



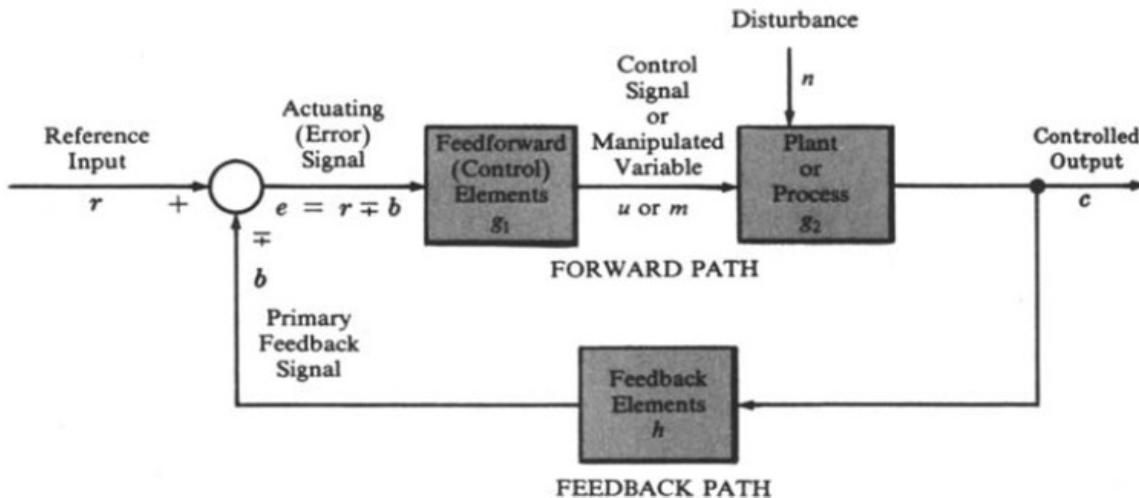
فصل اول

آشنائی با سیستمهای کنترل

تعاریف اولیه سیستمهای کنترل خطی:

۱. سیستم (**System**) : مجموعه ای از اجزا هستند که با هم کار میکنند تا یک هدف خاص را دنبال کنند.
۲. فرایند (**process**) : بخش خاصی از یک سیستم است که میخواهیم آن را تحت اختیار خود قرار دهیم.
۳. ورودی (**Input**) : سیگنال یا فرمانی است که برای هدایت پروسه به آن اعمال می شود (یک سیستم می تواند یک یا چند ورودی داشته باشد). به ورودی مقدار مطلوب نیز گفته می شود.
۴. خروجی (**Output**): رفتاری از یک سیستم است که مورد توجه ماست و می خواهیم آن را در اختیار خود قرار دهیم (یک سیستم می تواند یک یا چند خروجی داشته باشد). به سیستمی که یک ورودی و یک خروجی دارد $SISO$ و به سیستمی که چند ورودی یا خروجی داشته باشد $MIMO$ گفته می شود.
۵. اغتشاش (**Noise**) : عاملی است که بر خروجی پروسه تأثیر نا مطلوب می گذارد.
۶. فید بک (**Feed Back**) : اندازه گیری خروجی و مقایسه آن با ورودی و تولید یک سیگنال خطای را فید بک می گوییم.
۷. کنترل (**Control**) : بدین معنی است که بتوانیم بكمک تجهیزاتی که در اختیار داریم خروجی پروسه را به گونه ای در اختیار بگیریم تا متناسب با ورودی تغییر کند و عامل اغتشاش روی آن اثر کمی بگذارد.

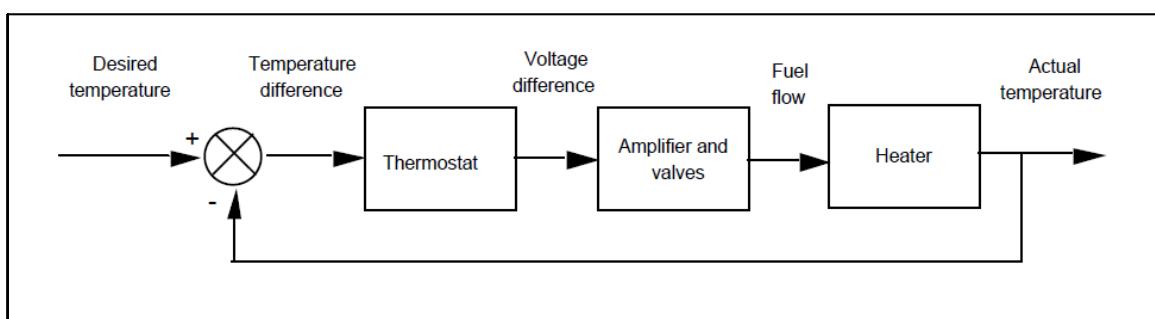
در شکل زیر می توان اجزاء یک سیستم کنترلی را مشاهده کرد:



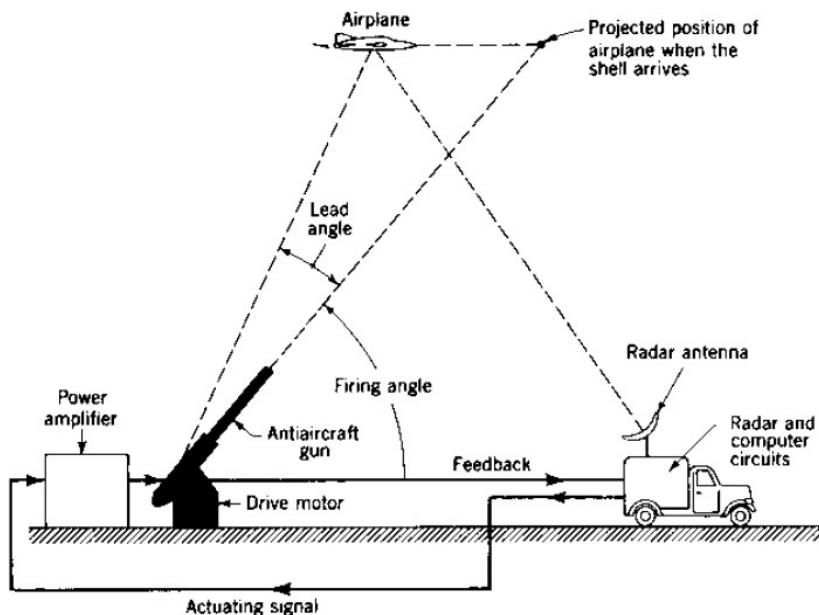
انواع سیستمهای کنترل:

کنترل فرایند: سیستمهایی که در آن ورودی دارای تغییرات نسبتاً کند و در یک محدوده مشخص هستند و عامل اغتشاش تأثیر زیادی بر پروسه دارد سیستمهای کنترل فرایند نامیده میشوند. (مانند: پروسه کنترل دما، کنترل رطوبت، کنترل نور و ...)

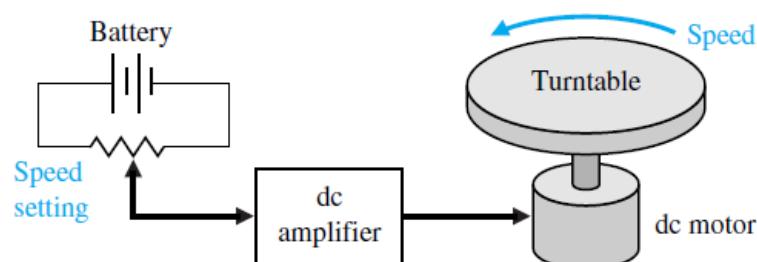
شکل زیر بلوك دیاگرام یک سیستم کنترل دما را نمایش می دهد.



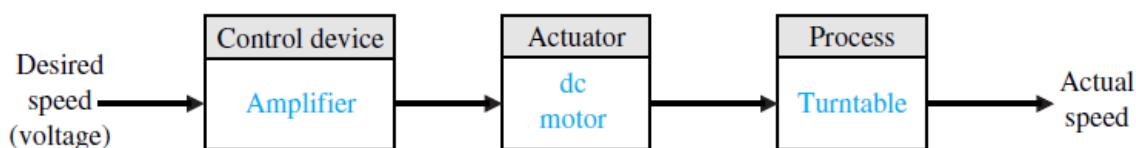
سرو مکانیزم : سیستمهایی هستند که در آنها خروجی مورد نظر، سرعت یا موقعیت یا گشتاور است در این گونه سیستمهای تغییرات ورودی خیلی سریع و دامنه نا مشخصی دارد.



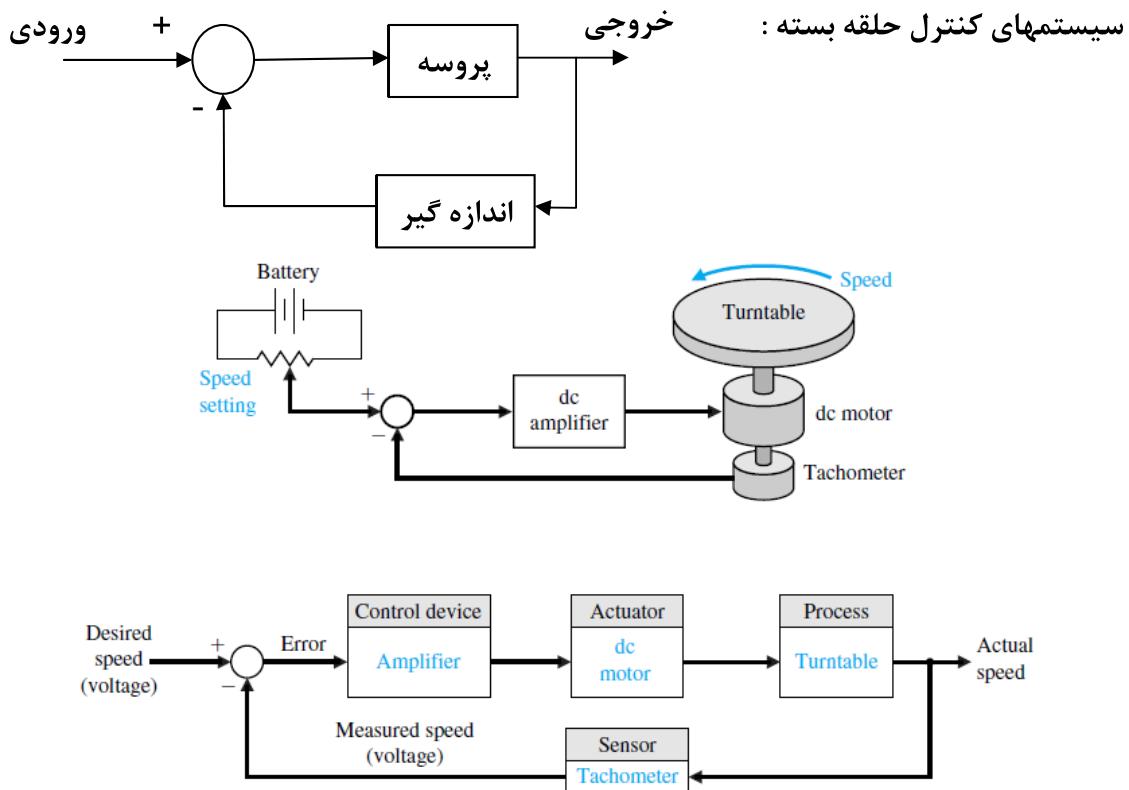
انواع سیستمهای کنترل از نظر استراتژی کنترل:



سیستم کنترل حلقه باز برای کنترل سرعت یک موتور dc به همراه بلوك دیاگرام آن



در سیستمهای کنترل حلقه باز هیچ فیدبکی از خروجی به ورودی داده نمیشود.

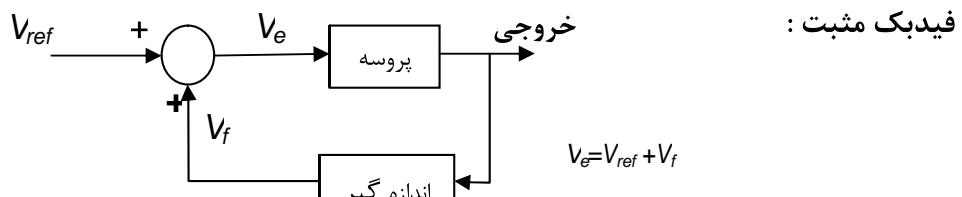


در شکل فوق سیستم کنترل سرعت موتور dc دیده می شود که برای ثبیت سرعت موتور در حالت بارداری و بی باری از تاکومتر برای اندازه گیری سرعت و فیدبک آن به ورودی استفاده شده است.

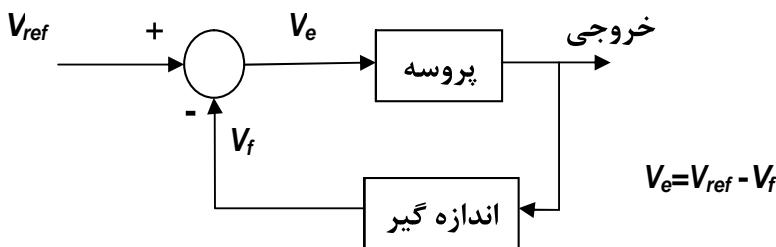
تفاوت اصلی بین یک سیستم حلقه باز و بسته در وجود یا عدم وجود فیدبک است. در سیستم حلقه باز خروجی پروسه می تواند اندازه گیری شود ولی نتیجه کار با مقدار مطلوب مقایسه نمی شود تا رفتار سیستم اصلاح شود ولی در سیستم حلقه بسته این نظارت و کنترل دائمی در حال انجام است.

انواع فیدبک :

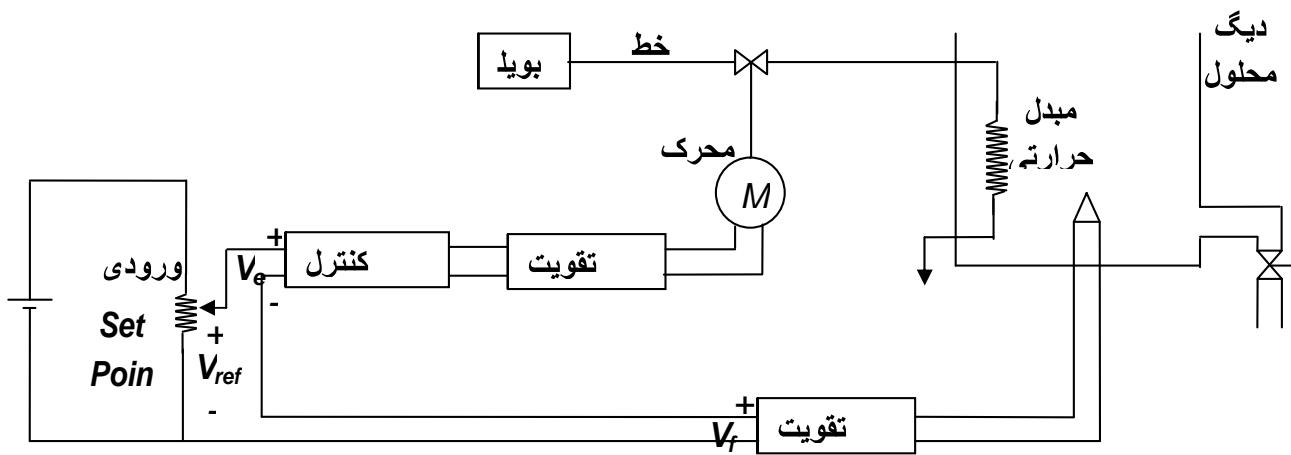
در سیستمهای حلقه بسته فیدبک می تواند بصورت مثبت یا منفی باشد و در سیستمهای کنترل فیدبک مثبت باعث ناپایداری و انهدام سیستمهای می شود بنابراین همواره از فیدبک منفی استفاده می شود.



فیدبک منفی :

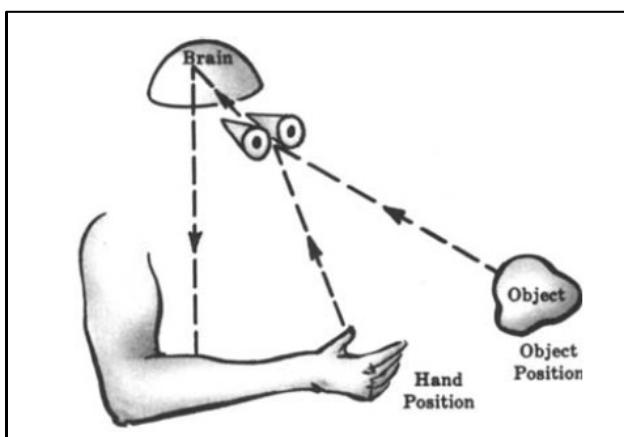


مثال ۱) در سیستم زیر یک فرآیند کنترل دمای محصول داخل دیگ مشاهده می شود. در این سیستم ورودی میزان دمای مطلوب داخل دیگ است و خروجی دمایی است که در هر لحظه توسط ترموموکوپل اندازه گیری می شود و نمایش داده می شود. مبدل حرارتی عمل انتقال حرارت را از بخار داخل خود به محصول را انجام می دهد. و دبی بخار عبوری از مبدل حرارتی توسط شیر کنترل می شود. میزان باز یا بسته بودن شیر به محرک تنظیم می شود و سیگنالی که به محرک داده می شود سیگنال کنترلی است که از خروجی تقویت کننده بدست می آید.



