بسته به‌شکل‌هندسی جسم، این‌میدان واقطبنده ممکن است نسبتاً بزرگ هم‌باشد. برای جسمی‌که به‌شکل برهٔ تخت، و در امتداد

---

۱. به‌بیان دقیقتر، معادلهٔ (۲۷.۵) برای اجسامی به‌دست‌آمده است‌که فقط‌ازیك نوع مولکول تشکیل شده‌اند، وبرای‌آنها جملهٔ $\mathbf{E}'$ بخش ۱.۵ صفرمی‌شود. دریك نظریهٔ کمی، که قابل‌کاربرد درحالت‌کلی باشد، معادلهٔ (۲۷.۵) با مجموعه‌ای از دستگاههای معادلات جایگزین می‌شود. برای فهم اساسی منشأ فروالکتریسیته به‌چنین پیچیدگیهایی نیازنیست ودرنتیجه دربارهٔ آنها در اینجا بحث نخواهد شد.

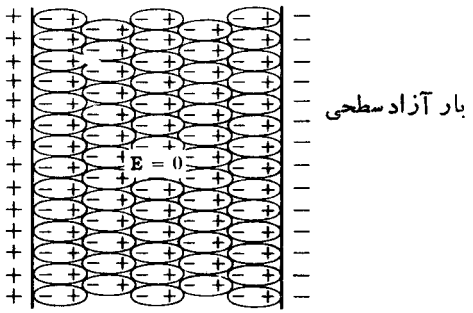
2. Curie

عمود بر وجوهش قطبیده شده‌است، میدان واقطبنده بزرگترین مقدار است. همان طور که دربخش ۱.۵ دیده‌شد، اگرابعاد وجوه بره نسبت به‌ضخامت آن خیلی‌بزرگ باشند،خواهیم داشت

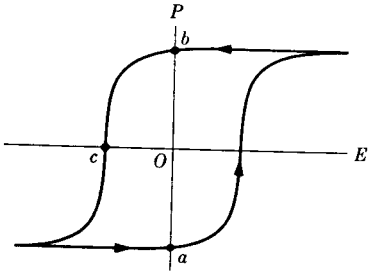
$$\mathbf{E}_d = -\frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{P} \qquad (۲۸.۵)$$

درواقع، پایداری زیاد یك فروالکتریك قطبیده به‌این سبب است که برروی‌آن هیچ میدان واقطبنده‌ای اثر نمی‌کند، حتی درموردی که جسم‌ازلحاظ هندسی به‌شکل بره باشد. دلیل این امرازبحث زیرروشن می‌شود: برای‌قطبی کردن جسم آن‌رامیان‌دوصفحهٔ‌رسانای موازی قرار می‌دهیم وسپس به‌این صفحات اختلاف پتانسیل نسبتاً زیادی اعمال می‌کنیم. در این فرایند بار آزاد صفحه‌ها تاحد زیادی با بارقطبشی سطحی خنثی خواهد شد، درست شبیه به‌آنچه دراثنای قطبی کردن یك دی‌الکتریك معمولی رخ می‌دهد.حال اگرصفحات‌موازی را بااتصال کوتاه هم‌پتانسیل کنیم، بازهم حالت‌قطبیدهٔ فروالکتریك ازلحاظ انرژی مناسب است، به‌طوری‌که بار آزاد در جای خود باقی خواهد ماند، وبازهم سبب خنثی‌کردن بار قطبشی خواهدشد. وضعیت تقریباً شبیه‌خواهدبود به‌آنچه درشکل ۵.۵ نشان داده‌شده‌است. دراین وضع بارآزاد توسط بارقطبشی سطحی درجای خود نگه داشته می‌شود. میدان ماکروسکوپی درداخل فروالکتریك صفراست؛ به‌علاوه میدان الکتریکی خارجی نیز صفر است و مشکل است بتوان جسم فروالکتریك قطبیده را از یك جسم دی‌الکتریك ناقطبیدهٔ متعارف تمیزداد.

حال اگریك اختلاف پتانسیل‌زیاد وباعلامت مخالف میان‌صفحاتی که برفروالکتریك قطبیده محیط‌اند برقرار کنیم، جسم جهت قطبش خودرا تغییر می‌دهد و بار آزاد باعلامت مخالف ازمدارخارجی به‌طرف صفحات به‌مقدارکافی جاری می‌شود، یعنی به‌مقداری‌که نه تنها بارآزاد موجود در آنجا، بلکه بارقطبشی جدیدرا نیز خنثی کند. ازاین رو برهٔ فرو ـ



شکل ۵.۵ یك قطعه مادهٔ فروالکتریك قطبیده.



شکل ۶.۵ منحنی پس‌ماند برای یك نمونهٔ فروالکتریك.

الکتریکی که میان‌دوصفحهٔ موازی واقع‌است می‌تواند به‌منزلهٔ عنصر اصلی یك‌دستگاه‌حافظه به‌کاررود؛ این‌برهٔ فروالکتریك قادراست $\pm$ یا $\mp$ را درخود حفظ کند، وتاوقتی که‌میدان الکتریکی خارجی وجود نداشته باشد قطبش‌آن پابرجا خواهد مـاند. عدد $\pm$ یا $\mp$ را بااعمال یك اختلاف پتانسیل میان دوسرنمونه می‌توان خواند. اگر میدان اعمال شده در جهت قطبش اولیه باشد، باری ازمدارخارجی عبورنخواهدکرد؛ اگرمیدان درخلاف‌جهت قطبش اولیه باشد، درضمن‌آنکه قطبش فروالکتریك جهت خود را تغییر می‌دهد، مقداری بارالکتریکی ازمدارخارجی عبورخواهدکرد.

فروالکتریك قطبیده‌دربرابر یك‌میدان‌الکتریکی‌معکوس پایداراست، مشروط برآنکه این میدان خیلی شدید نباشد. شکـل ۶.۵ منحنی‌کامل قطبش را برحسب میدان الکتریکی نشان می‌دهد؛ واضح است که برای میدانهای ضعیف به‌ازای هرمقدار از E دومقداربرای P وجوددارد. منحنی شکل ۶.۵ را حلقهٔ پس‌ماند می‌نامند. پس ماند یعنی «عقب ماندن»، و واضح‌است‌که بردارقطبش نسبت به‌بردارمیدان الکتریکـی عقب می‌مـاند. نقاط a و b وضعیتهای پـایداربه‌ازای $E=0$ اند، و به‌ترتیب قطبشهـای $\pm$ و $\mp$ را نشان می‌دهند. نقطهٔ c معرف مقدار میدان‌الکتریکیی است که‌به‌ازای مقادیر بیشتر ازآن‌جهت قطبش‌عوض می‌شود.

۵.۵ خلاصهٔ مطالب

قطبش ماکروسکـوپی Pی مادهٔ دی‌الکتریك همسانگـرد بستگی دارد به‌گشتاور دو قطبی مولکولی p_m (یامؤلفهٔ‌آن) که درپاسخ به‌میدان الکتریکی موضعی درمکان مولکول (یعنی میدان مولکولی E_m) به‌وجود می‌آید

$$P = N p_m(E_m)$$

معمولا p_m باتقریب خوبی متناسب است با E_m

$$p_m = \alpha E_m$$

میدان مولکولی به‌میدان اعمال شدهٔ E و همچنین به‌خود قطبش (یعنی، میدانهای دو قطبی تمامی مولکولهای دیگر) بستگی دارد. درساده‌ترین موارد

$$E_m = E + \frac{1}{3\varepsilon_0} P$$

درحالت عادی E_m را می‌توان ازاین معادلات حذف کرد ونوشت

$$P = \chi E$$

که درآن χ پذیرفتاری ثابت برابراست با

$$\chi = \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0}}$$

اما وقتی قطبش‌پذیری مولکولها زیاد باشد ، $(N\alpha > 3\varepsilon_0)$ ، جواب دیگری با $E = 0$ ، $P \neq 0$ امکان‌پذیراست (یعنی، ماده ممکن‌است موقعی که میدان اعمال شده صفراست، مثل جسم فروالکتریك، به‌طورخود به‌خود قطبیده شود).

۱. درمیدان الکتریکی دراثر تغییر شکل توزیع بار الکترونی تمام مولکولها گشتاور دوقطبی القایی پیدا می‌کنند. ازتحلیل یك مدل خطی ساده، قطبش‌پذیری اتمی ثابتی نتیجه می‌شود که باحجم اتم متناسب است

$$\alpha = 4\pi\varepsilon_0 R_0^3$$

۲. مولکولهای قطبی ، که گشتاور دو قطبی دائمی p_0 دارند ، علاوه براین قطبش‌پذیری سمتگیری نیزازخود نشان می‌دهند؛ قطبش‌پذیری باتابع لانژون که درمکانیك آماری به‌دست می‌آید توصیف می‌شود. دردمای بالاسهم مربوط به‌این‌قطبش پذیری نیزخطی‌است وداریم

$$\alpha = \frac{p_0^2}{3kT}$$

۳. معدودی از مواد (مثل باریم تیتانات) خاصیت فروالکتریکی از خود بروز می‌دهند.

مسائل

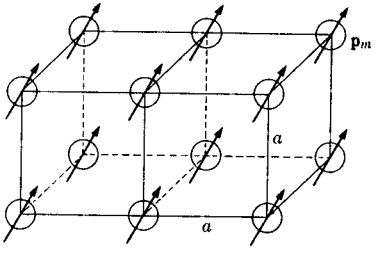
۱.۵ با به‌کاربردن معادلهٔ کلاؤسیوس ـ موساتی، قطبش‌پذیری اتمها را در مولکولهای هوا (یعنی N_2 و O_2)، محاسبه کنید. [توجه کنید که از معادلهٔ (۱۰.۵) فقط میانگین وزنی قطبش‌پذیریهای نیتروژن و اکسیژن به‌دست می‌آید. از ترکیب این نتیجه و نظریهٔ بخش ۲.۵ شعاع متوسط اتمها در یك مولکول هوا را محاسبه کنید.]

۲.۵ شکل ۷.۵ شبکهٔ مکعبی ساده‌ای از مولکولها را نشان می‌دهد که تمام مولکولهای آن گشتاور دوقطبی یکسانی (از حیث جهت و مقدار)، $\mathbf{p}_m$، دارند. مولکول معینی را در نظر می‌گیریم و آن را j می‌نامیم. واضح است که نزدیکترین همسایه‌های j شش مولکول‌اند که در فاصلهٔ a واقع‌اند، نزدیکترین همسایه‌های بعدی آن دوازده مولکول در فاصلهٔ $\sqrt{2}a$ و به‌همین ترتیب. میدان الکتریکی ناشی از شش $\mathbf{p}_m$ مولکولهای نزدیکترین همسایه‌ها را به‌ازای جهتی دلخواه برای $\mathbf{p}_m$ درمحل j به‌دست آورید. (خطوطی که j را به‌نزدیکترین همسایه‌هایش متصل می‌کنند محورهای x، y، و z اختیار کنید. برای سهولت $\mathbf{p}_m$ را درصفحهٔ xz بگیرید به‌طوری که بامحور x زاویهٔ θ بسازد.)

۳.۵ با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۱.۵ برای قطبش‌پذیری اتم نیتروژن، جا به جایی هستهٔ نیتروژن را نسبت به ابرالکترونی آن درمیدانی به‌شدت $E_m = 3 \times 10^6\ \mathrm{V/m}$ محاسبه کنید. این جابه‌جایی را باشعاع اتم که درمسئلهٔ ۱.۵ به‌دست آمد مقایسه کنید.

۴.۵ بااستفاده از بسط معروف e^y، عبارت $\coth y$ را بسط دهید ومعادلهٔ (۲۲.۵ الف) را ازمعادلهٔ (۲۱.۵) به‌دست آورید. یك مرحله بیشتر جلو بروید وجملهٔ دیگری از رشتهٔ معادلهٔ (۲۲.۵ الف) را پیدا کنید.

۵.۵ آب مولکولی قطبی است که برای آن معادلهٔ کلاؤسیوس ـ موساتی به‌درستی قابل کاربرد نیست. باوجوداین، فرض کنید که این معادله درموردآب صادق‌است و p_0 را برای مولکول آب محاسبه کنید.



شکل ۷.۵ قسمتی از آرایهٔ مکعبی سادهٔ مولکولها که گشتاور دو قطبی هریك $\mathbf{p}_m$ است.

٦

انرژی الکتروستاتیکی

بسیاری ازمسائل مکانیك باتوجه به‌نکات مربوط به‌انرژی خیلی ساده می‌شوند. بنابراین، وقتی رفتارمکانیکی یك دستگاه الکتریکی را مطالعه می‌کنیم، به‌کاربردن روشهای انرژی می‌تواند مفید باشد. به‌طور کلی انرژی‌هردستگاه بارالکتریکی را (درست نظیرهردستگاه مکانیکی دیگر) می‌توان به‌سهمهای مربوط به‌جنبشی و پتانسیل تفسیم‌کرد. اما در حالت سکون، همهٔ انرژی دستگاه باربه‌صورت انرژی پتانسیل است، وما به‌خصوص باآن‌انرژی پتانسیلی سروکارداریم که ازبرهم‌کنش بارها ناشی می‌شود، یعنی انرژی موسوم به انرژی الکتروستاتیکی.

دربخش ۴.۲، نشان دادیم که انرژی الکتروستاتیکی یك بارنقطه‌ای، U، رابطهٔ نزدیکی باپتانسیل الکتروستاتیکی φ درمکان‌آن بارنقطه‌ای دارد. درواقع، هرگاه qمقدار بارنقطه‌ای به‌خصوصی باشد، کارانجام شده توسط نیروی وارد بربارموقعی‌که بار ازمکان A به‌مکان B می‌رود برابراست با

$$\text{کار} = \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = q\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -q\int_A^B \nabla\varphi\cdot d\mathbf{l} = -q(\varphi_B-\varphi_A) \qquad (۱.۶)$$

دراینجا فرض شده‌است که درهرنقطه درطول مسیرنیروی $\mathbf{F}$ تنها نیروی الکتریکی $q\mathbf{E}$ است. تحت این شرایط ذرهٔ باردار شتاب می‌گیرد. برای اینکه شتاب نگیرد، باید نیروی الکتریکی درهرنقطه بانیرویی مساوی و مخالف که توسط عامل دیگری اعمال می‌شود خنثی شود. بنابراین‌کارکل صفراست وانرژی جنبشی تغییرنمی‌کند.کاری‌که این نیروی‌دیگر

انجام می‌دهد برابراست با

$$W = q(\varphi_B - \varphi_A) \qquad (۲.۶)$$

که باافزایش انرژی الکتروستاتیکی باردرطول مسیر A به B برابر است.

استدلال مشابهی‌را می‌توان در مورد دستگاههای پیچیده‌تربار به‌کار برد؛ درواقع، انرژی الکتروستاتیکی یك توزیع باردلخواه را می‌توان به‌صورت‌کارلازم برای گرد هم آوردن‌این‌توزیع‌بار دربرابربرهم‌کنش کولنی‌بارهامحاسبه کرد، بی‌آنکه‌انرژی به‌صورتهای دیگری به‌آن داده شود.

۱.۶ انرژی پتانسیل‌گروهی از بارهای نقطه‌ای

منظور از انرژی الکتروستاتیکی‌گروهی مرکب از m بار نقطه‌ای، انرژی پتانسیل آن دستگاه نسبت به‌حالتی است‌که در آن همهٔ بارهای نقطه‌ای بی‌نهایت از یکدیگر دورند. این انرژی‌را می‌توان به‌آسانی بامحاسبهٔ مقدارکارلازم برای گردهم آوردن بارها، طبق معادلهٔ (۲.۶)، به‌دست‌آورد؛ دراین محاسبه بارها را یکی پس ازدیگری می‌آوریم.اولین بار، q_1، را می‌توان بدون صرف انرژی در جای خود قرارداد، $W_1 = 0$؛ برای آنکه دومین بار، q_2، را درجای خود قراردهیم، مقدارکارلازم برابراست با

$$W_2 = \frac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}}$$

که درآن $r_{21} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ است؛ ومقدارکارلازم برای سومین بار، q_3، برابراست با

$$W_3 = q_3\left[\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{31}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{32}}\right]$$

مقدارکارلازم برای‌آوردن بارهای چهارم، پنجم، ومانندآن‌رامی‌توان به‌نحومشابهی حساب کرد. انرژی الکتروستاتیکی کل دستگاه مرکب از m بار مجموع Wهاست، یعنی

$$U = \sum_{j=1}^{m} W_j = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{j-1} \frac{q_j q_k}{4\pi\varepsilon_0 r_{jk}}\right) \qquad (۳.۶)$$

نتیجه بالارا می‌توان به‌صورت‌کوتاه زیر نوشت

$$U = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{j-1} W_{jk}$$

حال اگر W_{jk}ها را به‌شکل یك ماتریس مرتب کنیم و توجه داشته باشیم که $W_{jk}=W_{kj}$ و $W_{jj}=0$، آنگاه می‌توانیم U را به‌صورت زیر نیز بنویسیم

$$U=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}W_{jk},\quad (W_{jj}=0)$$

دراین شکل جمع‌بندی، که متقارن‌تر است، ضریب ۱/۲ را به‌این دلیل می‌آوریم که برهم کنش میان هرزوج ازبارها دوبارحساب نشود. ازاین‌رو، شکل دیگرومناسبترمعادلهٔ (۳.۶) چنین است

$$U=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}{}'\frac{q_jq_k}{4\pi\varepsilon_0 r_{jk}} \qquad (۴.۶)$$

که علامت پریم برروی جمع‌بندی‌دوم به‌معنی آن است که درآن جملهٔ $k=j$ عمداً حذف می‌شود.

باتوجه به‌اینکه مقدار نهایی پتانسیل φ درمحل jامین بار نقطه‌ای نـاشی از سایر بارهای دستگاه، به‌صورت زیراست

$$\varphi_j=\sum_{k=1}^{m}{}'\frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0 r_{jk}} \qquad (۵.۶)$$

رابطهٔ (۴.۶) را می‌توان به‌صورت دیگـری نوشت. از این رو، انرژی الکتروستاتیکی دستگاه عبارت است از

$$U=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}q_j\varphi_j \qquad (۶.۶)$$

هرگاه بارهای نقطه‌ای به‌جای خلأ دریك محیط دی‌الکتریك خطی نامتناهی گردهم‌آورده شوند، آنگاه در معادله‌های (۴.۶) و (۵.۶) گذردهی ε جانشین ε_0 می‌شود لیکن معـادلهٔ (۶.۶) بی‌تغییر باقی می‌ماند. دربخش بعد نشان داده خواهد شد که رابطهٔ آخراعتبارعمومی دارد. این رابطه درمورد گروهی ازبارهای نقطه‌ای که در محیطهای دی‌الکتریکی مختلفی قرارگرفته‌اند، وحتی درمورد رساناهای باابعاد متناهی نیزصادق است. تنها محدودیت‌در اعتبار معادلهٔ (۶.۶) این است که تمام دی‌الکتریکهـا در دستگـاه الکتریکی باید خطی باشند.

۲.۶ انرژی الکتروستاتیکی یك توزیع بار

دراین بخش انرژی الکتروستاتیکی یك توزیع باردلخواه باچگالی حجمی ρ وچگالی سطحی σ را محاسبه می‌کنیم. برخی از بارها ممکن است برروی سطوح رساناها قرار داشته باشند؛ در واقع، صریحا فرض می‌کنیم که دردستگاه مورد نظر رساناهایی وجود دارند. به‌علاوه، فرض می‌کنیم که‌دی‌الکتریکهای موجود دردستگاه خطی باشند؛ آوردن این قید ازآن‌رو ضروری است که کارلازم برای آوردن دستگاه به‌حالت باردار نهایی آن به‌روش رسیدن به‌این حالت نهایی بستگی نداشته باشد.

فرض کنید که برای گردهم‌آوردن توزیع بار، عناصر بار δq را از جایی که درآن پتانسیل مرجع $\varphi_A = 0$ است به مکان نهایی‌آنها بیاوریم. اگرهنگامی که بخشی از توزیع بار را گردهم آورده‌ایم پتانسیل در نقطهٔ معینی ازدستگاه مساوی $\varphi'(x, y, z)$ باشد، آنگاه ازمعادلهٔ (۲.۶) کار لازم برای قراردادن δq دراین نقطه برابرخواهد بود با

$$\delta W = \varphi'(x, y, z)\,\delta q \qquad (۷.۶)$$

نموبار δq ممکن است به‌یك عنصرحجم واقع در نقطهٔ (x, y, z) افزوده شود، به‌طوری که $\delta q = \delta\rho\ \Delta v$، یا ممکن است به‌یك عنصرسطح درنقطهٔ مورد بحث افزوده شود، که در آن صورت $\delta q = \delta\sigma\ \Delta a$. مقدار کل انرژی الکتروستاتیکی توزیع باری که گرد هم آورده می‌شود، از جمع عناصر انرژی که هرکدام به‌صورت معادلهٔ (۷.۶) هستند به‌دست می‌آید.

چون کار لازم برای گردهم‌آوردن بارها به‌ترتیب گرد هم‌آوری آنها بستگی ندارد، می‌توان روش گردهم‌آوری خاصی‌را به‌کاربرد که باآن حاصل‌جمع δWها به‌سهولت‌قابل محاسبه باشد. دراین روش همهٔ قسمتهای دستگاه باهم به‌حالت باردار نهایی خود آورده می‌شوند، یعنی درهرمرحله ازفرایند باردارکردن مقادیرهمهٔ چگالیهای بارکسریکسانی از مقادیرنهایی آنهاست. این کسررا با α نشان می‌دهیم. هرگاه مقادیر نهایی چگالیهای بار باتابعهای $\rho(x, y, z)$ و $\sigma(x, y, z)$ داده‌شده باشند، آنگاه چگالیهای باردرمرحله‌ای دلخواه عبارت خواهند بود از $\alpha\rho(x, y, z)$ و $\alpha\sigma(x, y, z)$. به‌علاوه نمونه‌های‌این چگالیها عبارت‌اند از $\delta\rho = \rho\ (x, y, z)\,\delta\alpha$ و $\delta\sigma = \sigma(x, y, z)\,\delta\alpha$. مقدار کل انرژی الکتروستاتیکی که ازجمع‌بندی (۷.۶) به‌دست می‌آید برابر است با

$$U = \int_0^1 \delta\alpha \int_V \rho\,(x, y, z)\,\varphi'\,(\alpha; x, y, z)\,dv + \int_0^1 \delta\alpha \int_S \sigma(x, y, z)\,\varphi'\,(\alpha; x, y, z)\,da$$

اما چون مقدارتمام بارها کسریکسانی، α، ازمقداربار نهایی آنهاست، پتانسیل برابر است

با $\varphi'(\alpha; x, y, z) = \alpha\varphi(x, y, z)$، که در آن φ مقدار نهایی پتانسیل در نقطهٔ (x, y, z) است. باقرار دادن این رابطه در انتگرال بالا، انتگرال‌گیری روی α به‌آسانی انجام می‌شود و نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$U = \frac{1}{2}\int_V \rho(\mathbf{r})\,\varphi(\mathbf{r})\,dv + \frac{1}{2}\int_S \sigma(\mathbf{r})\,\varphi(\mathbf{r})\,da \qquad (8.6)$$

که نتیجهٔ مطلوب برای انرژی یك توزیع بار است. توجه داشته باشید که اولا حجم انتگرال‌گیری V باید به حد کافی بزرگ باشد تا همهٔ چگالی بار موجود در مسئله را دربر بگیرد، و ثانیاً پتانسیل φ همان پتانسیل ناشی‌ازچگالی بار ρ(و σ)است.معمولا چگالی باردرخارج ازیك ناحیهٔ کراندار صفر است، و در این صورت می‌توان V را چنان اختیار کرد که تمامی فضا را شامل‌شود. اگرتمامی فضا، به‌استثنای رساناهایی معین، بایك محیط دی‌الکتریك منفرد پرشده باشد، پتانسیل بارابطهٔ زیرداده می‌شود

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')\,dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')\,da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \qquad (9.6)$$

اگر چندین دی‌الکتریك موجود باشند، شرایط مرزی مناسب باید برآورده شود؛ این کار مثلا باافزودن جوابهای مناسب ازمعادلهٔ لاپلاس به‌معادلهٔ (۹.۶) انجام می‌شود. معادلات (۸.۶) و (۹.۶) تعمیمهایی از معادلات (۶.۶) و (۵.۶) برای بارهای نقطه‌ای محسوب می‌شوند. معادلات قبلی‌را می‌توان به‌عنوان موردی خاص به‌دست‌آورد. برای این‌کارفرض می‌کنیم که

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{m} q_j\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)$$

$$\rho(\mathbf{r}') = \sum_{k=1}^{m}{}' q_k\,\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_k)$$

که در آن دررابطهٔ پریم‌دار باید به‌ویژه به‌خاطرداشته‌باشیم که‌جملهٔ $k = j$ راکنار بگذاریم. وقتی توزیع ρ پیوسته است، صفرشدن مخرج درمعادلهٔ (۹.۶) سبب واگرا شدن انتگرال نمی‌شود، ولذاکنار گذاردن نقطهٔ $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ ضروری نیست.

قبلا گفتیم که دستگاه شامل رساناهاست. بااینکه معادلهٔ (۸.۶) این مورد را نیز به‌خوبی دربرمی‌گیرد، مناسبتراین است که سهم مربوط به‌رساناها را در آن صریحاً جدا کنیم. قسمتی ازانتگرال آخر، شامل انتگرال‌گیری برروی سطح این رساناهاست؛ چون هررسانا یك ناحیهٔ هم پتانسیل است، هریك ازاین انتگرالها را می‌توان محاسبه کرد

$$\frac{1}{2}\int_{\text{رسانای } j} \sigma\varphi\,da = \frac{1}{2}Q_j\varphi_j \qquad (10.6)$$

که درآن Q_j بار رسانای jام است. بنابراین معادلهٔ (۸.۶) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$U=\frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\, dv+\frac{1}{2}\int_{S'} \sigma\varphi\, da+\frac{1}{2}\sum_j Q_j\varphi_j \qquad (۱۱.۶)$$

که جمعبندی آخر برروی تمام رساناهاست و انتگرال سطحی منحصراست به‌سطوح نارسانا. همان‌طورکه درفصل۳ دیدیم، در بسیاری از مسائل‌که ازلحاظ عملی جالب توجه‌اند همهٔ بارهابرروی سطوح رساناها قرارمی‌گیرند. دراین شرایط معادلهٔ(۱۱.۶) تبدیل می‌شودبه

$$U=\frac{1}{2}\sum_j Q_j\varphi_j \qquad (۱۲.۶)$$

بعداً درهمین فصل این رابطه را به‌تفصیل بررسی خواهیم‌کرد.

اکنون می‌خواهیم معادلهٔ (۱۲.۶) را بامعادلهٔ (۶.۶)، که برای دستگاهی مرکب ازبارهای نقطه‌ای به‌دست‌آمد، مقایسه کنیم. دروهلهٔ اول به‌نظر می‌رسدکه هر دو معادله یکسان‌اند، لیکن تفاوت مهمی میان آنها وجود دارد. هنگام به‌دست‌آوردن معادلهٔ (۱۲.۶)، ازرساناهای ماکروسکوپی بی‌بارکه باافزودن‌نموهای باربه‌آنها به‌تدریج باردارمی‌شدند، شروع کردیم. بنابراین، انرژیی‌که درمعادلهٔ (۱۲.۶) آمده‌است هم‌شامل‌انرژی برهم‌کنش میان رساناهای مختلف است وهم‌شامل خود ـ انرژیهای بارهررسانای جداگانه. اگرتنها یك رسانا وجود داشته باشد، خود ـ انرژی آن، $U=1/2\, Q_1\varphi_1$، ناشی از برهم‌کنش بارهای گردهم آمده برروی آن رسانا خواهد بود. ولی دربه‌دست آوردن معادلهٔ (۶.۶)، هریك ازبارهای نقطه‌ای را به‌صورت یك واحد درنظر گرفتیم؛ پس دراین معادله انرژی لازم برای تشکیل بارهای نقطه‌ای از نموهای کوچکتر بار، یعنی به‌اصلاح خود ـ انرژی بارهای نقطه‌ای، منظورنشده است. هرگاه بار را یك نقطهٔ ریاضی فرض‌کنیم و بخواهیم خود ـ انرژی آن را محاسبه‌کنیم ، نتیجه بینهایت می‌شود؛ اما این انرژی در فرمولبندی قانون‌کولن برای نیروی میان بارهای نقطه‌ای منظورنشده است، ودراینجا نیزنبایدآن را به‌حساب آوریم. می‌توان‌نشان دادکه‌از معادلهٔ (۱۲.۶) درحد،هنگامی که رساناها خیلی کوچك می‌شوند و به‌سمت بارهای « نقطه‌ای » میل می‌کنند، همان نتیجهٔ قبلی به دست می‌آید. برای این منظور پتانسیل jامین رسانا را می‌توان به صورت مجموع دو جمله نوشت

$$\varphi_j=\varphi_{j1}+\varphi_{j2} \qquad (۱۳.۶)$$

که درآن φ_{j1} پتانسیل‌ناشی از بارموجود برروی خود jامین رسانا، و φ_{j2} پتانسیل‌ناشی ازبارموجود برروی سایررساناهاست. پس معادلهٔ (۱۲.۶) می‌شود

$$U=\frac{1}{2}\sum_j Q_j\varphi_{j1}+\frac{1}{2}\sum_j Q_j\varphi_{j2} \qquad (۱۴.۶)$$

اولین جملهٔ این رابطه خود ـ انرژیهـای مختلف رساناها را نشان می‌دهد. خود ـ انرژی هر رسانا، $\frac{1}{2} Q_j \varphi_{j1}$، به‌محیط اطراف آن رسانـا بستگی دارد (زیرا توزیع بار برروی هر رسانا، خودرا بامحیط اطراف تطبیق می‌دهد)؛ به‌علاوه، تنها پتانسیل مربوط به‌رسانای j که ازلحاظ فیزیکی مفهوم‌دارد همان پتانسیل کل φ_j است. ازاینرو، تفکیکی که درمعادلهٔ (۱۴.۶) صورت گرفته‌است به‌طور کلی‌خیلی‌بامعنی نیست. اما اگررساناها به‌قدری کوچك باشندکه ازدید ماکروسکوپی بتوان‌آنهارا به‌صورت بارهای نقطه‌ای درنظر گرفت، آنگاه تغییرتوزیع باربرروی یك «نقطه» نمی‌تواند قابل‌اهمیت باشد وهرخود ـ انرژی رامی‌توان مستقل‌ازمحیط‌اطراف دانست. به‌علاوه، چون‌منظورما ازپتانسیل درنقطهٔ j همان φ_{j2} است، انرژی لازم برای قراردادن تعدادی رسانای بسیارکوچك‌که قبلا باردارشده‌اند، درمکانهای مفروض همان جمع دوم درمعادلهٔ (۱۴.۶) است، که بامعادلهٔ (۶.۶) هم‌ارز است.

۳.۶ چگالی انرژی میدان الکتروستاتیکی

دربخش گذشته، برای‌انرژی الکتروستاتیکی یك‌توزیع باردلخواه عبارتی به‌دست‌آوردیم. این عبارت ، معـادلهٔ (۸.۶)، شامل انتگرال گیری صریح برروی توزیع بار است. امـا می‌توان انرژی الکتروستاتیکی دستگاه‌را به‌نحودیگری نیز بیان‌کرد، واین روش غالباًمفید است. بنابراین،بایك تبدیل‌ریاضی(انتگرال گیری جزءبه‌جزء)،معادلهٔ(۸.۶) را به‌انتگرالی تبدیل می کنیم که دربرگیرندهٔ بردارهای میدان $\mathbf{E}$ و $\mathbf{D}$ی دستگاه باشد.

مجدداًتوزیع باردلخواهی‌را درنظرمی گیریم که باچگالیهای ρ و σ مشخص می‌شود. برای سهولت فرض می کنیم که دستگاه بـارکراندار است، یعنی می‌توانیم سطح بسته‌ای باابعاد متناهی رسم کنیم که همهٔ بارهای آزاد را دربربگیرد. به‌علاوه، فرض می کنیم که همهٔ چگالیهای سطحی بار، σ، برروی سطوح رساناها قرار گرفته باشند. این فرض در واقع هیچگونه محدودیتی ایجاد نمی‌کند، زیرا چنانچه چگالی سطحی بار در فصل مشترك دو دی‌الکتریك واقع باشد، می‌توان آن را اندکی گسترش داد و سپس آن را به‌صورت یك چگالی حجمی ρ درنظر گرفت. چگالیهای ρ و σ به‌جا به‌جایی الکتریکی وابسته‌اند؛ در تمامی نواحی دی‌الکتریك داریم

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$$

وبرروی سطوح رساناها[1]

$$\sigma = \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$$

---

۱. دراینجا ما ازدو روش بررسی مسئلهٔ رسانا، که در بخش ۷.۴ شرح داده شدند، روش اول‌را اختیار می کنیم.

پس رابطهٔ (۸.۶) به‌صورت زیردرمی‌آید

$$U=\frac{1}{2}\int_V \varphi\,\nabla\cdot\mathbf{D}\,dv+\frac{1}{2}\int_S \varphi\,\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\,da \qquad (۱۵.۶)$$

دراینجا انتگرال حجمی روی قسمتی ازفضاکه درآن $\nabla\cdot\mathbf{D}$ صفر نیست گرفته می‌شود، و این ناحیه‌ای است خارج از رساناها. انتگرال سطحی بر روی سطوح رساناها گرفته می‌شود.

در انتگرال اول در معادلهٔ (۱۵.۶)، انتگرالده را می‌توان با استفاده از یکی از اتحادهای برداری‌که تاکنون چندین بار به‌کاربرده‌ایم [معادلهٔ (۷.۱.۱) ازجدول ۱.۱] به‌صورت زیرنوشت

$$\varphi\nabla\cdot\mathbf{D}=\nabla\cdot\varphi\mathbf{D}-\mathbf{D}\cdot\nabla\varphi$$

از دوانتگرال حجمی که ازاین تبدیل به‌دست می‌آیند، اولی‌را با به‌کاربردن قضیهٔ واگرایی به‌یك انتگرال سطحی تبدیل‌می‌کنیم. بالاخره باتوجه‌به‌اینکه $\mathbf{E}=-\nabla\varphi$، معادلهٔ (۱۵.۶) را می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$U=\frac{1}{2}\int_{S+S'}\varphi\,\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}'\,da+\frac{1}{2}\int_V \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,dv+\frac{1}{2}\int_S \varphi\,\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\,da \qquad (۱۶.۶)$$

این معادله را می‌توان تاحد زیادی ساده‌کرد. سطح $S+S'$ که انتگرال اول از معادلهٔ (۱۶.۶) باید برروی آن حساب شود، تمامی سطحی است‌که حجم V را محصور کرده است. این سطح متشکل است از S (سطوح تمام رساناهای موجود دردستگاه) و همچنین S' (سطحی‌که دستگاه‌را ازسمت خارج محصور کرده‌است ومی‌توان آن‌را دربینهایت‌فرض کرد). درهردوی‌این سطوح‌بردارعمود $\mathbf{n}'$ به سمت خارج ازحجم V خواهدبود. درانتگرال آخری بردارعمود $\mathbf{n}$ به‌سمت خارج رسانا، یعنی به‌سمت داخل حجم V است. پس دو انتگرال سطحی برروی سطح S همدیگر را خنثی می‌کنند. حال نشان خواهیم داد که انتگرال برروی سطح S' نیزصفرمی‌شود.

اگرتوزیع بارمفروض، که دلخواه ولی‌کراندار است، مقداری بارخالص داشته باشد، آنگاه درفواصل زیاد از دستگاه بار، پتانسیل به‌نسبت عکس فاصله کاهش می‌یابد، یعنی به صورت r^{-1}. همچنین $\mathbf{D}$ متناسب با r^{-2} کاهش می‌یابد. مساحت یك سطح بسته که ازنقطه‌ای به‌فاصلهٔ r می‌گذرد با r^2 متناسب است. پس مقدار انتگرال برروی S'، که سطح محصورکنندهٔ دستگاه در فاصلهٔ r است، با r^{-1} متناسب است و هنگامی که S' به‌بینهایت برده شود مقداراین انتگرال صفرمی‌شود.

اگرمقدار بار خالص توزیع بارصفر باشد، درآن صورت پتانسیل در فواصل دور

مانند یك چند قطبی رفتارمی‌کند و سریعتر از r^{-1} کاهش می‌یابد. دراین حال نیز می‌توان دیدکه انتگرال برروی S' صفرمی‌شود. پس برای انرژی الکتروستاتیکی داریم

$$U=\frac{1}{2}\int_V \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,dv \qquad (۱۷.۶)$$

که درآن انتگرال برروی حجمی ازدستگاه گرفته می‌شودکه خارج ازرساناها واقع است، یعنی برروی دی‌الکتریکهای مختلف موجود در دستگـاه. البته انتگرال گیری را می‌توان به‌تمامی فضا گسترش داد، زیرا میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ درداخل رساناها صفر است. چنانچه این فرمولبندی برای میدانهایی‌که بخشی ازآنها دراثر بارهای نقطه‌ای به‌وجود آمده‌اند به‌کاررود، لازم‌است‌که «خود- انرژی» بینهایت‌این بارهارا صریحاً تفریق‌کنیم. (مسئلهٔ ۷.۶)

انرژی الکتروستاتیکی دستگاه الکتریکی درکجا قرار دارد؟ این سؤالی است‌که مشخص‌کردن معنای دقیق‌آن مشکل است، باوجود این، برای سهولت می‌توان تصورکرد که انرژی درمیدان الکتریکی ذخیره‌شده است. معادلهٔ (۱۷.۶) نشان‌می‌دهدکه چنین‌روشی دست‌کم نامعقول نیست، وعلاوه برآن این معادله مستلزم آن است‌که برای توزیع انرژی چگالیی برابر با $\frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}$ درواحد حجم درنظربگیریم. بدین ترتیب به‌مفهوم چگالی انرژی درمیدان الکتروستاتیکی می‌رسیم

$$u=\frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} \qquad (۱۸.۶\ \text{الف})$$

چون معادلهٔ (۱۷.۶) را برای دی‌الکتریکهای خطی به‌دست‌آورده بودیم، هردی‌الکتریك بایك گذردهی ثابت ε مشخص می‌شود. وانگهی، بحث فصلهای قبل فقط به‌دی‌الکتریکهای همسانگرد محدود بود. ازاین‌رو، معادلهٔ (۱۸.۶ الف) معادل است با

$$u=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon} \qquad (۱۸.۶\ \text{ب})$$

۴.۶ انرژی دستگاه رساناهای باردار . ضرایب پتانسیل

دربخش ۱۲.۳ نشان داده شدکه یك رابطهٔ خطی میان پتانسیلها و بارهای مجموعه‌ای از رساناها وجود دارد. درواقع، دردستگاهی مرکب از N رسانا، پتانسیل هریك ازرساناها بامعادلهٔ زیرداده می‌شود

$$\varphi_i=\sum_{j=1}^{N} p_{ij}Q_j \qquad [۵۲.۳]$$

معادلهٔ (۵۲.۳) را برای N رسانا در خلأ اثبات کردیم، لیکن واضح است که وقتی دی‌الکتریکهایی نیزدردستگاه حضورداشته باشند، مشروط به‌آنکه این دی‌الکتریکهاخطی وبدون بارخارجی باشند، این استدلال باز هم صادق خواهد بود. ضریب p_{ij}، آن قسمت ازپتانسیل i امین رساناست که ازوجود بار واحد برروی رسانای jام ناشی می‌شود. این ضرایب معمولا ضرایب پتانسیل نامیده می‌شوند.

در بخش ۲.۶ عبارتی برای انرژی الکتروستاتیکی مجموعه‌ای از N رسانای باردار، یعنی معادلهٔ (۱۲.۶)، به‌دست آوردیم. از ترکیب این نتیجه با معادلهٔ (۵۱.۳) معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} p_{ij}Q_iQ_j \qquad (۱۹.۶)$$

ازاین‌رو، انرژی تابع درجه دومی است ازبار رساناهای مختلف.

چند حکم کلی‌را می‌توان درمورد ضرایب p_{ij} بیان کردکه مهمترین آنها عبارت‌اند از (۱) $p_{ij}=p_{ji}$، (۲) همهٔ p_{ij}ها مثبت‌اند، (۳) j هرچه باشد $p_{ii}-p_{ij}\geqslant 0$. اولین حکم ازمعادلهٔ (۱۹.۶) نتیجه می‌شود. در این معادله U برحسب $U(Q_1 \ldots Q_N)$ بیان شده است؛ بنابراین

$$dU=\left(\frac{\partial U}{\partial Q_1}\right)dQ_1+\cdots+\left(\frac{\partial U}{\partial Q_N}\right)dQ_N$$

هرگاه فقط dQ_1 تغییر کند، آنگاه

$$dU=\left(\frac{\partial U}{\partial Q_1}\right)dQ_1=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}(p_{1j}+p_{j1})Q_j\,dQ_1 \qquad (۲۰.۶)$$

این افزایش انرژی الکتروستاتیکی را می‌توان مستقیماً ازمعادلهٔ (۲.۶) نیزبه‌دست آورد. باآوردن dQ_1 ازمنبعی باپتانسیل صفر، نتیجه می‌شود

$$dU=dW=\varphi_1\,dQ_1=\sum_{j=1}^{N}p_{1j}Q_j\,dQ_1 \qquad (۲۱.۶)$$

معادلات (۲۰.۶) و (۲۱.۶) به‌ازای تمام مقادیرممکن Q_j باید معادل باشند، واین مستلزم آن است که

$$\frac{1}{2}(p_{1j}+p_{j1})=p_{1j}$$

و یا

$$p_{j1} = p_{1j} \qquad (۲۲.۶)$$

حکم دوم، که بنا به آن پتانسیل ناشی از یك بار خالص مثبت، مثبت است، تقریباً به‌طور شهودی روشن است اما اثبات دقیق آن دشوار. درستی سومین حکم از استدلال زیر نتیجه می‌شود: فرض کنید رسانای i بار مثبت Q_i دارد و بقیهٔ رساناها بی‌بارند. چون رسانای j $(j \neq i)$ بی‌بار است، پس تعداد خالص خطوط جابه‌جایی که این رسانا را ترك می‌کنند صفر خواهد بود. دو حالت زیر را جداگانه بررسی می‌کنیم: (الف) هیچ خط جابه‌جایی به‌رسانای j وارد یا از آن خارج نمی‌شود؛ در این صورت نتیجه می‌گیریم که این رسانا در یك ناحیهٔ هم‌پتانسیل قرار دارد، یعنی با یك رسانای دیگر حفاظت شده است. به‌عنوان مثال، این رسانا ممکن است درون رسانای i قرار گرفته و پتانسیل آن برابر φ_i باشد. درچنین شرایطی $p_{ij} = p_{ii}$. هر گاه رسانای j در درون رسانای k قرار داشته باشد، آنگاه $p_{ik} = p_{ij}$ و بلافاصله ما توجه خود را به‌رسانای k معطوف می‌کنیم. (ب) تعداد خطوط شار جابه‌جایی که وارد رسانای j می‌شوند با تعداد خطوط خروجی از آن برابرند. منشأ شار جابه‌جایی بار، رسانای i است؛ پس باید بتوان یك خط شار را که به‌رسانای j وارد می‌شود به‌طرف عقب دنبال کنیم (شاید از طریق رساناهای دیگر) تا به رسانای i برسیم. بنابراین، i در پتانسیل بالاتری از j قرار دارد، یعنی

$$\varphi_i > \varphi_j \qquad (Q_i \text{ مثبت است})$$

یا

$$p_{ii} > p_{ij} \qquad (۲۳.۶)$$

که به‌این معادله باید علامت تساوی را اضافه کرد تا حالت (الف) را نیز شامل شود.

مفید بودن ضرایب p_{ij} را می‌توان با ذکر یك مثال ساده نشان داد. می‌خواهیم پتانسیل یك رسانای کروی بی‌بار را که یك بار نقطه‌ای q به‌فاصلهٔ r از مرکز آن قرار دارد پیدا کنیم. در اینجا $r > R$ و R شعاع کره رساناست. بار نقطه‌ای و کرهٔ رسانا را به‌عنوان دستگاهی مرکب از دو رسانا در نظر می‌گیریم و از تساوی $p_{12} = p_{21}$ استفاده می‌کنیم. اگر کره بار Q داشته باشد و «نقطه» بی‌بار باشد، پتانسیل «نقطه» برابر $Q/4\pi\varepsilon_0 r$ خواهد بود؛ از این رو،

$$p_{12} = p_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

آشکار است که وقتی «نقطه» بار q داشته باشد و کره بی‌بار باشد، پتانسیل کره برابر $q/4\pi\varepsilon_0 r$ خواهد بود.

۵.۶ ضرایب ظرفیت و ضرایب القا

معادلهٔ (۵۲.۳)، که درفصل ۳ به‌دست‌آمد ودربخش ۴.۶ دوباره به‌آن‌اشاره شد، دستگاهی از N معادلهٔ خطی‌است‌که پتانسیل رساناهارا برحسب بارهایشان بیان می‌کند. این‌دستگاه معادلات را می‌توان برای تعیین بارهای Q_i حل‌کرد تا رابطهٔ زیر به‌دست آید

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\varphi_j \qquad (۲۴.۶)$$

که درآن c_{ii} ضریب ظرفیت و c_{ij} $(i \neq j)$ ضریب القا نامیده می‌شود. حل واقعی معادلهٔ (۵۲.۳)، که ضرایب c را برحسب p_{ij}ها بیان‌می‌کند، می‌تواند برای مثال‌با وارونه‌کردن ماتریس (بااستفاده از دترمینانها) انجام شود.

خواص cها ازخواص مربوط به pها، که قبلا درباره‌شان صحبت‌شدنتیجه می‌شوند. بدین‌ترتیب: (۱) $c_{ij} = c_{ji}$، (۲) $c_{ii} > 0$، (۳) ضرایب‌القاصفرویامنفی‌اند (مسئلهٔ۱۰.۶).

می‌توان معادله‌های (۲۴.۶) و (۱۲.۶) را باهم ترکیب‌کرد تا رابطهٔ دیگری برای انرژی الکتروستاتیکی دستگاهی مرکب از N رسانا به‌دست آید

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} c_{ij}\varphi_i\varphi_j \qquad (۲۵.۶)$$

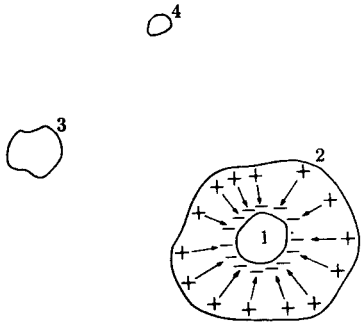
۶.۶ خازنها

دو رسانا که بتوانندبارهای‌مساوی‌ومختلف‌العلامه $(\pm Q)$ رادرخود ذخیره‌کنند، واختلاف پتانسیل میان‌آنها به‌باردار‌بودن سایررساناهای دستگاه بستگی نداشته‌باشد، تشکیل خازن می‌دهند. این بستگی نداشتن به‌بارهای دیگر به‌معنی‌آن است‌که یکی‌ازاین دو رسانا مانند سپری رسانای دیگررا حفاظت می‌کند. به‌عبارت دیگر، پتانسیلی که بارهای دیگردرهریک از رساناهای این زوج رسانا ایجاد می‌کنند باید یکسان باشد. چنین وضعی در شکل ۱.۶ نشان داده شده است ودرآن رساناهای ۱ و۲ خازنی ازاین نوع را تشکیل می‌دهند. به‌طور کلی، اگردو رسانای ۱ و۲ خازنی تشکیل بدهند، می‌توان نوشت

$$\varphi_1 = p_{11}Q + p_{12}(-Q) + \varphi_x$$

$$\varphi_2 = p_{12}Q + p_{22}(-Q) + \varphi_x \qquad (۲۶.۶)$$

که در آن $\pm Q$ بارهای ذخیره شده و φ_x پتانسیل مشترکی است‌که سایر بارها ایجاد می‌کنند.



شکل ۱.۶ رساناهای ۱ و ۲ تشکیل یك‌خازن می‌دهند. در اینجا $p_{۱۳}=p_{۲۳}$، زیرا مطابق قانون گاؤس، وقتی ۱ و ۲ بدون بارند باید صرفنظر از بار روی ۳ ، پتانسیل یکسانی داشته باشند. به‌همین ترتیب $p_{۱۴}=p_{۲۴}$.

ازتفریق معادلات (۲۶.۶) نتیجه می‌شود

$$\Delta\varphi=\varphi_{۱}-\varphi_{۲}=(p_{۱۱}+p_{۲۲}-۲p_{۱۲})Q \qquad (۲۷.۶)$$

بنابراین اختلاف پتانسیل میان دو رسانای یك خازن متناسب است بابار ذخیره شده، Q. (بدیهی است که بارکل ذخیره شده صفراست، لیکن برحسب قرارداد، مقدار مطلق بار بر روی هریك ازدو رسانا بارخازن نامیده می‌شود). معادلهٔ (۲۷.۶) را می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$Q=C\,\Delta\varphi \qquad (۲۸.۶)$$

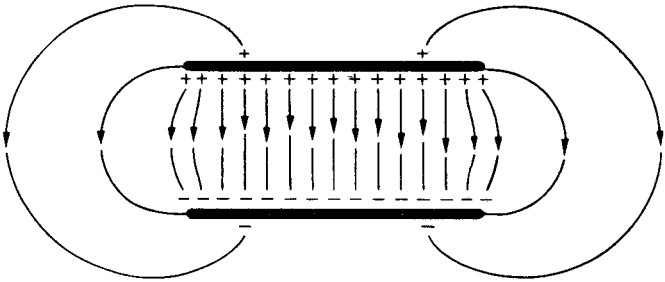
که درآن $C=(p_{۱۱}+p_{۲۲}-۲p_{۱۲})^{-۱}$ ظرفیت خازن نام‌دارد. بدیهی‌است‌که C مقدار بار ذخیره شده به ازای واحد اختلاف پتانسیل است، و در دستگاه mks برحسب کولن بر ولت، ویا فاراد ($۱\mathrm{F}\equiv ۱\mathrm{C/V}$) اندازه‌گیری می‌شود.

با به‌کاربردن نتایج بخشهای گذشتهٔ این‌فصل، انرژی‌خازن باردار را می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$U=\frac{۱}{۲}C(\Delta\varphi)^{۲}=\frac{۱}{۲}Q\,\Delta\varphi=\frac{۱}{۲}\frac{Q^{۲}}{C} \qquad (۲۹.۶)$$

درصورتی‌که رساناهای تشکیل دهندهٔ یك‌خازن اشکال هندسی ساده‌ای داشته باشند، ظرفیت خازن‌را می‌توان به‌روش تحلیلی به‌دست‌آورد. از این‌رو، مثلا، محاسبهٔ ظرفیت دو صفحهٔ رسانای موازی، دواستوانهٔ هم‌محور، دوکرهٔ هم مرکز، یایك استوانه و یك صفحه راحت است. ظرفیت خازنی متشکل از دوصفحهٔ موازی (شکل ۲.۶) را در اینجا به‌دست می‌آوریم، سایرموارد ساده به‌صورت تمرین درانتهای فصل آمده است.

میدان الکتریکی میان دوصفحهٔ موازی به‌غیر از میدان حاشیه‌ای در لبهٔ صفحات،



شکل ۲.۶ میدان الکتریکی میان دوصفحهٔ موازی بابارهای مخالف وابعاد متناهی.

یکنواخت است. یك‌خازن ایده‌آل باصفحات موازی خازنی‌است که‌فاصلهٔ d میان صفحات آن درمقایسه باابعاد این صفحات خیلی کوچك باشد؛ پس درخـازن ایده‌آل می‌توانیم از میدان حاشیه‌ای صرفنظر کنیم. چنانچه فضای میان دوصفحهٔ خازن از دی‌الکتریکی با گذر-دهی ε پرشده باشد، میدان الکتریکی میان صفحات برابرخواهد بود با

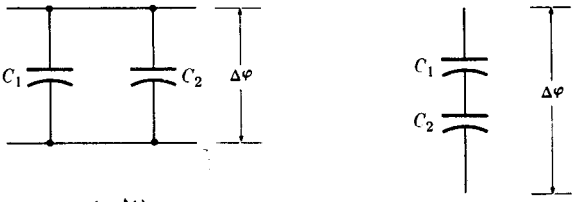
$$E=\frac{1}{\varepsilon}\sigma=\frac{Q}{\varepsilon A}$$

که درآن A مساحت هریك ازصفحات است. اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi=Ed$ است. درنتیجه ظرفیت این خازن عبارت است از

$$C=\frac{Q}{\Delta\varphi}=\frac{\varepsilon A}{d} \qquad (۳۰.۶)$$

وقتی خازنی‌را به‌عنوان جزئی ازیك مدار الکتریکی تصویرمی‌کنند، معمولا آن را باعلامت —| |— نشان‌می‌دهند. دویاچند خازن را می‌توان به‌همدیگرمتصل کرد. برای‌این‌کار یکی‌ازرساناهای‌خازن‌اول‌را به‌یك‌رسانای‌خازن‌دوم وصل‌می‌کنیم، وبه‌همین‌ترتیب‌تا به‌آخر. راههای‌ممکن برای اتصال خازنها عبارت‌اند از اتصال موازی (شکل ۳.۶ الف) واتصال متوالی (شکل ۳.۶ ب) . پس ازاتصال خازنها به‌یکدیگرمعمولا بهتراست ظرفیت معادل ترکیب اتصالهارا معین‌کنیم. درمورد اتصال موازی، همان ولتاژ $\Delta\varphi$ که دردوسرهریك از خازنها وجود دارد در دوسرخازن معادل نیزموجود است، پس ظرفیت معادل بارابطهٔ‌زیر داده می‌شود

$$C=\frac{Q_{\text{کل}}}{\Delta\varphi}=C_1+C_2 \qquad (۳۱.۶ \text{ الف})$$



(الف) (ب)

شکل ۳.۶ (الف) اتصال موازی و (ب) اتصال متوالی دوخازن.

درصورتی‌که دوخازن بدون بار به‌طورمتوالی بسته وسپس باردار شوند، بقای بار ایجاب می‌کند که هریك ازخازنها باریکسانی به‌دست‌آورند. ازاین رو میان ظرفیت خازن معادل C با C_1 و C_2 رابطهٔ زیربرقرار است

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2} \qquad (۳۱.۶ب)$$

۷.۶ نیروها و گشتاور نیروها

تاکنون دراین فصل روشهای مختلفی‌را برای محاسبهٔ انرژی الکتروستاتیکی دستگاه بار بررسی کردیم. حال نشان خواهیم داد که چگونه نیروی وارد بریکی از اشیای واقع در دستگاه بار را می‌توان بادانستن این انرژی الکتروستاتیکی محاسبه کرد. فرض کنید بادستگاهی منزوی مرکب از قسمتهای متعدد (رساناها، بارهای نقطه‌ای، دی‌الکتریکها) سروکارداریم ویکی از این قسمتها تحت تأثیرنیروهای الکتریکی وارد برآن به‌اندازهٔ $d\mathbf{r}$ جابه‌جا می‌شود. کاری‌که نیروی الکتریکی برروی دستگاه در این شرایط انجام می‌دهد عبارت است از

$$dW=\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

$$=F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz \qquad (۳۲.۶)$$

چون دستگاه منزوی‌است، این‌کار درمقابل صرف مقداری انرژی الکتروستاتیکی U انجام می‌شود؛ به‌عبارت دیگر، طبق معادلهٔ (۱.۶)

$$dW=-dU \qquad (۳۳.۶)$$

ازترکیب معادلات (۳۲.۶) و (۳۳.۶) نتیجه می‌شود

$$-dU=F_x dx+F_y dy+F_z dz$$

و

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad (۳۴.۶)$$

باعباراتی مشابه برای F_y و F_z. یعنی، دراین مورد $\mathbf{F}$ نیرویی پایستار است، و داریم $\mathbf{F} = -\nabla U$.

هرگاه جسم مورد بررسی به‌نحوی مقید باشد که درحول محوری دوران کند، آنگاه به‌جای معادلهٔ (۳۲.۶) می‌توان ازرابطهٔ زیراستفاده کرد

$$dW = \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} \qquad (۳۵.۶)$$

که درآن $\vec{\tau}$ گشتاورنیروی الکتریکی و $d\vec{\theta}$ جابه‌جایی زاویه‌ای است. بانوشتن $\vec{\tau}$ و $d\vec{\theta}$ برحسب مؤلفه‌های آنها (τ_1, τ_2, τ_3) و $(d\theta_1, d\theta_2, d\theta_3)$ وترکیب معادلات (۳۳.۶) و (۳۵.۶)، نتیجه می‌گیریم که

$$\tau_1 = -\frac{\partial U}{\partial \theta_1} \qquad (۳۶.۶)$$

و به‌همین‌ترتیب برای سایر مؤلفه‌ها.

بدین ترتیب به‌هدف خود رسیده‌ایم

$$F_x = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_Q \qquad (۳۴.۶ \text{ الف})$$

$$\tau_1 = -\left(\frac{\partial U}{\partial \theta_1}\right)_Q \qquad (۳۶.۶ \text{ الف})$$

درمعادلات فوق شاخص پایین Q اضافه شده است تا نشان دهدکه دستگاه منزوی است و درنتیجه بارکل آن دراثنای جا به‌جایی $d\mathbf{r}$ یا $d\vec{\theta}$ ثابت می‌ماند. برای استفادهٔ بیشتر از این روش ضروری است که U به‌صورت تحلیلی بیان شود، وبستگی خاص U به مختصهٔ x یا θ_1 نیزباید دردست باشد. به‌زودی برای نمایش مفیدبودن این روش مثالی خواهیم آورد.

اما معادلات (۳۴.۶ الف) و (۳۶.۶ الف) تمام موارد مورد توجه را دربر نمی‌گیرند، زیرا همان طورکه هنگام اثبات آنها اشاره شد، این معادلات محدودند به‌دستگاههای منزویی که در آنها بارثابت می‌ماند. در گروهی دیگر از مسائل مهم، کلیهٔ بارها برروی سطوح رساناها قرار می‌گیرند، واین رساناها بامنابع خارجی انرژی (مثلا

باتریها) در پتانسیلهای ثابتی نگه داشته می‌شوند. دراینجا نیز مجدداً می‌توانیم به‌یکی از قسمتهای دستگاه مجال دهیم تاتحت تأثیرنیروهای الکتروستاتیکی وارد برآن حرکت کند، وکارانجام شده (دراین حالت به‌وسیلهٔ دستگاه و باتریها) بازهم از طریق معادلهٔ (۳۲.۶) به‌نیرو مربوط خواهد شد. اماکار دراین حالت عبارت است از

$$dW = dW_b - dU \qquad (۳۷.۶)$$

که درآن dW_b کاری است که باتریهاانجام می‌دهند.قبل ازآنکه برای این مورد بتوانیم رابطه‌ای که U را به‌نیروی وارد برقسمتی ازدستگاه مربوط می‌کند به‌دست آوریم، لازم است که dW_b را ازمعادلهٔ (۳۷.۶) حذف کنیم.

انرژی الکتروستاتیکی U برای دستگاهی‌ازرساناهای باردار،قبلا بامعادلهٔ (۱۲.۶) داده شده است. اکنون اگرقسمتی ازدستگاه، درحالی که پتانسیلهای کلیهٔ رساناهای‌دستگاه همچنان ثابت‌اند جابه‌جا شود، خواهیم داشت

$$dU = \frac{1}{2}\sum_j \varphi_j \, dQ_j \qquad (۳۸.۶)$$

وانگهی،کاری که باتریها انجام می‌دهند، dW_b، برابراست باکاری که لازم است تا هریك ازنموهای بار dQ_j ازپتانسیل صفربه‌پتانسیل مربوط به رسانای موردنظر برسند. با استفاده ازمعادلهٔ (۲.۶)، این مقدارکاربرابراست با

$$dW_b = \sum_j \varphi_j \, dQ_j \qquad (۳۹.۶)$$

بنابراین

$$dW_b = 2dU \qquad (۴۰.۶)$$

بابه‌کاربردن این‌معادله برای حذف dW_b ازمعادلهٔ (۳۷.۶) وترکیب نتیجهٔ حاصل‌بامعادلهٔ (۳۲.۶)، خواهیم داشت

$$dU = F_x \, dx + F_y \, dy + F_z \, dz$$

یا

$$F_x = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_\varphi \qquad (۴۱.۶)$$

دراینجا شاخص پایین φ برای آن به‌کاررفته است که نشان دهد دراثنای جابه‌جایی مجازی $d\mathbf{r}$، همهٔ پتانسیلها ثابت نگه داشته می‌شوند. به‌نحوی مشابه می‌توان اثبات کرد که

$$\tau_1 = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta_1}\right)_\varphi \qquad (۴۲.۶)$$

به‌منظور ذکر مثالی درمورد روش انرژی، مسئلهٔ زیر را بررسی می‌کنیم. خازنی باصفحات موازی در دست‌است که فاصلهٔ میان صفحات آن d وناحیهٔ‌میان صفحات‌آن بایك قطعهٔ دی‌الکتریك جامد با گذردهی ε پرشده است. ابعاد هرصفحهٔ خازن عبارت‌اند ازطول l وعرض w. صفحه‌ها دراختلاف پتانسیل ثابت $\Delta\varphi$ نگه داشته شده‌اند. قطعهٔ دی‌الکتریك درامتداد l آنقدر بیرون کشیده می‌شود که فقط طول x آن درمیان صفحات باقی بماند (شکل ۴.۶)، نیرویی که می‌کوشد قطعهٔ دی‌الکتریك‌را سرجایش برگرداند محاسبه کنید.

جواب: انرژی دستگاه را می‌توان باهر یك از چند روش مختلف محاسبه کرد. مثلا، چون $E = \Delta\varphi/d$ در همه جای فضای میان صفحه ها یکسان است، از رابطهٔ زیر استفاده می کنیم

$$U = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon E^2\, dv$$

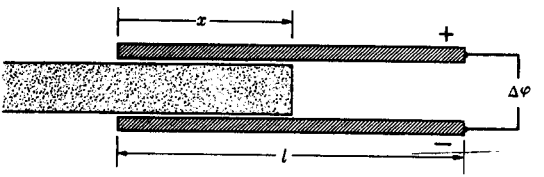
که فضایی که انتگرال برروی آن محاسبه می‌شود فقط لازم است که شامل جاهایی باشد که درآنجاها $E \neq 0$ است. باصرفنظر کردن ازاثرات حاشیه‌ای درلبه‌های خازن، خواهیم داشت

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{\Delta\varphi}{d}\right)^2 dwx + \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\Delta\varphi}{d}\right)^2 dw(l-x)$$

ازمعادلهٔ (۴۱.۶) نیرورا می‌توان محاسبه کرد

$$F_x = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_0)w\frac{(\Delta\varphi)^2}{d} = \frac{1}{2}(K-1)\varepsilon_0 E^2 A$$

$$U = \tfrac{1}{2}\int_V \epsilon E^2\, dv,$$



شکل ۴.۶ قطعهٔ دی‌الکتریك که قسمتی از آن ازمیان دو صفحهٔ باردار بیرون کشیده شده است.

که درجهت افزایش x است.

موردی که در آن صفحات منزوی‌اند (بارثابت Q) درمسائل ۱۹.۶ و ۲۴.۶ بررسی می‌شود.

*۸.۶ نیروی وارد برتوزیع بار

این فصل بدون بحث مختصری دربارهٔ محاسبهٔ نیروی الکتریکی بااستفاده از اصول اولیه، یعنی باانتگرال گیری مستقیم کامل نخواهد بود، هرچندکه این روش به‌تفصیل در یکی از فصول گذشته بررسی شده است (بخش ۱۰.۴). نکتهٔ مهمی که باید به‌یاد داشت این است که در محاسبهٔ نیروی وارد برهر عنصربار، dq، میدان الکتریکی $\mathbf{E}_s$ حاصل از خود این عنصر باید ازمیدان الکتریکی کل کم شود

$$d\mathbf{F}=(\mathbf{E}-\mathbf{E}_s)\,dq \qquad (۴۳.۶)$$

از این‌رو برای مثال، وقتی نیروی وارد بریك بار نقطه‌ای را محاسبه می‌کنیم، میدان الکتریکی بینهایتی که خود این بار نقطه‌ای تولید می‌کند، باید درمیدان الکتریکی مؤثری که درآن نقطه اثرمی‌کند منظورنشود. تأثیر یك توزیع بار گسترده که بامیدان الکتریکی خودش برهم‌کنش دارد به‌نحوی است که تنشهای داخلی دربارتولید می‌کند، لیکن این تنشها هرگزنمی‌توانند به‌نحوی ترکیب شوندکه یك جابه‌جایی صلب‌درمکان بارایجادکنند.

نیروی‌وارد برجسمی که حاوی چگالی‌سطحی $\sigma(x, y, z)$ است ازترکیب‌معادلات (۵۷.۴) و (۵۸.۴) به‌دست می‌آید

$$\mathbf{F}=\oint_s(\mathbf{E}-\mathbf{E}_s)\sigma\,da \qquad (۴۴.۶)$$

که درآن انتگرال برروی تمامی سطح جسم گرفته می‌شود. میدان $\mathbf{E}_s$ بامعادلهٔ (۶۰.۴) داده می‌شود

$$\mathbf{E}_s=\frac{\sigma}{۲\varepsilon}\mathbf{n} \qquad (۴۵.۶)$$

اگرجسم یك‌رسانا باشد، رابطهٔ ساده‌ای میان‌میدان الکتریکی کل‌درسطح، $\mathbf{E}$، و $\mathbf{E}_s$ وجود خواهد داشت. پس نیروی واردبرهررسانا، همان‌طورکه قبلادر بخش ۱۰.۴ به‌دست‌آورده بودیم، برابر است با

$$\mathbf{F}=\frac{۱}{۲}\oint_s\sigma\mathbf{E}\,da \qquad (\text{الف } ۴۶.۶)$$

یا

$$\mathbf{F}=\oint_s \frac{\sigma^2}{2\varepsilon}\mathbf{n}\, da \qquad (۴۶.۶ \text{ ب})$$

درپایان، نیروی وارد بریك توزیع حجمی بـار را به‌دست می‌آوریم. نیروی وارد بریك عنصر بار ρdv به‌صورت زیر است

$$d\mathbf{F}=(\mathbf{E}-\mathbf{E}_s)\rho\, dv \qquad (۴۷.۶)$$

اما میدان $\mathbf{E}_s$ که عنصرحجمی dv تولیدمی کند متناسب است باخارج قسمت حجم برمجذور یکی ازابعاد مناسب آن عنصر، واین خارج قسمت درحد، وقتی که $dv \to 0$، به‌سمت‌صفر میل می‌کند. از این‌رو $\mathbf{E}_s$ کسر قابل اغماضی از $\mathbf{E}$ است، وبرای نیروی وارد برباری که درحجم V_0 واقع است می‌توان نوشت

$$\mathbf{F}=\int_{V_0} \rho\mathbf{E}\, dv \qquad (۴۸.۶)$$

*۹.۶ تعبیر ترمودینامیکی انرژی الکتروستاتیکی

انرژی‌الکتروستاتیکی دستگاهی ازرساناهای باردار و دی‌الکتریکهارا به‌صورتهای‌مختلف به‌دست آوردیم، به‌خصوص می‌دانیم که

$$U=\frac{1}{2}\int_V \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\, dv \qquad [۱۷.۶]$$

که در آن انتگرال برروی همهٔ دی‌الکتریکها (وازآن جمله خلأ) گرفته می‌شود. طبعاً این سؤال پیش می‌آید که آیا می‌توان U را ازنظر ترمودینامیکی تعبیر کرد، یعنی آیااین انرژی بخشی از انرژی داخلی دستگاه است؟ برای پاسخ دادن به‌این سؤال باید به‌نحوهٔ به‌دست آوردن U بازگردیم، یعنی به‌این نکته که U عبارت است از کاری که باید روی دستگـاه انجام دهیم تا آن را به‌حالت باردار درآوریم. از این‌رو واقعاً U یك جملهٔ مربوط به‌کار است، و مسئله آن است که تحت چه شرایطی یك نموکار را می‌توان بـا یکی از خواص ترمودینامیکی دستگاه یکی دانست.

مطابق قانون اول ترمودینامیك (که بیان کنندهٔ بقای انرژی است)، برای یك‌فرایند برگشت پذیرداریم

$$dE=T\, dS+dW \qquad (۴۹.۶)$$

که درآن dE معرف تغییرانرژی داخلی دستگاه، dS معرف تغییرآنتروپی دستگاه، dW کارانجام شده برروی آن، و T دمای مطلق است. البته کمیت TdS گرمای افزوده شده به‌دستگاه دراثنای فرایند است.

بدیهی است که تنها در یك فرایند بی‌دررو می‌توان نموکار dW را باتغییردرانرژی داخلی dE یکی دانست، یعنی درفرایندی که درآن $dS=0$ باشد. اما دمای دستگاه‌ضمن یك فرایند بی‌دررو عموماً تغییرمی‌کند، وضرایب دی‌الکتریك که توابعی از دما هستند نیز تغییرمی‌کنند. یادآوری‌می‌کنیم که معادلهٔ (۱۷.۶) ازمعادلهٔ (۸.۶) به‌دست‌آمد، وآن‌معادله نیزبااین فرض به‌دست‌آمدکه ضرایب دی‌الکتریك مختلف دراثنای فرایند باردارکردن ثابت‌می‌مانند. ازاین‌رو، دریك‌فرایند بی‌دررو رابطهٔ $dW=dU$ برقرارنیست. بنابراین، بایدخودرا به‌فرایندهای تکدما محدودکنیم، ودرچنین‌فرایندهایی نمی‌توان dW را با dE یکی دانست.

کمیت ترمودینامیکی موسوم به انرژی آزاد هلمهولتز برای یك دستگاه بارابطهٔ $F=E-TS$ تعریف می‌شود. پس از مشتق‌گیری ازاین رابطه و ترکیب نتیجهٔ حاصل بامعادلهٔ (۴۹.۶) نتیجه می‌شود

$$dF=dE-T\ dS-S\ dT$$

$$=-S\ dT+dW \qquad (۵۰.۶)$$

این درست همان معادلهٔ مورد نظرماست. برای یك فرایند تکدما، dF برابر است با dW و dW برابراست با dU؛ ودرنتیجه می‌توان گفت‌که انرژی الکتروستاتیکی عبارت است از انرژی آزاد دستگاه الکتروستاتیکی: $dU=dF$. این انرژی نشان‌دهندهٔ حداکثر کاری است‌که می‌توان بعدها ازمیدان الکتروستاتیکی استخراج کرد.

برای دستگاهی که دردمای ثابت نگه داشته شده است، انرژی آزاد همان نقشی را ایفا می‌کندکه انرژی پتانسیل برای یك دستگاه مکانیکی (یعنی دستگاهی مستقل ازدما).

۱۰.۶ خلاصهٔ مطالب

انرژی پتانسیل الکتروستاتیکی دستگاهی مرکب ازبارهای نقطه‌ای به‌صورت‌کاری‌محاسبه می‌شودکه باید توسط یك عامل خارجی در مقابل نیروهای کولنی میان بارها انجام شود تااینکه پیکربندی مفروض گردهم‌آورده شود. این انرژی پتانسیل‌را می‌توان به‌صورت‌زیر بیان‌کرد

$$U=\frac{1}{2}\sum q_i\varphi_i$$

که درآن φ_j که پتانسیل ناشی ازهمهٔ بارهای دیگر درمکان q_j است، برابراست با

$$\varphi_j = \sum{}' \frac{q_k}{۴\pi\varepsilon_\circ r_{jk}}$$

که دراین جمعبندی جملهٔ $k = j$ منظور نمی‌شود. برای یك توزیع بار کلی، به‌شرط آنکه همهٔ دی‌الکتریکهای موجود خطی باشند، انرژی الکتروستاتیکی به‌صورت زیر درمی‌آید

$$U = \frac{۱}{۲} \int \rho\varphi \, dv$$

که درآن پتانسیل φ عبارت‌است ازپتانسیلی‌که چگالی بارخارجی ρ درحضور محیطهای دی‌الکتریکی تولید می‌کند. (ρ ممکن است بارمتمرکزدریك توزیع‌سطحی بار یابارهای نقطه‌ای را نیز شامل شود.) با انتگرال‌گیری جزء به‌جزء ، انرژی دی‌الکتریکهای خطی به‌انتگرال زیرتبدیل می‌شود

$$U = \int u \, dv$$

که این انتگرالی است برروی چگالی انرژی میدان الکتریکی، یعنی

$$u = \frac{۱}{۲} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{۱}{۲} \varepsilon E^۲ = \frac{۱}{۲} \frac{D^۲}{\varepsilon}$$

هنگامی که این فرمولبندی برای بارهای نقطه‌ای به کار می‌رود، «خود ـ انرژی» نامتناهی آنها باید تفریق شود.

۱. وقتی تمام بار به‌صورت یك توزیع سطحی برروی رساناها، که سطح این رساناها سطوحی هم پتانسیل‌اند قرارداشته باشد، انرژی الکتروستاتیکی به‌صورت خاص زیربیان می‌شود

$$U = \frac{۱}{۲} \sum Q_i \varphi_j$$

سپس نتیجه می‌شودکه ضرایب موجود درتابعهای خطی

$$\varphi_i = \sum p_{ij} Q_j$$

ودرتابعهای معکوس، یعنی، در تابعهای

$$Q_i = \sum c_{ij}\varphi_j$$

درشرایط زیرصدق می‌کنند

$$p_{ij} = p_{ji}, \quad c_{ij} = c_{ji}$$

(به‌علاوه، $p_{ii} \geqslant p_{ij} > 0$ و $c_{ii} > 0 \geqslant c_{ij}$.)

۲. در حالت خاص، وقتی دو رسانا یك خازن تشکیل می‌دهند

$$U = \frac{1}{2} Q\, \Delta\varphi$$

با

$$Q = C\, \Delta\varphi$$

برای خازنی باصفحات موازی

$$C = \frac{\varepsilon A}{d}$$

۳. نیروی الکتریکی وارد برقسمتی از یك دستگاه منزوی ، که هر رسانای آن بـاری ثابت دارد، برابراست بامنفی شیب انرژی الکتروستاتیکی

$$F_x = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_Q$$

درصورتی که‌دستگاه منزوی نباشد، ولی‌درعوض پتانسیل هررسانا به‌وسیلهٔ یك‌عامل‌خارجی (باتری) ثابت نگه داشته شده باشد، نیرو بارابطهٔ زیربیان می‌شود

$$F_x = +\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_\varphi$$

مسائل

۱.۶ یك الکترون سریع (بـاانرژی جنبشی 3×10^{-17} J) به فضایی که دارای میدان الکتریکی یکنواخت $E = 1000\,\mathrm{V/m}$ است واردمی‌شود. میدان موازی راستای‌حرکت الکترون ودرجهتی است که حرکت‌آنرا کند می‌کند. الکترون قبل ازآنکه به‌حال سکون

درآید چه فاصله‌ای را طی می‌کند؟ (1.60×10^{-19}C = بارالکترون)

۲.۶ یك پوستهٔ دی‌الکتریك کروی (به‌شعاع داخلی a، شعاع خارجی b، وثابت دی‌الکتریك K) ویك بارنقطه‌ای q به‌فاصلهٔ بی‌نهایت از یکدیگر قرار دارند. بار نقطه‌ای را به‌مرکز پوستهٔ دی‌الکتریك منتقل می‌کنیم. تغییرانرژی دستگاه را محاسبه کنید.

۳.۶ دوقطبی ql، عمود برصفحه‌ای رسانا قرارگرفته است به‌طوری که بار $q-$ درفاصلهٔ d وبار $q+$ درفاصلهٔ $d+l$ ازصفحه واقع است. انرژی الکتروستاتیکی این دستگاه‌بار را محاسبه کنید. (راهنمایی: انرژی دستگاهی متشکل از بارهای واقعی به‌علاوهٔ بارهـای تصویری درخلأ را درنظر بگیرید. بارهای تصویری‌را طوری انتخاب کنیدکه میدان Eی درست‌را درجلوی صفحه تولید کنند.)

۴.۶ یك پوستهٔ کروی باردار به‌شعاع R، وچگالی بارسطحی یکنواخت σ_0 مفروض‌است. خود ـ انرژی این توزیع باررا به‌دوطریق تعیین کنید: (الف) باانتگرال گیری مستقیم از معادلهٔ (۸.۶)؛ (ب) باانتگرال‌گیری برروی میدان، یعنی $1/2\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\,dv$.

۵.۶ یك‌توزیع بارکروی به‌شعاع R وچگالی‌یکنواخت ρ_0 مفروض است. خود ـ انرژی توزیع را به‌دوروش محاسبه کنید: (الف) باانتگرال‌گیری مستقیم از معادلهٔ (۸.۶)؛ (ب) با انتگرال گیری برروی میدان، $1/2\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\,dv$.

۶.۶ فرض کنید الکترون یك ذرهٔ کروی‌با باریکنواخت به‌شعاع R باشد. ونیزفرض کنید که‌انرژی‌سکون mc^2 (m جرم‌سکون الکترون و c سرعت نوراست) منشأالکتروستاتیکی دارد وبانتیجه‌ای که ازمسئلهٔ ۵.۶ به‌دست‌آمد برابراست. باقراردادن مقدار عددی مناسب برای بار وجرم الکترون، «شعاع کلاسیك» الکترون، R، را محاسبه کنید.

۷.۶ دوبار نقطه‌ای q_1 و q_2 به‌فاصلهٔ d ازیکدیگرقراردارند.اگرمیدانهای مربوط به‌آنها درنقطهٔ $\mathbf{r}$ به‌ترتیب $\mathbf{E}_1$ و $\mathbf{E}_2$ باشند، درآن صورت

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2$$

(الف) نشان دهید که انتگرالهای E_1^2 و E_2^2 بر روی تمامی فضا واگرا هستند. این‌همان «خود ـ انرژی» نامتناهی است که باید ازانرژی U کاسته شود. (ب) انتگرالی برای سهم مربوط به $2\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2$ در U بنویسید، ونشان دهیدکه این انتگرال واگرا نیست.

۸.۶ (الف) ظرفیت خازنی که‌می‌تواند ۱۰۰۰ J رادر ۱۰۰۰ V ذخیره کند،چقدراست؟ (ب) فرض کنیدکه خازن صفحاتی موازی وبه‌فاصلهٔ 10^{-5} m ازیکدیگردارد، وبامادهٔ‌ای باثابت دی‌الکتریك ۲ پرشده است. مساحت مورد نیازصفحات چقدر است؟

۹.۶ دستگاه برق‌ساز (الکتروفور) تشکیل شده است ازصفحهٔ مدور تختی ازموم و صفحهٔ مشابهی ازفلزکه دسته‌ای ازجنس عایق دارد. به‌صفحهٔ مومین، از طریق مالش آن باپارچهٔ

پشمی یا پوست، بار مقید Q داده می‌شود. سپس صفحهٔ فلزی روی صفحهٔ مومین قرار داده می‌شود و موقتاً به زمین متصل می‌شود تا بار $-Q$ را به‌دست آورد. صفحهٔ فلزی سرانجام ازصفحهٔ مومین جدامی‌شود، ودرعین حال بار $(-Q)$ خودرا حفظ می‌کند. فرض کنید که شعاع صفحات $10\ \mathrm{cm}$ و $Q = 0.3\ \mu\mathrm{C}$، و فاصلهٔ اولیهٔ دوصفحه $10^{-5}\mathrm{m}$ باشد. اختلاف پتانسیل میان صفحات و انرژی ذخیره شده را موقعی که فاصلهٔ میان دو صفحه (الف) $d = 10^{-5}\ \mathrm{m}$ و (ب) $d = 0.02\ \mathrm{m}$ است، پیدا کنید.

۱۰.۶ دستگاهی متشکل است ازفقط دورسانا. ضرایب ظرفیت و القا را صریحاً برحسب ضرایب پتانسیل p_{ij} به‌دست آورید.

۱۱.۶ دو رسانای کروی درخلأ قراردارند. رسانای ۱ به‌شعاع R به‌زمین متصل است (یعنی پتانسیل آن صفراست). رسانای ۲ به‌قدری کوچك است که می‌توان آن را یك بار نقطه‌ای تصور کرد. بار این رسانا q است و به‌فاصلهٔ d ازکرهٔ متصل به‌زمین قرار دارد. چه‌مقداربارروی کرهٔ متصل به‌زمین القا می‌شود؟ (ازمفهوم ضرایب پتانسیل استفاده کنید.)

۱۲.۶ دستگاهی مرکب از دو جسم رسانا واقع در یك محیط دی‌الکتریك خطی مفروض است. رسانای ۱ بار ندارد و رسانای ۲ متصل به‌زمین است. ثابت کنید پتانسیل رسانای ۲ نیز باپتانسیل زمین برابراست.

۱۳.۶ خازنی با صفحات موازی از یك دی‌الکتریك مرکب ساخته شده است. ورقه‌ای ازیك جسم دی‌الکتریك با گذردهی ε_1 وضخامت d_1 دربالای ورقهٔ دی‌الکتریك دیگری (با گذردهی ε_2 وضخامت d_2) قرار داده شده است. ترکیب این دو دی‌الکتریك میان صفحات موازی رسانا که به‌فاصلهٔ $d_1 + d_2$ از یکدیگر واقع‌اند، قرار گرفته است. ظرفیت خازن را درواحد سطح صفحات آن به‌دست آورید.

۱۴.۶ استوانه‌ای طویل و رسانا به‌شعاع a موازی‌یك‌صفحهٔ رسانای نامتناهی و به‌فاصلهٔ h ازآن قرار دارد. نشان دهید که ظرفیت دستگاه در واحد طول استوانه بارابطهٔ

$$C = 2\pi\varepsilon_0 / \cosh^{-1}(h/a)$$

داده می‌شود (بخش ۱۱.۳).

۱۵.۶ دو خازن کاملا مشابه را که میان صفحات آنها هواست به‌صورت متوالی به هم وصل می‌کنیم وترکیب حاصل را در اختلاف پتانسیل ثابت ۵۰ ولت نگه می‌داریم. یك ورقهٔ دی‌الکتریك باثابت دی‌الکتریك ۱۰ وبه‌ضخامت یك دهم فاصلهٔ صفحات را درداخل یکی ازخازنها قرار می‌دهیم، اختلاف پتانسیل دوسراین خازن را محاسبه کنید.

۱۶.۶ ظرفیت یك الکتروسکوپ با برگهٔ طلا کاملا ثابت نیست چون وقتی $\Delta\varphi$ افزایش یابد برگه به‌طرف محفظه نزدیکترمی‌شود. ظرفیت مورد نظررا می‌توان به‌صورت

$$C=a+b(\Delta\varphi)^{۲}$$

نوشت. برای دستگاهی مشخص ثابتهای a و b را چگونه می‌توانید تعیین کنید؟ وقتی الکتروسکوپ بارداراست انرژی‌آن چقدراست؟ آیا انرژی تماماً الکتریکی است؟

۱۷.۶ دوپوستهٔ رسانای کروی هم مرکز به‌شعاعهای $r_{۱}$ و $r_{۲}$ را به ترتیب در پتانسیلهای $\varphi_{۱}$ و $\varphi_{۲}$ نگه داشته‌ایم. فضای میان دو پوسته را ازیك محیط دی‌الکتریك پر کرده‌ایم. با محاسبهٔ مستقیم نشان دهید که انرژی ذخیره شده در دی‌الکتریك برابر است با $C(\varphi_{۱}-\varphi_{۲})^{۲}/۲$ ودر نتیجه C، ظرفیت دستگاه، را تعیین کنید.

۱۸.۶ دورسانای‌استوانه‌ای‌هم‌محورکه‌تقریباً شعاع آنها یکی‌است به‌اندازهٔ d دربعدشعاعی ازیکدیگر جدایند. استوانه‌ها را به‌طورقائم‌دریك دی‌الکتریك مایع که پذیرفتاری‌الکتریکی آن χ و چگالی جرمی آن ζ است فرو می‌بریم. استوانه‌ها را دراختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ نگه می‌داریم. مایع دی‌الکتریك تاچه ارتفاعی، h، درفضای میان‌رساناها بالامی‌آید؟ (ازکشش سطحی صرفنظر کنید.)

۱۹.۶ فضای میان صفحات خازنی باصفحات موازی به‌وسیلهٔ بره‌ای ازجامد دی‌الکتریکی باثابت دی‌الکتریك K پرشدهٔ است. ابعاد صفحهٔ خازن عبارت‌اند ازعرض w، طول l، و فاصلهٔ صفحات d. خازن‌را درحالی‌که به منبعی بااختلاف پتانسیل $(\Delta\varphi)_{۰}$ متصل است باردار وسپس آن را ازمنبع جدا می‌کنیم. حال قسمتی ازبرهٔ دی‌الکتریك را درامتداد بعد l بیرون‌می‌کشیم به‌طوری‌که فقط طول x ازآن درداخل خازن باقی بماند. (الف)اختلاف پتانسیل میان صفحات خازن چقدر است؟ (ب) نیرویی‌که می‌خواهد برهٔ دی‌الکتریك را دوباره به‌داخل خازن بکشد چقدراست؟

۲۰.۶ ظرفیت یك خازن متغیر که عایق آن هواست، موقعی که‌یکی ازصفحات آن از $۰°$ تا $۱۸۰°$ بچرخد، به‌طورخطی‌از ۵۰ pF تا ۳۶۴ pF تغییرمی‌کند. صفحهٔ چرخان را درزاویهٔ $۷۵°$ تنظیم‌کرده ودو سرخازن را دراختلاف پتانسیلی برابر با ۴۰۰ ولت نگه می‌داریم. جهت واندازهٔ گشتاورنیروی الکتروستاتیکی وارد برصفحهٔ خازن را پیداکنید.

***۲۱.۶** یك پوستهٔ رسانای‌کروی، بدون بار وبه‌جرم m، دریك دی‌الکتریك‌مایع باثابت دی‌الکتریك K شناوراست به‌طوری‌که یك چهارم حجم‌آن در مایع غوطه‌ور است. تاچه پتانسیلی بایدکره را باردارکنیم تانیمی ازحجم آن غوطه‌ور شود؟ (راهنمایی: فرض‌کنید میدان الکتریکی پوستهٔ باردار که تانیمه غوطه‌ور است یك میدان شعاعی خالص باشد، و بعداً نشان دهید که جمع $\sigma+\sigma_{p}$ روی سطح کروی طوری است‌که فرض بالا را تأیید می‌کند.)

۲۲.۶ یك‌برهٔ دی‌الکتریك به‌ضخامت d وثابت دی‌الکتریك K فضای میان‌صفحات‌خازنی باصفحات موازی را پرکرده است. مساحت صفحهٔ خازن A است. نیروی الکتروستاتیکی

وارد بریکی ازصفحات‌را برای‌دومورد زیرمحاسبه‌کنید: (الف) بافرض اینکه دی‌الکتریك مستقیماً باآن صفحه درتماس باشد؛ (ب) بافرض اینکه میان دی‌الکتریك وآن صفحه‌شکاف باریکی ازهوا وجود داشته باشد. درهردو مورد صفحات را دراختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ نگه می‌داریم.

۲۳.۶ مثال مربوط به شکل ۴.۶ رابا انرژی‌الکتروستاتیکی به‌صورت $U = ۱/۲\, C(\Delta\varphi)^۲$ حل کنید؛ دراینجا $C = C(x)$ ظرفیت خازن‌است وقتی که قطعهٔ دی‌الکتریك تافاصلهٔ x فرو رفته است.

۲۴.۶ فرض‌کنید انرژی الکتروستاتیکی دستگـاهی $U = ۱/۲\, Q\, \Delta\varphi$ است، که درآن $Q = C\, \Delta\varphi$. ظرفیت را به‌صورت $C = C(x)$، که به‌پارامتر هندسی x بستگی دارد، در نظر بگیرید. دراینجا پارامتر x مکان قسمتی از دستگـاه را مشخص می‌کند. نشان دهید که نیروی وارد برآن قسمت، برای مقداربه‌خصوصی از Q و $\Delta\varphi$، طبق معادلهٔ (۳۴.۶ الف) با Qی ثابت، بانیروی وارد برآن طبق معادلهٔ (۴۱.۶) با $\Delta\varphi$ی ثابت، یکسان است.

۲۵.۶ مثال مربوط به‌شکل ۴.۶ را چنانچه ضخامت tی برهٔ دی‌الکتریك ازفاصلهٔ d میان صفحات بسیارکمتر باشد، حل کنید. (راهنمایی: دراین حالت، بنـا برنتیجهٔ مسئلهٔ ۱۵.۴، D درتمامی فضای میان صفحات تقریباً یکسان است، نه E.)

۷

جریان الکتریکی

تاکنون بارهای ساکن را بررسی می‌کردیم. اکنون می‌خواهیم بارهای در حال حرکت یکنواخت را مطالعه کنیم. این گفته به‌این معناست که ما باموادِ رسانای الکتریسیته سروکار داریم زیرا، برحسب تعریف، رسانا ماده‌ای‌است که در آن حاملهای بار تحت تأثیر میدانهای الکتریکی پایا، آزادی حرکت دارند (بخش ۵.۲). تعریف بالا نه فقط شامل رساناهای متعارف، نظیر فلزها و آلیاژهاست بلکه نیمرساناها، الکترولیتها، و گازهای یونیده، دی‌الکتریکهای ناکامل، وحتی خلأ اطراف کاتود گسیلندهٔ گرمایونی را نیزدربرمی‌گیرد. دربسیاری رساناها حاملهای بار الکترون‌اند. در سایر موارد ممکن است یونهای مثبت یا منفی حامل بارباشند.

بارهای متحرك تشکیل جریان می‌دهند، وفرایندی که درآن بارانتقال می‌یابد رسانش نام دارد. به‌عبارت دقیقتر، جریان (I) به‌صورت آهنگ انتقال بارازسطح معینی در رسانا (مثلا، ازمقطع مفروضی ازیك سیم) تعریف می‌شود. بنابراین

$$I=\frac{dQ}{dt} \qquad (۱.۷)$$

که درآن $Q=Q(t)$ بارخالص منتقل‌شده درزمان t است. یکای جریان در دستگاه mks آمپر(A)است، که به‌افتخار فیزیکدان فرانسوی آندره ماری‌آمپر[1] نامگذاری شده است. بدیهی است که

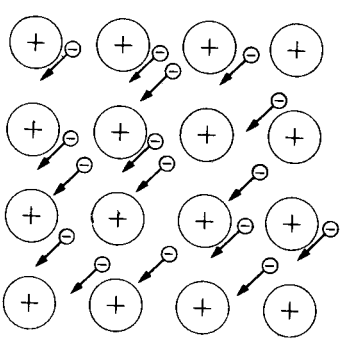
$$\text{یك آمپر}=\frac{\text{یك کولن}}{\text{یك ثانیه}}$$

1. André Marie Ampère

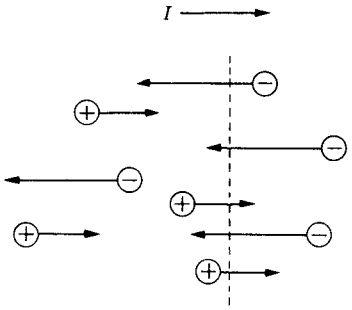
۱.۷ ماهیت جریان

درفلزات الکترونها تمام جریان‌را حمل می‌کنند، درحالی‌که یونهای‌مثبت سنگین درمکانهای منظمی در ساختار بلوری، ثـابت‌اند (شکل ۱.۷). از هراتم فقط الکترونهای ظرفیت آن (الکترونهای خارجیترین مدار) آزادندکه درفرایند رسانش شرکت‌کنند؛ سایر الکترونها به‌یونهای خود قویاً مقیدند. در شرایط حالت پایا، می‌توان الکترونها را از نقطه‌ای به‌فلز وارد وازنقطه‌ای دیگرازآن خارج کرد، اما فلزروی‌هم‌رفته ازلحاظ الکتروستاتیکی خنثی است. نیروهای قوی‌الکتروستاتیکی ازتجمع‌الکترونهای اضافی درهرنقطه ازفلزجلوگیری می‌کنند. همین طور، کمبود الکترونها به‌وسیلهٔ نیروهای الکتروستاتیکی باعلامت مخالف جبران می‌شود. بعداًخواهیم‌دیدکه‌دررسانا‌ها باراضافی باسرعت‌فوق‌العاده زیادتلف‌می‌شود. از این‌رو، متوجه می‌شویم که می‌توان موضوع جریان الکتریکی را بدون در نظر گرفتن جزئیات اثرهای الکتروستاتیکی وابسته به‌حاملهای بارمطالعه‌کرد.

درالکترولیتها، هم یونهای مثبت وهم یونهای منفی، هردو، جریان را حمل می‌کنند. باوجود این، چون بعضی یونها سریعتر از یونهای دیگر حرکت می‌کنند، معمولا یك نوع یون در رسانش نقش‌غالب‌را ایفا می‌کند. توجه به‌این نکته مهم است که حرکت یونهـای مثبت ومنفی درجهات مخالف (شکل ۲.۷) سبب ایجاد جریان در جهت یکسانی می‌شود. صحت این گفته ازروی معادلهٔ (۱.۷) آشکاراست زیرا بارخالص انتقال یافته از هر سطح مفروض هم به‌علامت حامل بار و هم به‌جهت حرکت آن بستگی دارد. بنابراین، در شکل ۲.۷ هر دو گروه حامل بارهای مثبت ومنفی، جریانی به‌سمت‌راست ایجاد می‌کنند. برحسب قرارداد، جهت حرکت بارهای مثبت (یا به‌طورمعادل، عکس جهت حرکت بارهای منفی) را به‌عنوان جهت یا سوی جریان انتخاب می‌کنند. به‌طورکلی، جریان الکتریکی درپاسخ به‌میدان الکتریکی به‌وجود می‌آید. اگریك میدان الکتریکی برجسم رسانایی اعمال‌شود، موجب خواهد شدکه حاملهای بارمثبت درجهت‌کلی میدان وحاملهای منفی درخلاف‌جهت



شکل ۱.۷ نمودارطرح‌وارهٔ حرکت الکترونهای رسانش درفلزات.



شکل ۲.۷ جریانی که در اثر حرکت حاملهای بارمثبت ومنفی، هر دو، ایجاد می‌شود.

میدان حرکت کنند. بنابراین، تمام جریانهایی که در این فرایند ایجاد می‌شوند با میدان هم‌جهت‌اند.

درتخلیهٔ الکتریکی گازها، جریان توسط یونهای مثبت ومنفی، هر دو، حمل می‌شود، لیکن چون الکترونها در مقایسه با یونهای سنگین تحرك خیلی بیشتری دارند، عملا تمام جریان به‌وسیلهٔ الکترونها حمل می‌شود. رسانش درگازها تاحدودی پیچیده است، زیرا جمعیتهای الکترونی ویونی باتغییرشرایط تجربی به‌شدت تغییر می‌کنند. (عامل تعیین‌کنندهٔ این جمعیتها دردرجهٔ اول فشارگاز و افت پتانسیل در دو سر گازاست.) در شرایط معینی فرایند آبشاری به‌وقوع می‌پیوندد؛ دراین فرایند یونهای معدودی که درآغازحضوردارند شتاب می‌گیرند، بااتمهای خنثی برخورد ناکشسان (غیرالاستیك) می‌کنند ودرنتیجه یونها والکترونهای بیشتری به‌وجودمی‌آورند. این‌یونهای اضافی نیزمی‌توانند سبب برخوردهایی بشوند و یونش‌تولیدکنند؛ در نتیجه چگالی حاملهای باربه‌شدت افزایش می‌یابد.

درشکلهای ۱.۷ و ۲.۷ حاملهای باررا دردوگروه‌تصویرکرده‌ایم که‌هرگروه‌حرکت مشترکی به‌نام حرکت سوقی دارد. اما چنین تصویری بیش ازحد ساده شده‌است. هر گروه ازحاملهای بار درواقع نمایندهٔ مجموعه‌ای ازذرات است‌که بامحیط اطراف خود درتعادل گرمایی به‌سرمی‌برند؛ ازاین‌رو هرذره هم‌حرکت سوقی‌دارد وهم‌حرکت‌گرمایی. حرکت گرمایی اگرچه ممکن‌است بزرگ باشد، اما چون‌کتره‌ای است، به‌انتقال منظم بارهامنجر نمی‌شود. از طرف دیگر حرکت سوقی کتره‌ای نیست. پس در مطالعهٔ فرایند رسانش، می‌توانیم ازحرکت‌گرمایی که در نهایت نتیجه‌اش صفر است چشم بپوشیم وهمان تصویر ساده‌ای را که در شکلهای ۱.۷ و ۲.۷ نشان داده شد به کار ببریم. اما در برخی دیگر از فرایندهای انتقال، نظیررسانش درشیب گرمایی (که اثر ترموالکتریك‌را موجب می‌شود)، باید حرکت گرمایی را نیزکاملا به‌حساب آوریم تا بتوانیم پدیده‌ها را کاملا درك‌کنیم.

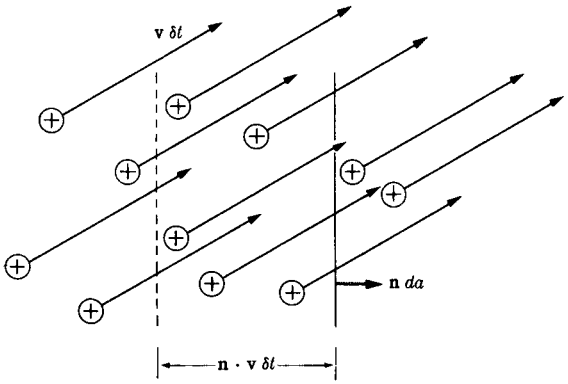
جریانهایی راکه تاکنون دراین‌بخش تشریح کردیم به‌جریانهای رسانشی‌موسوم‌اند. این جریانها نمایانگر حرکت سوقی حاملهای بار در یك محیط خنثی هستند. خود محیط ممکن است درکل ساکن باشد، و معمولا نیز چنین است. مایعها و گازها نیز ممکن است حرکت هیدرودینامیکی داشته باشند، واگر محیط چگالی بار الکتریکی داشته باشد، این

حرکت هیدرودینامیکی نیزخود جریانهایی به‌وجود خواهدآورد. این جریانها که ازانتقال جرمی محیط باردار ناشی می‌شوند، جریانهای همرفت نامیده می‌شوند. جریانهـای همرفت درمطالعهٔ الکتریسیته جوی دارای اهمیت بسیارند؛ در واقع، جریانهای همرفت رو به‌بالا در رعد وبرقها برای حفظ شیب پتانسیل عادی جو دربالای زمین کافی‌اند. حرکت ذرات باردار در خلأ (نظیر حرکت الکترونها در لولهٔ خلأ دیود) نیزیك جریان همرفت تولید می‌کند. یکی‌ازخصوصیات مشخصهٔ جریان‌همرفت آن است که ازلحاظ الکتروستاتیکی‌خنثی نیست، ومعمولا باید بارالکتروستاتیکی آن را به‌حساب آورد.

دربقیهٔ این فصل فقط به‌بررسی جریانهای رسانشی می‌پردازیم.

۲.۷ چگالی جریان . معادلهٔ پیوستگی

اکنون محیط رسانایی را که فقط یك نوع حامل بار الکتریکی، q، دارد بررسی می‌کنیم. تعداد این حاملها در واحد حجم را بـا N نشان می‌دهیم. مطابق بخش پیش، از حرکت گرمایی کتره‌ای صرفنظرمی‌کنیم وبرای‌تمام حاملها سرعت یکسان $\mathbf{v}$ را درنظرمی‌گیریم. حالا در موقعیتی هستیم که بتوانیم جریانی را که از عنصر سطح da (مطابق شکل ۳.۷) می‌گذرد محاسبه کنیم. در زمان δt هرحامل به‌اندازهٔ $\mathbf{v}\,\delta t$ حرکت می‌کند. از روی شکل پیداست که بار δQ که درمدت δt ازسطح da می‌گذرد برابر است باحاصل ضرب q در مجموع تمام حاملهای باری که در حجم $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\delta t\,da$ هستند؛ $\mathbf{n}$ برداریکهٔ عمود برسطح da است. بنابر معادلهٔ (۱.۷) جریان برابراست با



شکل ۳.۷ حرکت سوقی حاملهای بار ازصفحهٔ da در زمان δt.

$$dI = \frac{\delta Q}{\delta t} = \frac{qN\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, \delta t\, da}{\delta t}$$

$$= Nq\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da \qquad (۲.۷)$$

اگر بیش ازیك نوع حامل بار وجود داشته باشد، هریك‌ازانواع حاملها سهمی نظیررابطهٔ (۲.۷) در تولید جریان خواهد داشت. در حالت کلی، جریانی که ازسطح da می گذرد عبارت است از

$$dI = \left[\sum_i N_i q_i \mathbf{v}_i \right] \cdot \mathbf{n}\, da \qquad (۳.۷)$$

جمع‌بندی بالا برروی انواع حاملهای مختلف انجام می‌شود. مقدار داخل کروشه برداری است که بعدآن بعد جریان برواحد سطح است؛ این کمیت راچگالی بار می‌نامند وبا نماد $\mathbf{J}$ نمایش می‌دهند

$$\mathbf{J} = \sum_i N_i q_i \mathbf{v}_i \qquad (۴.۷)$$

چگالی جریان را می‌توان برای هرنقطه ازمحیط رسانا تعریف کرد و، بنابراین، یك تابع نقطه‌ای برداری است. این بردارکمیتی است بسیارمفیدکه مستقیماً درمعادلات دیفرانسیل اساسی نظریهٔ الکترومغناطیس وارد می‌شود. یکای $\mathbf{J}$ در دستگاه mks آمپر برمتر مربع $(A/m^۲)$ است.

معادلهٔ (۳.۷) را می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$dI = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, da$$

وجریانی که ازسطح S می گذرد، یعنی ازسطحی باشکل دلخواه و بامساحتی که اندازه‌ای ماکروسکوپی دارد، باانتگرال زیرداده می‌شود

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, da \qquad (۵.۷)$$

چگالی جریان $\mathbf{J}$ وچگالی بار ρ کمیتهایی مستقل ازیکدیگر نیستند، بلکه درهر نقطه بایك معادلهٔ دیفرانسیل به‌هم مربوط می‌شوند؛ این معادله به معادلهٔ پیوستگی معروف است. ارتباط آن دو ازاین حقیقت ناشی می‌شودکه بار نه نابود می‌شود و نه آفریده می‌شود. معادلهٔ پیوستگی را می‌توان با به‌کاربردن معادلهٔ (۵.۷) درمورد یك سطح بستهٔ دلخواه S، به‌دست‌آورد. جریان الکتریکی که به‌حجم Vی محصور درسطح S وارد می‌شود، ازرابطهٔ

زیر به‌دست می‌آید

$$I = -\oint_s \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, da = -\int_v \nabla \cdot \mathbf{J}\, dv \qquad (۶.۷)$$

انتگرال دوم از به‌کاربردن قضیهٔ واگرایی حاصل شده است. علامت منها در معادلهٔ (۶.۷) به‌این خاطر است که $\mathbf{n}$ بردار یکهٔ عمود به‌سمت خارج است، در صورتی که ما می‌خواهیم I را هنگامی مثبت بنامیم که جریان خالص بار از خارج V به‌داخل آن باشد. از طرفی مطابق معادلهٔ (۱.۷)، I برابر است با آهنگ انتقال بار به‌داخل حجم V یعنی

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int_v \rho\, dv \qquad (\text{۷.۷ الف})$$

چون ما باحجم ثابت V سروکار داریم، مشتق زمان فقط برروی تابع ρ عمل می‌کند. اما ρ تابعی است ازمکان و زمان، پس مشتق زمانی وقتی به‌زیرعلامت انتگرال برده می‌شود به‌مشتق پاره‌ای برحسب زمان تبدیل می‌شود. بنابراین

$$I = \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv \qquad (\text{۷.۷ ب})$$

اکنون با مساوی قراردادن معادلات (۶.۷) و (۷.۷ ب) نتیجه می‌گیریم

$$\int_v \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}\right) dv = ۰ \qquad (۸.۷)$$

اما حجم V کاملا اختیاری است، و تنها راهی که معادلهٔ (۸.۷) می‌تواند برای هر بخش حجم اختیاری از محیط صادق باشد آن است که انتگرالده آن در تمام نقاط صفر شود؛ بنابراین معادلهٔ پیوستگی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = ۰ \qquad (۹.۷)$$

۳.۷ قانون اهم . رسانندگی

تجربه نشان‌می‌دهد که درهرفلز دردمای ثابت چگالی جریان $\mathbf{J}$ بامیدان الکتریکی تناسب خطی دارد (قانون اهم). بنابراین

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E} \qquad (۱۰.۷)$$

ثابت تناسب، یعنی g را رسانندگی می‌نامند. معادلهٔ (۱۰.۷) برای تعداد زیادی از اجسام رسانای معمولی تقریباً صحیح است؛ اما درحالت کلی به‌جای معادلهٔ (۱۰.۷) باید ازمعادلهٔ زیر استفاده کرد

$$\mathbf{J}=g(\mathbf{E})\mathbf{E}$$

که درآن $g(\mathbf{E})$ تابعی است ازمیدان الکتریکی. موادی که معادلهٔ (۱۰.۷) در مورد آنها صدق می‌کند محیطهای خطی یا محیطهای اهمی نامیده می‌شوند. در اینجا نیز، مانند مبحث دی‌الکتریکها، ما بیشتر باموارد خطی سروکارخواهیم داشت.

معکوس رسانندگی را مقاومت ویژه، η، می‌نامند. بنابراین[1]

$$\eta=\frac{1}{g} \qquad (۱۱.۷)$$

یکای η در دستگاه mks ولت ـ متر بر آمپر یا به‌طور ساده اهم ـ متر است که در آن اهم (Ω) چنین تعریف می‌شود

$$\text{یك اهم}=\frac{\text{یك ولت}}{\text{یك آمپر}}$$

یکای رسانندگی g عبارت است از $\Omega^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}$ که گاهی به‌صورت مهو برمتر نوشته می‌شود.

مقاومت ویژهٔ تعدادی ازمواد معمولی درجدول ۱.۷ آمده است. ازروی این جدول پیداست که کلیهٔ مواد تا حدی از خود الکتریسیته عبور می‌دهند، اما اجسامی را که عایق (دی‌الکتریك) نامیدیم درجهٔ رسانایشان به‌نسبت ضریب فوق‌العاده بزرگی (به‌بزرگی $۱۰^{۲۳}$) از فلزات ضعیفتر است. تفاوت میان رسانا وعایق را در بخش ۷.۷ به طور کمی مطالعه خواهیم کرد.

جسم رسانایی‌را که از قانون‌اهم تبعیت‌می‌کند درنظربگیرید. این‌جسم سیم‌مستقیمی است باسطح مقطع یکنواخت که دوسرآن در اختلاف پتانسیل ثابت $\Delta\varphi$ نگه داشته شده است. فرض کنید که سیم همگن‌است و با رسانندگی ثابت g مشخص می‌شود. تحت این شرایط یك میدان الکتریکی درسیم وجود خواهد داشت که با رابطهٔ زیر به $\Delta\varphi$ مربوط می‌شود

$$\Delta\varphi=\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \qquad (۱۲.۷ \text{ الف})$$

---

۱. نمادهای مرسوم برای مقاومت ویژه و رسانندگی به‌ترتیب ρ و σ است، لیکن برای اینکه بانمادهای مربوط به‌چگالی حجمی بار ρ و چگالی سطحی بار σ اشتباه نشوند ما از نمادهای η و g استفاده خواهیم کرد.

بدیهی است که میدان الکتریکی نمی‌تواند مؤلفهٔ حالت پایـایی در جهت عمود برمحور سیم داشته باشد، زیرا مطابق معادلهٔ (۱۰.۷) چنین مؤلفه‌ای سبب باردارکردن مداوم سطح سیم خواهد شد. بنابراین میدان الکتریکی صرفاً طولی خواهد بود. به‌علاوه، به‌علت‌شکل هندسی رسانا، میدان الکتریکی در تمامی نقاط درطول سیم باید یکسان باشد. پس معادلهٔ (۱۲.۷ الف) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\Delta\varphi = El \qquad (۱۲.۷ \text{ ب})$$

که در آن l طول سیم است. اما میدان الکتریکی E وجود جریـانی به چگالی $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$ را ایجاب می‌کند. جریانی که ازهرمقطع سیم عبورمی‌کند برابراست با

$$I = \int_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, da = JA \qquad (۱۳.۷)$$

که در آن A سطح مقطع سیم است. از ترکیب معادلهٔ (۱۳.۷) با معـادلات (۱۰.۷) و (۱۲.۷ ب) نتیجه می‌گیریم که

$$I = \frac{gA}{l}\Delta\varphi \qquad (۱۴.۷)$$

که رابطه‌ای است خطی میان I و $\Delta\varphi$.

کمیت l/gA راهقاومت سیم‌می‌نامند. مقاومت بانماد R نشان‌داده خواهدشد. با به‌کار بردن نماد R می‌توانیم معادلهٔ (۱۴.۷) را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم

$$\Delta\varphi = RI \qquad (۱۵.۷)$$

که شکل‌آشنای قانون اهم است (بدیهی است که R را برحسب اهم می‌سنجند). در بخش بعدی نشان‌داده خواهدشدکه ازمعادلهٔ (۱۰.۷) بدون بستگی به شکل‌رسانا معادلهٔ (۱۵.۷) نتیجه می‌شود. معادلهٔ (۱۵.۷) را می‌توان به‌منزلهٔ تعریفی ازمقاومت جسمی یا وسیله‌ای که یك جریان ثابت را ازخودعبورمی‌دهد دانست. درحالت کلی، R به‌مقداراین جریان‌بستگی خواهد داشت. اما، همچنان‌که قبلا گفته شد، ما بیشتر به‌اجسام رسانای خطی علاقه‌مندیم و درمورد این اجسام R به‌جریان بستگی ندارد.

کارانجام‌شده توسط‌میدان، وقتی که‌بار dQ دراختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ عبورکند، برابر است با $dW = dQ\,\Delta\varphi$. توان مربوط برابراست با

$$P = I\,\Delta\varphi = I^2 R = (\Delta\varphi)^2/R$$

که دوصورت آخری بااستفاده از قانون اهم به‌دست می‌آیند. این توان به‌صورت گرمای

جدول ۱۰۷ مقاومت ویژهٔ η وضریب گرمایی مقاومت α برای برخی ازاجسام معمولی‌در ۲۰ درجهٔ سلسیوس[1]

ماده	η برحسب Ωm	$\alpha=\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dT}$, $(°C)^{-1}$
آلومینیوم	$۲٫۶۵ \times ۱۰^{-۸}$	۰٫۰۰۴۳
مس	$۱٫۶۷ \times ۱۰^{-۸}$	۰٫۰۰۶۸
طلا	$۲٫۳۵ \times ۱۰^{-۸}$	۰٫۰۰۴
آهن	$۹٫۷۱ \times ۱۰^{-۸}$	۰٫۰۰۶۵
نیکل	$۶٫۸۴ \times ۱۰^{-۸}$	۰٫۰۰۶۹
نقره	$۱٫۵۹ \times ۱۰^{-۸}$	۰٫۰۰۴۱
جیوه	$۹۵٫۸ \times ۱۰^{-۸}$	۰٫۰۰۰۹
تنگستن	$۵٫۵۱ \times ۱۰^{-۸}$	۰٫۰۰۴۵
کنستانتین (مس ۶۰، نیکل ۴۰)	$۴۹٫۰ \times ۱۰^{-۸}$	۰٫۰۰۰۰
نیکروم	$۱۰۰٫۰ \times ۱۰^{-۸}$	۰٫۰۰۰۴
ژرمانیوم (خالص)	۰٫۴۶	—۰٫۰۴۸
ژرمانیوم ($۵\% \times ۱۰^{-۶}$ آرسنیك)	۰٫۰۱۱	
گرافیت	$۱٫۴ \times ۱۰^{-۵}$	
محلول نمك طعام (اشباع شده)	۰٫۰۴۴	—۰٫۰۰۵
اکسیدآلومینیوم	۱×۱۰^{۱۴}	
شیشه	$۱۰^{۱۰}$ — $۱۰^{۱۴}$	
ید	$۱٫۳ \times ۱۰^{۷}$	
کوارتز ($SiO_۲$)	۱×۱۰^{۱۳}	
گوگرد	۲×۱۰^{۱۵}	
چوب	$۱۰^{۸}$ — $۱۰^{۱۱}$	

1. *Handbook of Chemistry and Physics*, 58th edition , CRC Press. Inc., Cleveland, Ohio.

ژول درجسم تلف می‌شود.

۴.۷ جریانهای پایا درمحیطهای پیوسته

شباهت بسیار نزدیکی میان یك دستگاه‌الکتروستاتیکی مرکب از رساناها و دی‌الکتریکها، ازیك سو، ودستگاهی که جریان پایایی‌را هدایت می‌کند، ازسوی دیگر، وجود دارد. در این بخش این شباهت‌را بررسی می‌کنیم.

محیطی رسانا، همگن و اهمی را درنظر بگیرید که تحت شرایط رسانش حالت پایا قراردارد. چون صرفاً باحالت پایا سروکارداریم، چگالی بارموضعی $\rho(x, y, z)$ مقدار حالت تعادل خود را دارد و در هر نقطهٔ محیط $\partial\rho/\partial t = 0$ است . به‌این ترتیب معادلهٔ پیوستگی (معادلهٔ ۹.۷) به‌رابطهٔ زیرتبدیل می‌شود

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \qquad \text{(جریانهای پایا)} \qquad (۱۶.۷)$$

از به‌کاربردن قانون اهم وترکیب آن بارابطهٔ (۱۶.۷) نتیجه می‌گیریم که

$$\nabla \cdot g\mathbf{E} = 0$$

که برای یك محیط همگن به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

اما چون برای یك میدان ایستا $\nabla \times \mathbf{E} = 0$، پس می‌توان $\mathbf{E}$ را از یك پتانسیل نرده‌ای به‌دست‌آورد

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$$

ازترکیب دومعادلهٔ اخیر، نتیجه می‌شود که

$$\nabla^2\varphi = 0 \qquad (۱۷.۷)$$

که این معادلهٔ لاپلاس است.

بنابراین می‌بینیم که مسئلهٔ رسانش حالت پایا را می‌توان به‌همان طریق مسائل الکتروستاتیکی حل کرد. معادلهٔ لاپلاس به‌کمك‌یکی‌ازشیوه‌هایی که درفصل۳ بحث کردیم حل وجواب مناسب، مثل همیشه، باشرایط مرزی تعیین می‌شود. دررسانش، شرایط مرزی کافی برای‌حل مسئله شرایطی‌است که φ یا $\mathbf{J}$ را درهرنقطه روی‌سطح محیط رسانا مشخص می‌کند. چون دوبردار $\mathbf{J}$ و $\mathbf{E}$ باقانون اهم به‌هم مربوط می‌شوند، مشخص‌کردن $\mathbf{J}$ برروی سطح‌رسانا معادل‌است بامشخص‌کردن $\mathbf{E}$ برروی آن‌سطح. به‌مجردآنکه جواب‌مناسب‌معادلهٔ

لاپلاس پیدا شد، $\mathbf{E}$ (ودر نتیجه $\mathbf{J}$) را می‌توان درهر نقطهٔ داخل محیط با محاسبهٔ شیب تعیین کرد.

در رسانش حالت پایا، جریانی که ازمساحت فصل‌مشترك میان دو رساناعبورمی‌کند به‌دوطریق محاسبه می‌شود: برحسب چگالی جریان در محیط ۱ یا برحسب چگالی جریان درمحیط ۲. چون نتیجهٔ هردو روش باید یکی باشد، پس مؤلفهٔ قائم $\mathbf{J}$ در دو طرف فصل مشترك باید پیوسته باشد، یعنی

$$J_{1n}=J_{2n} \qquad \text{(۱۸.۷ الف)}$$

یا

$$g_1E_{1n}=g_2E_{2n} \qquad \text{(۱۸.۷ ب)}$$

این معادله شبیه معادلهٔ مربوط به‌پیوستگی D_n در دو طرف فصل مشترك دی‌الکتریکها در مسائل الکتروستاتیکی است.

ازآنجاکه میدان در هر یك از دو محیط ساکن است، پس برای مسیر بسته‌ای که دو محیط را به‌هم مربوط کند خواهیم داشت

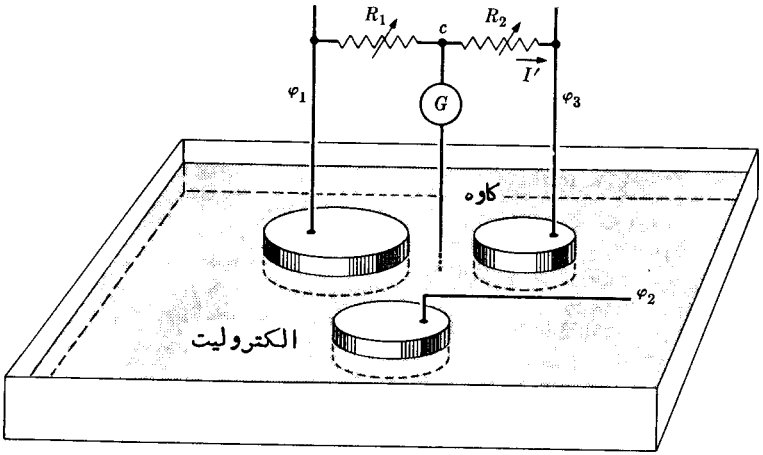
$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$$

و یا مطابق اثبات بخش ۷.۴

$$E_{1t}=E_{2t} \qquad (۱۹.۷)$$

این رابطه برای هردونوع مسئله (رسانش پایا و الکتروستاتیك) یکسان است.

مثالی ازمطالبی که در بالا مطرح شد را می‌توان در «مخزن الکترولیتی» شکل ۴.۷ یافت. دراینجا تعدادی رسانای فلزی که به‌منابع خارجی پتانسیل متصل‌اند در یك محیط مایع‌رسانا (که به‌طور ایده‌آل‌ابعادآن بینهایت فرض می‌شود) با رسانندگی‌متوسط (مثلا، محلول آب نمك) قرار دارند. چون رسانندگی محلول نمك بسیار کمتر از رسانندگی فلز است (جدول ۱.۷)، میدان الکتریکی درفلز ازمیدان الکتریکی درمحلول (به‌ازای‌چگالی جریان یکسان) خیلی کمتراست. نسبت میدانها به قدری کوچك است که درفلزمی‌توان از $\mathbf{E}$ چشم پوشید، و هریك ازرساناهای فلزی را حجمی هم‌پتانسیل فرض‌کرد. کاوهٔ رسانای کوچکی‌را، مطابق شکل، برای بررسی‌پتانسیل محلول می‌توان به‌کاربرد و به‌این‌طریق‌سطوح هم پتانسیل آن را رسم‌کرد. یکی‌ازکاربردهای این روش تجربی‌آن است‌که برای مواردی که شکل هندسی پیچیده‌ای دارند وتعیین جوابهای معادلهٔ لاپلاس از لحاظ نظری مشکل است، جواب عددی معادلهٔ لاپلاس بااین روش به‌دست می‌آید. جوابی‌که به‌دست می‌آید محدود به‌مسئلهٔ رسانش نیست، بلکه این جواب برای مسئلهٔ الکتروستاتیکی هم‌ارزکه در



شکل ۴.۷ مخزن الکترولیت دو بعدی. سه رسانای فلزی را در پتانسیلهای φ_1، φ_2، و φ_3 نگه می‌داریم و برای سهولت فرض می‌کنیم که $\varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_3$. نماد به‌معنای مقاومت متغیراست و G گالوانومتراست. فرض می‌کنیم که مقاومت سیمهای رابط قابل‌صرفنظر است. اگر مقاومتهای R_1 و R_2 طوری تنظیم شوند که جریان داخل G صفر شود، آنوقت $\varphi_c = \varphi_{\text{کاوه}}$، و ازهر دو مقاومت R_1 و R_2 جریان یکسان I' عبور می‌کند. در این شرایط خواهیم داشت

$$\varphi_{\text{کاوه}} = \varphi_1 - I'R_1 = \varphi_3 + I'R_2 \quad \text{یا} \quad \varphi_{\text{کاوه}} = \varphi_1 - (\varphi_1 - \varphi_3)R_1/(R_1 + R_2)$$

آن‌همان رساناهای فلزی‌بایك محیط دی‌الکتریك احاطه‌شده‌اند نیزمعتبراست (شکل۵.۷).

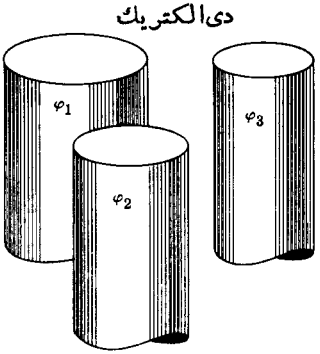
به‌عنوان دومین مثال برای رابطهٔ میان رسانش والکتروستاتیك، دو رسانای فلزی واقع درمحیطی اهمی، همگن، و نامتناهی با رسانندگی‌معتدل g را درنظر می‌گیریم. اگر رساناهای فلزی‌را درپتانسیلهای φ_1 و φ_2 نگه‌داریم، جریان I که میان آنها برقرارمی‌شود برابرخواهد بود با

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}$$

که در آن R مقاومت محیط است.[1] این جریان‌را می‌توان برحسب چگالی جریان $\mathbf{J}$ در محیط نوشت

---

۱. چون I مشابه Q درمسئلهٔ الکتروستاتیکی است، I با $\Delta\varphi$ متناسب است، و $1/R$ به‌عنوان ثابت تناسب تعریف می‌شود. معادلهٔ (۲۲.۷) را ببینید.



شکل ۵.۷ مسئلهٔ الکتروستاتیکی‌هم‌ارز بامسئلهٔ‌رسانش درشکل‌قبل.چون‌شکل ۴.۷ نشان‌دهندهٔ یك رسانش دوبعدی است، پس‌مسئلهٔ الکتروستاتیکی نیزدوبعدی است، وهررسانا ازاستوانه‌ای بی‌نهایت بلند تشکیل شده است.

$$I=\oint_s \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\,da$$

دراینجا S هر سطح بسته‌ای است که یکی از رساناها را کاملا در میان بگیرد (به‌استثنای سیم فلزی عایق شده‌ای که جریان را به‌درون رسانا می‌رساند تا پتانسیل آن را ثابت نگه دارد). اما

$$\mathbf{J}=g\,\mathbf{E}$$

ازترکیب سه معادلهٔ آخر، نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{\varphi_1-\varphi_2}{R}=g\oint_s \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,da \qquad (۲۰.۷)$$

اگراین میدان الکتریکی ناشی ازبارهای الکتروستاتیکی موجود برروی دو رسانای فلزی دریك محیط دی‌الکتریك بود، مطابق قانون‌گاؤس داشتیم

$$\oint_s \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,da=\frac{1}{\varepsilon}Q \qquad (۲۱.۷)$$

که درآن Q بارموجود برروی رسانای فلزی است که باسطح S احـاطه شده است، و ε گذردهی محیط است. درچنین شرایطی دو رسانا یك خازن تشکیل می‌دادند.

$$Q=C\,(\varphi_1-\varphi_2) \qquad (۲۲.۷)$$

ازقراردادن معادلات (۲۱.۷) و (۲۲.۷) درمعادلهٔ (۲۰.۷) نتیجه می‌شود

$$RC=\frac{\varepsilon}{g} \qquad (۲۳.۷)$$

که رابطه‌ای است میان مقاومت محیط وظرفیت مسئلهٔ الکتروستاتیکی هم‌ارزآن.

درواقع، این رابطه چیزی بیش از یك شباهت میان محیطهای رسانا و محیطهای دی‌الکتریك است؛ این رابطه برای هرمحیط منفردی با رسانندگی g وثابت دی‌الکتریك ε نیزصادق است. چون دی‌الکتریك ایده‌آل وجود ندارد، مقدار gی هردی‌الکتریك واقعی هرقدرهم کم باشد، صفر نیست. ازسوی‌دیگر، حتی‌رساناهای خوب‌هم‌مقدار ε مربوط‌به‌خود را دارند، هرچندکه این مقدارممکن است بسیار کوچك باشد.[۱] از این‌رو هر خازنی یك مقاومت نشتی، وهرمقاومتی یك‌ظرفیت‌کم وابسته به‌خود دارد؛ درهرمورد R و C بامعادلهٔ (۲۳.۷) به‌هم مربوط می‌شوند (به‌طورتقریبی، زیرا محیط نامتناهی نیست).

۵.۷ نزدیك شدن به تعادل الکتروستاتیکی

درفصل ۲ گفتیم که بار اضافی یك رسانا روی سطح آن قرار می‌گیرد. این وضع البته وضعیت تعادل است. درآنجا نزدیك شدن به‌حالت تعادل‌را بررسی نکردیم، ولی گفتیم که رساناهای خوب (فلزی) فوق‌العاده سریع به‌حالت تعادل می‌رسند. هر چه رسانایی کمتر باشد، نزدیك شدن به تعادل الکتروستاتیکی کندتر است؛ در واقع اگررسانندگی جسم فوق‌العاده کم باشد، ممکن است برای رسیدن به‌تعادل الکتروستاتیکی سالها وقت لازم باشد.

یك محیط همگن وهمسانگرد راکه‌با رسانندگی g وگذردهیε مشخص‌شده‌وچگالی حجمی بارآزاد ازپیش تعیین شدهٔ آن برابر $\rho_0(x, y, z)$ است، درنظر می‌گیریم. اگر این دستگاه رسانا را ناگهان ازمیدانهای الکتریکی وارد برآن جدا کنیم، به‌سمت وضع تعادل‌که درآن هیچ باراضافیی در درون دستگاه وجود ندارد گرایش پیدا می‌کند. بنابر معادلهٔ پیوستگی داریم

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{J}=0 \qquad [۹.۷]$$

---

۱. دراینجا واضح نیست‌که ثابت دی‌الکتریك یك رسانای نسبتاً خوب را چگونه می‌توان اندازه‌گیری‌کرد، ولی این موضوع درفصل ۱۳ روشن خواهد شد. مقیاس زمانی‌که در محدودهٔ آن یك اندازه‌گیری «ایستا» باید انجام شود دربخش بعد معلوم خواهد شد. مقدار $\varepsilon=\infty$، که درفصل ۴ پیشنهادشد، فقط درصورت نبودن جریان قابل استفاده است؛ درمورد جریان پایا، فقط بارهای مقید درایجاد ε دخالت دارند نه بارهای آزاد.

که با کمك قانون اهم به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+g\nabla \cdot \mathbf{E}=0 \qquad (۲۴.۷)$$

اما $\nabla \cdot \mathbf{E}$ به‌چشمه‌های میدان بستگی دارد؛ درواقع، $\nabla \cdot \mathbf{E}=\rho/\varepsilon$، بنابراین

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{g}{\varepsilon}\rho=0 \qquad (۲۵.۷)$$

به‌ازای g و ε ثابت، جواب این معادله بامشتق پاره‌ای به‌صورت زیر است

$$\rho(x,\ y,\ z,\ t)=\rho_0(x,\ y,\ z)e^{-gt/\varepsilon} \qquad (۲۶.۷)$$

ودیده می‌شود که نزدیك شدن به‌حالت تعادل به‌طورنمایی صورت می‌گیرد.

ازمعادلهٔ (۲۶.۷) پیداست که مقدار ε/g بعد زمان دارد؛ این‌مقدار را ثابت زمانی ویا زمان واهلش t_c محیط می‌گویند

$$t_c=\frac{\varepsilon}{g}=\varepsilon\eta \qquad (۲۷.۷)$$

ثابت زمانی معیاری‌است‌ازسرعت نزدیك‌شدن محیط رسانا به‌حالت تعادل الکتروستاتیکی؛ به‌عبارت دقیقتر، t_c مدت زمانی است که طی آن بـار در هرناحیهٔ مشخصی به $1/e$ مقدار اولیه‌اش کاهش می‌یابد.

دریك‌کاربرد بخصوص، چنانچه ثابت زمانی جسمی اززمان مشخصهٔلازم برای‌انجام اندازه‌گیری مربوط به مراتب کمتر باشد، آن جسم به‌توزیع بارحالت تعادل خود خواهد رسید. دربرخی‌کاربردها تنها کافی است که ثابت زمانی‌کمتراز ۰٫۱ ثانیه باشد تااطمینان حاصل شود که رفتارجسم رسانا گونه‌است. چون گذردهی اکثراجسام‌غیرفلزی[1] درگسترهٔ میان ε_0 تا $10\varepsilon_0$ قرارمی‌گیرد، این امرمستلزم ماده‌ای است‌که مقاومت ویژهٔ آن کمتر از 10^9 یا 10^{10} اهم ـ متر باشد. درکاربردهای مربوط به‌فرکانسهای بالا، برای‌رفتار رسانا ـ گونهٔ واقعی ثابت زمانی‌کوتاهتر ومقاومت ویژهٔ کمتری لازم است، درواقع باید شرط‌زیر برقرار باشد

$$t_c \ll \frac{1}{f}$$

---

۱. این رابطه را نمی‌توان درمورد یك فلـز به‌کاربرد، زیرا ما اندازهٔ ویژهٔ ε را نمی‌دانیم، در واقع، $t_c \approx \tau \approx 10^{-14}\mathrm{s}$ که درآن τ زمان برخورداست که دربخش۷.۷ آن را بررسی خواهیم کرد. چنان‌که خواهیم دید، برای زمانهای کوتاهتر از τ فرض $\mathbf{J}=g\mathbf{E}$ صادق نیست.

که در آن f بالاترین فرکانس موجود در آزمایش است. برای رفتار دی‌الکتریك گونه درست شرط معکوس برقرار است.

۶.۷ شبکه‌های مقاومت و قوانین کیرشهوف

تا به‌حال رسانش‌را از لحاظ انتقال بار در یك محیط رسانا بررسی ومسئله‌را برحسب معادلات دیفرانسیلی که باید در هرنقطه صادق باشند حل می کردیم. دراین حالتها کمیت مهمی که باید تعیین شود، چگالی جریان $\mathbf{J}$ است. اما در بسیاری از مسائلی که ازجنبهٔ عملی مورد نظرند ، حاملهای بارالکتریکی مقیدند که ازمسیری که رسانش زیاد دارد عبور کنند؛ چنین مسیری‌را مدار می‌نامند. دراین مسائل کمیتهای مهم عبارت‌اند از جریان درهرقسمت ازمدار. دراین بخش فقط مدارهای حامل جریانهای پایا، یعنی مدارهای جریان مستقیم، را بررسی می کنیم. هرمدار ممکن است از چندین انشعاب مختلف تشکیل شده باشد. در واقع مداررا می‌توان به‌صورت‌شبکه‌ای‌ازمسیرهای رسانا تعریف کرد، که هریك‌می‌توانند ولتاژهای اعمال شدهٔ معینی داشته باشند. مسئلهٔ اساسی در تحلیل مدارها عبارت است از: مقاومت و ولتاژ اعمال شده در هریك ازانشعابهای مدارداده شده‌اند، جریان را در هریك از این انشعابها پیداکنید.

درفصل ۲ نشان دادیم که انتگرال مؤلفهٔ مماسی هر میدان الکتروستاتیکی دور هر مسیر بسته‌ای صفراست؛ یعنی، برای میدان الکتروستاتیکی

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \qquad (۲۸.۷)$$

برای مواد اهمی، $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$. در حالت کلی این رابطه به‌صورت $\mathbf{J} = g(\mathbf{E})\mathbf{E}$ درمی‌آید، ولی $g(\mathbf{E})$ همیشه کمیتی مثبت است. پس نتیجه می گیریم که یك نیروی الکتروستاتیکی خالص نمی‌تواند سبب شود که جریان دورتمامی مدار باسوی یکسانی بگردد. یا به‌عبارت دیگر، تنها به‌کمك نیروهای الکتروستاتیکی نمی‌توان‌جریان پایا برقرارکرد. ولی برذرهٔ باردار q ممکن‌است علاوه‌برنیروی ماکروسکوپی‌الکتروستاتیکی نیروهای‌دیگر(مکانیکی، «شیمیایی»، ومانندآن) نیزاثرکنند، به‌طوری‌که درقسمتی ازمدارباره‌ا در خلاف جهت $\mathbf{E}$ حرکت کنند. دربخشهای قبل در مورد مسئلهٔ مربوط به‌علت ایجاد جریان الکتریکی بحث نکردیم وتنها فرض کردیم که دو نقطهٔ واقع بریك شیء رسانا با منابع انرژی خارجی در اختلاف پتانسیل ثابت $\Delta\varphi$ نگه داشته می‌شوند. دراینجا نیزکافی است‌که فرض کنیم چنین ولتاژهای اعمال شده‌ای[1] وجود دارند، اما اکنون باکمی دورشدن‌ازموضوع اصلی‌دربارهٔ

---

۱. درکتابهای دیگرولتاژاعمال شده را معمولا نیروی محرکهٔ الکتریکی (یا emf) می‌نامند، گرچه واژهٔ مرسوم درآزمایشگاه برای این اختلاف پتانسیل همان ولتاژ اعمال شده است. واژهٔ تاریخی emf ومفهوم آن گیج‌کننده وغیرضروری است، بنابراین در اینجا ازآن استفاده نمی‌کنیم. واژهٔ emf را برای مفهوم تقریباً متفاوتی، که بعداً معرفی خواهد شد (فصل ۱۱) نگه می‌داریم.

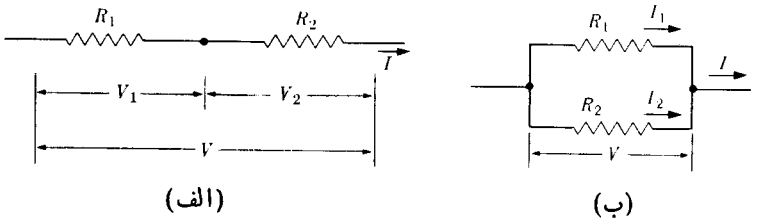
چگونگی تولید واقعی این ولتاژها بحث خواهیم کرد.

در آزمایشگاه ولتاژ پایا را معمولا یا به‌وسیلهٔ باتری ویا به وسیلهٔ یك منبع تغذیهٔ الکترونیکی (که ولتاژ برق شهر را مستقیم و هموارمی کند) تولید می‌کنند، ولی با وسایل گوناگون‌دیگر،مثلامولد وان‌دوگراف،نیزمی‌توان‌آن‌راتولیدکرد.تحلیل مولد وان‌دوگراف ازلحاظ مفهومی راحت است. در مولد وان دوگراف بارها را دریك پایانه (سر) برروی تسمهٔ‌حامل قرارمی‌دهند وآنها را به‌زور به‌پایانهٔ دیگری که درانرژی‌پتانسیل بیشتری است می‌برند ودرآنجا ازتسمه جدا می‌کنند. درکارکرد مولد در حالت پایا، برای هرمسیر بسته داریم $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$؛ مثلا، علامت انتگرال در امتداد تسمه منفی و در امتداد یك مسیر خارجی میان دو پایانه باآن برابرولی باعلامت مثبت است. اگرتسمه را واداریم تا به‌حد کافی سریع حرکت کند، می‌توانیم یك جریان پایای خارجی را ازدرون یك مقاومت‌متصل به‌دو پایانه عبوردهیم؛ توان‌ورودی درست برابراست باتوان مکانیکی لازم برای گرداندن تسمه‌ای‌که بارها را علیه یك میدان الکتریکی منتقل می‌کند. طرزکار باتری نیز همینطور است (به‌جزآنکه «نیروهای» مؤثردرباتری‌به‌مکانیك‌کوانتومی‌حاکم برالکتروشیمی‌بستگی دارند)، و در امتداد هرمسیربسته‌ای $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$، حتی در امتداد مسیری که از درون الکترولیت باتری می‌گذرد. ولی آنچه برای تحلیل مدارمهم‌است صرفاً این است‌که‌برای مسیربسته‌ای‌که حاوی پایانه‌های منبع ولتاژاست داریم $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$، مشروط برآنکه‌یك شاخه ازمسیراز درون شبکهٔ مقاومتها بگذرد وشاخهٔ دیگرمستقیماً یك پایانه را به‌پایانهٔ‌دیگر ولی در خارج از منبع وصل‌کند. هدف نظریهٔ مدارهای الکتریکی به‌دست آوردن روشی برای تحلیل شاخهٔ اول است، که شامل شبکهٔ مقاومتهاست؛ نیازی نیست‌که ما علت ایجاد اختلاف پتانسیل میانی پایانه‌های منبع توان (اعم ازعلل مکانیکی، شیمیایی، یا مانند آن) را تحلیل‌کنیم، بلکه تنهاکافی است‌که‌آن را ولتاژ اعمال شدهٔ $\mathscr{V}$ بنامیم. یك منبع ایده‌آل، ولتاژاعمال شدهٔ $\mathscr{V}_0$ی را تولید می‌کند که به‌جریان گرفته شده از منبع بستگی ندارد؛ اما ولتاژ دوسریك منبع حقیقی تا حدودی به‌جریان بستگی دارد، یعنی $\mathscr{V} = \mathscr{V}(I)$. ساده‌ترین فرض که معمولا صادق است، آن است که این بستگی خطی است

$$\mathscr{V} = \mathscr{V}_0 - R_I I$$

ضریب R_I را مقاومت داخلی و $\mathscr{V}_0$ را ولتاژ مدار - باز (یادربیشتر کتابهای دیگر، emf) می‌نامند.

قبل از آنکه به‌مسئلهٔ عمومی شبکه بپردازیم، ابتدا بحث اتصالهای سادهٔ متوالی و موازی مقاومتها را مرور می‌کنیم. مقاومت، که دربخش ۳.۷ تعریف شد، خاصیتی ازشیء مادی مورد نظراست‌که هم به‌ماهیت مادهٔ تشکیل‌دهندهٔ شیء وهم به‌شکل هندسی آن‌بستگی دارد. (در حالی‌که مقاومت ویژه تنها به‌ماهیت جسم رسانا بستگی دارد). شیء رسانایی به‌شکل مناسب را که مشخصهٔ اصلی آن مقاومت‌اش است، مقاوم (یا اصطلاحاً مقاومت) می‌نامند ومعمولا آن را بانماد ⁄⁄⁄ نمایش می‌دهند. مقاومتها را می‌توان به‌یکدیگر



(الف) (ب)

شکل ۶.۷ (الف) اتصال متوالی و (ب) اتصال موازی دومقاومت.

متصل وشبکهٔ مقاومت درست کرد؛ نحوهٔ اتصال مقاومتها در شکل ۶.۷ نشان داده شده‌اند. قسمت (الف) اتصال متوالی را نشان می‌دهد؛ دراین حالت ازهردومقاومت جریان یکسان I می گذرد. اگرمعادلهٔ (۱۵.۷) را درمورد هریك از مقاومتها به‌کار بریم، و توجه‌کنیم که اختلاف پتانسیل[1] به‌صورت $V=V_1+V_2$ است، نتیجه می گیریم که

$$V=R_1I+R_2I=(R_1+R_2)I$$

بنابراین مقاومت معادل این ترکیب برابراست با

$$R=R_1+R_2 \qquad \text{(اتصال متوالی)} \qquad (۲۹.۷)$$

دراتصال موازی (شکل ۶.۷ ب) اختلاف پتانسیل دو سر دو مقاومت یکی است، و جریان کلی که ازاین ترکیب می گذرد برابراست با $I=I_1+I_2$. با به‌کاربردن معادلهٔ (۱۵.۷)، نتیجه می گیریم که

$$I=\frac{1}{R_1}V+\frac{1}{R_2}V=\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)V$$

ومقاومت معادل این ترکیب ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} \qquad \text{(اتصال موازی)} \qquad (۳۰.۷)$$

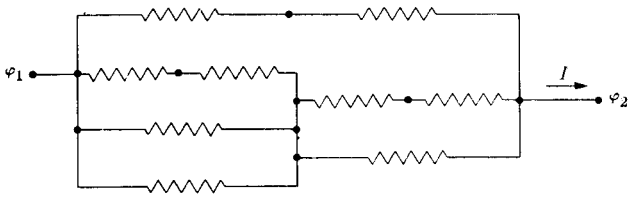
مقاومت معادل شبکهٔ پیچیده‌تری‌مانند شبکهٔ شکل ۷.۷ را می‌توان‌ازترکیب کردن‌دوبه‌دوی مقاومتها طبق معادلات (۲۹.۷) یا (۳۰.۷)، وتکرار این عمل تا زمانی‌که فقط یك‌مقاومت معادل باقی بماند، به‌دست آورد. این روش برای همهٔ شبکه‌ها قابل استفاده نخواهد بود؛

---

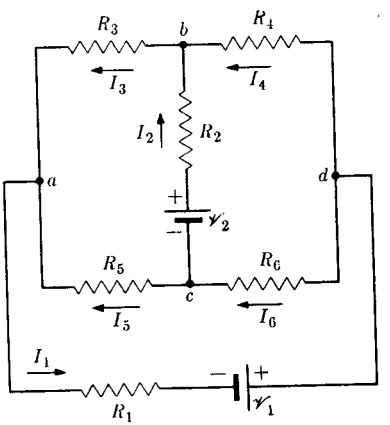
۱. دراین بخش به‌جای نماد $\Delta\varphi$ از V برای اختلاف‌پتانسیل‌استفاده‌خواهیم کرد تا بامتداولترین نمادگذاری مدارهای الکتریکی درتوافق باشد.

ولی هر شبکه‌ای را که دوپایانه داشته باشد می‌توان به‌کمك روش زیر به یك مقاومت معادل تبدیل کرد.

هر مسئلهٔ شبکه‌را می‌توان به‌کمك دوقاعده که به‌قوانین کیرشهوف[1] موسوم‌اند، به‌طور منظم حل کرد. قبل از بیان این قوانین، به‌تعریف دواصطلاح می‌پردازیم. نقطهٔ انشعاب، نقطه‌ای ازمدار است که در آن تعداد سه رسانا ویا بیشتر به‌هم می‌پیوندند، مانند نقاط a،



شکل ۷.۷ یك شبکهٔ مقاومت.



شکل ۸.۷ یك مدار نوعی که کاربرد قوانین کیرشهوف درمورد آن ضروری است. نماد ⊣|⊢ برای نشان‌دادن ولتاژ اعمال‌شده به‌کار می‌رود. دریك مسئلهٔ مداری نوعی، $\mathscr{V}$ها و Rها مشخص‌اند وجریانها را باید معلوم کرد. دومعادله ازشش معادلهٔ مربوط به‌جریانها درمدار بالا عبارت‌اند از: $-I_1+I_3+I_5=0$ و $\mathscr{V}_1=I_6R_6+I_5R_5+I_1R_1$.

---

۱. به‌افتخار گوستاو رابرت کیرشهوف Gustav Robert Kirchhoff (۱۲۰۳—۱۲۵۶/ ۱۸۲۴—۱۸۸۷).

b، c، ویا d درشکل ۸.۷ . هرمسیررسانشی‌بسته درشبکه را یك حلقه گویند. حال‌می‌توان قوانین کیرشهوف را چنین بیان‌کرد

I. جمع جبری جریانهایی‌که به‌یك نقطهٔ انشعاب وارد می‌شوند صفراست، یعنی

$$\sum I_j = 0 \qquad \text{(I)}$$

II. جمع جبری اختلاف پتانسیلهای دور هرحلقه ازشبکه برابر است باصفر، یعنی

$$\sum V_j = 0 \qquad \text{(II)}$$

قانون اول بیان صوری این واقعیت است‌که بارهای الکتریکی نمی‌توانند درنتیجهٔ یك جریان پایا، دریك نقطهٔ انشعاب درمدارجمع شوند. این قانون بیان مجدد معادلهٔ‌پیوستگی درشکل معادلات (۶.۷) و (۷.۷) است، وبدین‌سان هم‌ارز است با

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \qquad \text{(جریانهای پایا)} \qquad [۱۶.۷]$$

قانون دوم صرفاً بیان مجدد رابطهٔ زیر است

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \qquad \text{(میدانهای ساکن)} \qquad [۲۸.۷]$$

برای به‌کاربردن قوانین کیرشهوف، لازم است‌که قانون اهم را یادآوری‌کنیم:
افت پتانسیل درمقاومت R_j برابراست با

$$V_j = I_j R_j \qquad \text{(مقاومت)} \qquad [۱۵.۷]$$

دراینجا فرض می‌شودکه پتانسیل بالاتر در انتهایی است‌که جریان مفروض وارد مقاومت می‌شود. این بیان صورت انتگرالی رابطهٔ زیراست

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E} \qquad \text{(محیط خطی)} \qquad [۱۰.۷]$$

بالاخره ولتاژهای اعمال شده را به‌طریق زیرنمادگذاری می‌کنیم

$$V_j = -\mathcal{V}_j \qquad \text{(ولتاژ اعمال شده)}$$

اگراین‌معادله‌را بامعادلهٔ (۱۵.۷) ترکیب‌کنیم، می‌توانیم‌قانون II کیرشهوف‌را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\sum \mathcal{V}_j = \sum I_j R_j \qquad \text{(II الف)}$$

اگرلازم باشدکه مقاومتهای داخلی چشمه‌ها در نظر گرفته شوند، این مقاومتها می‌توانند به‌سمت راست (II الف) منتقل شوند.

قبل‌ازاینکه قوانین کیرشهوف‌را درموردمسئلهٔ خاصی به‌کاربریم، لازم‌است‌جهتهایی برای جریانهای هرشاخه فرض‌کنیم. این جهات باید درنمودار مدارنشان داده شوند. آن وقت فرمولبندی معادلات (I) و (II الف) براساس این جهات مفروض نوشته می‌شوند. چنانچه ازحل عددی این معادلات برای جریان خاصی یك مقدارعددی منفی به‌دست آید، جهت صحیح این جریان مخالف جهت مفروض است. درمسئله‌ای‌که در شکل ۸.۷ نشان داده شده است، شش جریان مجهول وجود دارند؛ این جریانها با نمادهای I_1، I_2، I_3، I_4، I_5، و I_6، نشان داده شده‌اند وبرای هریك جهت مفروضی منظورشده است.

قانون اول کیرشهوف را برای هرنقطهٔ انشعاب می‌توان به‌کاربرد، لیکن معادلاتی که به‌دست می‌آیند همگی مستقل نیستند. قاعدهٔ کلی‌آن است‌که چنانچه n نقطهٔ انشعاب وجود داشته باشد، تنها $n-1$ نقطهٔ آن معادلات مستقل دارند. درمسئلهٔ نشان داده شده در شکل ۸.۷ شش جریان مجهول وجود دارد؛ حل این مسئله مستلزم سه معادلهٔ نقطهٔ انشعاب و سه معادلهٔ حلقه است.

جمعها در روابط (I) و (II الف)، جمع جبری‌اند. دررابطهٔ (I) اگرجهت‌مفروض جریان به‌سمت نقطهٔ انشعاب‌باشد جریان مثبت درنظر گرفته می‌شود واگراین جهت‌به‌طرف خارج ازنقطهٔ اتصال مورد نظرباشد منفی در نظر گرفته می‌شود. در به‌کاربردن معادلات حلقه، یك جهت (ساعتگرد یا عکس ساعتگرد) برای پیمودن حلقه باید انتخاب شود. هر ولتاژ اعمال شده‌ای راکه بتواند (به‌خودی خود) درجهت پیمودن حلقه جریانی مثبت ایجادکند، مثبت فرض می‌کنیم؛ هرجملهٔ IR را، چنانچه جریانی‌که از مقاومت وابسته به‌آن عبورمی‌کند درجهت پیمودن حلقه باشد، مثبت فرض می‌کنیم.

۷.۷ نظریهٔ میکروسکوپی رسانش

درك رفتارخطی‌که به‌صورت قانون اهم بیان می‌شود و نیز برخی جنبه‌های تجربی دیگر رسانش، براساس یك مدل میکروسکوپی سادهٔ رسانا امکان‌پذیراست. یك ذرهٔ آزاد محیط به‌بار q وجرم m را درنظرمی‌گیریم. دراثرنیروی الکتریکی موضعی، $q\mathbf{E}$، سرعت سوق ذره مطابق بارابطهٔ $m\,d\mathbf{v}/dt=q\mathbf{E}$ افزایش خواهد یافت. اگرذرهٔ باردار درخلأ بود، به‌شتاب گرفتن ادامه می‌داد. ولی درمحیطی مادی‌که یك جریان پایا ازخود عبور می‌دهد سرعت سوق ثابت است، وبنابراین نیروی‌کل وارد برذره باید برابرباصفرباشد. بنابراین علاوه برنیروی الکتریکی، یك نیروی دیگر ناشی ازمحیط نیز باید به‌ذره وارد شود. ساده‌ترین فرض ممکن‌آن است‌که این نیروی کندکننده متناسب باسرعت باشد، پس‌معادلهٔ حرکت به‌صورت زیر درمی‌آید

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=q\mathbf{E}-G\mathbf{v} \qquad (۳۱.۷)$$

مشاهده می‌شود که وقتی $d\mathbf{v}/dt = 0$ باشد، جواب حالت پایا برای سرعت سوق به‌صورت زیر است

$$\mathbf{v} = \frac{q}{G}\mathbf{E} \qquad (۳۲.۷)$$

باوجود این، بررسی جواب کامل معادلهٔ (۳۱.۷) جالب است؛ این جواب عبارت است از

$$\mathbf{v}(t) = \frac{q}{G}\mathbf{E}(1 - e^{-Gt/m}) \qquad (۳۳.۷)$$

به‌شرط آنکه شرط اولیهٔ $\mathbf{v}(0) = 0$ برقرار باشد. این جواب نشان‌می‌دهد که سرعت‌سوق موضعی به‌طور نمایی به‌مقدار پایای خود نزدیك می‌شود یعنی به‌صورت $e^{-t/\tau}$ که در آن τ، زمان واهلش، برابراست با

$$\tau = \frac{m}{G} \qquad (۳۴.۷)$$

اگر G را از دومعادلهٔ (۳۲.۷) و (۳۴.۷) حذف‌کنیم، برای سرعت سوق در حالت پایا مقدار زیررا به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{v} = \frac{q\tau}{m}\mathbf{E} \qquad (۳۵.۷)$$

وقتی این نتیجه‌را بامعادلهٔ (۴.۷) برای تنها یك‌نوع حامل بارترکیب‌کنیم، چگالی‌جریان را به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{J} = Nq\mathbf{v} = \frac{Nq^2\tau}{m}\mathbf{E} \qquad (۳۶.۷)$$

که بنابرقانون اهم بامیدان متناسب است. از مقایسهٔ معادلهٔ بالا بامعادلهٔ (۱۰.۷)، برای رسانندگی مقدارزیررا به‌دست می‌آوریم

$$g = \frac{Nq^2\tau}{m} \qquad (۳۷.۷)$$

یا درحالتی‌که چندین نوع حامل بار وجود داشته باشند مقدار g به‌صورت زیر درمی‌آید

$$g = \sum \frac{N_i q_i^2 \tau_i}{m_i}$$

برای یك‌رسانای الکتریکی نسبتاً خوب، نظیریك نیمرسانا یافلز(ولی نه‌الکترولیت)، τ را می‌توان‌ازنظرفیزیکی به‌عنوان زمان میانگین میان برخوردهای الکترون رسانش تعبیر کرد. درچنین جسمی‌الکترون برای مدتی کوتاه‌شتاب می‌گیرد، وپس‌ازآن با یکی‌ازاتمهای جسم برخورد می‌کند. درنتیجهٔ این برخورد الکترون در جهتی کتره‌ای پرتاب می‌شود، به‌گونه‌ای که اثر میانگین برخورد سرعت سوق الکترون را مجدداً به‌صفر کاهش می‌دهد. اگرمیانگین زمان برخورد τ، ومیانگین سرعت ویژه v باشد، آنگاه بعد ازهرمدت زمان τ الکترونها به‌مقدار mv ازاندازه حرکت خودرا ازدست می‌دهند. در حالت پایا، آهنگ اتلاف اندازه حرکت mv/τ با آهنگ کسب اندازه حرکت qE برابرقرار داده می‌شود، ونتیجهٔ حاصل بامعادلهٔ (۳۵.۷) یکی است. زمان میانگین τ بارابطهٔ زیر به‌مسافت آزاد میانگین الکترون مربوط می‌شود

$$l = v_T\tau \qquad (۳۸.۷)$$

که‌درآن v_T سرعت گرمایی الکترونهاست. دراینجا مجدداً تأکید می‌کنیم که v_T ازسرعت سوق v بسیاربیشتر[1] است (گرچه جهت آن‌کتره‌ای است). در اکثر فلزها v_T در حدود $10^6 m/s$ (تقریباً مستقل ازدما) است، و در نیمرساناها مقدارآن در دمای اتاق تقریباً یك مرتبهٔ بزرگی کمتراست؛ ازسوی‌دیگرسرعت سوق میانگین v درفلزهای معمولی از حدود $10^{-2} m/s$ بیشترنیست. درفلزها و نیمرساناهامسافت آزاد میانگین در دمای اتاق نوعاً چند صد آنگستروم ($10^{-8} m$) است، به‌طوری که درفلزها $\tau \approx 10^{-14} s$؛ در نیمرساناها τ ممکن‌است یك‌مرتبهٔ بزرگی طولانیتر باشد. درهردومورد، چون τ بازمان آغازبرقراری یا زمان فروافت جریان اهمی نیزبرابراست، به‌هنگامی که میدان درمقاومتهای ساخته‌شده ازاین مواد برقرار ویا حذف می‌شود، این فاصلهٔ زمانی عملا لحظه‌ای[2] محسوب می‌شود. این نکته را متذکرمی‌شویم که در فلزات، زمان واهلش τ برای فروافت جریان، زمان برخورد، وثابت زمانی t_c برای اتلاف چگالی باراضافی همه برابرمی‌شوند، هرچندکه‌از لحاظ مفهومی متفاوت‌اند.[3]

ازجدول ۱.۷ پیداست که فلزات موادی هستندکه بالاترین رسانندگی الکتریکی دارند. رسانندگی این مواد به‌دو دلیل بسیارزیاداست، اول اینکه چگالی حاملهای باردر آنها زیاد است، یعنی درحدود یك حامل باربرای هراتم، و دیگراینکه سرعت سوق برای واحد میدان الکتریکی درفلزات زیاد است. درفلزات فقط با یك نوع حامل بار، یعنی باالکترون، سروکارداریم. لذا دراین مورد معادلات رسانش ساده‌اند

---

۱. تنها به‌همین دلیل است که می‌توان τ را ازمیدان شتاب‌دهندهٔ E مستقل فرض کرد.

۲. درمقیاس فواصل‌ماکروسکوپی، محدودیت عمدهٔ زمانی عبارت است از زمان طولانیتر لازم برای انتشارمیدان درسرعت نور، مثلا $10^{-10} s$ برای مسافت ۳ سانتیمتری درخلأ.

۳. درهررسانای ضعیف، زمان برخورد ممکن است بی‌معنی باشد ، ویا t_c ممکن است ، مطابق معادلات (۲۷.۷) و (۳۷.۷)، به‌طور معکوس با τ متناسب باشد.

$$\mathbf{J} = -Ne\mathbf{v} \tag{۳۹.۷}$$

$$g = Ne(v/E) = Ne^{2}\tau/m \tag{۴۰.۷}$$

دراینجا e قدرمطلق بارالکترون است. سرعت سوق الکترون برای واحد میدان‌الکتریکی (v/E) را تحرك الکترون می گویند. تحرك زیاد بدان معناست که زمان برخورد، τ، یا به‌عبارت دیگر، مسافت‌آزاد میانگین طولانی‌است. برای‌اینکه بتوانیم‌مسافت‌آزاد میانگین الکترونها درفلزرا بهتر تجسم کنیم باید ازدینامیك برخورد الکترونها استفاده‌کنیم.می‌دانیم که رسانا از حیث الکتروستاتیکی فقط به‌طور متوسط خنثی است، و اینکه در ابعادی از مرتبهٔ یك‌آنگستروم تغییرات زیادی درپتانسیل‌آن وجود دارد. همچنین می‌دانیم‌که هرذرهٔ باردار مانند الکترون، باید برخوردکند ویا براثرتغییرات در پتانسیل پراکنده شود. اما به‌این نکته نیزواقفیم که درحرکت الکترون در مقیاس اتمی ماهیت موجی‌آن نقش مهمی ایفا می کند. حل‌کامل مسئلهٔ برخورد الکترونی با به‌کاربردن مفاهیم مکانیك موجی از حدود این‌کتاب خارج است؛ دراینجا فقط به‌ذکریکی ازنتایج‌آن می‌پردازیم. دریك بلور کامل که پتانسیل تناوبی سه‌بعدی دارد، یك موج الکترونی اصلا برخوردی نمی‌کند؛ زمان‌برخورد τ برای آن نامتناهی است. از این‌رو ، متناهی بودن رسانندگی فلزات ناشی از وجود ناکاملیهایی درساختارکاملا تناوبی‌آنهاست. این ناکاملیها بردونوع‌اند: (۱) ناخالصیها و نقصهای هندسی (نظیر مرزهای دانه‌ای درمواد چند بلوری) و (۲) ناکاملیهای ناشی از حرکت‌گرمایی اتمها درساختارماده. این هردونقص مستقل ازیکدیگر به‌مقاومت ویژه‌کمك می کنند (قاعدهٔ ماتیسن[1]) به‌گونه‌ای که

$$\eta = \eta_{1} + \eta_{2}(T) \tag{۴۱.۷}$$

که درآن T دمای مطلق است.

در دماهای معمولی، پراکندگی امواج الکترونی توسط اتمهایی که در اثر گرما جابه‌جا شده‌اند سهم اصلی را در مقاومت ویژهٔ فلزات بسیار خالص دارد. بنابراین، $\eta \approx \eta_{2}(T)$. مقطع مؤثر پراکندگی دریك اتم جابه‌جا شده متناسب است بامربع دامنهٔ ارتعاش آن (x^{2})، به‌عبارت دیگرمتناسب است بابیشینه انرژی پتانسیل آن. بافرض اینکه براتمهای جابه‌جا شده نیروهای بازگردانندهٔ‌کشسان وارد می‌شود، داریم

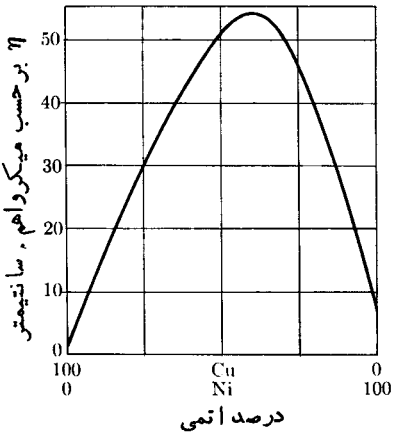
$$(\text{انرژی پتانسیل})_{\max} = (\text{انرژی جنبشی})_{\max} \propto kT$$

به‌طوری که

$$\eta \approx \eta_{2} \propto (\tau_{2})^{-1} \propto x^{2} \propto T \tag{۴۲.۷}$$

---

1. Matthiessen



شکل ۹.۷ مقاومت ویژهٔ آلیاژهای مس ـ نیکل برحسب تابعی ازنسبت ترکیب در ۲۰°C.

یا اگراین رابطه را باکلمات بیان کنیم، مقاومت ویژهٔ فلز خالص متناسب است بادمای مطلق. بنابراین ضریب گرمایی مقاومت، $(1/\eta)d\eta/dT$، برای فلزهای بسیار خالص، عبارت است از

$$\alpha=\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dT}\approx\frac{1}{T} \qquad (۴۳.۷)$$

که باارقام مربوط به‌فلزات درجدول ۱.۷ تقریباً توافق دارد. به‌بیان دقیقتر، باید گفت که استدلال بالافقط وقتی معتبراست که دما ازدمای دبی فلز(دمایی که دربالاترازآن تمام مدهای ارتعاشی اتمی برانگیخته می‌شوند) بالاترباشد. در دماهای کمی پایینترازدمای دبی، η به‌زیرمقدار پیش‌بینی شده دررابطهٔ خطی (۴۲.۷) سقوط می‌کند. در دماهای بسیار کم ازسهم η_1 نمی‌توان صرفنظر کرد.

افزودن مقدارکمی ناخالصی، همیشه مقاومت ویژه را افزایش می‌دهد. آلیاژ را می‌توان فلز ناخالصی درنظرگرفت که مقاومت ویژهٔآن همیشه از مقاومت ویژهٔ فلزی از فلزات تشکیل دهندهٔ آلیاژکه مقاومت ویژهٔکمتری دارد، بیشتر است (شکل ۹.۷). ضریب گرمایی α درهرآلیاژ آشکاراکمتراست ازضریب مربوط برای فلز خالص، درست به‌این دلیل‌که مقاومت ویژهٔآن بیشتراست. باوجود این تعدادی آلیاژ ساخته شده‌اندکه ضرایب گرمایی بسیارکم دارند.