اجزاء اصلی یک سیستم کنترل:

بطور کلی برای هر سیستم کنترلی می توان سه جزء اصلی در نظر گرفت که عبارتند از :



۱. سنسور

۲. کنترلر

۳. محرک

سنسور مانند چشم در یک سیستم کنترلی عمل میکند. کنترلر بمانند مغز و محرکها بازویان یک سیستم

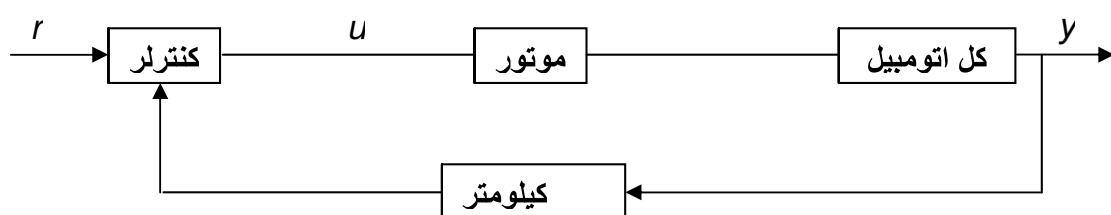
کنترلی هستند

مثال ۲) فرض می کنیم اتومبیلی در سطح جاده با شیب متغیر در حرکت است چنان چه به ازای یک

درجه چرخش پدال گاز اتومبیل سرعت ۱۰ کیلومتر بر ساعت تغییر کند و به ازا یک درصد تغییر در شیب

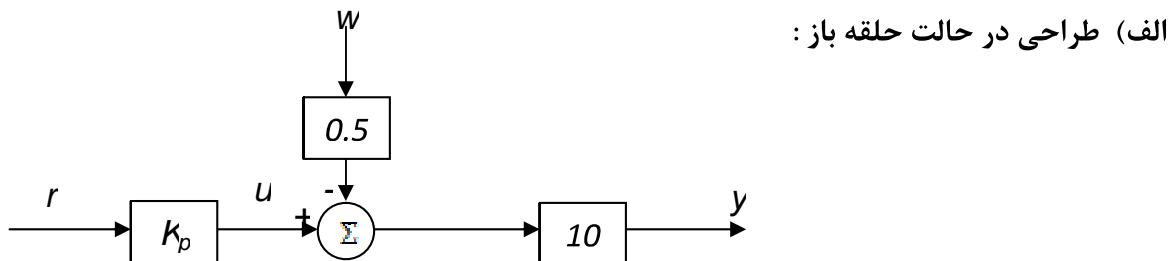
جاده ۵ کیلومتر بر ساعت سرعت تغییر کند آنگاه معادلات سیستم را در حالت حلقه باز و حلقه بسته

بنویسید:

 u : چرخش پدال گاز اتومبیل r : سرعت مطلوب اتومبیل w : شیب جاده y : سرعت ماشین

حل: با استفاده از صورت مسئله می توان یک معادله بصورت زیر برای سیستم بدست آورد:

$$y = 10u - 5w = 10(u - 0.5w)$$



$$u = r * k_p$$

$$y = 10(u - 0.5w) = 10(r * k_p - 0.5w) = 10 * r * k_p - 5w$$

اگر بخواهیم در حالتی که شب جاده صفر است سرعت اتومبیل با مقدار مطلوب یکی شود باید $k_p = 1/10$ را

قرار دهیم:

$$y = r - 5w$$

اگر سرعت مطلوب 50 km/h باشد داریم :

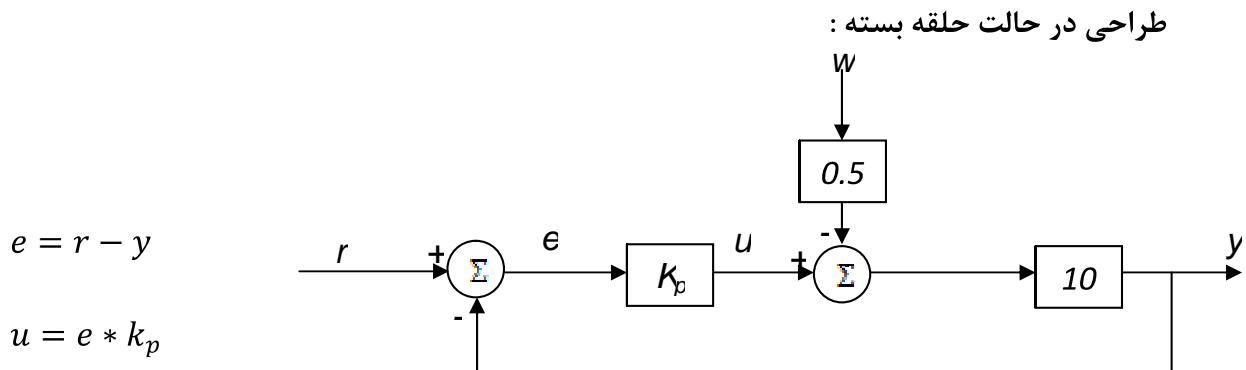
$$w = 0 \Rightarrow y = 50 - 0 = 50(km/h)$$

$$w = 1 \Rightarrow y = 50 - 5 = 45 \left(\frac{km}{h} \right)$$

$$w = 2 \Rightarrow y = 50 - 10 = 40 \left(\text{km/h} \right)$$

ملاحظه می شود که در حالت کنترل حلقه باز سرعت اتومبیل چقدر زیاد به شیب جاده (اغتشاش) وابسته

است بطوریکه به ازاء هر یک درصد شیب جاده $5Km$ از سرعت اتومبیل کاسته می شود.



$$y = 10(u - 0.5w) = 10(e * k_p - 0.5w)$$

$$\Rightarrow 10(r - y) * k_p - 5w$$

$$\Rightarrow 10k_p * r - 10k_p * y - 5w$$

$$\Rightarrow y(1 + 10k_p) = 10k_p * r - 5w$$

$$\Rightarrow y = \frac{10k_p * r - 5w}{1 + 10k_p}$$

با فرض این که $k_p = 100$ باشد داریم :

$$y = \frac{1000}{1001}r - \frac{5}{1001}w = 0.999r - 0.005w$$

اگر سرعت مطلوب 50 km/h باشد داریم :

$$1. \quad w = 0 \Rightarrow y = 0.999 * 50 = 49.95(\text{km/h})$$

$$2. \quad w = 1 \Rightarrow y = 0.999 * 50 - 0.005 = 49.945 \left(\text{km/h} \right)$$

$$3. \quad w = 2 \Rightarrow y = 0.999 * 50 - 0.01 = 49.94 \left(\text{km/h} \right)$$

تبدیل لاپلاس: عملیات مربوط به تبدیل لاپلاس و عکس آن جزء لاینفک تحلیل سیستمهای کنترل خطی است.

در ادامه یادآوری در مورد تبدیل لاپلاس و عکس آن آورده شده است

اگر $f(t)$ را به عنوان یک تابع وابسته به زمان در نظر بگیریم، تبدیل آن را بصورت $F(s)$ تعریف میکنیم.
جدول صفحه بعد تبدیل لاپلاس چند تابع پر کاربرد را نشان می دهد:

یکی از عملیات مهمی که در کنترل مورد نیاز است تجزیه یک کسر به عاملهای اول است تا بتوان لاپلاس معکوس آن را بدست آوریم. در ادامه روش‌های تجزیه کسر را با ذکر چند مثال مرور می کنیم:

مثال) لاپلاس معکوس تابع زیر را بباید و مقدار آنرا در زمان بینهایت بدست آورید:

$$Y(s) = \frac{4(s+50)}{s(s+20)(s+10)}$$

ابتدا تابع را بصورت زیر به کسرهای عامل اول تجزیه می کنیم:

$$Y(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+20} + \frac{A_3}{s+10}$$

سپس مقادیر مجهول را بدست می آوریم:

$$A1 = \lim_{S \rightarrow 0} [Y(S) \cdot S] = 1$$

$$A2 = \lim_{S \rightarrow -20} [Y(S) \cdot (S + 20)] = 0.6$$

$$A3 = \lim_{S \rightarrow -10} [Y(S) \cdot (S + 10)] = -1.6$$

و با محاسبه لاپلاس معکوس هر عبارت خواهیم داشت:

$$y(t) = 1 + 0.6e^{-20t} - 1.6e^{-10t} .$$

و مقدار نهائی را می توان با استفاده از قضیه مقدار نهائی لاپلاس بصورت زیر بدست آورد:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{4(s+50)}{s(s^2 + 30s + 200)} \right] = 1$$

	$f(t)$	$F(s)$
1	Unit impulse $\delta(t)$	1
2	Unit step $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{s^n}$
5	$t^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
7	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
9	$t^n e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
11	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
12	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
13	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
14	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
15	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
16	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
17	$\frac{1}{ab} \left[1 + \frac{1}{a-b} (be^{-at} - ae^{-bt}) \right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s^2 + 2s + 2}{(s+1)(s+2)}$$

مثال) لاپلاس معکوستابع زیر را بیابید:

$$F(s) = b_2 + \frac{c_{11}}{s+1} + \frac{c_{21}}{s+2}$$

با توجه به اینکه درجه صورت و مخرج با هم برابرند پس ضریب ثابت وجود دارد و مقدار آن از نسبت بزرگترین درجه صورت و مخرج بدست می آید و در اینجا برابر ۱ است.

$$c_{11} = (s+1)F(s)|_{s=-1} = \left. \frac{s^2 + 2s + 2}{s+2} \right|_{s=-1} = 1$$

$$c_{21} = (s+2)F(s)|_{s=-2} = \left. \frac{s^2 + 2s + 2}{s+1} \right|_{s=-2} = -2$$

$$F(s) = 1 + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

پس از تجزیه کسر می توان لاپلاس معکوس را

تصویرت زیر بدست آورد:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2 + 2s + 2}{(s+1)(s+2)} \right] = \mathcal{L}^{-1}\left[1 + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2} \right] = \mathcal{L}^{-1}[1] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1} \right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+2} \right] = \delta(t) + e^{-t} - 2e^{-2t}$$

مثال) لاپلاس معکوستابع زیر را بیابید:

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$F(s) = \frac{c_{11}}{s+1} + \frac{c_{12}}{(s+1)^2} + \frac{c_{21}}{s+2}$$

$$c_{11} = \frac{d}{ds}(s+1)^2 F(s)|_{s=-1} = \left. \frac{d}{ds} \frac{1}{s+2} \right|_{s=-1} = -1$$

$$c_{12} = (s+1)^2 F(s)|_{s=-1} = \left. \frac{1}{s+2} \right|_{s=-1} = 1$$

$$c_{21} = (s+2)F(s)|_{s=-2} = 1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2(s+2)} \right] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+2} \right]$$

$$= -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1} \right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2} \right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2} \right] = -e^{-t} + te^{-t} + e^{-2t}$$

مثال) عکس تبدیل لاپلاستابع زیر را بدست آورید.

$$T(S) = \frac{1+S}{S(S+2)^3(S+4)}$$

حل: تابع فوق را می توان به شکل زیر ساده کرد.

$$\frac{A}{S} + \frac{B}{S+4} + \frac{C}{(S+2)^3} + \frac{D}{(S+2)^2} + \frac{E}{S+2}$$

$$A = \lim_{S \rightarrow 0} [T(S) \cdot S] = \frac{1}{32}$$

$$B = \lim_{S \rightarrow -4} [T(S) \cdot (S+4)] = \frac{-3}{-4(-4+2)^3} = \frac{-3}{32}$$

$$C = \lim_{S \rightarrow -2} [T(s) \cdot (S+2)^3] = \frac{1}{4}$$

$$D = \lim_{S \rightarrow -2} \frac{d}{ds} [T(s) \cdot (S+2)^3] = \lim_{S \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \left[\frac{S+1}{S^2+4S} \right]$$

$$= \lim_{S \rightarrow -2} \left[\frac{S^2+4S-(2S+4)(S+1)}{(S^2+4S)^2} \right] = \lim_{S \rightarrow -2} \left[\frac{-S^2-2S-4}{(S^2+4S)^2} \right] = \frac{-1}{4}$$

$$E = \lim_{S \rightarrow -2} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} [T(S) \cdot (S+2)^3]$$

$$E = \lim_{S \rightarrow -2} \frac{1}{2} \left[\frac{(-2S-2)(S^2+4S)^2 - [2(2S+4)(S^2+4S)(-S^2-2S-4)]}{(S^2+4S)^4} \right] \\ = \frac{-13}{256}$$

$$T(s) = \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{S} - \frac{3}{32} \cdot \frac{1}{S+4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(S+2)^3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(S+2)^2} - \frac{13}{256} \cdot \frac{1}{S+2}$$

$$T(s) = \frac{1}{32}u(t) - \frac{3}{32}e^{-4t}u(t) + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2!}t^2e^{-2t}u(t) - \frac{1}{4}te^{-2t}u(t) - \frac{13}{256}e^{-2t}u(t)$$

مثال) عکس تبدیل لاپلاس تابع زیر را بدست آورید.

در مواقعي که تابع داراي قطب مختلط است يك راه موثر استفاده از روش زير است . در اين روش قطب مختلط را بصورت مرتبه دو قرار مى دهيم و صورت آن را جمله اي با مرتبه يك s فرض مى کنيم و با برابر قرار دادن آن با تابع اصلی، ضرایب مجھول بدست مى آيد

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2s + a_3}{s^2 + 2s + 2}$$

$$1 = a_1(s^2 + 2s + 2) + (a_2s + a_3)s$$

$$a_1 + a_2 = 0, \quad 2a_1 + a_3 = 0, \quad 2a_1 = 1$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = -1$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{2} \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{s+2}{s^2 + 2s + 2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{1}{(s+1)^2 + 1^2} - \frac{1}{2} \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1^2} \end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-t} \sin t - \frac{1}{2} e^{-t} \cos t, \quad \text{for } t \geq 0$$

تجزیه کسر به عاملهای اول بصورت گرافیکی:

یک روش تجزیه کسر به عاملهای اول استفاده از روش گرافیکی برای تعیین ضرایب مانده ها است.

برای بررسی این روش ابتدا به چند تعریف می پردازیم:

تابع $F(S)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

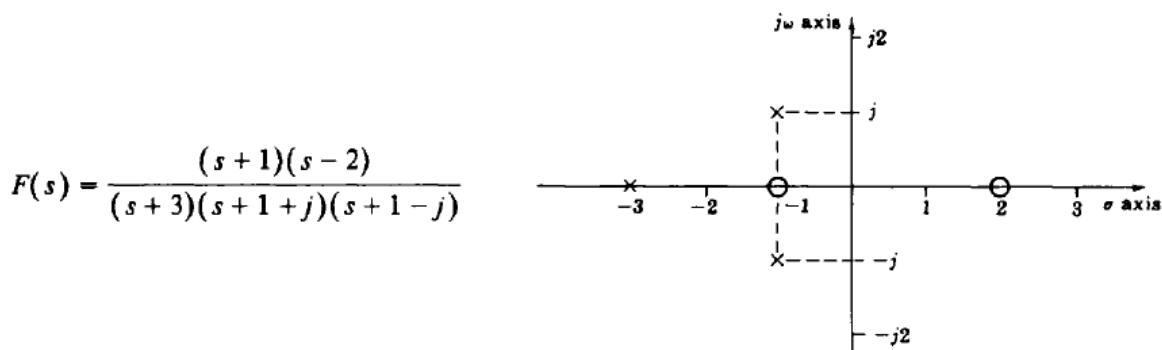
$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}, \quad \text{for } m < n$$

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s + p_1} + \frac{a_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n}$$

که در آن درجه مخرج از صورت بزرگتر است. در این تابع مقادیر zi , $(i = 1, 2, \dots, m)$ و pi مقادیر حقیقی یا مختلط هستند. مقادیر $s = -zi$ که ریشه های صورت $F(s)$ هستند و $F(s)$ را صفر می کنند صفرهای تابع نامیده می شوند و مقادیر $s = -pi$ که ریشه های مخرج $F(s)$ هستند و $F(s)$ را بینهایت می کنند

قطبهای تابع نامیده می شوند. همچنین به $(ak, k=1, 2, \dots, n)$ ضرایب مانده در قطب pk نامیده می شود که مقادیر حقیقی یا مختلط هستند. عنوان مثال ضریب $a1$ مانده قطب $p1$ و ضریب $a2$ مانده در قطب $p2$ و ... می باشد. در روش محاسبه گرافیکی ضرایب مانده که در ادامه گفته می شود می خواهیم مقادیر $(ak, k=1, 2, \dots, n)$ را بصورت ترسیمی بدست آوریم. این روش خصوصاً زمانی که تابع $F(s)$ دارای قطبها و صفرهای مختلط متعدد باشد بسیار مفید است. لازم به ذکر است که این روش برای ریشه های تکراری مورد استفاده قرار نمی گیرد.

همانطور که گفته شد صفرها و قطبها می‌توانند مقادیر مختلط باشند. بنابراین برای رسم آنها باید صفحه‌ای مختلط در نظر گرفت که صفحه مختلط s نامیده می‌شود. اگر متغیر مختلط $jw + \sigma = s$ را تعریف کنیم در این صفحه محور افقی محور حقیقی است که با $[s]$ و $Re[s]$ یا σ نمایش داده می‌شود و محور عمودی، محور موهومی است که با $[s]$ و $Im[s]$ یا jw مشخص می‌شود. در این صفحه صفرها با علامت دایره و قطبها با علامت ضربدر در مختصات خودشان قرار می‌گیرند. در شکل زیر بعنوان مثال قطبها و صفرهای تابع $F(s)$ را در صفحه s رسم کرده‌ایم.



برای محاسبه ضریب مانده ak بصورت زیر عمل می کنیم:

- ۱- از تمام صفر ها و قطبهاي موجود يك بردار به قطب pk رسم می کنيم (انتهای بردارها روی قطب pk قرار دارد)

۲- اندازه تمام بردارهاي رسم شده را با توجه به مختصات ابتدا و انتهای آنها بدست می آوريم.

۳- زاويه اي را که هر بردار با محور حقيقی مثبت در صفحه S تشکيل می دهد را محاسبه می کنيم.

۴- ضريب ak را که يك عدد مختلف است را بصورت $|ak| < \varphi k$ در نظر ميگيريم.

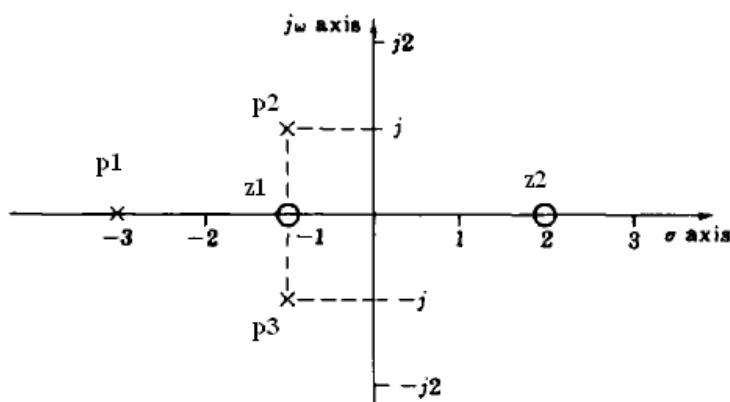
۵- اندازه ak = (حاصلضرب اندازه بردارهاي که از صفر ها شروع می شود) تقسيم بر (حاصلضرب اندازه بردارهاي که از قطب ها شروع می شود)

۶- زاویه $ak =$ (مجموع زاویه های بردارهای که از صفر ها شروع می شود) منهای (مجموع زاویه های بردارهای که از قطبها شروع می شود)

بعنوان یک مثال می خواهیمتابع $F(s)$ را که در بالا دیدیم به کسرهای جزئی تبدیل کنیم. با توجه به

$$F(s) = \frac{a_1}{s+3} + \frac{a_2}{s+1+j} + \frac{a_3}{s+1-j}$$

اینکه سه قطب وجود دارد پس سه جمله داریم:



اندازه ها را بصورت زیر بد

$$|a_1| = \frac{|\vec{z_1p_1}| * |\vec{z_2p_1}|}{|\vec{p_2p_1}| * |\vec{p_3p_1}|} = \frac{2*5}{\sqrt{5}*\sqrt{5}} = 2$$

$$|a_2| = \frac{|\vec{z_1p_2}| * |\vec{z_2p_2}|}{|\vec{p_1p_2}| * |\vec{p_3p_2}|} = \frac{1*\sqrt{10}}{\sqrt{5}*2} = 0.707$$

$$|a_3| = \frac{|\vec{z_1p_3}| * |\vec{z_2p_3}|}{|\vec{p_1p_3}| * |\vec{p_2p_3}|} = \frac{1*\sqrt{10}}{\sqrt{5}*2} = 0.707$$

و برای زاویه ها داریم:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (\angle z_1p_1 + \angle z_2p_1) - (\angle p_2p_1 + \angle p_3p_1) = \\ &(180 + 180) - \left((180 + \tan^{-1}\frac{1}{2}) + (180 - \tan^{-1}\frac{1}{2}) \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= (\angle z_1p_2 + \angle z_2p_2) - (\angle p_1p_2 + \angle p_3p_2) = \\ &\left(90 + (180 - \tan^{-1}\frac{1}{3}) \right) - \left((\tan^{-1}\frac{1}{2}) + 90 \right) = 135 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= (\angle z_1p_3 + \angle z_2p_3) - (\angle p_1p_3 + \angle p_2p_3) = \\ &\left(-90 + (180 + \tan^{-1}\frac{1}{3}) \right) - \left((-\tan^{-1}\frac{1}{2}) - 90 \right) = -135 \end{aligned}$$

در نتیجه ضرایب مانده بصورت زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned}a_1 &= 2 \\a_2 &= 0.707 < 135 = -0.5 + j0.5 \\a_3 &= 0.707 < -135 = -0.5 - j0.5\end{aligned}$$

مالحظه می شود که قطب حقیقی دارای مانده حقیقی و است و فقط از روی زاویه علامت آنرا بدست می آوریم و همچنین چون قطب‌های مختلط حتماً بصورت مزدوج هستند در نتیجه مانده آنها هم بصورت مزدوج است و فقط کافی است یکی از آنها بدست آید.

$$F(s) = \frac{2}{s+3} + \frac{-0.5+j0.5}{s+1+j} + \frac{-0.5-j0.5}{s+1-j}$$

تمرین) لاپلاس معکوس توابع زیر را بدست آورید؟

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3}$$

$$X_{(s)} = \frac{7s + 2}{(s + 1)(s + 3)^3}$$

فصل دوم

مدل سازی ریاضی سیستمهای فیزیکی

روش های نمایش و مدل کردن سیستم های کنترلی:

- (High Order Differential Eqution) HODE

 ۱. معادله دیفرانسیل مرتبه بالا یا Transfer Function) TF
 - ۲.تابع تبدیل یا (Transfer Function) TF
 - نمایش و ساده سازی با استفاده از دیاگرام بلوکی
 - نمایش و ساده سازی بصورت نمودار گذر سیگنال و فرمول بهره میسون

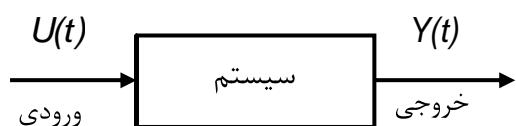
۳. معادلات حالت یا State-Space) SS

۴. نمودار حالت یا State-Diagram) SD

از این چهار روش دو روش اول در این فصل تحت عنوان مدلسازی ریاضی مورد بررسی قرار می‌گیرند و دو روش بعدی در فصل آینده خواهند بود.

نمایش سیستم بصورت *HODE*

مدا، راضی، سیستم‌ها:



مدلسازی ریاضی برای سیستم‌های کنترل به معنی یافتن یک رابطه بین متغیرهای سیستم بصورت زیر است.

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, \dots, y', y, u^{(m)}, \dots, u', u)$$

که این رابطه در اصل یک معادله دیفرانسیل را بین ورودی و خروجی و مشتقات آنها ایجاد می کند که می توانیم توسط آن روابط موجود در سیستم کنترلی را بدست آوریم یا بعبارت دیگر سیستم را بصورت *HODE* نمایش دهیم یا مدل کنیم.

انواع متغیرها در سیستم های فیزیکی:

۱. **Variable Across Element** : متغیرهایی که نسبت به یک میبا سنجیده می شوند یا نسبت به دو سر یک المان اندازه گیری می شوند. مثل: اختلاف پتانسیل، اختلاف فشار، اختلاف سرعت، اختلاف دما

۲. **Variable Through Element** : متغیرهای که به شکل عبور از یک المان یا جسم اندازه گیری می شوند. مثل: جریان، نیرو، دی، گشتاور

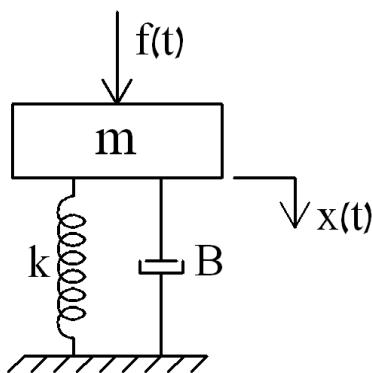
به طور کلی برای هر سیستم فیزیکی سه المان اصلی وجود دارد:

- .١ المان مصرف كننده
 - .٢ المان ذخيري كننده
 - .٣ المان القاء كننده

	متغیر ظرفیتی	متغیر عبوری	المان مصرف کننده	المان ذخیره کننده	المان القاء کننده	قوانين حاکم
سیستم های الکتریکی	$v(t)$ ولتاژ	$i(t)$ جريان	$i = \frac{1}{R}v$ مقاومت	$i = C \frac{dv}{dt}$ خازن	$v = L \frac{di}{dt}$ سلف	KCL, KVL
سیستم های مکانیکی	$V \left[\frac{m}{s} \right]$ سرعت	$F[N]$ نیرو	$F=B.V$ دمسیر	$F = M \frac{dV}{dt}$ جرم	$V = \frac{1}{K} \frac{dF}{dt}$ فتر	$\sum F = m.a$
سیستم های مکانیکی چرخشی	$W \left[\frac{rad}{s} \right]$ سرعت زاویه ای	$T[N.M]$ گشتاور	$T = B.W$ دمسیر چرخشی	$T = J \frac{dw}{dt}$ ممان اینرسی	$w = \frac{1}{K} \frac{dT}{dt}$ فتر چرخشی	$\sum T = J.a$
سیستم سیالات	$P[p]$ فشار	$Q \left[\frac{m^3}{s} \right]$ دبی	$Q = \frac{1}{Rf} \cdot P$ مقاومت سیال	$Q = Cf \frac{dP}{dt}$ ظرفیت سیال	$P = I \frac{dQ}{dt}$ اینرسی سیال	اصل بقاء جرم و انرژی

تذکر: از مقایسه سیستمهای الکتریکی و مکانیکی نتیجه می شود که برای مدلسازی یک سیستم مکانیکی بکمک المانهای الکتریکی، مقاومت و سلف بکار رفته در سیستم الکتریکی باید مقادیر عکس دمپر و فنر در سیستم مکانیکی داشته باشند.

مثال(۲-۱) : مدل ریاضی سیستم زیر را بدست آورید.



حل: در اینگونه مثالها همواره معادلات را برای حالت تعادل سیستم بدست می آوریم یعنی فرض میشود که وزن جرم با نیروی اولیه فنر خنثی شده است.

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\sum F = m \cdot a$$

$$f(t) - F_K - F_B = m \cdot a$$

اگر خروجی سیستم را سرعت جرم فرض کنیم رابطه بین ورودی و خروجی پروسه بصورت زیر است:

$$f(t) - K \int_0^t v(t) dt - B \cdot v(t) = m \frac{dv(t)}{dt}$$

و اگر خروجی سیستم را موقعیت جرم فرض کنیم رابطه بین ورودی و خروجی پروسه بصورت زیر خواهد بود:

$$f(t) - K \cdot x(t) - B \frac{dx(t)}{dt} = m \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

که عبارت ساده شده آن بشکل مقابل است:

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + B \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f(t)$$

مثال (۲-۲): سیستم مثال قبل را به یک سیستم الکتریکی تبدیل کنید.

حل: معادلات را بر حسب سرعت جرم باز نویسی می کنیم.

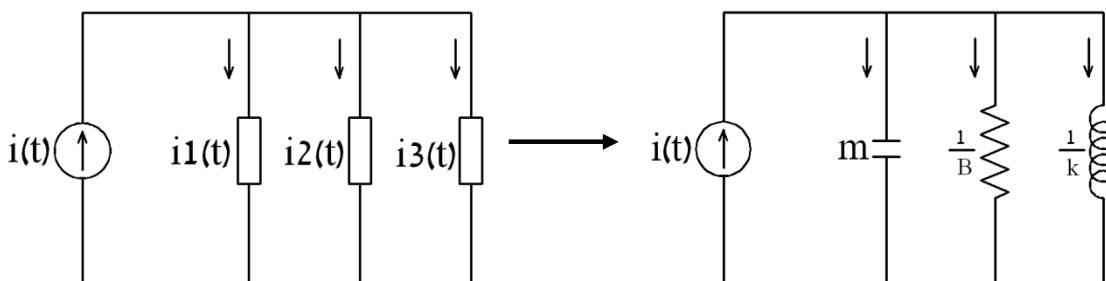
$$f(t) = m \frac{dv(t)}{dt} + B \cdot v(t) + K \int_0^t v(t) dt$$

ملاحظه می شود که نیروی وارد شده به سیستم به سه بخش تقسیم می شود. اگر نیرو را معادل جریان قرار دهیم که هر دو از نوع متغیر عبوری هستند دیده می شود که جریان باید بین سه شاخه تقسیم شود. پس مدار الکتریکی بصورت موازی خواهد بود که توسط یک منبع جریان تغذیه می شود.

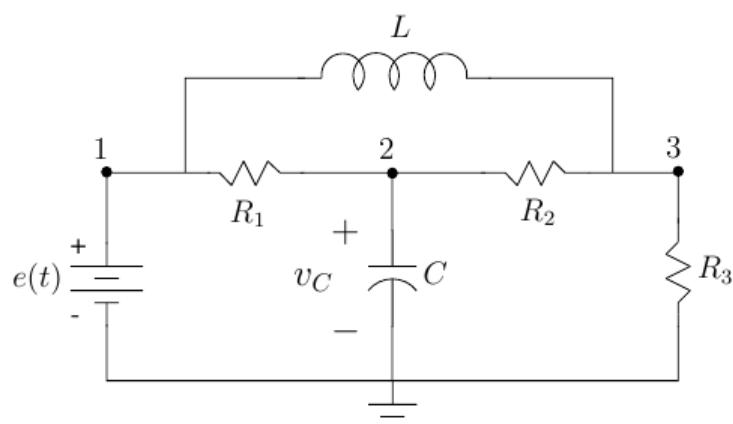
$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t)$$

$$i(t) = c \frac{dV(t)}{dt} + \frac{1}{R} V(t) + \frac{1}{L} \int_0^t V(t) dt$$

در نتیجه یک مدار RLC موازی داریم که مقادیر آن بر حسب اجزاء سیستم مکانیکی بصورت زیر است.



مثال (۲-۳): معادلات دینامیکی را برای سیستم الکتریکی زیر بدست آورید:



با نوشتن معادلات KCL برای گره های ۲ و ۳ معادلات زیر را خواهیم داشت. توجه کنید که چون سیستم دارای دو عنصر ذخیره کننده انرژی است معادلات دینامیکی آن می تواند از دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول، یا یک معادله مرتبه دوم تشکیل شود.

$$\begin{aligned} \frac{v_2 - v_1}{R_1} + C \frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2 - v_3}{R_2} &= 0 \\ \frac{v_3}{R_3} + \frac{v_3 - v_2}{R_2} + \frac{1}{L} \int_0^t (v_3(\tau) - v_1(\tau)) d\tau &= 0 \end{aligned}$$

برای سادگی تمامی مقادیر المانهای مدار را یک فرض می کنیم. همچنین فرض می کنیم که خروجی مدار ($v_C(t)$) و ورودی آن (e) باشد. بنابراین رابطه ورودی و خروجی سیستم را می توان توسط دو معادله زیر که بوسیله متغیر v_3 به همدیگر مرتبط هستند نمایش داد:

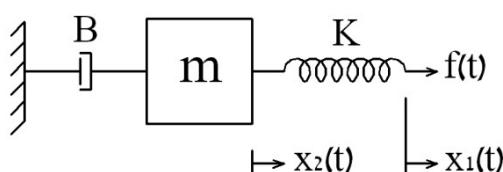
$$(v_C - e) + \frac{dv_C}{dt} + (v_C - v_3) = 0$$

$$v_3 + (v_3 - v_C) + \int_0^t (v_3(\tau) - e(\tau)) d\tau = 0$$

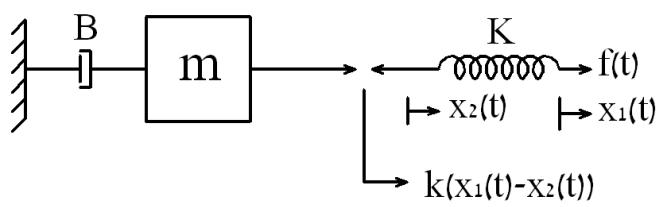
با حذف ۳ از دو معادله فوق می توان رابطه ورودی و خروجی سیستم را بصورت یک معادله مرتبه دو نمایش داد:

$$\frac{d^2vc}{d^2t} + 2 \frac{dvc}{dt} + vc = \frac{de}{dt} + e$$

مثال (۲-۴) : معادلات دینامیکی را برای سیستم زیر بدست آورید.



حل



معادلات برای سیستم حالت تعادل (جسم آزاد) برای فنر و جسم بصورت زیر است:

$$f(t) = k(x_1(t) - x_2(t))$$

$$k(x_1(t) - x_2(t)) - B \cdot \frac{dx_2(t)}{dt} = m \cdot \frac{d^2x_2(t)}{dt^2}$$

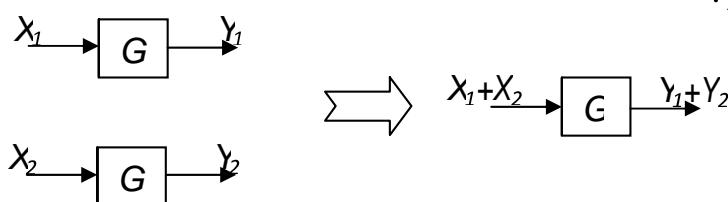
و از آنجا با توجه به اینکه در سیستم دو جابجایی داریم، دو معادله دیفرانسیل نیز خواهیم داشت که بصورت دستگاه زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_2(t) + \frac{1}{k} f(t) \\ \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + \frac{B}{m} \frac{dx_2}{dt} + \frac{k}{m} \cdot x_2(t) = \frac{k}{m} \cdot x_1(t) \end{cases}$$

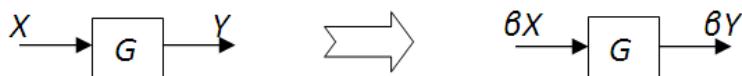
خواص سیستمهای خطی :

اکثر سیستمهای فیزیکی در محدوده مشخصی از متغیرها بصورت خطی عمل میکنند. ولی در صورتی که دامنه متغیرها خیلی زیاد شوند رفتار غیر خطی از خود بروز می هند. برای اینکه یک سیستم رفتار خطی داشته باشد دو شرط زیر را باید دارا باشد

الف) خاصیت ترکیب یا جمع آثار :



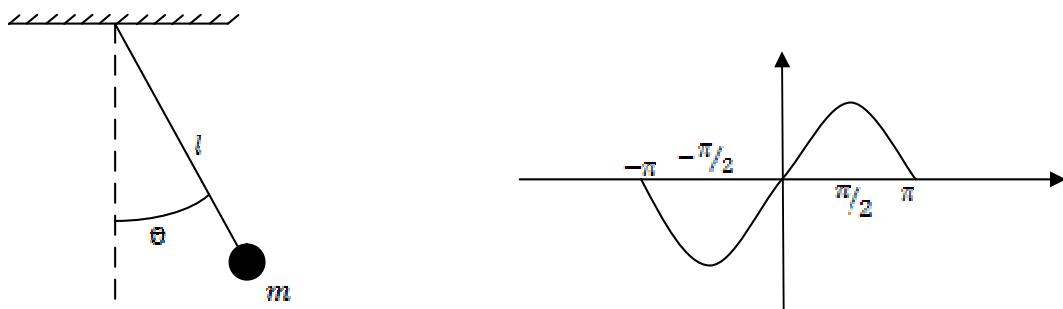
ب) خاصیت همگنی :



مثال (۲-۵): خواص سیستمهای زیر را مشخص کنید :

$$y = x^2 \quad (\text{خاصیت ترکیب و همگنی ندارد لذا سیستم خطی نیست})$$

$$y = mx + b \quad (\text{خاصیت همگنی ندارد لذا سیستم خطی نیست})$$



در این مثال می خواهیم یک مدل برای گشتاور ناشی از حرکت دورانی یک جرم را بدست آوریم. گشتاور جرم این پاندول برابر است با:

$$T = mgl \sin \theta$$

که در آن g ثابت جاذبه است.

$$\text{در حالت تعادل} \quad \Rightarrow T_0 = 0, \theta_0 = 0$$

حال تقریب خطی را با استفاده از مشتق اول سیستم در نقطه تعادل بدست می آوریم:

$$T = T_{(\theta_0)} + \frac{dT}{d\theta}|_{\theta=\theta_0} * (\theta - \theta_0)$$

$$\Rightarrow T = T_0 + mgl \cos(\theta)|_{\theta=0} * (\theta - \theta_0)$$

$$\Rightarrow T - T_0 = mgl \cos(0) * (\theta - 0)$$

$$\Rightarrow T = mgl\theta \quad \forall \quad -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4 \quad \text{در محدوده نقطه تعادل}$$

مثال (۲-۷): ترمیستوری دارای پاسخ دمائی زیر است:

که در آن $R_0 = 10,000\Omega$ ، مقاومت R و دما T بر حسب سلسیوس است. مدل خطی را برای کار ترمیستور در دمای $T = 20^\circ C$ و تغییرات کوچکی از دما را پیدا کنید.