۸.۷ خلاصهٔ مطالب

مهمترین موارد استفادهٔ فنی الکتریسیته به‌جریان بارهای متحرك مربوط است؛ همانطورکه

درفصل بعد توصیف خواهد شد، این جریانها درمبحث مغناطیس نیزاهمیت اساسی دارند. چگالی جریان، که درنقطه‌ای درفضا به‌طورموضعی تعریف می‌شود، برابر است با

$$\mathbf{J}=\sum N_i q_i \mathbf{v}_i$$

ازآنجاکه چگالی باربرابراست با

$$\rho=\sum N_i q_i$$

درمواردی ممکن است چگالی بارصفرباشد، در عین آنکه چگالی جریان غیر صفر است. این مورد (یعنی رسانش، درمقابل همرفتی) موضوع بحث ما در اینجاست. جریان کل از یك سطح S عبارت است از

$$I=\int_S \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\,da$$

و

$$I=\frac{dQ}{dt}$$

بقای بار درهرنقطه بامعادلهٔ پیوستگی به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$\nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

(درحال حاضرما عمدتاً جریانهای پایا را درنظرمی گیریم، که برای آنها $\nabla\cdot\mathbf{J}=0$، و همچنین $\partial\mathbf{J}/\partial t=0$) جریان رسانشی در یك محیط بایك معادلهٔ ساختمندی داده می‌شود که درساده‌ترین مورد خطی، رسانندگی g به‌کمك آن به‌صورت زیرتعریف می‌شود

$$\mathbf{J}=g\mathbf{E}$$

۱. صورت انتگرالی معادلهٔ ساختمندی، قانون اهم است

$$V=IR$$

مقاومت یك رسانای مستقیم باسطح مقطع یکنواخت برابراست با

$$R=l/gA$$

۲. وقتی دریك محیط رسانای پیوسته جریانهای پایا وجود داشته باشند، پتانسیل ازمعادلهٔ

لاپلاس پیروی می‌کند

$$\nabla^2\varphi = 0$$

شرایط مرزی برای $\mathbf{E}$ همان شرایط مرزی در محیط دی‌الکتریکی است، و شرایط مرزی مربوط به $\mathbf{J}$ با شرایط مربوط به $\mathbf{D}$ یکسان‌اند. درنتیجه، برای دو رسانا که درمحیطی نامتناهی قرار گرفته‌اند داریم

$$RC = \frac{\varepsilon}{g} \qquad \text{(یکاهای mks)}$$

۳. اگر چگالی حجمی بار در محیطی رسانا در ابتدا صفر نباشد، با ثابت زمانی زیر افت می‌کند

$$t_c = \frac{\varepsilon}{g} \qquad \text{(یکاهای mks)}$$

این زمان برای فلزات درحدود 10^{-14}s است، و برای رساناهای ضعیفتر ممکن است به چندین ماه نیز برسد.

۴. برای مدارهای الکتریکی، معادلات ایستای $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ و $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ به دو قانون کیرشهوف تبدیل می‌شوند

$$\Sigma I_j = 0 \quad \text{دریك نقطهٔ اتصال}$$

$$\Sigma V_j = 0 \quad \text{دوریك حلقه}$$

برای تأمین توان تلف شده توسط جریانهای پایا در مقاومتها، باید ولتاژهای معینی توسط بعضی وسایل، مثلا، توسط باتریهایی که بیان طرزکارشان درچارچوب مبحث الکتروستاتیك امکان‌پذیر نیست اعمال شود. بنابراین، حل کامل مسئلهٔ مدار به کمك قانون اهم بسیار راحت است.

۵. نظریهٔ میکروسکوپی رسانش اهمی، علاوه برنیروی الکتریکی شتاب دهنده، به‌یك نیروی کندکنندهٔ خطی که بربارهای آزاد موجود در محیط وارد می‌شود نیز وابسته است. اگر این موضوع را برحسب زمان واهلش τ بنویسیم داریم

$$g = \frac{Nq^2\tau}{m}$$

زمان τ عبارت است ازثابت زمانی مربوط به‌برقرارشدن موضعی یك جریان اهمی پس‌از اعمال میدان؛ درموارد عملی τ کوتاه است (10^{-14}s درفلزات). دررساناهای الکترونی خوب (فلزات، نیمرساناها)، τ به‌عنوان فاصلهٔ زمانی میانگین میان برخوردها تعبیرمی‌شود. دراین موارد τ به‌مسافت آزاد میانگین الکترون، به‌صورت زیر بستگی دارد

$$\tau = l/v_T$$

که در آن v_T سرعت گرمایی کتره‌ای است و نه‌سرعت سوق.

مسائل

۱.۷ حداکثر جریانی که می‌تواند ازسیمی مسی به‌سطح مقطع $2mm^2$ بگذرد، ۲۰A است. (الف) چگالی جریان مربوط برحسب A/m^2 چقدراست؟ (ب) بااین فرض که‌از هراتم مس یك الکترون در رسانش شرکت می‌کند، سرعت سوق الکترونی مربوط به‌این چگالی جریان‌را محاسبه کنید. (عددآوو گادرو: اتم درمول $N_0 = 6.02 \times 10^{23}$؛ وزن اتمی مس: ۶۳٫۵ ؛ چگالی مس: $8.92\ g/cm^3$) (ج) بااستفاده ازرسانندگی تجربی، زمان برخورد میانگین یك الکترون درمس را محاسبه کنید.

۲.۷ رسانندگی آب دریا تقریباً $4.3(\Omega m)^{-1}$ است. چگالی جریان درسلولی به‌طول 1cm وسطح مقطع $1cm^2$ ازآب دریا را، وقتی اختلاف پتانسیل 3V به‌دوسرآن اعمال شود، پیدا کنید. سرعت سوق میانگین را محاسبه کنید. فرض کنید که غلظت یونها ۲ درصد است.

۳.۷ دوصفحهٔ فلزی مسطح نامتناهی وموازی به‌فاصلهٔ d ازیکدیگرقراردارند. فضای‌میان آنها بادومحیط رسانا پرشده است وفصل مشترك دومحیط صفحه‌ای‌است موازی باصفحات فلزی. محیط اول (رسانندگی g_1، گذردهی ε_1) به‌ضخامت a، ومحیط‌دوم (رسانندگی g_2، گذردهی ε_2) به‌ضخامت $d-a$ است. صفحات‌فلزی به‌ترتیب درپتانسیلهای φ_1 و φ_2 قرار دارند. درحالت پایا، پتانسیل فصل مشترك دو محیط، وچگالی سطحی بار بر روی این فصل مشترك چقدر است؟

۴.۷ دستگاهی ازبارهاوجریانهای‌الکتریکی‌دردرون‌حجم ثابت V کاملامحصوراست. گشتاور دوقطبی توزیع بار ـ جریان (بخش ۹.۲) به‌صورت زیرتعریف می‌شود

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{r}\rho\, dv$$

که در آن $\mathbf{r}$ بردارمکان نسبت به‌مبدئی ثابت است. ثابت کنید که

$$\int_V \mathbf{J}\, dv = \frac{d}{dt}\mathbf{p}$$

(راهنمایی: ابتدا اتحاد زیررا ثابت کنید

$$\int_V \mathbf{J} dv = \oint_S \mathbf{r}\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, da - \int_V \mathbf{r}\nabla \cdot \mathbf{J}\, dv$$

وتوجه داشته باشید که $\mathbf{J}$ برروی سطح S صفرمی‌شود.)

۵.۷ محیطی رسانا درمیدان یکنواخت $\mathbf{E}_0$ قراردارد. حفره‌ای کروی به‌شعاع a درمحیط ایجادکرده‌ایم. (الف) پتانسیل داخل وخارج حفره راپیداکنید. (ب) بارسطحی‌ظاهرشده برسطح حفره چقدراست؟ (ج) خطوط میدان را رسم کنید.

۶.۷ خازنی باصفحات موازی ازماده‌ای باثابت دی‌الکتریك K و رسانندگی g پر شده است. خازن بابار اولیهٔ Q باردارشده است. (الف) نشان دهیدکه بار به‌صورت تابعی نمایی اززمان ازصفحات نشت می‌کند. (ب) نشان دهیدکه تولید گرمای ژول‌کل برابر است باانرژی الکتروستاتیکی ذخیره شده در آغاز. (ج) اگرماده اکسید سیلیسیوم باشد، ثابت زمانی تخلیه چقدراست؟ (جدولهای ۱.۴ و ۱.۷)

۷.۷ دوپوستهٔ استوانه‌ای فلزی طویل (به‌شعاعهای r_1 و r_2، $r_2 > r_1$)، به‌صورت هم محورقرارداده شده‌اند. پوسته‌ها دراختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ قراردارند. (الف) فضای میان پوسته‌ها بامحیطی به‌رسانندگی g پرشده است. بااستفاده از قانون اهم، $\mathbf{J}=g\mathbf{E}$، جریان الکتریکی‌میان واحدطول پوسته‌ها را محاسبه‌کنید. (ب) اگرفضای میان دوپوسته‌بامحیطی نارسانا با گذردهی ε پرشده باشد، می‌توان ظرفیت دستگاه را از تعریف $C=Q/\Delta\varphi$ حساب‌کرد. نشان دهید که برای این وضعیت هندسی حاصل‌ضرب مقاومت در واحد طول درظرفیت درواحد طول مساوی ε/g است.

۸.۷ مقاومت نشت‌کابلی باپوشش عایق لاستیکی به‌طریق زیر اندازه‌گیری می‌شود: طول l ازکابل عایق‌داررا درمحلول‌آب نمك فرومی‌بریم، اختلاف پتانسیلی میان قسمت‌رسانای کابل ومحلول برقرارمی‌کنیم، وجریانی راکه ازکابل می‌گذرد اندازه می‌گیریم. در یك مورد خاص ۳ مترازکابل‌را درمحلول فرو برده‌ایم و با اعمال اختلاف پتانسیل ۲۰۰ ولت میان رسانا ومحلول، جریانی برابر با 2×10^{-9} آمپر اندازه گیری کرده‌ایم. ضخامت عایق برابر شعاع رسانای درون آن است. مقاومت ویژهٔ الکتریکی عایق چقدر است؟

۹.۷ سیم مسی طویلی به‌شعاع a درفاصلهٔ h ازیك صفحهٔ نامتناهی مسی و به‌موازات آن کشیده شده‌است. فضای بالای صفحه واطراف سیم بامحیطی به‌رسانندگی g پر شده‌است. نشان دهیدکه مقاومت الکتریکی میان این‌دو الکترود مسی درواحد طول‌سیم برابراست‌با

$$R=\frac{1}{2\pi g}\cosh^{-1}\frac{h}{a}$$

۱۰.۷ به‌تمام نقاط سطح یك‌کرهٔ همگن وهمسانگرد با رسانندگی g، پتانسیل $\varphi_0\cos\theta$ اعمال شده است. دراینجا θ همان زاویهٔ قطبی معمولی است که نسبت به‌یك محورکه از مرکزکره می‌گذرد اندازه‌گیری می‌شود. چگالی شدت جریان $\mathbf{J}$ را در تمام نقاط درون

کره محاسبه کنید.

۱۱.۷ دوالکترود مسی استوانه‌ای به‌شعاع a برصفحهٔ دیسکی‌ازجنس سیلیسیوم به‌ضخامت s عمودند وفاصلهٔ محورهای آن دو ازیکدیگر b است. الکترودها تا عمق s دردیسك فرو رفته‌اند، به‌عبارت دیگر،کاملا تاانتهای دیسك رفته‌اند. ابعاد سطح دیسك نسبت به b خیلی بزرگ است، به‌طوری‌که می‌توان‌آن‌را نامتناهی انگاشت. اگر رسانندگی سیلیسیوم g باشد، جریان‌میان الکترودهارا،وقتی‌که اختلاف پتانسیل‌آنهابرابر $\Delta\varphi$ است، حساب کنید.

***۱۲.۷** یك صفحهٔ مسی مربع شکل به‌ضلع a ۲۰ و ضخامت s و رسانندگی g تحت تأثیر اختلاف پتانسیلی به‌نحو زیرقرار دارد: یکی از لبه‌های صفحه در پتانسیل φ_0 و لبهٔ مقابل آن درپتانسیل $-\varphi_0$ قراردارد. (الف) مقاومت‌الکتریکی صفحه چقدراست؟ (ب) سوراخ کوچکی به‌شعاع a درمرکز صفحه ایجاد می‌کنیم. نسبت تغییر مقاومت را به طور تقریبی محاسبه کنید. (راهنمایی: توزیع پتانسیل را درصفحه بااستفاده از هماهنگهای استوانه‌ای کسینوس θ پیدا کنید. متأسفانه توزیعی‌که بدین نحو به‌دست می‌آورید کاملا صحیح‌نیست، زیراکه لبه‌های مقابل مربع دقیقاً منطبق برخطوط هم پتانسیل این توزیع نیستند. جواب تقریبی را می‌توان بامساوی گرفتن پتانسیل متوسط لبه‌ها با $\pm\varphi_0$ به‌دست آورد.)

۱۳.۷ نسبت‌اتلاف توان به‌مساحت سطح را برای رساناهای مذکوردر (الف) مسئلهٔ ۱.۷ و (ب) مسئلهٔ ۲.۷، محاسبه کنید.

۱۴.۷ سه مقاومت ۱ اهمی و۲ اهمی و۳اهمی‌داده‌شده‌اند. مقاومت‌شانزده ترکیب‌مختلف راکه بااین مقاومتها می‌توان ساخت پیدا کنید.

۱۵.۷ یك لامپ ۴ر۰ واتی چنان طراحی شده است‌که بـا اختلاف پتانسیل ۲ ولتی کار کند. مقاومتRرا به‌طورموازی بالامپ می‌بندیم وترکیب این‌دو را بایك مقاومت۳ اهمی ویك باتری ۳ ولتی (بامقاومت‌داخلی ۱/۳ اهم) به‌طورسری قرارمی‌دهیم. مقدار R باید چقدرباشد تا لامپ در ولتاژ طرح‌کار کند؟

***۱۶.۷** یك خط مقاومت‌بامقاومت‌کل nR میان پتانسیل φ_0 وزمین وصل‌شده است(منظور اززمین پتانسیل مرجع است). خط مقاومت روی $n-1$ تیربافواصل مقاومتی یکسان‌قرار گرفته است، به‌طوری‌که مقاومت میان هردوتیر R است. مقاومت نشت به‌زمین در هر یك از تیرها βR است. اگر φ_m پتانسیل خط مقاومت در mامین تیرباشد نشان دهید که

$$\varphi_{m+1}-(2+\beta^{-1})\varphi_m+\varphi_{m-1}=0$$

۱۷.۷ دوباتری راکه به‌ترتیب دارای ولتاژ مدارباز $\mathscr{V}_1$ و $\mathscr{V}_2$ ومقـاومت داخلی R_1 و R_2اند به‌طور موازی به‌یکدیگر و به‌مقاومت بار R می‌بندیم. (الف) جریان‌را درمقاومت بارپیدا کنید. (ب) اگرمقاومت بارتغییر کند ولی سایر کمیتها ثابت بمانند، R بایدچه‌مقدار

باشد تا توان تلف شده در آن حداکثر شود؟

۱۸.۷ یك گروه شامل n پیل متشابه با ولتاژ مدار باز $\mathscr{V}_0$ ومقاومت داخلی R_I را برای ایجاد جریانی درمقاومت بار R به‌کار می‌بریم. نشان دهید اگر این n پیل را به‌یکدیگر وبامقاومت R به‌طور متوالی ببندیم، آنگاه $I=n\mathscr{V}_0/(R+nR_I)$؛ ولی هرگاه پیلها را موازی ببندیم و ترکیب آنها را به‌طور متوالی به‌مقاومت R وصل می‌کنیم آنگاه $I=\mathscr{V}_0/(R+R_I/n)$.

۱۹.۷ شش مقاومت مشابه (R) را به‌هم می‌بندیم تا تشکیل یك شش ضلعی بدهند. شش مقاومت دیگر (همگی باهمان مقاومت R) را میان شش رأس این شش ضلعی و مرکز آن وصل می‌کنیم. (الف) مقاومت معادل میان هردو رأس مقابل چقدراست؟ (ب) مقاومت معادل میان هردورأس مجاورچقدراست؟

۲۰.۷ شش مقاومت اضلاع یك چهار وجهی را تشکیل می‌دهند. پنج تا از مقاومتها یکسان‌اند (R)، و ششمی برابر R_1 است. اختلاف پتانسیلی به‌دوسر یکی از مقاومتهای مجاور R_1 اعمال می‌کنیم. نشان دهیدکه تولیدگرمای ژول در R_1 وقتی حداکثر است که $R_1=(3/5)R$ باشد.

۲۱.۷ چنانچه درمدار شکل ۸.۷ ولتاژ $\mathscr{V}_2$ را صفرکنیم و گالوانومتر R_g را به‌جای مقاومت R_2 قرار دهیم، یك مدار پل‌وتستون[1] به‌دست می‌آوریم. R_1 را نیزصفر می‌گیریم. این پل وقتی به‌حالت تعادل (جریان صفر از گالوانومتر) می‌رسد که $R_3R_6=R_4R_5$ باشد. بدین ترتیب یك مقاومت مجهول، مثلا R_6، را می‌توان برحسب مقاومتهای معلوم تعیین کرد: در حالت تعادل $R_6=R_4R_5/R_3$. (الف) جریان الکتریکی را که درحالت عدم تعادل از گالوانومتر می‌گذرد حساب کنید. (ب) فرض کنید می‌خواهیم با تغییر دادن R_4 پل‌را به‌حالت تعادل درآوریم. حساسیت پل بارابطهٔ $S=CR_4(\partial I_2/\partial R_4)_0$ تعریف می‌شود، که در آن C مقدارانحراف گالوانومتر به‌ازای عبورواحد جریان است، وشاخص صفر به‌معنی آن است که مشتق پاره‌ای باید درحالت تعادل محاسبه شود. ثابت کنیدکه

$$S=\frac{C\mathscr{V}_1}{R_3+R_4+R_5+R_6+R_g(1+R_5/R_6)(1+R_4/R_3)}$$

***۲۲.۷** پل‌وتستون مسئلهٔ قبل نزدیك بـه حالت تعادل است فرض کنید $R_5/R_3=\alpha$ و $R_6/R_4=\alpha(1-\varepsilon)$، که درآن $\varepsilon\ll 1$. اگرمقاومت R_g قابل چشمپوشی‌باشد، نشان دهید که $I_2/I_1=\alpha\varepsilon/(\alpha+1)^2$.

***۲۳.۷** یك مقاومت تقریباً ۱۰ اهمی را می‌خواهیم با مدار پل‌وتستون مسئلهٔ ۲۱.۷ اندازه

---

1. Wheatstone

بگیریم، تعداد بسیار متنوعی مقاومت معلوم استاندارد دردست داریم. حداکثر توان مجاز دستگاه ۵ وات است. اگر $R_g = 100\Omega$، و گالوانو متر جریانهایی را که درست 4×10^{-9}A یا بیشترند نشان دهد، بالاترین دقتی که می‌توان دراندازه‌گیری یك‌مقاومت مجهول به‌دست آورد چقدراست؟ فرض کنید مقاومتهای استاندارد کاملا دقیق باشند و محدودیتی دردقت ایجاد نکنند.

*۲۴.۷ یك محیط رسانای خطی در n نقطه به الکترودهایی به پتانسیلهای ثابت $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ وصل شده است. نشان دهیدکه گرمای ژول تولید شده در محیط از فرمول $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i I_i$ به‌دست می‌آید، که درآن I_i جریانی است که‌ازالکترود i وارد محیط می‌شود.

۸

میدان مغناطیسی جریانهای پایا

دومین میدانی که در مبحث الکتریسیته و مغناطیس مطالعه می‌شود، میدان مغناطیسی است. این میدانها، یا به‌عبارت دقیقتر ، آثاراین‌میدانها از زمانهای بسیار قدیم ، یعنی‌ازهمان‌وقتی که آثارناشی ازمغناطیسهای طبیعی سنگ‌آهنربا (Fe_3O_4) برای اولین بـار مشاهده شد، شناخته شده‌اند. خواص شمال وجنوب‌یابی این ماده تأثیرمهمی بردریا نوردی و اکتشاف گذاشت. باوجود این، جز دراین مورد، مغنـاطیس پدیده‌ای بودکه‌کم مورد استفاده قرار می گرفت وکمتر نیز شناخته شده بود، تااینکه در اوایل قرن نوزدهم اورستد دریافت که جریان‌الکتریکی میدان مغناطیسی تولیدمی‌کند. این‌کار، توأم باکارهای بعدی‌گاؤس،هنری، فاراده ودیگران، اهمیت میدان مغناطیسی‌را به‌عنوان‌شریك میدان الکتریکی نمایان‌ساخت. کارهای نظری ماکسول ودیگران (فصلهای ۱۱ و ۱۶) نشان دادندکه این شراکت واقعی است، ومیدانهای الکتریکی و مغناطیسی به طرزی جدایی‌ناپذیر درهم آمیخته‌اند. تلاش مردان عمل به‌توسعهٔ ماشینهای‌الکتریکی، وسایل مخابرات، وکامپیوترها منجرشد. این‌وسایل که پدیدهٔ مغناطیسی در آنها دخیل است نقشی بس مهم درزندگی روزمره ایفـا می‌کنند. در این فصل تعاریف اساسی مربوط به‌مغناطیس داده می‌شوند، میدانهای مغناطیسی حاصل از جریان پایای الکتریکی مطالعه می‌شود و برخی پـایه‌های اساسی برای مطالعات آینده گذارده خواهد شد.

۱.۸ تعریف میدان مغناطیسی

درفصل ۲ نیروی‌کولن ناشی ازبار q_1 درمبدأ، که به‌هر بـار q واقع در $\mathbf{r}$ وارد می‌شود

با رابطهٔ زیر داده شد

$$\mathbf{F}_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_1}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad (1.8)$$

در آنجا به‌طور ضمنی فرض شد که هر دو بار ساکن‌اند. اگر بارها به‌ترتیب با سرعتهای $\mathbf{v}$ و $\mathbf{v}_1$ درحرکت یکنواخت باشند، علاوه براین نیرو یك نیروی مغناطیسی $\mathbf{F}_m$ نیز ازطرف q_1 به q وارد می‌شود

$$\mathbf{F}_m = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qq_1}{r^2}\mathbf{v}\times\left(\mathbf{v}_1\times\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \qquad (2.8)$$

عدد $\mu_0/4\pi$ دراینجا نقش $1/4\pi\varepsilon_0$ درالکتروستاتیك را ایفا می کند، یعنی، این‌عددثابتی است که برای سازگاری یك قانون تجربی بامجموعه‌ای از یکاها لازم است. در دستگاه یکاهای mks، بنا به‌تعریف، داریم

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}^2/\mathrm{C}^2$$

واین به‌تعریف اصلی کولن می‌انجامد (بخش ۳.۸). همچنین،مثل‌موردنیروی‌الکتروستاتیکی، مناسب است که باتعریف کردن میدان مغناطیسی، خواص «بار آزمون» را جدا کنیم؛ دراین مورد نه‌فقط بار آزمون q، بلکه سرعت آن $\mathbf{v}$ نیز باید به‌صورت عاملی جدانگه داشته‌شود

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v}\times\mathbf{B} \qquad (3.8)$$

که در آن میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ برابراست با

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1}{r^2}\mathbf{v}_1\times\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad (4.8)$$

اگر تعدادی چشمهٔ بارمتحرك وجود داشته باشند، نیروها ومیدانها جمع پذیرند. درتعریف $\mathbf{B}$ نیز باید نوعی فرایند حدی منظور کنیم تا اطمینان حاصل کنیم که بار آزمون روی چشمه‌های مولد $\mathbf{B}$ تأثیرنمی گذارد. در دستگاه mks یکای میدان مغناطیسی، بنا به معادلهٔ (۳.۸)، عبارت است از نیوتون ـ ثانیه برکولن ـ متر، که تسلا (T) نامیده می‌شود. در حالتی که میدان الکتریکی ومیدان مغناطیسی هردوموجود باشند، نیروی کل وارد بر بار متحرك برابراست با $\mathbf{F}_e+\mathbf{F}_m$،

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \qquad (5.8)$$

که به نیروی لورنتس معروف است.

نیروی مغناطیسی میان دو بار، به خاطر وابستگی به‌سرعت و ضربهای برداری، از نیروی الکتریکی پیچیده‌تر است. دروهلهٔ نخست، شباهت این دو درآن‌است که بزرگی‌هر دونیرو به‌حاصل‌ضرب بارها وعکس مجذورفاصلهٔ میان آنها بستگی دارد (علاوه براین هر دو دارای یك ثابت بعددارهستند). اما جهت نیروی مغناطیسی درراستای خط واصل‌ذرات نیست (یعنی، یك نیروی مرکزی نیست)، مگر اینکه $\mathbf{v}$ تصادفاً بر $\mathbf{r}$ عمود باشد؛ نیروهمیشه درصفحهٔ دربرگیرندهٔ $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}_1$ قرار دارد. مهمتر اینکه نیرو همیشه بر $\mathbf{v}$ عمود است؛ بنابر معادلهٔ (۳.۸)، میدان $\mathbf{B}$ هرچه باشد $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_m = 0$، درنتیجه‌نیروی‌مغناطیسی هرگزبرروی یك ذرهٔ باردارکارانجام نمی‌دهد. اگرصورت ومخرج معادلهٔ (۲.۸) را در ε_0 ضرب کنیم، مقایسهٔ دیگری میان $\mathbf{F}_m$ و $\mathbf{F}_e$ ممکن می‌شود. مقایسهٔ نتیجهٔ این عمل بامعادلهٔ (۱.۸) نشان می‌دهدکه ابعاد $\varepsilon_0\mu_0$ باید برابربا ابعاد عکس مجذور سرعت باشد. اکنون می‌نویسیم

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2} \qquad (۶.۸)$$

که درآن بعد c بعد سرعت است، دراین صورت

$$\mathbf{F}_m = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_1}{r^2}\frac{\mathbf{v}}{c}\times\left(\frac{\mathbf{v}_1}{c}\times\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

بااستفاده ازمقدارتعریف شدهٔ μ_0 ومقدارتجربی ε_0، به‌دست می‌آوریم

$$c = 2{,}9979 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$$

که ازحیث مقداربرابراست باسرعت تجربی نور.[1] درفصل ۱۶ خواهیم دیدکه این‌تطابق عددی تصادفی نیست، بلکه چنانچه نورخود موج الکترومغناطیسی باشد یك پیامد الزامی است. در اینجا لازم نیست به‌عمق معنی این رابطه بپردازیم، بلکه فقط ازآن به‌منزلهٔ یك

---

۱. معادلهٔ(۶.۸) باید درهردستگاه یکای سازگاری برقرارباشد. در دستگاه‌یکاهای گاؤسی، که در آن‌بنابه‌تعریف $\varepsilon_0 = 1/4\pi$ است، مقدار $\mu_0/4\pi = 1/c^2$ را آزمایش‌تعیین می‌کند. اختلاف‌دیگر میان دودستگاه یکا درآن است که در دستگاه یکاهای گاؤسی دو تا c ازیکدیگر جدا وبا v ها همراه می‌شوند به‌طوری‌که می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{B} = \frac{q_1}{r^2}\frac{\mathbf{v}_1}{c}\times\frac{\mathbf{r}}{r} \quad \text{و} \quad \mathbf{F}_m = q\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}$$

فایدهٔ این تعریفها این است که $\mathbf{B}$ و $\mathbf{E}$ ازلحاظ ابعادی یکسان‌اند (و اینکه شکل نسبیتی v/c صریحاً ظاهر می‌شود).

واقعیت تجربی استفاده می‌کنیم. این بدان معنی است که برای یك زوج ذرهٔ داده شده

$$\frac{F_m}{F_e} \leqslant \frac{v}{c}\frac{v_1}{c}$$

یعنی، اگرسرعتهای ذره‌ها درمقایسه باسرعت نور کوچك باشند، برهم‌کنش مغناطیسی از برهم‌کنش الکتریکی بسیار کوچکترخواهد بود. درحقیقت، معادله‌های (۱.۸)، (۲.۸)، و (۴.۸) فقط تقریبهای مرتبهٔ اولی هستند ازعبارتهای نسبیتی‌صحیحی که درفصل ۲۱ به‌دست خواهیم آورد، و این تقریبها تا وقتی برقرارند که $v_1 \ll c$ باشد. باید توجه داشت که میدانهای حاصل از بار q_1، که حرکت یکنواخت دارد، بارابطهٔ زیربه‌هم مربوط می‌شوند

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}_1}{c} \times \frac{\mathbf{E}}{c}$$

(برای سرعتهای به‌حد دلخواه بزرگ نیز این رابطه برقرار است، باآنکه وقتی مقدار v_1 نزدیك به‌مقدار c است عبارتهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ هردو تغییرمی‌کنند.) بالاخره، شایان توجه‌است که نیروی مغناطیسی تنها به‌سرعت نسبی دوبار بستگی ندارد، بلکه مقدارآن دریك‌دستگاه مختصات متحرك متفاوت است[1]؛ واینکه باتعویض برچسب ذرات تغییرحاصل در این نیرو صرفاً یك تغییر علامت نیست. ولی، لازم نیست‌که فعلا به این جنبه‌ها بپردازیم، زیرا در کاربستهایی که دراین فصل ودرفصلهای بعد خواهیم داشت، این اثرها حذف می‌شوند.

ازآنجاکه $F_m \ll F_e$، درولهٔ اول‌ممکن‌است چنین‌به‌نظررسدکه همواره درمقایسه بانیروی الکتریکی از نیروی مغناطیسی می‌توان صرفنظر کرد، اما دستگاههایی از ذرات وجود دارندکه این امردرآنها مصداق پیدا نمی‌کند. به‌ویژه درجریان رسانشی، که درآن بارهای‌مثبت ومنفی باچگالیهای برابرموجودند، میدان الکتریکی ماکروسکوپی صفراست ولی میدان مغناطیسی بارهای متحرك‌صفر نیست. درآهنرباهای الکتریکی، موتورها،مبدلها، و سایر مواردی که نیروهای مغناطیسی از اهمیت عملی بسیار زیادی برخوردارند، چنین وضعیتی برقرار است. بنابراین بابررسی برهم‌کنشهای مغناطیسی میان جریانهای رسانشی موضوع را آغاز می‌کنیم. دربخش بعد نیروی وارد بریك جریان رسانشی واقع درمیدان مغناطیسی موجود، و دربخش ۳.۸ میدان مغناطیسی حاصل از یك جریان رسانشی معین را بررسی می‌کنیم.

---

۱. به‌ویژه دردستگاه مختصاتی که‌باسرعت $\mathbf{v}$ حرکت می‌کند، این‌نیروصفرمی‌شود. این‌وابستگی به‌دستگاه مختصات بافرض اساسی‌مکانیك کلاسیك که بنابرآن نیروها درتمام‌دستگاههای‌مختصات لخت یکسان‌اند، درتناقض است. این مطلب برای ما نخستین سرنخی‌است حاکی ازآن‌که‌نظریهٔ نسبیت برای بررسی الکترومغناطیس ضروری است.

۲.۸ نیروهای وارد بر رساناهای حامل جریان

ازروی نیروی لورنتس (معادلهٔ ۵.۸) می‌توانیم رابطه‌ای برای نیروی وارد بر یك عنصر $d\mathbf{l}$ ازرسانای حامل جریان به‌دست‌آوریم. اگر $d\mathbf{l}$ عنصری از رسانا باشد که جهت آن باجهت جریان I که ازآن می گذرد یکی فرض شود، آن‌وقت $d\mathbf{l}$ باسرعت حاملهای بار دررسانا، $\mathbf{v}$، موازی خواهد بود. اگردرهرواحد حجم از رسانا N حامل باروجود داشته باشد، نیروی وارد برعنصر $d\mathbf{l}$ عبارت است از

$$d\mathbf{F}=NA|d\mathbf{l}|q\mathbf{v}\times\mathbf{B} \qquad (۷.۸)$$

که درآن A مساحت سطح مقطع رسانا و q بارهر حامل باراست. در صورتی‌که چندین نوع حامل بار وجود داشته باشند، آن‌وقت درمعادلهٔ (۷.۸) یك جمع‌بندی‌باید منظورکنیم؛ لیکن نتیجهٔ نهایی، یعنی‌معادلهٔ (۸.۸) تغییرنخواهدکرد. چون $\mathbf{v}$ و $d\mathbf{l}$ موازی‌اند، صورت دیگرنوشتن معادلهٔ (۷.۸) چنین است

$$d\mathbf{F}=Nq|\mathbf{v}|A\,d\mathbf{l}\times\mathbf{B} \qquad [۷.۸]$$

اما $Nq|\mathbf{v}|A$ درست همان جریان ناشی ازیکی از انواع حاملهای بار است. پس برای نیروی وارد برعنصر بی‌نهایت‌کوچکی از رسانای حامل جریان داریم

$$d\mathbf{F}=I\,d\mathbf{l}\times\mathbf{B} \qquad (۸.۸)$$

ازمعادلهٔ (۸.۸) می‌توان انتگرال‌گرفت تا نیروی وارد بریك مدار کامل (یا بسته) به‌دست‌آید. هرگاه مدارمورد نظربامنحنی C نشان داده شود،آنگاه

$$\mathbf{F}=\oint_C I\,d\mathbf{l}\times\mathbf{B} \qquad (۹.۸)$$

چنانچه $\mathbf{B}$ تابعی ازمکان باشد، تنها ساده‌سازیی که در معادلهٔ (۹.۸) امکان‌پذیر است این است‌که جریان I را از زیر انتگرال بیرون آوریم. اما اگر $\mathbf{B}$ یکنواخت، یعنی مستقل از مکان، باشد آن وقت می‌توان آن را نیز از زیر انتگرال بیرون آورد تا نتیجهٔ زیر به‌دست آید

$$\mathbf{F}=I\left\{\oint_C d\mathbf{l}\right\}\times\mathbf{B}$$

محاسبهٔ انتگرال باقی مانده کارآسانی است. چون این انتگرال عبارت است از مجموع بردارهای بی‌نهایت کوچکی که یك مدار کامل را تشکیل می‌دهند، نتیجه‌اش الزاماً صفر است. پس

$$\mathbf{F}=\oint_C I\, d\mathbf{l}\times\mathbf{B}=0 \quad (\text{یکنواخت } \mathbf{B}) \qquad (۱۰.۸)$$

کمیت جالب توجه دیگر گشتاور نیروی وارد بر یك مدار کامل است. عنصر گشتاور نیرو، $d\tau$، را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$d\vec{\tau}=\mathbf{r}\times d\mathbf{F}=I\mathbf{r}\times(d\mathbf{l}\times\mathbf{B}) \qquad (۱۱.۸)$$

گشتاور نیروی وارد بر یك مدار کامل عبارت است از

$$\vec{\tau}=I\oint_C \mathbf{r}\times(d\mathbf{l}\times\mathbf{B}) \qquad (۱۲.۸)$$

در اینجا نیز چنانچه $\mathbf{B}$ یکنواخت نباشد ساده‌سازی بیشتری میسر نیست، اما اگر یکنواخت باشد بسط سر راستی به‌ترتیب زیر امکان‌پذیر است

$$d\mathbf{l}\times\mathbf{B}=\mathbf{i}(dyB_z-dzB_y)+\mathbf{j}(dzB_x-dxB_z)+\mathbf{k}(dxB_y-dyB_x) \qquad (۱۳.۸)$$

با استفاده از این مؤلفه‌ها، مؤلفه‌های $\mathbf{r}\times(d\mathbf{l}\times\mathbf{B})$ را به‌راحتی می‌توان پیدا کرد

$$\begin{aligned}
[\mathbf{r}\times(d\mathbf{l}\times\mathbf{B})]_x &= y\,dxB_y-y\,dyB_x-z\,dzB_x+z\,dxB_z\\
[\mathbf{r}\times(d\mathbf{l}\times\mathbf{B})]_y &= z\,dyB_z-z\,dzB_y-x\,dxB_y+x\,dyB_x \qquad (۱۴.۸)\\
[\mathbf{r}\times(d\mathbf{l}\times\mathbf{B})]_z &= x\,dzB_x-x\,dxB_z-y\,dyB_z+y\,dzB_y
\end{aligned}$$

چون $\mathbf{B}$ مستقل از $\mathbf{r}$ فرض شده است (میدان یکنواخت) مؤلفه‌های $\mathbf{B}$ را می‌توان از زیر انتگرالهایی که در بسط معادلهٔ (۱۲.۸) ظاهر می‌شوند، بیرون آورد. انتگرال‌گیریهای فضایی که باید انجام دهیم از دو نوع کلی زیرند

$$\oint \xi\, d\xi \qquad (\text{۱۵.۸ الف})$$

و

$$\oint \xi\, d\eta \qquad (\text{۱۵.۸ ب})$$

که در آنها ξ نشان‌دهنده هریك از مختصات است و η نمایانگر هر مختصه‌ای است که با ξ متفاوت باشد. انتگرال اولی بدیهی است زیرا که صرفاً انتگرال $d\xi$ ξ است از یك حد پایینی ξ_1 تا یك حد بالایی ξ_2، به‌اضافهٔ همین انتگرال از ξ_2 تا ξ_1. چون جابه‌جا کردن

حدود انتگرال یك علامت منها پدید می‌آورد، پس نتیجه صفر است، و به این ترتیب انتگرالهای مربوط به شش جمله از معادله‌های (۱۴.۸) حذف می‌شوند. انتگرالهای از نوع (۱۵.۸ب) فقط دو متغیر ξ و η را دربردارند، پس فرقی نمی‌کند که این انتگرالها دور منحنی واقعی C محاسبه شوند یا دور تصویر این منحنی برروی صفحهٔ η-ξ (شکل ۱.۸). با به‌کاربردن تصویر برروی صفحهٔ η-ξ به‌راحتی می‌توان دید که انتگرال (۱۵.۸ ب) نشان‌دهندهٔ چیست. درشکل ۲.۸ صفحهٔ η-ξ همراه با سطح بی‌نهایت کوچك $\xi\, d\eta$ نشان‌داده‌شده‌است. انتگرال را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

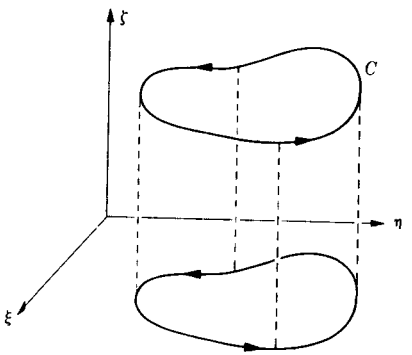
$$\oint \xi\, d\eta = \int_a^b \xi_1(\eta)\, d\eta + \int_b^a \xi_2(\eta)\, d\eta \qquad (۱۶.۸)$$

این انتگرال، همان مساحت سطح محصور به‌وسیلهٔ تصویر منحنی را نتیجه‌می‌دهد، ودرشکل مقدار آن مثبت است. اگر ξ و η در یك دستگاه مختصات راستگرد به‌ترتیب دوری ظاهر شوند، آن وقت جهت دور زدن منحنی، برداریکهٔ عمودی درجهت مثبت ζ به‌دست خواهد داد. پس می‌توان نوشت

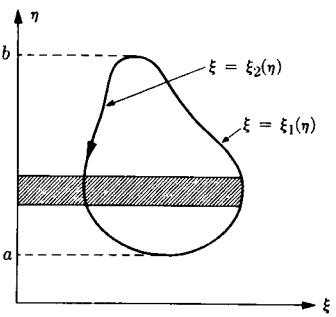
$$\oint \xi\, d\eta = A_\zeta \qquad (۱۷.۸)$$

که‌در آن ξ، η، ζ جایگشت دوری x، y، z اند. با به‌کاربردن این نتایج درمحاسبهٔ انتگرالها، به‌دست می‌آوریم

$$\tau_x = I\oint_C [\mathbf{r}\times(d\mathbf{l}\times\mathbf{B})]_x = I(A_yB_z - A_zB_y) \qquad (۱۸.۸)$$



شکل ۱.۸ تصویر منحنی C برروی صفحهٔ η - ξ.



شکل ۲.۸ محاسبهٔ انتگرال $\int \xi\, d\eta$.

ورابطهٔ مشابهی برای مؤلفه‌های y و z نیز به‌دست می‌آید. سه رابطهٔ حاصل را می‌توان به‌صورت سادهٔ زیرنوشت

$$\vec{\tau}=I\mathbf{A}\times\mathbf{B} \qquad (۱۹.۸)$$

دراین رابطه $\mathbf{A}$ برداری است که مؤلفه‌های آن برابرند بامساحت سطح محصورشده باتصویر منحنی C برروی صفحات yz و zx و xy.[۱] درنظریهٔ مغناطیسی بارها با کمیت $I\mathbf{A}$ برخورد می‌کنیم؛ این کمیت را گشتاور مغناطیسی مدارمی‌نامیم. نماد $\mathbf{m}$ را برای گشتاور مغناطیسی به‌کارخواهیم برد

$$\mathbf{m}=I\mathbf{A} \qquad (۲۰.۸)$$

که $\mathbf{A}$ به‌همان صورت بالا تعریف می‌شود.

به‌شیوه‌ای که دربالا به‌کاررفت به‌آسانی می‌توان نشان دادکه انتگرال $\mathbf{r}\times d\mathbf{l}$ دور یك مسیربسته دوبرابرمساحت محصورشده بامنحنی مسیراست. پس

$$\frac{1}{2}\oint_c \mathbf{r}\times d\mathbf{l}=\mathbf{A} \qquad (۲۱.۸)$$

بااستفاده ازاین رابطه داریم

$$\mathbf{m}=\frac{1}{2}I\oint_c \mathbf{r}\times d\mathbf{l} \qquad (۲۲.۸)$$

که رابطهٔ دیگری است برای گشتاورمغناطیسی. اگرجریان به‌جای محصوربودن درسیمها، درمحیطی جریان داشته باشد ، آن وقت همان‌طور که قبلا نشان داده شد، بهتر است که $I\,d\mathbf{l}$ را با $\mathbf{J}\,dv$ برابربگیریم

$$I\,d\mathbf{l}\rightarrow\mathbf{J}\,dv \qquad (۲۳.۸)$$

دراین‌صورت می‌نویسیم

$$d\mathbf{m}=\frac{1}{2}\mathbf{r}\times\mathbf{J}\,dv \qquad (۲۴.۸)$$

فرمول بالا درمبحث خواص مغناطیسی ماده سودمند خواهد بود.

---

۱. توجه کنیدکه منحنی C به‌منحنیهای مسطح محدود نشده است وتعریف بالا برای $\mathbf{A}$ هر محدودیتی ازاین قبیل را غیرضروری می‌کند.

۳.۸ قانون بیو و ساوار

درسال ۱۸۲۰ / ۱۱۹۹ درست چند هفته پس ازاعلام کشف اورستد مبنی برایجاداثرهای مغناطیسی به‌وسیلهٔ جریانهای الکتریکی، آمپر نتایج یك رشته از آزمایشهای خود را عرضه کرد. نتایج آمپررا می‌توان تعمیم داد وبه‌زبان ریاضیات جدید به‌صورت زیر بیان کرد

$$\mathbf{F}_{۲}=\frac{\mu_{\circ}}{۴\pi}I_{۱}I_{۲}\oint_{۱}\oint_{۲}\frac{d\mathbf{l}_{۲}\times[d\mathbf{l}_{۱}\times(\mathbf{r}_{۲}-\mathbf{r}_{۱})]}{|\mathbf{r}_{۲}-\mathbf{r}_{۱}|^{۳}} \qquad (۲۵.۸)$$

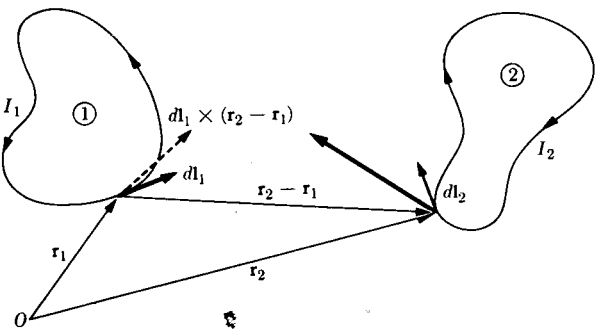
این رابطهٔ نسبتاً پیچیده را می‌توان به‌کمك شکل ۳.۸ توضیح داد. نیروی $\mathbf{F}_{۲}$ نیرویی‌است که ازطرف مدار ۱ به‌مدار ۲ وارد می‌شود، $d\mathbf{l}$ها و $\mathbf{r}$ها درشکل مشخص شده‌اند. برحسب تعریف دردستگاه یکاهای mks داریم

$$\frac{\mu_{\circ}}{۴\pi}=۱\circ^{-۷}\ \mathrm{N/A}^{۲}$$

معادلهٔ (۲۵.۸) به‌عنوان تعریف اصلی آمپر به‌کارمی‌رود، وسپس کولن برحسب آمپر تعریف می‌شود. به‌نظر می‌رسدکه معادلهٔ (۲۵.۸)، از نظر ظاهری، به‌علت عدم تقارن قانون سوم نیوتون‌را نقض می‌کند، لیکن با به‌کاربردن برخی قضایای آنالیز برداری می‌توان نشان داد که درواقع تقارن وجود دارد، یعنی، $\mathbf{F}_{۲}=-\mathbf{F}_{۱}$. (مسئلهٔ ۴.۸)

ازمعادلهٔ (۹.۸) واضح است که معادلهٔ (۲۵.۸) ایجاب می‌کندکه

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_{۲})=\frac{\mu_{\circ}}{۴\pi}I_{۱}\oint_{۱}\frac{d\mathbf{l}_{۱}\times(\mathbf{r}_{۲}-\mathbf{r}_{۱})}{|\mathbf{r}_{۲}-\mathbf{r}_{۱}|^{۳}} \qquad (۲۶.۸)$$



شکل ۳.۸ برهم‌کنش مغناطیسی دومدارجریان.

این رابطه تعمیمی است ازقانون‌بیوو ساوار[1]، که ما این اسم‌را هم برای معادلهٔ (۲۶.۸) وهم برای صورت دیفرانسیلی آن، یعنی رابطهٔ زیر به‌کار خواهیم برد

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}_2)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 d\mathbf{l}_1\times(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3} \qquad (۲۷.۸)$$

اگر از استدلال مشابهی که به‌معادلهٔ (۷.۸) انجامید استفاده کنیم، معادلهٔ (۲۷.۸) مستقیماً ازمعادلهٔ (۴.۸)، چنانچه درمورد یك رسانا به‌کاربرده شود، به‌دست می‌آید. و به‌عنوان آخرین‌نکته، روابط (۲۶.۸) و (۲۷.۸) برای‌توزیع پیوستهٔ جریانی که با چگالی جریان $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ توصیف شود به‌صورت زیردرمی‌آیند

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)\times(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3}dv_1 \qquad (۲۸.۸)$$

و

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}_2)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)\times(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3}dv_1 \qquad (۲۹.۸)$$

مشاهدات تجربی نشان‌می‌دهند که تمام‌میدانهای القایی‌مغناطیسی‌را می‌توان برحسب یك توزیع جریان توصیف کرد. یعنی، $\mathbf{B}$ همواره به‌صورت معادلهٔ (۲۸.۸) است، با چگالی جریان $\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)$. این بدان معنی است که قطبهای مغناطیسی منزوی وجود ندارند، و

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \qquad (۳۰.۸)$$

معادلهٔ (۳۰.۸) برای هرنوع $\mathbf{B}$ که به‌صورت (۲۸.۸) و یا (۲۶.۸) نوشته شودصحیح است، و این مطلب را می‌توان از راه ریاضی به‌طریق زیر اثبات کرد. واگرایی معادلهٔ (۲۸.۸) راحساب‌می‌کنیم. با به‌کاربردن $\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G})=-\mathbf{F}\cdot\nabla\times\mathbf{G}+\mathbf{G}\cdot\nabla\times\mathbf{F}$، داریم

$$\nabla_2\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}_2)=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)\cdot\nabla_2\times\frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3}dv_1$$

---

۱. لازم به‌تذکراست که برسرنامگذاری قوانین مختلف تاحدی اختلاف نظروجود داشته‌است. ما دراینجا وارد این بحث نمی‌شویم وخوانندهٔ علاقه‌مند را به کتاب عالی زیرارجاع می‌دهیم

E.T. Whittaker, *History of the Theories of Aether and Electricity*, Vol. I, Philosophical Library, New York, 1951.

لیکن $(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)/|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3$ شیب $-1/|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|$ است نسبت به $\mathbf{r}_2$. ازآنجا که تاو شیب هر تابعی صفر است، نتیجه می‌گیریم که

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_2)=0$$

۴.۸ کاربردهای مقدماتی قانون بیو و ساوار

به‌علت آنکه محاسبهٔ انتگرالهای معادلهٔ (۲۸.۸) (یا معادلهٔ ۲۶.۸) با اشکال روبه‌رومی‌شود، دامنهٔ مسائلی که درحل آنها این‌معادلات رامی‌توان به‌کاربرد محدوداست. برخی ازحالتهای قابل محاسبه دراین بخش بررسی می‌شوند، در بخشهای دیگرشیوه‌های دیگری برای پیدا کردن $\mathbf{B}$ بررسی خواهد شد.

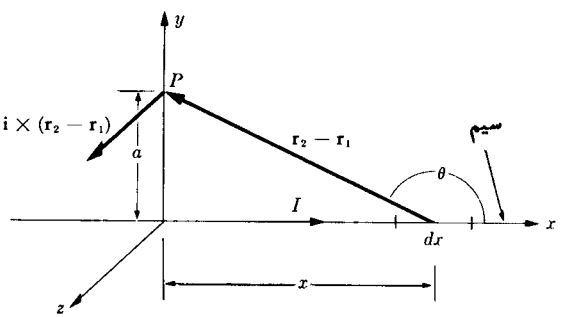
به‌عنوان اولین مثال، میدان مغناطیسی ناشی ازسیمی مستقیم وبسیار بلند را بررسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم که سیم در امتداد محور x، ازمنهای بینهایت تا به‌اضافهٔ بینهایت، امتداد دارد وجریان I را حمل می‌کند. میدان دریك نقطهٔ نوعی اختیاری $\mathbf{r}_2$ برروی‌محور y محاسبه خواهد شد. وضعیت هندسی مسئله در شکل ۴.۸ نشان داده شده است. میدان مغناطیسی به‌صورت زیراست

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2)=\frac{\mu_0}{4\pi}I\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx\,\mathbf{i}\times(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3} \qquad (۳۱.۸)$$

چون $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ درصفحهٔ xy قرار گرفته است، پس

$$\mathbf{i}\times(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)=|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|\sin\theta\,\mathbf{k} \qquad (۳۲.۸)$$

به‌علاوه



شکل ۴.۸ میدان مغناطیسی درنقطهٔ P ناشی ازیك سیم بلند ومستقیم.

$$\frac{a}{x}=\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta \qquad (۳۳.۸)$$

و

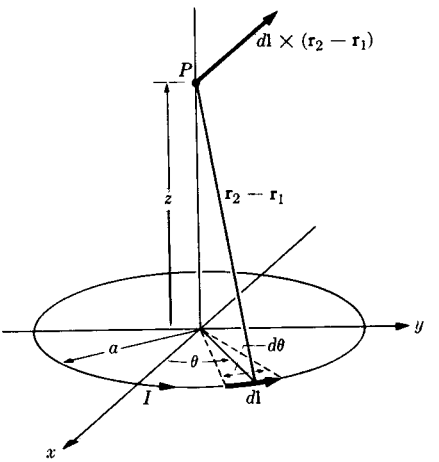
$$|\mathbf{r}_۲-\mathbf{r}_۱|=a\csc(\pi-\theta)=a\csc\theta \qquad (۳۴.۸)$$

با به‌کاربردن این روابط برای تبدیل معادلهٔ (۳۱.۸) به‌صورت انتگرالی برروی θ از صفر تا π، نتیجه زیر به‌دست می‌آید

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_۲)=\frac{\mu_\circ}{۴\pi}I\mathbf{k}\frac{۱}{a}\int_\circ^\pi \sin\theta\, d\theta=\frac{\mu_\circ I}{۴\pi a}\mathbf{k}(-\cos\theta)\Big|_\circ^\pi=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi a}\mathbf{k} \qquad (۳۵.۸)$$

برای به‌کار بردن این نتیجه درحالتهای کلیتر، فقط لازم‌است توجه شود که مسئله حول محور x تقارن دارد. پس نتیجه می گیریم که خطوط $\mathbf{B}$ درهمه جا به‌صورت دوایری هستند که رسانا درمرکزآنها قرارگرفته است. این نکته بانتیجهٔ ساده‌ای که جهت $\mathbf{B}$ را با یك‌قاعدهٔ دست راست معلوم می کند توافق کامل دارد.

به‌عنوان دومین مثال، یك مدار دایره‌ای را درنظرمی گیریم. محاسبهٔ میدان‌مغناطیسی ناشی ازاین مداردریك نقطهٔ اختیاری ازفضا بسیارمشکل است، لیکن اگرفقط نقاط واقع برمحورتقارن‌را درنظر بگیریم، عبارت مربوط به $\mathbf{B}$ نسبتاً ساده می‌شود. دراین مثال یك بررسی کاملا برداری به‌کاربرده می‌شود تا شیوهٔ‌کارنشان‌داده‌شود. شکل ۵.۸ وضعیت‌هندسی ومختصات به‌کاربرده شده را نمایش می‌دهد. می‌خواهیم میدان‌را درنقطهٔ $\mathbf{r}_۲$ واقع برمحور



شکل ۵.۸ میدان محوری یك حلقه سیم دایره‌ای.

z محاسبه کنیم؛ حلقهٔ دایره‌ای درصفحهٔ xy قرار دارد. میدان مغناطیسی با معادلهٔ (۲۶.۸) داده می‌شود که درآن، مطابق شکل ۵.۸، روابط زیر باید به‌کاربرده شوند

$$d\mathbf{l}=a\,d\theta(-\mathbf{i}\sin\theta+\mathbf{j}\cos\theta)$$

$$\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1=-\mathbf{i}a\cos\theta-\mathbf{j}a\sin\theta+\mathbf{k}z \qquad (۳۶.۸)$$

$$|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|=(a^2+z^2)^{1/2}$$

ازقراردادن این روابط درمعادلهٔ (۲۶.۸) نتیجه می‌گیریم

$$\mathbf{B}(z)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(\mathbf{i}za\cos\theta+\mathbf{j}za\sin\theta+\mathbf{k}a^2)}{(z^2+a^2)^{3/2}}d\theta \qquad (۳۷.۸)$$

نتیجهٔ انتگرال‌گیری دوجملهٔ اول صفرمی‌شود، وباقی می‌ماند

$$\mathbf{B}(z)=\frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{(z^2+a^2)^{3/2}}\mathbf{k} \qquad (۳۸.۸)$$

که البته تماماً درامتداد محور z است.

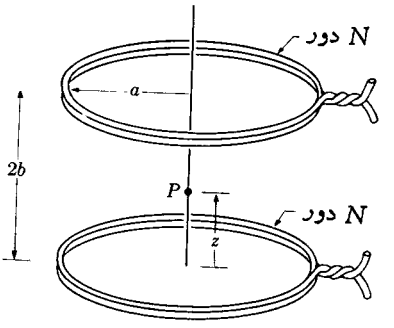
یك دستگاه حامل جریان که غالباً مورد استفاده قرارمی‌گیرد، پیچهٔ هلمهولتز است. این دستگاه ازدوپیچهٔ مستدیر باشعاعهای مساوی ومحور مشترك تشکیل شده است. فاصلهٔ میان دوصفحهٔ پیچه‌ها طوری انتخاب می‌شود که مشتق دوم $\mathbf{B}$ در نقطه‌ای واقع برمحور و به‌فاصلهٔ مساوی از پیچه‌ها صفر شود؛ شکل ۶.۸ چنین دستگاهی را نشان می‌دهد. میدان مغناطیسی درنقطهٔ P عبارت است از

$$B_z(z)=\frac{N\mu_0 Ia^2}{2}\left\{\frac{1}{(z^2+a^2)^{3/2}}+\frac{1}{[(2b-z)^2+a^2]^{3/2}}\right\} \qquad (۳۹.۸)$$

که ازبه‌کاربردن معادلهٔ (۳۸.۸) برای هریك از دوپیچه به‌دست می‌آید. عدد N مربوط است به‌حالتی که هریك‌ازپیچه‌ها N دور دارد. مشتق اول B_z نسبت به z عبارت‌است از

$$\frac{dB_z}{dz}=\frac{\mu_0 NIa^2}{2}\left\{-\frac{3}{2}\frac{2z}{(z^2+a^2)^{5/2}}-\frac{3}{2}\frac{2(z-2b)}{[(2b-z)^2+a^2]^{5/2}}\right\} \qquad (۴۰.۸)$$

درنقطهٔ $z=b$ این مشتق صفراست. مشتق دوم نسبت به z به‌صورت زیر است



شکل ۶.۸ میدان محوری پیچهٔ هلمهولتز.

$$\frac{d^2B_z}{dz^2}=-\frac{3\mu_0 NIa^2}{2}\left\{\frac{1}{(z^2+a^2)^{5/2}}-\frac{5}{2}\frac{2z^2}{(z^2+a^2)^{7/2}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{[(2b-z)^2+a^2]^{5/2}}-\frac{5}{2}\frac{2(z-2b)^2}{[(2b-z)^2+a^2]^{7/2}}\right\}$$

درنقطهٔ $z=b$ مقدارآن برابراست با

$$\left.\frac{d^2B_z}{dz^2}\right|_{z=b}=-\frac{3\mu_0 NIa^2}{2}\left\{\frac{b^2+a^2-5b^2+b^2+a^2-5b^2}{(b^2+a^2)^{7/2}}\right\} \quad (۴۱.۸)$$

که به‌ازای $a^2-4b^2=0$ صفرمی‌شود. پس انتخاب مناسب برای b عبارت است از

$$2b=a \quad (۴۲.۸)$$

یعنی، فاصلهٔ میان دوپیچه باید برابر باشعاع باشد. بااین فاصله، میدان درنقطهٔ وسط برابر است با

$$B_z=\frac{\mu_0 NI}{a}\frac{8}{5^{3/2}} \quad (۴۳.۸)$$

پیچه‌های هلمهولتزنقش مهمی درتحقیق علمی‌دارند وغالباً برای تولیدیك میدان مغناطیسی نسبتاً یکنواخت درناحیهٔ کوچکی ازفضا به‌کارمی‌روند. حال میدان مغناطیسی‌را درنقطه‌ای واقع برمحوردرنزدیکی نقطهٔ وسط میان دوپیچه بررسی می‌کنیم. میدان $B_z(z)$ رامی‌توان برحسب رشتهٔ تیلور درحول نقطهٔ $z=1/2\,a$ بسط داد

$$B_z(z)=B_z\left(\frac{1}{2}a\right)+\left(z-\frac{1}{2}a\right)\frac{\partial B_z}{\partial z}\bigg|_{z=\frac{1}{2}a}+\cdots$$

چون سه مشتق اول تابع صفرمی‌شوند، پس

$$B_z(z)=B_z\left(\frac{1}{2}a\right)+\frac{1}{24}\left(z-\frac{1}{2}a\right)^4\frac{\partial^4 B_z}{\partial z^4}\bigg|_{z=\frac{1}{2}a}+\cdots$$

اگرمشتق چهارم به‌طورصریح محاسبه شود، $B_z(z)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$B_z(z)=B_z(a/2)\left\{1-\frac{144}{125}\left(\frac{z-a/2}{a}\right)^4\right\} \qquad (44.8)$$

پس‌برای ناحیه‌ای که‌درآن $|z-a/2|$ کمتراز $a/10$ باشد، $B_z(z)$ بامقدار $B_z(a/2)$ به‌مقداری کمتر ازیك ونیم در ده هزارفرق می کند.

دراندازه‌گیریهای میدانهای مغناطیسی موجوددرآزمایشگاه، تسلا یکای نسبتاً بزرگی است؛ به همین دلیل عموماً برای میدان $\mathbf{B}$ ازیکای دیگری به‌نام گاؤس ازدستگاه یکاهای گاؤسی(پیوست ۱)استفاده‌می‌کنیم؛یك گاؤس‌برابر با 10^{-4} تسلاست.به‌منظورسهولت‌درمراجعه، میدان مغناطیسی درنقطهٔ وسط پیچهٔ هلمهولتز را به‌صورت زیرمی‌نویسیم

$$B_z=\frac{32\pi N}{5^{3/2}a}\,\frac{I}{10} \qquad [43.8 \text{ الف}]$$

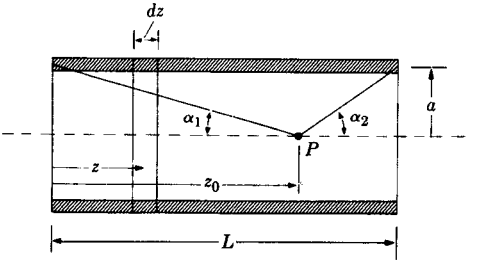
که در آن I برحسب آمپر، a برحسب سانتیمتر و B برحسب گاؤس است. بدیهی است که N همان تعداد دورها درهریك ازدوپیچه است.

وسیلهٔ دیگری که‌برای آن‌ازمعادلهٔ (۳۸.۸) استفاده می‌شود سیملوله است. سیملوله سیمی است‌که آن را N دور بافاصلهٔ یکنواخت روی سطح استوانه‌ای به‌شعاع a و طول L پیچیده باشند. چنین وضعیتی درشکل ۷.۸ نشان داده شده است. میدان مغناطیسی در نقطهٔ z_0 ازتقسیم طول L به‌عناصر dz، به‌طوری که درشکل‌نشان داده‌شده است، وکاربرد معادلهٔ (۳۸.۸) برای هرعنصر، وسپس جمع کردن نتایج، به‌دست می‌آید. باتوجه به‌اینکه عنصر dz حاوی تعداد $N\,dz/L$ دوراست، داریم

$$B_z(z_0)=\frac{\mu_0 NI}{L}\,\frac{a^2}{2}\int_0^L\frac{dz}{[(z_0-z)^2+a^2]^{3/2}} \qquad (45.8)$$

باتغییرمتغیر $z-z_0=a\tan\theta$ نتیجه می گیریم

$$B_z(z_0)=\frac{\mu_0 NI}{2L}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta\,d\theta=\frac{\mu_0 NI}{L}\left[\frac{\sin\theta_2-\sin\theta_1}{2}\right] \qquad (46.8)$$



شکل ۷.۸ میدان مغناطیسی محوری سیملوله.

که درآن $\theta_1 = -\tan^{-1}(z_0/a)$ و $\theta_2 = \tan^{-1}(L - z_0)/a$. اینکه به‌جای واحد، که درفرمولهای مقدماتی وجود دارد، سینوس دیده می‌شود نشان دهندهٔ تصحیحات انتهایی مربوط به‌محدود بودن طول سیملوله است. برای فهم تقریب متداولی که عموماً انجام می‌شود، یعنی تقریب $B_z = \mu_0 NI/L$ بهتراست زوایای α_1 و α_2 را که در شکل ۷.۸ نشان‌داده شده‌اند (هردو مثبت‌اند) به‌کاربریم. برحسب این‌زوایا،معادلهٔ (۴۶.۸) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$B_z(z_0) = \frac{\mu_0 NI}{L}\left[\frac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{2}\right] \qquad (۴۷.۸)$$

اگرطول سیملوله درمقایسه باشعاع آن بلند باشد و z_0 به‌هیچ یك از دو مقدار صفر یا L نزدیك نباشد، آن‌وقت α_1 و α_2 هردو زوایای کوچکی خواهند بود ومی‌توان آنها را به‌صورت تقریبی زیرنوشت

$$\alpha_1 \cong \frac{a}{z_0} \qquad \alpha_2 \cong \frac{a}{L - z_0} \qquad (۴۸.۸)$$

با بسط $\cos\alpha_1$ و $\cos\alpha_2$ و نگه داشتن جملات تا درجهٔ دوم، نتیجهٔ زیررا به دست می‌آوریم

$$B_z(z_0) \cong \frac{\mu_0 NI}{L}\left\{1 - \frac{a^2}{4z_0^2} - \frac{a^2}{4(L - z_0)^2}\right\} \qquad (۴۹.۸)$$

از این معادله نتیجه می گیریم که اگر $z_0 = L/2$ و $L/a = 10$ باشد، آنگاه خطایی برابر با ۲درصد درنتیجهٔ صرفنظر کردن از جملات درجهٔ دوم وبالاترحاصل می‌شود.

۵.۸ قانون مداری آمپر

برای میدانهای مغناطیسی داده شده بامعادلهٔ (۲۶.۸) یا (۲۸.۸)، درصورتی که ناشی از جریانهای پایا باشند، یعنی ناشی ازجریانهایی که در رابطهٔ زیرصدق می کنند

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \qquad (۵۰.۸)$$

می توان رابطهٔبسیارمهمی برای تاو $\mathbf{B}$ به‌دست آورد. این‌کاربامحاسبهٔ تاو معادلهٔ (۲۸.۸) انجام می گیرد. محاسبهٔ تاو، مشتق گیری نسبت به $\mathbf{r}_2$ را دربردارد، در نتیجه فقط برروی عامل $(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)/|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3$ عمل می کند

$$\nabla_2 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)\left(\nabla_2 \cdot \frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3}\right) - \mathbf{J}(\mathbf{r}_1)\cdot \nabla_2 \frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3}\right] dv_1$$

به‌علت تقارن میان $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$، مشتق گیری درجملهٔ دوم‌را می‌توان به‌مشتق گیری نسبت به $\mathbf{r}_1$ (بامنظورداشتن یك علامت منها) تغییرداد.

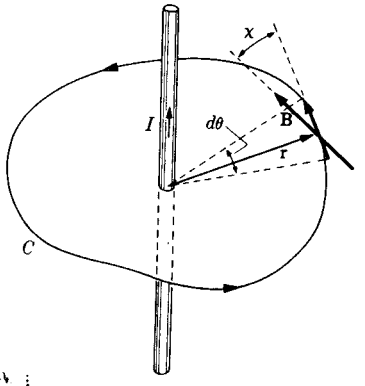
$$\nabla_2 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)4\pi\,\delta(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1) - \mathbf{J}(\mathbf{r}_1)\cdot \nabla_1 \frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}\right] dv_1$$

جملهٔ اول برحسب تابع دلتای دیراك نوشته شده است، همان‌طورکه در معادلهٔ (۵۷.۲) داشتیم ؛ انتگرال گیری این جمله که مستقیماً انجام می‌شود نتیجهٔ $\mu_0\mathbf{J}(\mathbf{r}_2)$ را می‌دهد. باانتگرال گیری جزء به جزء می‌توان نشان دادکه جملهٔ دوم برابرباصفراست. برای‌مؤلفهٔ x داریم

$$\nabla_1 \cdot \left(\mathbf{J}\frac{x_1-x_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}\right) = \frac{x_1-x_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}\,\nabla_1 \cdot \mathbf{J} + \mathbf{J}\cdot \nabla_1 \frac{x_1-x_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}$$

وبه‌طورمشابه برای دیگر مؤلفه‌ها. جملهٔ دارای $\nabla \cdot \mathbf{J}$ بنابرفرض (۵۰.۸) مساوی صفر است، و بااستفاده ازقضیهٔ واگرایی می‌توان انتگرال حجمی سمت چپ را به‌یك انتگرال سطحی تبدیل کرد؛ وقتی سطح در خارج از ناحیهٔ کرانداری که درآن $\mathbf{J}$ غیر صفراست انتخاب شود، مقدارانتگرال سطحی صفرمی‌شود. (همین نتیجه را می‌توان مستقیماً ازاتحاد ۴.۲.۱ درجدول ۲.۱ به‌دست‌آورد.) بنابراین نتیجهٔ نهایی به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}_2) \qquad (۵۱.۸)$$



شکل ۸.۸ تحقیق صحت قانون مداری آمپر برای سیم مستقیم و بلند.

که شکل دیفرانسیلی قانون آمپر نام دارد. درفصل ۹ این قانون را تااندازه‌ای تغییرخواهیم داد تا برای مواردی که مواد مغناطیسی وجود دارد، سودمندتر باشد؛ لیکن، معادلهٔ (۵۱.۸)، مادامی که $\mathbf{J}$ بیانگر کل جریان و $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ باشد، هنوزهم معتبرخواهد بود.

ازقضیهٔ استوکس می‌توان استفاده کرد و معادلهٔ (۵۱.۸) را به‌یك‌صورت انتگرالی تبدیل کرد که این صورت گاهی بسیارمفید واقع می‌شود. این کاربرد قضیهٔ استوکس چنین نوشته می‌شود

$$\int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, da = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \qquad [۴۵.۱]$$

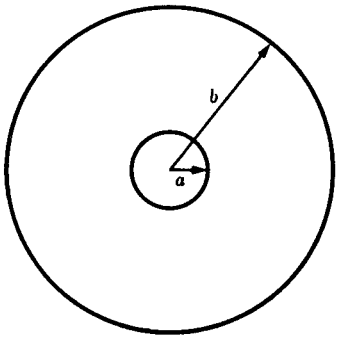
بااستفاده ازمعادلهٔ (۵۱.۸) برای $\nabla \times \mathbf{B}$، داریم

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, da \qquad (۵۲.۸)$$

بیان‌سادهٔ این رابطه این‌است که انتگرال خطی $\mathbf{B}$ برروی هرمسیر بسته برابراست باحاصل ضرب μ_0 درکل جریانی که ازمسیر بسته عبورمی‌کند.

تحقیق صحت معادلهٔ (۵۲.۸) دریك حالت ساده‌آموزنده است. سیم مستقیم و بلند، مثال بسیارخوبی است. دراین حالت اندازهٔ $\mathbf{B}$ درنقطه‌ای به‌فاصلهٔ r از رسانا، از رابطهٔ $B(r) = \mu_0 I / 2\pi r$ به‌دست می‌آید و جهت آن مماس است بردایره‌ای به شعاع r، که مرکزش برروی رسانا قرارگرفته باشد. شکل ۸.۸ وضع هندسی این مسئله‌را نشان‌می‌دهد. جریان درجهت بالاست، و C درجهت عکس ساعتگرد طی می‌شود. از شکل پیداست که

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = |\mathbf{B}|\, |d\mathbf{l}| \cos \chi = |\mathbf{B}| r\, d\theta \qquad (۵۳.۸)$$



شکل ۹.۸ مقطع یك کابل هم‌محور.

با به‌کاربردن مقدار $|\mathbf{B}|$ که دربالا ذکرشد، داریم

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r \, d\theta = \mu_0 I \qquad (۵۴.۸)$$

که حالت خاصی است ازمعادلهٔ (۵۲.۸).

قانون مداری آمپر، یعنی معادلهٔ (۵۲.۸)، از بسیاری لحاظ همتای قانون گاؤس در الکتروستاتیك است. منظور از این بیان آن است که ازاین قانون می‌توان برای محاسبهٔ میدان مغناطیسی ناشی ازتوزیع جریانی که تقارن کافی داشته باشد استفاده کرد، بی‌آنکه به‌محاسبهٔ انتگرالهای بغرنج قانون بیونیازداشته باشیم. به‌عنوان مثال، یك کابل هم‌محوررا درنظرمی گیریم که ازیك رسانای کوچك مرکزی به‌شعاع a ویك رسانای خارجی به‌شکل استوانه‌ای هم‌محور با سیم‌مرکزی به‌شعاع b تشکیل شده است، نظیر شکل ۹.۸. فرض می‌کنیم که هردو رسانا جریان یکسان I را حمل می‌کنند و جهت جریان درآن دو عکس یکدیگراست. همچنین فرض می‌کنیم جریان سیم مرکزی به‌سمت بیرون ازصفحهٔ کاغذ باشد. ازتقارن مسئله روشن است که $\mathbf{B}$ درهمه جا باید مماس بردایره‌ای باشدکه مرکزآن منطبق برمرکز رسانای مرکزی است و از نقطه‌ای که میدان در آن خواسته شده است می‌گذرد. به‌علاوه، $\mathbf{B}$ نمی‌تواند به‌زاویهٔ سمت بستگی داشته باشد. مسیرهای مناسب برای کاربرد معادلهٔ (۵۲.۸) عبارت‌اند از دوایری که مرکزشان بررسانای مرکزی منطبق باشد. برای یك چنین دایره‌ای به‌شعاع r، داریم

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B \qquad (۵۵.۸)$$

که باید مساوی باشد باحاصل‌ضرب μ_0 درکل جریانی که ازسطح دایره عبورمی‌کند. پس

$$۲\pi rB=\mu_{\circ}I \qquad a<r<b$$

$$۲\pi rB=\circ \qquad b<r \tag{۵۶.۸}$$

این نتیجهٔ نسبتاً پیش پا افتاده را می‌توان باانتگرال گیری ازقانون بیوبه‌دست‌آورد، البته بازحمت زیاد.

۶.۸ پتانسیل برداری مغناطیسی

محاسبهٔ میدانهای الکتریکی بامعرفی کردن پتانسیل الکتروستاتیکی بسیارساده شد. این‌کار ازآنجا امکان‌پذیرشد که تاو میدان‌الکتریکی برابرصفراست. اما تاو میدان مغناطیسی صفر نیست، لیکن واگرایی آن صفراست. چون واگرایی هرتاو صفراست، پس منطقی است که میدان مغناطیسی‌را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A} \tag{۵۷.۸}$$

تنها قید لازم دیگر که باید برای $\mathbf{A}$ قائل شد، این است که

$$\nabla\times\mathbf{B}=\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\mu_{\circ}\mathbf{J} \tag{۵۸.۸}$$

وبا به‌کاربردن اتحاد زیر

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}-\nabla^{۲}\mathbf{A} \tag{۵۹.۸}$$

وبااین انتخاب که $\nabla\cdot\mathbf{A}=\circ$ باشد، نتیجه می‌شود که

$$\nabla^{۲}\mathbf{A}=-\mu_{\circ}\mathbf{J} \tag{۶۰.۸}$$

باانتگرال گیری‌ازهریك ازمؤلفه‌های‌قائم‌وبه‌کاربردن جواب‌معادلهٔ پواسون به‌منزلهٔ راهنما، به‌نتیجهٔ زیرمی‌رسیم

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_{۲})=\frac{\mu_{\circ}}{۴\pi}\int_{V}\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_{۱})}{|\mathbf{r}_{۲}-\mathbf{r}_{۱}|}\,dv_{۱} \tag{۶۱.۸}$$

محاسبهٔ انتگرالهای موجود در این عبارت از انتگرالهای موجود در قانون بیو بسیار ساده‌تراست؛ لیکن، در عین حال این انتگرالها از آنهایی که در به‌دست‌آوردن پتانسیل الکتروستاتیکی به‌کارمی‌روند پیچیده‌ترند.

راه دیگر به‌دست آوردن معادلهٔ (۶۱.۸) تبدیل مستقیم معادلهٔ (۲۸.۸) به‌معادلهٔ

(۵۷.۸) است. این عمل را باتوجه به‌رابطهٔ زیرمی‌توان انجام داد

$$\frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3}=-\nabla_2\frac{1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|} \qquad (۶۲.۸)$$

که درآن ∇_2 به‌معنی مشتق‌گیری نسبت به $\mathbf{r}_2$ است.بااستفاده از اتحاد برداری زیر

$$\nabla\times(\varphi\mathbf{F})=\varphi\nabla\times\mathbf{F}-\mathbf{F}\times\nabla\varphi \qquad (۶۳.۸)$$

که برای هربردار $\mathbf{F}$ و هرتابع نرده‌ای φ صادق است، معادلهٔ زیرنتیجه می‌شود

$$\nabla_2\times\left\{\frac{1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|}\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)\right\}=-\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)\times\nabla_2\frac{1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|} \qquad (۶۴.۸)$$

زیرا $\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)$ به $\mathbf{r}_2$ بستگی ندارد. باقرار دادن این نتایج درمعادله (۲۸.۸) به‌نتیجهٔ زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}_2)&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)\times\frac{(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3}\,dv_1\\&=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)\times\nabla_2\frac{1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|}\,dv_1\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\nabla_2\times\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|}\,dv_1\end{aligned} \qquad (۶۵.۸)$$

بابیرون‌آوردن تاو از زیرانتگرال،معادلهٔ(۶۵.۸) عیناً به‌صورت‌معادلهٔ (۵۷.۸) درمی‌آید. بدین ترتیب رابطهٔ

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V1}\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|}\,dv_1 \qquad [۶۱.۸]$$

ازاین راه نیز به‌دست می‌آید.

برای اینکه این توهّم پیش نیاید که پتانسیل برداری درمحاسبهٔ میدانهای ساده‌می‌تواند به‌اندازهٔ پتانسیل الکتروستاتیکی مفید باشد، باید خاطرنشان ساخت که اصولا هیچ موردی وجود ندارد که درآن بتوان $\mathbf{A}$ را به‌طورساده وکامل محاسبه کرد (هرچند که محاسبهٔ عددی

این پتانسیل برای توزیعهای کراندارجریان همیشه امکان‌پذیراست). وقتی که معادلهٔ (۶۱.۸) برای سیم مستقیم وطولانی به‌کاربرده شود، $\mathbf{A}$ بینهایت می‌شود.[1] محاسبات مربوط به‌حلقهٔ دایره‌ای شامل انتگرالهای بیضوی می‌شوند، و الی آخر. همچنین باید توجه کرد که محاسبهٔ پتانسیل برداری دریك تك‌نقطه مفید نخواهدبود، زیرا میدان مغناطیسی ازطریق مشتق‌گیری به‌دست می‌آید. کاربرد اصلی پتانسیل برداری درمحاسبات تقریبی است، ازقبیل تقریبهایی که دربخش بعد دربارهٔ آنها بحث می‌شود، و نیزدرمسائل مربوط به‌تابش الکترومغناطیسی (فصلهای ۱۶ و ۲۰).

۷.۸ میدان مغناطیسی یك‌مداردرفواصل دور

پتانسیل برداری‌مغناطیسی مدار کوچکی‌را که درفواصل‌دورقرار گرفته باشد به‌آسانی‌می‌توان محاسبه کرد. عبارت مربوط به‌پتانسیل برداری (۶۱.۸) را می‌توان باقرار دادن $I\,d\mathbf{r}$ به‌جای $\mathbf{J}\,dv$، درمورد مدارهای جریان به‌کاربرد. بدین ترتیب

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{d\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|} \qquad (۶۶.۸)$$

برای مدارهایی که ابعادشان درمقایسه با $\mathbf{r}_2$ کوچك است می‌توان مخرج را به‌شکل‌تقریبی محاسبه کرد. برای این‌کار، مانند معادلهٔ (۴۶.۲)، می‌نویسیم

$$|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^{-1}=(r_2^2+r_1^2-2\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2)^{-1/2} \qquad (۶۷.۸)$$

واین عبارت‌را برحسب توانهای r_1/r_2 تا درجهٔ اول بسط می‌دهیم

$$|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^{-1}=\frac{1}{r_2}\left[1+\frac{\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2}{r_2^2}+\cdots\right] \qquad (۶۸.۸)$$

بااستفاده ازاین مقداردرمعادلهٔ (۶۶.۸) نتیجه می‌گیریم که

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left\{\frac{1}{r_2}\oint d\mathbf{r}_1+\frac{1}{r_2^3}\oint d\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2)+\cdots\right\} \qquad (۶۹.۸)$$

---

۱. درواقع برای‌سیم بلند مستقیم یك‌پتانسیل برداری متناهی وجود دارد. درمختصات‌استوانه‌ای برای سیمی‌که منطبق برمحور z است وجریان $I\mathbf{k}$ را حمل می‌کند، این پتانسیل برابراست با $\mathbf{A}=-(\mu_0 I/2\pi)\ln r\mathbf{k}$. صحت این رابطه رامی‌توان بامحاسبهٔ مستقیم $\nabla\times\mathbf{A}$ تحقیق کرد. (پیوست I۳)

دررابطهٔ بالا انتگرال اول صفر می‌شود؛ انتگرالده دوم یکی از جمله‌های بسط برداری زیراست

$$(\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1) \times \mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{r}_1) + d\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) \qquad (۷۰.۸)$$

برای حذف جملهٔ اول درطرف راست معادلهٔ (۷۰.۸)، دیفرانسیل $\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1)$ را برای تغییر کوچکی در $\mathbf{r}_1$ به‌صورت زیرمی‌نویسیم

$$d[\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1)] = \mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{r}_1) + d\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1) \qquad (۷۱.۸)$$

که‌البته رابطه‌ای است دقیق. باجمع کردن معادله‌های (۷۰.۸) و (۷۱.۸) وتقسیم حاصل‌جمع بر۲ نتیجه می‌شود

$$d\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1) \times \mathbf{r}_2 + \frac{1}{2} d[\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1)] \qquad (۷۲.۷)$$

چون جملهٔ آخریك دیفرانسیل‌کامل است، درحاصل دومین انتگرال معادلهٔ (۶۹.۸) سهمی نخواهد داشت. پس نتیجه می‌گیریم که

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{I}{2}\oint \mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1\right] \times \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \qquad (۷۳.۸)$$

طبق معادلهٔ (۲۲.۸) عبارت داخل کروشه‌ها گشتاور مغناطیسی، $\mathbf{m}$، مداراست. بنابراین

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}_2}{r_2^3} \qquad (۷۴.۸)$$

دراین محاسبات فرض شده است که همواره $r_2 \gg r_1$؛ پس معادلهٔ (۷۴.۸) برای هر مبدأ مختصات اختیاری صحیح نیست، بلکه فقط برای مبدئی نزدیك به‌مدارصادق است.

میدان مغناطیسی را با محاسبهٔ تاو معادلهٔ (۷۴.۸) می‌توان به‌دست آورد. این‌کار بااستفاده ازاتحادهای برداری به‌آسانی انجام می‌شود. نخست داریم

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \left(\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3}\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-(\mathbf{m} \cdot \nabla)\frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} + \mathbf{m}\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3}\right] \qquad (۷۵.۸)$$

جملهٔ اول داخل کروشه‌ها را می‌توان باتوجه به‌رابطهٔ زیر

$$m_x \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3}\right)=\frac{m_x\mathbf{i}}{r_2^3}-3m_x x_2\frac{\mathbf{r}_2}{r_2^5} \qquad (۷۶.۸)$$

تبدیل کرد. پس

$$(\mathbf{m}\cdot\nabla)\frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3}=\frac{\mathbf{m}}{r_2^3}-\frac{3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}_2)\mathbf{r}_2}{r_2^5} \qquad (۷۷.۸)$$

جملهٔ دوم فقط شامل محاسبهٔ زیر است

$$\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3}=\frac{3}{r_2^3}-\mathbf{r}_2\cdot\frac{3\mathbf{r}_2}{r_2^5}=0 \qquad (r_2\neq 0) \qquad (۷۸.۸)$$

پس، بالاخره خواهیم داشت

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2)=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\frac{\mathbf{m}}{r_2^3}+\frac{3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}_2)\mathbf{r}_2}{r_2^5}\right] \quad \text{(دوقطبی مغناطیسی)} \qquad (۷۹.۸)$$

معادلهٔ (۷۹.۸) نشان می‌دهد که میدان‌مغناطیسی ناشی ازیك مداردرفاصلهٔ دور به‌جزئیات شکل‌هندسی آن بستگی ندارد، بلکه‌فقط به گشتاورمغناطیسی آن، $\mathbf{m}$، مربوط می‌شود. مقایسهٔ این معادله بامعادلهٔ (۳۶.۲) نشان می‌دهد که (۷۹.۸) ازنظرصوری مانند میدان الکتریکی ناشی ازیك دوقطبی الکتریکی است، واین توجیهی است برای اطلاق نام میدان دوقطبی مغناطیسی به‌آن. معمولا $\mathbf{m}$ را گشتاور دوقطبی مغناطیسی مدار می‌نامند.

۸.۸ پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی

معادلهٔ (۵۱.۸) نشان می‌دهد که هرجا چگالی جریان صفرباشد تاومیدان مغناطیسی‌درآنجا صفراست. پس می‌توانیم میدان مغناطیسی‌را در ناحیه‌هایی که چگالی جریان درآنجا صفر است به‌صورت شیب یك پتانسیل نرده‌ای بنویسیم

$$\mathbf{B}=-\mu_0\nabla\varphi^* \qquad (۸۰.۸)$$

اما واگرایی $\mathbf{B}$ نیزصفراست، پس این بدان معناست که

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=-\mu_0\nabla^2\varphi^*=0 \qquad (۸۱.۸)$$

بنابراین φ^*، که پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی نام دارد، در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند. بیشترکارها ونتایج الکتروستاتیك‌را می‌توان مستقیماً دراینجا واردکرد وبرای محاسبهٔ φ^*

دروضعیتهای مختلف به‌کار برد؛ اما، در به‌کار بستن شرایط مرزی باید دقت کرد (مسئلهٔ ۲۵.۸).

رابطهٔ مربوط به پتانسیل نرده‌ای یك دوقطبی مغناطیسی، به‌ویژه مفید است. با توجه به‌این‌که معادلهٔ (۷۹.۸) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = -\mu_0 \nabla \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_2}{4\pi r_2^3} \right) \qquad (۸۲.۸)$$

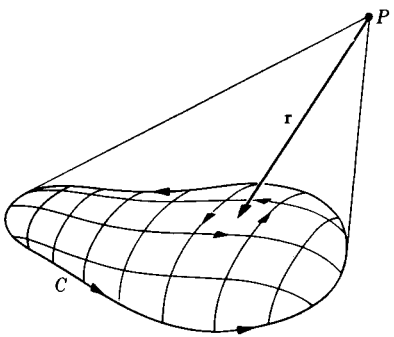
آشکاراست‌که برای دوقطبی مغناطیسی $\mathbf{m}$ خواهیم داشت

$$\varphi^*(\mathbf{r}_2) = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_2}{4\pi r_2^3} \qquad (۸۳.۸)$$

مدار بزرگ C را می‌توان به‌کمك یك شبکه بندی، نظیر شکل ۱۰.۸، به‌تعداد زیادی مدار کوچك تقسیم کرد. هرگاه هرحلقهٔ کوچك حاصل ازشبکه‌بندی همان جریانی‌را داشته باشد که درمدار اصلی C موجوداست، آنگاه به‌علت خنثی‌شدن جریانهای متقابل درشاخهٔ مشترك حلقه‌های مجاور، اثر کلی باحالتی که درآن بار فقط درمدار C جریان داشته باشد یکسان‌خواهدبود. برای هریك از حلقه‌های کوچك، می‌توانیم گشتاورمغناطیسی‌را به‌صورت زیر بنویسیم

$$d\mathbf{m} = I\mathbf{n}\, da \qquad (۸۴.۸)$$

زیرا هریك از این حلقه‌ها آن‌قدر کوچك است‌که می‌توانیم آن را یك مدار مسطح فرض کنیم. بااستفاده ازاین عبارت در معادلهٔ (۸۳.۸) و انتگرال‌گیری برروی سطح محصور



شکل ۱۰.۸ یك‌مدار ماکروسکوپی جریان که ازعناصر دوقطبی مغناطیسی ساخته شده است.

به‌وسیلهٔ مدار C نتیجه می‌گیریم که

$$\varphi^*(P)=\frac{I}{4\pi}\int_s \frac{\mathbf{r}_2\cdot\mathbf{n}\,da}{r_2^3} \qquad (۸۵.۸)$$

دراین معادله $\mathbf{r}_2$ باید به‌عنوان برداری از da به‌نقطهٔ P، یعنی $-\mathbf{r}$، همان‌طور که در شکل ۱۰.۸ نشان داده شده است، تعبیرشود. باتغییر $\mathbf{r}_2$ به $-\mathbf{r}$ خواهیم داشت

$$\varphi^*(P)=-\frac{1}{4\pi}\int_s \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,da}{r^3} \qquad (۸۶.۸)$$

کمیت $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,da$ درست برابراست باحاصل‌ضرب r درتصویر da برروی صفحه‌ای‌عمود بر $\mathbf{r}$. پس $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,da/r^3$ زاویهٔ فضایی است که da ازنقطهٔ P دربر می‌گیرد. بنابراین، معادلهٔ (۸۶.۸) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\varphi^*(P)=-\frac{I\Omega}{4\pi} \qquad (۸۷.۸)$$

که درآن Ω زاویهٔ فضایی است که منحنی C ازنقطهٔ P دربرمی‌گیرد.

پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی را می‌توان برای محاسبهٔ میدان مغناطیسی مدارهای حامل جریان ویا لایه‌های دوگانهٔ مغناطیسی (لایه‌های دو قطبی) به‌کاربرد. این روش گاهی برای بررسی مسائل‌مداری نیزسودمند است، اماکاربرد اصلی‌آن دربررسی مواد مغناطیسی است.

۹.۸ شار مغناطیسی

کمیت زیر

$$\Phi=\int_s \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,da \qquad (۸۸.۸)$$

به‌شارمغناطیسی موسوم است وبرحسب وبر(Wb)[1] اندازه‌گیری می‌شود. این کمیت شبیه به‌شارالکتریکی است که قبلا دربارهٔ آن بحث شد، لیکن اهمیت‌آن به‌مراتب بیشتر است. شاری که ازهرسطح بسته می‌گذرد صفراست، این مطلب را می‌توان بامحاسبهٔ زیر نشان داد

---

۱. بنابراین تسلا، که قبلا به‌عنوان یکای $\mathbf{B}$ دردستگاه mks به‌کار می‌رفت، برابر است بایك Wb/m^2.

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,da=\int_V \nabla\cdot\mathbf{B}\,dv=0 \qquad (۸۹.۸)$$

ازاینجا همچنین نتیجه می‌گیریم که شاری که ازهرمداری می‌گذرد به‌سطح خاصی که برای محاسبهٔ شار به‌کارمی‌بریم بستگی ندارد. درفصل ۱۱ وقتی درمورد القای الکترومغناطیسی بحث می‌کنیم، ازنتایج بالا استفاده خواهیم کرد.

۱۰.۸ خلاصهٔ مطالب

مغناطوستاتیك مبتنی است برافزودن نیروی مغناطیسی به‌نیروی کولن، وقتی بارها درحال حرکت‌اند. دردستگاه یکاهای mks، نیروی لورنتس وارد بربارآزمون q، که سرعتش $\mathbf{v}$ است، برابراست با

$$\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

میدان مغناطیسی بارچشمهٔ q_1 که باسرعت یکنواخت $\mathbf{v}_1$ درحرکت است، برابراست‌با

$$\mathbf{B}=\frac{\mathbf{v}_1}{c}\times\frac{\mathbf{E}}{c}$$

که درآن $\mathbf{E}$ میدان الکتریکی ناشی ازبار q_1 و

$$c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\cong 3\times 10^8\ \mathrm{m/s}$$

سرعت نوراست. (در دستگاه یکاهای گاؤسی، به‌جای $\mathbf{B}$ دراین فرمولها از $\mathbf{B}/c$ استفاده می‌کنیم.) باتوجه به‌روابط زیر، این نتایج‌را می‌توان‌درمورد جریانهای رسانشی به‌کاربرد

$$Nq\,dv\,\mathbf{v}=\mathbf{J}\,dv=I\,d\mathbf{l}$$

که درمورد هریك ازانواع ذرات باردارمتحرك $Nq=\rho$ و $\rho\mathbf{v}=\mathbf{J}$.

۱. نیروی وارد برعنصر $d\mathbf{l}$ ازسیمی واقع درمیدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ برابراست با

$$d\mathbf{F}=I\,d\mathbf{l}\times\mathbf{B}$$

برای یك میدان Bی ثابت، گشتاورنیروی وارد برمدارعبارت است از

$$\vec{\tau}=\mathbf{m}\times\mathbf{B}$$

که درآن (یکاهای mks)

$$\mathbf{m}=\frac{1}{2}I\oint_C \mathbf{r}\times d\mathbf{l}$$

عبارت‌است‌از گشتاورمغناطیسی مدار. انتگرال $1/2\oint_C \mathbf{r}\times d\mathbf{l}$ برداری‌است‌که مؤلفه‌هایش عبارت‌اند ازمساحتهای سطوح محصورشده توسط تصاویر منحنی C برصفحات مختصات.

۲. میدان مغناطیسی ناشی ازعنصرجریان $I\,d\mathbf{l}'$ برابراست با

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\mathbf{l}'\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

که در آن (در دستگاه یکاهای mks) $\mu_0/4\pi=10^{-7}\mathrm{N/A^2}$؛ باانتگرال‌گیری از این رابطه روی یك مدار، میدان یك مدارکامل محاسبه می‌شود. برای یك توزیع جریان کلی $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ به‌منزلهٔ چشمه، داریم

$$\mathbf{B}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dv'$$

بامشتق‌گیری ازاین عبارت درمی‌یابیم که هیچ تك قطبی مغناطیسی وجود ندارد

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$$

وبرای یك توزیع جریان پایا با

$$\nabla\cdot\mathbf{J}=0$$

داریم

$$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\,\mathbf{J}$$

اینها معادلات دیفرانسیل اساسی‌اندکه تمام‌میدانهای مغناطوستاتیکی درهرنقطه بایدبه‌طور موضعی درآنها صدق‌کنند. (معادلهٔ واگرایی حتی برای میدانهای وابسته به‌زمان نیزصادق است، ودومین معادله ازچهارمعادلهٔ اساسی ماکسول است.)

۳. باانتگرال‌گیری ازدوطرف معادلهٔ تـاو برروی سطح اختیاری S، و به‌کار بردن قضیهٔ استوکس، قانون آمپر نتیجه می‌شود

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}=\mu_0\,I$$

که در آن

$$I=\int_S \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\,da$$

کل جریانی است که از S، سطح محصورشده توسط C، می‌گذرد. درمعدودی ازوضعیتهای خاص که در آنها تقارن کامل وجود دارد، و می‌توان دید که بزرگی وجهت $\mathbf{B}$ نسبت به‌یك منحنی مناسب مثل C ثابت است، استفاده ازاین قانون برای محاسبهٔ $\mathbf{B}$ عملا سودمند است.

۴. وجود تابع پتانسیل برداری $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ از معادلهٔ واگرایی نتیجه می‌شود، به‌طوری که

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$$

برای یك توزیع جریان مشخص

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\mu_\circ}{۴\pi}\int_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dv'$$

۵. درفاصلهٔ بسیار دور ازناحیهٔ استقرار جریانهای $\mathbf{J}$ چشمه، بسط چند قطبی $\mathbf{A}$ نتیجهٔ زیررا به‌دست می‌دهد

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\mu_\circ}{۴\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^۳}+\cdots$$

(جملهٔ تك قطبی وجود ندارد.)

۶. درناحیه‌هایی که $\mathbf{J}=\circ$ است، یك پتانسیل نرده‌ای $\varphi^*(\mathbf{r})$ می‌توان تعریف کرد (چون $\nabla\times\mathbf{B}=\circ$)، به‌طوری که

$$\mathbf{B}=-\mu_\circ\nabla\varphi^*$$

این پتانسیل، مانند پتانسیل الکتروستاتیکی، درمعادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند

$$\nabla^۲\varphi^*=\circ$$

لیکن شرایط مرزی متفاوت ممکن است دسته‌های متفاوتی از جوابهای معادلهٔ لاپلاس را مطرح سازند. جواب دوقطبی باجواب دوقطبی الکتریکی یکسان است

$$\varphi^*(\mathbf{r})=\frac{\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}}{۴\pi r^۳}$$

مسائل

۱.۸ ذرهٔ بارداری به‌جرم m وبار q درمیدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}_0$ حرکت می‌کند. نشان دهید که کلیترین مسیرحرکت ذره، مارپیچی است که مقطع آن دایره‌ای است به‌شعاع $R=mv_\perp/qB$ (دراینجا $v_\perp$ مؤلفهٔ سرعت ذره درامتداد عمود بر $\mathbf{B}_0$ است).

۲.۸ هامیلتونی ذرهٔ باردار درحال حرکت درمیدان مغناطیسی‌یکنواخت $\mathbf{B}_0$، که موازی محور z است، بارابطهٔ زیرداده می‌شود

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2m}p^2-\frac{qB_0}{2m}(xp_y-yp_x)+\frac{q^2B_0^2}{8m}(x^2+y^2)$$

نشان دهید که معادلات حرکتی که از $\mathcal{H}$ نتیجه می‌شوند بانتایج مسئلهٔ ۱.۸ سازگارند.

۳.۸ پروتونی باسرعت 10^7 متربرثانیه درامتداد عمود بریك میدان مغناطیسی به‌شدت ۰٫۱ تسلا پرتاب می‌شود (الف) پس ازطی مسافت ۱ سانتیمترانحراف مسیرذره ازامتداد خط مستقیم چقدراست؟ (ب) چه‌زمانی طول می‌کشد تا پروتون یك قوس 90° را بپیماید؟

۴.۸ نشان دهید که قانون نیرو، معادلهٔ (۲۵.۸)، را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{F}_2=-\frac{\mu_0}{4\pi}I_1I_2\oint_1\oint_2 d\mathbf{l}_2\cdot d\mathbf{l}_1\frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3}$$

که آشکارا متقارن است، یعنی $\mathbf{F}_2=-\mathbf{F}_1$.

۵.۸ فرض کنید سیملولهٔ بسیاربلندی ۱۰۰۰ دوردرسانتیمتردارد وجریان (ابررسانشی) ۱۰ آمپرراحمل می‌کند. مطلوب است نیروی شعاعی در واحد طول، f، که برهر دور از سیم پیچ وارد می‌شود. نشان دهید که کشش سیم T برابر است با $T=fa$؛ a شعاع سیملوله است.

۶.۸ نشان دهید که نیروی بین‌دوسیم موازی باجریانهای هم‌جهت I_1 و I_2 ازنوع‌نیروی جاذبه است. اگردوسیم موازی خیلی طویل وبه‌فاصلهٔ a ازیکدیگر باشند، نیروی‌مغناطیسی وارد برقطعهٔ $d\mathbf{l}_2$ ازسیم ۲را حساب کنید.

۷.۸ یك مدارجریان به‌شکل شش ضلعی منظم به‌ضلع a داده شده است. اگر مدار حامل جریان I باشد، میدان مغناطیسی را درمرکزشش ضلعی پیدا کنید.

۸.۸ نوار فلزی باریك وبسیار درازی به‌عرض w مفروض است. جریان در امتداد طول نوار ومقدارکل آن I است. میدان مغناطیسی‌را درنقطه‌ای واقع درصفحهٔ نوار وخارج‌از نوار، به‌فاصلهٔ b ازلبهٔ نزدیکتر آن، حساب کنید.

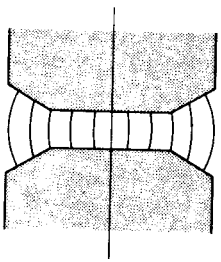
۹.۸ سیم نازکی N دور به‌صورت دایره‌های نزدیك به‌هم (و در یك لایه) برروی سطح کرهٔ چوبینی به‌شعاع a پیچیده شده است؛ N عددی‌است بزرگ، صفحات دایره‌ها برمحور کره عمودند وسطح آن را کاملا می‌پوشانند. اگر جریان در این سیم‌پیچ I باشد، میدان مغناطیسی‌را درمرکز کره محاسبه کنید.

۱۰.۸ سیملوله‌ای به‌طول ۱۵ سانتیمتر در دولایه سیم‌پیچی شده است. هر لایه ۱۰۰ دور سیم دارد. لایهٔ اول به‌شعاع ۲ سانتیمتر ولایهٔ دوم به‌شعاع ۲٫۰۵ سانتیمتراست. اگر این سیم پیچ حامل ۳ آمپرجریان باشد، میدان مغناطیسی‌را درنقاط مختلف محور سیملوله پیدا کنید. میدان مغناطیسی محوری را برحسب تابعی ازفاصلهٔ میان مرکزسیملوله تایك انتهای آن رسم کنید.

۱۱.۸ سیملوله‌ای بامقطع مربع شکل (یعنی سیملوله‌ای که تمام دورهای آن به‌شکل مربع‌اند) N دور سیم درواحد طول دارد وحامل جریان I است. طول هرضلع از مقطع این سیملوله a است. اگر سیملوله بسیارطویل فرض شود، میدان مغناطیسی محوری را درمرکز آن محاسبه کنید.

۱۲.۸ میدان مغناطیسی در نقطه‌ای واقع برمحور (محور z) یك حلقهٔ مستدیرکه حامل جریان I است، بامعادلهٔ (۳۸.۸) داده شده است. بااستفاده ازاین نکته‌که $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$، یك رابطهٔ تقریبی برای B_r (مؤلفهٔ شعاعی میدان مغناطیسی) پیدا کنیدکه برای نقاط خیلی نزدیك به‌محوراعتبارداشته باشد.

۱۳.۸ مؤلفهٔ قائم میدان مغناطیسی در ناحیهٔ میان وجوه قطبهای یك شتابدهندهٔ ذرات به‌صورت $B_z = B_z(r, z)$ داده شده است، که درآن $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ فاصله ازمحور وجوه قطبهاست. (الف) اگر $|B_z|$ تابعی نزولی از r باشد، نشان دهیدکه خطوط شدت مغناطیسی به‌سمت خارج خم می‌شوند، نظیرشکل ۱۱.۸، اعم از اینکه قطب بالایی قطب شمال باشد یا قطب جنوب. (راهنمایی: ازاین واقعیت‌که $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ است، و در صفحهٔ میانه $B_r = 0$ است، استفاده‌کنید.) (ب) اگر خطوط $\mathbf{B}$ انحنایی نظیرآنچه درشکل آمده است داشته باشند، نشان دهیدکه ذرات شتابداری‌که ازصفحهٔ میانه دور شوند تحت تأثیر



شکل ۱۱.۸

نیروی بازگرداننده‌ای قرارمی‌گیرند که آنهارا به‌طرف صفحهٔ میانه برمی‌گرداند، اعم از اینکه این ذرات بارمثبت داشته باشند یا بارمنفی.

*۱۴.۸ ازمعادلهٔ (۳۰.۸) پیداست که فقط برخی از میدانهای برداری شایستگی آن را دارند که به‌عنوان میدان مغناطیسی از لحاظ فیزیکی قابل تحقق باشند. (الف) ثابت کنید که بردار

$$\mathbf{B}=(\mathbf{r}/r)\times\nabla g(x,\ y,\ z)$$

که درآن $g(x,\ y,\ z)$ یك تابع اختیاری‌است، میدان‌مغناطیسی مناسبی‌است؛ (ب) چنانچه g جوابی ازمعادلهٔ لاپلاس باشد، چگالی جریان $\mathbf{J}$ که این میدان مغناطیسی‌را تولیدمی‌کند پیدا کنید.

۱۵.۸ نشان دهید که دریك محیط همگن، همسانگرد، وغیرمغناطیسی که رسانندگی آن g وجریانهای آن پایاست، $\mathbf{B}$ درمعادلهٔ برداری لاپلاس $\nabla^2\mathbf{B}=0$ صدق می‌کند.

۱۶.۸ بااستفاده ازقانون مداری‌آمپر، میدان مغناطیسی را درفاصلهٔ r از مرکز یك سیم طویل حامل جریان I محاسبه کنید. این محاسبه را برای هر دو حالت $r>R$ و $r<R$ انجام دهید؛ R شعاع سیم است. صریحاً نشان دهید که میدان مغناطیسی روی‌محورسیم‌صفر می‌شود.

۱۷.۸ یك رسانای استوانه‌ای به‌شعاع b حاوی سوراخ استوانه‌ای شکلی به‌شعاع a است؛ محورسوراخ موازی بامحوراستوانه و در فاصلهٔ s ازآن قرار دارد، به‌طوری که $a<s<b-a$. رسانا حامل جریان یکنواختی به‌چگالی $\mathbf{J}$ است. میدان B را درداخل سوراخ، روی‌قطری که بریکی ازقطرهای رسانا منطبق‌است پیدا کنید. (راهنمایی: توزیع جریان معادلی‌را بررسی کنید که متشکل ازچگالی $\mathbf{J}$ در سرتاسر سوراخ و رسانا، به‌علاوهٔ چگالی $\mathbf{J}$ — درداخل سوراخ است.)

۱۸.۸ فرض کنید که درداخل وخارج سیملولهٔ بسیار بلندی (طول نامتناهی) میدان تماماً درراستای z باشد. (الف) بااستفاده ازقانون‌آمپر نشان دهید که میدان درداخل و خارج یکنواخت است؛ وازاین‌رو، اگر $\mathbf{B}$ درفاصلهٔ بی‌نهایت ازمحور برابرصفر باشد، درتمامی نقاط خارج صفرخواهد بود. (ب) قانون‌آمپررا به‌کار برید و $\mathbf{B}$ را درداخل سیملوله پیدا کنید. نشان دهید که نتیجه بامعادلهٔ (۴۷.۸) درحد $a/L\to 0$ توافق دارد.

۱۹.۸ چنبره‌ای مانند شکل ۲.۱۱، به طور یکنواخت سیم پیچی شده است. این سیم‌پیچ N دورسیم دارد و حامل جریان I است. شعاع داخلی چنبره a وشعاع خارجی‌آن b است. میدان مغناطیسی‌را درنقاط مختلف داخل سیم‌پیچ چنبره‌ای پیدا کنید. نسبت b/a راطوری تعیین کنید که $\mathbf{B}$ درداخل چنبره بیش از ۲۵ درصد تغییر نکند.

۲۰.۸ نشان دهد که پتانسیل برداری مغناطیسی برای دوسیم طویل مستقیم وموازی که هر

دوجریان I را درجهتهای مختلف حمل می‌کنند، به‌صورت زیراست

$$\mathbf{A}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\mathbf{n}$$

که درآن r_1 و r_2 عبارت‌اند از فواصل نقطهٔ میدان از سیمها، و $\mathbf{n}$ برداریکه‌ای موازی سیمهاست.

۲۱.۸ مجموعه‌ای ازرساناها داده شده است: یك سیم مستقیم بی‌نهایت طویل ویك‌پوستهٔ نازك استوانه‌ای فلزی (به‌شعاع b) که سیم را احاطه‌کرده است وباآن هم‌محوراست. این دو رسانا جریان یکسان I را در جهات مخالف یکدیگر حمل می‌کنند. پتانسیل برداری مغناطیسی دستگاه را پیدا کنید.

۲۲.۸ (الف) نشان دهید که $\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}=\Phi$ که درآن Φ عبارت است ازشارمغناطیسی ازسطحی که به‌وسیلهٔ مدار C محصورشده است. (ب) این نتیجه و نتایج مسئلهٔ ۱۸.۸ را به‌کاربرید و $\mathbf{A}$ را درفاصلهٔ r درخارج $(r>a)$ و داخل $(r<a)$ یك سیملوله بسیاربلند پیدا کنید. (ج) امتحان‌کنید که آیا $\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{B}$ است.

۲۳.۸ (الف) با مشتق‌گیری مستقیم از معادلهٔ (۶۱.۸) نشان دهید که $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$. (ب) نشان دهید که $\mathbf{A}+\nabla\psi$ نیز مانند $\mathbf{A}$ پتانسیلی برداری برای میدان $\mathbf{B}$ محسوب می‌شود؛ ψ یك تابع اختیاری است. (ج) نشان دهیدکه، باانتخاب یك ψ مناسب، پتانسیل برداری مربوط به $\mathbf{B}$ می‌تواند هرواگرایی مطلوبی‌را داشته باشد.

۲۴.۸ نشان دهید که تمام توابع زیرپتانسیلهای برداری ممکن برای میدان یکنواخت $\mathbf{B}=B\mathbf{k}$ محسوب می‌شوند: $\mathbf{A}_1=-By\mathbf{i}$، $\mathbf{A}_2=Bx\mathbf{j}$، $\mathbf{A}_3=-1/2\,\mathbf{r}\times\mathbf{B}$. برای کدام یك‌ازاینها $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$ است؟ نشان دهیدکه $\mathbf{A}_1-\mathbf{A}_2$ برابراست باشیب یك‌تابع، یعنی $\nabla\psi$.

۲۵.۸ نشان دهیدکه درمختصات استوانه‌ای، میدان B در خارج ازسیم مستقیم بلندی که حامل جریان I است ازپتانسیل نرده‌ای زیربه‌دست می‌آید

$$\varphi^*=-\frac{I}{2\pi}\theta$$

نشان‌دهیدکه φ^* درمعادلهٔ لاپلاس‌صدق‌می‌کند. چرااین φ^* یکی‌ازهماهنگهای استوانه‌ای نیست (درصورتی‌که برای پتانسیل الکتروستاتیکی یك خط بار چنین خواهد بود)؟

۲۶.۸ زاویهٔ میل مغناطیسی طبق تعریف عبارت است اززاویهٔ میان جهت‌میدان مغناطیسی زمین وصفحهٔ مماس برسطح زمین در هرنقطه. رابطه‌ای برای زاویهٔ میل برحسب عرض

ژئومغناطیسی به‌دست آورید. فرض کنید میدان مغناطیسی زمین یك‌میدان دو قطبی باشد.

*۲۷.۸ (الف) نشان دهید که پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی برای نقطه‌ای واقع برمحور (محور z) یك حلقهٔ مستدیر به‌شعاع a، به‌صورت زیراست

$$\varphi^* = \frac{1}{2} I \left\{ 1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right\}$$

(ب) با بسط رابطهٔ بالا برطبق قضیهٔ دوجمله‌ای، عبارتی به‌صورت رشته‌ای به‌دست آورید که برای ناحیهٔ $z < a$ صادق باشد.

(ج) پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی φ^* باید درمعادلهٔ لاپلاس صدق کند، به‌علاوه به‌علت تقارن $\varphi^* = \varphi^*(r, \theta)$، که در آن r فاصلهٔ مرکزحلقه تا نقطهٔ میدان و θ زاویهٔ میان $\mathbf{r}$ و محور z است. نشان دهید که بااستفاده ازهماهنگهای منطقه‌ای، معادلهٔ (۱۸.۳)، می‌توان جوابی برای φ^* به‌دست آورد که قابل تبدیل به‌پتانسیل قسمت (ب) برای نقاط واقع برمحورتقارن باشد. (د) بااستفاده از φ^* درقسمت (ج)، B_r و B_θ را درنقاط خارج ازمحورتقارن‌حلقه به‌دست آورید.

*۲۸.۸ کره‌ای به‌شعاع a راکه چگالی بار سطحی آن σ است (بار محکم به‌کره متصل است) حول محوری که از مرکزش می گذرد باسرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخانیم. نشان دهید که میدان مغناطیسی دریك نقطهٔ خارج از آن به‌صورت یك‌میدان دوقطبی است و گشتاور دوقطبی معادل آن را حساب کنید.

۲۹.۸ دو دوقطبی $\mathbf{m}_1$ و $\mathbf{m}_2$ دریك‌صفحه قراردارند؛ $\mathbf{m}_1$ ثابت است ولی $\mathbf{m}_2$ می‌تواند حول مرکزخود بچرخد. نشان دهید که درحالت تعادل $\tan\theta_1 = -2\tan\theta_2$ که در آن θ_1 و θ_2 به‌ترتیب عبارت‌اند اززوایای میان $\mathbf{r}$ با $\mathbf{m}_1$ و $\mathbf{m}_2$ ($\mathbf{r}$ بردار جابه‌جایی میان $\mathbf{m}_2$ و $\mathbf{m}_1$ است).

۹

خواص مغناطیسی ماده

درفصل ۸ روشهای محاسبهٔ میدان مغناطیسیِ توزیع مشخصی از جریانهای الکتریکی را بررسی کردیم. بنابراین چنانچه بامدار حاملِ جریانی سروکار داشته باشیم که از یك حلقه سیم بسته تشکیل شده است، میدان مغناطیسی درناحیهٔ خلأ اطراف سیم را به کمك قانون بیو می‌توانیم محاسبه کنیم. حال اگرفضای اطراف سیم را یك محیط مادی پر کرده باشد، آیا میدان مغناطیسی به‌علت وجود ماده تغییرخواهد کرد؟ پاسخ مثبت است.

همهٔ مواد ازاتمها ساخته شده‌اند، وهراتم شامل الکترونهای درحال حرکت است. این مدارهای الکترونی، که هریك محدود است به‌یك‌تك اتم، جریانهای اتمی نام دارند. پس ظاهراً دونوع‌جریان وجود دارد: (۱) جریان واقعی که ازانتقال بار، یعنی ازحرکت الکترونهای آزاد یا یونهای باردار، به‌وجود می‌آید؛ (۲) جریانهای اتمی، که جریانهای کاملادورانی‌اندومنجر به‌انتقال‌بار نمی‌شوند. اما، هردونوع جریان می‌توانند میدان‌مغناطیسی تولید کنند.

۱.۹ مغناطش

جریان اتمی مدار کوچك بسته‌ای‌است به‌ابعاد اتمی، ودرنتیجه می‌توان‌آن‌را به‌طرزمناسبی به‌صورت یك دوقطبی مغناطیسی توصیف کرد. درواقع، در اینجا کمیتی که مورد نظر است گشتاوردوقطبی است، زیرا میدان مغناطیسیی که هرتك اتم دردوردست تولید می‌کند تنها بامشخص کردن گشتاور دوقطبی مغناطیسی آن، $\mathbf{m}$، کاملا تعیین می‌شود.

فرض می‌کنیم که گشتاورمغناطیسی iامین اتم $\mathbf{m}_i$ باشد. اکنون یك کمیت برداری

ماکروسکوپی را به‌نام مغناطش، $\mathbf{M}$، باهمان روشی که در فصل ۴ دربارهٔ تعریف قطبش به‌کاربردیم، تعریف می‌کنیم. تمام گشتاورهای دوقطبی واقع درعنصر کوچك حجم Δv را باهم جمع برداری می‌کنیم ونتیجه را بر Δv تقسیم می‌کنیم، کمیت حاصل یعنی

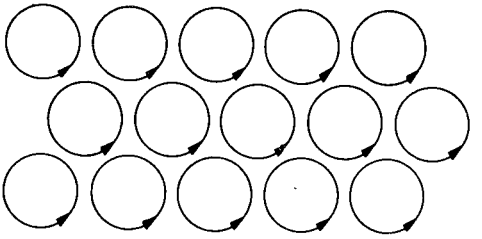
$$\mathbf{M}=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{1}{\Delta v}\sum_i \mathbf{m}_i \qquad (۱.۹)$$

گشتاوردوقطبی مغناطیسی درواحد حجم، ویا به‌عبارت ساده‌تر، مغناطش نـامیده می‌شود. فرایند حد در رابطهٔ (۱.۹) همان فرایند حد ماکروسکوپی معمولی است؛ Δv را از دید ماکروسکوپی خیلی کوچك می‌کنیم، اما نه‌آنقدر کوچك که ازلحاظ آماری تعداد زیـادی اتم نداشته باشد. دراین صورت کمیت $\mathbf{M}$ یك‌تابع برداری نقطه‌ای خواهدبود. درحالتی که ماده نامغناطیده‌است، چون جهت $\mathbf{m}_i$ها کاملا کتره‌ای‌است مجموع $\sum \mathbf{m}_i$ صفرمی‌شود، اما درصورت وجود یك‌میدان برانگیزندهٔ خارجی، معمولا $\mathbf{M}$ به‌این میدان بستگی دارد. بستگی خاص $\mathbf{M}$ به $\mathbf{B}$ دربخش ۶.۹ بررسی خواهد شد.

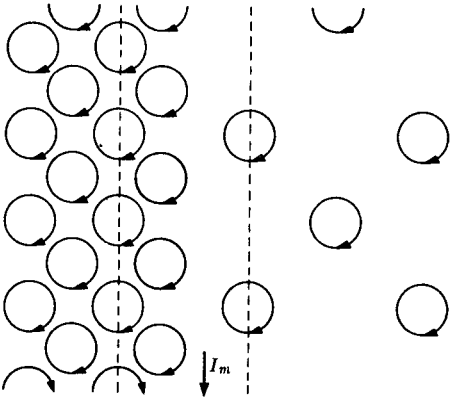
درحال حاضر، فرض می‌کنیم $\mathbf{M}(x,\ y,\ z)$ تابعی‌باشد معلوم وسهم جسم‌مغناطیده را درایجاد میدان مغناطیسی برمبنای روابط بخش ۷.۸ محاسبه می‌کنیم.

تابع برداری $\mathbf{M}$، توصیفی ماکروسکوپی ازجریان‌اتمی درون ماده به‌دست‌می‌دهد. به‌طورمشخص، $\mathbf{M}$ تعیین‌کنندهٔ حاصل‌ضرب تعداد مدارهای جریان اتمی در واحد حجم، درگشتاورمغناطیسی میانگین یا مؤثرهرمداراست. ازدید صرفاً ماکروسکوپی، تمام‌اثرهای مغناطیسی مربوط به‌ماده‌را می‌توان به‌طرزی‌مناسب برحسب $\mathbf{M}$ ویا مشتقهای‌آن بیان‌کرد. یکی ازاین مشتقها، یعنی $\nabla\times\mathbf{M}$، معادل است بایك چگالی جریان انتقالی که بتواندهمان میدان‌مغناطیسی ایجادشده به وسیلهٔ خود $\mathbf{M}$ را به‌وجودآورد؛ این بردار را چگالی‌جریان مغناطش $\mathbf{J}_M$ ، می‌نامند. قبل از به‌دست‌آوردن رابطهٔ مهمی که $\mathbf{J}_M$ و $\mathbf{M}$ را به هم مربوط می‌کند، مدل ساده‌ای ازمادهٔ مغناطیده را بررسی می‌کنیم که درآن جریانهای حلقه‌ای‌اتمی هم‌جهت درکنارهم قرارگرفته‌اند (شکل ۱.۹). اگرمغناطش یکنواخت باشد، جریـانهای حلقه‌های مختلف یکدیگررا حذف می‌کنند و در درون مـاده هیچ جریان مؤثری وجـود نخواهد داشت. چنانچه مغناطش یکنواخت نباشد، عمل حذف کامل نخواهد بود. به‌عنوان مثالی ازمغناطیدگی نایکنواخت، تغییرناگهانی درمغناطش راکه در شکل ۲.۹ نشان داده شده است درنظرمی‌گیریم؛ اگرتوجه خودرا به‌ناحیهٔ میان خطوط نقطه‌چین معطوف‌داریم، واضح است که باری که به‌سمت پایین حرکت می‌کند از باری که به‌سمت بالا در حرکت است بیشتراست. این‌را جریان مغناطش می‌نامیم. پس، هرچندکه انتقال باردرکار نیست، لیکن حرکت مؤثری از بار به‌سمت پایین وجود دارد، واین «جریان» می‌تواند یك میدان مغناطیسی ایجادکند.

حال باقی می‌ماند اینکه رابطهٔ میان $\mathbf{J}_M$ و $\mathbf{M}$ را پیدا کنیم. دوعنصر کوچك حجم دریك قطعه مادهٔ مغناطیسی‌را درنظرمی‌گیریم که حجم هرعنصر، $\Delta x\Delta y\Delta z$ است واین دو



شکل ۱.۹ تصویرساده‌ای ازمادهٔ مغناطیسی که ازجریانهای حلقه‌ای اتمی هم‌جهت تشکیل شده است.



شکل ۲.۹ نمونه‌ای ازتغییر ناگهانی درمغناطش.

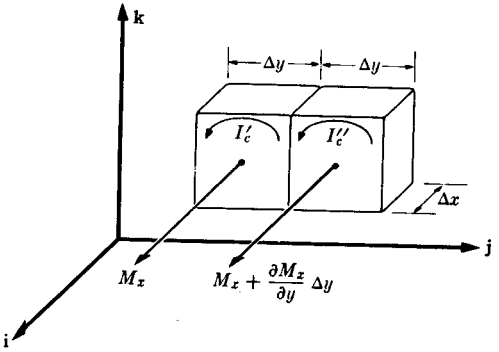
عنصردرجهت محور y درکنارهم قرارگرفته‌اند (شکل ۳.۹). اگرمغناطش دراولین‌عنصر حجم $\mathbf{M}(x, y, z)$ باشد، مغناطش دردومین عنصرعبارت است از

$$\mathbf{M}(x, y, z)+\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y}\Delta y+\text{جمله‌های ازمرتبهٔ بالاتر}$$

مؤلفهٔ x گشتاور مغناطیسی اولین عنصر، $M_x\Delta x\Delta y\Delta z$، را می‌توان برحسب یك جریان دورانی I_c' به‌صورت زیربیان کرد

$$M_x\Delta x\Delta y\Delta z=I_c'\,\Delta y\,\Delta z \qquad (۲.۹)$$

به‌طریق مشابه، مؤلفهٔ x گشتاورمغناطیسی عنصردوم، باچشمپوشی ازجملات مرتبه‌های بالاتر



شکل ۳.۹ جایگزینی عنصرهای حجم مادهٔ مغناطیده باجریانهای دورانی I'_c و I''_c .

که درحد باخیلی کوچك شدن عنصرهای حجم صفرمی‌شوند، برابراست با

$$\left(M_x+\frac{\partial M_x}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z=I_c''\,\Delta y\,\Delta z \qquad (۳.۹)$$

مقدارخالص جریان روبه‌بالا درناحیهٔ وسط دوعنصرحجم برابر است با

$$I_c'-I_c''=-\frac{\partial M_x}{\partial y}\Delta x\,\Delta y \qquad (۴.۹)$$

درمرحلهٔ بعد دوعنصرحجم مجاوررا در امتداد محور x در نظر می‌گیریم و توجه خودرا به‌مؤلفهٔ y بردار مغناطش درهرعنصرمتمرکزمی کنیم. درناحیهٔ وسط دوعنصر، مقدارخالص جریان روبه‌بالا، ناشی‌ازجریانهای دورانیی که معرف گشتاورهای مغناطیسی‌اند، به‌صورت زیراست

$$(I_c)_{\text{بالا}}=\frac{\partial M_y}{\partial x}\Delta x\,\Delta y \qquad (۵.۹)$$

اینها تنها جریانهای دورانی یك عنصر به‌خصوص‌اندکه سبب ایجاد جریـان خالصی در راستای محور z می‌شوند. این جریان خالص، که ناشی ازیکنواخت نبودن مغناطش‌است، جریان مغناطش نامیده می‌شود. این جریان، نوعی جریان انتقالی نیست، بلکه، همان طور که دیدیم، از جریـانهای دورانی، یعنی ازجریانهـای اتمی درون ماده، به‌وجود می آید. سطح مؤثربرای هریك ازجریانها در (۴.۹) و (۵.۹)، $\Delta x\,\Delta y$ است. پس

$$(J_M)_z = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \qquad (۶.۹ \text{ الف})$$

یا

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} \qquad (۶.۹ \text{ ب})$$

پس چگالی جریان مغناطش تاو بردار مغناطش است.

۲.۹ میدان مغناطیسی ناشی از مادهٔ مغناطیده

طبق معادلهٔ (۱.۹)، هر عنصر حجم $\Delta v'$ ازمادهٔ مغناطیده بایك گشتاور مغناطیسی مشخص می‌شود

$$\Delta\mathbf{m} = \mathbf{M}(x', y', z')\,\Delta v' \qquad (۷.۹)$$

بـا به‌کار بردن نتایج بخش ۷.۸، می‌توانیم سهم هر $\Delta\mathbf{m}$ (یا معـادل آن هر $\Delta v'$) را در ایجاد میدان مغناطیسی درنقطهٔ (x, y, z) بنویسیم. بنابراین، میدان مغناطیسی باانتگرال‌گیری برروی تمامی‌حجم جسم، $V_\circ$، به‌دست می‌آید. این روش در شکل ۴.۹ نشان داده شده است.

به‌جای محاسبهٔ مستقیم $\mathbf{B}$، بهتراست ابتدا پتانسیل برداری $\mathbf{A}$ را به‌دست‌آوریم و سپس با گرفتن تاو ازآن، $\mathbf{B}$ را حساب‌کنیم. مطابق روش بخش ۷.۸، پتانسیل‌برداری در نقطهٔ (x, y, z) بارابطهٔ زیرداده می‌شود

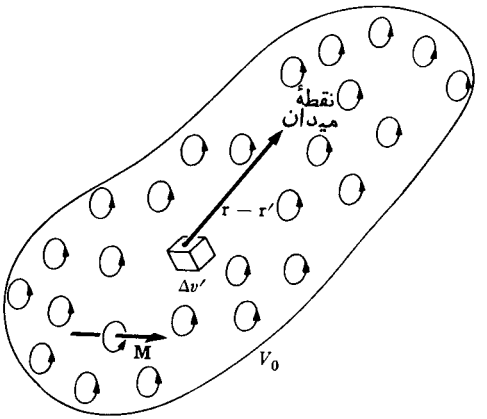
$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\int_{V_\circ} \frac{\mathbf{M}(x', y', z') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^۳}\, dv'$$

$$= \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\int_{V_\circ} \mathbf{M}(x', y', z') \times \nabla' \frac{۱}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dv' \qquad (۸.۹)$$

به‌کمك اتحادهای برداری (۹.۱.۱) و (۳.۲.۱) ازجدولهای ۱.۱ و ۲.۱، این‌انتگرال به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\int_{V_\circ} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dv' + \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\int_{S_\circ} \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, da' \qquad (۹.۹)$$

که در آن $S_\circ$ سطح محصورکنندهٔ حجم $V_\circ$ است. بااستفاده ازمعادلهٔ (۶.۹ ب) و تعریف کردن چگالی سطحی جریان مغناطش $\mathbf{j}_M$ (یعنی، جریان مغناطش در واحد طول که درلایهٔ



شکل ۴.۹ سهم یك توزیع مادهٔ مغناطیده در ایجاد میدان مغناطیسی.

سطحی جاری است) بارابطهٔ

$$\mathbf{j}_M = \mathbf{M} \times \mathbf{n} \qquad (۱۰.۹)$$

معادلهٔ (۹.۹) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_0} \frac{\mathbf{J}_M(\mathbf{r}')\,dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S_0} \frac{\mathbf{j}_M\,da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \qquad (۱۱.۹)$$

می‌توانستیم از ابتدا رابطهٔ نهـایی، یعنی معادلهٔ (۱۱.۹) را حدس بزنیم. با وجود این، مشاهـدهٔ اینکه نتیجهٔ حاصل، ازریاضیات وآن هم به‌نحوی کاملا طبیعی به‌دست‌آمده است خشنودکننده است. بنابراین، پتانسیل برداری ناشی از توزیع جریانهای اتمی داخل ماده به‌همان صورت پتانسیل ناشی از توزیع جریانهای انتقالی واقعی است. باید خاطر نشان کردکه معادلهٔ (۱۰.۹) رابطهٔ مناسب برای‌چگالی سطحی جریان است، عبارتی که‌بارابطهٔ $\mathbf{J}_M = \nabla' \times \mathbf{M}$ سازگار است. $\mathbf{j}_M$ را وقتی باید به‌کاربرد که $\mathbf{M}$ به‌طور ناگهانی تغییر کند، چنان که ممکن‌است درفصل‌مشترك میان دومحیط پیش‌آید، لیکن‌اگرناحیهٔ ناپیوستگی $\mathbf{M}$ در فاصلهٔ $\Delta\xi$ گسترده شده باشد، آن‌وقت می‌توان نشان دادکه $\mathbf{j}_M$ جزء جملهٔ $\mathbf{J}_M\Delta\xi$ است. (یا اگرناحیهٔ ناپیوستگی خیلی نازك باشد، $\mathbf{j}_M$ را می‌توان بایك تابع دلتای سطحی نمایش داد.)

با اینکه معادلهٔ (۱۱.۹) هم صحیح است و هم به‌صورتی است که بانتایج فصل ۸ به‌خوبی سازگـاری دارد، ولی وقتی می‌خواهیم $\mathbf{B}$ را برای توزیع مشخصی از مغناطش

محاسبه کنیم، با برخی اشکالات عملی مواجه خواهیم شد. نخست باید عملیات $\nabla\times\mathbf{M}$ را انجام دهیم، و آنگاه برای پیدا کردن $\mathbf{B}$ از میدان $\mathbf{A}$، محاسبهٔ تاو دیگری لازم است. در صورت امکان، کار کردن با کمیتهای نرده‌ای به‌طور قطع برتری دارد و محاسبهٔ شیب یك میدان نرده‌ای (نظیر آنچه درمبحث الکتروستاتیك داشتیم) از محاسبهٔ تاو یك میدان برداری آسانتر است. به‌همین جهت به‌معادلهٔ (۸.۹) بازمی‌گردیم و راه دیگری را امتحان می‌کنیم. چون، به‌هرجهت $\mathbf{B}$ مورد نظرماست نه $\mathbf{A}$، بنابراین، تاو را محاسبه می‌کنیم

$$\mathbf{B}(\mathbf{r})=\nabla\times\mathbf{A}=\frac{\mu_\circ}{۴\pi}\int_{V_\circ}\nabla\times\left[\mathbf{M}\times\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^۳}\right]dv' \qquad (۱۲.۹)$$

که در آن عملگرهای دیفرانسیلی مربوط به‌تاو برمختصات بی‌پریم عمل می‌کنند.

همان طور که ممکن است خواننده حدس زده باشد، کاربعدی ما تبدیل انتگرالدهٔ معادلهٔ (۱۲.۹) است. برای این‌کارازاتحادهای برداری جدول ۱.۱ استفاده می‌کنیم. بنابراتحاد (۱۰.۱.۱) داریم

$$\nabla\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G})=(\nabla\cdot\mathbf{G})\mathbf{F}-(\nabla\cdot\mathbf{F})\mathbf{G}+(\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F}-(\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G}$$

بافرض $\mathbf{F}=\mathbf{M}$ و $\mathbf{G}=(\mathbf{r}-\mathbf{r}')/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^۳$ وتوجه به‌اینکه‌مشتق گیریها نسبت به‌مختصات بی‌پریم انجام می‌شوند، اتحاد بالا به‌صورت

$$\nabla\times\left[\mathbf{M}\times\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^۳}\right]=\mathbf{M}\nabla\cdot\left[\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^۳}\right]-(\mathbf{M}\cdot\nabla)\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^۳} \qquad (۱۳.۹)$$

درمی‌آید، زیرا $\nabla\cdot\mathbf{M}(x',\ y',\ z')=\circ$، ومانندآن. بنابراین

$$\mathbf{B}(\mathbf{r})=\mathbf{B}_{\mathrm{I}}(\mathbf{r})+\mathbf{B}_{\mathrm{II}}(\mathbf{r}) \qquad (۱۴.۹)$$

که در آن

$$\mathbf{B}_{\mathrm{I}}(\mathbf{r})=\frac{\mu_\circ}{۴\pi}\int_{V_\circ}\mathbf{M}\nabla\cdot\left[\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^۳}\right]dv' \qquad (۱۴.۹\ \text{الف})$$

$$\mathbf{B}_{\mathrm{II}}(\mathbf{r})=-\frac{\mu_\circ}{۴\pi}\int_{V_\circ}(\mathbf{M}\cdot\nabla)\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^۳}dv' \qquad (۱۴.۹\ \text{ب})$$

نخست انتگرال ساده‌تر $\mathbf{B}_{\mathrm{I}}$ را درنظرمی‌گیریم. با استفاده ازمعادلهٔ (۵۷.۲) نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\mathbf{B}_{\mathrm{I}}(\mathbf{r})=\frac{\mu_{\circ}}{4\pi}\int_{V_{\circ}}\mathbf{M}(\mathbf{r}')4\pi\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dv'$$

$$=\mu_{\circ}\mathbf{M}(\mathbf{r}) \qquad (۱۵.۹)$$

حال به محاسبهٔ انتگرال $\mathbf{B}_{\mathrm{II}}$ می‌پردازیم. انتگرالدهٔ آن را با استفاده از اتحاد دیگری (۶.۱.۱) می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$\nabla\left[\mathbf{M}\cdot\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{3}}\right]=(\mathbf{M}\cdot\nabla)\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{3}}+\mathbf{M}\times\nabla\times\left[\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{3}}\right] \qquad (۱۶.۹)$$

جملهٔ آخردر (۱۶.۹) شامل عبارت زیراست

$$\nabla\times\left[\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{3}}\right]=-\nabla\times\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

که عیناً مساوی صفرمی‌شود. پس

$$\mathbf{B}_{\mathrm{II}}(\mathbf{r})=-\mu_{\circ}\,\nabla\frac{1}{4\pi}\int_{V_{\circ}}\mathbf{M}(\mathbf{r}')\cdot\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{3}}\,dv'$$

که نظیرمعادلهٔ (۸۰.۸) می‌توان آن‌را به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{B}_{\mathrm{II}}(\mathbf{r})=-\mu_{\circ}\nabla\varphi^{*}(\mathbf{r}) \qquad (۱۷.۹)$$

کمیت $\varphi^{*}(\mathbf{r})$ یك پتانسیل نرده‌ای، یعنی پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی ناشی ازمادهٔ مغناطیسی است

$$\varphi^{*}(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi}\int_{V_{\circ}}\mathbf{M}(\mathbf{r}')\cdot\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{3}}\,dv' \qquad (۱۸.۹)$$

باجمع کردن دوسهم، (۱۵.۹) و (۱۷.۹)، عبارت زیر را برای میدان مغناطیسی به‌دست‌می‌آوریم

$$\mathbf{B}(\mathbf{r})=-\mu_{\circ}\nabla\varphi^{*}(\mathbf{r})+\mu_{\circ}\mathbf{M}(\mathbf{r}) \qquad (۱۹.۹)$$

پس میدان مغناطیسی ناشی ازیك توزیع مادهٔ مغناطیده را می‌توان به صورت مجموع دو جمله نوشت: شیب یك میدان نرده‌ای به‌اضافهٔ جمله‌ای متناسب بامغناطش موضعی. در یك

نقطهٔ خارجی، یعنی در خلأ، $\mathbf{M}$ صفراست و بنابراین میدان مغناطیسی تنها شیب یك میدان نرده‌ای است، میدانی که خود انتگرال میدانهای دوقطبی دوردست (معادلهٔ ۸۳.۸) است.

۳.۹ پتانسیل مغناطیسی نرده‌ای وچگالی قطب مغناطیسی

پتانسیل مغناطیسی نرده‌ای، معادلهٔ (۱۸.۹)، از نظرشکل ریاضی باپتانسیل الکتروستاتیکی ناشی ازمادهٔ دی‌الکتریك قطبیده مشابه است. ازاین‌رو ، دراینجا نیزاز تبدیل ریاضی زیر استفاده می‌کنیم

$$\frac{\mathbf{M}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{۳}}=\mathbf{M}\cdot\nabla'\frac{۱}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$=\nabla'\cdot\frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}-\frac{۱}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla'\cdot\mathbf{M} \qquad (۲۰.۹)$$

بدین ترتیب معادلهٔ (۱۸.۹) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\varphi^*(\mathbf{r})=\frac{۱}{۴\pi}\int_{S_\circ}\frac{\mathbf{M}\cdot\mathbf{n}\,da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}-\frac{۱}{۴\pi}\int_{V_\circ}\frac{\nabla'\cdot\mathbf{M}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv' \qquad (۲۱.۹)$$

که درآن $S_\circ$ سطح ناحیهٔ $V_\circ$ است.

باقیاس با بخش ۲.۴، مفید به‌نظر می‌رسد که کمیتهای نرده‌ای زیررا تعریف کنیم

$$\rho_M(\mathbf{r}')\equiv-\nabla'\cdot\mathbf{M}(\mathbf{r}') \qquad (۲۲.۹)$$

که آن‌را چگالی قطب مغناطیسی می‌نامند، و

$$\sigma_M(\mathbf{r}')\equiv\mathbf{M}(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{n} \qquad (۲۳.۹)$$

که به چگالی سطحی قدرت قطب مغناطیسی معروف‌است. این کمیتها باوجودآنکه نسبتا تصنعی هستند اما خیلی مفیدند، زیرا همان نقشی را در نظریهٔ مغناطیس ایفا می‌کنند که ρ_P و σ_P درنظریهٔ دی‌الکتریك. یکاهای ρ_M و σ_M به‌ترتیب عبارت‌اند ازآمپربرمترمربع وآمپربرمتر.

برای مثال، یك میلهٔ آهنربا را که به‌طور یکنواخت مغناطیده شده است در نظر می‌گیریم. چون مغناطش یکنواخت است، پس $\rho_M=\circ$ است. چگالیهای سطحی تنها در سطوحی که بردارمغناطش روی آنها مؤلفه‌ای عمود برسطح دارد، مخالف صفراند؛ این

سطوح را قطبهای آهنربا می‌نامند. این مثال تاحدی یك مثال ایده‌آل است، لیکن چندان هم بامیلهٔ آهنربای آزمایشگاهی که با آن آشناییم تفاوت ندارد. (درعمل، قطبهای یك آهنربا نوعی تأثیر وامغناطنده به‌وجود می‌آورند که این تأثیر یکنواخت بودن $\mathbf{M}$ را ازبین‌می‌برد ودرنتیجه هرقطب‌را درناحیه‌ای وسیعتر ازسطح قطب گسترش می‌دهد.)

جمع کل قدرت قطب مغناطیسی هر آهنربا صفر است. این حکم مستقیماً از قضیهٔ واگرایی نتیجه می‌شود

$$\int_{V_\circ} (-\nabla \cdot \mathbf{M})\, dv + \int_{S_\circ} \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}\, da = \circ$$

حال محاسبه‌ای را که قبلا شروع کردیم تکمیل می‌کنیم. معادلهٔ (۱۸.۹) به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\varphi^*(\mathbf{r}) = \frac{۱}{۴\pi}\int_{V_\circ} \frac{\rho_M\, dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{۱}{۴\pi}\int_{S_\circ} \frac{\sigma_M\, da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \qquad [۱۸.۹ \text{ الف}]$$

و $\mathbf{B}(x, y, z)$ برابر خواهد بود با $-\mu_\circ$ ضرب‌در شیب این پتانسیل نسبت به‌مختصات بدون پریم، به‌علاوهٔ جملهٔ $\mu_\circ \mathbf{M}$، پس

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\int_{V_\circ} \rho_M \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^۳} dv' + \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\int_{S_\circ} \sigma_M \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^۳}\, da' + \mu_\circ \mathbf{M}(\mathbf{r})$$

[۱۹.۹ الف]

این‌رابطه سهم‌جسم مغناطیده درحجم $V_\circ$ را درایجاد میدان‌مغناطیسی درنقطهٔ (x, y, z) نشان می‌دهد.

۴.۹ چشمه‌های میدان مغناطیسی. شدت مغناطیسی

در بخشهای گذشته دیدیم که چگونه جسم مغناطیده میدان مغناطیسی به‌وجود می‌آورد. به‌علاوه، درفصل ۸ اثرهای مغناطیسی جریانهای متعارف را بررسی کردیم. در حالت کلی، هر دو نوع چشمهٔ مغناطیسی وجود دارند: جریانهای متعارف یا جریانهای انتقالی، که در آزمایشگاه قابل اندازه‌گیری‌اند، وجریانهای اتمی درون ماده. درك این نکته جالب است که یك قطعه ازماده تحت شرایط خاصی می‌تواند هم به‌این علت که مغناطیده است و هم به‌این علت که دارای جریانی انتقالی ازحاملهای باراست میدان‌مغناطیسی تولیدکند. پس، به‌عنوان مثال، یکی‌ازبهترین اجسام مغناطیسی، یعنی آهن، ممکن‌است ازطریق‌الکترونهای آزاد خود حامل یك جریان انتقالی باشد، درحالی‌که یونهای ثابت‌آهن در شبکهٔ بلوری

آن دارای جریانهای اتمی‌اند و این جریانها می‌توانند جهت خاصی پیدا کنند و مغناطش شدیدی را سبب شوند.

به‌طور کلی، میدان مغناطیسی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{B}(\mathbf{r})=\frac{\mu_\circ}{۴\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^۳}dv'-\mu_\circ\nabla\varphi^*(\mathbf{r})+\mu_\circ\mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (۲۴.۹)$$

که در آن

$$\varphi^*(\mathbf{r})=\frac{۱}{۴\pi}\int_V \frac{\rho_M\, dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}+\frac{۱}{۴\pi}\int_S \frac{\sigma_M\, da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (۲۵.۹)$$

حجم V تمام نواحی حامل جریان وتمام ماده را دربرمی‌گیرد؛ سطح S نیز شامل تمام سطوح و فصل مشترکهای محیطهای مختلف است. چگالی جریان $\mathbf{J}$ شامل تنها جریانهای متعارف ازنوع انتقال باراست، درحالی‌که اثر جریانهای اتمی دربردار مغناطش $\mathbf{M}$ (و پتانسیل φ^*) یافت می‌شود.

چنانچه $\mathbf{J}$ و $\mathbf{M}$ در تمام نقاط مشخص باشند، معادلهٔ (۲۴.۹) را می‌توان برای یافتن $\mathbf{B}$ به‌کار برد. اما در بیشتر مسائل $\mathbf{J}$ مشخص است لیکن $\mathbf{M}(x', y', z')$ به $\mathbf{B}(x', y', z')$ بستگی دارد، پس حتی اگر شکل تابعی $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ هم معلوم باشد، معادلهٔ (۲۴.۹) حداکثرفقط یك معادلهٔ انتگرالی برای $\mathbf{B}$ فراهم می‌آورد. برای احتراز از این مشکل یك بردار مغناطیسی کمکی، یعنی شدت مغناطیسی $\mathbf{H}$ را در بحثمان وارد می‌کنیم. این بردار را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{H}=\frac{۱}{\mu_\circ}\mathbf{B}-\mathbf{M} \quad (۲۶.۹)$$

ازترکیب (۲۴.۹) و (۲۶.۹) به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{H}(\mathbf{r})=\frac{۱}{۴\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^۳}\, dv'-\nabla\varphi^*(\mathbf{r}) \quad (۲۷.۹)$$

ظاهراً باهمهٔ این کارها فایده‌ای عایدمان نشده است، زیرا $\mathbf{H}$ هنوز از طریق ρ_M و σ_M به $\mathbf{M}$ بستگی دارد؛ اما دربخش بعد نشان خواهیم داد که چگونه $\mathbf{H}$ ازطریق یك معادلهٔ دیفرانسیل به چگالی جریان متعارف $\mathbf{J}$ مربوط می‌شود. وضع در اینجا مشابه حالت الکتروستاتیکی است، که درآن بردار کمکی $\mathbf{D}$ ازطریق واگرایی خود به‌چگالی بارآزاد مربوط می‌شود.

میدان برداری $\mathbf{H}$ در نظریهٔ مغناطیس نقش مهمی را ایفا می‌کند، به‌خصوص در

مسائلی که شامل آهنرباهای دائمی‌اند. این مطالب را دربخشهای بعدی این فصل بررسی خواهیم کرد. یکای $\mathbf{H}$ همان یکای $\mathbf{M}$ است، یعنی آمپر برمتر.

۵.۹ معادلات میدان

درفصل ۸، معادلات اساسیی که اثرهـای مغناطیسی جریانها را بیـان می‌کنند به‌صورت دیفرانسیلی زیر بیان کردیم

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{و} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

حال می‌خواهیم بدانیم چنانچه قسمتی از میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ ناشی ازمادهٔ مغناطیده باشد، این معـادلات چگونه تغییرمی‌کنند.

خواننده به‌خاطر می‌آورد که ازمعادلهٔ واگرایی ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) چنین نتیجه گرفتیم که می‌توانیم $\mathbf{B}$ را به صورت تاو تابع برداری $\mathbf{A}$ بنویسیم. اما این نتیجه به‌میدانهـای مغناطیسی تولیدشده توسط جریانهای متعارف محدودنمی‌شود. میدان‌ناشی ازجسم‌مغناطیده را ازجریانهای اتمی می‌توان به‌دست‌آورد؛ درواقع، دربخش ۲.۹ ازهمین راه این‌میدان را به‌دست‌آوردیم. پس $\mathbf{B}$ را می‌توان همواره به‌صورت $\nabla \times \mathbf{A}$ نوشت،ومعادلهٔ واگرایی به‌صورت زیرهمواره صادق خواهد بود

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (۲۸.۹)$$

«معادلهٔ تاو»، شکل دیفرانسیلی قانون مداری آمپر است. دراینجا باید دقت کنیم که همهٔ انواع جریانهایی که می‌توانند میدان مغناطیسی‌ایجادکنند منظورشوند. بنابراین، درحالت کلی، این معادله را می‌توان به‌نحومناسب چنین نوشت

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_M) \qquad (۲۹.۹)$$

که درآن $\mathbf{J}$ چگالی جریان انتقالی و $\mathbf{J}_M$ چگالی جریان مغناطش است. معادلات (۶.۹ب) و (۲۹.۹) را می‌توان ترکیب کرد ونتیجهٔ زیررا به‌دست آورد

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}$$

که، برطبق معادلهٔ (۲۶.۹)، معادل است با

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \qquad (۳۰.۹)$$

بنابراین، بردار مغناطیسی کمکی $\mathbf{H}$ از طریق تاو خود به چگالی جریان انتقالی مربوط

می‌شود. معادلهٔ فوق با گرفتن تاو از (۲۷.۹) نیز به‌دست می‌آید.

معادلات (۲۸.۹) و (۳۰.۹) معادلات اساسی میدان مغناطیسی‌اند. این دو معادله، همراه باشرایط مرزی مناسب ویك رابطهٔ تجربی میان **B** و **H**، برای حل مسائل مغناطیس کفایت می‌کنند. در برخی موارد استفاده از فرمولبندی انتگرالی این نظریه ارجح است. به‌کمك قضیهٔ استوکس می‌توان معادلهٔ (۳۰.۹) را به‌صورت زیر تبدیل کرد

$$\int_s \nabla\times\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}\,da=\oint_c \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}$$

$$=\int_s \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\,da$$

یا

$$\oint_s \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \qquad (۳۱.۹)$$

به‌بیانی دیگر، انتگرال خطی مؤلفهٔ مماسی شدت مغناطیسی دور مسیر بستهٔ C برابر است باکل جریانهای انتقالی که ازسطح محصور به‌منحنی C می‌گذرند.

به‌دلیل قضیهٔ واگرایی معادلهٔ (۲۸.۹) معادل است با

$$\oint_s \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,da=0 \qquad (۳۲.۹)$$

یعنی برای هرسطح بسته، شارمغناطیسی صفر است.

۶.۹ پذیرفتاری و تراوایی مغناطیسی. پسماند

برای حل مسائل مربوط به‌نظریهٔ مغناطیس داشتن رابطه‌ای میان **B** و **H**، و یا معادل آن، رابطه‌ای میان **M** و یکی ازبردارهای میدان مغناطیسی، ضروری‌است. این‌روابط به‌ماهیت مادهٔ مغناطیسی بستگی دارند وغالباً ازراه تجربه به‌دست می‌آیند.

در بسیاری از مواد یك رابطهٔ تقریباً خطی میان **M** و **H** وجود دارد. اگر ماده همسانگرد ودرعین حال خطی[1] باشد، خواهیم داشت

$$\mathbf{M}=\chi_m\mathbf{H} \qquad (۳۳.۹)$$

---

۱. اگرماده ناهمسانگرد ولی‌خطی باشد، به‌جای معادلهٔ (۳۳.۹)، معادلهٔ تانسوری زیر

$$M_x=\chi_{m,۱۱}H_x+\chi_{m,۱۲}H_y+\chi_{m,۱۳}H_z$$

وسایرمعادلات مشابه به‌کارمی‌روند. دراین موارد **M** و **H** الزاماً هم‌جهت نخواهند بود. ما در این کتاب، بررسی خودرا به‌محیطهای همسانگرد محدود می‌کنیم.

که‌در آن کمیت نرده‌ای و بی‌بعد χ_m را پذیرفتاری مغناطیسی می‌نامند. اگر χ_m مثبت باشد، ماده را پارامغناطیس می‌گویند، ومیدان مغناطیسی در اثر حضور ماده تقویت می‌شود. اگر χ_m منفی باشد، جسم را دیامغناطیس می‌نامند ومیدان مغناطیسی درا ثرحضور چنین ماده‌ای تضعیف می‌شود. با اینکه χ_m تابعی ازدماست، و گاهی نیز به‌شدت بادما تغییرمی‌کند، عموماً با اطمینان می‌توان گفت که χ_m برای مواد پارامغناطیس ودیامغناطیس بسیارکوچك است ؛ یعنی

$$|\chi_m| \ll ۱ \quad \text{(برای مواد پارامغناطیس ودیامغناطیس)} \qquad (۳۴.۹)$$

پذیرفتاری مغناطیسی بعضی ازمواد معمولی درجدول ۱.۹ آمده است.

دربیشتر کتابهای راهنما وجدولهای داده‌های فیزیکی χ_m را مستقیماً درج‌نمی‌کنند، بلکه به صورت پذیرفتاری جرمی جرمی،χ_m یا پذیرفتاری مولی مولی،χ_m می‌نویسند ، این کمیتها باروابط زیرتعریف می‌شوند

$$\chi_m = \chi_{m,\text{جرمی}}\, d \qquad (۳۵.۹)$$

$$\chi_m = \chi_{m,\text{مولی}} \frac{d}{A} \qquad (۳۶.۹)$$

که در آن d چگالی جرمی ماده و A وزن مولکولی آن است. چون ابعاد $\mathbf{M}$ و $\mathbf{H}$ همان ابعاد گشتاورمغناطیسی درواحد حجم است ، واضح است،که $\mathbf{H}$ جرمی،χ_m و $\mathbf{H}$ مولی،χ_m به‌ترتیب گشتاورمغناطیسی درواحدجرم و گشتاورمغناطیسی درمول‌را مشخص می‌کنند.برای سهولت، پذیرفتاری جرمی نیزدرجدول ۱.۹ قید شده است.

وجود رابطه‌ای خطی میان $\mathbf{M}$ و $\mathbf{H}$ وجود رابطه‌ای خطی میان $\mathbf{B}$ و $\mathbf{H}$ رابه‌صورت زیرایجاب می‌کند

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \qquad (۳۷.۹)$$

که درآن μ ضریب تراوایی (مغناطیسی) نامیده می‌شود که ازترکیب معادله‌های (۲۶.۹) و (۳۳.۹) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\mu = \mu_\circ (۱ + \chi_m) \qquad (۳۸.۹)$$

گاهی اوقات به‌جای χ_m کمیت بی‌بعد زیررا درجدولها ذکرمی‌کنند

$$K_m = \frac{\mu}{\mu_\circ} = ۱ + \chi_m \qquad (۳۹.۹)$$

جدول ۱.۹ پذیرفتاری مغناطیسی برخی مواد پارامغناطیس و دیامغناطیس دردمای اتاق[1]

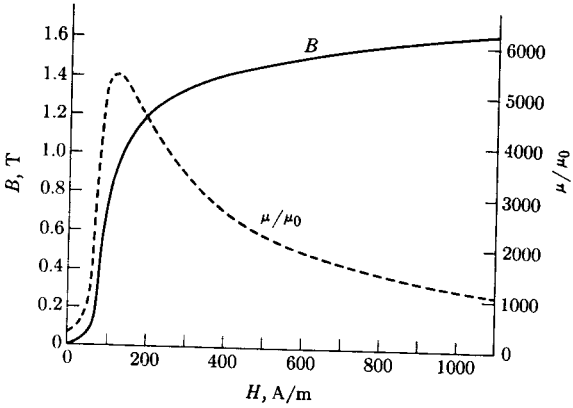
ماده	χ_m	$\chi_{m,\text{جرمی}}$, m^3/kg
آلومینیوم	$۲٫۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۰٫۷۷ \times ۱۰^{-۸}$
بیسموت	$-۱٫۶۴ \times ۱۰^{-۵}$	$-۱٫۶۸ \times ۱۰^{-۸}$
مس	$-۰٫۹۸ \times ۱۰^{-۵}$	$-۰٫۱۱ \times ۱۰^{-۸}$
الماس	$-۲٫۲ \times ۱۰^{-۵}$	$-۰٫۶۲ \times ۱۰^{-۸}$
کلرورگادولینیوم ($GdCl_3$)	$۶۰۳٫۰ \times ۱۰^{-۵}$	$۱۳۳٫۳ \times ۱۰^{-۸}$
طلا	$-۳٫۵ \times ۱۰^{-۵}$	$-۰٫۱۸ \times ۱۰^{-۸}$
منیزیوم	$۱٫۲ \times ۱۰^{-۵}$	$۰٫۶۸ \times ۱۰^{-۸}$
جیوه	$-۲٫۸ \times ۱۰^{-۵}$	$-۰٫۲۱ \times ۱۰^{-۸}$
نقره	$-۲٫۴ \times ۱۰^{-۵}$	$-۰٫۲۳ \times ۱۰^{-۸}$
سدیوم	$۰٫۸۴ \times ۱۰^{-۵}$	$۰٫۸۷ \times ۱۰^{-۸}$
تیتانیوم	$۱۸٫۰ \times ۱۰^{-۵}$	$۴٫۰۱ \times ۱۰^{-۸}$
تنگستن	$۷٫۶ \times ۱۰^{-۵}$	$۰٫۴۰ \times ۱۰^{-۸}$
گاز کربنیك (فشار یك اتمسفر)	$-۱٫۱۹ \times ۱۰^{-۸}$	$-۰٫۶۰ \times ۱۰^{-۸}$
هیدروژن (فشاریك اتمسفر)	$-۰٫۲۲ \times ۱۰^{-۸}$	$-۲٫۴۸ \times ۱۰^{-۸}$
نیتروژن (فشاریك اتمسفر)	$-۰٫۶۷ \times ۱۰^{-۸}$	$-۰٫۵۴ \times ۱۰^{-۸}$
اکسیژن (فشاریك اتمسفر)	$۱۹۳٫۵ \times ۱۰^{-۸}$	$۱۳۵٫۴ \times ۱۰^{-۸}$

۱. داده‌ها ازکتاب
Handbook of Chemistry and Physics, 58th edition, CRC Press, Inc., Cleveland, Ohio.
انتخاب شده‌اند. عملا در تمام منابع، پذیرفتاری مغناطیسی برحسب یکاهای گاؤسی (cgs) داده می‌شوند؛ اگر شاخص (۱) برای نمایاندن کمیتها دردستگاه گاؤسی به‌کار رود آنگاه: $\chi_m = ۴\pi\chi_m^{(۱)}$ و $\chi_{m,\text{جرمی}} = ۴\pi \times ۱۰^{-۳}\ \chi_m^{(۱)}$.

جدول ۲.۹ خواص مواد فرومغناطیس دردمای اتاق[1]
مغناطش اشباع $= M_s$، شدت مغناطیسی لازم برای اشباع $= H_s$،
وادارندگی مغناطیسی $= H_c$، پسمانده $= B_r$

ماده	درصد ترکیب	$\mu_0 M_s$, T	H_s, A/m	$K_{m,\max}$
آهن (تابکاری شده)		۲٫۱۵	$۱٫۶ \times ۱۰^۵$	۵ ۵۰۰
کوبالت		۱٫۷۹	$۷٫۰ \times ۱۰^۵$	
نیکل		۰٫۶۱	$۵٫۵ \times ۱۰^۵$	
آلیاژها:			H_c, A/m	
آهن - سیلیسیوم	۹۶Fe ، ۳Si	۲٫۰۲	۵۶	۸ ۰۰۰
پرمالوی (Permalloy)	۵۵Fe ، ۴۵Ni	۱٫۶۰	۵٫۶	۵۰ ۰۰۰
مومتال (Mumetal)	۵Cu ، ۲Cr ، ۷۷Ni ، ۱۶Fe	۰٫۷۵	۱٫۲	۱۵۰ ۰۰۰
پرمندور (Permendur)	۵۰Co ، ۵۰Fe	۲٫۴۰	۱۵۹	۶ ۰۰۰
فریت منگنز	$MnFe_2O_4$	۰٫۴۹		۲ ۵۰۰
فریت نیکل	$NiFe_2O_4$	۰٫۳۲		۲ ۵۰۰
		B_r, T		
فولاد کوبالت	۵۲Fe ، ۳۶Co ، ۴W ، ۰٫۸C ، ۶Cr	۰٫۹۷	۱۹×۱۰^۳	
آلنیکو V	۵۱Fe ، ۸Al ، ۱۴Ni ، ۲۴Co ، ۳Cu	۱٫۲۵	۴۹×۱۰^۳	

1. *American Institute of Physics Handbook*, 3rd edition, Mc Graw-Hill. New York, 1972.



شکل ۵.۹ منحنی مغناطش و تراوایی نسبی آهن تجارتی (تابکاری شده).

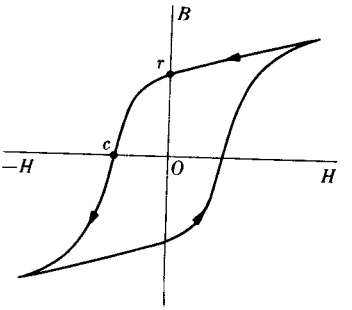
این کمیت را تراوایی نسبی می‌نامند. برای مواد پارا مغناطیس و دیامغناطیس که در جدول ۱.۹ آمده‌اند، به‌خوبی دیده می‌شود که K_m خیلی به‌واحد نزدیک است.

فرومغناطیسها ردهٔ دیگری از مواد مغناطیسی را تشکیل می‌دهند. وجه مشخصهٔ چنین ماده‌ای آن است که می‌تواند مغناطش دائم داشته باشد و همچنین آنکه عموماً وجودش تأثیر زیادی درمیدان مغناطیسی دارد. مواد فرومغناطیس خطی نیستند، در نتیجه معادله‌های (۳۳.۹) و (۳۷.۹) با مقادیر ثابت χ و μ در موردشان صدق نمی‌کند[1]، به‌هر حال، مناسب به‌نظر می‌رسد که معادلهٔ (۳۷.۹) را به‌عنوان معادله‌ای برای تعریف μ به‌کار ببریم، یعنی $\mu = \mu(\mathbf{H})$، اما باید دراین خصوص احتیاط کرد چه این‌کار دربعضی موارد ممکن است به‌اشکالاتی منجر شود. اگر کمیت μ مربوط به‌یک‌مادهٔ فرومغناطیس بامعادلهٔ (۳۷.۹) تعریف شود، آن‌وقت برحسب مقدار $\mathbf{H}$، کمیت μ تمام مقادیر میان صفر تا بینهایت را قبول خواهد کرد و ممکن است مثبت یا منفی باشد. بهترین‌کار این است که هر یک از مسائل مربوط به‌فرومغناطیسها را جداگانه بررسی کنیم، وناحیه‌ای ازمنحنی $\mathbf{B}-\mathbf{H}$ راکه برای مسئلهٔ مفروض مهم است تعیین کنیم، وتقریبهای مناسب برای آن ناحیه را به‌کاربریم.

ابتدا نمونه‌ای ازیک فرومغناطیس نامغناطیده را بررسی می‌کنیم. اگر شدت‌مغناطیسی، که درآغاز صفر است، به‌طور یکنوا افزایش‌داده شود، منحنی‌حاصل ازرسم رابطهٔ $\mathbf{B}-\mathbf{H}$، مشابه منحنی شکل ۵.۹ خواهد بود. این منحنی را منحنی مغناطش ماده می‌نامند. واضح است که μهایی که از منحنی مغناطش، با استفاده از رابطهٔ $\mu = B/H$، به‌دست بیایند، همواره علامت یکسانی دارند (مثبت)، لیکن‌مقادیرشان بسیارمتفاوت است. بیشترین‌مقدار

---

۱. نوع خاصی ازآهن، موسوم به آهن نرم، را تقریباً می‌توان خطی به‌حساب آورد.



شکل ۶.۹ حلقهٔ پسماند نمونه برای یك مادهٔ فرومغناطیسی.

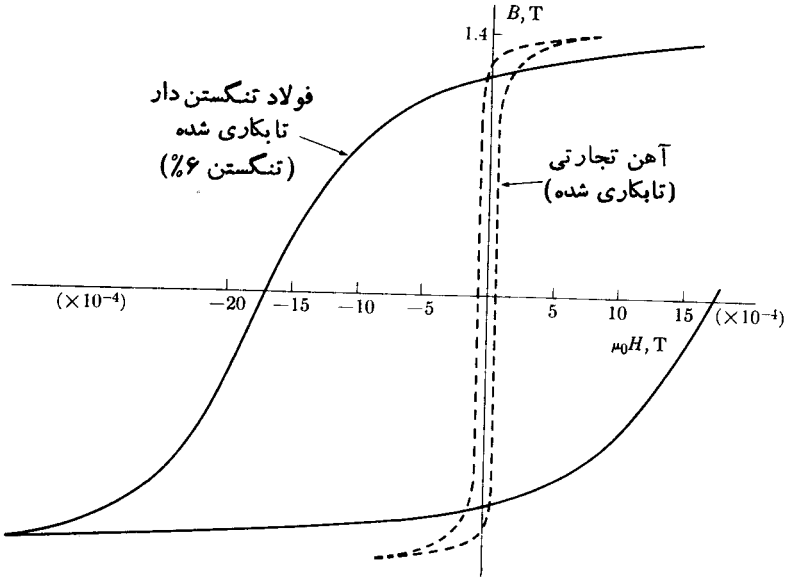
تراوایی در «زانوی» منحنی رخ می‌دهد؛ در بعضی مواد این تراوایی بیشینه تا $10^5\mu_0$ نیزمی‌رسد؛ درسایرمواد ازاین مقدار بسیار کمتراست. علت وجود زانو درمنحنی این است که مغناطش $\mathbf{M}$ درماده به‌مقدار بیشینه‌ای می‌رسد، و برای مقادیر بسیار زیاد $\mathbf{H}$، افزایش میدان مغناطیسی

$$\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})$$

تنها به‌علت وجود جملهٔ $\mu_0\mathbf{H}$ ادامه می‌یابد. مقدار بیشینهٔ $\mathbf{M}$ را مغناطش اشباع ماده می‌نامند (جدول ۲.۹).

حال یك نمونهٔ فرومغناطیس راکه به‌روش بالا مغناطیده شده است درنظرمی گیریم. اگرشدت مغناطیسی $\mathbf{H}$ راکاهش دهیم، رابطهٔ $\mathbf{B}-\mathbf{H}$ از روی همان منحنی شکل ۵.۹ برنمی‌گردد، بلکه از روی منحنی جدید شکل ۶.۹ حرکت می‌کند و به‌نقطهٔ r می‌رسد. مغناطش، پس ازبرقرار شدن، دیگرباحذف $\mathbf{H}$ از میان نمی‌رود؛ در واقع باید یك شدت مغناطیسی معکوس به‌کار گرفته شود تا مغناطش به‌صفرکاهش یابد. اگرافزایش $\mathbf{H}$ درجهت معکوس ادامه یابد، آن وقت $\mathbf{M}$ (ودرنتیجه $\mathbf{B}$) درجهت معکوس برقرارخواهد شد، ودر شکل ۶.۹ حالت تقارن معینی‌آغازخواهد شد. سرانجام، وقتی باردیگر $\mathbf{H}$ افزایش یابد، نقطهٔ عمل درشکل ۶.۹ منحنی پایینی‌را طی می‌کند. پس منحنی $\mathbf{B}-\mathbf{H}$ وقتی $\mathbf{H}$ درحال افزایش است، بامنحنی مربوط وقتی $\mathbf{H}$ درحال‌کاهش است، کاملامتفاوت است. این‌پدیده را پسماند می‌گویند، که به‌معنی «عقب ماندن» است. مغناطش درواقع ازمیدان محرك خود عقب می‌ماند.

منحنی شکل ۶.۹ حلقهٔ پسماند ماده نامیده می‌شود. مقدار $\mathbf{B}$ در نقطهٔ r را پسمانده یا باقیماندگی می‌نامند، اندازهٔ $\mathbf{H}$ در نقطهٔ c به نیروی وادارندگی و یا وادارندگی مغناطیسی ماده موسوم است. ازشکل ۶.۹ پیداست که مقدار μ، که با معادلهٔ (۳۷.۹)



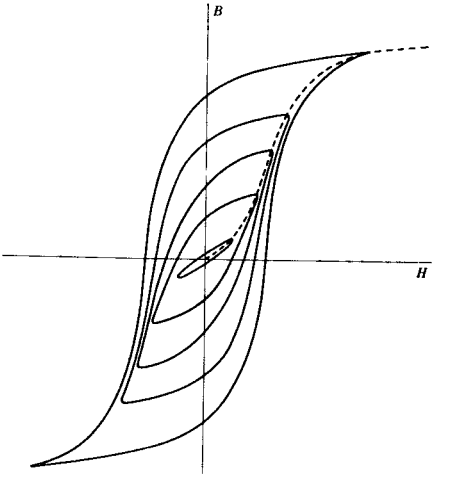
شکل ۷.۹ مقایسهٔ منحنی پسماند برای چند ماده[1]. (توجه کنید $\mu_0 H$ روی محور افقی به‌جای H رسم شده است. $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T.m/A}$.)

تعریف می‌شود، درربع دوم وچهارم نمودار منفی است. شکل حلقهٔ پسماند نه‌تنها به‌ماهیت مادهٔ فرومغناطیسی بستگی دارد (شکل ۷.۹)، بلکه به مقدار بیشینهٔ $\mathbf{H}$ که برماده اعمال می‌شود نیز بستگی‌دارد (شکل ۸.۹). باوجود این، وقتی $\mathbf{H}_{max}$ برای ایجاد اشباع درماده کافی باشد، حلقهٔ پسماند با افزایش $\mathbf{H}_{max}$ تغییرشکل نمی‌دهد. (جدول ۲.۹). برای آهن نرم، پسماند نسبتاً کوچك است.

برای بعضی‌کاربردها، دانستن تراوایی مؤثرماده‌ای‌که تحت تأثیرمجموع یك میدان کوچك متناوب H ویك میدان بزرگ ثابت قرارگرفته، مطلوب است. بنابراین، اگر ΔB تغییر میدان‌مغناطیسی ناشی ازتغییر ΔH درشدت مغناطیسی‌باشد، تراوایی نموی به‌صورت زیرتعریف می‌شود

$$\mu_{\text{نموی}} = \frac{\Delta B}{\Delta H} \qquad (۴۰.۹)$$

1. R. M. Bozorth, *Ferromagnetism*, Van Nostrand, N. Y., 1951



شکل ۸.۹ حلقهٔ پسماند اصلی وچند حلقهٔ پسماند فرعی برای یك مادهٔ نمونه.

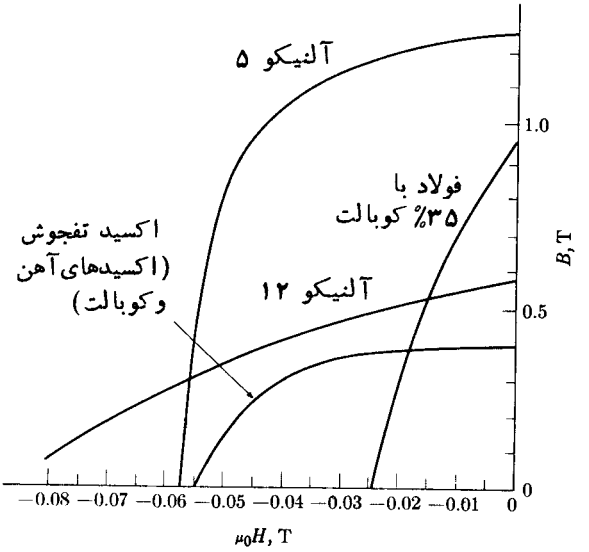
وتقریباً برابراست باشیب منحنی پسماندی که ازنقطهٔ مورد نظرمی‌گذرد.

مواد فرومغناطیس را برای یکی از دومنظور زیر به‌کارمی‌برند: (۱) افزایش شار مغناطیسی یك مدار جریان، (۲) به‌عنوان منابع میدان مغناطیسی (آهنرباهای دائم). برای استفاده به‌عنوان آهنربای دائم، ابتدا ماده را باقراردادن آن دریك میدان مغناطیسی قوی‌تا حد اشباع مغناطیده می‌کنند (یعنی، باقراردادن آن میان قطبهای یك آهنربای الکتریکی و یا گذاردن آن دریك سیملوله که جریان زیادی برای یك لحظه از آن عبور می‌کند). به‌هر حال، وقتی که آهنربای دائم ازمیدان خارجی بیرون آورده می‌شود، به‌طورکلی تحت‌تأثیر یك میدان وامغناطنده قرارمی‌گیرد؛ دربارهٔ این مطلب در بخشهای ۸.۹ و ۱۱.۹ به‌تفصیل بحث‌خواهدشد. بنابراین ربع دوم نمودارحلقهٔ پسماند، قسمت حائزاهمیت رابطهٔ **B — H** برای یك مادهٔ آهنربای دائم است (شکل ۹.۹).

۷.۹ شرایط مرزی برای بردارهای میدان

قبل از آنکه بخواهیم مسائل مغناطیس، حتی مسائل سادهٔ‌آن را حل‌کنیم، باید بدانیم که چگونه بردارهای میدان **B** و **H** در عبور از فصل مشترك دو محیط تغییرمی‌کنند. فصل مشترك مورد نظرممکن است میان دومحیط باخواص مغناطیسی متفاوت ویا میان یك محیط مادی وخلأ باشد.

دومحیط مجاور ۱ و ۲ را، همان‌طورکه درشکل ۱۰.۹ نشان داده شده‌اند، در نظر



شکل ۹.۹ منحنیهای پسماند برای مواد آهنربای دائم. (توجه کنید که $\mu_0 H$ به‌جای H درروی محور افقی رسم شده است.)

می گیریم. یك سطح کوچك S به‌شکل قرصی استوانه‌ای می‌سازیم که فصل مشترك را قطع کند وارتفاع آن نسبت به‌قطرقاعده‌هایش ناچیز باشد. با به‌کاربردن انتگرال شار، یعنی معادلهٔ (۳۲.۹) برای سطح S، خواهیم داشت

$$\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \Delta S + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \Delta S = 0$$

که درآن $\mathbf{n}_2$ و $\mathbf{n}_1$ بردارهای یکهٔ عمود برسطوح بالا و پایین قرص استوانه‌ای‌اند. چون $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$، و چون هریك از این بردارها را می‌توان به‌عنوان برداریکهٔ عمود برفصل - مشترك منظورکرد، پس

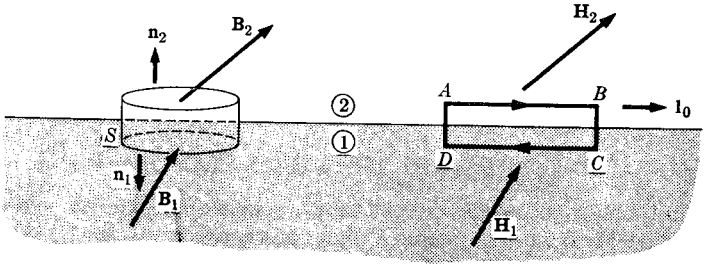
$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \qquad \text{(۴۱.۹ الف)}$$

یا

$$\mathbf{B}_{2n} - \mathbf{B}_{1n} = 0 \qquad \text{(۴۱.۹ ب)}$$

پس مؤلفهٔ قائم $\mathbf{B}$ درعبورازفصل مشترك پیوسته است.

شرط مرزی درمورد میدان $\mathbf{H}$ را می‌توان باکاربرد قانون مداری آمپر، یعنی معادلهٔ



شکل ۱۰.۹ شرایط مرزی برای بردارهای میدان درفصل مشترك میـان دو محیط را می‌توان بابه‌کاربردن قانون گاؤس درمورد S، وانتگرال‌گیری از $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ برروی مسیر $ABCDA$ به‌دست آورد.

(۳۱.۹)، برای مسیرمستطیلی $ABCD$ در شکـل ۱۰.۹ به دست‌آورد. برروی این مسیر، طولهـای AB و CD را برابر Δl می گیریم و AD و BC را قـابل چشمپوشی فرض می‌کنیم. جریانی که از درون مستطیل می گذرد قابل چشمپوشی‌است، مگراینکه یك‌جریان سطحی واقعی وجود داشته باشد. ازاین‌رو

$$(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)\cdot\mathbf{l}_0=\mathbf{j}\cdot(\mathbf{n}_2\times\mathbf{l}_0)=\mathbf{j}\times\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{l}_0$$

یا

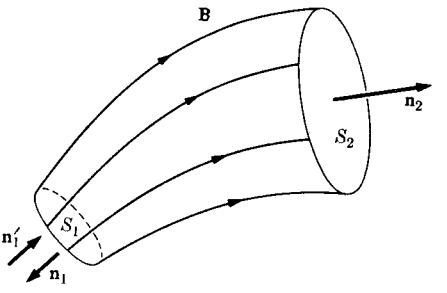
$$(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)_t=\mathbf{j}\times\mathbf{n}_2 \qquad \text{(۴۲.۹ الف)}$$

که در آن $\mathbf{j}$ چگالی جریان سطحی است (جریان انتقالی درواحد طول درلایهٔ سطحی) و $\mathbf{l}_0$ برداریکه‌ای است درجهت $\Delta\mathbf{l}$. بنابراین، مؤلفهٔ مماسی شدت مغناطیسی درعبورازیك فصل‌مشترك پیوسته است، مگراینکه یك‌جریان واقعی سطحی وجود داشته باشد. سرانجام، بامحاسبهٔ ضرب برداری (۴۲.۹ الف) در $\mathbf{n}_2$، خواهیم داشت

$$\mathbf{n}_2\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\mathbf{j} \qquad \text{(۴۲.۹ ب)}$$

هرگاه $\mathbf{H}_2$ و $\mathbf{H}_1$ معلوم باشند، فرمول بالا برای تعیین $\mathbf{j}$ مناسب است.

قبل ازاتمام این بخش یکی‌دیگرازخواص مهم‌میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ را ثابت‌می کنیم، وآن اینکه شارمغناطیسی $\mathbf{B}$ درهمه‌جا پیوسته‌است. توجه خودرا به‌ناحیه‌ای ازفضامعطوف و خطوط میدان مغناطیسی را در آنجـا رسم می کنیم. خطوط میدان مغنـاطیسی خطوطی فرضی‌اند وطوری رسم می‌شوندکه جهت هرخط درهرنقطه با جهت $\mathbf{B}$ در آن نقطه یکی باشد. حال یك لوله ازشارمغناطیسی را در نظر می گیریم، یعنی حجمی راکه از اطـراف باخطوط $\mathbf{B}$ محصور شده باشد ودرهیچ‌جا این خطوط را قطع نکند (شکل ۱۱.۹). لوله



شکل ۱۱.۹ لوله‌ای ازمیدان مغناطیسی.

در دوانتها به‌سطوح S_1 و S_2 ختم می‌شود. با به‌کاربردن قضیهٔ واگرایی خواهیم داشت

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B}\, dv = 0$$

$$= \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, da - \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}'\, da$$

$$= \Phi(S_2) - \Phi(S_1) \qquad (۴۳.۹)$$

پس همان مقدارشارمغناطیسی که ازسطح S_1 واردلوله می‌شود ازسطح S_2 خارج‌می‌شود. خطوط شار هرگز به‌جایی ختم نمی‌شوند، بلکه بـاید سرانجام به‌خودشان وصل شوند و حلقه‌های بسته‌ای تشکیل دهند.

البته احکام بالا درمورد میدان $\mathbf{B}$ صدق می‌کنند. شاید ذکراین موضوع لازم باشد که این احکام درمورد میدان $\mathbf{H}$ صادق نیستند، زیرا $\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$، که درهمه‌جا صفر نیست. پس با کاربرد قضیهٔ واگرایی در مورد لوله‌ای ازشدت مغناطیسی، به‌دست می‌آوریم

$$\int_{S_2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}\, da - \int_{S_1} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}'\, da = \int_V \rho_M\, dv \qquad (۴۴.۹)$$

ناپیوستگی درشارشدت مغناطیسی، برابر است با کل قدرت قطب مغناطیسی که درون لولهٔ شارواقع است.

۸.۹ مسائل مقادیر مرزی شامل مواد مغناطیسی

چون $\mathbf{B}$ و $\mathbf{H}$ از شرایط مرزیی مشابه باشرایط مرزی مربوط به $\mathbf{D}$ و $\mathbf{E}$ تبعیت می‌کنند،

مسائل محیطهای خطی بامغناطش مشخص به‌مسائل دی‌الکتریکها، که درفصل ۴ مورد بحث قرارگرفتند، شباهت دارند. در این بخش ما با ردهٔ به‌خصوصی از مسائل، یعنی، محاسبهٔ میدانهای مغناطیسی در داخل مادهٔ مغناطیسی بدون جریان انتقالی سروکار خواهیم داشت. این رده ازنظرصوری با دی‌الکتریك بدون چگالی بارخارجی یکسان است.

وقتی $\mathbf{J}=0$ باشد، معادله‌های اساسی مغناطیس (۲۸.۹) و (۳۰.۹) به‌صورت زیر ساده می‌شوند

$$\nabla \cdot \mathbf{B}=0 \qquad [۲۸.۹]$$

$$\nabla \times \mathbf{H}=0 \qquad (۴۵.۹)$$

معادلهٔ (۴۵.۹) نشان می‌دهدکه $\mathbf{H}$ را می‌توان به‌صورت شیب یك میدان نرده‌ای نوشت. این امر نباید باعث تعجب شود، زیرا که مطابق معادلهٔ چشمه، یعنی معادلهٔ (۲۷.۹)، سهم جسم مغناطیسی درایجاد $\mathbf{H}$ ازپیش به‌همین صورت بیان شده است، ودر بخش ۸.۸ نشان دادیم که میدان (درواقع اثباتی‌که در آنجا آمده است بـاید برای میدان $\mathbf{H}$ تعمیم داده شود) ناشی ازجریانهای انتقالی وقتی‌که چگالی موضعی جریان صفرباشد از همین طریق به‌دست می‌آید. طبق معادلهٔ (۴۵.۹) می‌توان نوشت

$$\mathbf{H}=-\nabla\varphi^* \qquad (۴۶.۹)$$

که φ^* دراینجا پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی ناشی ازتمام چشمه‌هاست.

دونوع مادهٔ مغناطیسی وجود دارند که محاسبهٔ میدان مغناطیسی درآنها به‌مسئلهٔ سادهٔ مقادیرمرزی تبدیل‌می‌شود: (۱) مادهٔ مغناطیسی خطی ویا تقریباً خطی‌که‌درآن $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$، و (۲) یك قطعه ازماده‌ای‌که به‌طور یکنواخت مغناطیده شده‌است ودرآن $\nabla \cdot \mathbf{M}=0$. در هردوحالت معادلهٔ (۲۸.۹) به‌صورت زیرتبدیل می‌شود

$$\nabla \cdot \mathbf{H}=0 \qquad (۴۷.۹)$$

ازترکیب این معادله بامعادلهٔ (۴۶.۹) نتیجه می‌گیریم

$$\nabla^2\varphi^*=0 \qquad (۴۸.۹)$$

که همان معادلهٔ لاپلاس است. بنابراین مسئلهٔ مغناطیس تبدیل می‌شود به‌مسئلهٔ یافتن جوابی برای معادلهٔ لاپلاس‌که درشرایط مرزی صدق‌کند. آنگـاه $\mathbf{H}$ را می‌توان بامحاسبهٔ منهای شیب پتانسیل مغناطیسی به‌دست‌آورد، و $\mathbf{B}$ ازرابطهٔ

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$$

و یا

$$\mathbf{B}=\mu_{\circ}(\mathbf{H}+\mathbf{M})$$

هر کدام که مناسب مسئلهٔ ما باشد، به‌دست می‌آید.

دو مسئلهٔ مغناطیس زیر سودمندی روشی را که در بالا تشریح شد نشان می‌دهند؛ تمرینهای بیشتری ازاین قبیل درمسائل آخرفصل آمده‌اند. مثال اول درمورد کره‌ای است از مادهٔ مغناطیسی خطی به‌شعاع a وتراوایی μ؛ این کره درناحیه‌ای ازفضا قراردارد که حاوی یك میدان مغناطیسی $\mathbf{B}_{\circ}$ است واین میدان در آغاز یکنواخت بوده است. می‌خواهیم بدانیم چگونه میدان مغناطیسی براثروجود کره تغییر می‌کند، و به‌خصوص، می‌خواهیم میدان مغناطیسی را در داخل خود کره به‌دست آوریم. مسئله خیلی شبیه است به حالت مربوط به کرهٔ دی‌الکتریك درمیدان الکتریکی یکنواخت، که در بخش ۹.۴ حل شد. بنابراین، بااختیار کردن مبدأ مختصات درمرکز کره، وجهت $\mathbf{B}_{\circ}$ به‌عنوان جهت قطبی (جهت z)، پتانسیل را می‌توانیم به‌صورت مجموعه‌ای ازهماهنگهای منطقه‌ای بنویسیم. در اینجا نیز تمام شرایط مرزی‌را می‌توان باهماهنگهای $\cos\theta$ برآورده کرد. پس می‌نویسیم

$$\varphi_{1}^{*}(r,\theta)=A_{1}\,r\cos\theta+C_{1}\,r^{-2}\cos\theta \qquad (۴۹.۹)$$

برای ناحیهٔ خلأ (۱) درخارج کره، و

$$\varphi_{2}^{*}(r,\theta)=A_{2}\,r\cos\theta+C_{2}\,r^{-2}\cos\theta \qquad (۵۰.۹)$$

برای ناحیهٔ مادهٔ مغناطیسی (۲). ثابتهای A_1، A_2، C_1، و C_2 را باید ازروی شرایط مرزی به‌دست آورد.

درفواصل بسیار دور از کره، میدان مغناطیسی خصوصیت یکنواختی خود را حفظ می‌کند: $\mathbf{B}=B_{\circ}\mathbf{k}$، و $\varphi_1^* \to -(B_{\circ}/\mu_{\circ})r\cos\theta$؛ پس $A_1=-(B_{\circ}/\mu_{\circ})$. چون φ_2^* و میدان مغناطیسی مربوط به‌آن نمی‌توانند درهیچ نقطه‌ای بینهایت شوند، ضریب C_2 را باید مساوی صفرقراردهیم. حال که شرایط مرزی را در $r=\infty$ و $r=0$ اعمال کردیم، توجه خودرا به‌فصل مشترك دو محیط در $r=a$ معطوف می‌کنیم

$$H_{1\theta}=H_{2\theta}$$

$$B_{1r}=B_{2r}$$

یا

$$-\left(\frac{B_{\circ}}{\mu_{\circ}}\right)\sin\theta+\frac{C_{1}}{a^{3}}\sin\theta=A_{2}\sin\theta \qquad (۵۱.۹)$$

$$B_{\circ}\cos\theta+2\mu_{\circ}\frac{C_{1}}{a^{3}}\cos\theta=-\mu A_{2}\cos\theta \qquad (۵۲.۹)$$

ازحل همزمان دومعادلهٔ فوق به‌دست می‌آوریم

$$A_{2}=-\frac{3B_{\circ}}{(\mu+2\mu_{\circ})}$$

و

$$C_{1}=[(\mu/\mu_{\circ})-1]\frac{B_{\circ}a^{3}}{(\mu+2\mu_{\circ})}$$

وبنابراین میدانهای مغناطیسی دردرون وبیرون کره عبارت‌اند از

$$\mathbf{B}_{2}=\frac{3B_{\circ}\mathbf{k}}{1+2(\mu_{\circ}/\mu)} \qquad (۵۳.۹)$$

و

$$\mathbf{B}_{1}=B_{\circ}\mathbf{k}+\left[\frac{(\mu/\mu_{\circ})-1}{(\mu/\mu_{\circ})+2}\right]\left(\frac{a}{r}\right)^{3}B_{\circ}(2\mathbf{a}_{r}\cos\theta+\mathbf{a}_{\theta}\sin\theta) \qquad (۵۴.۹)$$

مسئلهٔ دیگری که می‌خواهیم حل کنیم به آهنربای دائم مربوط می‌شود. می‌خواهیم میدان مغناطیسی ایجاد شده توسط یك کرهٔ مغناطیدهٔ یکنواخت با بردار مغناطش $\mathbf{M}$ وشعاع a را ، موقعی که هیچ گونه میدان مغناطیسی دیگری وجود ندارد ، پیدا کنیم. چنانچه محور z را درامتداد بردارمغناطش ومبدأ مختصات‌را درمرکز کره اختیار کنیم ، می‌توانیم‌پتانسیل را برحسب هماهنگهای منطقه‌ای بسط دهیم

$$\varphi_{1}^{*}(r,\ \theta)=\sum_{n=\circ}^{\infty}C_{1,n}r^{-(n+1)}P_{n}(\theta) \qquad (۵۵.۹)$$

برای ناحیهٔ خلأ (۱) درخارج کره، و

$$\varphi_{2}^{*}(r,\ \theta)=\sum_{n=\circ}^{\infty}A_{2,n}r^{n}P_{n}(\theta) \qquad (۵۶.۹)$$

برای ناحیهٔ آهنربای دائمی (۲). دراینجا ماعمداً هماهنگهای مربوط به‌توانهای مثبت r را ازبسط (۵۵.۹) کنار گذاشته‌ایم زیرا این هماهنگها در فواصل زیاد بزرگ می‌شوند، و همچنین‌توانهای منفی r دربسط (۵۶.۹) راکنار گذاشته‌ایم زیرا آنها در مبدأ مختصات

مقدارشان بینهایت می‌شود. ازشرایط مرزی در $r=a$ ، یعنی از

$$H_{1\theta}=H_{2\theta}$$

$$B_{1r}=B_{2r}$$

نتایج زیررا بدست می آوریم

$$\sum_{n=0}^{\infty}(C_{1,n}a^{-(n+1)}-A_{2,n}a^{n})a^{-1}\frac{d}{d\theta}P_n(\theta)=0 \qquad (۵۷.۹)$$

و

$$\mu_0 C_{1,0}a^{-2}+\mu_0\sum_{n=1}^{\infty}P_n(\theta)[C_{1,n}(n+1)a^{-(n+2)}+A_{2,n}na^{n-1}]$$
$$-\mu_0 M\cos\theta=0 \qquad (۵۸.۹)$$

از آنجاکه هر $P_n(\theta)$ تابع متمایزی از θ است، هیچیك از P_nها را نمی‌توان به‌صورت ترکیب خطی سایر P_nها نوشت. پس برای اینکه معادله‌های (۵۷.۹) و (۵۸.۹) معتبر باشند، باید جملاتی که شامل P_n یا $dP_n/d\theta$اند، تك‌تك مساوی صفرشوند. ازجمله‌های مربوط به $n=0$ نتیجه می‌شود

$$\frac{dP_0}{d\theta}=0$$

و

$$\mu_0 C_{1,0}a^{-2}=0$$

بنابراین $C_{1,0}=0$ و $A_{2,0}$ نامعین است. اما $A_{2,0}$ همان جملهٔ ثابت درپتانسیل است؛ این جمله را می‌توان مساوی صفرقرارداد بی‌آنکه برروی $\mathbf{H}$ یا $\mathbf{B}$ تأثیری داشته باشد.

ازجمله‌های مربوط به $n=1$، نتیجه می‌شود

$$C_{1,1}a^{-3}-A_{2,1}=0$$

و

$$2C_{1,1}a^{-3}+A_{2,1}-M=0$$

ازحل این دستگاه معادلات می‌توان نتیجه گرفت

$$C_{1,1}=\frac{1}{3}Ma^3$$

و

$$A_{2,1}=\frac{1}{3}M$$

برای تمام مقادیر $n \geqslant 2$ تنها مقادیری برای $C_{1,n}$ و $A_{2,n}$ که باهردومعادله سازگاری داشته باشند عبارت‌اند از $C_{1,n}=0$ و $A_{2,n}=0$.

باقراردادن این نتایج درمعادله‌های (۵۵.۹) و (۵۶.۹)، به‌دست می‌آوریم

$$\varphi_1^*(r,\theta)=\frac{1}{3}M(a^3/r^2)\cos\theta \qquad (۵۹.۹)$$

و

$$\varphi_2^*(r,\theta)=\frac{1}{3}Mr\cos\theta \qquad (۶۰.۹)$$

شدت مغناطیسی $\mathbf{H}$ را می‌توان باانجام محاسبهٔ شیب به‌دست‌آورد، ونتیجه به‌صورت زیر است

$$\mathbf{H}_1=\frac{1}{3}M(a^3/r^3)\,[2\mathbf{a}_r\cos\theta+\mathbf{a}_\theta\sin\theta] \qquad (۶۱.۹)$$

$$\mathbf{H}_2=-\frac{1}{3}M\mathbf{k} \qquad (۶۲.۹)$$

بنابراین میدان خارجی مربوط به‌کره‌ای که به‌طور یکنواخت مغناطیده است، دقیقاً یك میدان دوقطبی است، که از گشتاور دوقطبی $4/3\,\pi a^3\mathbf{M}$ نتیجه می‌شود. شدت مغناطیسی داخل کره میدانی‌است وامغناطنده (درخلاف جهت‌مغناطش)، واین نتیجه بامیدان‌الکتریکی داخل کره‌ای که به‌طور یکنواخت قطبیده شده باشد در توافق است. پس می‌بینیم که کرهٔ مغناطیده تحت‌تأثیرمیدان وامغناطندهٔ خودقرارمی‌گیرد. ضریب $(4\pi/3)(1/4\pi)=1/3$ درمعادلهٔ (۶۲.۹) صریحاً به‌شکل‌هندسی کره بستگی‌دارد؛ مقدار $4\pi/3$ به عامل‌وامغناطش کره موسوم است. عاملهای وامغناطش برای سایراشکال هندسی محاسبه شده‌اند ودر بعضی ازجدولهای داده‌های فیزیکی آمده‌اند.[1]

---

۱. مثلا، رجوع کنید به

American Institute of Physics Handbook, Third Edition (New York: McGraw - Hill, 1972), p. 5-247.

میدان مغناطیسی خارجی $\mathbf{B}_1$ مساوی است با μ_0 ضرب در معادلهٔ (۶۱.۹). میدان مغناطیسی درداخل کره برابراست با

$$\mathbf{B}_2 = \frac{2}{3}\mu_0 M\mathbf{k} = \frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M} \qquad (۶۳.۹)$$

۹.۹ مدارهای جریان شامل محیطهای مغناطیسی

درفصل ۸ بامیدانهای مغناطیسی ناشی از مدارهـای جریان درخلاء سروکار داشتیم. یکی از مثالهایی که در مسائل بررسی شد (مسئلهٔ ۱۹.۸)، مسئلهٔ سیم‌پیچ چنبره‌ای بـا N دور یکنواخت بودکه جریان I ازآن می‌گذشت (شکل ۱۲.۹). حال بـار دیگرمسئلهٔ سیم‌پیچ چنبره‌ای را حل می‌کنیم، ولی این بار بافرض اینکه محیط داخل سیم‌پیچهـا با یك مادهٔ فرومغناطیسی همگن و همسانگرد که در آغاز مغناطیده نبوده است، پرشده بـاشد. بردار میدانی‌که به‌آسانی به‌دست می‌آید شدت مغناطیسی است، زیرا این بردار باقانون مداری آمپر، یعنی معادلهٔ (۳۱.۹)، به‌جریان درون سیم مربوط می‌شود. اگرمعادلهٔ (۳۱.۹) را در مورد یك مسیردایره‌ای که باسوراخ درون حلقه هم محور است، نظیر مسیر نقطه چین در شکل، به‌کاربریم، تقارن مسئله حکم می‌کندکه $\mathbf{H}$ درتمام نقاط واقع برمسیر یکسان باشد

$$H_t l = NI$$

یا

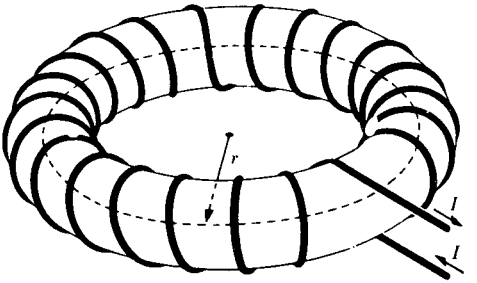
$$H_t = \frac{NI}{l} \qquad (۶۴.۹)$$

دراینجا شاخص t معرف مؤلفهٔ مماس برمسیر، و $l = 2\pi r$ طول کل مسیراست. از معادلهٔ (۲۶.۹) نتیجه می‌شود

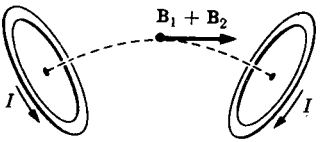
$$B_t = \frac{\mu_0 NI}{l} + \mu_0 M_t \qquad (۶۵.۹)$$

بنابراین میدان مغناطیسی باحالتی‌که در خلاء داشتیم به‌اندازهٔ جملهٔ اضافی $\mu_0 M_t$ تفاوت دارد.

فقط مؤلفهٔ مماسی $\mathbf{B}$ (و $\mathbf{H}$) باروش بالا به‌دست می‌آید؛ با وجود این، این تنهـا مؤلفه‌ای است‌که انتظارداریم وجودداشته باشد. مطابق معادلهٔ (۲۷.۹) دونوع چشمهٔ‌شدت مغناطیسی وجوددارد: جریانهای انتقـالی ومواد مغناطیده. به‌آسانی می‌توان نشان دادکه جریان در سیم پیچ چنبره‌ای فقط یك میدان مماسی ایجاد می‌کند. سیم پیچ معادل است با



شکل ۱۲.۹ سیم پیچ چنبره‌ای.

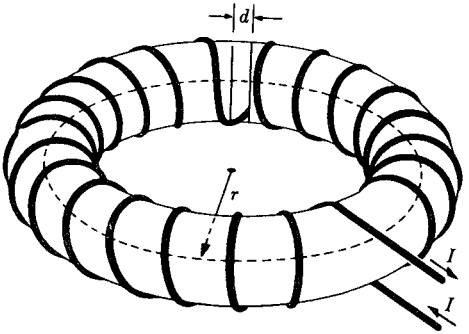


شکل ۱۳.۹ ماهیت محوری میدان دریك سیم پیچ چنبره‌ای با ترکیب میدان مغناطیسی زوج حلقه‌های جریان نشان داده شده است.

N حلقهٔ مستدیرجریان؛ اگرحلقه‌ها را دو به‌دو ترکیب کنیم (شکل ۱۳.۹) واضح است که هرجفت حلقه یك میدان مماسی درنقطهٔ مورد نظر تولید می کند.

چشمهٔ دوم $\mathbf{H}$، یعنی خود مادهٔ مغناطیده، ممکن است احتمالا از طریق چگالیهای قطبهای مغناطیسی، یعنی $\rho_M = -\nabla \cdot \mathbf{M}$ و $\sigma_M = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$ درایجاد میدان سهمی داشته باشد. از آنجا که مادهٔ فرومغناطیسی درون چنبره همسانگرد است، $\mathbf{M}$ درهمان جهت $\mathbf{H}$ خواهد بود. اما $\mathbf{M}$ دراثر جریانهای درون سیم‌پیچ چنبره‌ای به وجود آمده است، و این میدان مماسی است. ازاین‌رو انتظارداریم تنها مؤلفهٔ M_t داشته باشیم ومی‌توانیم شاخص t را حذف کنیم. براین اساس، در نمونهٔ چنبره‌ای هیچ سطحی یافت نمی‌شودکه بر $\mathbf{M}$ عمود باشد، و بنابراین σ_M وجود ندارد. بالاخره ρ_M باید برابر صفر باشد؛ بااینکه M ممکن‌است تابعی از r باشد (یعنی تابعی ازفاصله تامحورچنبره)، ولی جملهٔ $\partial M/\partial r$ در به‌وجود آوردن $\nabla \cdot \mathbf{M}$ سهمی ندارد. نتیجهٔ جالب آن است که مادهٔ مغناطیسی در این حالت هیچ سهمی درایجاد $\mathbf{H}$ ندارد ومعادلهٔ (۶۵.۹) تمامی میدان مغناطیسی را به‌دست می‌دهد.

مسئلهٔ دیگر، که تا حدی ازمسئلهٔ قبلی پیچیده‌تراست، مسئلهٔ یك سیم پیچ‌چنبره‌ای با



شکل ۱۴.۹ یك‌سیم‌پیچ چنبره‌ای که بر اطراف حلقه‌ای‌ازمادهٔ مغناطیسی که یك شکاف هوا دارد، پیچیده شده است.

N حلقهٔ پیچیده شده به‌دوریك مادهٔ فرومغناطیسیی است که درآن یك شکاف هوا به‌عرض d تعبیه شده باشد (شکل ۱۴.۹). در اینجا تمایزی بین شکاف هوا و شکاف خلأ قائل نمی‌شویم، زیرا ازجدول ۱.۹ به‌وضوح پیداست که تفاوت بین تراوایی هوا و μ_0 ناچیز است. دراین‌مسئله قانون مداری‌آمپر برای پیدا کردن $\mathbf{H}$ کافی‌نیست، زیرا دیگر نمی‌توانیم برمبنای استدلال تقارن بگوییم که $\mathbf{H}$ درتمامی نقاط یك مسیر دایره‌ای یکسان است. پس ابتدا به‌سراغ معادلهٔ چشمه، یعنی معادلهٔ (۲۷.۹)، می‌رویم.

بازخاطرنشان می‌کنیم که شدت مغناطیسی شامل دوبخش است، یك سهم ناشی از جریانهای انتقالی ودیگری ناشی از مغناطش. چون سیم پیچ چنبره‌ای نظیر سیم‌پیچ مسئلهٔ قبلی است، سهم جریانهای انتقالی درایجاد $\mathbf{H}$ باید مانند این سهم در مسئلهٔ قبل باشد. بانمایش این سهم باشاخص ۱، می‌توان نوشت

$$H_1 = \frac{NI}{l} \qquad (۶۶.۹)$$

پس مسئله عبارت است ازمحاسبهٔ H_2 یا جملهٔ $\nabla\varphi^*$. برای حفظ سادگی مسئله، این‌فرض منطقی‌را به‌کارمی‌بریم که درسراسرمادهٔ فرومغناطیسی بردارمغناطش M مماسی ویکنواخت است؛ این فرض همهٔ مطالب فیزیکی اساسی را فراهم می‌آورد بی‌آنکه محاسبات جبری مسئله را مشکل کند. در این صورت ρ_M مساوی صفرمی‌شود، اما برروی وجوه قطبی که باشکاف هوا هم مرزند $\sigma_M = \pm M$. این وضع مسئلهٔ الکتروستاتیکیی راکه شامل خازن بارداری باصفحات موازی است تداعی می‌کند. در واقع، فرمولبندی ریاضی پتانسیل در

هردو حالت یکی است. اگر شکاف هوا فوق‌العاده باریك باشد، آنگاه، تقریباً

$$H_2 = M \quad (\text{درشکاف})$$

$$H_2 = 0 \quad (\text{درسایر جاها}) \qquad (۶۷.۹)$$

اما این نتیجه باقانون مداری آمپر تطبیق نمی‌کند، زیرا

$$\oint H\,dl = \oint (H_1 + H_2)\,dl = NI + Md \neq NI$$

مگر اینکه d قابل چشمپوشی باشد. برای یك شکاف باریك که عرض آن درحد چشمپوشی کوچك نیست، تقریب زیر بهتر است

$$H_2 = M\left(1 - \frac{d}{l}\right) \quad (\text{درشکاف})$$

$$H_2 = -M\frac{d}{l} \quad (\text{در ماده}) \qquad (۶۸.۹)$$

این تقریب نه‌تنها درقانون مداری آمپر صدق‌می‌کند، بلکه پیوستگی مؤلفهٔ قائم $\mathbf{B}$ درعبور ازوجوه قطبها را نیز تضمین می‌کند.

با ترکیب معادلات (۶۶.۹) و (۶۸.۹)، وقراردادن نتیجه درمعادلهٔ (۲۶.۹)،

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

نتیجهٔ زیررا به‌دست می‌آوریم

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} + \mu_0 M\left(1 - \frac{d}{l}\right) \qquad (۶۹.۹)$$

که هم‌برای درون شکاف وهم‌برای درون مادهٔ مغناطیسی صادق است. برای حل‌کامل مسئله، تنها دانستن رابطهٔ زیر

$$M = \chi_m(H)H$$

لازم است. برای «آهن نرم»، χ_m را می‌توان ثابت فرض‌کرد.

*۱۰.۹ مدارهای مغناطیسی

همان‌طور که دیدیم، خطوط شار مغناطیسی، حلقه‌هایی بسته تشکیل می‌دهند. هرگاه تمام (یا تقریباً تمام) شارمغناطیسی مربوط به‌توزیع خاصی ازجریانها درمسیر نسبتاً مشخصی محصورشده باشد، آنگاه می‌توان گفت که یك مدار مغناطیسی داریم. بدین‌ترتیب مثالهایی که دربخش ۹.۹ بررسی شدند مدارهای مغناطیسی‌اند، زیرا شارمغناطیسی درناحیهٔ درون سیم‌پیچ چنبره‌ای محصورشده است. درمثال اول، مدار فقط شامل یك نوع ماده، یعنی یك حلقهٔ فرومغناطیسی بود؛ اما درحالت‌دوم بامداری متوالی مرکب ازدوماده برخوردکردیم: یك مادهٔ فرومغناطیسی ویك شکاف هوا.

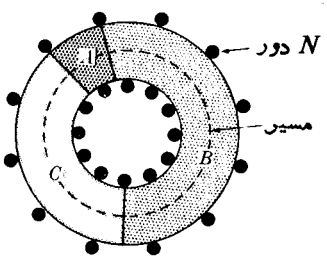
اینك به‌بررسی یك‌مدارمتوالی کلیتر، مرکب ازچند ماده، می‌پردازیم که‌بایك‌سیم‌پیچ چنبره‌ای شامل N دور با جریان I، احاطه شده است. چنین مداری در شکل ۱۵.۹ نشان داده شده است. باکاربرد قانون مداری آمپر درمسیری که درامتداد مدار است (مسیر نقطه‌چین درشکل) به‌دست می‌آوریم

$$\oint H\,dl = NI$$

بهتراست که H درهرنقطه ازطول مسیر برحسب شار مغناطیسی Φ بیان شود؛ بابه‌کار بردن $B=\mu H$ و $\Phi=BA$، که درآن A سطح مقطع مدار در نقطهٔ مورد نظر است، خواهیم داشت

$$\oint \frac{\Phi\,dl}{\mu A} = NI$$

حال چون بایك مدارمغناطیسی سروکارداریم، انتظارمی‌رودکه Φ درتمام نقاط مداراساساً مقدارثابتی باشد، درنتیجه Φ را به‌خارج ازانتگرال می‌بریم



شکل ۱۵.۹ یك مدار مغناطیسی.

$$\Phi\oint\frac{dl}{\mu A}=NI \qquad (۷۰.۹)$$

این معـادلهٔ اساسی مدار مغناطیسی است که به‌کمك آن می‌توانیـم شار Φ را برحسب پارامترهای مدار پیداکنیم.

معادلهٔ (۷۰.۹) یادآورمعادلهٔ مشابه‌آن، $IR=\mathscr{V}$، برای مدار متوالی جریان است. باقیاس بامدارهای جریان، نیروی محرکهٔ مغناطیسی (mmf) ونیزمقاومت مغناطیسی $\mathscr{R}$را به‌صورت زیرتعریف می‌کنیم

$$\text{mmf}=NI \qquad (۷۱.۹)$$

$$\mathscr{R}=\oint\frac{dl}{\mu A} \qquad (۷۲.۹)$$

با به‌کاربردن این تعاریف می‌توانیم معادلهٔ (۷۰.۹) را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\Phi=\frac{\text{mmf}}{\mathscr{R}} \qquad [۷۰.۹ \text{ الف}]$$

اگرمدار ازچند قطعهٔ همگن تشکیل شده باشد، وهر یك از قطعات مقطع یکنواختی داشته باشد، مقاومت مغناطیسی را می‌توان باتقریب زیر بیان‌کرد

$$\mathscr{R}=\sum_j\frac{l_j}{\mu_j A_j}=\sum_j\mathscr{R}_j \qquad (۷۲.۹ \text{ الف})$$

پس مقاومت مغناطیسی کل مدار متوالی برابر است باجمع مقاومتهای عناصر تشکیل‌دهندهٔ آن. شباهت مدارهای جریان ومدارهای مغناطیسی حتی ازآنچه تاکنون اشاره‌شد نیزبیشتر است، زیرا مقاومت یك مدارجریان بارابطهٔ

$$R=\oint\frac{dl}{gA}$$

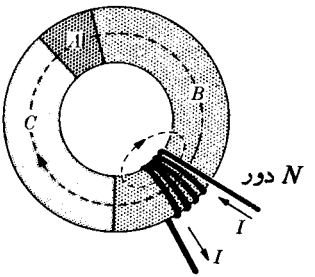
داده می‌شودکه تفاوتش بامعادلهٔ (۷۲.۹) فقط درجانشین شدن g به‌جای μ است. به‌علت همین شباهت، بدیهی است که ترکیبهای موازی ومتوالی مقاومتهای مغناطیسی را درست نظیرترکیبهای موازی ومتوالی مقاومتهای الکتریکی می‌توان به‌دست آورد.

مفهوم مدارمغناطیسی وقتی بیشترین مورد استفاده‌را داردکه درمورد مدارهایی‌شامل مواد فرومغناطیسی به‌کاررود، لیکن درست برای همین مواد است‌که تا حدودی با مشکل

روبه‌رو می‌شویم. برای یك مادهٔ فرومغناطیسی $\mu=\mu(H)$ ، و تا زمانی که مسئلهٔ مدار کاملا حل نشده است و Φ را پیدا نکرده‌ایم، H در درون ماده معلوم نیست. در عین حال وضع چندان هم یأس‌آور نیست؛ درواقع مسئله را می‌توان نسبتاً به‌آسانی باروش تکرار حل کرد. دراین‌روش به‌ترتیب زیرعمل می‌کنیم: (۱) به‌عنوان اولین حدس فرض‌می‌کنیم $H=NI/l$ کل، که در آن l کل طول کل مسیر است. (۲) برای این مقدارِ H از روی منحنی مغناطش مربوط، تراوایی هریك ازمواد موجود درمدار را به‌دست می‌آوریم. (۳) مقاومت مغناطیسی کل مداررا حساب می‌کنیم، و (۴) شار Φ را از معادلهٔ (۷۰.۹ الف) محاسبه می‌کنیم. (۵) ازروی Φ شدت مغناطیسی را درعناصرمختلف مدار پیدا می‌کنیم و تراواییهای آنها را دوباره معین می‌کنیم. (۶) همین روش را باشروع مجدد از (۳)تکرار می‌کنیم. معمولا برای تعیین Φ تا حدود چند درصد تقریب،یك یا دو بار تکرار کفایت می‌کند.

مقاومت مغناطیسی $\mathcal{R}_j$ باتراوایی μ_j به‌طور معکوس متناسب است. چون تراوایی مادهٔ فرومغناطیسی ممکن است ۱۰۰، 10^3، ویاحتی درشرایط معینی 10^5 برابر μ_0 باشد، واضح است که مادهٔ فرومغناطیسی درمقابل عبورشار مغناطیسی مسیری با مقاومت مغناطیسی کم تشکیل می‌دهد. اگر شارمغناطیسی با دومسیر موازی روبه‌رو شود ، یکی با مقاومت مغناطیسی زیاد $\mathcal{R}_h$ ودیگری با مقاومت مغناطیسی کم $(\mathcal{R}_l)$، دراین صورت بیشترین شار از مسیرکم مقاومت عبورمی‌کند ، ومقاومت مغناطیسی معادل برای مدار انشعابی از رابطه $\mathcal{R}=\mathcal{R}_h\mathcal{R}_l/(\mathcal{R}_h+\mathcal{R}_l)$ به‌دست می‌آید. حال اگر به شکل ۱۶.۹ بنگریم متوجه می‌شویم که وقتی مواد A، B، و C فرومغناطیسی باشند، بیشترین شارمغناطیسی ازحلقهٔ فرومغناطیسی می‌گذرد، زیرا مسیرهوا دربین دوانتهای سیملوله مقاومت مغناطیسی زیادی دارد. بنابراین مدارهای مغناطیسی شکلهای ۱۵.۹ و ۱۶.۹ درواقع معادل‌اند.

چنانچه B و C فرومغناطیس باشند، اما A شکافی ازهوا باشد، دیگر دومدار معادل نیستند، زیرا ازدو انتهای سیملولهٔ شکل ۱۶.۹ مقداری شارمغناطیسی نشت می‌کند. اینکه



شکل ۱۶.۹ چنانچه تراواییهای A، B، و C، بزرگ باشند، این‌مدار مغناطیسی معادل مدارمغناطیسی شکل ۱۵.۹ است.

چه‌مقدار ازشار به‌بیرون نشت‌می‌کند بستگی دارد به‌نسبت مقاومت مغناطیسی مدارمغناطیسی به مقاومت مغناطیسی مسیری کـه از طریق آن شار به بیرون نشت می‌کند. وقتی عرض شکاف هوا در مقایسه با طول سیملوله کوچك بـاشد ، شارنشتی کم است و در محاسبات تقریبی می‌توان ازآن صرفنظر کرد. مقاومت مغناطیسی مربوط به‌مسیر نشت برای بسیاری ازاشکال هندسی معمولی محاسبه شده، ودرتعدادی ازکتب مرجع متداول نقل شده است.[۱] مفهوم مدار قطعاً در مورد مـدارهای مغناطیسی به همان دقت مـدارهای الکتریکی نیست زیرا (۱) نسبت مقاومت مغناطیسی مدار به‌مقاومت مغنـاطیسی مدار نشتی به‌اندازهٔ نسبت مقاومتهای مربوط‌درمدارهای الکتریکی کوچك نیست، و(۲) ابعاد عرضی مدار مغناطیسی معمولا درمقایسه باطول‌آن قابل صرفنظرکردن نیست؛ بااین همه ثابت شده است که مفهوم مدار مغناطیسی فوق‌العاده مفید است.

۱۱.۹* مدارهای مغناطیسی شامل آهنرباهای دائم

کاربرد مفهوم مدارمغناطیسی درمورد مدارهای شامل آهنربای دائم، یعنی مدارهـای شار مغناطیسی که‌درآنها منشأ Φ ازموادی است که به‌طوردائم مغناطیده‌اند، نیزمفید است. برای سهولت‌کار آهنربای دائم را با علامت اختصـاری P-M نشان می‌دهیم. به سبب رابطهٔ پیچیدهٔ B-H درمادهٔ P-M، روشی کـه در بخش قبل مورد بحث واقع شد چندان برای مسئلهٔ موجود مفید نیست. به‌جای‌آن ما باردیگر ازقانون مداری‌آمپرشروع می‌کنیم واین بارآن را برای مسیرشارمدار P-M به‌کارمی‌بریم

$$\oint H\,dl = 0$$

یا

$$\int_a^b H\,dl = -\int_{b\ (\mathrm{P-M})}^{a} H\,dl \qquad (۷۳.۹)$$

در نوشتن معادلهٔ (۷۳.۹) صریحاً فرض می‌کنیم که جسم P-M در فاصلهٔ بین نقاط b و a درمسیرشار قرارداد ، در حـالی‌که از a تا b مسیرشار با مادهٔ P-M مواجه نمی‌شود. باقراردادن $B = \mu H$ و $\Phi = BA$ درطرف چپ معادلهٔ (۷۳.۹) نتیجه می‌گیریم

---

۱. برای نمونه رجوع کنید به:

S. A. Nasar and L. E. Unnewehr, *Electromechanics and Rotating Electric Machines* (New York: Wiley, 1978); and F. N. Bradley, *Materials for Magnetic Functions* (New York: Hayden Book Co., 1971), p. 162.

$$\Phi \int_a^b \frac{dl}{\mu A} = -\int_{b\ (P-M)}^{a} H\, dl \qquad (\text{الف } ۷۴.۹)$$

شارمغناطیسی Φ درسراسر طول مدار پیوسته است، بنابراین $\Phi = B_m A_m$ کـه درآن B_m میدان مغناطیسی در درون آهنربای دائم و A_m سطح مقطع آن است. طرف راست معادلهٔ (۷۴.۹ الف) را می‌توان به صـورت $-H_m l_m$ نوشت، کـه درآن H_m میانگین شدت مغناطیسی درون آهنربا، و l_m طول آهنرباست. پس

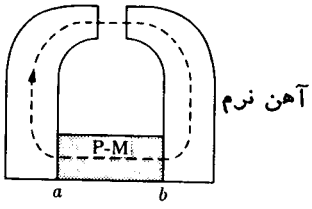
$$B_m A_m \mathcal{R}_{ab} = -H_m l_m \qquad (\text{ب } ۷۴.۹)$$

که این معادله‌ای است که کمیتهای مجهول B_m و H_m را به‌هم مربوط می کند. این معادله را می‌توان به طور همزمان بامنحنی پسماندآهنربا حل کرد تا B_m و H_m، هر دو، به‌دست آیند.

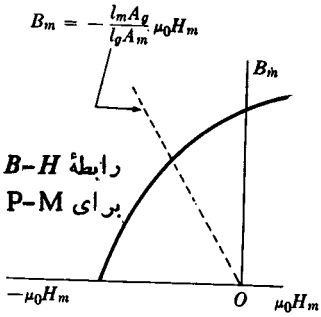
به‌عنوان مثالی ازیك مدار P - M، مداری شامل یك آهنربـا، یك شکاف هوا ، و یك قطعهٔ آهن نرم (شکل ۱۷.۹) را درنظر می گیریم. توجـه به‌این نکته‌که آهن نرم یك مادهٔ P - M نیست بسیارمهم است؛ پسماندآهن نرم درمقایسه باپسماندآهنربا عملا قابل چشمپوشی است، وتراوایی آن، $\mu_i = B_i/H_i$ کمیتی مثبت است. مقاومت مغناطیسی $\mathcal{R}_{ab}$ ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\mathcal{R}_{ab} = \frac{l_i}{\mu_i A_i} + \frac{l_g}{\mu_0 A_g} \qquad (۷۵.۹)$$

که درآن شاخصهای i و g به‌ترتیب برای آهن وشکاف هوا به‌کار برده شده‌اند. چنـانچه شکاف هوا خیلی باریك نباشد، معادلهٔ (۷۵.۹) را می‌توان معمولا به‌صورت تقریبی



شکل ۱۷.۹ یك مدارآهنربـای دائم. برای مداری‌که نشان داده شده است، آهنربـا میدان وامغناطندهٔ نسبتاًبزرگی داردکه برخودش اثرمی‌گذارد؛ باازدیاد طول‌مادهٔ P - M، مثلا باقرار دادن آهنرباهای اضافی در دوبازوی مدار، می‌توان این میدان وامغناطنده راکاهش داد.



شکل ۱۸.۹ خط وامغناطندگی برای یك مدار مغناطیسی، (شاخص m نمایانگر آهنرباست) چون‌به‌جای H_m، $\mu_\circ H_m$ رسم‌شده است، شیب‌خط وامغناطندگی برابراست‌با $-(l_m A_g/l_g A_m)$، به‌عبارت دیگراین شیب یك عدد بی‌بعد است.

$$\mathcal{R}_{ab} \approx \frac{l_g}{\mu_\circ A_g}$$

نوشت، که پس ازترکیب با (۷۴.۹ ب)، نتیجه می‌دهد

$$B_m = -\frac{l_m A_g}{l_g A_m}\mu_\circ H_m \qquad (۷۶.۹)$$

واین رابطه‌ای است خطی بین B_m و H_m. منحنی‌این‌معادله همراه بامنحنی پسماندمغناطیسی درشکل ۱۸.۹ رسم شده‌اند. محل تقاطع دومنحنی نقطهٔ‌کار آهنربا را معین می‌کند. حال دیگرمسئله دراصول حل شده‌است: بادانستن B_m،شار Φ وچگالی‌شار B_g به‌آسانی‌محاسبه می‌شوند.

اما دونکته شایان تذکر باقی مانده‌اند. اول اینکه، برای مساحت مؤثر سطح مقطع شکاف، A_g، چه مقداری را باید به‌کار برد؟ به‌عنوان اولین تقریب، می‌توان A_g را برابر بامساحت سطح مقطع قطب آهن نرم فرض‌کرد، ودر صورتی‌که شکاف هوا خیلی بزرگ نباشد، این تقریب‌کافی خواهد بود. دراینجا به‌بحث مفصل دربارهٔ این مطلب نمی‌پردازیم وخوانندهٔ علاقه‌مند را به‌خواندن مراجعی‌که در بخش قبل ذکر شد دعوت می‌کنیم. دوم اینکه مسئلهٔ نشت شاربه‌همان اندازه درمدار P -M مهم است که درسایرانواع مدارهای مغناطیسی. اما برای مسائل مربوط به‌این کتاب، معمولا فرض می‌کنیم که شار نشتی قابل چشمپوشی است.

بالاخره، متذکر می‌شویم که H_mی که ازشکل ۱۸.۹ به‌دست می‌آید منفی است، یعنی، شدت مغناطیسی‌درون‌آهنربا یك اثر وامغناطنده است. این نتیجه‌ای است کلی؛ وقتی

که منشأ شارمغناطیسی دریك آهنربای دائمی قرار داشته باشد،آن وقت خودآهنربا تحت تأثیریك میدان وامغناطنده قرارمی‌گیرد.

۱۲.۹ خلاصهٔ مطالب

درفصل ۴ دیدیم‌که پاسخ یك محیط (دی الکتریك) به‌میدان E عبارت است از چگالی بارقطبشی $\sigma_P = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}$ و $\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$، که در آن $\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$؛ در فصل ۷، پاسخ یك محیط (رسانا) به‌میدان E را به‌صورت چگالی جریان انتقالی $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$ مشاهده کردیم. حال می‌بینیم‌که پاسخ یك محیط (مغناطیسی) به‌میدان $\mathbf{B}$ نوع دیگری ازچگالی جریان، یعنی جریان مغناطش اتمی است

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} \quad \text{و} \quad \mathbf{j}_M = -\mathbf{n} \times \mathbf{M}$$

که در آن $\mathbf{M} = d\mathbf{m}/dv$ عبارت است ازگشتاورمغناطیسی درواحد حجم مـاده. پتانسیل برداری ناشی ازمغناطش به‌صورت زیر است

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_\circ}{۴\pi} \int \frac{\mathbf{J}_M(\mathbf{r}')\, dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

میدان مغناطیسی کل ناشی از جریانهای انتقالی پایا به‌علاوهٔ جریانهای مغناطش در رابطهٔ زیرصدق می کند

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_\circ (\mathbf{J} + \mathbf{J}_M)$$

توجه‌داشته باشیدکه رابطهٔ $\nabla \cdot \mathbf{J}_M = ۰$ همواره به‌صورت اتحاد برقراراست. بهتراست که میدان برداری $\mathbf{H}$ به‌صورت زیرتعریف شود

$$\mathbf{H} = \frac{۱}{\mu_\circ} \mathbf{B} - \mathbf{M}$$

به‌طوری‌که در رابطهٔ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ فقط جریـانهای انتقالی متعـارف را به‌عنوان چشمه داشته باشیم. برای محیطی معین، معادلهٔ ساختمندی زیر

$$\mathbf{M} = \chi_m(\mathbf{H})\mathbf{H}$$

باید معلوم باشد. وقتی این معادله را بـا تعریف $\mathbf{H}$ ترکیب کنیم، رابطهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{B}=\mu(\mathbf{H})\mathbf{H}$$

که درآن $\mu=\mu_{\circ}(1+\chi_m)$ آنگاه این رابطه همراه بامعادلات دیفرانسیلی زیر

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}$$

$\mathbf{B}$ و $\mathbf{H}$ را تعیین می‌کنند، که البته باید درشرایط مرزی زیرصادق باشند

$$\mathbf{B}_{2n}-\mathbf{B}_{1n}=0$$

$$\mathbf{H}_{2t}-\mathbf{H}_{1t}=\mathbf{j}\times\mathbf{n}_2$$

۱. اکثرمواد یا دیامغناطیسی‌اند ($\chi_m<0$) ویا پارامغناطیسی ($\chi_m>0$)، و در هر دو مورد $|\chi_m|\ll 1$. مواد مغناطیسی که اهمیت عملی دارند، فرومغناطیسی‌اند. برای این مواد $|\chi_m|$ ممکن است بیش از ۱۰۰۰ باشد، لیکن $\mathbf{B}=\mathbf{B}(\mathbf{H})$ نه‌خطی است ونه حتی تك مقدار (پسماند).

۲. درمسائلی‌که جریانهای انتقالی ندارند، از آنجا که $\nabla\times\mathbf{H}=0$ است، استفاده از پتانسیل نرده‌ای مناسب است

$$\mathbf{H}=-\nabla\varphi^*$$

چون $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$، پس $\nabla\cdot\mathbf{H}=-\nabla\cdot\mathbf{M}$، واز این رو φ^* در معادلهٔ پواسون صدق می‌کند

$$\nabla^2\varphi^*=\nabla\cdot\mathbf{M}$$

یك جواب این معادله به‌صورت زیراست

$$\varphi^*(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi}\int_{V_{\circ}}\frac{\rho_M(\mathbf{r}')\,dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}+\frac{1}{4\pi}\int_{S_{\circ}}\frac{\sigma_M(\mathbf{r}')\,da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

که درآن $\rho_M=-\nabla\cdot\mathbf{M}$ و $\sigma_M=\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}$. (این جواب درصورتی مفید است که $\mathbf{M}$ معلوم باشد.)

۳. درمسائلی که درآنها محیط خطی یا $\mathbf{M}$ یکنواخت باشد، $\nabla\cdot\mathbf{H}=0$ و φ^* درمعادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند. این مسائل بامسائل الکتروستاتیکی متناظر که چگالی بارخارجی ندارند،

یکسان‌اند.

۴. برای جریانهای انتقالی، انتگرال $\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}$ عبارت است از قانون آمپر

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I$$

۵. جواب مربوط به $\mathbf{H}$ به‌دوقسمت، یکی ناشی ازجریانهای انتقالی ودیگری ناشی از مواد مغناطیسی، تقسیم می‌شود

$$\mathbf{H}(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dv'-\nabla\varphi^*(\mathbf{r})$$

(محاسبهٔ جملهٔ دوم به‌معلوم بودن $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ بستگی دارد.)

۶. درحضور مواد فرومغناطیسی‌باμی بزرگ، فرض اینکه تمامی شار Φ درحجم معلومی محصوراست ممکن است تقریب سودمندی باشد. دراین صورت

$$NI=\Phi\mathcal{R}$$

که درآن مقاومت مغناطیسی

$$\mathcal{R}=\frac{l}{\mu A}$$

را می‌توان برای هرجزء ازمدارمغناطیسی محاسبه‌کرد.

مسائل

۱.۹ یك آهنربای دائمی به شکل استوانهٔ قائم به‌طول L مفروض است. اگر مغناطش $\mathbf{M}$ یکنواخت و درجهت محوراستوانه باشد، چگالیهای جریان مغناطش $\mathbf{J}_M$ و $\mathbf{j}_M$ راپیدا کنید. این توزیع جریان را باتوزیع جریان مربوط دریك سیملوله مقایسه‌کنید.

۲.۹ توزیع جریانهای مغناطش‌را برای کره‌ای که به‌طوریکنواخت مغناطیده شده وبردار مغناطش‌آن $\mathbf{M}$ است به‌دست‌آورید. برطبق معادلهٔ (۶۳.۹) میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ در درون چنین کره‌ای یکنواخت است. آیا می‌توانید بااستفاده ازاین اطلاعات یك سیم‌پیچ جریان طراحی‌کنید به‌طوری‌که دریك فضای‌کروی میدان مغناطیسی یکنواخت ایجادکند؟

۳.۹ (الف) گشتاورمغناطیسی یك‌جسم‌ماکروسکوپی به‌صورت $\int_V\mathbf{M}\,dv$ تعریف‌می‌شود.

رابطهٔ زیررا ثابت کنید

$$\int_V \mathbf{M}\, dv = \int_V \mathbf{r}\rho_M\, dv + \oint_S \mathbf{r}\sigma_M\, da$$

دراین رابطه S سطحی است که حجم V را احاطه کرده است. (راهنمایی: به مسئلهٔ مشابه مربوط به $\mathbf{P}$ درفصل ۴ مراجعه کنید.) (ب) یك آهنربای دائمی به‌شکل کره و به‌شعاع R دارای بردار مغناطش یکنواخت $\mathbf{M}_0$ درامتداد محور قطبی است. گشتاور مغناطیسی این آهنربا را هم ازسمت راست وهم ازسمت چپ معادلهٔ قسمت (الف) پیدا کنید.

۴.۹ (الف) آهنربایی با بردار مغناطش مشخص $\mathbf{M}(x, y, z)$ داده شده‌است. هرعنصر حجم dv را می‌توان یك دوقطبی مغناطیسی کوچك $\mathbf{M}\,dv$ فرض کرد. اگر آهنربا را در میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}_0$ قراردهیم، گشتاورنیروی وارد برآهنربارا برحسب گشتاور مغناطیسی آن (که درمسئلهٔ ۳.۹ تعریف شده است) پیدا کنید. (ب) آهنربایی به‌شکل استوانهٔ قائم به‌طول L وسطح مقطع A به‌طوریکنواخت درامتداد موازی بامحوراستوانه، مغناطیده است وبردار مغناطش آن $\mathbf{M}_0$ است. آهنربا را در میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}_0$ قرار می‌دهیم. گشتاور نیروی وارد برآهنربا را برحسب چگالیهای قطب مغناطیسی آن محاسبه کنید.

۵.۹ بیضیواری که طول محورهای اصلی آن $2a$، $2a$، و $2b$ است، به‌طوریکنواخت‌در امتداد موازی بامحور $2b$ مغناطیده است. بردار مغناطش بیضیوار $\mathbf{M}_0$ است. چگالیهای قطب مغناطیسی را برای این شکل هندسی پیدا کنید.

۶.۹ یك پوستهٔ کروی به‌شعاع داخلی R_1 وشعاع‌خارجی R_2 که درامتداد محور z به‌طور یکنواخت مغناطیده است، مفروض است. بردار مغناطش در پوسته برابر $\mathbf{M}_0 = M_0\mathbf{k}$ است. پتانسیل نرده‌ای φ^* را برای نقاط واقع برمحور z در داخل و در خارج پوسته به‌دست آورید.

۷.۹ یك آهنربای دائم به‌شکل استوانهٔ قائم به‌طول L و به‌شعاع R طوری قرار داده شده که محورتقارن آن منطبق برمحور z است. مبدأ مختصات درمرکز آهنربا قرار دارد. اگراستوانه بردار مغناطش محوری یکنواختی برابر M داشته باشد: (الف) مطلوب است محاسبهٔ $\varphi^*(z)$ برروی نقاط واقع برمحورتقارن هم درداخل و هم درخارج آهنربا، و (ب) بااستفاده ازنتایج قسمت (الف) میدان مغناطیسی B_z را برروی محور تقارن، در داخل وخارج آهنربا محاسبه کنید.

۸.۹ کره‌ای ازیك مادهٔ مغناطیسی به‌شعاع R، درمبدأ مختصات قراردارد. بردارمغناطش به‌صورت $\mathbf{M} = (ax^2 + b)\mathbf{i}$ است که در آن a و b مقادیری ثابت‌اند. مطلوب است محاسبهٔ کلیهٔ چگالیهای قطب مغناطیسی و جریانهای مغناطش.

۹.۹ حلقه‌ای از آهن تابکاری شده به طول متوسط ۱۵ سانتیمتر با پیچه‌ای چنبره‌ای که ۱۰۰ دور سیم پیچ دارد پیچیده شده است. میدان مغناطیسی را در حلقه محاسبه کنید. فرض کنید جریان در سیم پیچ (الف) ۱٫۰ آمپر، (ب) ۲٫۰ آمپر، و (ج) ۱ آمپر باشد.

۱۰.۹ حلقه‌ای از جنس آهن نرم که یك شکاف هوای ۱ سانتیمتری دارد مانند شکل ۱۴.۹ به‌شکل یك چنبره سیم‌پیچی شده است. طول متوسط حلقهٔ آهن ۲۰ سانتیمتر، سطح مقطع آن ۴ سانتیمترمربع، و تراوایی آن μ_0 ۳۰۰۰ است که فرض می‌شود ثابت است. از سیم‌پیچ چنبره‌ای که شامل ۲۰۰ دور است جریانی به‌شدت ۱۰ آمپر می‌گذرد. B و H را درداخل حلقهٔ آهن ودرشکاف هوا به‌دست آورید.

۱۱.۹ استوانه‌ای طویل به‌شعاع a و تراوایی μ را در میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}_0$ قرار می‌دهیم به‌طوری که محوراستوانه عمود بر $\mathbf{B}_0$ باشد. میدان مغناطیسی درون استوانه را محاسبه کنید. بایك ترسیم نیمه کمی خطوط میدان نوعی درون استوانه را نشان دهید. (فرض کنید که φ^* را می‌توانیم برحسب هماهنگهای استوانه‌ای $\cos\theta$ به‌طورکامل مشخص کنیم. چنین فرضی موجه است زیرا تمام شرایط مرزی را می‌توان برحسب هماهنگهای $\cos\theta$ براورده‌کرد.)

۱۲.۹ یك سیم مسی مستقیم وطویل ویك سیم آهنی مستقیم و طویل، هریك جریان یکسان I را حمل می‌کنند و در میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}_0$ قرار دارند. نشان دهید که نیروی وارد برسیم آهنی تقریباً دوبرابر نیروی وارد برسیم مسی است. (راهنمایی: ازنتیجهٔ مسئلهٔ ۱۱.۹ استفاده کنید.)

۱۳.۹ یك سیم حامل جریان I دریك لولهٔ آهنی استوانه‌ای شکل قرار دارد. شعاعهای داخلی وخارجی لوله a و b، پذیرفتاری ثابت آن χ است، و با سیم هم‌محور است. چگالی جریان مغناطش و کل جریان مغناطش را پیدا کنید.

۱۴.۹ دومحیط مغناطیسی بایك فصل مشترك مسطح از یکدیگر جدا شده‌اند. نشان دهید که زوایای میان بردارعمود برفصل مشترك وبردارهای میدانهای مغناطیسی دردوطرف آن، در رابطهٔ زیرصدق می‌کنند

$$\mu_2 \tan\theta_1 = \mu_1 \tan\theta_2$$

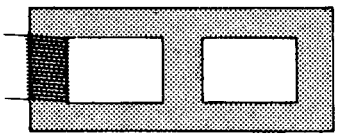
۱۵.۹ سیمی مستقیم، که حامل جریان I است، موازی صفحه‌ای نامتناهی و به فاصلهٔ d از آن قرار گرفته است. یك طرف صفحه هواست و سیم در آن قرار دارد، و طرف دیگر صفحه محیطی است با تراوایی ثابت μ. جریان تصویری را پیدا کنید که میدان مغناطیسی صحیح را در هوا به‌دست می‌دهد، هنگامی که (الف) $\mu=\infty$، (ب) $\mu=0$ باشد. (حالت (الف) تقریبی از مادهٔ فرومغناطیسی است و (ب) ابررسانا را توصیف می‌کند.)

*۱۶.۹ عامل وامغناطش را برای استوانهٔ طویلی محاسبه کنید که در امتداد عمود برمحور استوانه به‌طور دائم مغناطیده است و بردار مغناطش آن یکنواخت است.

*۱۷.۹ یك پوستهٔ استوانه‌ای طویل (شعاع خارجی b، شعاع داخلی a و تراوایی نسبی K_m) در امتداد عمود بر میدان مغناطیسی $\mathbf{B}_0$ قرار گرفته است . (الف) نشان دهید که میدان مغناطیسی $\mathbf{B}_i$ در ناحیهٔ خلأ در داخل پوسته با $\mathbf{B}_0$ موازی است. (ب)نشان دهید که‌ضریب حفاظ مغناطیسی (که در زیر تعریف شده است) به‌صورت زیر است

$$h_m \equiv \frac{B_0}{B_i} = 1 + \frac{(K_m - 1)^2}{4K_m}\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)$$

۱۸.۹ یك مدار مغناطیسی مطابق شکل زیر ۱۰۰ دور سیم‌پیچ دارد که جریان یك آمپر ازآن می‌گذرد. سیم‌پیچ درضلع سمت چپ مدار قرار دارد. ارتفاع مدار ۱۰ سانتیمتر، طول آن ۲۰ سانتیمتر ، سطح مقطع اضلاع آن ۶ سانتیمتر مربع و تراوایی آن برابر $5000\mu_0$است که ثابت فرض می‌شود. اگرازنشت شارصرفنظرکنیم، شارمغناطیسی را در ضلع وسط ودر ضلع سمت راست مدارمحاسبه کنید.



۱۹.۹ یك مدار مغناطیسی، نظیر شکل ۱۷.۹، از یك آهنربای دائمی به‌طول ۸ سانتیمتر و مسیری از جنس‌آهن نرم به‌طول ۱۶ سانتیمتر، ویك شکاف هوا به‌عرض ۰٫۸ سانتیمتر، تشکیل شده است. سطح مقطع متوسط آهن و آهنربا ۴ سانتیمتر مربع است، حال آنکه سطح مقطع مؤثر شکاف هوا ۳ سانتیمتر مربع است. تراوایی نسبی آهن ۵۰۰۰ است. (الف) چگالی شار مغناطیسی را در شکاف، موقعی‌که آهنربا ازهریك ازمواد مختلف‌زیر ساخته شده باشد، محاسبه‌کنید: اکسید تفجوش ، فولاد کوبالتی ۳۵ درصد. ازنشت شار صرفنظر کنید. (ب) ابعاد مدار مغناطیسی را از یك جهت تغییر می‌دهیم: شکاف هوا را به ۰٫۸ میلیمتر کاهش می‌دهیم . محاسباتی راکه در قسمت (الف) خواسته شده است تکرار کنید.

۲۰.۹ میدان مغناطیسی را درکره‌ای که به طور یکنواخت مغناطیده شده برای هریك از موادی‌که در شکل ۹.۹ نشان داده شده‌اند، محاسبه کنید.

۲۱.۹ یك مدار مغناطیسی نظیر شکل ۱۷.۹ دارای آهنربایی از جنس‌آلنیکو V به‌طول

۱۰ سانتیمتر، مسیری از جنس آهن نرم به‌طول ۱۶ سانتیمتر و یك شکاف هوا به‌عرض ۱ سانتیمتر است. همچنین این مدار ۸۰۰ آمپر ـ دور سیم‌پیچ دارد (در جهتی که به‌شار تولید شده توسط آهنربا کمك می‌کند). چگـالی شار مغناطیسی در شکاف هوا را پیدا کنید (ازنشت شارصرفنظر کنید، برای آهن نرم $K_m = ۵۰۰۰$ است، وفرض کنید که سطح‌مقطعهای آهنربا، آهن نرم، وشکاف هوا یکسان است).

۱۰ *

نظریهٔ میکروسکوپی مغناطیس

درفصل قبل جنبه‌های ماکروسکوپی مغناطش بررسی شد. خواص مغناطیسی مـاده‌صریحاً به‌کمك تابع $\mathbf{M}$ مورد مطالعه قرار گرفتند، واین تابع‌خودبه‌کمك پارامترهایی‌که باتجربه تعیین می‌شوند، به‌میدان مغناطیسی ربط داده شد. اکنون از دید میکروسکوپی به‌ماده نگاه می‌کنیم (یعنی به‌آن به‌صورت مجموعه‌ای ازاتمها یا مولکولها می‌نگریم) تا ببینیم پاسخ مولکولهای جداگانه به‌میدان مغناطیسی وارد برآنها چگونه است. اگر این روش به‌طور کامل انجام شود، نهایتاً می‌بایست به‌طور نظری عبارتهـایی برای پذیرفتـاری و روابط $B-H$ را برای تمام انواع مواد به دست آوریم. چنین روشی مسلمـاً بیرون از قلمرو این‌کتاب‌است؛ باوجود این، می‌توانیم نسبتاً به‌سادگی‌نشان دهیم که‌انواع مختلف‌رفتارهای مغناطیسی چگونه به‌وجود می‌آیند، و به‌علاوه، می‌توانیم عبارتهایی را به‌دست‌آوریم که‌در بـرخی حالتها مقـدار تقریبی پذیرفتاری را پیشگـویی کنند. بحث کاملتری دربـارهٔ مطالب این فصل درکتب مربوط به‌فیزیك حالت جامد یافت می‌شود.[1]

درتوصیف ماکروسکوپی بادوبردار میدان سروکارداشتیم، $\mathbf{B}$ و $\mathbf{H}$، کـه آنها را بارابطهٔ $\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})$ به‌هم مربوط‌کردیم. از دیدگـاه میکروسکوپی اختلاف بین $\mathbf{B}$ و $\mathbf{H}$ به‌طورعمده ازمیان می‌رود، زیراکه سروکارما بامجموعه‌ای ازمولکولها درخلأ

---

* این فصل را می‌توان حذف‌کرد بی‌آنکه پیوستگی مطالب‌کتاب از دست برود.

۱. به فصلهای ۱۴ و ۱۵ کتاب آشنایی با فیزیك حالت جامد اثرکیتل (از انتشارات مرکز نشردانشگاهی) مراجعه شود.

است (یعنی بامجموعه‌ای از دوقطبیهای مغناطیسی یا گروههای دوقطبی). آنچه مورد نظر ماست میدان مغناطیسی در نزدیکی یك مولکول درخلأ است ویا درمکان یك مولکول وقتی که آن مولکول ازدستگاه خارج‌شده باشد. پس $\mathbf{B}_m = \mu_0 \mathbf{H}_m$. دراینجاشاخص m به‌معنای میکروسکوپی است ولی دربخشهای بعدی این فصل، نماد $\mathbf{B}_m$ (و $\mathbf{H}_m$) به‌مقدار خاصی‌از میدان میکروسکوپی، یعنی، میدان درمکان یك مولکول اطلاق خواهد شد.

رسم براین است که به‌هنگام بحث درمورد میدان میکروسکوپی درون ماده به‌جای آنکه $\mathbf{B}_m$ را به‌میدان $\mathbf{B}$ ربط دهیم، $\mathbf{H}_m$ را به‌میدان ماکروسکوپی $\mathbf{H}$ مربوط کنیم، زیرا هم $\mathbf{H}$ و هم $\mathbf{H}_m$ را می‌توان به‌سادگی برحسب انتگرالهایی از توزیع جریان و توزیع دوقطبی نوشت. ولی تفاوتی نمی‌کند که $\mathbf{H}_m$ را حساب کنیم یا $\mathbf{B}_m$ را، زیرا فرق این دو فقط در ضریب مقیاس μ_0 است.

۱.۱۰ میدان مولکولی در درون ماده

میدان مغناطیسی را که برهم‌کنش آن باجریانهای اتمی دریك اتم یا مولکول مؤثر است، میدان‌مولکولی $\mathbf{B}_m = \mu_0 \mathbf{H}_m$ می‌نامند. دربرخی کتب درسی آن‌را میدان موضعی می‌نامند. این میدان عبارت است ازمیدان مغناطیسی در یك موضع مولکولی (یا اتمی) درماده. این میدان به‌توسط تمام چشمه‌های خارجی وتمام دوقطبیهای مولکولی درون ماده، به‌استثنای مولکول (یا اتم) واقع درنقطهٔ مورد مطالعه، تولید می‌شود. واضح است که لزومی ندارد $\mathbf{B}_m$ بامیدان مغناطیسی ماکروسکوپی یکسان باشد، زیرا مقداراخیر به نیروی وارد بر یك عنصر جریان، که ابعادش درمقایسه باابعاد مولکولی بزرگ است، مربوط می‌شود.

میدان مغناطیسی مولکولی را می‌توان به‌روشی مشابه باروش ۱.۵ (مربوط به‌میدان الکتریکی مولکولی در دی‌الکتریکها) محاسبه کرد. یك‌جسم مادی به‌شکل اختیاری درنظر می‌گیریم وبرای سهولت فرض‌می‌کنیم که به‌طوریکنواخت مغناطیده است وبردار مغناطش آن $\mathbf{M}$ است. قطعهٔ کوچکی ازاین جسم‌را برمی‌داریم ویك حفرهٔ کروی دراطراف نقطه‌ای که میدان مولکولی باید در آنجا محاسبه شود ایجاد می‌کنیم. ماده‌ای را که باقی مانده است به‌مثابه یك پیوستار درنظرخواهیم گرفت، یعنی، آن را ازدید ماکروسکوپی بررسی خواهیم کرد. سپس ماده‌ای را که برداشته‌ایم مولکول به‌مولکول دردرون‌حفره می‌گذاریم، بجز مولکولی که درمرکزحفره است ودرآنجا می‌خواهیم میدان مولکولی‌را محاسبه کنیم. بامولکولهایی که بدین‌گونه به‌جای خودگذاشته‌می‌شوند باید، نه به‌مثابه یك‌پیوستار، بلکه به‌مثابه دوقطبیهای جداگانه یاگروههای دوقطبی رفتار کرد.

میدان ماکروسکوپی $\mathbf{H}$، یعنی شدت مغناطیسی در نمونه، را می‌توان برطبق معادلهٔ (۲۷.۹) به‌صورت زیر بیان‌کرد

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dv' + \frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho_M(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dv' + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\sigma_M(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,da'$$

که در آن انتگرالها تمام چشمه‌های $\mathbf{J}$، ρ_M، و σ_M را در برمی‌گیرند. میدان مولکولی $\mathbf{H}_m$ را هم می‌توان به‌همین روش بیان کرد، جزاینکه دراین مورد سهمهای مربوط به‌سطح حفره و تك تك دوقطبیهای درون حفره نیز باید اضافه شوند. کنار گذاشتن انتگرال $\rho_M(\mathbf{r}-\mathbf{r}')/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3$ در حجم حفره ضرورت خاصی ندارد، زیرا برای نمونه‌ای که به‌طوریکنواخت مغناطیده است $\rho_M = -\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$ بدین ترتیب

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H} + \mathbf{H}_s + \mathbf{H}' \qquad (۱.۱۰)$$

که درآن $\mathbf{H}$ شدت میدان مغناطیسی ماکروسکوپی در نمونه، $\mathbf{H}_s$ سهم چگالی سطحی قطب $\sigma_M = \mathbf{M}_n$ برروی سطح حفره، و $\mathbf{H}'$ سهم دوقطبیهای مختلف درون حفره‌اند.

به کمك محاسبات مربوط دربخش ۱.۵، می‌بینیم که $\mathbf{H}_s$ برابراست با

$$\mathbf{H}_s = \frac{1}{3}\mathbf{M} \qquad (۲.۱۰)$$

به‌علاوه، سهم دوقطبیها به‌صورت زیراست

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{4\pi}\sum_i \left[\frac{3(\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{r}_i)\mathbf{r}_i}{r_i^5} - \frac{\mathbf{m}_i}{r_i^3} \right] \qquad (۳.۱۰)$$

این عبارت که درآن r_i فاصلهٔ دوقطبی i ام ازمرکزحفره است ، همان شکل جملهٔ دوقطبی الکتریکی $\mathbf{E}'$ دربخش ۱.۵ را دارد. پس اگرتوجهمان را به‌دستهٔ نسبتاً بزرگی ازموادکه برای آنها رابطهٔ (۳.۱۰) صفر می‌شود معطوف سازیم، معادلهٔ (۱.۱۰) به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H} + \frac{1}{3}\mathbf{M} \qquad (۴.۱۰)$$

و

$$\mathbf{B}_m = \mu_0 \mathbf{H}_m \qquad (۵.۱۰)$$

معادله‌های (۴.۱۰) و (۵.۱۰) میدان مولکولی را برحسب شدت میدان مغناطیسی ماکروسکوپی و بردار مغناطش درون جسم نمونه به‌دست می‌دهند. برای اکثر مواد دیامغناطیسی و پارامغناطیسی، عبارت $1/3\,\mathbf{M} = 1/3\,\chi_m \mathbf{H}$ فوق‌العاده کوچك و قابل چشمپوشی است، ولی برای اجسام فرومغناطیسی این جملهٔ تصحیحی بسیارباهمیت است.

۲.۱۰ منشأ دیامغناطیس

برای محاسبهٔ پذیرفتاری دیامغناطیسی مجموعه‌ای از اتمها، باید ازحرکت الکترونی‌درون خوداتم اطلاعی داشته باشیم. فرض می کنیم که هرالکترون برروی نوعی مدار به‌دورهستهٔ اتمی خود گردش کنـد، و به‌منظور سادگی مداررا دایره‌ای به‌شعاع R در صفحه‌ای عمود برمیدان مغناطیسی اعمال شده انتخاب می کنیم. مکانیك کوانتومی به‌ما می آموزدکه هرچند این تصویر به‌طورتقریبی درست است ولی الکترونها در مدارهای کاملا معینی نمی گردند. برای حل دقیق مسئله باید معادلهٔ شرودینگررا برای الکترون اتم در میدان مغناطیسی حل کنیم؛ با این‌همه، محاسبات نسبتاً سادهٔ «کلاسیکی» نیزمرتبهٔ بزرگی پذیرفتاری‌دیامغناطیسی را به‌طورصحیح به‌دست می‌دهند.

قبل ازآنکه میدان مغناطیسی اعمال شود، الکترون در مدار خود درحال تعادل‌است

$$F_q = m_e \omega_0^2 R \qquad (۶.۱۰)$$

در این رابطه F_q نیروی الکتریکی است که الکترون را به دور اتم خود در گردش نگه می‌دارد، ω_0 فرکانس زاویه‌ای الکترون در مدارش، و m_e جرم الکترون است. با اعمال میدان مغنـاطیسی نیروی اضافی $-e\mathbf{v}\times\mathbf{B}_m$ برالکترون وارد می‌شود؛ بـا فرض اینکه الکترون درهمان مدارقبلی باقی بماند خواهیم داشت

$$F_q \pm e\omega R B_m = m_e \omega^2 R$$

که ازترکیب آن بامعادلهٔ (۶.۱۰) نتیجه می‌شود

$$\pm e\omega B_m = m_e(\omega-\omega_0)(\omega+\omega_0) \qquad (۷.۱۰)$$

مقدار $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ تغییرفرکانس زاویه‌ای الکترون است. پس بسته به‌جزئیات هندسی مدار الکترون (یعنی بسته به جهت $\mathbf{v}\times\mathbf{B}_m$ نسبت به $\mathbf{F}_q$) سرعت الکترون در مدارش افزایش یاکاهش می‌یابد، ولی درهرحال تغییر گشتاور مغناطیسی مداری در جهت مخالف میدانی است که اعمال می‌شود. خواننده می‌تواند صحت این‌حکم‌را به‌آسانی تحقیق‌کند.

حتی برای قویترین میدانهایی که بتوان در آزمایشگاه به وجود آورد (در حدود ۱۰۰T) $\Delta\omega$ درمقایسه با ω_0 بسیار کوچك است، پس رابطهٔ (۷.۱۰) رامی‌توان همواره به‌صورت تقریبی زیرنوشت

$$\Delta\omega = \pm\frac{e}{2m_e}B_m \qquad (۸.۱۰)$$

کمیت $(e/2m_e)B_m$ به‌فرکانس لارمور[1] معروف است.

---

1. Larmor

تااینجا ما این مطلب را تنها فرض کرده‌ایم که الکترون درهمان مدار قبلی‌اش باقی می‌ماند. ما این فرض را همراه با تعادل نیروها به‌کاربردیم تا معادلهٔ (۸.۱۰) را به‌دست آوریم. برای آنکه الکترون در مدارش بماند، تغییرانرژی جنبشی آن، که از قانون القای فاراده به‌دست می‌آید، باید بامعادلهٔ (۸.۱۰) سازگارباشد. وقتی میدان مغناطیسی برقرار می‌شود، درمقدارشار مغناطیسی که ازمدارمی گذرد تغییری به‌وجود می‌آید که‌با $\pi R^2 \Delta B_m$ داده می‌شود. این شار از تعداد Δn حلقهٔ الکترونی می‌گذرد، که Δn تعداد دورانهایی است که الکترون دراثنای مدتی که درآن میدان تغییر می‌کند انجام می‌دهد. شار مغناطیسی متغیر، طبق قانون فاراده، emf‌ی به‌صورت زیرتولید می‌کند

$$\mathcal{E}=\pi R^2 \frac{dB_m}{dt}\Delta n=\pi R^2 \frac{dn}{dt}\Delta B_m \qquad (۹.۱۰)$$

دراین فرایند انرژی داده شده به‌الکترون برابر با $\mathcal{E}e$ است، که به‌صورت تغییری در انرژی جنبشی ظاهرمی‌شود، پس

$$\frac{1}{2}m_e R^2(\omega^2-\omega_0^2)=e\pi R^2\frac{dn}{dt}\Delta B_m \qquad (۱۰.۱۰)$$

اما ΔB_m همان مقدارنهایی میدان B_m است، و مقدار متوسط dn/dt برابر است با $(\omega+\omega_0)/4\pi$ پس

$$\Delta\omega=\frac{e}{2m_e}B_m$$

که بامعادلهٔ (۸.۱۰) درتوافق است. بنابراین، فرض ثابت بودن مدار به‌هیچ تناقضی میان معادلهٔ (۹.۱۰) ومعادلهٔ نیرو منجر نمی‌شود. دیامغناطیس نتیجهٔ عمل قانون لنز در مقیاس اتمی است. دراثر اعمال میدان مغناطیسی، جریانهای الکترونی در هر اتم به‌نحوی تغییر می‌کنند که به‌تضعیف اثراین میدان کمك کنند.

تغییرسرعت زاویه‌ای که‌معادلهٔ (۸.۱۰) پیشگویی‌می کند در گشتاورمغناطیسی‌تغییری ایجاد می‌کند که ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\Delta\mathbf{m}=-\frac{e}{2\pi}\pi R^2\frac{e}{2m_e}\mathbf{B}_m$$

$$=-\frac{e^2}{4m_e}R^2\mu_0\mathbf{H}_m \qquad (۱۱.۱۰)$$

برای پیداکردن بردار مغناطش، این نتیجه باید برای تمام الکترونهای‌واقع درواحدحجم

جمع شود. برای جسمی که دارای N مولکول در واحد حجم باشد و تمام مولکولهای آن ازیك نوع باشند

$$\mathbf{M} = -\frac{Ne^{2}\mu_{0}}{4m_{e}}\mathbf{H}_{m}\sum_{i} R_{i}^{2} \qquad (۱۲.۱۰)$$

که درآن جمعبندی روی الکترونهای یك مولکول است. برای مواد دیامغناطیس تفاوت $\mathbf{H}_m$ با $\mathbf{H}$ خیلی کم است، پس پذیرفتاری دیامغناطیسی برابراست با

$$\chi_{m} = -\frac{Ne^{2}\mu_{0}}{4m_{e}}\sum_{i} R_{i}^{2} \qquad (۱۳.۱۰ \text{ الف})$$

این نتیجه برمبنای این‌فرض به‌دست‌آمده‌است که تمام الکترونها درصفحات عمودبرمیدان $\mathbf{H}_m$ می‌گردند. وقتی صفحهٔ مدارمایل باشد، به‌طوری‌که بردارعمود برمداربامیدان زاویهٔ θ_i بسازد، فقط مؤلفهٔ $\mathbf{H}_m$ در امتداد این بردار عمود ($H_m \cos\theta_i$) در تغییر سرعت زاویه‌ای الکترون مؤثراست. به‌علاوه،مؤلفهٔ $\Delta\mathbf{m}$ درامتدادمیدان به‌نسبت $\cos\theta_i$ کوچکتر است. پس تقریب بهتری برای پذیرفتاری دیامغناطیسی به‌صورت زیراست

$$\chi_{m} = -\frac{Ne^{2}\mu_{0}}{4m_{e}}\sum_{i} R_{i}^{2}\cos^{2}\theta_{i} \qquad (۱۳.۱۰ \text{ ب})$$

خاصیت دیامغناطیس ظاهراً درتمام انواع ماده یافت می‌شود، ولی اثر آن غالباً به‌وسیلهٔ آثارقویتر پارامغناطیسی یا فرومغناطیسی که می‌توانند بااین خاصیت همراه باشند، مخفی می‌شود. خاصیت دیامغناطیس خصوصاً درموادی بارز است که کلا از اتمها یا یونهایی با «پوسته‌های بستهٔ الکترونی» تشکیل شده باشند، زیرا در این موارد تمام تأثیرات پارا ـ مغنا ئیسی حذف می‌شوند.

۳.۱۰ منشأ پارامغناطیس

حرکت مداری هریك از الکترونها را دریك اتم یا مولکول می‌توان برحسب یك گشتاور مغناطیسی توصیف کرد. این مطلب مستقیماً ازمعادلهٔ (۲۲.۸) نتیجه می‌شود. به‌علاوه، می‌دانیم که الکترون یك خاصیت فطری دارد که به چرخش ذاتی یا اسپین، مشهور است ویك گشتاور مغناطیسی ذاتی به‌این باردرحال چرخش تعلق می‌گیرد. بنابراین، هرمولکول یك گشتاور مغناطیسی $\mathbf{m}_i$ داردکه عبارت است ازجمع برداری گشتاورهای مغناطیسی اسپینی ومداری الکترونهای مختلف مولکول. به‌طورخلاصه، پارامغناطیس نتیجهٔ این امر است که این گشتاورهای مولکولی تمایل دارند خود را باجهت میدان اعمال شده همسو

کنند، درست نظیر مدار جریان معادلهٔ (۱۹.۸) که تمایل دارد خودرا بامیدان همسو کند.

البته وضعیت آن‌قدر هم‌نظیروضعیت مدارجریان سرراست نیست. درواقع دواشکال وجود دارد: (۱) درحضورمیدان مغناطیسی حرکتهای الکترونی کوانتیده‌اند، به‌طوری که سمتگیری هرگشتاور اسپینی یا مداری نسبت به‌جهت میدان دریکی ازامتدادهای مشخصی است که این‌امتدادها مجموعهٔ گسسته‌ای‌راتشکیل می‌دهند. به‌علاوه، هیچ‌دوالکترونی دریك مولکول نمی‌توانند حالت کوانتومی یکسانی‌را اشغال کنند، به‌طوری که اگردرهرمولکول درست به‌تعداد کافی الکترون وجود داشته باشد به‌طوری که تمام «پوسته‌های الکترونی» را پرکنند آن‌وقت تمام سمتگیریهای ممکن باید اشغال شوند و $\mathbf{m}_i$ صفرمی‌شود. البته پارامغناطیس تنها هنگامی می‌تواند ظاهرشودکه $\mathbf{m}_i \neq 0$ باشد. (۲) حرکت الکترونی درون اتم که باعث بروز $\mathbf{m}_i$ می‌شود همچنین یك اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به‌هستهٔ اتمی ایجادمی‌کند؛ درواقع $\mathbf{m}_i$ به‌طورخطی بااین‌اندازه حرکت‌زاویه‌ای مربوط می‌شود. در این شرایط گشتاور نیروی مغناطیسی مستقیماً گشتاور دوقطبی $\mathbf{m}_i$ را بامیدان همسو نمی‌کند، بلکه سبب می‌شودکه این گشتاور حول میدان بازاویهٔ میل ثابتی حرکت تقدیمی کند.[1] اتمها (یامولکولها) دردستگاه مادی ما بایکدیگر درتماس گرمایی‌اندودر یك گاز یا یك‌مایع، دائماً بایکدیگر برخوردمی‌کنند؛ دریك جسم جامد اتمها نوسانات گرمایی دارند. درچنین شرایطی $\mathbf{m}_i$های مختلف می‌توانند انرژی مغناطیسی را با انرژی گرمایی محیط اطراف خود مبادله‌کنند وازیك حالت حرکت تقدیمی به‌حالتی دیگر بازاویهٔ میل متفاوت گذرکنند. انرژی گرمایی دستگاه می‌کوشد طوری عمل‌کندکه برای $\mathbf{m}_i$ سمتگیری کاملا کتره‌ای ایجادکند، ولی سمتگیریهای هم‌راستا بامیدان یا نزدیك به‌آن انرژیهای مغناطیسی کمتری دارند و در نتیجه مرجح‌اند. وضع کاملا شبیه است به‌وضع مولکولهای قطبی در میدان الکتریکی‌که دربخش ۳.۵ مورد بحث قرار گرفت.

برای ماده‌ای‌که تماماً از یك نوع مولکول تشکیل شده است، وهر مولکول گشتاور مغناطیسی m_0 دارد، سمتگیری نسبی تقریباًازتابع لانژون (رابطهٔ ۲۱.۵) به‌دست می‌آید، که درآن

$$y = \frac{m_0 \mu_0 H_m}{kT} \qquad (۱۴.۱۰)$$

بردارمغناطش ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$|\mathbf{M}| = N m_0 \left[\coth y - \frac{1}{y} \right] \qquad (۱۵.۱۰ \text{ الف})$$

---

۱. بحث حرکت تقدیمی $\mathbf{m}_i$ دریك میدان مغناطیسی یکنواخت در بسیاری ازکتب درسی آمده است. به‌عنوان مثال رجوع‌کنید به‌صفحات ۱۷۶ـ۱۷۷ ازکتاب

H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1950), pp.176-177.

که درآن N تعداد مولکولها در واحد حجم است. به‌استثنای دماهای نزدیك صفر مطلق، تابع لانژون را می‌توان تقریباً باجملهٔ اول بسط رشتهٔ توانی آن، برابر دانست. بدین‌ترتیب

$$\mathbf{M}=\frac{Nm_{\circ}^{2}}{3kT}\mu_{\circ}\mathbf{H}_{m} \qquad (۱۵.۱۰\ ب)$$

که از آن پذیرفتاری پارامغناطیسی به‌دست می‌آید

$$\chi_{m}=\frac{Nm_{\circ}^{2}\mu_{\circ}}{3kT} \qquad (۱۶.۱۰)$$

برطبق نظریهٔ اتمی، $m_{\circ}$ در حدود چند مگنتون بور است (۱مگنتون‌بور مساوی است با $eh/4\pi m_{e}$، که در آن h ثابت پلانك است). ازمعادله‌های (۱۶.۱۰) و (۱۳.۱۰ ب) برای مرتبهٔ بزرگی χ_{m} مقادیری به‌دست می‌آیدکه بامقدارهای مندرج در جدول ۱.۹ در توافق است.

نتایج این بخش، به‌طورخلاصه چنین است: برای آنکه دستگاهی خواص پارا-مغناطیسی ازخود بروزدهد، اتمها (یا مولکولها)ی آن دستگاه باید گشتاورهای مغناطیسی دائمی داشته باشند، و این گشتاورها تمایل دارند که با میدان اعمال شده همسو شوند. گشتاورهای مولکولی مختلف واجفتیده هستند، یعنی، هریك حول میدان مغناطیسی به‌طور انفرادی (نه به‌طور هماهنگ) حرکت تقدیمی می‌کنند، ولی به‌علت تماس گرمایی بامحیط اطراف‌خود می‌توانندمبادلهٔ انرژی کنند. جزدر دماهای نزدیك به‌صفرمطلق توأم‌بامیدانهای بسیارقوی، مغناطش ازمقدارمربوط به‌حالت‌اشباع آن،که درآن حالت تمام گشتاورهای دو-قطبی همسوهستند، بسیارکمتراست.

۴.۱۰ نظریهٔ فرومغناطیس

دراجسام فرومغناطیس گشتاورهای مغناطیسی اتمی (یا مولکولی) حتی با نبودن میدان مغناطیسی خارجی نیزتقریباً به‌طور کامل همسو هستند. علت این همسوشدگی وجود میدان مولکولی $\mathbf{H}_{m}$ است که، برطبق معادلهٔ (۴.۱۰)، باصفر شدن $\mathbf{H}$ صفرنمی‌شود، مگر آنکه $\mathbf{M}$ نیز به‌طورهمزمان صفرشود. هر بردار مغناطش، $\mathbf{M}$، باعث ایجاد یك میدان مولکولی می‌شود، ولی جز درموردی‌که این میدان مولکولی همان مغناطش $\mathbf{M}$ را، که بنابر فرض درجسم موجود است، ایجادکند جواب مسئله خود ساز گارنیست. مسئله این است که تعیین کنیم تحت چه‌مجموعه‌ای ازشرایط، مغناطش می‌تواند به‌وسیلهٔ میدان مولکولیی که‌خودش به‌وجود می‌آورد برقرار بماند.

لازم است که رابطهٔ (۴.۱۰) را تا حدودی عمومیت دهیم. برای میدان مولکولی می‌نویسیم $\mathbf{H}_{m}=\mathbf{H}+\gamma\mathbf{M}$، که به‌ازای $\mathbf{H}=0$ به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{H}_m = \gamma \mathbf{M} \qquad [\text{۴.۱۰ الف}]$$

برطبق نظریهٔ سادهٔ بخش ۱.۱۰ ، داریم $\gamma = ۱/۳$. اگرمجموع جمله‌های معادلهٔ (۳.۱۰) صفرنشود، γ ممکن است ۱/۳ نباشد؛ ولی درهرحال انتظار داریم که مقدار γ در حدود همین مرتبهٔ بزرگی باشد.

ماده‌ای‌را درنظرمی‌گیریم که کلا ازیك نوع اتم تشکیل شده است و گشتاورمغناطیسی هراتم آن $m_\circ$ است. تعداد N اتم درواحد حجم وجود دارد. اگرقرارباشد که گشتاورهای اتمی تا حدود زیادی همسوشده باشند، M باید کسر قابل ملاحظه‌ای از $Nm_\circ$ باشد؛ به‌عبارت دقیقتر، فرض می‌کنیم که رابطهٔ زیربرقرارباشد

$$M > ۰٫۷ N m_\circ \qquad (۱۷.۱۰)$$

این‌شرط، برطبق معادلهٔ(۱۵.۱۰ الف) به‌این‌معنی است که $[\coth y - (۱/y)] > ۰٫۷$، یا $y > ۳$ [y درمعادلهٔ (۱۴.۱۰) تعریف شده است]. پس

$$y = \frac{m_\circ \mu_\circ H_m}{kT} > ۳$$

که وقتی بامعادلات (۴.۱۰ الف) و (۱۷.۱۰) ترکیب شود، نتیجهٔ زیررا به‌دست می‌دهد

$$۰٫۷ \frac{\gamma N \mu_\circ m_\circ^۲}{kT} > ۳ \qquad (۱۸.۱۰)$$

که (تقریباً) شرط وقوع پدیدهٔ فرومغناطیس است.

دربخش گذشته گفته شد که برطبق پیشگویی نظریهٔ اتمی، $m_\circ$ درحدود چند مگنتون بوراست. براین اساس، معادلهٔ (۱۸.۱۰) نیاز به γیی در حدود $۱۰^۳$ داردکه چند مرتبهٔ بزرگی ازآنچه ازمحاسبات بخش ۱.۱۰ می‌توان به‌دست‌آورد بزرگتراست. از این رو، چنین برمی‌آیدکه منشأ فرومغناطیس به‌میزان قابل ملاحظه‌ای ازوضعیت معادل‌آن درفرو-الکتریسیته (که‌دربخش ۴.۵ بررسی شد) پیچیده‌تر است.

در سال ۱۹۰۷ پی‌یر وایس[1] نظریهٔ فرومغناطیس خود را فرمولبندی کرد. وایس به‌نقش اساسی میدان مولکولی پی‌برد. وی نتوانست بزرگی مقدار γ را توضیح دهد، ولی آن را به‌عنوان یك واقعیت پذیرفت وبرمبنای آن به‌تکمیل نظریهٔ خود پرداخت. پیشگوییهای نظریهٔ وی با آزمایش مطابقت نزدیکی داشت. به‌این دلیل میدان مولکولی معادلهٔ (۴.۱۰ الف) را غالباً میدان مولکولی وایس می‌نامند.

حدود بیست‌سال بعد هایزنبرگ[2]، منشأ بزرگی مقدار γ را توضیح داد. هایزنبرگ

1. P. Weiss, *Journal de Physique*, vol. 6, p. 667 (1907).
2. W. Heisenberg, *Zeitschrift für Physik*, vol. 49, p. 619 (1928).

نشان‌داد که اولا تنها گشتاورهای مغناطیسی اسپینی در ایجاد میدان مولکولی شرکت می‌کنند، و ثانیاً این میدان اساساً توسط نیروهای الکتروستاتیکی به‌وجود می‌آید. وی بر اساس مکانیك کوانتومی نشان داد که وقتی اسپینهای اتمهای مجاور از حالت همسویی موازی به‌حالت همسویی پادموازی تغییر می‌کنند، باید در توزیع بار الکترونی درون اتمها تغییرات همزمانی حاصل شود. تغییر توزیع بار، انرژی الکتروستاتیکی دستگاه را تغییر می‌دهد، و در برخی موارد، همسویی موازی (یعنی، فرومغناطیس) را ارجح می‌دارد. انرژی وابسته به اسپین، یعنی انرژیی که به‌پیکربندی اسپینی دستگاه مربوط است، را می‌توان برحسب نیرویی (یا گشتاور نیرویی) که در اثر تغییر این پیکربندی بر یکی از اتمها وارد می‌شود بیان کرد. نتیجه آنکه میدان معادل متناسب خواهد بود با $\mathbf{M}$، اما با ضریبی که به‌جزئیات توزیع بار در اتم مورد بحث بستگی دارد.

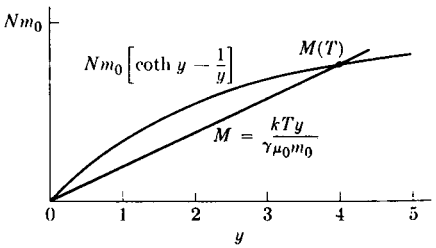
با کاربرد نظریهٔ وایس - هایزنبرگ می‌توان رابطهٔ تغییر مغناطش یك جسم فرومغناطیس را با دما پیشگویی کرد. واضح است که این نظریه، فرومغناطیس را به‌صورت حالت حدی پارامغناطیس در یك میدان مغناطیسی فوق‌العاده قوی توصیف می‌کند، که البته این میدان باید از خود مغناطش به‌وجود آمده باشد. از ترکیب معادلهٔ (۴.۱۰ الف) با معادله‌های (۱۴.۱۰) و (۱۵.۱۰ الف) نتیجه می‌شود

$$M = Nm_0\left[\coth y - \frac{1}{y}\right] \qquad (۱۹.۱۰)$$

و

$$M = \frac{kTy}{\gamma\mu_0 m_0} \qquad (۲۰.۱۰)$$

مغناطش خود به خود، یعنی مغناطش در میدان خارجی صفر، برای یك دمای مفروض از حل همزمان معادلات (۱۹.۱۰) و (۲۰.۱۰) نتیجه می‌شود. این کار را به آسانی به‌روش ترسیمی انجام می‌دهیم: M را برحسب y برای هر دو معادلهٔ (۱۹.۱۰) و (۲۰.۱۰)، نظیر



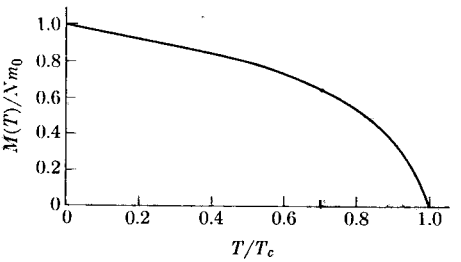
شکل ۱۰.۱۰ تعیین مغناطش خودبه‌خود $M(T)$ به‌کمك تابع لانژون.

شکل ۱.۱۰، رسم می‌کنیم. مغناطش $M(T)$ که از تقاطع دومنحنی به‌دست می‌آید باهر دومعادله سازگاراست. باافزایش دما شیب منحنی خطی، معادلهٔ (۲۰.۱۰)، زیادترمی‌شود، ولی معادلهٔ (۱۹.۱۰) بی‌تغییرمی‌ماند. لذا نقطهٔ تقاطع درشکل به‌سمت چپ حرکت‌می‌کند وبرای مغناطش خود به‌خود مقدار کمتری به‌دست‌می‌آید. بالاخره به‌دمایی می‌رسیم که در آن معادلهٔ (۲۰.۱۰) در مبدأ مختصات با (۱۹.۱۰) مماس می‌شود؛ در این دما ودماهای بالاترمغناطش خود به‌خود صفر می‌شود. این دما، دمای کوری[1] T_c است که بالاتر از آن مغناطش خود به‌خود از میان می‌رود و خواص پارا مغناطیسی معمولی نتیجه می‌شود.

ترسیمی ازمنحنی $M(T)$ برحسب دما، که به‌روش بالا به‌دست آمده است، درشکل ۲.۱۰ نشان داده شده است. این منحنی بامقادیر تعیین شدهٔ تجربی مغناطش خود به‌خود برای یك جسم فرومغناطیسی توافق تقریبی دارد.[2]

۵.۱۰ حوزه‌های فرومغناطیسی

همان‌طور که دربخش قبل گفتیم یك جسم فرومغناطیس دردماهایی کمتراز دمای کوری باید تقریباً تا حد اشباع مغناطیده باشد (صرفنظر ازوضعیتهای گذشتهٔ آن). ظاهراً این مطلب باتجربه مغایرت دارد. مثلا می‌دانیم که یك قطعه آهن می‌تواندهم‌در حالت مغناطیده و هم در

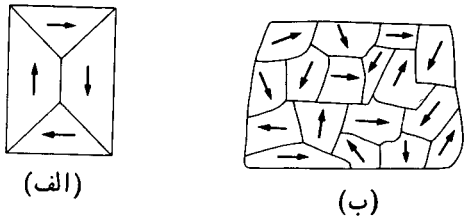


شکل ۲.۱۰ مغناطش یك مادهٔ فرومغناطیسی به صورت تابعی از دما. T_c به دمای کوری موسوم است. (منحنی نمایش داده شده باکمك تابع کلاسیك لانژون محاسبه شده است؛ تصحیحات مربوط به‌مکانیك کوانتومی شکل منحنی را تاحدودی تغییرمی‌دهد وآن‌را باداده‌های تجربی درتوافق کامل می‌آورد.)

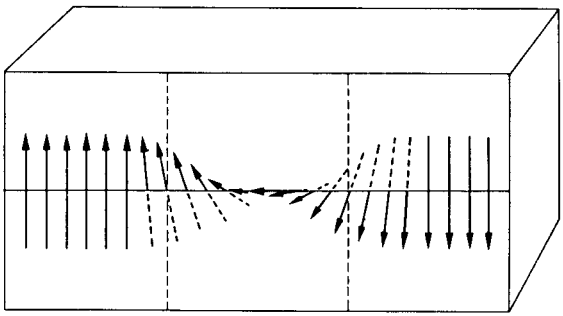
---

1. Curie

۲. چنانچه‌جزئیات مربوط به‌تصحیحات کوانتومی درنظریه‌ای که دراینجا عرضه‌شد درنظرگرفته شود، منحنی نظری بامقادیرتجربی به‌خوبی درتوافق خواهد بود.



شکل ۳.۱۰ ساختارهای حوزهٔ فرومغناطیسی: (الف) تک‌بلور، (ب)جسم چند بلوری. پیکانها معرف جهت مغناطش‌اند.

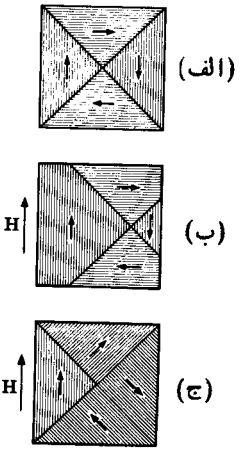


شکل ۴.۱۰ ساختار ناحیهٔ‌گذار یا «دیوارهٔ بلوخ[1]» بین حوزه‌ها در مادهٔ فرومغناطیس.

حالت نامغناطیده موجود باشد. جواب این باطلنمای ظاهری این است که یک مادهٔ فرومغناطیس به حوزه‌هایی تجزیه می‌شود، هر حوزه برطبق نتایج بخش قبل کاملا مغناطیده است ولی حوزه‌های مختلف سمتگیریهای کتره‌ای دارند(شکل ۳.۱۰)وبنا براین ازدیدگاه ما کروسکوپی تصویری نامغناطیده عرضه می‌کنند. موجودیت این حوزه‌ها برای اولین بار توسط وایس درسال ۱۹۰۷ فرض گرفته شد.

درعبور ازیك حوزه به‌حوزهٔ مجاورآن درطی حدود ۱۰۰ اتم، بردارگشتاور اتمی m_0 به تدریج ازجهت اصلی خود به‌جهت جدید می‌چرخد (شکل ۴.۱۰). این ناحیهٔ بین حوزه‌ها را دیوارهٔ حوزه می‌نامند. به‌نظرمی‌آیدکه گشتاور اسپینی اتمی، در ناحیهٔ دیواره تحت تأثیرمیدان مولکولی ضعیفتری قرار می‌گیرد تا دردرون خود حوزه. این مشاهده خود وجود یك پیکربندی تك حوزه‌ای را ارجح می‌دارد. ازطرف دیگرجسمی‌که تنها یك حوزه دارد باید میدان مغناطیسی خارجی شدیدی را برقرارنگه دارد، وحال آنکه «انرژی مغناطیسی» مربوط به‌ساختار میدان دریك جسم چند حوزه‌ای کمتر است. لذا ساختار چند

1. Bloch



شکل ۵.۱۰ مغناطش یك مادهٔ فرومغناطیسی: (الف) نامغناطیده، (ب) مغناطیدگی به‌وسیلهٔ حرکت دیوارهٔ حوزه، (ج) مغناطیدگی به وسیلهٔ چرخش حوزه.

حوزه‌ای از لحاظ انرژی معمولا ارجح است.

جنبه‌های ماکروسکوپی مغناطش در مواد فرومغناطیسی به‌تغییرات در پیکربندی حوزه‌ها مربوط می‌شوند. افزایش مغناطش ناشی از تأثیر یك میدان خارجی با دوفرایند مستقل حاصل می‌شود؛ با افزایش حجم حوزه‌هایی که امتدادشان بامیدان مطابقت دارد در مقابل کاهش حجم حوزه‌هایی که امتدادشان مطابق با جهت میدان نیست (حرکت دیوارهٔ حوزه) یا باچرخش مغناطش حوزه به‌طرف جهت میدان. این دوفرایند در شکل ۵.۱۰ رسم شده‌اند.

درمیدانهای خارجی ضعیف مغناطش معمولا باحرکت دیوارهٔ حوزه تغییر می‌کند. درمواد خالصی که فقط شامل یك فازند، حرکت دیواره تا حدود زیادی در ناحیهٔ میدان ضعیف برگشت‌پذیراست. درمیدانهای قویتر مغناطیدگی باحرکت برگشت ناپذیردیواره، وسرانجام با چرخش حوزه انجام می‌شود؛ دراین حالتها وقتی میدان مغناطیسی خارجی حذف شود، ماده به‌صورت مغناطیده باقی می‌ماند.

مطالعهٔ تجربی‌حوزه‌ها باشیوه‌ای که اولین بارتوسط بی‌تر[1] ابداع‌شد امکان‌پذیرشده است. مقداری‌گرد مغناطیسی بسیار نرم را روی سطح جسم نمونه می‌پاشیم؛ ذرات‌گردرا که درامتداد مرزهای حوزه‌ها جمع می‌شوند، بامیکروسکوپ می‌توان مشاهده‌کرد. بااین شیوه حتی مشاهدهٔ حرکت دیوارهٔ حوزه تحت تأثیریك میدان مغناطیسی خارجی‌نیزامکان-

---

1. F. H. Bitter, *Physical Review* 41, p, 507 (1932).

برای شرح مختصرتکنیك وی مراجعه‌کنید به

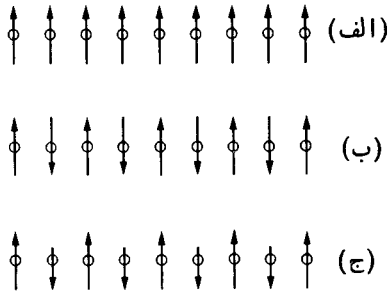
B. D. Cullity, *Introduction to Magnetic Materials* (Reading Mass: Addison Wesley, 1972), p. 293.

پذیراست. اندازهٔ حوزه‌ها بسته به‌نوع مادهٔ آنها و وضع سابقشان وعاملهای دیگر تفاوت می‌کند؛ اندازه‌های معمولی آنها بین 10^{-6} تا 10^{-2} سانتیمترمکعب است.

۶.۱۰ فریتها

برطبق نظریهٔ فرومغناطیس هایزنبرگ، تغییر در اسپین اتمهای مجاور از حالت همسویی موازی به‌حالت همسویی پاد موازی تغییری درانرژی الکتروستاتیکی به‌همراه دارد. اگر بااین تغییرانرژی اتمها ایجاد همسویی موازی ارجح باشد، و در عین حال اندازهٔ تغییر کافی باشد، مادهٔ متشکل ازچنین اتمهایی فرومغناطیس است. اگربااین تغییر انرژی ایجاد همسویی پاد موازی ارجح باشد، بازهم امکان ایجاد یك ساختاراسپینی منظم وجود دارد، ولی دراین‌مورد درطی سرتاسربلور، جهت اسپینها به‌طورمتناوب ازاتمی به‌اتم دیگرتغییر می‌کند.

هرساختاراسپینی منظم با برایندگشتاور مغناطیسی صفر را پادفرومغناطیس می‌نامند (شکل ۶.۱۰ ب). عمومیترین ساختاراسپینی منظم شامل هردو مؤلفهٔ «اسپین بالا» و«اسپین پایین» است ولی برایندگشتاورمغناطیسی‌آن دریکی ازاین جهات مخالف صفراست؛ چنین ماده‌ای فری‌مغناطیس (آهنربای فریتی) یا به عبارت ساده فریت نامیده‌می‌شود. ساده‌ترین فریتها که از لحاظ مغناطیسی مورد توجه‌اند عبارت‌اند از اکسیدهایی بافرمول شیمیایی $MOFe_2O_3$ که در آن M یك یون فلزدوظرفیتی است نظیر Co، Ni، Mn، Cu، Mg، Zn، Cd، یاآهن دوظرفیتی، این‌فریتها به‌صورت ساختاربلوری پیچیده‌ای متبلورمی‌شوند که به ساختار اسپینل موسوم است. مثال کلاسیك فریت، کانهٔ آهن مغناطیسی یا مغناطیس معدنی (Fe_3O_4) است که اززمانهای قدیم شناخته شده است.



شکل ۶.۱۰ نمایش‌طرح‌وارهٔ اسپینهای اتمی‌درساختارهای اسپینی منظم: (الف) فرومغناطیس، (ب) پاد فرومغناطیس، (ج) فری مغناطیس.

فریتها از نظر فنی اهمیت فوق‌العاده‌ای دارند، زیرا علاوه برمغناطش اشباع نسبتاً بزرگشان ازنظررسانایی الکتریکی ضعیف‌اند. لذا درفرکانسهای بالا، که اتلاف ناشی از جریان گردابی درمواد رسانامسئله‌ای جدی محسوب می‌شود، ازآنها می‌توان استفاده کرد. مقاومت ویژهٔ فریتها نوعاً درمحدودهٔ ۱ تا 10^4 اهم متراست؛ به‌منظور مقایسه، مقاومت ویژهٔ آهن تقریباً 10^{-7} اهم متراست.

۷.۱۰ خلاصهٔ مطالب

مغناطش ماکروسکوپی M یك مادهٔ مغناطیسی از گشتاور دوقطبی مغناطیسی مولکولی (یا مؤلفهٔ آن) ناشی می‌شود، واین گشتاور در پاسخ به‌میدان موضعی درمکان مولکول، یعنی میدان مولکولی H_m، به‌وجود می‌آید. میدان مولکولی به‌میدان خارجی H و نیز به‌خود مغناطش بستگی دارد. سهم مربوط به مغناطش، که از میدانهای مغناطیسی دو قطبی همهٔ مولکولهای دیگر ناشی می‌شود، و در قیاس با مورد دی‌الکتریك نتیجهٔ زیررا به دست می‌دهد

$$H_m = H + \frac{1}{3}M$$

برای اکثر مواد خطی تاحد قابل چشمپوشی کوچك است. علت این امر کوچك بودن پذیرفتاری مغناطیسی دررابطهٔ زیر است

$$M = \chi_m H$$

بااین همه درمواد فرومغناطیس مغناطش خود به‌خود وجود دارد، زیرا سهم مغناطش در میدان مولکولی مؤثرضریبی به‌مراتب بزرگتر از ۱/۳ دارد.

۱. همهٔ مولکولها دراثرتغییرشکل توزیع بارالکترونی‌دریك میدان مغناطیسی گشتاور دو-قطبی مغناطیسی القایی پیدا می‌کنند. پاسخ همیشه‌طوری است که میدان خارجی‌را تضعیف می‌کند، یعنی‌سهم (دیامغناطیسی) مربوط درپذیرفتاری همیشه منفی‌است. بایك تقریب‌خطی به‌پذیرفتاری دیامغناطیسی ثابت می‌رسیم

$$\chi_m = -\frac{Ne^2\mu_0}{4m_e}\sum_i R_i^2$$

۲. مولکولهایی که گشتاور دوقطبی مغناطیسی دائم m_0 دارند یك اثر اضافی مربوط به‌سمتگیری عرضه می‌کنند. مانند مورد مولکولهای قطبی دریك میدان الکتریکی، این اثر به‌طورتقریبی به‌وسیلهٔ تابع لانژون توصیف می‌شود. جزدرنزدیکی صفر مطلق، پذیرفتاری

پارا مغناطیسی حاصل برابراست با

$$\chi_m = \frac{N m_0^2 \mu_0}{3kT}$$

۳. برای درك فرومغناطیس، فرض می‌شود

$$H_m = H + \gamma M$$

که درآن $\gamma \gg 1/3$. (این قسمت از یك انرژی مکانیك کوانتومی ناشی می‌شود، که به‌سمتگیری نسبی گشتاورهای مغناطیسی اسپینی بستگی‌دارد؛ این انرژی به‌انرژی مغناطیسی $\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{H}$ اضافه می‌شود و بنابراین می‌توان آن را برحسب یك میدان مغناطیسی مؤثر توصیف کرد، گرچه منشأ آن الکتروستاتیکی است.) دراین صورت تا وقتی‌که T کمتراز دمای کوری باشد، جوابی با $H = 0$، $M \neq 0$ دراین معادله ومعادلهٔ لانژون صدق‌می کند.

۴. حتی در دمایی پایینتر از دمای کوری، یك قطعهٔ با ابعاد ماکروسکوپی از جسم فرو - مغناطیسی ممکن است به‌خاطر ساختارحوزه‌ای‌اش گشتاور مغناطیسی کل نداشته باشد.

مسائل

۱.۱۰ مگنتون‌بور به‌صورت گشتاورمغناطیسی الکترون در حال‌گردش در «مدار کلاسیك بور» دراتم هیدروژن، تعریف می‌شود. این مدار، مداری مستدیر است‌که طول آن دقیقاً برابر یك طول موج دوبروی است و شتاب جذب به مرکز حرکت دایره‌ای آن به‌وسیلهٔ نیروی جاذبهٔ کولنی تأمین می‌شود. نشان دهیدکه یك مگنتون‌بور برابراست با $eh/4\pi m_e$ که درآن m_e جرم الکترون و h ثابت پلانك است.

۲.۱۰ مگنتون‌بور واحد طبیعی اندازه‌گیری گشتاورمغناطیسی اتم است. گشتاور مغناطیسی درهراتم را برحسب مگنتون‌بور برای آهن، نیکل و کوبالت درشرایط مغناطش اشباع محاسبه کنید. ازداده‌های جدول ۲.۹ استفاده کنید.

۳.۱۰ شدت نسبی برهم‌کنش بین دو دوقطبی مغناطیسی نوعی را درمقایسه با برهم‌کنش بین دو دوقطبی الکتریکی نوعی محاسبه کنید. برای روشن شدن: گشتاور نیروی وارد بریك دوقطبی ازطرف دوقطبی دیگررا حساب کنیدوقتی‌که‌آن دوعمود بریکدیگروبه‌فاصلهٔ یك آنگستروم ازیکدیگرقرارگرفته باشند؛فرض کنید هردوقطبی مغناطیسی مساوی ۱ مگنتون- بور ، و هر دو قطبی الکتریکی مساوی $e \times (0.1\ \text{Å})$ باشد. این محاسبه نشان می‌دهد که مقدار برهم‌کنش مغناطیسی بنیادی چندین مرتبهٔ بزرگی ازبرهم‌کنش الکتریکی‌درماده کوچکتر است.

۴.۱۰ پذیرفتاری دیامغناطیسی نئون را دردما وفشار متعارف (صفر درجهٔ سلسیوس و یك اتمسفرفشار) محاسبه کنید. فرض کنیدفقط هشت الکترون خارجی درهراتم دراین امرسهیم باشند، وشعاع متوسط مدار این الکترونها $R = ۴٫۰ \times ۱۰^{-۹}\,\mathrm{cm}$ باشد.

۵.۱۰ مغناطش یك جسم فرومغناطیس در دمای کوری به‌صفرمی‌رسد. درشکل ۱.۱۰ دمای کوری باخط راستی که در مبدأ مختصات برتابع لانژون مماس است نمایش داده می‌شود. بااستفاده ازمقدار تجربی دمای کوری برای آهن، γی آهن را تعیین کنید.

۶.۱۰ طبق تعریف نسبت ژیرومغناطیسی یك توزیع جریان عبارت است ازنسبت گشتاور مغناطیسی به‌اندازه حرکت زاویه‌ای آن. نسبت ژیرومغناطیسی کره‌ای به‌جرم M و بار Q راکه باسرعت زاویه‌ای ω حول محوری که از مرکزآن می گذرد می‌چرخد، محاسبه کنید. فرض کنید جرم به‌طوریکنواخت درسراسر حجم کره، وبارالکتریکی به‌طور یکنواخت در سطح کره توزیع شده است.

۱۱

القای الکترومغناطیسی

القای نیروی محرکهٔ الکتریکی توسط تغییر شارمغناطیسی برای اولین بار در اوایل قرن نوزدهم توسط فاراده وهنری مشاهده شد. برپایهٔ آزمایشهای این دانشمندان دستگـاههای جدید امروزین ازقبیل مولدها، مبدلها ومانندآنها به‌وجود آمده‌اند. این فصل به‌طور عمده به‌فرمولبندی ریاضی قانون القای الکترومغناطیسی وکاربردآن در موارد ساده می‌پردازد.

معادلهٔ مشخصهٔ الکتروستاتیك عبارت بود از

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

یا صورت انتگرالی آن

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

این معادلات مستقیماً ازقانون‌کولن نتیجه می‌شوند، ونیروی مغناطیسی ناشی از جریانهای پایا در آنها تغییری ایجاد نمی‌کند. لیکن، این معادلات برای میدانهـای کلیترکه وابسته به‌زمان‌اند به‌کارنمی‌روند، ومادراین فصل همین میدانها را بررسی می‌کنیم. نیروی محرکهٔ الکتریکی، یا emf، به‌دور یك مداررا به‌صورت زیرتعریف می‌کنیم

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E} \qquad (۱۰۱۱)$$

این emf، برای میدانهای E و Bی ایستا همیشه برابر با صفر بود. اکنون مواردی را بررسی می‌کنیم که این کمیت صفر نیست. ازآنجا که میدان E را نمی‌توانیم به‌کمك قانون کولن تعریف کنیم، لذا این سؤال مطرح می‌شود که چگونه می‌توان آن را تعریف کرد. این میدان به‌گونه‌ای تعریف می‌شود که نیروی لورنتس، یعنی

$$\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

همیشه برابر با نیروی الکترومغناطیسی وارد بر بار آزمون q باشد.

۱۰۱۱ القای الکترومغناطیسی

نتایج حاصل از تعداد زیادی آزمایش را می‌توان چنین خلاصه کرد که همراه با تغییر شار مغناطیسی درهرمدار، emfی به‌صورت زیر ایجاد می‌شود

$$\mathcal{E}=-\frac{d\Phi}{dt} \qquad (۲.۱۱)$$

معلوم شده است که این نتیجه، که به‌قانون القای الکترومغناطیسی فاراده موسوم است، به‌روش تغییرشارمغناطیسی بستگی ندارد ــ مقدار $\mathbf{B}$ را درنقاط مختلف داخل مدارمی‌توان به‌هرشیوه‌ای تغییرداد. تشخیص این نکته بسیارمهم است که معادلهٔ (۲.۱۱) قانونی است تجربی ومستقل ونمی‌توان آن را ازسایرقوانین تجربی به‌دست‌آورد، وبرخلاف آنچه گاهی گفته می‌شود، این قانون محققاً ازکاربرد قانون بقای انرژی درتوازن انرژی جریانها در میدانهای مغناطیسی نتیجه نمی‌شود.

چون بنا به‌تعریف داریم

$$\mathcal{E}=\oint_c \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \qquad [۱.۱۱]$$

و

$$\Phi=\int_s \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,da \qquad (۳.۱۱)$$

معادلهٔ (۲.۱۱) را می‌توان چنین نوشت

$$\oint_c \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=-\frac{d}{dt}\int_s \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,da \qquad (۴.۱۱)$$

اگرمدار صلب وساکن باشد، مشتق برحسب زمان را می‌توان به‌زیرانتگرال برد، که دراین

صورت به‌یك مشتق پاره‌ای برحسب زمان مبدل می‌شود. به‌علاوه ازقضیهٔ استوکس‌می‌توان استفاده‌کرد وانتگرال خطی $\mathbf{E}$ را به‌انتگرال‌سطحی $\nabla\times\mathbf{E}$ تبدیل‌کرد. نتیجهٔ این‌تبدیلات به‌صورت زیراست.

$$\int_s \nabla\times\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,da=-\int_s\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{n}\,da \qquad (۵.۱۱)$$

چون این رابطه برای تمام سطوح ثابت S باید صادق باشد، پس

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad (۶.۱۱)$$

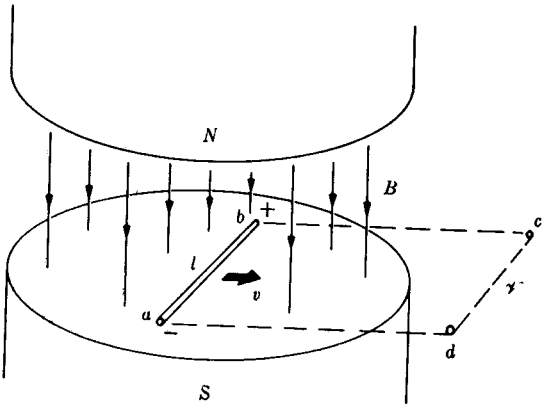
که شکل دیفرانسیلی قانون فاراده است. این، تعمیم‌حالت $\nabla\times\mathbf{E}=0$ است‌که درمورد میدانهای ایستا صادق‌است. (حالتی‌که درآن‌محیط درحرکت‌است، وسایرمسائل‌پیچیده‌تر، احتیاج به‌بررسی دقیقتری دارندکه از سطح این‌کتاب خارج است.) علامت منفی در قانون فاراده حاکی ازآن است‌که emf القایی در جهتی است که باتغییراتی که آن را تولید می‌کنند مخالفت می‌کند، واین امررا به‌آسانی می‌توان نشان داد. بنابراین اگرسعی کنیم شارمغناطیسی را درمداری افزایش دهیم، emf القایی جریانهایی را درجهتی ایجاد می‌کندکه سبب‌کاهش شارشود. چنانچه سعی‌کنیم قطب‌آهنربایی‌را درحلقهٔ سیم‌پیچی وارد کنیم، جریانهای تولیدشده به‌وسیلهٔ emf القایی میدانی مغناطیسی تولید می‌کنندکه تمایل به‌دفع قطب مزبورخواهد داشت. تمام این پدیده‌ها را می‌توان درقانون لنزخلاصه‌کردکه به‌صورت زیربیان می‌شود

درصورت بروز تغییر در یك دستگاه مغناطیسی، چیزی رخ می‌دهدکه باآن تغییرمخالفت می‌کند.

فایدهٔ عملی قانون لنز را نباید دست‌کم گرفت. دربسیاری از موارد این قانون سریعترین راه برای کسب اطلاعات دربارهٔ واکنشهای الکترومغناطیسی محسوب می‌شود حتی اگر روشهای دیگری دردسترس باشند، این قانون وسیلهٔ باارزشی برای امتحان عرضه‌می‌کند.

برای درك عمیقترقانون فاراده شاید مفید باشدکه مثالی را درنظربگیریم‌که معمولا به‌عنوان نمونه‌ای از این قانون تلقی می‌شود، لیکن‌آن را می‌توان به‌طور کامل برحسب نظریهٔ الکتروستاتیك‌که درفصلهای پیش تکوین یافت،تحلیل‌کرد. فرض‌کنیدکه سیم فلزی مستقیمی به‌طول l، باسرعت $\mathbf{v}$ در راستایی عمود برطولش حرکت می‌کند. مطابق شکل ۱.۱۱، فرض کنید میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ در جهت عمود برصفحه‌ای که سیم در آن حرکت می‌کند، وجود دارد. بربارهای‌آزاد سیم نیروی لورنتس وارد می‌شود

$$\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \qquad (۷.۱۱)$$



شکل ۱۰۱۱ ولتاژ تولید شده توسط سیمی که در یك میدان مغناطیسی حرکت می‌کند.

این نیرو به‌علت وجودجملهٔ $q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ ، سبب می‌شود بارهای مثبت و منفی به‌دو انتهای متقابل سیم رانده شوند. درحالت پایا، وقتی بارهای آزاد نسبت به‌سیم حرکت نمی‌کنند، نیروی کل وارد برهریك ازبارها باید برابرباصفرباشد؛ یعنی، نیروی مغناطیسی درهرنقطه از سیم باید با یك نیروی الکتریکی به‌همان بزرگی ولی با علامت مخالف، که ناشی ازجدایی بارهاست، درتوازن باشد

$$E=vB \qquad (۸.۱۱)$$

اگرمیدان B یکنواخت باشد، آنگاه E درامتداد سیم ثابت است، واختلاف پتانسیل بین دوسرسیم برابراست با

$$\Delta\varphi=-\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=El \qquad (۹.۱۱)$$

اگر این اختلاف پتانسیل را $\mathscr{V}$ بنامیم، آنگاه از ترکیب (۸.۱۱) با (۹.۱۱) رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود

$$\mathscr{V}=Blv \qquad (۱۰.۱۱)$$

دراین مثال میدان B مستقل از زمان است، و بنابراین $\nabla\times\mathbf{E}=0$ و $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$، همان طورکه در الکتروستاتیك داشتیم. انتگرال $\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$ به‌مسیر بستگی ندارد؛ به‌ویژه، اگرمدار $abcda$ را درنظربگیریم که تاخارج ازمیدان مغناطیسی ادامه دارد، آنگاه‌اختلاف

پتانسیل درامتداد مسیر $bcda$ نیز $\mathscr{V}$ است. در واقع، اگر bc و da توسط سیمهای کاملا رسانا متصل شوند، $\mathscr{V}$ برابر خواهد بود باولتاژ بین دوسر c و d واقع در خارج میدان مغناطیسی. با توجه به‌این‌که شار Φ درمدار $abcda$ مطابق با رابطهٔ

$$d\Phi/dt = B\,dA/dt = Bldx/dt = -Blv$$

تغییرمی‌کند،سمت راست معادلهٔ (۱۰.۱۱) را می‌توان طوردیگری بیان‌کرد.به‌این ترتیب

$$\mathscr{V} = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (۱۱.۱۱)$$

که‌درست به‌صورت قانون‌فاراده، یعنی معادلهٔ (۲.۱۱) است، بااین‌تفاوت‌که $\mathscr{V}$ به‌مفهومی که در (۱.۱۱) تعریف شد emf نیست، زیرا برای هر مدار بستهٔ مربوط به این مسئله $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0$ است. بانوشتن معادلهٔ (۱۰.۱۱) برحسب نمادگذاری‌برداری، این‌معادله را می‌توانیم تعمیم دهیم. اگر جهت $\mathbf{v}$ نسبت به $\mathbf{l}$ اختیاری باشد، آن وقت تنها آن مؤلفه از $\mathbf{v}$ که بر $\mathbf{l}$ عمود است در $\mathscr{V}$ سهیم خواهد بود. از این‌رو $\mathscr{V}$ متناسب است با $\mathbf{l}\times\mathbf{v}$. برای $\mathbf{B}$ اختیاری، فقط مؤلفه‌ای‌که برصفحهٔ $\mathbf{l}$ و $\mathbf{v}$ عمود باشد در $\mathscr{V}$ سهیم خواهد بود. چون $\mathbf{l}\times\mathbf{v}$ برصفحهٔ $\mathbf{v}, \mathbf{l}$ عمود است، $\mathscr{V}$ را می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$\mathscr{V} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{l}\times\mathbf{v} \qquad (۱۲.۱۱)$$

ولتاژ داده شده درمعادلهٔ (۱۲.۱۱) را گاهی emf حرکتی می‌نامند.

اکنون این مسئله را ازدید سیم بررسی می‌کنیم، یعنی، فرض کنیم که در دستگاه مختصاتی باشیم که باسیم حرکت می‌کند؛ به‌این ترتیب دراین دستگاه، سیم ساکن است‌و آهنربا باسرعت v به‌سمت چپ درشکل ۱.۱۱ حرکت می‌کند. به‌آسانی می‌توان قبول کردکه، اگر باسیم حرکت کنیم، بازهم همان جدایی بارها و همان اختلاف پتانسیل بین دوسرسیم را مشاهده خواهیم‌کرد. لیکن توضیح مسئله به‌کلی متفاوت است؛ دراین دستگاه هیچ نیروی مغناطیسیی نمی‌تواند وجود داشته باشد، زیرا سیم ساکن است. ازطرفی‌میدان مغناطیسی، دیگر نسبت به‌زمان ثابت نیست. درهرنقطه، باعبورلبهٔ متحرك‌آهنربا ازآن نقطه، میدان مغناطیسی از B به‌تقریباً صفرتغییرمی‌کند. خواهیم دیدکه معادلهٔ تغییریافتهٔ تاو، یعنی معادلهٔ (۶.۱۱)، به‌تنهایی‌کافی است تا همین نتیجهٔ $\mathscr{V}$ را برای اختلاف پتانسیل در این دستگاه مختصات نیزبه‌دست‌آوریم. درحالت پایا نیروی وارد بربار آزاد داخل سیم باید همچنان برابرصفرباشد

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = 0$$

میدان مغناطیسی وجود ندارد زیرا $\mathbf{v} = 0$. بنابراین میدان الکتریکی باید در داخل سیم صفرباشد

$$\mathbf{E}=0=\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2 \qquad (۱۳.۱۱)$$

دراین حالت نیزیك میدان $\mathbf{E}_1$ ناشی ازجدایی بارها موجوداست که بامیدانی که درمورد پیش داشتیم یکسان است؛ این میدان در داخل سیم بامیدان $\mathbf{E}_2$ وابسته به میدان مغناطیسی متغیرخنثی می‌شود

$$\nabla\times\mathbf{E}_2=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

اگرمجدداً منحنی بستهٔ $abcda$ را در نظربگیریم

$$\mathcal{E}=\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\int_a^b\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}+\int_b^a\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

$$=0+\mathcal{V}$$

جملهٔ اول درطرف راست صفراست زیرا $\mathbf{E}$ در داخل سیم صفراست، وانتگرال دوم در امتداد مسیر $bcda$ چیزی است که ماآن را درمورد پیش، $\mathcal{V}$ نامیدیم. بنابراین ازاینجا و ازرابطهٔ (۲.۱۱) دوباره نتیجه می‌گیریم که

$$\mathcal{V}=-\frac{d\Phi}{dt} \qquad [۱۱.۱۱]$$

پس معادلهٔ تعمیم یافتهٔ تاو $\mathbf{E}$، یعنی (۶.۱۱)، همراه بامعادلهٔ (۷.۱۱) برای نیروی لورنتس، در هریك ازدو دستگاه مختصات لخت نتیجهٔ یکسان، یعنی معادلهٔ (۱۱.۱۱)، را به‌دست می‌دهد. بنابراین معادلهٔ (۶.۱۱) اعتبار عمومی دارد.[1] چون نتیجهٔ انتگرالی معادلهٔ (۱۱.۱۱) درهردو دستگاه مختصات صدق می‌کند، لذا غیرمنطقی نخواهد بود اگر آن را درهردومورد قانون فاراده بنامیم، اگرچه به‌معنی دقیق کلمه، فقط درمورد دوم است که یك emf ، بنابه‌تعریف (۱.۱۱)، وجود دارد. دربرخی موارد ممکن است مستقیماً معلوم‌نباشد که برای محاسبهٔ Φ درمعادلهٔ (۱۱.۱۱) چه‌مداری باید به‌کاررود، مسئلهٔ ۴.۱۱ مثالی‌است ازاین موارد. معادلاتی که همواره درتمام‌دستگاههای مختصات لخت برای میدانهای E و B صادق‌اندعبارت‌اند ازمعادلات (۶.۱۱) و (۷.۱۱). به‌هنگام‌تعیین emf یا «emf حرکتی»

---

۱. درفصل ۲۲، ازدید دیگر، درخواهیم یافت که میدان $E_2=vB$ که در معادلات (۸.۱۱) و (۱۳.۱۱) صدق‌می‌کند، ازتبدیل نسبیتی لورنتس‌میدانهای E و B دردستگاه‌مختصات «متحرك» ناشی می‌شود. به‌جای نیروی مغناطیسیی که در دستگاه «متحرك» صفرمی‌شود، نیروی مربوط به‌این میدان قرارمی‌گیرد.

اگرازاین معادلات استفاده کنیم هیچ ابهامی به‌وجود نخواهدآمد.

این مثال ازآن روکه یك نمونهٔ اصلی از مدارهای الکتریکی عملی است درخور توجه بیشتری است. اگر بین دوسر c و d مقاومتی قرار گیرد، جریان I در مدار برقرار می‌شود.[1] در این مورد یك نیروی مکانیکی وارد برسیم (یا برآهنربا، در مورد دوم) لازم است تاسرعت ثابت v را حفظ کند، به‌طوری که مجموع نیروی خارجی ونیروی‌مغناطیسی BIl وارد برسیم برابربا صفرشود. توان ورودی نیروی مکانیکی خارجی توان تلف شدهٔ I^2R را درمقاومت جبران می‌کند. تاآنجاکه به‌ولتاژ دو سر c و d مربوط است، فرقی نمی‌کندکه در مولد، سیم حرکت کند یاآهنربا (معمولا سیم حرکت می‌کند). در هر یك از دومورد، برای هرمسیری که میدان مغناطیسی مولد رااحاطه‌نکند(به‌ویژه،هرمسیر محدود به‌فضای‌آزمایشگاه) داریم $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$.

دردومثال مورد بحث ما، معادلهٔ تعمیم یافتهٔ زیر

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad [۶.۱۱]$$

برای هردو مورد صادق است ؛ دراینجا در دستگاه مختصات آهنربا $\partial \mathbf{B}/\partial t = 0$ بود، و لذا یك تحلیل الکتروستاتیکی امکان‌پذیرشد. لیکن غلط خواهد بود اگر نتیجه‌گیری کنیم که همواره می‌توان دستگاه مختصاتی یافت که در آن $\partial \mathbf{B}/\partial t$ برابرصفرشود. مثال سوم، که برشکل ۱.۱۱ مبتنی است، این نکته را نشان خواهدداد. فرض‌کنیدکه نه سیم حرکت می‌کند ونه آهنربا؛ لیکن فرض‌کنیدآهنربا یك‌آهنربای الکتریکی است که بزرگی میدان آن‌را می‌توان باافزایش یاکاهش جریان درسیم‌پیچهایش زیاد یاکم کرد. اکنون دیگرهیچ دستگاه مختصاتی یافت نمی‌شودکه درآن $\partial \mathbf{B}/\partial t$ صفرشود. بااین‌همه، معادلهٔ (۶.۱۱) بازهم صادق است، وقانون فاراده، یعنی معادلهٔ (۲.۱۱)، emf را برای هرمدار (مثلا، $abcda$) به‌دست می‌دهد. درمبدلها وسایر وسایلی که اجزای‌آنها حرکت مکانیکی ندارند، یعنی دروسایلی که موضوع بقیهٔ این فصل را تشکیل می‌دهند، وضعیت چنین است.

۲.۱۱ خودالقا

دراین بخش‌رابطهٔ بین شارمغناطیسی وجریان وابسته به‌یك مدارمنزوی را بررسی می‌کنیم وازآن برای معرفی یك پارامتر مدار، یعنی خودالقا، استفاده می‌کنیم. شارمغناطیسی که از یك مدارمنزوی می‌گذرد به‌شکل هندسی این مداربستگی دارد، و مطابق معادلهٔ (۲۶.۸)

---

۱. البته، به‌سبب طول متناهی‌آهنربا، این مولدنمی‌تواند ازنظرعملی یك مولد جریان‌مستقیم محسوب شود؛ اما اگرسیم به عقب و جلو حرکت کند، جریانی متناوب تولید خواهد شد (ر.ك مسئلهٔ ۵.۱۱).

تابعی است خطی ازجریان مدار. بنابراین برای هرمدارصلب وساکن تغییرات شارفقطاز تغییرات جریان ناشی می‌شود. یعنی

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{d\Phi}{dI}\frac{dI}{dt} \qquad (۱۴.۱۱)$$

این معادله حتی وقتی که معادلهٔ (۲۶.۸) هم برقرار نباشد صادق خواهد بود، تنهـا شرط آن است که Φ فقط به‌جریان بستگی داشته باشد. اما اگر معادلهٔ (۲۶.۸) معتبر باشد، یـا به‌طورکلیتر، چنانچه Φ مستقیماً باجریان متناسب باشد، درآن‌صورت $d\Phi/dI$ مقدارثابتی است برابر با Φ/I. درهرحال، خود القا، به‌صورت زیرتعریف می‌شود

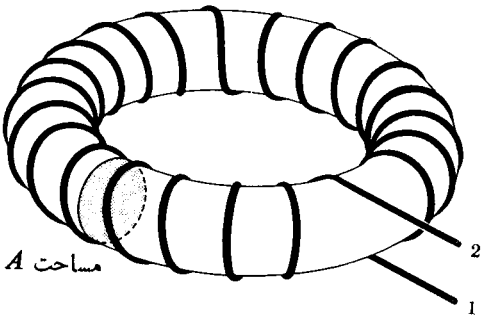
$$L=\frac{d\Phi}{dI} \qquad (۱۵.۱۱)$$

وقتی تمیزبین این مقدار و Φ/I ضروری باشد، $d\Phi/dI$ را القای نموی می‌گویند؛ به‌هر حال بهتر است واژهٔ القا (یا خودالقا) به‌معادلهٔ (۱۵.۱۱) اطلاق شود، مگر اینکه تعریف دیگری درنظر بـاشد. از معادله‌های (۱۴.۱۱)، (۱۵.۱۱) و (۲.۱۱) معلوم می‌شود که عبارت مربوط به emf القایی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathcal{E}=-L\frac{dI}{dt} \qquad (۱۶.۱۱)$$

که ارزش عملی قابل توجهی دارد.

به‌عنوان مثالی از کاربرد معادلهٔ (۱۵.۱۱) برای محاسبهٔ القا، خودالقـای یك پیچهٔ



شکل ۲.۱۱ یك سیم پیچ چنبره‌ای

چنبره‌ای‌را محاسبه می‌کنیم. این‌پیچه درشکل ۲.۱۱ نشان داده‌شده‌است. معادلهٔ (۱۵.۱۱) برای همهٔ مدار به‌کار می‌رود، یعنی نه‌تنها برای‌پیچهٔ چنبره‌ای درشکل ۲.۱۱، بلکه‌همچنین برای مدارخارجی‌که به‌دوسر ۱ و ۲ وصل می‌شود. با به‌کاربردن سرهای تاب خورده یا یك کابل هم‌محور، که درواقع هیچ میدان مغناطیسی خارجی‌تولید نمی‌کنند، قسمت مولدمیدان مدارخارجی را می‌توان به‌فواصل حتی‌الامکان دوردست انتقال داد تا درشارپیچهٔ چنبره‌ای تأثیری نداشته باشد. هرگاه این کار انجـام شود، وهرگاه منظورمان از emf همان ولتاژ بین دوسر ۱ و۲ باشد، آنگاه می‌توانیم از معـادلهٔ (۱۵.۱۱) برای محـاسبهٔ القای پیچهٔ چنبره‌ای استفاده‌کنیم. مطابق قانون مداری آمپر، میدان مغناطیسی در درون پیچهٔ چنبره‌ای به‌صورت زیراست

$$B=\frac{\mu_{\circ}NI}{l} \qquad (۱۷.۱۱)$$

که درآن N تعداد دورها، l طول متوسط و I شدت جریان درسیم‌پیچ است. (معادله‌های (۱۷.۱۱) و (۱۸.۱۱) تقریبی‌هستند زیرا درآنها ازتغییرات میدان مغناطیسی‌درسطح‌مقطع صرفنظرشده است. درمسئلهٔ ۱۸.۱۱ جزئیات این‌تقریب درنظر گرفته شده است.) بنابراین شاری‌که از هر دور سیم‌پیچ می‌گذرد عبارت است از

$$\Phi_{۱}=\frac{\mu_{\circ}NIA}{l} \qquad (۱۸.۱۱)$$

ومقدارکل شار برای N دوربرابراست با

$$\Phi=\frac{\mu_{\circ}N^{۲}A}{l}I \qquad (۱۹.۱۱)$$

درنتیجه القا به‌آسانی به‌صورت زیربه‌دست می‌آید

$$L=\frac{d\Phi}{dI}=\frac{\mu_{\circ}N^{۲}A}{l} \qquad (۲۰.۱۱)$$

یکای القا در دستگاه mks هنری است، که برطبق معـادلهٔ (۱۶.۱۱) برابر است بایك ولت ثانیه برآمپر، زیرا واحد emf ولت است. معادلهٔ (۲۰.۱۱) نشان می‌دهد که ابعاد $\mu_{\circ}$ را، که قبلا به‌صورت وبر برآمپر-متر یا تسلا-متر برآمپر داده شده بود، می‌توان برحسب هنری برمترنیز نوشت.

۳.۱۱ القای متقابل

در بخش گذشته فقط مدارهای منزوی بررسی شد، به‌طوری که همهٔ شاری که از مدار می‌گذشت ناشی‌ازجریان‌خود مدار بود. این‌محدودیت‌را با فرض‌اینکه n مدار به‌شماره‌های ۱، ۲، و . . . وجود داشته باشند، می‌توان ازبین برد. دراین‌صورت شاری راکه ازیکی‌از این مدارها، مثلا مدار iام، می‌گذرد می‌توان چنین نوشت

$$\Phi_i=\Phi_{i1}+\Phi_{i2}+\cdots+\Phi_{ii}+\cdots+\Phi_{in}=\sum_{j=1}^{n}\Phi_{ij} \qquad (۲۱.۱۱)$$

یعنی، می‌توان آن را به‌صورت مجموع شارهای ناشی ازهریك از n مدار درنظر گرفت، که درآن Φ_{i1} شاری است که از iامین مدار دراثرمدار ۱ می‌گذرد، و به همین ترتیب. بنابراین emf القا شده در iامین مدار، یعنی، $\mathcal{E}_i$ را می‌توان چنین نوشت

$$\mathcal{E}_i=-\frac{d\Phi_i}{dt}=-\left\{\frac{d\Phi_{i1}}{dt}+\cdots+\frac{d\Phi_{ii}}{dt}+\cdots+\frac{d\Phi_{in}}{dt}\right\}$$

$$=-\sum_{j=1}^{n}\frac{d\Phi_{ij}}{dt} \qquad (۲۲.۱۱)$$

اگرهرمدار ساکن و صلب باشد، تغییرات Φ_{ij}ها فقط ناشی از تغییرات جریانها خواهند بود، یعنی

$$\frac{d\Phi_{ij}}{dt}=\frac{d\Phi_{ij}}{dI_j}\frac{dI_j}{dt} \qquad (۲۳.۱۱)$$

درصورتی‌که معادلهٔ (۲۶.۸) صادق باشد، آن‌وقت ضرایب $d\Phi_{ij}/dI_j$ ثابتهایی مستقل از جریان خواهند بود. چنانچه این ضرایب ثابت نباشند، ممکن است به‌سبب غیر خطی بودن محیط مغناطیسی وابسته به‌مدار، به‌جریان بستگی داشته باشند. به‌هر حال کمیت زیر

$$M_{ij}=\frac{d\Phi_{ij}}{dI_j}, \qquad i\neq j \qquad (۲۴.۱۱)$$

به‌عنوان القای متقابل مدارهای i و j تعریف می‌شود. بعداً خواهیم دید که $M_{ij}=M_{ji}$ ودرنتیجه درشاخصها هیچ گونه ابهامی به‌وجود نخواهدآمد. البته $d\Phi_{ii}/dI_i$ همان خود القای مدار iام است که بانمادهای L_i یا M_{ii} نشان داده می‌شود. یکای‌القای متقابل با یکای خود القایکی است، یعنی همان هنری است.

به‌عنوان مثالِ محاسبهٔ القای متقابل، پیکربندی شکل ۲.۱۱ را درنظر می‌گیریم که به‌آن پیچهٔ چنبره‌ای‌دیگری‌با N_2 دورسیم اضافه شده باشد. برای این حالت وجود جریان I_1 درسیم‌پیچ اول، میدان مغناطیسی زیر

$$B=\frac{\mu_0 N_1 I_1}{l}$$

ودر نتیجه شارهای

$$\Phi_{11}=\frac{\mu_0 N_1^2 A I_1}{l}$$

و

$$\Phi_{21}=\frac{\mu_0 N_1 N_2 A I_1}{l}$$

را تولید می‌کند. ازاین شارها نتیجه می‌گیریم که

$$L_1=\frac{\mu_0 N_1^2 A}{l} \qquad (۲۵.۱۱)$$

که همان نتیجهٔ قبل است، و

$$M_{21}=\frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l} \qquad (۲۶.۱۱)$$

بامعکوس‌کردن این روش ودرنظر گرفتن جریان I_2 خواهیم داشت

$$L_2=\frac{\mu_0 N_2^2 A}{l} \qquad (۲۷.۱۱)$$

و

$$M_{12}=\frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l} \qquad (۲۸.۱۱)$$

که اثباتی است براینکه برای این مورد $M_{12}=M_{21}$. به‌علاوه، ازترکیب معادله‌های (۲۵.۱۱)، (۲۶.۱۱) و (۲۷.۱۱) نتیجه می‌گیریم که

$$M_{12}=\sqrt{L_1 L_2} \qquad (۲۹.۱۱)$$

معادلهٔ (۲۹.۱۱) حدی‌است برای‌القای متقابل دومدار، بدین معنی که همیشه القای متقابل مساوی یا کمتر است از ریشهٔ دوم حاصلضرب خودالقاهای دو مدار. با توجه به‌این حد، غالباً یك‌ضریب k، به‌نام ضریب جفت شدگی، به‌صورت زیرتعریف می‌شود

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \quad , \qquad |k| \leqslant 1 \tag{۳۰.۱۱}$$

۴.۱۱ فرمول نویمن

برای دومدار صلب وساکن در یك محیط خطی (برای مقاصد فعلی، خلأ) القای متقابل به‌صورت زیرنوشته می‌شود

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} \tag{۳۱.۱۱}$$

این رابطه بدان جهت معتبراست که Φ_{21} با I_1 متناسب است ، و به همین علت Φ_{21}/I_1 با $d\Phi_{21}/dI_1$ برابرمی‌شود. دراین حالت معادلهٔ (۲۶.۸) رابرای محاسبهٔ M_{21} می‌توان به‌کاربرد. شارمغناطیسی بارابطهٔ زیرداده می‌شود

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{S_2} \left\{ \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right\} \cdot \mathbf{n}\, da_2 \tag{۳۲.۱۱}$$

اما

$$\oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = \nabla_2 \times \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \tag{۳۳.۱۱}$$

پس

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_2} \nabla_2 \times \left\{ \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right\} \cdot \mathbf{n}\, da_2 \tag{۳۴.۱۱}$$

بابه‌کاربردن قضیهٔ استوکس برای تبدیل انتگرال سطحی، خواهیم داشت

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \tag{۳۵.۱۱}$$

که به فرمول نویمن برای القای متقابل مشهوراست. تقارنی که قبلابدان اشاره شد اکنون

ازمعادلهٔ (۳۵.۱۱) معلوم می‌شود.

فرمول نویمن برای خودالقا نیز به‌کار می‌رود، و در این صورت آن را به‌شکل زیر می‌نویسند

$$L=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{c_1}\oint_{c_1}\frac{d\mathbf{l}_1\cdot d\mathbf{l}'_1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'_1|} \qquad (۳۶.۱۱)$$

درکاربرد معادلهٔ (۳۶.۱۱) باید تاحدی دقت کرد زیراکه $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}'_1$ یك تکینه است، اما اگرتوجه‌کافی شود، این معادله گاهی مفید خواهد بود.

کاربرد معادله‌های (۳۵.۱۱) و (۳۶.۱۱) برای محاسبهٔ القاعموماً کارمشکلی‌است، مگردرمورد مدارهایی‌که شکل هندسی آنها ساده باشد. اما خصوصاً معادلهٔ (۳۵.۱۱) در مطالعهٔ نیروها و گشتاور نیروهای وارد ازمداری به مدار دیگربسیار اهمیت دارد. از این نوع‌کاربرد درفصل ۱۲ استفاده خواهد شد.

۵.۱۱ القاگرها در اتصالهای متوالی و موازی

القاگرها را غالباً به‌طورمتوالی و موازی به‌یکدیگرمتصل می‌کنند، و نظیر اتصال مقاومتها وخازنها، دانستن‌نتیجهٔ این‌نوع اتصالها مهم‌است. می‌توانیم ازمعادلهٔ $\mathcal{E}=-L(dI/dt)$ شروع کنیم والقای مؤثردوالقاگردراتصال موازی یا متوالی را به‌دست آوریم؛ اما چنین کاری به‌معنی نادیده گرفتن این واقعیت عملی است‌که یك القاگر همیشه مقاومت داخلی دارد. ساخت یك القاگرکامل ازنظرعملی خیلی مشکلتر ازساخت یك خازن ویایك‌مقاومت کامل‌است. به‌همین دلیل دراین‌بخش‌درترکیبهای متوالی وموازی القاگرها همواره‌مقاومتها را نیزمنظورمی‌کنیم.

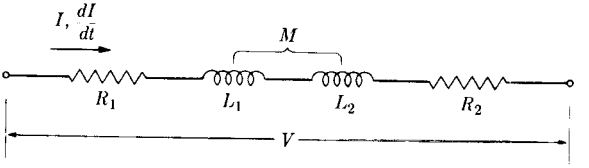
برای دو القاگر متوالی، مدارشکل ۳.۱۱ مناسب است. درتعیین حاصل جمع افت ولتاژها درطول مدار لازم است توجه شودکه M می‌تواند مثبت یا منفی باشد (باتغییر جهت هریك ازمدارهای C_1 یا C_2، علامت M درمعادلهٔ (۳۵.۱۱) تغییر می‌کند). بادر نظرگرفتن این نکته، مجموع افت ولتاژها برای شکل ۳.۱۱ چنین خواهد بود

$$V+\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2=R_1I+R_2I$$

یا

$$V=R_1I+L_1\frac{dI}{dt}+M\frac{dI}{dt}+R_2I+L_2\frac{dI}{dt}+M\frac{dI}{dt} \qquad (۳۷.۱۱)$$

این رابطه معادل است با



شکل ۳.۱۱ اتصال متوالی دو القاگر

$$V=(R_1+R_2)I+(L_1+L_2+2M)\frac{dI}{dt} \qquad (38.11)$$

پس این مدار شبیه آن است که مقاومتی که مقدار آن برابر R_1+R_2 است باالقاگری که خودالقای آن برابر L_1+L_2+2M است ، به‌طور متوالی بسته شده باشد. مقدار القا برای جفت‌شدگی مثبت (یعنی برای حالتی که شارهـای ناشی از I_1 و I_2 در دو پیچه همجهت‌انـد) مساوی $L_1+L_2+2|M|$ است ، و برای جفت شدگـی منفـی مساوی $L_1+L_2-2|M|$ است. راه دیگری برای بیان القای متقابل عبارت است از

$$M=k\sqrt{L_1L_2} \quad , \qquad -1\leqslant k\leqslant 1 \qquad (39.11)$$

بنابراین القای مؤثرمدارمتوالی برابراست با

$$L_{\text{مؤثر}}=L_1+2k\sqrt{L_1L_2}+L_2 \qquad (40.11)$$

اگربتوانیم k را تغییر دهیم می‌توانیم یك القاگر متغیر بسازیم. (دراوایل پیدایش رادیو، این یکی از راههای متداول برای میزان‌کردن مدارهای تشدید بود؛ فصل ۱۳ را ببینید.)

اتصال موازی که درشکل ۴.۱۱ نشان داده شده است به‌سادگی مدارمتوالی‌نیست. درحقیقت‌مداری که نشان داده شده‌است مانندیك مدارمتوالی سادهٔ R - L رفتارنمی‌کند. بنابراین، نمی‌توان گفت که القای مؤثر و مقـاومت مؤثر توابعی از L_1، L_2، R_1، و R_2 هستند. لیکن هرگاه R_1 و R_2 قابل چشمپوشی باشند، آنگاه خواهیم داشت

$$V=L_1\frac{dI_1}{dt}+M\frac{dI_2}{dt}$$

$$V=L_2\frac{dI_2}{dt}+M\frac{dI_1}{dt} \qquad (41.11)$$

اگر ابتدا dI_1/dt و سپس dI_2/dt را بین دو معادلهٔ (۴۱.۱۱) حذف کنیم، نتیجه می‌گیریم که

$$V(L_2-M)=(L_1L_2-M^2)\frac{dI_1}{dt}$$

$$V(L_1-M)=(L_1L_2-M^2)\frac{dI_2}{dt} \qquad (۴۲.۱۱)$$

پس ازجمع کردن این دو، به‌دست می‌آوریم

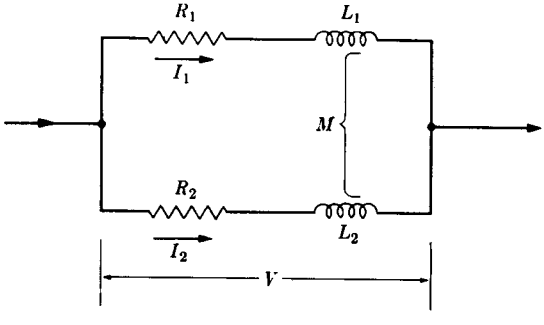
$$V=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}\,\frac{dI}{dt} \qquad (۴۳.۱۱)$$

بنابراین القای مؤثر دوالقاگرموازی عبارت است از

$$L_{\text{مؤثر}}=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M} \qquad (۴۴.۱۱)$$

که درآن بازهم علامت M بستگی به‌نحوهٔ اتصال القاگرها دارد.

مهمترین مورد استفادهٔ القاگرها درمدارهایی است که جریان متناوب دارند. برای مداری که درفرکانس خاصی‌کارمی‌کند، مدارمتوالی معادلی برای شکل ۴.۱۱ می‌توان‌پیدا کرد؛ اما، هم مقاومت معادل وهم القای معادل، هر دو، تابعی از فرکانس‌اند. همین بستگی آنها به‌فرکانس ریشهٔ اشکالی است که قبلا باآن روبه‌رو شدیم.



شکل ۴.۱۱ اتصال موازی دوالقاگر.