حل: تابع $f(T)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(T) = R = R_0 e^{-0.1T}$$

حال داریم:

$$\Delta R = f(T) - f(T_0), \quad \Delta T = T - T_0.$$

$$\Delta R = f(T) - f(T_0) = \frac{\partial f}{\partial T} \Big|_{T=T_0=20^\circ} \Delta T + \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial T} \Big|_{T=T_0=20^\circ} = -0.1 R_0 e^{-0.1T_0} = -135,$$

و در نهایت با قرار دادن مقادیر ثابت داریم:

$$\Delta R = -135 \Delta T$$

که یک رابطه خطی بین تغییرات مقاومت و تغییرات محدود دما را در ترمیستور نمایش می‌دهد.

مثال (۲-۸): خروجی y و ورودی x از یک سیستم بصورت زیر با هم مرتبط هستند:

$$y = x + 1.4x^3$$

الف) مقادیر خروجی را برای حالت ماندگار در دو نقطه کار $x_0 = 1$ و $x_0 = 2$ بدست آورید.

ب) مدل خطی را برای دو هر دو نقطه بدست آورید و با هم مقایسه کنید.

حل: الف) مقادیر خروجی در حالت مانگار به راحتی از قرار دادن نقطه کار در معادله بدست می‌آید:

$$x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 2.4$$

$$x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 13.2$$

ب) معادله خطی بصورت $\square y = m \Delta x$ خواهد بود که در آن m بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$m = \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=x_0}$$

بنابر این در هر یک از نقاط کار خواهیم داشت:

$$m = \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = 1 + 4.2x_0^2.$$

که داریم:

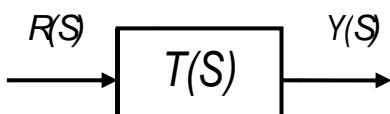
$$x_0 = 1 \Rightarrow m = 5.2 \quad , \quad x_0 = 2 \Rightarrow m = 18.8$$

تمرین (۲-۱): یک فنر که در یک کمک فنر بکار رفته است نیروی f را بصورت رابطه تولید می کند. که در آن x جابجائی فنر است. یک مدل خطی برای فنر وقتی $x_0 = 1$ است بدست آورید.

نمایش سیستم بصورت TF :

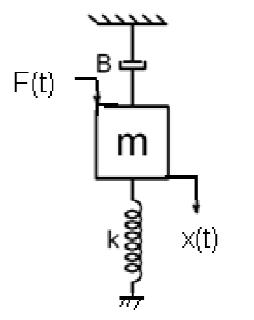
تابع تبدیل:

برای هر سیستم کنترلی تابع تبدیل به صورت زیر تعریف می شود، مشروط برآنکه تمام شرایط اولیه صفر باشد.



$$T(S) = \frac{\text{لایپلاس خروجی}}{\text{لایپلاس ورودی}} = \frac{Y(S)}{R(S)}$$

تابع تبدیل برای سیستم های خطی غیر متغیر با زمان تعریف می شود و تنها رابطه یک خروجی نسبت به یک ورودی در یک سیستم را بیان می کند.



مثال (۲-۹): در سیستم زیر تابع تبدیل را به دست آورید.

ورودی: $x(t)$ خروجی: $f(t)$

حل: در بخش قبلی معادله دینامیکی سیستم را بدست آورده ایم:

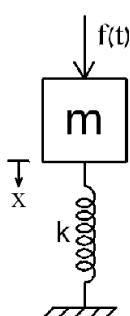
$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + B \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f(t)$$

برای بدست آوردن تابع تبدیل کافیست از معادله دینامیک سیستم که رابطه خروجی و ورودی سیستم را بیان می کند، تبدیل لایپلاس بگیریم:

$$mS^2X(S) + BSX(S) + KX(S) = F(S) \Rightarrow T(S) = \frac{X(S)}{F(S)} = \frac{1}{mS^2 + BS + K}$$

مثال (۲-۸): برای سیستم زیر ابتدا تابع تبدیل را بدست آورید،

سپس پاسخ را به ازاء ورودی ضربه $\delta(t)$ بررسی کنید.



$$f(t) = m \frac{d^2x}{dt^2} + kx \rightarrow F(S) = mS^2 \cdot X(S) + KX(s)$$

حل:

$$T(S) = \frac{X(S)}{F(S)} = \frac{1}{mS^2 + K}$$

تابع تبدیل سیستم

$$X(S) = \frac{F(S)}{mS^2 + K} = \frac{1}{mS^2 + K} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{S^2 + \frac{K}{m}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{S^2 + \left(\sqrt{\frac{K}{m}}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{\frac{K}{m}}}{\sqrt{\frac{K}{m}}}$$

$$L^{-1} \rightarrow x(t) = \frac{1}{\sqrt{mK}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{K}{m}} t\right) u(t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \rightarrow 2\pi f = \sqrt{\frac{K}{m}} \rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$$

مشاهده می شود که در این سیستم چون هیچ عنصر تلف کننده انرژی (دمپر) وجود ندارد بنابر این خروجی سیستم دائما بصورت نوسانی است و هیچگاه به حالت مانا نخواهد رسید.

مثال (۲-۹) تابع تبدیل مثال (۲-۳) را بدست آورید.

حل: از مثال (۲-۳) دو معادله بدست آمده برای سیستم را بازنویسی می کنیم:

$$(v_C - e) + \frac{dv_C}{dt} + (v_C - v_3) = 0$$

$$v_3 + (v_3 - v_C) + \int_0^t (v_3(\tau) - e(\tau)) d\tau = 0$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو معادله فوق خواهیم داشت:

$$(V_C - E) + sV_C + (V_C - V_3) = 0$$

$$V_3 + (V_3 - V_C) + \frac{1}{s}(V_3 - E) = 0$$

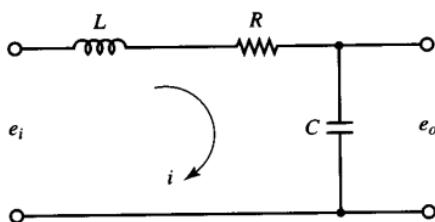
از معادله اول می توان ولتاژ گره ۳ را بدست آورد:

$$V_3 = (s+2)V_C - E$$

و با جایگذاری در معادله پائین و چند عملیات ساده بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}
 & V_3 + (V_3 - V_C) + \frac{1}{s}(V_3 - E) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (s+2)V_C - E + ((s+2)V_C - E - V_C) + \frac{1}{s}((s+2)V_C - E - E) = 0 \\
 \Leftrightarrow & s(s+2)V_C - sE + s(s+1)V_C - sE + (s+2)V_C - 2E = 0 \\
 \Leftrightarrow & V_C(2s^2 + 4s + 2) = E(2s + 2) \\
 \Leftrightarrow & \frac{V_C}{E} = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 1} \\
 \Leftrightarrow & \frac{V_C}{E} = \frac{1}{s+1}
 \end{aligned}$$

مثال (۲-۱۰) تابع تبدیل مدار RLC زیر را بدست آورید:



$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e_i$$

$$\frac{1}{C} \int i dt = e_o$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از معادلات و با فرض اینکه ورودی سیستم e_i و خروجی آن e_o باشد، خواهیم داشت:

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s) = E_i(s)$$

$$\frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s) = E_o(s)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

مثال (۲-۱۱) اگر در سیستمی با تابع تبدیل زیر $r(t)$ ورودی و $y(t)$ خروجی باشد، $y(t)$ را به ازاء ورودی پله واحد

$$\frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{10(S+2)}{S^2 + 8S + 15}$$

بدست آورید:

اگر ورودی بصورت پله واحد باشد، خروجی بصورت زیر خواهد بود که با تجزیه کسر و عکس تبدیل لاپلاس به پاسخ

$$Y(S) = \frac{10(S+2)}{S(S+3)(S+5)}$$

مطلوب می‌رسیم:

$$Y(s) = \frac{4}{3s} + \frac{5}{3} \frac{1}{s+3} - 3 \frac{1}{s+5} \quad y(t) = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} e^{-3t} - 3e^{-5t}$$

تمرین (۲-۲): در سیستم مثال (۲-۴) تابع تبدیلهای زیر را بدست آورید.

تمرین (۲-۳): در سیستم جرم و فنر (مثال ۹) با فرض ورودی پله $u(t)$ پاسخ را بدست آورید و رسم کنید.

چند تعریف در مورد تابع تبدیل:

فرض کنیم تابع تبدیل برای یک سیستم بصورت $T(S) = \frac{P(S)}{q(S)}$ موجود باشد که در آن $P(S)$ و

$q(S)$ دو چند جمله‌ای برحسب S هستند. اولین شرط برای بررسی این سیستم این است که درجه صورت از درجه مخرج بزرگتر نباشد. این شرط به این مفهوم است که سیستم علی باشد. اگر درجه صورت از مخرج بزرگتر باشد یعنی سیستم علی نیست.

وقتی چند جمله‌ای مخرج، $q(s)$ را برابر صفر قرار می‌دهیم، آن را معادله مشخصه سیستم می‌گوئیم. زیرا ریشه‌های این معادله مشخصه پاسخ زمانی را تعیین می‌کند. ریشه‌های این معادله را قطب‌های سیستم می‌نامند. و ریشه‌های چند جمله‌ای صورت، $P(s)$ را صفرهای سیستم می‌نامند. قطبها و صفرها فرکانسهای بحرانی سیستم را تشکیل می‌دهند. قطبها پاسخ سیستم را بینهایت می‌کنند و صفرها پاسخ را صفر می‌کنند. نمودار قطبها و صفرهای یک سیستم را می‌توان در صفحه مختلط S بصورت گرافیکی رسم کرد.

مثال (۲-۱۲): تابع زیر مفروض است:

$$Y(S) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

$S = -2$ که در آن معادله $S^2 + 3S + 2 = 0$ معادله مشخصه سیستم است. $S = -1$ و $S = -2$

قطبهای تابع $S = -3$ صفر تابع است. قطبها و صفرهای تابع را می‌توان بصورت گرافیکی نیز مشاهده

کرد که در فصل اول مورد بررسی قرار گرفت.

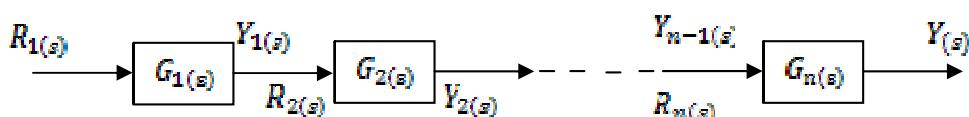
دیاگرام بلوکی: یک روش برای نمایش سیستمهای کنترلی در حالت تابع تبدیل استفاده از نمودار بلوکی

است. در نمودار بلوکی هر بخش از سیستم توسط یک بلوک نمایش داده می‌شود که تابع تبدیل آن داخل

$$R_{(s)} \xrightarrow{G_{(s)}} Y_{(s)} \quad G_{(s)} = \frac{Y_{(s)}}{R_{(s)}} \quad \text{بلوک نوشته می‌شود.}$$

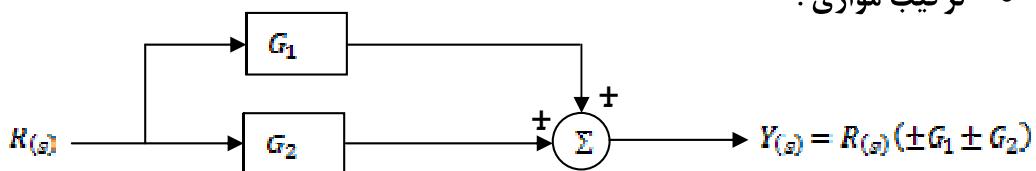
در ادامه چند معادل پر کاربرد را در ساده سازی نمودارهای بلوکی مشاهده می‌کنیم.

• **ترکیب سری:**

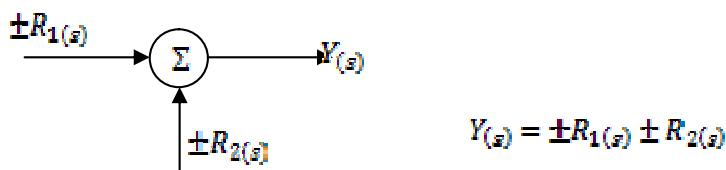


$$\frac{Y_{(s)}}{R_{(s)}} = G_{1(s)} * G_{2(s)} * \dots * G_{n(s)}$$

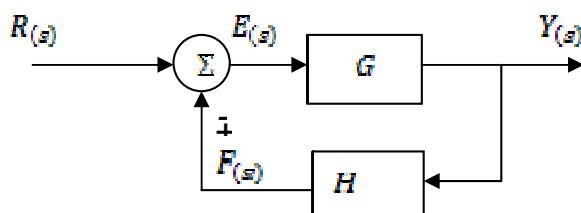
• **ترکیب موازی:**



• **بلوک جمع کننده:**

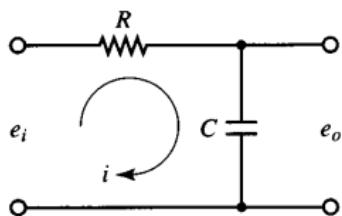


• **فیدبک:** تابع تبدیل معادل برای یک حلقه فیدبک بصورت زیر بدست می‌آید.



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G}{1 \pm GH}$$

مثال (۲-۱۳) دیاگرام بلوکی سیستم زیر را رسم کنید.



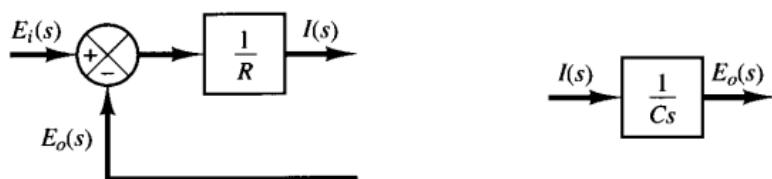
با نوشتن معادلات دینامیک برای سیستم و انتقال آن به

حوزه لاپلاس با فرض صفر بودن شرایط اولیه داریم:

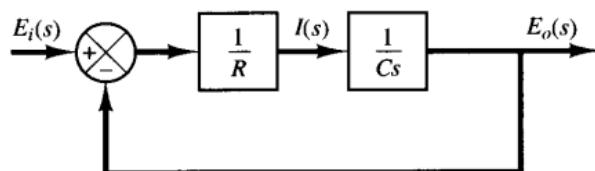
$$i = \frac{e_i - e_o}{R} \Rightarrow I(s) = \frac{E_i(s) - E_o(s)}{R}$$

$$e_o = \int i dt \Rightarrow E_o(s) = \frac{I(s)}{Cs}$$

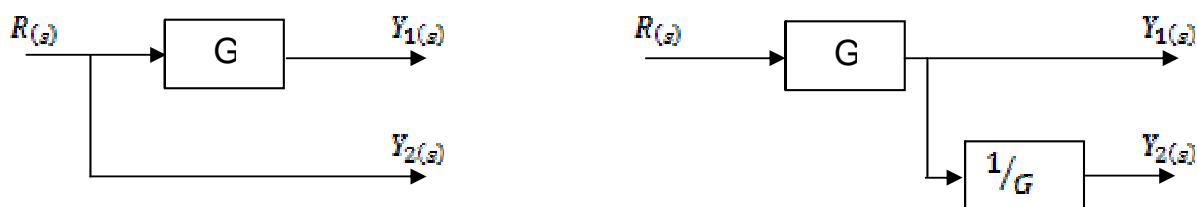
دو معادله فوق را می توان بصورت دو دیاگرام زیر نمایش داد:



و در نهایت با کنار هم قرار دادن دو دیاگرام فوق خواهیم داشت:



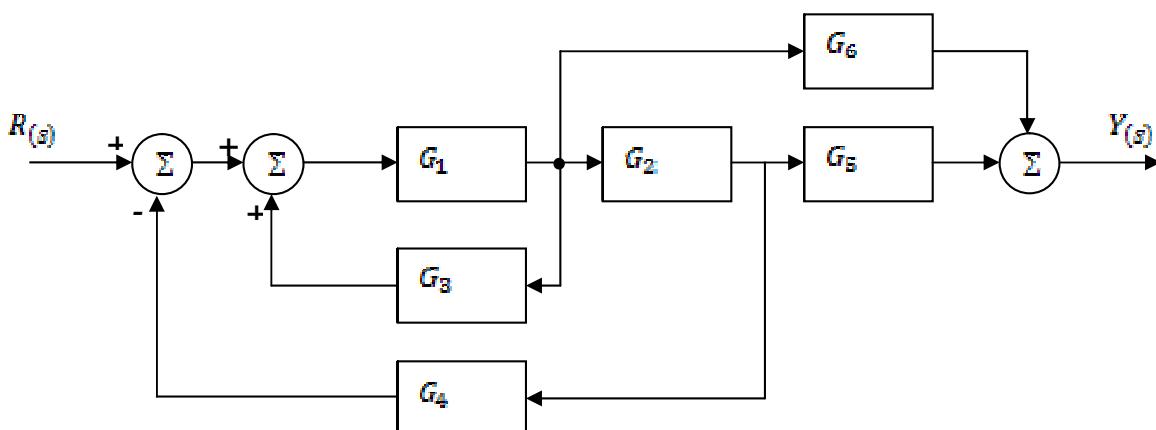
• انتقال گره :