۶.۱۱ خلاصهٔ مطالب

دراین‌فصل گامی فراتر ازمیدانهای‌ایستا برمی‌داریم وبه‌مورد موسوم به‌میدانهای کندتغییر، می‌پردازیم. تعمیم جدید معادلات میدان به‌صورت زیراست

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

این سومین معادله ازمعادلات چهارگانهٔ ماکسول است، که همراه بادو معادلهٔ واگرایی و نیروی لورنتس

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

همیشه برقراراست. (دراین‌مرحله از به‌دست آوردن معادلات‌اساسی الکتریسیته ومغناطیس، سه تا ازچهارمعادلهٔ ماکسول را به‌صورت نهایی در دست داریم. تنها لازم‌است که‌معادلهٔ تاو $\mathbf{H}$ نیز تعمیم داده شود.) این معادله به‌صورت دیفرانسیلی قانون فاراده معروف است؛ صورت انتگرالی‌آن عبارت است از

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

که درآن $\mathcal{E}$ عبارت است از emf به‌دورمدار ثابت C که بارابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

(ممکن است دربرخی مسائل چنین پیش آیدکه بتوان دستگاه مختصات متحرکی یافت که درآن $\partial \mathbf{B}/\partial t = 0$ باشد، ودرنتیجه بتوان مسئله را به‌طریق الکتروستاتیکی تحلیل کرد، لیکن همواره لزوماً چنین وضعی پیش نمی‌آید.)

۱. آسانترین راه برای تعیین قطبیت درست یك ولتاژ القایی بـه کاربردن قـانون لنز است.

۲. «emf حرکتی» سیم مستقیمی که دریك میدان مغناطیسی حرکت می‌کند برابراست با

$$\mathcal{V} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{v}$$

۳. خود القای یك مدار (یاعنصرمداری) ثابت به‌صورت زیرتعریف می‌شود

$$L=\frac{d\Phi}{dI}$$

به‌طوری که

$$\mathcal{E}=-L\frac{dI}{dt}$$

برای یك سیم‌پیچ چنبره‌ای (یا یك سیملولهٔ طویل)، L به‌آسانی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$L=\frac{\mu_0 N^2 A}{l}$$

۴. القای متقابل دومدار به‌صورت زیرتعریف می‌شود

$$M_{ij}=\frac{d\Phi_{ij}}{dI_j}$$

به‌این ترتیب نتیجه می‌شود که

$$M_{ii}=L_i$$

و

$$M_{12}=M_{21}=k\sqrt{L_1 L_2}\quad,\qquad |k|\leqslant 1$$

۵. القای معادل برای اتصال متوالی یا موازی القاگرهای خالص مطابق با فرمولهای مربوط در مورد مقاومتهاست، به‌شرط آنکه بتوان از القای متقابل و مقاومت ذاتی آنها صرفنظر کرد.

مسائل

۱.۱۱ یك رسانای فلزی به‌شکل قطعه سیمی به‌طول l باسرعت $\mathbf{v}$ درمیدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ حرکت می‌کند. با بررسی تفصیلی نیروی لورنتس وارد برالکترونهای درون سیم، نشان دهیدکه اختلاف پتانسیل دو انتهای سیم برابراست با: $\mathbf{B}\cdot\mathbf{l}\times\mathbf{v}$.

۲.۱۱ یك میلهٔ فلزی به‌طول یك مترحول محوری که از یك انتهای میله و عمود برآن می‌گذرد، با سرعت زاویه‌ای ۱۲ rad/s می‌چرخد. صفحهٔ دوران میله بریك میدان

مغناطیسی یکنواخت T ۳ر۰ عمود است. emf حرکتی القایی بین دو انتهای میله را پیدا کنید.

۳.۱۱ دریك دستگاه شتابدهندهٔ بتاترون، یونی به‌بار q وجرم m مداری مستدیررا در فاصلهٔ R از محورتقارن دستگاه، می‌پیماید. میدان مغناطیسی تقارن استوانه‌ای دارد، یعنی درصفحهٔ مدار مؤلفهٔ z میدان به صورت $B_z = B(r)$ است، که r فاصله تا محور تقارن است. نشان دهیدکه سرعت یون $v = qB(R)R/m$ است. اگربزرگی میدان مغناطیسی کم‌کم افزایش‌یابد، نشان دهیدکه emf القایی درمداریون طوری است که یون‌راشتابدار می‌کند. نشان دهیدکه برای اینکه یون در مدار خودش باقی بماند تغییرات شعاعی میدان B در نقاط داخل مدار در شرط زیر صدق می‌کند: میانگین فضایی افزایش $B(r)$ (وقتی میانگین برروی سطح محصور توسط مدارمحاسبه شود) باید برابرباشد بادوبرابرافزایش $B(R)$ درهمان بازهٔ زمانی.

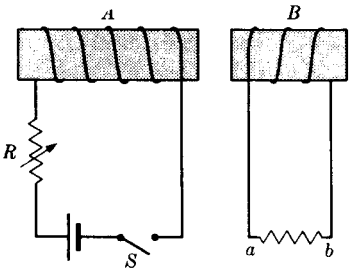
۴.۱۱ مولد همقطب فاراده متشکل است از دیسکی فلزی که در یك میدان مغناطیسی یکنواخت وعمود برصفحهٔ دیسك، می‌چرخد، نشان دهید که اختلاف پتانسیل ایجاد شده‌بین مرکز دیسك ومحیط آن برابراست با $\mathscr{V} = f\Phi$، که درآن Φ شارگذرنده از دیسك و f فرکانس چرخش است. اگر f برابر با ۳۰۰۰ دور در دقیقه و $\Phi = ۰ر۱\,\mathrm{Wb}$ باشد، ولتاژ چقدر است؟

۵.۱۱ مولد جریان متناوب تشکیل شده است از پیچه‌ای با N دور سیم‌پیچ به‌مساحت A، که درمیدان B حول قطری عمود بر میدان می‌چرخد. فرکانس دوران f است. emf رادرپیچه‌پیدا کنید. اگر $N = ۱۰۰$، $A = ۱۰^{-۲}\mathrm{m}^۲$، $B = ۰ر۱\,\mathrm{T}$، و $f = ۲۰۰۰\,\mathrm{r/min}$ باشد، دامنهٔ ولتاژ متناوب چقدراست؟

۶.۱۱ یك استوانهٔ دی‌الکتریك با گذردهی ε حول محور خود با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. اگریك میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}$، موازی محوراستوانه موجود باشد، بار قطبشی القایی در دی‌الکتریك را به‌دست آورید.

۷.۱۱ دومدار جفت شدهٔ A، B در وضعیت شکل ۵.۱۱ قرار گرفته‌اند. بااستفاده از قانون لنز جهت جریان القایی درمقاومت ab را درموارد زیر پیداکنید: (الف) پیچهٔ B را به‌پیچهٔ A نزدیك‌کنیم، (ب) مقاومت R را کاهش دهیم، (ج) کلید S را بازکنیم.

۸.۱۱ پیچه‌ای شامل ۱۰۰ دوربامقطع دایره‌ای به‌طورفشرده پیچیده شده است، به‌طوری که تمام حلقه‌ها تقریباً دریك صفحه قرار دارند. شعاع متوسط پیچه ۳ سانتیمتراست. پیچه حول‌یکی ازقطرهایش باسرعت زاویه‌ای ۹۰۰ دوردردقیقه می‌چرخد. دیده‌می‌شودهنگامی که محور دوران قائم است، جذر میانگین مجذور emf حرکتی القایی در پیچه ۵ر۰ میلی ولت است. چه نتیجه‌ای دربارهٔ میدان مغناطیسی زمین‌درمکان پیچه می‌توانیم بگیریم؟



شکل ۵.۱۱

۹.۱۱ یك دیسك بـا سرعت زاویه‌ای ω حول محور خود می‌چرخد. دیسك از فلـزی با رسانندگی g ساخته شده، وضخامت آن t است. دیسك چرخان‌را بین دوقطب آهنربایی قرارمی‌دهیم که میدان مغنـاطیسی یکنواخت B را برروی یك سطح مربع شکل کـوچك به‌مساحت a^2، و به‌فاصلهٔ متوسط r ازمحور دیسك، ایجادمی‌کند؛ B بردیسك عموداست. گشتاور نیروی تقریبی وارد بردیسك را محاسبه کنید. (برای مقاومت «مدارجریان گردابی» مقدارمناسبی فرض کنید.)

۱۰.۱۱ یك پیچـهٔ چنبره‌ای شامـل N دور، مطـابق شکـل ۲.۱۱، بـرروی یك جسم نامغناطیسی پیچیده شده است. اگرشعاع متوسط پیچه b، وشعاع مقطع جسم a باشد، نشان دهیدکه خودالقای پیچه $L=\mu_0 N^2(b-\sqrt{b^2-a^2})$ است.

۱۱.۱۱ مداری تشکیل شده است از دو پوستهٔ استوانه‌ای هم محور به‌شعاعهـای R_1 و R_2 $(R_2 > R_1)$ وطول یکسان L، که به‌وسیلهٔ صفحات انتهایی تخت به‌هم متصل‌شده‌اند. بارالکتریکی ازیك پوسته پایین می‌رود وازطریق پوستهٔ دیگر برمی‌گردد. خودالقای این مدارچیست؟

۱۲.۱۱ پیچهٔ چنبره‌ای مسئلهٔ ۱۰.۱۱ ۱۵۰ دور دارد، $b=4\text{cm}$ و $a=1.5\text{cm}$. خود-القای پیچه برحسب هنری چقدراست؟

۱۳.۱۱ دو حلقه سیم دایره‌ای کوچك (به‌شعاعهای a و b) دریك صفحه و به‌فاصلهٔ r از یکدیگرقراردارند. چنانچه r آن‌قدربزرگ باشدکه بتوان ازتقریب دوقطبی استفاده کرد، القای متقابل بین این دوحلقه را پیداکنید.

۱۴.۱۱ دوحلقهٔ دایره‌ای جریان بامحورهـای موازی به‌فاصلهٔ r ازیکدیگر قرار دارند. فاصلهٔ r آن‌قدر زیاد است که می‌توان ازتقریب دوقطبی استفـاده کرد. نشان دهید چگونه باید یکی ازحلقه‌ها را نسبت به‌دیگری قرارداد تا القای متقابل آنها صفرشود.

۱۵.۱۱ دومدار زیرمفروض‌اند: یك سیم راست بسیار طویل، ویك مستطیل به‌ابعـاد h و

d. مستطیل درصفحه‌ای که ازسیم می‌گذرد قرار دارد واضلاع به‌طول h آن موازی سیم و به‌فاصله‌های r و $r+d$ ازسیم قراردارند. القای متقابل دومدار را محاسبه کنید.

۱۶.۱۱ دومدارزیرمفروض‌اند: یك سیم مستقیم بسیارطویل، ودایره‌ای به‌شعاع a. دایره درصفحه‌ای که ازسیم می‌گذرد قراردارد وفاصلهٔ مرکزآن تا سیم r است. القای‌متقابل‌بین دومدار را محاسبه کنید.

۱۷.۱۱ خط انتقالی تشکیل شده است از دو سیم بسیار طویل به‌شعاع a وبه‌فاصلهٔ d از یکدیگر. خود القای این خط درواحد طول را حساب کنید، فرض کنید $d \gg a$ باشد تا بتوان ازشار داخل خود سیمها صرفنظر کرد.

۱۸.۱۱ دوحلقه سیم دایره‌ای هم‌محور به‌شعاعهای a و b، به‌فاصلهٔ محوری x ازیکدیگر قراردارند بااستفاده ازفرمول نویمن نشان دهیدکه القای متقابل حلقه‌ها برابر است با

$$M=\mu_{\circ}(ab)^{1/2}\left[\left(\frac{2}{k}-k\right)K(k)-\frac{2}{k}E(k)\right]$$

که درآن

$$k^{2}=\frac{4ab}{(a+b)^{2}+x^{2}}$$

و $K(k)$ و $E(k)$ انتگرالهای‌کامل بیضوی‌اندکه به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$K(k)=\int_{\circ}^{\pi/2}\frac{d\phi}{(1-k^{2}\sin^{2}\phi)^{1/2}}$$

و

$$E(k)=\int_{\circ}^{\pi/2}(1-k^{2}\sin^{2}\phi)^{1/2}\,d\phi$$

۱۹.۱۱ مسئلهٔ قبل را باردیگر درنظربگیرید. $1/|\mathbf{r}_{2}-\mathbf{r}_{1}|$ درفرمول نویمن را مطابق قضیهٔدوجمله‌ای بسط دهید، وازنتیجه جمله به‌جمله انتگرال گیری کنید ورابطهٔزیررا به‌دست آورید

$$M=\frac{\mu_{\circ}\pi a^{2}b^{2}}{2h^{3}}\left(1+3\frac{ab}{h^{2}}+\frac{75}{8}\frac{a^{2}b^{2}}{h^{4}}+\cdots\right)$$

که درآن $h^{2}=x^{2}+(a+b)^{2}$ است.

۲۰.۱۱ دو مدار باضرایب خود القای L_{1} و L_{2} و مقاومتهای R_{1} و R_{2} نزدیك یکدیگر

قراردارند. اگر القای متقابل مدارها M باشد ویك ولتاژ اعمالی $\mathcal{V}$ ناگهان به‌طورمتوالی به‌یکی ازآنها بسته شود، نشان دهید که بارالکتریکی به‌اندازهٔ $Q=\mathcal{V}M/R_1R_2$ درمدار دیگر به‌گردش درمی‌آید.

۲۱.۱۱ یك محیط نامغناطیسی رسانا با رسانندگی g مفروض‌است که تحت‌تأثیریك میدان مغناطیسی تابع زمان $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ قرارگرفته‌است. ازصورت دیفرانسیلی قانون فاراده، معادلهٔ (۶.۱۱)، شروع کنید ونشان دهید که بافرض متجمع نشدن بار (یعنی $\nabla\cdot\mathbf{J}=0$)چگالی جریان گردابی درمحیط درمعادلهٔ دیفرانسیل $\nabla^2\mathbf{J}=g\,\mu_0\,(\partial\mathbf{J}/\partial t)$ صدق می‌کند. ثابت کنید که $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ نیز درهمین معادله صدق می‌کنند.

۲۲.۱۱ نشان دهید که emf دریك مدارثابت C ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$-\frac{d}{dt}\oint_c \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$$

که درآن $\mathbf{A}$ پتانسیل برداری است.

۲۳.۱۱ فرض کنید که جریان دریك سیملولهٔ بسیارطویل به‌طورخطی بازمان افزایش‌یابد، به‌طوری که $\partial B/\partial t=K$ باشد. میدان E را درداخل وخارج سیملوله پیدا کنید.

۲۴.۱۱ میدان Eی القایی توسط $\dot{\mathbf{B}}=\partial\mathbf{B}/\partial t$ را می‌توان به‌طورصریح به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi}\int\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\times\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dv'$$

بامشتق‌گیری در داخل انتگرال صحت روابط $\nabla\times\mathbf{E}=-\partial\mathbf{B}/\partial t$ و $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$ را تحقیق کنید. نشان‌دهید که‌شیب هرتابعی‌راکه جواب‌معادلهٔ لاپلاس‌باشدمی‌توان به $\mathbf{E}$افزود.

۲۵.۱۱ « میدان بی‌نیرو » میدانی‌است که برای‌آن $\mathbf{J}\times\mathbf{B}=0$ باشد. ثابت‌کنید که چنین میدانی درمعادلهٔ زیرصدق می‌کند

$$\nabla^2\mathbf{B}=-\alpha^2\mathbf{B}$$

که در آن α ثابت است. (راهنمایی: در میدان بی‌نیرو $\nabla\times\mathbf{B}$ با $\mathbf{B}$ موازی است.) ثابت‌کنید که $\mathbf{J}$ درهمین معادله صدق می‌کند. نتیجهٔ مسئلهٔ ۲۱.۱۱ را به‌کاربرید و وابستگی زمانی چگالی جریان ومیدانها را پیدا کنید.

۱۲

انرژی مغناطیسی

برقراری میدان مغناطیسی مستلزم صرف انرژی است؛ این مطلب مستقیماً از قانون القای فاراده نتیجه می‌شود. هرگاه چشمهٔ ولتاژ $\mathcal{V}$ به‌مداری متصل شود، آنگاه، به طور کلی، جریان درمدار بارابطهٔ زیر بیان می‌شود

$$\mathcal{V}+\mathcal{E}=IR \qquad (۱.۱۲)$$

که‌در آن $\mathcal{E}$ مقدار emf القایی و R مقاومت مدار جریان‌است. کاری که $\mathcal{V}$ درحرکت‌دادن نموبار $dq=Idt$ درمدار انجام می‌دهد برابر است با

$$\mathcal{V}\,dq=\mathcal{V}I\,dt=-\mathcal{E}I\,dt+I^{۲}R\,dt$$

$$=I\,d\Phi+I^{۲}R\,dt \qquad (۲.۱۲)$$

رابطهٔ دوم بااستفاده ازقانون فاراده، معادلهٔ (۲.۱۱)، به‌دست می‌آید. جملهٔ $I^{۲}Rdt$ نشان‌دهندهٔ تبدیل برگشت‌ناپذیر انرژی الکتریکی بـه گرماست توسط مدار ، لیکن این جمله فقط درمواردی برابر با تمامی کار ورودی‌است که تغییر شارصفر باشد. جملهٔ اضافی، $I\,d\Phi$، کاری است که علیه emf القاشده درمدار انجام می‌شود،وعبارت‌است از آن قسمت از کار انجام شده به‌وسیلهٔ $\mathcal{V}$ که در تغییرساختار میدان مغناطیسی مؤثراست. باکنار گذاشتن‌جملهٔ $I^{۲}R\,dt$، می‌توان نوشت

$$dW_b=I\,d\Phi \qquad (۳.۱۲)$$

که درآن شاخص b نشان می‌دهد که این‌کار را چشمه‌های خارجی انرژی الکتریکی (مثلا باتریها) انجام داده‌اند. نموکارمعادلهٔ (۳.۱۲) ممکن است مثبت یامنفی باشد. این نمو وقتی مثبت است که تغییرشار $d\Phi$ مدار باشاری که درآن به‌وسیلهٔ جریان I ایجاد می‌شود همجهت باشد.

برای یك مدارصلب وساکن که بجزاتلاف گرمای ژول هیچ‌انرژی دیگری ازدست نمی‌دهد (یعنی پسماند ندارد)، جملهٔ dW_b برابر است باتغییر انرژی مغناطیسی مدار. دربارهٔ اتلاف پسماند دربخش ۴.۱۲ بحث می‌شود، لیکن در حال حاضر دستگاههای برگشت‌پذیرمغناطیسی را بررسی می‌کنیم. روش بررسی به‌آنچه‌که درفصل ۶ داشتیم بسیار نزدیك است.

۱.۱۲ انرژی مغناطیسی مدارهای جفت شده

دراین بخش رابطه‌ای برای انرژی مغناطیسی دستگاهی متشکل از مدارهای جریان‌که بایکدیگر برهم‌کنش دارند، به‌دست خواهیم‌آورد. اگر n مدار وجود داشته باشد، آنگاه مطابق معادلهٔ (۳.۱۲)، کارانجام شده برعلیه emfهای القایی بارابطهٔ زیرداده می‌شود، که یك رابطهٔ کلی است

$$dW_b = \sum_{i=1}^{n} I_i \, d\Phi_i \qquad (۴.۱۲)$$

این رابطه بدون بستگی به‌چگونگی تولید نموهای شار $d\Phi_i$ معتبر است. اما به‌خصوص حالتی مورد توجه ماست که در آن $d\Phi_i$ها با تغییرات جریان درخود n مدار به وجود می‌آیند. درچنین شرایطی تغییرات شار مغناطیسی مستقیماً باتغییرات جریانها مربوطاند

$$d\Phi_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} dI_j = \sum_{j=}^{n} M_{ij} \, dI_j \qquad (۵.۱۲)$$

چنانچه مدارها صلب وساکن باشند، هیچ‌کارمکانیکی بااین تغییرات شار مغناطیسی $d\Phi_i$ همراه نخواهد بود، و dW_b درست برابراست باتغییر در انرژی مغناطیسی دستگاه، یعنی برابراست با dU. توجه‌کنیدکه دراینجا ما خود را به مدارهای ساکن محدود می‌کنیم تا بتوانیم انرژی مغناطیسی را به‌عنوان یك جملهٔ کارمحاسبه‌کنیم. بعداً موردی راکه مدارها نسبت به‌یکدیگر حرکت می‌کنند مطالعه خواهیم کرد، اما درآن صورت دیگر نخواهیم توانست dU را با dW_b یکی بدانیم.

انرژی مغناطیسی U برای‌دستگاهی متشکل از n مدار صلب وساکن باانتگرال‌گیری ازمعادلهٔ (۴.۱۲)، ازوضع شارصفر (متناظرباهمهٔ I_iها برابرصفر) تا مقادیرنهایی شارها،

به‌دست می‌آید. برای گروهی از مدارهای صلب که حاوی محیطهای مغناطیسی خطی باشند، یا درچنین محیطهایی قرارداشته باشند، Φ_iها به‌طورخطی باجریان مدارهامربوط‌اند وانرژی مغناطیسی به‌اینکه جریانها چگونه به مقادیر نهایی خود رسیده‌اند بستگی ندارد. چون مورد مدارهای صلب ومحیطهای خطی‌اهمیت بسیار دارد، توجه خودرا به‌این مورد معطوف می‌کنیم.

چون انرژی نهایی به‌ترتیب تغییرجریانها بستگی ندارد، می‌توانیم طرح خاصی‌را اختیار کنیم که درآن W را به‌آسانی بتوان محاسبه کرد. دراین طرح تمام جریانها (و در نتیجه تمام شارها) را به‌طورهماهنگ به‌مقدار نهایی‌شان می‌رسانیم، یعنی درهر لحظه از زمان تمام جریانها (وتمام شارها) کسریکسانی ازمقادیرنهایی خود خواهندبود. مقداراین کسررا α می‌نامیم. اگرمقادیرنهایی جریانها بانمادهای

$$I_1,\ I_2,\ \cdots,\ I_n$$

نمایش داده شوند، آن‌وقت درهرمرحله $I'_i=\alpha I_i$؛ به‌علاوه، $d\Phi_i=\Phi_i\,d\alpha$. انتگرال‌گیری ازمعادلهٔ (۴.۱۲) نتیجه می‌دهد

$$\int dW_b=\int_0^1 d\alpha\sum_{i=1}^{n} I'_i\Phi_i=\sum_{i=1}^{n} I_i\Phi_i\int_0^1 \alpha\,d\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i\Phi_i$$

بنابراین انرژی مغناطیسی برابراست با

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i\Phi_i \qquad \text{(مدارهای صلب، محیطهای خطی)} \qquad (۶.۱۲)$$

به‌کمک‌معادلهٔ (۵.۱۲)، که برای یك مدار صلب ودستگاه خطی‌مستقیماً قابل‌انتگرال گیری است، انرژی مغناطیسی را می‌توان به‌صورت زیر بیان‌کرد

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}I_iI_j$$

$$=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2+\cdots+\frac{1}{2}L_nI_n^2$$

$$+M_{12}I_1I_2+M_{13}I_1I_3+\cdots+M_{1n}I_1I_n$$

$$+M_{23}I_2I_3+\cdots+M_{n-1,\,n}I_{n-1}I_n \qquad (۷.۱۲)$$

(مدارهای صلب، محیطهای خطی)

دراینجا نتایج وعلائم مربوط به‌بخشهای ۳.۱۱ و ۴.۱۱، یعنی $M_{ij}=M_{ji}$ و $M_{ii}\equiv L_i$، را به‌کاربرده‌ایم.

برای دو مدارجفت شده، معادلهٔ اخیر به‌صورت زیرنوشته می‌شود

$$U=\frac{1}{2}L_1I_1^2+MI_1I_2+\frac{1}{2}L_2I_2^2 \qquad (8.12)$$

دراینجا برای سادگی، M را به‌جای M_{12} نوشته‌ایم. جملهٔ MI_1I_2 ممکن است مثبت یا منفی باشد، اما انرژی کل مغناطیسی U باید به‌ازای کلیهٔ مقادیر جریانهای I_1 و I_2 مثبت (ویا صفر) باشد. اگرنسبت I_1/I_2 را با x نشان دهیم، خواهیم داشت

$$U=\frac{1}{2}I_2^2(L_1x^2+2Mx+L_2)\geqslant 0$$

برای‌محاسبهٔ‌مقدار x، که به‌ازای‌آن U کمینه (یا بیشینه) می‌شود، بایدمشتق U را برحسب x محاسبه‌کرد ومساوی صفرقرارداد. نتیجه چنین خواهد بود

$$x=-\frac{M}{L_1} \qquad (9.12)$$

مشتق دوم U نسبت به x مثبت است، و این نشان می‌دهد که رابطهٔ (۹.۱۲) شرط کمینه بودن است. برای تمام مقادیر x انرژی مغناطیسی بزرگتریا مساوی صفراست، به‌خصوص، مقدار کمینهٔ U (که به‌ازای $x=-M/L_1$ به‌دست می‌آید) بزرگتر یا مساوی صفر است. پس

$$\frac{M^2}{L_1}-\frac{2M^2}{L_1}+L_2\geqslant 0$$

یا

$$L_1L_2\geqslant M^2 \qquad (10.12)$$

واین نتیجه‌ای است که دربخش ۳.۱۱ بیان شد ولی ثابت نشده بود.

برای یك تك مدار

$$\Phi=LI,$$

$$U=\frac{1}{2}I\Phi=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L} \qquad (11.12)$$

۲.۱۲ چگالی انرژی درمیدان مغناطیسی

معادلهٔ (۷.۱۲) انرژی مغناطیسی یك دستگاه جریان را برحسب پارامترهـای مدار، یعنی جریانها والقاها تعیین می کند. این فرمولبندی بسیار مفید است، زیرا این پارامترهـا را می‌توان بااندازه‌گیری مستقیم به‌دست آورد. ازطرف دیگر، فرمولبندی دیگری از انرژی مغناطیسی برحسب میدانهای برداری $\mathbf{B}$ و $\mathbf{H}$ بسیارجالب توجه خواهدبود، زیراتصویری را عرضه می کندکه درآن انرژی درخود میدان مغناطیسی ذخیره شده است. این تصویررا می‌توان تعمیم داد، همان‌گونه که درفصل ۱۶ انجام شده‌است، تانشان داده شودکه چگونه درفرایندهای غیرساکن، انرژی درمیدان الکترومغناطیسی منتقل می‌شود.

یك دسته مدارصلب حامل جریان را درنظربگیریدکه هیچ یك ازآنها تا بینهـایت ادامه ندارند، ودرمحیطی باخواص مغناطیسی خطی قرار گرفته‌اند. انرژی این دستگاه از معادلهٔ (۶.۱۲) به‌دست می‌آید. در بحث فعلی، برای سهولت، فرض می کنیم که هر مدار فقط از یك تك حلقه تشکیل شده است؛ دراین صورت شار Φ_i به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$\Phi_i=\int_{S_i}\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,da=\oint_{C_i}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}_i \qquad (۱۲.۱۲)$$

که درآن $\mathbf{A}$ پتـانسیل برداری موضعی است. باقرار دادن این نتیجه در معـادلهٔ (۶.۱۲) به‌دست می آوریم

$$U=\frac{1}{2}\sum_i\oint_{C_i}I_i\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}_i \qquad (۱۳.۱۲ \text{ الف})$$

می‌خواهیم معادلهٔ (۱۳.۱۲ الف) را به‌صورت کلیتری بیان‌کنیم. فرض کنیدکه مدارهای جریان مشخص شده با سیـم نداریم ، بلکه درعوض هر « مدار » مسیربسته‌ای‌است در محیط (فرض می‌شودکه محیط رسانـاست) که بریك خط چگالی جریـان منطبق است. معادلهٔ (۱۳.۱۲ الف) را می‌توان باتقریب خوبی برای این وضع به‌کاربرد، مشروط براینکه تعدادبسیارزیادی‌ازمدارهای فرضی (C_i) را درنظربگیریم‌وجایگزینی $I_i\,d\mathbf{l}_i\rightarrow\mathbf{J}\,dv$ را انجام دهیم، و بالاخره $\int_V$ را به‌جـای $\sum_i\oint_{C_i}$ قرار دهیم، بدین ترتیب

$$U=\frac{1}{2}\int_V\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}\,dv \qquad (۱۳.۱۲ \text{ ب})$$

معادلهٔ اخیررا بااستفاده ازمعادلهٔ میدان $\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}$ و اتحاد برداری (۸.۱.۱)

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{H})=\mathbf{H}\cdot\nabla\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{H}$$

می‌توان به‌صورت زیر تبدیل کرد

$$U=\frac{1}{2}\int_V \mathbf{H}\cdot\nabla\times\mathbf{A}\,dv-\frac{1}{2}\int_S \mathbf{A}\times\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}\,da \qquad (۱۴.۱۲)$$

دراینجا S سطحی است که حجم V را محصور می‌کند. چون مطابق فرض هیچ یك از مدارهای جریان تا بینهایت ادامه ندارند، بهتر این است که سطح S را به‌فواصل بسیار دور ببریم تا تمام قسمتهای این سطح ازجریانها دورباشند. طبعاً حجم دستگاه نیز باید متناسباً افزایش یابد. اما $\mathbf{H}$ دست کم به نسبت $1/r^2$ کوچك می‌شود، که در آن r فاصلهٔ مبدئی‌است در حوالی‌وسط توزیع جریان تانقطهٔ معینی برروی سطح S. همچنین $\mathbf{A}$ دست کم به‌نسبت $1/r^2$ با فاصله کوچك می‌شود. مساحت سطح S با r^2 متناسب است. بنابراین، سهم انتگرال سطحی در معادلهٔ (۱۴.۱۲) با ازدیاد r به نسبت $1/r$ و یا تندتر نقصان می‌یابد، و وقتی S به سمت بینهایت میل کند، این انتگرال صفر می‌شود.

باحذف انتگرال‌سطحی درمعادلهٔ (۱۴.۱۲) وبسط انتگرال‌حجمی برروی تمام‌فضا، نتیجه می گیریم که

$$U=\frac{1}{2}\int_V \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\,dv \qquad (۱۵.۱۲)$$

دراین رابطه $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$ منظور شده است. این نتیجه‌کاملا مشابه انرژی الکتروستاتیکی، یعنی معادلهٔ (۱۷.۶)، است. معادلهٔ (۱۵.۱۲) براساس معادلهٔ (۶.۱۲) به‌دست آمد، بنابراین این معادله به دستگاههایی محدود می‌شود که شامل محیطهای خطی مغناطیسی باشند.

بادلایلی مشابه آنچه دربخش ۳.۶ آمد، به‌مفهوم چگالی انرژی درمیدان مغناطیسی می‌رسیم، یعنی به

$$u=\frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B} \qquad (۱۶.۱۲ \text{ الف})$$

که برای اجسام مغناطیسی همسانگرد وخطی به‌صورت زیر درمی‌آید

$$u=\frac{1}{2}\mu H^2=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} \qquad (۱۶.۱۲ \text{ ب})$$

۳.۱۲ نیروها و گشتاور نیروهای وارد برمدارهای صلب

تااینجا چندین عبارت ریاضی مختلف برای‌انرژی مغناطیسی دستگاهی متشکل ازمدارهای جریان به‌دست آوردیم. این عبارتها با معادلات (۶.۱۲)، (۷.۱۲)، و (۱۵.۱۲) بیان شده‌اند. حال نشان خواهیم دادکه چگونه می‌توان نیرو، یاگشتاور نیروی وارد بریکی‌از اجزای چنین دستگاهی را بادانستن انرژی مغناطیسی به‌دست آورد.

فرض‌کنیدیکی ازقسمتهای دستگاه، بدون تغییرشکل، تحت تأثیرنیروهای مغناطیسی وارد برآن به‌اندازهٔ $d\mathbf{r}$ جابه‌جا شود، درحالی‌که همهٔ جریانها ثابت بمانند. کار مکانیکی انجام شده توسط نیروی $\mathbf{F}$ وارد بردستگاه، مانند معادلهٔ (۳۲.۶)، عبارت است از

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad (۱۷.۱۲)$$

مانند معادلهٔ (۳۷.۶)، دراین شرایط کار ازدو قسمت تشکیل شده است

$$dW = dW_b - dU \qquad (۱۸.۱۲)$$

که درآن dU تغییر انرژی مغناطیسی دستگاه، و dW_b کار انجام‌شده توسط منابع‌خارجی انرژی علیه emfهای القایی است برای ثابت نگهداشتن جریانها.

قبل ازآنکه بتوانیم برای پیداکردن رابطه‌ای‌که U را به‌نیروی وارد برقسمتی از دستگاه مربوط می‌سازد قدم دیگری برداریم، لازم است‌که dW_b را از معادلهٔ (۱۸.۱۲) حذف‌کنیم. این‌کار را برای دستگاهی متشکل از مدارهای صلب‌که در محیطهای خطی مغناطیسی قرارگرفته‌اند به‌آسانی می‌توان انجام‌داد. هرگاه وضع هندسی دستگاه را تغییر دهیم بی‌آنکه هیچ جریانی تغییرکند، آنگاه برطبق معادلهٔ (۶.۱۲)

$$dU = \frac{1}{2} \sum_i I_i \, d\Phi_i$$

اما، ازمعادلهٔ (۴.۱۲) داریم

$$dW_b = \sum_i I_i \, d\Phi_i$$

بنابراین

$$dW_b = 2 \, dU \qquad (۱۹.۱۲)$$

بااستفاده ازاین معادله برای حذف dW_b از معادلهٔ (۱۸.۱۲)، و پس از ترکیب نتیجهٔ حاصل بامعادلهٔ (۱۷.۱۲)، نتیجهٔ زیررا به‌دست می‌آوریم

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

یا

$$\mathbf{F}=\nabla U$$

$$F_x=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_I \qquad (۲۰.۱۲)$$

یعنی نیروی واردبرمدار برابر است باشیب انرژی مغناطیسی، وقتی I ثابت نگه داشته‌شود.

هرگاه مدار مورد نظر طوری مقید باشد که فقط حرکتی دورانی حول محوری انجام دهد، آنگاه می‌توان به‌جای معادلهٔ (۱۷.۱۲) از معادلهٔ زیر استفاده کرد

$$dW=\vec{\tau}\cdot d\vec{\theta}=\tau_۱\, d\theta_۱+\tau_۲\, d\theta_۲+\tau_۳\, d\theta_۳$$

که درآن $\vec{\tau}$ گشتاورنیروی مغناطیسی وارد برمدار و $d\vec{\theta}$ تغییر مکان زاویه‌ای است. تحت این شرایط داریم

$$\tau_۱=\left(\frac{\partial U}{\partial \theta_۱}\right)_I \qquad (۲۱.۱۲)$$

وبه‌همین‌ترتیب برای‌بقیهٔ مؤلفه‌ها. نتایج (۲۰.۱۲) و (۲۱.۱۲) برای جریان‌ثابت به‌مورد الکتروستاتیکی باپتانسیل ثابت شباهت دارند. درآنجا انجام کارتوسط باتری لازم بود تا پتانسیلها ثابت نگه داشته شوند.

دربعضی موارد جالب دیگرمی‌توان‌شارگذرنده‌ازمدارها را ثابت درنظر گرفت. در این صورت مطابق معادلهٔ (۴.۱۲)، $dW_b=۰$، وبنابراین می‌توان دستگاه را منزوی‌فرض کرد.[۱] درنتیجه

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=dW=-dU$$

$$F_x=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_\Phi \qquad (۲۲.۱۲)$$

$$\tau_۱=-\left(\frac{\partial U}{\partial \theta_۱}\right)_\Phi \qquad (۲۳.۱۲)$$

درست نظیرمورد الکتروستاتیکی، برای اینکه بتوانیم ازروش انرژی استفاده کنیم لازم

---

۱. دریك مدارمعمولی‌بازهم به‌یك باتری نیاز داریم تااتلاف توان $I^۲R$ را تأمین‌کند، اما ما این اتلاف را نادیده می‌گیریم. اگرسیمها ابررسانا باشند ($R=۰$)، دستگاه را می‌توان واقعاً منزوی انگاشت.

است که U را به صورت تحلیلی بیان کنیم، یعنی، بستگی خاص U به‌مختصات متغیر (x، y، z، θ_1، θ_2 یا θ_3) باید داده شده باشد. در این صورت روش انرژی در محاسبهٔ نیروها و گشتاور نیروها روشی بسیار مؤثرخواهد بود.

باذکردومثال، کاربرد این روش را نشان می‌دهیم. تمرینهای دیگری ازاین قبیل در مسائل آخرفصل آمده است. درمثال اول، نیروی بین دومدار صلب حامل جریانهای ثابت رامحاسبه‌می کنیم. انرژی مغناطیسی بامعادلهٔ (۸.۱۲) داده‌شده است، ونیروی واردبرمدار ۲ عبارت است از

$$\mathbf{F}_2 = \nabla_2 U = I_1 I_2 \nabla_2 M$$

دراینجاالقای متقابل M طوری بایدنوشته شودکه بستگی آن به $\mathbf{r}_2$ مشخص باشد.فرمول نویمن، معادلهٔ (۳۵.۱۱) این بستگی را صریحاً نشان می‌دهد، پس می‌توان نوشت

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{c_1} \oint_{c_2} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2) \nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{c_1} \oint_{c_2} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2) \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \qquad (۲۴.۱۲)$$

این رابطه تقارن مورد نظر، یعنی $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$، را به‌وضوح نشان می‌دهد. اما قبلا نیز رابطه‌ای‌برای نیروی بین‌دومدار،معادلهٔ (۲۵.۸)، داشتیم که باآنچه‌دربالا به‌دست‌آوردیم ظاهراً فرق می کند. در واقع این دو رابطه معادل‌اند و می‌توان صحت این موضوع را به آسانی بررسی کرد. ضرب سه گانهٔ موجود در انتگرالدهٔ معادلهٔ (۲۵.۸) را بسط می‌دهیم

$$d\mathbf{l}_2 \times [d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] = d\mathbf{l}_1 [d\mathbf{l}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)$$

انتگرالی که شامل جملهٔ آخردرسمت راست است بامعادلهٔ (۲۴.۱۲) یکی‌است؛ انتگرالی راکه شامل جملهٔ اول است می‌توان چنین نوشت

$$\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{c_1} d\mathbf{l}_1 \oint_{c_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \qquad (۲۵.۱۲)$$

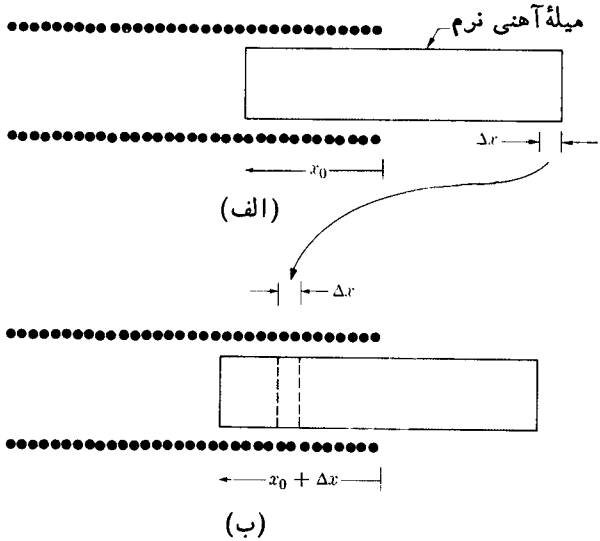
اما $d\mathbf{l}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ برابر است با حاصلضرب $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ در تصویر $d\mathbf{l}_2$ برروی بردار $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. اگر $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ را به r_{21} نشان دهیم ، آن وقت تصویر $d\mathbf{l}_2$ همان dr_{21} است. انتگرال برروی C_2 را می‌توان برای مقدار ثابت $d\mathbf{l}_1$ حساب کرد

$$\oint_{C_2} \frac{dr_{21}}{r_{21}^2} = -\frac{1}{r_{21}}\Big|_a^a$$

حدود بالا و پایین انتگرال یکی است، زیرا مدار بسته است. پس رابطهٔ (۲۵.۱۲) صفر می‌شود، ومعادلهٔ (۲۴.۱۲) هم‌ارز است بامعادلهٔ (۲۵.۸).

به‌عنوان دومین مثال، سیملولهٔ طویلی به‌طول l که N دور سیم‌پیچ دارد وجریان I ازآن می‌گذرد را درنظرمی‌گیریم. میلهٔ آهنی نازکی با تراوایی ثابت μ وسطح مقطع A را درامتداد محور سیملوله واردآن می‌کنیم. چنانچه میله را بیرون بکشیم تاجایی که تقریباً نیمی ازطول آن‌درسیملوله باقی بماند (شکل ۱.۱۲ الف)، نیرویی که می‌کوشدمیله را به‌داخل سیملوله برگرداند را به‌طورتقریب محاسبه کنید.

حل: چنانچه اثرهای لبه‌ای منظور شود،ساختارمیدان مغناطیسی مربوط به‌این مسئله بسیار بغرنج است. اما خوشبختانه احتیاجی به‌پیدا کردن تمامی انرژی مغناطیسی دستگاه نیست، بلکه فقط محاسبهٔ تفاوت انرژی برای دو پیکربندی دستگاه که در شکل ۱.۱۲ (الف) و (ب) نشان داده شده‌اند، کافی است. ساختارمیدان در نقاط دور از دو انتهای میله و دو انتهای سیملوله نسبتاً یکنواخت است. تفاوت اصلی میان پیکربندیهای (الف) و (ب) دراین است که به‌طورمؤثر به‌اندازهٔ طول Δx از انتهای راست میله (که در خارج میدان قرار دارد) به‌ناحیهٔ میدان یکنواخت داخلی سیملوله وارد می‌شود، ودرجایی دوراز



شکل ۱.۱۲ نیروی وارد برمیله‌ای ازآهن نرم‌که وارد یك سیملوله شده‌است (بااستفاده ازروش انرژی).

تأثیر وامغناطندهٔ قطب آهنربا قرارمی گیرد. لذا، چون $\mathbf{H}$ درناحیهٔ Δx تقریباً طولی است، وچون مؤلفهٔ مماسی $\mathbf{H}$ درمرز استوانه‌ای میله پیوسته است، از رابطهٔ زیراستفاده می کنیم

$$U=\frac{1}{2}\int \mu H^2\, dv$$

دراین رابطه $\mathbf{H}$ در داخل وخارج ازمیله ثابت است زیرا I ثابت است. در نتیجه داریم

$$U(x_0+\Delta x)\approx U(x_0)+\frac{1}{2}\int_{A\Delta x}(\mu-\mu_0)H^2\, dv$$

$$=U(x_0)+\frac{1}{2}(\mu-\mu_0)\frac{N^2I^2}{l^2}A\Delta x$$

وبنابر معادلهٔ (۲۰.۱۲)، مؤلفهٔ x نیرو درجهت افزایش x_0 برابراست با

$$F_x\approx\frac{1}{2}(\mu-\mu_0)\frac{N^2I^2A}{l^2}=\frac{1}{2}\chi_m\mu_0 H^2 A \qquad (۲۶.۱۲)$$

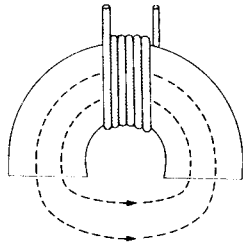
درمسئلهٔ ۷.۱۲، مثالی با Φی ثابت بررسی می‌شود.

۴.۱۲* اتلاف پسماند

در بخشهای گذشته بحث خود را به‌دستگاههای مغناطیسی برگشت‌پذیر، و در اکثر موارد به‌دستگاههای خطی، محدودکردیم. اینك می‌خواهیم دربارهٔ تغییرات انرژی دردستگاههای حاوی موادآهنربای دائم، یعنی دستگاههایی‌که پسماند در آنها نقش مؤثری ایفا می کند، صحبت کنیم. یك مدار الکتریکی به‌صورت پیچه‌ای مرکب از N دور نزدیك به‌هم را در نظرمی گیریم که یك‌جسم فرومغناطیسی را احاطه کرده‌است (شکل ۲.۱۲). اگرپیچه به‌یك چشمهٔ انرژی خارجی متصل شود، کاری که درمقابل emf القایی در پیچه انجام می گیرد بامعادلهٔ (۳.۱۲) داده می‌شود. ولی درمعادلهٔ (۳.۱۲) تغییرشار $d\Phi$ عبارت است ازکل تغییرشار از درون مدار. برای منظورفعلی مناسب این است که نماد $d\Phi$ را برای نشان دادن تغییرشار از درون یك تك دور ازپیچه به‌کاربریم. لذا، بافرض اینکه شارعبوری از تمام دورها یکی است، داریم

$$\delta W_b=NI\,\delta\Phi \qquad (۳.۱۲\ \text{الف})$$

حال جسم فرومغناطیسی را به‌عنوان جزئی ازیك مدارمغناطیسی درنظر می گیریم. دراین



شکل ۲.۱۲ یك جسم فرومغناطیسی که قسمتی ازیك مدارمغناطیسی را تشکیل می‌دهد.

صورت NI را می‌توان بـا $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$، به‌دوریك مسیرشار نوعی تعویض کرد، ومعادلهٔ (۳.۱۲ الف) را به‌شکل زیرنوشت[1]

$$\delta W_b = \oint \delta\Phi \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint A\, \delta B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

که درآن A سطح مقطع مربوط به‌عنصرطولی $d\mathbf{l}$ ازمدارمغناطیسی است. چون $d\mathbf{l}$ همیشه برمسیرشارمماس است، معادلهٔ بالا را می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$\delta W_b = \oint A\, \delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\, dl = \int_V \delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\, dv \qquad (۲۷.۱۲)$$

که درآن V حجم مدارمغناطیسی است، یعنی، ناحیه‌ای ازفضا که میدان مغناطیسی درآنجا صفر نیست.

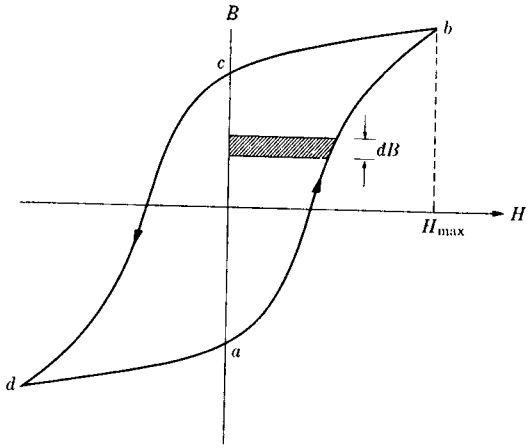
اگر جسم فرومغناطیسی موجود در دستگاه خاصیت مغنـاطیسی برگشت‌پذیر داشته باشد، می‌توان ازمعادلهٔ (۲۷.۱۲)، از $\mathbf{B} = 0$ تا مقدارنهایی‌آن، انتگرال گرفت تاانرژی

---

۱. می‌توان تحلیلی راکه دراینجا به‌کاررفته‌است باجانشین‌کردن مدارمغناطیسی به‌وسیلهٔ تعداد زیادی‌مسیرهای‌شارمغناطیسی (مدارهای‌مغناطیسی‌موازی) باطولهای مختلف، برپایهٔ‌استوارتری قرار داد. دراین صورت معادلهٔ (۳.۱۲الف) به‌شکل زیردرمی‌آید

$$\delta W_b = NI \sum_j \delta\Phi_j = \sum_j \oint_j \delta\Phi_j \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}_j$$

که در آن $\delta\Phi_j$ عبارت است از تغییرشار مربوط به یکی ازاین مسیرها. نتیجهٔ نهایی، معـادلهٔ (۲۷.۱۲)، تغییر نمی‌کند.



شکل ۳.۱۲ کارانجام شده در واحد حجم درطی یك چرخه دریك مادهٔ فرومغناطیسی.

مغناطیسی دستگاه به‌دست‌آید. برای مواد خطی، انرژی به‌دست آمده با انرژی بیان شده توسط معادلهٔ (۱۵.۱۲) یکی است. ولی معادلهٔ (۲۷.۱۲) ازاین خیلی کلیتر است؛ این معادله کارانجام شده برروی دستگاه مغناطیسی را، حتی درمواردی‌که پسماند وجود داشته باشد، به‌درستی پیشگویی می‌کند.

بنابرمعادلهٔ (۲۷.۱۲)، هرتغییری در ساختارمیدان مغناطیسی مستلزم مقدار

$$dw_b = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \qquad (۲۸.۱۲)$$

کار درواحد حجم مادهٔ مغناطیسی (یا خلاء) دردستگاه است. یك حالت جالب توجه آن است که ماده یك چرخه را طی‌کند، مثل وقتی‌که پیچه‌ای‌که جسم‌را احاطه‌کرده است‌تحت تأثیر یك جریان متناوب قرارمی‌گیرد. در یك چرخه، شدت مغناطیسی H (برای یك نقطهٔ نوعی در جسم نمونه) از صفر شروع می‌شود، به بیشینهٔ خود H_{max} افزایش می‌یابد، به H_{max} — کاهش‌می‌یابد، وسپس به‌صفربازمی‌گردد. میدان مغناطیسی B نیز تغییرات‌مشابهی را نشان می‌دهد، بااین تفاوت‌که برای یك فرومغناطیس نوعی نسبت به H عقب افتادگی خواهد داشت ، و در نتیجه یك منحنی پسماند را طی می‌کند (شکل ۳.۱۲). کار ورودی لازم (در واحد حجم) برای تغییر میدان مغناطیسی برروی منحنی پسماند ازنقطهٔ a به‌نقطهٔ b، یعنی

$$(w_b)_{ab} = \int_a^b H\, dB$$

درست مساوی است با مساحت سطح محصور بین منحنی پسماند در قسمت ab و محور B. این مساحت مثبت است، زیرا H و dB هر دو مثبت‌اند. سهم $(w_b)_{bc}$ نیز مساوی مساحت سطح بین قسمت دیگری‌ازمنحنی پسماند (bc) ومحور B است، ولی باید منفی به‌حساب آید، زیرا که H و dB دارای جهات مخالف‌اند. مطالب مشابهی می‌توان در مورد $(w_b)_{cd}$ و $(w_b)_{da}$ بیان‌کرد. لذا درطی یك چرخه به‌دور حلقهٔ پسماند، کار لازم در واحد حجم عبارت است از

$$w_b = \oint H\, dB \qquad (۲۹.۱۲)$$

که مساوی است با مساحت محصور به‌وسیلهٔ حلقهٔ پسماند.

درپایان یك چرخهٔ‌کامل، حالت مغناطیسی جسم همان است‌که درشروع چرخه بود؛ بنابراین «انرژی مغناطیسی» جسم به‌همان اندازهٔ قبلی آن‌است. پس واضح است‌که معادلهٔ (۲۹.۱۲) معرف اتلاف انرژی‌است. این انرژی ازدست‌رفته به‌صورت گرما ظاهرمی‌شود، و ازتغییرات برگشت‌ناپذیر درساختارحوزه‌ای ماده نتیجه می‌شود. اتلاف پسماند عامل مهمی درمدارهای دارای جریان متناوب محسوب می‌شود. معادلهٔ (۲۹.۱۲) معرف اتلاف انرژی درواحد حجم درهر چرخه است؛ پس‌اتلاف انرژی درواحد زمان مستقیماً بافرکانس جریان متناوب متناسب است.

طبق معادلهٔ (۲۸.۱۲)، کار لازم جهت تغییر میدان مغناطیسی در واحد حجم ماده برابر است با

$$dw_b = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \mu_0 H\, dH + \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} \qquad (۲۸.۱۲ \text{ الف})$$

گاهی مناسب است درمورد جملهٔ $\mu_0 H\, dH$ (کارانجام شده برروی خلأ) چنین بیندیشیم که، چه‌ماده‌ای درکارباشد وچه نباشد، وجودخواهد داشت. بااین دید، جملهٔ $\mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}$ کار ویژهٔ انجام شده برروی ماده خواهد بود. این روشی است که معمولا در کتب ترمودینامیك به‌کار می‌رود، ومبنای بحث فرایندهایی است نظیر «سردسازی مغناطیسی».

چون انتگرال $H d H$ در یك چرخهٔ کامل صفر می‌شود، معادلهٔ (۲۹.۱۲) معادل است با

$$w_b = \mu_0 \oint H\, dM \qquad (۲۹.۱۲ \text{ الف})$$

با استفاده از $d(MH) \equiv H\, dM + M\, dH$، معادلهٔ بالا را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$w_b = -\mu_0 \oint M\, dH \qquad (۲۹.۱۲ \text{ ب})$$

۵.۱۲ خلاصهٔ مطالب

کاری که یك عامل خارجی، نظیر باتری، برای تغییر میدان مغناطیسی دستگاهی متشکل از مدارهای جریان انجام می‌دهد برابراست با

$$dW_b = \sum_{i=1}^{n} I_i d\Phi_i$$

(در اینجاکاری‌راکه‌برای تأمین اتلاف گرمای‌ژول‌درمدارهای‌مقاومت‌دار انجام می‌شود، منظورنکرده‌ایم.) انرژی پتانسیل مغناطوستاتیکی دستگاهی متشکل از مدارهای جریان و محیطهای مغناطیسی خطی عبارت است از

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} I_i \Phi_i$$

که درآن

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} I_j$$

برای یك توزیع جریان پیوسته درمحیطهای خطی، انرژی مغناطیسی عبارت است از

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}\, dv$$

که‌درآن پتانسیل‌برداری $\mathbf{A}$ پتانسیلی‌است که چگالی جریان $\mathbf{J}$ تولید می‌کند. باانتگرال‌گیری پاره‌ای، انرژی درمواد مغناطیسی خطی به‌یك انتگرال برروی چگالی انرژی‌میدان مغناطیسی تبدیل می‌شود

$$U = \int u\, dv$$

که درآن چگالی انرژی برابراست با

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

۱. برای یك تك مدار

$$U = \frac{1}{2} I \Phi$$

با

$$\Phi = LI$$

۲. نیروی مغناطیسی وارد برقسمتی ازیك دستگاه منزوی، باشار ثابت ازدرون هر مدار، برابراست بامنفی شیب انرژی مغناطوستاتیکی

$$F_x = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_\Phi$$

اگر دستگـاه منزوی نباشد، ولی در عوض جریان در هرمدار توسط یك عامل خـارجی (باتری) ثابت نگه داشته شود، نیرو بارابطهٔ زیرداده می‌شود

$$F_x = +\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_I$$

۳. باحضور مادهٔ غیرخطی، و وجود پسماند، داریم

$$dw_b = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$$

دریك چرخهٔ کامل ازیك فرایند چرخه‌ای، داریم

$$w_b = \oint H\, dB = \mu_\circ \oint H\, dM = -\mu_\circ \oint M\, dH$$

مسائل

۱.۱۲ یك مدار جریان (که لزوماً صلب نیست) در میدان مغنـاطیسی مفروضی قرار دارد. نیروی مغناطیسی وارد برهرعنصر $d\mathbf{l}$ ازمداربرابراست با $I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$. اگرمدارتحت‌تأثیر نیروهای مغناطیسی وارد برآن به‌حرکت درآید به‌طوری که هرعنصربه‌اندازهٔ $\delta\mathbf{r}$ جابه‌جا شود وجریان I در عین حال ثـابت نگه داشته شود، بـامحاسبهٔ مستقیم نشان دهیدکه کار مکانیکی انجام شده توسط نیرو برابر است با $\delta W = I\delta\Phi$ که درآن $\delta\Phi$ شار اضـافه‌ای است که ازدرون مدارمی گذرد.

۲.۱۲ یك دسته مدار جریان‌که بایکدیگر برهم‌کنش دارند، دریك محیط مغناطیسی‌خطی قراردارند. تمام مدارها بجز مدار ۱ ثابت نگه داشته می‌شوند، ولی مدار ۱ می‌تواندمثل یك جسم صلب حرکت کند. تمـام جریانها توسط باتریهـایی ثابت نگه داشته می‌شوند.

با ترکیب معادلات (۴.۱۲)، (۶.۱۲) و (۸.۱۲) نشان دهید که کار مکانیکی انجام شده توسط مدار متحرك برابر است با $dW = I_1\, d\Phi_1$ که $d\Phi_1$ تغییر شار درمدار ۱ است.

۳.۱۲ دو مدار جریان که با یکدیگر برهم‌کنش دارند با القاهای $L_1 = \beta I_1^s$ ، $L_2 = \beta I_2^s$ و $M_{12} = M_{21} = \beta I_1^{s/2} I_2^{s/2}$ مشخص می‌شوند، که در آنها β و s ثابت‌اند. این دستگاه یك دستگاه مغناطیسی برگشت پذیر است ولی خطی نیست. انرژی مغناطیسی دستگاه را برحسب جریانهای نهایی I_1 و I_2 محاسبه کنید. این کار را به دو روش انجام دهید: اول، جریانها را باهم به‌مقادیر نهایی‌شان ببرید؛ دوم در حالی که I'_2 را برابر با صفر نگه می‌دارید I'_1 را به مقدار نهایی آن ببرید، و سپس I'_2 را تغییر دهید.

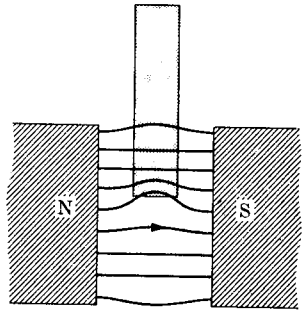
۴.۱۲ مداری به‌شکل یك حلقهٔ دایره‌ای از سیم به شعاع b در مرکز حلقهٔ بزرگتری به‌شعاع a قرار گرفته است، و $b \ll a$. مدار کوچکتر طوری نصب شده است که می‌تواند حول یکی از قطرهایش که درصفحهٔ مدار بزرگتر واقع است بچرخد. از این مدارها جریانهای پایای I_b و I_a می‌گذرند. اگر زاویهٔ بین بردارهای عمود بر دو مدار θ باشد، گشتاور نیروی وارد برمدار چرخنده را پیدا کنید. جهت این گشتاور وقتی که جهات دوران I_b و I_a یکسان باشند، چیست؟

***۵.۱۲** یك آهنربای الکتریکی به‌شکل U و به‌طول l، که فاصلهٔ دوقطب آن مساوی d است، دارای تراوایی μ، ومقطع مربعی به‌مساحت A است. این آهنربا N دور سیم‌پیچ حامل جریان I دارد. قطبهای این آهنربا باچه نیرویی میله‌ای ازهمان جنس و همان مقطع را می‌توانند نگه دارند؟

۶.۱۲ یك آهنربای دائم بامغناطش ثابت، ومداری که به یك باتری متصل است، تشکیل یك دستگاه منزوی را می‌دهند. فرض می‌کنیم مدار نسبت به‌آهنربا حرکت‌می‌کند،در عین حال جریان درون مدار ثابت نگه داشته می‌شود. کارمکانیکی انجام شده به‌وسیلهٔ مدار در مسئلهٔ ۱.۱۲ داده‌شده است. چه نتیجه‌ای دربارهٔ تغییر انرژی مغناطیسی این دستگاه می‌توانید بگیرید؟

۷.۱۲ میدان مغناطیسی بین دوقطب یك آهنربای الکتریکی نسبتاً یکنواخت است و در مقدار ثابت $\mathbf{B}_0$ نگه داشته می‌شود. یك برهٔ پارا مغناطیسی که فقط می‌تواند به‌طورعمودی حرکت کند، مطابق شکل ۴.۱۲، دراین میدان گذاشته می‌شود. پذیرفتاری میله χ_m، وسطح مقطع آن A است. (الف) نیروی وارد بر بره را محاسبه کنید. (ب) مقدار عددی نیرو را چنانچه جنس میله از تیتانیوم باشد پیدا کنید؛ $A = 1\,\mathrm{cm}^2$ و $B_0 = 0.25\,\mathrm{T}$.

***۸.۱۲** مطابق نتیجهٔ مسئلهٔ ۱.۱۲، نیروی وارد بریك مدارجریان دریك میدان مغناطیسی مفروض بارابطهٔ $\mathbf{F} = I\nabla\Phi$ داده می‌شود. اگرمدارخیلی کوچك باشد، میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ برروی سطح محصور به‌وسیلهٔ مدار را می‌توان ثابت فرض کرد؛ به‌علاوه، خود مدار را نیز



شکل ۴.۱۲ یك برهٔ پارامغناطیسی که بین صفحات دو قطب یك آهنربا قرار داده می‌شود.

می‌توان با گشتاور دوقطبی مغناطیسی‌اش $\mathbf{m}$ مشخص کرد. نشان دهید که وقتی میدان مغناطیسی مفروض درمحل دوقطبی چشمه‌ای نداشته باشد (یعنی $\mathbf{J}$ و $\mathbf{J}_M$ صفر باشد)، نیروی وارد بر دو قطبی عبارت است از

$$\mathbf{F}=(\mathbf{m}\cdot\nabla)\mathbf{B}$$

۹.۱۲ مدار صلبی که شامل یك دور حلقهٔ سیم است، در یك میدان مغناطیسی شعاعی و متناسب باعکس مجذور فاصله، $\mathbf{B}=K\mathbf{r}/r^3$، قرار دارد. نشان دهید نیروی وارد برمدار برابر است با $\mathbf{F}=KI\nabla\Omega$، که در آن Ω زاویهٔ فضایی است که توسط مدار از مرکز میدان در بر گرفته می‌شود، و I شدت جریان درمدار است.

۱۰.۱۲ مرکز یك مدار مسطح مستدیر به‌شعاع R که دارای یك دور سیم‌پیچ است روی محور x و به‌فاصلهٔ x ازمبدأ قرار دارد. مدار حامل جریان I است و جهت مثبت عمود برصفحهٔ آن درجهت x — است. نیروی وارد برمدار ازطرف یك میدان شعاعی و واگرا ازمرکز، یعنی $\mathbf{B}=K\mathbf{r}/r^3$، را حساب کنید.

۱۱.۱۲ یك سیملولهٔ بسیارطویل، با N/l دور سیم‌پیچ درواحد طول و به‌شعاع R را در نظر بگیرید که میدان در داخل آن تقریباً یکنواخت و در خارج صفراست. نیروی شعاعی وارد بریك دور از سیم‌پیچ، درواحد طول محیط، را ازروی انرژی مغناطیسی پیدا کنید. (الف) فرض کنید که جریان I توسط یك باتری ثابت نگه‌داشته شود. (ب) با فرض اینکه شارثابت بماند ودستگاه منزوی باشد (با سیم‌پیچهای ابررسانا) محاسبات را تکرار کنید.

۱۲.۱۲ مثال شکل ۱.۱۲ را برای انرژی مغناطیسی به‌صورت $U=1/2LI^2$ حل کنید. دراینجا $L=L(x_0)$ عبارت است از ضریب خودالقای سیملوله وقتی میلهٔ آهنی تا فاصلهٔ

x_0 به‌درون سیملوله وارد شده باشد. فرض کنید که قطرمیله تقریباً به‌بزرگی قطر سیملوله باشد، وهردو رابه‌قدری طویل فرض‌کنیدکه اثرهای انتهایی قابل چشمپوشی باشند.

۱۳.۱۲ برای چنبرهٔ مسئلهٔ ۱۰.۱۱ نیروی شعاعی وارد برپیچه را وقتی که حامل جریان I است پیدا کنید. آیاگرایش این نیرو به‌منبسط کردن پیچه است یا به‌تنگ‌کردن آن؟

۱۴.۱۲ نیروی بین سیم مستقیم ومدار مربعی شکل مسئلهٔ ۱۵.۱۱ را، وقتی جریانها I_1 و I_2 هستند، پیدا کنید.

۱۵.۱۲ دومدار ابررسانای منزوی‌که جریانهایی ازآنها می‌گذرد، طوری قرارگرفته‌اند که القای متقابلشان برابر باصفر است. اینك‌آنها را حرکت می‌دهیم به‌طوری که القای متقابلشان برابر M شود. اگرمدارهایکسان‌باشند وجریان اولیهٔ هردو I_0 باشد، جریانهای نهایی I را پیدا کنید. خودالقای هرمدار L است.

۱۶.۱۲ اگر V حجم تمامی فضا باشد، وچنانچه میدانها تنها توسط‌آهنرباها تولید شده باشند (یعنی‌جریانهای‌انتقالی‌وجودنداشته‌باشند)، ثابت‌کنیدکه $\frac{1}{2}\int_V \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\,dv = 0$ آیا انرژی مغناطیسی برابر باصفر است؟

۱۷.۱۲ مساحت محصوربین‌دومنحنی پسماند شکل ۷.۹ راتخمیناً تعیین کنید وتوان‌اتلافی ناشی از پسماند را در واحد حجم برای این مواد، به‌هنگام کار باجریان متناوب ۶۰ Hz، محاسبه‌کنید.

۱۸.۱۲ هستهٔ آرمیچریك مولد ازآهنی ساخته شده است‌که حلقهٔ پسماند متوسط‌آن تحت شرایط‌کاری، دارای مساحتی برابر با ۲۰۰۰ ژول برمترمکعب است. هسته استوانه‌ای است به‌طول ۰٫۴ متر وقطر ۰٫۱۵ متر. اگرآرمیچرباه ۱۸۰۰ دور دردقیقه بچرخد، آهنگ تولید گرما درهسته را محاسبه‌کنید.

۱۹.۱۲ یك مدارجریان درمیدان مغناطیسی مفروضی تحت‌تأثیرنیروهای مغناطیسی‌حرکت می‌کند. کارمکانیکی انجام شده به‌وسیلهٔ مدار در مسئلهٔ ۱.۱۲ داده شده است. حال فرض کنیدکه مدار یك مدار اتمی است وجریان اتمی به‌علت اصول عمومی‌کوانتومی ثابت‌نگه داشته‌شده‌است (توجه‌کنیدکه‌ازتغییرجزئی جریان به‌علت اثردیامغناطیس صرفنظرمی‌کنیم). تغییرانرژی مغناطیسی مدارچقدراست؟ نتیجهٔ این مسئله اساس انرژی دوقطبی مغناطیسی در محاسبات بخش ۳.۱۰ است.

۱۳

جریانهای کند تغییر

۱.۱۳ مقدمه

درفصل ۷ با ایدهٔ مدار الکتریکی آشنا شدیم وجریانهایی که دراین‌مدارها به‌علت ولتاژهای اعمال شدهٔ ثابت‌ایجاد می‌شد را تحلیل کردیم. اکنون می‌خواهیم این ایده‌هارا طوری‌بسط بدهیم که ولتاژهای کند تغییر و جریانهای کندتغییرحاصل ازآنها را نیز دربربگیرد. برای آنکه به‌طور صحیح درك کنیم منظور از «کندتغییر» چیست، باید معادلات ماکسول[1] را به‌کارببریم، اگرچه ایده‌های کلی‌را می‌توان بدون توسل به‌جزئیات این‌معادلات درك کرد.

برای تغییرات سینوسی ولتاژ درمدارهایی که شامل عناصرخطی هستند (واین‌اساس نظریهٔ مقدماتی مدار است) رفتار هر مدار با یك فرکانس ω مشخص می‌شود.[2] یك موج الکترومغناطیسی بااین فرکانس درخلأ دارای طول موج $\lambda = 2\pi c/\omega$ است که در آن c سرعت نوراست. شرط اصلی برای آنکه جریانی راکه ازیك مدار می‌گذرد کند تغییر

---

۱. درفصل ۱۶ معادلات ماکسول به‌تفصیل بحث شده‌است. برای علاقه‌مندان‌می‌ارزد مطالب‌فصل ۱۶ با مطالبی‌که دراین فصل ارائه داده می‌شود ربط داده شوند. در این مفهوم، «کندتغییر» بدان معناست‌که ما ازجریان جابه‌جایی، $\partial \mathbf{D}/\partial t$، که در بخشهای ۱.۱۶ و ۲.۱۶ دربارهٔ آن بحث‌شده چشمپوشی کنیم. پس همان‌طورکه تاکنون فرض شده است داریم $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$.

۲. کمیت ω گاهی فرکانس زاویه‌ای نامیده می‌شود و 2π برابرفرکانس است. به‌کاربردن ω به‌جای $2\pi f$ مزیت قابل ملاحظه‌ای درخیلی ازبخشهای فیزیك دارد؛ به‌ویژه دربحث حاضرتعداد زیادی ازمضربهای، 2π ازمعادلات مداری حذف می‌شوند.

جدول ۱۰۱۳

فرکانس f(Hz)	ω(rad/s)	طول موج λ(m)	طول مدار L(m)
۵۰	۳۱۴	۶×۱۰^{۶}	۶×۱۰^{۵}(۶۰۰ کیلومتر)
$۱۰^{۶}$	$۶٫۲۸\times۱۰^{۶}$	۳۰۰	۳۰
$۱۰^{۸}$	$۶٫۲۸\times۱۰^{۸}$	۳	۰٫۳
$۱۰^{۱۰}$	$۶٫۲۸\times۱۰^{۱۰}$	۰٫۰۳	۰٫۰۰۳

بنامیم این است که مدار مقدار قابل توجهی توان تابش نکند. برقراری این شرط مستلزم آن است که حداکثر بعد خطی سیستم، L، خیلی کوچکتر از طول موج وابسته به‌فرکانس محرك درخلأ باشد، به‌عبارت دیگر

$$\omega \ll \frac{۲\pi c}{L} \quad \text{یا} \quad L \ll \frac{۲\pi c}{\omega} \qquad (۱۰۱۳)$$

اگراین شرط برقرار باشد، برای هر جزء $d\mathbf{l}$ مدار که حامل جریان I است در فاصله‌ای خیلی کمتراز یك طول‌موج، جزء مشابه $d\mathbf{l}$ — وجود دارد که حامل همان جریان است. بنابراین، میدانهایی که این اجزا در فواصلی درحدود چند طول‌موج درتمام جهات تولید می‌کنند یکدیگررا حذف می‌کنند، واین نشان می‌دهد که میدانهای وابسته به‌مدار به‌ناحیه‌ای درنزدیکی مدارمحدود خواهند بود. برای اینکه ببینیم چه محدودیتهای عملی توسط‌معادلهٔ (۱۰۱۳) ایجاد می‌شود، در تهیهٔ جدول ۱۰۱۳ حداکثر بعد خطی مدار $L\sim\lambda/۱۰$ به‌کاربرده شده است. فرکانسهایی که انتخاب شده‌اند عبارت‌اند از: فرکانس برق شهر، فرکانس پایین رادیویی (باند پخش AM)، فرکانس بالای رادیویی (FM وتلویزیون) و فرکانس‌میکروموج. واضح‌است که‌برای‌سه‌فرکانس‌اول مدارهای‌عادی‌شرط‌فوق‌رابرآورده می‌کنند؛ اما، برای‌فرکانس آخرباید مداردرمکعبی به‌ضلع۳میلیمتر ساخته شود، درنتیجه کاربردآن به‌مدارهای مجتمع (IC ها) محدود می‌شود. باید توجه داشت که در۱۰۰ مگا هرتز طول موج و ابعاد مدار در حدود اندازه‌های آزمایشگاهی‌اند، و بنابراین در به‌کار بردن نظریهٔ معمولی مدار دراین فرکانس و فرکانسهای بالاتر باید با مراقبت عمل شود. در بقیهٔ این فصل بدون اینکه صراحتاً تذکر بدهیم، فرض می‌شود که شرط تغییرات کند برقراراست.

۲.۱۳ رفتار گذرا و رفتار حالت پایا

اگر شبکه‌ای از اجزای غیرفعال دفعتاً به‌یك یا چند چشمهٔ ولتاژ وصل شود، جریان برقرار می‌شود. ماهیت ولتاژهای به‌کار رفته هرچه باشد، تغییرات اولیهٔ جریانها نسبت به‌زمان غیر-تناوبی است. ولی، اگر ولتاژها نسبت به‌زمان به‌طور تناوبی تغییر کنند[1]، درآن صورت بعداز گذشتن مدت زمان نسبتاً طولانی ازاتصال ولتاژها ملاحظه خواهدشدکه جریانها نیز نسبت به‌زمان تغییرات تناوبی دارند. (البته جریانها بعد ازگذشت زمان بی‌نهایت، دقیقاً تناوبی خواهندشد، ولی هرگونه تقریب مطلوبی‌را برای تناوبی بودن آنها می‌توانیم باصبر کردن به‌حدکافی، به‌دست‌آوریم.) مناسب است که رفتارمدارهارا بسته به‌اینکه رفتار تناوبی‌مهمتر باشد یا رفتارغیرتناوبی، ازدوجنبه بررسی کنیم. رفتار تناوبی را رفتار حالت پایا و رفتار غیرتناوبی را رفتار گذرا می‌نامیم. درهردو جنبه یك نوع معادلات انتگرال - دیفرانسیلی حاکم است، ولی روشهای مقدماتی که برای حل این دومورد به‌کار می‌روند باهم فرق اساسی دارند. تحلیلی‌که مادراینجا ارائه خواهیم کرد به‌تحلیل مقدماتی حالت گذرا (عمدتاً تحریك توسط ولتاژهای ثابت)، و تحلیل حالت پایا برای تحریکهای سینوسی محدود می‌شود. برای مطالعهٔ جزئیات بیشتر به‌خواننده توصیه می‌شود که به‌کتابهای کلاسیك گیل‌مین، و بود[2]، و به‌کتابهای درسی مهندسی جدیدتر[3] مراجعه کنند.

۳.۱۳ قوانین کیرشهوف

درفصل ۷ قوانین کیرشهوف‌را برای مدارهای جریان مستقیم (dc) معرفی کردیم؛ اکنون این قوانین را باید به‌جریانهای کندتغییرتعمیم دهیم. اولین تعمیم این است که باید توجه کنیم که نه‌تنها مقاومتها، بلکه خازنها والقاگرها نیز به‌عنوان اجزای مدار منظورشوند. بین دوسرهرکدام‌ازاین اجزااختلاف پتانسیلی موجود است که باید درقانون مداری کیرشهوف درنظرگرفته شود. نام «افت - IR» دیگر برای تمام این اختلاف پتانسیلها مناسب نیست، بنابراین نام ولتاژ مخالف را برای مشخص‌کردن اختلاف پتانسیل بین دو سرهر جزء غیر

---

۱. ولتاژ ثابت باید به‌عنوان حالت خاصی از ولتاژ متناوب درنظرگرفته شود، حالتی‌که دورهٔ تناوب آن بی‌نهایت یا فرکانس آن صفراست.

2. E.A. Guillemin, *Communication Networks*, 2 vols., John Wiley & Sons, New York, (1931 and 1935), and H. W. Bode, *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, D. Van Nostrand Co., Princeton. N. J. 1945).

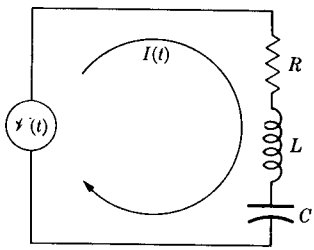
3. N. Balabanian and T.Bickart, *Electrical Network Theory* (New York: Wiley, 1969); and J. B. Murdoch, *Network Theory* (New York: McGraw-Hill, 1970).

فعال مدار به‌کارمی بریم. تعمیم دیگر اینکه باید ملاحظه کرد که هردوقانون کیرشهوف بایددر هرلحظه اززمان برقرارباشند، به‌عبارت دیگر، قوانین کیرشهوف بایدبرای مقادیرلحظه‌ای جریانها، ولتاژهای اعمال شده، و ولتاژهای مخالف، به‌کاررروند. اکنون می‌توانیم قوانین کیرشهوف را به‌صورت زیربیان کنیم

I. جمع جبری جریانهای لحظه‌ای که به‌سمت یك نقطهٔ اتصال جریان دارند، صفراست.

II. جمع‌جبری ولتاژهای اعمال‌شدهٔ لحظه‌ای دریك حلقهٔ بسته مساوی‌است باجمع‌جبری ولتاژهای مخالف درآن حلقه.

مفهوم‌قانون اول روشن‌است: اگرجریانهایی که به‌سمت‌یك‌اتصال جریان‌دارند مثبت‌نامیده شوند درآن صورت جریانهایی را که در جهت مخالف‌اند باید منفی بنامیم، و این قانون می گوید که همان مقدار جریانی که به‌نقطهٔ اتصال وارد می‌شود باید از آن خـارج شود. قانون دوم بیان‌کنندهٔ انتگرال میدان الکتریکی به‌دورحلقه است؛ اما لازم است که قرارداد علامت‌گذاری‌آن روشن شود. قرارداد علامت گذاری‌که دراینجا ما به‌کارمی‌بریم به‌بهترین وجهی باارجاع به‌یك حلقهٔ تنهای ساده، مانند شکل ۱۰۱۳، روشن می‌شود. دراین شکل‌یك ولتاژ اعمال شده، $\mathscr{V}(t)$، نشان داده شده است‌که به‌طورسری به‌مقاومت R، خود القای L، وخازن C متصل است. پیکانی که با $I(t)$ مشخص‌شده درشکل رسم شده است که برای‌نشان دادن‌جهت مثبتی‌است‌که (به‌طوراختیاری) برای‌جریان فرض می‌شود. تمام علامات‌سرانجام نسبت به‌این جهت مشخص می‌شوند. ولتاژ $\mathscr{V}(t)$ درصورتی مثبت است‌که جریانی را که ایجاد می کند درهمان جهت فرض شده حرکت کند. به‌عبارت دیگر، اگرانتهای بالایی در شکل ۱۰۱۳ نسبت به انتهای پایینی‌آن مثبت باشد، $\mathscr{V}(t)$ مثبت است. ولتـاژ مخالف در مقاومت، درست مانند حـالتی‌که جریان مستقیم داریم، مساوی با IR است. اگر dI/dt مثبت باشد در خودالقا emf‌ی‌القامی‌شود که جریانی‌درجهت‌مخالف با جهت فرضی‌جریان I به وجودمی‌آورد، به‌عبارت دیگر، انتهای‌بالایی L باید نسبت به‌انتهای پایینی‌آن مثبت باشد. چون این جهت درمقایسه باجهت I همان جهت IR است، ولتاژ مخالف‌آن درست



شکل ۱۰۱۳ یك مدار متوالی متشکل از اجزای مدار.

مساوی $L(dI/dt)$ است.[1] ولتاژمخالف درخازن بستگی به‌بار روی خازن دارد، که بسته به‌اینکه صفحهٔ بالایی یا پایینی خازن را درنظربگیریم ممکن است مثبت یا منفی باشد.این اشکال را می‌توان با نوشتن معادلهٔ زیر برطرف کرد

$$Q=\int_{t_0}^{t} I(t)\,dt \qquad (۲.۱۳)$$

دراینجا t_0 طوری انتخاب می‌شود که $Q(t_0)$ مساوی صفر باشد. با این‌انتخاب برای Q، بار مثبت Q انتهای بالایی خازن را مثبت می‌کند ودرنتیجه یك ولتاژ مخالف درخازن مساوی $+Q/C$ ایجاد می‌کند. قانون ولتاژ کیرشهوف برای مدارشکل ۱.۱۳ عبارت است از

$$\mathcal{V}(t)=RI+L\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} I\,dt \qquad (۳.۱۳)$$

که نمونه‌ای ازمعادله‌های انتگرال ـ دیفرانسیلی درنظریهٔ مدار است.

۴.۱۳ رفتارگذرای مقدماتی

تنها رفتار گذرایی راکه دراینجا مورد بررسی قرارمی‌دهیم مربوط است به‌اعمال ناگهانی یك ولتاژ ثابت $\mathcal{V}$ به‌شبکه‌ای از مقاومتها، خازنها و القاگرها، اولین مثال در این مورد مدار سادهٔ RL در شکل ۲.۱۳ است. برای این مدار بعد از اینکه کلید S بسته می‌شود معادلهٔ (۳.۱۳) به‌صورت زیردرمی‌آید

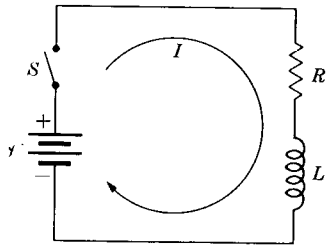
$$\mathcal{V}=RI+L\frac{dI}{dt} \qquad (۴.۱۳)$$

قبل ازاینکه کلیدبسته‌شود جواب معادلهٔ مزبور به‌صورت بدیهی $I=0$ است.معادلهٔ (۴.۱۳) یك معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول باضرایب ثابت است وبنابراین همواره، بایك‌ثابت دلخواه درجواب، می‌توان آن را حل کرد. جواب آن عبارت است از

$$I(t)=\frac{\mathcal{V}}{R}-Ke^{-tR/L} \qquad (۵.۱۳)$$

---

۱. باید به‌این نکته توجه‌داشت‌که emf القایی به‌صورت $-L(dI/dt)$ نوشته می‌شود، ولی‌چون این یك emf است معمولا درمعادله در طرف مقابل ولتاژهای مخالف نوشته می‌شود. بنابراین با نوشتن $+L(dI/dt)$ برای ولتاژ مخالف، هیچ‌گونه تناقضی به‌وجود نمی‌آید.



شکل ۲.۱۳ پاسخ گذرای یك مدار RL. نمودار مدار.

که در آن K ثابتی دلخواه است. چون مدار شامل یك خود القاست که از تغییرات ناگهانی و سریع جریان جلوگیری می‌کند، مقدار جریان درست بعد از اتصال کلید باید مساوی مقدار جریان قبل از اتصال کلید باشد. به‌عبارت دیگر، باید مساوی صفر باشد. اگر در لحظهٔ $t=t_0$ کلید وصل شود، لازم است که

$$\frac{\mathscr{V}}{R}-Ke^{t_0R/L}=0 \qquad (۶.۱۳)$$

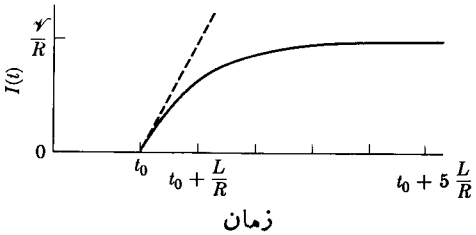
یا

$$K=\frac{\mathscr{V}}{R}e^{t_0R/L} \qquad (۷.۱۳)$$

در نتیجه جواب کامل به‌صورت

$$I(t)=\frac{\mathscr{V}}{R}\left[1-e^{-R(t-t_0)/L}\right] \qquad (۸.۱۳)$$

است که منحنی آن در شکل ۳.۱۳ رسم شده است. چند حقیقت مفید را می‌توان به‌سادگی ازمعادلهٔ (۸.۱۳) و شکل ۳.۱۳ به‌دست آورد. نخست، L/R دارای بعد زمان است و به‌نام ثابت زمانی خوانده می‌شود. چون $1/e \cong 0.368$ است، ثابت زمانی عبارت است ازمدت زمان لازم برای آنکه جریان به 0.632 برابر مقدار نهایی‌اش $(\mathscr{V}/R)$ برسد. درمدت پنج برابر ثابت زمانی جریان به 0.993 برابر مقدار نهایی‌اش می‌رسد که برای سهولت به‌خاطر سپردن آن را ۹۹٪ در نظر می‌گیریم. مقدار اولیهٔ dI/dt درست همان جریان نهایی $\mathscr{V}/R$ تقسیم بر ثابت زمانی L/R است. به‌عبارت دیگر، مقدار مزبور طوری است که اگر افزایش جریان به‌همین میزان ادامه می‌داشت جریان درمدت یك ثابت زمانی به‌مقدار نهایی‌اش می‌رسید. سودمندی حقایق فوق در این است که با کمك آنها به‌سادگی



شکل ۳.۱۳ پاسخ گذرای یك‌مدار RL.

بارسم یك‌منحنی نمایی استاندارد می‌توانیم‌تابع نمایی مسائل سادهٔ حالت‌گذرا راباتقریب یکی‌دودرصد محاسبه کنیم.خیلی‌ازجنبه‌های‌دیگریك‌مدارشامل‌مقاومت‌وخودالقارا می‌توانیم بررسی کنیم، و همین روش را می‌توانیم برای مدارهای شامل خازن و مقاومت نیز به‌کار ببریم. درآخراین فصل مسائل متعددی برای این منظور داده شده است.

دومین مثالی که بررسی می‌شود یك مدار متوالی RLC است که به طور ناگهانی به‌یك ولتاژ ثابت $\mathscr{V}$ متصل می‌شود. چنین مداری درشکل ۴.۱۳، نشان داده شده است. بعد از اتصال کلید، معادلهٔ مناسبی که در مورد این مدار می‌توان نوشت به‌صورت زیر است

$$\mathscr{V}=RI+L\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} I(t)\,dt \qquad (۹.۱۳)$$

که درآن بازهم t_0 زمانی است‌که بار خازن صفراست. برای سهولت فرض می‌شودکه خازن در ابتدا بدون بار است و کلید S در لحظهٔ $t_0=0$ بسته می‌شود. معادلهٔ (۹.۱۳) ممکن است نامأنوس باشد؛ ولی بایك بار مشتق گیری از آن نسبت به‌زمان به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d\mathscr{V}}{dt}=R\frac{dI}{dt}+L\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{I}{C} \qquad (۱۰.۱۳)$$

که یك معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم معمولی باضرایب ثابت است (معادلهٔ نوسانگر هماهنگ) . روش حل چنین معادلاتی مشهور است ، در واقع برای حالت موجود، $d\mathscr{V}/dt=0$، به‌شرط آنکه L و C هیچ‌یك صفرنباشند، جواب آن عبارت است از[1]

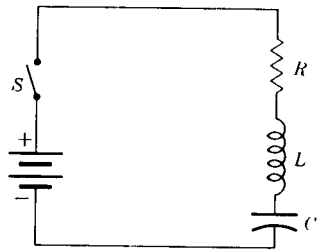
$$I=\{Ae^{i\omega_n t}+Be^{-i\omega_n t}\}\,e^{-Rt/2L} \qquad (۱۱.۱۳)$$

که درآن

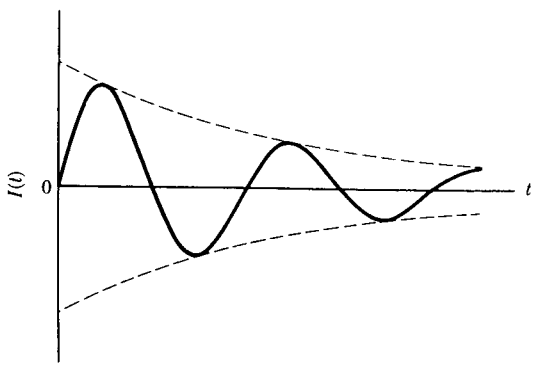
$$\omega_n=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$$

---

۱. دراینجا i عدد موهومی واحد است، یعنی، $i\equiv\sqrt{-1}$.



شکل ۴.۱۳ پاسخ گذرای یك مدار RLC. نمودار مدار.



شکل ۵.۱۳ پاسخ گذرای یك مدار RLC.

اگر L یا C صفر باشد، ابهامی درمعادلهٔ (۱۱.۱۳) به‌وجود می‌آید؛ ولی هنوز معادلهٔ (۱۰.۱۳) را می‌توان برای $L=0$ حل کرد؛ در واقع جواب آن از معادلهٔ (۱۱.۱۳) ساده‌تراست. به‌علاوه، حالت $C=0$ مربوط به‌حالت مدار بازاست که جالب‌توجه نیست. برای کامل کردن این بحث، اگر $C=\infty$ باشد، که مربوط است به‌خارج کردن خازن ازمدار، معادلهٔ(۱۱.۱۳) تبدیل به‌معادلهٔ (۵.۱۳) می‌شود، که اکنون باید دوثابت دلخواه راباتوجه به‌شرایط حدی انتخاب کنیم. البته این مطلب این حقیقت را منعکس می‌کند که وقتی از معادلهٔ (۹.۱۳) به‌معادلهٔ (۱۰.۱۳) می‌رویم تمام اطلاعات راجع به $\mathscr{V}$ را از دست می‌دهیم.

اکنون به‌حل معادلهٔ (۱۱.۱۳) برمی‌گردیم، که بایددرآن ثابتهای A و B را تعیین کنیم. برای اینکه‌جریان مقداری حقیقی باشد، باید B مزدوج مختلط A باشد. چون کلیددر لحظهٔ $t=0$ بسته می‌شود، درلحظهٔ $t=0$ جریان باید صفر باشد، یعنی دو تابع نمایی موهومی باید بایکدیگر ترکیب شوند تا نتیجه یك تابع سینوسی‌شود. بادرنظر گرفتن این ملاحظات

به‌نتیجهٔ زیرمی‌رسیم

$$I(t)=De^{-Rt/2L}\sin\omega_n t \qquad (۱۲.۱۳)$$

که درآن D تنها ثابت حقیقی است که هنوز باید آن را حساب کنیم. این محاسبه باتوجه به‌اینکه در $t=0$ مقادیر Q و I هردو صفرند، انجام‌پذیراست. درنتیجه

$$\mathscr{V}=L\frac{dI}{dt}\bigg|_{t=0} \qquad (۱۳.۱۳)$$

با به‌کاربردن این شرط اولیه، به‌دست می‌آید

$$D=\frac{\mathscr{V}}{\omega_n L}=\frac{\mathscr{V}}{\sqrt{\frac{L}{C}-\frac{R^2}{4}}} \qquad (۱۴.۱۳)$$

اکنون حل معادله‌کامل است. شدت جریان با فرکانس طبیعی

$$\omega_n=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$$

وبادامنه‌ای نوسان می‌کندکه باگذشت زمان کاهش می‌یابد و با $De^{-Rt/2L}$ داده می‌شود. این تغییرات درشکل ۵.۱۳ نشان داده شده است. اگرلحظهٔ بستن کلید، t_0، صفرنباشد، تنها لازم است که t را با $t-t_0$ جایگزین کنیم.

بااین‌مطلب، تحلیل مقدماتی‌حالت گذرا که بنا بود دراینجا عرضه کنیم،کامل‌می‌شود. بقیهٔ این فصل به‌حالت پایای مدارهایی اختصاص داردکه باولتاژهای سینوسی برانگیخته می‌شوند، یعنی حالتی‌که درآن بعد ازگذشتن زمانی نسبتاً طولانی از لحظهٔ اعمال ولتاژِ محرك اطمینان حاصل می‌شودکه اثرهای‌گذرا قابل چشمپوشی‌اند.

۵.۱۳ رفتار حالت پایای یك مدار سادهٔ متوالی

اکنون رفتارمدارشکل ۱.۱۳ را در حالتی‌که به‌ولتاژ محرك زیر وصل شده است بررسی می‌کنیم

$$\mathscr{V}(t)=\mathscr{V}_0\cos\omega t \qquad (۱۵.۱۳)$$

دراینجا ω فرکانس مفروضی است‌که الزاماً برابر با ω_n نیست. به‌سادگی می‌توانستیم این

ولتاژ را به‌جای $\mathscr{V}(t)$ درمعادلهٔ (۱۰.۱۳) یا معادلهٔ (۱۰.۱۳) قراردهیم ومعادلهٔ حاصل را حل کنیم؛ ولی برای حل آن بهتر آن است که توجه کنیم $\mathscr{V}_\circ \cos \omega t$ مساوی قسمت حقیقی $\mathscr{V}_\circ e^{i\omega t}$ است، اگر یك ولتاژمختلط خیالی مثل $\mathscr{V}_1 + i\mathscr{V}_2$ دریك مدار به‌کار رود، جریان حاصل نیزحتماً به‌صورت مختلط $I_1 + iI_2$ خواهدبود (باید توجه داشت که $\mathscr{V}_1$، $\mathscr{V}_2$، I_1، و I_2 در اینجا مقادیر حقیقی هستند). باگذاشتن این مقادیرخیالی در معادلهٔ (۱۰.۱۳) خواهیم داشت

$$\frac{d\mathscr{V}_1}{dt} + i\frac{d\mathscr{V}_2}{dt}$$

$$= \left(L\frac{d^2 I_1}{dt^2} + R\frac{dI_1}{dt} + \frac{I_1}{C}\right) + i\left(L\frac{d^2 I_2}{dt^2} + R\frac{dI_2}{dt} + \frac{I_2}{C}\right) \qquad (۱۶.۱۳)$$

این معادله تنها در موردی صادق است که قسمتهای حقیقی دو طرف آن باهم و قسمتهای موهومی دوطرف آن نیز باهم مساوی باشند. بنابراین I_1 درمعادلهٔ (۱۰.۱۳)، با $d\mathscr{V}_1/dt$ درطرف چپ آن، صدق می‌کند، و I_2 نیزدرهمان معادلهٔ (۱۰.۱۳)، با $d\mathscr{V}_2/dt$ درطرف چپ آن، صدق می‌کند. این بدان معنی است که اگر $\mathscr{V}(t)$ قسمت حقیقی یك تابع مختلط باشد،کافی است معادلهٔ (۱۰.۱۳) را باآن تابع مختلط برای $\mathscr{V}(t)$ حل کنیم وبعد جریان فیزیکی را بابرداشتن قسمت حقیقی جواب مختلط، به‌دست آوریم. برای حالتی که مدار به‌ولتاژ محرك $\mathscr{V}_\circ \cos \omega t$ متصل می‌شود مناسب است که $\mathscr{V}_\circ e^{i\omega t}$ را به‌کار بریم وقسمت حقیقی جواب را برای جریان فیزیکی انتخاب کنیم. در مواردی ممکن است که بهتر باشد $e^{i(\omega t+\varphi)}$ را به‌کاربریم تانتیجهٔ تأثیر $\cos(\omega t+\varphi)$ را به‌دست آوریم که درآن φ یك زاویهٔ فازمفروض است.

اگر $\mathscr{V}_\circ e^{i\omega t}$ را درمعادلهٔ(۱۰.۱۳) به‌کاربریم، دراین‌صورت جریان $I_\circ e^{i\omega t}$خواهد بود. که دراینجا $I_\circ$ یك ثابت مختلط است. باگذاشتن این مقادیردرمعادله خواهیم داشت

$$i\omega\mathscr{V}_\circ e^{i\omega t} = \left[-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C}\right] I_\circ e^{i\omega t} \qquad (۱۷.۱۳)$$

واز تقسیم دوطرف معادلهٔ بالا به $i\omega$، داریم

$$\mathscr{V}_\circ e^{i\omega t} = \left[R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}\right] I_\circ e^{i\omega t} \qquad (۱۸.۱۳)$$

که به‌صورت زیر است

$$\mathscr{V}_\circ e^{i\omega t} = Z I_\circ e^{i\omega t} \qquad (۱۹.۱۳)$$

که درآن

$$Z=R+i\omega L+\frac{1}{i\omega C} \qquad (۲۰.۱۳ \text{الف})$$

یا

$$Z=R+i\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right) \qquad (۲۰.۱۳ \text{ب})$$

کمیت Z مقاومت ظاهری مدار نامیده می‌شود و شامل دو قسمت است: قسمت حقیقی یا مقاومت (R) وقسمت موهومی یا واکنایی (X). واکنایی نیز به‌دوقسمت، واکنایی القایی $X_L=\omega L$ و واکنایی خازنی $X_C=-1/\omega C$، تقسیم می‌شود. اینکه مقاومت ظاهری مختلط است بدان معناست که شدت جریان و ولتاژ اعمال شده همفاز نیستند. گاهی بهتر است که مقاومت ظاهری را به‌صورت قطبی آن بنویسیم

$$Z=|Z|e^{i\theta} \qquad (۲۱.۱۳)$$

که درآن

$$|Z|=[R^2+(\omega L-1/\omega C)^2]^{1/2} \qquad (۲۲.۱۳)$$

و

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{\omega L-1/\omega C}{R}\right) \qquad (۲۳.۱۳)$$

با به‌کاربردن این صورت برای مقاومت ظاهری، جریان مختلط را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$I(t)=\frac{\mathscr{V}_0}{|Z|}e^{i(\omega t-\theta)} \qquad (۲۴.۱۳ \text{الف})$$

وجریان فیزیکی برابراست با

$$\frac{\mathscr{V}_0}{|Z|}\cos(\omega t-\theta) \qquad (۲۴.۱۳ \text{ب})$$

اگر θ بزرگتر ازصفر باشد، جریان بعد ازولتاژ به‌یك فازمعین خواهد رسید، ومی گوییم که از ولتاژ عقب مانده است. درحالت عکس، جریان از ولتاژجلو می‌افتد. درهمین جامطالعهٔ مدارسادهٔ متوالی رسماً تکمیل می‌شود، گرچه بعداً مانتیجهٔ حاصل را بادقت بررسی‌خواهیم

کرد تا درك فیزیکی بیشتری دربارهٔ این وضعیت به‌دست آوریم.

۶.۱۳ اتصالهای متوالی و موازی مقاومتهای ظاهری

اگر دو مقاومت ظاهری به‌طور متوالی به‌هم وصل شوند، از هر دوی آنها جریان یکسانی می‌گذرد. ولتاژهای[1] دوسر آنها عبارت است از

$$V_2 = Z_2 I \quad و \quad V_1 = Z_1 I$$

اختلاف پتانسیل دوسراین ترکیب برابر

$$V_1 + V_2 = (Z_1 + Z_2) I$$

است. بنابراین، واضح است که اگرمقاومتهای ظاهری به‌صورت متوالی به‌هم‌وصل شوند، مقاومت ظاهری آنها باهم جمع می‌شود، به‌عبارت دیگر

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots \quad (\text{اتصال متوالی}) \qquad (۲۵.۱۳)$$

بدین ترتیب معادلهٔ (۲۵.۱۳ الف) جمع سه مقاومت ظاهری است: مقاومت R

$$Z_1 = R$$

القای L

$$Z_2 = i\omega L$$

وخازن C

$$Z_3 = \frac{1}{i\omega C}$$

که هرسه به‌طورمتوالی قراردارند. باید به‌این نکتهٔ مهم توجه داشت که مقاومتهای‌ظاهری به‌صورت اعداد مختلط جمع می‌شوند. اگر $Z_1 = R_1 + iX_1$ و $Z_2 = R_2 + iX_2$ باشد، دراین صورت داریم

$$Z = Z_1 + Z_2 = (R_1 + R_2) + i(X_1 + X_2) \qquad (۲۶.۱۳)$$

---

۱. دراین قسمت ودربقیهٔ این فصل علامت V را به‌جای $\Delta\varphi$ برای اختلاف پتانسیل دو سر یك جزء مداریا یك‌گروه ازاجزای مدار به‌کار می‌بریم.

به‌شکل قطبی داریم

$$Z=|Z|e^{i\theta},\ |Z|=[(R_1+R_2)^2+(X_1+X_2)^2]^{1/2}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{X_1+X_2}{R_1+R_2} \qquad (۲۷.۱۳)$$

توجه کنید که بزرگی Z مساوی مجموع بزرگیهای Z_1 و Z_2 نیست.

اگرمقاومتهای ظاهری را به‌طور موازی به‌هم وصل کنیم، اختلاف پتانسیل دو سر تمام آنها یکسان خواهد بود و جریانهای آنها عبارت خواهند بود از $I_1=V/Z_1$ و $I_2=V/Z_2$. جریان کل برابر است با

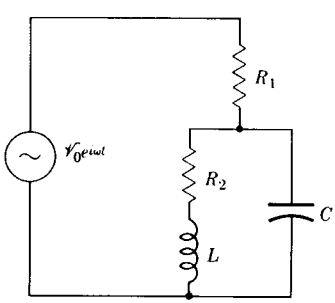
$$I=I_1+I_2+\cdots=\frac{V}{Z_1}+\frac{V}{Z_2}+\cdots=V\left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\cdots\right)$$

که از آن روشن است که

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\cdots \qquad \text{(اتصال موازی)} \qquad (۲۸.۱۳)$$

دراینجا نیز، جمع ماجمع اعداد مختلط است.

معادلات (۲۵.۱۳) و (۲۸.۱۳) اساس حل مسائلی‌هستند شامل ترکیبات پیچیده‌تری بایك ولتاژ محرك منفرد. به عنوان مثال، اکنون شکل ۶.۱۳ را درنظر می‌گیریم. مقاومت ظاهری شامل یك‌مقاومت است که به‌طورمتوالی به‌ترکیب موازی یك‌خازن و یك القامتصل شده است. این را می‌توان به‌صورت زیرنوشت



شکل ۶.۱۳ یك نمونه ازمدار ac.

$$Z=R_1+\frac{1}{\dfrac{1}{R_2+i\omega L}+\dfrac{1}{1/i\omega C}} \qquad (۲۹.۱۳)$$

یا به‌صورتی دیگر داریم

$$Z=R_1+\frac{R_2+i\omega L}{1+i\omega C(R_2+i\omega L)} \qquad (۳۰.۱۳)$$

یا

$$Z=R_1+\frac{(R_2+i\omega L)[(1-\omega^2 LC)-i\omega R_2 C]}{(1-\omega^2 LC)^2+\omega^2 R_2^2 C^2} \qquad (۳۱.۱۳)$$

تنها کار با ارزش دیگری که می‌توان در اینجا انجام داد این است که قسمتهای حقیقی و موهومی را از هم جدا کنیم

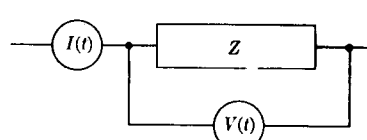
$$Z=R_1+\frac{R_2}{(1-\omega^2 LC)^2+\omega^2 R_2^2 C^2}+i\frac{\omega L(1-\omega^2 LC)-\omega R_2^2 C}{(1-\omega^2 LC)^2+\omega^2 R_2^2 C^2} \qquad (۳۲.۱۳)$$

اکنون که Z به‌دست آمد، می‌توانیم با تقسیم $\mathscr{V}_0 e^{i\omega t}$ به Z شدت جریان را تعیین کنیم. مطالعهٔ این مدار بعداً در بررسی پدیدهٔ تشدید دنبال خواهد شد.

۷.۱۳ توان و ضرایب توان

توانی را که به‌یك مقاومت می‌رسد می‌توان از حاصل‌ضرب اختلاف پتانسیل دوسر آن در شدت جریانی که از آن می‌گذرد به‌دست آورد. باوجود این، درحالت کلیتر، مثل مقاومت ظاهری که درشکل ۷.۱۳ نشان داده شده است، روش دقیقتری لازم است. اگرهمان‌طور که نشان داده‌ایم، $V(t)$ و $I(t)$ به‌ترتیب ولتاژ وجریان مختلط باشند، دراین‌صورت توان لحظه‌ای عبارت است از

$$P(t)=\mathrm{Re}\, I(t)\ \mathrm{Re}\, V(t) \qquad (۳۳.۱۳)$$



شکل ۷.۱۳ اندازه‌گیری توان.

توان متوسط کمیت مهمتری است. مقدار متوسط توان را دریك دورهٔ تناوب کامل یادرمدت زمان‌طولانی (تعداد زیادی دورهٔ تناوب) محاسبه می‌کنند. اگرفازها طوری انتخاب شوند که V_0 حقیقی باشد، ومطابق معمول، $Z=|Z|e^{i\theta}$، دراین‌صورت به‌سادگی می‌توان نشان داد که (مسئلهٔ ۱۱.۱۳)

$$\bar{P}=\overline{\mathrm{Re}\, I(t)\ \mathrm{Re}\, V(t)}=\frac{1}{2}\,|I_0|V_0|\cos\theta \qquad (۳۴.۱۳)$$

ضریب ۱/۲ در معادلهٔ (۳۴.۱۳) نشان‌دهندهٔ این حقیقت است که متوسط $\sin^2\omega t$ یا $\cos^2\omega t$ مساوی ۱/۲ است. ضریب جالب دیگر $\cos\theta$ است که نشان می‌دهد جریان و ولتاژ همفاز نیستند. غالباً $\cos\theta$ را ضریب توان مدارجریان متناوب (ac) می‌نامند . در بخش ۳.۱۷ نشان داده خواهد شد که

$$\overline{\mathrm{Re}\,(I_0 e^{i\omega t})\ \mathrm{Re}\,(V_0 e^{i\omega t})}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(I_0^* V_0) \qquad (۳۵.۱۳)$$

که درآن I_0^* مزدوج مختلط I_0 است. این رابطه که به‌راحتی می‌توان آن را به‌خاطر سپرد مستقیماً به‌معادلهٔ (۳۴.۱۳) منجرمی‌شود.

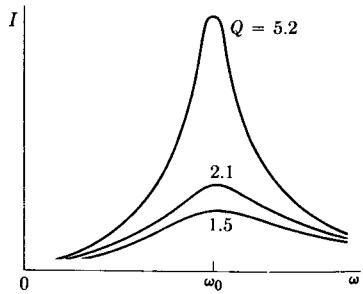
در خاتمه، خاطرنشان می‌کنیم که مقادیر مؤثر ولتاژ و جریان اغلب بامعادلات زیر تعریف می‌شوند

$$V_{\text{مؤثر}}=\frac{\sqrt{2}}{2}|V_0|, \qquad I_{\text{مؤثر}}=\frac{\sqrt{2}}{2}|I_0| \qquad (۳۶.۱۳)$$

اهمیت تعاریف بالا در این است که چنانچه مقدار معین V_{eff} به‌یك مقاومت اعمال شود، همان مقدار توان مصرفی خواهد داشت که یك ولتاژ ثابت باهمان بزرگی به‌آن اعمال شود. مشخص کردن مقادیر مؤثر خیلی متداول است، مثلا ، خطوط ۲۲۰ ولت ac یعنی خطوطی که ولتاژ مؤثرآنها ۲۲۰ ولت است.

۸.۱۳ تشدید

معادلهٔ (۲۲.۱۳) نشان می‌دهد که مقاومت ظاهری یك مدار سادهٔ متوالی LRC به‌فرکانس بستگی‌دارد، ومقدارآن به‌ازای $\omega^2=\omega_0^2\equiv 1/LC$ کمینه است. دراین فرکانس مقاومت ظاهری درست مساوی R، زاویهٔ فاز صفر، وجریان بیشینه و بزرگی آن مساوی $\mathcal{V}_0/R$ است. این یك پدیدهٔ تشدید است که خیلی شبیه به‌پدیدهٔ تشدیدی‌است که درنوسان کننده‌های واداشتهٔ میرای مکانیکی مشاهده می‌شود. اگرجریان‌را به‌صورت تابعی‌ازفرکانس



شکل ۸.۱۳ منحنیهای تشدید برای یك مدار متوالی RLC.

رسم کنیم، منحنی شکل ۸.۱۳ به‌دست می‌آید. دراین شکل تعدادی منحنی رسم شده‌است که درتمام آنها مقادیر L و C یکی است ولی‌مقاومت متوالی باآنها ازیك منحنی به‌منحنی دیگر فرق می‌کند. واضح است که هرچه مقاومت متوالی کوچکتر باشد منحنی تیزتر است. درفرکانسی که بزرگی مقاومت ظاهری $\sqrt{2}$ برابر R است، جریان به $\sqrt{2}/2$ برابرمقدار بیشینهٔ خود افت می‌کند. دراین فرکانس داریم

$$\left|\omega L-\frac{1}{\omega C}\right|=R \qquad (۳۷.۱۳)$$

برای منحنیهایی که قلهٔ نسبتاً تیزی دارند، این‌وضع درمقادیری از ω که از ω_0 فاصلهٔ‌زیادی ندارند، حاصل می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت، $\omega=\omega_0+\Delta\omega$، و در نتیجه خواهیم داشت

$$\left|\omega_0 L+\Delta\omega L-\frac{1}{\omega_0 C}\frac{1}{1+\Delta\omega/\omega_0}\right|=R \qquad (۳۸.۱۳)$$

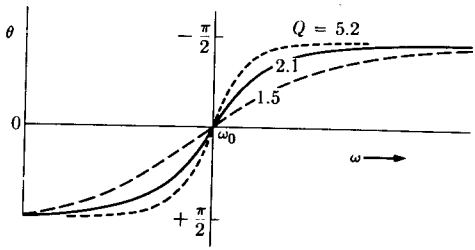
حال اگر $\omega_0^2=1/LC$ و $(1+\Delta\omega/\omega_0)^{-1}\cong 1-\Delta\omega/\omega_0$ را به‌کار ببریم، نتیجه خواهد شد

$$2|\Delta\omega|L=R$$

یا

$$\frac{2|\Delta\omega|}{\omega_0}=\frac{R}{\omega_0 L} \qquad (۳۹.۱۳)$$

کمیت



شکل ۹.۱۳ زاویهٔ فازمقاومت ظاهری دریك مدار متوالی RLC.

$$Q=\omega_{\circ}L/R \quad \text{یا} \quad Q=\frac{\omega_{\circ}}{۲|\Delta\omega|} \qquad (۴۰.۱۳)$$

مشخص کنندهٔ تیزی تشدید است و به ضریب کیفیت یا ضریب Qی مدار[1] مشهور است. از نظرعملی، می‌توان Q را تنها به‌عنوان خاصیت القاگر در نظرگرفت، زیرا بیشترمقاومت متوالیی که نمی‌توان از آن اجتناب کرد، مربوط به سیمی است که القاگر را باآن درست می‌کنیم. اما دریك بررسی دقیقتر معلوم می‌شودکه درمحاسبهٔ Qها اتلاف درخازنها رانیز باید درنظر گرفت. منحنیهای شکل ۸.۱۳ بامقادیر Qی مربوط مشخص شده‌اند.

با تغییردادن‌فرکانس منبع محرك، نه تنها بزرگی بلکه فازجریان نیزتغییرمی‌کند. این تغییرات فازبرای همان مقادیر Qی شکل ۸.۱۳ در شکل ۹.۱۳ نشان داده شده‌اند. در فرکانسهای کمتر از فرکانس تشدید، زاویهٔ فاز مقاومت ظاهری، منفی است؛ بنابراین فاز جریان‌مثبت‌است وجریان‌ازولتاژجلومی‌افتد. درفرکانسهای بیشترازفرکانس‌تشدید، برعکس است وجریان از ولتاژ عقب می‌افتد.

جالب است توجه کنیم که مدارهای معمولی تشدید امواج رادیویی که در وسایل ارتباطی وجود دارند، برخلاف اینکه ظاهراً موازی به‌نظر می‌رسند، مدارهای تشدید متوالی‌اند. درساده‌ترین حالت این بدان‌علت است که توان محرك ازطریق القا با L جفت می‌شود و در نتیجه به صورت یك emf که با L به‌طور متوالی وصل شده است، ظاهر می‌شود.

پدیدهٔ تشدید به‌مدارهای متوالی، نظیرآنچه هم‌اکنون بررسی شد محدود نمی‌شود؛ مدارهای موازی نیزممکن است مشخصات تشدید از خود بروز دهند. مدار شکل ۶.۱۳ چنین تشدیدی را ازخود بروز می‌دهد. تعریف فرکانس‌تشدید برای یك مدارتشدید موازی

---

۱. این Q به‌بارالکتریکی ربطی ندارد.

به‌سادگی تعریف فرکانس تشدید برای یك مدارمتوالی نیست،بعضی از امکانات برای این تعریف عبارت‌اند از (۱) $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$،(۲)فرکانسی که‌در آن‌مقاومت‌ظاهری[که‌بامعادلهٔ (۳۱.۱۳) داده‌شده است] بیشینه است، یا(۳) فرکانسی که درآن‌ضریب توان مساوی‌با یك است. ازهریك ازاین سه‌انتخاب، فرکانس متفاوتی به‌دست می‌آید؛ ولی برای مدارهایی که Qی بزرگ دارند این‌فرکانسها تقریباً یکسان‌اند. اولین انتخاب به‌مراتب ازدوانتخاب دیگردرعمل مفیدتراست زیرامستقیماً خیلی ازنتایج مدارهای تشدیدمتوالی را برای‌حالت تشدید موازی قابل‌کاربرد می‌سازد. با به‌کاربردن معادلهٔ (۳۱.۱۳) برای محاسبهٔ Z، وقرار دادن $R_1 = 0$ و $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$، نتیجهٔ بسیار جالبی به‌دست می‌آید. این نتیجه عبارت است از

$$Z = \omega_0 L\left[\frac{\omega_0 L}{R} - i\right], \quad (\omega = \omega_0) \qquad (۴۱.۱۳)$$

برای مداری‌با Qی بزرگ‌می‌توان از i صرفنظر کرد، نتیجه‌اینکه مقاومت‌ظاهری‌درحالت تشدید برابراست با Q برابرواکنایی القایی درحالت تشدید.

موضوع مدارهای‌تشدیدرا می‌توان به‌تفصیل دنبال کرد، ولی‌دنبال کردن‌آن دراینجا قابل‌توجیه نیست. بعضی ازمسائل آخرفصل موضوع این‌بخش‌را گسترش می‌دهند، جزئیات کاملتردر کتب دیگری ارائه شده است.[1]

۹.۱۳* القاهای متقابل در مدارهای ac

درحل مسائل مدار ac که شامل القاهای متقابل‌اند مشکل کوچکی درتعیین علامت صحیح برای القای متقابل وجود دارد. این مشکل‌را می‌توانیم به‌سادگی بدین ترتیب حل کنیم که توجه کنیم علامت وابسته به‌القای متقابل به‌جهت مفروض برای جریانها در دو مدار و به طریقه‌ای که دو سیم‌پیچ به‌هم متصل شده‌اند، بستگی دارد. نماد M_{ij} را برای القای متقابل خالص بین دومدار به‌کارخواهیم برد.

درفصل ۱۱ نشان دادیم که بزرگی emf تولید شده درسیم‌پیچ۲ ناشی ازتغییرجریان درسیم‌پیچ۱عبارت است از

$$\mathcal{E}_2 = M_{21}\frac{dI_1}{dt} \qquad (۴۲.۱۳)$$

برای جریانهای سینوسی، بااستفاده از نمادگذاری اعداد مختلط، داریم

---

1. K. Henney, *Radio Engineering Handbook*, Fifth Edition (NewYork: McGraw - Hill, 1959).

$$\mathcal{E}_2 = i\omega M_{21} I_{10} e^{i\omega t} \qquad (۴۳.۱۳)$$

یا

$$\mathcal{E}_2 = i\omega M_{21} I_1 \qquad (۴۴.۱۳)$$

دربحث زیرنماد M_{21} را به‌عنوان یك کمیت مثبت درنظرخواهیم گرفت و علامت $\mathcal{E}_2$ را به‌طور صریح نشان خواهیم داد. به‌عبارت دیگر، درمعادلهٔ (۴۴.۱۳) به‌جای M_{21} مقدار $\pm M_{21}$ را قرارخواهیم داد و M_{21} را یك کمیت مثبت درنظرخواهیم گرفت.

برای توضیح روش تعیین علامات، اکنون مدارشکل ۱۰.۱۳ را در نظر می‌گیریم. چنان‌که ملاحظه می‌شود دومقاومت ظاهری Z_1 و Z_2 بایك القای متقابل ترکیب شده‌اند وبه‌ولتاژ $\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}_0 e^{i\omega t}$ وصل‌شده‌اند. القای متقابل‌را بانماد M_{12} نشان می‌دهیم‌وفرض می‌کنیم‌که عدد مثبتی است. نقاط سیاه درشکل پایانه‌هایی ازدو سیم‌پیچ را نشان می‌دهند که به‌طورهمزمان مثبت‌اند، به‌بیان دیگر، اگریك جریان سینوسی ازسیم‌پیچ پایینی طوری عبورکندکه پایانهٔ چپ‌آن را در زمان t_1 مثبت کند، درآن صورت ولتاژی‌که درسیم‌پیچ بالایی القا می‌شود درزمان t_1 پایانهٔ چپ‌آن‌رامثبت خواهدکرد. معادلهٔ‌شاخهٔ بالایی برطبق قانون‌کیرشهوف عبارت است از

$$Z_1 I_1 + i\omega L_1 I_1 + i\omega M_{12} I_2 = \mathcal{V} \qquad (۴۵.۱۳)$$

برای القای متقابل علامت مثبت را در نظر گرفته‌ایم زیرا یك جریان مثبت I_2، درشاخهٔ بالایی ولتاژی ایجاد می‌کندکه درهمان جهت افت $I_1 R$ است. معادلهٔ دوم عبارت است‌از

$$i\omega M_{12} I_1 + Z_2 I_2 + i\omega L_2 I_2 = \mathcal{V} \qquad (۴۶.۱۳)$$

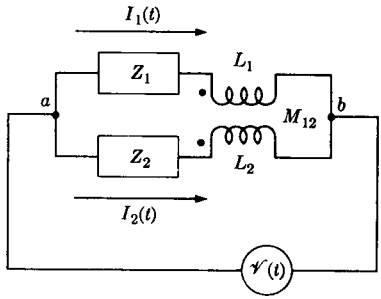
که درآن به‌دلیل تقارن $M_{12} = M_{21}$ نوشته شده است.

تعیین علامت برهمان مبنای قبلی انجام شده است، ومی‌توان‌آن‌را بدین نحوبررسی کردکه توجه‌کنیم‌که M_{12} در معادلهٔ شاخهٔ یك و M_{21} در معادلهٔ شاخهٔ دو باید باعلامت یکسانی ظاهرشوند. دستگاه معادلات (۴۵.۱۳) و (۴۶.۱۳) را می‌توان با روشهای استاندارد حل‌کرد ونتایج زیررا به‌دست‌آورد

$$I_1 = \mathcal{V} \frac{Z_2 + i\omega L_2 - i\omega M_{12}}{(Z_1 + i\omega L_1)(Z_2 + i\omega L_2) + \omega^2 M_{12}^2}$$

$$I_2 = \mathcal{V} \frac{Z_1 + i\omega L_1 - i\omega M_{12}}{(Z_1 + i\omega L_1)(Z_2 + i\omega L_2) + \omega^2 M_{12}^2} \qquad (۴۷.۱۳)$$

ازجمع دومعادلهٔ فوق جریان کل $I_1 + I_2$ به‌دست می‌آید



شکل ۱۰.۱۳ مدار باالقای متقابل.

$$I=I_1+I_2=\mathscr{V}\frac{Z_1+i\omega L_1+Z_2+i\omega L_2-2i\omega M_{12}}{(Z_1+i\omega L_1)(Z_2+i\omega L_2)+\omega^2M_{12}^2} \qquad (۴۸.۱۳)$$

ضریب $\mathscr{V}$ درطرف راست معادلهٔ بالا، عکس مقاومت ظاهریی است که به‌دوسرمولد وصل شده است، یا عکس مقـاومت ظاهری ویژهٔ بین دونقطهٔ a و b. واضح است که اگر M_{12} صفرباشد، مقاومت ظاهری همان ترکیب موازی مقاومتهای ظاهری دو شاخه است. برای نحوهٔ اتصالی که در شکل نشان داده شده است، وقتی M_{12} افزایش یابد مقاومت ظاهری نیزافزایش می‌یابد.

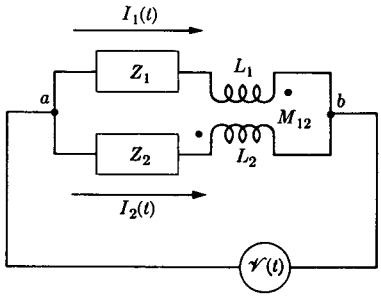
شکل ۱۱.۱۳ از مدار شکل ۱۰.۱۳ با تعویض دوانتهای یکی از سیم‌پیچهایی که القای متقابل دارند، به‌دست‌آمده است. توجه‌کنیدکه تنها اختلاف‌آن باشکل ۱۰.۱۳ درآن است‌که نقطهٔ‌سیاه درسیم‌پیچ بالایی ازسمت چپ‌آن به‌سمت راست منتقل شده‌است. نتیجه این است که باید علامت جملهٔ M_{12} را در معادلات (۴۵.۱۳) و (۴۶.۱۳) عوض کرد، پس

$$\left.\begin{aligned}(Z_1+i\omega L_1)I_1-i\omega M_{12}I_2&=\mathscr{V}\\ -i\omega M_{12}I_1+(Z_2+i\omega L_2)I_2&=\mathscr{V}\end{aligned}\right\} \qquad (۴۹.۱۳)$$

حال جریانها به‌سادگی به‌دست می‌آیند و باترکیب آنها مقاومت ظاهری به‌دست می‌آید

$$Z_{ab}=\frac{(Z_1+i\omega L_1)(Z_2+i\omega L_2)+\omega^2M_{12}^2}{Z_1+i\omega L_1+Z_2+i\omega L_2+2i\omega M_{12}} \qquad (۵۰.۱۳)$$

این نتیجه موقعی‌که القای متقابل صفر باشد، همان نتیجهٔ حالت قبل است. رابطهٔ بین Z_{ab} برای مقدارمعینی از M_{12} و Z_{ab} برای $M_{12}=0$ به‌طریق پیچیده‌ای به‌این پارامتربستگی



شکل ۱۱.۱۳ مدارشکل ۱۰.۱۳ که درآن علامت القای متقابل معکوس شده است.

دارد. دراینجا فقط به‌بیان این مطلب اکتفا می‌کنیم که Z_{ab} ممکن است بزرگتر یا کوچکتر از Z_{ab} برای $M_{12}=0$ باشد.

مدار اصلی برای مشهورترین دستگاه القای متقابل، یعنی مبدل، در شکل ۱۲.۱۳ نشان‌داده‌شده است. R_1 و R_2 مقاومتهای سیم‌پیچهای اولیه (محرك) وثانویه (تحریك‌شده) هستند، L_1 و L_2 ضرایب خودالقای آنهاست، و M القای متقابل (مثبت) بین‌آنهاست. Z_L مقاومت ظاهری باری‌است که به‌ثانویه متصل است، و $\mathscr{V}(t)=\mathscr{V}_0 e^{i\omega t}$ ولتاژ دوسرسیم‌پیچ اولیه است. اگرفرض‌کنیم که جریانهای $I_1 e^{i\omega t}$ و $I_2 e^{i\omega t}$ درجهات نشان داده شده‌جاری هستند، درآن صورت قانون ولتاژکیرشهوف ایجاب می‌کند که معادلات زیربرقرارباشند

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{V}_0 &= I_1R_1+i\omega L_1I_1+i\omega MI_2\\ 0 &= I_2R_2+i\omega L_2I_2+i\omega MI_1+I_2Z_L\end{aligned}\right\} \qquad (۵۱.۱۳)$$

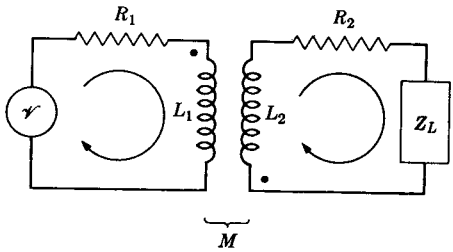
جوابهای این دومعادله عبارت‌اند از

$$\left.\begin{aligned}I_1&=\frac{Z_L+R_2+i\omega L_2}{(R_1+i\omega L_1)(Z_L+R_2+i\omega L_2)+\omega^2M^2}\mathscr{V}_0\\ I_2&=\frac{-i\omega M}{(R_1+i\omega L_1)(Z_L+R_2+i\omega L_2)+\omega^2M^2}\mathscr{V}_0\end{aligned}\right\} \qquad (۵۲.۱۳)$$

این معادلات نسبتاً پیچیده، معرف جواب دقیقی برای مدارشکل ۱۲.۱۳ هستند.

دربسیاری ازموارد خیلی ساده‌تراست که یك مبدل ایده‌آل را درنظربگیریم، یعنی، مبدلی که برای‌آن روابط زیرصادق است

$$V_L=a\mathscr{V}_0,\quad I_2=-\frac{I_1}{a} \qquad (۵۳.۱۳)$$



شکل ۱۲.۱۳ مبدل.

که درآن ثابت a مستقل ازفرکانس، V_L ولتاژدوسر Z_L است، وسایرمقادیرهمانهایی‌اندکه درشکل ۱۲.۱۳ نشان داده‌ایم. باضرب کردن دومعادلهٔ (۵۳.۱۳) در یکدیگر، می‌بینیم که این روابط مستلزم آن است که توان منبع $\mathscr{V}_0 I_1$ تماماً به‌بار $V_L I_2$ رسانده شود؛ به‌عبارت دیگر، درمبدل هیچ‌اتلافی وجود نداشته باشد. برای تضمین برقراری دومین رابطه‌ازروابط (۵۳.۱۳) باید شرط زیرصادق باشد

$$\frac{Z_L+R_2+i\omega L_2}{i\omega M}=a \qquad (۵۴.۱۳)$$

این شرط در حالتی صادق خواهد بود که $\omega L_2 \gg |Z_L+R_2|$ باشد. شرایط مشابهی می‌توانیم‌پیدا کنیم که برقراری رابطهٔ $V_L/\mathscr{V}_0=a$ را تضمین کند. این شرایط پیچیده‌اند وبه‌سادگی برآورده نمی‌شوند. در هرصورت، مبدلهای عملیی وجود دارندکه روابط بالا در گسترهٔ وسیعی ازفرکانسها برای آنها صادق‌اند. برای چنین دستگاههایی

$$I_2=-\frac{I_1}{a}, \qquad V_L=a\mathscr{V}_0$$

و

$$\frac{\mathscr{V}_0}{I_1}=-\frac{V_L}{a^2 I_2}=\frac{Z_L}{a^2} \qquad (۵۵.۱۳)$$

رابطهٔ اخیرنشان می‌دهدکه یك مبدل به‌عنوان یك مبدل مقاومت ظاهری نیزعمل می‌کند، و نسبت تبدیل آن a^{-2} است. به‌عنوان تمرین می‌توانید نشان دهیدکه برای دو سیم‌پیچ که خیلی نزدیك به‌هم جفت شده باشند، $a=N_2/N_1$ است، به‌عبارت دیگر، a مساوی‌نسبت تعداد دورهای دوسیم‌پیچ است.

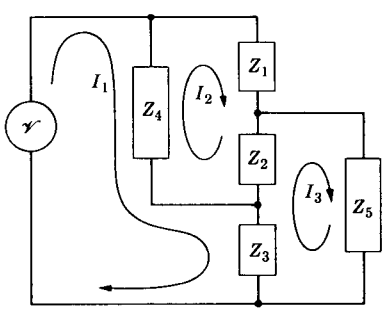
*۱۰.۱۳ معادلات حلقه‌ای و گره‌ای

مدارهای ac پیچیده‌تر را می‌توان به دوطریق بررسی کرد: یکی براساس قانون ولتاژ کیرشهوف که به تحلیل حلقه‌ای معروف است، ودیگری براساس قانون جریان کیرشهوف که به تحلیل گره‌ای مشهوراست. هریك ازاین روشها به‌نوبهٔ خود مزایا و معایبی دارد. چون انتخاب روش مناسب، حل خیلی از مسائل‌را ساده‌ترمی‌کند، دراین بخش، هردو روش را بررسی‌خواهیم‌کرد.

اولین قدم دربه‌کاربردن تحلیل حلقه‌ای مشخص‌کردن حلقه‌هاست. این‌کاررا می‌توان بدین ترتیب انجام دادکه حلقه‌های بسته‌ای ازجریان‌را درنظر بگیریم به‌طوری‌که حداقل یك جریان ازهرجزء مدار بگذرد. مثلا درشکل ۱۳.۱۳ سه حلقه نشان داده شده‌اند که با I_1، I_2، و I_3 مشخص شده‌اند. البته این تنها انتخاب ممکن نیست؛ چندین انتخاب دیگر نیزامکان‌پذیر ومفید است. با به‌کاربردن قانون ولتاژکیرشهوف (II) در مورد هریك ازاین سه حلقه، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} I_1(Z_3+Z_4) \quad & -I_2Z_4 \quad & -I_3Z_3 \quad &= \mathscr{V} \\ -I_1Z_4 \quad & +I_2(Z_1+Z_2+Z_4) \quad & -I_3Z_2 \quad &= 0 \\ -I_1Z_3 \quad & -I_2Z_2 \quad & +I_3(Z_2+Z_3+Z_5) &= 0 \end{aligned} \qquad (۵۶.۱۳)$$

توجه کنید که علامتهای منها به‌این علت ظاهر می‌شوند که مثلا درحلقهٔ یك، I_2 در Z_4 برخلاف جهت I_1 جریان دارد. معادلات (۵۶.۱۳) را می‌توان به‌آسانی با استفاده از روشهای ماتریسی حل‌کرد، که نتیجهٔ آن عباراتی است برای مجموعهٔ جریانهای حلقه‌ای در یك مدار. تذکر این نکته مفیداست که معادلات حلقه‌ای را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت



شکل ۱۳.۱۳ مثال‌کاربرد تحلیل حلقه‌ای در مدارهای ac.

$$\sum_{j=1}^{n} Z_{ij}I_j = \mathcal{V}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad (۵۷.۱۳)$$

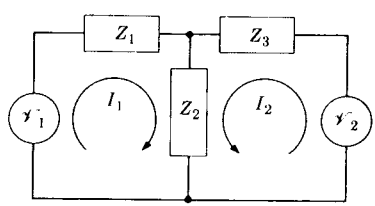
(درمدار بالا $n = 3$ است). در این نمادگذاری، $Z_{ij} = Z_{ji}$ است، که برای کنترل معادلات حلقه‌ای سودمند است.

به‌عنوان دومین مثال، مدار شکل ۱۴.۱۳ را در نظر بگیرید. معادلات مناسب این مدار عبارت‌اند از

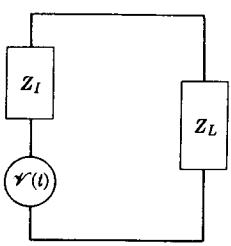
$$\begin{aligned} I_1(Z_1+Z_2)+ \quad I_2Z_2 \quad &= \mathcal{V}_1 \\ I_1Z_2 \quad +I_2(Z_2+Z_3) &= \mathcal{V}_2 \end{aligned} \qquad (۵۸.۱۳)$$

هیچ دلیلی وجود ندارد که $\mathcal{V}_1$ و $\mathcal{V}_2$ همفاز باشند؛ اغلب همفاز نیستند ولی می‌توان آنها را به‌صورت $\mathcal{V}_1 = |\mathcal{V}_{10}|e^{i\omega t}$ و $\mathcal{V}_2 = |\mathcal{V}_{20}|e^{i(\omega t+\phi)}$ نوشت. در هر صورت بسیار مهم است که فازها را به‌طور صحیح مشخص کنیم، و این خیلی ساده انجام‌پذیر است، بدین‌ترتیب که فازهای نسبی را در $t = 0$ بررسی می‌کنیم وجهتها (مثبت ومنفی) را نسبت به‌جهتهای جریانهای مشخص‌شدهٔ حلقه‌ای تعیین کنیم. باید به‌این نکتهٔ مهم نیز توجه کنیم که بجز در حالتی که تمام مولدها دارای فرکانس یکسانی باشند، در حالات دیگر این روش به‌طور کامل باشکست روبه‌رو می‌شود (به‌بیان صحیحتر، این‌مسئله تبدیل به‌برهمنهی دومسئلهٔ‌مستقل می‌شود که هر کدام شامل یك مولد ویك فرکانس است).

قبل از اینکه وارد بحث معادلات گره‌ای بشویم، بهتراست دربارهٔ مولدهای ولتاژ و جریان صحبت کنیم. در قسمتهای قبل مسائل مداری برحسب منابع خالص ولتاژ بیان شده بودند. چنین دستگاههای ایده‌آلی را نمی‌توان ساخت، بدیهی است که دستگاههای عملی همواره مقاومت ظاهری داخلی مشخصی دارند. بنابراین یك مولد عملی شامل یك منبع ولتاژ $\mathcal{V}(t)$ است که به‌طورمتوالی به‌یك‌مقاومت‌ظاهری Z_I، یعنی به‌مقاومت ظاهری‌داخلی،



شکل ۱۴.۱۳ کاربردهای بیشتری از معادلات حلقه‌ای.



شکل ۱۵.۱۳ مولد عملی که به‌یك بار Z_L متصل شده‌است.

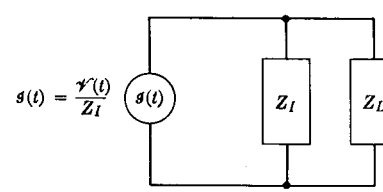
متصل شده است. چنین مولدی در شکل ۱۵.۱۳ نشان داده شده است که به‌بار Z_L متصل است. درمورد این مدارچند نکته را می‌توان تذکرداد. اولا، برای آنکه حداکثر توان به‌بار خارجی منتقل شود باید $Z_L = Z_I^*$ باشد؛ به‌عبارت دیگر، قسمتهای حقیقی Z_I و Z_L باید مساوی باشند وقسمتهای موهومی آنها نیزباید باهم‌مساوی ولی علامت آنها مخالف باشد. اثبات این مطلب به‌عنوان یك مسئله داده شده است. ثانیاً، یك مولد ولتاژ، معادل یك‌مولد جریان است که بامقاومت ظاهری داخلی به‌طور موازی متصل شده است و شدت جریانی برابر با $\mathcal{J}(t) = \mathcal{V}(t)/Z_I$ می‌دهد. این وضعیت معادل برای مدارشکل ۱۵.۱۳ در شکل ۱۶.۱۳ نشان داده‌شده است. برای نشان دادن معادل بودن دو مدارتنها کافی است توجه کنیم که یك مولد جریان ایده‌ال در هر باری که به‌دوسر آن وصل‌شود، جریانی برابر $\mathcal{J}(t)$ برقرارمی کند. علاوه براین، معادل بودن آن دوبدین معنی است که در مسائل مدار مولدها را می‌توان بسته به‌راحتی کاربه عنوان مولد ولتاژ یا به عنوان مولد جریان به‌حساب آورد.

معادلات گره‌ای برای یك مدار را می‌توان با به کار بردن قانون جریان کیرشهوف (I) برای هر گره درشبکه‌به‌دست آورد. دراینجا گره به‌معنی نقطه‌ای است که درآن سه جزء مداریا بیشتر به‌یکدیگرمتصل می‌شوند. دراین روش قانون ولتاژکیرشهوف (II) به‌طور خودکار صادق خواهد بود. می‌توان شکل ۱۷.۱۳ را به‌عنوان مثالی ساده در مورد کاربرد معادلات گره‌ای درنظر گرفت. بافرض اینکه جمع جبری جریانهایی که به‌هریك ازگره‌ها می‌رسند برابر باصفراست، معادلات گره‌ای به‌دست می‌آیند. گره‌ها شماره گذاری می‌شوند، وشمارهٔ صفراز گره‌ای شروع می‌شودکه پتانسیل آن برای مدار، پتانسیل مرجع است. اگر پتانسیل گره ۰ را صفرفرض کنیم دراین‌صورت درگره ۱ خواهیم داشت

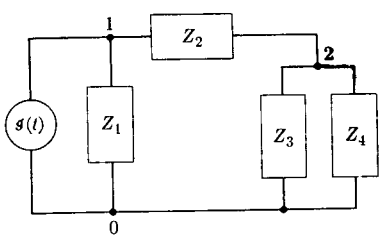
$$\mathcal{J}(t) = \frac{V_1}{Z_1} + \frac{V_1 - V_2}{Z_2} \qquad (۵۹.۱۳)$$

که درآن V_1 و V_2 به‌ترتیب پتانسیلهای گره‌های ۱ و ۲ هستند. درگره ۲ داریم

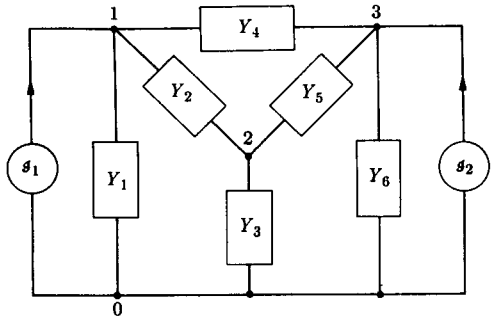
$$0 = \frac{V_2 - V_1}{Z_2} + \frac{V_2}{Z_3} + \frac{V_2}{Z_4} \qquad (۶۰.۱۳)$$



شکل ۱۶.۱۳ یك «مولد جریان» که معادل مولد ولتاژشکل ۱۵.۱۳ است.



شکل ۱۷.۱۳ مثالی ازروش‌تحلیل گره‌ای درمدارهای ac.



شکل ۱۸.۱۳ مدار دیگری که مثالی است ازروش تحلیل گره‌ای.

قبل ازاینکه به‌حل مسئله ادامه دهیم، مشاهده می کنیم که کمیتی که عکس مقاومت ظاهری باشد برای سهولت انجام محاسبات بسیارمناسب است. چنین کمیتی را رسانایی ظاهری می‌نامند و با نماد Y نشان می‌دهند، $Y = 1/Z$. رساناییهای ظاهری دراتصال موازی باهم جمع‌می‌شوند، درصورتی که دراتصال متوالی معکوس آنها باهم جمع‌می‌شود، اگرمعادلات (۵۹.۱۳) و (۶۰.۱۳) را برحسب رساناییهای ظاهری بنویسیم نتیجه خواهد شد

$$\mathcal{J}(t) = (Y_1 + Y_2)V_1 - Y_2 V_2$$

$$0 = -Y_2 V_1 + (Y_2 + Y_3 + Y_4)V_2 \qquad (۶۱.۱۳)$$

که تااندازه‌ای ساده‌ترند. اگر این معادلات را باهم حل کنیم ولتاژهای گره‌ها، V_1 و V_2 به‌دست می آیند.

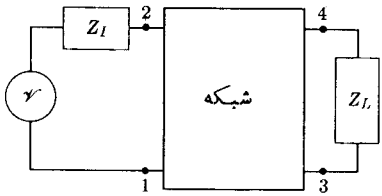
مثال دیگری ازکاربرد معادلات گره‌ای را درنظر می گیریم، و آن حل مداری است که‌درشکل ۱۸.۱۳ نشان داده شده است. دراین مورد معادلات گره‌ای‌را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathcal{J}_1 = Y_1 V_1 + Y_2(V_1 - V_2) + Y_4(V_1 - V_3)$$

$$0 = Y_2(V_2 - V_1) + Y_3 V_2 + Y_5(V_2 - V_3) \qquad (۶۲.۱۳)$$

$$\mathcal{J}_2 = Y_6 V_3 + Y_5(V_3 - V_2) + Y_4(V_3 - V_1)$$

می‌توان این معادلات را باروشهای استاندارد حل کرد و ولتاژهای گره‌ها را به‌دست آورد. اینکه باحل این معادلات ولتاژها به‌جای جریانها به‌دست می‌آیند مزیت بزرگی است، مخصوصاً درمدارهای ارتباطاتی.



شکل ۱۹.۱۳ یك شبکهٔ چهار سر.

*۱۱.۱۳ مقاومت ظاهری نقطهٔ تحریك و مقاومت ظاهری انتقال

اکنون می‌خواهیم تعاریف ساده‌ای برای مقاومت ظاهری نقطهٔ تحریك ومقاومت ظاهری انتقال برای یك شبکهٔ چهارسر بدهیم. بدین علت این تعاریف را دراینجا می‌دهیم که این واژه‌ها به کرات درکتب فنی به‌چشم می‌خورند، و گاهی برای افراد مبتدی اشکال جدی ایجاد می‌کنند. یك شبکهٔ چهارسردرنظربگیرید، ودوسر ۱ و۲ را ورودی، و دوسر ۳ و ۴ را خروجی بنامید. اگر چنانکه درشکل ۱۹.۱۳ نشان‌داده شده است، یك مولد باولتاژ $\mathscr{V}$ ومقاومت ظاهری داخلی Z_I به‌دوسر ۱ و۲ متصل شود ویك مقاومت ظاهری Z_L بین دو سر ۳ و۴ وصل‌شود، جریانی‌برابر با I_I از Z_I، وجریانی برابر با I_L از Z_L عبورخواهد کرد. مقاومت ظاهری نقطهٔ تحریك Z_D، عبارت است از

$$Z_D=\frac{\mathscr{V}}{I_I} \qquad (۶۳.۱۳)$$

ومقاومت ظاهری انتقال، Z_T، عبارت است از

$$Z_T=\frac{\mathscr{V}}{I_L} \qquad (۶۴.۱۳)$$

باید توجه کرد که Z_D و Z_T هر دو هم به ساختار داخلی شبکه بستگی دارند و هم به Z_I و Z_L.

بحث مختصر بالا نمی‌تواند حق مطلب را دربارهٔ نظریهٔ شبکه‌ها ادا کند. برای جزئیات‌این موضوع پیچیده‌باید به‌کتابهای کلاسیکی مانندکتاب گیل‌مین وکتابهای متعدد جدیدتر مراجعه شود.

۱۲.۱۳ خلاصهٔ مطالب

مشابه مدارهای dc ، تحلیل مدارهایی که حامل جریانهایی کندتغییرند متکی به قوانین

جریان و ولتاژ کیرشهوف است که در اینجا این قوانین باید در هر لحظه از زمان اعمال شوند. جریان و ولتاژ یك مقاومت خطی به‌طور لحظه‌ای، مطابق قانون اهم، به یکدیگر مربوط‌اند

$$V_R = RI$$

قوانین مشابه برای یك القای خطی ویك خازن خطی عبارت‌اند از

$$V_L = L\frac{dI}{dt}$$

$$V_C = \frac{1}{C}Q$$

که در آن $I = dQ/dt$. برای یك حلقهٔ منفرد که حاوی ولتاژ اعمال شدهٔ $\mathcal{V}(t)$ باشد، قوانین کیرشهوف معادلهٔ دیفرانسیل زیر را نتیجه می‌دهند

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = \mathcal{V}(t)$$

(برای شبکه‌ای پیچیده‌تر، دستگاهی از یك‌چنین معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم خطی نتیجه می‌شود.) جواب کلی این معادله ترکیبی است از جواب خصوصی آن (جواب حالت پایا)، با جواب کلی معادلهٔ همگن متناظر آن که از قرار دادن $\mathcal{V}(t) = 0$ عاید می‌شود (جواب گذرا). ثابتهای دلخواه در جواب گذرا چنان انتخاب می‌شوند که شرایط اولیه را برآورده کنند.

۱. جواب گذرا تابعی نمایی از t است؛ اگر نما مختلط باشد، قسمت موهومی از نظر فیزیکی نمایانگر نوسان Q و I است. قسمت حقیقی نمایانگر رفتار فروافتی (رفتار گذرا) است، هرچه R بزرگتر باشد زمان فروافت کوچکتر است. برای اکثر مدارهای عملی، زمان فروافت نوعاً درحدود کسری از ثانیه است.

۲. رفتار حالت پایا تنها برای یك ولتاژ اعمال شدهٔ سینوسی (ac) مورد بحث قرار گرفته است. (ولتاژ ثابت حالت خاص فرکانس صفر است؛ بستگی دلخواه به زمان را می‌توان با ترکیب فوریه نمایش داد.) چنانچه ولتاژ اعمالی $\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}_0 \cos \omega t$ را به‌صورت مختلط زیر نشان دهیم

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 e^{i\omega t}$$

جریان حالت پایا نیز که همان فرکانس را دارد به‌صورت زیر خواهد بود

$$I = I_\circ e^{i\omega t}$$

مقاومت ظاهری که کمیتی مختلط است به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{V} = ZI$$

موقعی که Z به‌صورت قطبی بیان شود

$$Z = |Z| e^{i\theta}$$

بزرگی آن، $|Z|$، دامنهٔ جریان را به‌دست می‌دهد

$$|I_\circ| = \mathcal{V}_\circ / |Z|$$

و θ زاویهٔ فازجریان نسبت به‌ولتاژاعمال شده‌را می‌دهد. قانون اهم و تعمیمهای آن روابط زیررا می‌دهند

$$Z_R = R$$

$$Z_L = i\omega L$$

$$Z_C = \frac{۱}{i\omega C}$$

زیرا $I = i\omega Q$ است.

۳. تحلیل رفتارحالت پایای مدارهای‌خطی ac دقیقاً مشابه تحلیل مدارهای dc است و مقاومت ظاهری مختلط به‌صورت تعمیمی ازمقاومت dc به‌کار می‌رود.

۴. اتلاف توان لحظه‌ای عبارت است از $P(t) = \mathrm{Re}\, I(t)\, \mathrm{Re}\, V(t)$. برای حالت ac میانگین زمانی‌آن برابر است با

$$\bar{P} = \frac{۱}{۲} |I_\circ| |V_\circ| \cos\theta$$

ضریب توان، $\cos\theta$، برای یك مقاومت خالص ۱ است وبرای یك القای خالص یا یك خازن خالص صفراست. ولتاژ و جریان «مؤثر» عبارت‌اند از $|V_\circ|/\sqrt{۲}$ و $|I_\circ|/\sqrt{۲}$. عبارت معادلی برای میانگین زمانی توان ac عبارت است از

$$\bar{P} = \frac{۱}{۲} \mathrm{Re}\, (I^* V)$$

۵. برحسب تابعی ازفرکانس، یك‌مدارمتوالی درنزدیکی $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ تشدیدی‌ازخود بروز می‌دهد، در فرکانس تشدید، $|Z|$ کمینه است و $|I_0|$ بیشینه. تیزی تشدید بـا رابطهٔ زیرداده می‌شود

$$Q = \frac{\omega_0}{2|\Delta\omega|} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

یك مدارموازی نیز درنزدیکی $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ تشدیدی‌داردکه درآنجا $|Z|$ بیشینه‌است و $|I_0|$ کمینه.

۶. مبدل متداولترین عنصرمدار باالقای متقابل است. مبدل ایده‌آل مبدلی است که برای آن‌نسبت جریان ثانویه به‌جریان اولیه برابراست باعکس نسبت‌ولتاژ ثانویه به‌ولتاژاولیه.

مسائل

۱.۱۳ یك القا به ضریب خودالقای ۲ هنری ویك مقاومت ۳ اهمی بایك باطری ۵ ولتی و یك کلید به‌طور متوالی به‌هم متصل شده‌اند. جریان و تغییرات جریـان نسبت به زمان (dI/dt) را درمدار درزمانهای زیربعد ازاتصال کلید به‌دست‌آورید: (الف) ۳ر۰ ثانیه، (ب) ۱ ثانیه، (ج) ۴ ثانیه.

۲.۱۳ مداری شامل خودالقای L_0، مقاومت R_0، و باطری $\mathcal{V}_0$، جریـان پایایی داردکه $I = \mathcal{V}_0/R_0$ است . کلیدی در این مدار وجود داردکه در لحظهٔ $t = 0$ بـاز می‌شود و جرقه‌ای در دو سر کلید ایجاد می‌کند. اگرمقاومت جرقه با k/I داده شده‌باشد،که درآن ثابت $k < \mathcal{V}_0$ است، جریانی راکه ازجرقه می‌گذرد برحسب تابعی از زمان تعیین کنید. مقدارنهایی جریان پایایی که ازجرقه می‌گذرد چقدراست؟

۳.۱۳ خازن C، مقاومت R، و باطری $\mathcal{V}_0$ بایك‌کلید به‌طور متوالی به‌هم متصل شده‌اند. کلیددرلحظهٔ $t = 0$ بسته می‌شود. معادلهٔدیفرانسیل حاکم‌بر بار روی‌خازن، Q، رابنویسید. Q را برحسب تابعی از زمان تعیین‌کنید.

۴.۱۳ خازن C بابار Q_0 دفعتاً به‌طورمتوالی به‌مقاومت R و خودالقای L متصل می‌شود. جریان را برحسب تابعی از زمـان تعیین‌کنید. نشان دهید که سه نوع حل مختلف موجود است،که بستگی به‌این داردکه $R^2 - 4L/C$ کوچکتر، مساوی یا بزرگتر از صفر باشد. حالت اول به نام کند میرا، حالت دوم به‌نام میرای بحرانی وحالت سوم به نـام تند میرا خوانده می‌شود.

۵.۱۳ خازن واقعی C که به‌صورت موازی یك‌مقاومت‌نشتی R دارد، به‌صورت متوالی به‌یك خودالقای‌ایده‌آل L وصل شده است. $|Z|$ را محاسبه کنید؛ بافرض آنکه R بزرگ

است، مقادیر تقریبی آن‌را درفرکانسهای زیاد ودرفرکانسهای کم ودرتشدید به‌دست آورید. منحنی تقریبی $|Z|$ را برحسب ω ترسیم کنید.

۶.۱۳ مسئلهٔ ۵.۱۳ را با فرض آنکه یك خازن نشتی با خودالقای کامل دراتصال موازی باشد، تکرار کنید.

۷.۱۳ مدار شکل ۱.۱۳ شامل یك خازن اضافی C' است که با ترکیب کامل RLC به‌طورموازی متصل شده است. $R=۱۰۰\Omega$، $L=۱\mathrm{H}$، $C=۱۰۰\mu\mathrm{F}$ و $C'=۱۰\mu\mathrm{F}$. منحنی مقاومت ظاهری $|Z|$ را برحسب فرکانس ازصفرتا $f=۱۰^{۴}\mathrm{Hz}$ رسم کنید.

۸.۱۳ یك ترکیب متوالی ازمقاومت R وخودالقای L به‌طور موازی به ترکیبی متوالی از مقاومت R وخازن C متصل شده است. نشان دهیدکه اگر $R^{۲}=L/C$ باشد مقاومت ظاهری مستقل ازفرکانس است.

۹.۱۳ مقاومتی به‌صورت یك سیم‌پیچ دارای مقاومت dc ی ۹۰٫۰۰ اهم وضریب خود - القای ۸ میکروهنری است. زاویهٔ فازمقاومت ظاهری آن در ۱۰۰۰ Hz چیست؟ یك‌خازن، بدون آنکه تغییرفاحشی درمقاومت ایجادکند، به‌طور موازی با مقاومت متصل می‌شود تا زاویهٔ فاز را در ۱۰۰۰ Hz به‌صفرکاهش دهد. به‌ازای چه مقادیری از فرکانس زاویهٔ فاز کمترازموقعی است‌که خازن اضافه نشده بود؟

۱۰.۱۳ (الف) خازن C دراتصال موازی‌بامقاومت R است ومقاومت‌ظاهری این‌ترکیب Z است. فرض‌کنید مقاومت ظاهری ترکیب متوالی خازن C' با مقاومت R' همان مقدار Z باشد. برای ωی مفروض، مقادیر C' و R' را برحسب R و C به‌دست آورید. (ب) ضریب اتلاف به صورت $D=\omega R'C'$ تعریف می‌شود. نشان دهید که $D=۱/\omega RC$ و نشان دهیدکه فاز جریان $\theta=\tan^{-۱}(-۱/D)$ است.

۱۱.۱۳ معادلهٔ (۳۴.۱۳) را برای متوسط زمانی اتلاف توان در مداری که جریان ac آن $I(t)=I_{\circ}e^{i\omega t}$ و $V(t)=ZI(t)$ است، ثابت کنید.

۱۲.۱۳ یك مولد ac با مقاومت ظاهری داخلی Z_I به یك مقاومت ظاهری بار Z_L که متغیراست به‌طورمتوالی وصل شده است. ثابت کنید موقعی حداکثرتوان به‌مقاومت ظاهری بارمنتقل می‌شودکه $Z_L=Z_I^*$ باشد.

۱۳.۱۳ درمدارشکل ۶.۱۳ مقادیر $L=۴\mathrm{mH}$، $C=۲\mu\mathrm{F}$، $R_{۱}=۲۵\Omega$ و $R_{۲}=۴۰\Omega$ داده شده‌اند. فرکانسهای مربوط به موقعیتهای زیر را پیداکنید: (الف) موقعی که $\omega=۱/\sqrt{LC}$، (ب) موقعی که مقاومت ظاهری حداکثراست، (ج) موقعی که جریانی که از $R_{۱}$ می گذرد باولتاژ مولد همفاز است.

۱۴.۱۳ نشان دهید که ضریب کیفیت را، که در متن درس تعریف شد، می‌توان به‌صورت

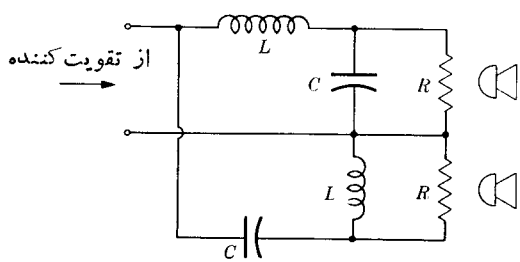
زیر بیان کرد: 2π برابر حداکثر انرژی ذخیره‌شده درمدار، تقسیم بر انرژی تلف شده در یك سیکل. این بیان گاهی به‌عنوان تعریف Q به‌کار می‌رود و مستقل از پارامترهای ویژهٔ مدار است.

۱۵.۱۳ یك شبکهٔ متقاطع برای یك دستگاه استریو (hi-fi) باید طوری طرح شود که دو بلندگو (هریك به‌مقاومت R) به‌خروجی یك تقویت‌کننده بسته شوند. یکی از بلندگوها باید بیشتر فرکانسهای بالا و دیگری بیشتر فرکانسهای پایین را بگیرد. این شبکه در شکل ۲۰.۱۳ نشان داده شده است. دوخازن هریك به‌ظرفیت C و دو القاگر هریك به‌ضریب القای L اند. (الف) برای هر R معلوم، رابطه‌ای میان L و C برقرار کنید به‌طوری که شبکه برای تقویت‌کننده در تمام فرکانسهایك بارِمقاومتی‌خالص (R) باشد. (ب) فرکانس تقاطع، ω_c، طبق تعریف فرکانسی است که درآن فرکانس هریك ازدو بلندگو نصف توان تقویت‌کننده را دریافت کند. اگر R و ω_c معلوم باشند، L و C را به‌دست آورید.

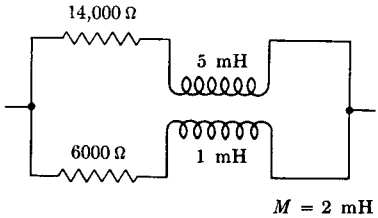
۱۶.۱۳ خازنی به‌ظرفیت ۱ میکروفاراد را ابتدا باوصل کردن به‌یك باتری تا ۱۰۰ ولت باردار می‌کنیم؛ سپس آن را از باتری قطع می‌کنیم و بارآن را داخل یك سیم‌پیچ ۳۰۰ دوری که به‌دور یك حلقهٔ چنبره‌ای پیچیده شده‌است تخلیه می‌کنیم. شعاع متوسط چنبره ۲۰ سانتیمتروسطح‌مقطع آن ۴سانتیمترمربع است و یك شکاف هوای ۲میلیمتری دارد (به‌شکل ۱۴.۹ مراجعه کنید). باچشمپوشی ازاتلاف درسیمهای مسی، پس‌ماند وهدررفتن ازحاشیه‌ها، بیشینهٔ میدان مغناطیسی‌راکه درشکاف هوا ایجاد می‌شود حساب کنید. تراوایی نسبی چنبره را ۵۰۰۰ بگیرید.

۱۷.۱۳ یك اختلاف پتانسیل یك ولتی درفرکانس $f = 10^6/\pi$ Hz به‌دو سر مدار شکل ۲۱.۱۳ اعمال می‌شود. القای متقابل سیم‌پیچها به‌نحوی است که مخالف یکدیگرند. جریان را درشاخهٔ بالایی پیدا کنید.

۱۸.۱۳ دریك مبدل توان ۶۰سیکلی (که نسبت دورهای آن ۲ به ۱ است) ضریب خودالقای سیم‌پیچ اولیه ۱۰۰ هنری و مقاومت dc ی آن ۲۰ اهم است. ضریب جفت‌شدگی بین اولیه وثانویه نزدیك به یك است. اگراولیه به‌اختلاف پتانسیل ۱۰۰۰ ولت وصل



شکل ۲۰.۱۳



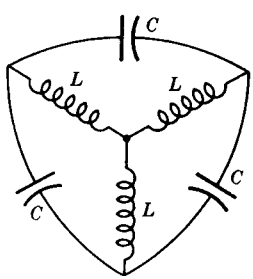
شکل ۲۱.۱۳

شود، جریان را دراولیه در دو حالت زیرحساب کنید (الف) وقتی مدار ثانویه بازاست، (ب) وقتی یك مقاومت بار ۲۰ اهمی درمدار ثانویه وجود دارد.

***۱۹.۱۳** سه خازن مشابه وسه خودالقای مشابه‌آن‌طورکه درشکل۲۲.۱۳ نشان داده شده است به‌هم متصل‌اند. فرکانسهای تشدید این دستگاه را به‌دست آورید. (راهنمایی: تحلیل حلقه‌ای‌را درمورد جریانها برای یك فرکانس فرضی ω به‌کاربرید ونشان‌دهیدکه سه معادلهٔ حاصل فقط برای یك مقدار معین ω بایکدیگر سازگارند.)

۲۰.۱۳ درمدار شکل ۱۴.۱۳ داریم $Z_1 = 2 + 5i$، $Z_2 = 8 - i$، $Z_3 = 4 + 3i$. مولدهای ولتاژ با یکدیگر همفازند و $\mathscr{V}_1 = 10\,\mathrm{V}$، $\mathscr{V}_2 = 2\,\mathrm{V}$. جریانهای I_1 و I_2 را تعیین کنید.

۲۱.۱۳ درمدارشکل ۱۷.۱۳ داریم $\mathscr{I}(t) = \mathscr{I}_1 e^{i\omega t}$ وبه‌جای Z_4 یك‌مولدجریان $\mathscr{I}_2 e^{i\omega t}$ قرارگرفته است. دومولد جریان بایکدیگر همفازند. Z_1 و Z_3 خازنهایی‌اند که واکنشایی آنها به ترتیب ۴۰ و ۶۰ اهم است. Z_2 یك مقاومت خالص ۲۰ اهمی است. فرض کنید $\mathscr{I}_1 = 5\,\mathrm{A}$ و $\mathscr{I}_2 = 25\,\mathrm{A}$. ولتاژهای گره‌ای را درنقاط ۱ و ۲ نسبت به‌نقطهٔ ۰ تعیین کنید.



شکل ۲۲.۱۳

۱۴*

فیزیك پلاسما

گازهایی که تا حد زیادی یونیده باشند، رساناهای خوبی برای الکتریسیته هستند. ذرات باردار در چنین گازی با میدان الکترومغناطیسی موضعی برهم کنش می‌کنند؛ به‌علاوه، حرکت متشکل این حاملهای بار (جریانها، افت وخیزهای چگالی بار) می‌تواند میدانهای مغناطیسی والکتریکی تولید کند. هنگامی که گاز یونیده تحت تأثیر یك میدان الکتریکی ساکن قرار بگیرد، حاملهای بار در این گاز به‌سرعت طوری مجدداً توزیع می‌شوند که قسمت اعظم گاز درمقابل میدان محافظت می‌شود. لانگمویر[1] ناحیه‌هایی از گاز را که نسبتاً خالی از میدان است، ودر آنجا بارهای فضایی مثبت ومنفی تقریباً درتوازن‌اند، پلاسما خواند، وبارفضایی یا نواحی میدان قوی روی مرز پلاسما را پوشینه نامید.

به‌طورمعادل، می‌توان گفت که یك گاز یونیده که در یك فاصلهٔ کوچك نسبت به‌سایر طولهای فیزیکی مورد نظر تعداد زیادی ذرات باردار برای حفاظت از خود از لحاظ الکتروستاتیکی دارد پلاسماست. یك تعریف نسبتاً دقیقتر برحسب فاصلهٔ حفاظت دربخش ۱.۱۴ داده خواهد شد. درابتدا پلاسما درارتباط باالکترونیك گازی مورد نظر بود (تخلیه الکتریکی در گازها، قوسهای الکتریکی، شعله‌ها)؛ اما اکنون بیشتر در جهت حل مسائل اختر فیزیك نظری و مسئلهٔ مهار یونها در رآکتورهای گرما هسته‌ای (گداخت) مطالعه

---

* این فصل را می‌توان بدون آنکه به‌تداوم بحث لطمه‌ای بخورد، حذف کرد.

1. Langmuir, *Physical Review*, 33, p. 954 (1929).

می‌شود. بحث کاملتر این موضوع درکتابهای مربوط به‌فیزیك پلاسما یافت می‌شود.[1]

زمینهٔ کلی مطالعاتی که برهم‌کنش گازهای یونیده بامیدانهای الکترومغناطیسی تابع زمان را دربرمی‌گیرند دینامیك پلاسما خوانده می‌شود. برای بسیاری از مسائل دراین زمینه که ازمهمترین وجالبترین مسائل‌اند، غیرممکن است که بتوان پلاسما راکاملا با یك فرمولبندی مطلقاً ماکروسکوپی، بررسی کرد. درعوض، لازم است آنچه راکه اصطلاحاً نظریهٔ جنبشی خوانده می‌شود، به‌کار ببریم. حرکت یونها والکترونهای منفرد رابايد مطالعه کرد؛ وبرخوردآنها باذرات دیگر را باید ازطریق حل معادلهٔ انتقال بولتزمن به‌حساب آورد. بنابراین برای مسائل پلاسما یك فرمولبندی دقیق وجود دارد ولی به‌طورکلی حل آنها بجزدرمواردی که تعدادی ازجملات معادلهٔ بولتزمن قابل صرفنظرکردن باشند، بسیار مشکل است. باوجود این، سه‌نوع فرمولبندی تقریبی وجود داردکه به‌کمك آنها می‌توان بینش زیادی دربارهٔ آنچه درداخل پلاسما اتفاق می‌افتد، به‌دست‌آورد.

اولین روش، نظریهٔ تعادل است. این روش مبتنی براین فرض است که برخوردهای بین ذرات باردار برای برقراری توزیع سرعت مشهورماکسول ـ بولتزمن درداخل‌پلاسما کافی است:

$$N_j(\mathbf{v})\,dv_x\,dv_y\,dv_z = N_{oj}\left(\frac{m_p}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-m_p v^2/2kT}\,dv_x\,dv_y\,dv_z$$

که در آن N_{oj} تعداد ذرات نوع j موجود در واحد حجم پلاسماست، v_x (الی آخر) مؤلفه‌های سرعت‌اند، m_p جرم ذرات نوع j و T دمای مطلق است. بنابراین خواص انتقال وخواص جنبشی را می‌توان برحسب این توزیع سرعت محاسبه‌کرد.

دومین روش تقریبی عبارت است از نظریهٔ مدار که حرکت ذرات باردار (یونها و الکترونها) را درمیدانهای الکتریکی ومغناطیسی مشخص شده ازقبل بررسی می‌کند. این میدانها می‌توانند هم تابع مکان وهم تابع زمان باشند. هنگامی که برخوردهای بین ذرات نقش عمده ندارند، به‌عبارت دیگر، هنگامی که مسافت‌آزاد میانگین برای برخوردها در مقایسه باابعاد مشخصهٔ مداربزرگ است، نظریهٔ مدارتقریب خوبی برای حرکت ذره در پلاسماست. تحت این شرایط اثر برخوردها می‌تواند به‌عنوان یك اختلال درنظر گرفته شود، ومسئلهٔ عمده این است که‌کاری کنیم که میدان الکترومغناطیسی «مشخص شده از قبل» خود سازگارباشد؛ به‌بیان دیگر، میدان مشخص شده ازقبل باید برابر مجموع میدانهای خارجی ومیدان ایجاد شده توسط ذرات دوران‌کننده باشد.

سومین روش تقریبی، فرمولبندی هیدرومغناطیسی است که درآن ازمعادلات الکترو-مغناطیس کلاسیك (معادلات ماکسول) همراه با معادلات کلاسیك حرکت سیالات استفاده

---

1. T.J. M, Boyd and J.J. Sanderson, *Plasma Dynamics* (New York: Barnes and Noble, 1969); and F. F. Chen, *Introduction to Plasma Physics* (New York: Plenum Press, 1974).

می‌شود. واضح است که بحث هیدرومغناطیسی تنها یك توصیف ماکروسکوپی از پلاسماست؛ این بحث هنگامی که مسافت آزاد میانگین درمقایسه بافواصل فیزیکی مورد نظر درسیستم پلاسما خیلی کوچك باشد، تقریب خوبی است. تصویر هیدرومغناطیسی برای مبحث حرکت جمعی ذرات درپلاسما، مثلا مبحث نوسانات پلاسما، برای شروع خیلی خوب است.

روش دقیق نظریهٔ جنبشی برای پلاسما خارج ازمحدودهٔ این کتاب است. بااستفاده از تقریبهایی که در بالا مطرح شد می‌توان دربارهٔ بسیاری از خواص مهم پلاسماها بحث کرد. برای سادگی فرض می‌کنیم که پلاسما متشکل است از الکترونها (بار، $-e$) و یونهایی که درمجموع تنها یك بارمثبت دارند (بار، $+e$)؛ ممکن است اتمهای خنثی نیز وجود داشته باشند، ولی ما ازپیچیدگیهایی مثل برخوردهای یونندهٔ وبازترکیب الکترونها ویونها چشمپوشی می‌کنیم.

در بخش ۱.۱۴ ومجدداً در بخش ۸.۱۴، ما به پلاسمایی که درشرایط ساکن یاحالت پایاست برمی‌خوریم که درآن نظریهٔ تعادل کاملا مناسب است. از طرف دیگر، دربخشهای ۲.۱۴ و ۳.۱۴، بیشتر باحرکت مجزای ذرات سروکارخواهیم داشت که درآن نظریهٔ مدار قابل استفاده است. بالاخره، در بخشهای ۴.۱۴ تا ۷.۱۴ دربارهٔ بعضی از جنبه‌های دینامیکی پلاسما بحث خواهیم کرد و این کار را در چارچوب هیدرومغناطیسی انجام خواهیم داد.

۱.۱۴ خنثایی الکتریکی در پلاسما

یکی ازمهمترین خواص پلاسما این است که می‌کوشد ازنظر الکتریکی خنثی بماند؛ به‌عبارت دیگر، پلاسما می‌کوشد که بارهای مثبت ومنفی فضایی را درهرجزء حجم ماکروسکوپی متوازن کند. یك عدم توازن جزئی درچگالیهای بار فضایی، باعث ایجاد نیروهای قوی الکتروستاتیکی می‌شود که هرجا که مقدور باشد در جهت حفظ خنثایی عمل می‌کنند. از طرفی، اگر پلاسما عمداً تحت تأثیریك میدان الکتریکی خارجی قرار بگیرد، چگالیهای بارفضایی طوری خودرا تنظیم می‌کنند که قسمت عمدهٔ پلاسما ازتأثیرمیدان محافظت شود.

حال یك مثال نسبتاً ساده را بررسی می‌کنیم. فرض کنید بارکروی $+Q$ داخل یك پلاسما بشود ودرنتیجه پلاسما را تحت تأثیریك میدان الکتریکی قرار دهد. درواقع، بار $+Q$ به‌تدریج خنثی می‌شود زیرا مدام ذرات باردار پلاسما باآن برخورد می‌کنند، ولی اگرجسم باردار از لحاظ فیزیکی فوق‌العاده کوچك باشد، این عمل مدت زیادی طول می‌کشد. دراین مدت، ازنظرانرژی برای الکترونها بهتر خواهد بود که به‌طرف این بار نزدیك شوند، درصورتی که یونهای مثبت سعی می‌کنند ازاین بار دورشوند. تحت‌شرایط تعادل (به‌بخش ۳.۵ رجوع کنید)، احتمال وجود ذره‌ای باردار درناحیه‌ای به‌خصوص که انرژی پتانسیل آن U است، متناسب است باضریب بولتزمن، $\exp(-U/kT)$. بنابراین چگالی الکترون N_e بامعادلهٔ زیرداده می‌شود

$$N_e = N_\circ \exp\left(e\frac{\varphi-\varphi_\circ}{kT}\right) \qquad (۱.۱۴)$$

که درآن φ پتانسیل موضعی، $\varphi_\circ$ پتانسیل مرجع (پتانسیل پلاسما)، T دمای مطلق پلاسما و k ثابت بولتزمن است. $N_\circ$ چگالی الکترونی در ناحیه‌هایی است که در آنجا $\varphi=\varphi_\circ$ است.

اگر درناحیه‌هایی که درآنجا پتانسیل برابر $\varphi_\circ$ است، چگالی یون مثبت نیز، $N_\circ$ باشد، چگالی یون مثبت N_i بامعادلهٔ زیرداده می‌شود

$$N_i = N_\circ \exp\left(-e\frac{\varphi-\varphi_\circ}{kT}\right) \qquad (۲.۱۴)$$

پتانسیل φ ازحل معادلهٔ پواسون به‌دست می‌آید

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = -\frac{1}{\varepsilon_\circ}(N_i e - N_e e) = \frac{2N_\circ e}{\varepsilon_\circ}\sinh\left(e\frac{\varphi-\varphi_\circ}{kT}\right) \qquad (۳.۱۴ \text{ الف})$$

این معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی است، بنابراین باید به‌طورعددی انتگرال گیری شود. از طرف دیگر، یك جواب تقریبی برای معادلهٔ (۳.۱۴ الف) که در دمای زیاد دقیق است، برای منظورما دراینجا کافی است. اگر $kT > e\varphi$ باشد، $\sinh(e\varphi/kT) \approx e\varphi/kT$ است و

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = \frac{2N_\circ e^2}{\varepsilon_\circ kT}(\varphi-\varphi_\circ) \qquad (۳.۱۴ \text{ ب})$$

که جواب این معادله به‌صورت زیراست

$$\varphi = \varphi_\circ + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ r}\exp\left(-\frac{r}{h}\right) \qquad (۴.۱۴)$$

در اینجا r فاصله از بارکروی $+Q$ است و h فاصلهٔ حفاظ دبی است که بامعادلهٔ زیر داده می‌شود

$$h = \left(\frac{\varepsilon_\circ kT}{2N_\circ e^2}\right)^{1/2} \qquad (۵.۱۴)$$

بنابراین توزیع مجدد الکترونها ویونها درگاز به‌نحوی است که بار Q راکاملا درفاصله‌ای

چند برابر h مستور می‌کند.

یك گاز یونیده درصورتی پلاسما خوانده می‌شود که طول دبی، h، در مقایسه باسایر ابعاد فیزیکی مورد نظر، کوچك باشد. مادامی که گاز تا اندازهٔ زیادی یونیده باشد، این امرمحدودیت چندانی ایجاد نمی‌کند؛ در $T = ۲۰۰۰\mathrm{K}$ و $N_۰$ برابر با $۱۰^{۱۸}$ الکترون یا یون برمترمکعب، طول دبی برابر $۲٫۲ \times ۱۰^{-۶}\mathrm{m}$ است.

۲.۱۴ مدارهای ذره و حرکت رانشی (سوقی) درپلاسما

مداریك ذرهٔ باردار q راکه درمیدان الکتریکی ومغناطیسی ازقبل مشخص شده‌ای حرکت می‌کند، می‌توان مستقیماً ازمعادلهٔ نیرو به‌دست‌آورد

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (۶.۱۴)$$

خواهیم دیدکه بهتراست بامیدانهایی که پیکربندی نسبتاً ساده‌ای دارند شروع کنیم وسپس محاسبات را به‌میدانهایی‌که درفضا به‌کندی تغییرمی‌کنند تعمیم دهیم.

اعمال یك میدان الکتریکی ثابت روی پلاسما خیلی جالب توجه نیست زیراپلاسما باایجاد پوشینهٔ نازکی ازبارفضایی که قسمت‌عمدهٔ پلاسمارا ازتأثیرمیدان حفاظت‌می‌کند، خودرابامیدان‌وفق‌می‌دهد. ازطرفی، یك میدان‌مغناطیسی ثابت باعث می‌شود که ذرات بدون تغییری درتوزیع بارفضایی حول خطوط میدان بچرخند.

مورد اول. میدان مغناطیسی یکنواخت. $\mathbf{E} = ۰$.

این همان حرکتی است که در مسئلهٔ ۱.۸ شرح داده شد، ولی چون این حرکت اساس حرکتهای پیچیده‌ترمداری را درپلاسماها تشکیل می‌دهد، ما آن‌را دراینجا به‌تفصیل بررسی می‌کنیم. اما، تأکید می‌کنیم که مورداول برای خیلی‌ازوضعیتهای دیگر، علاوه برپلاسماها، قابل کاربرد است، مثلا این مورد اساس عمل شتاب‌دهنده‌های ذرات مثل سیکلوترون و بتاترون است.

نیروی لورنتس همواره برسرعت $\mathbf{v}$ ذرهٔ باردارعمود است؛ بنابراین انرژی جنبشی ذره ثابت باقی می‌ماند

$$K = \frac{۱}{۲} m_p v^۲ = \mathrm{const.} \qquad (۷.۱۴)$$

که درآن m_p جرم ذره است. بهتر است سرعت $\mathbf{v}$ را به‌دو مؤلفه تجزیه کنیم: $\mathbf{v}_{\parallel}$ موازی با $\mathbf{B}$ و $\mathbf{v}_{\perp}$ در سطح عمود بر $\mathbf{B}$. چون میدان روی $\mathbf{v}_{\parallel}$ تأثیری ندارد $K_{\parallel} = ۱/۲\ m_p v_{\parallel}^۲$

نیز ثابت باقی می‌ماند. درنتیجه

$$K_{\perp}=\frac{1}{2}m_p v_{\perp}^2=K-K_{\parallel} \qquad (۸.۱۴)$$

نیز ثابت حرکت است.

نیروی لورنتس شتاب روبه‌مرکز فراهم می‌آورد. بنابراین

$$qv_{\perp}B=\frac{m_p v_{\perp}^2}{R}$$

و R (شعاع مدار) بامعادلهٔ زیرداده می‌شود

$$R=\frac{m_p v_{\perp}}{qB} \qquad (۹.۱۴)$$

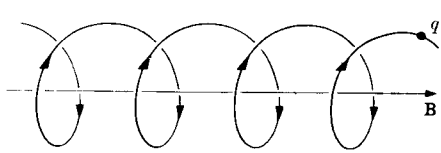
شعاع R اغلب به نام شعاع لارمور ذره خوانده می‌شود. حرکت کامل ذرهٔ باردار به‌صورت چرخش ذره دریك مدار (مدار لارمور) همراه باحرکت یکنواخت مرکز مدار، یا مرکز راهنما، درامتداد خط میدان مغناطیسی، توصیف می‌شود. حرکت مارپیچی حاصل درشکل ۱.۱۴ نشان داده شده است.

میدان مغناطیسی طوری عمل می‌کند که باخم کردن مسیرذرات درمدارهای دایره‌ای، پلاسما را محصور نگه دارد. البته در امتداد میدان محصورشدگی مشاهده نمی‌شود. برای یونها والکترونهایی که انرژی جنبشی یکسان $K_{\perp}$ دارند، الکترونها در مدارهای خیلی کوچکتری دوران می‌کنند، نسبت شعاع لارمور یون به‌الکترون برابر است با جذر نسبت جرم آنها.

یك کمیت جالب که بعداً آن را به‌کارخواهیم برد گشتاورمغناطیسی ذرهٔ چرخان است. برحسب تعریف، گشتاورمغناطیسی، m، بامعادلهٔ زیرداده می‌شود

$$m=\text{جریان}\times\text{مساحت}$$

$$=\frac{qv_{\perp}}{2\pi R}\pi R^2=\frac{K_{\perp}}{B} \qquad (۱۰.۱۴)$$



شکل ۱.۱۴ حرکت ذره دریك میدان مغناطیسی یکنواخت.

باتوجه به‌شکل ۱.۱۴ می‌بینیم که m درجهت مخالف میدان مغناطیسی است و بنابراین یك گشتاور دیامغناطیسی است.

مورد دوم.میدانهای الکتریکی و مغناطیسی یکنواخت. $\mathbf{E}\perp\mathbf{B}$.

اگریك میدان الکتریکی ویك میدان مغناطیسی به‌طور همزمان روی پلاسما اعمال شوند و $\mathbf{E}$ عمود بر $\mathbf{B}$ باشد، پلاسما تمایلی به‌ایجاد پوشینه‌ندارد؛ درواقع، خواهیم‌دیدکه بارهای فضایی مثبت ومنفی بایکدیگردریك جهت رانده می‌شوند. برای سادگی،سرعت $\mathbf{v}$ی ذره را به‌صورت زیرمی‌نویسیم

$$\mathbf{v}=\mathbf{u}_d+\mathbf{v}' \qquad (۱۱.۱۴)$$

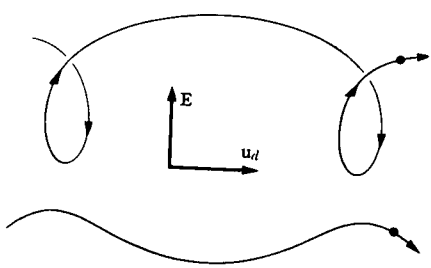
دراین صورت می‌توان معادلهٔ (۶.۱۴) را به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{u}_d\times\mathbf{B}+\mathbf{v}'\times\mathbf{B}) \qquad (۱۲.۱۴)$$

می‌توان $\mathbf{u}_d$ را طوری انتخاب کردکه دو جملهٔ اول طرف راست این معادله یکدیگر را حذف کنند

$$\mathbf{u}_d=\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B^2} \qquad (۱۳.۱۴)$$

نیروی باقی مانده، $q\mathbf{v}'\times\mathbf{B}$، درست برابرهمان نیرویی‌است‌که در مورد اول بررسی‌شد. بنابراین حرکت کلی ذره از سه جمله تشکیل شده است: (الف) سرعت ثابت $\mathbf{v}'_{\parallel}$



شکل ۲.۱۴ میدانهای الکتریکی و مغناطیسی عمود برهم. حرکت ذره درصفحهٔ عمود برمیدان مغناطیسی. این شکل مسیر دو یون بابار مخالف یکدیگر واندازه حرکتهای اولیهٔ مختلف را نشان می‌دهد.

موازی با $\mathbf{B}$، (ب) چرخش حول خطوط میدان مغناطیسی با فرکانس زاویه‌ای $v'_{\perp}/R = qB/m_p$، و (ج) یك سرعت رانشی ثابت $u_d = E/B$ عمود برهردو بردار $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$. دومثال ازاین نوع حرکت درشکل ۲.۱۴ نشان داده شده است.

سرعت $\mathbf{u}_d$ که بامعادلهٔ (۱۳.۱۴) تعریف شده است، سرعت رانشی پلاسما یاسرعت رانشی الکتریکی نامیده می‌شود. باید به‌این نکتهٔ مهم توجه داشت که $\mathbf{u}_d$ به‌بار، جرم، یا سرعت ذره بستگی ندارد؛ بنابراین تمام اجزای پلاسما با یکدیگر در یك امتداد رانده می‌شوند،گرچه چرخش انفرادی آنها ممکن است بسیار متفاوت باشد.

معادلهٔ (۱۳.۱۴) به‌صورت‌غیرنسبیتی به‌دست آمد؛ اگر $\mathbf{u}_d$ یا $\mathbf{v}$ به c (سرعت‌نور) نزدیك شوند، درآن صورت، معادلهٔ (۱۱.۱۴) باید باعبارتی که باتبدیل لورنتس سازگار است، جایگزین شود. از طرفی، ازاین جایگزینی نتیجه خواهد شد که معادلهٔ (۱۳.۱۴) برای سرعت رانشی مسادامی که $|\mathbf{E}| < c|\mathbf{B}|$ باشد همواره صحیح است.[۱] اگر $|\mathbf{E}| > c|\mathbf{B}|$ باشد، میدان مغناطیسی نمی‌تواند ازحرکت ذره درجهت $\mathbf{E}$ جلوگیری کند.

مورد سوم. میدان مغناطیسی نسبت به‌زمان ثابت، ولی تابع فضا. $\mathbf{E} = 0$.

فرض کنیم که ذره‌ای باردار دریك میدان مغناطیسی تقریباً یکنواخت حرکت می‌کند که‌در آن‌خطوط میدان به‌تدریج درفضا همگرا می‌شوند. حرکت ذره‌را می‌توان به‌عنوان‌اختلالی از مدارمارپیچی شکل ۱.۱۴ بررسی کرد.

حرکت شبیه است به‌آنچه در شکل ۳.۱۴ نشان داده شده است؛ خواننده به‌آسانی می‌تواند تحقیق کند که نیرویی وجود داردکه می‌کوشد ذره‌را به‌داخل ناحیه‌ای که میدان مغناطیسی آن ضعیفتراست بکشد. برای‌آنکه مسئله به‌طوردقیق مشخص شود، فرض می‌کنیم که خط شاری که ازمرکزراهنما می‌گذرد، برمحور z منطبق ومیدان مغناطیسی تقارن سمتی حول محور z داشته باشد. ازمؤلفهٔ z معادلهٔ (۶.۱۴) داریم

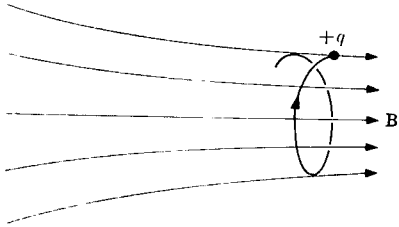
$$F_z = m_p \frac{dv_z}{dt} = qv_\theta B_r|_{r=R} \qquad (۱۴.۱۴)$$

اما $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$، یا برای حالت مورد نظر

---

۱. ساده‌ترین راه بحث دربارهٔ موردی‌که درآن $|\mathbf{E}|$ کمتراز $c|\mathbf{B}|$ است ولی درمقایسه باآن کوچك نیست، این است‌که با یك تبدیل لورنتس هم سرعت ذره وهم میدانها را تبدیل کنیم. سرعت دستگاه متحرك با $\mathbf{u}_d$ [معادلهٔ (۱۳.۱۴)] و نیرو در دستگاه متحرك بامعادلهٔ زیر داده می‌شود

$$\mathbf{F}' = q(\mathbf{v}' \times \mathbf{B})\left(\frac{c^2 - u_d^2}{c^2}\right)^{1/2}$$



شکل ۳.۱۴

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r)+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0$$

چون خطوط میدان به‌تدریج همگرا می‌شوند، می‌توان $\partial B_z/\partial z$ را روی سطح مقطع‌مدار ثابت گرفت، درنتیجه خواهیم داشت

$$B_r|_{r=R}=-\frac{1}{2}R\frac{\partial B_z}{\partial z} \qquad (۱۵.۱۴)$$

به‌علاوه، v_θ شبیه به $v_\perp$ درمورد اول است. باقراردادن این‌مقادیر درمعادلهٔ (۱۴.۱۴) نتیجه خواهد شد

$$m_p\frac{dv_\parallel}{dt}=-\frac{1}{2}qRv_\perp\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$=-m\frac{\partial B_z}{\partial z} \qquad (۱۶.۱۴)$$

که شکل اخیر با استفاده ازمعادلهٔ (۱۰.۱۴) به‌دست‌آمده است.

انرژی جنبشی کل ذره، K، درمیدان مغناطیسی تغییر نمی‌کند، زیرا نیروی لورنتس که همواره عمود برسرعت است هیچ کاری انجام نمی‌دهد. $K_\perp$ که درمعادلهٔ (۸.۱۴) تعریف شد، وهمچنین $K_\parallel$، دراینجا ثابت نیستند، ولی می‌توان نوشت

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_pv_\parallel^2\right)=\frac{d}{dt}(K-K_\perp)$$

$$=-\frac{dK_\perp}{dt}$$

$$=-\frac{d}{dt}(mB_z) \qquad (۱۷.۱۴)$$

که شکل اخیر ازمعادلهٔ (۱۵.۱۴) نتیجه می‌شود. از طرفی، می‌توان معادلهٔ (۱۶.۱۴) را در $v_{\parallel}=\partial z/\partial t$ ضرب کرد و نتیجهٔ زیررا به‌دست آورد

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_p v_{\parallel}^2\right)=-m\frac{\partial B_z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$=-m\frac{dB_z}{dt} \qquad (۱۸.۱۴)$$

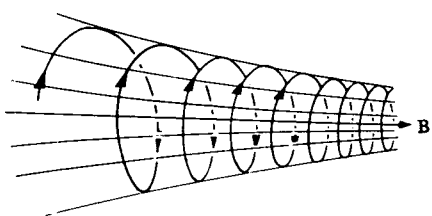
که در آن d/dt نمایندهٔ مشتق زمانیی است که درطول مسیردینامیکی گرفته می‌شود. از مقایسهٔ معادله‌های (۱۷.۱۴) و (۱۸.۱۴) ملاحظه می‌شود که گشتاورمغناطیسی m یك ثابت حرکت است. ولی باید تأکید کرد که این یك نتیجهٔ تقریبی‌است وتامادامی که B_z به کندی تغییر کند، صادق است. اگر $\mathbf{B}$ درفواصلی ازمرتبهٔ R زیاد تغییر کند، تقریبهایی که دراثبات معادلهٔ (۱۸.۱۴) به‌کاررفت، صادق نخواهد بود.

یکی دیگر از مطالبی که مورد توجه ماست، این واقعیت است که ذره مجبور است روی سطح لولهٔ شارحرکت کند. دلیل این مطلب این است که شار مغناطیسیی که از مدار عبورمی کند، عبارت است از

$$\Phi=B_z\pi R^2=\pi B_z\frac{m_p^2 v_{\perp}^2}{q^2 B_z^2}$$

$$=\frac{2\pi m_p}{q^2}\frac{K_{\perp}}{B_z}=\frac{2\pi m_p}{q^2}m \qquad (۱۹.۱۴)$$

که درآن m ثابت است. حرکت ذره درشکل ۴.۱۴ به‌طورطرحوارنشان داده شده‌است. مؤلفهٔ z (مؤلفهٔموازی) نیرو، معادلهٔ(۱۶.۱۴)، همواره درجهتی‌است که ذره رابه‌داخل



شکل ۴.۱۴ ذره درمسیری مارپیچی که مرتباً تنگتروفشرده‌ترمی‌شود می‌چرخد و سرانجام منعکس شود.

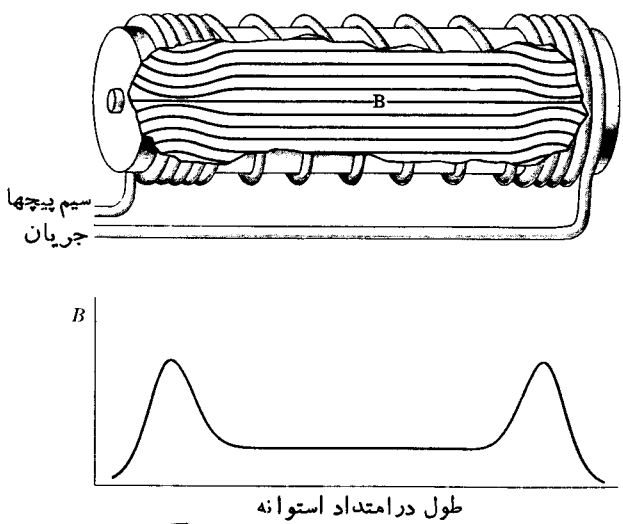
قسمت ضعیفتر میدان شتاب می‌دهد. بدین ترتیب ذرات چرخانی که به‌نواحی قویتر میدان نزدیك می‌شوند، کند می‌شوند، به‌عبارت دیگر $v_{\parallel}$ کاهش می‌یابد. ازطرف دیگر، اصل بقای انرژی ایجـاب می‌کند که همزمان باکاهش $v_{\parallel}$ حرکت مداری $v_{\perp}$ باید سریعتر شود. اگر میدان مغناطیسی به‌حد کافی همگرا بـاشد، ذره در مسیری مارپیچی که مرتباً تنگتر می‌شود می‌چرخد تا سرانجام به‌ناحیهٔ میدان ضعیفترمنعکس شود.

۳.۱۴ آینه‌های مغناطیسی

نتایج بخش قبل نشان می‌دهندکه یك میدان مغناطیسی که تدریجاً همگرا می‌شود، در اصل، می‌تواند پلاسما را محصور کند. در امتداد عمود برجهت اصلـی میدان ، مسیر ذرات در مدارهای دایره‌ای خم می‌شود؛ در امتداد جهت اصلی میدان، سرعت ذرات تدریجـاً کم می‌شود تا سرانجـام توسط خطوط میدان همگرا منعکس شوند. این پیکربندی میدان را آینهٔ مغناطیسی می‌نامند. درهردستگاه محصورسازی حداقل بایددوآینه به‌کاررود؛ دستگاهی ازاین نوع درشکل ۵.۱۴ نشان داده شده است.

باوجود این، دستگاه آینه نمی‌تواند تمام ذرات را محصور کند. خطوط میدان را نمی‌توان تاحد یك نقطه همگراکرد؛ بنابراین یك میدان مغناطیسی، B_m، بزرگ (ولی نه بی‌نهایت بزرگ) در روی آینه وجود دارد. اگرذره «انرژی جنبشی محوری» بسیارزیادی داشته باشد، میدان آینه آن‌را برنمی‌گرداند، ومی‌تواند ازدستگاه خارج شود.

چون گشتاور مغناطیسی یك ثابت حرکت است، بنابر معادلهٔ (۱۰.۱۴)، خواهیم



شکل ۵.۱۴ دستگاه آینهٔ مغناطیسی.

داشت

$$\frac{K_{0\perp}}{B_0}=\frac{K_{1\perp}}{B_{1\perp}}$$

دراینجاشاخص ۰ به‌ناحیهٔ مرکزی شکل ۵.۱۴ وشاخص ۱ به‌نقطهٔ انعکاس مربوط می‌شود. درهرصورت، درنقطهٔ انعکاس، $K_\perp=K$ است. به‌علاوه، K، انرژی جنبشی کل، یك ثابت حرکت است. برای اینکه ذره منعکس شود، میدان آینه B_m باید بزرگتر از B_1 باشد؛یعنی

$$B_m>B_1=\frac{K}{K_{0\perp}}B_0$$

یا

$$\frac{K_{0\perp}}{K}>\frac{B_0}{B_m} \qquad (۲۰.۱۴\text{الف})$$

اگرسرعت اولیهٔ v_0 باامتداد میدان زاویهٔ θ_0 بسازد، در این صورت $v_{0\parallel}=v_0\cos\theta_0$ و $v_{0\perp}=v_0\sin\theta_0$. بنابراین، معادلهٔ (۲۰.۱۴ الف)، به‌عنوان شرط انعکاس، به‌شکل زیر درمی‌آید

$$\sin^2\theta_0>\frac{B_0}{B_m} \qquad (۲۰.۱۴\ \text{ب})$$

مثلا، اگرمیدان آینه صد برابرشدیدتر از B_0 باشد، دراین‌صورت ذراتی‌که بردارسرعتشان زاویه‌ای کمتر از ۶ درجه باامتداد میدان می‌سازد، ازدستگاه خارج می‌شوند.

برخورد میان ذرات در ناحیهٔ مرکزی دستگـاه آینه یك توزیع سرعت همسانگرد تولید می‌کند. بنابراین نتیجهٔ نهایی این برخوردها این است‌که تعدادی از ذرات دائمـاً به‌ناحیه‌ای از فضای سرعت پراکنده می‌شوندکه بتوانند ازدستگاه‌خارج شوند. در نتیجهٔ این برخوردها ذرات می‌توانند به‌طورعمود برامتداد میدان نیز «پخش» وسرانجام خارج شوند.

۴.۱۴ معادلات هیدرومغناطیسی

حرکتهای جمعی ذرات درپلاسما، مانند «اثرتنگش» و نوسانات پلاسما به‌بهترین وجه در فرمولبندی هیدرومغناطیسی بررسی می‌شوند. بنابراین توصیف، پلاسما به‌عنوان یك سیال کلاسیك درنظرگرفته می‌شودکه ازمعادلات متعارف هیدرودینـامیك پیروی می‌کند. ولی، این سیال ازنظرالکتریکی رساناست وبنابراین باید نیروهای الکترومغناطیسی را صریحاً به‌حساب آورد.

نیروی وارد برواحد حجم پلاسما را می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{J}\times\mathbf{B} - \nabla p \qquad (۲۱.۱۴)$$

که درآن $\mathbf{J}$ چگالی جریان و p فشارسیال است. نیروهای دیگر، مثل نیروهای گرانشی وچسبندگی‌را نیزمی‌توان منظور کرد، اما دراینجا برای‌سادگی ازآنها چشمپوشی‌می‌کنیم. به‌علت خنثی بودن تقریبی الکتریکی پلاسما، لازم نیست جملهٔ $\rho\mathbf{E}$ را همراه با جملات دیگرنیرو درمعادلهٔ (۲۱.۱۴) منظورکنیم. البته، درمعادلهٔ پواسون باید انحراف از خنثی بودن را درنظرگرفت، ولی اغلب درمعادلات دینامیکی ازآنها چشمپوشی می‌شود.

برای توازن اندازه حرکت لازم است که

$$\zeta\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \zeta\left[\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right]$$
$$= \mathbf{J}\times\mathbf{B} - \nabla p \qquad (۲۲.۱۴)$$

که این معادلهٔ حرکت (یا معادلهٔ اویلر) سیال است. دراینجا ζ، چگالی جرمی پلاسما و $\mathbf{v}$ سرعت سیال‌آن است. درمسائلی که حرکت هیدرودینامیکی خیلی بزرگ‌نیست، می‌توان غالباً ازجمله‌ای که شامل $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$ است، صرفنظر کرد.[۱]

گاهی ساده‌تر است که جملهٔ $\mathbf{J}\times\mathbf{B}$ درمعادلهٔ (۲۱.۱۴) را به‌عنوان جمله‌ای تعبیر کردکه قسمتی ازآن ناشی از «فشار مغناطیسی» است. این‌کار را می‌توان به‌کمك قانون مداری‌آمپر، معادلهٔ (۲۹.۹)، که برای حالت پلاسما به‌صورت زیراست

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} \qquad (۲۳.۱۴)$$

وبه‌کمك اتحاد برداری زیر

$$\mathbf{B}\times\nabla\times\mathbf{B} = \nabla\left(\frac{1}{2}B^2\right) - (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} \qquad (۲۴.۱۴)$$

انجام داد. بدین ترتیب

$$\mathbf{J}\times\mathbf{B} = -\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\times\nabla\times\mathbf{B}$$
$$= -\nabla\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} \qquad (۲۵.۱۴)$$

---

۱. اگرچه درمسائل جریان پایا که درآنها جملهٔ $\partial\mathbf{v}/\partial t$ صریحاً صفرمی‌شود، نمی‌توان از آن صرفنظر کرد.

بنابراین، کمیت $B^2/2\mu_0$، که چگالی انرژی‌مغناطیسی است، نقش فشارمغناطیسی p_m را بازی می کند

$$p_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad (۲۶.۱۴)$$

به‌هر حال، باید تأکید کرد که $-\nabla p_m$ در اغلب موارد فقط قسمتی از نیروی مغناطیسی را به‌دست می‌دهد؛ باقیماندهٔ نیرو ازجملهٔ $(1/\mu_0)(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}$ به‌دست می‌آید. هنگامی که $\mathbf{J}=0$ است، دوجملهٔ طرف راست معادلهٔ (۲۵.۱۴) یکدیگر را حذف می کنند.

به‌عنوان مثالی از سودمندی مفهوم فشارمغناطیسی، یك میدان مغناطیسی تك‌جهت را درنظر بگیرید. معادلهٔ $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ تضمین می کند که $\mathbf{B}$ در امتداد میدان تغییر نکند. چون تغییرات مکانی فقط می‌توانند درامتدادهای عمود بر $\mathbf{B}$ صورت گیرند، برای این‌موردنتیجه می‌شود که $(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}=0$. بنابراین معادلهٔ (۲۱.۱۴) به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\mathbf{F}_v = -\nabla(p+p_m)$$

وشرط لازم برای تعادل حالت ساکن هرجزء حجم عبارت است از

$$p+p_m = \text{const}.$$

به‌عبارت دیگر، برای این مثال، مجموع فشار سیال و فشار مغناطیسی باید مستقل از مکان باشد.

علاوه برمعادلهٔ (۲۲.۱۴) ومعادلات ماکروسکوپی حاکم برالکتریسیته ومغناطیس[1]، ما به‌دورابطهٔ اضافی دیگراحتیاج داریم تا فرمولبندی هیدرومغناطیسی‌راکامل کنیم. این دو رابطه عبارت‌اند از (۱) معادلهٔ پیوستگی برای سیال پلاسما

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \nabla(\zeta\mathbf{v}) = 0 \qquad (۲۷.۱۴)$$

و (۲) معادله‌ای که $\mathbf{J}$ را به کمیتهای میدان مربوط سازد. رابطهٔ اخیرصرفاً تعمیمی ازقانون اهم است که تحت شرایط معین می‌تواند به‌صورت زیرنوشته شود

$$\mathbf{J} = g(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \qquad (۲۸.۱۴ \text{ الف})$$

---

۱. معادلات ماکسول‌دربخش ۲.۱۶ آمده‌اند. خواننده‌توجه‌خواهدکرد که درمعادلهٔ (۱۰.۱۶)، قانون اصلی مداری‌آمپر، با منظورداشتن جریان جابه‌جایی $\partial\mathbf{D}/\partial t$ تغییریافته‌است. عملا، جریان جابه‌جایی نقش مهمی در اغلب پدیده‌های هیدرومغناطیسی بازی نمی‌کند.

دراینجا $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ میدان الکتریکی حرکتی است که دراثرحرکت هیدرودینامیکی پلاسمادر میدان مغناطیسی به‌وجود آمده است، و g رسانندگی پلاسماست.

تقریبی که غالباً درنظر گرفته می‌شود تقریب رسانندگی بینهایت است. مزیت این تقریب در آن است که می‌توان معادلات هیدرومغناطیسی را به کمك آن خیلی ساده کرد و تصویر بسیار واضحی از فرایندهایی که درپلاسما صورت می گیرد به‌دست داد. در بعضی مسائل، به خصوص در مسائل اختر فیزیکی ، این تقریب کاملا خوب است. برای حالت رسانندگی بینهایت، قانون اهم به شکل زیردرمی آید

$$g \to \infty$$

$$\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}=0 \qquad (۲۸.۱۴\ ب)$$

رسانندگی بینهایت (یا، برای مقاصد عملی ، رسانندگی خیلی زیاد) پیامد بسیار مهمی دارد. این پیامدآن است که شارمغناطیسی درداخل پلاسما منجمد می‌شود. اگرمعادلهٔ (۲۸.۱۴ ب) باشکل دیفرانسیلی قانون القای فاراده ترکیب شود، خواهیم داشت

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \qquad (۲۹.۱۴)$$

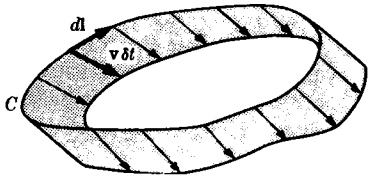
باانتگرال‌گیری از مؤلفهٔ عمودی این معادله روی یك سطح ثابت S نتیجه می‌شود

$$\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,da=\int_S \nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{n}\,da$$

یا

$$\frac{d\Phi}{dt}=\oint_C \mathbf{v}\times\mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}=\oint_C \mathbf{B}\cdot(d\mathbf{l}\times\mathbf{v}) \qquad (۳۰.۱۴)$$

که درآن C منحنی بستهٔ ثابتی درفضاست که پلاسما دراثر حرکت هیدرودینامیکی از آن عبورمی‌کند. ازشکل ۶.۱۴ می‌بینیم که $\oint_C d\mathbf{l}\times\mathbf{v}$ را می‌توان به‌عنوان افزایش در واحد زمان مساحت سطح کلاهکی درنظر گرفت که منحنی C محصور می‌کند، و $\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}\times\mathbf{v}$ شار مغناطیسی مربوط به‌این افزایش مساحت است. طبق معادلهٔ (۳۰.۱۴) تغییر در واحد زمان شار ازمیان منحنی بستهٔ C درست همان چیزی است که ما باید از نظر هندسی براین اساس که تمام‌خطوط شارهمراه باسیال حرکت می کرد، محاسبه می کردیم. بنابراین به‌این نتیجه می‌رسیم که خطوط میدان مغناطیسی در داخل مادهٔ رسانای کامل، «منجمد» شده‌اند.



شکل ۶.۱۴

۵.۱۴ اثر تنگش

تمایل یك جریان الکتریکی شدید درفشرده ماندن درجهت عرضی، هنگام تخلیه در داخل پلاسما، به «اثر تنگش» معروف است. عامل اصلیی که باعث تنگش می‌شود، عبارت است ازبرهم‌کنش جریان بامیدان مغناطیسی خودش، یا به عبارت دیگر، عبارت است از نیروی جاذبهٔ بین رشته‌های موازی جریان. اثرتنگش اولین بارتوسط بنت، و بعداً به‌طور مستقل توسط تانکس پیش‌بینی شد.[1] تصویر دیگری از تنگش راکه تا اندازه‌ای بـاتصویر بنت اختلاف دارد و ناپایداری ذاتی آن را نشان می‌دهد، رزنبلات داده است.[2]

یك تخلیهٔ جریان با تقارن استوانه‌ای را در داخل پلاسما درنظر بگیرید. از قانون مداری آمپر، میدان مغناطیسی درفاصلهٔ r از محورتخلیه بامعادلهٔ زیرداده می‌شود

$$B(r)=\frac{\mu_\circ}{r}\int_\circ^r J(r')r'\,dr' \qquad (۳۱.۱۴)$$

ازاین معادله نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial B}{\partial r}=-\frac{\mu_\circ}{r^۲}\int_\circ^r J(r')r'\,dr'+\mu_\circ J(r)$$

$$=-\frac{۱}{r}B(r)+\mu_\circ J(r) \qquad (۳۲.۱۴)$$

نیروی مغناطیسی در واحد حجم عبارت است از

$$\mathbf{F}_v=\mathbf{J}\times\mathbf{B}=-J(r)B(r)\mathbf{a}_r \qquad (۳۳.۱۴)$$

---

1. W.Bennett , *Physical Review*, 45. 890(1934); L. Tonks, *Physical Review*, 56,369(1939).

2. M.Rosenbluth, «Dynamics of a Pinched Gas,» from *Magnetohydrodynamics*,edited by Rolf Landshoff (Stanford University Press, 1957).

که درآن $\mathbf{a}_r$ بردار یکه‌ای درجهت r است. بـاحذف $J(r)$ بین (۳۲.۱۴) و (۳۳.۱۴) نتیجه می‌شود

$$F_v = -\frac{1}{\mu_0} B \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{1}{\mu_0 r} B^2 \qquad (۳۴.۱۴)$$

این نیرورا می‌توان به‌یك فشارمعادل، p_{eq} تبدیل کرد، به‌این‌صورت که بنویسیم $F_v = -\partial p_{eq}/\partial r$ وسپس از آن انتگرال بگیریم

$$p_{eq} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{1}{\mu_0} \int_0^r \frac{B^2}{r} dr \qquad (۳۵.۱۴)$$

آنچه مخصوصاً مورد نظرماست، فشار روی مرزهای‌عرضی‌تخلیه‌است. به‌پیروی ازپیشنهاد رزنبلات، ما بررسی خودرا به‌موردی‌که درآن رسانندگی زیاد است یعنی، موردی‌که در آن خطوط میدان مغناطیسی نمی‌توانند زیادبه‌داخل سیال رسانا نفوذکند محدود می‌کنیم.[1] دراین مورد، انتگرال موجود درمعادلهٔ (۳۵.۱۴) شامل هیچ سهمی ازناحیهٔ تخلیه نیست. درمرز تخلیه ($r = R$) فشار درست همان مقداری است که ماآن رافشار مغناطیسی، p_m، نامیدیم

$$p_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2(R) \qquad (۳۶.۱۴)$$

ازمعادلهٔ (۳۵.۱۴) واضح است‌که فشارمغناطیسی درناحیهٔ خارج یکنواخت، ولی درداخل تخلیه صفریا خیلی‌کوچك است. بنابراین اثرتنگش را می‌توان ناشی ازایجاد ناگهانی‌یك فشار مغناطیسی درناحیهٔ خارج ازتخلیه، دانست.

تنگش تخلیه منجربه تراکم‌پلاسما می‌شود. اگر تنگش می‌توانست به‌نحو پایداری منقبض شود، این عمل تاجایی ادامه می‌یافت‌که فشار مغناطیسی در ناحیهٔ خـارج مساوی فشارسیال در داخل تخلیه شود. حال پلاسما را مانند یك‌گازکامل درنظرمی‌گیریم‌که فشار سیال‌آن $p = NkT$ است. از این رو، درشعاع نهایی تخلیه، R، داریم

$$\frac{1}{2\mu_0} B^2(R) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{4\pi^2 R^2} I^2 = NkT$$

که درآن I عبارت است از جریان در داخل تخلیه. این عبارت را می‌توان برای جریان حل‌کرد

---

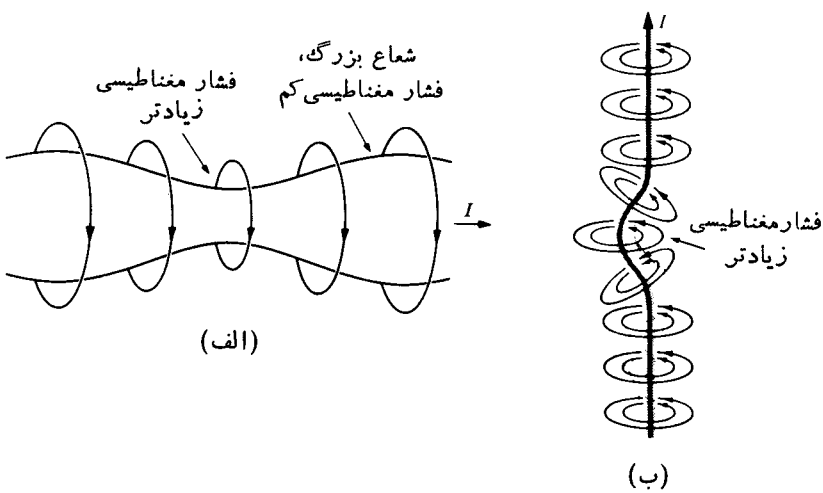
۱. عدم نفوذ خطوط میدان ازنتایج بخش قبل وازاین حقیقت نتیجه می‌شودکه هم جریان وهم میدان مغناطیسی در داخل تخلیه، هردو درابتدا خیلی‌کوچك‌اند.

$$I^{۲} = ۲\left(\frac{\mu_{۰}}{۴\pi}\right)^{-۱} \pi R^{۲} N k T$$

$$= ۲\left(\frac{\mu_{۰}}{۴\pi}\right)^{-۱} A_{۰} N_{۰} k T$$

که درآن باتوجه به اصل بقای ذرات ازرابطهٔ $A_{۰}N_{۰} = \pi R^{۲} N$ استفاده کرده‌ایم. دراینجا $A_{۰}$ سطح مقطع اولیهٔ تخلیه، $N_{۰}$ چگالی ذرهٔ اولیهٔ آن، $\mu_{۰}/۴\pi = ۱۰^{-۷}\,\mathrm{T \cdot m/A}$، و $k = ۱٫۳۸ \times ۱۰^{-۲۳}\,\mathrm{J/K}$ ثابت بولتزمن است. برای به‌دست‌آوردن دمای $۱۰^{۸}$ کلوین، که برای‌یك رآکتورگرما هسته‌ای (گداخت) لازم‌است، با $A_{۰}$ برابر ۰٫۰۴ مترمربع و $N_{۰}$ برابر $۱۰^{۲۱}$ ذره برمترمکعب، جریان تنگشی حدود یك میلیون آمپرلازم است.

مشاهده می‌شود که تنگش پدیده‌ای است که ذاتاً ناپایدار است. فشارمغناطیسی روی مرزتخلیه به‌شعاع تخلیه و همچنین به‌جزئیات هندسی آن بستگی دارد. اگر تغییرات فشار ناشی از آشفتگیهای کوچك چنان باشند که باعث افزایش آنها شوند، آشفتگیها رشد خواهند کرد. چینهای کوچك روی سطح احاطه کنندهٔ تخلیه، همچنین تابها جزو این گروه از آشفتگیهایند که باعث به وجود آمدن ناپایداریهای سوسیسی و تابی در پلاسمای تنگیده می‌شوند (شکل ۷.۱۴).



شکل ۷.۱۴ ناپایداریها در پلاسمای تنگیده: (الف) ناپایداری سوسیسی، (ب) ناپایداری تابی.

۶.۱۴ دستگاههای محصورسازی مغناطیسی برای گداخت گرماهسته‌ای کنترل شده

بیشتر توجه کنونی ما به‌فیزیك پلاسما ازنیاز به‌توسعهٔ منابع بدیل انرژی وامکان استفاده از پلاسمای گرماهسته‌ای دوتریوم وتریتیوم به‌عنوان منبع انرژی ناشی می‌شود. اثر تنگش که دربخش قبل دربارهٔ آن بحث شد ومفهوم آینهٔ مغناطیسی (بخش ۳.۱۴) هر دو، به‌منظور محصور سازی پلاسمای گرماهسته‌ای به‌روش مغناطیسی ، در دستگاههای رآکتور گداخت آزمایشی به‌کار می‌روند. هر چند که اثر تنگش فطرتاً ناپایدار است، می‌توان باافزودن مؤلفه‌های دیگری به میدان‌مغناطیسی و با بهینه‌سازی پارامترهای طرح ، پایداری آن را بهبود بخشید.

یکی از کمیتهای مهم برای طرح دستگاههای رآکتور گداخت نسبت فشار جنبشی ($p=NkT$) است به‌فشار کل (فشارجنبشی به‌علاوهٔ فشار مغناطیسی p_m).این نسبت را بانماد β نشان می‌دهند

$$\beta=\frac{p}{[B^2/2\mu_0+p]}=\frac{NkT}{[B^2/2\mu_0+NkT]} \qquad (۳۷.۱۴)$$

که درآن N مجموع چگالیهای یون والکترون در پلاسماست. رآکتورهای گداخت را عموماً بامقدار βی آنها مشخص می‌کنند. مقادیر کمتراز ۰٫۰۱ را βی پایین و مقادیر بین ۰٫۱ تا ۱٫۰ را βی بالا می‌گویند. پلاسما یا دوتریوم است یا یك پلاسمای دوتریوم ـ تریتیوم بادمایی بیش از 10^8K و چگالی تعدادآن بین 10^{19}m^{-3} تا 10^{22}m^{-3} است. محصورسازی لازم نیست که مطلق ودائمی باشد، ولی باید دورهٔ آن (τ) به‌حدکافی طولانی باشد تاانرژی تولید شده درواکنش گرماهسته‌ای بتواند ازانرژی مصرف‌شده دربرقراری شرایط پلاسمایی بیشترشود. اعتقاد براین است که درصورت برقرار شدن شرط لاوسون محصورسازی درحد مناسبی است. این شرط عبارت است از

$$N_i\tau > 10^{20}\text{m}^{-3}\text{s} \quad \text{در} \quad T > 10^8\text{K} \qquad (۳۸.۱۴)$$

که درآن N_i چگالی یون درپلاسماست.

فعالترین زمینهٔ تحقیقات مربوط به محصورسازی مغناطیسی شامل رده‌ای از رآکتورهاست که برای محصور سازی پلاسماهای چنبره‌ای شکل طراحی شده‌اند، و مهمترین‌آنها رآکتورهای توکامك است. نام این رآکتورازیك رشته‌آزمایشهای توکامك که درسازمان انرژی اتمی کورخاتوف درمسکو انجام شده گرفته شده است، ولی اکنون این نام به‌آن رده از رآکتورهای آزمایشی اطلاق می‌شود که با تنگش پخشی چنبره‌ای مشخص می‌شوند. توکامك‌دستگاهی‌است بامقدار βی پایین تا متوسط. میدان مغناطیسی در

پلاسمای این رآکتور یك مؤلفهٔ قطبیوار[1] و یك مؤلفهٔ چنبره‌ای دارد، مؤلفهٔ قطبیوار ناشی ازجریانی است که در پاسخ به‌میدان الکتریکی چنبره‌ای برقرار می‌شود، ومؤلفهٔ چنبره‌ای توسط پیچه‌های خارجی ایجـاد می‌شود ، لذا خطوط میدان برایند یك سری منحنیهـای مارپیچی در درون پلاسمای چنبره‌ای شکل هستند. هم‌اکنون درسراسرجهان چندین‌دستگاه توکامك وجود داردکه ازآن میان می‌توان «چنبرهٔ بزرگ‌پرینستون»راکه یکی‌ازبزرگترین رآکتورهای آمریکاست نام برد؛ این ماشین با جریان پلاسمایی‌کار می‌کندکه حداکثرآن ۶ر۱ میلیون‌آمپراست.

رآکتور گداخت تتا ـ تنگش ورآکتورآینهٔ مغناطیسی مثالهایی‌ازوسایل‌آزمایشی‌اند که مقدار βی‌آنها زیاد است. در مفهوم تتا ـ تنگش از پلاسمای چنبره‌ای شکـل استفاده می‌شود، ولی چگالی پلاسمای‌آن به‌مراتب ازتوکامك بیشتراست. آینهٔ مغناطیسی‌یك‌دستگاه محصورسازی‌کامل نیست، زیرا پلاسما ازانتهاهای‌آن به‌خارج نشت می‌کند؛ باوجوداین، این دستگاه می‌تواند توان باریکه‌ای‌راکه به‌آن تزریق می‌شود تقویت‌کند. آینهٔ مغناطیسی وسیله‌ای بامقدار βی زیاداست ولی چگالی پلاسمایی‌که درآن به‌کار می‌رود از رآکتور تتا ـ تنگش کمتراست.[2]

۷.۱۴ نوسانهای پلاسما و حرکت موجی

یکی ازخواص جالب پلاسما توانایی آن درحفظ نوسانات وانتشار امواج است. انواع مختلف رفتارنوسانی امکان‌پذیراست، و به‌علت مشخصهٔ غیر خطی معادلات هیدرودینامیك، این نوسانات می‌توانند کاملا پیچیده بـاشند. باوجود این، لازم است که ماتوجه خود را

---

۱. اگرپلاسمای چنبره‌ای‌را قطع‌کنیم (مثلا،درشکافی‌که درشکل۱۴.۹ با d مشخص شده است) وآن‌را به صورت استوانهٔ مستقیمی درآوریم، آنگاه مؤلفهٔ قطبیوار همان مؤلفهٔ سمتی و مؤلفهٔ چنبره‌ای همان مؤلفهٔ محوری خواهد بود.

۲. برای بحث مفصلتری دربارهٔ دستگاههای رآکتورگداخت‌آزمایشی خواننده می‌تواند به‌یکی ازمقالات جامع زیر رجوع کند.

«Fusion Reactor Systems» by F. L. Ribe, *Reviews of Modern Physics*, **47**, 7 (1975).

«The Tokamak Approach in Fusion Research» by B.Coppi and J. Rem, *Sci. Am*, **227**, no. 1 (July 1972).

«The Prospects of Fusion Power» by W. C, Gough and B. J. Eastland, *Sci. Am*, **224**, no. 2 (Feb. 1971).

«Fusion Energy in Context: Its Fitness for the Long Term» by J. P. Holdren, *Science*, **200**, 168 (April 1978).

به‌موارد نسبتاً ساده‌ای که در آزمایشهای تحت کنترل مشاهده شده است محدود کنیم.

مورد ۱. نوسانهای الکتروستاتیکی الکترون پلاسما

نوسانهای الکتروستاتیکی درپلاسما اولین بار توسط تانکس ولانگمویر[1] بررسی شدند. در واقع، دو نوع نوسان الکتروستاتیکی ممکن وجود دارد: (۱) نوسانهای با فرکانس زیاد که آن‌قدر سریع‌اند که یونهای سنگین نمی‌توانند انجام دهند، و (۲) نوسانهای یونها که آن‌قدر آهسته‌اند که الکترونها همواره به‌طور آماری دراطراف یونها توزیع می‌شوند. ما تنها مورد اول‌را که به نوسانهای الکترون معروف است بررسی می‌کنیم.

توجه خودرا به ناحیه‌ای ازپلاسما معطوف می‌کنیم که حاوی چگالی یکنواختی از یونهای مثبت، N، باشد. یون منفی وجود ندارد. درابتدا، الکترونها نیزچگالی یکنواخت N دارند، ولی‌فرض کنید که هرالکترون به اندازهٔ ξ درجهت x تغییر مکان می‌یابد؛ ξ از مختصات y و z مستقل ودرمرزهای پلاسما صفراست. تغییر مکان الکترونها باعث ایجاد آشفتگی‌درپلاسمای خنثی‌می‌شود ودرنتیجهٔ آن یك‌بارالکتریکی درهرجزء حجم $\Delta x\Delta y\Delta z$ به‌وجود می‌آید

$$\delta\rho\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z = -Ne\,\Delta y\,\Delta z\left[\xi-\left(\xi+\frac{\partial\xi}{\partial x}\Delta x\right)\right]$$

$$=\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,Ne\,\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

حرکت الکترونها یك میدان الکتریکی $\mathbf{E}(x,\ t)$ ایجاد می‌کند که به‌علت تقارن مسئله در جهت x است. بنابراین

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\delta\rho$$

یا

$$\frac{\partial E}{\partial x}=\frac{1}{\varepsilon_0}Ne\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

که اگرازمعادلهٔ اخیرانتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$E=\frac{Ne}{\varepsilon_0}\xi \qquad (۳۹.۱۴)$$

---

1. L. Tonks and I. Langmuir, *Physical Review*, 33, 195 (1929).

دراینجا، ثابت انتگرال گیری صفر درنظر گرفته شده است، زیرا تشکیل پوشینه، پلاسمارا ازمیدان الکتریکی یکنواخت محافظت می کند.

نیروی وارد برهرالکترون برابراست با $-eE$، که برطبق معادلهٔ (۳۹.۱۴)، باتغییر مکان ξ متناسب است. همچنین دیده می‌شود که این یك نیروی برگرداننده است. بنابراین، هرالکترون دراطراف مکان اصلی خود بایك حرکت هماهنگ ساده نوسان می کند. معادلهٔ حرکت برای هرالکترون به‌صورت زیر است

$$m_e\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0}\xi=0 \qquad (۴۰.۱۴)$$

بنابراین، فرکانس پلاسما، $f_p=\omega_p/2\pi$ بامعادلهٔ زیرتعریف می‌شود

$$\omega_p=\left(\frac{Ne^2}{m_e\varepsilon_0}\right)^{1/2} \qquad (۴۱.۱۴)$$

که در آن m_e جرم الکترون است. به‌عنوان یك مثال عددی، چنانچه چگالی ذره برابر با 10^{18} الکترون برمترمکعب باشد، خواهیم داشت: $f_p=9.0\times10^9\,s^{-1}$.

مورد ۲. امواج هیدرومغناطیسی یا امواج آلفن

امواج هیدرومغناطیسی نشان‌دهندهٔ انتشار واقعی موج در محیط رسانایی است که تحت تأثیریك میدان مغناطیسی ثابت قرارگرفته باشد. این رفتار، که اولین بار توسط آلفن[1] در سال ۱۹۴۲ پیش‌بینی شد، بافرمولبندی هیدرومغناطیسی پلاسما که دربخش ۴.۱۴ بررسی شد سازگاراست.

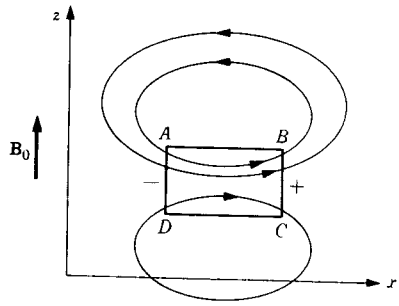
قبل از شروع به‌بررسی و حل معادلات دیفرانسیل، می‌خواهیم فرایندهای فیزیکی پلاسما را تاآنجا که امکان دارد ازیك دیدگاه مقدماتی بررسی کنیم. یك پلاسمای نامتناهی را درنظربگیرید که تحت تأثیرمیدان مغناطیسی ثابت ویکنواخت $\mathbf{B}_0$ که در امتداد محور z است، قرارگرفته است. اگر به‌قسمتی ازپلاسما، قسمت مستطیلی $ABCD$ در شکل ۸.۱۴ که به‌موازات محور y امتداد دارد، سرعت $\mathbf{v}$ در جهت مثبت محور y داده شود، آنگاه به حاملهای بار (یونها و الکترونها) نیرویی معادل

$$q_i(\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0)$$

وارد می‌شود واین نیرو سعی‌می کند حاملهای مثبت ومنفی‌را ازیکدیگر جدا کند. بنابراین،

---

1. H. Alfven, *Cosmical Electrodynamics* (New York: Oxford University Press, Second Edition, 1963).



شکل ۸.۱۴ قسمت $ABCD$ ی پلاسما در جهت مثبت y حرکت می‌کند. جریانهایی که به‌وجود می‌آیند به‌صورت طرحواره رسم شده‌اند.

قسمت $ABCD$ به‌صورت یك منبع emf حرکتی درمی‌آید، و انتهای سمت راست آن می‌کوشد به‌طورمثبت وانتهای سمت چپ به‌طورمنفی باردارشود. ولی چون ما بایك محیط رسانا سروکار داریم، پلاسمایی که در ناحیهٔ خارجی $ABCD$ قرارگرفته است، مدار الکتریکی راکامل می‌کند. تعدادی ازخطوط جریان درشکل نشان داده شده‌اند.

اکنون جریان القایی بامیدان مغناطیسی $\mathbf{B}_0$ برهم‌کنش می‌کند. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که چگالی نیروی $\mathbf{J}\times\mathbf{B}_0$ در قسمت $ABCD$ طوری است که باحرکت آن مخالفت می‌کند، درصورتی که نیروی وارد برقسمتهای خارجی پلاسما طوری است که‌در جهت‌مثبت y به‌آن‌شتاب می‌دهد. سرانجام $ABCD$ کند می‌شود وحرکت‌خودرا به‌قسمتهای مجاورپلاسما منتقل می‌کند. این عمل همین‌طور ادامه می‌یابد، وتمام فرایند تکرارمی‌شود. بدین ترتیب آشفتگی هرچه فراتردرجهت $\pm z$ انتشار می‌یابد.

اکنون به‌معادلات دیفرانسیل برمی‌گردیم. فرض‌کنید $\mathbf{B}=\mathbf{B}_0+\mathbf{B}_1$، که درآن $\mathbf{B}_0$ میدان ثابت یکنواخت موازی با محور z است، و $\mathbf{B}_1$ میدان مغناطیسی است که توسط جریانهای القایی به‌وجودآمده‌است. با به‌کاربردن نتایج بندقبل به‌عنوان‌راهنما،می‌خواهیم ساده‌ترین نوع حرکت موجی را پیداکنیم که مؤلفه‌های J_x، E_x، v_y و B_{1y} آن غیرصفر وسایر مؤلفه‌های آن صفرباشند.ازقانون مداری آمپرداریم

$$-\frac{\partial B_{1y}}{\partial z}=\mu_0 J_x \qquad (۴۲.۱۴)$$

ومعادلهٔ اویلرسیال، معادلهٔ (۲۲.۱۴)، دورابطهٔ زیررا به‌دست می‌دهد

$$\zeta\frac{\partial v_y}{\partial t}=-J_x B_0 \qquad (۴۳.۱۴ \text{ الف})$$

و

$$0 = J_x B_{1y} - \frac{\partial p}{\partial z} \qquad (۴۳.۱۴ \text{ ب})$$

می‌توان معادلات (۴۳.۱۴) را با معادلهٔ (۴۲.۱۴) ترکیب کرد ونتایج زیررا به‌دست آورد

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{B_0}{\mu_0 \zeta} \frac{\partial B_{1y}}{\partial z} \qquad (۴۴.۱۴)$$

و

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial (B_{1y}^2)}{\partial z} \qquad (۴۵.۱۴)$$

قانون تعمیم یافتهٔ اهم را می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$E_x = -v_y B_0 + \frac{1}{g} J_x$$

$$= -v_y B_0 - \frac{1}{g\mu_0} \frac{\partial B_{1y}}{\partial z} \qquad (۴۶.۱۴)$$

بالاخره، قانون فاراده نتیجهٔ زیررا به‌دست می‌هد

$$\frac{\partial B_{1y}}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} \qquad (۴۷.۱۴)$$

اگر v_y را بین معادلات (۴۴.۱۴) و (۴۶.۱۴)، و E_x را بین معادلهٔ حاصل و معادلهٔ (۴۷.۱۴) حذف کنیم، بافرض اینکه ζ ثابت است، خواهیم داشت

$$\frac{\partial^2 B_{1y}}{\partial t^2} = \frac{B_0^2}{\mu_0 \zeta} \frac{\partial^2 B_{1y}}{\partial z^2} + \frac{1}{g\mu_0} \frac{\partial^3 B_{1y}}{\partial z^2 \partial t} \qquad (۴۸.۱۴)$$

که این معادلهٔ حاکم برانتشارامواج آلفن است.

اگررسانندگی gی پلاسما بینهایت بود، در آن صورت (۴۸.۱۴) بامعادلهٔ موجی که دربارهٔ حل آن دربخشهای ۴.۱۶ و ۵.۱۶ بحث خواهیم کرد، یکسان می‌شد. دراین شرایط، معادلهٔ (۴۸.۱۴) موج تخت غیرمیرایی را توصیف می‌کندکه به موازات محور z

باسرعت فاز زیردرحرکت است

$$v_p = \frac{B_\circ}{\sqrt{\mu_\circ \zeta}} \qquad (۴۹.۱۴)$$

به‌عنوان یك‌مثال‌عددی، فرض کنید $B_\circ = ۰٫۰۱\,\mathrm{T}$، $\zeta = ۱۰^{-۵}\mathrm{kg/m^۳} = ۱۰^{-۸}\mathrm{g/cm^۳}$؛ دراین‌صورت $v_p = ۲۸۰۰\,\mathrm{m/s}$.

برای آنکه ببینیم درصورت بینهایت نبودن رسانندگی نتیجهٔ حاصل چیست،جوابی را به‌شکل زیر برای معادلهٔ (۴۸.۱۴) درنظرمی گیریم

$$B_{۱y} = b_۱ \exp\left[\alpha z + i\omega t\right]$$

این جواب درصورتی قابل قبول است که

$$\alpha^۲ = \frac{-\omega^۲}{v_p^۲ + i\omega/g\mu_\circ} \qquad (۵۰.۱۴)$$

و v_p همان باشد که درمعادلهٔ (۴۹.۱۴) تعریف شد. برای میرایی کوچك

$$\alpha \approx \pm\left(i\frac{\omega}{v_p} + \frac{\omega^۲}{۲g\mu_\circ v_p^۳}\right) \qquad (۵۱.۱۴)$$

بنابراین جواب معادلهٔ (۴۸.۱۴) یك‌موج تخت میراست که درجهت $\pm z$ انتشار می‌یابد. فاصلهٔ δ که درآن دامنهٔ موج به $۱/e$ مقداراولیه‌اش کاهش می‌یابد، عبارت است از

$$\delta = \frac{۲g\mu_\circ v_p^۳}{\omega^۲} = \frac{۲gB_\circ^۳}{\mu_\circ^{۱/۲}\zeta^{۳/۲}\omega^۲} \qquad (۵۲.۱۴)$$

۸.۱۴ کاربرد کاوه‌ها برای اندازه‌گیریهای پلاسما

یك پلاسما حاوی الکترونهـا، یونها، و احتمالا اتمهای خنثی است . الکترونها انرژی خودشان‌را ازمیدانهای الکتریکی‌موجود درمرز پلاسما وهمچنین ازبرخوردهای‌یونده‌ای که باعث به‌وجود آمدنشان می‌شود، کسب می‌کنند. سرعت الکترونها از طریق برخورد بایونها کتره‌ای می‌شود. بنابراین، می‌توانیم دربارهٔ دمای الکترون، T_e، صحبت کنیم. در واقع، برای پلاسماهایی که درآزمایشگاه تولید می‌شوند (جرقه‌ها، تخلیه‌های‌الکتریکی)، ملاحظه می‌شودکه توزیع سرعت الکترونها به‌صورت توزیع ماکسول ـ بولتزمن است،که

البته این بدان معنی است که می‌توان الکترونها را با دمایی مشخص کرد. دمای الکترون درپلاسماهای معمولی که ازجرقه تولید می‌شود در گسترهٔ چند هزار تا ۵۰,۰۰۰K است.

بحث اخیر، تاحدودی، درموردیونهای سنگین نیز صادق است؛ ولی یونها باالکترونها لزوماً دمای یکسانی ندارند. اگر بین انرژی جنبشی متوسط یونها والکترونها اختلاف قابل توجهی وجود داشته باشد، دراین صورت برای ازبین رفتن اختلاف انرژی، هرذره نیاز به‌هزاران برخورد دارد، واین امرممکن است به‌زمانی بیش‌ازعمرمتوسط هریون درسیستم نیازداشته باشد.

کمیتهای جالبی که باید تعیین شوند عبارت‌اند ازدماهای ذرات، چگالیهای ذرات، وچگالیهای جریانهای کتره‌ای درپلاسما. لانگمویر و مات ـ اسمیت[1] نشان‌داده‌اند که باوارد کردن یك الکترود فلزی کوچك، یا یك «کاوه»، به‌داخل پلاسما واعمال پتانسیلهای مختلف به‌آن واندازه‌گیری جریانهای جمع شدهٔ متناظر، می‌توان بعضی ازکمیتهای بالارا به‌طور تجربی تعیین کرد. الکترودی که درپتانسیل پلاسما نباشد، باپوشینه‌ای احاطه می‌شود که پلاسما را ازمیدان آشفته‌سازالکترود محافظت کند. این پوشینه، دربیشتر موارد کاملا نازك است، واگرکاوه درپتانسیل منفی، صفر، یااندکی مثبت نسبت به‌پلاسما نگه داشته‌شود، تودهٔ پلاسما را خیلی کم آشفته می‌سازد.

درشکل ۹.۱۴، رابطهٔ ولتاژ ـ جریان برای یك کاوهٔ نوعی نشان داده شده است. هنگامی که کاوه در پتانسیل پلاسما باشد، هم جریان کتره‌ای الکترونها و هم جریان کتره‌ای یونهارا جمع آوری می‌کند. ولی جریان کتره‌ای الکترون خیلی بزرگتر از جریان کتره‌ای یون است، به‌طوری که برجریان اخیرغالب است. دلیل این مطلب آن است که الکترونها میانگین سرعتهایی به‌مراتب بزرگتر ازیونها دارند. وقتی کاوه را منفی کنیم، الکترونها را دفع می‌کند و در نتیجه جریان الکترون کاهش می‌یابد؛ در نقطهٔ φ_F، معروف به پتانسیل شناوری، جریان خالص ازکاوه صفراست؛ بالاخره، اگرکاوه را به‌اندازهٔ کافی منفی کنیم، فقط چگالی جریان یون J_i جمع‌آوری می‌شود. اگرکاوه را نسبت به‌پلاسما اندکی مثبت کنیم، یونها دفع می‌شوند وچگالی جریان الکترون J_e جمع آوری می‌شود. اگرکاوه را بیشترمثبت کنیم، مانند یك آنود ثانویه عمل می‌کند و رفتار جریان ـ ولتاژ پیچیده می‌شود، که جزئیات آن بستگی به‌ماهیت پلاسما دارد.

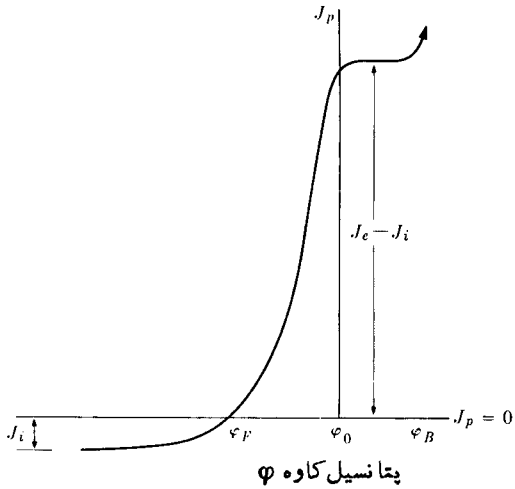
پلاسمایی را درنظرمی گیریم که حاوی یونهای مثبت (یك‌باریونیده) والکترونهاست. درناحیهٔ خنثی، چگالی یون مساوی چگالی الکترون است

---

1. I. Langmuir and H. Mott-Smith, *General Electric Review*, **27**,449, (1924); *Physical Review*, **28**, 727 (1926).

برای بحث جدیدتری دربارهٔ کاوه‌های الکتریکی به کتب زیررجوع کنید

F. F. Chen, *op. cit.*, or Chapter 4 of *Plasma Diagnostic Techniques*, edited by R. H. Huddlestone and S. L. Leonard (New York: Academic Press, 1965).



شکل ۹.۱۴ مشخصهٔ جریان ـ ولتاژ کاوه‌ای که داخل پلاسما شده است.
φ_0 پتانسیل پلاسماست.

$$N_i = N_e = N_0 \qquad (۵۳.۱۴)$$

اگر توزیع الکترون بادمای T_e مشخص شود، در این صورت بنابر نظریهٔ جنبشی، چگالی جریان کتره‌ای الکترون عبارت است از

$$J_e = \frac{1}{4} N_0 e\bar{v} = N_0 e \left(\frac{kT_e}{2\pi m_e}\right)^{1/2} \qquad (۵۴.۱۴)$$

که در آن $\bar{v}$ میانگین سرعت گرمایی الکترونهاست. این جریان الکترون جمع‌آوری شده در واحد سطح کاوه در ناحیهٔ $\varphi = \varphi_0$ تا $\varphi = \varphi_B$ است. اگر کاوه را منفی کنیم، چگالی جریان الکترون کاهش می‌یابد، زیرا تنها کسری از الکترونها انرژی کافی دارند تا به‌سد پتانسیل نفوذ کنند

$$J'_e = J_e \exp\left(e\frac{\varphi - \varphi_0}{kT_e}\right) = \frac{1}{4} N_e e\bar{v} \exp\left(e\frac{\varphi - \varphi_0}{kT_e}\right), \quad \varphi \leqslant \varphi_0 \qquad (۵۵.۱۴)$$

ازطرف دیگر، چگالی جریان یون یعنی J_i، در ناحیهٔ پتانسیل منفی، ثابت است. بنابراین جریان کل کاوه عبارت است از

$$J_p = J_e \exp\left(e\,\frac{\varphi-\varphi_\circ}{kT_e}\right) - J_i$$

که از آن دمای الکترون به‌دست می‌آید

$$T_e = \frac{e}{k}\left[\frac{d}{d\varphi}\ln\left(J_p + |J_i|\right)\right]^{-1} \qquad (۵۶.۱۴)$$

اکنون‌می‌توان $N_\circ$ چگالی ذره را ازمعادلهٔ (۵۴.۱۴) بااستفاده ازمقدارتجربی J_p مربوط به‌ناحیهٔ مسطح‌درسمت راست $\varphi_\circ$ درشکل، تعیین کرد. بایدتوجه‌داشت که معادلهٔ(۵۶.۱۴) وشکل مشخصهٔ $J_p-\varphi$ به‌قدر مطلق φ بستگی ندارند ؛ بنابراین پتانسیل کاوه می‌تواند نسبت به‌هرپتانسیل ثابتی (مثلا، پتانسیل یك الکترود) درپلاسما اندازه‌گیری شود.

منحنیهای مشخصهٔ‌کاوه‌ها کاملا درك‌شده‌اند، ولی‌قبل ازاینکه بتوانیم اطلاعات‌به‌دست آمده از اندازه‌گیریهای کاوه را بدون ابهام تعبیر کنیم، لازم است شرایط معینی برقرار باشد: (۱) کاوه باید درمقایسه بامسافت‌آزاد میانگین الکترونها و یونها کوچك باشد، (۲) پوشینه باید درمقایسه باابعاد کاوه کوچك باشد، (۳) یونش در پوشینه باید قابل چشمپوشی باشد، (۴) گسیل ثانوی از کاوه باید قابل چشمپوشی باشد، و (۵) باید هیچ نوسانی درپلاسما وجود نداشته باشد. علاوه براین شرایط، به‌طورضمنی فرض شده است که میدان مغناطیسی وجود ندارد؛ کاربردکاوه‌ها درپلاسماهای حاوی میدانهای مغناطیسی را بوهم، بورهوپ، و ماسی[1] بررسی کرده‌اند.

مااین بخش را بابحثی درمورد پوشینهٔ احاطه‌کنندهٔ کاوه‌که به‌طور منفی باردارشده است، خاتمه می‌دهیم. معادلهٔ حاکم برپتانسیل φ درناحیهٔ پوشینه، معادلهٔ پواسون است

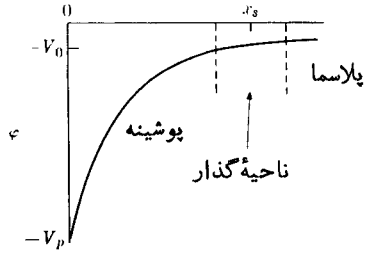
$$\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_\circ}e(N_i - N_e) \qquad (۵۷.۱۴)$$

که‌درآن N_i و N_e چگالیهای موضعی‌یون والکترون‌اند. منحنی تقریبی φ نسبت به‌فاصله ازکاوه درشکل۱۰.۱۴رسم شده است. برای سادگی می‌توان از رابطهٔ $\varphi = -V$ استفاده کرد، که درآن V یك کمیت مثبت است، و چون ضخامت پوشینه در مقایسه باابعاد کاوه کوچك است، می‌توانیم معادلهٔ (۵۷.۱۴) را به‌صورت یك بعدی‌آن به‌کاربریم

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{1}{\varepsilon_\circ}e(N_i - N_e) \qquad (۵۸.۱۴)$$

---

1. *Characteristics of Electrical Dischargcs in Magnetic Fields*, edited A. Guthrie and R. K. Wakerling , (New York: McGraw-Hill, 1949), Chapter 2; Huddlestone and Leonard, *op. cit*, Chapter 4.



شکل ۱۰.۱۴ منحنی پتانسیل نسبت به‌فاصله از کاوه.

الکترونها تقریباً به نحوی آماری درپوشینه توزیع شده‌اند

$$N_e = N_\circ \exp\left[\frac{-e(V-V_\circ)}{kT_e}\right] \qquad (۵۹.۱۴)$$

که در آن $N_\circ$ چگالی الکترون درپتانسیل $V_\circ$ — پلاسماست. چگالی یون به‌طریق زیر به‌جریان یون J_i، مربوط می‌شود

$$J_i = N_i e v_i = N_i e\sqrt{\frac{۲eV}{m_i}} \qquad (۶۰.۱۴ \text{ الف})$$

درپلاسما، خارج ازپوشینه جریان یون بامعادلهٔ زیرداده می‌شود

$$J_i = N_\circ e v_{i\circ} = N_\circ e\sqrt{\frac{۲eV_\circ}{m_i}} \qquad (۶۰.۱۴ \text{ ب})$$

به‌شرطی که پتانسیل پلاسما، $V_\circ$ —، نسبت به‌نقطه‌ای اندازه گیری‌شودکه درآنجا یونهای مثبت تشکیل می‌شوند. بنابراین

$$N_i = N_\circ\sqrt{\frac{V_\circ}{V}} \qquad (۶۱.۱۴)$$

باقراردادن معادلات (۵۹.۱۴) و (۶۱.۱۴) در معادلهٔ (۵۸.۱۴)، معادلهٔ معروف به‌معادلهٔ پوشینهٔ پلاسما به‌دست می‌آید

$$\frac{d^۲V}{dx^۲} = \frac{۱}{\varepsilon_\circ} N_\circ e\left[V_\circ^{۱/۲}V^{-۱/۲} - \exp\frac{-e(V-V_\circ)}{kT_e}\right] \qquad (۶۲.۱۴)$$

می‌توان معادلهٔ اخیررا در $(dV/dx)dx = dV$ ضرب کرد واز حاصل‌ضرب آن انتگرال گرفت. دراین‌صورت خواهیم داشت

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} N_0 e\left[2V_0^{1/2}V^{1/2} + \frac{kT_e}{e}\exp\frac{-e(V-V_0)}{kT_e}\right] + C \qquad (۶۳.۱۴)$$

که درآن ثابت C ازاین شرط به‌دست می‌آیدکه در لبهٔ پوشینه، یعنی جایی که $V = V_0$ است، $dV/dx = 0$ است. بنابراین

$$C = -\frac{1}{\varepsilon_0} N_0 [2eV_0 + kT_e] \qquad (۶۴.۱۴)$$

برای کلیهٔ نقاط داخل پوشینه $(dV/dx)^2 \geqslant 0$ است؛ با بررسی معادلهٔ (۶۳.۱۴)می‌توان دیدکه این شرط فقط درصورتی صادق است که

$$V_0 \geqslant \frac{kT_e}{2e} \qquad (۶۵.۱۴)$$

رابطهٔ بالا را اولین بار بوهم خاطر نشان کرده است.[1] به‌عبارت دیگر، برای تشکیل یك پوشینهٔ پایدار، باید حداقل انرژی جنبشی یونهایی که از پلاسما به‌پوشینه می‌رسند برابر با نصف kT_e باشد. چون پوشینه‌های پایدار همواره تحت این شرایط تشکیل می‌شوند، معادلهٔ (۶۵.۱۴) به‌طورمؤثر V_0 را تعیین می‌کند؛ درواقع، علامت نامساوی در(۶۵.۱۴) را اغلب می‌توان باعلامت مساوی تعویض کرد.

باانتگرال گیری ازمعادلهٔ (۶۳.۱۴) می‌توان ضخامت پوشینه را به‌دست آورد؛ ما این کاررا فقط برای کاوه‌های خیلی منفی انجام می‌دهیم که در مورد آنها می‌توان از N_e چشمپوشی کرد. دراین مورد

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 \approx \frac{4N_0 eV_0}{\varepsilon_0}\left[\left(\frac{V}{V_0}\right)^{1/2} - 1\right] \approx \frac{4N_0 eV_0^{1/2}V^{1/2}}{\varepsilon_0}$$

$$= 2\sqrt{\frac{2m_i}{e}}\,\frac{1}{\varepsilon_0} J_i V^{1/2} \qquad (۶۶.۱۴)$$

که اگرازآن انتگرال بگیریم نتیجه خواهد شد

$$x_s = \frac{4\varepsilon_0^{1/2}V_p^{3/4}}{3(8m_i/e)^{1/4}J_i^{1/2}} \qquad (۶۷.۱۴)$$

---

۱. مراجعه شود به‌فصل سوم کتاب گوتری و ویکرلینگ که درپانوشت صفحهٔ ۳۹۸ آمده است.

۹.۱۴ خلاصهٔ مطالب

گازهای بسیار یونیده رساناهای الکتریکی خوبی هستند؛ پلاسما آن ناحیه‌ای از یك گاز بسیاریونیده است که درآنجا میدان الکتریکی ساکن وچگالی بارخالص تقریباً صفراست. سه شیوهٔ متفاوت برای تحلیل پلاسما عبارت‌اند از نظریهٔ جنبشی تعادل، نظریهٔ مدار، و نظریهٔ هیدرومغناطیسی ماکروسکوپی.

۱. نظریهٔ تعادل، که مبتنی برعامل آماری بولتزمن است، نشان‌می‌دهدکه چنانچه بارخارجی Q در پلاسما قرار داشته باشد در فاصله‌ای موسوم به طول دبی توسط پلاسما محافظت می‌شود. یعنی، پتانسیل کولنی حفاظت نشدهٔ $Q/۴\pi\varepsilon_{\circ}r$ با

$$\varphi=\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}r}\,e^{-r/h}$$

تعویض می‌شود، که درآن طول دبی h عبارت است از

$$h=\sqrt{\frac{\varepsilon_{\circ}kT}{۲N_{\circ}e^{۲}}}$$

۲. نظریهٔ مدارمبتنی است برحرکات ذره تحت تأثیر نیروی

$$\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

دریك میدان مغناطیسی یکنواخت، ذره‌ای به‌جرم m_p به‌آزادی درامتداد خط میدان‌حرکت می‌کند ودرعین حال به‌دورآن می‌چرخد؛ مدارحاصل مارپیچی است که شعاع آن، معروف به‌شعاع لارمور، برابراست با

$$R=\frac{m_p v_{\perp}}{qB}$$

گشتاورمغناطیسی یك ذرهٔ آزاد ازنوع دیامغناطیسی است. اگر میدان نایکنواخت باشد، هنگامی که ذره درامتداد خطوط همگرای میدان به‌درون میدان قویتر حرکت کند به‌دور مارپیچ تنگتری خواهد چرخید؛ ودرعین حال حرکت محوری آن کند و نهایتاً معکوس خواهد شد. نتیجهٔ حاصل یك آینهٔ مغناطیسی است.

۳. شیوهٔ هیدرومغناطیسی مبتنی است برقانون نیروی ماکروسکوپی برای حجم واحد

$$\mathbf{F}_v=\mathbf{J}\times\mathbf{B}-\nabla p$$

که دراینجا p فشار سیال است. گاهی جملهٔ اول‌را می‌توان به‌تقریب برابر بـا $-\nabla p_m$ گرفت که درآن «فشارمغناطیسی» برابراست باچگالی انرژی

$$p_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

اثرتنگش مغناطیسی را می‌توان به‌صورت تراکم پلاسما دراثرفشار مغنـاطیسی خارج آن بررسی کرد.

۴. شیوهٔ تحلیل‌ماکروسکوپی به‌امواج‌پلاسمایی‌نیزمنجرمی‌شود. امواج «الکتروستاتیکی» نوساناتی هستند که، برای الکترونها، درطول موج بینهایت فرکانس آن عبارت است از

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m_e \varepsilon_0}}$$

امواج «آلفن» دریك میدان مغناطیسی یکنواخت B_0، با سرعت فازی حرکت می‌کنند که برابراست با

$$v_p = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \zeta}}$$

مسائل

۱.۱۴ شرط لازم برای آنکه نظریهٔ مدار تقریب خوبی برای حرکت الکترون درپلاسما بـاشد، عبارت است از $\tau \gg 2\pi m_e/Be$، کـه در آن τ زمان متوسط میان دو برخورد است (به‌فصل۷ رجوع کنید) و $2\pi m_e/Be$ دورهٔ تناوب سیکلوترون در میدان مغناطیسی Bاست. نشان دهیدکه این بیان معادل است با $\eta \ll \eta_H$ که درآن $\eta_H \equiv B/N_0 e$ مقاومت ویژهٔ هال[1] است.

۲.۱۴ در یك مسئلهٔ هیدرومغناطیسی با جریان پایا $\mathbf{v}$، $\mathbf{J}$، و $\mathbf{B}$ بریکدیگر عمودند. فرض کنید $\mathbf{v}$ درجهت x است و $\mathbf{v}$، $\mathbf{J}$، و $\mathbf{B}$ فقط توابعی‌ازxاند. همچنین‌فرض‌کنید سطح مقطع کانال (عمود بر x) مستقل از x است. نشان دهیدکه

$$v = v_0 - \frac{1}{2\zeta_0 v_0}\left[2B_0 \int J\,dx + \mu_0 \left(\int J\,dx\right)^2\right]$$

1. Hall

که در آن v_0 سرعت درهنگامی است که $\zeta=\zeta_0$ و $B=B_0$ باشد.

۳.۱۴ معادلهٔ (۶۵.۱۴) را با بررسی معادلهٔ (۶۳.۱۴) نسبت به همسایگی $V\approx V_0$ به‌دست آورید.

۴.۱۴ مشخصهٔ جریان ـ ولتاژ برای کاوه‌ای که در داخل پلاسمای یك لامپ تخلیهٔ جریان فرو برده شده، اندازه‌گیری شده است. سطح مقطع کاوه ۰٫۰۵ سانتیمترمربع است. تمام ولتاژها نسبت به‌یك پتانسیل مرجع ثابت اندازه‌گیری شده‌اند

میلی‌آمپر، I	ولت، φ_p	میلی‌آمپر، I	ولت، φ_p
−۰٫۳۴	۳۵٫۰	−۲۰٫۵	۴۰٫۰
−۰٫۰۹۶	۳۴٫۰	−۲۰٫۴	۳۹٫۰
−۰٫۰۱۱	۳۳٫۰	−۷٫۵	۳۸٫۰
+۰٫۰۳۳	۳۱٫۰	−۲٫۷	۳۷٫۰
+۰٫۰۴۱	۲۹٫۰	−۰٫۹۸	۳۶٫۰

دمای الکترون در پلاسما، چگالی الکترون، و پتانسیل شناوری کاوه را تعیین کنید.

***۵.۱۴** کرهٔ همگنی به شعاع a و رسانندگی الکتریکی σ' با سرعت $\mathbf{v}_0$ — در داخل سیال ناچسبنده و تراکم‌ناپذیری با رسانندگی σ، در حضور میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}_0$ حرکت می‌کند. سرعت $\mathbf{v}_0$ موازی $\mathbf{B}_0$ است. اتلاف ژول را که در اثر جریانهای القایی در سیستم نتیجه می‌شود، محاسبه و با مساوی قرار دادن نتیجه با میزان هدر رفتن انرژی مکانیکی توسط کره ($F_1 v_0$)، نیروی کششی F_1 را محاسبه کنید. فرض کنید که جریان سیال جریان پتانسیلی است؛ یعنی، فرض کنید در دستگاه مختصاتی که در آن کره در حال سکون است، سرعت سیال نسبت به مرکز کره بامعادلهٔ زیر داده می‌شود

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\frac{1}{2}a^3\nabla(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{r}/r^3)$$

برای بحث این مسئله ومسائل مربوط، به‌مقالهٔ زیررجوع کنید

J. R. Reitz and L. L. Foldy, *Journal of Fluid Mechanics*, **11**, (1961). 133

۱۵

خواص الکترومغناطیسی ابررساناها

۱.۱۵ تاریخ ابررسانایی

ابررسانایی را اولین بار کمرلین اونس[1] درسال ۱۹۱۱ در شهر لیدن (هلند) کشف کرد. اونس مشاهده کرد که هنگامی که نمونه‌ای از جیوه سرد می‌شد، در دمای ۴٫۲K مقاومتش ناگهان از بین می‌رفت وظاهراً کاملا بدون مقاومت می‌شد. در یك آزمایش حساستر که در آن از یك جریان پایدار القا شده دریك حلقه سیم ابررسانا استفاده شد، اونس براورد کرد که مقاومت درحالت ابررسانایی حداکثر 10^{-12} برابر مقاومت درحالت معمولی است. اخیراً درانستیتو تکنولوژی ماساچوست معلوم شد که یك جریان القایی چند صد آمپری در یك حلقهٔ سربی ابررسانا، درمدت لااقل یك سال، تغییری دراندازهٔ جریان نشان نمی‌دهد؛ این نتیجه دلیل محکمی است براین موضوع که مقاومت درحالت ابررسانایی درواقع صفر است. بااین آزمایشهای اولیه، یك رشته تحقیقات برای تعیین مشخصات این اثرجدید به‌راه افتاد وتاکنون معلوم شده است که بیش از ۲۰ عنصروصدها آلیاژ وترکیبات بین‌فلزی ابررسانا وجود دارد. گسترهٔ دمـای گذار ابررساناها ازخیلی پایینتر از ۱K (مثلا ۰٫۱۲K برای هافنیوم) تا حدود ۲۰K (مثلا ۲۳K برای ترکیب Nb_3Ge) است. دمای گذار، یادمای بحرانی، دمایی است که درآن ماده ازحالت معمولی به‌حالت ابررسانایی می‌رسد ومشخصهٔ مادهٔ به‌خصوص مورد نظراست. دمای بحرانی تا حدودی، هم به درجهٔ خلوص شیمیایی و هم به‌درجهٔ کامل بودن متالورژیکی نمونهٔ موردآزمایش بستگی دارد. در واقع، ناهمگنیها درخلوص وکرنش نمونه به‌طور کلی باعث گسترش گسترهٔ دمای گذار بین حالات معمولی

---

1. H. Kammerlingh Onnes

وابررسانایی می‌شود؛ گسترهٔ دمای گذار نمونهٔ خالصی که به‌خوبی تابکاری شده باشد، می‌تواند کمتر از ۰٫۰۰۱K باشد.

اگر یك میدان مغناطیسی به‌اندازهٔ کافی بزرگ موازی با یك سیم ابررسانا اعمال شود، مشاهده می‌شود که نمونه به‌حالت معمولی بازمی‌گردد. اندازهٔ میدانی که باعث این گذارمی‌شود هم به‌ماده وهم به‌دما بستگی دارد و میدان بحرانی نامیده می‌شود. اگرمیدان درجهات دیگری اعمال شود نمونه، هنگامی که میدان واقعی در هر نقطه روی سطح آن به‌میدان بحرانی برسد، شروع به رسیدن به حالت معمولی می‌کند. نمودار دما - میدان مربوط راکه می‌توان رسم کرد، اصولا ازنظر ترمودینامیکی همان معنای نمودار دما - فشاری را دارد که برای گذارهای فاز معمولی رسم می‌کنیم، و خود منحنی را می‌توان به‌عنوان مرزفاز بین‌دوحالت ترمودینامیکی معمولی وابررسانایی درنظر گرفت. این‌منحنی معمولا سهمی شکل است و باتقریب خوبی بامعادلهٔ زیرداده می‌شود

$$H_c = H_0[1-(T/T_c)^2]$$

که درآن H_c میدان بحرانی، T دمای مطلق (یا کلوین) مشاهده است، و T_c و H_0 نشان دهندهٔ مشخصات نمونه هستند (دمای بحرانی درمیدان صفر ومیدان بحرانی در دمای صفر مطلق). ناهمگنیها علاوه بر گسترش مرحلهٔ گذار، می‌توانند تأثیر محسوسی روی H_0 نیز داشته باشند و گاهی اندازهٔ آن‌را دهها برابرافزایش‌می‌دهند. چنین تأثیرهایی درکاربردهای میدانهای مغناطیسی قوی، حائزاهمیت فوق‌العاده است.

دراوایل تاریخ ابررسانایی،کاربرد معادلات ماکسول درمورد رسانای کامل به‌این نتیجه منجرشد که تغییرات میدان مغناطیسی نسبت به‌زمان درداخل ابررسانا بایدصفرباشد. بنابراین، بسته به‌اینکه نمونه در حضور یا غیاب یك میدان مغناطیسی خارجی تا پایینتر از دمای گذارش سرد شود، شار مغناطیسی می‌بایست یا حبس شود ویا طرد. این ایده آن‌قدر پذیرفته شده بودکه تنها مدتها بعد درسال ۱۹۳۳ (۲۲ سال بعد از کشف ابررسانایی) مایسنر و اوکسنفلد[1] برای‌اولین بارآن‌را به‌صورت تجربی‌آزمایش کردند. نتایج تجربیات آنها ثابت کردکه این فرضیه غلط است ودرتمام حالات، صرفنظراز اینکه ضمن سردشدن نمونه به میدان مغناطیسی داخل و یا از آن خارج شده باشد، میدان مغناطیسی درون ابررسانا صفراست. این اثر به طرد شار مغناطیسی، یا آن‌طورکه متداولتراست اثر مایسنر معروف است. یك بیان دیگر، که اصولا با بیان بالا معادل است، این است که بگوییم ابررسانا چنان رفتار می‌کندکه گویی تراوایی مغناطیسی آن صفر است، یا آنکه پذیرفتاری دیامغناطیسی کامل دارد. این مطلب به‌سادگی نشان می‌دهد که شکل نمونه اثرهای مهمی خواهد داشت، و این اثرها تنها هنگامی ساده‌اند که نمونه به شکل یك استوانهٔ طویل و محورش‌بامیدان مغناطیسی‌اعمال‌شده موازی‌باشد. اهمیت اصلی اثرمایسنراین است که‌نشان

---

1. W. Meissner, R. Ochsenfeld

می‌دهد ابررساناتنها دارای‌خاصیت رسانندگی بینهایت نیست، بلکه خواص‌الکترومغناطیسی پیچیده‌تری دارد. هر توجیه رضایتبخشی از ابررسانایی باید به طریق طبیعی این اثر را توضیح دهد.

کارهای زیادی ازلحاظ نظری تاکنون انجام شده است. شروع این مطالعات نظری باکاربرد ترمودینامیك درمورد گذارتوسط کی‌سام[1] درسال ۱۹۲۴ بوده‌است. سپس درسال ۱۹۳۴ گورتر و کاسیمیر[2] گذارمرتبهٔ دوم‌وخواص دیگررا براساس مدل‌دوشاره‌ای ازلحاظ پدیده شناختی توجیه کردند. این موضوع درسال ۱۹۳۵ به‌کمك نظریهٔ پدیده‌شناختی‌لندن ولندن[3] درمورد خواص الکترودینامیکی ابررساناها دنبال شد. دراین نظریه دومعادلهٔ‌دیگر به‌معادلات ماکسول اضافه شد تا جوابگوی اثرمایسنر باشد. دراین‌فصل ماعمدتاً بامعادلات لندن‌کارخواهیم داشت. ازسال ۱۹۳۵، تا ۱۹۵۰ که اثرایزوتوپ کشف شد[4]، کـارهای نظری عمده‌ای صورت نگرفت. ولی، در سال ۱۹۵۰، فرولیش[5] براساس برهم‌کنش میان الکترونها واتمهای مرتعش درشبکهٔ بلور، نظریه‌ای‌را توسعه دادکه اثرایزوتوپ را توجیه می‌کرد، اما در پیش‌بینی دیگر خواص حالت ابررسانایی باشکست روبه‌رو می‌شد. بعدها (در ۱۹۵۷)، باردین، کوپر، وشریفر[6] یك نظریهٔ میکروسکوپی یاکوانتوم مکانیکی برای ابررسانایی مطرح کردندکه‌کاملا موفق بوده است. این نظریه (نظریهٔ BCS) به‌نحوی‌کاملا طبیعی گذارفازمرتبهٔ‌دوم،اثرمایسنر، ودیگرخواص‌ترمودینامیکی‌والکترومغناطیسی‌ابررساناها را توضیح می‌دهد. جایزهٔ نوبل فیزیك درسال ۱۹۷۲ به‌خاطراین‌کارتحقیقاتی به‌باردین، کوپر، و شریفر اعطا شد. براساس نظریهٔ BCS، ابررسانایی به‌صورت گذار فازی جلوه می‌کندکه ناشی از زوج شدن الکترونهاست. این زوج‌شدن ازبرهم‌کنش الکترونها بـا ـ ارتعاشهای شبکه‌ای ماده حاصل می‌شود. ازجهاتی، ابررسانایی مشابه‌چگالش‌بوز-انیشتین زوج الکترونهای‌مقیداست، هردو اثر(ابررسانایی‌وچگالش‌بوز-انیشتین) دراساس‌اثرهایی کوانتوم‌مکانیکی‌اند وتعبیرسادهٔ‌کلاسیکی‌ندارند. ظاهراً نظریهٔ BCS می‌تواند تمامی‌نتایج پدیده شناختی مربوط به‌ابررسانایی‌را، لااقل به‌طورکیفی، پیشگویی کند.

برای‌کاربردهای فنی ابررسانایی، ماده‌ای مورد نیاز است‌که درمیدانهای مغناطیسی

---

1. W. H. Keesom 2. C. J. Gorter, H. B. G. Casimir

3. F. London, H. London

۴. آزمایشهایی‌که روی عناصرابررسانا باترکیب ایزوتوپی متغیرانجام شده است نشان‌می‌دهند که $T_c M^{1/2} \approx$ const. ، که درآن M جرم‌ایزوتوپی‌است. اولین کارهای‌تجربی‌را ای. ماکسول و سی. ا. رینولدز و همکارانش انجام دادند. اکنون این اثر به اثر ایزوتوپ معروف است و نشان دهندهٔ این است که برهم‌کنشهای میان الکترونهای ابررسانایی ومغزهٔ یونی در یك شبکهٔ بلوری نقش مهمی درابررسانایی بازی می‌کنند.

5. H. Fröhlich 6. J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer

قوی ابررسانا باقی بماند، وبرای این منظور باید از ابررسانای نوع II استفاده شود. این نوع ابررسانایی، شکل پیچیده‌تری از ابررسانایی است که در آن، فراتر ازمقدار به‌خصوصی ازمیدان مغناطیسی که H_{c1} نامیده‌می‌شود، شارمغناطیسی شروع به‌نفوذ به‌درون ماده‌می‌کند، هرچندکه ماده تاهنگامی که میدان مغناطیسی به‌مقدار بسیار بالاتری (میدان بحرانی بالایی H_{c2}) نرسیده‌باشد، ابررسانا باقی می‌ماند. مادهٔ نوع II بین H_{c1} و H_{c2}، اثرمایسنرکاملی ازخود بروزنمی‌دهد وهمچنین ازلحاظ کمی ازمعادلات لندن پیروی نمی‌کند؛ باوجوداین، ابررسانایی نوع II نیزبانظریهٔ BCS توضیح داده می‌شود. دربعضی ازمواد H_{c2} بسیار بالاست؛ برای مثال، در Nb_3Sn دردمای ۴٫۲K مقدار $\mu_0 H_{c2}$ برابر است با ۱۰ تسلا. دراین فصل ما فقط باابررسانایی نوع ساده‌تر (به‌نام نوع I) کارخواهیم داشت.

موضوع ابررسانایی آن‌قدر توسعه یافته که به‌یکی ازشاخه‌های غنی‌تحقیقی تبدیل شده است، باوجود این ، دو نظریهٔ پدیده‌شناختی مکمل (نظریهٔ دوشاره‌ای کاسیمیر- گورتر و نظریهٔ لندن) همراه باهم برای مطالعهٔ بسیاری ازمسائل شامل ابررسانا‌ها کافی هستند. نظریهٔ کاسیمیر-گورتر اصولا دربارهٔ مسائل ترمودینامیکی بحث می‌کند ودر نتیجه دراینجا فقط به طور جنبی مورد نظر ماست. ولی نظریهٔ لندن، که عمدتاً افزایش تعداد معادلات ماکسول است، به‌این منظور پرداخته شده است که یك‌نظریهٔ الکترومغناطیسی مناسب برای توضیح وضعیتهایی باشدکه شامل ابررسانا‌هاست. مابقی این فصل به‌توسعهٔ نظریهٔ لندن و کاربردش درمورد تعدادکمی ازوضعیتهای ساده مربوط می‌شود. دراین فصل بیشتر سعی ما فراهم‌آوردن مبنایی‌است برای بررسی مسائل ماکروسکوپی‌الکترومغناطیس شامل‌ابررسانا ونه تجسس در نظریه‌های میکروسکوپی‌کنونی درمورد ابررسانایی.

۲.۱۵ رسانندگی کامل و خاصیت دیامغناطیسی کامل ابررسانا‌ها

دربخش قبل متذکر شدیم که ابررسانا‌ها دوخاصیت منحصر به‌فرد از خود بروز می‌دهند. رسانندگی آنها، همان‌طور که آزمایشهای اصلی اونس وآزمایشهای بعدی نشان دادند، اساساً بینهایت است؛ همچنین‌آنها شارمغناطیسی‌را همان‌طورکه آزمایش مایسنر-اوکسنفلد نشان‌می‌دهد، به‌طورکامل طرد می‌کنند (به‌شرطی که‌میدان‌مغناطیسی درروی سطح ابررسانا درهیچ جا ازمیدان بحرانی بیشترنباشد). این خواص ازاین لحاظ‌که هیچ یك از دیگری نتیجه نمی‌شود مستقل از یکدیگرند، ولی البته هر دو باید از نظریه‌های رضایتبخش ابررسانایی نتیجه شوند، که می‌شوند. برای اینکه به‌طور روشنتر ببینیم که مستقل بودن‌آن دوخاصیت ازیکدیگر چه‌معنایی دارد، می‌توانیم بررسی یك‌رسانای‌کامل درمیدان‌مغناطیسی راکه اکنون دیگر به‌صورت کلاسیك درآمده است، ذکر کنیم.

کره‌ای‌را درنظربگیرید که رسانندگی آن را بتوان به‌نحوی ازیك مقدار معین به بینهایت تغییرداد. مثلا، ما می‌توانیم رسانندگی یك ابررسانا را باتغییردمایش تغییر دهیم. هنگامی‌که رسانندگی بینهایت است، میدان الکتریکی در تمام نقاط داخل ابر رسانا صفر

است ودرنتیجه تاو آن و $\partial \mathbf{B}/\partial t$ نیز صفرند. بنابراین اگر کره در یك میدان یکنواخت $\mathbf{B}_0$ سرد شود (یعنی رسانندگی کامل به‌دست‌آورد)، چگالی شار درداخل کره تا زمانی که رسانندگی‌کامل ازبین نرود، $\mathbf{B}_0$ باقی می‌ماند. ازطرف دیگر، اگر کره درمیدان صفر سرد شود، چگالی شار تـا زمانی که رسانندگی کامل ازبین نرود، حتی اگرمثلا کره را دریك میدان خارجی درآغاز یکنواخت قرار دهیم، صفرباقی می‌ماند. بنابراین رسانندگی کامل طرد شار را ایجاب‌نمی‌کند، ودرنتیجه $\mathbf{B}=0$ فرضی‌است‌که باید به‌طورجداگانه به‌صورت یك اصل موضوع معرفی شود. به‌طریق مشابه $\mathbf{B}=0$ دلیل بررسانندگی کامل نیست،زیرا درماده‌ای باپذیرفتاری $\chi_m=-1$ همواره $\mathbf{B}=0$ است، واین امرامکان رسانندگی ماده را محدود نمی‌کند.

دراین‌فصل دردرجهٔ اول‌جنبه‌های مغناطیسی ابررسانایی مورد نظرماست (رسانندگی بینهایت بیشتربررسی خواهد شد ولی نقش مهمی درمسائلی‌که دراینجا بررسی می‌شوند، نخواهد داشت)، و فرمولبندی مناسب برای آن به‌دست خواهد آمد. نخستین روش، که با آنچه تاکنون انجام شده است (به‌فصل ۹ مراجعه کنید) فرق چندانی ندارد، این است که بگوییم در داخل ابررسانا $\mathbf{B}=\mu_0[\mathbf{H}+\mathbf{M}]=0$ و درمرزهای بین ابررسانـاها و محیطهـای دیگر، مؤلفهٔ ممـاسی $\mathbf{H}$ و مؤلفهٔ عمودی $\mathbf{B}$ پیوسته هستند. در این روش، مـا به‌ابررسانا به‌مثابهٔ ماده‌ای مغناطیسی با پذیرفتاری $\chi_m=-1$، یعنی، محیطی که خاصیت دیامغناطیسی‌کامل دارد می‌نگریم. درسطح ابررسانا، جریانهای مغناطش باچگالی سطحی $\mathbf{j}_M=\mathbf{n}\times[\mathbf{M}_{\text{خارج}}-\mathbf{M}_{\text{داخل}}]$ (آمپربرمتر) جریان می‌یابند،که درآن $\mathbf{n}$ برداریکهٔ‌عمود برسطح به‌طرف خارج است (توجه‌کنیدکه $\mathbf{M}_{\text{خارج}}$ معمولا صفراست)؛ درداخل‌ابررسانا، جریانهای مغناطش حجمی باچگالی $\mathbf{J}_M=\nabla\times\mathbf{M}$ جریان می‌یابند (به‌فصل ۹، مخصوصاً بخش ۱.۹ مراجعه‌کنید).

درتوصیفی مشابه، فرض می‌کنیم درداخل ابررسانا $\mathbf{B}=\mathbf{H}=\mathbf{M}=0$ ویك‌جریان سطحی حقیقی $\mathbf{j}_S=\mathbf{n}\times\mathbf{H}_{\text{خارج}}$ (چون فرض می‌شودکه $\mathbf{H}_{\text{داخل}}$ صفراست) جریان‌دارد. دراین توصیف، هیچ نوع جریـانی در داخل ابررسانا وجود ندارد. این دو توصیف از ابررسانا آن‌قدرازیکدیگرمتفاوت به‌نظرمی‌آیندکه بی‌مورد نیست بپرسیم چگونه‌به‌یکدیگر مربوط می‌شوند. بیان معمول دراین مورد آن است‌که بگوییم این دو توصیف هنگامی‌که به‌طورمناسبی تعبیرشوند، بایکدیگر معادل‌اند. باوجود این، مناسب به‌نظرمی‌رسدکه مسئله را باتفصیل بیشتری بررسی‌کنیم. نخست توجه می‌کنیم‌که بین جریانهای حقیقی انتقالی‌و جریانهای مغناطشی دواختلاف وجود دارد. نخستین اختلاف این‌است‌که جریانهای‌انتقالی چشمه‌هایی برای $\mathbf{H}$ هستند در صورتی‌که جریانهای انتقالی و مغناطشی هردو چشمه‌هایی برای $\mathbf{B}$ هستند. چون $\mathbf{B}$ کمیت میدان مغناطیسی قابل دسترسی است ولی $\mathbf{H}$ اصولا به‌این خاطر تعریف شدکه یك میدان مغناطیسی داشته باشیم‌که توسط جریانهای انتقالی مشخص شود، این نخستین تمایز بین دونوع جریان به‌وضوح مناسب ولی‌تاحدودی ساختگی‌است. دومین اختلاف این است‌که جریانهای انتقالی در مواد معمولی اتلافی هستند (به عبـارت

دیگر، باعث گرمایش ژولی می‌شوند)، درصورتی که جریانهای مغناطشی چنین نیستند. ولی برای ابررساناها، حتی این اختلاف نیز از بین می‌رود. به‌علاوه، چون می‌توان نشان داد که مغناطش ابررسانا ناشی ازاسپینهانیست (ودرنتیجه مربوط به‌حرکتهای مداری حاملهای بارمی‌شود)، به‌نظرمی‌رسد که دو توصیف معادل باشند. یك بیان فشردهٔ دیگر این است که بگوییم چون تنها $\mathbf{B}$ قابل اندازه‌گیری است، $\mathbf{M}$ و $\mathbf{H}$ را بر طبق قواعد نسبتاً دلخواهی انتخاب کنیم، به‌شرطی که مقادیر $\mathbf{J}$ و $\mathbf{J}_M$ را برطبق این انتخاب مشخص کنیم و بدانیم که دریك ابررسانا نمی‌توان آنهارا ازیکدیگر تمیزداد.

برای بیشترکاری که درزیرانجام خواهیم داد، توصیف $\mathbf{H},\mathbf{M}\neq 0$ مناسب است. این بدان دلیل است که این روش تعمیم طبیعی آن‌چیزی است که قبلادرمورد موادمعمولی انجام شده است ونیز به‌این دلیل که این فرمولبندی به‌مسائل بامقادیرمرزی معمولیترمنجر می‌شود. ولی دربخش بعد، دومسئله را بررسی خواهیم کرد وهریك ازآن دو را درهر دو فرمولبندی قرارخواهیم داد تا معادل بودن آنها روشن شود.

۳.۱۵ مثالهایی شامل طردکامل شار

برای درك بیشترایده‌هایی که دربخش قبل بیان‌شد، دومثال مقدماتی‌را مطالعه خواهیم کرد: یك کرهٔ ابررسانا در یك میدان مغناطیسی که به‌طور مجانبی یکنواخت است و یك استوانهٔ ابررسانای بی‌نهایت طویل حامل جریان. هردو فرمولبندی بخش ۲.۱۵ را به‌کار خواهیم برد تا صریحاً نشان دهیم که دراین حالات بایکدیگر معادل‌اند.

ابتداکرهٔ ابررسانایی به‌شعاع a را درنظربگیرید که در میدان خارجی یکنواخت $B_0\mathbf{k}$ قرارگرفته است. درفرمولبندی اول، که در آن ابررسانا به‌مثابه یك مادهٔ مغناطیسی درنظرگرفته می‌شود، مسئلهٔ بامقادیرمرزی به‌شکل زیردرمی‌آید

درخارج: $\mathbf{B}\to B_0\mathbf{k}$ هنگامی که $r\to\infty$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=0$$

$$\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H} \qquad (۱.۱۵)$$

در داخل: $\mathbf{B}=0,\ \mathbf{H}=-\mathbf{M}$

$$\nabla\times\mathbf{H}=0 \qquad (۲.۱۵)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{M}=0$$

$$\text{در } r=a: \quad B_r \text{ پیوسته}$$

$$H_\theta \text{ پیوسته} \tag{۳.۱۵}$$

تنها معادلهٔ غیر عادی $\nabla \cdot \mathbf{M}=0$ است که بر این اساس مبتنی است که در داخل کرهٔ ابر رسانا هیچگونه قطب مغناطیسی وجود ندارد. با این معادلات می‌توان دو پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی، φ_1^* درخارج و φ_2^* درداخل را معرفی کرد. هردو درمعادلهٔ لاپلاس صدق می‌کنند و ازآنها می‌توان با گرفتن منفی شیب، میدان $\mathbf{H}$ را به‌دست آورد. با استفاده از مختصات کروی و با به‌حساب آوردن اولین معادلهٔ (۱.۱۵) به‌طورصریح، خواهیم داشت

$$\varphi_1^*=-\frac{B_0}{\mu_0}r\cos\theta+\sum_{l=0}^{\infty}c_l r^{-(l+1)}P_l(\cos\theta) \tag{۴.۱۵}$$

ازاین معادله داریم

$$B_r=B_0\cos\theta+\mu_0\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)c_l r^{-(l+2)}P_l(\cos\theta) \quad \text{(درخارج)} \tag{۵.۱۵}$$

چون $\mathbf{B}$ درداخل صفر است و B_r درعبور از $r=a$ پیوسته است، هریك از c_lها به‌استثنای c_1 باید صفر باشند و $c_1=-B_0a^3/2\mu_0$، بدین‌ترتیب مسئله به‌ازای $r>a$ بدون توسل به‌شرط مرزی روی مؤلفهٔ مماسی $\mathbf{H}$، به‌طور کامل حل می‌شود؛ تنها چیزی که وارد شده است، $\mathbf{B}=0$ در داخل و پیوستگی مؤلفهٔ عمودی $\mathbf{B}$ در $r=a$ است. درداخل کره، پتانسیل φ_2^* باید در $r=0$ منظم باشد، و برای آنکه باشرایط مرزی سازگار باشد، تنها می‌تواند شامل $P_1(\cos\theta)$ باشد. بنابراین، $\varphi_2^*=d_2 r\cos\theta$، و d_2 عدد ثابتی است که باید تعیین شود. بامشتق گیری، $H_r=-d_2\cos\theta$ و $H_\theta=d_2\sin\theta$. چون در خارج $H_\theta=-3/2(B_0/\mu_0)\sin\theta$ نتیجه می‌شود که $d_2=-3B_0/2\mu_0$. هیچگونه جریان سطحی حقیقی وجود ندارد، ولی به‌علت ناپیوستگی $\mathbf{M}$، یك جریان مغناطش سطحی برابر با $\mathbf{j}_M=-3/2(B_0/\mu_0)\sin\theta\,\mathbf{a}_\varphi$ وجود دارد. این نتایج را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد

$$\text{درخارج:} \quad \mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}=B_0\mathbf{k}-B_0\frac{a^3}{r^3}\cos\theta\,\mathbf{a}_r-\frac{1}{2}B_0\frac{a^3}{r^3}\sin\theta\,\mathbf{a}_\theta$$

$$\text{درداخل:} \quad B=0; \quad \mathbf{H}=\frac{3}{2}\frac{B_0}{\mu_0}\mathbf{k}; \quad \mathbf{M}=-\frac{3}{2}\frac{B_0}{\mu_0}\mathbf{k} \tag{۶.۱۵}$$

$$\text{در } r=a: \quad \mathbf{j}_M=-\frac{3}{2}\frac{B_0}{\mu_0}\sin\theta\,\mathbf{a}_\varphi$$

فرمولبندی دوم برای ناحیهٔ خارجی به همین صورت است ولی برای ناحیهٔ داخلی به شکل $\mathbf{B}=\mathbf{H}=\mathbf{M}=0$ در می‌آید. در سطح نیز یک جریان حقیقی $\mathbf{j}_S=\mathbf{n}\times\mathbf{H}_{\text{خارج}}=-3/2(B_0/\mu_0)\sin\theta\,\mathbf{a}_\varphi$ وجود دارد. این توصیف را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد

$$\text{درخارج:}\quad \mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}=B_0\,\mathbf{k}-B_0\frac{a^3}{r^3}\cos\theta\,\mathbf{a}_r-\frac{1}{2}B_0\frac{a^3}{r^3}\sin\theta\,\mathbf{a}_\theta$$

$$\text{درداخل:}\quad \mathbf{B}=\mathbf{H}=\mathbf{M}=0 \qquad (7.15)$$

$$\text{در } r=a:\quad \mathbf{j}_S=-\frac{3}{2}\frac{B_0}{\mu_0}\sin\theta\,\mathbf{a}_\varphi$$

اکنون شاید ارتباط بین دوتوصیف روشن شده باشد. درخارج، هردویکسان‌اند، همانطور که باید باشند، و گرنه‌می‌توانستیم آزمایش ساده‌ای طرح کنیم تاتوسط آن توصیف‌صحیح انتخاب شود. در داخل، هردو توصیف نتیجهٔ $\mathbf{B}=0$ را می‌دهند، ولی $\mathbf{H}$ و $\mathbf{M}$ در یك توصیف، مقداری متناهی دارند ودرتوصیف دیگرهردو صفرند. اما ازنظرتجربی $\mathbf{H}$ و $\mathbf{M}$ هیچکدام قابل مشاهده نیستند، ودرنتیجه این اختلاف حائز اهمیت نیست. در هر دو مورد جریانهای سطحی یکسانی وجود دارند؛ ولی در یك مورد جریان به‌عنوان جریان انتقالی درنظر گرفته می‌شود، در صورتی که در حالت دیگر آن را جریان مغناطش می‌نامیم. نام‌گذاری جریان تنها ازاین لحاظ‌که باید درداخل ابررسانا این نام‌گذاری با $\mathbf{H}$ و $\mathbf{M}$ سازگارباشد، حائز اهمیت است. مثلا، هنگامی‌که ما گشتاور مغناطیسی کرهٔ ابررسانایی را محاسبه می‌کنیم، یا باید از $\mathbf{j}_M$ استفاده‌کنیم یا از $\mathbf{M}$، ولی نه ازهردو؛ درصورتی‌که یك $\mathbf{j}_S$ حقیقی همیشه درایجاد گشتاورمغناطیسی وارد می‌شود.

دومین مثالی که باز هم تمیزناپذیری جریانهای انتقالی ابررسانایی و جریانهای مغناطش را نشان می‌دهد، مثال یك‌استوانهٔ بی‌نهایت طویل ابررسانای حامل جریان است. ولی قبل ازاینکه این مسئله را به‌تفصیل مطالعه کنیم، باید توجه کنیم که همواره مجموع $\mathbf{J}$ و $\mathbf{J}_M$ در داخل یك ابررسانای کامل، صفر است. این مطلب از $\mathbf{B}=0$ نتیجه می‌شود، که آن هم‌نتیجه می‌دهد: $\nabla\times\mathbf{B}=0$، واین، به‌نوبهٔ خود، نتیجه می‌دهد

$$\nabla\times\mathbf{H}+\nabla\times\mathbf{M}=\mathbf{J}+\mathbf{J}_M=0$$

این بحث را درمورد یك سطح ناپیوستگی نمی‌توان به‌کاربرد، وممکن است در آنجا یك جریان سطحی کل معین $\mathbf{j}_S+\mathbf{j}_M$ جاری باشد. لیکن، این بحث به‌وضوح نشان می‌دهد که جریان‌کل همواره یك جریان سطحی است.

اکنون با درنظر گرفتن سیمی به شعاع a و حامل جریان I_0 (در جهت مثبت z)، ازقانون آمپر ملاحظه می‌کنیم که در خارج از سیم (در مختصات استوانه‌ای)

$\mathbf{B}=\mu_\circ\mathbf{H}=(\mu_\circ I/۲\pi r)\mathbf{a}_\theta$. اگر اولین توصیف، $\mathbf{M},\mathbf{H}\neq\circ$ در داخل به‌کار رود، ما باید درمورد چگالی جریان درسیم فرضهایی بکنیم. از طرف دیگر چون مؤلفهٔ مماسی $\mathbf{H}$ درسطح پیوسته‌است، این‌فرض نباید شامل‌جریانهای سطحی‌شود. ساده‌ترین امکان‌چگالی یکنواخت است: $\mathbf{J}=(I_\circ/\pi a^۲)\mathbf{k}$. دراین صورت در داخل داریم

$$\mathbf{H}=\frac{I_\circ}{۲\pi}\frac{r}{a^۲}\mathbf{a}_\theta \qquad \text{و} \qquad \mathbf{M}=-\frac{I_\circ}{۲\pi}\frac{r}{a^۲}\mathbf{a}_\theta$$

جدول ۱۰۱۵ سیم ابررسانای حامل جریان

	فرمولبندی ۱(ابررسانا به‌عنوان یك مادهٔ مغناطیسی با $\chi_m=-۱$)	فرمولبندی۲ (طرد شار به‌وسیلهٔ جریانهای انتقالی سطحی)
	$\mathbf{M}=-\mathbf{H}\neq\circ$	$\mathbf{M}=\mathbf{H}=\circ$
درخارج:	$\mathbf{B}=\mu_\circ\mathbf{H}=\frac{\mu_\circ I_\circ}{۲\pi r}\mathbf{a}_\theta$	$\mathbf{B}=\mu_\circ\mathbf{H}=\frac{\mu_\circ I_\circ}{۲\pi r}\mathbf{a}_\theta$
درداخل :	$\mathbf{B}=\circ$	$\mathbf{B}=\circ$
	$\mathbf{H}=\frac{I_\circ r}{۲\pi a^۲}\mathbf{a}_\theta$	$\mathbf{H}=\circ$
	$\mathbf{M}=-\frac{I_\circ r}{۲\pi a^۲}\mathbf{a}_\theta$	$\mathbf{M}=\circ$
	$\mathbf{J}=\frac{I_\circ}{\pi a^۲}\mathbf{k}$	$\mathbf{J}=\circ$
	$\mathbf{J}_M=-\frac{I_\circ}{\pi a^۲}\mathbf{k}$	$\mathbf{J}_M=\circ$
در $r=a$:	$\mathbf{j}_M=(I_\circ/۲\pi a)\mathbf{k}$	$\mathbf{j}_M=\circ$
	$\mathbf{j}_S=\circ$	$\mathbf{j}_S=(I_\circ/۲\pi a)\mathbf{k}$

چگالی جریان‌مغناطش عبارت‌است از $\mathbf{J}_M = -(I_\circ/\pi a^2)\mathbf{k}$، ودرسطح یك‌چگالی‌جریان مغناطش سطحی وجود دارد

$$\mathbf{j}_M = +\mathbf{a}_r \times \left(\frac{I_\circ}{2\pi a}\mathbf{a}_\theta\right) = \frac{I_\circ}{2\pi a}\mathbf{k}$$

که درست برای حمل جریان کل $I_\circ$ کافی است. درتوصیف دیگرفرض می‌شودکه درداخل $\mathbf{B}=\mathbf{H}=\mathbf{M}=\circ$، وبنابراین لازم‌است که جریان‌کلا روی‌سطح، باچگالی جریان‌سطحی حقیقی $\mathbf{j}_S=(I_\circ/2\pi a)\mathbf{k}$، جاری باشد. این دو توصیف که در جدول ۱.۱۵ آمده‌اند بایکدیگرمعادل‌اند، مگراینکه‌بتوانیم‌روشی برای‌جداکردن جریانهای انتقالی‌ازجریانهای مغناطشی در ابررساناها، یاطریقی برای اندازه‌گیری مستقیم $\mathbf{H}$ یا $\mathbf{M}$ در داخل ابررسانا پیداکنیم.

در دومسئله‌ای که هم‌اکنون بررسی‌شد، فرمولبندی $\mathbf{M}=\mathbf{H}=\circ$ ازلحاظ سادگی مزیت آشکاری‌دارد. ولی، برای مسائل‌پیچیده‌تر، به‌ویژه آنهایی‌که شامل ضرایب‌بزرگ وامغناطش‌اند، فرمولبندی مغناطش توزیع شده، سودمند است. هریك ازاین دو روش را می‌توان به‌کاربرد، نتایج‌آنها معادل خواهند بود ، ولی نباید آنهارا در یك مسئلهٔ منفرد مخلوط‌کرد.

۴.۱۵ معادلات لندن

دربخش‌قبل، طردشاربراساس توصیف بسیارایده‌آلی ازابررسانا، بررسی شد. این‌توصیف بسیاری ازچهره‌های قابل مشاهدهٔ ابررسانایی را باز تولید می‌کند، ولی نمی‌تواند توجیه مناسبی برای بعضی جزئیات‌که به‌سادگی قابل مشاهده هستند ارائه‌کند. باشروع ازمفهوم رسانندگی‌کامل وانجام یك اصلاح مناسب برای منظورکردن اثر مایسنر، می‌توانیم نظریهٔ بهتری‌را مطرح‌کنیم.

دریك رسانای کامل (نه یك ابررسانا) حاملهای بار تحت تأثیر هیچ‌گونه نیروی کندکننده‌ای نیستند؛ در نتیجه درمیدان‌الکتریکی $\mathbf{E}$، برطبق رابطهٔ زیرحرکت می‌کنند

$$m_p\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{E} \qquad (۸.۱۵)$$

که درآن m_p جرم حامل بار و $\dot{\mathbf{v}}$ شتاب‌آن است. ولی اگر $\mathbf{v}$ میانگین سرعت حاملهای بارباشد و n حامل بار در واحد حجم وجود داشته‌باشد، چگالی جریان $\mathbf{J}=nq\mathbf{v}$ است. بنابراین شکل دیگری برای معادلهٔ (۸.۱۵) عبارت است از

$$\dot{\mathbf{J}} = (nq^2/m_p)\mathbf{E} \qquad (۹.۱۵)$$

که درآن $\dot{\mathbf{J}} = d\mathbf{J}/dt$ با محاسبهٔ تاو این معادله و با استفاده از $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$، خواهیم داشت

$$\nabla \times \dot{\mathbf{J}} = -(nq^2/m_p)\dot{\mathbf{B}} \qquad (۱۰.۱۵)$$

بافرض اینکه میدانها آهسته تغییر می‌کنند[1] و با به‌کاربردن $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ برای حذف $\dot{\mathbf{J}}$، خواهیم داشت

$$\nabla \times \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = -(nq^2/m_p)\dot{\mathbf{B}} \qquad (۱۱.۱۵)$$

بافرض $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ وبااستفاده‌ازتعریف لاپلاسی بردار (وبا $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) نتیجه‌خواهدشد

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{B}} = (\mu_0 nq^2/m_p)\dot{\mathbf{B}} \qquad (۱۲.۱۵)$$

اهمیت این معادله وقتی کاملا معلوم می‌شود که یك رسانای کامل نیمه نامتناهی که باصفحهٔ $z = 0$ محدود شده است ودرجهت مثبت z امتداد دارد را در نظر بگیریم. فرض کنید که درست‌روی‌سطح $\dot{B}_y = \dot{B}_z = 0$، $\dot{B}_x = \dot{B}_{x0}$، و $\dot{B}_{x0}$ به x و y بستگی‌ندارد. دراین‌صورت معادله‌ای که B_x را تعیین می‌کند، عبارت است از

$$\frac{d^2 \dot{B}_x}{dz^2} = \frac{\mu_0 nq^2}{m_p}\dot{B}_x \qquad (۱۳.۱۵)$$

جواب عمومی این معادله به‌صورت زیراست

$$\dot{B}_x = Ae^{-\sqrt{\mu_0 nq^2/m_p}\,z} + Be^{\sqrt{\mu_0 nq^2/m_p}\,z}$$

جوابِ به‌طورنمایی افزایش یابنده‌را به‌این علت که تعبیر فیزیکی ندارد، کنارمی‌گذاریم، و A را طوری انتخاب می‌کنیم که در $z = 0$ مقدار صحیح $\dot{B}_x$ را بدهد؛ دراین‌صورت

$$\dot{B}_x = \dot{B}_{x0} e^{-\sqrt{\mu_0 nq^2/m_p}\,z} \qquad (۱۴.۱۵)$$

به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که $\sqrt{m_p/\mu_0 nq^2}$ دارای بعد طول است، وبرای q و m_p مربوط به‌الکترون و n مربوط به‌یك الکترون دراتم، این طول درحدود 10^{-8} متر است. بنابراین معادلهٔ (۱۲.۱۵) نشان می‌دهد که در داخل یك رسانای کامل، مشتق زمانی $\mathbf{B}$ بافاصله ازسطح به‌طورنمایی به‌سمت صفرمیل می‌کند. بدین ترتیب، درداخل یك رسانای

---

۱. این فرض ایجاب می‌کندکه ازجریان جا به‌جایی، $\partial \mathbf{D}/\partial t$، که در بخشهای ۱.۱۶ و ۲.۱۶ بحث می‌شود، چشمپوشی کنیم.

کامل، بجز دریك لایهٔ سطحی نازك، $\dot{\mathbf{B}}$ خیلی کوچك است. این یك اصلاح قابل قبول برای نتیجهٔ به‌دست‌آمدهٔ قبلی است که در داخل یك رسانای کامل درهمه جا $\dot{\mathbf{B}}=0$ است.

تحلیلی که هم‌اکنون مطرح شد، دوباره نشان می‌دهد که رسانندگی کامل به‌طردشار منجر نمی‌شود. باوجود این، این تحلیل همچنین نشان‌می‌دهد که چگونه طردشاررا می‌توان دریك نظریه واردکرد. اگر معادلهٔ (۱۲.۱۵) رفتار $\mathbf{B}$ را به‌جای $\dot{\mathbf{B}}$ توصیف می‌کرد، در این صورت خود $\mathbf{B}$ به‌طورنمایی ازمقدارش درروی سطح به‌صفردر داخل ابررسانا کاهش می‌یافت. همین موضوع انگیزهٔ طرح‌نظریه‌ای برای‌رفتارالکترومغناطیسی ابررسانا‌ها توسط لندن ولندن بود.[1]

دراین نظریه فرض می‌شود که جریان کل می‌تواند به‌یك ابر جریان $\mathbf{J}_s$، یك جریان اتلافی $\mathbf{J}_{diss}$ ویك جریان جابه‌جایی $\mathbf{J}_{disp}$ تجزیه شود

$$\mathbf{J}=\mathbf{J}_s+\mathbf{J}_{diss}+_{disp} \qquad (۱۵.۱۵)$$

جریانهای اتلافی‌وجابه‌جایی ازمعادلات $\mathbf{J}_{diss}=g\mathbf{E}$ و $\mathbf{J}_{disp}=\partial\mathbf{D}/\partial t$ پیروی‌می‌کنند. می‌ماند اینکه $\mathbf{J}_s$ را به‌میدان الکترومغناطیسی ارتباط دهیم. این کار باشروع از معادلهٔ (۱۵.۱۵)، معادلات‌ماکسول، ومعادلهٔ ساختمندی‌لندن [که شکل آن شبیه به‌معادلهٔ(۱۰.۱۵) است ولی به‌جای مشتقات $\mathbf{B}$ و $\mathbf{J}$ شامل خود آنهاست] ، انجام‌پذیر است. اگراین روش به‌دقت دنبال شود، می‌توان نشان داد که برای فرکانسهای کمترازحدود 10^{11} سیکل بر ثانیه، هم $\mathbf{J}_{diss}$ وهم $\mathbf{J}_{disp}$ درمقایسه با $\mathbf{J}_s$ قابل‌چشمپوشی‌اند. می‌خواهیم بدون اینکه‌واردجزئیات بحث شویم، این نتیجه‌را مسلم فرض کنیم، یعنی، $\mathbf{J}_{diss}\approx 0$ و $\mathbf{J}_{disp}\approx 0$؛ چنین فرضی حداقل برای مسائل جریان پایا ازنوعی‌که دراین فصل مطالعه شد، قابل‌قبول است.جریان باقی ماندهٔ $\mathbf{J}_s$ هم شامل جریانهای انتقالی است وهم شامل جریانهای مغناطشی ودرنتیجه، ازمعادلهٔ ماکسول (۵۱.۸)، داریم

$$\mathbf{J}_s=(1/\mu_0)\nabla\times\mathbf{B} \qquad (۱۶.۱۵)$$

برای به‌دست آوردن معادله‌ای که شامل متغیرهای میدان به‌جای مشتقات آنها باشد، لندن رابطهٔ زیررا به‌عنوان یك‌اصل‌موضوع درنظر گرفت

$$\mu_0\nabla\times\mathbf{J}_s=-(1/\lambda^2)\mathbf{B} \qquad (۱۷.۱۵)$$

اختلاف این معادله بامعادلهٔ (۱۰.۱۵) دراین است که این معادله $\mathbf{J}_s$ و $\mathbf{B}$ را به جای $\dot{\mathbf{J}}$ و $\dot{\mathbf{B}}$، دربرمی‌گیرد. بنابراین، این معادله به‌معادله‌ای منجرمی‌شود که شبیه به‌معادلهٔ (۱۲.۱۵) است منتها به‌جای مشتقات میدانها درمورد خود میدانها به‌کار می‌رود. همچنین، یك عمق

---

1. F. London and H. London, *Proc. Roy. Soc.*, A 149 (1935), 71.

نفوذ پدیده‌شناختی (λ) به عنوان یك پارامتر مخصوص معرفی شده است که مشخصهٔ مادهٔ ابررساناست (μ_0 به‌این دلیل ظاهرمی‌شود که λ بعد طول داشته باشد). معادلهٔ (۱۷.۱۵) به اثر مایسنر منجر خواهد شد ولی برای منظور کردن رسانندگی بینهایت، باید به‌طور جداگانه فرض کنیم که

$$\mu_0 \dot{\mathbf{J}}_s = (1/\lambda^2)\mathbf{E} \qquad (۱۸.۱۵)$$

البته معادلهٔ اخیر نقش دیگری درمسائل مورد مطالعه دراینجا بازی نمی‌کند.

می‌توان ازترکیب معادلات (۱۶.۱۵) و (۱۷.۱۵) نتیجهٔ زیررا به‌دست‌آورد

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = -(1/\lambda^2)\mathbf{B} \qquad (۱۹.۱۵)$$

چون $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$، معادلهٔ بالارا می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\nabla^2 \mathbf{B} = (1/\lambda^2)\mathbf{B} \qquad (۲۰.۱۵)$$

معادلهٔ (۲۰.۱۵) را می‌توان درمورد یك برهٔ نیمه نامتناهی، درست مثل معادلهٔ (۱۳.۱۵)، حل کرد. جواب آن، یعنی رابطهٔ زیر

$$B_x(z) = B_{x0} e^{-z/\lambda} \qquad (۲۱.۱۵)$$

نشان می‌دهد که هنگام نفوذ دربره، $\mathbf{B}$ به‌جای $\dot{\mathbf{B}}$ به‌طور نمایی کاهش می‌یابد. این تعمیم مطلوبی برای $\mathbf{B} = 0$ در داخل ابررساناست.

عمق نفوذ λ در اینجا به عنوان یك پارامتر پدیده‌شناختی معرفی شده است؛ ولی نظریه‌های متعددی ساخته شده است که درآنها سعی می‌شود اندازهٔ λ را تخمین بزنند. ما بیشتر به‌تعیین λ ازطریق آزمایش علاقه‌مندیم. یك روش واضح آن خواهد بود که یك سیملوله بایك مغزی ابررسانا ساخته شود. ضریب القای چنین سیملوله‌ای اگرابررسانای آن‌کامل باشد وکاملا تمام حجم احاطه‌شده توسط سیملوله‌را پرکند، خیلی کوچك‌خواهد بود. ازطرف دیگر، اگرعمق نفوذ غیرصفر بود، درآن‌صورت ضریب القا تاحدودی بزرگتر می‌شد. اگرعمق نفوذکسر قابل ملاحظه‌ای از شعاع سیملوله باشد، عمق نفوذ را می‌توان ازاندازه‌گیریهای ضریب القا استنتاج کرد. امکان انجام دادن چنین کاری بستگی دارد به‌نسبت حجمی که میدان درآن‌نفوذمی کند، به‌حجم کل نمونه. واقعیت آن است که λ حدود چندمیلیونیم‌سانتیمتر است، ودرنتیجه آزمایش‌ساده‌ای که‌در بالامطرح‌شد نتایج‌قابل‌ملاحظه‌ای به‌بار نخواهدآورد. لیکن می‌توان با استفاده ازنمونه‌ای که نسبت سطح به‌حجم آن بزرگ باشد، براین اشکال فایق‌آمد. اولین‌آزمایشهای موفقیت‌آمیز ازاین‌نوع، توسط‌شوئنبرگ[1]

1. D. Shoenberg

درسال ۱۹۳۹ بایك کلوئید جیوه انجام شد. این آزمایشها به‌طور قاطع نشان دادند که میدان مغناطیسی به‌داخل کره‌های کوچك ابررسانای جیوه‌ای نفوذ می‌کند وعمق نفوذ به‌دما بستگی دارد. آزمایشهای اصلی شوئنبرگ، که تاکنون توسعه و تکامل بیشتری یافته‌اند، نشان دادکه مفهوم عمق نفوذ معتبرومهم است.

معادلات (۱۵.۱۵)، (۱۷.۱۵)، و(۱۸.۱۵)، همراه باچهارمعادلهٔ ماکسول‌را اغلب به‌طور جمعی معادلات ماکسول ـ لندن می‌نامند و برای بحث در مسائل الکترومغناطیس شامل ابررساناها بسیارسودمندند.

همان‌طور که ازبحث بالاآشکاراست، مفهوم طردکامل‌شار، یك ایده‌آل‌سازی است. به‌جای طردکامل، شارمغناطیسی درلایهٔ‌نازکی ازسطح ابررسانانفوذ می‌کند، وبرطبق‌نظریهٔ لندن، به‌طرف داخل به‌طورنمایی‌کاهش می‌یابد. چگالی جریان سطحی، $\mathbf{j}_M$ (یا برحسب موردی‌که داریم، $\mathbf{j}_S$) نیزیك ایده‌آل سازی است. در اینجا دوباره چگالی ابرجریان $\mathbf{J}_S$ دریك لایهٔ سطحی نازك گسترش وبه‌طرف داخل به‌طور نمایی‌کاهش می‌یابد. بدین‌ترتیب، درنظریهٔ لندن $\mathbf{j}_M$ وجود ندارد وفقط یك چگالی‌کل ابرجریان $\mathbf{J}_S$ موجود است. در بخش بعد، دو مسئله‌ای را که قبلا مطالعه کردیم، با به‌کار بردن معادلات ماکسول ـ لندن حل خواهیم کرد.

۵.۱۵* مثالهایی شامل معادلات لندن

برای درك بهتر معادلات ماکسول ـ لندن، اکنون آنها را برای به دست آوردن جوابهای کاملترمسائلی‌که در بخش ۳.۱۵ بررسی شدند، به‌کار می‌بریم. اولین مسئله در مورد یك کرهٔ ابررسانا به‌شعاع a است‌که دریك میدان خارجی قرار گرفته است ومیدان درفواصل دور یکنواخت و مساوی با $B_0\mathbf{k}$ است. معادلاتی که میدانها در آنها صدق می‌کنند عبارت‌اند از

$$\text{درخارج:}\quad \nabla\cdot\mathbf{B}=0,\quad \nabla\times\mathbf{H}=0,\quad \mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$$

$$\text{در داخل:}\quad \nabla^2\mathbf{B}=(1/\lambda^2)\mathbf{B},\quad \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \qquad (۲۲.۱۵)$$

که در آن λ (عمق نفوذ) به‌عنوان یك پارامتر پدیده شناختی در نظر گرفته شده است. شرایط مرزیی‌که باید براورده شوند عبارت‌اند از

$$\text{در } r=\infty:\quad \mathbf{B}=B_0\mathbf{k}$$

$$\text{در } r=a:\quad B_r \text{ و } B_\theta \text{ پیوسته هستند} \qquad (۲۳.۱۵)$$

ازاین شرایط مرزی تنها شرطی که به‌تفسیر بیشتر احتیاج دارد پیوستگی B_θ در $r=a$ است. این شرط از این فرض نتیجه می‌شود که ابرجریانها (هم‌انتقالی و هم مغناطشی) هرگز بینهایت نیستند (این فرض با بحثی که در پایان بخش قبل مطرح شد سازگار است). به‌عبارت دیگر، هیچ‌گونه جریان سطحی $\mathbf{j}_M$ یا $\mathbf{j}_S$ وجود ندارد. در این مورد مؤلفه‌های مماسی $\mathbf{H}$ و $\mathbf{M}$ هردو پیوسته‌اند، وبنا براین مؤلفهٔ مماسی $\mathbf{B}$ نیز پیوسته است.

حل معادلات برای میدان درخارج از کره هیچ‌گونه دشواریی تولید نمی‌کند. درست مثل بخش ۳.۱۵ می‌توان یك پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی معرفی کرد که در معادلهٔ لاپلاس صدق کند و یك جواب عمومی به دست آورد. ولی برای ناحیهٔ داخلی باید معادلهٔ $\nabla^2\mathbf{B}=(1/\lambda^2)\mathbf{B}$ را حل کرد. اگر در مختصات کروی لاپلاسی یك بردار را می‌توانستیم تنها با گرفتن لاپلاسی هریك ازمؤلفه‌های آن به‌دست آوریم، درآن صورت جوابهای این معادله نیز به‌آسانی پیدا می‌شدند. ولی این مطلب صادق نیست، و در عوض باید تاوِ تاوِ بردار محاسبه شود. نتیجتاً، حتی در این مسئلهٔ ساده مؤلفه‌های r و θ ی معادلهٔ $\nabla^2\mathbf{B}=(1/\lambda^2)\mathbf{B}$ هم شامل B_r وهم شامل B_θ هستند. این پیچیدگی نسبتاً مشهور است و روشهای جامعی برای حل معادلهٔ برداری هلمهولتز توسعه یافته است.[1] ولی، توسعه و کاربرد این روشها تا حدودی خارج از حوزهٔ این کتاب است. در نتیجه از نتایج بخش ۳.۱۵ استفاده می‌کنیم تا شکل جواب را به‌صورت یك فرض آغازین حدس بزنیم. جواب نهایی که بدین ترتیب حاصل می‌شود قابل توجیه است زیرا در معادلات وشرایط مرزی صدق می‌کند وجواب این معادلات و شرایط مرزی یکتاست. البته یکتا بودن جواب را می‌توان اثبات کرد، ولی دراینجا دانسته فرض خواهد شد.

دربخش ۳.۱۵ دیدیم که تنها جملهٔ $P_1(\cos\theta)$ در φ^* در جواب ناحیهٔ خارج از کره باقی ماند. فرض می‌کنیم که این مطلب برای نظریهٔ ماکسول ـ لندن نیزصادق است وفرض می‌کنیم که

$$\mathbf{B}(r,\theta)=B_0\mathbf{k}-b\left(\frac{a}{r}\right)^3\left[\cos\theta\,\mathbf{a}_r+\frac{1}{2}\sin\theta\,\mathbf{a}_\theta\right]\quad(\text{درخارج})\qquad(۲۴.۱۵)$$

این معادله خیلی شبیه به‌اولین معادله ازمعادلات (۷.۱۵) است، تنها تفاوت میان‌آن دو در این است که به‌جای B_0 درآن قسمت ازمیدان که مربوط به‌مغناطش کره می‌شود، b آمده است. مقدار b ازروی شرایط مرزی تعیین می‌شود. برای ناحیهٔ داخل کره، بخش ۳.۱۵ راه حل چندانی به‌دست نمی‌دهد؛ باوجود این ازشکل $\mathbf{M}$ که درآنجا یافت شد، وازاین حقیقت که درمعادلهٔ (۲۴.۱۵) B_r از طریق $\cos\theta$ به θ بستگی پیدا می‌کند در صورتی که B_θ از طریق $\sin\theta$ به θ بستگی دارد، یك فرض قابل قبول می‌تواند به‌صورت زیر

---

1. Morse and Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* (New York: Mc Graw - Hill, 1953), Chapter 13.

باشد

$$B_r = u(r)\cos\theta \quad \text{(در داخل)} \qquad \text{(۲۵.۱۵ الف)}$$

$$B_\theta = v(r)\sin\theta \quad \text{(در داخل)} \qquad \text{(۲۵.۱۵ ب)}$$

دوتابع $u(r)$ و $v(r)$ باید طوری تعیین شوند که $\nabla^2\mathbf{B} = (1/\lambda^2)\mathbf{B}$ ونیزشرایط مرزی‌در $r=a$ براورده شوند. این شرایط مرزی عبارت‌اند از

$$u(a) = B_0 - b \qquad \text{(۲۶.۱۵ الف)}$$

$$v(a) = -B_0 - b/2 \qquad \text{(۲۶.۱۵ ب)}$$

بابسط $\nabla\times\nabla\times\mathbf{B}$ وبااستفاده ازشکلهای فرض شدهٔ (۲۵.۱۵)، معادلات زیررا برای u و v به‌دست خواهیم آورد

$$r\frac{dv}{dr} + v + u = -\frac{r^2}{2\lambda^2}u \qquad \text{(۲۷.۱۵ الف)}$$

و

$$r^2\frac{d^2v}{dr^2} + 2r\frac{dv}{dr} + r\frac{du}{dr} = \frac{r^2}{\lambda^2}v \qquad \text{(۲۷.۱۵ ب)}$$

بامشتق‌گیری‌ازمعادلهٔ (۲۷.۱۵ الف) نسبت به r وتفریق‌نتیجهٔ حاصل‌ازمعادلهٔ (۲۷.۱۵ب) خواهیم داشت

$$v = -u - \frac{1}{2}ru' \qquad \text{(۲۸.۱۵)}$$

با به‌کاربردن این نتیجه برای حذف v و dv/dr ازمعادلهٔ (۲۷.۱۵ الف)، معادله‌ای‌برای u به‌دست می‌آید

$$r^2\frac{d^2u}{dr^2} + 4r\frac{du}{dr} = \frac{r^2}{\lambda^2}u \qquad \text{(۲۹.۱۵)}$$

بامعرفی ζ توسط رابطهٔ $\zeta = ru$ وتغییرمتغیرمستقل به $\rho = r/i\lambda$، به‌معادله‌ای برای‌توابع کروی بسل‌ازدرجهٔ اول می‌رسیم [معادلهٔ (۸۴.۱۷) با $l=1$]. با به‌کاربردن جواب $j_1(r/i\lambda)$ ازجدول ۲.۱۷ (صفحهٔ۴۸۳)، معادلهٔ زیر به‌عنوان جوابی که درمبدأ متعارف است، به‌دست می‌آید

$$u(r)=c(\lambda/r)^{3}[\sinh(r/\lambda)-(r/\lambda)\cosh(r/\lambda)] \qquad (۳۰.۱۵)$$

ازمعادلات (۲۸.۱۵) و (۲۹.۱۵) درمی‌یابیم که

$$v=\frac{c}{2}\left(\frac{\lambda}{r}\right)^{3}\left[\left(1+\frac{r^{2}}{\lambda^{2}}\right)\sinh\left(\frac{r}{\lambda}\right)-\left(\frac{r}{\lambda}\right)\cosh\left(\frac{r}{\lambda}\right)\right] \qquad (۳۱.۱۵)$$

در اینجا حل رسمی مسئله کامل شده است، فقط می‌ماند استفاده از معادلات (۲۶.۱۵)، (۳۰.۱۵) و (۳۱.۱۵) برای تعیین b و c. نتیجه عبارت است از

$$c=-3B_{0}\left(\frac{a}{\lambda}\right)\Big/\sinh\left(\frac{a}{\lambda}\right) \qquad (۳۲.۱۵)$$

$$b=B_{0}\left[1+3\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{2}-3\left(\frac{\lambda}{a}\right)\coth\left(\frac{a}{\lambda}\right)\right] \qquad (۳۳.۱۵)$$

انتظار می‌رود که به‌ازای مقادیر کوچك λ/a میدانها باآنچه دربخش ۳.۱۵ برای کرهٔ ابررسانای کامل به‌دست آمد تفاوت زیادی نداشته باشند. می‌توان صحت این مطلب را بااستفاده ازاین حقیقت که مقدار $\coth x$ برای مقادیر بزرگ x به‌صورت نمایی به‌یك میل می‌کند، تحقیق کرد. بنابراین

$$b\simeq B_{0}\left(1-3\frac{\lambda}{a}+3\frac{\lambda^{2}}{a^{2}}+\cdots\right), \qquad \frac{\lambda}{a}\ll 1 \qquad (۳۴.۱۵)$$

که نشان می‌دهد اولین جملهٔ تصحیح برای میدان خارج ازکره ازمرتبهٔ λ/a است.

دومین مثال برای حل معادلات لندن سیم طویل حامل جریان است. فرض می‌کنیم شعاع سیم a، عمق نفوذ آن λ، وجریان خارجی (حقیقی) کل آن I_{0} است. در خارج از سیم، $\mathbf{H}$ بامعادلهٔ آمپرداده می‌شود و $\mathbf{B}=\mu_{0}\mathbf{H}$. بنابراین

$$H_{r}=H_{z}=B_{r}=B_{z}=0; \quad B_{\theta}=\mu_{0}H_{\theta}=\mu_{0}\frac{I_{0}}{2\pi r} \text{ (در خارج)} \qquad (۳۵.۱۵)$$

در داخل، $\mathbf{B}$ درمعادلهٔ زیرصدق می‌کند

$$\nabla^{2}\mathbf{B}=\frac{1}{\lambda^{2}}\mathbf{B} \qquad (۳۶.۱۵)$$

ازروی تقارن، $\mathbf{B}$ تنهایك مؤلفهٔ θ دارد واین مؤلفه فقط به r بستگی دارد. در این صورت

معادلهٔ (۳۶.۱۵) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$r^{2}\frac{d^{2}}{dr^{2}}B_{\theta}+r\frac{d}{dr}B_{\theta}-\left(1+\frac{r^{2}}{\lambda^{2}}\right)B_{\theta}=0 \qquad (۳۷.۱۵)$$

این درست معادلهٔ بسل است به‌ازای شاخص یك وشناسهٔ ir/λ. جوابی که‌درمبدأ بینهایت نیست عبارت است از

$$B_{\theta}=AJ_{1}(ir/\lambda) \qquad (۳۸.۱۵)$$

ضریب A ازمساوی قرار دادن B_{θ} در داخل با B_{θ} در خارج، در $r=a$، تعیین می‌شود. نتیجه عبارت است از

$$B_{\theta}=\frac{\mu_{0}I_{0}}{2\pi a}\,\frac{J_{1}(ir/\lambda)}{J_{1}(ia/\lambda)}\ (\text{درداخل}) \qquad (۳۹.۱۵)$$

چون $J_{1}(ir/\lambda)=iI_{1}(r/\lambda)$ که درآن I_{1} تابع بسل تغییریافته است، معادلهٔ (۳۹.۱۵) را می‌توان برحسب توابع استاندارد جدولبندی شده نوشت . از این نتیجه می‌توانیم میدانهای دیگر وتوزیع جریان را محاسبه کنیم ومی‌توانیم نشان دهیم که میدان و چگالی جریان کل به صورت نمایی با فاصله ازسطح سیم کاهش می‌یابند. ولی این جزئیات را به بخش تمرینها واگذار می‌کنیم.

این بحث خواص الکترومغناطیسی ابررساناها ، الزاماً به صورت ناقص ارائه شد، به‌ویژه اینکه ازمسائل شامل میدانهای تابع زمان و از نظریهٔ میکروسکوپی ابررسانایی چشمپوشی شده است. بسیاری ازاین مطالب درکتابهای جدید دربارهٔ ابررسانایی بحث شده‌اند.[1] دوکتاب قدیمیتر برای تکمیل مطالب این‌فصل، عبارت‌اند ازکتاب لندن[2] وکتاب شوئنبرگ[3].

---

1. A. C. Rose - Innes and E. H. Rhoderick, *Introduction to Superconductivity*. Second Edition (New York: Pergamon, 1977); and M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity* (New York: McGraw - Hill, 1975); *Superconductivity in Science and Technology*, M. H. Cohen, editor (Chicago: University of Chicago Press, 1968).
2. F. London, *Superfluids . The Macroscopic Theory of Superconductivity*, Vol. I (New York: Wiley, 1950; New York: Dover Publications, 1961).
3. D. Shoenberg, *Superconductivity*, Second Edition (London: Cambridge University Press, 1965).

۶.۱۵ خلاصهٔ مطالب

ابررساناها ردهٔ نسبتاً بزرگی ازمواد راتشکیل می‌دهندکه در دماهای پایین، معمولا پایینتر از ۲۰K، گذار فازی به‌حالت ابررسانایی دارند. این گذار علاوه بربستگی به‌دما به‌میدان مغناطیسی نیز بستگی‌دارد، ودرمیدانهایی شدیدترازمیدان بحرانی H_c ماده به‌حالت‌معمولی برمی گردد. به‌طورایده‌آل

$$H_c = H_0[1-(T/T_c)^2]$$

رفتارالکتریکی ومغناطیسی‌درحالت ابررسانایی‌رابه‌ساده‌ترین وجه می‌توان توسط معادلات ساختمندی $\mathbf{J}=g\mathbf{E}$ و $\mathbf{M}=\chi_m\mathbf{H}$ توصیف کردکه درآنها پارامترهای مواد، مقادیرفرین زیررا دارند

$$g=\infty\,, \qquad \chi_m=-1 \qquad (\mu=0)$$

این مقادیر ، رسانندگی کامل و خاصیت دیامغناطیسی کامل را نشان می‌دهند . خاصیت دیامغناطیسی‌کامل ایجاب می کندکه در درون ابررسانا چگالی شار B و چگالی جریان J هردو صفرباشند و جریانهای ابررسانایی در سطح جاری باشند. معادلات لندن توصیف دقیقتری به‌دست می‌دهند. دراین معادلات، معادلات خطی ساختمندی بامعادلات دیفرانسیل زیرجایگزین می‌شوند

$$\mu_0\dot{\mathbf{J}}=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2\mathbf{E}$$

$$\mu_0\nabla\times\mathbf{J}=-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2\mathbf{B}$$

ازاین معادلات، همراه بامعادلات ماکسول درخلأ، چنین نتیجه می‌شود که چگالی شار و چگالی جریان در درون ابررسانا به جای آنکه به‌طورناگهانی به‌صفرنزول کنند،بافاصله‌از سطح به‌طور نمایی (باعمق نفوذ λ) کاهش می یابند.

۱. برای مسائلی‌که در آنها ابررسانا در میدان مغناطیسی واقع است، فرمولبندی سادهٔ $\chi_m=-1$، $\mu=0$، بسیارمناسب‌است. نتایج‌باآنچه توسط روشهای‌فصل ۹ به‌دست‌آمد، تنها باجایگزین‌کردن $\mu=0$، یکسان است.

۲. در یك فرمولبندی مشابه، که می‌تواند برای مسائلی شامل ابررساناهای حامل جریان خارجی مناسبترباشد، فرض می‌شودکه درداخل ابررسانا $\chi_m=0$ و $\mu=\mu_0$ است. شرط $\mathbf{B}=0$ باقراردادن $\mathbf{H}=0=\mathbf{M}$ در داخل ابررسانا برقرارمی‌شود، وشرایط مرزی‌بااین فرض‌که جریانهای ابررسانایی مناسبی درسطح ابررسانا جریان دارند براورده می‌شوند.

این دو فرمولبندی بایکدیگر معادل‌اند، ولی در یك مسئلهٔ مفروض تنها یکی از آن دو باید انتخاب ودنبال شود.

مسائل

۱.۱۵ استوانهٔ ابررسانای بینهایت بلندی به‌شعاع a را درنظر بگیرید که در یك میدان مغناطیسی عرضی قرار گرفته است. درفواصل دورازاستوانه میدان یکنواخت، واندازه‌اش B_0 است. میدانها را درداخل ودرخارج ازاستوانه و چگالی جریان را در داخل استوانه وروی سطح آن محاسبه کنید. فرض کنید که خواص ابررسانایی توسط خاصیت دیامغناطیسی کامل و رسانندگی کامل توصیف می‌شوند. دوفرمولبندی معادل‌را مقایسه کنید.

۲.۱۵ برهٔ ابررسانای بی‌نهایت بزرگی به‌ضخامت d را درنظر بگیرید که دوسطح آن‌در $z=0$ و $z=d$ قرار دارند، درخارج ازبره میدان مغناطیسی یکنواخت وموازی باسطوح آن است، $B_x=B_0$. بااستفاده ازمعادلات لندن‌وعمق نفوذپدیده‌شناختی λ، میدان‌وچگالی جریان را در داخل بره به‌دست آورید.

۳.۱۵ با استفاده از معادلات لندن وعمق نفوذ پدیده‌شناختی λ، محاسبات مسئلهٔ ۱.۱۵ را انجام دهید.

۴.۱۵ بااستفاده ازمعادلات لندن وشروع ازنتایجی که درمعادلات (۳۵.۱۵) تا (۳۹.۱۵) توسعه داده شد، بحث میدانهای تولید شده توسط سیم بی‌نهایت طویل حامل جریان را کامل کنید. (الف) $\mathbf{J}$ را در داخل استوانه محاسبه کنید. (ب) دربارهٔ کاهش نمایی $\mathbf{B}$ در ناحیهٔ نزدیك به‌سطح استوانه بحث کنید.

۵.۱۵ کرهٔ ابررسانایی به‌شعاع a را درنظربگیرید که دریك میدان مغناطیسی قرار گرفته واین میدان درفواصل دورازکره یکنواخت واندازه‌اش B_0 است. بااستفاده از فرمولبندی بخش ۵.۱۵ به‌عنوان مبنا، مطالب زیررا فراهم آورید: (الف) بسطی برای $\nabla\times\nabla\times\mathbf{B}$ وازآن معادلاتی راکه مؤلفه‌های $\mathbf{B}$ در داخل کره‌در آن صدق می‌کنند. (ب) اثباتی برای معادلهٔ (۲۷.۱۵). (ج) یك بحث کمی دربارهٔ کاهش نمایی $\mathbf{B}$ در ناحیهٔ نزدیك به‌سطح کره.

۱۶

معادلات ماکسول

۱.۱۶ تعمیم قانون آمپر. جریان جابه‌جایی

درفصل ۹ دیدیم که میدان مغناطیسی ناشی از توزیع جریان، در قانون مداری آمپر صدق می‌کند

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, da \qquad (۱.۱۶)$$

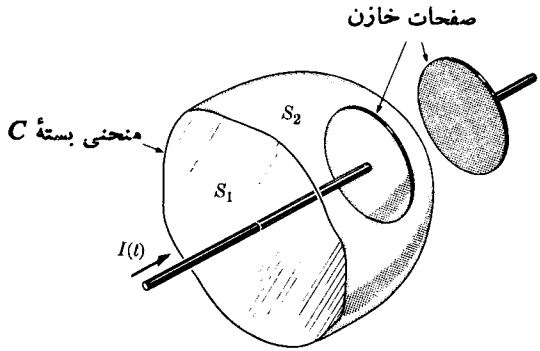
اکنون ما این قانون را بررسی می‌کنیم ونشان می‌دهیم که گاهی باشکست روبه‌رومی‌شود، وبرای آن تعمیمی پیدا می‌کنیم که همیشه معتبر باشد.

مداری راکه درشکل ۱.۱۶ نشان داده شده است درنظربگیرید، این مدارشامل یك خازن کوچك باصفحات موازی است که باجریان ثابت I باردار می‌شود (احتیاجی نیست علت به‌وجودآمدن جریان را بدانیم). چنانچه قانون آمپررا دربارهٔ منحنی بستهٔ C و سطح S_1 به‌کار ببریم، خواهیم داشت

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, da = I \qquad (۲.۱۶)$$

ازطرف دیگر، چنانچه قانون‌آمپررا درمورد منحنی بستهٔ C و سطح S_2 به‌کار ببریم، چون J درتمام نقاط روی سطح S_2 مساوی صفراست خواهیم داشت

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, da = 0 \qquad (۳.۱۶)$$



شکل ۱۰۱۶ منحنی بستهٔ C ودو سطح S_1 و S_2 برای بررسی قانون مداری آمپر.

معادلات (۲.۱۶) و (۳.۱۶) بایکدیگر متناقض‌اند و بنابراین هر دو نمی‌توانند صحیح باشند. اگرفرض کنیم که منحنی بستهٔ C به‌فاصلهٔ خیلی زیادی از خازن قرارگرفته است، واضح است که این وضعیت با موارد استاندارد قانون آمپرکه در فصل ۸ مطالعه‌کردیم، فرق زیادی ندارد. بدین ترتیب می‌توان تصورکردکه معادلهٔ (۲.۱۶) صحیح است، زیرا این معادله به‌خصوصیت جدید، یعنی خازن بستگی ندارد. از طرفی به‌دست آوردن معادلهٔ (۳.۱۶) مستلزم درنظرگرفتن خازن‌است، بنابراین چنین به‌نظر می‌رسدکه معادلهٔ (۳.۱۶) احتیاج به‌تصحیح دارد. چون این معادلات باانتگرال گیری از معادلهٔ (۳۰.۹)، یعنی

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \qquad (۴.۱۶)$$

به‌دست آمدند، این معادله نیزمستلزم تصحیح است.

تصحیح مناسب را بدین ترتیب می‌توان انجام‌دادکه توجه‌کنیم علت اختلاف‌نتایج معادلات (۲.۱۶) و (۳.۱۶) در این است که انتگرالهای طرف راست این دو معادله متفاوت‌اند. به‌بیان ریاضی

$$\int_{S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_2 \, da - \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_1 \, da \neq 0 \qquad (۵.۱۶)$$

S_1 و S_2 روی هم یك سطح بسته را تشکیل می‌دهند (در C به‌یکدیگر وصل می‌شوند)؛ با وجود این $\mathbf{n}_2$ به سمت خارج و $\mathbf{n}_1$ به‌سمت داخل است. با در نظر گرفتن این مطلب، می‌توان معادلهٔ (۵.۱۶) را به‌صورت زیرنوشت

$$\oint_{S_1+S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da \neq 0 \qquad (۶.۱۶)$$

به‌بیان فیزیکی، جریان انتقالی خالص از سطح بستهٔ S_1+S_2 صفر نمی‌شود زیرا بار در روی صفحهٔ خازن درون سطح بسته انباشته می‌شود. بقای بار، بنابر معادله‌های (۶.۷) و (۷.۷)، مستلزم آن است که

$$\oint_{S_1+S_2} \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\,da = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dv \qquad (۷.۱۶)$$

زیرا در داخل حجم V که با S_1+S_2 احاطه شده است، چگالی بار ρ در روی صفحهٔ خازن نسبت به‌زمان تغییر می‌کند. صورت دیفرانسیلی معادلهٔ (۷.۱۶) با معادلهٔ پیوستگی زیر بیان می‌شود

$$\nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \qquad (۸.۱۶)$$

اکنون روشن است که معادلهٔ (۴.۱۶) ازچه نظر غلط است: اگر واگرایی آن را محاسبه کنیم، داریم

$$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{H}=0=\nabla\cdot\mathbf{J}$$

زیرا واگرایی تاو هر بردار همواره صفر است. بنابراین رابطهٔ $\nabla\cdot\mathbf{J}=0$، که معادلهٔ (۴.۱۶) آن را ایجاب می‌کند، در وضع مورد بررسی ما با بقای بار ناسازگار است، لذا باید به سمت راست معادلهٔ (۴.۱۶) جمله‌ای اضافه شود که $\partial\rho/\partial t$ را درمعادلهٔ (۸.۱۶) بدهد. ازرابطهٔ بین ρ وجابه‌جایی الکتریکی، یعنی

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \qquad (۹.۱۶)$$

می‌توان دید که این جملهٔ اضافی چه می‌تواند باشد. باقراردادن ρ از معادلهٔ (۹.۱۶) در معادلهٔ (۸.۱۶) به‌دست می‌آوریم

$$\nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{D}=\nabla\cdot\left(\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)=0$$

اگرجملهٔ $\partial\mathbf{D}/\partial t$ به‌معادلهٔ (۴.۱۶) اضافه شود، درآن‌صورت واگرایی آن به‌نحو صحیح معادلهٔ (۸.۱۶) را خواهد داد. (البته، تا فصل ۱۱، مافرض می‌کردیم که میدانها به زمان بستگی ندارند، لذا کاربرد معادلهٔ (۴.۱۶) به‌همان صورت صحیح بود. درفصلهای ۱۱ تا ۱۵ فرض شد که میدانها «کند تغییر»اند، یعنی از $\partial\mathbf{D}/\partial t$ درمقایسه با $\mathbf{J}$ چشمپوشی شد.) بامنظورکردن $\partial\mathbf{D}/\partial t$ قانون تعمیم یافتهٔ آمپر به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad (۱۰.۱۶)$$

معرفی جملهٔ دوم در سمت راست معادلهٔ بالا، که به‌جریان جابه‌جایی معروف است، یکی از بزرگترین کارهای ماکسول در نظریهٔ الکترومغناطیس است.