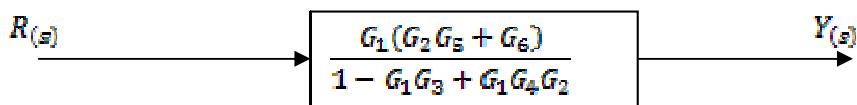
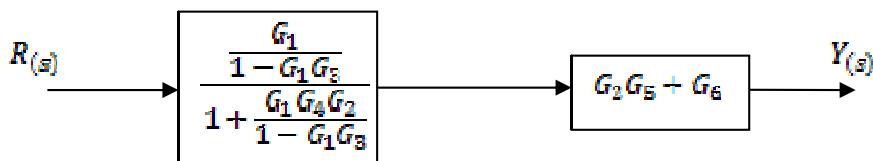
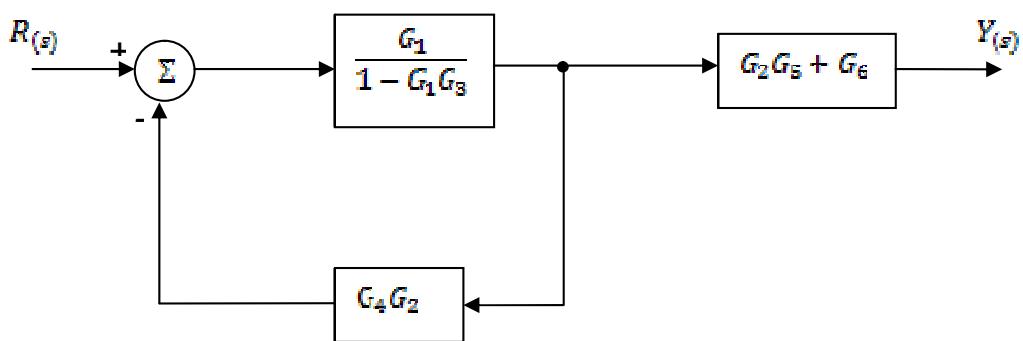
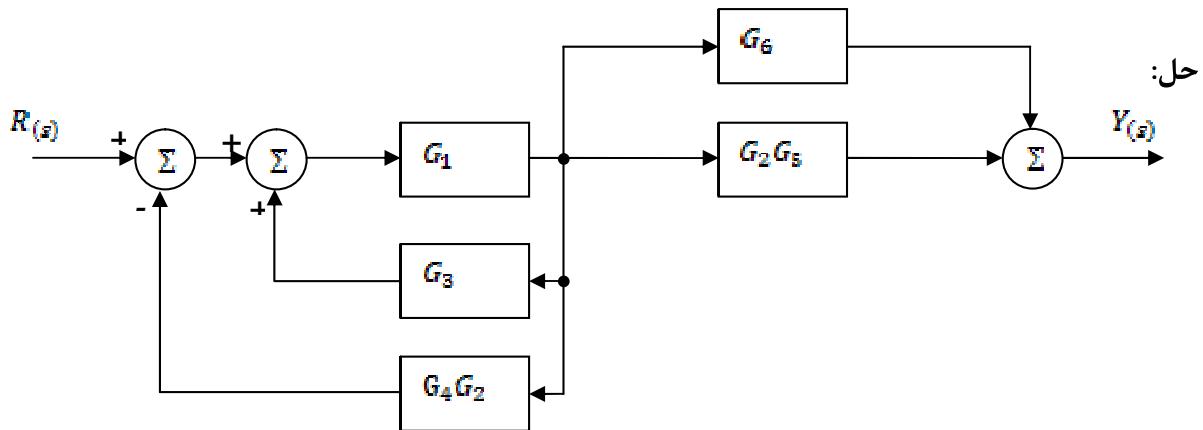


جدول زیر چند عمل پر کاربرد در ساده سازی را بطور خلاصه نمایش می دهد:

	Original Block Diagrams	Equivalent Block Diagrams
1		
2		
3		
4		
5		

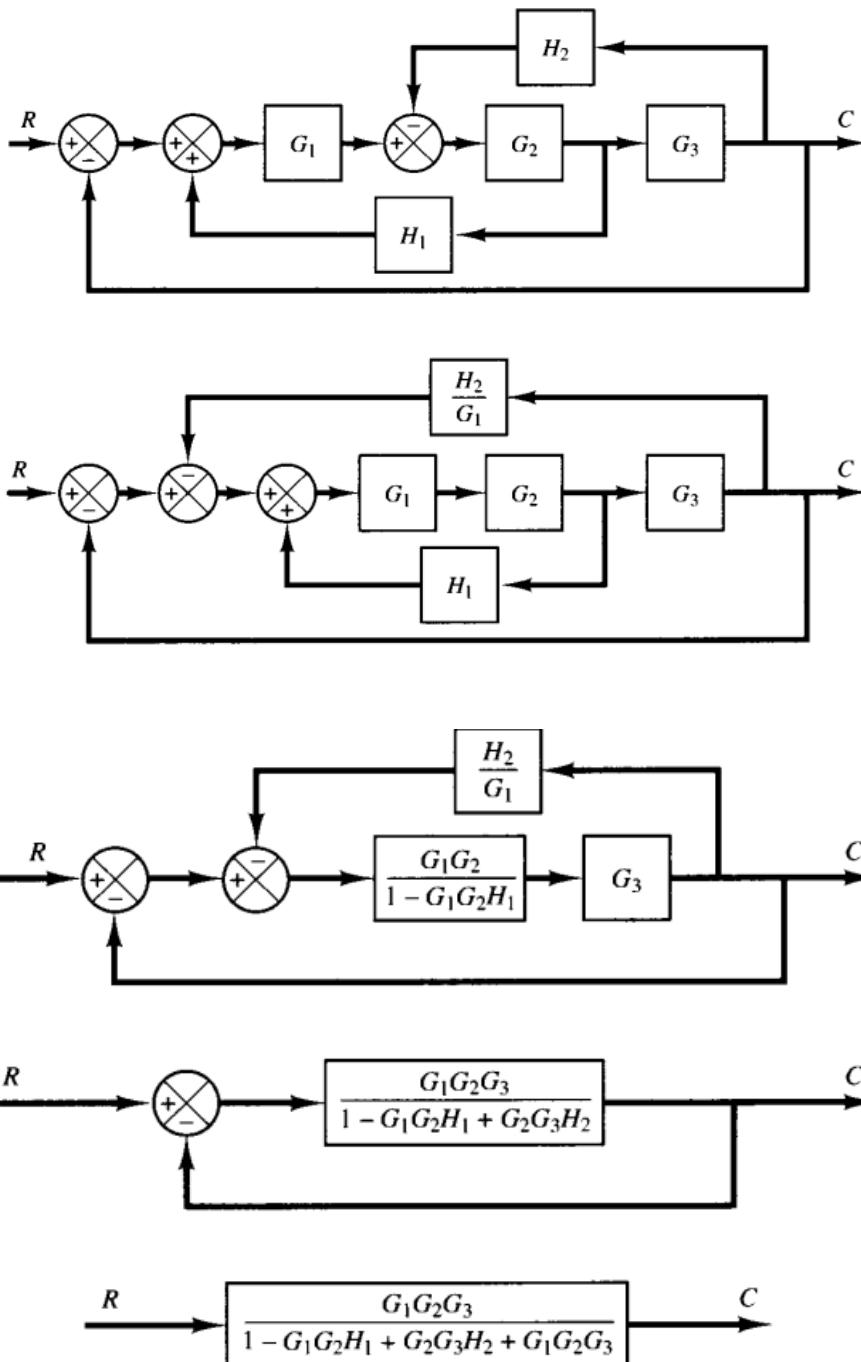
مثال (۲-۱۴): تابع تبدیل شکل زیر کدام است؟





$$T(S) = \frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{G_1(G_2G_5 + G_6)}{1 - G_1G_3 + G_1G_4G_2}$$

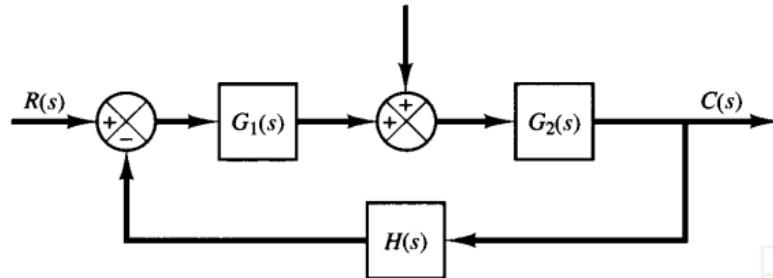
مثال (۱۵-۲) دیاگرام بلوکی زیر را ساده کنید:



مثال (۲-۱۶) در سیستم زیر تابع تبدیل خروجی نسبت به ورودی و اغتشاش را بدست آورید و سپس خروجی را

Disturbance
 $D(s)$

تعیین کنید.



ملاحظه می شود که سیستم دارای یک خروجی و دو ورودی مرجع ($R(s)$) و اغتشاش ($D(s)$) است. می دانیم که تابع تبدیل همواره نسبت یک خروجی به یک ورودی است. بنابراین در سیستمهای *MIMO* باید خروجیهای اضافی را غیرفعال کرد و ورودیهای اضافی را صفر کرد تا تابع تبدیل خروجی به ورودی مورد نظر بددست آید:

در سیستم فوق تابع تبدیل خروجی نسبت به هر یک از ورودیها بصورت زیر بددست می آید:

$$\frac{C_D(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

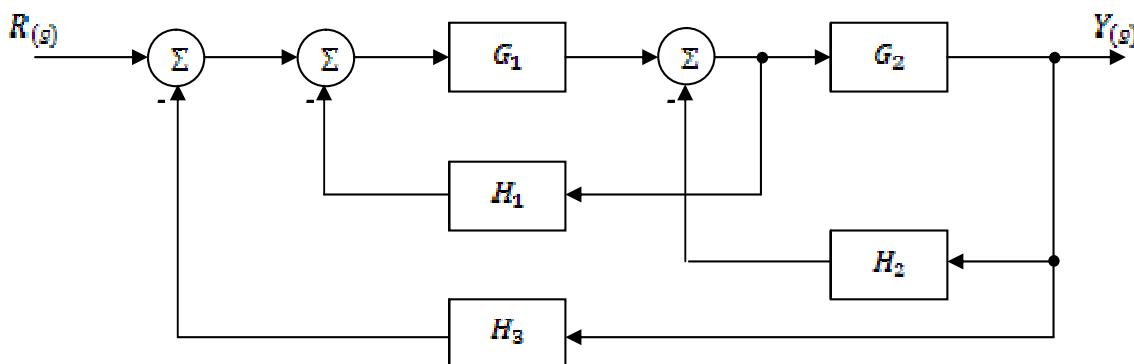
$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

با توجه به اینکه سیستم مورد نظر خطی است پس خروجی

$$\begin{aligned} C(s) &= C_R(s) + C_D(s) \\ &= \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} [G_1(s)R(s) + D(s)] \end{aligned}$$

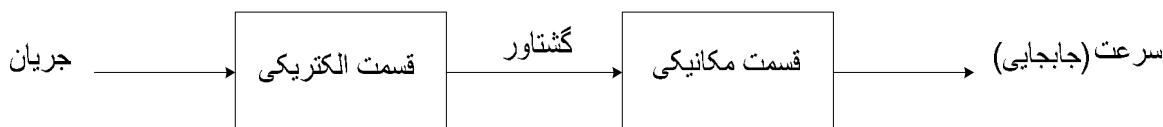
در رابطه بالا دیده می شود که اگر $|G_1(S).H(S).G_2(S)| \gg |G_1(S).H(S)|$ باشد آنگاه $1 \gg |G_1(S).H(S)|$ است و اثر اغتشاش به سمت صفر میل می کند. این یکی از مزایای فیدبک است که در سیستمهای حلقه بسته ظاهر می شود.

تمرین (۲-۴): نمودار بلوکی شکل زیر را ساده کرده و تابع تبدیل معادل آنرا بددست آورید.



فرآیندهای الکتروموکانیکی:

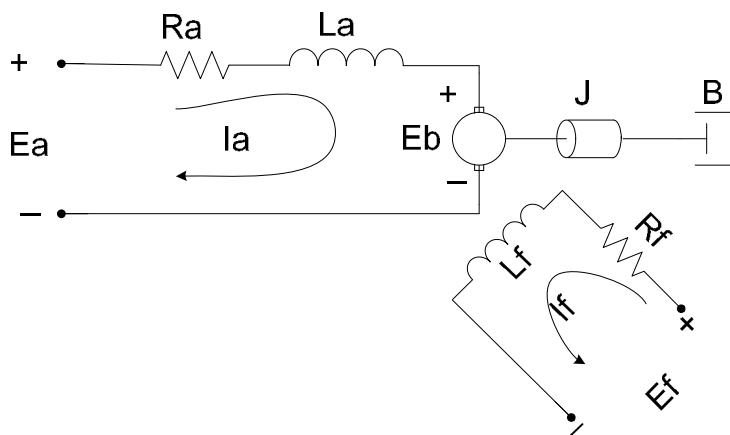
فرآیندهای الکتروموکانیکی ترکیبی از دو فرآیند الکتریکی و مکانیکی است. در این پروسه‌ها ابتدا در بخش الکتریکی، جریان یا ولتاژ تبدیل به گشتاور شده و سپس در بخش مکانیکی گشتاور تبدیل به جابجائی یا سرعت خواهد شد. شکل زیر بخش‌های یک سیستم الکتروموکانیکی را نشان می‌دهد.



بدلیل اینکه بیشتر کنترل کننده‌های الکتریکی و بیشتر سیستمهایی که با آنها سروکار داریم مکانیکی هستند، یک عملگر الکتروموکانیکی مانند موتور DC ضروری است. بعضی از دلائل استفاده موتور DC عبارتند از: قابلیت حمل و نقل آسان، سادگی کنترل سرعت و مشخصه گشتاور - سرعت مناسب.

اکنون به بررسی موتور DC و بدست آوردن تابع تبدیل آن و همچنین مقایسه روش‌های کنترل آن خواهیم پرداخت:

موتور DC: موتور DC را در دو حالت مورد بررسی قرار می‌دهیم. یکی در حالتی که میدان ثابت است و عمل کنترل توسط ولتاژ آرمیچر صورت می‌گیرد و دیگری زمانی که ولتاژ آرمیچر ثابت است و کنترل توسط میدان انجام می‌گردد.



$$\varphi =$$

با توجه به اینکه گشتاور تولیدی موتور هم به جریان آرمیچر و هم به جریان تحریک بستگی دارد، تابع تبدیل موتور را در دو حالت بدست می‌آوریم:

الف) میدان ثابت است (کنترل توسط آرمیچر انجام می شود):

$$I_f = \text{ثابت} \Rightarrow \varphi = \text{ثابت}$$

$$\text{گشتاور تولیدی توسط موتور} \Rightarrow T_e = K \cdot I_a$$

$$1) E_b = K_2 \cdot \varphi \cdot \frac{d\omega}{dt} = K_b \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

$$2) E_a = R_a I_a + L_a \cdot \frac{dI_a}{dt} + E_b$$

$$\text{گشتاور مکانیکی مصرفی} \Rightarrow T_m = J \cdot \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} + B \cdot \omega(t)$$

در حالت تعادل: $\text{گشتاور مصرفی توسط بار} = \text{گشتاور تولیدی توسط موتور}$

$$3) T_e = T_m \Rightarrow J \cdot \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = K \cdot I_a$$

معادلات (۱)، (۲) و (۳) را به حوزه لاپلاس می بریم وتابع تبدیل را بدست می آوریم:

$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K}{S[(Ra+SLa)(JS+B)]+K.Kb}$$

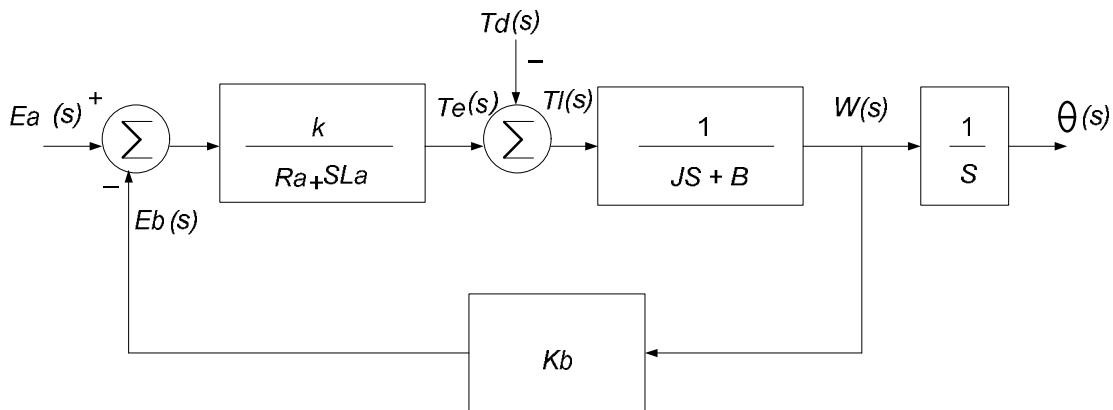
با فرض $L_a = 0$ داریم:

$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{Km}{S(\tau m \cdot S + 1)}$$

که در آن:

$$\tau m = \frac{Ra.J}{Ra.B + K.Kb} \quad , \quad Km = \frac{K}{Ra.B + K.Kb}$$

دیده می شود که در حالتی که موتور dc توسط جریان آرمیچر کنترل می شود تابع تبدیل موتور با یک سیستم مرتبه دوم معادل است. همچنین با توجه به دیاگرام بلوکی زیر دیده می شود که در این حالت سیستم دارای یک فیدبک داخلی است که باعث می شود عملکرد موتور در کنترل سرعت بهتر باشد. البته چون سیستم مرتبه دوم است در کنترل آن احتمال نوسانی شدن و یا ناپایدار شدن سیستم وجود دارد. از سوی دیگر به واسطه زیاد بودن جریان آرمیچر معمولاً تجهیزات مربوط به درایو موتور در این نوع کنترل گرانتر خواهد بود.



ب) جریان آرمیچر ثابت است (کنترل توسط میدان انجام شود): ($I_a=const$)

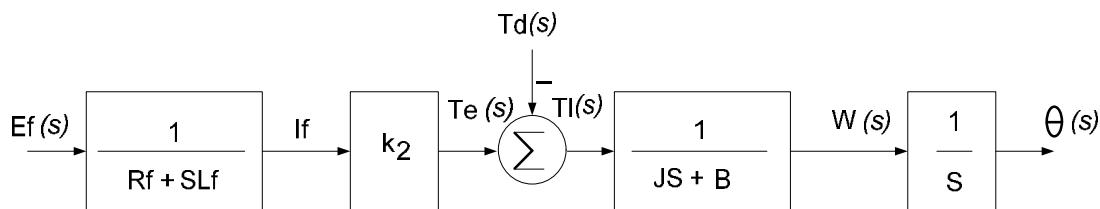
$$T = K_2 \cdot I_f \quad , \quad E_f = R_f \cdot I_f + L_f \cdot \frac{dI_f}{dt} \quad , \quad J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + B \cdot \frac{d\theta}{dt} = K_2 \cdot I_f = T$$

$$(L_f \cdot S + R_f) \cdot I_f(S) = E_f(S) \quad , \quad (JS^2 + BS) \cdot \theta(s) = K_2 \cdot I_f(S)$$

$$\rightarrow \frac{\theta(s)}{E_f(S)} = \frac{K_2}{S[(R_f + SL_f)(JS + B)]} = \frac{K_m}{S(\tau_m \cdot S + 1)(\tau_f \cdot S + 1)}$$

$$K_m = \frac{K_2}{R_f \cdot B} \quad \text{ثابت بهره موتور}$$

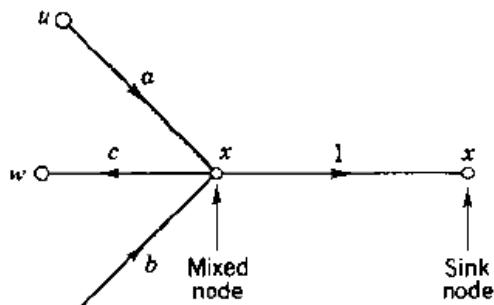
$$\tau_m = \frac{J}{B} \quad \text{ثابت زمانی بار} \quad , \quad \tau_f = \frac{L_f}{R_f} \quad \text{ثابت زمانی میدان}$$



نکته: پایداری کنترل دور موتور بوسیله جریان آرمیچر از جریان میدان بیشتر است.