۲.۱۶ معادلات ماکسول و مبانی تجربی آنها

معادلهٔ (۱۰.۱۶) یکی از مجموعهٔ معادلاتی است که به‌معادلات ماکسول معروف‌اند. این مجموعه معادلات کلاً شامل معادلهٔ (۱۰.۱۶) وسه معادلهٔ دیگراست که قبلا با آنها آشنایی پیدا کردیم، یعنی

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad [۱۰.۱۶]$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad [۶.۱۱] \quad (۱۱.۱۶)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad [۲۹.۴] \quad (۱۲.۱۶)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = ۰ \qquad [۳۰.۸] \quad (۱۳.۱۶)$$

هرکدام ازاین معادلات نمایندهٔ تعمیم یك دسته از مشاهدات تجربی‌اند: معادلهٔ (۱۰.۱۶) تعمیم قانون آمپر است،معادلهٔ (۱۱.۱۶) صورت دیفرانسیلی قانون القای الکترومغناطیسی فاراده است، معادلهٔ (۱۲.۱۶) تعمیم قانون گاؤس است که خود از قانون کولن نتیجه می‌شود، معادلهٔ (۱۳.۱۶) را معمولا می‌گویند نمایندهٔ این واقعیت است که هرگز قطب تنهای مغناطیسی مشاهده نشده است.

واضح است که معادلات ماکسول بیان ریاضی نتایج تجربی‌خاصی هستند. ازاین‌رو نمی‌توان آنها را اثبات کرد؛ باوجود این، می‌توان قابلیت‌کاربرد آنها را برای هروضعیتی تحقیق کرد. درنتیجهٔ کارهای تجربی بسیار گسترده، اکنون معلوم شده است که معادلات ماکسول را می‌توان تقریباً درکلیهٔ وضعیتهای ماکروسکوپی به‌کاربرد واین معادلات اغلب خیلی شبیه به‌اصل بقای اندازه‌حرکت، به‌عنوان اصول راهنما به‌کارمی‌روند. اینهامعادلات بنیادیی هستند که برمیدانهای الکترومغناطیسی حاصل از چگالیهای چشمهٔ بار و جریان (ρ و $\mathbf{J}$) حاکم‌اند. اگر موادی موجود باشند، برای آنکه بتوانیم معادلات ماکسول را به‌کاربریم، باید معادلات ساختمندی مناسب را نیز بدانیم (یا به‌طور تجربی ویا از نظریهٔ میکروسکوپی مربوط به‌مادهٔ نوع به‌خصوص). این معادلات بدین صورت‌اند: $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$

و $\mathbf{H}=\mathbf{H}(\mathbf{B})$. همچنین چگالی جریان $\mathbf{J}$ درماده سهمی‌راکه معـادلهٔ ساختمندی سومی، $\mathbf{J}=\mathbf{J}(\mathbf{E})$، می‌دهد نیز شامل است، واین‌معادله نیز باید به‌طورتجربی یا به‌طورنظری‌معلوم باشد. وقتی معادلهٔ نیروی لورنتس، $\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$، که اثر میدانها برروی ذرات باردار را توصیف می‌کند، بااین معادلات جفت شود، مجموعه قوانینی به‌دست می‌آیدکه توصیف کلاسیك‌کاملی برای ذرات بابرهم‌کنش الکترومغناطیسی فراهم می‌آورد.

هم‌اکنون دیدیم‌که جریان جابه‌جایی‌که دربخش قبل معرفی شد برای‌آنکه بقای‌بار داشته باشیم ضروری‌است، وهنگامی‌که آن‌را درمعادلات ماکسول واردکردیم، این‌معادلات معادلهٔ پیوستگی را ایجاب می‌کنند، به‌گونه‌ای که لازم نیست‌که این معادله را به‌مجموعهٔ معادلات بنیادی بیافزاییم. معادلات ماکسول دو پیامد جالب دیگرنیزدارندکه دربخش‌بعد به‌آنها خواهیم پرداخت. خواهیم دید که این پیامدها نیزبه‌طورقاطعی به‌جریان‌جابه‌جایی بستگی دارند.

۳.۱۶ انرژی الکترومغناطیسی

درفصل ۶ نشان دادیم‌که کمیت زیر

$$U_E=\frac{1}{2}\int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\,dv \qquad (۱۴.۱۶)$$

را می‌توان انرژی پتانسیل الکتریسیتهٔ ساکن دستگاه بارهایی دانست‌که میدان الکتریکی مربوط را ایجاد می‌کنند. این نتیجه را بامحاسبهٔ‌کار انجام‌شده برای ایجاد میدان، به‌دست آوردیم. به‌طریق مشابه، درفصل ۱۲، کمیت زیر

$$U_M=\frac{1}{2}\int_V \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\,dv \qquad (۱۵.۱۶)$$

را به‌عنوان انرژی ذخیره شده درمیدان مغناطیسی معرفی کردیم. اکنون قابلیت‌کاربرد این عبارات را درمورد وضعیتهای غیرساکن بررسی می‌کنیم.

اگرحاصل‌ضرب نرده‌ای معادلهٔ (۱۰.۱۶) را با $\mathbf{E}$ به‌دست‌آوریم ومعادلهٔ حاصل را از حاصل‌ضرب نرده‌ای معادلهٔ (۱۱.۱۶) در $\mathbf{H}$ کم‌کنیم، نتیجه معادلهٔ زیرخواهد بود

$$\mathbf{H}\cdot\nabla\times\mathbf{E}-\mathbf{E}\cdot\nabla\times\mathbf{H}=-\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}-\mathbf{E}\cdot\mathbf{J} \qquad (۱۶.۱۶)$$

می‌توان بـا استفاده ازاتحاد زیر، طرف چپ معادلهٔ بالا را به‌صورت واگرایی یك تابع نوشت

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G}$$

درنتیجه خواهیم داشت

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \qquad (۱۷.۱۶)$$

اگرمحیطی که‌معادلهٔ (۱۷.۱۶) رادرمورد آن به‌کارمی‌بریم‌خطی وغیرپاشنده‌باشد، به‌عبارت دیگر اگر $\mathbf{D}$ متناسب با $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ متناسب با $\mathbf{H}$ باشند[۱]، دراین‌صورت مشتقهای زمانی‌طرف

---

۱. محیط خطی وغیرپاشنده محیطی‌است که درآن $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ و $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$ و μ و ε آن‌کمیتهایی مستقل ازمتغیرهای میدان وصریحاً به‌زمان بستگی نداشته باشند، یك مورد قابل‌توجه که‌غیرخطی است، در محیطهای فرومغناطیس اتفاق می‌افتد، که در آن رابطهٔ بین میدان مغناطیسی و شدت مغناطیسی نه تنها به‌شدت میدان، بلکه به‌تاریخچهٔ قبلی محیط نیزبستگی دارد.

باوجود این، باید توجه داشت که ناهمسانگردی به‌تنهایی نمی‌تواند روابط زیر را از اعتبار بیندازد

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{۱}{۲} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \quad \text{و} \quad \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{۱}{۲} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})$$

درمورد محیطهای ناهمسانگرد، رابطهٔ بین $\mathbf{E}$ و $\mathbf{D}$ را می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$D_i = \sum_{j=۱}^{۳} \varepsilon_{ij} E_j$$

درنتیجه

$$\frac{۱}{۲} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = \frac{۱}{۲} \sum_{i=۱}^{۳} \sum_{j=۱}^{۳} \varepsilon_{ij} \left(E_i \frac{\partial E_j}{\partial t} + \frac{\partial E_i}{\partial t} E_j \right)$$

استدلالی‌ساده‌براساس‌بقای‌انرژی (Wooster, *Crystal Physics*, Cambridge University Press, 1938., p.277) نشان می‌دهد که $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}$ با استفاده ازاین نتیجه برای تعویض i و j درجملهٔ آخر خواهیم داشت

$$\frac{۱}{۲} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = \sum_{i=۱}^{۳} \sum_{j=۱}^{۳} E_i \varepsilon_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial t}$$

اگر $[\varepsilon_{ij}]$ مجموعه‌ای ازاعداد ثابت مستقل از $\mathbf{E}$ و t باشد، آنگاه

$$\frac{۱}{۲} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = \sum_{i=۱}^{۳} E_i \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=۱}^{۳} \varepsilon_{ij} E_j = \sum_{i=۱}^{۳} E_i \frac{\partial D_i}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که ناهمسانگردی به‌تنهایی محدودیتی برای این‌اثبات ایجادنمی‌کند.

راست معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\mathbf{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\mathbf{E}=\frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}^2=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}$$

و

$$\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\mathbf{H}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mu\mathbf{H}=\frac{1}{2}\mu\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}^2=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}$$

بااستفاده ازاین روابط، معادلهٔ (۱۷.۱۶) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=-\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})-\mathbf{J}\cdot\mathbf{E} \qquad (۱۸.۱۶)$$

اولین جملهٔ سمت راست معادلهٔ بالا، عبارت‌است ازمشتق زمانی مجموع چگالیهای انرژی الکتریکی ومغناطیسی؛ جملهٔ دوم، دراکثرموارد، به‌ویژه چنانچه $\mathbf{J}=g\mathbf{E}$ باشد، درست برابرمنفی گرمای ژول ایجادشده در واحد حجم است.

باانتگرال گیری ازمعادلهٔ بالا روی حجم ثابت V که باسطح بستهٔ S مسدود شده باشد، خواهیم داشت

$$\int_V\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})dv=-\frac{d}{dt}\int_V\frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})\,dv-\int_V\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\,dv \qquad (۱۹.۱۶)$$

بااستفاده ازقضیهٔ واگرایی درسمت چپ این معادله، نتیجهٔ زیررا به‌دست می‌آوریم

$$\oint_S\mathbf{E}\times\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}\,da=-\frac{d}{dt}\int_V\frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})\,dv-\int_V\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\,dv$$

بانوشتن معادلهٔ بالا به‌صورت زیر

$$-\int_V\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\,dv=\frac{d}{dt}\int_V\frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})\,dv+\oint_S\mathbf{E}\times\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}\,da \qquad (۲۰.۱۶)$$

واضح است کـه جملهٔ $\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}$ از دوقسمت تشکیل شده است . یکی آهنگ تغییر انرژی الکترومغناطیسی ذخیره شده درحجم V نسبت به‌زمان، و دیگری‌یك انتگرال سطحی.طرف چپ معادلهٔ (۲۰.۱۶) توان انتقال یافته به میدان الکترومغناطیسی ازطریق حرکت‌بارهای آزاد در حجم V است. چنانچه در حجم V منبع emf وجود نداشته باشد، طرف چپ

معادلهٔ (۲۰.۱۶) منفی وبرابر است بامنفی گرمای ژول تولید شده درواحد زمان. باوجود این، دربعضی موارد، طرف چپ معادلهٔ (۲۰.۱۶) ممکن است مثبت باشد. فرض کنید که ذرهٔ باردار q باسرعت‌ثابت $\mathbf{v}$ تحت تأثیر نیروهای مکانیکی، الکتریکی، ومغناطیسی حرکت می‌کند؛ آهنگ کاری که نیروی مکانیکی روی ذره‌انجام می‌دهد برابر است با

$$\mathbf{F}_m \cdot \mathbf{v} = -q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = -q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$$

اما بنابرمعادلهٔ (۴.۷)، چگالی جریان عبارت است از

$$\mathbf{J} = \sum_i N_i q_i \mathbf{v}_i$$

بنابراین آهنگ کاری که نیروی مکانیکی (درواحد حجم) انجام می‌دهد برابراست با

$$\sum_i N_i \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{v}_i = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$$

واین چگالی توان به‌میدان الکترومغناطیسی انتقال می‌یابد.

چون انتگرال‌سطحی درمعادلهٔ (۲۰.۱۶) تنها شامل میدانهای الکتریکی ومغناطیسی است، می‌توان این جمله‌را به‌عنوان آهنگ عبور انرژی ازاین سطح تعبیر کرد. بنابراین معادلهٔ (۲۰.۱۶) بیان‌کنندهٔ بقای انرژی درحجم ثابت V است.

اکنون به معادلهٔ دیفرانسیل مربوط (۱۸.۱۶) برمی‌گردیم. خواهیم دید این معادله بیان‌کنندهٔ بقای موضعی انرژی درهر نقطه است. اگر علامتهای اختصاری زیر را به‌کاربریم

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} \qquad (۲۱.۱۶)$$

$$u = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \qquad (۲۲.۱۶)$$

آنگاه معادلهٔ (۱۸.۱۶) ایجاب می‌کند که درهرنقطه معادلهٔ زیر برقرار باشد

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \qquad (۲۳.۱۶)$$

شکی نیست که $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ کاری است که میدان موضعی روی ذرات باردار در واحد حجم انجام می‌دهد. قبلا ما u را به‌عنوان چگالی انرژی میدانهای الکتریکی و مغناطیسی تعبیر کرده بودیم. اگر $\nabla \cdot \mathbf{S} = 0$ باشد، درآن‌صورت معادلهٔ (۲۳.۱۶) بقای موضعی انرژی

را بیان خواهد کرد: درهر نقطه آهنگ تغییر انرژی میدان برابر است با اتلاف توان درواحد حجم. ازطرف دیگر، اگر $\nabla \cdot \mathbf{S} \neq 0$ ولی $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = 0$ باشد (برای مثال در یك محیط نارسانا)، آنگاه

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad (۲۴.۱۶)$$

این معادله ازنظر ریاضی دقیقاً همانند معادلهٔ پیوستگی بارالکتریکی (۸.۱۶) است، بجز آنکه چگالی انرژی u به‌جای چگالی بار ρ نشسته است. اگر بنا باشد معادلهٔ (۲۴.۱۶) نیز بقای انرژی را توصیف کند، $\nabla \cdot \mathbf{S}$ می‌بایست نمایانگر واگرایی چگالی جریان انرژی، یا (به‌بیان دیگر،) آهنگ جریان انرژی درواحد سطح باشد. معمولا خود بردار $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ را، که به بردار پوئین‌تینگ مشهوراست، به‌عنوان جریان موضعی انرژی‌در واحد سطح درنظر می گیرند.[1] ما این تعبیرها را برای u و $\mathbf{S}$ به‌کار خواهیم برد، هر چند که می‌دانیم آنچه تعبیرش مستقیماً ازمعادلات ماکسول مورد نیاز است، مشتق زمانی u و واگرایی $\mathbf{S}$ است. به‌هرجهت تنها این کمیتهای اخیر ازنظرفیزیکی قابل اندازه گیری‌اند. اما، همان‌طور که معادلهٔ(۲۰.۱۶) بیان‌کنندهٔ بقای انرژی به‌صورت‌انتگرالی است، معادلهٔ (۲۳.۱۶) نیز به‌طورموضعی بقای انرژی را بیان می کند.

۴.۱۶ معادلهٔ موج

یکی از مهمترین پی‌آمدهای معادلات ماکسول، معادلات انتشار موج الکترومغناطیسی در محیط خطی است. معادلهٔ موج برای $\mathbf{H}$ را می‌توان با گرفتن تاو از (۱۰.۱۶) به‌دست آورد

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

باقرار دادن $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ و $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$ و بااین فرض‌که g و ε ثابت‌اند، خواهیم داشت

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = g\nabla \times \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E}$$

فرض می‌کنیم $\mathbf{E}$ تابع خوشرفتاری باشد، وازاین‌رو دراینجا ترتیب مشتق‌گیری زمانی و

---

۱. هنوز بحث وجدل در این باره ادامه دارد. برای بحث جدیدی در این باره به مقالهٔ زیر رجوع کنید

W. H. Furry: *Am. J. Phys*, 37, 621 (1969).

ومکانی را عوض کرده‌ایم. اکنون می‌توانیم معادلهٔ (۱۱.۱۶) را به‌کار ببریم و $\nabla\times\mathbf{E}$ را حذف کنیم وبدین ترتیب معادلهٔ زیررا به‌دست آوریم

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{H}=-g\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}-\varepsilon\mu\frac{\partial^{2}\mathbf{H}}{\partial t^{2}} \qquad (۲۵.۱۶)$$

که درآن رابطهٔ $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ با μی ثابت به‌کار رفته است. حال بااستفاده از اتحادبرداری

$$\nabla\times\nabla\times=\nabla\nabla\cdot-\nabla^{2} \qquad (۲۶.۱۶)$$

معادلهٔ زیررا به‌دست می‌آوریم

$$\nabla\nabla\cdot\mathbf{H}-\nabla^{2}\mathbf{H}=-g\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}-\varepsilon\mu\frac{\partial^{2}\mathbf{H}}{\partial t^{2}} \qquad (۲۷.۱۶)$$

چون μ ثابت است

$$\nabla\cdot\mathbf{H}=\frac{1}{\mu}\nabla\cdot\mathbf{B}=0$$

درنتیجه جملهٔ اول سمت چپ معادلهٔ (۲۷.۱۶) صفرمی‌شود ومعادلهٔ نهایی موج به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\nabla^{2}\mathbf{H}-\varepsilon\mu\frac{\partial^{2}\mathbf{H}}{\partial t^{2}}-g\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=0 \qquad (۲۸.۱۶)$$

بردار $\mathbf{E}$ نیز در همین معادلهٔ موج صدق می‌کند، این مطلب را می‌توان به‌سادگی با گرفتن تاو ازمعادلهٔ (۱۱.۱۶) تحقیق کرد

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}=-\nabla\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

بااستفاده ازمعادلهٔ (۱۰.۱۶) برای حذف میدان مغناطیسی و بااین فرض که g ، μ ، و ε ثابت‌اند، خواهیم داشت

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}=-g\mu\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}-\varepsilon\mu\frac{\partial^{2}\mathbf{E}}{\partial t^{2}}$$

با به‌کاربردن اتحادبرداری (۲۶.۱۶) ومحدود کردن کاربرد معادله به‌فضای تهی ازبار آزاد،

به‌طوری که $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ باشد، نتیجه خواهد شد

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - g\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \qquad (۲۹.۱۶)$$

میدان الکترومغناطیسی دریك محیط خطی وهمگن که چگالی بار درآن صفر است، خواه محیط رسانا باشد خواه نارسانا، ازمعادلات موجی که در بالا به‌دست آمد پیروی می کند. باوجود این، تنها کافی نیست که میدان در این معادلات صدق کند، بلکه باید در معادلات ماکسول نیزصادق باشد. واضح است که معادلات (۲۸.۱۶) و (۲۹.۱۶) الزاماً ازمعادلات ماکسول نتیجه می‌شوند، ولی عکس این مطلب صحیح نیست. درحل معادلات موج، باید مخصوصاً دقت کرد که جوابهایی برای معادلات ماکسول به‌دست آوریم. یك روش که می‌توان آن‌را به‌خوبی درمورد امواج تکفام به‌کار برد، این است که ابتدا جوابی برای $\mathbf{E}$ به‌دست آوریم. آنگاه تاو $\mathbf{E}$، مشتق زمانی $\mathbf{B}$ را به‌دست می‌دهد که برای امواج تکفام بایك رابطهٔ ساده به $\mathbf{B}$ مربوط می‌شود ودرنتیجه $\mathbf{B}$ به‌آسانی به‌دست می‌آید.

امواج تکفام را می‌توان به‌صورت امواجی توصیف کرد که با یك فرکانس منفرد مشخص می‌شوند. برای بحث دربارهٔ چنین امواجی، روشهای تحلیل متغیرهای مختلط بسیارمناسب‌اند. بستگی زمانی میدان (برای مشخص بودن، بردار $\mathbf{E}$ را درنظرمی گیریم) به‌صورت $e^{-i\omega t}$ فرض می‌شود، لذا

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \qquad (۳۰.۱۶)$$

باید به‌خاطرداشت که میدان الکتریکی فیزیکی با گرفتن قسمت حقیقی[1] معادلهٔ (۳۰.۱۶) به‌دست می‌آید؛ به‌علاوه $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ در حالت کلی مختلط است، به‌طوری که میدان الکتریکی واقعی با $\cos(\omega t + \phi)$، که درآن ϕ فاز $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ است، متناسب‌می‌شود. بااستفاده ازمعادلهٔ (۳۰.۱۶) درمعادلهٔ (۲۹.۱۶) خواهیم داشت

$$e^{-i\omega t}\{\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \varepsilon\mu \mathbf{E} + i\omega g\mu \mathbf{E}\} = 0 \qquad (۳۱.۱۶)$$

این معادله‌ای است که تغییرات فضایی‌میدان الکتریکی باید از آن پیروی کند (البته‌می توان

---

۱. همان‌طورکه درفصل‌سیزدهم بحث‌شد، می‌توان ازیك توصیف ریاضی که به‌طور مناسب‌برحسب متغیرهای مختلط بیان می‌شود، با انتخاب قسمت حقیقی یا موهومی کمیت مختلط، به‌کمیتهای فیزیکی‌رسید. انتخاب قسمت حقیقی یا موهومی، کاملا دلخواه است. این دوانتخاب فقط به‌اندازهٔ $\pi/2$ با یکدیگر اختلاف فاز دارند، ولی دریك مسئلهٔ داده شده، همواره باید یکی ازآنها را انتخاب کرد. در این فصل ودرفصل بعدی، قسمت حقیقی کمیتهای مختلط نمایندهٔ کمیتهای فیزیکی است، مگراینکه صریحاً به‌نحو دیگری تذکرداده شود.

ضریب مشترك $e^{-i\omega t}$ را حذف کرد). کاربعدی ما، حل معادلهٔ (۳۱.۱۶) است برای تعیین تغییرات فضایی میدان الکتریکی درحالات ویژهٔ گوناگون مورد نظر. این کار در فصل بعد انجام خواهد شد؛ دراینجا تنها بعضی از ساده‌ترین موارد ممکن را بررسی می‌کنیم.

ابتدا فرض کنید که «محیط» فضای تهی است، به طوری که $g=0$، $\varepsilon=\varepsilon_0$، و $\mu=\mu_0$. به‌علاوه، فرض کنید که $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ تنها دریك راستا، برای مثال در راستای z، تغییر می‌کند، و به x و y بستگی ندارد. دراین‌صورت‌معادلهٔ (۳۱.۱۶) به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\frac{d^2\mathbf{E}(z)}{dz^2}+(\omega/c)^2\mathbf{E}=0 \qquad (۳۲.۱۶)$$

که درآن ما رابطهٔ

$$\varepsilon_0\mu_0=1/c^2$$

راکه در فصل ۸ به‌دلایل بُعدی مطرح شد، به‌کار برده‌ایم؛ c بُعد سرعت دارد. این معادله (که به‌معادلهٔ هلمهولتزمعروف است) ازنظرریاضی بامعادلهٔ نوسانگرهماهنگ یکسان‌است. جوابهای این معادله عبارت‌اند از

$$\mathbf{E}(z)=\mathbf{E}_0e^{\pm i\kappa z}$$

که درآن $\mathbf{E}_0$ بردار ثابتی است، مشروط برآنکه

$$\kappa=\omega/c \qquad (۳۳.۱۶)$$

باقرار دادن این جواب برای $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ درمعادلهٔ (۳۰.۱۶)، جواب‌کامل را به‌دست‌می‌آوریم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0e^{-i(\omega t\mp\kappa z)} \qquad (۳۴.۱۶)$$

که باگرفتن قسمت حقیقی آن داریم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0\cos(\omega t\mp\kappa z) \qquad (۳۵.۱۶\ \text{الف})$$

بااستفاده ازمعادلهٔ (۳۳.۱۶)، صورت دیگری برای معادلهٔ بالا عبارت است از

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0\cos\omega(t\mp z/c) \qquad (۳۵.۱۶\ \text{ب})$$

این معادله نمایانگر یك موج سینوسی است که درراستای z به‌سمت راست یا به‌سمت‌چپ (بسته به‌آنکه کدام یك ازدو علامت مثبت یا منفی به‌کار گرفته شوند) حرکت می‌کند.

سرعت انتشار موج c است. اگر نور صورتی از تابش الکترومغناطیسی باشد، آنگاه معادلات ماکسول پیش‌بینی می‌کنند که سرعت نور درخلأ برابر است با

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 2.99979 \times 10^8 \ \mathrm{m/s}$$

هرچند که ما انتظار چنین نتیجه‌ای را داشتیم، ولی هنگامی که ماکسول برای اولین بار این نتیجه را اعلان کرد پیروزی بزرگی برای نظریه‌اش به‌شمار می‌رفت، زیرا تا آن زمان ماهیت الکترومغناطیسی نور چیزی بیش از یك تصور ذهنی تلقی نمی‌شد. معادلهٔ (۳۵.۱۶ الف) نشان می‌دهد که فرکانس موج $f = \omega/2\pi$ وطول موج آن $\lambda = 2\pi/\kappa$ است. بدین ترتیب معادلهٔ (۳۳.۱۶) نتیجهٔ آشنایی است در مورد موج، یعنی

$$\lambda f = c$$

دریك محیط دی‌الکتریك نارسانای غیرمغناطیسی، بازهم $g = 0$ و $\mu = \mu_0$، ولی $\varepsilon = K\varepsilon_0$ است. دراین حالت معادلاتی راکه دربالا به‌دست‌آوردیم دقیقاً به‌همان شکل فوق خواهند بود، بجز آنکه اکنون معادلهٔ (۳۳.۱۶) به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\kappa = \sqrt{K}\omega/c \qquad \text{(۳۳.۱۶ الف)}$$

اگر n را به‌صورت $n = \sqrt{K}$ تعریف کنیم، می‌بینیم که نتایج با حالت مربوط به خلأ یکسان‌اند، بجز آنکه اکنون سرعت انتشار موج به‌جای c برابراست با c/n. کمیت n ضریب شکست محیط دی‌الکتریك نامیده می‌شود؛ برای خلأ $n = 1$ است. همان‌طورکه‌در زیرخواهیم دید، این مطلب اثرهای شکست درمواد شفاف را توجیه می‌کند.

اگرمحیط رسانا باشد، $g > 0$، جملهٔ سوم درمعادلهٔ (۳۱.۱۶) را باید نگه‌داریم. هنگامی که g کوچك است، همان‌طورکه درفصل بعد خواهیم دید، نتیجه صرفاً آن خواهد بودکه موج‌میرا می‌شود. منظوراز کوچك بودن g آن است که جملهٔ سوم معادلهٔ(۳۱.۱۶) درمقایسه باجملهٔ دوم آن، که به‌جواب موجی منجر شد، کوچك باشد. به‌عبارت دیگر

$$\omega g \mu \ll \omega^2 \varepsilon \mu$$

$$g \ll \omega \varepsilon$$

درحد نهایی دیگرهنگامی که $g \gg \omega\varepsilon$، می‌توانیم ازجملهٔ دوم معادلهٔ (۳۱.۱۶)چشم‌پوشی کنیم. مجدداً چنانچه توجه خود را به‌مورد یك بعدی محدودکنیم، خواهیم داشت

$$\frac{d^2\mathbf{E}(z)}{d^2 z} + i\omega g \mu \mathbf{E} = 0$$

چنانچه فرض کنیم $\alpha = i\omega$ حقیقی باشد یا، به‌بیان دیگر، اگر فرض کنیم فرکانس موهومی باشد، ضریب $\mathbf{E}$ درجملهٔ دوم حقیقی خواهد بود. درآن صورت، اگر

$$\kappa = \sqrt{\alpha g \mu}$$

بستگی فضایی جواب، $\mathbf{E}(\mathbf{r})$، درست به‌همان شکل قبل است. ولی اختلاف درآن است که بستگی زمانی (۳۰.۱۶) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-\alpha t}$$

یعنی، میدان نسبت به‌زمان به‌جای آنکه به‌طریقی موج‌گونه نوسان کند، به‌طورنمایی کاهش می‌یابد. گذاربین رفتارموجی و رفتارکاهش‌یابنده هنگامی رخ می‌دهد که

$$|\omega| = |\alpha| \cong \left|\frac{g}{\varepsilon}\right| = 1/t_c$$

که در اینجا t_c همان زمان واهلش ماده است که در فصل ۷ بحث شد. (مجدداً یادآور می‌شویم که برای کاربست این شرط در مورد فلزات باید دقت شود، زیرا g/ε خود قویاً به ω بستگی دارد.)

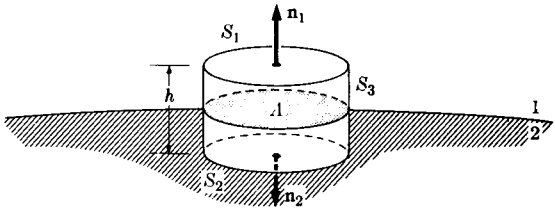
درپایان متذکر می‌شویم که اگر به‌عقب برگردیم ونحوهٔ به‌دست آوردن معادلهٔ (۳۱.۱۶) را از معادلات ماکسول بررسی کنیم متوجه می‌شویم که جملهٔ دوم، یعنی $\partial^2\mathbf{E}/\partial t^2$ در معادلهٔ (۲۹.۱۶)، ازجریان جابه‌جایی $\partial\mathbf{D}/\partial t$ درمعادلهٔ (۱۰.۱۶) ناشی می‌شود، درصورتی که جملهٔ سوم، یعنی $\partial\mathbf{E}/\partial t$ در معادلهٔ (۲۹.۱۶)، از جریان انتقالی $\mathbf{J}$ در معادلهٔ (۱۰.۱۶) ناشی می‌شود. بنابراین وجود انتشار موج الکترومغناطیسی به‌جریان جابه‌جایی که توسط ماکسول وارد نظریه شده است، بستگی‌دارد. بدون‌آن، تنها کاهش‌نمایی میدانها می‌توانست به‌وقوع بپیوندد.

۵.۱۶ شرایط مرزی

شرایط مرزی که میدانهای الکتریکی ومغناطیسی در فصل مشترك دو محیط باید در آنها صدق کنند، درست مانند حالت ساکن، ازمعادلات ماکسول استنتاج می‌شوند. عمومیترین و سرراست‌ترین شرط مرزی در مورد میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ است که در معادلهٔ ماکسول زیر صدق می‌کند

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (۳۶.۱۶)$$

در هر فصل مشترکی بین دو محیط می‌توان یك سطح بستهٔ قرصی شکل مثل شکل ۲.۱۶



شکل ۲.۱۶ برای به‌دست آوردن شرایط مرزی روی بردارهای میدان می‌توان ازیك سطح قرصی شکل درفصل مشترك بین‌دومحیط استفاده کرد.

درنظر گرفت. می‌توان قضیهٔ واگرایی‌رابرای واگرایی $\mathbf{B}$ درحجمی که‌این سطح‌در بر گرفته است به‌کاربرد ومعادلهٔ زیررا به‌دست‌آورد

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,da=\int_{S_1}\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}_1\,da+\int_{S_2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}_2\,da+\int_{S_3}\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}_3\,da=0 \qquad (۳۷:۱۶)$$

اگر $\mathbf{B}$ تابعی متناهی‌باشد، با به‌سمت‌صفر میل دادن h، جملهٔ آخر صفرمی‌شود و S_1 ازنظر هندسی به S_2 نزدیك می‌شود. بادر نظر گرفتن اینکه $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ دارای جهتهای مخالف‌اند، مستقیماً به‌نتیجهٔ زیر می‌رسیم

$$B_{1n}=B_{2n} \qquad (۳۸.۱۶)$$

که دقیقاً مشابه حالت ساکن است.

مؤلفهٔ مماسی میدان الکتریکی را نیز می‌توان بطریق ساده‌ای بررسی کرد. بازهم معادلهٔ اصلی یکی ازمعادلات ماکسول است

$$\nabla\times\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0 \qquad (۳۹.۱۶)$$

باانتگرال گیری از این معادله روی سطحی که مرزآن مانند شکل ۳.۱۶ یك مسیر مستطیل شکل است، خواهیم داشت

$$\int_S \nabla\times\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,da=-\int_S\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{n}\,da \qquad (۴۰.۱۶)$$

و با به‌کاربردن قضیهٔ استوکس در طرف چپ معادله نتیجه خواهد شد

شکل ۳.۱۶ می‌توان ازمسیرمستطیل شکلی که درفصل مشترك دو محیط نشان داده شده است، برای به‌دست آوردن شرایط مرزی روی بردارهای میدان استفاده کرد.

$$lE_{1t}-lE_{2t}+h_1E_{1n}+h_2E_{2n}-h_1E'_{1n}-h_2E'_{2n}=-\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot \mathbf{n}\,da \qquad (۴۱.۱۶)$$

اکنون اگر با به‌سمت صفرمیل دادن h_1 و h_2، سطح را کوچك کنیم، چهارجملهٔ آخر طرف چپ، وهمچنین طرف راست تنها به‌شرط آنکه $\partial\mathbf{B}/\partial t$ متناهی باشد، صفر می‌شوند، در معادلهٔ حاصل l یك ضریب مشترك است و باحذف آن نتیجه خواهد شد

$$E_{1t}=E_{2t} \qquad (۴۲.۱۶)$$

بنابراین مؤلفهٔ مماسی $\mathbf{E}$ باید در فصل مشترك دومحیط پیوسته باشد.

شرط مرزی برای مؤلفهٔ عمودی جابه‌جایی الکتریکی پیچیده‌تراست؛ باوجوداین، این شرط نیز از یکی از معادلات ماکسول به‌دست می‌آید. در این مورد معادلهٔ مناسب به‌صورت زیراست

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \qquad (۴۳.۱۶)$$

اگرمطابق شکل ۲.۱۶ یك حجم قرصی شکل بناکنیم واز (۴۳.۱۶) دراین حجم انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{D}\,dv=\int_V \rho\,dv$$

با به‌کاربردن قضیهٔ واگرایی و به‌سمت صفرمیل دادن h، خواهیم داشت

$$(D_{1n}-D_{2n})A=\sigma A \qquad (۴۴.۱۶)$$

که درآن σ چگالی بارسطحی درفصل مشترك است. این‌واقعیت که، درحالت کلی، σ صفر نیست، باعث ایجاد پیچیدگیهایی دراین شرط مرزی می‌شود؛ باوجود این، باتوجه‌به‌اینکه بارالکتریکی باید بقا داشته باشد، به‌عبارت دیگر

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (۴۵.۱۶)$$

ساده کردن این شرط امکان‌پذیراست. اگرمانند معادلهٔ (۴۳.۱۶) ازمعادلهٔ بالا نیزانتگرال بگیریم وحجم قرصی شکل را به‌همان طریق قبل کوچك کنیم، خواهیم داشت

$$J_{۱n} - J_{۲n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \qquad (۴۶.۱۶)$$

اگرتنها تابش تکفام را درنظربگیریم، چگالی بارسطحی باید به‌صورت $e^{-i\omega t}$ تغییر کند؛ بنابراین می‌توانیم طرف راست معادلهٔ (۴۶.۱۶) را به‌صورت $i\omega\sigma$ بنویسیم. با به‌کاربردن روابط ساختمندی $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ و $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$، معادله‌های (۴۴.۱۶) و (۴۶.۱۶) به‌صورت‌زیر درمی‌آیند

$$\varepsilon_۱ E_{۱n} - \varepsilon_۲ E_{۲n} = \sigma \qquad (۴۷.۱۶)$$

$$g_۱ E_{۱n} - g_۲ E_{۲n} = i\omega\sigma \qquad (۴۸.۱۶)$$

چند مورد جالب عملی را می‌توان مورد توجه قرار داد. اگر σ مساوی صفرباشد، آنگاه

$$\frac{\varepsilon_۱}{g_۱} = \frac{\varepsilon_۲}{g_۲}$$

که این رابطه می‌تواند یا برای موادی که به طور مناسب انتخاب شده‌اند، و یا چنانچه $g_۱ = g_۲ = ۰$ یا ∞، صادق باشد. موردی که در آن رسانندگیها هردو بینهایت‌هستند، زیادجالب نیست؛ ولی‌موردی که در آن‌رسانندگیها هردوصفرمی‌شوند تقریباًدرمرزبین دو دی‌الکتریك خوب به‌وجود می‌آید. اگر σ صفرنباشد، که شاید بیشترهم اینطور باشد، در این صورت می‌توان آن را از معادلات (۴۷.۱۶) و (۴۸.۱۶) حذف کرد. نتیجهٔ این عمل حذف به‌صورت زیر است

$$\left(\varepsilon_۱ + i\frac{g_۱}{\omega}\right)E_{۱n} - \left(\varepsilon_۲ + i\frac{g_۲}{\omega}\right)E_{۲n} = ۰ \qquad (۴۹.۱۶)$$

آخرین مورد جالبی که اتفاق می‌افتد، هنگامی است که یکی از رسانندگیها، مثلا $g_۲$، بینهایت است. در این مورد $E_{۲n}$ باید صفر و $E_{۱n}$ باید مساوی $\sigma/\varepsilon_۱$ شود تا معادلات (۴۸.۱۶) و (۴۷.۱۶) صادق باشند.

آخرین شرط مرزی آن است که‌روی مؤلفهٔ‌مماسی شدت‌مغناطیسی $\mathbf{H}$ اعمال‌می‌شود.

این شرط مرزی با انتگرال‌گیری ازمعادلهٔ ماکسول

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \qquad (۵۰.۱۶)$$

روی سطح محدود به مسیری مانند آنچه در شکل ۳.۱۶ نشان داده شده است، به‌دست می‌آید. اگر پس ازانتگرال‌گیری، مثل مورد قبل سطح را کوچك کنیم، شرط مرزی حاصل به‌صورت زیردرخواهد آمد

$$H_{۱t} - H_{۲t} = j_{\perp} \qquad (۵۱.۱۶)$$

که در آن $j_{\perp}$ آن مؤلفه ازچگالی جریان سطحی است که برامتداد آن مؤلفه از $\mathbf{H}$ که در معادله ظاهر می‌شود، عمود است. مفهوم چگالی جریان سطحی خیلی شبیه به‌مفهوم چگالی بار سطحی است ـ چگالی جریان سطحی نشان‌دهندهٔ یك جریان متناهی دریك لایهٔ سطحی بینهایت نازك است. بجز در موردی که رسانندگی بینهایت باشد، چگالی جریان سطحی صفر است؛ بنابراین برای رسانندگی غیربینهایت داریم

$$H_{۱t} = H_{۲t} \qquad (۵۲.۱۶)$$

یعنی، مؤلفهٔ مماسی $\mathbf{H}$ پیوسته است، مگرآنکه رسانندگی یکی ازدو محیط بینهایت باشد. اگر رسانندگی محیط ۲ بینهایت باشد، در این صورت همان‌طور که قبلا نشان دادیم، $E_{۲n} = ۰$. می‌توان بادرنظر گرفتن معادلهٔ ماکسول (۵۰.۱۶) در محیط ۲، نتیجهٔ کلیتری به‌دست آورد

$$\nabla \times \mathbf{H}_۲ - \frac{\partial \mathbf{D}_۲}{\partial t} = \mathbf{J}_۲ \qquad (۵۳.۱۶)$$

با به‌کاربردن روابط ساختمندی و بافرض اینکه $\mathbf{E}_۲$ به‌صورت $e^{-i\omega t}$ نسبت به‌زمان تغییر می‌کند، نتیجه خواهد شد

$$\mathbf{E}_۲ = \frac{۱}{g_۲ - i\omega\varepsilon_۲} \nabla \times \mathbf{H}_۲ \qquad (۵۴.۱۶)$$

اگر این فرض قابل قبول را بکنیم که $\mathbf{H}_۲$ هم متناهی و هم‌مشتق‌پذیر است، دراین‌صورت معادلهٔ (۵۴.۱۶) ایجاب می‌کند که $\mathbf{E}_۲$ درمحیطی با رسانندگی بینهایت، صفر باشد. باهمان فرضهایی که قبلا کردیم، خواهیم داشت

$$\mathbf{H}_۲ = \frac{۱}{i\omega\mu_۲} \nabla \times \mathbf{E}_۲ \qquad (۵۵.۱۶)$$

جدول ۱۰۱۶ شرایط مرزی

g	E_t	D_n	H_t	B_n
$g_1=g_2=0$	$E_{1t}=E_{2t}$	$D_{1n}=D_{2n}$	$H_{1t}=H_{2t}$	$B_{1n}=B_{2n}$
$g_2=\infty$	$E_{2t}=0$	$D_{2n}=0$	$H_{2t}=0$	$B_{2n}=0$
	$E_{1t}=0$	$D_{1n}=\sigma$	$H_{1t}=j_\perp$	$B_{1n}=0$
g_1، g_2 (اختیاری و غیر بینهایت)	$E_{1t}=E_{2t}$	$\left(\varepsilon_1+i\frac{g_1}{\omega}\right)E_{1n}=\left(\varepsilon_2+i\frac{g_2}{\omega}\right)E_{2n}$	$H_{1t}=H_{2t}$	$B_{1n}=B_{2n}$

وصفرشدن $\mathbf{E}_2$ ایجاب می‌کند که $\mathbf{H}_2$ نیزصفرشود. اگر $\mathbf{H}_2$ صفر شود، در این صورت شرط مرزی روی مؤلفهٔ مماسی $\mathbf{H}$ در فصل مشترك دو محیط که رسانندگی یکی از آنها بینهایت است، عبارت خواهد بود از

$$H_{1t}=j_\perp \qquad (۵۶.۱۶)$$

اکنون شرایط مرزی به‌دست‌آمده‌اند؛ برای سهولت، این شرایط مرزی در جدول ۱۰۱۶ به‌ازای $g=0$، $g=\infty$ و gی اختیاری آمده است.

۶.۱۶ معادلهٔ موج با چشمه‌ها

دربخشهای قبل نشان داده شد که معادلات ماکسول انتشار امواج الکترومغناطیسی را در یك محیط خطی پیش‌بینی می‌کنند وهمچنین نشان دادیم که انطباق میدانها در فصل مشترك بین دو محیط متفاوت می‌بایست برطبق شرایط مرزی مناسب انجام شود. فرض کردیم که چگالی بار ρ درمحیط صفراست وتنها چگالی جریان موجود $\mathbf{J}$ حاصل ازپاسخ غیر فعال محیط اهمی به‌میدان الکتریکی موج‌است. ما دربارهٔ آنکه این‌امواج چگونه تولیدمی‌شوند پرس وجو نکردیم، ولی مآلا در خواهیم یافت‌که این امواج میدانهای تولید شده توسط بارهای چشمه‌هایی درفواصل دورندکه تحت حرکت شتابدار قراردارند.

حال می‌خواهیم مسئلهٔ توزیع بار $\rho(\mathbf{r},t)$ و توزیع جریان $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$ مشخص را بررسی کنیم ومیدانهایی راکه این توزیعها ایجاد می‌کنند، به دست آوریم. چندین روش

برای برخورد با این مسئله وجود دارد که بهترین آنها روش پتانسیل است که شبیه به روشهایی است که در الکتروستاتیك و مغناطوستاتیك به‌کار بردیم . چون واگرایی میدان مغناطیسی صفر است ، همواره آن را به‌صورت تاو یك پتانسیل برداری می‌توان نوشت ، به‌عبارت دیگر

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A} \qquad (۵۷.۱۶)$$

اگر ازاین معادله برای $\mathbf{B}$ درمعادلهٔ (۱۱.۱۶) استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$\nabla\times\mathbf{E}+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{A}=0 \qquad (۵۸.۱۶)$$

چنانچه فرض کنیم بردارهای میدان به‌حد کافی پیوسته هستند، می‌توانیم ترتیب مشتقات زمانی ومکانی را عوض کنیم و بنویسیم

$$\nabla\times\left[\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right]=0 \qquad (۵۹.۱۶)$$

بنابراین تاوبردار $\mathbf{E}+\partial\mathbf{A}/\partial t$ صفر است و می‌توان این بردار را به صورت شیب یك کمیت نرده‌ای نوشت

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \qquad (۶۰.۱۶)$$

معادلات (۵۷.۱۶) و (۶۰.۱۶) میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را برحسب یك پتانسیل برداری $\mathbf{A}$ ویك پتانسیل نرده‌ای φ به‌دست می‌دهند. این پتانسیلها درمعادلات موجی صدق می‌کنند که بسیار شبیه‌اند به‌معادلات موج بردارهای میدان. معادلهٔ موج برای $\mathbf{A}$ را باقرار دادن عبارات داده شده در معادله‌های (۵۷.۱۶) و (۶۰.۱۶) برای $\mathbf{B}$ و $\mathbf{E}$ در معادلهٔ (۱۰.۱۶) می‌توان به‌دست آورد، نتیجهٔ این عمل به‌صورت زیراست

$$\frac{1}{\mu}\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla\varphi+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right]=\mathbf{J} \qquad (۶۱.۱۶)$$

چنانچه در این معادله $-\nabla^2\cdot\nabla\nabla$ رابه‌جای $\nabla\times\nabla\times$ قراردهیم وآن‌را در μ ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$-\nabla^2\mathbf{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}+\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}+\varepsilon\mu\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\mu\mathbf{J} \qquad (۶۲.۱۶)$$

تاکنون فقط تاو $\mathbf{A}$ را مشخص کرده‌ایم ولی هنوز انتخاب واگرایی $\mathbf{A}$ دلخواه است. از معادلهٔ (۶۲.۱۶) واضح است که چنانچه شرط زیررا که شرط لورنتس نامیده می‌شود

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \qquad (۶۳.۱۶)$$

به‌کار ببریم، نتیجه به‌طورقابل ملاحظه‌ای ساده خواهد شد. اگر شرط لورنتس صادق‌باشد، $\mathbf{A}$ درمعادلهٔ موج زیر صدق خواهدکرد

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \qquad (۶۴.۱۶)$$

به‌علاوه بااستفاده ازمعادلهٔ (۶۰.۱۶) در (۱۲.۱۶) خواهیم داشت

$$-\varepsilon\left[\nabla \cdot \nabla\varphi + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right] = \rho \qquad (۶۵.۱۶)$$

باعوض کردن‌ترتیب عمل واگرایی ومشتق گیری زمانی‌روی $\mathbf{A}$ وبه‌کاربردن‌شرط لورنتس (معادلهٔ ۶۳.۱۶) خواهیم داشت

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon}\rho \qquad (۶۶.۱۶)$$

بدین ترتیب بااستفاده ازشرط لورنتس، پتانسیلهای برداری ونرده‌ای هردو مجبورند در معادلات موج غیرهمگن مشابهی صدق کنند.

مسئلهٔ پیدا کردن جواب عمومی معادلهٔ موج نرده‌ای غیر همگن شبیه به‌پیدا کردن جواب عمومی معادلهٔ پواسون است. در مورد معادلهٔ پواسون، باید خاطر نشان کنیم که جواب عمومی شامل یك جواب خصوصی معادلهٔ غیر همگن به‌اضافهٔ یك جواب عمومی معادلهٔ همگن است. منظورکردن جواب عمومی معادلهٔ همگن بدان جهت است که شرایط مرزی مناسب دلخواه را بتوان براورده کرد، درصورتی که جواب خصوصی ما را مطمئن می کندکه‌تابع کل‌درمعادلهٔ غیرهمگن‌صدق‌می کند. درواقع‌ملاحظاتی کاملا مشابه باملاحظات بالا (یعنی، جواب عمومی شامل یك جواب خصوصی به‌اضافهٔ یك جواب عمومی معادلهٔ همگن‌است) درمورد معادلهٔ غیرهمگن موج نیزصادق است. در فصل ۱۷ روشهایی برای به‌دست آوردن جوابهای معادلهٔ همگن بررسی خواهد شد. می‌توان باتوسعه و تکمیل این روشها تقریباً جوابهای کلیهٔ مسائل قابل حل را به‌دست‌آورد. مسائلی راکه برحسب توابع معلوم حل نمی‌شوند، با روشهای تقریبی می‌توان حل کرد. در این صورت باقی می‌ماند که جواب‌خصوصی لازم‌را برای معادلهٔ غیرهمگن‌پیدا کنیم. درحالت‌ساکن، یعنی $\partial\varphi/\partial t = 0$

معادلهٔ موج نرده‌ای غیرهمگن (۶۶.۱۶) به معادلهٔ پواسون تبدیل می‌شود. یك جواب خصوصی معادلهٔ پواسون را ازمعادلهٔ (۱.۳) (برای خلأ) می‌دانیم

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dv' \qquad (۶۷.۱۶)$$

معادلهٔ موج برداری (۶۴.۱۶) نیز در حالت ساکن (درخلأ) جواب مشابهی داردکه در معادلهٔ (۶۱.۸) داده شده است. متأسفانه، به دلایلی که خواهیم دید، تنها باگذاشتن $\rho(\mathbf{r}', t)$ و $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)$ در جوابهای حالت ساکن جوابهای وابسته به‌زمان را به دست نمی‌آوریم.

حال معادلهٔ (۶۶.۱۶) را برای خلأ، با استفاده از $1/\sqrt{\varepsilon\mu}=c/n$ وضریب‌شکست $n=1$ به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (۶۸.۱۶)$$

این معادله را می‌توان به‌طریق بسیار ساده‌ای حل کرد، بدین ترتیب که ابتدا جوابی برای یك بارنقطه‌ای به‌دست‌می‌آوریم وسپس تمام اجزای بارهای $\rho\Delta v$ را درتوزیع بارمربوط بایکدیگر جمع می‌کنیم. مناسبترین محل برای قرار دادن بارنقطه‌ای مبدأ مختصات است. بنابراین معادلهٔ زیر

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \qquad (۶۹.۱۶)$$

باید درتمام نقاط بجز درمبدأ صادق باشد، درصورتی‌که درحجم کوچك Δv که مبدأ را احاطه می‌کند، معادلهٔ زیر باید صادق باشد

$$\int_{\Delta v} dv\left[\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right]=-\frac{1}{\varepsilon_0}q(t) \qquad (۷۰.۱۶)$$

فرض می‌شود که تابع $q(t)$، تنها به‌صورت یك وسیلهٔ ریاضی برای حل معادله، نمایانگر یك بارنقطه‌ای به‌بزرگی q است که درزمان t در مبداء مختصات قرار دارد، بدون هیچ فرضی دراین‌باره‌که یك بار واقعی بقادار درزمان قبل ازآن یا بعد ازآن درکجا بوده یا خواهد بود. (این تابع نمایانگریك بارنقطه‌ای متحرك فیزیکی‌نیست، وجواب حاصل‌برای φ پتانسیل صحیح برای‌بارنقطه‌ای متحرك نخواهدبود. پتانسیل بارنقطه‌ای متحرك‌پیچیده‌تر ازاین است ودر فصل۲۱ بررسی خواهد شد.) ازروی تقارن توزیع بار واضح است که φ باید ازلحاظ فضایی فقط به r بستگی داشته باشد. بااستفاده ازاین مطلب می‌توانیم معادلهٔ

(۶۹.۱۶) راحل کنیم. چون φ به‌زاویهٔ سمتی‌وزاویهٔ قطبی بستگی ندارد، معادلهٔ(۶۹.۱۶) به‌صورت زیردرمی آید

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \qquad (۷۱.۱۶)$$

حال باقراردادن

$$\varphi(r,\ t)=\frac{\chi(r,\ t)}{r} \qquad (۷۲.۱۶)$$

معادلهٔ (۷۱.۱۶) به‌معادلهٔ زیرتبدیل می‌شود

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=0 \qquad (۷۳.۱۶)$$

این‌معادله، معادلهٔ موج یك‌بعدی است که هرتابعی از $r-ct$ یا $r+ct$ درآن‌صدق‌می کند. برای تحقیق این مطلب می‌نویسیم

$$u=r-ct$$

وفرض می کنیم $f(u)$ تابعی از u است که بتوان دوبار ازآن مشتق گرفت؛ آنگاه

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{df}{du},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}=\frac{d^2f}{du^2}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{d^2f}{du^2} \qquad (۷۴.۱۶)$$

و

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial t}=-c\frac{df}{du},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=c^2\frac{d^2f}{du^2} \qquad (۷۵.۱۶)$$

باقراردادن نتایج معادلات (۷۴.۱۶) و (۷۵.۱۶) درمعادلهٔ (۷۳.۱۶) نتیجه می‌شود که هرتابعی از $(r-ct)$ که دوبارمشتق پذیرباشد جواب معادلهٔ (۷۳.۱۶) است. بامحاسباتی نظیر محاسبات بالا می‌توان نتیجه گرفت که تابعی از $(r+ct)$ نیز یك جواب است. بنابراین

$$\chi=f(r-ct)+g(r+ct) \qquad (۷۶.۱۶)$$

یك جواب کاملا دلخواه برای معادلهٔ (۷۳.۱۶) است. خواهیم دیدکه در کاربردهای ما

برای معادلهٔ موج، $g(r+ct)$ ظاهر نمی‌شود. بدین علت این جواب را کنار می گذاریم، و فقط جملهٔ اول معادلهٔ (۷۶.۱۶) را درنظر می گیریم، زیرا این کار معادلات بعدی را ساده می کند وسبب ازدست‌دادن چیزخاصی نمی‌شود. توجه کنید که $f(r-ct)$ نمایشگرموجی است که از بار چشمهٔ واقع در مبدأ به‌سمت خارج منتشر می‌شود، در حالی که $g(r+ct)$ نمایشگرموجی است که از بینهایت به‌طرف داخل به‌سمت بارچشمه منتشرمی‌شود. ماتابع اولی را نگه می‌داریم وتابع دوم را رها می کنیم درست به‌همان دلیل کـه اگر در سمت راست چشمه می‌بودیم جواب موج تختی‌راکه به سمت راست منتشرمی‌شود نگه‌می‌داشتیم و جوابی‌راکه به‌سمت چپ منتشرمی‌شود رها می کردیم.

اکنون جوابی برای معادلهٔ (۶۹.۱۶) با تقارن‌کروی در دست است

$$\varphi=\frac{f(r-ct)}{r} \qquad (۷۷.۱۶)$$

به‌علاوه، این جواب شامل یك تابع اختیاری است که می‌توان آن را طوری انتخاب کرد که معـادلهٔ (۷۰.۱۶) نیز صادق بـاشد. انتخاب مناسب را می‌توان بدین ترتیب به‌دست آورد که توجه کنیم پتانسیل یك بار در حال سکون که بامعادلات (۶۹.۱۶) و (۷۰.۱۶) سازگار باشد، عبارت است از

$$\varphi=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}\, r} \qquad (۷۸.۱۶)$$

توابع (۷۷.۱۶) و (۷۸.۱۶) را می‌توان باانتخاب رابطهٔ زیر، همسازکرد

$$f(r-ct)=\frac{q(t-r/c)}{۴\pi\varepsilon_{\circ}} \qquad (۷۹.۱۶)$$

بنابراین جواب معادلات (۶۹.۱۶) و (۷۰.۱۶) به‌صورت زیرخواهد بود

$$\varphi(r,\, t)=\frac{q(t-r/c)}{۴\pi\varepsilon_{\circ}\, r} \qquad (۸۰.۱۶)$$

بااین نتیجه به‌سادگی می‌توان دیدکه جواب زیر

$$\varphi(\mathbf{r},\, t)=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\int_{V}\frac{\rho(\mathbf{r}',\, t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dv' \qquad (۸۱.۱۶)$$

در معادلهٔ (۶۶.۱۶) صدق می کند، که در آن $t'=t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c$ زمان تأخیری نامیده

می‌شود و φ به پتانسیل نرده‌ای تأخیری معروف است.

معادلهٔ (۶۴.۱۶) را نیز می‌توان به طریق کاملا مشابهی حل کرد. ابتدا بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{J}$ را برحسب مؤلفه‌هایشان در مختصات قائم می‌نویسیم. سه معادلهٔ حاصل خیلی شبیه به‌معادلهٔ (۶۶.۱۶) خواهند بود، مثلا معادلهٔ مربوط به‌مؤلفهٔ x، به‌صورت زیر است

$$\nabla^2 A_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu_0 J_x \qquad (۸۲.۱۶)$$

هریك ازاین معادلات‌را می‌توان درست مثل معادلهٔ (۶۶.۱۶) حل کرد، مثلا جواب مؤلفهٔ x به‌صورت زیر است

$$A_x(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{J_x(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dv' \qquad (۸۳.۱۶)$$

باترکیب سه مؤلفه خواهیم داشت

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dv' \qquad (۸۴.۱۶)$$

که به پتانسیل برداری تأخیری معروف است.

تعبیر فیزیکی پتانسیلهای تأخیری جالب است. معادلات (۸۱.۱۶) و (۸۴.۱۶) نشان می‌دهند که دریك نقطهٔ مشخص $\mathbf{r}$ دریك زمان معین t، پتانسیلها را بارها وجریانهایی که در زمانهای پیشتر t' در سایر نقاط فضا $\mathbf{r}'$ وجود داشته‌اند، تعیین می‌کنند. زمان مناسب متناظر باهریك ازنقاط چشمه به‌اندازهٔ مدت لازم برای رفتن از نقطهٔ چشمه به‌نقطهٔ میدان $\mathbf{r}$ باسرعت c، از زمان t پیشتراست. مثلا اگر یك جزء بارکه در مبدأ مختصات قرار دارد ناگهان تغییرکند، تأثیراین تغییر در نقطه‌ای به‌فاصلهٔ r تا مدتی (به‌اندازهٔ r/c) بعد از انجام تغییر، احساس نخواهد شد. تأثیراین تغییر تقریباً به‌صورت یك‌سطح موج کروی به‌طرف خارج منتشرمی‌شود. (برای یك بار نقطه‌ای درواقع وضع پیچیده‌تر ازاین است، زیرا چگالی بار وچگالی جریان ازطریق معادلهٔ $\nabla \cdot \mathbf{J} + \partial\rho/\partial t = 0$ به‌هم‌مربوط‌اند.)

باپیداکردن پتانسیلهای نرده‌ای وبرداری، میدانهارا باگرفتن شیب φ ومشتق‌زمانی و تاو $\mathbf{A}$ به‌دست می‌آوریم. انجام این اعمال دراصول راحت است؛ ولی خواهیم دیدکه درعمل نسبتاً پیچیده است.

در روش بالا اعمال شرط لورنتس (۶۳.۱۶) برروی پتانسیلها گامی اساسی بود؛ درغیراین‌صورت پتانسیلها مجبور نبودند در معادلات موج ساده صدق کنند. برای آنکه ببینیم که ما همواره دراعمال این شرط آزادی داریم، فرض کنیدکه $\mathbf{A}$ و φ انتخاب‌خاصی برای توابع پتانسیل‌اند که میدانهای صحیح $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ را برطبق معادلات (۵۷.۱۶) و

(۶۰.۱۶) به‌دست می‌دهند. در این صورت، چنانچه ما پتانسیلهای جدید زیر را انتخاب کنیم

$$\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\nabla\xi, \quad \varphi'=\varphi-\frac{\partial\xi}{\partial t} \qquad (۸۵.۱۶)$$

این پتانسیلها نیز هنگامی که در معادلات (۵۷.۱۶) و (۶۰.۱۶) قرار داده شوند، بدون توجه به آنکه تابع ξ چه نوع تابعی است (این تابع کاملا اختیاری است)، دقیقاً همان میدانهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ را به‌دست خواهند داد. این تغییر به‌پتانسیلهای جدیدی که از نظر فیزیکی معادل‌اند، تبدیل پیمانه‌ای نامیده می‌شود. حال با قراردادن $\mathbf{A}'$ و φ' درمعادلهٔ (۶۳.۱۶) برای آنکه $\mathbf{A}'$ و φ' درشرط لورنتس صدق کنند، پس از مرتب کردن جملات، معادلهٔ موج نرده‌ای زیر برای ξ به‌دست می‌آید

$$\nabla^2\xi-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-\left(\nabla\cdot\mathbf{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

بنابراین، چنانچه پتانسیلهای اصلی درشرط لورنتس صدق کنند، پتانسیلهای جدید نیز صدق خواهند کرد مشروط بر آنکه ξ در معادلهٔ موج نرده‌ای همگن صدق کند. اگر $\mathbf{A}$ و φی اصلی درشرط لورنتس صدق نکنند، بازهم می‌توانیم پتانسیلهای جدیدی انتخاب کنیم که در این شرط صدق کنند که در آن‌صورت ξ باید به‌صورت جواب معادلهٔ موج نرده‌ای غیرهمگن انتخاب شود وعبارت زیر

$$\nabla\cdot\mathbf{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

چشمهٔ معادلهٔ غیرهمگن است. در همین بخش دیده‌ایم که چگونه می‌توان جواب چنین معادله‌ای را پیدا کرد. انتخاب پتانسیلها به گونه‌ای که درشرط لورنتس صدق کنند، پیمانهٔ لورنتس نامیده می‌شود. دروضعیتهای دیگرسایرانتخابها برای پیمانه (یعنی، سایر انتخابها برای $\nabla\cdot\mathbf{A}$) سودمندند.

بادر دست داشتن پتانسیلهای تأخیری کار اساسی دربارهٔ تابش کامل شده است. باقی می‌ماند که این مطالب را برای حل مسائل عملی به‌کار ببریم. این کار را در پنج فصل بعد خواهیم کرد.

۷.۱۶ خلاصهٔ مطالب

این فصل حاوی مبانی تمامی نظریهٔ الکترومغناطیس کلاسیك است. معادلات ماکسول معادلات

دیفرانسیلی هستندکه (همراه باشرایط مرزی برای هروضعیت خاص) میدانهای تولیدشده بهوسیلهٔ چشمه‌های بار و جریان را تعیین می‌کنند

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}$$

میدانهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ ازنظرعملیاتی بانیروی لورنتس

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

تعریف می‌شوند، ومیدانهای $\mathbf{D}$ و $\mathbf{H}$ ازطریق معادلات ساختمندی محیط، $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$ و $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{B})$، به‌آن میدانها مربوط می‌شوند.

معادلات ماکسول پیامدهای مهم زیررا دربردارند :

۱. بارالکتریکی بقا دارد وبقای‌آن برطبق معادلهٔ پیوستگی است

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

۲. انرژی بقا دارد، برطبق

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$$

که درآن چگالی انرژی میدان، u، عبارت است از (درمحیط خطی)

$$u = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$$

و $\mathbf{S}$ شار انرژی درواحد سطح (بردار پوئین‌تینگ) است

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

۳. موج الکترومغناطیسی باسرعت $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ (سرعت نور) درخلأ منتشرمی‌شود.

۴. درفصل‌مشترک بین‌دومحیط متفاوت شرایط مرزی روی میدانها اعمال می‌شود، مهمترین این شرایط عبارت‌اند ازپیوستگی مؤلفه‌های‌مماسی $\mathbf{E}$ و $\mathbf{H}$.

۵. میدانهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ را می‌توان ازتوابع پتانسیل به‌دست آورد

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A},\quad \mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

۶. چنانچه شرط لورنتس

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=-\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

اعمال شود، پتانسیلها درمعادلات موج غیرهمگن زیرصدق می‌کنند

$$\nabla^{۲}\varphi-\varepsilon\mu\frac{\partial^{۲}\varphi}{\partial t^{۲}}=-\frac{۱}{\varepsilon}\rho$$

$$\nabla^{۲}\mathbf{A}-\varepsilon\mu\frac{\partial^{۲}\mathbf{A}}{\partial t^{۲}}=-\mu\mathbf{J}$$

این پتانسیلها امواج الکترومغناطیسی ناشی ازتوزیع بار و توزیع جریان ازپیش مشخص شده را تعیین می‌کنند. جوابهای خاص این معادلات (درخلأ) عبارت‌اند از

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\int\frac{\rho(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu_{\circ}}{۴\pi}\int\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv'$$

که درآن

$$t'=t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$$

زمان تأخیری نامیده می‌شود. این پتانسیلها، پتانسیلهای تأخیری نامیده می‌شوند.

مسائل

۱.۱۶ ناحیهٔ بین صفحات دایروی متوازی یك خازن از دی‌الکتریکی باگذردهی ε پر شده است. دی‌الکتریك ناکامل است ورسانندگی آن g است. ظرفیت این خازن C است.

این‌خازن‌را بااختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ باردار وسپس آن‌را ازاین اختلاف‌پتانسیل قطع‌می‌کنیم. (الف) بارروی خازن را برحسب تابعی از زمان به‌دست آورید. (ب) جریان جابه‌جایی در دی‌الکتریك را پیداکنید. (ج) میدان مغناطیسی در دی‌الکتریك رابه‌دست آورید.

۲.۱۶ برای یك‌محیط دی‌الکتریك، Q به‌صورت نسبت چگالی‌جریان جابه‌جایی به‌چگالی جریان رسانایی تعریف می‌شود. برای انتشار موج تکفام، این کمیت تبدیل می‌شود به $Q=\omega\varepsilon/g$. برای کوارتز وگوگرد Q را درفرکانسهای $f=1,\ 10^6,\ 10^9\,\mathrm{Hz}$ به‌دست آورید.

۳.۱۶ دوصفحهٔ مسطح دایره‌ای به‌شعاع a که به‌فاصلهٔ d ازیکدیگرقرار دارند، یك‌خازن ایده‌آل تشکیل می‌دهند: فرض کنید که دی‌الکتریك خازن عایقی کامل و میدان Dی آن یکنواخت است (یعنی ازمیدان حاشیه‌ای درلبهٔ صفحات چشمپوشی کنید). خازن باجریان ثابت I درحال باردارشدن است. (الف) میدان H را در نقطهٔ P روی سطح استوانه‌ای دی‌الکتریك پیداکنید. (ب) اندازه وجهت بردار پوئین‌تینگ $\mathbf{S}$ را در نقطهٔ P پیداکنید. (ج) از $\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}$ روی سطح استوانه‌ای دی‌الکتریك انتگرال بگیرید، ونشان دهیدکه نتیجه برابراست باآهنگ زمانی تغییرانرژی الکتروستاتیکی ذخیره شده درخازن.

۴.۱۶ یك سیم مستقیم فلزی با رسانندگی g وسطح مقطع A حامل جریان پایای I است. اندازه وجهت بردار پوئین‌تینگ را در روی سطح این‌سیم به‌دست‌آورید. ازمؤلفهٔ‌عمودی بردارپوئین‌تینگ درروی قسمتی‌ازسطح سیم به‌طول L انتگرال بگیرید ونتیجه را با گرمای ژولی که دراین قسمت تولید می‌شود، مقایسه کنید.

۵.۱۶ فرض کنید که درناحیه‌ای از فضا یك میدان الکتروستاتیکی و همچنین یك میدان مغناطوستاتیکی وجود دارد. نشان دهید که هرچند که ممکن است بردار پوئین‌تینگ غیر صفر باشد، ولی انتگرال سطحی $\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}$ برروی هرسطح بسته‌ای واقع در این ناحیه صفر می‌شود.

۶.۱۶ معادلهٔ موج یك بعدی زیرداده شده است

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}=\varepsilon\mu\,\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

که درآن E اندازهٔ بردارمیدان الکتریکی است. فرض کنید $\mathbf{E}$ درامتداد یك جهت‌ثابت، مثل جهت y، باشد. باتغییرمتغیرهای زیر

$$\xi=t+\sqrt{\varepsilon\mu}\,z$$

$$\eta=t-\sqrt{\varepsilon\mu}\,z$$

نشان‌دهید که معادلهٔ موج به‌صورت ساده‌ای درمی‌آید که می‌توان به‌سادگی از آن انتگرال گرفت. ازمعادلهٔ موج انتگرال بگیرید تا نتیجهٔ زیرحاصل شود

$$E(z,\ t)=E_1(\xi)+E_2(\eta)$$

که درآن E_1 و E_2 توابع دلخواهی هستند.

۷.۱۶ موج الکترومغناطیسی زیرداده شده است

$$\mathbf{E}=\mathbf{i}E_0\cos\omega(\sqrt{\varepsilon\mu}z-t)+\mathbf{j}E_0\sin\omega(\sqrt{\varepsilon\mu}z-t)$$

که درآن E_0 مقدار ثابتی است. میدان مغناطیسی و بردار پوئین‌تینگ آن را پیدا کنید.

*۸.۱۶ باشروع ازعبارتی برای نیروی وارد برواحد حجم درناحیه‌ای از خلأ که حاوی بارها وجریانهایی است

$$\mathbf{F}_v=\rho\mathbf{E}+\mathbf{J}\times\mathbf{B}$$

وبااستفاده ازمعادلات ماکسول واتحاد برداری معادلهٔ (۲۴.۱۴)، نشان دهید

$$\mathbf{F}_v=-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})+\varepsilon_0\mathbf{E}\nabla\cdot\mathbf{E}-\frac{1}{2}\varepsilon_0\nabla(E^2)+\varepsilon_0(\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{E}$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\nabla\cdot\mathbf{B}-\frac{1}{2\mu_0}\nabla(B^2)+\frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B})$$

(کمیت $\varepsilon_0\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ گاهی چگالی اندازه حرکت میدان الکترومغناطیسی نامیده می‌شود.)

۹.۱۶ یك موج تخت با E_x و B_y مشخص شده است و در جهت مثبت z انتشار می‌یابد

$$\mathbf{E}=\mathbf{i}E_0\sin\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)$$

نشان دهید که می‌توان پتانسیل نرده‌ای φ را مساوی صفر گرفت، ویك پتانسیل برداری ممکن مثل $\mathbf{A}$ را پیدا کنید که برای آن شرط لورنتس صادق باشد.

۱۰.۱۶ نشان دهید درخلأ باه $\rho=0$ وه $\mathbf{J}=0$، معادلات ماکسول به‌طورصحیحی تنها از یك تابع برداری $\mathbf{A}$ که درمعادلات زیرصدق کند، به‌دست می‌آیند

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$$

پیمانه‌ای که در آن $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ باشد پیمانهٔ کولن نامیده می‌شود.

۱۱.۱۶ نشان‌دهید که در یك محیط خطی رسانا می‌توان پیمانهٔ مناسبی انتخاب کرد به‌طوری که φ و $\mathbf{A}$ هریك درمعادلهٔ موج میرا (۲۹.۱۶) صدق کنند. فرض کنید $\rho = 0$ است.

۱۲.۱۶ محیطی داریم که در آن $\rho = 0$ و $\mathbf{J} = 0$ و $\mu = \mu_0$ است ولی بردار قطبش $\mathbf{P}$ به‌صورت تابعی ازمکان و زمان، یعنی، $\mathbf{P} = \mathbf{P}(x, y, z, t)$ داده شده است. نشان‌دهید که معادلات ماکسول به طور صحیح تنها ازیك تابع برداری $\mathbf{Z}$ (بردار هرتز) به‌دست می‌آیند که $\mathbf{Z}$ در معادلهٔ زیر صدق می‌کند

$$\nabla^2 \mathbf{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}$$

و

$$\mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{Z} - \frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{P}, \qquad \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\nabla \times \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}$$

۱۳.۱۶ محیطی داریم که در آن $\rho = 0$ و $\mathbf{J} = 0$ و $\varepsilon = \varepsilon_0$ است ولی بردار مغناطش $\mathbf{M}(x, y, z, t)$ تابع داده شده‌ای است. نشان دهید که معادلات ماکسول به طور صحیح تنها از یك تابع برداری $\mathbf{Y}$ که در معادلهٔ زیر صدق می‌کند، به‌دست می‌آیند

$$\nabla^2 \mathbf{Y} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{Y}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{M}$$

و

$$\mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{Y}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t}$$

۱۴.۱۶ نشان دهید که معادلات ماکسول را برای محیطی همسانگرد، همگن، نارسانا و بدون بار به‌وسیلهٔ یکی ازدو دسته معادلات زیرمی‌توان برقرار کرد

۱. $\mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times (F\mathbf{a})$ قسمت حقیقیِ

$\mathbf{B} = \varepsilon\mu \dfrac{\partial}{\partial t}\nabla \times (F\mathbf{a})$ قسمت حقیقیِ

یا

۲. $\mathbf{B}=\nabla\times\nabla\times(F\mathbf{a})$ قسمت حقیقیِ

$$\mathbf{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times(F\mathbf{a})$$ قسمت حقیقیِ

که در آن $\mathbf{a}$ یك بردار یکهٔ ثابت است و F درمعادلهٔ نرده‌ای موج صدق می‌کند.

۱۷

انتشار امواج الکترومغناطیسی

همچنانکه هنگام به دست آوردن معادلهٔ موج از روی معادلات ماکسول دیدیم ، بعضی از جوابهای خاص معادلات ماکسول امواج الکترومغناطیسی را توصیف می‌کنند. اکنون این جوابها را به‌تفصیل بررسی می‌کنیم. ابتدا انتشار امواج الکترومغناطیسی در محیطی خطی را درنظرمی‌گیریم و فرض می‌کنیم کــه محیط تا بینهایت گسترش دارد. این سؤال راکه امواج در وهلهٔ اول چگونه تولید می‌شوند وچگونه به‌محیط واردمی‌شوند درفصلهای بعد بررسی‌می‌کنیم. نتایج حاصل درمورد امواج‌رادیویی، میکروموجها، تابش گرمایی، نور، اشعهٔ ایکس، ومانند آن‌کاربرد خواهند داشت (هرچندکه درفرکانسهای بالااثرات‌کوانتوم مکانیکی نیز ممکن است مهم باشند).

۱.۱۷ امواج تخت تکفام در محیطهای نارسانا

بررسی‌آن دسته ازجوابهای معادلهٔ (۳۱.۱۶) که به‌جوابهای موج تخت مشهورند از هر جواب دیگری‌آسانتراست. موج تخت به‌صورت موجی تعریف می‌شودکه، در هرلحظه از زمان، فــاز آن درتمام نقاط واقع بر هریك از صفحات عمود برراستای مشخصی یکسان است. برای مثال چنانچه این راستا، راستای z باشد، آنگاه $\mathbf{E}$ باید در تمــام نقاطی که مقدار z آنها یکسان است، یعنی درتمام نقاط واقع در صفحه‌ای موازی باصفحهٔ xy، فاز یکسانی داشته باشد. بنابراین، جواب (۳۴.۱۶) که قبلا دربــارهٔ آن بحث شد یك موج تخت‌است، زیرا $(\omega t - kz)$ برای t و z مفروض، بدون‌توجه به‌آنکه x و y چه مقادیری داشته باشند، ثابت است. امواج تختی که درراستای z درحرکت‌اند برای مسائلی که در

آن انتخاب راستای z اختیاری است، مناسب‌اند. اما، در بسیاری مسائل دستگاه محور مختصات به‌دلایل دیگری انتخاب می‌شود، برای‌مثال به‌دلیل شرایط مرزی؛ درچنین مواردی لازم است که امواج تختی با جهات انتشار اختیاری داشته باشیم. فرض کنید می‌خواهیم موج تختی را بررسی کنیم که جهت انتشار آن درجهت برداریکهٔ $\mathbf{u}$ است. در این صورت به‌جای متغیر z باید $\mathbf{u}.\mathbf{r}$، یعنی، تصویر $\mathbf{r}$ درجهت $\mathbf{u}$ را درنما بگذاریم، بنابراین موج تختی باجهت انتشار $\mathbf{u}$ توسط

$$e^{-i(\omega t-\kappa \mathbf{u}\cdot \mathbf{r})}$$

توصیف می‌شود. اکنون برداری را که بردار انتشار نامیده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\vec{\kappa}=\kappa\mathbf{u}$$

وبستگی فضایی وزمانی نمایی موج تخت‌را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$e^{-i(\omega t-\kappa\cdot \mathbf{r})}$$

اگر $\mathbf{u}=\mathbf{k}$ باشد ($\mathbf{k}$ بردار یکه درامتداد z است)، آنگاه $\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}=z$، همانطور که در حالت خاص داشتیم؛ البته درتمام موارد طول موج $\lambda=2\pi/\kappa$ است.

سرعت انتشاریك موج تخت تکفام، دقیقاً همان سرعت حرکت صفحات بافاز ثابت است. البته، فاز ثابت بدان معناست که

$$\vec{\kappa}\cdot\mathbf{r}-\omega t=\text{const.} \qquad (۱.۱۷)$$

اگر $\vec{\kappa}\cdot\mathbf{r}$ را به‌صورت $\kappa\xi$ بنویسیم (κ اندازهٔ $\vec{\kappa}$ و ξ تصویر $\mathbf{r}$ درجهت $\vec{\kappa}$ است)، آنگاه معادلهٔ (۱.۱۷) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\kappa\xi-\omega t=\text{const.}$$

بامشتق‌گیری ازرابطهٔ بالا نسبت به‌زمان، به‌دست می‌آوریم

$$v_p=\frac{d\xi}{dt}=\frac{\omega}{\kappa}=\frac{c}{n} \qquad (۲.۱۷)$$

که درآن ازنتیجهٔ معادلهٔ (۳۳.۱۶ الف)، $\kappa=n\omega/c$، استفاده کرده‌ایم. در خلأ داریم

$$v_p=c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=۲٫۹۹۷۹\times۱۰^{۸}\text{m/s}$$

حال برای به‌دست آوردن جوابهـای تفصیلی موج تخت برای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$، می‌توانیم به‌معادلهٔ (۳۱.۱۶) بر گردیم، ولی درواقع بهتراست که از خود معادلات ماکسول شروع کنیم. درمحیط‌ما، توزیعهای جریان وبارازپیش مشخص شده‌ای وجودندارند ورسانندگی $g=0$ است، پس معادلات عبارت‌اند از

$$\nabla \cdot \mathbf{D}=0 \qquad (۳.۱۷)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}=0 \qquad (۴.۱۷)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}=-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (۵.۱۷)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}=\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad (۶.۱۷)$$

ازبحثی که قبلا دربارهٔ معادلهٔ موج داشتیم ، بستگی فضایی وزمانی مورد انتظـار در موج تخت را می‌دانیم، پس فرض می کنیم که میدان $\mathbf{E}$ به‌صورت زیراست

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},\ t)=\hat{\mathbf{E}}e^{-i(\omega t-\kappa\cdot r)},\ \ldots \qquad (۷.۱۷)$$

که درآن $\hat{\mathbf{E}}$ بردار دامنهٔ ثابت مختلط موج تخت است. برای میدان $\mathbf{B}$ نیز رابطهٔ مشابهی فرض می گیریم. حال این‌جوابهارا درمعادلات ماکسول (۳.۱۷) تا (۶.۱۷) قرارمی‌دهیم. بااین‌کارمعلوم می‌شودکه ثابتهای مفروض $\vec{\kappa}$ ، $\hat{\mathbf{E}}$ ومانندآن باید درچه شرایطی صدق کنند تا توابع موج تخت واقعاً جوابهای معادلات ماکسول باشند.

بامشتق‌گیری ازتابعی به‌صورت $\hat{\mathbf{E}}e^{-i\omega t}$ نسبت به‌زمان می‌بینیم که برای‌تابعی به‌این صورت خاص، عملگر $\partial/\partial t$ عبارت است از

$$\frac{\partial}{\partial t}=-i\omega$$

همین‌طور ، می‌بینیم (مسئلهٔ ۱.۱۷) که برای تابعی به صورت $\hat{\mathbf{E}}e^{i\kappa\cdot r}$ عملگر ∇ عبارت است از

$$\nabla=i\vec{\kappa}$$

بدین‌ترتیب برای امواج تخت، معادلات ماکسول (پس‌ازحذف i وتابع نمایی) به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$\vec{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{D}} = 0 \qquad (۸.۱۷)$$

$$\vec{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0 \qquad (۹.۱۷)$$

$$\vec{\kappa} \times \hat{\mathbf{E}} = \omega \hat{\mathbf{B}} \qquad (۱۰.۱۷)$$

$$\vec{\kappa} \times \hat{\mathbf{H}} = -\omega \hat{\mathbf{D}} \qquad (۱۱.۱۷)$$

اگر فرض کنیم که محیط خطی است، معادلات ساختمندی عبارت خواهند بود از

$$\hat{\mathbf{D}} = \varepsilon \hat{\mathbf{E}} \qquad (۱۲.۱۷)$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} \hat{\mathbf{B}} \qquad (۱۳.۱۷)$$

همچنین فرض می کنیم محیط همگن و همسانگرد است، بنا براین ε و μ کمیتهای نرده‌ای ثابتی هستند. تمام این کاربردها در مورد محیطهای غیرمغناطیسی[1] صادق هستند، بنا براین برای سادگی فرض‌می کنیم $\mu = \mu_0$. حال بااستفاده ازروابط $\varepsilon = K\varepsilon_0$ و $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ معادلات ماکسول را به‌صورت زیر به‌دست می آوریم

$$K\vec{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0 \qquad (۱۴.۱۷)$$

$$\vec{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0 \qquad (۱۵.۱۷)$$

$$\vec{\kappa} \times \hat{\mathbf{E}} = \omega \hat{\mathbf{B}} \qquad (۱۶.۱۷)$$

$$\vec{\kappa} \times \hat{\mathbf{B}} = -\frac{\omega}{c^2} K \hat{\mathbf{E}} \qquad (۱۷.۱۷)$$

اگر فرض کنیم ω فرکانسی مفروض و K یك ثابت مفروض است، آنگاه باید $\vec{\kappa}$ ، $\hat{\mathbf{E}}$ ، و $\hat{\mathbf{B}}$ را طوری انتخاب کنیم که این مجموعهٔ معادلات برداری جبری برقرار باشند. ابتدا ، اگر فرض‌کنیم $K \neq 0$، می بینیم که $\vec{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0$ است ؛ البته همواره $\vec{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0$. این بدان معناست که $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ هردو باید بر κ عمود باشند. چنین موجی را عرضی می‌نامند.

---

۱. تنها محیطهایی که برای آنها درفرکانسهای پایین μ به‌طور قابل ملاحظه‌ای با μ_0 متفاوت است، محیطهای فرومغناطیسی هستند،که به‌هر جهت محیطهایی‌خطی نیستند. برای فرکانسهای نوری ، برای تمام مواد ، $\mu \cong \mu_0$ است. ما دراینجا تشدید پارامغناطیسی را،که تحت شرایط خاصی درفرکانسهای رادیویی ومیکروموجی قابل مشاهده است، درنظر نمی‌گیریم.

(حالت $K=0$ در واقع امکان‌پذیر وغیر بدیهی است، ولی ما بحث آن را فعلا به‌تأخیر می‌اندازیم.) به‌علاوه، چون $\hat{\mathbf{B}}$ متناسب با $\vec{\kappa}\times\hat{\mathbf{E}}$ است، $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ بریکدیگر نیز عمودند. بردارهای $\vec{\kappa}$، $\mathbf{E}$، $\mathbf{B}$ (باهمین ترتیب) یك مجموعهٔ متعامد راستگرد تشکیل می‌دهند. اندازهٔ نسبی $\mathbf{E}$ و $\hat{\mathbf{B}}$ نیز با معادلهٔ (۱۶.۱۷) تعیین می‌شود $\hat{B}=(\kappa/\omega)\hat{E}$. سرانجام بـا محاسبهٔ ضرب برداری $\vec{\kappa}$ بامعادلهٔ (۱۶.۱۷) و استفاده از معادلهٔ (۱۷.۱۷) برای $\vec{\kappa}\times\hat{\mathbf{B}}$، اندازهٔ $\vec{\kappa}$ را به‌دست می‌آوریم

$$\vec{\kappa}\times(\vec{\kappa}\times\hat{\mathbf{E}})=\omega\vec{\kappa}\times\hat{\mathbf{B}}=-K(\omega/c)^2\hat{\mathbf{E}}$$

با استفاده از اتحاد برداری زیر

$$\vec{\kappa}\times(\vec{\kappa}\times\hat{\mathbf{E}})=(\vec{\kappa}\cdot\hat{\mathbf{E}})\vec{\kappa}-\kappa^2\hat{\mathbf{E}}$$

واینکه برای موج عرضی $\vec{\kappa}\cdot\hat{\mathbf{E}}=0$ خواهیم داشت

$$-K(\omega/c)^2\hat{\mathbf{E}}=-\kappa^2\hat{\mathbf{E}}$$

یا

$$\kappa=\sqrt{K}\omega/c \qquad (۱۸.۱۷)$$

این رابطه، که رابطهٔ پاشندگی عرضی نامیده می‌شود، اندازهٔ بردارموج $\vec{\kappa}$ را برحسب ω و Kی مفروض تعیین می‌کند.

خلاصه: یك موج تخت عرضی تکفام که درجهت مثبت $\mathbf{u}$ انتشار می‌یابد بامعادلات زیر توصیف می‌شود

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\hat{\mathbf{E}}e^{-i(\omega t-\kappa\cdot r)}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\hat{\mathbf{B}}e^{-i(\omega t-\kappa\cdot r)} \qquad [۷.۱۷]$$

که در آن $\vec{\kappa}=\kappa\mathbf{u}$. جهت $\mathbf{u}$ وفرکانس ω کاملا اختیـاری‌اند. دامنهٔ $\hat{\mathbf{E}}$ دلخواه است بجز آنکه باید بر $\mathbf{u}$ عمود باشد

$$\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{E}}=0 \qquad (۱۹.۱۷)$$

اندازهٔ $\vec{\kappa}$، برای فرکانس ωی مفروض، باضریب شکست ماده تعیین می‌شود

$$\kappa=n\omega/c \qquad (۲۰.۱۷)$$

که در آن n به‌صورت زیر تعریف شده است

$$n=\sqrt{K} \qquad (۲۱.۱۷)$$

بدین ترتیب هم‌اندازه وهم‌جهت $\hat{\mathbf{B}}$ کاملا تعیین می‌شود

$$\hat{\mathbf{B}}=\frac{n}{c}\,\mathbf{u}\times\hat{\mathbf{E}} \qquad (۲۲.۱۷)$$

توجه‌کنیدکه در خلأ ($n=1$) برحسب یکاهای mks، داریم $c\hat{B}=\hat{E}$.[1] سرعت فازموج c/n است. باداشتن این نتـایج می‌توانیم بعضی ازمسائل اپتیکی مهم و فوق‌العاده جالب را بررسی‌کنیم. باوجود این، این بررسیها را به‌فصل بعد موکول می‌کنیم.

هرچندکه جوابهای موج تخت تنها ردهٔ محدودی ازجوابهای معادلات ماکسول‌اند، ولی این جوابها بسیار مهم‌اند زیرا مبنای ردهٔ به مراتب وسیعتری از جوابهـا را تشکیل می‌دهند. چون معادلات خطی‌اند، ترکیبی خطی ازجوابها (برهم‌نهی امواج تخت) نیزیك جواب است. بنابراین ازجمع امواج تخت می‌توانیم جوابهای دیگری به‌دست آوریم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\sum_i \hat{\mathbf{E}}(\vec{\kappa}_i,\omega_i)\exp\left[-i(\omega_i t-\vec{\kappa}_i\cdot\mathbf{r})\right] \qquad (۲۳.۱۷)$$

که در آن هریك از ضرایب $\hat{\mathbf{E}}$ به $\vec{\kappa}_i$ و ω_i بستگی خواهند داشت. این برهم نهی امواج تخت به‌صورت یك سری فوریهٔ (مختلط) است و ، بنابراین، می‌تواند نمایشگر هرجوابی که‌تناوبی است (نه‌الزاماً سینوسی) باشد. هریك‌ازجملات این سری باید به‌طورجداگانه درشرایط معادلات (۱۴.۱۷) تـا (۱۷.۱۷) صدق‌کنند. برای جوابی که حتی تناوبی هم نیست،علامت جمع در (۲۳.۱۷) را می‌توان‌به‌علامت انتگرال تبدیل‌کرد (انتگرال‌فوریه) که درآن $\hat{\mathbf{E}}(\vec{\kappa},\omega)$ تابع پیوسته‌ای از κ و ω است. تابع $\hat{\mathbf{E}}(\vec{\kappa},\omega)$ تبدیل فوریهٔ $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ نامیده می‌شود. دراین حالت باید این امکان را نیز در نظر بگیریم که n به κ و ω بستگی دارد

$$n=n(\kappa,\omega)$$

این اثر، که به پاشندگی مشهوراست، درفصل ۱۹ بحث خواهدشد.

---

۱. برحسب یکاهای گاؤسی، بنابر بحث فصل ۸، ما B را با B/c عوض می‌کنیم. لذا $B=E$. به‌عبارت دیگر اندازهٔ میدانهای E و B برای یك موج تخت در خلأ، یکسان است.

۲.۱۷ قطبش

دامنه‌های برداری مختلط $\hat{\mathbf{E}}$ و $\hat{\mathbf{B}}$ را با تفصیل بیشتری می‌توان بررسی کرد. درواقع، تاکنون به‌طور صریح نگفته‌ایم که از نظرما بردار مختلط به‌چه معناست. دو معنای کاملا واضح می‌توان مطرح کرد: (الف) کمیتی مختلط که قسمتهای حقیقی وموهومی آن بردارهای حقیقی هستند

$$\hat{\mathbf{E}}=\mathbf{E}_r+i\mathbf{E}_i$$

(ب) برداری که مؤلفه‌های آن (نسبت به‌بردارهای پایهٔ حقیقی) کمیتهای نرده‌ای مختلطی هستند

$$\hat{\mathbf{E}}=\hat{E}_p\mathbf{p}+\hat{E}_s\mathbf{s}+\hat{E}_u\mathbf{u}$$

درمواقعی که لازم است کمیتهای مختلط را مشخص کنیم، ما ازعلامت‌مد دربالای آن کمیتها استفاده‌خواهیم کرد. کمیتهای $\mathbf{p}$، $\mathbf{s}$ و $\mathbf{u}$ درصورت دوم $\mathbf{E}$ مجموعهٔ راستگردی‌ازبردارهای یکهٔ متعامد حقیقی هستند. با نوشتن صورت اول برحسب مؤلفه‌ها وصورت دوم برحسب قسمتهای حقیقی وموهومی، به‌آسانی دیده می‌شود که چنانچه تساویهای زیر برقرار باشند، این دو فرمولبندی، معادل خواهند بود

$$E_{pr}=E_{rp}\quad E_{pi}=E_{ip}\quad E_{sr}=E_{rs},\ \cdots$$

برای مقاصد فعلی ما صورت دوم مناسبتر است. فرض می‌کنیم جهت انتشار موج تخت در امتداد $\mathbf{u}$ است، پس بنابرنتیجهٔ $\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{E}}=0$ ازمعادلهٔ (۱۹.۱۷) داریم $\hat{E}_u=0$، ولی $\hat{E}_p$ و $\hat{E}_s$ اختیاری هستند

$$\hat{\mathbf{E}}=\hat{E}_p\mathbf{p}+\hat{E}_s\mathbf{s} \qquad (۲۴.۱۷)$$

بردار یکهٔ $\mathbf{p}$ را می‌توان درهرجهتی که بر $\mathbf{u}$ عمودباشد انتخاب کرد، درفصل بعد انتخاب خاصی به‌عمل خواهیم آورد که نمادگذاریی راکه در اینجا معرفی می‌شود، توجیه خواهد کرد.

همچنین مناسبتراست که مؤلفه‌های مختلط را به‌جای آنکه برحسب قسمتهای حقیقی وموهومی بنویسیم به‌صورت قطبی آنها بیان کنیم. فرض کنید

$$\hat{E}_p=E_pe^{i\phi_p}\quad \text{و}\quad \hat{E}_s=E_se^{i\phi_s} \qquad (۲۵.۱۷)$$

آنگاه، برای مثال، داریم

$$\hat{E}_s e^{-i(\omega t-\kappa\cdot r)}=E_s e^{-i(\omega t-\kappa\cdot r-\phi_s)}$$

این بدان معناست که ϕ_s فاز مؤلفهٔ میدان E درامتداد s است. بافرض روابط زیر

$$\phi_p-\phi_s=\phi \quad \text{و} \quad \phi_s=0$$

هیچگونه محدودیتی وارد نمی‌شود، زیرا انتخاب $\phi_s=0$ تنها بدان معناست که برای t مبدأ خاصی انتخاب کنیم. بااین انتخاب، داریم

$$\hat{\mathbf{E}}=E_p e^{i\phi}\mathbf{p}+E_s\mathbf{s}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=E_p\mathbf{p}e^{-i(\omega t-\kappa\cdot r-\phi)}+E_s\mathbf{s}e^{-i(\omega t-\kappa\cdot r)}$$

که قسمت حقیقی آن عبارت است از

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=E_p\mathbf{p}\cos(\omega t-\vec{\kappa}\cdot\mathbf{r}-\phi)+E_s\mathbf{s}\cos(\omega t-\vec{\kappa}\cdot\mathbf{r}) \qquad (۲۶.۱۷)$$

میدان E به‌دو مؤلفه در دوجهت، بادامنه‌های E_p و E_s که می‌توانند هر مقداری داشته باشند، تجزیه می‌شود. به‌علاوه این دومؤلفه ممکن است بااختلاف فاز ϕ نسبت به‌یکدیگر نوسان کنند: یعنی، درهرنقطهٔ مفروض $\mathbf{r}$، ماکزیمم E درجهت $\mathbf{p}$ وماکزیمم E در جهت $\mathbf{s}$ ممکن است دریك زمان نباشند.

بادرنظر گرفتن بعضی حالات خاص، تصویرتفصیلی میدان نوسان‌کنندهٔ E را در نقطه‌ای مشخص، مثلا در $\mathbf{r}=0$، بهتر می‌توان دید. ابتدا، فرض کنید $\phi=0$. آنگاه

$$\mathbf{E}(0,t)=(E_p\mathbf{p}+E_s\mathbf{s})\cos\omega t$$

میدان E متناوباً ازمقدار $\sqrt{E_p^2+E_s^2}$ به‌صفر وازصفر به $-\sqrt{E_p^2+E_s^2}$ کاهش می‌یابد و مجدداً به‌مقدار اولیه‌اش می‌رسد، وهمواره میدان E در امتداد جهت $E_p\mathbf{p}+E_s\mathbf{s}$ قرار دارد. این حالت که قطبش خطی[1] نامیده می‌شود در شکل ۱.۱۷ نشان داده شده است. اگر $E_p=0$ یا $E_s=0$ باشد، بازهم قطبش خطی داریم، ولی در آن صورت ϕ تعریف نشده است. برای $\phi=\pi$

$$\mathbf{E}(0,t)=(-E_p\mathbf{p}+E_s\mathbf{s})\cos\omega t$$

---

۱. استفاده از واژهٔ «قطبش» دراینجا با کاربرد این واژه در فصل ۴ هیچ ربطی ندارد. باعث تأسف است که به‌طور سنتی از لغت یکسانی استفاده شده است، ولی ابهامی بروز نخواهد کرد زیرا یك کاربردآن درمورد امواج است وکاربرد دیگرش درمورد محیطها.

مجدداً قطبش خطی داریم ، همان طور که در شکل ۱.۱۷ نشان داده شده است . برای $\phi=\pi/2$،

$$\mathbf{E}(0,\ t)=E_p\mathbf{p}\sin\omega t+E_s\mathbf{s}\cos\omega t$$

انتهای بردار E یك مسیر بیضوی را درجهت ساعتگرد طی می کند، همانطور که در شکل نشان داده شده‌است. این حالت را قطبش بیضوی (استگرد[1] می‌نامند. برای $\phi=-\pi/2$ مسیرهمان مسیر است ولی به‌طور عکس ساعتگرد طی می‌شود ، و قطبش را قطبش بیضوی چپگرد می‌نامند.درحالت‌خاص $\phi=\pm\pi/2$ و $E_p=E_s$، قطبش دایروی (راستگردیاچپگرد) است. برای سایرمقادیر ϕ، بازهم‌قطبش بیضوی (حتی‌اگر $E_p=E_s$ باشد) خواهیم‌داشت: مسیرطی شده بازهم یك‌بیضی است که درمستطیل شکل ۱.۱۷ محاط است، ولی محورهای اصلی وفرعی بیضی بامحورهای p و s زاویه‌می‌سازند. برای قطبش بیضوی اندازهٔ بردار E هرگز صفرنمی‌شود، هرچند که مؤلفهٔ آن درهریك ازجهات مفروض صفر می‌شود.

دامنهٔ مختلط بردار B ازمعادلهٔ (۲۲.۱۷) به‌دست می‌آید

$$\hat{\mathbf{B}}=\frac{n}{c}\mathbf{u}\times\hat{\mathbf{E}} \qquad [۲۲.۱۷]$$

باضرب‌نرده‌ای‌این‌رابطه‌در $\hat{\mathbf{E}}$،و جابه‌جا کردن ضرب نرده‌ای و برداری، خواهیم‌داشت

$$\hat{\mathbf{B}}\cdot\hat{\mathbf{E}}=0$$

درحالت‌کلی صفرشدن‌ضرب نرده‌ای دو بردار مختلط بدان معنا نیست‌که قسمتهای‌حقیقی آن‌دو برهم عمودند، ولی در این حالت قسمتهای حقیقی بریکدیگر عمودند . از معادلهٔ (۲۶.۱۷) با نوشتن $\mathbf{E}(0,\ t)=\mathbf{E}$، برای قسمت حقیقی‌آن داریم

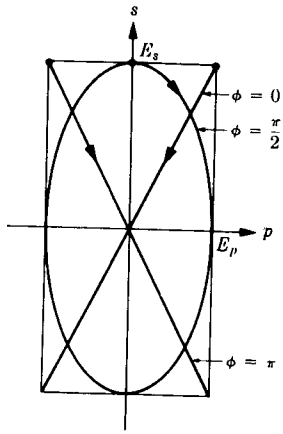
$$\mathbf{E}=E_p\mathbf{p}\cos(\omega t-\phi)+E_s\mathbf{s}\cos\omega t \qquad (۲۷.۱۷)$$

برای قسمت حقیقی $\mathbf{B}(0,\ t)=\mathbf{B}=\hat{\mathbf{B}}e^{-i\omega t}$، بااستفاده ازمعادلهٔ (۲۲.۱۷)، داریم

$$\mathbf{B}=(n/c)\,[E_p\mathbf{s}\cos(\omega t-\phi)-E_s\mathbf{p}\cos\omega t] \qquad (۲۸.۱۷)$$

چون ضرب نرده‌ای معادلهٔ (۲۸.۱۷) با (۲۷.۱۷) صفر است ، بردارهای حقیقی $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ در هر لحظه بریکدیگر عمودند . همچنین $\mathrm{Re}\,\hat{\mathbf{E}}=\mathbf{E}(0,\ 0)$ و $\mathrm{Re}\,\hat{\mathbf{B}}=\mathbf{B}(0,\ 0)$، بنابراین قسمتهای حقیقی $\hat{\mathbf{E}}$ و $\hat{\mathbf{B}}$ برهم عمودند. مسیری که انتهای بردار $\mathbf{B}$ طی می کند همان مسیر شکل ۱.۱۷ است‌که 90° عکس‌ساعتگرد چرخیده باشد.

۱ . متأسفانه دراینجاقانون دست‌راست به‌کارنمی‌رود وقرارداد به‌همین صورت‌است.



شکل ۱۰۱۷ نمایش مسیری که انتهای بردار $\mathbf{E}$ درنقطهٔ مفروضی در فضا به‌صورت تابعی از زمان طی می‌کند. بردار انتشار $\mathbf{u}$ به طرف خارج از صفحهٔ کاغذ است. مسیرهای $\phi = 0$ و $\phi = \pi$ مربوط به‌قطبش خطی است. مسیر $\phi = \pi/2$ مربوط به‌قطبش بیضوی راستگرد است؛ برای $\phi = -\pi/2$ (چپگرد) مسیر درجهت معکوس طی می‌شود.

ازآنجاکه‌محورهای p و s درصفحهٔ عمود بر $\mathbf{u}$ به‌طوردلخواه انتخاب شده‌بودند، هرانتخاب دیگری نیزمجازاست. هر انتخاب جدیدی محورهای مختصات شکل ۱۰۱۷ را می‌چرخاند ومقادیرجدیدی برای E_p، E_s، و ϕ به‌دست می‌دهد، ولی مسیری که بردار E در شکل ۱۰۱۷ طی می‌کند نمایشگر یك واقعیت فیزیکی است و در اثر تبدیل مختصات تغییر نخواهد کرد. ولی‌دراینجا، حتی حالت فیزیکی‌قطبش خود بخشی‌ازآزادی درانتخاب جوابهای موج تختی است که برای محیطی نامتناهی فرض کردیم. درفصل بعدخواهیم دید که چگونه می‌توان قطبش خاصی را تولید واندازه‌گیری کرد.

۳.۱۷ چگالی و شار انرژی

ما عبارات مختلط را برای میدانهای E و B آزادانه به‌کاربرده‌ایم منتهـا بااین توجه که کمیتهای فیزیکی واقعی قسمتهای حقیقی کمیتهای مختلط‌اند. توجیه ریاضی این امر آن است که معادلات ماکسول معادلاتی خطی‌اند وقسمتهای حقیقی وموهومی یك جواب‌مختلط هریك جداگانه دراین معادلات صدق می‌کنند. ولی عبارتهای زیر

$$u=\frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) \qquad (۲۹.۱۷)$$

$$\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H} \qquad (۳۰.۱۷)$$

برای چگالی انرژی وشار انرژی در واحد سطح، برحسب میدانها عباراتی غیرخطی‌اند. بنابراین، دراین عبارات لازم است که قبل ازآنکه میدانها را دریکدیگر ضرب کنیم قسمت حقیقی آنها را استخراج کنیم (مسئلهٔ ۶.۱۷). ازآنجا که مبدأ مختصات اختیاری است، مجدداً می‌توانیم مقادیر نوعی را برای $\mathbf{r}=0$ محاسبه کنیم. با مجذور کردن معادلات (۲۷.۱۷) و (۲۸.۱۷)، داریم

$$E^2=E_p^2\cos^2(\omega t-\phi)+E_s^2\cos^2\omega t \qquad (۳۱.۱۷)$$

$$B^2=(n/c)^2E^2=\varepsilon\mu_0 E^2 \qquad (۳۲.۱۷)$$

چون $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$، می‌بینیم که میدانهای الکتریکی ومغناطیسی درچگالی انرژی سهم یکسانی دارند

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}=\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}$$

$$u=\varepsilon E^2=\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{n}{c}\right)^2E^2 \qquad (۳۳.۱۷)$$

به‌علاوه، $\mathbf{E}\times\mathbf{H}=EH\mathbf{u}$، بنابراین بردار پوئین‌تینگ در راستای جهت انتشار است و اندازهٔ آن برابر است با

$$S=\frac{1}{\mu_0}\frac{n}{c}E^2 \qquad (۳۴.۱۷)$$

برای امواج تخت عبارات چگالی انرژی و شار انرژی در واحد سطح، به‌صورت بسیار ساده‌ای درآمده‌اند. به‌علاوه، این دو عبارت‌را می‌توان ترکیب کرد ونتیجهٔ جالبی به‌دست آورد که مستقل ازمقدار خاص میدان E است

$$S=\frac{c}{n}u \qquad (۳۵.۱۷)$$

چنانچه سرعت فاز موج تخت را به‌صورت برداری در جهت انتشار با بزرگی v_p،

$$v_p = \frac{c}{n}$$

بنویسیم، آنگاه

$$\mathbf{S} = u\mathbf{v}_p$$

این معادله مشابه رابطهٔ

$$\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$$

است که چگالی جریان الکتریکی همرفتی را برحسب چگالی بارالکتریکی وسرعت بار تعریف می‌کند. این تشابه تعبیر $\mathbf{S}$ به عنوان چگالی جریان انرژی، یعنی، به‌عنوان چگالی انرژی u که باسرعت فاز موج تخت $\mathbf{v}_p$ انتقال می‌یابد را قوت می‌بخشد.

بستگی u و $\mathbf{S}$ به‌زمان توسط E^2 ازمعادلهٔ (۳۱.۱۷) تعیین می‌شود که به‌قطبش‌موج بستگی دارد. برای قطبش دایروی ($\phi = \pm\pi/2$)

$$E^2 = E_p^2 \sin^2 \omega t + E_p^2 \cos^2 \omega t = E_p^2$$

که نسبت به‌زمان ثابت است؛ برای قطبش خطی ($\phi = 0, \pi$)

$$E^2 = (E_p^2 + E_s^2) \cos^2 \omega t$$

که بافرکانسی دوبرابرفرکانس موج بین صفر و ماکزیمم مقدارش تغییر می‌کند. البته، در همهٔ موارد E^2 همواره مثبت است. به‌هر جهت، در فرکانسهای بالا بستگی به‌زمان قابل اندازه‌گیری نیست و آنچه بیشتر مورد توجه است میانگین زمانی E^2 است. از آنجا که میانگین‌زمانی $\cos^2(\omega t - \phi)$ در یك‌دورهٔ تناوب برابر ۱/۲ است، برای هر قطبشی داریم

$$\overline{E^2} = \frac{1}{2}(E_p^2 + E_s^2) \qquad (۳۶.۱۷)$$

این رابطه ونتایجی مشابه‌آن را بااستفاده ازقضیه‌ای که درفصل ۱۳ بدون‌اثبات ارائه‌شد، می‌توان به‌سرعت به‌دست آورد. اثبات آن قضیه‌را دراینجا می‌آوریم.

اگر $f = f_0 e^{i\omega t}$ و $g = g_0 e^{i\omega t}$ باشد، که‌در آن f_0 و g_0 به زمان‌بستگی‌ندارند هرچند ممکن است به‌متغیرهای دیگری بستگی داشته باشند، آنگاه

$$\overline{\mathrm{Re}\, f\, \mathrm{Re}\, g} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\, f^* g \qquad (۳۷.۱۷)$$

خط بالای کمیت سمت چپ به‌معنای میانگین زمانی است. برای اثبات این رابطه فرض

کنید $f_0 = u + iv$ و $g_0 = \xi + i\eta$. آنگاه

$$\mathrm{Re}\, f\ \mathrm{Re}\, g = (u \cos \omega t - v \sin \omega t)(\xi \cos \omega t - \eta \sin \omega t) \qquad (۳۸.۱۷)$$

از طرفی

$$\mathrm{Re}\, f^* g = u\xi + v\eta \qquad (۳۹.۱۷)$$

انتگرالهای زیر به‌آسانی قابل اثبات‌اند

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t\, dt = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t\, dt = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t\, dt = 0$$

به‌کمك این انتگرالها به آسانی می‌توان دید که میانگین زمانی معادلهٔ (۳۸.۱۷) عبارت است از

$$\overline{\mathrm{Re}\, f\ \mathrm{Re}\, g} = \frac{1}{2}(u\xi + v\eta) \qquad (۴۰.۱۷)$$

ازمقایسهٔ (۴۰.۱۷) با (۳۹.۱۷) قضیهٔ مذکور در معادلهٔ (۳۷.۱۷) اثبات می‌شود. این قضیه برای ضرب هردو کمیت مختلطی که به‌صورت هماهنگ بافرکانس یکسان به‌زمان بستگی داشته باشند، ولی لزوماً فازیکسانی نداشته باشند، صادق است. اگر این کمیتها برداری باشند، این ضرب می‌تواند یا ضرب نرده‌ای باشد یا ضرب برداری. می‌توان به‌آسانی بررسی کردکه با گذاشتن بردار مختلط $\mathbf{E}$ ازمعادلهٔ (۲۶.۱۷) در رابطهٔ زیر

$$\overline{E^2} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\, (\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E})$$

عبارت (۳۶.۱۷) مستقیماً به‌دست می‌آید.

۴.۱۷ امواج تخت تکفام در محیطهای رسانا

دریك محیط رسانا می‌توانیم جوابهای موج تختی را به‌دست آوریم که به‌طور صوری

شباهت زیادی به‌جوابهـای بخش ۱.۱۷ دارند، هر چندکه رفتار فیزیکی آنها به‌مراتب پیچیده‌تراست. بـازهم فرض می‌کنیم که توزیعهای جریان و بار از پیش مشخص‌شده‌ای وجود ندارند، ولی اکنون یك‌چگالی جریان القایی می‌تواند درپاسخ محیط به‌میدان Eی موج‌وجود داشته‌باشد، $\mathbf{J}=g\mathbf{E}$. ماازهمان جایی شروع می‌کنیم‌که درمورد محیط نارسانا شروع کردیم بجزآنکه به‌جای معادلهٔ (۶.۱۷) معادلهٔ زیر را داریم

$$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+g\mathbf{E}$$

باهمان فرضها و جانشانیهای قبل، به‌جای آنکه به معادلهٔ (۱۱.۱۷) برسیم، به‌معادلهٔ زیر می‌رسیم

$$\vec{\kappa}\times\hat{\mathbf{H}}=-\omega\hat{\mathbf{D}}-ig\hat{\mathbf{E}}$$

بازهم مانند قبل، این معادله تبدیل می‌شود به

$$\vec{\kappa}\times\hat{\mathbf{B}}=-\frac{\omega}{c^{2}}\left(K+i\frac{g}{\varepsilon_{0}\omega}\right)\hat{\mathbf{E}}$$

حال برای آنکه حالت موردبحث‌را، تاحدامکان، به‌حالت قبل‌تبدیل کنیم، ثابت‌دی‌الکتریك مختلط را به‌صورت زیرتعریف می‌کنیم

$$\hat{K}=K+i\frac{g}{\varepsilon_{0}\omega} \qquad (۴۱.۱۷)$$

دراین صورت معادلهٔ (۱۷.۱۷) تبدیل می‌شود به

$$\vec{\kappa}\times\hat{\mathbf{B}}=-\frac{\omega}{c^{2}}\hat{K}\hat{\mathbf{E}}$$

سپس اگر مجدداً فرض کنیم که $\hat{K}\neq 0$ و $\vec{\kappa}\cdot\hat{\mathbf{E}}=0$، رابطهٔ پاشندگی عرضی به دست می‌آید

$$\kappa=\sqrt{\hat{K}}\omega/c=\hat{n}\omega/c \qquad (۴۲.۱۷)$$

که دراینجا ضریب شکست مختلط $\hat{n}$ به‌صورت زیر تعریف شده است

$$\hat{n}^{2}=\hat{K} \qquad (۴۳.۱۷)$$

برای آنکه معادلهٔ (۴۲.۱۷) صادق باشد، باید فرض کنیم‌که درمحیطی رسانا یا $\vec{\kappa}$ کمیتی

مختلط است یا ω، درفصل قبل دربارهٔ موردی که ω مختلط باشد به‌اجمال بحث کردیم. جوابهایی که برای مطالب فصلهای بعدجالبترند ازاین فرض نتیجه می‌شوند که ω راحقیقی و $\vec{\kappa}$ را مختلط بگیریم. پس $\vec{\kappa}$ را به صورت $\vec{\hat{\kappa}}$ می‌نویسیم. خواهیم دید که این جوابها برحسب زمان نوسانی خواهند بود (نه‌میرا)، ولی در فضا تضعیف می‌شوند. اگر K، n، $\vec{\kappa}$، و $\mathbf{u}$ را دربخش ۱.۱۷ با $\hat{K}$، $\hat{n}$، $\vec{\hat{\kappa}}$، و $\hat{\mathbf{u}}$ تعویض کنیم، تمام نتایج آن بخش به‌طورصوری معتبر خواهند بود. تنها سؤال این است که این کمیتها از نظر فیزیکی چه معنایی دارند. برای تعبیرجوابهایی که بردار انتشارآنها $(\hat{\kappa})$ مختلط است، بهتراست که آن را به‌صورت زیر بیان کنیم

$$\vec{\hat{\kappa}}=\vec{\kappa}_r+i\vec{\kappa}_i \qquad (۴۴.۱۷)$$

(برخلاف نحوهٔ نمایشی که برای‌بردار دامنهٔ مختلط $\hat{\mathbf{E}}$ برگزیدیم). باقراردادن $\vec{\hat{\kappa}}$ی مختلط درجواب (۷.۱۷) نتایج زیررا به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=(\hat{\mathbf{E}}e^{-\kappa_i\cdot r})\,e^{-i(\omega t-\kappa_r\cdot r)}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=(\hat{\mathbf{B}}e^{-\kappa_i\cdot r})\,e^{-i(\omega t-\kappa_r\cdot r)}$$

این جواب نمایشگر موج تختی است که با طول موج $\lambda=2\pi/\kappa_r$ در جهت $\vec{\kappa}_r$ انتشار می‌یابد، ولی دامنهٔ آن به‌جای آنکه ثابت باشد، کاهش می‌یابد وبیشترین کاهش آن درجهت $\vec{\kappa}_i$ است. سطوح فاز ثابت صفحاتی هستند عمود برجهت انتشار $\vec{\kappa}_r$. همچنین سطوح دامنهٔ ثابتی‌وجود دارند که صفحاتی عمود بر $\vec{\kappa}_i$اند. کمیت نرده‌ای $\hat{\kappa}$ که باید دررابطهٔ پاشندگی، $\hat{\kappa}=\hat{n}\omega/c$، به‌کار برود عبارت است از

$$\hat{\kappa}=\sqrt{\vec{\hat{\kappa}}\cdot\vec{\hat{\kappa}}}=\sqrt{\kappa_r^2-\kappa_i^2+2i\vec{\kappa}_r\cdot\vec{\kappa}_i}$$

اکنون به‌منظور بررسی سرعت فاز وطول تضعیف موج، $\hat{n}$ را به‌صورت زیرمی‌نویسیم

$$\hat{n}=n+ik \qquad (۴۵.۱۷)$$

که درآن n و k ثابتهای اپتیکی نام دارند.

ابتدافرض کنیم $\vec{\kappa}_r$ و $\vec{\kappa}_i$ جهت یکسانی‌دارند. (این‌فرضی‌است که تنهادرمواردمحدودی صحیح است ودربعضی موارد مهم که درفصل بعد دربارهٔ آنها بحث خواهد شد معتبر نیست؛ ولی به‌هرجهت می‌تواند صادق‌باشد، مثلا درموردی‌که موج ازخارج عمود بریك مرزتخت وارد محیط رسانا می‌شود.) درآن صورت می‌توانیم بنویسیم

$$\vec{\hat{\kappa}}=(\kappa_r+i\kappa_i)\mathbf{u}=\hat{\kappa}\mathbf{u}$$

که در آن $\mathbf{u}$ بردار یکهٔ حقیقی درجهت مشترك $\vec{\kappa}_r$ و $\vec{\kappa}_i$ است. چون $\mathbf{u}$ حقیقی است، معادلات زیر

$$\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{E}}=0=\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{B}}$$

بازهم بدان معناست که بردارهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ برجهت انتشار $\mathbf{u}$ عمودند. ولی، معادلهٔ (۲۲.۱۷) تبدیل می‌شود به

$$\hat{\mathbf{B}}=\frac{\hat{n}}{c}\mathbf{u}\times\hat{\mathbf{E}} \qquad (۴۶.۱۷)$$

دراینجا $\hat{n}$ مختلط بدین معناست که $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ بایکدیگرهم‌فاز نیستند، وهمچنین بدین‌معناست که بردارهـای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ی حقیقی بریکدیگر عمود نیستند مگر برای حـالت قطبش خطی (مسئلهٔ ۹.۱۷). برحسب ضریب شکست مختلط

$$\hat{n}=n+ik$$

روابط زیر را داریم

$$\kappa_r=n\omega/c \quad \text{و} \quad \kappa_i=k\omega/c \qquad (۴۷.۱۷)$$

با نوشتن $\xi=\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}$، دراین حالت خاص عبارت زیر را برای میدان E به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=(\hat{\mathbf{E}}e^{-k\omega\xi/c})e^{-i\omega(t-n\xi/c)}$$

موج باسرعت فاز c/n وثابت تضعیف $k\omega/c$ انتشار می‌یابد. کمیت اخیر تعیین می‌کند که دامنهٔ نوسان‌کنندهٔ میدان با چه سرعتی نسبت به‌فاصله افت می‌کند. معکوس ثابت تضعیف

$$\delta=c/k\omega \qquad (۴۸.۱۷)$$

که عمق پوسته نامیده می‌شود، اندازهٔ فاصله‌ای را به‌دست می‌دهد که در آن دامنهٔ میدان به $1/e$ مقدارش درهر نقطهٔ مفروض (مثلا، در سطحی که موج وارد محیط می‌شود) افت می‌کند. برای محیطی نارسانا ($k=0$) این فاصله بینهایت بود. ازآنجاکه طول موج در محیط $\lambda=2\pi c/n\omega$ است (برابر با $1/n$ طول موج درخلأ برای همان فرکانس)، عمق پوسته را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$\delta=\frac{n}{k}\frac{\lambda}{2\pi} \qquad (۴۹.۱۷)$$

درماده‌ای که درآن اندازهٔ k بااندازهٔ n قابل قیاس است، «موج» درفاصلهٔ یك طول موج

تضعیف می‌شود؛ ولی اگر $k \ll n$ باشد، مثلا دریك دی‌الکتریك ناکامل که رسانندگی مختصری دارد، موج بدون تضعیف قابل ملاحظه‌ای چندین طول موج انتشار می‌یابد. در این حالت ماده را شفاف می‌نامند.

موقعی که $\vec{\kappa}_r$ و $\vec{\kappa}_i$ جهات متفاوتی داشته‌باشند، بردار یکهٔ $\hat{\mathbf{u}}$ را باید مختلط بگیریم. درآن صورت لازم نیست میدانهای حقیقی E و B بر $\vec{\kappa}_r$ (یا بر $\vec{\kappa}_i$) عمود باشند، هرچند که بازهم موج‌را «عرضی» می‌نامند چون اگر $\hat{K} \neq 0$ باشد $\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0 = \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{B}}$ است. بازهم طول موج و تضعیف به ثابتهای ماده، n و k، بستگی خواهند داشت، ولی به‌نحوی بسیار پیچیده‌تر از معادلهٔ (۴۷.۱۷). چنانچه دقت لازم دربارهٔ کمیتهای مختلط به‌عمل آوریم، روابط قطبش وانرژی‌را نیزمی‌توانیم تعمیم دهیم. ولی، نیازی به‌این نتایج‌عمومی نخواهیم داشت.

از آنجا که انتشار موج را ثابتهای اپتیکی n و k تعیین می‌کنند، مهم است که رابطهٔ آنها را با کمیتهای K و g، که خواص ماده دراصل برحسب آنها بیان شده‌بودند، به دست آوریم، تعاریف $\hat{n}$ و $\hat{K}$

$$\hat{n} = n + ik \qquad [۴۵.۱۷]$$

$$\hat{K} = K + i\frac{g}{\varepsilon_0 \omega} \qquad [۴۱.۱۷]$$

ازطریق معادلهٔ زیر

$$\hat{K} = \hat{n}^2 \qquad [۴۳.۱۷]$$

به‌یکدیگر مربوط می‌شوند. این رابطه خیلی ساده به‌نظر می‌آید، ولی موقعی که آن را برحسب کمیتهای حقیقی n، k و K، g بیان کنیم، نسبتاً پیچیده می‌شود. $\hat{K}$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم[1]

$$\hat{K} = K_r + iK_i$$

که درآن

$$K_r = K \quad و \quad K_i = g/\varepsilon_0 \omega \qquad (۵۰.۱۷)$$

بامجذور کردن $(n+ik)$ ومساوی‌قراردادن قسمتهای‌حقیقی وموهومی درمعادلهٔ(۴۳.۱۷)، نتیجه می‌شود

---

۱. نمادگذاریهای‌متداولتر عبارت‌انداز $\hat{K} = K_1 + iK_2$ یا $\hat{K} = K' + iK''$، ولی مامی‌خواهیم شاخصهای عددی وپریم و دوپریم را برای مقاصد دیگری درفصل بعد نگه داریم.

$$K_r = n^2 - k^2$$

$$K_i = 2nk \qquad (۵۱\cdot۱۷)$$

این معادلات را می‌توان برای n و k حل کرد

$$n = \sqrt{\frac{1}{2}[K_r + \sqrt{K_r^2 + K_i^2}]},$$

$$k = \sqrt{\frac{1}{2}[-K_r + \sqrt{K_r^2 + K_i^2}]} \qquad (۵۲\cdot۱۷)$$

دراینجا ریشه‌های مثبت انتخاب شده‌اند تا آنکه n و k، همان‌طور که معنای آنها ایجاب می‌کند، همواره حقیقی ومثبت باشند. باید متذکر شد که $K_i = g/\varepsilon_0\omega$ ذاتاً مثبت است زیرا g مثبت است: اتلاف انرژی، $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = gE^2$ دریك محیط غیرفعال باید مثبت باشد؛ K_i همواره نمایندهٔ انرژی تلف شده است. ازطرفی دیگر، $K_r = K$ می‌تواند هم مثبت باشد وهم منفی، وهمین‌طورهم هست. برای محیطهای نارسانا ومیدانهای ساکن، K مثبت وبزرگتر از ۱ است، ولی برای میدانهای متناوب درفلزات، ممکن است کمتر از ۱، صفر، یا منفی باشد. مثالهای خاصی ازاین موارد را می‌توان در فصل ۱۹ یافت؛ فعلا ما K و g را به‌عنوان کمیتهایی مفروض درنظرمی‌گیریم بااین شناخت که درهرماده‌ای ممکن‌است‌این کمیتها به‌فرکانس بستگی داشته باشند.

معادلات بالا دقیق اما پیچیده‌اند؛ بنابراین بهتراست بعضی موارد تقریبی را بررسی کنیم. غالباً یکی ازچند تقریب زیرمعتبر است

۱. $K_i \ll |K_r|,\ K_r > 0 \left(\omega \gg \frac{g}{\varepsilon}\right):$

$$n \cong \sqrt{K_r}, \quad k = K_i/2n \ll n \qquad (۵۳\cdot۱۷)$$

۲. $K_i \ll |K_r|,\ K_r < 0 \left(\omega \gg \frac{g}{-\varepsilon}\right):$

$$k \cong \sqrt{-K_r}, \qquad n = K_i/2k \ll k \qquad (۵۴\cdot۱۷)$$

۳. $K_i \gg |K_r|,\ \left(\omega \ll \frac{g}{|\varepsilon|}\right):$

$$n \cong k \cong \sqrt{K_i/2} \qquad (۵۵\cdot۱۷)$$

برای مثال، تقریب (۱) برای یك عایق خوب ، تاحد فرکانسهای خیلی پایین ، اساساً تا حد dc (دقیقا تا حد dc تنها برای عایق‌کامل با $g=0$)، معتبراست ونتیجهٔ $n=\sqrt{K}$ را مشابه مورد نارسانا به‌دست می‌دهد . تقریب (۲) برای فلزات در قسمت بالای فرو سرخ طیف فرکانس معتبراست، درصورتی که تقریب (۳) برای فلزات درفرکانسهای میکروموج وپایینترمعتبر است. فرکانسی که حد فاصل بین تقریبهای (۲) و (۳) است عبارت است از $\omega \approx 1/\tau$ که درآن τ زمان برخورد الکترونهای آزاد است. برای فلزات خالص در دمای اتاق $1/\tau \approx 10^{14}s^{-1}$.

درمسائل الکتریکی که درآنها عمق پوسته مهم‌است، معمولا تقریب (۳) معتبراست. معادلهٔ (۴۹.۱۷) نشان می‌دهدکه برحسب طول‌موج، «موج» شدیداًتضعیف می‌شود. برحسب فاصلهٔ مطلق، معادلهٔ (۴۸.۱۷) درمورد تقریب (۳) تبدیل می‌شود به

$$\delta \cong \frac{c}{\omega}\sqrt{\frac{2}{K_i}} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega g}} \qquad (۵۶.۱۷)$$

هنگامی که ω به‌سمت صفر میل می کند δ بینهایت می‌شود، که این مطلب سازگار است بانتیجهٔ قبلی ما مبنی برآنکه میدان E وچگالی جریان دریك رسانا (ولی نه دریك ابر-رسانا[1]) برای جریانهای‌مستقیم وهمچنین عملا برای جریان متناوب ۵۰ هرتزی، یکنواخت هستند . ولی در فرکانسهای بالاتر، در گسترهٔ اعتبار معادلهٔ (۵۶.۱۷) ، δ بسیار کوچك می‌شود.

برای مثال، رسانندگی نقرهٔ مرغوب درفرکانسهای میکروموج برابر است با

$$g = 3 \times 10^{7} S^{*}/m$$

درفرکانس 10^{10} سیکل برثانیه، که یك فرکانس معمولی میکروموج است، عمق پوسته برابراست با

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{(2\pi \times 10^{10})(3 \times 10^{7})(4\pi \times 10^{-7})}} = 9.2 \times 10^{-5}\ cm$$

بنابراین درفرکانسهای میکروموج عمق پوسته درنقره خیلی‌کم است ونتیجتاً انتظارمی‌رود که اختلاف بین عملکرد یك عنصرمدارکه ازنقرهٔ خالص ساخته شده است و عنصری که از برنج نقره اندود ساخته شده است، ناچیز باشد. درواقع همین‌طورهم هست و بدین جهت برای پایین آوردن هزینهٔ ساخت قطعات موجبرهای خیلی‌خوب، ازفن‌آب فلزکاری‌استفاده

---

۱. عمق پوسته باعمق نفوذکه درفصل ۱۵ بحث شد هیچ ارتباطی ندارد.

* یك زیمنس (S) برابر با معکوس یك اهم است؛ زیمنس واحد رسانایی یا عکس مقاومت است (فصل ۷). زیمنس درگذشته مهو نامیده می‌شد.

می‌شود.

اکنون به‌عنوان دومین مثال، فرکانسی‌را محاسبه می‌کنیم که برای آن عمق پوسته در آب دریا برابر یك متر باشد. برای آب دریا، $\mu=\mu_0$ و $g\approx 4.3\,\mathrm{S/m}$. فرکانس برای یك عمق پوستهٔ مفروض δ عبارت است از

$$\omega=\frac{2}{g\mu_0\,\delta^2}=\frac{2}{4.3\times 4\pi\times 10^{-7}\,\delta^2}\,\mathrm{s}^{-1}=\frac{3.70\times 10^5}{\delta^2}\,\mathrm{s}^{-1}$$

که نتیجه می‌شود

$$f=58.6\times 10^3\ \mathrm{Hz}$$

به‌عبارت دیگر، برای یك عمق پوستهٔ یك متری فرکانس ۶۰ کیلو هرتز لازم است. اگر یك زیردریایی به‌یك گیرندهٔ خیلی حساس مجهز باشد، و اگر ازیك فرستندهٔ خیلی قوی استفاده شود، می‌توان بااین زیردریایی در زیرآب ارتباط برقرار کرد. ولی، باید از یك فرکانس رادیویی خیلی پایین استفاده شود زیرا حتی در این فرکانس نیز تضعیف موج فوق‌العاده شدید خواهد بود. در عمقی که پنج برابر عمق پوسته باشد (در مورد محاسبات فوق، درعمق پنج متری)، فقط یك درصد از میدان الکتریکی اولیه، و یك صدم درصد از توان موج فرودی، باقی خواهد ماند.

مورد ناهنجار $\hat{K}=0$، که تاکنون آن را در بحث منظور نکرده‌ایم، وجود موج طولی (درمقابل‌موج‌عرضی) رامجازمی‌سازد (مسئلهٔ ۱۴.۱۷). درچنین موجی $\nabla\cdot\mathbf{E}\neq 0$ (هرچندکه $\nabla\cdot\mathbf{D}=0$)، به‌طوری‌که چگالی بارقطبشی برخلاف مورد موج عرضی‌صفر نمی‌شود؛ تنها یك‌چگالی بارمی‌تواند میدانی طولی ایجادکند. چنین امواجی در پلاسماها اهمیت دارند؛ نوسان الکتروستاتیکی که در بخش ۷.۱۴ بحث شد مثالی از امواج طولی است.

۵.۱۷* امواج کروی

به‌عنوان مثالی ازیك مسئلهٔ موج مشکلتر، که در واقع حتی امواج ساده را در آن مسئله نمی‌توان به‌سادگی به‌دست‌آورد، معادلهٔ موج را درمختصات‌کروی بررسی‌می‌کنیم. معادلهٔ موج برای میدان الکتریکی درخلأ به‌صورت زیراست

$$\nabla^2\mathbf{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0 \qquad (۵۷.۱۷)$$

برای امواج تکفام، قسمت مکانی معادلهٔ موج به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r})+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\mathbf{E}(\mathbf{r})=0 \qquad (۵۸.۱۷)$$

اشکال استفاده از مختصات کروی دراین است که ما می‌خواهیم بردار $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ را در این مختصات برحسب مؤلفه‌های شعاعی، سمتی، وقطبی بنویسیم، و هرکدام از این مؤلفه‌ها را به‌صورت تابعی ازشعاع، زاویهٔ سمتی، و زاویهٔ قطبی بیان‌کنیم. اگر این عمل را انجام دهیم، به‌کاربردن عبارت‌لاپلاسی درمختصات کروی درمعادلهٔ (۵۸.۱۷)کافی نیست؛ بلکه به‌جای آن لازم است لاپلاسی یك بردار بامعادلهٔ زیرتعریف شود

$$\nabla^2\mathbf{E}=-\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}+\nabla\nabla\cdot\mathbf{E} \qquad (۵۹.۱۷)$$

واگرایی بردار $\mathbf{E}$ بازهم‌صفراست؛ ولی، مؤلفهٔ شعاعی، $\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}$ نه‌تنها شامل‌مؤلفهٔ‌شعاعی $\mathbf{E}$ است، بلکه مؤلفه‌های سمتی وقطبی آن‌را نیزشامل می‌شود. مؤلفه‌های θ و ϕ نیز به‌طور مشابه پیچیده‌اند، ونتیجهٔ نهایی سه معادله بامشتقات جزئی است‌که هریك هرسه مؤلفهٔ $\mathbf{E}$ را شامل می‌شوند. جدا سازی‌که برای معادلهٔ برداری لاپلاس درمختصات قائم انجام‌پذیر است، درمختصات‌کروی انجام پذیرنیست؛ درواقع این کارمخصوص مختصات قائم‌است. ولی باید متذکرشویم‌که می‌توان مؤلفه‌های قائم $\mathbf{E}$ را به‌کاربرد؛ دراین مورد این‌مؤلفه‌ها باید به‌صورت زیرنوشته شوند

$$E_x(r,\ \theta,\ \phi),\ E_y(r,\ \theta,\ \phi),\ E_z(r,\ \theta,\ \phi)$$

بایك روش‌ساده می‌توان‌ازبرخوردبااشکال‌فوق‌احترازکرد. معادلهٔ نرده‌ای هلمهولتز را درنظر بگیرید

$$\nabla^2\psi+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\psi=0 \qquad (۶۰.۱۷)$$

که همانطورکه به‌زودی خواهیم دید جوابهای آن به‌سادگی به‌دست می‌آیند. فرض‌کنید ψ یکی‌ازجوابهاست، آنگاه $\mathbf{E}=\mathbf{r}\times\nabla\psi$ درمعادلهٔ برداری‌هلمهولتزیعنی‌معادلهٔ (۵۸.۱۷) صدق می‌کند

$$-\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}+\nabla\nabla\cdot\mathbf{E}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\mathbf{E}=0 \qquad (۶۱.۱۷)$$

برای تحقیق این مطلب، اتحاد زیررا درنظربگیرید

$$\mathbf{E}=\mathbf{r}\times\nabla\psi=-\nabla\times(\mathbf{r}\psi) \qquad (۶۲.۱۷)$$

این اتحاد از اتحاد برداری زیر

$$\nabla\times(\mathbf{F}\varphi)=\varphi\nabla\times\mathbf{F}-\mathbf{F}\times\nabla\varphi \qquad (۶۳.۱۷)$$

و معادلهٔ

$$\nabla\times\mathbf{r}=0 \qquad (۶۴.۱۷)$$

نتیجه می‌شود. چون واگرایی هرتاوی صفر است ، فقط باید جملهٔ تاو تاو را در معادلهٔ (۶۱.۱۷) درنظر بگیریم. تاو $\mathbf{E}$ را می‌توان بااستفاده از اتحاد برداری زیر به‌دست آورد

$$\nabla\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G})=\mathbf{F}\nabla\cdot\mathbf{G}-\mathbf{G}\nabla\cdot\mathbf{F}+(\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F}-(\mathbf{F}\cdot\nabla)\ \mathbf{G} \qquad (۶۵.۱۷)$$

درنتیجه خواهیم داشت

$$\nabla\times(\mathbf{r}\times\nabla\psi)=\mathbf{r}\nabla^{2}\psi-\nabla\psi\nabla\cdot\mathbf{r}+(\nabla\psi\cdot\nabla)\mathbf{r}-(\mathbf{r}\cdot\nabla)\nabla\psi \qquad (۶۶.۱۷)$$

همان‌طورکه درمسئلهٔ ۱۳.۱ نشان‌داده‌شد، برای هربرداری مثل $\mathbf{A}$ داریم $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{r}=\mathbf{A}$؛ وهمچنین واگرایی بردار $\mathbf{r}$ مساوی سه (۳) است. اولین جملهٔ معادلهٔ (۶۶.۱۷) رامی‌توان باتوجه به‌اینکه ψ درمعادلهٔ نرده‌ای هلمهولتز صدق می‌کند، به‌صورت دیگری تبدیل کرد، بنابراین فقط جملهٔ آخر باقی می‌ماند که ممکن است ایجاد اشکال کند. اتحاد برداری

$$\nabla(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})=(\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G}+(\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F}+\mathbf{F}\times\nabla\times\mathbf{G}+\mathbf{G}\times\nabla\times\mathbf{F} \qquad (۶۷.۱۷)$$

با $\mathbf{F}=\mathbf{r}$ و $\mathbf{G}=\nabla\psi$ نتیجهٔ زیررا به‌دست می‌دهد

$$\nabla(\mathbf{r}\cdot\nabla\psi)=(\mathbf{r}\cdot\nabla)\nabla\psi+(\nabla\psi\cdot\nabla)\mathbf{r} \qquad (۶۸.۱۷)$$

دوجملهٔ آخر معادلهٔ (۶۷.۱۷) صفرمی‌شوند زیرا تاو شیب وهمچنین تاو $\mathbf{r}$، صفر است. با به‌کاربردن این روابط درمعادلهٔ (۶۶.۱۷)، خواهیم داشت

$$\nabla\times(\mathbf{r}\times\nabla\psi)=-\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2}\mathbf{r}\psi-3\nabla\psi+\nabla\psi-\nabla(\mathbf{r}\cdot\nabla\psi)+\nabla\psi \qquad (۶۹.۱۷)$$

بالاخره باگرفتن تاو ازمعادلهٔ (۶۹.۱۷) نتیجه می‌گیریم

$$\nabla\times\nabla\times(\mathbf{r}\times\nabla\psi)=-\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2}\nabla\times\mathbf{r}\psi=\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2}\mathbf{r}\times\nabla\psi \qquad (۷۰.۱۷)$$

که درست همان معادلهٔ برداری هلمهولتز است. در اینجا صریحاً هیچگونه استفاده‌ای از

مختصات کروی نشده است؛ ولی چون $\mathbf{r}$ برسطحی به‌شعاع ثابت در مختصات کروی عمود است، انتظار می‌رود که جواب $\mathbf{r}\times\nabla\psi$ به‌طوراخص دراین مختصات قابل استفاده باشد. درواقع این جواب درسایردستگاههای مختصات چندان قابل استفاده نیست.

حال که می‌دانیم $\mathbf{r}\times\nabla\psi$ یکی از جوابهای معادلهٔ برداری هلمهولتز است، که در آن ψ یکی از جوابهـای معادلهٔ نرده‌ای هلمهولتز است ، بهتر است بدانیم چگونه چنین جوابهایی را می‌توان برای ساختن امواج الکترومغناطیسی به‌کاربرد. روش آن خیلی‌ساده است. تغییرات مکانی میدان الکتریکی به‌صورت زیرانتخاب می‌شود

$$\mathbf{E}=\mathbf{r}\times\nabla\psi \qquad [۶۲.۱۷]$$

میدان مغناطیسی باید طوری انتخاب شودکه همراه با $\mathbf{E}$ در معادلات ماکسول صدق کند. بدین منظورمعادلهٔ (۵.۱۷) را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\nabla\times\mathbf{E}=i\omega\mathbf{B} \qquad (۷۱.۱۷)$$

که در آن بستگی زمانی استاندارد $e^{-i\omega t}$ فرض شده است. معـادلهٔ (۶۹.۱۷) تاو $\mathbf{E}$ را به‌طورصریح به‌دست می‌دهد، یا به‌شکل خلاصه‌تر

$$\mathbf{B}=-i\frac{1}{\omega}\nabla\times(\mathbf{r}\times\nabla\psi) \qquad (۷۲.۱۷)$$

چون واگرایی هرتاوی صفراست، معادلهٔ (۴.۱۷) صادق است. ازطرفی چون $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ هر دوجوابهای معادلهٔ موج‌اند، واین‌معادله به‌نوبهٔ‌خودترکیبی ازمعادلات (۵.۱۷) و (۶.۱۷) است، واضح است که معادلهٔ (۶.۱۷) نیزصادق است.

معادلات (۶۲.۱۷) و (۷۲.۱۷) نشان دهندهٔ عمومیترین جوابی نیستندکه ازیك ψی مفروض می‌توان به‌دست‌آورد. جواب دیگری را باقراردادن

$$\mathbf{B}'=\frac{1}{c}\mathbf{r}\times\nabla\psi \qquad (۷۳.۱۷)$$

وبه‌دست‌آوردن میدان الکتریکی ازمعادلهٔ (۶.۱۷)

$$\mathbf{E}'=\frac{ic}{\omega}\nabla\times(\mathbf{r}\times\nabla\psi) \qquad (۷۴.۱۷)$$

می‌توان به‌دست‌آورد. باتوجه به‌ملاحظاتی که دربالا به‌تفصیل بررسی شد معلوم می‌شودکه $\mathbf{E}'$ و $\mathbf{B}'$ مانند $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ جوابی برای معادلات ماکسول‌اند . این جوابها بـا یکدیگر این اختلاف را دارندکه $\mathbf{E}$ درهرنقطه برسطحی کروی که ازآن نقطه می گذرد و مرکزش در

مبدأ مختصات است، مماس است ؛ از طرف دیگر، $\mathbf{B}'$ نیز همین خاصیت را دارد . این واقعیت موجب شده است که گاهی جوابهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ را الکتریکی عرضی (TE) بنامند و $\mathbf{E}'$ و $\mathbf{B}'$ را مغناطیسی عرضی (TM)؛ منظور ازعرضی این است که این میدانها برامتداد شعاعی عمودند.

در صفحات قبل حل معادلهٔ برداری هلمهولتز تبدیل شد به حل معادلهٔ نرده‌ای هلمهولتز در مختصات کروی این عمل باروش جداسازی متغیرها که از مسائل پتانسیل (فصل ۳) باآن آشنایی داریم، انجام‌پذیر است. درمختصات کروی، معادلهٔ نرده‌ای هلمهولتز عبارت است از

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+\kappa^2\psi=0 \qquad (۷۵.۱۷)$$

که در آن $\kappa^2=(\omega/c)^2$ وفرض می کنیم ψ به‌شکل زیراست

$$\psi=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \qquad (۷۶.۱۷)$$

اگر ψ را باشکل فرض شدهٔ بالا درمعادلهٔ (۷۵.۱۷) قراردهیم ومعادله را بر ψ تقسیم ودر $r^2\sin^2\theta$ ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{1}{R}\sin^2\theta\frac{d}{dr}r^2\frac{dR}{dr}+\frac{1}{\Theta}\sin\theta\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+\kappa^2r^2\sin^2\theta=0 \qquad (۷۷.۱۷)$$

جملهٔ سوم فقط به ϕ بستگی دارد واین تنها جمله‌ای است که به ϕ بستگی‌دارد. نتیجتاً این جمله باید یك عدد ثابت باشد که این عدد ثابت را به‌صورت $-m^2$ انتخاب می کنیم. به‌عبارت دیگر

$$\frac{d^2\Phi_m}{d\phi^2}+m^2\Phi_m=0 \qquad (۷۸.۱۷)$$

که در آن شاخص m نشان می‌دهد که Φ به m بستگی دارد. بااستفاده از معادلهٔ (۷۸.۱۷) می‌توان معادلهٔ (۷۷.۱۷) را به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}r^2\frac{dR}{dr}+\kappa^2r^2+\frac{1}{\Theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}-\frac{m^2}{\sin^2\theta}=0 \qquad (۷۹.۱۷)$$

دوجملهٔ اول فقط به r و دوجملهٔ آخر فقط به θ بستگی دارند. بنابراین مجموع دو جملهٔ

آخر باید مساوی یك عدد ثابت باشدکه آن را به‌صورت $-l(l+1)$ انتخاب می‌کنیم. البته مجموع دوجملهٔ اول باید $l(l+1)$ باشد. بنابراین دومعادلهٔ زیرنتیجه می‌شوند

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{d\Theta_{lm}}{d\theta}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta_{lm}=0 \qquad (۸۰.۱۷)$$

و

$$\frac{d}{dr}r^2\frac{dR_l}{dr}-[l(l+1)-\kappa^2r^2]R_l=0 \qquad (۸۱.۱۷)$$

جوابهای معادلهٔ (۷۸.۱۷) مشهورند

$$\Phi_m=e^{\mp im\phi} \qquad (۸۲.۱۷)$$

جوابهای معادلهٔ (۸۰.۱۷) زیاد مشهور نیستند ولی تعدادی از آنها را در فصل ۳ دیدیم. درآنجا جوابهای مربوط به $m=0$ را بررسی کردیم. این جوابها[1]، چند جمله‌ایهای لژاندر $P_l(\cos\theta)$ هستند. جوابهای (۸۰.۱۷) برای مقادیر دلخواه m که مساوی یا کوچکتر از l باشند، چند جمله‌ایهای وابستهٔ لژاندر نامیده می‌شوند. این چند جمله‌ایها را می‌توان بامعادلهٔ زیر تعریف کرد

$$P_l^m(u)=(1-u^2)^{m/2}\frac{d^m}{du^m}P_l(u) \qquad (۸۳.۱۷)$$

که درآن $u=\cos\theta$ است. واضح است که $P_l^0(u)=P_l(u)$ که همان چند جمله‌ایهای معمولی لژاندراست. به‌ازای $m\neq 0$ این توابع درجدول ۱.۱۷ داده شده‌اند.

سرانجام معادلهٔ (۸۱.۱۷) را باید بررسی کرد. در این معادله می‌توانیم متغیر r را به $\xi=\kappa r$ تغییردهیم ودرنتیجه این معادله به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d}{d\xi}R_l-[l(l+1)-\xi^2]R_l=0 \qquad (۸۴.۱۷)$$

باقرار دادن $R_l=\xi^{-1/2}Z_l$ درمعادلهٔ بالا، این معادله به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\xi^2\frac{d^2Z_l}{d\xi^2}+\xi\frac{dZ_l}{d\xi}-\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)^2-\xi^2\right]Z_l=0 \qquad (۸۵.۱۷)$$

---

۱. در فصل ۳ این توابع را به‌صورت $P_l(\theta)$ نوشتیم. ولی چون چند جمله‌ایهای لژاندر، چند جمله‌ایهایی از $\cos\theta$ هستند، معمولا آنها را به‌صورت $P_l(\cos\theta)$ می‌نویسیم. در این فصل و فصلهای بعد این روش را دنبال خواهیم کرد.

جدول ۱۰۱۷ چند جمله‌ایهای وابستهٔ لژاندر، $P_l^m(u)$، که در آن $u=\cos\theta$

علامت	تابع
$P_0(u)$	1
$P_1(u)$	$u=\cos\theta$
$P_1^1(u)$	$(1-u^2)^{1/2}=\sin\theta$
$P_2(u)$	$\frac{1}{2}(3u^2-1)=\frac{1}{4}(3\cos 2\theta+1)$
$P_2^1(u)$	$3u(1-u^2)^{1/2}=\frac{3}{2}\sin 2\theta$
$P_2^2(u)$	$3(1-u^2)=\frac{3}{2}(1-\cos 2\theta)$
$P_3(u)$	$\frac{1}{2}(5u^3-3u)$
$P_3^1(u)$	$\frac{3}{2}(1-u^2)^{1/2}(5u^2-1)$
$P_3^2(u)$	$15u(1-u^2)$
$P_3^3(u)$	$15(1-u^2)^{3/2}$

این معادله که برای ریاضی‌فیزیکدانها خیلی آشناست، به‌معادلهٔ بسل مشهور است. جوابهای این معادله نیز مشهورند و به‌طور وسیع مورد بررسی قرار گرفته و در واقع جدولبندی شده‌اند. جوابهای متداول این معادله با $J_{l+1/2}(\kappa r)$ و $N_{l+1/2}(\kappa r)$ نشان داده‌می‌شوند و به‌ترتیب تابع بسل و تابع نویمن ازدرجهٔ $l+1/2$ نامیده می‌شوند. برای‌معادلهٔ موج بسیارمناسب است که توابع بسل کروی را بامعادلات زیر تعریف کنیم

$$j_l(\kappa r)=\sqrt{\pi/2\kappa r}\,J_{l+1/2}(\kappa r),\quad n_l(\kappa r)=\sqrt{\pi/2\kappa r}\,N_{l+1/2}(\kappa r)\qquad(۸۶\cdot۱۷)$$

ازاین توابع به‌نوبهٔ خود توابع زیر به‌دست می‌آیند

$$h_l^{(1)}(\kappa r)=j_l(\kappa r)+in_l(\kappa r),\qquad h_l^{(2)}=j_l(\kappa r)-in_l(\kappa r) \qquad (۸۷.۱۷)$$

توابع $j_l(\kappa r)$، $n_l(\kappa r)$، $h_l^{(1)}(\kappa r)$ و $h_l^{(2)}(\kappa r)$ همگی جوابهای معادلهٔ شعاعی، یعنی معادلهٔ (۸۱.۱۷) هستند. این توابع به‌ازای $l=0, 1, 2$ در جدول ۲.۱۷ آمده‌اند. توابع h به‌طور اخص برای مسائل تابش مناسب اند زیرا رفتار آنها برای مقادیر بزرگ r به‌صورت زیر است

$$h_1^{(1)}(\kappa r)\xrightarrow[\kappa r\to\infty]{}\frac{(-i)^{l+1}e^{i\kappa r}}{\kappa r}$$

$$h_l^{(2)}(\kappa r)\xrightarrow[\kappa r\to\infty]{}\frac{(i)^{l+1}e^{-i\kappa r}}{\kappa r}$$

وبدین ترتیب به‌امواج کروی خروجی و ورودی منجرمی‌شوند.

یك صورت کلی برای ψ می‌تواند به‌صورت زیر باشد

$$\psi_{lm}=\sqrt{\pi/2\kappa r}\,Z_l(\kappa r)P_l^m(\cos\theta)e^{\pm im\phi} \qquad (۸۸.۱۷)$$

میدانهای برداری مربوط را می‌توان بااستفاده از معادلات (۶۲.۱۷) و (۷۲.۱۷) برای امواج TE و از معادلات (۷۳.۱۷) و (۷۴.۱۷) برای امواج TM، به‌دست آورد. ψ_{10} ساده‌ترین انتخاب جالب برای ψ است، که عبارت است از

$$\psi_{10}=\frac{1}{\kappa r}e^{i\kappa r}\left[1+\frac{i}{\kappa r}\right]\cos\theta \qquad (۸۹.۱۷)$$

شیب ψ_{10} برابراست با

$$\nabla\psi_{10}=\mathbf{a}_r e^{i\kappa r}\left[\frac{i}{r}-\frac{2}{\kappa r^2}-\frac{2i}{\kappa^2 r^3}\right]\cos\theta-\mathbf{a}_\theta e^{i\kappa r}\left[\frac{1}{\kappa r^2}+\frac{i}{\kappa^2 r^3}\right]\sin\theta$$

(۹۰.۱۷)

قسمت مکانی میدان الکتریکی عبارت است از

$$\mathbf{E}=\mathbf{r}\times\nabla\psi_{10}=-\mathbf{a}_\phi E_0 e^{i\kappa r}\left[\frac{1}{\kappa r}+\frac{i}{\kappa^2 r^2}\right]\sin\theta \qquad (۹۱.۱۷)$$

جدول ۲۰۱۷ توابع بسل کروی وتوابع نویمن

نوع	تابع
$j_0(\rho)$	$(1/\rho)\sin\rho$
$n_0(\rho)$	$-(1/\rho)\cos\rho$
$h_0^{(1)}(\rho)$	$-(i/\rho)e^{i\rho}$
$h_0^{(2)}(\rho)$	$(i/\rho)e^{-i\rho}$
$j_1(\rho)$	$(1/\rho^2)\sin\rho-(1/\rho)\cos\rho$
$n_1(\rho)$	$-(1/\rho)\sin\rho-(1/\rho^2)\cos\rho$
$h_1^{(1)}(\rho)$	$-(1/\rho)e^{i\rho}(1+i/\rho)$
$h_1^{(2)}(\rho)$	$-(1/\rho)e^{-i\rho}(1-i/\rho)$
$j_2(\rho)$	$\left[\frac{3}{\rho^3}-\frac{1}{\rho}\right]\sin\rho-\frac{3}{\rho^2}\cos\rho$
$n_2(\rho)$	$-\frac{3}{\rho^2}\sin\rho-\left[\frac{3}{\rho^3}-\frac{1}{\rho}\right]\cos\rho$
$h_2^{(1)}(\rho)$	$(i/\rho)e^{i\rho}\left(1+\frac{3i}{\rho}-\frac{3}{\rho^2}\right)$
$h_2^{(2)}(\rho)$	$-(i/\rho)e^{-i\rho}\left(1-\frac{3i}{\rho}-\frac{3}{\rho^2}\right)$

که در آن E_0 را بدین علت معرفی کرده‌ایم که معادله از لحاظ بعد صحیح باشد. سطوح فاز ثابت، $\kappa r=\text{const.}$، سطوحی کروی‌اند. (ولی سطوح دامنه ثابت کروی نیستند.) وابستگی فضایی میدان مغناطیسی با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\mathbf{B} = -i\frac{1}{\omega}\nabla\times\mathbf{E}$$

$$= i\frac{1}{\omega}E_0 e^{i\kappa r}\left[\frac{1}{\kappa r^2}+\frac{i}{\kappa^2 r^3}\right] 2\cos\theta\,\mathbf{a}_r$$

$$-i\frac{1}{\omega}E_0 e^{i\kappa r}\left[\frac{i}{r}-\frac{1}{\kappa r^2}-\frac{i}{\kappa^2 r^3}\right]\sin\theta\,\mathbf{a}_\theta \qquad (۹۲.۱۷)$$

همانطور که بعداً خواهیم دید، اینها درست میدانهایی هستند که یك دوقطبی مغناطیسی تابش کننده ایجاد می‌کند. جالب توجه است که تنها آن قسمتهایی از $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ که با $1/r$ متناسب‌اند در تابش خالص دخالت می‌کنند. از بقیهٔ جملات، جملاتی در بردار پوئین‌تینگ به‌دست می‌آید که سریعتر از $1/r^2$ کاهش می‌یابند و نتیجتاً انتگرال آنها روی سطوح کروی هنگامی که شعاع این سطوح به‌سمت بینهایت میل می‌کند، صفر می‌شود. جوابهای امواج کروی درمطالعهٔ تابش از چشمه‌های کراندار، که‌درفصل ۲۰ آن‌را ازدیدگاه دیگری بررسی خواهیم کرد، کاربرد دارند.

۶.۱۷ خلاصهٔ مطالب

جوابهای موج عرضی معادلات ماکسول به‌ساده‌ترین نحو برحسب امواج تخت بیان‌می‌شوند

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}e^{-i(\omega t-\kappa\cdot r)}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{B}}e^{-i(\omega t-\kappa\cdot r)}$$

این جوابها، مادامی که $\vec{\kappa}\cdot\hat{\mathbf{E}}=0$ باشد، برای هرفرکانس ω و هردامنهٔ $\hat{\mathbf{E}}$ وجود دارند. اندازهٔ $\vec{\kappa}$ از رابطهٔ پاشندگی عرضی تعیین می‌شود، هر چند که جهت آن دلخواه است. بردار $\vec{\kappa}$ (قسمت حقیقی) جهت انتشار وطول موج $(\lambda = 2\pi/\kappa)$ رامشخص می‌کند. میدان مغناطیسی موج‌را سایر کمیتها تعیین می‌کنند.

۱. درخلأ رابطهٔ پاشندگی عبارت است از

$$\kappa = \omega/c$$

که‌درآن $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ سرعت‌نوراست. بردارهای $\vec{\kappa}$، $\mathbf{E}$، $\mathbf{B}$ یك‌مجموعهٔ متعامدراستگرد را تشکیل می‌دهند. اندازهٔ $\mathbf{B}$ درهرلحظه از زمان عبارت است از

$$B = E/c$$

اگر دومؤلفهٔ $\mathbf{E}$ (در صفحهٔ عمود بر $\vec{\kappa}$) همفاز باشند، قطبش خطی است؛ اگر غیر همفاز باشند قطبش بیضوی است. رابطهٔ بین اندازهٔ بردار پوئین‌تینگ وچگالی انرژی u عبارت است از

$$S = cu$$

وجهت $\mathbf{S}$ درامتداد $\vec{\kappa}$ است.

۲. دریك محیط دی‌الکتریك خطی (نارسانا وغیر مغناطیسی)، تمام نتایج بالا معتبر است مشروط برآنکه c/n را به جای c بگذاریم در چنین محیطی ضریب شکست n بـا ثابت دی‌الکتریك K به‌صورت زیر مربوط می‌شود

$$n = \sqrt{K}$$

(دریك محیط مغناطیسی خطی داریم، $n = \sqrt{KK_m}$، ولی‌این تعمیم کاربرد چندانی‌ندارد.)

۳. دریك محیط رسانا تمام نتایج بالا به‌طور صوری معتبرند مشروط برآنکه به جای K از ثابت دی‌الکتریك مختلط $\hat{K}$ استفاده شودکه

$$\hat{K} = K + ig/\varepsilon_0\omega = K_r + iK_i$$

پیامد این‌امر آن است‌که ضریب شکست

$$\hat{n} = n + ik$$

و بردار انتشار

$$\hat{\vec{\kappa}} = \vec{\kappa}_r + i\vec{\kappa}_i$$

نیز هردو مختلط‌اند. موج تضعیف می‌شود

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\hat{\mathbf{E}}e^{-\kappa_i \cdot r})e^{-i(\omega t - \kappa_r \cdot r)}$$

درساده‌ترین حالت، $\kappa_i = k\omega/c$، $\kappa_r = n\omega/c$؛ ولی‌به‌طور کلی‌تمام روابط‌فیزیکی بند(۱) پیچیده‌تر می‌شوند.

۴. به‌طور کلی

$$\hat{K} = \hat{n}^2$$

رابطهٔ بین ثابتهای اپتیکی حقیقی وثابتهای دی‌الکتریك حقیقی عبارت‌اند از

$$K_r = n^2 - k^2 \quad \text{و} \quad K_i = 2nk$$

ومعکوس این روابط را نیز می‌توان به‌طور صریح نوشت. نتیجه پیچیده است، مگر آنکه موارد حدی خاصی کاربرد داشته باشند، که معمولا دارند.

۵. برای رساناها طول تضعیف

$$\delta = c/\omega k = \frac{n}{k}\frac{\lambda}{2\pi}$$

که عمق پوسته نیز نامیده می‌شود، مهم است. می‌توان انتظار داشت که تقریب زیر

$$n \cong k \cong \sqrt{g/2\varepsilon_0\omega}$$

لااقل برای رسانای نسبتاً خوب، در فرکانسهای پایینتر از گسترهٔ فروسرخ، معتبر باشد، به‌طوری که

$$\delta \cong \sqrt{2/\mu_0\omega g}$$

دراینجا برای g می‌توان رسانندگی dc را به‌کاربرد.

۶. غیر از امواج تخت، جالبترین مجموعهٔ جوابهای موج برداری عرضی امواج کروی است. این امواج بسیار پیچیده‌ترند، ولی درمسائل تابش کاربرد دارند.

مسائل

۱.۱۷ اگر $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}e^{i\vec{\kappa}\cdot\mathbf{r}}$ باشد که درآن $\mathbf{A}$ ثابت است، نشان دهید

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = i\vec{\kappa} \cdot \mathbf{F}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = i\vec{\kappa} \times \mathbf{F}$$

۲.۱۷ نشان دهید برای موج تخت درخلأ داریم

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\Omega$$

این مقاومت را مقاومت ظاهری خلأ می‌نامند.

۳.۱۷ ω، $\vec{\kappa}$، و دامنهٔ Eی دوموج تخت مفروض یکسان‌اند، ولی قطبش دایره‌ای آنها عکس یکدیگر است (چپ و راست). نشان دهید که از برهمنهی این دوموج، موجی با قطبش خطی ودامنهٔ $2E$ به‌دست می‌آید.

۴.۱۷ به‌ازای $E_s = 2E_p$ با $\phi = 30°$ و با $\phi = 60°$ شکلی مانند شکل ۱.۱۷ رسم کنید.

۵.۱۷ زمین تقریباً $1300\,\mathrm{W/m^2}$ انرژی تابشی از خورشید دریافت می‌کند. بافرض آنکه این انرژی به‌صورت موج تکفامی باقطبش تخت است وبافرض فرود عمودی، اندازهٔ بردارهای میدان الکتریکی ومغناطیسی خورشید را محاسبه کنید.

۶.۱۷ فرض کنید $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ بردارهای مختلطی هستند. کمیت $\mathrm{Re}\,\mathbf{A} \cdot \mathrm{Re}\,\mathbf{B}$ را محاسبه و با $\mathrm{Re}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ مقایسه کنید. نشان دهید که $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ ایجاب نمی‌کند که $\mathrm{Re}\mathbf{A} \cdot \mathrm{Re}\,\mathbf{B} = 0$ باشد.

۷.۱۷ دو موج تخت را درخلأ درنظر بگیرید که ω، $\vec{\kappa}$، وجهت قطبش $\mathbf{p}$ی یکسانی دارند ولی دامنه‌ها وفازهای آنها متفاوت است: E_1، 0 و E_2، ϕ. میانگین زمانی بردار پوئین‌تینگ $\bar{\mathbf{S}}$ مربوط به‌برهمنهی این دوموج را محاسبه کنید. به‌اثر تداخل ناشی ازاختلاف فاز ϕ توجه کنید. چنانچه جهتهای قطبش دوموج بریکدیگر عمود بود، این اثررخ نمی‌داد.

۸.۱۷ یك موج ایستا را درخلأ درنظر بگیرید که ازبرهمنهی دو موج بافرکانس، دامنه، و قطبش خطی یکسان، ولی باجهت انتشار $\vec{\kappa}$ی مخالف تشکیل شده است. بردار پوئین‌تینگ $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ دوموج برهم‌نهاده را محاسبه کنید. (توجه کنید که مبدأ دلخواه است.) مقدار $\bar{\mathbf{S}}$ چقدر است؟

۹.۱۷ برای موجی تخت درمحیطی رسانا، داریم

$$\mathbf{B} = \frac{\hat{n}}{c}\mathbf{u} \times \mathbf{E}$$

فرض کنید $\mathbf{E}$ قطبش بیضوی دارد و $\hat{\mathbf{E}} = E_p e^{i\phi}\mathbf{p} + E_s\mathbf{s}$. ثابت کنید در هر لحظه اززمان

$$\mathrm{Re}\,\mathbf{E} \cdot \mathrm{Re}\,\mathbf{B} = -\frac{k}{c} E_p E_s \sin\phi$$

۱۰.۱۷ برای فلزات درناحیهٔ طیفی فروسرخ، درفرکانس $\omega = g/(-\varepsilon) \approx 10^{14}\,\mathrm{s}^{-1}$، داریم $K_i = -K_r$. برای این حالت ثابتهای اپتیکی n و k را برحسب K_i محاسبه کنید.

۱۱.۱۷ برای دی‌الکتریکی که درفرکانسهای بالاجذب کننده می‌شود، یا برای یك نیمرسانا، داریم $K_i = K_r$. برای این‌مورد n و k را برحسب K_r محاسبه کنید. نسبت طول تضعیف به‌طول موج، δ/λ را پیدا کنید.

۱۲.۱۷ نشان‌دهید که در محیطی تقریباً شفاف باضریب شکست n، طول تضعیف δ به‌صورت زیر به‌رسانندگی g مربوط است

$$\delta = \frac{۲n}{g\sqrt{\mu_\circ/\varepsilon_\circ}}$$

در اینجا $\sqrt{\mu_\circ/\varepsilon_\circ} = ۳۷۷\ \Omega$.

۱۳.۱۷ بردار پوئین‌تینگ که متناسب $E^۲$ است به‌صورت $e^{-\alpha z}$ افت می‌کند. در اینجا $\alpha = ۲/\delta$ ضریب جذب نامیده‌می‌شود. افت‌توان‌را غالباً برحسب دسی‌بل برمتر(dB/m) بیان می‌کنند وبنابرتعریف یك دسی بل ده برابر لگاریتم معمولی نسبت شار انرژی اولیه به‌نهایی درواحد سطح است.