نمودار گذر سیگنال :

تعاریف :



گره : نقطه‌ای است که یک متغیر یا یک سیگنال را نشان می‌دهد

انواع گره عبارتند از: گره ورودی یا *Source*، گره خروجی یا *Sink*

و گره مخلوط یا *Mixed*.

گره‌ها دو کار را انجام می‌دهند. اولاً تمام سیگنالهایی که به آنها وارد می‌شود را با هم جمع می‌کنند و ثانیاً

حاصل جمع را به تمام شاخه‌های خروجی ارسال می‌کنند. در شکل بالا داریم:

$$w = cx = cau + cav \quad x = au + bv$$

شاخه : خطی است که دو گره را به هم وصل می‌کند.

بهره : بهره حقیقی یا مختلط بین دو گره.

مسیر : راهی است که یک جریان در جهت شاخه‌های به هم متصل شده طی می‌کند.

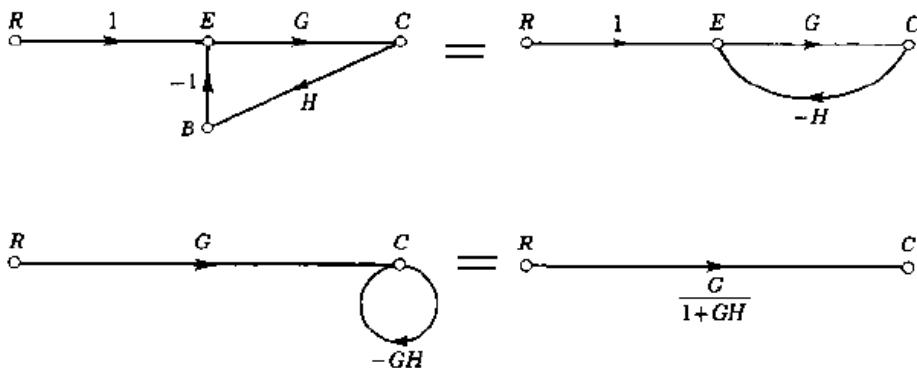
حلقه : یک مسیر بسته را حلقه گویند.

بهره حلقه : حاصل ضرب بهره‌های شاخه‌های یک حلقه.

مسیر پیشرو : مسیری است که از گره ورودی به سمت گره خروجی حرکت کند به شرطی که از هرگره فقط

یک بار عبور کند.

بهره مسیر پیشرو : حاصل ضرب بهره‌های مسیر پیشرو می‌باشد.



قاعده میسون: اگر یک سیستم را بصورت نمودار گذر سیگنال نمایش دهیم می توانیمتابع تبدیل معادل

آنرا با استفاده از فرمول بهره میسون که بصورت زیر تعریف

می شود بدست آورد.

$$G_{(s)} = \frac{Y_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{1}{\Delta} \sum_i P_i * \Delta_i$$

i : تعداد مسیرهای پیشرو

p_i : بهره مسیر پیشرو i ام

Δ : دترمینان سیستم که به صورت زیر محاسبه می شود :

$\Delta = 1 + \text{(مجموع بهره کلیه حلقه های تکی)}$

$- \text{(مجموع حاصل ضرب بهره های هر دو حلقه ای که با هم گره مشترک ندارند)}$

$+ \text{(مجموع حاصل ضرب بهره های هر سه حلقه ای که با هم گره مشترک ندارند)}$

$- \text{(مجموع حاصل ضرب بهره های هر چهار حلقه ای که با هم گره مشترک ندارند)}$

Δ_i : دترمینان مسیر پیشرو i که به صورت زیر محاسبه می شود :

$\Delta_i =$ (مجموع بهره کلیه تک حلقه هایی که با مسیر پیش رو i ام گره مشترک ندارند) -

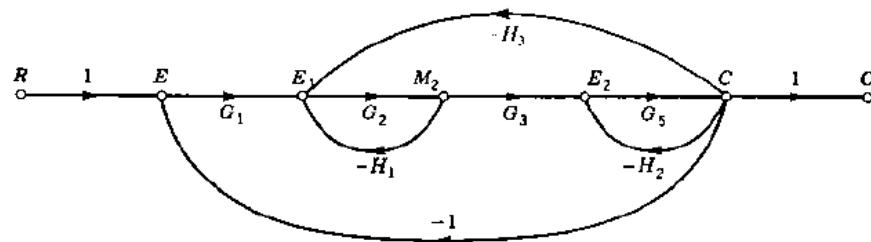
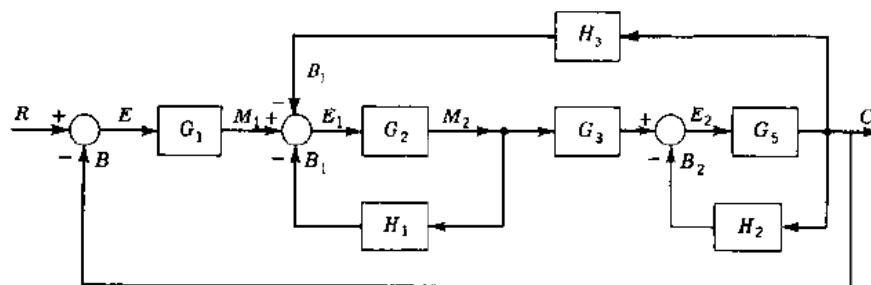
- (مجموع حاصل ضرب بهره های دو حلقه هایی که با همدیگروبا مسیر پیش رو i ام گره مشترک ندارند)

+ (مجموع حاصل ضرب بهره های سه حلقه هایی که با همدیگروبا مسیر پیش رو i ام گره مشترک ندارند)

- (مجموع حاصل ضرب بهره های چهار حلقه هایی که با همدیگروبا مسیر پیش رو i ام گره مشترک ندارند)

مثال (۲-۱۸) دیاگرام بلوکی شکل زیر را بصورت نمودار گذر سیگنال نمایش داده و سپس با استفاده از فرمول بهره

میسون تابع تبدیل کلی سیستم را بدست آورید:



تعیین مسیرهای پیشرو :

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_5$$

• حلقه های تکی :

$$L_1 = -G_2 H_1 \quad , \quad L_2 = -G_5 H_2 \quad , \quad L_3 = -G_2 G_3 G_5 H_3 \quad , \quad L_4 = -G_1 G_2 G_3 G_5$$

• حلقه های دو تایی :

$$(L_1, L_2)$$

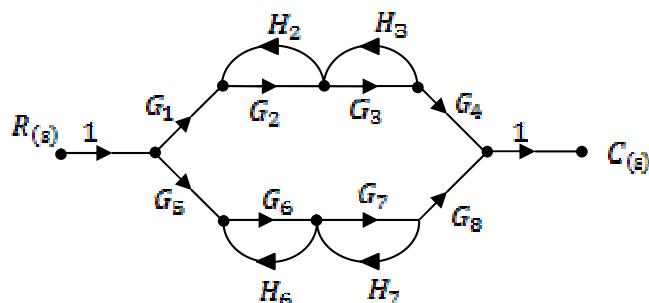
- حلقه های سه تایی : نداریم.

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1, L_2)$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$T(s) = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_5}{(-G_2 H_1 - G_5 H_2 - G_2 G_3 G_5 H_3 - G_2 G_3 G_5 + G_2 H_1 G_5 H_2)}$$

مثال (۲-۱۹):تابع تبدیل سیستم زیر را بدست آورید.



حل :

- تعیین مسیرهای پیشرو :

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 \quad , \quad P_2 = G_5 G_6 G_7 G_8$$

- حلقه های تکی :

$$L_1 = G_2 H_2 \quad , \quad L_2 = G_3 H_3 \quad , \quad L_3 = G_6 H_6 \quad , \quad L_4 = G_7 H_7$$

- حلقه های دو تایی :

$$(L_1, L_3) \quad , \quad (L_1, L_4) \quad , \quad (L_2, L_3) \quad , \quad (L_2, L_4)$$

- حلقه های سه تایی : نداریم.

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1, L_3 + L_1, L_4 + L_2, L_3 + L_2, L_4)$$

$$\Delta_1 = 1 - (L_3 + L_4)$$

$$\Delta_1 = \Delta|_{L_1, L_3=0} = 1 - (L_3 + L_4)$$

$$\Delta_2 = 1 - (L_1 + L_2)$$

$$\Delta_1 = \Delta|_{L_3, L_4=0} = 1 - (L_1 + L_2)$$

فصل سوم

مدل‌های متغیر حالت برای سیستمهای فیزیکی

در فصل قبل مدل‌های ریاضی سیستمهای کنترلی را بررسی کردیم. در این فصل ضمن یادآوری تعریف حالت و متغیر‌های حالت به بررسی سیستمهای خواهیم پرداخت. و در نهایت تبدیل مدل‌های مختلف به هم را بررسی می‌کنیم.

نمایش سیستمهای بصورت فضای حالت یا *state-space*

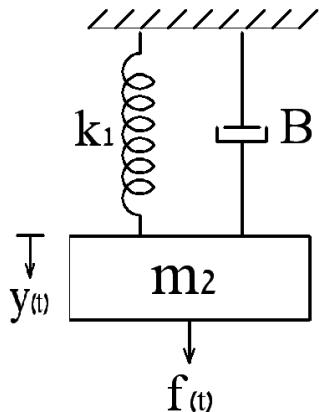
- ۱- اطلاعات بیشتری از داخل سیستم به ما می‌دهد یعنی می‌توانیم متغیر‌های داخلی را مشاهده کنیم.
- ۲- برای نمایش تمام سیستم‌ها استفاده می‌شود. سیستم‌های خطی، غیر خطی، TV , TI ,
- ۳- برای شبیه‌سازی سیستم‌ها به صورت کامپیوتری بهتر است. (چون این معادلات در حوزه زمان نوشته می‌شوند).
- ۴- پایه‌ی تئوری کنترل مدرن است.

حالت سیستم: حالت یک سیستم وضعیت آن است در گذشته، حال و آینده. در فضای حالت معادلات دینامیکی سیستم با استفاده از دو مجموعه‌ی متغیر‌های حالت و معادلات حالت تعریف می‌شوند.

متغیرهای حالت : متغیرهای حالت یک سیستم مجموعه‌ای مینیمال از متغیر‌ها مانند $xI(t)$ ، $x2(t)$... $xn(t)$ است به طوری که دانستن آنها در لحظه‌ای چون t_0 و داشتن اطلاعات از محرک ورودی که پس از t_0 اعمال می‌شود برای تعیین حالت سیستم در هر لحظه $t > t_0$ کافی باشد.

معادلات حالت: معادلات حالت یک سیستم معادلات دیفرانسیل مرتبه اولی هستند که تعداد آنها به درجه معادلات دیفرانسیل دینامیکی سیستم وابسته است.

مثال (۳-۱): برای سیستم دینامیکی جرم فنر و دمپر زیر معادلات حالت را تعیین کنید.



$$\frac{md^2y(t)}{dt^2} + B \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = f(t)$$

$$\begin{cases} x_1 = y(t) \\ x_2 = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}_1 \end{cases}$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt} = \frac{f(t)}{m} - \frac{B}{m} \frac{dy(t)}{dt} - \frac{k}{m} y(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \frac{-B}{m} \cdot x_2 - \frac{k}{m} \cdot x_1 + \frac{f(t)}{m} \\ \dot{x}_1 = x_2 \end{cases}$$

فرم کلی نمایش متغیرهای حالت:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \\ y = C \cdot x + D \cdot u \end{cases}$$

که در آن x ماتریس $(n \times 1)$ متغیرهای حالت سیستم، A یک ماتریس $n \times n$ ، ماتریس سیستم است. n تعداد معادلات حالت یا متغیرهای سیستم است. B یک ماتریس $n \times 1$ ، ماتریس ورودی است، C یک ماتریس $1 \times n$ ، ماتریس خروجی است و D یک ماتریس 1×1 ، ماتریس کوپلینگ مستقیم ورودی و خروجی است.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

نمایش ماتریسی مثال قبل :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{B}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0] f(t)$$

تذکر: در حالت کلی تر برای یک سیستم با n متغیر حالت ، m ورودی و p خروجی ابعاد ماتریس ها به صورت زیر است:

یک ماتریس $n \times n$ ، B یک ماتریس $m \times n$ هستند. دو ماتریس A و B کنترل پذیری (Controllability) یک سیستم را برای ما نشان می دهند. کنترل پذیری به این مفهوم است که می توان سیستم را بگونه ای طراحی کرد که خواسته های مسئله برآورده شود.

یک ماتریس $p \times n$ ، است که اثر متغیرهای حالت را بر خروجی نشان می دهد. این ماتریس مشاهده پذیری (Observability) را در سیستم تعیین می کند. مشاهده پذیری به این مفهوم است که ما بتوانیم توسط مشاهده یا اندازه گیری خروجیها و ورودیها اطلاعاتی درباره متغیرهای حالت سیستم بدست آوریم. اگر این امکان وجود داشته باشد سیستم مشاهده پذیر است که این خاصیت توسط ماتریس C قابل تشخیص است. و D یک ماتریس $p \times m$ است.

مثال (۳-۲): برای سیستم زیر معادلات دینامیکی سیستم داده شده است ، معادلات حالت آن را به دست آورید.



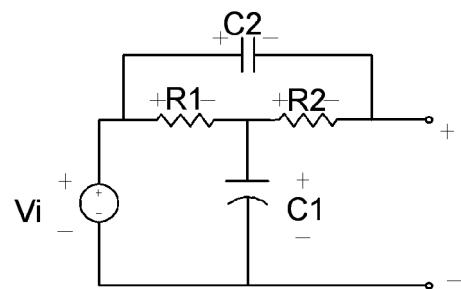
$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + k_1 \dot{y}_1 + k_2 y_1 = u_1 + u_2 k_3 \\ \dot{y}_2 + k_4 y_2 + k_5 \dot{y}_1 = k_0 u_1 \end{cases}$$

حل: تعداد متغیرهای حالت را با توجه به تعداد خروجی‌ها و درجه معادله دینامیک هر خروجی به دست می‌آوریم. معادله دینامیک y_1 درجه ۲ است پس حداقل دو متغیر برای آن و y_2 درجه ۱ است پس حداقل یک متغیر نیاز است در نتیجه معادلات حالت دارای سه متغیر و سه معادله خواهند بود. پس از تعیین متغیرهای حالت معادلات دیفرانسیل سیستم را برای بالاترین مرتبه مشتق حل می‌کنیم و سپس معادلات حالت را تشکیل می‌هیم. باید توجه داشت که برای دستیابی به معادلات حالت باید در سمت راست هر معادله مشتق یک متغیر حالت وجود داشته باشد و سمت چپ آن معادلات برحسب خود متغیرهای حالت و ورودیها بازنویسی شود.

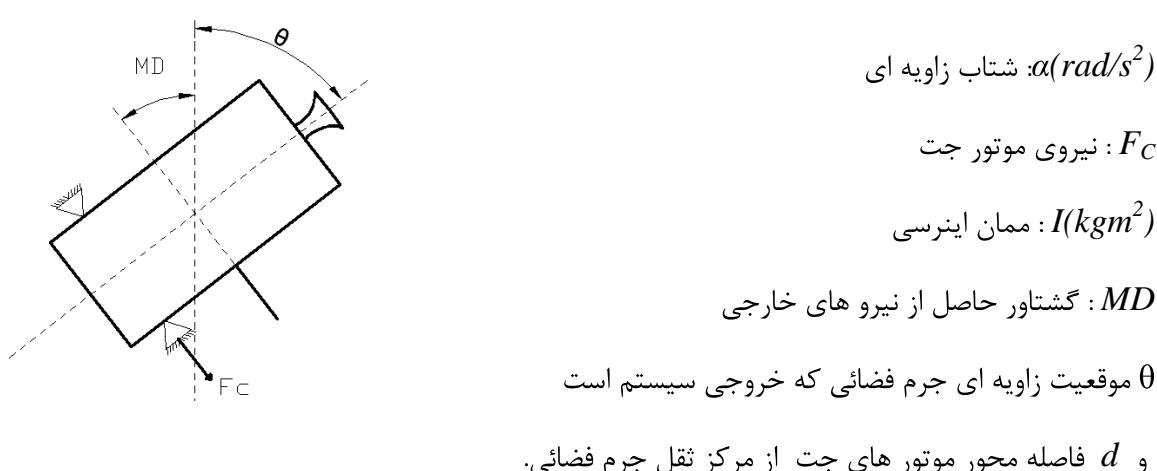
$$\begin{array}{l} y_1 = x_1 \\ \dot{y}_1 = x_2 \\ y_2 = x_3 \end{array} \longrightarrow \begin{cases} \ddot{y}_1 = -k_1 \dot{y}_1 - k_2 y_1 + u_1 + k_3 u_2 \\ \dot{y}_2 = -k_4 y_2 - k_5 \dot{y}_1 + k_0 u_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k_1 x_2 - k_2 x_1 + u_1 + k_3 u_2 \\ \dot{x}_3 = -k_4 x_3 - k_5 x_2 + k_0 u_1 \end{cases} \\ & \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k_2 & -k_1 & 0 \\ 0 & -k_5 & -k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & k_3 \\ k_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

تمرین (۳-۱) : معادلات حالت را برای مدار زیر به دست آورید.



تمرین (۲-۳) : معادلات حالت سیستم دینامیکی سیستم زیر را نوشته و فضای حالت آن را رسم کنید.