(الف) نشان دهید

$$\text{افت توان} = ۴٫۳۴\alpha\ \text{dB/m}$$

(ب) ازنتیجهٔ مسئلهٔ ۱۲.۱۷، محاسبه‌کنیدکه رسانندگی (اپتیکی نه dc) یك محیط مخابرات امواج نوری چه مقدار باید باشد تاآنکه افت توانی‌کمتراز ۱dB/km حاصل شود. فرض‌کنید ضریب شکست $n = ۱٫۵$.

۱۴.۱۷ فرض کنید ثابت دی‌الکتریك $K = \circ$ است. نشان دهید معادلات ماکسول بدون چگالیهای بارخارجی وجریان، جوابی به‌صورت موج طولی دارندکه در آن $\mathbf{H} = \circ$ و $\vec{\kappa}\times\mathbf{E} = \circ$، ولی $\vec{\kappa}\cdot\mathbf{E} \neq \circ$. نشان دهید یك چگالی بار قطبشی به‌مقدار $\rho_P = i\kappa\varepsilon_\circ E$ وجود خواهد داشت. (معادلهٔ $K(\kappa, \omega) = \circ$، را رابطهٔ پاشندگی طولی می‌نامند.)

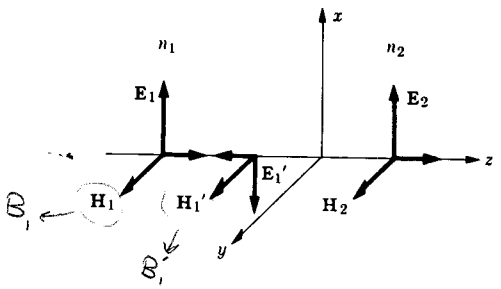
۱۸

امواج در ناحیه‌های مرزدار

اکنون می‌خواهیم ازجوابهای معادلات ماکسول کـه در فصل قبل به‌دست آمد، برای حل مسائلی که ازنظرعملی موردتوجه‌اند، استفاده کنیم. دو ردهٔ عمومی ازمسائل رامطالعه خواهیم کرد: مسائل بامقادیرمرزی، وتابش ازتوزیعهای جریان وبارالکتریکی مشخص. درردهٔاول، جوابهای معادلهٔ موج همگن را طوری ترکیب می‌کنیم که در شرایط مرزی مناسب صدق کنند. در ردهٔ دوم، جوابهای معادلهٔ موج ناهمگن باچشمه‌های مشخص مورد لزوم است و شرایط مرزی تا حدود زیادی نادیده گرفته می‌شوند، به‌جای آن مطالبی ازاین قبیل مد نظر خواهندبود که امواج‌خروجی داریم‌ومیدانها درفواصل‌زیادبه‌نسبت $1/r$ تضعیف‌می‌شوند. مسائل ردهٔ اول موضوع این فصل است.

۱.۱۸ انعکاس و شکست درمرز دومحیط نارسانا. فرود عمودی

امواج الکترومغناطیسی درحال انتشار درمواد معمولا ازمرز بین‌ماده و محیطی دیگر (مثلا هوا یا خلأ) وارد ماده می‌شوند. بررسی این مسئله مستلزم کاربرد شرایط مرزیی است که درفصل ۱۶ به‌دست آوریم. این بررسی‌را باساده‌ترین مورد ممکن آغازمی کنیم: موج تختی که به‌طورعمود بریك فصل مشترك دی‌الکتریك فرود می‌آید. تجربه به‌مامی گوید که موج فرودی بایك موج منعکس شده ویك موج انتقال یافته همراه خواهد بود؛ خواهیم دید که تنها درصورت حضور این دو موج است که شرایط مرزی برآورده می‌شوند. هرسه موج مقیدند که در روابط بین $\vec{\kappa}$، $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ که دربخش ۱.۱۷ به‌دست آوردیم، صدق کنند. این‌وضع درشکل ۱.۱۸ توصیف شده است.



شکل ۱۰۱۸ انعکاس وانتقال درفرود عمودی.

دراین شکل $\mathbf{E}_1$، $\mathbf{H}_1$ توصیف کنندهٔ موج فرودی است که درجهت مثبت z حرکت می‌کند، $\mathbf{E}_1'$، $\mathbf{H}_1'$ توصیف کنندهٔ موج منعکس‌شده‌ای است که درجهت منفی z حرکت می‌کند، و $\mathbf{E}_2$، $\mathbf{H}_2$ توصیف کنندهٔ موج منتقل شده است. فصل مشترك منطبق برصفحهٔ xy در $z=0$ در نظر گرفته می‌شود کـه محیط ۱ در طرف چپ آن و محیط ۲ درطرف راست آن است. میدانهای الکتریکی، که درابتدا فرض‌می‌شود درجهت x به‌طورخطی‌قطبی شده‌اندباروابط زیر توصیف می‌شوند

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= \mathbf{i}E_{1x}e^{i(\kappa_1 z-\omega t)}\\ \mathbf{E}_1' &= -\mathbf{i}E_{1x}'\,e^{-i(\kappa_1 z+\omega t)}\\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{i}E_{2x}e^{i(\kappa_2 z-\omega t)}\end{aligned} \tag{۱۰۱۸}$$

که در آن

$$\kappa_1 = n_1\frac{\omega}{c} \quad \text{و} \quad \kappa_2 = n_2\frac{\omega}{c} \tag{۲۰۱۸}$$

از معادلهٔ (۲۲.۱۷) ، یعنی

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{n}{c}\,\mathbf{u}\times\hat{\mathbf{E}}$$

که در آن برای این مورد برای امواج فرودی و انتقـالی $\mathbf{u}=\mathbf{k}$ و برای موج انعکاسی $\mathbf{u}=-\mathbf{k}$، میدانهای مغناطیسی وابسته به‌میدانهـای الکتریکی در معادلهٔ (۱۰۱۸) به‌دست می‌آیند. نتیجه عبارت است از

$$\begin{aligned}c\mathbf{B}_1 &= \mathbf{j}n_1E_{1x}e^{i(\kappa_1 z-\omega t)}\\ c\mathbf{B}_1' &= \mathbf{j}n_1E_{1x}'\,e^{-i(\kappa_1 z+\omega t)}\\ c\mathbf{B}_2 &= \mathbf{j}n_2E_{2x}e^{i(\kappa_2 z-\omega t)}\end{aligned} \tag{۳۰۱۸}$$

واضح است که امواج انعکاسی و انتقالی چنانچه بخواهیم شرایط مرزی در $z=0$ برای تمام مقادیر t صادق باشند، باید با موج فرودی فرکانس یکسانی ، ω، داشته باشند. از آنجا که مؤلفه‌های عمودی میدانها صفرند، تنها لازم است که شرایط مرزی برروی مؤلفهٔ مماسی میدانها درنظر گرفته شوند. میدان E باید در مرز پیوسته باشد. بنابراین از معادلهٔ (۱.۱۸) در $z=0$ داریم

$$E_{1x}-E'_{1x}=E_{2x} \qquad (۴.۱۸)$$

میدان H نیز باید پیوسته باشد، وبرای محیطهای غیر مغناطیسی ($\mu_1=\mu_2=\mu_0$) میدان B نیز باید پیوسته باشد

$$n_1(E_{1x}+E'_{1x})=n_2E_{2x} \qquad (۵.۱۸)$$

معادلات (۴.۱۸) و (۵.۱۸) را می‌توان توأماً برای E'_{1x} و E_{2x} برحسب دامنهٔ داده‌شدهٔ موج فرودی E_{1x}، حل کرد

$$E'_{1x}=\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1}E_{1x} \quad \text{و} \quad E_{2x}=\frac{2n_1}{n_2+n_1}E_{1x}$$

نسبتهای دامنه‌های امواج انعکاسی وانتقالی به‌دامنهٔ فرودی کلاً توسط ضریبهای شکست دو محیط تعیین می‌شوند. این‌دامنه‌ها به‌نوبهٔ خود ازطریق معادلهٔ (۳.۱۸) دامنه‌های میدانهای مغناطیسی‌را تعیین می‌کنند.

ازآنجا که تنها نسبتها تعیین می‌شوند، مناسب است که علامتهای خاصی برای آنها معرفی کنیم

$$\frac{E'_{1x}}{E_{1x}}=r_{12}, \qquad \frac{E_{2x}}{E_{1x}}=t_{12} \qquad (۶.۱۸)$$

r_{12} و t_{12} به‌ترتیب ، ضریب فرنل انعکاس و ضریب فرنل انتقال برای فرود عمودی نامیده می‌شوند. شاخصها نشان می‌دهند که موج ازمحیط ۱ به‌محیط ۲ فرود می‌آید. بدین ترتیب جواب‌را به‌صورت زیرمی‌نویسیم

$$r_{12}=\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1} \quad \text{و} \quad t_{12}=\frac{2n_1}{n_1+n_2} \qquad (۷.۱۸)$$

چیزی‌راکه معمولا می‌توان‌اندازه‌گیری کرد میدانهای الکتریکی انعکاسی وانتقالی‌نیست، بلکه میانگین شارهای انرژی انعکاسی و انتقالی در واحد سطح است. این کمیتها بابردار

پوئین‌تینگ داده‌می‌شوند و به‌شدت موج‌معروف‌اند. بنا برمعادلات (۳۴.۱۷) و(۳۶.۱۷)، درهریك ازدومحیط داریم

$$\bar{S}=\frac{1}{2}\frac{n}{\mu_0 c}(E_p^2+E_s^2) \qquad (8.18)$$

دراینجا بنابرانتخاب‌ما، $E_p=E_x$ و $E_s=0$. حال ضریب انعکاس، R_n، وضریب انتقال، T_n، را برای فرود عمودی برحسب نسبت شدتها تعریف می‌کنیم

$$\frac{\bar{S}'_1}{\bar{S}_1}=R_n \quad \text{و} \quad \frac{\bar{S}_2}{\bar{S}_1}=T_n \qquad (9.18)$$

پس، بنا برمعادلات (۷.۱۸) و (۶.۱۸) داریم

$$R_n=r_{12}^2 \quad \text{و} \quad T_n=\frac{n_2}{n_1}t_{12}^2 \qquad (10.18)$$

باتوجه به‌آنکه ضرایب فرنل بامعادلهٔ (۷.۱۸) داده می‌شوند، ضرایب انعکاس و انتقال درمعادلهٔ (۱۰.۱۸)، برای هردومحیطی ازمحیطهای نارسانا، دررابطهٔ زیر صدق می‌کنند

$$R_n+T_n=1 \qquad (11.18)$$

این رابطه بیان بقای انرژی درفصل مشترك است.

تا کنون‌فقط تابش قطبیدهٔ خطی‌را بررسی می‌کردیم. اگرموج فرودی به‌طوربیضوی قطبیده باشد، باید علاوه برمؤلفه‌های x درهریك از محیطها مؤلفه‌های عمود $\hat{E}_y=\hat{E}_s$ را نیزدرنظربگیریم. این‌مؤلفه‌ها نیزدرمعادله‌هایی مانند (۶.۱۸)، باهمان ضرایب فرنل،صدق می‌کنند. سه‌مؤلفهٔ y همگی بایکدیگر همفازند، هرچندکه‌باسه مؤلفهٔ x اختلاف فازدارند. ازمعادلهٔ (۸.۱۸) می‌بینیم که شدتهای وابسته به‌مؤلفه‌های x (مؤلفه‌های p) و مؤلفه‌های y (s) بدون توجه به‌اختلاف فاز بین این مؤلفه‌ها، یعنی‌بدون توجه به‌درجهٔ قطبش بیضوی، به‌طورساده باهم جمع می‌شوند

$$\bar{S}=\bar{S}_p+\bar{S}_s \qquad (12.18)$$

بنابراین، معادله‌های (۹.۱۸) تا (۱۱.۱۸) به‌طورجداگانه برای هریك ازمؤلفه‌های‌قطبش وهمچنین برای شدتهای‌کل معتبرند.

برای‌فصل‌مشترك هوا ـ شیشه‌که درآن $n_2=1.5$ و $n_1=1$ است، ضریبهای‌انعکاس وانتقال عبارت‌اند از

$$R_n = ۰٫۰۴ \quad و \quad T_n = ۰٫۹۶$$

بنابراین، همان‌طور که از معادلهٔ (۱۱.۱۸) انتظار می‌رفت، تمام انرژی فرودی یامنعکس می‌شود یا انتقال می‌یابد ـ هیچ جـایی برای ذخیرهٔ انرژی در فصل مشترك وجود ندارد. حقیقت جالب توجه دیگری ازبررسی معادلهٔ (۶.۱۸) به‌دست می‌آید و آن این است که اگر $n_۲$ بزرگتر از $n_۱$ باشد، نسبت اول‌مثبت است. این‌مطلب دقیقاً آن بیان آشنایی‌ازمبحث نوراست‌که می‌گوید در انعکاس از یك محیط «غلیظ» تغییرفازی به‌اندازهٔ π رادیان وجود دارد ولی درانعکاس ازیك محیط «رقیق» هیچ تغییرفازی وجود ندارد.

به‌عنوان دومین مثال، درآب برای نورمرئی $n_۲ = ۱٫۳۳$، پس $R_n = ۰٫۰۲$است. ولی برای‌فرکانسهای‌کمتر از $\omega \approx ۱۰^{۱۱}\mathrm{s}^{-۱}$، $K_۲ = ۸۱$ است. برای‌فرکانسهای‌رادیویی، آب خالص تقریباً مانند یك‌نارساناست (حالت ۱دربخش ۴.۱۷) ولذا $n_۲ = \sqrt{K_۲} = ۹$، پس

$$R_n = ۰٫۶۴$$

همانطور که دربخش ۴.۱۸ خواهیم دید برای آب دریا که رسانای بهتری است، ضریب انعکاس ازاین‌هم بسیاربزرگتراست.

۲.۱۸ انعکاس و شکست در مرز دومحیط نارسانا. فرود مایل

یك حالت عمومیترازحالتی‌که دربخش قبل بحث شد، عبارت‌است ازانعکاس امواج تخت ازفصل مشترك مسطح یك عایق درحالتی‌که این امواج به‌طور مایل فرود بیایند. بامطالعهٔ این حالت به‌سه‌قانون مشهورنورمی‌رسیم: قانون اسنل، قانون انعکاس، وقانون بروستر[1] که حاکم بر قطبش ناشی ازانعکاس است.

وضعیت مورد بحث، درشکل ۲.۱۸ توصیف شده است ومربوط به‌حالتی است که بردارهای انتشار $\vec{k}_۱$، $\vec{k}'_۱$، و $\vec{k}_۲$ هم‌صفحه‌اند وهمگی درصفحهٔ xz قراردارند و بردارهای میدان الکتریکی $\mathbf{E}_۱$، $\mathbf{E}'_۱$ و $\mathbf{E}_۲$ نیز در این صفحه قرار گرفته‌اند[2]. میدانهای الکتریکی امواج فرودی، انعکاسی وانتقالی بامعادلات زیرداده می‌شوند

---

1. Brewster

۲. ثابت خواهیم‌کردکه بردارهای انتشارهمواره‌هم‌صفحه‌اند. کلیترین بردارمیدان الکتریکی را می‌توان به‌یك مؤلفه درصفحهٔ xz (صفحهٔ فرود) و یك مؤلفهٔ عمود براین صفحه تجزیه‌کرد. انعکاس وانتقال این دومؤلفه ازقوانین متفاوتی تبعیت می‌کنند. انتخابی‌که دربالا شده است، برای به‌دست‌آوردن قانون بروستر است.

$$\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{E}}_{1p} e^{i(\kappa_1 \cdot r - \omega t)}$$

$$\mathbf{E}'_1 = \hat{\mathbf{E}}'_{1p} e^{i(\kappa'_1 \cdot r - \omega t)} \qquad (۱۳\cdot۱۸)$$

$$\mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{E}}_{2p} e^{i(\kappa_2 \cdot r - \omega t)}$$

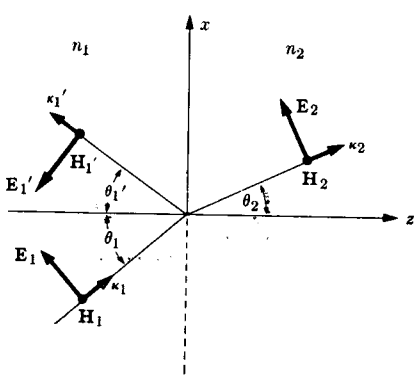
که‌در آن $\hat{\mathbf{E}}_{1p} = \hat{E}_{1p}\mathbf{p}_1$، $\hat{\mathbf{E}}'_{1p} = \hat{E}'_{1p}\mathbf{p}'_1$، $\hat{\mathbf{E}}_{2p} = \hat{E}_{2p}\mathbf{p}_2$. بردارهای انتشارعبارت‌اند از $\vec{\kappa}_1 = \kappa_1 \mathbf{u}_1$ و مانند آن، وبرداریکهٔ عمود برمرز $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ است . صفحه‌ای که با $\vec{\kappa}_1 \times \mathbf{n}$ و $\mathbf{n}$ تعریف می‌شود صفحهٔ فرود نامیده می‌شود، و بردارعمود برآن صفحه است. مؤلفهٔ p قطبش چنان انتخاب شده است که به‌موازات صفحهٔ فرود قرارداشته باشد (نماد p برای «موازی»). درحالت کلی یك مؤلفهٔ s (که درشکل ۲.۱۸ نشان داده نشده است) نیزبرای دامنهٔ هریك‌ازامواج وجود دارد $\hat{\mathbf{E}}_{1s} = \hat{E}_{1s}\mathbf{s}_1$، $\hat{\mathbf{E}}'_{1s} = \hat{E}'_{1s}\mathbf{s}'_1$، $\hat{\mathbf{E}}_{2s} = \hat{E}_{2s}\mathbf{s}_2$. برای هریك ازسه موج داریم $\mathbf{s} = \mathbf{u} \times \mathbf{p}$ و $\mathbf{p} = \mathbf{s} \times \mathbf{u}$، بنابراین

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}'_1 = \mathbf{s}_2 = \mathbf{j} \qquad (۱۴\cdot۱۸)$$

مؤلفه‌های s برصفحهٔ فرودعمودند (نماد s برای‌لغت آلمانی «senkrecht» به‌معنای‌عمود است).

برای تابش مایل ازمعادلهٔ (۱۳.۱۸) روشن است که نه‌تنها امواج‌انعکاسی وانتقالی باید باموج فرودی فرکانس یکسانی داشته‌باشند، بلکه درتمام نقاط روی مرزفازها نیزباید بایکدیگر مطابقت داشته باشند، یعنی

$$\vec{\kappa}'_1 \cdot \mathbf{r} = \vec{\kappa}_1 \cdot \mathbf{r} = \vec{\kappa}_2 \cdot \mathbf{r} \quad \text{روی مرز} \qquad (۱۵\cdot۱۸)$$



شکل ۲.۱۸ انعکاس وشکست ـ فرود مایل. صفحهٔ xz صفحهٔ فرود است. بردارهای $\mathbf{H}_1$، $\mathbf{H}'_1$ و $\mathbf{H}_2$ به‌طرف خارج ازصفحهٔ کتاب امتداد دارند.

این شرط سه پیامد جالب دارد که اکنون آنها را به‌صورت جبری به‌دست می‌آوریم. ما نیاز به‌یك عبارت جبری داریم که گویای این حقیقت باشد که معادلهٔ (۱۵.۱۸) تنها درروی مرز $z=0$ یا در $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$ صادق است. اتحاد برداری زیر را درنظر بگیرید

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{r})=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}-\mathbf{r}$$

در روی سطح، همه‌جا $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$ و درنتیجه

$$\mathbf{r}=-\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{r})$$

پس ما این عبارت را درمعادلهٔ (۱۵.۱۸) می‌گذاریم

$$\vec{\kappa}_1\cdot\mathbf{r}=-\vec{\kappa}_1\cdot\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{r})=-(\vec{\kappa}_1\times\mathbf{n})\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{r})$$

و به‌طورمشابه برای سایرطرفهای معادلهٔ (۱۵.۱۸). چون $\mathbf{r}$ یك‌بردار اختیاری درروی مرز است، معادلهٔ (۱۵.۱۸) تنها درصورتی معتبر است که روابط زیر برقرار باشند

$$\vec{\kappa}_1'\times\mathbf{n}=\vec{\kappa}_1\times\mathbf{n}=\vec{\kappa}_2\times\mathbf{n} \qquad (۱۶.۱۸)$$

این رابطه ایجاب می‌کند که اولا $\vec{\kappa}_1'$ درصفحهٔ فرود واقع باشد، زیرا بردار عمود برصفحهٔ تعریف شده با $\vec{\kappa}_1'$ و $\mathbf{n}$ با بردار عمود برصفحهٔ فرود موازی است؛ و به‌طور مشابه κ_2 در صفحهٔ فرود واقع است. یعنی، $\mathbf{n}$، $\vec{\kappa}_1$، $\vec{\kappa}_1'$، و $\vec{\kappa}_2$ همگی هم‌صفحه‌اند. پس معادلهٔ(۱۴.۱۸) موجه است، و $\mathbf{s}=\mathbf{j}$ بردار یکهٔ عمود برصفحهٔ فرود است. حال زاویهٔ فرود θ_1 با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\vec{\kappa}_1\cdot\mathbf{n}=\kappa_1\cos\theta_1$$

وهمچنین

$$\vec{\kappa}_1'\cdot\mathbf{n}=-\kappa_1'\cos\theta_1'$$

$$\vec{\kappa}_2\cdot\mathbf{n}=\kappa_2\cos\theta_2 \qquad (۱۷.۱۸)$$

بنابراین

$$|\vec{\kappa}_1\times\mathbf{n}|=\kappa_1\sin\theta_1 \quad \text{و} \quad |\vec{\kappa}_1'\times\mathbf{n}|=\kappa_1'\sin\theta_1'$$

$$|\vec{\kappa}_2\times\mathbf{n}|=\kappa_2\sin\theta_2$$

ومعادلهٔ (۱۶.۱۸) ایجاب می‌کند که

$$\kappa_1'\sin\theta_1'=\kappa_1\sin\theta_1=\kappa_2\sin\theta_2$$

بزرگی κ'_1 مربوط به‌موج انعکاسی برابر با بزرگی κ_1 مربوط به‌موج فرودی است، زیرا این دوموج بافرکانس یکسان درمحیطی یکسان انتشار می‌یابند. بدین ترتیب

$$\theta'_1 = \theta_1 \qquad (۱۸.۱۸)$$

یعنی، زاویهٔ انعکاس برابر است بازاویهٔ فرود. به‌کمك معادلات‌پاشندگی (۲.۱۸)،از تساوی دوم در معادلهٔ قبل نتیجه می‌شود

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \qquad (۱۹.۱۸)$$

این رابطه به قانون اسنل معروف است. توجه‌کنید که هیچ یك ازاین سه نتیجه به‌شرایط مرزی برای میدانهای الکتریکی ومغناطیسی که ازمعادلات ماکسول به‌دست‌آمدند، بستگی ندارند. دونتیجهٔ اول برای هرنوع موجی صادق است؛ نتیجهٔ سوم، قانون اسنل، به‌رابطهٔ خاص پاشندگی برای امواج بستگی دارد.

برای به‌دست‌آوردن ضرایب فرنل که نسبت دامنه‌های میدان را برای فرود مایل می‌دهند، ما به‌شرایط مرزی‌روی‌مؤلفه‌های مماسی میدانهانیازداریم. (شرایط‌روی‌مؤلفه‌های عمودی خود به خود برآورده خواهند شد.) برای آنکه مؤلفهٔ مماسی دامنهٔ میدان E را به‌صورت برداری بیان‌کنیم، اتحاد برداری زیررا درنظر می‌گیریم

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\hat{\mathbf{E}}) = (\mathbf{n}\,.\,\hat{\mathbf{E}})\mathbf{n} - \hat{\mathbf{E}}$$

یا

$$\hat{\mathbf{E}} = (\mathbf{n}\,.\,\hat{\mathbf{E}})\mathbf{n} - \mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\hat{\mathbf{E}})$$

ازآنجاکه $(\mathbf{n}\,.\,\hat{\mathbf{E}})\mathbf{n}$ همان مؤلفهٔ عمودی $\hat{\mathbf{E}}$ است، جملهٔ باقیمانده، $-\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\hat{\mathbf{E}})$، بایدمؤلفهٔ مماسی $\hat{\mathbf{E}}$ باشد. پس شرط مرزی روی میدانهای E، پس ازحذف توابع‌نمایی [به‌دلیل معادلهٔ (۱۵.۱۸)] وحذف $\mathbf{n}\times$، تبدیل می‌شود به

$$\mathbf{n}\times(\hat{\mathbf{E}}_1 + \hat{\mathbf{E}}'_1) = \mathbf{n}\times\hat{\mathbf{E}}_2 \qquad (۲۰.۱۸)$$

چون فرض می‌کنیم محیطها غیرمغناطیسی‌اند، لازم است مؤلفهٔ مماسی میدان B نیزپیوسته باشد

$$\mathbf{n}\times(\hat{\mathbf{B}}_1 + \hat{\mathbf{B}}'_1) = \mathbf{n}\times\hat{\mathbf{B}}_2 \qquad (۲۱.۱۸)$$

دومعادلهٔ ماکسول که‌شامل تاوند درهرمحیط $\hat{\mathbf{E}}$ و $\hat{\mathbf{B}}$ رابه‌یکدیگرمربوط می‌کنند. بااستفاده از روابط پاشندگی، معادلهٔ (۲.۱۸)، این معادله‌ها به‌صورت معادلهٔ (۲۲.۱۷) درمی‌آیند

$$\hat{\mathbf{B}}=\frac{n}{c}\mathbf{u}\times\hat{\mathbf{E}} \qquad (۲۲.۱۸)$$

یا به‌طورمعادل به‌صورت زیردرمی‌آیند

$$\hat{\mathbf{E}}=-\frac{c}{n}\mathbf{u}\times\hat{\mathbf{B}} \qquad (۲۳.۱۸)$$

اگر، برای مثال، معادلهٔ (۲۲.۱۸) را درمعادلهٔ (۲۱.۱۸) بگذاریم، خواهیم داشت

$$n_1\mathbf{n}\times(\mathbf{u}_1\times\hat{\mathbf{E}}_1+\mathbf{u}'_1\times\hat{\mathbf{E}}'_1)=n_2\mathbf{n}\times(\mathbf{u}_2\times\hat{\mathbf{E}}_2) \qquad (۲۴.۱۸)$$

معادله‌های (۲۰.۱۸) و (۲۴.۱۸) یك جفت معادلهٔ برداری هستند که باید برای $\hat{\mathbf{E}}'_1$ و $\hat{\mathbf{E}}_2$ برحسب $\hat{\mathbf{E}}_1$ حل شوند. ضربهای سه گانهٔ برداری‌را می‌توانیم بسط بدهیم

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{u}_1\times\hat{\mathbf{E}}_1)=(\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{E}}_1)\mathbf{u}_1-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_1)\hat{\mathbf{E}}_1$$

وبه‌طورمشابه برای سایرضربهای سه‌گانه. برای مؤلفهٔ s، یعنی $\hat{\mathbf{E}}_{1s}$، داریم $\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{E}}_{1s}=0$ ورابطهٔ فوق بسیارساده می‌شود

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{u}_1\times\hat{\mathbf{E}}_{1s})=-\cos\theta_1\,\hat{\mathbf{E}}_{1s}$$

زیرا بنابرمعادلهٔ (۱۷.۱۸)، $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_1=\cos\theta_1$ است. بنابراین مؤلفهٔ s معادلهٔ (۲۴.۱۸) به‌صورت زیردرمی‌آید

$$n_1(\cos\theta_1\,\hat{\mathbf{E}}_{1s}-\cos\theta'_1\,\hat{\mathbf{E}}'_{1s})=n_2\cos\theta_2\,\hat{\mathbf{E}}_{2s}$$

وچون $\theta'_1=\theta_1$ است، پس

$$n_1\cos\theta_1\,(\hat{\mathbf{E}}_{1s}-\hat{\mathbf{E}}'_{1s})=n_2\cos\theta_2\,\hat{\mathbf{E}}_{2s} \qquad (۲۵.۱۸)$$

ازضرب برداری $\mathbf{n}$ درمعادلهٔ (۲۰.۱۸) برای مؤلفهٔ s، نتیجه می‌شود

$$\hat{\mathbf{E}}_{1s}+\hat{\mathbf{E}}'_{1s}=\hat{\mathbf{E}}_{2s} \qquad (۲۶.۱۸)$$

برای مؤلفهٔ p نمی‌توان معادلات را این چنین ساده کرد، ولذا این امر موجب می‌شود که دومؤلفهٔ قطبش را به‌طور جداگانه بررسی کنیم. ازقرار دادن معادلهٔ (۲۳.۱۸) در معادلهٔ (۲۰.۱۸) ساده سازی متناظری برای قطبش p به‌دست خواهدآمد.

۱. قطبش s. دستگاه معادله‌های (۲۵.۱۸) و (۲۶.۱۸) را می‌توان به سادگی حل کرد. نتیجه عبارت است از

$$\hat{\mathbf{E}}'_{1s} = r_{12s}\hat{\mathbf{E}}_{1s}, \quad \hat{\mathbf{E}}_{2s} = t_{12s}\hat{\mathbf{E}}_{1s} \tag{۲۷.۱۸}$$

که در آن

$$r_{12s} = \frac{n_1 \cos\theta_1 - n_2 \cos\theta_2}{n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_2} \tag{۲۸.۱۸}$$

$$t_{12s} = \frac{2n_1 \cos\theta_1}{n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_2} \tag{۲۹.۱۸}$$

۲. قطبش p. هنگامی که بردارهای E همگی در صفحهٔ فرود قرار داشته باشند، معادلهٔ (۲۲.۱۸) نشان می‌دهد که بردارهای Bی متناظر آنها همگی درامتداد جهت s قرار دارند. انتخاب بردارهای E درشکل ۲.۱۸ به‌گونه‌ای انجام شد که تمام بردارهای Bی متناظر رو به‌جهت $+\mathbf{j}$ باشند. این بار معادلهٔ (۲۳.۱۸) را در معادلهٔ (۲۰.۱۸) قرار می‌دهیم. چون $\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{B}}_{1s} = 0 = \mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{B}}'_{1s} = \mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{B}}_{2s}$، نتیجه به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$\frac{1}{n_1}\cos\theta_1\,(\hat{\mathbf{B}}_{1s} - \hat{\mathbf{B}}'_{1s}) = \frac{1}{n_2}\cos\theta_2\hat{\mathbf{B}}_{2s} \tag{۳۰.۱۸}$$

همچنین، معادلهٔ (۲۱.۱۸) به‌صورت زیرساده می‌شود

$$\hat{\mathbf{B}}_{1s} + \hat{\mathbf{B}}'_{1s} = \hat{\mathbf{B}}_{2s} \tag{۳۱.۱۸}$$

جواب معادله‌های (۳۰.۱۸) و (۳۱.۱۸) را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$\hat{\mathbf{B}}'_{1s} = r_{12p}\hat{\mathbf{B}}_{1s}, \quad \hat{\mathbf{B}}_{2s} = \frac{n_2}{n_1}t_{12p}\hat{\mathbf{B}}_{1s} \tag{۳۲.۱۸}$$

که در آن

$$r_{12p} = \frac{n_2 \cos\theta_1 - n_1 \cos\theta_2}{n_2 \cos\theta_1 + n_1 \cos\theta_2} \tag{۳۳.۱۸}$$

$$t_{12p} = \frac{2n_1 \cos\theta_1}{n_2 \cos\theta_1 + n_1 \cos\theta_2} \tag{۳۴.۱۸}$$

معادلهٔ (۳۲.۱۸) را بدان علت به‌طریق بالا نوشتیم تاهنگامی که اندازهٔ بردارهای E را

ازمعادلهٔ (۲۳.۱۸) محاسبه می‌کنیم نتیجهٔ زیررا به‌دست آوریم

$$\hat{E}'_{1p} = r_{12p}\hat{E}_{1p}, \quad \hat{E}_{2p} = t_{12p}\hat{E}_{1p} \qquad (۳۵.۱۸)$$

حال بااین ضرایب فرنل جواب‌کاملی برای مسئلهٔ مقدارمرزی داریم، زیرا هرموج فرودی باقطبشی دلخواه را می‌توان به‌مؤلفه‌های p و s تجزیه کرد. باید تأکیدکنیم که واژه‌های قطبش p و s همیشه به‌جهت بردار E مـربوط می‌شوند.[1] برای فرود عمودی $\theta_1 = 0$ و همچنین، بنا برقانون‌اسنل، $\theta_2 = 0$. بنابراین‌معادله‌های (۳۳.۱۸) تا(۳۵.۱۸) به‌معادله‌های (۶.۱۸) و (۷.۱۸) برای‌فرود عمودی تبدیل‌می‌شوند.معادلهٔ (۲۹.۱۸) بامعادلهٔ (۳۴.۱۸) یکی می‌شود، ولی از معـادلهٔ (۲۸.۱۸) می‌بینیم که برای فرود عمودی $r_{12s} = -r_{12p}$ است. برای فرود عمودی صفحهٔ فرود تعریف نشده است، و بنابراین نتیجهٔ فیزیکی بـاید مستقل ازجهت قطبش باشد. اختلاف تنها بدین علت بروزمی‌کندکه درشکل ۲.۱۸ هنگامی که θ_1 صفرشود $\mathbf{E}_{1p}$ و $\mathbf{E}'_{1p}$ درجهات عکس‌یکدیگرخواهندبود، درصورتی‌که $\mathbf{E}_{1s}$ و $\mathbf{E}'_{1s}$ هم‌جهت خواهند بود. برای قطبش s ضرایب فرنل روابطی هستند بین بردارهـای Eی معادلهٔ (۲۷.۱۸)؛ ولی برای قطبش p این ضرایب تنها روابطی هستند بین بزرگی آنهادر معادلهٔ (۳۵.۱۸)، چون بردارهای E برای‌فرود مایل هریك درجهت متفاوتی قراردارند. بااستفاده ازقانون اسنل می‌توانیم بنویسیم

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1-(n_1/n_2)^2\sin^2\theta_1}$$

وبدین‌وسیله ضرایب فرنل‌را کلاً برحسب پارامترهای ماده، n_1، n_2 و زاویهٔ فرودمفروض، θ_1، بیان‌کنیم.

ازضرایب فرنل روابط بین شدتها را نیز می‌توان به‌دست‌آورد. البته هر یك از دو جهت قطبش باید جداگانه بررسی شود. ضریب انعکاس و ضریب انتقـال را به‌صورت میانگین زمانی مؤلفهٔ بردارهای پوئین‌تینگ مربوطه کـه عمود برفصل مشترك است، نسبت به‌مؤلفهٔ عمود بردار پوئین‌تینگ فرودی، تعریف می‌کنیم.[2]

---

۱. درکتابهای اپتیك قدیمی، باواژهٔ «صفحهٔ قطبش» نیز برخوردمی‌کنیم، که‌طبق تعریف‌صفحهٔ حاوی بردار B وبردار انتشاراست، ما ازبه‌کاربردن این واژه کلاً احترازخواهیم کرد.

۲. درمحیط۱ داریم $\mathbf{S} = (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}'_1) \times (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}'_1)$. می‌توان نشان دادکه درمحیطی نارسانا (تنها موردی‌که بررسی خواهیم‌کرد)

$$\mathbf{n} \cdot \overline{(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}'_1 + \mathbf{E}'_1 \times \mathbf{H}_1)} = 0$$

به‌طوری‌که $\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{S}} = \mathbf{n} \cdot (\bar{\mathbf{S}}_1 + \bar{\mathbf{S}}'_1)$ وجدا ساختن بردارهای پوئین‌تینگ بامعناست.

$$R_s=\frac{\mathbf{n}\cdot\bar{\mathbf{S}}'_{1s}}{\mathbf{n}\cdot\bar{\mathbf{S}}_{1s}},\qquad T_s=\frac{\mathbf{n}\cdot\bar{\mathbf{S}}_{2s}}{\mathbf{n}\cdot\bar{\mathbf{S}}_{1s}}\tag{۳۶.۱۸}$$

$$R_p=\frac{\mathbf{n}\cdot\bar{\mathbf{S}}_{1p}'}{\mathbf{n}\cdot\bar{\mathbf{S}}_{1p}},\qquad T_p=\frac{\mathbf{n}\cdot\bar{\mathbf{S}}_{2p}}{\mathbf{n}\cdot\bar{\mathbf{S}}_{1p}}\tag{۳۷.۱۸}$$

برحسب ضرایب فرنل داریم[1]

$$R_s=r_{12s}^2,\qquad T_s=\frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}t_{12s}^2,\tag{۳۸.۱۸}$$

$$R_p=r_{12p}^2,\qquad T_p=\frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}t_{12p}^2\tag{۳۹.۱۸}$$

بنابراین اتحادهای

$$R_s+T_s=1,\qquad R_p+T_p=1\tag{۴۰.۱۸}$$

برای مورد فرود مایل برسطح یك جسم نارسانا نیز معتبرند.

دربعضی موارد بهتر است که ضرایب فرنل‌را به‌صورت زیر بنویسیم

$$r_{12s}=\frac{\sin(\theta_2-\theta_1)}{\sin(\theta_2+\theta_1)}\tag{۴۱.۱۸}$$

$$t_{12s}=\frac{2\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_2+\theta_1)}\tag{۴۲.۱۸}$$

$$r_{12p}=\frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)}\tag{۴۳.۱۸}$$

$$t_{12p}=\frac{2\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)}\tag{۴۴.۱۸}$$

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی و قانون اسنل به‌آسانی می‌توان دیدکه صورتهای بالا باصورتهای قبلی آنها معادل است.

---

۱. گاهی ضرایب انعکاس وانتقال را به‌صورت دیگری تعریف می‌کنندکه عبارت است ازنسبت بزرگیهای بردارهای پوئین‌تینگ به‌جای‌مؤلفه‌های عمودی آنها. این‌نحوهٔ تعریف در R تفاوتی ایجاد نمی‌کند، ولی در T ضریب $(\cos\theta_2/\cos\theta_1)$ را حذف می‌کند.

۳.۱۸ زاویهٔ بروستر. زاویهٔ حد

اکنون با استفاده از ضرایب فرنل که در بخش قبل به‌دست آوردیم، بستگی R و T را به‌زاویهٔ فرود برای مورد دومحیط نارسانا بررسی می‌کنیم. درهر حالت $T=1-R$، پس تنها دربارهٔ R بحث خواهیم کرد. قبلا مورد فرود عمودی $\theta_1=0$ را بررسی کرده‌ایم: قطبش اهمیتی ندارد وهرچه اختلاف نسبت n_2/n_1 بـا یك بیشتر باشد، R بزرگتر است. برای فرود خراشان، یعنی $\theta_1=\pi/2$، داریم $\cos\theta_1=0$ وبه‌آسانی از معادله‌های (۲۸.۱۸) و (۳۳.۱۸) می‌توان دید که $R_s=1=R_p$. برای فرود تقریبـاً خراشان ضریب انعکاس بزرگ است؛ دلیل آنکه دریاچه‌ای آرام همانند یك آینه است همین بزرگ بودن ضریب انعکاس است. درزوایای فرود بینابین دوزاویهٔ فرود وجود داردکه به‌ویژه جالب هستند.

آیا موردی می‌تواند وجود داشته باشدکه ضریب انعکاس آن صفر باشد؟ معادله‌های (۴۱.۱۸) و (۴۳.۱۸) نشان می‌دهند که چنین موردی می‌تواند وجود داشته بـاشد. اگر $\theta_1=\theta_2$ باشد، $\tan(\theta_1-\theta_2)=0=\sin(\theta_2-\theta_1)$ وموج انعـکاسی وجود نخواهد داشت. متأسفانه، این وضعیت تنها درصورتی رخ‌می‌دهدکه $n_1=n_2$، یعنی تنهادرصورتی که دو محیط از نظراپتیکی تمیزناپذیر باشند. ازطرف دیگر، اگر $\theta_1+\theta_2=\pi/2$ باشد $\tan(\theta_1+\theta_2)$ بینهایت خواهد بود و دامنهٔ موج انعکاسی قطبش p مجدداً صفرمی‌شود. دراین‌حالت‌محیطها ازنظراپتیکی تمیزپذیرند. چون موج‌قطبش s، که $\mathbf{E}$ی آن عمودبرصفحهٔ فرود است، به‌طور جزئی منعکس می‌شود، نور غیر قطبیده‌ای که زاویهٔ فرودآن در شرط $\theta_1+\theta_2=\pi/2$ صدق کند دراثرانعکاس قطبیده خواهدشد. به‌کمك قانون اسنل، یعنی

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2$$

می‌توانیم مقدار θ_1 را تعیین کنیم. چنانچه $\theta_2=\pi/2-\theta_1$ را در قانون اسنل به‌کـار ببریم، داریم

$$n_1\sin\theta_B=n_2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_B\right)=n_2\cos\theta_B$$

یا

$$\tan\theta_B=\frac{n_2}{n_1} \qquad (۴۵.۱۸)$$

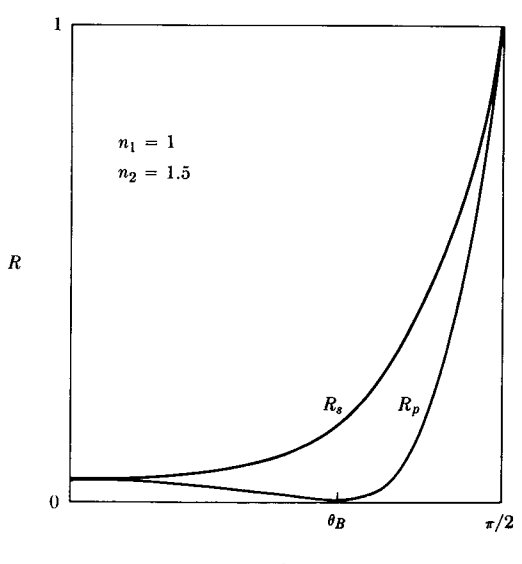
کمیت θ_B به‌زاویهٔ بروستر مشهوراست؛ رابطهٔ بین این کمیت و ضرایب شکست که با معادلهٔ (۴۵.۱۸) داده می‌شود، به‌قانون بروسترمشهور است. قطبیده‌کردن نور در زاویهٔ بروستر روشی عملی برای تولید تابش قطبیده است، هرچندکه متداولترین روش نیست. در شکل ۳.۱۸ مقادیر R_s و R_p برای تمام مقـادیر θ_1، به‌ازای $n_1=1$ و $n_2=1.5$، مثلاً برای فصل مشترك هوا ـ شیشه،رسم شده است. زاویهٔ بروستربرای این حالت $56°$ است. اینکه

ضریب انعکاس برای نورقطبیدهٔ p به‌طور کلی کوچکتر است سودمندی عینکهـای آفتابی پولاروید را توجیه می‌کند. چون اکثرسطوح منعکس‌کننده درفضای بازافقی هستند، صفحهٔ فرود بیشترنورهای خیره‌کنندهٔ انعکاسی که به‌چشم مـا می‌رسند عمودی است. چون فرض می‌شودکه معمولا در حال ایستاده هستیم (یا قدما راست است) شیشه‌های عینکهای قطبنده (پولاروید) را طوری قرار می‌دهندکه نوری راکه بردار Eی‌آن درصفحهٔ عمودی است عبور دهد ومؤلفهٔ s راکه شدیدتر منعکس می‌شود حذف کند.

علاوه برفرود خراشان حالت دیگری نیز وجود دارد که برای آن $R_s = R_p = ۱$ است. از معادله‌های (۲۸.۱۸) و (۳۳.۱۸) دیده می‌شودکه برای $\theta_۲ = \pi/۲$ نیز همانند حالت $\theta_۱ = \pi/۲$ انعکاس‌کامل رخ می‌دهد. زاویهٔ فرودیی‌که برای آن $\theta_۲ = \pi/۲$ است زاویهٔ حد، $\theta_۱ = \theta_c$، نامیده می‌شود. از قانون اسنل

$$\sin \theta_c = \frac{n_۲}{n_۱} \qquad (۴۶.۱۸)$$

چنانچه $n_۲ < n_۱$ باشد، زاویهٔحد یك‌زاویهٔ حقیقی است، ولی به‌هرجهت برای‌هرزوجی ازمواد شفاف این امر برای فرود بریکی ازدوسمت فصل مشترك معتبر خواهد بود. بنـابر



شکل ۳.۱۸ ضریب انعکاس برای قطبشهای s و p درفصل مشترك هوا-شیشه. زاویهٔ بروستر $\theta_B = ۵۶°$ است.

معادله‌های (۴۵.۱۸) و (۴۶.۱۸)

$$\tan\theta_B = \sin\theta_c$$

چون مقدار $\tan\theta$ حدی ندارد، همواره یك زاویهٔ بروستر حقیقی وجـود دارد؛ به‌علاوه چون $\tan\theta > \sin\theta$ است نتیجه می‌شود که $\theta_B < \theta_c$. حالت فصل مشترك شیشه ـ هوا که برای آن $n_1 = 1.5$ و $n_2 = 1$ است درشکل ۴.۱۸ رسم شده‌است. برای حالت‌فرود ازسمت شیشه، $\theta_c = 42°$ و $\theta_B = 34°$. برای زوایای فرودی بزرگتر از زاویهٔ حد، $\theta_1 > \theta_c$، ازقانون اسنل نتیجه می‌شود

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 > \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_c$$

وچون $\sin\theta_c = n_2/n_1$ است، لازم است که

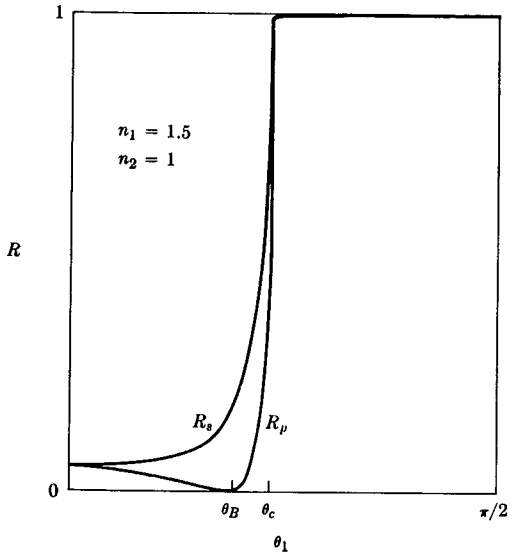
$$\sin\theta_2 > 1 \qquad (۴۷.۱۸)$$

یك چنین زاویهٔ واقعیی وجود ندارد، ولی این پیچیدگی جدی نیست واین مشکل دربخش بعدرفع خواهدشد، درنتیجه برای‌تمام مقادیر $\theta_1 \geqslant \theta_c$ داریم $R_s = R_p = 1$. این‌انعکاس کامل را انعکاس داخلی کلی می‌نامند. اگر به‌داخل یك منشور یا آکواریوم نگاه کنیم یـا هنگامی که درزیرآب شنا می‌کنیم به‌بالا نگـاه کنیم، انعکاس داخلی کلی به‌آسانی مشاهده می‌شود. این پدیده‌کاربرد بسیارمهمی درلوله‌های نوری دارد. لولهٔ نوری الیاف شیشه‌ای ظریفی است که با آن باریکه‌ای از نور انتقال می‌یابد، مانند موجبر برای میکروموجها. (مسئلهٔ ۴.۱۸).

مثالهای ما دراین بخش شامل فرکانسهایی درگسترهٔ نور مرئی، و مواد شفافی بوده است که برای‌آنها $n = \sqrt{K}$. برای مواد غیرقطبی همین روابط درتمام فرکانسهای پایینتر (ولی نه درفرابنفش و گستره‌های فرکانسهای بالاتر) معتبرند. این روابط برای موادقطبیی که‌ازمولکولهای قطبی (مثلاآب) یاازیونها (مثلا سنگ‌نمك) ساخته‌شده‌اند وازنظراپتیکی شفاف‌اند درتمام فرکانسهای پایینتر معتبر نخواهند بود، زیرا K به‌فرکانس بستگی دارد.

۴.۱۸ ضرایب فرنل مختلط. انعکاس از یك سطح رسانا

پیچیدگیی که‌دربخش قبل برای زوایای‌بزرگتراززاویهٔ‌حدبه‌وجودآمد،یعنی $\sin\theta_2 > 1$ موجب می‌شود که ضرایب فرنل مختلط را بررسی کنیم . چون $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$ است، هنگـامی که $\sin\theta$ مقداری حقیقی وبیش از ۱ داشته باشد مقدار $\cos\theta$ موهومی



شکل ۴.۱۸ ضریب انعکاس برای قطبشهای s و p درفصل مشترك شیشه ـ هوا. زاویهٔ بروستر $\theta_B = ۳۴°$ و زاویهٔ حد $\theta_c = ۴۲°$ است.

محض است، بنـابراین، $\cos\hat{\theta}_۲$ در ضرایب فرنل موهومی واین ضرایب مختلط خواهند بود. اگرمحیط ۲ رسانا باشد نیزاین ضرایب مختلط خواهند بود، زیرا درآن صورت $\hat{n}_۲$ مختلط است. قانون اسنل

$$n_۱ \sin\theta_۱ = \hat{n}_۲ \sin\hat{\theta}_۲$$

نشان می‌دهدکه درآن‌صورت $\sin\hat{\theta}_۲$ نیزباید مختلط باشد. بنابراین، باید بررسی کنیم که آیا روابطی راکه در بخش ۲.۱۸ به‌دست آوردیم برای زوایا و ضرایب فرنل مختلط نیز معتبرند یا خیر. اگرزاویهٔ $\hat{\theta}_۲$ مختلط باشد، به‌هیچ طریقی نمی‌توانیم شکل ۲.۱۸ را رسم کنیم، وبنابراین‌باید درمورد معنای‌هندسی نتایج دقت کنیم. باوجود این، دربه‌دست‌آوردن نتایج دربخش قبل ما به‌وضعیت هندسی شکل ۲.۱۸ متوسل نشدیم. روش مـا کاملا جبری بود، وچون تمام روابط برداری جبری برای کمیتهـای مختلط نیز مانند کمیتهای حقیقی معتبرند پس نتایج به‌طورصوری صحیح‌اند. ما تنها باموارددی سروکار خواهیم داشت که یکی ازدومحیط شفاف است. حال فرض می‌کنیم محیط ۱ شفاف است. بدین‌ترتیب معادلهٔ (۱۶.۱۸) تبدیل می‌شود به

$$\vec{\kappa}_۱ \times \mathbf{n} = \vec{\hat{\kappa}}_۲ \times \mathbf{n} \qquad (۴۸.۱۸)$$

پس صفحهٔ فرود یك بردار یکهٔ عمودی دارد (j) که حقیقی است و بردار انتشار مختلط $\vec{\hat{\kappa}}_2$ درجهت j مؤلفه ندارد

$$\vec{\hat{\kappa}}_2 \cdot \mathbf{j} = 0 \qquad (۴۹.۱۸)$$

هرچندکه فرض بالا محدودکننده است، ولی فرضی است که در موارد عملی معتبر است. زاویهٔ مختلط $\hat{\theta}_2$ به‌طورجبری بامعادلهٔ زیر تعریف می‌شود

$$\vec{\hat{\kappa}}_2 \cdot \mathbf{n} = \hat{\kappa}_2 \cos \hat{\theta}_2 \qquad (۵۰.۱۸)$$

آنگاه قانون اسنل به‌صورت زیردرمی‌آید

$$n_1 \sin \theta_1 = \hat{n}_2 \sin \hat{\theta}_2 \qquad (۵۱.۱۸)$$

که در آن

$$\sin \hat{\theta}_2 = \sqrt{1 - \cos^2 \hat{\theta}_2} \qquad (۵۲.۱۸)$$

تمام عملیات جبری باشرایط مرزی روی میدانهای E و B معتبرند، بنابراین ضرایب فرنل مختلط بازهم بـامعادلات (۲۸.۱۸)، (۲۹.۱۸)، (۳۳.۱۸)، و(۳۴.۱۸) داده می‌شوند، بااین‌تفاوت که دراین‌معادلات $\hat{n}_2$ و $\cos \hat{\theta}_2$ مختلط‌اند. اگراین‌ضرایب مختلط‌را به‌صورت قطبی بنویسیم

$$\hat{r}_{12s} = |\hat{r}_{12s}| e^{i\alpha_s}, \quad \hat{r}_{12p} = |\hat{r}_{12p}| e^{i\alpha_p}, \ldots$$

ونتیجه را درمعادلات (۲۷.۱۸) و (۳۵.۱۸) به‌کاربریم

$$\hat{\mathbf{E}}'_{1s} = |\hat{r}_{12s}| e^{i\alpha_s} \hat{\mathbf{E}}_{1s}, \quad \hat{\mathbf{E}}'_{1p} = |\hat{r}_{12p}| e^{i\alpha_p} \hat{\mathbf{E}}_{1p}, \ldots \qquad (۵۳.۱۸)$$

روشن خواهد بودکه میدانهای Eی انعکاسی وانتقالی نسبت به‌میدان Eی فرودی انتقال فاز خواهند داشت. ضرایب انعکاس حقیقی که برای شدتها با معادله‌هـای (۳۶.۱۸) و (۳۷.۱۸) تعریف شدند، به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$R_s = |\hat{r}_{12s}|^2, \quad R_p = |\hat{r}_{12p}|^2 \qquad (۵۴.۱۸)$$

زیرا فازها برروی متوسط زمانی‌بردارهای پوئین‌تینگ که‌بامعادلهٔ (۸.۱۸) داده‌می‌شوند، تأثیری ندارند. برای به‌دست‌آوردن ضرایب انتقال صحیح ازکمیتهای مختلط خیلی باید دقت‌کرد، ولی مابااین ضرایب کاری نداریم چون دراکثرموارد نمی‌توان‌آنها را درمحیط رسانا اندازه‌گیری کرد. هنگامی که یکی از محیطها رسانـاست، به‌جـای $R + T = 1$

اتحادهای زیرمفیدند

$$\hat{r}_{12} = -\hat{r}_{21} \qquad (۵۵.۱۸)$$

$$\hat{r}_{12}^2 + \hat{t}_{12}\hat{t}_{21} = 1 \qquad (۵۶.۱۸)$$

این اتحادها هم برای قطبش s و هم برای قطبش p معتبرند.

برای فرود عمود از هوا برروی محیطی رسانا، با $n_1 = 1$، $\hat{n}_2 = n + ik$، ضریب انعکاس عبارت است از

$$R_n = \frac{(n-1)^2 + k^2}{(n+1)^2 + k^2} \qquad (۵۷.۱۸)$$

از آنجاکه تمامی انرژی انتقالی درمحیط رسانای نیمه نامتناهی مآلا جذب خواهد شد، ما ضریب جذب را به‌صورت زیرتعریف می کنیم

$$A = 1 - R \qquad (۵۸.۱۸)$$

برای فرود عمود

$$A_n = \frac{4n}{(n+1)^2 + k^2} \qquad (۵۹.۱۸)$$

اگر $n \ll 1$، یا $n \gg 1$، یا $k \gg 1$ باشد، ضریب جـذب کوچك است (ضریب انعکاس بزرگ‌است). هنگامی که $n \cong k \gg 1$ (حالت۳ دربخش ۴.۱۷ با $K_i = g/\varepsilon_0\omega \gg 1$)، داریم

$$A_n \cong \frac{2}{k} \ll 1 \qquad (۶۰.۱۸)$$

دراین‌حالت $k \cong \sqrt{K_i/2} = \sqrt{g/2\varepsilon_0\omega}$، بنابراین

$$A_n \cong 2\sqrt{2\varepsilon_0\omega/g} \qquad (۶۱.۱۸)$$

رابطهٔ بالا را رابطهٔ هاگن - روبنز[1] می‌نامند. این رابطه باید برای رساناهای نسبتاً خوب

---

1. Hagen - Rubens

درناحیهٔ میکروموج وزیر آن، وبرای فلزات تاناحیهٔ فروسرخ، معتبر باشد. دراینجا g را می‌توان رسانندگی dc گرفت. باهمان‌مقادیری که درمحاسبهٔ‌عمق پوسته‌ازمعادلهٔ(۵۶.۱۷) استفاده شد، برای نقره در $f = ۱۰^{۱۰}s^{-۱}$ (طول موج ۳ سانتیمتری) خواهیم یافت

$$A_n = ۲\sqrt{۲(۸٫۸۵۴ \times ۱۰^{-۱۲})(۲\pi \times ۱۰^{۱۰})/۳ \times ۱۰^{۷}} = ۳٫۹ \times ۱۰^{-۴}$$

$$R_n = ۰٫۹۹۹۶$$

برای آب دریا، در $f = ۶ \times ۱۰^{۴}s^{-۱}$

$$A_n = ۲۵ \times ۱۰^{-۴}$$

$$R_n = ۰٫۹۹۷۵$$

بزرگ‌بودن‌ضریب انعکاس مسئلهٔ‌اضافی‌دیگری‌را درامرارتباط‌گیری بازیردریاییها به‌وجود می‌آورد. دراین‌مواردضریب جذب بدان‌علت کوچك است که‌عمق پوسته نسبتاً کوچك‌است: ازمعادلهٔ (۴۸.۱۷) و (۶۰.۱۸) داریم

$$A_n = ۴\pi \frac{\delta}{\lambda_۱}$$

که در آن $\lambda_۱$ طول موج در هـواست. برای نقره، در گسترهٔ فرکانس نور مرئی ، داریم $n \cong ۰٫۰۵$, $k \cong ۳$. به‌ازای این مقادیر معـادلهٔ (۶۰.۱۸) معتبر نیست، ولی از معادلهٔ (۵۹.۱۸) نتیجه‌می‌شودکه $R_n \cong ۰٫۹۸$. مقادیرمربوط به‌نیکل، $n \cong ۲$ و $k \cong ۳$، مقادیر معمولیتری برای فلزات‌است؛ بااین‌مقادیرنتیجه می‌شود $R_n \cong ۰٫۵۶$. این فلزات نیزکاملا براق به‌نظرمی آیند، چون چشم تقریباً مشابه یك‌آشکارسازلگاریتمی است. درشکل ۵.۱۸ مقادیرمربوط برای نقره ونیکل برحسب تابعی اززاویهٔ فرود رسم‌شده‌اند. زاویهٔ بروستری که درآن R_p صفرشود وجود ندارد، ولی بازهم R_p حداقلی دارد و همواره از R_s کمتر است. بازهم قطبش دراثرانعکاس تااندازه‌ای رخ‌می‌دهد. معادلات (۵۳.۱۸) نشان‌می‌دهند که $\hat{E}'_{۱s}$ و $\hat{E}'_{۱p}$ یك اختلاف فازنسبی $\alpha_s - \alpha_p$ دارند. بنابراین حتی اگرموج فرودی به‌طور خطی قطبیده باشد، موج انعکاسی می‌تواند درفرود مایل به‌طور بیضوی‌قطبیده‌شود.

موج انتقالی، هرچندکه نمی‌توان آن را مستقیماً مشاهده‌کرد، درمسائلی نظیرآنچه دربخش بعد بررسی شده‌اند مهم است. دامنه وفازآن با $\hat{t}_{۱۲s}$ و $\hat{t}_{۱۲p}$ وبردار انتشار آن با $\vec{k}_۲$ داده‌می‌شودکه درمعادله‌های (۴۸.۱۸) تا (۵۲.۱۸) صدق‌می‌کند. کمیت اخیرصفحات فازثابت وسرعت فاز، وهمچنین صفحات دامنهٔ ثابت وثابت تضعیف‌را تعریف می کند. این نتایج‌را می‌توان بامقایسهٔ دوعبارت معادل زیربرای $\vec{k}_۲$ به‌دست آورد

$$\vec{\hat{\kappa}} = \vec{\kappa}_r + i\vec{\kappa}_i \qquad (۶۲.۱۸)$$

$$\vec{\hat{\kappa}} = \hat{\kappa} \sin \hat{\theta}\mathbf{i} + \hat{\kappa} \cos \hat{\theta}\mathbf{k} \qquad (۶۳.۱۸)$$

(دراین بحث ماشاخص پایین۲را حذف می کنیم.) صورت دوم برای $\hat{\kappa}$ با توجه به‌محدودیت موجود درمعادلهٔ (۴۹.۱۸) توجیه‌می‌شود. این محدودیت همچنین بدین‌معناست که $\vec{\hat{\kappa}} \times \mathbf{n}$ حقیقی است، و ازمعادلهٔ (۶۲.۱۸) داریم

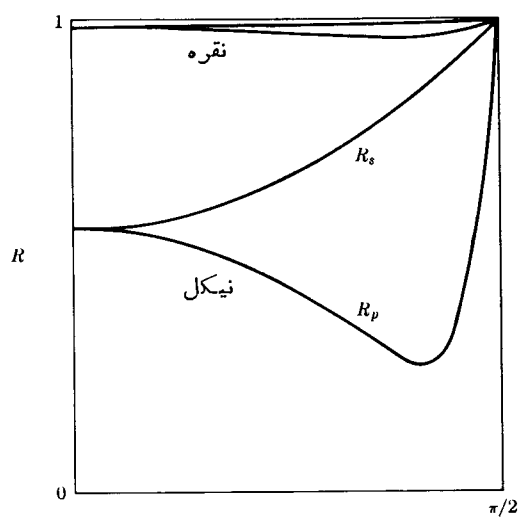
$$\vec{\kappa}_r \times \mathbf{n} = \vec{\kappa}_1 \times \mathbf{n} \qquad (۶۴.۱۸)$$

$$\vec{\kappa}_i \times \mathbf{n} = 0 \qquad (۶۵.۱۸)$$

معادلهٔ (۶۵.۱۸) نشان می‌دهد که $\vec{\kappa}_i$ با $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ موازی است، و معادلهٔ (۶۴.۱۸) عبارت است از

$$\kappa_r \sin \Theta = \kappa_1 \sin \theta_1 \qquad (۶۶.۱۸)$$

که درآن Θ زاویهٔ حقیقی بین $\vec{\kappa}_r$ و $\mathbf{n}$ است. (شکل۶.۱۸).این زاویه را می‌توانیم زاویهٔ



شکل ۵.۱۸ ضریب انعکاس برای‌قطبشهای s و p درفصل مشترك هوا ـ فلز. مقادیر نوعی برای نورمرئی عبـارت‌اند از $n \cong ۰٫۰۵$ و $k \cong ۳$ (برای نقره)؛ و $n \cong ۲$ و $k \cong ۳$ (برای نیکل).

شکست حقیقی بنامیم، زیرا زاویهٔ بین صفحات فازثابت وصفحهٔمرزی است. ازطرف‌دیگر، صفحات دامنهٔ ثابت باصفحهٔ مرزی موازی‌اند، لذا آهنگ تضعیف موج در امتداد مستقیماً عمود در درون‌رسانا ازهرامتداد دیگری تندتراست. معادلهٔ(۶۲.۱۸) رامی‌توانیم به‌صورت زیربازنویسی کنیم

$$\vec{\hat{\kappa}}=\kappa_r \sin\Theta\mathbf{i}+\kappa_r \cos\Theta\mathbf{k}+i\kappa_i\mathbf{k}$$

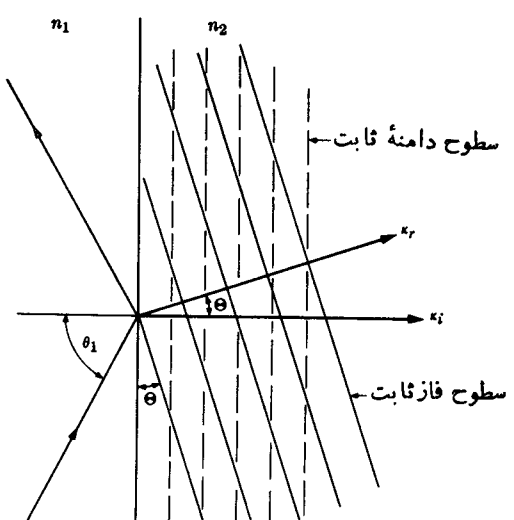
$$=\kappa_1 \sin\theta_1\mathbf{i}+(\kappa_r \cos\Theta+i\kappa_i)\mathbf{k}$$

ازمقایسهٔ مؤلفه‌های معادلهٔ بالا بامؤلفه‌های معادلهٔ (۶۳.۱۸)، خواهیم دید که

$$\kappa_1 \sin\theta_1=\hat{\kappa}\sin\hat{\theta} \qquad (۶۷.۱۸)$$

$$\kappa_r \cos\Theta+i\kappa_i=\hat{\kappa}\cos\hat{\theta} \qquad (۶۸.۱۸)$$

معادلهٔ اول دربالا همـان قانون اسنل است، ولی معادلهٔ دوم، همراه بـا معادلهٔ (۶۶.۱۸)، رابطهٔ κ_r، κ_i و Θ را با n، k، و θ_1 به‌دست می‌دهد، یعنی‌همان‌رابطه‌ای که درجستجوی



شکل ۶.۱۸ شکست به درون یك رسانا. سطوح فاز ثابت برجهت انتشار عمودند و بـا مرز زاویهٔ Θ می‌سازند ، ولی سطوح دامنهٔ ثابت بـا مرز موازی‌اند.

آن بودیم. حال نمادهای p و q را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$\hat{\kappa}\cos\hat{\theta}=\frac{\omega}{c}(p+iq)$$

به‌طوری که

$$\hat{n}\cos\hat{\theta}=p+iq \qquad (۶۹.۱۸)$$

آنگاه ازمعادلهٔ (۶۸.۱۸)، $\kappa_r\cos\Theta=(\omega/c)p$ و بااستفاده ازمعادلهٔ (۶۶.۱۸) به‌دست می‌آوریم

$$\kappa_r=\frac{\omega}{c}\sqrt{p^2+n_1^2\sin^2\theta_1} \qquad (۷۰.۱۸)$$

$$\kappa_i=\frac{\omega}{c}q \qquad (۷۱.۱۸)$$

تنها باقی می‌ماند که مقادیر p و q را بیابیم، که آنها هم از مربع کردن معادلهٔ (۶۹.۱۸) نتیجه می‌شوند

$$p^2-q^2+2ipq=\hat{n}^2(1-\sin^2\hat{\theta})=(n+ik)^2-n_1^2\sin^2\theta_1$$

$$=n^2-k^2-n_1^2\sin^2\theta_1+2ink$$

که‌در اینجا مجدداً ازقانون اسنل، $\hat{n}\sin\hat{\theta}=n_1\sin\theta_1$، استفاده کرده‌ایم. برحسب ثابت دی‌الکتریك $\hat{K}=\hat{n}^2$ داریم

$$p^2-q^2+2ipq=K_r-K_1\sin^2\theta_1+iK_i$$

ازمساوی قراردادن قسمتهای حقیقی وموهومی، خواهیم داشت

$$K_r-K_1\sin^2\theta_1=p^2-q^2$$

$$K_i=2pq$$

این معادلات تقریباً بامعادلات (۵۱.۱۷) برای n و k یکسان‌اند و جوابهای آنها، که بامعادلات (۵۲.۱۷) برای n و k یکسان‌اند بجز آنکه به‌جای K_r داریم $(K_r-K_1\sin^2\theta_1)$، عبارت‌اند از

$$p=\sqrt{\tfrac{1}{2}[(K_r-K_1\sin^2\theta_1)+\sqrt{(K_r-K_1\sin^2\theta_1)^2+K_i^2}]}$$

$$q=\sqrt{\tfrac{1}{2}[-(K_r-K_1\sin^2\theta_1)+\sqrt{(K_r-K_1\sin^2\theta_1)^2+K_i^2}]} \quad (۷۲.۱۸)$$

بامعادلات(۵۲.۱۷) برای n و k یکسان‌اند بجز آنکه به‌جای K_r داریم $(K_r-K_1\sin^2\theta_1)$. بنابراین p و q تعمیمی از n و k هستند که به‌زاویهٔ تابش θ_1 بستگی دارند. هنگامی که $\theta_1=0$ باشد، $p=n$ و $q=k$. طول تضعیف مستقیماً توسط q برطبق معادلهٔ (۷۱.۱۸) داده می‌شود. معادلهٔ (۷۰.۱۸) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\kappa_r=N\frac{\omega}{c} \quad (۷۳.۱۸)$$

که معادله‌ای است برای تعریف ضریب شکست حقیقی $N(\theta_1)$

$$N=\sqrt{p^2+n_1^2\sin^2\theta_1} \quad (۷۴.۱۸)$$

واین تعریف سرعت فازرا به‌صورت c/N به‌دست می‌دهد. بنابرمعادلهٔ (۶۶.۱۸)، N در صورت حقیقی قانون اسنل صدق می‌کند

$$N\sin\Theta=n_1\sin\theta_1 \quad (۷۵.۱۸)$$

$$N\cos\Theta=p \quad (۷۶.۱۸)$$

هریك ازاین دومعادله را می‌توان برای یافتن زاویهٔ حقیقی Θ به‌کار برد. هرچندکه نه N قسمت‌حقیقی $\hat{n}$ است و نه Θ قسمت‌حقیقی $\hat{\theta}$، ولی $N\cos\Theta$ قسمت حقیقی $\hat{n}\cos\hat{\theta}$ است. بدین‌ترتیب‌ماجواب کلی‌رابرای حالت مختلط در دست داریم. این نتایج تعمیمهای نسبتاً ساده‌ای از حالت حقیقی است، وکاربردآن برای هرمسئلهٔ خاصی سرراست است. باوجود این، معادله‌های (۷۲.۱۸) به‌قدری پیچیده‌اند که دربارهٔ انتشار به‌درون محیطی رسانا در فرود مایل به‌طور کلی مطلب چندان بیشتری نمی‌توان گفت، مگربرای حالات بسیارحدی. برای مثال، هنگامی که K_i خیلی بزرگ است، حالتی که به‌فرمول هاگن - روبنز منجر می‌شود، داریم

$$p\cong n\cong q\cong k\gg 1$$

از معادلهٔ (۷۴.۱۸)

$$N\gg 1$$

و از معادلهٔ (۷۵.۱۸)

$$\Theta\cong 0$$

بنابراین زاویهٔ فرود هرچه باشد جهت انتشار تقریباً مستقیماً به‌درون محیط است، هر چند که تضعیف بسیارشدید است؛ سرعت وطول موج بسیار کاهش می‌یابند. عمق پوسته‌ای که برای فرود عمودی تعریف شد تقریباً برای هرزاویهٔ فرودی معتبرخواهد بود.

بابازگشت به‌حالت انعکاس کلی داخلی، می‌توانیم بـاکاربرد این‌نتایج جواب آن مسئله‌را نیزکامل کنیم. دراینجا، $n_2=\sqrt{K_{2r}}$؛ $K_{2i}=0$؛ ولی هنگامی که $\theta_1>\theta_c$ باشد $\cos\hat{\theta}_2$ موهومی است. (دراینجا ما شاخص ۲ را مجدداً حفظ می‌کنیم.)

$$\cos\hat{\theta}_2=\sqrt{1-\sin^2\hat{\theta}_2}=\sqrt{1-(n_1/n_2)^2\sin^2\theta_1}$$

ازآنجا که $\sin\theta_c=n_2/n_1$، داریم

$$\cos\hat{\theta}_2=i\sqrt{(\sin\theta_1/\sin\theta_c)^2-1} \qquad (۷۷.۱۸)$$

ازترکیب معادله‌های (۷۷.۱۸) و (۶۹.۱۸)

$$n_2\cos\hat{\theta}_2=in_2\sqrt{(\sin\theta_1/\sin\theta_c)^2-1}=p+iq$$

بنابراین

$$p=0,\quad q=n_2\sqrt{(\sin\theta_1/\sin\theta_c)^2-1} \qquad (۷۸.۱۸)$$

[معادلهٔ (۷۲.۱۸) نیزهمین‌نتیجه‌را می‌دهد.] باداشتن معادلهٔ (۷۸.۱۸)، ضریب فرنل برای انعکاس قطبش s، معادلهٔ (۲۸.۱۸)، به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\hat{r}_{12s}=\frac{n_1\cos\theta_1-iq}{n_1\cos\theta_1+iq}$$

برای هرمقدار $\theta_1>\theta_c$، صورت این کسرمزدوج مختلط مخرج آن است، بنابراین $\hat{r}_{12s}$ به‌شکل زیراست

$$\hat{r}_{12s}=\frac{z^*}{z},\quad \hat{r}^*_{12s}=\frac{z}{z^*}$$

درنتیجه

$$R_s=|\hat{r}_{12s}|^2=\hat{r}_{12s}\hat{r}^*_{12s}=1$$

به‌طورمشابه ازمعادلهٔ (۳۳.۱۸) روشن است که برای تمـام زوایای $\theta_1>\theta_c$ داریـم $R_p=1$. ما درحالت مختلط T را محاسبه نکردیم، ولی بقای انرژی ایجاب می‌کند که

هنگامی که $R=1$ است $T=0$ باشد. ازطرفی دیگر، ضرایب انتقال فرنل ($\hat{t}_{12}$ها) صفر نیستند؛ درمحیط ۲ میدانهای E و Bی غیرصفر وجود دارند. این تناقض ظاهری را بایافتن $\vec{\kappa}_2$ به‌آسانی می‌توان رفع کرد. با $p=0$ درمعادلهٔ (۷۴.۱۸) داریم

$$N=n_1 \sin\theta_1=n_2(\sin\theta_1/\sin\theta_c) \qquad (۷۹.۱۸)$$

ضریب شکست حقیقی محیط ۲، یعنی N، هنگامی که θ_1 از θ_c تا $\pi/2$ افزایش‌می‌یابد از n_2 تا n_1 تغییرمی‌کند

$$n_2 \leqslant N \leqslant n_1 \qquad (۸۰.۱۸)$$

ازمعادلهٔ (۷۶.۱۸) به‌ازای $p=0$ و $N\neq 0$، برای هرزاویهٔ فرود $\theta_1 \geqslant \theta_c$، داریم

$$\cos\Theta=0 \qquad (۸۱.۱۸)$$

یعنی $\vec{\kappa}_{2r}$ همواره بامرزموازی است، ودر نتیجه انرژی در محیط ۲ عمود برمرز جریان ندارد. ازقبل می‌دانیم که $\vec{\kappa}_{2i}$ برمرزعمود است. ازآنجاکه $q\neq 0$، در این راستا بنابر معادلهٔ (۷۱.۱۸) دامنهٔ موج تضعیف‌می‌شود. طول تضعیف $\delta=1/\kappa_{2i}$ است،ازمعادله‌های (۷۱.۱۸) و (۷۸.۱۸) داریم

$$\delta=\frac{c}{\omega q}=\frac{c}{n_2\omega}\frac{1}{\sqrt{(\sin\theta_1/\sin\theta_c)^2-1}} \qquad (۸۲.۱۸)$$

باقراردادن n_2 به‌جای N ازمعادلهٔ (۷۹.۱۸) و واردکردن‌طول‌موج، $\lambda_2/2\pi=c/N\omega$، به‌دست می‌آوریم

$$\delta=\frac{\lambda_2}{2\pi\sqrt{1-(\sin\theta_c/\sin\theta_1)^2}}$$

هنگامی که θ_1 به θ_c میل کند، طول‌تضعیف به بینهایت‌میل می‌کند (ولی البته درآن‌صورت فرض ما درمورد وضعیت هندسی نیمه بینهایت ایده‌آل غیرواقعی می‌شود). هنگامی که θ_1 به $\pi/2$ میل کند، δ به $\lambda_2/2\pi\cos\theta_c$ میل می‌کند که برای شیشه به‌هوا مقدارآن $\lambda_2/4.68$ است. بنابراین رفتار به‌ازای $\theta_1>\theta_c$ ادامهٔ معقول رفتار به‌ازای $\theta_1\leqslant\theta_c$ است. هنگامی که θ_1 تا θ_c افزایش می‌یابد، R و θ_2 افزایش می‌یابند، در θ_c داریم، $R=1$ و $\theta_2=\pi/2$. هنگامی که θ_1 به مقادیر بیش از θ_c افزایش می‌یابد، R برابر ۱ باقی می‌ماند وزاویهٔ حقیقی شکست Θ برابر با $\pi/2$ باقی می‌ماند، ولی نفوذ بینهایت‌در محیط ۲ به‌تدریج کاهش می‌یابد وبه‌کسری ازطول می‌رسد. درعین حال سرعت فاز وطول

موج درمحیط ۲ ازمقادیرمشخصهٔ مربوط به‌محیط ۲ به‌مقادیرمربوط به‌محیط ۱ کاهش‌می‌یابند. دو ویژگی جالب دیگرعبارت‌اند ازآنکه یك موج فرودی بـاقطبش خطی در اثر انعکاس به‌طور بیضوی قطبیده می‌شود، که این به‌دلیل $\hat{r}_{12s}$ و $\hat{r}_{12p}$ مختلط (ولی متفاوت) است؛ ودیگرآنکه موج درمحیط ۲ عرضی نیست — $\hat{\mathbf{E}}_{2p}$ یك مؤلفهٔ طولی دارد.

۵.۱۸ انعکاس و انتقال توسط یك لایهٔ نازك . تداخل

اکنون مسئلهٔ دوسطح تخت نامتناهی موازی مربوط به‌یك نـاپیوستگی را، به‌عنوان یك مسئلهٔ مقادیرمرزی واقعیتر و پیچیده‌تر، بررسی خواهیم کرد. این وضعیت مربوط به‌بره‌ای ازیك ماده می‌شودکه دردوطرف آن دومحیط نیمه نامتناهی قراردارد و خـواص دو محیط نیمه‌نامتناهی ممکن‌است بایکدیگرمتفاوت باشد. فرض‌می‌کنیم درسمت چپ صفحهٔ $z=0$، محیط ۱؛ درسمت راست صفحهٔ $z=d$، محیط ۳، ودربین آن‌دو، محیط ۲ قرارداشته باشد. کاربرد مستقیم شرایط مرزی درهریك از دوسطح ناپیوستگی، از طریق محـاسبات بخش ۲.۱۸، به‌نتایجی دربارهٔ میدانهای E و B درهریك از سه ناحیه منجر خواهد شد (مسئلهٔ ۱۱.۱۸). روشی دیگر، که به‌همـان جواب منجر می‌شود، برپایهٔ نتایجی که قبلا در بخش ۲.۱۸ به‌دست‌آمد مبتنی است، واین روش از بعضی جهات اطلاعات بیشتری به‌ما خواهد داد. اساس این روش عبارت ازآن است که یك موج فرودی را درمحیط ۱ درنظربگیریم که دراولین فصل مشترك بخشی ازآن منعکس و بخشی ازآن منتقل می‌شود ؛ موج منتقل شده در دومین فصل مشترك بخشی ازآن منعکس و بخشی ازآن منتقل می‌شود ؛ این موج منعکس شده مجدداً به‌فصل مشترك اول می‌رسدکه در آنجا بخشی ازآن منعکس و بخشی ازآن منتقل می‌شود؛ وبه‌همین‌ترتیب.چون‌ضرایب فرنلی‌راکه‌قبلا به‌دست‌آوردیم درهرفصل مشترك کسری‌راکه منعکس می‌شود و کسری‌راکه انتقال می‌یابد به‌ما می‌دهند، تنها بایدتمام سهمهای مختلف را جمع‌کنیم تا موج منعکس شده به محیط ۱ وموج انتقال یافته به‌محیط ۳ را به‌دست آوریم . هر چند که این روند به‌نظر بی‌انتهـا می‌آید، ولی در واقع نسبتاً ساده است.

تنها مسئلهٔ جدیدی‌که درجمع‌کردن امواج به‌آن برمی‌خوریم آن است‌که دامنه‌های مختلف باید بااختلاف فازهای مناسبشان بایکدیگرجمع شوند.[1] هربارکه موج مجدداً از لایه عبورمی‌کند، فازآن به‌علت تغییردر $\mathbf{r}\cdot\vec{\mathbf{k}}_2$ درنما تغییر خواهدکرد. وضعیت در شکل ۷.۱۸ نشان داده شده است. دو موج فرودی کـه برسطح موج تخت درمحیط ۱ عمودند

---

۱. فرض‌می‌کنیم لایه به‌حدکافی نازك‌وبه‌حدکافی همواراست به‌طوری‌که اختلاف فازهای‌همدوس بین تمام امواج چندگانه بامعناست. یکی ازمزایای این روش‌آن است‌که اگراین فرض درست نباشد واختلاف فازهاکم و بیش‌کتره‌ای باشند، بازهم روش جمع مطرح شده در اینجا کـاربرد خواهد داشت، البته به‌شرط‌آنکه این روش به‌جای دامنه‌ها درمورد شدتها به‌کارگرفته شود.

به‌سطح جلویی محیط ۲ برخورد می‌کنند. یکی‌از آنها بخشی از آن در X منعکس‌می‌شود؛ دیگری بخشی‌ازآن در O می‌شکند، بخشی از آن ازسطح عقبی در Z منعکس می‌شود و بخشی ازآن در X می‌شکند تا درمحیط ۱ مجدداً بیرون بیاید وباپرتو اول ترکیب‌شود. چون فاز در دونقطهٔ O و O' در روی سطح موج‌یکسان است، بایداختلاف فازبین دومسیر $O'X$ و OZX را محاسبه‌کنیم. چنانچه محیط۲ رسانا باشد این محاسبات مشکلترنخواهد بود ولذا ما فرض می‌کنیم که زاویهٔ شکست Θ است، یعنی زاویهٔ حقیقی که در بخش قبل یافتیم؛ برای محیط نارسانا $\Theta=\theta_2$. اختلاف فازعبارت است از

$$\hat{\beta}=2\vec{\hat{\kappa}}_2\cdot\mathbf{r}_2-\vec{\kappa}_1\cdot\mathbf{r}_1$$

اکنون بردار $\mathbf{r}_2$ را برحسب مؤلفه‌هایش تجزیه می‌کنیم

$$\mathbf{r}_2=x\mathbf{i}+d\mathbf{k}$$

وبردار $\mathbf{r}_1$ را به‌صورت زیر تجزیه می‌کنیم

$$\mathbf{r}_1=2x\mathbf{i}-w\mathbf{p}_1$$

که درآن

$$\mathbf{p}_1=\mathbf{s}\times\mathbf{u}_1=\mathbf{j}\times\mathbf{u}_1$$

بردار $\mathbf{p}_1$ بر بردار انتشار $\vec{\kappa}_1=\kappa_1\mathbf{u}_1$ عمود است. بنابراین

$$\hat{\beta}=2x(\vec{\hat{\kappa}}_2\cdot\mathbf{i}-\vec{\kappa}_1\cdot\mathbf{i})+2d\vec{\hat{\kappa}}_2\cdot\mathbf{k}$$

حال، بنابر قانون اسنل

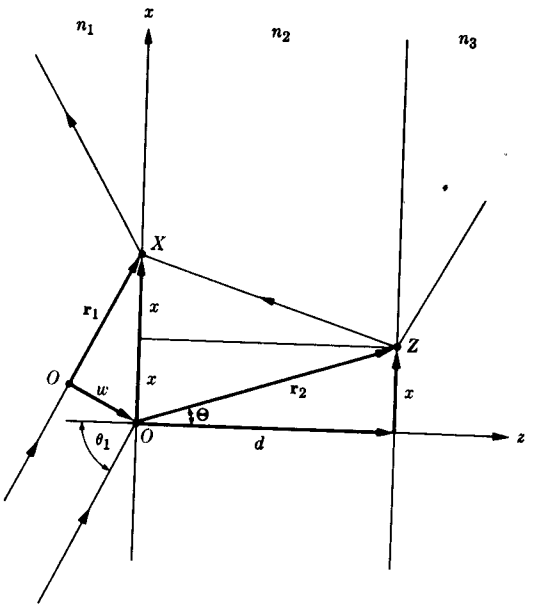
$$\vec{\hat{\kappa}}_2\cdot\mathbf{i}-\vec{\kappa}_1\cdot\mathbf{i}=\hat{\kappa}_2\sin\hat{\theta}_2-\kappa_1\sin\theta_1=0$$

و $\vec{\hat{\kappa}}_2\cdot\mathbf{k}=\hat{\kappa}_2\cos\hat{\theta}_2$، پس داریم

$$\hat{\beta}=2d\hat{\kappa}_2\cos\theta_2=2d\frac{\omega}{c}n_2\cos\theta_2 \qquad (۸۳\cdot۱۸)$$

از معادلهٔ (۶۹.۱۸)، داریم

$$\hat{\beta}=2d\frac{\omega}{c}(p+iq) \qquad (۸۴\cdot۱۸)$$



شکل ۷.۱۸ موجی که در O وارد محیط ۲ می‌شود از سطح عقبی منعکس ومجدداً از محیط ۲ خارج می‌شود تا با پرتویی که در X منعکس‌شده است ترکیب شود.

در یك محیط نارسانا $p = n_2 \cos\theta_2$ و برای تمام زوایای فرود $q = 0$. در یك محیط رسانا درتابش عمودی، $p = n$ و $q = k$. قسمت حقیقی $\hat{\beta}$ انتقال فاز حقیقی را به‌دست می‌دهد وقسمت موهومی $\hat{\beta}$ به‌تضعیف ناشی از دوبار پیمودن بره منتج می‌شود.

برای جمع کردن تمام‌سهمهای دخیل درضریب انعکاس دامنهٔ کل $(\hat{r})$ ازضرایب‌فرنل برای هریك ازمرزها همراه باانتقال فاز $\hat{\beta}$ استفاده می‌کنیم. ضرایب فرنل برای‌قطبشهای p و s متفاوت‌اند، ولی فعلا ما شاخصهای p و s را حذف می‌کنیم، ضمن آنکه به‌خاطر می‌سپاریم که دو حالت قطبش را باید جداگانه بررسی کنیم. از شکل ۸.۱۸ دیده می‌شود که

$$\hat{r} = \hat{r}_{12} + \hat{t}_{12}\hat{r}_{23}\hat{t}_{21}e^{i\hat{\beta}} + \hat{t}_{12}\hat{r}_{23}\hat{r}_{21}\hat{r}_{23}\hat{t}_{21}e^{2i\hat{\beta}} + \cdots$$

$$= \hat{r}_{12} + \hat{t}_{12}\hat{r}_{23}\hat{t}_{21}e^{i\hat{\beta}}[1 + \hat{r}_{21}\hat{r}_{23}e^{i\hat{\beta}} + (\hat{r}_{21}\hat{r}_{23}e^{i\hat{\beta}})^2 + \cdots]$$

چون

$$1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1 - z}$$

$$\hat{r}=\hat{r}_{12}+\frac{\hat{t}_{12}\hat{t}_{21}\hat{r}_{23}e^{i\hat{\beta}}}{1-\hat{r}_{21}\hat{r}_{23}e^{i\hat{\beta}}}$$

$$=\frac{\hat{r}_{12}+\hat{r}_{23}(\hat{t}_{12}\hat{t}_{21}-\hat{r}_{12}\hat{r}_{21})e^{i\hat{\beta}}}{1-\hat{r}_{21}\hat{r}_{23}e^{i\hat{\beta}}}$$

بااستفاده ازاتحادهای (۵۵.۱۸) و (۵۶.۱۸)، داریم

$$\hat{r}=\frac{\hat{r}_{12}+\hat{r}_{23}e^{i\hat{\beta}}}{1+\hat{r}_{12}\hat{r}_{23}e^{i\hat{\beta}}} \qquad (۸۵.۱۸)$$

بامحاسباتی مشابه محاسبات بالا دامنهٔ کل انتقال یافته به‌محیط ۳ به‌دست می‌آید

$$\hat{t}=\frac{\hat{t}_{12}\hat{t}_{23}e^{(1/2)i\hat{\beta}}}{1+\hat{r}_{12}\hat{r}_{23}e^{i\hat{\beta}}} \qquad (۸۶.۱۸)$$

توجه کنید که صورتهای کسرها دردومعادلهٔ بالا فقط اثر سطوح جلویی وعقبی را می‌دهند، ومخرجها تأثیرانعکاسهای چندگانهٔ واقعی‌را به‌حساب می‌آورند. از آنجا که فرض کردیم محیطهای ۱ و ۳ نارسانا هستند، می‌توانیم ضریب انعکاس و ضریب انتقال شدت کل را محاسبه کنیم

$$R=\hat{r}\hat{r}^*, \qquad T=\frac{n_3\cos\theta_3}{n_1\cos\theta_1}\hat{t}\hat{t}^* \qquad (۸۷.۱۸)$$

این ضرایب برای قطبشهای p و s متفاوت‌اند. برای یك برهٔ نارسانا داریم

$$R+T=1$$

ولی برای یك برهٔ رسانا

$$R+T+A=1 \qquad (۸۸.۱۸)$$

زیرا در رسانا انرژی می‌تواند به‌وسیلهٔ گرمایش ژولی جذب شود.

برای برهٔ رسانا، معادله‌های (۸۷.۱۸) هنگامی که برحسب n و k بیان می‌شوند، حتی برای تابش عمودی، فوق‌العاده پیچیده می‌شوند. ولی به‌هرجهت این روابط مهم‌اند، زیرا اندازه‌گیری R و T برای پوسه‌های نازك فلز یکی‌از روشهای تعیین تجربی ثابتهای اپتیکی‌است. به‌منظورحل معادلات برای n و k برحسب‌مقادیرتجربی R و T به‌محاسبات کامپیوتری نیاز است. ضریب انتقال T متناسب است با $\hat{t}\hat{t}^*$، و $\hat{t}\hat{t}^*$ متناسب است با

$$e^{(1/2)i\hat{\beta}}e^{-(1/2)i\hat{\beta}^*} = e^{(1/2)i(\hat{\beta}-\hat{\beta}^*)}$$

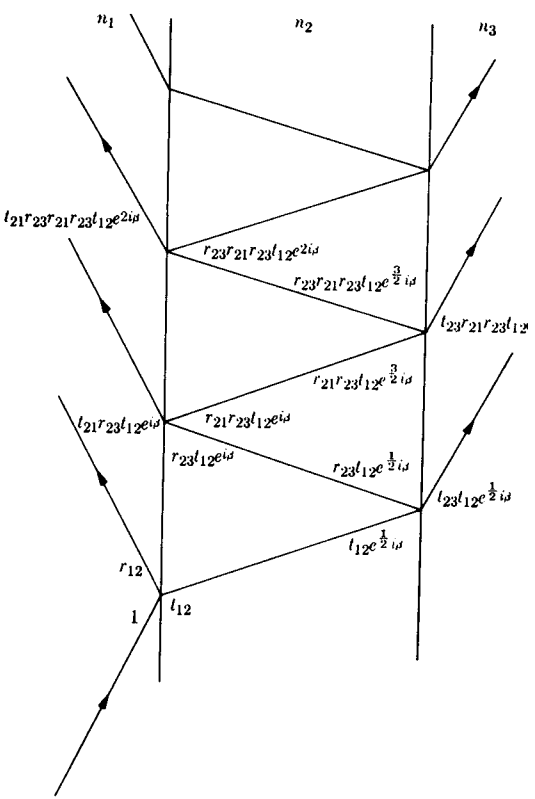
$$= e^{-2d(\omega/c)q}$$

درفرود عمودی، $q = k$، بنابراین T حاوی ضریب زیر است

$$e^{-2d/\delta}$$

که درآن $\delta = c/k\omega$ عمق پوسته‌است. اگرمحیط ۱ هوا باشد، $\omega/c = 2\pi/\lambda_1$، بنابراین

$$e^{-2d/\delta} = e^{-4\pi kd/\lambda_1}$$



شکل ۸.۱۸ انعکاس وانتقال چندگانهٔ یك پرتو فرودی، بادامنهٔ واحد. هریك از دامنه‌ها باضرایب فرنل و تأخیر فاز β مشخص شده است.

برای فلزات ($k \approx ۲$) درنورمرئی ($\lambda_۱ \approx ۵۰۰۰$ Å)، d باید کمتر ازحدود ۱۰۰۰ Å باشد تا نور قابل‌توجهی عبور کند. هنگامی که این عامل نمایی کوچك است، مخرج در معادله‌های (۸۵.۱۸) و (۸۶.۱۸) تقریباً ۱ است.

برای اجسام نارسانا $q = ۰$ (بجزدرمورد انعکاس کلی داخلی)، بنابراین تضعیفی در اثر این عامل وجود ندارد، ولی باز هم معادلات، بعضی اثرهای جالب را پیش گویی می‌کنند. برای حالتی که β وتمام ضرایب فرنل حقیقی باشند، داریم

$$R = \frac{r_{۱۲}^۲ + r_{۲۳}^۲ + ۲r_{۱۲}r_{۲۳}\cos\beta}{۱ + r_{۱۲}^۲ r_{۲۳}^۲ + ۲r_{۱۲}r_{۲۳}\cos\beta} \qquad (۸۹.۱۸)$$

در تابش عمودی، داریم

$$r_{۱۲} = \frac{n_۱ - n_۲}{n_۱ + n_۲}, \qquad r_{۲۳} = \frac{n_۲ - n_۳}{n_۲ + n_۳}, \qquad \beta = ۲d\frac{\omega}{c}n_۲$$

فرض کنید محیط ۱ هواست با $n_۱ = ۱$، محیط ۳ شیشه است با $n_۳ = ۱٫۵$، و محیط ۲ لایهٔ نازکی ازماده‌ای است با $n_۲ = ۱٫۳$. آنگاه

$$R = \frac{۰٫۰۲۲۱ + ۰٫۰۱۸۶\cos\beta}{۱٫۰۰۰۱ + ۰٫۰۱۸۶\cos\beta},$$

$$\beta = ۴\pi n_۲(d/\lambda_۱) = ۱۶٫۳(d/\lambda_۱)$$

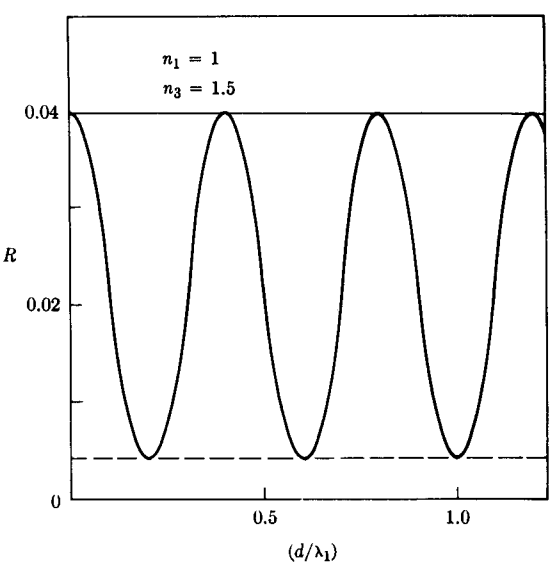
بنابراین R بین ۰٫۰۴۰ تا ۰٫۰۰۴ تغییرمی‌کند و به‌ازای β برابر بامضربهای صحیحی از ۲π (یا $d/\lambda_۱$ برابر با مضربهای صحیحی از ۰٫۳۹) ماکزیممهایی[1] دارد، همانطور که درشکل ۹.۱۸ دیده می‌شود. جالبترین ویژگی این نتیجه آن است که R می‌تواند از ضریب انعکاس سطح جلویی به‌تنهایی، $r_{۱۲}^۲ = ۰٫۰۱۷$، کوچکتر باشد؛ این اثر تنها به‌دلیل تداخل مخرب می‌تواند رخ بدهد. R بین مقدار مربوط به نبود لایهٔ روپوش یعنی $r_{۱۳}^۲ = ۰٫۰۴۰$، وچیزی کمتر ازمقدارمربوط به‌سطح‌عقبی به‌تنهایی، یعنی $r_{۲۳}^۲ = ۰٫۰۰۵$ تغییرمی‌کند. درواقع چنانچه ماده‌ای بیابیم که برای آن $n_۲ = \sqrt{n_۱ n_۳}$ باشد، مینیمم مقدار R را می‌توانیم به‌صفر برسانیم (مسئلهٔ ۱۰.۱۸). برای تولید عدسیهای بدون انعکاس از همین اثراستفاده می‌شود. عدسیهای دوربینهای عکاسی را غالباً با اندودی می‌پوشانند تا ضریب انعکاس‌آن درناحیهٔ وسط طیف مرئی صفرشود؛ ولی‌شرط مینیمم شدن دردوانتهای

---

۱. توجه کنید که مکان ماکزیممها و مینیممهای معادلهٔ (۸۹.۱۸) درست در همانجاهایی است که دریك محاسبهٔ مقدماتی که درآن تنها دو انعکاس به‌حساب آمده باشد، به‌دست می‌آید.

سرخ و آبی طیف برقرار نیست، و بنابراین هنگامی که این عدسیها را با نور منعکس شده از آنها ببینیم تا اندازه‌ای بنفش رنگ دیده می‌شوند. رنگ این عدسیها به زاویهٔ نگاه کردن نیز بستگی دارد، زیرا برای فرود مایل $\beta = ۴\pi n_۲ \cos\theta_۲(d/\lambda_۱)$ است. اگر $n_۲$ بزرگتر از $n_۱$ و $n_۳$ باشد، R بین مینیممی که برابر با $r_{۱۳}^۲$ است وماکزیممی که از $r_{۱۲}^۲$ و $r_{۲۳}^۲$ بزرگتراست تغییرمی‌کند. طول موجی که به‌ازای آن مینیمم یا ماکزیمم رخ‌می‌دهد به‌ضخامت لایه (d) بستگی دارد. اگر ضخامت ازیك نقطه به‌نقطهٔ دیگر پوسه تغییر کند، طول موجی که به‌ازای آن ضریب انعکاس ماکزیمم است نیز تغییر خواهد کرد. رنگهای گونا گونی که درحبابهای صابون ودرلایه‌های روغن‌شناور روی‌آب‌دیده می‌شوند به‌علت همین تغییرات است.

درلایه‌های نارسانا چنانچه $n_۲$ کوچکتر از $n_۱$ باشد، اثرجالب دیگری رخ می‌دهد. این همان موردی است که چنانچه تنها یك مرز وجود داشته باشد، به‌انعکاس کلی داخلی منجرمی‌شود. درابتدا ممکن‌است حدس بزنیم که تمام انرژی منعکس می‌شود و وجود مرز دوم نباید تفاوتی ایجادکند. ولی، این حدس غلط است؛ میدان همواره درمحیط ۲ به‌عمق متوسط δ نفوذ می‌کند. مرز دوم انعکاس کامل را ازبین می‌برد ویك موج انتقالی وجود خواهد داشت با $T = ۱ - R$. این اثررا انعکاس‌کلی تضعیف شده می‌نامند. هرچند که $n_۱$، $n_۲$، و $n_۳$ حقیقی هستند، ولی هنگامی که $\theta_۱ > \theta_c$ باشد $\hat{\theta}_۲$ مختلط است و نتیجتاً ضرایب فرنل مختلط خواهند بود. برای قطبش s داریم



شکل ۹.۱۸ اثر تداخل درانعکاس از یك فصل مشترك هوا - شیشه که بالایه‌ای به‌ضخامت d ازماده‌ای با $n_۲ = ۱٫۳$ اندود شده است.

$$\hat{r}_{12}=\frac{n_1\cos\theta_1-iq}{n_1\cos\theta_1+iq} \qquad (۹۰.۱۸)$$

که در آن، بنا بر معادلهٔ (۷۸.۱۸) (برای هر یك از دو قطبش)، و با استفاده از $\sin\theta_c=n_2/n_1$، داریم

$$q=n_2\sqrt{(\sin\theta_1/\sin\theta_c)^2-1}$$

$$=\sqrt{(n_1\sin\theta_1)^2-n_2^2} \qquad (۹۱.۱۸)$$

با نوشتن $\hat{r}_{12}$ به‌صورت قطبی $\hat{r}_{12}=|\hat{r}_{12}|e^{i\alpha}$ دیدیم که $|\hat{r}_{12}|=1$. بنا براین

$$r_{12}=e^{i\alpha}$$

که در آن

$$\tan\alpha=\frac{\mathrm{Im}\,(\hat{r}_{12})}{\mathrm{Re}\,(\hat{r}_{12})}$$

$$=\frac{-2n_1\cos\theta_1\,q}{(n_1\cos\theta_1)^2-q^2} \qquad (۹۲.۱۸)$$

باهمین استدلال، نتیجه می گیریم که $|\hat{r}_{23}|=1$. برای سادگی فرض کنیم که محیط ۳ با محیط ۱ یکسان است (برای مثال، دومنشور شیشه‌ای بالایه‌ای ازهوا دربین آنها). آنگاه $\hat{r}_{23}=\hat{r}_{21}$ وچون $\hat{r}_{21}=-\hat{r}_{12}$

$$\hat{r}_{23}=-\hat{r}_{12}=-e^{i\alpha} \qquad (۹۳.۱۸)$$

ازمعادلهٔ (۸۴.۱۸)

$$\hat{\beta}=2d\frac{\omega}{c}(p+iq)$$

ودرمعادلهٔ (۷۸.۱۸) یافتیم که $p=0$، لذا $\beta=i2dq(\omega/c)$ که موهومی محض است. بنا براین می‌نویسیم

$$e^{i\hat{\beta}}=e^{-\gamma},$$

$$\gamma=2dq(\omega/c)=2\frac{d}{\delta} \qquad (۹۴.۱۸)$$

زیرا ازمعادلهٔ (۸۲.۱۸) داریم $q(\omega/c)=1/\delta$. اکنون باقراردادن این مقادیردرمعادلهٔ (۸۵.۱۸) به‌دست می‌آوریم

$$\hat{r}=\frac{e^{i\alpha}(1-e^{-\gamma})}{1-e^{2i\alpha}e^{-\gamma}}$$

وبالاخره

$$R=\hat{r}\hat{r}^{*}=\frac{(1-e^{-\gamma})^{2}}{1+e^{-2\gamma}-2e^{-\gamma}\cos 2\alpha},$$

$$T=1-R=\frac{2(1-\cos 2\alpha)e^{-\gamma}}{1+e^{-2\gamma}-2e^{-\gamma}\cos 2\alpha}. \qquad (۹۵.۱۸)$$

توجه کنید که برای n_1 و n_2ی‌مفروض، α تنها به‌زاویهٔ فرود θ_1 بستگی دارد؛ وقتی θ_1 از θ_c تا $\pi/2$ افزایش می‌یابد، α از ۰ تا π تغییرمی‌کند. نمای γ به‌ضخامت d (وهمچنین ازطریق δ به θ_1) بستگی دارد. اگر γ زیاده ازحدکوچك نباشد، داریم

$$T\cong 2(1-\cos 2\alpha)e^{-2d/\delta} \qquad (۹۶.۱۸)$$

همچنین توجه کنید که δ با λ متناسب است، بنابراین انعکاس کلی تضعیف شده را با میکروموجها درمقیاس بزرگتری می‌توان مشاهده کرد.

۶.۱۸ انتشار بین دو صفحهٔ رسانای موازی

هدایت امواج درموجبرها مسئلهٔ دیگری است که می‌توانیم آن را با بررسی تداخل میان موج فرودی وموج انعکاسی، یا به‌طریق دیگر باشروع ازمسئلهٔ مقادیر مرزی جدیدی که در آن شرایط در مرزهای چندگانه به طور همزمان برآورده می‌شوند، بررسی کنیم. مجدداً بررسی‌را به‌روش اول‌آغازمی‌کنیم. دراینجا ماباانتشارموج درمحیطی دی‌الکتریك (مثلا هوا) سروکارداریم که باسطوحی رسانا محصورشده است. موجبرهای میکروموجی کاربردی ازاین مسئله‌اند. برای ساده شدن مطلب فرض می‌کنیم که رسانندگی فلز به‌طور ایده‌آل بینهایت است. بینهایت بودن g بدان معناست که K_i برای فلز بینهایت است که این خود بدان معناست که $\hat{n}_2$ در معادله‌های (۲۸.۱۸) و (۳۳.۱۸) بینهایت است. بنابراین برای انعکاس از یك سطح رسانای کامل در هرزاویهٔ فرودی $\hat{r}_{12s}=-1$ و $\hat{r}_{12p}=+1$. دیدیم که برای نقره درطول موج۳سانتیمتر $R_s=0.9996$، پس‌می‌توان انتظار داشت که این تقریب خوبی باشد. به‌علاوه فرض می‌شود که محیط دی‌الکتریك خلأ

است.

اکنون می‌خواهیم به‌عنوان مقدمه‌ای بر مطالعهٔ موجبرها، انتشار امواج الکترومغناطیسی را در ناحیهٔ بین دو صفحهٔ موازی کاملا رسانا، بررسی کنیم. ناحیه‌ای که در آن انتشار موج بررسی می‌شود درشکل ۱۰.۱۸ نشان داده‌شده است. چون جهتهای x و z ازنظرفیزیکی تمیزناپذیرند، کلیت مطلب بادرنظر گرفتن تنها امواجی که بردارهای موج آنها در صفحهٔ yz است نقض نمی‌شود، به‌ویژه، امواجی را در نظر می‌گیریم که بامحور y زاویهٔ θ می‌سازند. چنین امواجی در $y=a$ به‌سطح کاملا رسانا برخورد می‌کنند وسپس به‌صورت امواجی که بردارهای انتشارآنها بامحورمنفی y زاویهٔ θ می‌سازند، منعکس می‌شوند. هنگامی که این امواج‌را سطح رسانا در $y=0$ برای بار دوم منعکس می‌کند، دوباره به‌صورت امواج نوع اول درمی‌آیند. بنابراین ملاحظه می‌شود که می‌توان انتشار بین دو صفحهٔ موازی رسانارا برحسب عاملهای نمایی زیر توصیف کرد

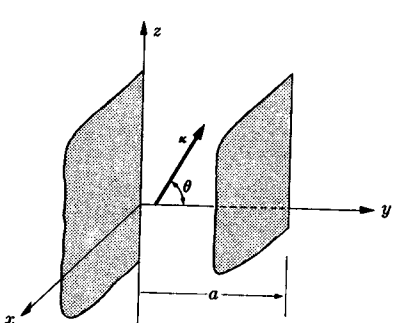
$$e^{i[\kappa(y\cos\theta+z\sin\theta)-\omega t]}$$

و (۹۷.۱۸)

$$e^{i[\kappa(-y\cos\theta+z\sin\theta)-\omega t]}$$

برای چنین امواجی دو قطبش ممکن وجود دارد، که می‌توانیم این دو را بدین صورت توصیف کنیم که بگوییم برای قطبش s میدان $\mathbf{E}$ موازی محور x است، و برای قطبش p میدان $\mathbf{H}$ موازی محور x است. این دو قطبش را اصطلاحاً در موجبرها به‌ترتیب امواج الکتریکی عرضی (TE) ومغناطیسی عرضی (TM) می‌نامند. دراینجا فقط امواج TE مطالعه می‌شود. بررسی امواج TM را به‌عنوان یك تمرین به‌عهدهٔ دانشجو می‌گذاریم.

میدان الکتریکی در ناحیهٔ بین دو صفحهٔ رسانا در حالت TE با معادلهٔ زیر داده می‌شود



شکل ۱۰.۱۸ انتشار موج بین دوصفحهٔ موازی کاملا رسانا.

$$\mathbf{E}=\mathbf{i}\{E_1 e^{i[\kappa(y\cos\theta+z\sin\theta)-\omega t]}+E_1' e^{i[\kappa(-y\cos\theta+z\sin\theta)-\omega t]}\} \quad (۹۸.۱۸)$$

این میدان الکتریکی باید در $y=0$ صفرشود، زیرا E_t درمرز یك رسانای کامل صفر می‌شود. واضح است که این شرط درصورتی به‌ازای تمام مقادیر z و t صادق است که $E_1=-E_1'=E$، این نتیجه از $r_s=-1$ نیز به‌دست می‌آید. دراین صورت $\mathbf{E}$ با معادلهٔ زیرداده می‌شود

$$\mathbf{E}=\mathbf{i}E(e^{i\kappa y\cos\theta}-e^{-i\kappa y\cos\theta})e^{i(\kappa z\sin\theta-\omega t)} \quad (۹۹.۱۸)$$

علاوه براین $\mathbf{E}$ باید در $y=a$ به ازای تمام مقادیر z و t صفرشود. این الزام، شرط زیررا تحمیل می کند

$$\kappa a\cos\theta=n\pi \quad (۱۰۰.۱۸)$$

بنا براین برای فرکانس ωی مفروض، $\kappa=\omega/c$ و زاویه‌ای که‌امواج بامحور y می‌سازند بامعادلهٔ (۱۰۰.۱۸) مشخص می‌شود. چنانچه این زاویه مشخص باشد، سرعت ظاهری درامتداد z برابر با $v_p=c/\sin\theta$ است، که همواره بزرگترازسرعت نوردرخلأ است. دربارهٔ این تناقض ظاهری نظریهٔ خاص نسبیت بعداً به‌تفصیل بحث خواهد شد.

مناسب‌است تغییرات میدان الکتریکی‌را درجهتهای y و z برحسب طول موجهایی بیان‌کنیم. این طول موجها عبارت‌اند از

$$\lambda_g=\frac{2\pi}{\kappa\sin\theta}=\frac{\lambda_0}{\sin\theta} \qquad \left(\lambda_0=\frac{2\pi}{\kappa}=\frac{2\pi c}{\omega}\right) \quad (۱۰۱.۱۸)$$

برای جهت z و

$$\lambda_c=\frac{2\pi}{\kappa\cos\theta}=\frac{\lambda_0}{\cos\theta} \quad (۱۰۲.۱۸)$$

برای جهت y. میدان الکتریکی، معادلهٔ (۹۸.۱۸)، برحسب این طول موجها به‌صورت زیر است[1]

$$\mathbf{E}=\mathbf{i}E_0\sin\frac{2\pi y}{\lambda_c}e^{i[(2\pi z/\lambda_g)-\omega t]} \quad (۱۰۳.۱۸)$$

ومعادلهٔ (۱۰۰.۱۸) به‌شکل زیردرمی‌آید

---

۱. E_0 به‌جای $2iE$ نوشته شده است.

$$\frac{a}{\lambda_c}=\frac{n}{۲} \qquad (۱۰۴.۱۸)$$

ازمعادلات (۱۰۱.۱۸) و (۱۰۲.۱۸) مستقیماً نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{۱}{\lambda_g^۲}+\frac{۱}{\lambda_c^۲}=\frac{۱}{\lambda_۰^۲} \qquad (۱۰۵.۱۸)$$

اگرمقدار $\lambda_c=۲a$، مربوط به $n=۱$ درمعادلهٔ (۱۰۴.۱۸)، رادرنظر بگیریم،درآن‌صورت هنگامی‌که $\lambda_۰$ افزایش می‌یابد، به‌عبارت دیگر، هنگامی که ω کاهش می‌یابد به‌نقطه‌ای می‌رسیم که درآن $۱/\lambda_g^۲$ باید منفی باشد تا درمعادلهٔ (۱۰۵.۱۸) صدق‌کند. دراین حالت ضریب z درمعادلهٔ (۱۰۳.۱۸) موهومی‌است، وتابع‌نمایی به‌جای‌آنکه برحسب z نوسان کند به‌صورت یك تابع نمایی کاهش یابنده درمی‌آید. به‌بیان دیگر اگر $\lambda_۰>۲a$ باشد، موج الکترومغناطیسی درجهت z به‌جای منتشر شدن میرا می‌شود. اگر n مساوی ۲ گرفته شود، در این صورت $\lambda_c=۲a/۲=a$ است و بزرگترین طول موجی که منتشر می‌شود مساوی a است. اکنون‌دلیل استفاده ازشاخص c که به‌معنای «قطع» است، روشن‌می‌شود. طول موج قطع بزرگترین طول موجی است که می‌تواند برای یك مد مفروض (مقدار n مفروض) انتشار بیابد.

سرعت v_p که قبلا به‌دست آوردیم، همواره ازسرعت نور بیشتر است و، در واقع، هنگامی‌که طول موج در خلأ مساوی λ_c است، به‌عبارت دیگر، هنگامی‌که $\theta=۰$ است، بینهایت است. این سرعت، که سرعت فاز نامیده می‌شود، عبارت است از سرعت نقطه‌ای بافاز ثابت روی موج. بدون بحث روی جنبه‌های نسبیتی موضوع، این مطلب نشان دهندهٔ نقض ظاهری این‌اصل مسلم‌است‌که هیچ علامتی نمی‌تواند باسرعتی بیشتر از سرعت نور انتشاریابد. رفع این اشکال ظاهری بدین ترتیب است‌که انرژی باسرعتی‌کمتر ازسرعت نور درطول موجبر انتشار می‌یابد، یعنی، باسرعتی‌که به‌سرعت‌گروه مشهوراست. علامتها باسرعت‌گروه انتقال می‌یابند، نه باسرعت فاز.

برای تعیین سرعت انتشارانرژی، چگالی انرژی را محاسبه خواهیم کرد. حاصل‌ضرب این چگالی انرژی در سرعت گروه، شار انرژی یا بردار پوئین‌تینگ را به دست می‌دهد. بنابراین ازتقسیم بردارپوئین‌تینگ به‌چگالی انرژی، می‌توان‌سرعت انتشارانرژی را به‌دست آورد.این نتیجه تعمیمی است ازمعادلهٔ (۳۵.۱۷).

میدان مغناطیسی درموجبر ازمعادلهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad (۱۰۶.۱۸)$$

زیر به‌دست می‌آید

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}E_\circ \frac{2\pi}{\omega\lambda_g} \sin\frac{2\pi y}{\lambda_c} e^{i[(2\pi z/\lambda_g)-\omega t]}$$
$$+ i\mathbf{k}E_\circ \frac{2\pi}{\omega\lambda_g} \cos\frac{2\pi y}{\lambda_c} e^{i[(2\pi z/\lambda_g)-\omega t]} \qquad (۱۰۷.۱۸)$$

چگالی انرژی عبارت است از

$$u = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}), \qquad (۱۰۸.۱۸)$$

و بردار پوئین‌تینگ عبارت است از

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} \qquad (۱۰۹.۱۸)$$

برای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ از نمادگذاری مختلط استفاده شده‌است، با این فرض‌ضمنی که برای‌هرعبارتی باید قسمت حقیقی آن درنظر گرفته‌شود. بنابراین برای محاسبهٔ u و $\mathbf{S}$ باید قسمتهای‌حقیقی را انتخاب ودرهم ضرب کنیم. ولی چون کمیتهایی که برای محاسبهٔ سرعت گروه به‌کار می‌روند، میانگینهای زمانی معادلات (۱۰۸.۱۸) و (۱۰۹.۱۸) هستند، می‌توانیم با استفاده ازمعادلهٔ (۳۷.۱۷)، گرفتن قسمتهای حقیقی را آسان کنیم.

میانگین زمانی چگالی انرژی عبارت است از

$$\bar{u} = \frac{1}{4}\mathrm{Re}[\mathbf{E}^*\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}^*\cdot\mathbf{H}]$$
$$= \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left[\varepsilon_\circ E_\circ^* E_\circ \sin^2\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right) + \frac{1}{\mu_\circ} E_\circ^* E_\circ \left(\frac{2\pi}{\omega\lambda_g}\right)^2 \sin^2\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\mu_\circ} E_\circ^* E_\circ \left(\frac{2\pi}{\omega\lambda_c}\right)^2 \cos^2\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right)\right] \qquad (۱۱۰.۱۸)$$

با انتگرال‌گیری در جهت y، یعنی در عرض موجبر، جمله‌های $\sin^2(2\pi y/\lambda_c)$ و $\cos^2(2\pi y/\lambda_c)$ به $a/2$ تبدیل می‌شوند. بنابراین

$$\int_\circ^a \bar{u}\, dy = \frac{1}{4} E_\circ^* E_\circ \frac{a}{2}\left[\varepsilon_\circ + \frac{1}{\mu_\circ}\frac{4\pi^2}{\omega^2}\left(\frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{4} E_\circ^* E_\circ \varepsilon_\circ a \qquad (۱۱۱.۱۸)$$

میانگین زمانی مؤلفهٔ z بردار پوئین‌تینگ به‌صورت زیر است

$$\bar{S} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\, E_x^* H_y$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[E_0^* \sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right)\frac{1}{\mu_0}E_0 \frac{2\pi}{\omega\lambda_g}\sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right)\right] \qquad (۱۱۲.۱۸)$$

$$= \frac{1}{2}E_0^* E_0 \frac{2\pi}{\mu_0\omega\lambda_g}\sin^2\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right)$$

باانتگرال گیری ازاین عبارت از $y=0$ تا $y=a$ میانگین توان کل (در واحد طول در جهت x) که درامتداد موجبرانتقال می‌یابد، به‌دست می‌آید

$$\int_0^a \bar{S}_z\, dy = \frac{1}{4}E_0^* E_0 \frac{2\pi}{\mu_0\omega\lambda_g} a \qquad (۱۱۳.۱۸)$$

سرعت انتشار انرژی عبارت است از خارج قسمت تقسیم معادلهٔ (۱۱۳.۱۸) برمعادلهٔ (۱۱۱.۱۸). ازاین‌رو

$$v_g = \frac{2\pi}{\varepsilon_0\mu_0\omega\lambda_g} = \frac{2\pi c^2}{\omega\lambda_g} = c\frac{\lambda_0}{\lambda_g} \qquad (۱۱۴.۱۸)$$

باتوجه به‌معادلهٔ (۱۰۱.۱۸) معلوم است که λ_g از λ_0 بزرگتراست، و بنابراین $\omega\lambda_g/2\pi$ از c بزرگتراست، بدین‌ترتیب روشن است که v_g از c کوچکتر است.

اکنون باتوجه به‌اینکه از معادلهٔ (۱۰۱.۱۸) داریم $\lambda_g=\lambda_0/\sin\theta$، می‌توانیم درك بیشتری دربارهٔ اختلاف بین سرعت گروه، v_g، وسرعت فاز، v_p، به‌دست آوریم. با به‌کاربردن این نتیجه درمعادلهٔ (۱۱۴.۱۸) خواهیم داشت

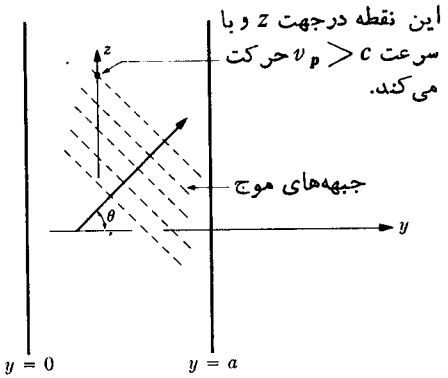
$$v_g = c\sin\theta \qquad (۱۱۵.۱۸)$$

وقبلا مشاهده کردیم که

$$v_p = \frac{c}{\sin\theta} \qquad (۱۱۶.۱۸)$$

بنابراین

$$v_g v_p = c^2 \qquad (۱۱۷.۱۸)$$



شکل ۱۱.۱۸ جزئیات حرکت جبهه‌های موج دراثنای انتشار موج بین صفحات رسانا.

این نتیجه‌ای است که عموماً برای انتشار درموجبرها صادق است. (توجه کنید که معادلهٔ (۱۱۷.۱۸) الزاماً برای انواع دیگری ازانتشارموج صادق نیست، به‌ویژه معادلهٔ مذکور برای امواج تخت درمحیطهای غیرپاشندهٔ بدون مرزصادق نیست، دراین محیطهاسرعتهای گروه و فاز یکی هستند.) با به یادآوردن این مطلب که θ عبارت است از زاویهٔ بین امتداد انتشار یکی از امواج مؤلفه و محور y ، به سادگی می‌توان شکل ۱۱.۱۸ را رسم کرد. این شکل مقطعی ازناحیهٔ بین صفحات رسانا را درصفحهٔ yz نشان می‌دهد. محل تلاقی سطح موج با محور z با سرعت $v_p = c/\sin\theta$ حرکت می‌کند؛ درحالی‌که مؤلفهٔ c درامتداد محور z ، یعنی v_g، عبارت است از $v_g = c\sin\theta$.

بسیاری از نتایجی که برای موجبر ساده با صفحات موازی به‌دست آمد، برای حالات پیچیده‌تر نیز صادق است. به‌ویژه، موجبرهای متداول مستطیلی شکل خصوصیات کاملا مشابهی دارند. دربخش بعد به‌بررسی جنبه‌های کلی دیگر موجبرها، با تأکیدبر موجبرهای مستطیلی، خواهیم پرداخت.

۷.۱۸ موجبرها

دربخش ۴.۱۶ نشان دادیم که $\mathbf{E}$ و $\mathbf{H}$ هر دو در معادلهٔ موج درخلأ صدق می‌کنند، یعنی

$$\nabla^2\mathbf{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \ , \qquad \nabla^2\mathbf{H} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \qquad (۱۱۸.۱۸)$$

برای امواج تکفام، به‌عبارت دیگر، برای امواجی به‌شکل $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)=\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$، این معادلات به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$\nabla^2\mathbf{E}+\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E}=0, \qquad \nabla^2\mathbf{H}+\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{H}=0 \qquad (۱۱۹.۱۸)$$

علاوه براین معادلات، معادلات ماکسول‌هم بایدصادق باشند. برای انتشارامواج‌الکتریکی عرضی (TE) درجهت z، $E_z=0$ است؛ به‌علاوه، برای امواجی که در جهت z انتشار می‌یابند، پنج مؤلفهٔ باقی‌ماندهٔ میدانها متناسب با $e^{i2\pi z/\lambda_g}$ هستند. معادلات تاو ماکسول دراین حالت به‌صورت زیرند

$$\nabla\times\mathbf{E}-i\mu_0\omega\mathbf{H}=0:$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}-i\mu_0\omega H_z=0 && \text{(الف)}\\
&E_x=+\frac{\mu_0\omega\lambda_g}{2\pi}H_y && \text{(ب)}\\
&E_y=-\frac{\mu_0\omega\lambda_g}{2\pi}H_x && \text{(ج)}
\end{aligned}\right\} \qquad (۱۲۰.۱۸)$$

$$\nabla\times\mathbf{H}+i\varepsilon_0\omega\mathbf{E}=0$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{2\pi i}{\lambda_g}H_y+i\varepsilon_0\omega E_x=0 && \text{(الف)}\\
&\frac{2\pi i}{\lambda_g}H_x-\frac{\partial H_z}{\partial x}+i\varepsilon_0\omega E_y=0 && \text{(ب)}\\
&\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=0 && \text{(ج)}
\end{aligned}\right\} \qquad (۱۲۱.۱۸)$$

واضح است که (الف) از معادلهٔ (۱۲۱.۱۸) و (ب) ازمعادلهٔ (۱۲۰.۱۸) نتیجهٔ زیر را به‌دست می‌دهند

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}=\left(\frac{2\pi i}{\lambda_g}-i\frac{\varepsilon_0\mu_0\omega^2\lambda_g}{2\pi}\right)H_y \qquad (۱۲۲.۱۸)$$

وبنابراین واضح است که اگر H_z معلوم باشد، H_y به‌دست می‌آید. به‌طریق مشابه، به‌کمك (ج) ازمعادلهٔ (۱۲۰.۱۸) و (ب) ازمعادلهٔ (۱۲۱.۱۸)، H_x رامی‌توان از H_z به‌دست آورد. بالاخره، E_x و E_y با (ب) و (ج) از معادلهٔ (۱۲۰.۱۸) به H_y و H_x مربوط می‌شوند. بنابراین اگر H_z را پیدا کنیم، تمام کمیتهای دیگرمیدان را می‌توانیم بامشتق‌گیری به‌دست آوریم. خود H_z باید درمعادلهٔ (۱۱۹.۱۸) صدق کند؛ بنابراین، باتوجه به‌اینکه بستگی آن به z به‌شکل $e^{i2\pi z/\lambda_g}$ است، می‌نویسیم

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{4\pi^2}{\lambda_g^2}\right)H_z=0 \qquad (۱۲۳.۱۸)$$

آنچه باقی می‌ماند، تنها تعیین شرایط مرزیی است که جوابهای معادلهٔ (۱۲۳.۱۸) باید درآنها صدق کنند.

اگریك موجبراستوانه‌ای‌را درنظر بگیریم که دیواره‌اش کاملا رساناست، مانندآنچه درشکل ۱۲.۱۸ نشان داده شده‌است، آنگاه شرایط مرزی مناسب عبارت‌اند ازآنکه‌مؤلفهٔ مماسی $\mathbf{E}$ ومؤلفهٔ عمودی $\mathbf{B}$ روی S صفر شوند. مؤلفهٔ مماسی $\mathbf{H}$ ومؤلفهٔ عمودی $\mathbf{D}$ اختیاری‌اند. بااعمال این شرایط، رابطه‌ای به‌دست می‌آیدکه λ_g، ω و ابعاد موجبررا به‌یکدیگرمربوط می‌کند، درست مانند رابطه‌ای که در معادلهٔ (۱۰۵.۱۸) دربارهٔ موجبر باصفحات موازی به‌دست‌آمد.

برای درك بهتر این روش، موجبرمکعب مستطیلی راکه درشکل ۱۳.۱۸ نشان داده شده است، در نظر بگیرید. می‌توان معادلهٔ (۱۲۳.۱۸) را با استفاده از روش معمول جداسازی متغیرها، تجزیه کرد. جواب کلی شامل مجموعه‌ای از جملات به‌شکل زیر است

$$H_z(x,y,z)=(A\cos\kappa_x x\cos\kappa_y y+B\cos\kappa_x x\sin\kappa_y y$$
$$+C\sin\kappa_x x\cos\kappa_y y+D\sin\kappa_x x\sin\kappa_y y)e^{2\pi iz/\lambda_g} \qquad (۱۲۴.۱۸)$$

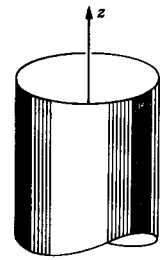
با

$$-(\kappa_x^2+\kappa_y^2)+[\omega^2/c^2-(4\pi^2/\lambda_g^2)]=0 \qquad (۱۲۵.۱۸)$$

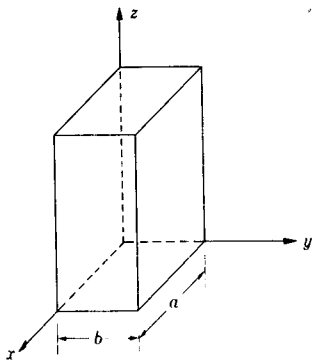
E_x را از H_z به‌دست می‌آوریم

$$E_x=-\frac{\mu_0\omega\lambda_g}{2\pi}\left(\frac{2\pi i}{\lambda_g}-i\frac{\varepsilon_0\mu_0\omega^2\lambda_g}{2\pi}\right)^{-1}\frac{\partial H_z}{\partial y} \qquad (۱۲۶.۱۸)$$

بامشتق‌گیری جزئی، هر $\cos\kappa_y y$ به‌یك $\sin\kappa_y y$ تبدیل می‌شود و برعکس. باوجود این، چون E_x باید در $y=0$ و در $y=b$ صفر شود، تنها جملاتی که شامل $\sin\kappa_y y$ هستند، در E_x باقی می‌مانند وضمناً دراین جملات باید $\kappa_y=n\pi/b$ باشد. بنابراین، فقط جملات $\cos\kappa_y y$ درمعادلهٔ (۱۲۴.۱۸) باقی می‌مانند. با بحث مشابهی می‌توان نشان‌داد



شکل ۱۲.۱۸ انتشار مـوج در داخل یك استوانهٔ رسانا.



شکل ۱۳.۱۸ یك موجبرمکعب مستطیلی.

که فقط جملات $\cos \kappa_x x$ باقی می‌مانند، وضمناً دراین جملات باید $\kappa_x = m\pi/a$ باشد. جوابهای مجازبرای H_z، یعنی آنهایی که باعث‌می‌شوند مؤلفه‌های مماسی $\mathbf{E}$ در مرز صفر شوند، به‌صورت زیرند

$$H_z = A \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} e^{2\pi i z/\lambda_g} \qquad (۱۲۷.۱۸)$$

هرزوج ممکن از مقادیر m و n را یك مد می‌نامند. نمادگذاری TE_{mn} برای مدهـایی به‌کار می‌رود که ازنوع (۱۲۷.۱۸) باشند؛ TE به‌معنی میدان الکتریکی عرضی است و n و m تعداد نیم موجها درابعاد باریکتر (n) و پهنتر (m) را نشان می‌دهند.

اکنون برمی گردیم به‌معادلهٔ (۱۲۵.۱۸). بااستفاده از $\kappa_x = m\pi/a$ و $\kappa_y = n\pi/b$، خواهیم داشت

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \qquad (۱۲۸.۱۸)$$

که به‌وضوح نشان می‌دهد که برای λ_0ی ثابت، طول موج موجبر، ودر نتیجه سرعت موج آن $v_g = c\lambda_0/\lambda_g$، به‌مد انتشار بستگی دارد. همچنین می بینیم که طول‌موجهای ماکزیممی برای انتشار درمدهای مختلف وجود دارد. واضح است که اگر λ_0 به‌اندازهٔ‌کافی بزرگ باشد، کمیت $(2\pi/\lambda_0)^2$ از $(n\pi/b)^2+(m\pi/a)^2$ کوچکتر خواهد بود. دراین مورد، طرف راست معادلهٔ (۱۲۸.۱۸) منفی می‌شود ودر نتیجه مقدار λ_g موهومی است. این‌امر باعث تضعیف موج می‌شود ودرنتیجه انتشارموج نخواهیم داشت.

ازموجبرهای مکعب مستطیلی شکل برای انتقال توان میکروموج به‌طور گسترده‌ای

استفاده‌می‌شود. معمولا اندازهٔ موجبر را طوری انتخاب می‌کنند که‌فقط مد TE_{10} درفرکانس موردنظر در موجبرمنتشرشود. یکی ازاندازه‌های متداول برای ابعاد داخلی موجبر عبارت است از $2.28\,cm \times 1.01\,cm$. طول موج حداکثری که درمد TE_{10} درچنین موجبری منتشرمی‌شود، باقراردادن $m=1$، $n=0$، $a=2.28\,cm$ و $b=1.01\,cm$ درمعادلهٔ (۱۲۸.۱۸) به دست می‌آید. نتیجه آنکه: $\lambda_{0,\max}=4.57\,cm$ که با قراردادن $\lambda_g=\infty$ به‌دست می‌آید؛ طول موجهای بزرگتر ازاین مقدارمنتشرنمی‌شوند ولی آنهایی که‌کوچکترندانتشارمی‌یابند. مد باطول موج قطع کوچکتر بعدی، بسته به‌ابعادموجبر TE_{11} یا TE_{20} است. اگر $b<a/\sqrt{3}$ باشد، طول موج قطع TE_{20} بزرگترازطول موج‌قطع TE_{11} خواهد بود. محاسبهٔ طول موج قطع TE_{20} خیلی ساده است؛ طول موج مذکور درست نصف طول‌موج قطع TE_{10}، یا $2.28\,cm$ است. باتوجه به‌نقایصی که درساخت موجبرها به‌وجود می‌آید واتلافهای زیاد درنزدیکی طول موج قطع TE_{10}، لازم است که باند TE_{10} موجبرهای تجارتی عملا به 2.42 تا 4.35 سانتیمترمحدود شود.

۸.۱۸ مشددهای حفره‌ای

وسیلهٔ دیگری که ارتباط نزدیکی باموجبرها دارد واز لحاظ عملی بسیار مهم است، مشدد حفره‌ای است. مشددهای حفره‌ای ازاین لحاظ که می‌توانند در میدانهای الکتریکی و مغناطیسیِ نوسان‌کننده انرژی ذخیره کنند، خواص‌مدارهای تشدیدرا ازخودنشان می‌دهند؛ به‌علاوه، درمشددهای حفره‌ای عملی، مقداری ازانرژی ذخیره شده درهرسیکل از نوسان تلف می‌شود. ولی ازاین لحاظ، مشددهای حفره‌ای اغلب از مدارهای LC متعارف حدود بیست برابر بهترند، به‌عبارت دیگر، کسری ازانرژی ذخیره شده درمشدد حفره‌ای که درهر سیکل تلف می‌شود، حدود $1/20$ کسرتلف شده در مدار LC است. مزیت دیگر این است که مشددهای حفره‌ای (بااندازه‌های عملی) فرکانسهای تشدیدی دارندکه گسترهٔ آن ازچند صد مگاهرتز به بالاست، درست ناحیه‌ای که تقریباً ساختن مدارهای LC متعارف غیرممکن است.

ساده‌ترین مشدد حفره‌ای یك مکعب مستطیل قائم با دیواره‌های کاملا رساناست. برای چنین حفره‌ای، شرایط مرزی مناسب عبارت‌اند ازصفرشدن مؤلفهٔ مماسی $\mathbf{E}$ ومؤلفهٔ عمودی $\mathbf{B}$ روی مرز. مؤلفهٔ مماسی $\mathbf{H}$ و مؤلفهٔ عمودی $\mathbf{D}$ اختیاری‌اند. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی باید درمعادلات موج (۱۱۹.۱۸) صدق کنند؛ بنابراین، E_x بایددر معادلهٔ زیرصدق کند

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{c^2}E_x=0 \qquad (۱۲۹.۱۸)$$

اگر حفره ناحیه‌ای را دربر بگیرد که سطوح مرزی آن شش صفحهٔ $x=0$، $x=a$،

$y=0$، $y=b$، $z=0$، $z=d$ باشند، آنگاه برای آنکه E_x در $y=0$، در $z=0$، در $y=b$ ودر $z=d$ صفرشود، باید E_x به‌صورت زیر باشد

$$E_x=E_1 f_1(x)\sin\kappa_y y\sin\kappa_z z e^{-i\omega t} \qquad (۱۳۰.۱۸)$$

که درآن $\kappa_y=m\pi/b$ و $\kappa_z=n\pi/d$. به‌علاوه، E_x به‌تنهایی نمی‌تواند جواب باشد مگراینکه $f_1(x)$ یك عدد ثابت باشد، زیرا برای صادق بودن یکی از معادلات ماکسول باید $\nabla\cdot\mathbf{E}$ صفر باشد. برای E_y و E_z وضعیت مشابه است، و جوابها به‌شکل زیر درمی‌آیند

$$E_y=E_2\sin\kappa_x x\, f_2(y)\sin\kappa_z z\, e^{-i\omega t}$$

$$E_z=E_3\sin\kappa_x x\sin\kappa_y y\, f_3(z)\, e^{-i\omega t} \qquad (۱۳۱.۱۸)$$

که درآن κ_y و κ_z همانهایی‌است که درمعادلهٔ (۱۳۰.۱۸) آمده‌اند و $\kappa_x=l\pi/a$ است. برای آنکه واگرایی $\mathbf{E}$ صفرشود، معادلهٔ زیر باید برقرارباشد

$$\Big(E_1\frac{df_1}{dx}\sin\kappa_y y\sin\kappa_z z+E_2\sin\kappa_x x\frac{df_2}{dy}\sin\kappa_z z$$

$$+E_3\sin\kappa_x x\sin\kappa_y y\frac{df_3}{dz}\Big)e^{-i\omega t}=0 \qquad (۱۳۲.۱۸)$$

این‌معادله‌درصورتی برقراراست که $f_1=\cos\kappa_x x$، $f_2=\cos\kappa_y y$، $f_3=\cos\kappa_z z$، و

$$\kappa_x E_1+\kappa_y E_2+\kappa_z E_3=0 \qquad (۱۳۳.۱۸)$$

که درست شرط عمود بودن κ بر $\mathbf{E}$ است. بازمی‌گردیم به‌معادلهٔ موج، واضح است که فرکانسهای تشدید حفره توسط معادلهٔ زیرداده می‌شوند

$$\kappa_x^2+\kappa_y^2+\kappa_z^2-\frac{\omega^2}{c^2}=0 \qquad (۱۳۴.۱۸)$$

یا

$$\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{d^2}-\frac{4f^2}{c^2}=0 \qquad (۱۳۵.۱۸)$$

یك حفرهٔ معمولی که ازموجبری بااندازهٔ ۲٫۲۹ cm × ۱٫۰۱cm ساخته شده باشد، با

$l=1$، $m=0$، $n=2$، مشخص می‌شود (حفرهٔ مشهور به TE_{102}) . واضح است که فرکانس تشدید چنین حفره‌ای توسط بعد z آن ، یعنی d، تعیین می‌شود . بسیاری از جنبه‌های دیگرمسئلهٔ مشدد حفره‌ای مکعب مستطیلی‌را نیز می‌توان به‌تفصیل بررسی کرد؛ بعضی ازاین جنبه‌ها درمسائل پایان فصل آمده‌اند.

شکلهای دیگری ازمشددهای حفره‌ای‌را نیزمی‌سازند؛ ولی تنها حفره‌های استوانه‌ای ومکعب مستطیلی قائم‌را می‌توان به‌آسانی ساخت و از نظر ریاضی دقیقاً بررسی کرد. در بررسی استوانهٔ قائم توابعی واردمی‌شوندکه ازسینوس وکسینوس بسیارپیچیده‌ترند، یعنی، به‌طوراخص توابع بسل. برای برقراری شرایط مرزی بایدصفرهای این‌توابع‌را، به‌همان طریق‌که صفرهای سینوسها درمسئلهٔ مکعب مستطیل را پیداکردیم، پیداکنیم. اما در اینجا داخل‌دراین بحث‌مفصل نمی‌شویم وخوانندهٔ علاقمندرا به‌مطالعهٔ کتاب مونتگومری[1] ارجاع می‌دهیم؛ درصفحهٔ ۲۹۷ آن کتاب یك‌تحلیل‌اجمالی ولی بسیارمفیدازمشدد حفره‌ای‌استوانه‌ای آمده است.

۹.۱۸ خلاصهٔ مطالب

مسائل‌عملی‌انتشارموج غالباً شامل مرزبین محیطهای مختلف‌است‌که درآن‌ثابت‌دی‌الکتریك مختلط $\hat{K}$ به‌طور ناپیوسته تغییر می‌کند. وضعیت مربوط به‌یك مرز تخت، باقانون اسنل و ضرایب فرنل،که به $\hat{n}=\sqrt{\hat{K}}$ وزاویهٔ فرود بستگی دارند، بیان می‌شود. مسائل شامل مرزهای تخت‌چندگانه‌را بابرهم‌نهش جوابهای مربوط به‌مرزهای منفرد می‌توان‌حل‌وایجاد اثرات تداخلی‌را مشاهده‌کرد. محیطهای نارسانا حالت خاصی از محیطهای رسانا هستند که برای‌آنها قسمتهای موهومی $\hat{K}$ و $\hat{n}$ صفرمی‌شود.

۱. دامنه‌ها نمی‌توانند درشرایط مرزی صدق‌کنند مگرآنکه فرکانس‌موج دردوطرف مرز یکسان باشد وفازآن درتمام نقاط روی مرزازدوطرف مطابقت داشته باشد. درآن‌صورت، بردارهای انتشارامواج فرودی، انعکاسی، وانتقالی همگی‌بابردارعمود برمرزهم‌صفحه‌اند، وزاویهٔ انعکاس بازاویهٔ فرود برابراست، $\theta'_1=\theta_1$. ازرابطهٔ پاشندگی قانون اسنل‌نتیجه می‌شود

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

۲. پیوستگی مؤلفه‌های مماسی میدانهای E و H باضرایب فرنل بیان می‌شوند. این ضرایب عبارت‌اند ازنسبتهای دامنه‌های میدان Eی امواج انعکاسی و انتقالی به‌دامنهٔ موج

---

1. C. G. Montgomery, *Technique of Microwave Measurements* (New-York: McGraw-Hill, 1947).

فرودی. این ضرایب برای قطبشهای s و p (به‌ترتیب، مربوط به‌بردار E عمودبر وموازی باصفحهٔ فرود) متفاوت است. برای انعکاس

$$r_{12s}=\frac{n_1\cos\theta_1-n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1+n_2\cos\theta_2}$$

$$r_{12p}=\frac{n_2\cos\theta_1-n_1\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_1+n_1\cos\theta_2}$$

۳. شدتهای انعکاسی و انتقالی از مؤلفهٔ عمودی بردارهای پوئین‌تینگ برحسب ضرایب فرنل محاسبه می‌شوند. ضریب انعکاس عبارت است از

$$R=r_{12}r_{12}^*$$

برای محیطهای نارسانا ضریب انتقال عبارت است از

$$T=1-R$$

و برای موردی که محیط ۲ رسانا باشد، ضریب جذب عبارت است از

$$A=1-R$$

که این هردو از بقای انرژی نتیجه می‌شوند. این معادله‌ها برای نارساناها یا برای فرود عمودی قابل حل‌اند. قطبش دراثرانعکاس درزاویهٔ بروستر، انعکاس کلی داخلی در زاویهٔ حد، و فرمول هاگن ـ روبنز برای ضریب انعکاس رساناها در فرکانس رادیویی همگی از این معادله‌ها نتیجه می‌شوند.

۴. برای فرود مایل برمحیط رسانا، انتشار و تضعیف با $\kappa_r=N\omega/c$ و $\kappa_i=q\omega/c$ توصیف می‌شوند، سطوح فاز ثابت با مرز زاویهٔ Θ می‌سازند وسطوح دامنهٔ ثابت بامرز موازی‌اند.

$$N=\sqrt{p^2+n_1^2\sin^2\theta_1}$$

$$\sin\Theta=n_1\sin\theta_1/N$$

کمیتهای p و q تعمیم کمیتهای n و k هستند و ارتباط آنها به $(K_r-K_1\sin^2\theta_1)$ و K_i مانند ارتباط n و k است به‌آنها به‌ازای $\theta_1=0$. انعکاس کلی در زوایای بزرگتر از زاویهٔ حد نیز بااین کمیتها توجیه می‌شود.

۵. برای دومرزتخت موازی، دامنهٔ نسبی موج انعکاسی باروش برهمنهی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$r=\frac{r_{12}+r_{23}e^{i\hat{\beta}}}{1+r_{12}r_{23}e^{i\hat{\beta}}}$$

که درآن

$$\hat{\beta}=2d\frac{\omega}{c}\hat{n}_2\cos\theta_2=2d\frac{\omega}{c}(p+iq)$$

که $\hat{\beta}$ انتقال فاز (و تضعیف) برای دوبار پیمودن لایه است. ضریب انعکاس کل عبارت است از

$$R=rr^*$$

$$1-R=T+A$$

که درآن اگر لایه نارسانا باشد $A=0$ است. از طریق β، R اثرات تداخلی از خود نشان می‌دهد که این اثرات به (d/λ_1) بستگی دارند. برای مورد لایهٔ رسانا یا انعکاس کلی تضعیف شده، اگر $d \gtrsim \delta$ باشد

$$T\sim e^{-2d/\delta}$$

که درآن δ طول تضعیف است.

۶. اگرطول موج درخلأ $\lambda_0=2\pi c/\omega$ ازطول موج قطع λ_c، که به‌ابعاد موجبر بستگی دارد، کوتاهتر باشد امواج در موجبر بدون تضعیف انتشار می‌یابند (بااین فرض که مرزها منعکس‌کننده‌های کاملی هستند).

$$\frac{1}{\lambda_g^2}=\frac{1}{\lambda_0^2}-\frac{1}{\lambda_c^2}$$

که درآن λ_g طول موج هدایت شده درموجبراست. سرعت گروه (سرعت انتشار انرژی) v_g است و

$$v_g v_p=c^2$$

برای یك موجبرمکعب مستطیل شکل که درآن $a>b$ است، درمد TE_{mn} داریم

$$\frac{1}{\lambda_c^2}=\left(\frac{m}{2a}\right)^2+\left(\frac{n}{2b}\right)^2$$

معمولا λ_0 را به‌مقادیری محدود می‌کنند که تنها مد TE_{10} بتواند انتشار بیابد.

۷. برای امواج تختی که تضعیف می‌شوند یا در موجبری هدایت می‌شوند (و همچنین برای امواج کروی) در روی سطح فاز ثابت، دامنه ثابت نیست. چنین امواجی ناهمگن نامیده می‌شوند. برای این امواج بردار پوئین‌تینگ پیچیده‌تر ازامواج تخت همگنی‌است که درمحیطی دی‌الکتریك انتشارمی‌یابند.

مسائل

۱.۱۸ برای موجی با قطبش s که از هوا تحت زاویهٔ بروستر، $\theta_1=\theta_B$، برروی یك دی‌الکتریك فرودمی‌آید، ضریب‌انعکاس‌فرنل را محاسبه‌کنید. اگر $n=1.5$ باشد،ضریب انعکاس چه مقدارخواهد بود؟

۲.۱۸ موجی باقطبش p از هوا برروی سطح یك دی‌الکتریك تقریباً به‌طور خراشان، $\theta_1=\pi/2-\delta$ ، فرود می‌آید. شیب منحنی $R_p(\theta_1)$ را هنگامی‌که δ به‌صفر میل‌می‌کند، برحسب ثابت دی‌الکتریك K پیدا کنید.

۳.۱۸ موجی باقطبش p ازمحیط شفافی باثابت دی‌الکتریك K برروی‌مرزهوا بازاویه‌ای اندکی کمتر از زاویهٔ حد، $\theta_1=\theta_c-\delta$، فرود می‌آید. به‌طور تقریبی R_p را به‌صورت تابعی از δ هنگامی که δ به‌صفر میل می‌کند به‌دست آورید، و نشان دهید که شیب منحنی $R_p(\theta_1)$ در θ_c بینهایت است.

۴.۱۸ فرض‌کنید ضریب شکست یك الیاف نوری $n=1.55$ است. اگر الیاف باهوا احاطه شده باشد، بزرگترین زاویهٔ بین محورالیاف وپرتونوری‌که بتواند درامتداد الیاف انتشار بیابد چقدراست؟ اگر الیاف‌را روکشی باضریب شکست ۱٫۵۳ احاطه کرده‌باشد، این زاویه چقدراست؟

۵.۱۸ یك موج نوری باقطبش p درهوا ازیك سطح فلزی منعکس می‌شود. بافرض‌آنکه $\cos\theta_2\cong 1$ (فرضی‌که غالباً صحیح است) R_p را محاسبه کنید. مقدار θ_1 راکه در آن R_p مینیمم می‌شود پیدا کنید . این مقدار θ_1 و R_p مربوط را به ازای $n=1$ ، $k=6$ (مقادیرمناسب برای آلومینیم) محاسبه‌کنید.

۶.۱۸ موج تختی ازهوا به‌طور عمود برروی مرز تخت فلزی فرود می‌آید . فرض کنید فرکانس موج درگستره‌ای است که $n\cong k\gg 1$. از ضریب انتقال فرنل ، $|E_2|^2$ را درست در داخل سطح فلزمحاسبه کنید. اتلاف انرژی در واحد حجم‌را در نزدیکی سطح

محاسبه کنید، ومقدار آن‌را برای حالتی که دامنهٔ فرودی $E_1 = 10\,\mathrm{V/cm}$ و فرکانس $f = 10^{10}\,\mathrm{Hz}$ است، به‌دست آورید.

۷.۱۸ موجی بافرکانسی درگسترهٔ اعتبار رابطهٔ هاگن ـ روبنز در هوا به‌طورمایل بازاویهٔ θ_1 برروی سطح رسانایی فرود می‌آید. نشان دهید به جای معادلهٔ (۶۰.۱۸) روابط زیر را خواهیم داشت

$$A_s = \frac{2\cos\theta_1}{k}, \qquad A_p = \frac{2}{k\cos\theta_1}$$

۸.۱۸ موجی درهوا به‌طورعمود برسطح رسانایی فرود می‌آید وازآن منعکس می‌شود. از $\hat{r}_{12s}$ نشان دهیدکه انتقال فاربردار E برابر است با

$$\alpha_s = \tan^{-1}\frac{2k}{n^2+k^2-1}$$

نشان دهید این نتیجه برای حالت رسانندگی بینهایت به $\alpha_s = \pi$ تبدیل می‌شود.

۹.۱۸ فرض کنید یك موج رادیویی با $\omega = 10^7 s^{-1}$ به‌طور عمود برسطح زمین فرود می‌آید و از آن منعکس می‌شود. از نتیجهٔ مسئلهٔ ۸.۱۸ انتقال فاز ناشی از انعکاس را محاسبه کنید. فرض کنید برای این ناحیه از زمین $K = 9$ و $g = 10^{-4}\,(\Omega\mathrm{m})^{-1}$ است.

۱۰.۱۸ محیط دی‌الکتریکی باضریب شکست n_3 بالایه‌ای به‌ضریب شکست n_2 اندود شده است ، و موجی از محیط دی‌الکتریك n_1 برروی آن فرود می‌آید. نشان دهید که به‌ازای $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$ داریم $r_{12} = r_{23}$ وبنابراین به‌ازای $\cos\beta = -1$ درفرود عمود، $R = 0$ است.

۱۱.۱۸ باریکه‌ای ازنورتکفام (بافرکانس ω) درهوا برروی پوسهٔ دی‌الکتریکی به‌ضریب شکست n به‌طورعمود فرود می‌آید. ضخامت پوسه d است. بابرآوردن شرایط مرزی‌در دو وجه پوسه، ضرایب شکست وانتقال را برحسب تابعی از d و n به‌دست آورید. علاوه براموامواج فرودی E_1، انعکاسی E_1'، و انتقالی E_3، فرض کنید در داخل پوسه امواجی وجود دارندکه به‌سمت راست E_2، وبه‌سمت چپ E_2'، درحرکت‌اند.

۱۲.۱۸ معادلهٔ ماتریسی زیررا درنظربگیرید

$$\begin{pmatrix} E_m \\ E_m' \end{pmatrix} = (C_m)\begin{pmatrix} E_{m+1} \\ E_{m+1}' \end{pmatrix}$$

که در آن

$$(C_m)=\frac{1}{t_{m,\,m+1}}\begin{pmatrix} e^{i(1/2)\beta m} & r_{m,\,m+1}e^{i(1/2)\beta m} \\ r_{m,\,m+1}e^{-i(1/2)\beta m} & e^{-i(1/2)\beta m} \end{pmatrix}$$

(الف) تحقیق کنید که نتایج مربوط به‌فصل مشترك بین دو دی‌الکتریك‌ازرابطهٔ زیر، با $\beta_1=0$، به‌دست می‌آید

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_1' \end{pmatrix}=(C_1)\begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ب) به‌ازای $\beta_2=2d_2(\omega/c)n_2\cos\theta_2$ تحقیق کنید که نتایج مربوط به دو فصل مشترك ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_1' \end{pmatrix}=(C_1)\,(C_2)\begin{pmatrix} E_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

این روش برای تعمیم به‌دستگاهی شامل لایه‌های چندگانه‌ای که بامرزهای تخت ازهم‌جدا شده باشند، مناسب است.

۱۳.۱۸ یك سطح فلزی بالایه‌ای ازدی‌الکتریك اندود شده است. بافرض آنکه فلز یك رسانای‌کامل است ($g=\infty$)، ضریب انعکاس حاصل را محاسبه‌کنید.

۱۴.۱۸ برروی سطح یك پوسهٔ فلزی‌که بدون حائل در هوا واقع است، تابشی به‌طور عمودی فرود می‌آید. فرض کنید پوسه به‌حد کافی ضخیم است به‌طوری که می‌توان از انعکاسهای مکرر چشمپوشی‌کرد. ضریب انتقال T را برحسب n و kی فلزمحاسبه کنید.

۱۵.۱۸ برهٔ دی‌الکتریکی‌را درنظربگیرید که به‌قدری ضخیم‌است که باریکه‌های‌انعکاسی چندگانه نمی‌توانند باهم به‌طور همدوس تداخل کنند. باجمع‌کردن تمام شدتها ضریب انعکاس‌کل‌را برحسب ضرایب انعکاس R_{12} و R_{23} مربوط به‌هر یك ازمرزها به‌دست آورید.نتیجه را درحالت خاص برای موردی‌که درآن محیطهای دو طرف بره یکسان‌اند، به‌دست آورید.

۱۶.۱۸ چگالی بارسطحی وجریان درواحد پهنا برروی سطح یك رسانای کامل را که امواج تخت الکترومغناطیسی برآن فرود می‌آیند، برای دومورد زیربه‌دست آورید: (۱) بردار الکتریکی عمود برصفحهٔ فرود، (۲) بردارالکتریکی به‌موازات صفحهٔ فرود.

۱۷.۱۸ برای امواج TM که درصفحهٔ yz بین دوصفحهٔ رسانای کامل، واقع در $y=0$

و $y = a$، انتشارمی‌یابند $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ را تعیین کنید.

۱۸.۱۸ موج TMی را درنظر بگیرید که دریك موجبر مستطیلی ($H_z = 0$) درجهت z باطول موج λ_g انتشارمی‌یابد. نشان دهید که معادلهٔ زیر

$$E_z = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{2\pi i z/\lambda_g}$$

درمعادلهٔ (۱۲۳.۱۸) ودرشرایط مرزی صدق‌می‌کند. فرکانس‌قطع برای مد TM_{11} چیست؟ چرا مد TM_{10} وجود ندارد؟

۱۹.۱۸ برای موجبری بامقطعی مربع شکل به‌ضلع a، مقادیرحدی a را برای آنکه بتواند موجی باطول موج λ را درمد TE_{10} انتقال دهد ولی درمدهای TE_{11} یا TM_{11} انتقال ندهد، تعیین کنید.

۲۰.۱۸ میدانهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{H}$ را برای‌حفرهٔ مکعب‌شکلی به‌ضلع a برای‌مد TE_{101} بنویسید. توزیعهای میدان را درسرتاسرمکعب به‌طورتقریبی رسم کنید.

۱۹

پاشندگی نوری در مواد

چگونگی انتشار امواج الکترومغناطیسی در محیطهای مادی خطی، به‌طور کامل با ثابتهای اپتیکی n و k تعیین می‌شود. این ثابتها تنها به‌ثابت دی‌الکتریك K و رسانندگی gی ماده بستگی دارند. تاکنون این پارامترها را مقادیری مفروض درنظر می‌گرفتیم، البته‌متذکر شدیم که ممکن است این مقادیر به‌فرکانس موج بستگی داشته باشند (ودر واقع همواره بستگی دارند)، ودر گسترهٔ از dc تا پرتوهای x تغییرات آنها بسیارزیاد باشد. برای آنکه به‌هنگام کاربرد نتایج نظریهٔ تابش الکترومغناطیسی بتوانیم به‌درستی قضاوت کنیم باید تا حدودی بدانیم که این تغییرات، که به پاشندگی معروف است، برچه اصولی مبتنی هستند. اکنون یك مدل میکروسکوپی ازمواد را ارائه می‌دهیم که رفتارمواد را پیشگویی می‌کند. این مدل تعمیم acی مدلهایی است که به‌اجمال درفصلهای ۵ و ۷ برای dc بررسی‌شدند. این مدل، که به‌نظریهٔ درود ـ لورنتس[1] معروف است، براین پایه مبتنی‌است که ذرات باردار تشکیل دهندهٔ ماده به صورت نوسانگرهای هماهنگ کلاسیك یا به‌صورت ذرات آزاد در نظر گرفته شوند.

۱.۱۹ مدل نوسانگرهماهنگ درود ـ لورنتس

کلیهٔ مواد عادی ازالکترونهای منفی‌وهسته‌های مثبت‌تشکیل‌شده‌اند. دراینجا، فرض‌می‌کنیم

---

1. Drude-Lorentz

که تعدادی از الکترونها (کمتر یا بیشتر از بار هسته‌ای، Z) محکم به هسته مقیدند و با آن حرکت می‌کنند؛ این شیٔ مرکب یك یون باردار است. الکترونها و یونها را به‌صورت نوسانگرهای هماهنگ، یعنی ذراتی که با یك نیروی بازگرداننده به یك موضع تعادل مقید می‌شوند در نظر خواهیم گرفت. برای حفظ کلیت فرض می‌کنیم نوسانگرهای هماهنگ میراهستند و برای هریك نیروی میراننده‌ای متناسب با سرعت منظور می‌کنیم. هنگامی که موج الکترومغناطیسی وجود داشته باشد، هر نوسانگر با میدان الکتریکی موج رانده می‌شود.[1] پاسخ محیط را باجمع زدن حرکتهای ذرات آن به‌دست می‌آوریم؛ البته چون فرض کردیم که نیروها خطی‌اند، K و g که از این مدل نتیجه می‌شوند ثابت خواهند بود (یعنی، مستقل از E، هرچند که به فرکانس بستگی خواهند داشت). چنانچه این مدل را برای الکترونها به‌کار ببریم، الکترونهای مقید در اتمها را توصیف خواهد کرد، ولی چنانچه فقط ثابت نیروی بازگرداننده را مساوی صفر قرار دهیم، الکترونهای آزاد را نیز می‌توانیم به‌صورت حالت خاص منظور کنیم.

معادلهٔ حرکت کلاسیك[2] برای نوسانگر یك بعدی میرای واداشته عبارت است از

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+G\frac{dx}{dt}+Cx=eE_m \qquad (۱.۱۹)$$

یا

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\frac{eE_m}{m} \qquad (۲.۱۹)$$

که در آن e و m بار و جرم ذره، و E_m «میدان مولکولی» است که در فصل ۵ بحث شد. ابعاد ثابت میرایی، $\gamma=G/m$، با ابعاد فرکانس یکی است. فرکانس طبیعی مربوط به نوسانگر نامیرا، ω_0، از طریق رابطهٔ $m\omega_0^2=C$ به ثابت نیرو، C، مربوط می‌شود. در فصل ۵ ثابت نیرو برای الکترونهای مقید پوسته‌های خارجی برحسب «شعاع» اتم، R_0، بیان شد. در حالت ایستا x به t بستگی ندارد، پس معادلهٔ (۲.۱۹) با معادلهٔ (۱۲.۵) یکی می‌شود که در آن

$$\omega_0^2=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mR_0^3} \qquad (۳.۱۹)$$

---

۱. نیروی لورنتس عبارت است از $\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$، ولی برای امواج $B=(n/c)E$. نیروی مغناطیسی به‌مقدار $n(v/c)$ از نیروی الکتریکی کوچکتر است و ما از آن چشمپوشی می‌کنیم. به‌هرجهت نیروی مغناطیسی برروی ذره کار انجام نمی‌دهد چون بر $\mathbf{v}$ عمود است.

۲. البته برای الکترونها باید مکانیك کوانتومی به‌کار برده شود. ولی حل کلاسیك سودمند است زیرا تصادفاً باجواب حل کوانتومی، چنانچه فرکانس طبیعی ω_0 به‌نحو مناسب تفسیر شود، یکی است.

برای الکترونهای آزاد، درمعادلهٔ (۲.۱۹)، ω_0 را برابرصفر قرارمی‌دهیم که در آن‌صورت بامعادلهٔ (۳۱.۷) یکی می‌شود که در آن

$$\gamma = \frac{1}{\tau} \qquad (۴.۱۹)$$

که در آن τ زمان متوسط بین برخوردهاست. دربارهٔ مقادیرمناسب ω_0 و γ برای حالتهای دیگر بعداً بحث خواهد شد. برای آنکه برهم‌کنش متقابل بین ذرات را به‌حساب آورده باشیم، فرض می‌کنیم میدان E_m برطبق رابطهٔ زیر به میدان الکتریکی موج، E، مربوط می‌شود

$$E_m = E + \frac{\nu}{\varepsilon_0} P \qquad (۵.۱۹)$$

که در اینجا P قطبش محیط است. در معادلهٔ (۷.۵) نشان دادیم که برای دی‌الکتریکی همسانگرد وغیرقطبی، $\nu = ۱/۳$. برای فلزات، $\nu = 0$. دراینجا قصداصلی ما این‌نیست که مسئلهٔ دشوارتصحیح مناسب میدان موضعی‌را بررسی کنیم. بنابراین ما تنها آن را به‌صورت ν باقی‌می‌گذاریم وکوشش خواهیم کرد دربررسی زیرآن‌را ازملاحظات خودحذف کنیم. فرض‌می‌کنیم که E_m و P نیزبه‌مانند E به‌طورسینوسی به‌زمان وموضع بستگی‌داشته‌باشند، یا به‌صورت مختلط، به‌شکل زیر

$$E_m = \hat{E}_m e^{-i(\omega t - \kappa \cdot r)}$$

درکاربردهای ما طول موج $\lambda = ۲\pi/\kappa$ بسیاربزرگتر ازاندازهٔ ناحیه‌ای است که در آن ذره حرکت می‌کند. برای مثال، درمعادلهٔ (۳.۱۹)، R_0 برابربا ۱ یا ۲ آنگستروم است و برای نورمرئی $\lambda \cong ۵۰۰۰$ Å است. بنابراین تغییرات مکانی E_m درناحیهٔ مکانهای ذره قابل چشمپوشی است؛ به‌بیان دیگر، می‌توانیم فرض کنیم که

$$\kappa = 0 \qquad (۶.۱۹)$$

یعنی فرض می‌کنیم میدان یکنواخت است

$$E_m = \hat{E}_m e^{-i\omega t} \qquad (۷.۱۹)$$

بافرض معادلهٔ (۷.۱۹)، جوابهای حالت پایای معادلهٔ (۲.۱۹) باروش مشهور جایگزینی زیر

$$x(t) = x\hat{e}^{-i\omega t} \qquad (۸.۱۹)$$

وتعیین‌دامنهٔ مجهول $\hat{x}$ به‌نحوی که برای فرکانس‌مفروض ω در (۲.۱۹) صدق کند، به‌دست

می‌آید. نتیجه عبارت است از

$$\hat{x}=\frac{eE_m/m}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega} \qquad (۹.۱۹)$$

دامنهٔ حرکت ذره بامیدان وادارندهٔ E_m متناسب است و، تابعی است از فرکانس وادارنده که به‌ازای $\omega=\omega_0$ خیلی بزرگ است (تشدید). در غیاب میرایی، دامنهٔ تشدید بینهایت خواهدبود، بنابراین یك‌مدل واقعی به‌نوعی میرایی نیازدارد.[1] درمسئلهٔ نوسانگرمکانیکی (وهمچنین درمسئلهٔ مدار LRC، که ازنظرریاضی باآن یکسان است)، عموماً نتیجهٔ مختلط را به‌صورت قطبی بیان می‌کنند تا دامنهٔ حقیقی وفاز را نشان دهند، ولی در اینجا ما این نتیجه را فعلا به‌همین صورت رها می‌کنیم.

رابطهٔ بین جابه‌جایی مکانیکی ذرات باردار میکروسکوپی تشکیل دهندهٔ ماده (x) وپاسخ الکتریکی ماکروسکوپی محیط، بامحاسبهٔ چگالی قطبش (P) به‌دست می‌آید. گشتاور دوقطبی ناشی ازجابه‌جایی بار e، برابراست با ex (بافرض آنکه بار $-e$ که بار e را خنثی می‌کند، در سکون باقی بماند). بنابراین

$$P=Nex \qquad (۱۰.۱۹)$$

که درآن N تعداد بارها در واحد حجم است. اکنون فرض می‌شودکه پاسخ P متناسب است بامیدان اعمال شدهٔ E (مربوط به‌موج)

$$P=\chi E \qquad (۱۱.۱۹)$$

که درآن

$$\varepsilon=\varepsilon_0+\chi$$

$$K=1+\chi/\varepsilon_0 \qquad (۱۲.۱۹)$$

ازمعادلات (۹.۱۹) تا (۱۱.۱۹) داریم

$$\chi E=\frac{Ne^2/m}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}E_m$$

و ازمعادلات (۵.۱۹) و (۱۱.۱۹)، داریم

---

۱. همچنین، بدون میرایی هرگز به‌جواب حالت پایا نخواهیم رسید، زیرا جواب گذرا هرگز از بین نخواهد رفت.

$$E_m=(1+\nu\chi/\varepsilon_0)E$$

بنابراین

$$\frac{\chi}{1+\nu\chi/\varepsilon_0}=\frac{Ne^2/m}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}$$

ازمعادلهٔ (۱۲.۱۹) داریم

$$\chi=\varepsilon_0(K-1)$$

بنابراین ثابت دی‌الکتریك بدون بعد بارابطهٔ زیرداده می‌شود

$$\frac{K-1}{1+\nu(K-1)}=\frac{Ne^2/\varepsilon_0 m}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}$$

استفاده از کوتاه نویسی زیرمناسب است

$$\omega_p^2=\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \qquad (۱۳.۱۹)$$

برحسب ω_p، داریم

$$\frac{K-1}{1+\nu(K-1)}=\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega} \qquad (۱۴.۱۹)$$

این معادله همان رابطه‌ای است که به‌دنبال آن بودیم : رابطهٔ بین ثابت دی‌الکتریك ماکروسکوپی K وخواص میکروسکوپی ذرات باردارتشکیل دهندهٔ محیط. دو ویژگی‌مهم این نتیجه را باید متذکرشویم: اولا K مختلط است وثانیاً به‌فرکانس بستگی‌دارد. بنابراین ساده‌ترین مدلی راکه به‌طور خودکار می‌توانیم بسازیم ایجاب می‌کند که محیط رسانا و پاشنده باشد.

قبل ازآنکه دربارهٔ پیامدهای این مدل بحث کنیم می‌بایست تعمیم ساده‌ای ازآن را مطرح کنیم. این تعمیم مواردکاربرد مدل‌را به‌اکثرمواد واقعی گسترش می‌دهد. مواردی که درآن تمامی ذرات باردارماده خواص یکسانی داشته باشند، نادراست. برای مثال، ذرات باردار‌را می‌توان به‌الکترونها ویونها، یا به‌الکترونهای متعلق به‌مدارهای مختلف داخلی و خارجی یك‌اتم تقسیم کرد. اگر تعداد N_i ذره به‌بار e_i، جرم m_i، فرکانس تشدید طبیعی ω_{0i}، وفرکانس میرایی γ_i وجود داشته باشد،آنگاه بادنبال‌کردن همان اثباتی که در فوق آمد به‌نتیجهٔ زیرمی‌رسیم

$$\frac{K-1}{1+\nu(K-1)}=\sum_i\frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{0i}^2-\omega^2-i\gamma_i\omega} \qquad (۱۵.۱۹)$$

اگر تمام ذرات، بار و جرم یکسانی داشته باشند (برای مثال، اگر همه الکترون باشند ولی درمدارهای مختلف)، این معادله را به‌صورت زیر می‌توان نوشت

$$\frac{K-1}{1+\nu(K-1)}=\omega_p^2\sum_i\frac{f_i}{\omega_{0i}^2-\omega^2-i\gamma_i\omega} \qquad (۱۶.۱۹)$$

که دراینجا $f_i=N_i/N$ کسری ازنوسانگرهاست که ازنوع i هستند. چون $\sum N_i=N$، بنابراین

$$\sum f_i=1 \qquad (۱۷.۱۹)$$

(درتعبیر کوانتوم مکانیکی این نتیجه، f_i به‌قدرت نوسانگرموسوم است ومعادلهٔ (۱۷.۱۹) قاعدهٔ جمع f نامیده می‌شود.) ما دراینجا بحث خودرا به‌حالتهایی محدود می‌کنیم که به ریزه‌کاریهای تصحیح میدان موضعی، ν، بستگی ندارند. اگر میدان موضعی لورنتس ($\nu=1/3$) صادق باشد، معادلهٔ (۱۶.۱۹) تبدیل می‌شود به

$$\frac{K-1}{K+2}=\frac{1}{3}\omega_p^2\sum\frac{f_i}{\omega_{0i}^2-\omega^2-i\gamma_i\omega} \qquad (۱۸.۱۹)$$

ازآنجاکه ω_p^2 با N متناسب است، این معادله تعمیمی‌است ازمعادلهٔ کلاؤسیوس–موساتی. به‌دست‌آوردن K از معادلات (۱۵.۱۹) یا (۱۸.۱۹) آسان، ودربعضی موارد نتیجه مفید است، ولی این‌کارنحوهٔ بستگی K به‌فرکانس‌را، که موضوع اصلی این‌فصل‌است‌به‌روشنی آشکارنخواهدکرد. ولی اگر $\nu=0$ باشد، معادلهٔ (۱۵.۱۹) به‌صورت زیرساده می‌شود

$$K-1=\sum\frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{0i}^2-\omega^2-i\gamma_i\omega} \qquad (۱۹.۱۹)$$

همچنین درفرکانسهایی‌که برای‌آن مقدار K خیلی با ۱ تفاوت نداشته باشد، این معادله به‌ازای هرمقداری برای ν معتبراست. به‌علاوه، در فرکانسهایی‌که به‌ازای آنها یکی از قله‌های تشدید معادلهٔ (۱۵.۱۹) برتمامی قله‌های دیگر غالب می‌شود، می‌توانیم ν را از ملاحظات خود حذف‌کنیم:

$$(K-1)(\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega)=[1+\nu(K-1)]\omega_p^2$$

درنتیجه

$$K-1=\frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2-\nu\omega_p^2)-\omega^2-i\gamma\omega} \qquad (۲۰.۱۹)$$

این نتیجه با نتیجهٔ مربوط به‌یك قلهٔ تشدید منفرد با تصحیح میدان موضعی صفر و فرکانس تشدید مؤثری برابر با $\sqrt{\omega_0^2-\nu\omega_p^2}$، یکسان است. بنابراین، می‌توانیم بحث تفصیلی خود دربارهٔ بستگی $\hat{K}$ به فرکانس را تنها به قلهٔ تشدید محدود کنیم

$$\hat{K}-1=\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega} \qquad (۲۱.۱۹)$$

و در عین حال می‌توانیم این نتایج را در مورد مسائل عملی بسیاری به‌کار ببریم. با نوشتن معادلهٔ (۲۱.۱۹) برحسب قسمتهای حقیقی و موهومی داریم

$$K_r=1+\frac{\omega_p^2(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2} \qquad (۲۲.۱۹)$$

$$K_i=\frac{\omega_p^2\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2} \qquad (۲۳.۱۹)$$

حال این مقادیر را می‌توانیم به‌منظور به‌دست‌آوردن عبارات صریحی برای پاشندگی n و k برحسب فرکانس، درمعادله‌های (۵۲.۱۷) قرار دهیم

$$n=\sqrt{\frac{1}{2}[K_r+\sqrt{K_r^2+K_i^2}]}$$

$$k=\sqrt{\frac{1}{2}[-K_r+\sqrt{K_r^2+K_i^2}]} \qquad (۲۴.۱۹)$$

ولی، این نتایج به‌قدری پیچیده‌اند که هیچ‌یك از ویژگیهای کلی پاشندگی آشکار نخواهد شد. در بخشهای ذیل ما موارد گوناگونی را بررسی خواهیم کرد که از نظر عملی مورد توجه‌اند و درآنها با درنظرگرفتن فرضهایی می‌توانیم روابط را ساده کنیم.

قبل ازآنکه به‌این مثالها بپردازیم، دربارهٔ ویژگی مهم دیگرنتیجهٔ معادلهٔ (۲۱.۱۹) نیز باید تذکری بدهیم، یعنی دربارهٔ این ویژگی که $\hat{K}$ مختلط است. هرچندکه مدل فوق رابرای بارهای مقید ساختیم، ولی $\hat{K}$ی مختلطی که به‌دست‌آمد مشخصهٔ محیطهای رساناست. بدون آنکه تعمداً چگالی جریان رسانش J را وارد کرده باشیم رسانندگی غیر صفری، $g=K_i\varepsilon_0\omega$، وجود دارد. به‌علاوه، درحالت بارهای آزاد که $\omega_0=0$ است، بازهم ثابت دی الکتریکی، $K_r=K$، وجود دارد که مشخصهٔ محیطهای دی‌الکتریك است. در این مدل به‌طورخودکارهم قسمت حقیقی و هم‌قسمت موهومی $\hat{K}$، که به جریان جابه‌جایی $\partial D/\partial t$ وجریان رسانش J درمعادلهٔ ماکسول برای تاو H مربوط‌می‌شوند، به‌طور مشابه وارد می‌شوند. درمدل خود می‌توانستیم به‌جای محاسبهٔ $P=Nex$، چگالی جریان را محاسبه کنیم

$$J = Ne\frac{dx}{dt} = -i\omega Nex$$

و از آن عبارتی برای رسانندگی g به دست آوریم. واضح است که درآن صورت نتایج زیر به‌دست می‌آمدند

$$J = \frac{dP}{dt} = -i\omega P$$

و

$$\hat{g} = -i\omega\hat{\chi} \qquad (۲۵.۱۹)$$

ما باید یا P را محاسبه کنیم یا J را ولی نه هردوی آنها را زیرا این دو عبارات معادلی برای این واقعیت‌اند که یا جابه‌جایی ذره یك مؤلفهٔ همفاز با میدان E و همچنین یك مؤلفهٔ با اختلاف فاز $۹۰°$ دارد، یا آنکه سرعت ذره یك‌مؤلفهٔ غیرهمفاز و یك مؤلفهٔ همفاز دارد. برای میدانهای ساکن، جابه‌جایی بارهای مقید با میدان متناسب (همفاز) و سرعت بارهای آزاد با میدان متناسب (همفاز) است؛ ولی در فرکانسهای بالا جابه‌جایی و سرعت بارهای مقید وآزاد هردومی‌توانند مؤلفه‌های همفاز وناهمفاز با میدان داشته باشند. بحث زیر را می‌توان تماماً برحسب رسانندگی مختلط مطابق معادلهٔ (۲۵.۱۹)، به‌جای $\hat{K}$، فرمولبندی کرد؛ در بعضی موارد چنین فرمولبندیی متداولتر است. روابط میان رسانندگی مختلط و ثابت دی الکتریك مختلط عبارت‌اند از

$$\hat{g} = -i\varepsilon_{\circ}\omega(\hat{K} - ۱) \qquad (۲۶.۱۹)$$

$$g_r = \varepsilon_{\circ}\omega K_i, \qquad g_i = -\varepsilon_{\circ}\omega(K_r - ۱)$$

همانطور که انتظار می‌رفت، $g_r = g$ رسانندگی واقعی است، و g_i به ثابت دی‌الکتریك حقیقی مربوط است.

۲.۱۹ جذب تشدیدی توسط بارهای مقید

به عنوان اولین مثال، کاربرد معادلات (۲۲.۱۹) تا (۲۴.۱۹) را در مورد بارهای مقید، یعنی، کاربرد آنها در مورد موادی که برای dc نارسانا هستند را، بررسی می‌کنیم. برای براوردکردن اندازهٔ پارامترها درمعادلات (۲۲.۱۹) و (۲۳.۱۹) برای الکترونهای ظرفیت، فرض کنید در معادلهٔ (۳.۱۹) داریم $R_{\circ} = ۲\text{Å}$

$$\omega_{\circ} = \sqrt{\frac{(۱٫۶\times ۱۰^{-۱۹})^{۲}}{۴\pi(۸٫۸۵۴\times ۱۰^{-۱۲})(۰٫۹۱\times ۱۰^{-۳۰})(۲\times ۱۰^{-۱۰})^{۳}}}$$
$$= ۵٫۶\times ۱۰^{۱۵}\,\text{s}^{-۱}$$

این فرکانس تشدید الکترون متناظر است باطول موج ۳۳۵۰Å (۳۳۵ nm) در هوا، که درناحیهٔ فرابنفش درست بعد از طیف مرئی واقع است. اگر R_0 بزرگتریا کوچکتر باشد، طول موج تشدیدبلندتریا کوتاهترخواهد شد. ازترکیب معادلهٔ (۳.۱۹) بامعادلهٔ (۱۳.۱۹) که ω_p توسط آن تعریف می‌شود، داریم

$$\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} = 4\pi R_0^3 N = 3NV_a \qquad (27.19)$$

که درآن V_a حجم «اتم» است. بنابراین، اگر اتمها تنگاتنگ هم چیده شده باشند، مانند هنگامی که درمایعات یا جامدات چگالیده می‌شوند، داریم

$$\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \approx 1 \qquad (28.19)$$

هنگامی که اتمها بـا چگالی کمتری انبوهیده شوند، مثلا درگازها (یا در محلولها)، این نسبت بـه تناسب کوچکتر است زیرا N کوچکتر است ولی معمولا حالت انبوهش روی ω_0 تأثیر زیادی نمی گذارد. همچنین این نسبت برای الکترونهای پوسته‌هـای داخلی که محکمتر مقیدند و مدارهای کوچکتری دارنـد، خیلی از ۱ کوچکتر است. براورد مقادیر معقول برای فرکانس میرایی γ مشکلتر است. برای به دست آوردن بینش بیشتری دربارهٔ معنای γ ، به‌معادلهٔ (۲.۱۹) برمی‌گردیم و حالت نوسانگر آزاد بـا $E_m = 0$ را بررسی می‌کنیم. حل این معادله نیز مشهور است

$$x = x_0 e^{-\gamma t/2} e^{-i\omega_0' t} \qquad (29.19)$$

کـه در آن

$$\omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2}$$

اگر γ کوچك باشد، ω'_0 با ω_0 تقریباً یکی است. دامنهٔ نوسان به‌صورت $e^{-\gamma t/2}$ افت می‌کند، و انرژی نوسان که با مجذور دامنه متناسب است، به صورت $e^{-\gamma t}$ افت می‌کند. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم

$$\gamma = \frac{1}{\tau} \qquad (30.19)$$

که درآن τ زمان متوسط فروافت انرژی نوسانگر است. معنای τ دراین معادله با معنای آن درمعادلهٔ (۴.۱۹) برای الکترونهای آزاد، یکی نیست ولی با هم مشابه‌اند: درهر دو مورد τ زمان متوسط اتلاف انرژی است (انرژی نوسانگر هماهنگ آزاد در یك مورد وانرژی

پروازِ آزاد در مورد دیگر) . ذرهٔ نوسان‌کننده با از دست دادن انرژی نوسان خود الزاماً انرژی الکترومغناطیسی تابش می‌کند. درفصل بعدنشان خواهیم داد که آهنگ تابش به صورت زیر به آهنگ فروافت مربوط می‌شود

$$\frac{\gamma}{\omega_0}=\frac{4\pi}{3}\frac{R_e}{\lambda_0} \qquad (۳۱.۱۹)$$

که در آن

$$R_e=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}=2.81\times 10^{-15}\mathrm{m} \qquad (۳۲.۱۹)$$

و $\lambda_0=2\pi c/\omega_0$ طول‌موج متناظر با ω_0 درخلأ است. R_e مشهور به‌شعاع کلاسیک الکترون است. (به مسئلهٔ ۴.۶ رجوع کنید.[1]) حتی برای پرتوهای x ($\lambda_0\approx 1\text{Å}=10^{-10}\,\mathrm{m}$) میرایی ناشی از این سازوکار نسبت به‌فرکانس تشدید فوق‌العاده کوچك است. معمولا مدهای فروافت دیگری، ناشی از برهم‌کنش با سایر ذرات (برخوردها)، وجود دارد که باعث می‌شوند فرکانس میرایی ازآهنگ فروافت تك‌ذره‌ای ناشی ازتابش به‌مراتب بزرگتر باشد. با وجود این، برای کاربردهای این بخش، فرض می‌کنیم که

$$\frac{\gamma}{\omega_0}\ll 1$$

چون فرض شد γ کوچك است، به‌عنوان اولین تقریب از قرار دادن $\gamma=0$ ، هر چندکه غیرفیزیکی است، اطلاعاتی به‌دست خواهدآمد. معادلهٔ (۲۲.۱۹) به‌ازای $\gamma=0$ عبارت است از

$$K_r-1=\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2} \qquad (۳۳.۱۹)$$

که درشکل ۱.۱۹ نشان داده شده است. معادلهٔ (۲۳.۱۹) به‌ازای $\gamma=0$ نتیجه می‌دهد که درتمام فرکانسها $K_i=0$ است به‌جز درفرکانس $\omega=\omega_0$، که درآنجا نامعین است. ولی معادلهٔ (۲۳.۱۹) درحالت کلی درفرکانس $\omega=\omega_0$ نتیجه می‌دهد

$$K_i=\frac{\omega_p^2}{\omega_0}\frac{1}{\gamma} \qquad (۳۴.۱۹)$$

---

۱. توزیع بار در الکترون ازنظر فیزیکی مشاهده پذیر نیست، بنابراین معادلهٔ (۳۲.۱۹) تعریف مناسبتری است ازتعریف توزیع بار یکنواخت.

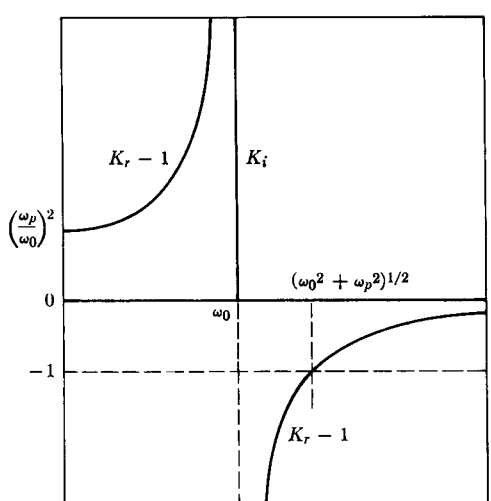
بنا براین، K_i درقلهٔ تشدید متناسب است با $1/\gamma$ و درحد هنگامی که γ به‌صفرمیل می کند بینهایت می‌شود. این حد را می‌توان با تابع دلتای دیراك، که قبلا برای نمایش یك‌توزیع بار نقطه‌ای به‌صورت تابعی ازمکان به‌کار بردیم، به‌صورت تابعی از فرکانس بیان‌کرد

$$K_i = \frac{\omega_p^2}{\omega_0}\frac{\pi}{2}\delta(\omega-\omega_0) \qquad (۳۵.۱۹)$$

ضریب $\pi/2$ طوری انتخاب شده است که انتگرال روی ω

$$\int_0^\infty K_i d\omega = \frac{\omega_p^2}{\omega_0}\frac{\pi}{2}$$

آنطورکه بعداً نشان خواهیم داد، حد صحیح برای $\gamma \to 0$ باشد. چون K_i متناسب است با g ،که اتلاف انرژی درواحد حجم در ماده را مشخص می کند، این تقریب برای $K_i(\omega)$، همانطورکه درشکل ۱.۱۹ نشان داده شده است، نمایشگریك خط جذب بی‌نهایت باریك در $\omega=\omega_0$ است. جالبترین ویژگی‌این شکل آن است که درفرکانسهایی‌بسیار دور



شکل ۱.۱۹ ثابتهای دی‌الکتریك برحسب تابعی از فرکانس برای یك‌خط جذب بسیار قوی و باریك در ω_0.

از ω_0 کـه تنها فرکانسی است که در آن K_i غیر صفر است (برای خلأ)، K_r مقادیری دارد که با ۱ (برای خلأ) بسیارمتفاوت است. تأثیر جذب انرژی در ناحیهٔ اپتیکی در تمام فرکانسها، حتی در dc، در ثابت دی‌الکتریك K (ولی نـه در رسانندگی g) تجلی پیدا می‌کند. برای $\omega = 0$

$$K_r(0) = K_0 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \qquad (۳۶.۱۹)$$

که بنا برمعادلهٔ (۲۸.۱۹) می‌تواند با ۱ به‌طور فاحشی متفاوت باشد. به‌عنوان مثال، مقدار $K_0 = 5.5$ برای الماس قابل درك است، هرچندکه الماس درفرکانسهای کمتراز فرابنفش نـارسانا است. برعکس، برای یك مـادهٔ نـارسانا K تنها در صورتی می‌توانـد بـا ۱ متفاوت باشد که این ماده درنـاحیهٔ دیگری از فرکانس رسانا (جذب کننده) بـاشد. برای محیطی کـه درتمام فرکانسها $g(\omega) = 0$ است الـزامـاً $K(\omega)$ نیز برابر ۱ است؛ یعنی، همانطورکه در زیر خواهیم دید، چنین محیطی با خلأ یکسان است. از طرفی دیگر، در فرکانسهایی بسیار بالاتر از فرکانس جذب، درتمام موارد K به‌سمت ۱ میل می‌کند.

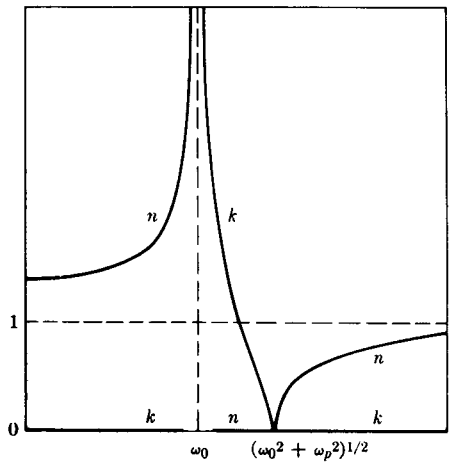
ثابتهای اپتیکی n و k برای این حالت بااستفاده ازتقریبهای (۳۳.۱۹)و(۳۵.۱۹) در (۲۴.۱۹) به‌دست می‌آیند. بجزدر $\omega = \omega_0$ داریم $K_i = 0$، پس‌تقریبهای (۵۳.۱۷) و (۵۴.۱۷) را می‌توان‌به‌کاربرد. ازمعادلهٔ (۳۳.۱۹) در $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$ داریم $K_r = 0$ در فرکانسهای بالاتر از این فرکانس و در فرکانسهای پایینتر از ω_0، K_r مثبت است. در این نواحی

$$n = \sqrt{K_r}\ , \quad k = 0 \qquad (۳۷.۱۹)$$

درناحیهٔ میان این دو ناحیه K_r منفی است، بنابراین

$$n = 0\ , \quad k = \sqrt{-K_r} \qquad (۳۸.۱۹)$$

این توابع درشکل ۲.۱۹ نشان داده شده‌اند. در فرکانسهایی پـایینتر از ω_0 و بـالاتراز $\sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$، مـاده شفـاف است ($k = 0$). پـایینتر از فرکانس تشدید، n بزرگتر از ۱ است و بـا افزایش فرکانس (برای طول موجهای کوتـاهتر) افزایش می‌یابد. این رفتار همان «پاشندگی بهنجار» منشور شیشه‌ای در ناحیهٔ نور مرئی است (یعنی شکست نور آبی بیش از نور قرمز است)، و این رفتار معمول کلیهٔ مواد شفاف است. در بالاتر از فرکانس جذب تشدیدی، n بافرکانس افزایش می‌یابد ولی کمتر ازیك است. این رفتار نیزمشخصهٔ کلیهٔ مواد درناحیهٔ پرتو x است. درست در بالاتر ازتشدید، موج تضعیف می‌شود ($k > 0$) ولی این امـر بـه دلیل تشدید نیست (بجز در دقیقاً ω_0 کـه درآنجا $K_i \neq 0$ است). تضعیف موج به‌علت انعکاس کامل درسطحی است که از آن وارد محیط می‌شود،



شکل ۲.۱۹ ثابتهای اپتیکی برحسب تابعی از فرکانس که از ثابتهای دی‌الکتریك شکل ۱.۱۹ به‌دست آمده‌اند.

$$R=\frac{(n-1)^2+k^2}{(n+1)^2+k^2}$$

که به‌ازای $n=0$ نتیجهٔ $R=1$ را می‌دهد. هرچندکه ضریب انعکاس شیشه در نور مرئی تنها ۰٫۰۴ است، ولی در فرابنفش شیشه می‌بایست منعکس کنندهٔ بسیارخوبی باشد.

برای بررسی تفصیلی تغییرات در نزدیکی ω_0، فرض کنید $\gamma > 0$ ولی هنوز $\gamma \ll \omega_0$. نزدیك به ω_0 (یعنی، در گستره‌ای چند برابر γ پایینتر یا بالاتر از ω_0)، تقریب زیر معتبر است

$$\omega_0^2-\omega^2=(\omega_0+\omega)(\omega_0-\omega)\cong 2\omega_0(\omega_0-\omega)$$

و بنابراین ثابتهای دی‌الکتریك، معادلات (۲۲.۱۹) و (۲۳.۱۹)، به صورت زیر ساده می‌شوند

$$K_r-1=\frac{\omega_p^2}{\omega_0}\,\frac{\frac{1}{2}(\omega_0-\omega)}{(\omega_0-\omega)^2+(\gamma/2)^2} \qquad (۳۹.۱۹)$$

$$K_i = \frac{\omega_p^2}{\omega_\circ} \frac{\gamma/4}{(\omega_\circ - \omega)^2 + (\gamma/2)^2} \qquad (40.19)$$

تابع K_i به اصطلاح به‌شکل خط لورنتسی است، این تابع و همچنین $K_r - 1$ درشکل ۳.۱۹ نشان داده شده‌اند. این توابع خواص بسیار ساده‌ای دارند: نسبت به $(\omega_\circ - \omega)$، تابع K_i زوج و $K_r - 1$ فرد است. به‌سادگی می‌توان نشان داد که پهنای K_i در محل نصف ماکزیمم γ است و ماکزیمم و مینیمم $K_r - 1$ در همین نقاط واقع‌اند. انتگرال K_i روی تمام فرکانسها را می‌توان محاسبه کرد و نتیجهٔ آن به صورت $(\omega_p^2/\omega_\circ)(\pi/2)$ است که ضریب $\pi/2$ در معادلهٔ (۳۵.۱۹) را توجیه می‌کند، چون پهنای قله γ است و ارتفاع آن با $1/\gamma$ متناسب است، مساحت زیرمنحنی مستقل از γ است. مقدار ماکزیمم K_i در تشدید می‌تواند کاملا بزرگ باشد

$$M = \frac{\omega_p^2}{\omega_\circ \gamma} = \frac{\omega_p^2}{\omega_\circ^2} \frac{\omega_\circ}{\gamma}$$

برای گازها درفشار جو، $(\omega_p/\omega_\circ)^2 \approx 10^{-3}$، ولی $(\omega_\circ/\gamma) \approx 10^5$، بنابراین M ممکن است بزرگتر از ۱۰۰ باشد. این مقدار برای رسانندگی $g = \varepsilon_\circ \omega K_i$ در تشدید مقداری را به‌دست می‌دهد که با رسانندگی dc فلزات قابل قیاس است.

شکل منحنیهای n و k مربوط به‌ثابتهای دی‌الکتریک لورنتسی بستگی بسیار زیادی به اندازهٔ M دارد. اگر M بزرگ باشد، در $\omega_\circ$ داریم $K_i \gg 1$ و از آنجا که در $\omega_\circ$ داریم $K_r = 1$، بنابراین در $\omega_\circ$ تقریب زیر معتبر است

$$n \cong k \cong \sqrt{K_i/2}$$

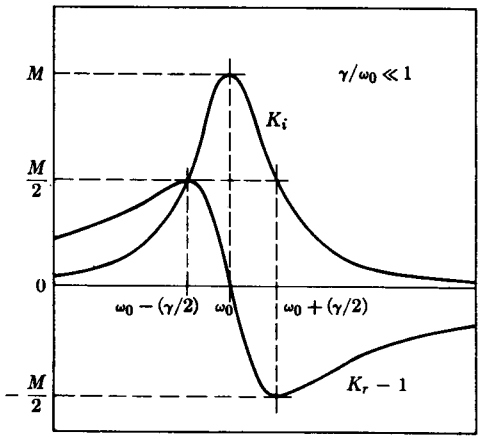
شکل منحنیهایی که درشکل ۴.۱۹ نشان داده شده‌اند، باشکل لورنتسی متفاوت است. این شکل ازشکل ۲.۱۹ تصویر واقعیتری از تغییرات در نزدیکی $\omega_\circ$ به ما می‌دهد. در حد دیگر، چنانچه $M \ll 1$ باشد، همه‌جا $K_i \ll 1$ است. چون در نزدیکی ماکزیمم $|K_r - 1| < K_i$ است، پس $|K_r - 1| \ll 1$، یا $K_r \cong 1$. دراین حالت

$$n \cong \sqrt{K_r}\,, \quad k = K_i/2n$$

چون اختلاف K_r با ۱ ناچیز است، رادیکال را می‌توان بسط داد

$$n - 1 \cong \frac{1}{2}(K_r - 1)\,, \quad k \cong \frac{1}{2}K_i \qquad (41.19)$$

پس برای این حالت شکل منحنیهای $n - 1$ و k به‌ترتیب درست به‌همان شکل لورنتسی



شکل ۳.۱۹ ثابتهای دی‌الکتریك برای خط باریکی در ω_0. (مبدأفرکانس درفاصلهٔ دور در سمت چپ واقع است.) برای خط ضعیفی بـا $M \ll 1$، مقدار $n-1$ و k به‌ترتیب درست برابر با نصف K_r-1 و K_i هستند.

منحنیهای K_r-1 و K_i است. این تقریب می‌تواند، برای مثال، درمورد محلولهای رقیق یا در موردگازها درفشار نسبتاً پایین معتبر باشد.

خیلی دور ازخط تشدید، هنگامی که $|\omega_0-\omega| \gg \gamma$ است، می‌توان از γ درمخرج معادلات (۲۲.۱۹) و (۲۳.۱۹) چشمپوشی کرد، که درآن صورت معادلات فوق به‌صورت زیر ساده می‌شوند

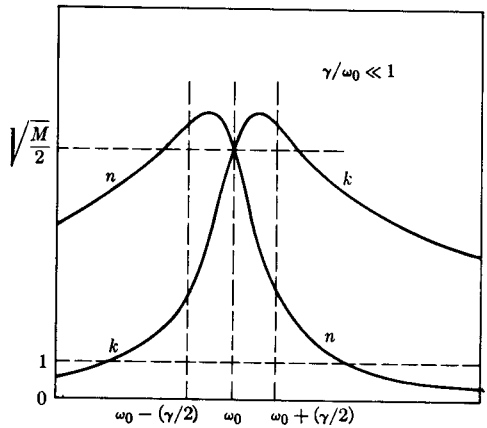
$$K_r-1=\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2}$$

$$K_i=\frac{\omega_p^2\,\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2} \qquad (۴۲.۱۹)$$

دراین تقریب $K_i \ll |K_r|$، و در فاصلهٔ دور در سمت فرکانسهای پایین $K_r>0$. دراین حالت معادلات (۴۱.۱۹) معتبرند، پس

$$n-1 \cong \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)^2\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^{-1}$$

$$\cong \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)^2\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]$$



شکل ۴.۱۹ ثابتهای اپتیکی برای یك خط باریك قوی که از ثابتهای دی‌الکتریك شکل ۳.۱۹ با $M=100$ به‌دست آمده‌اند. (مبدأ فرکانس در فاصلهٔ دور در سمت چپ واقع است.)

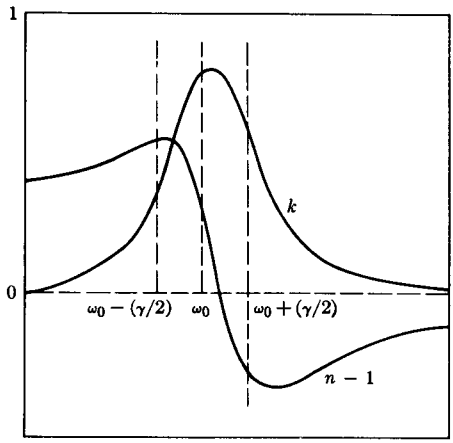
برحسب طول موج، داریم

$$n-1 \cong \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_p}\right)^2\left[1+\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2\right] \qquad (۴۳.۱۹)$$

این معادله به رابطهٔ کوشی معروف است و برای ضریب شکست مواد شفاف فرمول سودمندی است.

اگر γ کوچك نباشد، هیچ یك از روابط سادهٔ فوق از نظر کمی معتبر نخواهند بود، ولی رفتار کیفی $\hat{K}$ و $\hat{n}$ بازهم همین خواهد بود. حالت $\omega_p/\omega_0=1$ ، $\gamma/\omega_0=1/2$ درشکل ۵.۱۹ رسم شده است. قسمت موهومی همواره قله‌ای دارد که ماکزیمم آن در نزدیکی ω_0 است. در ناحیهٔ این قله، قسمت حقیقی همواره ناحیه‌ای با شیب منفی دارد که به ناحیهٔ پاشندگی بی‌هنجار معروف است. با افزایش فرکانس از صفر، به ترتیب نواحی شفافیت، جذب، انعکاس زیاد، و شفافیت وجود دارند، درست به مانند ساده‌ترین حالت تقریب تابع دلتا. در مواد واقعی همواره قله‌های جذب الکترونی متعددی در فرابنفش، و شاید تا ناحیهٔ مرئی، وجود دارند. درجامدات این قله‌ها ممکن است پهن باشند و به مقدار زیادی رویهم بیفتند.

اگر ذرات باردار مرتعش به جای الکترون یونهای سنگین باشند، فرکانس تشدید



شکل ۵.۱۹ ثـابتهای اپتیکی برای یك نـوار جذب پهن نسبتاً قوی در ω_0 .

ω_0 چند صد برابر کوچکتر خواهـد بود: ثابت نیروی بـاز گردانندهٔ خطی برای هر دو تقریباً یکی است، زیرا در مـورد یونها نیز این ثابت مربوط به نیروی کولنی است، ولی جرم یون ۴ یـا ۵ مرتبهٔ بزرگی از جرم الکترون بزرگتر است. فرکانس ω_p نیز به‌تناسب کوچکتر است ، زیرا آن نیز بـا معکوس جذر جرم متناسب است . برای مثال، دریك بلور یونی

$$\frac{\omega_p}{\omega_0} \cong ۱ \ , \qquad \frac{\gamma}{\omega_0} \cong ۰٫۱$$

قلهٔ جذب مشابه قلهٔ الکترونی است ، ولی این قله به جای فرابنفش یـا مرئی در فروسرخ واقع است. K_r یا n مربوط به این قله در فرکانسهای بالاتر مشارکتی ندارند ، ولی در فرکانسهای پایینتر مشارکت دارند. از اینرو ثابت دی الکتریك ساکن برای نمك بلور در حدود ۶ است، در مقایسه بـا تقریباً ۲(۲ ≃ ۵٫۲ ۱) در نور مرئی. عدد ۲ ناشی از جذب الکترونی در فرابنفش است؛ عدد ۶ اثر جذب یونی در فروسرخ را نیز شامل می‌شود.

۳.۱۹ نظریهٔ الکترون آزاد درود

دربعضی ازحالات مهم‌ماده، خصوصاً درفلزات ودرپلاسماها، الکترونهای متعلق به‌مدارهای خارجی اتمها جایگزیده (مقید) نیستند ، بلکه آزادند که در رسانش dc شرکت کنند. در

جدول ۱۰۱۹ بعضی مقادیر نوعی برای چگالی ذرات، N، و فرکانس پلاسما، ω_p، برای پلاسماهای الکترونی.

	چگالی (m^{-3})	فرکانس پلاسما (s^{-1})
فلز	10^{28}	10^{16}
نیمرسانا (آلاییده)	10^{24}	10^{14}
نیمرسانا (خالص)	10^{20}	10^{12}
آزمایش گداخت	10^{20}	10^{12}
یونسفر	10^{11}	10^{7}
فضای بین سیاره‌ها	10^{7}	10^{5}

فرکانسهای بالا رفتار آنها به علت اثرات اینرسی تغییر می‌کند؛ ولی به هر جهت با همان مدل میکروسکوپی توصیف می‌شوند، مشروط به آنکه نیروی باز گرداننده مفروض را برای این الکترونها برابر با صفر قرار دهیم. درآن صورت، با $\omega_0 = 0$، معادلهٔ (۲۱.۱۹) به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$\hat{K} - 1 = -\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)} \qquad (۴۴.۱۹)$$

که قسمتهای حقیقی و موهومی آن عبارت‌اند از

$$K_r - 1 = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} \qquad (۴۵.۱۹)$$

$$K_i = \frac{\omega_p^2 \gamma}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)} \qquad (۴۶.۱۹)$$

در موضوع الکترون آزاد، کمیت زیر

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}} \qquad [۱۳.۱۹]$$

فرکانس پلاسما نامیده می‌شود [۱]، و با آنچه در فصل ۱۴ تعریف شد یکی است.

۱. فرکانس پلاسما را معمولا برحسب یکاهای گاؤسی بیان می‌کنند، در یکاهای گاؤسی $\omega_p = \sqrt{4\pi Ne^2/m}$

گستره‌های مختلف فرکانس که در آنها ویژگیهای جالب توجه پاشندگی رخ می‌دهند با ω_p مشخص می‌شوند. بعضی مقادیر نوعی آن در جدول ۱.۱۹ آمده است. این فرکانسها از فرکانس رادیویی تا نواحی فرابنفش را دربرمی‌گیرند. همانطور که قبلا متذکر شدیم ثابت میرایی γ معکوس زمان برخورد است

$$\gamma=\frac{1}{\tau} \qquad [۴.۱۹]$$

زمان τ همچنین برابر است با ثابت زمانی فرو افت جریانی که میدان وادارنده نداشته باشد. این مطلب را با قراردادن $\omega_0=0$، و $E_m=0$ در معادلهٔ (۲.۱۹)، می‌توان دید:

$$dx/dt=v$$

$$\frac{dv}{dt}+\gamma v=0$$

$$v=v_0e^{-\gamma t}=v_0e^{-t/\tau} \qquad (۴۷.۱۹)$$

برای فلزات در دمای اتاق داریم $\gamma\approx 10^{14}\,s^{-1}$ ، بنابراین

$$\frac{\gamma}{\omega_p}\ll 1$$

این رابطه غالباً برای مواد الکترونیکی نیمرسانا و همچنین برای پلاسماهای گازی معتبر است. چنانچه معادلهٔ (۴۴.۱۹) را با استفاده از معادلهٔ (۲۶.۱۹) و $\gamma=1/\tau$ برای رسانندگی مختلط $\hat{g}$ بنویسیم، نتیجه به‌صورت ساده‌تری در می‌آید

$$\hat{g}=\frac{g_0}{1-i\omega\tau} \qquad (۴۸.۱۹)$$

که در آن

$$g_0=\varepsilon_0\omega_p^2\tau=\frac{Ne^2\tau}{m}$$

رسانندگی dc است. با وجود این ما $\hat{K}$ را بررسی خواهیم کرد، زیرا هدف ما پیدا کردن n و k به‌کمک $\hat{K}$ است.

هنگامی که γ کوچك است، مجدداً ابتدا می‌توانیم مورد $\gamma=0$ را بررسی کنیم:

$$K_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$K_i = \frac{\omega_p^2}{\omega}\frac{\pi}{2}\delta(\omega) \qquad (۴۹.۱۹)$$

باز هم شکلهای ۱.۱۹ و ۲.۱۹ نشان‌دهندهٔ رفتار دراین حالت هستند، مشروط بر آنکه مبدأ ω در $\omega_0 = 0$ انتخاب شود. ناحیهٔ شفاف درپایینتر از ω_0 حذف می‌شود، و ω_p فرکانسی است که در آن $K_r = 0$ است. بین $\omega = 0$ و $\omega = \omega_p$ ماده کاملا منعکس کننده است ($n = 0$)، و در بالاتر از ω_p ماده شفاف است ($k = 0$). گذار بین انعکاس شدید و شفافیت دلیل این واقعیت مشهود است که یونسفر امواج رادیویی را در باند پخش AM ($f = \omega/2\pi \lesssim 1.5 \times 10^6\,\mathrm{s}^{-1}$) منعکس می‌کند ولی برای امواج رادیویی FM و امواج تلویزیونی ($f \approx 10^8\,\mathrm{s}^{-1}$) شفاف است. درگسترهٔ دیگری ازفرکانس، فلزسدیوم برای نورمرئی منعکس کنندهٔ خوبی است، ولی برای طول موجهای فرابنفش کوتاهتر از $\lambda_p = 2100\,\text{Å}$ (210 nm)، متناظر با فرکانس پلاسمای آن، شفاف است. درست در فرکانس پلاسما، $n = 0$ و $k = 0$ است؛ دراین فرکانس بارها همگی به‌طور همفاز (با طول موج بینهایت) بدون تضعیف به عقب و جلو حرکت می‌کنند. این حرکت همان نوسان آزاد پلاسماست که درفصل ۱۴ دربارهٔ آن بحث شد. این نوع حرکت مثالی است از موج طولی[1] که در $\hat{K} = 0$ می‌تواند رخ بدهد. هرچندکه تقریب بدون میرایی اثرات جالبی را درنزدیکی فرکانس پلاسما توجیه می‌کند، ولی درفرکانسهای پایینتر ساده‌سازی بیش‌ازحدی است که پیشگویی می‌کند رسانندگی و ثابت دی‌الکتریك برای dc بینهایت است. به‌علاوه، این تقریب نه فرمول ها گن ـ روبنز را به‌دست می‌دهد و نه‌عمق پوستهٔ مربوط به آن را.

برای اصلاح تقریب تابع دلتا، لازم است که به معادلات (۴۵.۱۹) و (۴۶.۱۹) برگردیم. فرض می‌کنیم که میرایی کوچك است، $\gamma \ll \omega_p$، بنابراین سه گسترهٔ فرکانس وجود دارد که باید بررسی کنیم

(الف) $\omega \ll \gamma$

$$K_r \cong \frac{-\omega_p^2}{\gamma^2} \qquad (۵۰.۱۹)$$

---

۱. از آنجاکه طول موج بینهایت است و سرعت انتشارصفر، اینکه بگوییم طولی است یاعرضی بی‌معناست. ولی ما $\hat{K}(\kappa, \omega)$ را تنها برای $\kappa = 0$ محاسبه کرده‌ایم، معادلهٔ (۶.۱۹) را ببینید. محاسبات پیچیده‌تری که درآن اثرات فشارمنظورمی‌شود وجود امواج طولی درپلاسما با طول موج متناهی، $\kappa \neq 0$، رانشان می‌دهند.

$$K_i \cong \frac{\omega_p^2}{\omega\gamma} \qquad (۵۱.۱۹)$$

ثابت دی‌الکتریك حقیقی K_r، یك مقدار منفی (بزرگ) است؛ K_i با صفرشدن ω بینهایت می‌شود، ولی رسانندگی

$$g = \varepsilon_0 \omega K_i = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\gamma} = \frac{Ne^2\tau}{m} = g_0$$

دراین گستره ثابت است و برابر است با g_0 (رسانندگی dc). چون $K_i/|K_r| = \gamma/\omega \gg 1$، ازمعادلهٔ (۵۵.۱۷) نتیجه می‌شود

$$n \cong k \cong \sqrt{K_i/2} = \frac{\omega_p}{\sqrt{2\omega\gamma}} \gg 1 \qquad (۵۲.۱۹)$$

این حالتی است که به‌فرمول هاگن ـ روبنز برای ضریب جذب درفرکانسهای پایین

$$A \cong \frac{2}{k} = 2\sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{g_0}}$$

و به‌عمق پوسته

$$\delta = \frac{c}{k\omega} \cong \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega g_0}}$$

منجر می‌شود.

(ب) $\gamma \ll \omega \ll \omega_p$

$$K_r \cong -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \qquad (۵۳.۱۹)$$

$$K_i \cong \frac{\omega_p^2\gamma}{\omega^3} \qquad (۵۴.۱۹)$$

چون $K_i/|K_r| = \gamma/\omega \ll 1$

$$k \cong \sqrt{-K_r} = \frac{\omega_p}{\omega}$$

$$n=\frac{K_i}{2k}\cong\frac{\gamma\omega_p}{2\omega^2} \qquad (۵۵.۱۹)$$

دراین ناحیه $k/n=2\omega/\gamma \gg 1$، بنابراین برای ضریب جذب ازمعادلهٔ (۵۹.۱۸)داریم

$$A\cong\frac{4n}{k^2}\cong\frac{2\gamma}{\omega_p}=\frac{2}{\omega_p\tau}$$

(این فرمول را گاهی فرمول مات ـ زینر[1] می‌نامند)، و برای عمق پوسته داریم

$$\delta=\frac{c}{k\omega}=\frac{c}{\omega_p}=\lambda_p/2\pi$$

که در آن λ_p طول موج متناظر بافرکانس پلاسما درخلأ است. برای فلزات این نتایج تا ناحیهٔ فروسرخ معتبرند. چون $\omega_p\tau$ بزرگ است، $A=1-R$ تنها چنددرصداست؛ عمق پوسته خیلی کوچك ومستقل ازفرکانس است.

(ج) $\omega_p \ll \omega$

$$K_r\cong 1 \qquad (۵۶.۱۹)$$

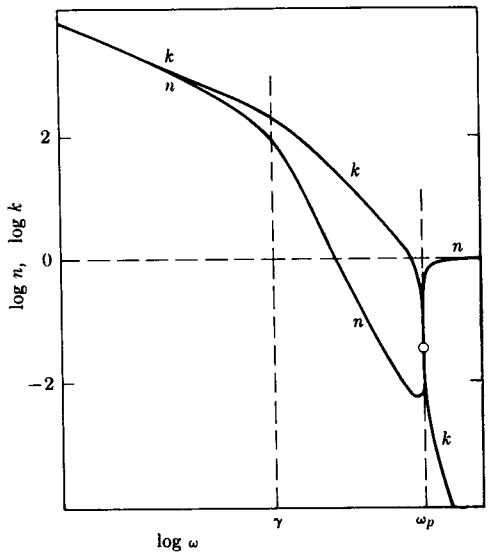
$$K_i\cong\frac{\omega_p^2\gamma}{\omega^3} \qquad (۵۷.۱۹)$$

$$n\cong\sqrt{K_r}\cong 1$$

$$k=\frac{K_i}{2n}\cong\frac{\omega_p^2\gamma}{2\omega^3} \qquad (۵۸.۱۹)$$

دراین گستره ماده تقریباً شفاف است. ولی درفلزات، بجز برای فلزات قلیایی، شروع این شفافیت براثر جذب تشدیدی الکترونهای مقید متعلق به‌مدارهای داخلی، تاراست. این جذب اضافی، که در بخش قبل بحث شد، مقادیر K_i و n را نیز برای اکثر فلزات در ناحیهٔ مرئی افزایش می‌دهد که نتیجتاً ضریب انعکاس آنها راکاهش می‌دهد وموجب رنگهای مشخصهٔ مس وطلامی‌شود. نتایج مربوط به‌الکترون آزاد برای n و k درمقیاس log–log در شکل ۶.۱۹ رسم شده است. مقادیر انتخاب شده برای پارامترها عبارت‌اند از $\omega_p=9\times10^{15}s^{-1}$ و $\gamma=3.6\times10^{13}s^{-1}$؛ این مقادیر برای فلزسدیوم دردمای اتاق

1. Mott – Zener



شکل ۶.۱۹ نمودار ثابتهای اپتیکی بارهای آزادبرحسب فرکانس در مقیاس log − log، با $\gamma/\omega_p = ۰٫۰۰۴$. در قسمت اعظم گسترهٔ فرکانس تقریبهای قانون توان معتبر است.

مناسب است که برای آن نظریهٔ الکترون آزاد با آزمایش سازگار است. در این شکل سه ناحیه‌ای که در آنها منحنیها به‌صورت خطوط مستقیم‌اند مربوط‌اند به‌معادلات (۵۲.۱۹)، (۵۵.۱۹)، و (۵۸.۱۹). نقاط بینابین در $\omega = \gamma$ و $\omega = \omega_p$ را به‌آسانی می‌توان ازمعادلات (۴۵.۱۹) و (۴۶.۱۹) محاسبه کرد، زیرا در این نقاط به‌ترتیب $K_i = -K_r$ و $K_i \gg K_r$ است. ناحیهٔ خیلی بالاتر از γ با تقریب تابع دلتا ($\gamma = ۰$) در توافق است، البته با گرد کردن شکنها در ω_p. مثالهای با $\gamma \gtrsim \omega_p$ کمترمتداول‌اند وما نیز بررسی آنها را به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ دانشجو واگذارمی کنیم.

تمام نتایج این بخش هنگامی که ذرات باردار به‌جای الکترون، یونهای سنگین باشند نیزمعتبراست. چون فرض کردیم که محیط ازنظرالکتریکی خنثی است، یونهای مثبت باید همواره باچگالی تعداد متوسطی، برابر باچگالی تعداد الکترونها، موجود باشند. البته در فلزات یونهای مثبت آزادانه درحرکت نیستند، ولی در پلاسماهای گازی متحرک‌اند و حرکت آنها غالباً مهم‌است. فرکانس پلاسما، ω_p به‌طورمعکوس متناسب است باجذرجرم ذرهٔ m، وبنابراین فرکانس پلاسمای یون‌تقریباً دومرتبهٔ بزرگی ازفرکانس پلاسمای الکترون، که‌در جدول ۱.۱۹ آمده است، کوچکتراست.

۴.۱۹* واهلش دی‌الکتریکی.رسانش الکترولیتی

درفلزات‌درفرکانسهای پایینتر ازقله‌های مربوط به‌یون‌سنگین درناحیهٔ فروسرخ، معمولاجذب تشدیدی الکتریکی رخ نمی‌دهد (هرچند که در ساختارهای مصنوعی رخ می‌دهد). ولی، سازوکارجذب‌ازنوع دیگری به‌نام، اتلاف دی‌الکتریك وجوددارد که‌می‌تواند درفرکانسهای پایینتر (ولی نه‌درفرکانسهای بالاتر) رخ بدهد. این سازوکارغالباً درفرکانسهای میکروموج وپایینتر، به‌عنوان یك سازوکاراتلاف مهم‌است وپاشندگی ملازم باثابت دی‌الکتریك‌حقیقی آن برای مثال، اختلاف بین ثابت دی‌الکتریك ساکن‌آب، ۸۱، و مقداراپتیکی این ثابت، حدود ($۱٫۳۳^۲ =$)۱٫۸، را توجیه می‌کند. اگرقطبش ساکن نوع دومی که در فصل ۵ بحث شد (یعنی، قطبش در اثرسمتگیری دوقطبیهای دائمی) به حالت ac بسط داده شود، این اثرنتیجه خواهد شد. این مورد را برپایهٔ مدلی که بامعادلهٔ (۱.۱۹) توصیف می‌شود نیزمی‌توان بنا نهاد، هرچندکه تعبیرفیزیکی کمیتهای دخیل‌را باید تاحدودی تعمیم داد.این حالت هنگامی ظاهرمی‌شود که نیروهای بازگرداننده و میراننده مهم‌اند، ولی از اثرات اینرسی (شتاب) می‌توان چشمپوشی کرد. در این حالت معادلهٔ حرکت به‌صورت زیر درمی‌آید

$$G\frac{dx}{dt}+Cx=eE_m \qquad (۵۹.۱۹)$$

یا آنکه

$$\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_\circ^۲x=eE_m/m$$

جواب مناسب معادلهٔ بالا، ازمعادلهٔ (۲۱.۱۹) باچشمپوشی از $\omega^۲$ به‌دست می‌آید.

$$\hat{K}-۱=\frac{\omega_p^۲}{\omega_\circ^۲-i\gamma\omega}$$

دراین جواب تمام پارامترها حاوی m هستند؛ باوجود این، m واقعاً در جواب وارد نمی‌شود زیرا دربه‌دست آوردن جواب از جملهٔ اینرسی چشمپوشی شده است. بهتر است جواب به‌صورت زیربازنویسی شود

$$\hat{K}-۱=\frac{Ne^۲/\varepsilon_\circ}{C-iG\omega}$$

که دراینجا m کلا حذف شده است. بااستفاده ازمعادلهٔ (۵۹.۱۹) با $E_m=\circ$، برگشت به‌تعادل بامعادلهٔ زیرتوصیف می‌شود

$$x = x_0 e^{-Ct/G}$$

بنابراین می‌نویسیم

$$\frac{C}{G} = \frac{1}{\tau} \qquad (۶۰.۱۹)$$

که τ دراین مفهوم زمان واهلش[1] نامیده می‌شود. برحسب τ داریم

$$\hat{K} - 1 = \frac{K_0 - 1}{1 - i\omega\tau} \qquad (۶۱.۱۹)$$

که درآن

$$K_0 - 1 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 C} \qquad (۶۲.۱۹)$$

واضح است که K_0 مقدارحالت ساکن K (به‌ازای $\omega = 0$) است. مقدارآن بامقدارساکن حالت جذب تشدیدی یکی است، بجزآنکه دراینجا C معنای دیگری دارد. این مقدار را می‌توان ازمحاسبات فصل ۵ به‌دست آورد

$$K_0 - 1 = \frac{\chi}{\varepsilon_0} = \frac{N}{\varepsilon_0}\frac{p_0^2}{3k_BT}$$

که درآن k_B ثابت بولتزمن است. اگرفرض کنیم گشتاور دو قطبی دایمی به‌صورت زیر است

$$p_0 = ea$$

که درآن a فاصلهٔ مؤثر بارهای $\pm e$ است، آنگاه

$$K_0 - 1 = \frac{Ne^2a^2}{3\varepsilon_0 k_BT} \qquad (۶۳.۱۹)$$

مقدارعددی $K_0 - 1$ در دمای اتاق، حداکثر، می‌تواند ازمرتبهٔ 10^2 باشد. مقایسهٔ معادلهٔ

---

۱. توجه‌کنیدکه‌دراین فرایند $\gamma \neq 1/\tau$. ما به‌نحوی سازگارهمواره τ را به‌معنای ثابت‌زمانی برای برگشت به تعادل به‌کار می‌بریم، بدون توجه به رابطهٔ آن با γ یا با کمیتهای فیزیکی تعیین کننده.

(۶۳.۱۹) بامعادلهٔ (۶۲.۱۹) نشان می‌دهد که

$$C=\frac{3k_BT}{a^2} \qquad (۶۴.۱۹)$$

بنابراین نیروی بازگرداننده، ناشی‌ازانرژی گرمایی $k_B T$ است ونه‌ناشی ازانرژی‌پتانسیل کشسان مکانیکی.[۱]

آنچه دراین بحث جدید است زمان واهلش τ است که رفتار ac را تعیین می کند. مقدارآن را به آسانی می‌توان برای بعضی مواد قطبی جامد برآورد کرد. در این مواد دوقطبیها تشکیل شده‌اند اززوجهای متحرکی‌ازیونهای مثبت ومنفی‌به‌بار e وبا فاصلهٔ‌جدایی a. یونها موضع تعادل ثابت مشخصی درجامد دارند، ولی می‌توانند به‌سایرمواضع مجاز مجاور جهش کنند. باچنین جهشهایی دوقطبی می‌تواند بچرخد و بامیدان اعمالی همسو شود، یا به‌هنگام برداشته شدن میدان به‌یك سمتگیری کتره‌ای بر گردد. بنابراین زمان τ عبارت است اززمان متوسط مربوط به‌جهش که برای جامدات با معادلهٔ زیرداده می‌شود

$$\frac{1}{\tau}=\frac{1}{\tau_0}e^{-\Delta U/k_BT} \quad \text{(جامدات)} \qquad (۶۵.۱۹)$$

ضریب $1/\tau_0$ تقریباً برابر است بافرکانس ارتعاش یون حول موضع تعادلش، و عبارت $\exp(-\Delta U/k_BT)$ ضریب‌آماری بولتزمن‌است. باهرارتعاش کوششی برای‌جهش به‌عمل می‌آید، ولی تنها کسری ازیونها موفق می‌شوند واین‌کسر بستگی دارد به‌انرژی ΔU که برای‌عبورازسد ورفتن به‌موضع‌تعادل مجاورلازم‌است. فرکانس $1/\tau_0=\omega_0$ همان فرکانس ارتعاش یونی است‌که قبلا بررسی‌شد، $\omega_0\approx 10^{13}\ s^{-1}$. برای‌آنکه این مدل معتبر باشد می‌بایست انرژی سد ΔU قابل ملاحظه باشد، زیرا فرض وجود موضعهای تعادلی که بین آنها جهشها رخ می‌دهند خود به‌سدها بستگی دارد. بدین ترتیب

$$\frac{1}{\tau}\lesssim 10^{11}\ s^{-1}$$

و $1/\tau$ دردماهایی خیلی پایینتر ازدمای ذوب بسیارکوچکترازاین مقدارخواهدبود. برای مایعات محاسبهٔ τ مشکلتراست. زمان واهلش دبی با معادلهٔ زیرداده می‌شود

$$\frac{1}{\tau}=\frac{k_BT}{4\pi\eta R_0^3} \quad \text{(مایعات)} \qquad (۶۶.۱۹)$$

---

۱. نیروی بازگرداننده یك «نیروی ترمودینامیکی» تعمیم یافته است، نه‌یك نیروی‌مکانیکی. آنچه پس از برداشتن نیرو (بازمان واهلش τ) واهلیده می‌شود (به‌وضع اول باز می‌گردد)، انرژی نیست بلکه آنتروپی است.

که درآن η چسبندگی است (نه‌مقاومت ویژهٔ الکتریکی) و $R_\circ$ شعاع مولکول‌است. این فرمول بامقادیر تجربی η توافق معقولی دارد و برای اکثر مایعات قطبی دردمای اتاق فرکانسی درناحیهٔ میکروموج پیشگویی می‌کند، چون دوقطبیها درمایعات باآزادی بیشتری می‌چرخند تا درجامدات. چسبندگی به‌دما بستگی دارد، ولی‌بازهم بستگی‌معادلهٔ (۶۶.۱۹) به‌دما ضعیفتراز بستگی معادلهٔ (۶۵.۱۹) است.

باجدا کردن معادلهٔ (۶۱.۱۹) به‌قسمتهای حقیقی وموهومی، بستگی‌آن را به‌فرکانس می‌توان دید. نتیجه معادلات زیراست‌که به‌معادلات دبی مشهورند

$$K_r - 1 = \frac{K_\circ - 1}{1 + (\omega\tau)^2} \qquad (۶۷.۱۹)$$

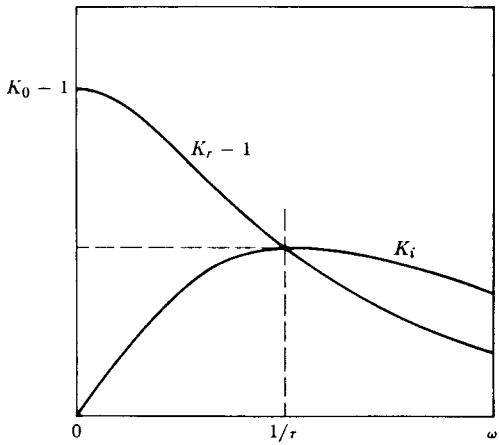
$$K_i = \frac{(K_\circ - 1)\,\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \qquad (۶۸.۱۹)$$

اینها درشکل۷.۱۹ رسم شده‌اند. این شکل قلهٔ جذبی در K_i نشان می‌دهدکه ماکزیمم آن در $\omega = 1/\tau$ و ارتفاع آن $(K_\circ - 1)/2$ است، وهمچنین نشان می‌دهدکه K_r از مقدار $K_\circ$ به ۱ کاهش می‌یابد و نقطهٔ نصف ارتفاع آن در $\omega = 1/\tau$ است. پاشندگی K_r شکلی داردکه به‌طورمشخص باشکل مربوط به‌جذب تشدیدی متفاوت است. شکل این منحنیها کاملا شبیه است به‌شکلهای مربوط به‌نوسانی که به شدت تند میرا باشد. برای فرکانسهای خیلی پایینتر یا خیلی بالاتر از $1/\tau$ داریم $K_i \ll K_r$ $(K_r > \circ)$، بنابراین $n = \sqrt{K_r}$ و $k = K_i/2n$. به‌عنوان مثال، این‌نتایج‌را می‌توان برای آب‌شیرین که برای آن‌رسانندگی dc قابل چشمپوشی است ، به‌کار برد. ضریب انعکاس بامعادلهٔ (۵۷.۱۸) داده می‌شود. برای اندازه گیریهای الکتریکی روی نمونه‌هایی بااندازه‌های آزمایشگاهی، معمولا نتایج را برحسب زاویهٔ اتلاف θ بیان می‌کنند

$$\tan\theta = \frac{K_i}{K_r} = \frac{(K_\circ - 1)\,\omega\tau}{K_\circ + (\omega\tau)^2} \qquad (۶۹.۱۹)$$

دلیل فیزیکی این نوع بستگی به‌فرکانس‌آن است‌که در بالاتر از $1/\tau$ واهلش نمی‌تواند تغییرات میدان اعمالی را دنبال‌کند.

رسانش الکترولیتی پدیده‌ای‌است‌که ازطریق سازوکاری انجام‌می‌شودکه باواهلش دی‌الکتریکی رابطهٔ نزدیکی دارد، هرچند که درآن درحالت dc رسانش توسط بارهای «آزاد» صورت می‌گیرد. حاملهای بار یونهای متحرکی هستندکه (درجامدات) با جهش یا (درمایعات) باسازوکاری که‌به چسبندگی‌مربوط‌است حرکت می‌کنند. دراینجا نیزاثرات اینرسی قابل‌چشمپوشی‌انـد و جرم یون مستقیماً وارد نمی‌شود. اختلاف آن با واهلش



شکل ۷.۱۹ ثابتهای دی‌الکتریك به‌صورت تابعی ازفرکانس برای واهلش دبی.

دی‌الکتریکی آن است که زوج یونهای مثبت ومنفی جدایی‌ناپذیر نیستند، بلکه یونهای مثبت یا منفی آزادند که به‌طور انفرادی مهاجرت کنند و در ایجاد جریان انتقالی شرکت کنند. مجدداً محاسبهٔ رسانندگی dc برای الکترولیت جامد آسانتراست؛ نتیجه عبارت است از

$$g_0 = \frac{Ne^2a^2}{k_BT\tau} \quad \text{(جامدات)} \qquad (۷۰.۱۹)$$

که درآن τ زمان‌متوسط جهش است که شاید با کمیت مربوط به‌سمتگیری مجدد دوقطبیها متفاوت باشد ولی بازهم بامعادله‌ای شبیه به‌معادلهٔ (۶۵.۱۹) داده‌می‌شود، و a فاصلهٔ‌جهش است. برای‌الکترولیت مایع نتیجه چسبندگی، η، را دربردارد. فرمول اینشتین ـ استوکس

$$g_0 = \frac{Ne^2}{6\pi\eta R_0} \quad \text{(مایعات)} \qquad (۷۱.۱۹)$$

را برای محلولهای رقیق می‌توان به‌کاربرد. برای الکترولیتهای مایع، وهمچنین برای ردهٔ خاصی‌ازمواد جامد مشهوربه رساناهای ابریونی، g_0 می‌تواند ازمرتبهٔ $10^2(\Omega m)^{-1}$ باشد. برای اکثرمواد جامد یونی g_0 کمتراز $1(\Omega m)^{-1}$ است، معمولادر دمای اتاق خیلی کمتر ازاین.

رسانندگی ac را به‌مستقیمترین وجه می‌توان ازمعادلهٔ (۴۸.۱۹) به‌دست آورد

$$\hat{g}=\frac{g_{\circ}}{1-i\omega\tau} \qquad [۴۸.۱۹]$$

درآنجا همانطور که درمعادلهٔ (۴۷.۱۹) نشان داده‌شد، τ زمان واهلش برای رسانش(یا زمان شروع شدن برای رسانش حالت پایا) بود، ولی در اینجا τ زمان لازم برای جهش درالکترولیت جامد است. تعبیرمیکروسکوپی پارامترهای معادلهٔ (۴۸.۱۹) هرچه باشد، این معادله الزاماً می‌بایست ازیك نظریهٔ خطی نتیجه شده باشد. چون معادلهٔ (۴۸.۱۹) بامعادلهٔ (۶۱.۱۹) صورت تابعی یکسانی دارد، قسمتهای حقیقی و موهومی رسانندگی با منحنیهای نشان داده شده درشکل ۷.۱۹ شکل یکسانی دارند. برای به‌دست آوردن ثابتهای اپتیکی، معادلهٔ (۴۸.۱۹) را به‌کمك معادلهٔ (۲۶.۱۹) می‌توان به‌صورت زیر تبدیل کرد

$$\hat{K}-1=i\frac{\hat{g}}{\varepsilon_{\circ}\omega}=\frac{-g_{\circ}/\varepsilon_{\circ}}{\omega(\omega\tau+i)} \qquad (۷۲.۱۹)$$

که قسمتهای حقیقی وموهومی آن عبارت‌اند از

$$K_r-1=\frac{-\tau g_{\circ}/\varepsilon_{\circ}}{1+(\omega\tau)^{2}} \qquad (۷۳.۱۹)$$

$$K_i=\frac{g_{\circ}/\varepsilon_{\circ}}{\omega[1+(\omega\tau)^{2}]} \qquad (۷۴.۱۹)$$

ازمعادلهٔ (۷۳.۱۹) رابطهٔ زیربرای ثابت دی‌الکتریك ساکن به‌دست می‌آید

$$K_{\circ}-1=-\frac{\tau g_{\circ}}{\varepsilon_{\circ}}$$

که برای جامدات این رابطه عبارت است از

$$K_{\circ}-1=-\frac{Ne^{2}a^{2}}{\varepsilon_{\circ}k_{B}T}$$

هرچندکه این رابطه بامعادلهٔ (۶۳.۱۹) برای واهلش دی‌الکتریکی صورت یکسانی‌دارد (باعلامت مخالف)، ولی مقادیر N برای‌این دومورد می‌توانندا‌ختلاف زیادی داشته باشند. درآب‌خالص کلیهٔ مولکولها درواهلش دی‌الکتریکی دخیل‌اند، ولی‌ازهریك میلیون‌مولکول تنها چند تایی دررسانش مشارکت دارند. غالباًرسانش الکترولیتی وواهلش دی‌الکتریکی همراه باهم دریك ماده رخ می‌دهند. سهم مربوط به هریك ازآن دو در زاویهٔ اتلاف را

می‌توان درمواردساده ازروی بستگیهای متفاوت K_i به‌فرکانس جدا کرد. ولی‌درمحلولهای آبی، دراثرتصحیح میدان موضعی (منظورتصحیح لورنتس نیست) و در اثر برهم‌کنشهای میکروسکوپی بین یونها ودوقطبیها، وضعیت پیچیده است.

۵.۱۹ روابط کرامرز ـ کرونیگ[1]

درتمام مثالهایی که تاکنون بررسی کردیم، باهرقلهٔ جذبی در K_i پاشندگیی در K_r همراه بود که کم وبیش شکل مشخصی داشت. جمع چند قله یك‌منحنی پاشندگی مرکب مربوط به‌خودخواهد داشت. اکنون نشان‌خواهیم داد که یك رابطهٔ کلی بین K_r و K_i وجود دارد به‌طوری که، سازوکارجذب هرچه باشد، اگر $K_i(\omega)$ درتمام فرکانسها معلوم باشد آنگاه‌در هرفرکانسی $K_r(\omega)$ به‌کمك انتگرال معینی روی K_i به‌طوریکتا تعیین می‌شود. به‌ویژه، اگر $K_i(\omega)=0$ باشد درتمام فرکانسها $K_r(\omega)=1$ است. چنین رابطه‌ای ازنظرعملی‌ونظری بسیارسودمند است، زیرا اگربه‌طریقی‌بتوانیم $K_i(\omega)$ را محاسبه یااندازه‌گیری کنیم‌دیگر محاسبه یا اندازه‌گیری جداگانهٔ K_r غیرضروری است چون می‌توان آن را ازاین رابطه (که به‌رابطهٔ کرامرز ـ کرونیگ معروف است) تعیین کرد. رابطهٔ کلی را می‌توانیم ازاین فرض به‌دست‌آوریم که هرجذب دلخواهی را که تابعی از ω است می‌توانیم به‌صورت مجموع یك توزیع پیوسته از خطوط جذبی بسیار باریك نوسانگرهای هماهنگ نمایش دهیم. انتگرال معادلهٔ (۳۵.۱۹) یا (۴۰.۱۹) روی فرکانس عبارت است از

$$\int_0^\infty K_i\, d\omega = \frac{\omega_p^2}{\omega_0}\,\frac{\pi}{2} \qquad (۷۵.۱۹)$$

که‌آن‌را $K_i(\omega_0)\,\Delta\omega_0$ می‌نامیم، واین سهم تمام نوسانگرهایی است بافرکانس طبیعی ω_0 درگسترهٔ کوچك $\Delta\omega_0$ درتشکیل K_iی کلی. حال می‌توانیم ω_p^2 را برحسب $K_i(\omega_0)\Delta\omega_0$ بیان کنیم

$$\omega_p^2 = \frac{2}{\pi}\omega_0\, K_i(\omega_0)\,\Delta\omega_0$$

چنانچه این نتیجه‌را درمعادلهٔ (۳۳.۱۹) برای K_r قرار دهیم، معادلهٔ حاصل نمایشگر آن بخش از K_r درفرکانس مفروض ω خواهدبودکه ناشی از نوسانگرهایی درگسترهٔ $\Delta\omega_0$ حول ω_0 است

$$\Delta(K_r-1) = \frac{2}{\pi}\,\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}\,K_i(\omega_0)\,\Delta\omega_0$$

---

1. Kramers - Kronig

برای به‌دست آوردن حاصل جمع سهم ω_0 های مختلف در K_r در فرکانس ω می‌بایست $\Delta\omega_0$ را به‌یك دیفرانسیل، $d\omega_0$، تغییردهیم (ودرضمن متغیرانتگرال‌گیری را به‌جای ω_0 با ω' نشان دهیم)

$$K_r(\omega)-1=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega' K_i(\omega')\,d\omega'}{\omega'^2-\omega^2} \qquad (۷۶.۱۹)$$

این رابطهٔ کرامرز ـ کرونیگ است که اولین بـار درسال ۱۹۲۶ برای پیدا کردن ضریب شکست پرتوهای x ازمقدارجذب اندازه‌گیری شده، به‌کارگرفته‌شد. دردهه‌های اخیراین رابطه به‌طور وسیعی درسایرنواحی طیفی نیز به‌کار رفته‌است.

به‌عنوان ساده‌ترین نشانه ازقدرت این‌رابطه می‌بینیم که باقراردادن تابع دلتا برای K_i ازمعادلهٔ (۳۵.۱۹) درمعادلهٔ (۷۶.۱۹) فوراً معادلهٔ (۳۳.۱۹) برای K_r وابسته به‌آن نتیجه‌می‌شود. ولی، بجزدرمورد مثالهای دیگری که نسبتاً تصنعی هستند، عمل انتگرال‌گیری را نمی‌توان به‌طورتحلیلی انجام داد، بلکه باید به‌طورعددی انجام شود. یك‌مشکل دراین انتگرال‌گیری وجود تکینه در $\omega'=\omega$ است. این مشکل جدی نیست، زیرا سهم مربوط به $\omega'<\omega$ درانتگرال‌منفی است وسهم مثبت مربوط به $\omega'>\omega$ را حذف می‌کند، ولی باید آن‌را تشخیص‌داد. به‌عنوان دومین مثال، که در آن بااین مشکل وسایرمشکلات مربوط به‌کاربرد انتگرال کرامرز ـ کرونیگ برخورد خواهیم‌کرد، تقریب فرکانس پایین‌برای ذرات آزاد[1] را بررسی می‌کنیم. این تقریب بامعادلهٔ (۵۱.۱۹) داده شده است

$$K_i=\frac{\omega_p^2}{\gamma\omega}$$

این رابطه به‌انتگرال‌آسانی درمعادلهٔ (۷۶.۱۹) منجرمی‌شود

$$K_r-1=\frac{2}{\pi}\frac{\omega_p^2}{\gamma}\int_0^\infty \frac{d\omega'}{\omega'^2-\omega^2} \qquad (۷۷.۱۹)$$

وهمچنین نتیجهٔ مورد انتظاررا، ازمعادلهٔ(۵۰.۱۹) می‌دانیم. برای آنکه درمحاسبهٔ انتگرال تکینه‌را درنظربگیریم، می‌نویسیم[2]

---

۱. به‌بیان دقیق، این نظریه را نمی‌توان درمورد $\hat{K}$ برای رسانای الکترون آزاد به‌کاربرد، چون $K_i(\omega)$ در $\omega=0$ تکینه دارد. ولی معـادلهٔ (۷۶.۱۹) هنوز هم معتبر است؛ به‌مسئلهٔ ۱۶.۱۹ رجوع کنید.

۲. این‌را قسمت اصلی کوشی (Cauchy) انتگرال می‌نامند.

$$\int_{0}^{\infty}=\lim_{\delta\to 0}\left[\int_{0}^{\omega-\delta}+\int_{\omega+\delta}^{\infty}\right]$$

آنگاه

$$\int_{0}^{\omega-\delta}\frac{d\omega'}{\omega'^{2}-\omega^{2}}=-\frac{1}{2\omega}\ln\left|\frac{\omega+\omega'}{\omega-\omega'}\right|\Bigg]_{0}^{\omega-\delta}=-\frac{1}{2\omega}\ln\frac{2\omega-\delta}{\delta} \qquad (78.19)$$

$$\int_{\omega+\delta}^{\infty}\frac{d\omega'}{\omega'^{2}-\omega^{2}}=-\frac{1}{2\omega}\ln\left|\frac{\omega+\omega'}{\omega-\omega'}\right|\Bigg]_{\omega+\delta}^{\infty}=\frac{1}{2\omega}\ln\frac{2\omega+\delta}{\delta} \qquad (79.19)$$

ازجمع کردن این انتگرالها خواهیم داشت

$$\int_{0}^{\infty}\frac{d\omega'}{\omega'^{2}-\omega^{2}}=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\omega}\ln\frac{2\omega+\delta}{2\omega-\delta}=0 \qquad (80.19)$$

پس نتیجهٔ معادلهٔ (۷۷.۱۹) عبارت است از

$$K_r=1 \qquad (81.19)$$

این نتیجه چندنکتهٔ آموزنده دارد. اولا، تکینگی درانتگرالده موجب بینهایت شدن انتگرال نمی‌شود. (درواقع انتگرال صفر است، ولی این نتیجه مخصوص این مورد خاص است.) واضح است که مادامی که K_i در ω پیوسته باشد، تکینگی اشکالی به‌وجود نخواهدآورد. ثانیاً نتیجهٔ حاصل، معادلهٔ (۸۱.۱۹)، برای K_r مقدارثابتی است. ولی مقدارثابت آن بامقدار ثابت $(\omega_p/\gamma)^2$ — که معادلهٔ (۵۰.۱۹) ایجاب می‌کند درتوافق نیست. این اختلاف مؤید این مطلب است که برای آنکه نتیجهٔ صحیح ازمعادلهٔ (۷۶.۱۹) به‌دست بیاید، $K_i(\omega)$ می‌بایست درتمامی گسترهٔ فرکانس از ۰ تا ∞ معلوم باشد. دراین مثال، معادلهٔ (۵۱.۱۹) برای فرکانسهایی بسیار کمتر از γ صحیح است، ولی در فرکانسهای بالاتر غلط است. مقدار واقعی K_r درفرکانسهای پایین‌مربوط می‌شود به‌این رفتار K_i درفرکانسهای بالاتر. هنگامی که ω به‌سمت بینهایت می‌رود، انتگرال همواره مقدارصحیح K_r، یعنی $K_r=1$، را به‌دست می‌دهد. این‌مطلب مستقیماً درمعادلهٔ (۷۶.۱۹) دیده‌می‌شود. پس اگر K_r ثابت است، مقدارثابتش می‌بایست ۱ باشد. هنگامی که‌انتگرال را باداده‌های تجربی به‌کارمی‌بریم، لازم است که دربالاتر وپایینتر از گستره‌ای که اندازه‌گیریها به‌عمل آمده است برونیابی معقولی بکنیم، حتی اگر بخواهیم K_r را تنها درمحدودهٔ این گستره پیدا کنیم. دلیل واضحتری برای خطا آن خواهد بود که قلهٔ جذب مجهولی را دربالاتر از گسترهٔ اندازه‌گیریها منظور نکرده باشیم.

انتگرال موجود در معادلهٔ (۷۶.۱۹) را می‌توان به‌طرق مختلف تبدیل کرد. چون

انتگرال موجود در معادلهٔ (۸۰.۱۹) صفراست، هرمضرب ثابتی ازآن را می‌توانیم از معادلهٔ (۷۶.۱۹) کم کنیم بدون آنکه درنتیجهٔ حاصل تأثیری داشته باشد. باکم کردن حاصل‌ضرب $(2/\pi)\omega K_i(\omega)$ درآن انتگرال ازمعادلهٔ (۷۶.۱۹)، خواهیم داشت

$$K_r(\omega)-1=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{[\omega' K_i(\omega')-\omega K_i(\omega)]\,d\omega'}{\omega'^2-\omega^2}$$

این‌صورت برای انتگرال‌گیری عددی سودمنداست چون انتگرالدهٔآن تکینه ندارد،مخرج انتگرالده درهمان نقطه‌ای صفرمی‌شودکه صورت‌آن صفرمی‌شود. ازانتگرال گیری‌جزء به جزء معادلهٔ (۷۶.۱۹) نتیجه می‌شود

$$K_r(\omega)-1=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\,K_i(\omega')}{d\omega'}\ln\frac{1}{|\omega'^2-\omega^2|}\,d\omega'$$

ازاین‌رابطه می‌توانیم به‌طورکیفی ایده‌ای ازرفتارمورد انتظار K_r را به‌دست‌آوریم.عامل دوم درانتگرالده ضریب وزنه است واین ضریب وزنه‌برای فرکانسهای نزدیك به‌ω، بسیار سنگین است ، بنابراین شیب K_i در فرکانسهای نزدیك به ω روی اندازهٔ K_r قویاً تأثیر می‌گذارد. این نوع رابطه را درتمامی مثالهای خاصی که در بخشهای پیش بررسی شد، می‌توان دید.

هرچند که رابطهٔ کرامرز ـ کرونیگ را از مدل نوسانگر هماهنگ برای محیط به‌دست‌آوردیم،ولی این رابطه واقعاً تنها به‌جنبهٔ خطی بودن مدل بستگی دارد. ازآنجاکه نوسانگرهماهنگ پیش‌نمونه‌ای ازدستگاههای‌خطی‌است، تعجبی نداردکه نتیجهٔ‌کلی ازاین مدل‌به‌دست می‌آید، ولی‌اگرنتیجه را به‌روشی مستقل‌ازمدل به‌دست‌آوریم‌بعضی ویژگیهای جالب پدیدارخواهند شد. روش دقیق به‌دست‌آوردن نتیجه بااستفاده ازاین رویکرد، مبتنی برنظریهٔ انتگرال‌گیری مختلط[1] است،که دراینجا به‌کارنخواهیم برد، هرچندکه ایده‌های اساسی‌آن نسبتاً ساده هستند. به‌علت عمومیت این نتایج، برای سایر توابع پاسخ مختلط نیزمی‌توان نتایج مشابهی به‌دست آورد، مثلا برای ضریب انعکاس فرنل، مقاومت ظاهری ac مختلط (که این نظریه اولین باربرای آن به‌طور کامل تکوین یافت)[2]، و حتی برای دستگاههایی در فیزیك هسته‌ای وفیزیك ذرات بنیادی. چنین روابطی نیز روابط پاشندگی نامیده می‌شوند. علاوه برخطی بودن، فرض بنیادی دیگر آن است‌که پاسخ دستگاه علّی است. یعنی، پاسخ جلوترازنیروی اعمالی نخواهد بود بلکه تنها پس ازآنکه نیرو اعمال

---

۱. برای مثال، به بخشهای ۵۸ تا ۶۲ ازکتاب زیر رجوع‌کنید

L. Landau and E. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media* (Reading, Mass.: Addison – Wesley, 1960).

۲. به‌کتاب بود (Bode) که درفصل ۱۳ به‌آن اشاره شده، رجوع کنید.

شد رخ خواهد داد.

برای آنکه فرض خطی بودن وعلیت را به‌طور ریاضی بیان کنیم، قطبش P را برحسب میدان اعمالی E به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$P(t)=\int_{0}^{\infty} dt'\, f(t')\, E(t-t') \qquad (۸۲.۱۹)$$

که درآن $f(t')$ حقیقی است. یعنی، P در زمان حال (t) متناسب با اثرات E در زمان‌حال ودر گذشته است $(t-t'$، با $t' \geqslant 0)$ ونه‌در آینده $(t' < 0)$. اکنون بگذارید P و E را به‌صورت برهم‌نهش امواج تخت بیان کنیم (یعنی، تبدیل فوریه آنهارا بگیریم) تابتوانیم پذیرفتاری را وارد کنیم

$$E(t)=\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{E}(\omega) \exp(-i\omega t)$$

$$P(t)=\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{\chi}(\omega) \hat{E}(\omega) \exp(-i\omega t)$$

باقراردادن اولین معادله از دومعادلهٔ بالادرمعادلهٔ (۸۲.۱۹) و مقایسهٔ نتیجه بامعادلهٔ دوم، دیده می‌شود که

$$\hat{\chi}(\omega)=\int_{0}^{\infty} dt' f(t') \exp(i\omega t')$$

یا

$$\chi_r(\omega)=\int_{0}^{\infty} dt' f(t') \cos \omega t'$$

$$\chi_i(\omega)=\int_{0}^{\infty} dt' f(t') \sin \omega t'$$

بنابراین χ_r و χ_i مستقل ازیکدیگرنیستند زیرا هرکدام ازآنها به‌نحویکتایی به $f(t')$ مربوط می‌شوند. برای به‌دست‌آوردن رابطهٔ میان‌آن دو، می‌بایست یکی ازاین دو معادله را برای $f(t')$ حل کنیم که این‌کار را می‌توانیم بااستفاده از قضیهٔ فوریه انجام دهیم، مثلا

$$f(t')=(2/\pi)\int_{0}^{\infty} d\omega' \chi_i(\omega') \sin \omega' t' \qquad (۸۳.۱۹)$$

باقراردادن این‌نتیجه درانتگرالی که برای χ_r داریم، می‌توانیم انتگرال گیری روی t' را انجام دهیم

$$\chi_r(\omega)=(2/\pi)\int_0^\infty d\omega'\omega'\chi_i(\omega')/(\omega'^2-\omega^2) \qquad (۸۴.۱۹)$$

به‌طور مشابه

$$\chi_i(\omega)=-(2\omega/\pi)\int_0^\infty d\omega'\chi_r(\omega')/(\omega'^2-\omega^2) \qquad (۸۵.۱۹)$$

معادلهٔ اول ازدومعادلهٔ بالا بامعادلهٔ (۷۶.۱۹) دقیقاً یکسان است ومعادلهٔ دوم معادلهٔ مکمل آن است.

برای محاسبهٔ مثال‌ساده‌ای ازپاسخ یك‌محیط پاشنده به‌یك میدان اعمالی غیرسینوسی می‌توانیم ازمعادلات (۸۲.۱۹) و (۸۳.۱۹) استفاده‌کنیم. مجدداً موردی‌را بررسی‌می‌کنیم که محیط تنها یك قلهٔ جذب بسیار باریك دارد، فرض می‌کنیم

$$\chi_i(\omega')=(\pi\omega_0\,\chi_0/2)\,\delta(\omega'-\omega_0)$$

به‌طوری‌که $\chi_r(0)=\chi_0$ است. آنگاه از معادلهٔ (۸۳.۱۹) تابع پاسخ این محیط عبارت است از $f(t')=\chi_0\,\omega_0\sin\omega_0\,t'$. حال فرض کنیدکه یك میدان الکتریکی به‌صورت یك تابع پله‌ای اعمال می‌شود (به‌طورموضعی)

$$E(t)=0 \qquad t<0$$

$$=E_0 \qquad t>0$$

با این E، معادلهٔ (۸۲.۱۹) تبدیل می‌شود به

$$P(t)=E_0\int_0^t dt'f(t')$$

وبا $f(t')$ براساس محاسبه، داریم

$$P(t)=\chi_0\,E_0(1-\cos\omega_0\,t)$$

پس از اعمال ناگهانی میدان الکتریکی E_0، محیط بافرکانس جذب (تشدید) ω_0 شروع به «زنگ زدن» (نوسان) می‌کند. اگر میرایی غیر صفر باشد، نوسانهای P مآلا میرانده خواهند شد و P به‌مقدار $\chi_0\,E_0$، مانند حالت میدان dc، خواهد رسید. می‌بینیم که هیچ تناسب ساده‌ای بین $P(t)$ و $E(t)$ وجود ندارد، ونسبت آنها (که به‌زمان بستگی دارد) یکی ازخواص ماده نیست. این مطلب مجدداً مؤیدآن است که ثابتهای ماده نسبتهایی بین

تبدیلهای فوریه هستند.

۶.۱۹ خلاصهٔ مطالب

بادر نظر گرفتن الکترونها ویونها به‌صورت نوسانگرهای هماهنگ میرای کلاسیك یـا به‌صورت ذرات آزاد، ثـابت دی‌الکتریك مختلط ماده به‌عنوان تـابعی از فرکانس میدان الکتریکی محاسبه می‌شود. نتیجه عبارت است از

$$\hat{K}-1=\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}$$

که درآن ω_0 فرکانس طبیعی و γ فرکانس میرایی است، و ω_p (فرکانس پلاسما برای‌ذرات آزاد) برابراست با

$$\omega_p=\sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}}$$

برمبنای این نتیجه انواع بستگیهای ثابت دی‌الکتریك حقیقی و رسانندگی را به‌فرکانس، بسته به‌آنکه نیروی‌اینرسی، یا نیروی میرایی، ویا نیروی‌بازگرداننده قابل‌چشمپوشی‌باشد، می‌توان فهرست‌بندی‌کرد. اگراثرات میدان موضعی را بتوانیم نادیده بگیریم، پاسخهای دی‌الکتریکی گروههای مختلف ذرات جمع‌پذیرند. بستگی ثابتهای دی‌الکتریك به‌فرکانس وهمچنین اندازه‌های نسبی‌قسمتهای حقیقی وموهومی آن تعیین‌کنندهٔ بستگی ثابتهای اپتیکی n و k به‌فرکانس است. قسمتهای حقیقی و موهومی ازیکدیگرمستقل نیستند، بلکه از طریق روابط کرامرز ـ کرونیگ به‌یکدیگر مربوط می‌شوند.

۱. هنگامی‌که نیروهای اینرسی و بازگرداننده غـالب‌اند، جذب تشدیدی رخ می‌دهد. برای میرایی کم ثابت دی‌الکتریك شکل لورنتسی ساده‌ای دارد. اگر K_1 کوچك باشد، ثابتهای اپتیکی نیز به‌همان شکل خواهند بود. درهرصورت، درناحیهٔ قله‌جذب «پاشندگی بی‌هنجار» رخ می‌دهد. قله‌ها برای الکترونها درمرئی یافرابنفش واقع‌اند و برای یونها درفروسرخ.

۲. چنانچه نیروی بازگرداننده (ω_0) را برابرباصفرقراردهیم نظریهٔ الکترون آزاد درود نتیجه خواهد شد. هنگـامی‌که $\omega \ll \gamma$ باشد، عمق پوسته و ضریب جذب در فرکانسهای پایین (فرمول هاگن ـ روبنز) با رسانندگی dc نتیجه‌می‌شود. برای $\omega \ll \gamma$ و $\omega \gg \omega_p$، ذرات‌آزاد سهم‌کوچکی در رسانش‌یاجذب دارند. اگر $\gamma \ll \omega_p$ باشد، نـاحیهٔ فرکانس بینابینی وجود دارد (برای فلزات درفروسرخ) که درآن‌ضریب جذب پایین است (ضریب انعکاس بالاست)

$$A = ۲/\omega_p \tau$$

دراینجا τ فرکانس برخورد است، وعمق پوسته درآن ناحیه کوچك است

$$\delta = \lambda_p / ۲\pi$$

که درآن λ_p طول موج پلاسماست. فرکانس پلاسما برای فلزات درفرابنفش وبرای سایر پلاسماهای الکترونی متداول درفرکانسهایی بسیارپایینتر، قرار دارد.

۳. در رسانش‌الکترولیتی و در واهلش دی‌الکتریکی اثرات‌اینرسی قابل چشمپوشی‌اند. بستگی رسانش الکترولیتی به‌فرکانس با بستگی رسانش ذرهٔ آزاد یکسان است، هرچندکه سازوکارهای‌تحرك‌وزمان فروافت‌این‌دومتفاوت‌اند. بستگی‌واهلش دی‌الکتریکی‌به‌فرکانس «تندمیرا»ست، وناحیهٔ «پاشندگی بهنجار» برای‌آن وجودندارد. سازوکارآن همان ساز و کارقطبش‌پذیری سمتگیری دوقطبیهای دائمی است.

۴. رابطهٔ کرامرز ـ کرونیگ

$$K_r(\omega) - ۱ = \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{\infty} \frac{\omega' K_i(\omega')\, d\omega'}{\omega'^{۲} - \omega^{۲}}$$

بین قسمتهای حقیقی وموهومی تابع‌پاسخ دی‌الکتریك تنها به‌خطی‌بودن محیط (وبه‌علیت) بستگی‌دارد. این رابطه یا صورتهای دیگرآن درتمام دستگاههای خطی‌کاربردهای مفیدی دارد.

مسائل

۱.۱۹ چگالی وضریب‌شکست بنزن مایع در $۲۰°C$ به‌ترتیب $۰٫۸۷۹ g/cm^۳$ و ۱٫۵۰ (برای $\lambda = ۵۸۹ nm$) است. از معادلهٔ کلاؤسیوس‌ـموساتی ، ضریب شکست بخار بنزن را در $۲۰°C$، که درآن فشاربخاربرابر با ۰٫۱ اتمسفر است، وهمچنین درنقطهٔ جوش‌آن ($۸۰°C$) محاسبه کنید.

۲.۱۹ نشان‌دهیدکه پهنای منحنی لورنتسی، معادلهٔ (۴۰.۱۹)، درارتفاع نصف ماکزیمم، γ است. همچنین نشان دهیدکه مساحت زیرمنحنی برابراست با

$$\frac{\pi}{۲} \frac{\omega_p^{۲}}{\omega_۰}$$

۳.۱۹ ضریب شکست‌الماس در $\lambda = ۵۸۹۳ Å$ برابراست با ۲٫۴۱۷؛ فرض‌کنیدثابت

دی‌الکتریك ساکن آن ۵٫۵۰ است. این داده‌ها را درمورد مدل ساده‌ای با تنها یك جذب به‌صورت تابع δ در λ_0 به‌کار ببرید و λ_0 را تعیین کنید.

۴.۱۹ فرمول کوشی را برای برآورد ضریب شکست گاز هیدروژن در شرایط متعارف برای طول‌موجهای ۴۰۰۰ و ۷۰۰۰ آنگستروم، به‌کار ببرید. فرض کنید که $\lambda_0 = 1216$ Å (خط αی لیمان).

۵.۱۹ گاهی شکل قلهٔ‌های جذب تجربی به‌منحنی گاؤسی نزدیکتر است تا به‌منحنی لورنتسی. برای نشان دادن اختلاف بین منحنیهای گاؤسی و لورنتسی، یك منحنی گاؤسی و یك منحنی لورنتسی با ارتفاع قلهٔ یکسان و پهنای یکسان در نصف ارتفاع ماکزیمم را باهم در یك نمودار رسم کنید.

۶.۱۹ تابع دی‌الکتریك را برای یونهای مقیدی که با میرایی قابل چشمپوشی در نوسان‌اند، می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$K(\omega) = K_\infty + \frac{\omega_p^2}{\omega_T^2 - \omega^2}$$

که در آن ω_T فرکانس تشدید برای ارتعاشات عرضی یونها با طول موج بلند است، و K_∞ به‌طور تقریبی سهم آن دسته از حرکتهای الکترونی است که در فرکانسهایی بسیار بالاتر از ω_T به‌تشدید درمی‌آیند. توجه کنید که برای $\omega = \omega_T$، $K(\omega) \to \infty$. اگر برای $\omega = \omega_L$ داشته باشیم $K(\omega) = 0$، به‌طوری که نوسانهای طولی با طول موج بلند با فرکانس ω_L بتوانند رخ بدهند، نشان دهید که

$$\frac{\omega_L^2}{\omega_T^2} = \frac{K_0}{K_\infty}$$

که در آن $K_0 = K(0)$ ثابت دی‌الکتریك dc است. این رابطه به رابطهٔ لیدن - ساکس - تلر[1] معروف است.

۷.۱۹ فرض کنید یك محلول رقیق شامل تعداد N نوسانگر اتمی در واحد حجم است که درمحیطی شفاف با ضریب شکست n_∞ حل شده‌اند. با فرض آنکه در فرکانس تشدید $K_i \ll 1$ و $n = n_\infty$ است، k و ضریب جذب (α) را پیدا کنید. از اثرات میدان موضعی چشمپوشی کنید. نشان دهید که

$$N = \frac{\varepsilon_0 mc}{e^2} n_\infty \gamma \alpha$$

---

1. Lyddane - Sachs - Teller

ازچنین رابطه‌ای (که به‌معادلهٔ اسما کولا[1] یامعادلهٔ چاکو[2] معروف است) غالباً برای پیدا کردن N ازاندازه گیریهای اپتیکی ارتفاع α وپهنای جذب γ استفاده می‌شود.

۸.۱۹ محیطی را درنظر بگیرید که حاوی ذرات آزادی بازمان برخورد τ است ورسانندگی dc آن برابر g_0 است. برای فرکانس $\omega = 1/\tau$، قسمتهای حقیقی و موهومی رسانندگی را محاسبه کنید. ثابت دی‌الکتریك حقیقی K چیست؟

۹.۱۹ برای یك پلاسمای الکترون آزاد با $\gamma/\omega_p = 10^{-2}$، مقادیر تقریبی n و k را در $\omega = \omega_p$ محاسبه کنید.

۱۰.۱۹ فرض کنید درتابع دی‌الکتریك یك پلاسمای الکترون آزاد بامیرایی قابل چشمپوشی، سهم الکترونهای مقید مدارهای داخلی را که درفرکانسهای بالاتر به‌تشدید درمی‌آیند بتوان به‌طور تقریبی با K_∞ برابر گرفت:

$$K(\omega) = K_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

فرکانس نوسانهای طولی را پیدا کنید. درنقره مقدارمحاسبه شده برای ω_p ازچگالی الکترون آزاد (ظرفیت) برابر است با $\omega_p = 13.8 \times 10^{15}\ s^{-1}$، و نوسانهای طولی پلاسما در فرکانس $\omega = 5.8 \times 10^{15} s^{-1}$ مشاهده می‌شوند. K_∞ چقدراست؟

۱۱.۱۹ دریك پلاسمای الکترون آزاد، امواج طولی پلاسما درفرکانس $\omega = Ne^2/\varepsilon_0 m$ تولید می‌شوند دراینجا m جرم الکترون است. اگریونهای مثبتی باجرم M نیز آزادانه‌در حرکت باشند، بافرض آنکه سهم الکترونها ویونها در K جمع پذیرند، نشان دهید که امواج طولی پلاسما درفرکانس $\omega = Ne^2/\varepsilon_0\mu$ تولید می‌شوند. دراینجا $\mu = mM/(M+m)$ جرم کاهش یافته است.

۱۲.۱۹ دربارهٔ رفتار دی‌الکتریکی ذرات آزاد برای مورد $\gamma \gg \omega_p$ بحث کنید. به‌عبارت دیگرعباراتی تقریبی برای $\hat{K}$ و $\hat{n}$ درنواحی مختلف فرکانس پیدا کنید. آیا رابطهٔ هاگن - روبنز معتبراست، واگرمعتبراست درچه گستره‌ای ازفرکانس؟

۱۳.۱۹ زاویهٔ اتلاف دی‌الکتریکی یك دی‌الکتریك قطبی برحسب تابعی از فرکانس ماکزیممی دارد. فرکانسی‌را که درآن ماکزیمم رخ‌می‌دهد محاسبه کنید و، اگر $K_0 \gg 1$ باشد، K_r و K_i را دراین فرکانس پیدا کنید.

۱۴.۱۹ فرمولهای زیر را (که به قواعد جمع مشهورند) برای رسانندگی حقیقی g و پذیرفتاری χ بااستفاده ازروابط کرامرز - کرونیگ ثابت کنید

---

1. Smakula 2. Chako

$$\int_{0}^{\infty} \chi(\omega')\, d\omega' = \frac{\pi}{2} \lim_{\omega \to \infty} g(\omega) = 0$$

$$\int_{0}^{\infty} g(\omega')\, d\omega' = -\frac{\pi}{2} \lim_{\omega \to \infty} \omega^{2} \chi(\omega) = \frac{\pi N e^{2}}{2m}$$

۱۵.۱۹ فرض کنید محیطی تنها با یك قلهٔ جذب به‌صورت $\chi_i(\omega') = 1/2\pi\omega_0\chi_0\delta(\omega' - \omega_0)$ مشخص می‌شود. پاسخ $P(t)$ محیط را به‌میدان الکتریکی تپی زیر پیدا کنید

$$E(t) = \frac{E_0}{\omega_0}\delta(t)$$

۱۶.۱۹ با در نظر گرفتن $J(t)$ به‌جای $P(t)$، نشان دهید که رسانندگی مختلط از روابط پاشندگی زیر تبعیت می‌کند

$$g_r(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\omega' g_i(\omega')\, d\omega'}{\omega'^{2} - \omega^{2}}, \quad g_i(\omega) = -\frac{2}{\pi}\omega \int_{0}^{\infty} \frac{g_r(\omega')\, d\omega'}{\omega'^{2} - \omega^{2}}$$

این روابط نه تنها برای عایقها بلکه برای رساناها نیز معتبرند، زیرا $\hat{g}(\omega)$ در $\omega = 0$ تکینگی ندارد. (الف) با استفاده از رابطهٔ $g = -i\omega\hat{\chi}$، این روابط پاشندگی را با معادله‌های (۸۴.۱۹) و (۸۵.۱۹) مقایسه کنید. (ب) «قواعد جمع» زیر را به‌دست آورید

$$\int_{0}^{\infty} \chi(\omega')\, d\omega' = -\frac{\pi}{2} g(0), \qquad \int_{0}^{\infty} g(\omega')\, d\omega' = \frac{\pi}{2}\frac{N e^{2}}{m}$$

توجه کنید که این روابط با روابطی که در مسئلهٔ ۱۴.۱۹ برای عایقها $(g(0) = 0)$ به‌دست آمد، سازگارند.

۲۰

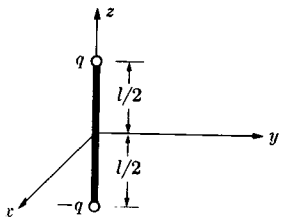
گسیل تابش

برای مطالعهٔ تولید امواج الکترومغناطیسی ابتدا بهتر است پتانسیلهای برداریی را بررسی کنیم که در معادلهٔ موج غیرهمگن با چشمه‌ها صدق می‌کنند. در این فصل چند چشمهٔ تابش ایده‌آل و همچنین دستگاههای پیچیده‌تری را بررسی خواهیم کرد. به‌علت تقریبهایی که در این فصل به‌کار می‌بریم، اعتبار جوابها محدود می‌شود به میدانهایی که بارهای متحرك کند (غیرنسبیتی) تولید می‌کنند، یعنی بارهایی که سرعتشان، v، درمقایسه با سرعت نور، c، کوچك است، $v \ll c$. ولی به‌هرجهت نتایج هم برای تابش امواج رادیویی از آنتنها کاربرد دارد و هم برای تابش از اتمها. بررسی خود را با ساده‌ترین مثال آنتن آغاز می‌کنیم، و سپس روش کلی‌تری را بررسی خواهیم کرد.

۱.۲۰ تابش از یك دوقطبی نوسان‌کننده

مثال ساده‌ای برای تابش از یك توزیع بار ـ جریان وابسته به زمان مشخص، محاسبهٔ تابش از یك دوقطبی الکتریکی نوسان‌کننده است. فرض می‌کنیم که دوقطبی، همانطور که در شکل ۱.۲۰ نشان داده‌ایم، شامل کره‌هایی است که در $z = \pm l/2$ قرار گرفته‌اند و توسط یك سیم با ظرفیت قابل چشمپوشی به‌یکدیگر متصل شده‌اند. بار موجود بر روی کرهٔ بالایی $+q$ و روی کرهٔ پایینی $-q$ است. اصل بقای بار ایجاب می‌کند که جریان موجود درسیم رابط با معادلهٔ زیر داده شود

$$I = +\dot{q} \qquad (۱.۲۰)$$



شکل ۱۰۲۰ دوقطبی الکتریکی نوسان‌کننده.

که درآن I درجهت مثبت z، مثبت است. باید توجه داشت که شرط قابل چشمپوشی بودن ظرفیت‌سیم ونتیجتاً یکنواخت‌بودن جریان، تنها درصورتی صادق است که طول l دوقطبی درمقایسه باطول تابش کوچك باشد (به‌بحث ابتدای فصل ۱۳ مراجعه کنید).

ازمعادلهٔ (۸۴.۱۶)، پتانسیل برداری مربوط به‌توزیع جریانی که بامعادلهٔ (۱.۲۰) مشخص شده باشد، عبارت است از

$$A_z(\mathbf{r}, t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{I(z', t-|\mathbf{r}-z'\mathbf{k}|/c)\,dz'}{|\mathbf{r}-z'\mathbf{k}|} \qquad (۲.۲۰)$$

این عبارت نسبتاً مشکل را می‌توان فوراً با بررسی کمیت $|\mathbf{r}-\mathbf{k}z'|$ ساده کرد. واضح است که

$$|\mathbf{r}-\mathbf{k}z'|=(r^2-2z'\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+z'^2)^{1/2} \qquad (۳.۲۰)$$

اگر l درمقایسه با r کوچك باشد، به‌عبارت دیگر، اگرما میدان را تنها در فواصل دور از دوقطبی مطالعه کنیم، طرف راست معادلهٔ (۳.۲۰) را می‌توانیم به‌شکل زیر بسط دهیم

$$|\mathbf{r}-\mathbf{k}z'|=r-z'\cos\theta \qquad (۴.۲۰)$$

که درآن θ زاویهٔ بین $\mathbf{r}$ و محور z است. کمیت $|\mathbf{r}-\mathbf{k}z'|$ درمعادلهٔ (۴.۲۰) دوبار در عبارت $\mathbf{A}$ آمده است. اگر r به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد، می‌توانیم برای مخرج از $z'\cos\theta$ صرفنظر کنیم. ولی در جملهٔ زمان تأخیری درصورتی می‌توان از $z'\cos\theta$ صرفنظر کرد که $z'\cos\theta/c$ درمقایسه بازمانی که دراثنای آن جریان به‌طور قابل توجهی تغییرمی‌کند، برای مثال، در مقایسه بادورهٔ تناوب برای جریانهایی که تغییرات هماهنگ دارند، قابل چشمپوشی باشد. چون $z'\cos\theta \ll l/2$ است، این بدان معنی است که در جملهٔ زمان تأخیری تنها درصورتی می‌توان از $z'\cos\theta/c$ صرفنظر کرد که

$$\frac{l}{2}\ll cT=\lambda \qquad (۵.۲۰)$$

بنابراین، اگر دوقطبی درمقایسه باطول‌موج‌کوچك ونقطهٔ مشاهده، درمقایسه با l، ازدوقطبی خیلی دورباشد آنگاه $\mathbf{A}$ بامعادلهٔ زیرداده می‌شود

$$A_z(\mathbf{r}, t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\, l\, I\left(t-\frac{r}{c}\right) \qquad (۶.۲۰)$$

پتانسیل نرده‌ای φ را می‌توان یا با استفاده ازشرط‌لورنتس یا بابه‌کاربردن عبارت مناسب برای پتانسیل تـأخیری، به‌دست‌آورد. هردوروش نتیجهٔ نهایی یکسانی می‌دهند؛ باوجود این، چون پتانسیل الکتریکی مربوط به‌یك دوقطبی عبارت است از اختلاف بین دو جملهٔ بزرگ، باید دربه‌کاربردن تقریب در مورد پتانسیل تأخیری فوق‌العاده دقت‌کرد. چون در محاسبهٔ شرط لورنتس بااین اشکال مواجه نمی‌شویم، پتانسیل نرده‌ای را ازحل معادلهٔ زیر به‌دست می‌آوریم

$$\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \qquad (۷.۲۰)$$

که درآن $\mathbf{A}$ بامعادلهٔ (۶.۲۰) داده می‌شود. بنابراین

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{l}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}I\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

$$=\frac{l}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{z}{r^3}I\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{z}{r^2c}I'\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] \qquad (۸.۲۰)$$

که درآن I' نشان‌دهندهٔ مشتق I نسبت به‌شناسهٔ خودش است. باتوجه به‌اینکه $I=+\dot{q}$، معادلهٔ بالا قابل انتگرال گیری است ودرنتیجه خواهیم داشت

$$\varphi(\mathbf{r}, t)=\frac{l}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^2}\left[\frac{q(t-r/c)}{r}+\frac{I(t-r/c)}{c}\right] \qquad (۹.۲۰)$$

اکنون که پتانسیلهـای نرده‌ای و برداری به‌دست آمدند، بـرای به‌دست آوردن میدان الکترومغناطیسی تنها باید ازآنها مشتق بگیریم. قبل از انجام این کار، راحت‌تر است که تحلیل خود را به‌موردی اختصاص دهیم که توزیع بار ـ جریان نسبت به‌زمـان به‌صورت هماهنگ تغییرمی‌کند. به‌ویژه تغییرات را به‌صورت تابع زیرانتخاب می‌کنیم

$$q\left(t-\frac{r}{c}\right)=q_0\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

$$I = I_\circ \sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) = -\omega q_\circ \sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \qquad (۱۰.۲۰)$$

باتجزیهٔ **A** به‌مؤلفه‌های کروی آن، خواهیم داشت

$$A_r = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\frac{I_\circ l}{r}\cos\theta \sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

$$A_\theta = -\frac{\mu_\circ}{۴\pi}\frac{I_\circ l}{r}\sin\theta \sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \qquad (۱۱.۲۰)$$

$$A_\phi = \circ$$

وازاینجا روشن می‌شود که تنها مؤلفهٔ ϕ از میدان **B** صفر نیست. این‌مؤلفه عبارت است‌از

$$B_\phi = \frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{۱}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}$$

$$= \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\frac{I_\circ l}{r}\sin\theta\left[\frac{\omega}{c}\cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{۱}{r}\sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \qquad (۱۲.۲۰)$$

محاسبهٔ میدان‌الکتریکی تااندازه‌ای پیچیده‌تراست، زیرا نه‌تنها **A**، بلکه φ نیزدرآن‌دخیل است. نتیجهٔ مشتق گیریها عبارت است از

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial t} = \frac{۲lI_\circ\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{\sin\omega(t - r/c)}{r^۲c} - \frac{\cos\omega(t - r/c)}{\omega r^۳}\right]$$

$$E_\theta = -\frac{۱}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial t}$$

$$= -\frac{lI_\circ\sin\theta}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left[\left(\frac{۱}{\omega r^۳} - \frac{\omega}{rc^۲}\right)\cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) - \frac{۱}{r^۲c}\sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$$

$$E_\phi = -\frac{۱}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial t} = \circ \qquad (۱۳.۲۰)$$

محاسبهٔ آهنگ تابش انرژی ازدوقطبی جالب است. این‌محاسبه را باانتگرال گیری ازمؤلفهٔ عمود بردار پوئین‌تینگ روی سطح کره‌ای به‌شعاع R انجام می‌دهیم

$$\oint \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\,da=\frac{1}{\mu_\circ}R^{۲}\int_\circ^\pi E_\theta B_\phi\, ۲\pi\sin\theta\, d\theta \qquad (۱۴.۲۰)$$

بااستفاده ازمعادلات (۱۲.۲۰) و (۱۳.۲۰) می‌توانیم انتگرالی‌را که درمعادلهٔ (۱۴.۲۰) دیده می‌شود به‌طورکامل محاسبه کنیم؛ باوجود این، شاید آموزنده‌تر باشد که تنها آن قسمت ازآن‌را محاسبه کنیم که در $R\to\infty$ صفر نمی‌شود. این کاررا باانتخاب جمله‌ای که در E_θ و B_ϕ با $۱/r$ متناسب است، انجام می‌دهیم. نتیجه به‌صورت زیرخواهد بود

$$\oint \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\,da=\frac{(I_\circ l)^{۲}}{۶\pi\varepsilon_\circ}\frac{\omega^{۲}}{c^{۳}}\cos^{۲}\omega\left(t-\frac{r}{c}\right) \qquad (۱۵.۲۰)$$

این توان تابش شدهٔ لحظه‌ای است؛ میانگین توان تابش شده (ازآنجا که میانگین $\cos^{۲}$ برابریك‌دوم است) عبارت است از

$$\bar{P}=\frac{l^{۲}\omega^{۲}}{۶\pi\varepsilon_\circ c^{۳}}\frac{I_\circ^{۲}}{۲} \qquad (۱۶.۲۰)$$

شکل متداولتری برای معادلهٔ (۱۶.۲۰) به‌کمك معرفی $\lambda=۲\pi c/\omega$ و $c=۱/\sqrt{\varepsilon_\circ\mu_\circ}$ به‌دست می‌آید. نتیجه عبارت است از

$$\bar{P}=\frac{۲\pi}{۳}\sqrt{\frac{\mu_\circ}{\varepsilon_\circ}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^{۲}\frac{I_\circ^{۲}}{۲} \qquad (۱۷.۲۰)$$

یك مقاومت R که‌حامل‌جریان $I_\circ\cos\omega t$ باشد، انرژی‌را باآهنگ‌میانگین $\bar{P}=RI_\circ^{۲}/۲$ تلف می‌کند. ازمقایسهٔ این رابطه بامعادلهٔ(۱۷.۲۰)، ملاحظه‌می‌شود که عاقلانه‌است‌مقاومت تابشی یك دوقطبی‌را بامعادلهٔ زیر تعریف کنیم

$$R_r=\frac{۲\pi}{۳}\sqrt{\frac{\mu_\circ}{\varepsilon_\circ}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^{۲} \qquad (۱۸.۲۰)$$

یا

$$R_r=۷۸۹\left(\frac{l}{\lambda}\right)^{۲}\ \Omega \qquad (\text{درخلأ})$$

برای محیط مادی $\mu_\circ$ و $\varepsilon_\circ$ را باید با μ و ε جایگزین کنیم و $\lambda=۲\pi/\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$. ممکن است به‌این فکر بیافتیم که از معادلهٔ (۱۸.۲۰) برای توصیف تابش ازیك آنتن رادیو استفاده کنیم. متأسفانه نقایصی وجود دارد که باعث می‌شود نتوانیم نتایج خوبی از این

طریق به‌دست آوریم. نقایص اصلی عبارت‌اند از (۱) ازاثر نزدیکی زمین چشمپوشی شده است، (۲) معمولاً آنتنها را به‌طریق خازنی درقسمتهای انتهایی باردار نمی‌کنند، و (۳) عموماً آنتنها درمقایسه باطول موجی که تابش می‌کنند، کوتاه نیستند. دربخش بعد، رفع دو نقص آخررا بررسی خواهیم کرد؛ ولی بررسی اثر اختلالی که زمین به‌وجود می‌آورد از حوزهٔ بحث این کتاب خارج است.

۲.۲۰ تابش از یك آنتن نیم موج

محدودیت کوچك بودن طولها درمقایسه باطول‌موج‌را می‌توان دربعضی موارد باروشهای نسبتاً ساده حذف کرد. به‌ویژه، یك سیم‌راکه طولش درست‌نصف طول موج‌است، می‌توان به‌اجزای بی‌نهایت کوچك تقسیم کرد وروش بخش قبل‌را درمورد هرجزء به‌کاربرد. فرض کنید سیم درامتداد محور z از $-\lambda/۴$ تا $+\lambda/۴$ قراردارد وحامل جریان زیراست

$$I(z', t) = I_\circ \sin \omega t \cos\left(\frac{۲\pi z'}{\lambda}\right) \qquad (۱۹.۲۰)$$

مقدارجریان در دوانتهای‌سیم برابرصفراست. نایکنواختی جریان ایجاب می‌کند که‌چگالی بارمتغیر باشد. چگالی باردر دو انتهای سیم بیشترین مقدار است. یك جزء dz' در z' در ایجاد E_θ درخلأ به‌مقدارزیرسهیم است

$$dE_\theta = I_\circ \frac{\sin\theta}{۴\pi\varepsilon_\circ Rc^۲} \omega \cos \omega\left(t - \frac{R}{c}\right) \cos\left(\frac{۲\pi z'}{\lambda}\right) dz' \qquad (۲۰.۲۰)$$

دراینجا R عبارت است‌ازفاصلهٔ dz' ازنقطهٔ‌مشاهده، وازجملات ازمرتبهٔ $۱/R^۲$ چشمپوشی شده‌است. به‌طریق مشابه داریم

$$dB_\phi = \frac{\mu_\circ}{۴\pi} \frac{I_\circ \omega}{Rc} \sin\theta \cos \omega\left(t - \frac{R}{c}\right) \cos\left(\frac{۲\pi z'}{\lambda}\right) dz' \qquad (۲۱.۲۰)$$

مسئلهٔ محاسبهٔ E_θ و B_ϕ تبدیل می‌شود به‌مسئلهٔ محاسبهٔ انتگرال زیر

$$K = \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \frac{۱}{R} \cos \omega\left(t - \frac{R}{c}\right) \cos u \, du \qquad (۲۲.۲۰)$$

که درآن $u = ۲\pi z'/\lambda$. مثل قبل، $R = r - z' \cos\theta$، وبنابراین باانتخاب r به‌اندازهٔ کافی بزرگ، $z' \cos\theta$ قابل چشمپوشی می‌شود. ولی در شناسهٔ کسینوس، دقت بیشتری

لازم است و K به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$K=\frac{1}{r}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)+u\cos\theta\right]\cos u\,du$$

می‌توان کسینوس‌را بسط داد تا نتیجهٔ زیر به‌دست آید

$$K=\frac{1}{r}\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(u\cos\theta)\cos u\,du$$

$$-\frac{1}{r}\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin(u\cos\theta)\cos u\,du$$

انتگرال دوم صفرمی‌شود، وانتگرال اول را می‌توان بانوشتن کسینوس به‌شکل‌نمایی یا با به‌کاربردن جدولهای استاندارد محاسبه‌کرد. نتیجه عبارت است از

$$K=\frac{2}{r}\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\frac{\cos[(\pi/2)\cos\theta]}{\sin^2\theta} \qquad (۲۳.۲۰)$$

با به‌دست‌آوردن K، خواهیم داشت

$$E_\theta=\frac{I_\circ}{2\pi\varepsilon_\circ rc}\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\frac{\cos[(\pi/2)\cos\theta]}{\sin\theta}$$

$$B_\phi=\frac{\mu_\circ I_\circ}{2\pi r}\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\frac{\cos[(\pi/2)\cos\theta]}{\sin\theta} \qquad (۲۴.۲۰)$$

میانگین بردار پوئین‌تینگ انتگرال گیری شده عبارت است از

$$\bar{P}=\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_\circ}{\varepsilon_\circ}}\,I_\circ^2\int_\circ^\pi\frac{\cos^2[(\pi/2)\cos\theta]}{\sin^2\theta}\sin\theta\,d\theta \qquad (۲۵.۲۰)$$

انتگرال باقی مانده‌را می‌توان تنها به‌صورت یك سری نامتناهی محاسبه‌کرد، دراینجاتنها متذکرمی‌شویم‌که برای یك‌آنتن نیم‌موج نتیجه عبارت است از

$$\bar{P}=73.1\,\Omega\frac{I_\circ^2}{2} \quad (\text{درخلأ}) \qquad (۲۶.۲۰)$$

این روش‌را می‌توان درمورد مسائل پیچیده‌تر به‌کاربرد؛ اما، جزئیات فنی‌آن نسبتاً دشوار می‌شود.

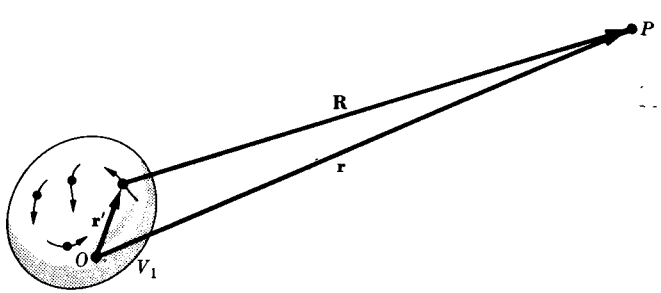
۳.۲۰ تابش از یك گروه بار متحرك

دراین بخش عبارتی‌را برای توان تابش شده توسط یك‌گروه بارمتحرك، یا به‌طورمعادل، توسط یك توزیع بار ـ جریـان، به‌دست خواهیم آورد. حرکت بارها اختیاری است، مگردرمحدودیتهای زیر: دراثنای زمانی که طول می‌کشد تا تابش ازنزدیکی بارها تانقطهٔ مشاهده منتشرشود، می‌توان تصورکردکه تمام بارها و جریانهای توزیع درحجم V_1 جای دارند وابعاد این حجم درمقایسه‌بافاصلهٔ چشمه تانقطهٔ مشاهده، کوچك است (شکل ۲.۲۰). به‌علاوه، ابعاد V_1 درمقایسه باطول موجهای عمدهٔ‌تابش گسیل‌شده، کوچك‌اند. محدودیتهای فوق همچنین ایجاب می‌کندکه بارها درمقایسه باسرعت نوربه‌کندی حرکت کنند. فرض می‌شودکه بارها درخلأ حرکت می‌کنند.

به‌عنوان اولین قدم برای حل مسئله، باید پتانسیلهای الکترومغنـاطیسی را محاسبه کنیم. اینها همان پتانسیلهای تأخیری هستندکه دربخش ۶.۱۶ دربارهٔ آنها بحث شد. مبدأ مختصات O را درداخل حجم V_1 می‌گیریم ومحل یك‌جزء باررا با $\mathbf{r}'$ نشان می‌دهیم(شکل ۲.۲۰). نقطهٔ P به‌فاصلهٔ $\mathbf{r}$ ازمبدأ قرارگرفته‌است. برای‌راحتی، فاصلهٔ کمکی $\mathbf{R}$ رامعرفی می‌کنیم که نشان دهندهٔ محل نقطهٔ میدان نسبت به‌یك جزء باراست. واضح است که

$$\mathbf{r}'+\mathbf{R}=\mathbf{r} \qquad (۲۷.۲۰)$$

چون $r \gg r'$ است، می‌توان نوشت



شکل ۲.۲۰ بارهایی‌که به‌طور دلخواه در حرکت‌اند و در حجم V_1 احاطه شده‌اند. میدانها باید در نقطهٔ P محاسبه شوند.

$$R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\approx r-\frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}}{r} \qquad (۲۸.۲۰)$$

حال پتانسیل نرده‌ای تأخیری φ در نقطهٔ P به‌شکل زیر درمی‌آید

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_1}\frac{\rho(\mathbf{r}',t-R/c)\,dv'}{R}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_1}\frac{\rho(\mathbf{r}',t-r/c+\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}/cr)\,dv'}{r-(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r})/r} \qquad (۲۹.۲۰)$$

با استفاده از قضیهٔ دوجمله‌ای

$$\left(r-\frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}}{r}\right)^{-1}=r^{-1}+r^{-2}\frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}}{r}+\cdots \qquad (۳۰.۲۰)$$

و از بسط سری تیلور

$$\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}+\frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}}{cr}\right)=\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}\right)+\frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}}{cr}\left.\frac{\partial\rho}{\partial t}\right|_{r',t-r/c}+\cdots \qquad (۳۱.۲۰)$$

خواهیم داشت

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{V_1}\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}\right)dv'$$

$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathbf{r}\cdot\int_{V_1}\mathbf{r}'\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}\right)dv'$$

$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2 c}\mathbf{r}\cdot\frac{d}{dt}\int_{V_1}\mathbf{r}'\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}\right)dv'+\text{جملات درجهٔ بالاتر}$$

$$(۳۲.۲۰)$$

انتگرال اول درمعادلهٔ (۳۲.۲۰) عبارت‌است ازبارکل توزیع (Q). این بارکل مقداری ثابت ومستقل‌از زمان است. انتگرال دوم (ونیز انتگرال سوم) عبارت است ازگشتاور دو قطبی الکتریکی توزیع بار ($\mathbf{p}$)، که درزمان $t-r/c$ محاسبه شده است . جملات درجهٔ بالاتر باتوان بیشتر r'/r افت می‌کنند وبه‌گشتاورهای چند قطبی بالاتر توزیع باربستگی دارند. به‌علت محدودیتهایی‌که درابتدای این بخش‌اعمال شد، سهم این جملات درمیدان الکترومغناطیسی درفاصلهٔ زیاد ازتوزیع بار قابل توجه نیست (به‌مطلب زیر توجه شود).

بنا براین،

$$\varphi(\mathbf{r}, t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r}+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}(t-r/c)}{r^3}+\frac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{cr^2}\right] \quad (۳۳.۲۰)$$

که درآن $\dot{\mathbf{p}}\equiv d\mathbf{p}/dt$. در نتیجهٔ استفاده از بسط سری تیلور، تنها یك زمان تأخیری در جملاتی که به‌طورصریح نگاه داشته شده‌اند، به‌چشم می‌خورد.

پتانسیل برداری تأخیری $\mathbf{A}$ درنقطهٔ میدان بامعادلهٔ زیر داده می‌شود

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_1}\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t-r/c+\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}/cr)\,dv'}{r-(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r})/r}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi r}\int_{V_1}\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t-\frac{r}{c}\right)dv'+\text{جملات درجهٔ بالاتر}$$

(۳۴.۲۰)

جملات درجهٔ‌بالاتررا لازم‌نیست به‌صراحت‌نوشت، زیرا بازهم این جملات‌به گشتاورهای چند قطبی بالاتر توزیع باربستگی دارند. به‌بیان دیگر، اکنون معادلهٔ (۳۴.۲۰) بامعادلهٔ (۳۲.۲۰) سازگار است. بـااستفاده ازنتیجهٔ مسئلهٔ ۴.۷ می‌توان معادلهٔ قبل را به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)=\frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) \quad (۳۵.۲۰)$$

پتانسیل نرده‌ای (۳۳.۲۰) رانیزمی‌توانستیم از (۳۵.۲۰) وشرط لورنتس به‌دست‌آوریم.

میدانهای الکتریکی ومغناطیسی رامی‌توان ازروابط معمول زیربه‌دست‌آورد

$$\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\nabla\varphi, \quad \mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$$

ما توجه‌مان‌را به‌میدانهای منطقهٔ تابش محدود می‌کنیم؛ به‌عبارت دیگر، به‌آن قسمت از $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ که به‌صورت r^{-1} افت می‌کنند، چون تنها این قسمتها برای تعیین توان تابش شده توسط توزیع بار کفایت می‌کنند. محاسبهٔ $\partial\mathbf{A}/\partial t$ سرراست است؛ برای به‌دست آوردن $\nabla\varphi$ توجه می‌کنیم که چون $\dot{\mathbf{p}}$ تابعی از $t-r/c$ است

$$\frac{\partial}{\partial r}\dot{\mathbf{p}}\equiv-\frac{1}{c}\ddot{\mathbf{p}} \quad (۳۶.۲۰)$$

بنابراین

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)=\frac{-\mu_{\circ}}{۴\pi r}\ddot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{\mathbf{r}\cdot\ddot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{c^{۲}r^{۳}}\mathbf{r} \qquad (۳۷.۲۰)$$

$$+ \text{(جملاتی که سریعتر از } ۱/r \text{ افت می کنند)}$$

برای محاسبهٔ $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ باید ازمعادلهٔ (۳۵.۲۰) تاو بگیریم

$$\nabla\times\left[\frac{۱}{r}\dot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]=\nabla\frac{۱}{r}\times\dot{\mathbf{p}}+\frac{۱}{r}\nabla\times\dot{\mathbf{p}}$$

$$=-\frac{۱}{r^{۲}}\frac{\mathbf{r}}{r}\times\dot{\mathbf{p}}+\frac{۱}{r}\frac{\mathbf{r}}{r}\times\frac{\partial\dot{\mathbf{p}}}{\partial r}$$

$$=-\frac{۱}{r^{۲}}\frac{\mathbf{r}}{r}\times\dot{\mathbf{p}}-\frac{۱}{cr}\frac{\mathbf{r}}{r}\times\ddot{\mathbf{p}}$$

رابطهٔ آخر بااستفاده ازمعادلهٔ (۳۶.۲۰) به‌دست‌می‌آید. اولین جمله درتاو $\mathbf{A}$ را می‌توانیم نادیده بگیریم زیرا این جمله سریعتر از $r^{-۱}$ افت می کند؛ پس

$$\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)=\frac{-\mu_{\circ}}{۴\pi cr^{۲}}\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) \qquad (۳۸.۲۰)$$

بنابراین، میدانهای منطقهٔ تابش بامعادلات زیرداده می‌شوند

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)=-\frac{\mu_{\circ}}{۴\pi cr^{۲}}\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{p}} \qquad (۳۹.۲۰)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}c^{۲}}\left[\frac{(\mathbf{r}\cdot\ddot{\mathbf{p}})\mathbf{r}-r^{۲}\ddot{\mathbf{p}}}{r^{۳}}\right] \qquad (۴۰.۲۰)$$

$$=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}c^{۲}r^{۳}}\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{p}})$$

$$=-\frac{c}{r}\mathbf{r}\times\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

که درآنها مقدار $\ddot{\mathbf{p}}$ درزمان تأخیری محاسبه می‌شود.

واضح است که $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ بریکدیگر، وهردو بر $\mathbf{r}$ نیز عمودند. از معادلهٔ (۲۲.۱۷) نیزمی‌توانستیم انتظارچنین نتیجه‌ای را داشته باشیم، زیرا $\mathbf{r}/r=\vec{\kappa}/\kappa=\mathbf{u}$. بنابراین هنگامی که تنها میدان تابش موردنظراست ($r \gg \lambda$) تنهاکافی است که $\mathbf{A}$ را محاسبه کنیم. بردار پوئین‌تینگ $\mathbf{S}=(1/\mu_0)(\mathbf{E}\times\mathbf{B})$ درجهت $\mathbf{r}$ است وبامعادلهٔ زیرداده‌می‌شود

$$\mathbf{S}=\frac{c}{\mu_0 r}\mathbf{B}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{B})=\frac{c}{\mu_0 r}\mathbf{r}B^2 \qquad (۴۱.۲۰)$$

یا

$$\mathbf{S}=\frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^5}\mathbf{r}(\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{p}})^2$$

اگرمحور z را درجهت $\ddot{\mathbf{p}}$ انتخاب کنیم، داریم

$$\mathbf{S}=\frac{\ddot{\mathbf{p}}^2\sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad (۴۲.۲۰)$$

می‌بینیم که حداکثرتوان در جهت $90°$ نسبت به $\ddot{\mathbf{p}}$ تابش می‌شود. توان تابش شدهٔ کل را می‌توان باانتگرال‌گیری ازبردار پوئین‌تینگ روی یك سطح بسته‌که توزیع باررا احاطه کرده است، به‌دست‌آورد. یك انتخاب مناسب برای چنین سطحی، کره‌ای است که‌مرکزش درتوزیع بارقرارگرفته و شعاعش آنقدر بزرگ باشد که تمام قسمتهای سطح آن در منطقهٔ تابش قراربگیرد. بنابراین

$$P_R=-\frac{dW}{dt}=\oint_S \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\,da$$

$$=\frac{\ddot{p}^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\int\frac{\sin^2\theta}{r^3}\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

که ازآن به‌سادگی می‌توان نتیجهٔ مهم زیررا برای توان تابش شده توسط یك گروه بار متحرك که درمقایسه باسرعت نوربه‌کندی حرکت می‌کنند، به‌دست‌آورد

$$P_R=-\frac{dW}{dt}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3}\frac{\ddot{\mathbf{p}}^2}{c^3} \qquad (۴۳.۲۰)$$

معادلهٔ (۴۳.۲۰) عبارتی است برای توان تابش شده توسط بارهایی که به‌دلخواه حرکت می‌کنند برحسب گشتاور دوقطبی الکتریکی $\mathbf{p}$ی بارهای مذکور. عبارتی که قبلا

برای تابش ازیك دو قطبی نوسان‌کننده به‌دست آمد، معادلهٔ (۱۶.۲۰)، مثال خاصی از (۴۳.۲۰) است؛ درآن‌حالت $p=(lI_{\circ}/\omega)\cos\omega(t-r/c)$. حال ممکن است به‌علت تقارن خاص دستگاه، گشتاور دوقطبی صفرشود یا مستقل اززمان باشد. دراین مورد توان تابش شده الزاماً صفر نیست، بلکه باید جملات بیشتری برای محاسبه در بسطهای φ و $\mathbf{A}$ [معادلات(۳۲.۲۰) و(۳۴.۲۰)] نگه‌داشته شوند. درواقع، درمی‌یابیم که‌دراین‌حالت‌توان تابش‌شده به‌یکی‌ازگشتاورچند قطبیهای درجهٔ بالاتردستگاه بستگی‌دارد. شدت‌تابش چند - قطبیهای مختلف، با افزایش درجهٔ چندقطبی به‌ترتیب کمتر می‌شوند؛ مثلا، تابش چهارقطبی تقریباً بامضرب$^{۲}(a/\lambda)$ ازتابش‌دوقطبی کوچکتر است، دراینجا a بعد دستگاه وλ طول موج تابش گسیل‌شده‌است. بنابراین‌اگر $\bar{p}$ برای‌دستگاه موردمطالعه صفرنشود، معادلهٔ(۴۳.۲۰)، قسمت عمدهٔ توان تابش شده را به‌دست می‌دهد.

می‌توان معادلات (۳۹.۲۰)، (۴۰.۲۰)، و (۴۳.۲۰) را درمورد تابش ازیك بار منفرد شتابدار q نیزبه‌کاربرد. گشتاور دوقطبی این بار $q\mathbf{r}'$ است، که درآن $\mathbf{r}'$ ازیك مبدأ دلخواه اندازه‌گیری می‌شود. بنابراین

$$\dot{\mathbf{p}}=q\dot{\mathbf{r}}'=q\mathbf{v}$$

که درآن $\mathbf{v}$ سرعت بار است که به‌انتخاب مبدأ بستگی ندارد. سرانجام

$$\ddot{\mathbf{p}}=q\dot{\mathbf{v}}$$

که درآن $\dot{\mathbf{v}}$ شتاب‌باراست. باقراردادن نتیجهٔ اخیر درمعادلهٔ (۴۳.۲۰) خواهیم داشت

$$P_R=-\frac{dW}{dt}=\frac{q^{۲}}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\,\frac{۲}{۳}\,\frac{\dot{\mathbf{v}}^{۲}}{c^{۳}} \qquad (۴۴.۲۰)$$

که معادله‌ای است برای توان تابش شده توسط بارشتابداری که به‌کندی حرکت می‌کند.

۴.۲۰* میدانهای منطقه‌های نزدیك و بینابین

تنها جمله‌هایی درمیدان‌که با $۱/r$ متناسب‌اند درانرژی تابشی سهیم‌اند، ولی در ناحیهٔ نزدیك به‌بارهای‌تابنده توانهای بالاتر $۱/r$ غالب‌اند. این‌میدانها ازنظرمقایسه‌بامیدانهای ساکن، وهمچنین درمسائل عملی درناحیهٔ بسیارنزدیك به‌آنتنها، مورد توجه‌اند. در این بخش ما میدانهای E و Bی یك دوقطبی الکتریکی نقطه‌ای‌را به‌طورکامل محاسبه خواهیم کرد. برای‌انجام دادن‌این کار، باپتانسیلهای دوقطبی، معادله‌های (۳۳.۲۰) و (۳۵.۲۰)، شروع می‌کنیم ودرمشتق‌گیریها جملاتی راکه دربخش قبل کنار گذاشتیم حفظ می‌کنیم. سهم $-\partial\mathbf{A}/\partial t$ در $\mathbf{E}$ قسمتی ازمیدان تابش است‌که قبلا محاسبه‌کرده‌ایم. بااعمال‌اتحاد

برداری (۶.۱.۱) درمعادلهٔ (۳۳.۲۰) با $Q=0$، خواهیم داشت

$$-\nabla\varphi=\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\mathbf{r}}{cr^2}\cdot\nabla\dot{\mathbf{p}}+\frac{\mathbf{r}}{cr^2}\times(\nabla\times\dot{\mathbf{p}})+\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\nabla\mathbf{p}\right.$$

$$\left.+\frac{\mathbf{r}}{r^3}\times(\nabla\times\mathbf{p})+\dot{\mathbf{p}}\cdot\nabla\frac{\mathbf{r}}{cr^2}+\mathbf{p}\cdot\nabla\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right]$$

که دراینجا جملات به‌ترتیب توانهای فزایندهٔ $1/r$ مرتب شده‌اند. اولین‌دوجمله، هنگامی که با $-\partial\mathbf{A}/\partial t$ جمع شوند، میدان تابش معادلهٔ (۴۰.۲۰) را می‌دهند

$$\mathbf{E}_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2r}\left[\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\ddot{\mathbf{p}}\frac{\mathbf{r}}{r}-\ddot{\mathbf{p}}\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2r}\frac{\mathbf{r}}{r}\times\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\times\ddot{\mathbf{p}}\right)\quad[۴۰.۲۰]$$

که به‌صورت $1/r$ تغییرمی‌کند و به $\ddot{\mathbf{p}}$ بستگی دارد. جملهٔ آخر، هنگامی که بسط داده‌شود، درست همان میدان دوقطبی ساکن معادلهٔ (۳۶.۲) است

$$\mathbf{E}_3=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left[3\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\mathbf{p}\frac{\mathbf{r}}{r}-\mathbf{p}\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left[\frac{\mathbf{r}}{r}\times\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\times\mathbf{p}\right)+2\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\mathbf{p}\frac{\mathbf{r}}{r}\right]$$

[۳۶.۲]

که به‌صورت $1/r^3$ تغییرمی‌کند و به $\mathbf{p}$ بستگی دارد. البته دراین مورد دوقطبی $\mathbf{p}$ بازمان تغییرمی‌کند، ولی‌بستگی مکانی $\mathbf{E}_3$ به‌طور لحظه‌ای همان بستگی میدان‌دوقطبی ساکن‌است. جملات سوم، چهارم، وپنجم (که به‌صورت مشابه باجملات اول، دوم، وآخرهستند)منجر به‌میدان‌گذار یا میدان القا می‌شوند

$$\mathbf{E}_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{cr^2}\left[3\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\dot{\mathbf{p}}\frac{\mathbf{r}}{r}-\dot{\mathbf{p}}\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{cr^2}\left[\frac{\mathbf{r}}{r}\times\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\times\dot{\mathbf{p}}\right)+2\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\dot{\mathbf{p}}\frac{\mathbf{r}}{r}\right]$$

(۴۵.۲۰)

که به‌صورت $1/r^2$ تغییرمی‌کند و به $\dot{\mathbf{p}}$ بستگی دارد. پس میدان کل E عبارت است‌از

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2+\mathbf{E}_3$$

که درآن $\mathbf{p}$ و مشتقاتش باید در زمان تأخیری $t'=t-r/c$ محاسبه شوند. میدان $\mathbf{B}$ با محاسبهٔ تاو معادلهٔ (۳۵.۲۰) به‌دست می‌آید. اگر جمله‌ای را که هنگام به‌دست آوردن معادلهٔ (۳۹.۲۰) کنار گذاشتیم حفظ کنیم، ازمعادلات (۴۰.۲۰) و (۴۵.۲۰) می بینیم که

$$\mathbf{B}=\frac{\mathbf{r}}{cr}\times(\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2)$$

بنابراین $\mathbf{B}$ حاوی یك میدان تابش ویك میدان القاست، ولی میدان Bی «ساکن» وجود ندارد.

ازدومین عباراتی که‌دربالا برای $\mathbf{E}_{1,2,3}$ داده شد، روشن‌است که هرسهٔ این‌میدانها مؤلفهٔ عرضیی دارندکـه بر $\mathbf{r}$ عمود است و در صفحهٔ تعریف شده با $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p}$ واقع است. میدان تابش عرضی خالص است، ولی $\mathbf{E}_2$ و $\mathbf{E}_3$ علاوه برمؤلفهٔ عرضی یك مؤلفهٔطولی درامتداد $\mathbf{r}$ نیز دارند. اگرمختصات کروی‌را انتخاب کنیم، بامحورقطبی درامتداد $\mathbf{p}$،آنگاه مؤلفه‌های عرضی، E_θ هستند و با $\sin\theta$ متناسب‌اند؛ مؤلفه‌های طولی، E_r هستند و بـا $\cos\theta$ متناسب‌اند. میدان B فقط مؤلفهٔ ϕ دارد (TM).

اکنون مورد خـاصی‌را بررسی می‌کنیم که درآن دوقطبی درجهت $\mathbf{k}$ واقع است و اندازهٔ آن به‌طورسینوسی نوسان می‌کند: $\mathbf{p}(t)=p\mathbf{k}e^{-i\omega t}$. آنگاه

$$\mathbf{p}(t')=p\mathbf{k}e^{-i(\omega t-\kappa r)}$$

که درآن κ ثابت انتشارموج درمنطقهٔ تابش است

$$\kappa=\omega/c$$

باقراردادن $\mathbf{p}(t')$ در معادله‌هـای (۴۰.۲۰)، (۳۶.۲۰)، و (۴۵.۲۰)، برای مؤلفه‌هـای $\mathbf{E}=\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2+\mathbf{E}_3$ عبارتهای زیررا به‌دست می‌آوریم

$$E_\theta=\frac{p\kappa^3}{4\pi\varepsilon_0}\sin\theta\left[-\frac{1}{\kappa r}-i\frac{1}{(\kappa r)^2}+\frac{1}{(\kappa r)^3}\right]e^{-i(\omega t-\kappa r)}$$

$$E_r=\frac{p\kappa^3}{4\pi\varepsilon_0}\,2\cos\theta\left[-i\frac{1}{(\kappa r)^2}+\frac{1}{(\kappa r)^3}\right]e^{-i(\omega t-\kappa r)}$$

هنگامی‌که $\kappa r\gg 1$ یا $\kappa r\ll 1$ باشد، یعنی هنگامی که r درمقایسه باطول موج تـابش گسیل شده بزرگ یا کوچك است، به‌ترتیب میدان تابش یا میدان ساکن غالب خواهند شد. گذار بین میدان دوقطبی «ساکن» ومیدان‌تابش عرضی به‌طورطرحوار درشکل ۳.۲۰ باخطوط میدان نشان داده شده است. درمنطقهٔ تابش، میدان یك موج کروی است که‌به‌طرف خارج منتشرمی‌شود.

۵.۲۰ میرایی تابشی . سطح مقطع تامسون

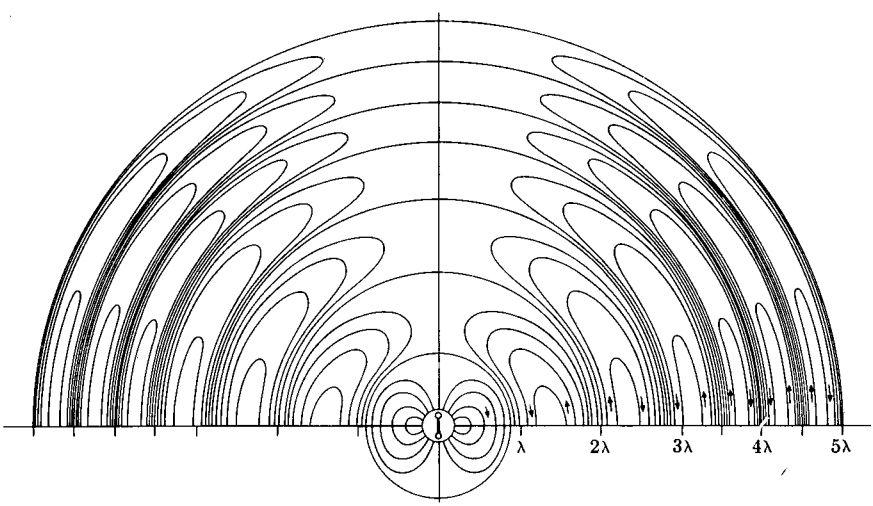
توان تابش شده که دربخش ۳.۲۰ محاسبه کردیم توسط دستگاه بـارها تلف می‌شود. در حالت پایا این توان تلف شده باید توسط منبع دیگری جبران شود. برای آنتن، این منبع فرستنده است، واتلاف بامقاومت تابشی بیان می‌شود. برای الکترونی درمحیطی مادی که موج درآن منتشرمی‌شود، منبع توان میدان Eی موج است واتلاف بافرکانس میرایی بیان می‌شود. اکنون می‌خواهیم فرکانس میرایی‌راکه در فصل قبل به‌کاربردیم به‌آهنگ اتلاف انرژی ناشی ازتابش توسط یك ذرهٔ باردار، که بامعادلهٔ (۴۴.۲۰)

$$P=\frac{e^{2}}{4\pi\varepsilon_{0}}\frac{2}{3}\frac{\dot{v}^{2}}{c^{3}} \qquad [۴۴.۲۰]$$

داده‌شد، مربوط کنیم. توانی که نیروی F تلف می‌کند برابر است بـا $P=-Fv$. از مساوی قراردادن این توان بامعادلهٔ (۴۴.۲۰)، برای نیروی میرایی داریم

$$F=-\frac{2}{3}\frac{e^{2}}{4\pi\varepsilon_{0}c^{3}}\frac{\dot{v}^{2}}{v} \qquad (۴۶.۲۰)$$

نیروی میرایی خطی درمعادلهٔ (۱.۱۹) به صورت $F=-Gv$ بود، لذا فرکانس میرایی $\gamma=G/m$ عبارت است از



شکل ۳.۲۰ خطوط میدان الکتریکی ایجادشده توسط یك دوقطبی الکتریکی نوسان کننده.

$$\gamma=\frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^3}\frac{\dot{v}^2}{v^2}$$

برای یك بارنوسان‌کننده $v=v_0 \sin \omega t$، و

$$\gamma=\frac{2}{3}\frac{e^2\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^3}\frac{\cos^2 \omega t}{\sin^2 \omega t}$$

اشکال این نتیجه‌آن است که γ ثابت نیست، بلکه دریك دورهٔ تناوب حرکت هماهنگ از صفرتا بینهایت تغییر می‌کند. به‌هر جهت تأثیر میانگین میرایی در یك دورهٔ تناوب بسیار کوچك است، وچون $\bar{P}=\overline{m\gamma v^2}\propto\overline{\dot{v}^2}$ و

$$\overline{\cos^2 \omega t}=\overline{\sin^2 \omega t}$$

لذا فرض می‌کنیم که فرکانس میرایی مؤثر به‌صورت زیراست[1]

$$\gamma=\frac{2}{3}\frac{e^2\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^3} \qquad (47.20)$$

برحسب «شعاع کلاسیك الکترون»، $R_e=e^2/4\pi\varepsilon_0 mc^2=2.81\times10^{-15}\ \mathrm{m}$، داریم

$$\frac{\gamma}{\omega}=\frac{4\pi}{3}\frac{R_e}{\lambda} \qquad (48.20)$$

چون $\gamma=\Delta\omega$ پهنای یك قلهٔ جذب باریك است، وچون $\Delta\omega/\omega=\Delta\lambda/\lambda$، بنابراین

$$\Delta\lambda=\frac{4\pi}{3}R_e=1.16\times10^{-4}\ \text{Å}$$

این پهنای خط طبیعی باریکتراز پهنایی است که به‌طورعادی درطیفهای جذبی دیده می‌شود (حتی در گازها درفشارهای پایین)، زیرا سازوکارهای میرایی دیگری وجود دارد که معمولا

---

۱. باید اعتراف کرد که این مرحلهٔ آخر استدلال تاحدودی نادقیق است. مسئله ناشی ازشکست مکانیك کلاسیك نیست، زیرا از محاسبات مکانیك کوانتومی نیز همین نتیجه به‌دست می‌آید. از زمانی که لورنتس درسال ۱۹۰۹ معادلهٔ (۴۷.۲۰) را ارائه‌داد تاکنون مسئلهٔ واردکردن صحیح نیروی واکنش تابش، معادلهٔ (۴۶.۲۰)، درنظریهٔ دینامیکی بارها مورد بحث قرارگرفته‌است. این یك مسئلهٔ بنیادی است، ولی ما نمی‌توانیم دراینجا دراین مسئله وارد شویم.

ازمیرایی تابشی بزرگترند. باوجود این، مقدارفوق حد پایینی برای میرایی است.

یکی ازپیامدهای مستقیم معادلهٔ (۴۴.۲۰) که مشاهدهٔآن متداولتراست عبارت است ازسطح‌مقطع‌تامسون برای‌پراکندگی‌پرتوهای‌ایکس. فرکانسهای‌پرتوهای‌ایکس(انرژیهای فوتونها) درمقایسه بافرکانسهای تشدید بسیاری از الکترونها درماده (یعنی در مقایسه با انرژیهای پیوند) بزرگ‌اند. بنابراین این الکترونها را می‌توان به‌صورت الکترونهای آزادی بررسی کردکه میدانهای پرتوهای‌ایکس‌آنها را شتاب می‌دهند

$$m\dot{v} = eE \qquad (۴۹.۲۰)$$

لذا توان‌کل تابش شده توسط یك الکترون عبارت است از

$$P = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}} \frac{۲}{۳} \frac{e^{۴}}{m^{۲}c^{۳}} E^{۲}$$

طبق تعریف سطح مقطع پراکندگی تامسون σ_T عبارت است از P تقسیم‌بر بردارپوئین‌تینگ فرودی (توان درواحد سطح)،

$$S_{\circ} = \frac{۱}{\mu_{\circ} c} E^{۲} \qquad (۵۰.۲۰)$$

بنابراین

$$\sigma_T = \frac{۲}{۳} \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}^{۲}} \frac{e^{۴}}{m^{۲}c^{۴}} = \frac{۸\pi}{۳} R_e^{۲} \qquad (۵۱.۲۰)$$

که درآن R_e شعاع کلاسیك الکترون است. کوچك بودن این سطح مقطع در مقایسه با اندازهٔ اتم دلیل نافذ بودن پرتوهای‌ایکس است. بستگی زاویه‌ای تابش پراکنده با سطح مقطع مؤثر دیفرانسیلی داده می‌شود . سطح مقطع مؤثر دیفرانسیلی به‌صورت‌زیر تعریف می‌شود

$$d\sigma_T = \frac{dP}{S_{\circ}}$$

که درآن

$$dP = S\, da = Sr^{۲}\, d\Omega$$

توان پراکنده شده (یعنی، بازتابیده شده) به‌درون عنصرزاویهٔ فضایی $d\Omega$ است، و

$$d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

باقرار دادن مقدار S از معادلهٔ (۴۲.۲۰)، برای سطح مقطع مؤثر دیفرانسیلی خواهیم داشت

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} = R_e^2 \sin^2 \theta \qquad (۵۲.۲۰)$$

دراینجا θ زاویهٔ بین جهت مشاهده است با بردار Eی موج فرودی (که برجهت انتشارش عمود است). اگرپرتوهای‌ایکس‌فرودی ناقطبیده باشند (که معمولا اینطوراست)، میانگین معادلهٔ بالا روی تمام‌جهات قطبش عبارت سودمندتری به‌دست می‌دهد. نتیجه عبارت‌است از (مسئله ۱۰.۲۰)

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} = R_e^2 \frac{1+\cos^2 \beta}{2} \qquad (۵۳.۲۰)$$

که دراینجا β زاویهٔ بین جهت مشاهده وجهت انتشارفرودی است. این سطح مقطع مؤثر در اثر کامپتون قابل اندازه‌گیری است. این اثر پراکندگی ناهمدوس[1] پرتوهای‌ایکس است درفرکانسهایی بسیاربالاترازفرکانس لازم برای جذب تشدیدی. درفرکانسهای بسیار بالا این فرمول کلاسیک‌دیگرمعتبر نیست؛ انرژی فوتون ($\hbar\omega$) باید ازانرژی سکون‌الکترون mc^2 بسیارکمترباشد، یا به‌عبارت دیگرباید داشته باشیم $\lambda \gg 0.02$ Å.

سطح مقطع مؤثرتامسون، معادلهٔ (۵۱.۲۰)، را همچنین می‌توان ازنظریهٔ فصل ۱۹ به‌دست‌آورد، مشروط برآنکه به‌جای‌اندازهٔ بردارپوئین‌تینگ پراکنده شده، تضعیف‌بردار پوئین‌تینگ فرودی‌را بررسی‌کنیم. ازمعادلهٔ (۵۰.۲۰) داریم

$$S_0 = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 = \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 e^{-2z/\delta}$$

که درآن

$$\delta = \frac{c}{k\omega}$$

«عمق‌پوسته» است. دراینجا $\delta/2$ نقش مسیرمیانگین آزاد را برای فوتونهای فرودی ایفا می‌کند. چون مسیرمیانگین‌آزاد برابراست با $1/N\sigma$، که درآن N تعداد الکترونها در

---

۱. پراکندگی ناهمدوس درمقابل‌واژهٔ پراکندگی همدوس به‌کارمی‌رود (هردو سطح مقطع‌مؤثر منفرد یکسانی دارند). پراکندگی همدوس در بلورها، تحت شرایط خاصی ازنظرطول موج و زاویهٔ فرود، موجب پراش پرتوایکس می‌شود (قانون براگ).

واحد حجم است، نتیجه می‌شود

$$\sigma_T = \frac{۲}{N\delta} = \frac{۲k\omega}{Nc} \qquad (۵۴.۲۰)$$

حال هنگامی که $n \approx ۱$، $k \ll ۱$، همانطور که برای پرتوهای ایکس چنین است، داریم

$$k = \frac{۱}{۲} K_i = \frac{\omega_p^۲ \gamma}{۲\omega^۳}$$

این نتیجه مربوط است به‌فرکانسهای بالا برای الکترونهای آزاد، و هنگامی که $\omega \gg \omega_۰$ باشد برای الکترونهای مقید نیز معتبر است. با استفاده از $\omega_p^۲ = Ne^۲/\varepsilon_۰ m$، $\gamma = (۴\pi/۳)(R_e/\lambda)\omega$ ازمعادلهٔ (۴۸.۲۰)، و $\lambda = ۲\pi c/\omega$، داریم

$$k = \frac{Ne^۲}{۲\varepsilon_۰ m} \frac{۴\pi}{۳} \frac{R_e \omega^۲}{۲\pi c \omega^۳} = \frac{۴\pi}{۳} \frac{Ne^۲}{۴\pi\varepsilon_۰ mc\omega} R_e$$

از معادلهٔ (۵۴.۲۰) نتیجه می‌شود

$$\sigma_T = \frac{۸\pi}{۳} R_e^۲ \qquad [۵۱.۲۰]$$

فرکانس میرایی γ که سطح مقطع مؤثر تامسون‌را می‌دهد فرکانس میرایی تابشی است. درچنین فرکانسهای بالایی ($\omega \gtrsim ۱۰^{۱۹}\,\mathrm{s}^{-۱}$) فرکانس میرایی‌تابشی برفرکانس‌برخورد $۱/\tau$ غالب می‌شود. البته هنگامی‌که انتشارتابش فرودی‌را بااین روش در نظر می گیریم، بستگی زاویه‌ای تابش پراکنده شده‌را، معادلهٔ (۵۲.۲۰)، به‌دست نمی‌آوریم.

۶.۲۰ خلاصهٔ مطالب

بااستفاده ازجوابهای انتگرالی $\mathbf{A}$ و φ میدانهای ایجادشده توسط توزیعهای بار وجریان وابسته به‌زمان محاسبه‌می‌شوند. (تنهاکافی است‌که $\mathbf{A}$ بررسی‌شود، زیرا φ راشرط‌لورنتس به $\mathbf{A}$ مربوط می‌کند.) برای پیداکردن جوابهایی‌که در فواصل دور معتبرند، یعنی برای $r \gg a$ که درآن a اندازهٔ ناحیه‌ای است‌که جریانهای چشمه درآن واقع‌اند، انتگرالده بابسط چند قطبی بسط داده می‌شود. جملهٔ دوقطبی الکتریکی که دراینجا بررسی‌شده است مهمترین جمله است مگردر حالتی‌که اتفاقاً این جمله صفرباشدکه درآن صورت جملات مرتبهٔ بالاترمی‌بایست درنظرگرفته شوند. برای دوقطبی نقطه‌ای، $a \ll \lambda$، انتگرال باز هم ساده می‌شود، زیرا تمام عناصرجریان چشمه تقریباً همفازند. (این شرط بدان معناست

که $v \ll c$.) نتیجه عبارت است از

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_\circ}{۴\pi r} \dot{\mathbf{p}}(t - r/c)$$

که در آن

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \int \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) dv'$$

ازاین روابط، با $\mathbf{J}$ی ازپیش مشخص، می‌توانیم $\mathbf{B}$، $\mathbf{E}$، و $\mathbf{S}$ را پیدا کنیم. پیدا کردن آنها درمیدان تابش واقع در $r \gg \lambda$ به‌ویژه آسان است. آنگاه، درست مانند موج تخت داریم

$$\mathbf{E} = -c \frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{B}$$

و

$$\mathbf{S} = \frac{c}{\mu_\circ} B^۲ \frac{\mathbf{r}}{r}$$

(پیدا کردن φ ضروری نیست.)

۱. بردار پوئین‌تینگ یك دوقطبی نقطه‌ای درمیدان تابش عبارت است از

$$\mathbf{S} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}^۲ \sin^۲ \theta}{۱۶\pi^۲ \varepsilon_\circ c^۳ r^۲} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

باانتگرال گیری ازاین عبارت برروی تمامی یك کره، توان کل تابشی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$P = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ} \frac{۲}{۳} \frac{\ddot{\mathbf{p}}^۲}{c^۳}$$

۲. تابش از یك آنتن خطی کوتاه (دوقطبی الکتریکی) با (۱) داده می‌شود که در آن $p(t) = (lI_\circ/\omega) \cos \omega t$. برحسب مقاومت تابشی R_r، درخلأ، داریم

$$\bar{P} = \frac{۱}{۲} R_r I_\circ^۲$$

$$R_r = ۷۸۹ \left(\frac{l}{\lambda}\right)^۲ \Omega \qquad (l \ll \lambda)$$

۳. بافرض آنکه $v \ll c$، که همواره برای آنتنهای رادیویی صادق است، تابش از یك آنتن بزرگتررا باانتگرال گیری نتایج مربوط به‌آنتن کوچك می‌توان به‌دست‌آورد. برای یك آنتن نیم‌موج، داریم

$$R_r = ۷۳٫۱\ \Omega$$

۴. برای یك بارنقطه‌ای که به‌کندی حرکت می‌کند $(\dot{p} = q\dot{v})$

$$P = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{۲}{۳}\frac{q^۲\dot{v}^۲}{c^۳}$$

۵. برای یك الکترون نوسان کننده، نتیجهٔ بالا به‌فرکانس میرایی تابشی

$$\gamma = \frac{۴\pi}{۳}\frac{R_e}{\lambda}\omega$$

و به‌سطح مقطع مؤثر تامسون برای الکترون آزاد

$$\sigma_T = \frac{۸\pi}{۳}R_e^۲$$

منجرمی‌شود، که دراین روابط R_e «شعاع کلاسیك الکترون» است

$$R_e = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{e^۲}{mc^۲} = ۲٫۸۱ \times ۱۰^{-۱۵}\ \mathrm{m}$$

مسائل

۱.۲۰ فرض کنید یك‌توزیع‌بار باتقارن کروی تنهادرجهت‌شعاعی نوسان می‌کند، به‌طوری که در هر لحظه از زمان تقارن کروی خود را حفظ می‌کند. ثابت کنید که تابشی گسیل نمی‌شود.

۲.۲۰ (الف) چگالی توان تابش شدهٔ میانگین توسط یك دوقطبی نوسان‌کننده در خلأ را به‌صورت تابعی از زوایای θ و ϕ تعیین کنید. (ب) توان کل تابش شده توسط یك دو قطبی به‌طول ۳ متر را در فرکانس ۵۰۰ kHz، اگر جریان در دوقطبی ۲ آمپر (مقدار مؤثر جریان) باشد، محاسبه‌کنید. (ج) مقاومت تابشی نوسانگر دوقطبی قسمت ب چقدراست؟

۳.۲۰ یك حلقهٔ سیم دایره‌ای حامل جریان $I = I_0 \cos \omega t$ یك دوقطبی مغناطیسی نوسان‌کننده را تشکیل می‌دهد. میدانهای تابش $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ را برای این نوسانگر تعیین کنید و توان کل تابشی آن را محاسبه کنید.

۴.۲۰ کارایی نسبی یك دوقطبی الکتریکی به‌طول ۲ متر را درمقایسه با یك دوقطبی مغناطیسی به‌همان قطر، به‌عنوان منابع تابش الکترومغناطیسی، در فرکانس 1MHz تعیین کنید.

۵.۲۰ (الف) ماکزیمم جریان ورودی آنتن نیم‌موجی را که 1kW تابش می‌کند، محاسبه کنید. (ب) میدان Eی مربوط به‌چگالی توان میانگین درفاصله 10km ازاین آنتن چقدر است؟ اثرات زمین را نادیده بگیرید.

۶.۲۰ تحقیق کنید که $\mathbf{A}$ و φ درمعادلات (۳۵.۲۰) و (۳۳.۲۰) در شرط لورنتس صدق می‌کنند.

۷.۲۰ توان تابشی از یك آنتن درواحد زاویهٔ فضایی (استرادیان) درجهتی که توان ماکزیمم است، تقسیم بر $1/(4\pi)$ ضرب در توان کل تابشی، معیاری است از جهتمندی یك آنتن. جهتمندی یك دوقطبی الکتریکی نوسان‌کننده را محاسبه کنید.

۸.۲۰ فرض کنید دو قطبی الکتریکی $\mathbf{p}$ با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محوری عمود بر گشتاور دوقطبی دوران می‌کند. میدان تابش و بردار پوئین‌تینگ را پیدا کنید. (راهنمایی: دوقطبی دوران‌کننده را به‌صورت برهم‌نهش دو دوقطبی درنظر بگیرید که به‌یکدیگر عمودند و به‌طور سینوسی تغییر می‌کنند.)

۹.۲۰ در مدل کلاسیك اتم هیدروژن الکترون در مداری دایره‌ای به‌شعاع r می‌گردد و انرژی جنبشی آن عبارت است از

$$E_k = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

(الف) کسر انرژی تابش‌شده درهردور گردش، PT/E_k، را محاسبه کنید. دراینجا T دورهٔ تناوب مداری است. (ب) مکانیك کوانتومی حکم می‌کند که در تراز nام

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{n} \frac{1}{137}$$

PT/E_k را به‌ازای $n = 2$ محاسبه کنید.

۱۰.۲۰ باریکه‌ای از پرتوهای ایکس ناقطبیده باشدت I_0 برماده‌ای حاوی الکترونهای آزاد فرود می‌آید. بادرنظر گرفتن تنها یك الکترون واستفاده از عبارتهای بخش ۳.۲۰،

نشان دهید که شدت باریکهٔ پراکنده شده عبارت است از

$$I_s = I_0 \frac{(1+\cos^2\beta)}{2} \frac{R_e^2}{r^2}$$

که در آن β زاویهٔ بین خط OP وجهت باریکهٔ پرتو ایکس اصلی است. نقطهٔ O مکان الکترون است، و P نقطه‌ای است که در آنجا باریکهٔ پراکنده شده مشاهده می‌شود.

۱۱.۲۰ پرتوهای ایکس بـاطول موج $0.22\ \text{Å}$ در آلومینیوم عمدتـاً توسط پراکندگی کامپتون تضعیف می‌شوند. ضریب جذب، $\alpha = 2/\delta$، را ازسطح مقطع مؤثر تامسون محاسبه کنید. درهرمترمکعب تعداد 6.06×10^{28} اتم آلومینیوم وجود دارد.

POWEREN.IR