حل:

$$\sum T = I \cdot \alpha$$

$$\Rightarrow F_c \cdot d - MD = I \cdot \alpha = I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = I \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow F_c \cdot d - MD = I \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = F_c \frac{d}{I} - \frac{MD}{I}$$

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} = \dot{x}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = F_c \cdot \frac{d}{I} - \frac{MD}{I} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{d}{I} & -\frac{1}{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_c \\ MD \end{bmatrix}$$

$$\theta = y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0 \ 0] \begin{bmatrix} F_c \\ MD \end{bmatrix}$$

حل معادلات حالت و ماتریس انتقال (گذار) حالت (**State Transition Matrix**)

معادلات حالت $\longrightarrow \dot{X} = AX + BU$

$$\stackrel{L}{\Rightarrow} SX(S) - X(0) = AX(S) + BU(S) \longrightarrow (SI - A)X(S) = X(0) + BU(S)$$

$$(SI - A)^{-1}(SI - A)X(S) = (SI - A)^{-1}[X(0) + BU(S)]$$

$$\longrightarrow X(S) = (SI - A)^{-1}[X(0) + BU(S)]$$

تعريف ماتریس انتقال حالت :

ماتریس $(SI - A)^{-1}$ را با $\varphi(S)$ نمایش می‌دهیم. با لaplas معکوس گیری ماتریس (t) را خواهیم داشت که به آن ماتریس انتقال حالت یا گذار حالت می‌گوئیم. این ماتریس رفتار سیستم را مشخص می‌کند و همانطور که دیده می‌شود فقط به ماتریس A بستگی دارد.

$$\varphi(S) = (SI - A)^{-1}$$

$$\varphi(t) = L^{-1}\{ \square(s) \} = L^{-1}\{(SI - A)^{-1}\}$$

راهی دیگر برای بدست آوردن $\varphi(t)$:

طبق تعریف \square یا ماتریس انتقال حالت باید در معادله همگن حالت صدق کند، پس :

$$\frac{dX(t)}{dt} = A \cdot X \quad \longrightarrow \quad \frac{d\varphi(t)}{dt} = A \cdot \varphi(t) \quad \longrightarrow \quad \varphi(t) = e^{At}$$

پس از بدست آوردن $\varphi(t)$ داریم :

$$X(S) = \varphi(S) \cdot X(0) + \varphi(S) \cdot B \cdot U(S)$$

$$L^{-1} \longrightarrow X(t) = \underbrace{\varphi(t) \cdot X(0)}_{\substack{\downarrow \\ \text{پاسخ حالت کامل}}} + \underbrace{\int_0^t \varphi(t-\tau) \cdot B \cdot U(\tau) d\tau}_{\substack{\downarrow \\ \text{پاسخ ورودی صفر}}}$$

مشاهده می‌شود که با داشتن ماتریس انتقال حالت و شرایط اولیه می‌توان هر حالت دیگری را در سیستم بدست آورد. عبارت دیگر ماتریس انتقال حالت هر حالت اولیه از سیستم را به حالت کنونی انتقال می‌دهد.

مثال (۳-۴): ماتریس انتقال حالت را برای سیستم زیر بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

حل :

$$(SI - A) = \begin{bmatrix} S+3 & -1 \\ 2 & S \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad |(SI - A)| = S(S+3)+2 = S^2+3S+2$$

$$\text{adj}(SI-A) = \begin{bmatrix} s & 1 \\ -2 & s+3 \end{bmatrix} \implies (SI-A)^{-1} = \frac{1}{s^2+3s+2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(S) = (SI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+2)(s+1)} & \frac{1}{(s+2)(s+1)} \\ \frac{-2}{(s+2)(s+1)} & \frac{s+3}{(s+2)(s+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{(s+2)} - \frac{1}{(s+1)} & \frac{-1}{(s+2)} + \frac{1}{(s+1)} \\ \frac{2}{(s+2)} - \frac{2}{(s+1)} & \frac{-1}{(s+2)} + \frac{2}{(s+1)} \end{bmatrix}$$

$$\implies \varphi(t) = L^{-1}\{\square(s)\} = L^{-1}\{(SI-A)^{-1}\} = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-t} & -e^{-2t} + e^{-t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & -e^{-2t} + 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

مثال (۳-۵): ماتریس انتقال حالت و معادله انتقال حالت را برای سیستم زیر بدست آورید.

$$X' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} X \quad , \quad X(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حل: چون سیستم ورودی ندارد، $X(t)$ فقط شامل پاسخ ورودی صفر می‌باشد.

$$X(t) = \varphi(t) \cdot X(0)$$

$$\varphi(t) = L^{-1}\{\square(s)\} = L^{-1}\{(SI-A)^{-1}\}$$

$$(SI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+3s+2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$\implies (SI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ 0 & \frac{1}{(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$\varphi(t) = L^{-1}\{\square(s)\} = L^{-1}\{(SI-A)^{-1}\} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix}$$

مثال (۳-۶): معادله انتقال حالت $X(t)$ را با فرض ورودی پله $U(t)$ برای مثال قبل بدست آورید.

$$X(0) = \begin{bmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

: حل

$$X(t) = \varphi(t) \cdot X(0) + \int_0^t \varphi(t-\tau) \cdot B \cdot U(\tau) \cdot d\tau$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \end{bmatrix} +$$

$$\int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2(t-\tau)} & e^{-2(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)} \\ 0 & e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot U(\tau) \cdot d\tau$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)} \\ e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix} \cdot d\tau$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \cdot x_1(0) + (e^{-2t} - e^{-3t}) \cdot x_2(0) \\ e^{-3t} x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - [\frac{1}{2} e^{-2t} - \frac{1}{3} e^{-3t}] \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^{-3t} \end{bmatrix}$$

تمرین (۳-۳) : با فرض ورودی پله معادله انتقال حالت را بدهست آورید و در $t=1$ خروجی $y(t)$ را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

دستیابی به تابع تبدیل از معادلات حالت:

فرم کلی معادلات حالت بصورت ماتریسی بصورت زیر است:

$$\begin{cases} x' = AX + BU \\ y = CX + DU \end{cases} \Rightarrow \ell \begin{cases} SX(s) = AX(s) + BU(s) \\ y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

$$(SI - A)X(s) = BU(s)$$

که با فرض شرایط اولیه صفر داریم:

$$X(s) = (SI - A)^{-1} \cdot BU(s)$$

$$Y(s) = C \cdot (SI - A)^{-1} \cdot BU(s) + DU(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = C \cdot (SI - A)^{-1} \cdot B + D$$

بنابراین می توانیم با استفاده از معادلات حالت تابع تبدیل را برای یک سیستم بدست آوریم.



ارتباط بین معادلات فضای حالت و تابع تبدیل:

در تابع تبدیل:

$$G(S) = \frac{a(S)}{b(S)} \Rightarrow b(S) = 0 \Rightarrow \text{معادله مشخصه}$$

$$b(S) = (S - S_i) = 0$$

 که در آن S_i قطب‌های حقیقی یا مختلط تابع تبدیل است.

در فضای حالت:

$$G(s) = c \cdot \frac{\text{adj}(SI - A)}{|SI - A|} \cdot B + D$$

معادله مشخصه در حالت فوق همچنان مخرج تابع تبدیل خواهد بود:

$$|SI - A| = 0$$

 با حل معادله بالا که معادله مشخصه سیستم هست مقادیر ویژه ماتریس A بدست می‌آید پس نتیجه می‌شود:

 قطب‌های تابع تبدیل، زیر مجموعه‌ای از مقادیر ویژه ماتریس A است.

 مثال (۷-۳): در سیستم زیر مطلوب است محاسبه قطب‌های تابع تبدیل و مقادیر ویژه ماتریس A .

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = [1 \ 1 \ 0]x$$

$$(SI - A) = \begin{bmatrix} S & -1 & 0 \\ 0 & S & -1 \\ 6 & 11 & S+6 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$|SI - A| = 0 \Rightarrow S^3 + 6S^2 + 11S + 6 = (S+1)(S+2)(S+3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_1 = -1 \\ S_2 = -2 \\ S_3 = -3 \end{cases}$$

مقادیر ویژه ماتریس A

برای بدست آوردن تابع تبدیل

$$G(s) = c \cdot (AS - I)^{-1} \cdot B + D$$

$$adj(SI - A) = \begin{bmatrix} S^2 + 6S + 11 & S + 6 & 1 \\ -6 & S^2 - 6S & S \\ -6S & -11S - 6 & S^2 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \left[[1 \ 1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} s^2 + 6s + 11 & s + 6 & 1 \\ -6 & s^2 - 6s & s \\ -6s & -11s - 6 & s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \times \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \Rightarrow$$

$$G(s) = \left[[1 \ 1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{bmatrix} \right] \times \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1+s}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} s_1 = -2 \\ s_2 = -3 \end{cases}$$

نمودار حالت (State-Diagram) SD :

نمودار حالت شکل تعمیم یافته‌ای از نمودار گذر سیگنال برای نمایش معادلات حالت و معادلات دیفرانسیل یک سیستم است.

مزایای نمودار حالت:

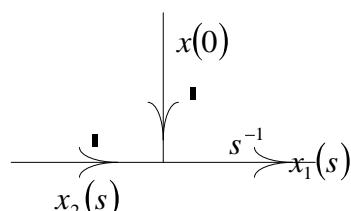
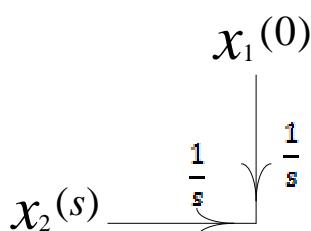
۱- مستقیماً توسط معادله دیفرانسیل سیستم قابل رسم است.

- ۲- تابع تبدیل را می‌توان از نمودار حالت بدست آورد.
- ۳- معادله‌های حالت و معادله‌های خروجی را می‌توان از نمودار حالت بدست آورد.
- ۴- نمودار حالت را می‌توان از تابع تبدیل بدست آورد.
- ۵- تمام قواعد نمودار گذرهای سیگنال در مورد آن صدق می‌کند.

فرض کنیم x_1 و x_2 متغیرهای حالت برای یک سیستم باشند و داشته باشیم

$$x'_1 = x_2$$

$$x'_1 = \frac{dx_1}{dt} = x_2 \Rightarrow \ell \Rightarrow Sx_1(s) = x_2(s) + x_1(0) \Rightarrow x_1(s) = \frac{x_2(s) + x_1(0)}{S}$$



تبدیل معادله دیفرانسیل به نمودار حالت:

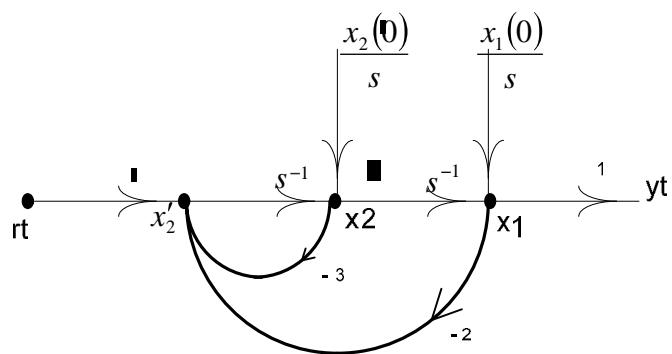
مثال (۳-۸): معادله دیفرانسیل سیستمی به طور زیر است نمودار حالت را برای سیستم فوق رسم کنید.

ابتدا معادله دیفرانسیل را بر حسب بالاترین مرتبه مشتق حل می‌کنیم. سپس متغیرهای حالت را تعریف کرده و با آنها معادله را بازنویسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) &= r(t) \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -3 \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) + r(t) &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 = y(t) \\ x_2 = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{x}_1 \end{cases}$$

متغیرهای حالت را بعنوان گره قرار می‌دهیم و ارتباط بین آنها را مانند دیاگرام بالا برقرار می‌کنیم. اولین گره سمت راست را گره خروجی فرض کرده و ارتباط بین آن و متغیرهای حالت را برقرار می‌کنیم.

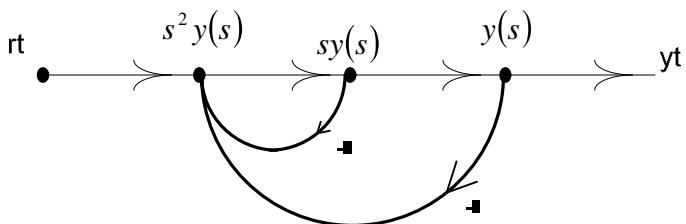


تبدیل نمودار حالت به تابع تبدیل:

برای این کار کافی است مقادیر اولیه را در نمودار حالت حذف کنیم و با استفاده از فرمول بهره میسون نسبت

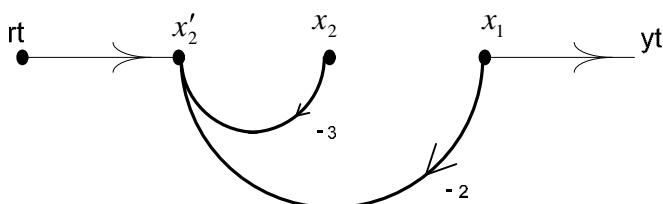
$$G(s) = \frac{y(s)}{R(s)}$$

$$\frac{y(s)}{R(s)} = \frac{pi\Delta i}{\Delta} = \frac{s^{-2} \times 1}{1 - (-3s^{-1} - 2s^{-2})} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$



تبدیل نمودار حالت به معادلات حالت:

- ۱- شرایط اولیه و شاخه های انتگرال گیر با بهره s^{-1} را حذف می‌کنیم.
- ۲- گره هایی را که مشتق های متغیرهای حالت را نشان میدهد به عنوان گره خروجی در نظر می گیریم.
- ۳- متغیرهای حالت و ورودی ها را به عنوان متغیرهای ورودی در نمودار حالت در نظر می گیریم.
- ۴- با استفاده از فرمول بهره میسون حاصل تک تک خروجی ها (مشتق متغیرهای حالت) را بدست می آوریم.



$$x'_1 = x_2$$

$$x'_2 = -3x_2 - 2x_1 + rt$$



فصل چهارم

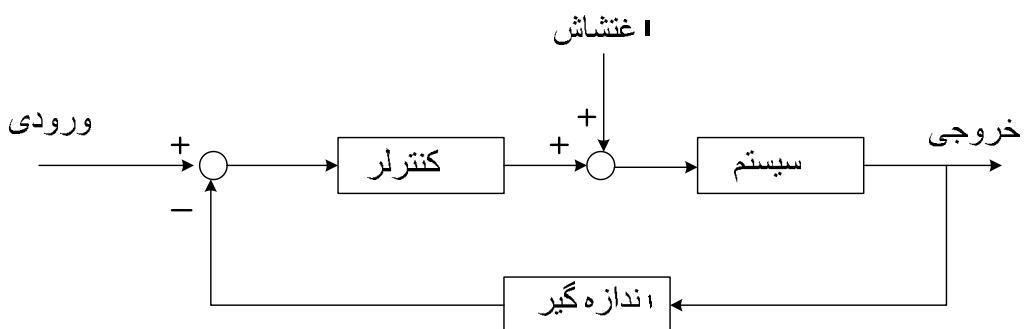
مشخصات سیستم کنترل پسخورده

همانطور که در مباحث قبلی بررسی شده است، سیستمهای کنترلی به دو شکل حلقه باز و حلقه بسته مورد استفاده قرار می‌گیرند. در بخش اول مقایسه این دو سیستم را بطور کلی دیدیم. در این قسمت می‌خواهیم مزايا و خصوصيات یك سیستم کنترلی حلقه بسته را دقیق‌تر مورد مطالعه قرار دهیم. بطور کلی خصوصيات اصلی فیدبک عبارتند برای یك سیستم حلقه بسته نمونه مانند شکل زیر عبارتند از:

۱- کاهش اثر اغتشاش

۲- کاهش حساسیت سیستم به تغییرات بهره

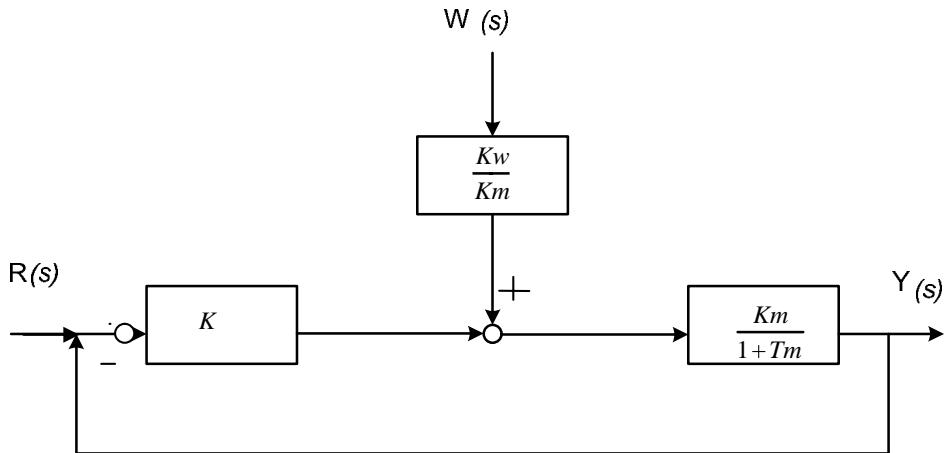
۳- بهبود پاسخ گذرا



۱- کاهش اثر اغتشاش:

مثال ۱-۴) بررسی اثرات فیدبک روی کنترل سرعت موتور جریان مستقیم با فرض اینکه $L_a \cong 0$

ب) سیستم حلقه بسته : با کنترل جریان آرمیچر



$$\frac{k.k_m}{1+k.k_m+T_{m,S}}R(s) + \frac{k_w}{1+k.k_m+T_{m,S}}W(s)$$

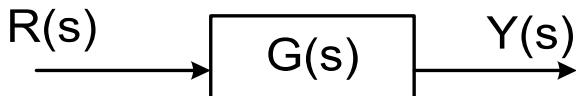
$$\Rightarrow y_{class} = \lim_{s \rightarrow 0} SY(s) = \frac{K \cdot K_m}{1 + K \cdot K_m} \cdot r + \frac{K_w}{1 + K \cdot K_m} \cdot w$$

با مقایسه خروجی در حالت مانا در دو سیستم فوق مشاهده می شود که تاثیر اغتشاش روی سیستم حلقه بسته در حالت مانا با ضریب $y_{class} = \frac{1}{1+K.K_m}$ کاهش می یابد که برای سیستم کنترلی مزیت زیادی محسوب می شود.

- کاهش حساسیت سیستم به تغییرات بهره:

تعريف: حساسیت سیستم نسبت تغییر تابع تبدیل سیستم به تغییر تابع تبدیل فرآیند (یا تغییر یک پارامتر فرآیند) در ازای یک تغییر افزایشی کوچک است. حساسیت یک تابع به پارامتر x با فرض کوچک بودن تغییرات بصورت زیر

مثال ۴-۲) برای یک سیستم حلقه باز، حساسیت سیستم را نسبت به تغییرات تابع تبدیل بدست آورید.



$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = G(s) \quad \Rightarrow \quad S_{G(s)}^{T(s)} = \frac{G(s)}{T(s)} \times \frac{\partial T(s)}{\partial G(s)} = 1$$

مثال ۴-۳) برای یک سیستم حلقه بسته، حساسیت سیستم را نسبت به تغییرات تابع تبدیل بدست آورید.

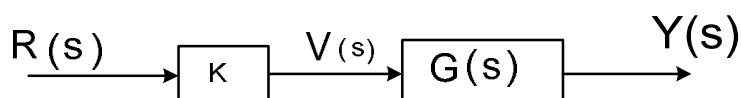
$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s).H(s)}$$

$$S_{G(S)}^{T(s)} = \frac{G(s)}{T(s)} \times \frac{\partial T(s)}{\partial G(S)} = \frac{1+G(s).H(s)-G(s).H(s)}{[1+G(s).H(s)]^2} = \frac{\frac{G(s)}{G(s)}}{\frac{1+G(s).H(s)}{1+G(s).H(s)}} \times \frac{1}{[1+G(s).H(s)]^2} = \frac{1}{1+G(s).H(s)}$$

- ۳ -

مثال ۴-۴) در موتور جریان مستقیم با تحریک آرمیچر و فرض $La = 0$ پاسخ خروجی را در حالت حلقه باز و حلقه سسته بدست آورد.

الف) حلقة باز: يا كنترا جريان آرميجن:



$$G(s) = \frac{Y(s)}{V_o(s)} = \frac{K_m}{1+T_m s}$$

$$\begin{cases} K_m = \frac{\bar{K}}{R_a \cdot B + K_b \cdot \bar{K}} \\ T_m = \frac{R_a J}{R_a \cdot B + K_b \cdot \bar{K}} \end{cases}$$

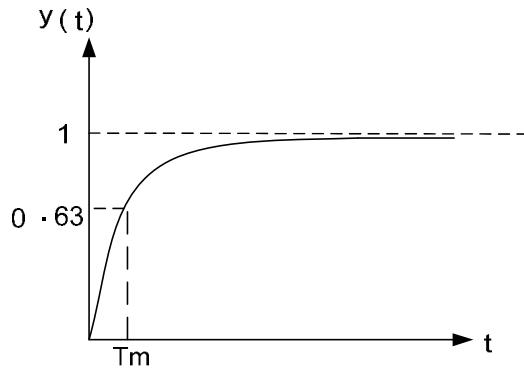
یا فرض، اینکه $r(t)$ یا ورودی $v_a(t)$ پله واحد باشد:

$$V_a(s) = \frac{r \times K}{s}$$

$$Y(s) = \frac{K_r}{s} \cdot \frac{K_m}{1+T_m \cdot s}$$

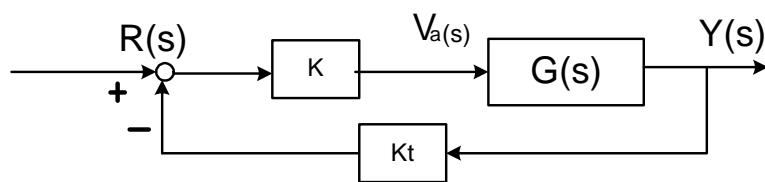
$$\mathcal{L}^{-1} \Rightarrow y(t) = K \cdot K_m \cdot r \left(1 - e^{-t/T_m} \right)$$

شکل پاسخ که منحنی تغییرات سرعت موتور بر حسب زمان است بصورت زیر خواهد بود:



و در آن $T_m = \frac{R_a J}{R_a B + K_b}$ ثابت زمانی موتور است. ملاحظه می شود که برای سریعتر کردن سیستم باید ثابت زمانی را کاهش داد ولی هیچ پارامتر قابل کنترلی در آن وجود ندارد.

ب) سیستم حلقه بسته:

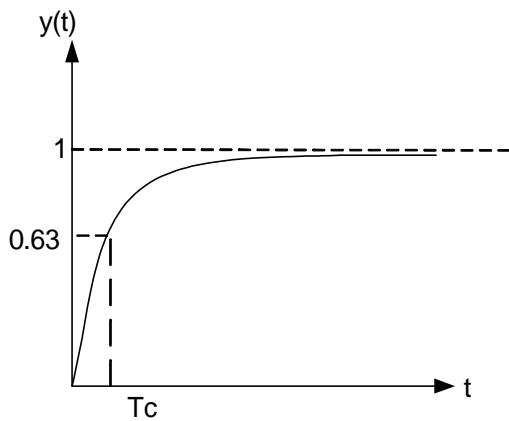


$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K \cdot K_m}{1+T_m \cdot S}}{1 + \frac{K \cdot K_m \cdot K_t}{1+T_m \cdot S}} = \frac{K \cdot K_m}{1 + K \cdot K_m \cdot K_t + T_m \cdot S} = \frac{\frac{K \cdot K_m}{1+K \cdot K_m \cdot K_t}}{1 + \frac{T_m}{1+K \cdot K_m \cdot K_t} \cdot S}$$

$$K_c = \frac{K \cdot K_m}{1 + K \cdot K_m \cdot K_t}$$

$$T_c = \frac{T_m}{1 + K \cdot K_m \cdot K_t} \Rightarrow T_c < T_m$$

$$T(s) = \frac{R \cdot K_c}{s \cdot [1 + T_c \cdot S]} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \Rightarrow y(t) = K_c \cdot R \left(1 - e^{-t/T_c} \right)$$



همانطور که در شکل دیده می شود ثابت زمانی موتور به مقدار T_c تغییر کرده است که می توان آنرا توسط مقادیر K یا K_c را تغییر داد. البته برای کاهش آن بهتر است که K را کاهش دهیم تا اثر کمتری بر بهره سیستم داشته باشد. زیرا با افزایش K_c علاوه بر کاهش ثابت زمانی، بهره سیستم نیز کاهش می یابد.

فصل پنجم

پاسخ زمانی سیستمهای کنترل

تحلیل سیستم‌های کنترل در حوزه زمان

باسخ زمانی، یک سیستم دارای دو بخش است:

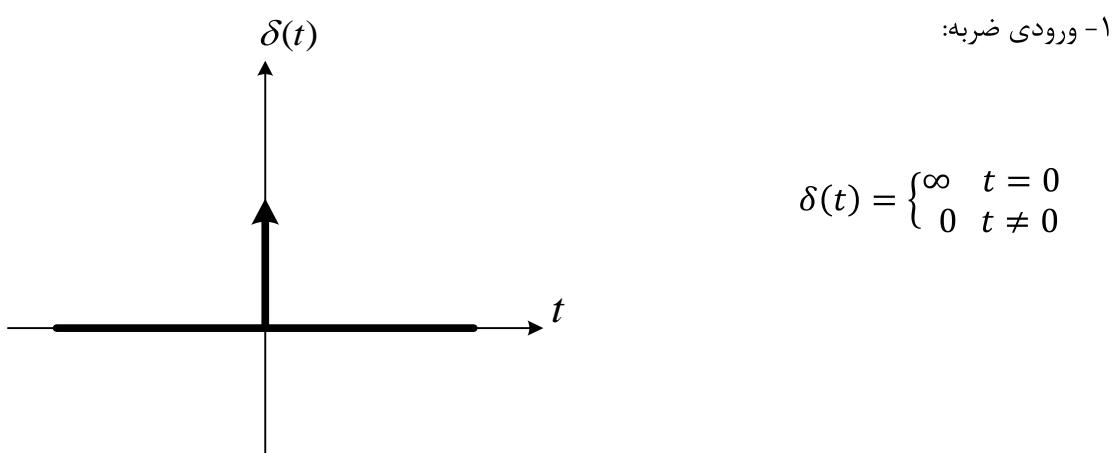
- پاسخ گذرا
 - پاسخ مانا

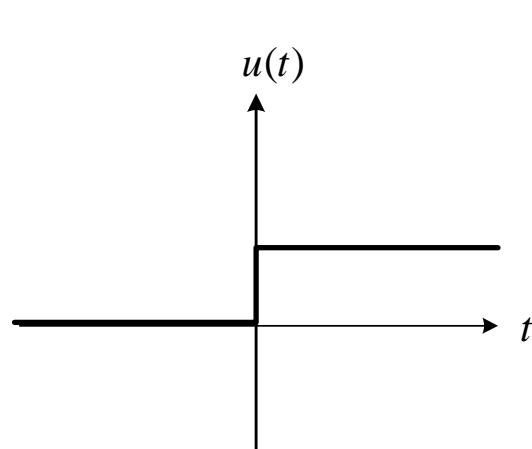
$$C(t) = C_t(t) + C_{ss}(t) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} C_t(t) = 0$$

در سیستم های واقعی به دلیل وجود لختی، جرم و انداختهای خروجی نمیتواند تغییرات ناگهانی ورودی را آن‌اگاهانی پاسخ دهد. این دنبال کند به همین دلیل حالت‌های گذرا در سیستم ایجاد می‌شود. در مطالعه یک سیستم کنترل بررسی پاسخ گذرا و پاسخ مانا هردو اهمیت دارند.

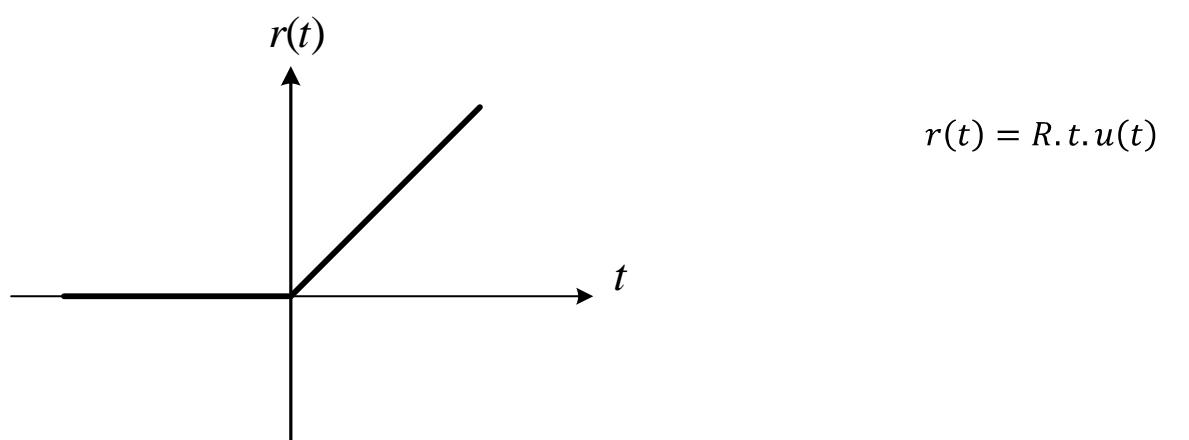
با مطالعه پاسخ گذرا سرعت سیستم وحداکثر جهش خروجی و با مطالعه پاسخ مانا خطای ماندگار مورد بررسی قرار میگیرد در مسائل مختلف عموماً مشخصات بر حسب دو پاسخ داده می شود و ما با طراحی کنترل کننده پاسخ را به شکلی تعیین می کنیم که موارد خواسته شده را تامین کند.

سگنهای آزمون ورودی برای پاسخ زمانی سیستم های کنترل در حوزه زمان:

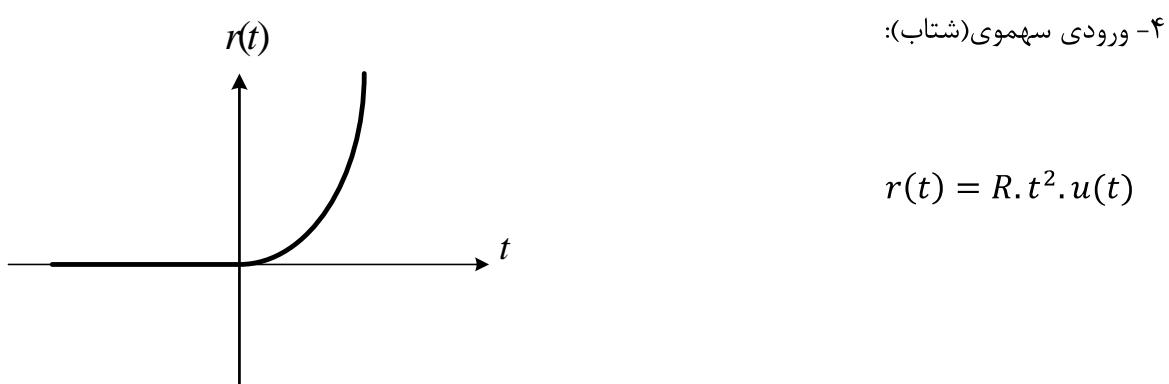




$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



$$r(t) = R \cdot t \cdot u(t)$$



$$r(t) = R \cdot t^2 \cdot u(t)$$

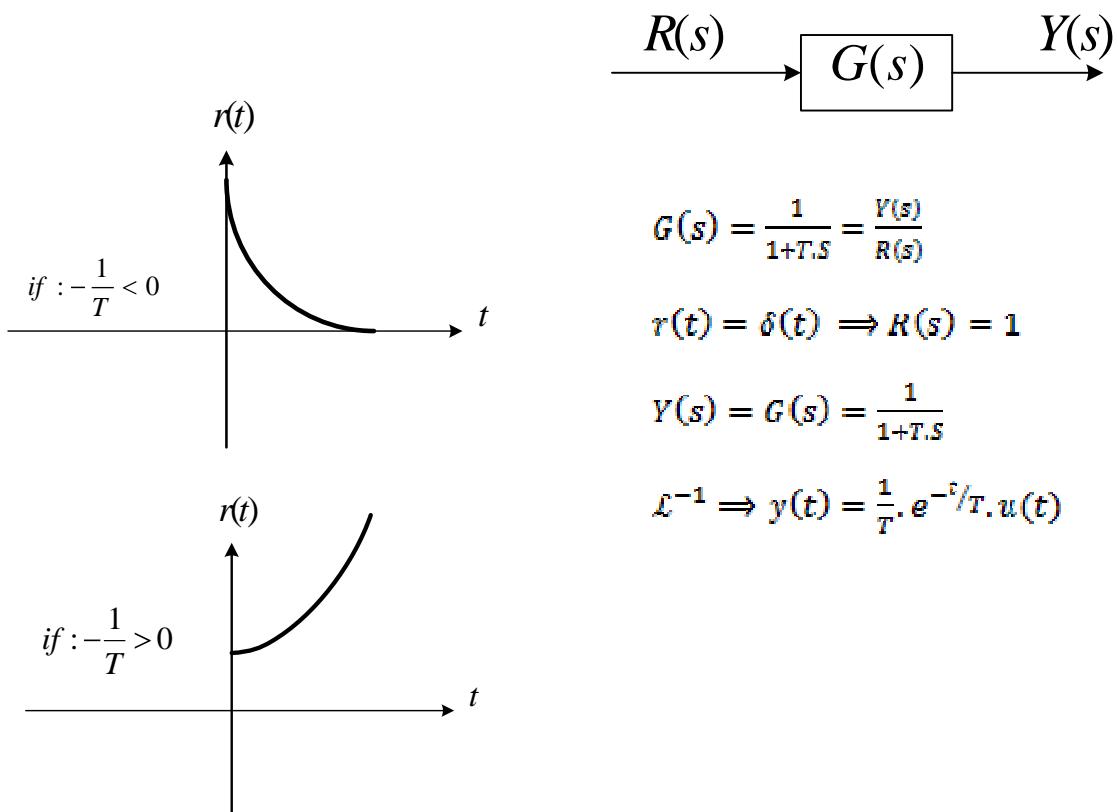
تحلیل پاسخ زمانی سیستمهای کنترل براساس موقعیت قطب ها:

اگر تابع تبدیل یک سیستم را بصورت زیر در نظر بگیریم:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^{\lambda} (a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + a_2 s^{m-2} + \dots + a_m)}$$

آنگاه این سیستم دارای n صفر، $m + \lambda$ قطب که m قطب غیر صفر و λ قطب واقع در صفر است. برای علی بودن این سیستم همواره باید $m + \lambda \geq n$ باشد. در این سیستم m مرتبه سیستم و λ نوع سیستم نامیده می شود. همچنین معادله $a(s) = 0$ معده مشخصه سیستم است که موقعیت قطبها را به ما می دهد.

پاسخ ضربه به یک سیستم مرتبه اول:

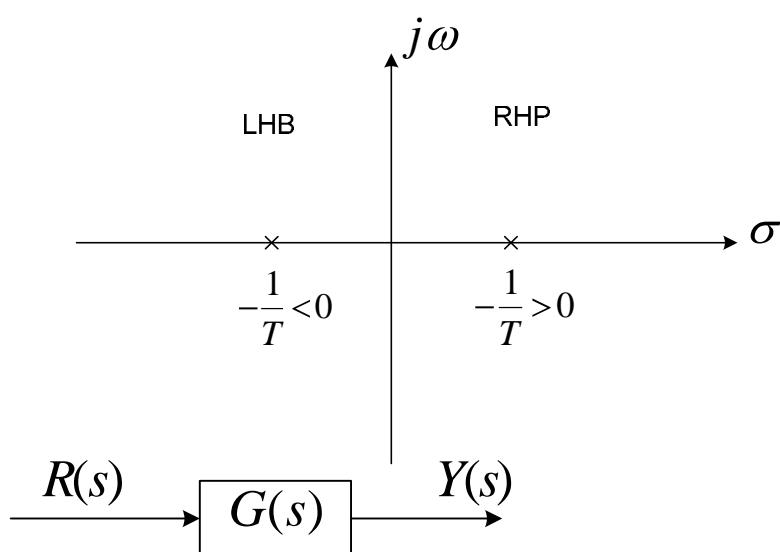


ثابت زمانی: مدت زمانی که طول می کشد تا پاسخ به ۶۳٪ مقدار نهایی خود برسد را ثابت زمانی می گوییم.

همانطور که در سیستم بالا دیده می شود ثابت زمانی T است که عکس فرکانس قطب می باشد.

نمایش قطبها در صفحه i مختلط

قطبها فرکانس‌های حقیقی یا مختلط هستند که در حالت کلی بصورت $s = \sigma \pm j\beta$ تعریف می‌شوند و می‌توان آنها را در یک صفحه به نام صفحه مختلط s رسم کرد. در شکل زیر قطب سیستم مرتبه یک بالا را در دو حالت نمایش داده شده است. ملاحظه می‌شود که زمانی سیستم به یک مقدار ثابت میل می‌کند که قطب آن در سمت چپ محور jw یا (LHP) باشد



پاسخ پله به یک سیستم مرتبه اول:

یک سیستم مرتبه اول مانند شکل مقابل مفروض است

پاسخ پله این سیستم بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$G(s) = \frac{1}{1+Ts} = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

$$r(t) = u(t) \Rightarrow R(s) = \frac{R}{s}$$

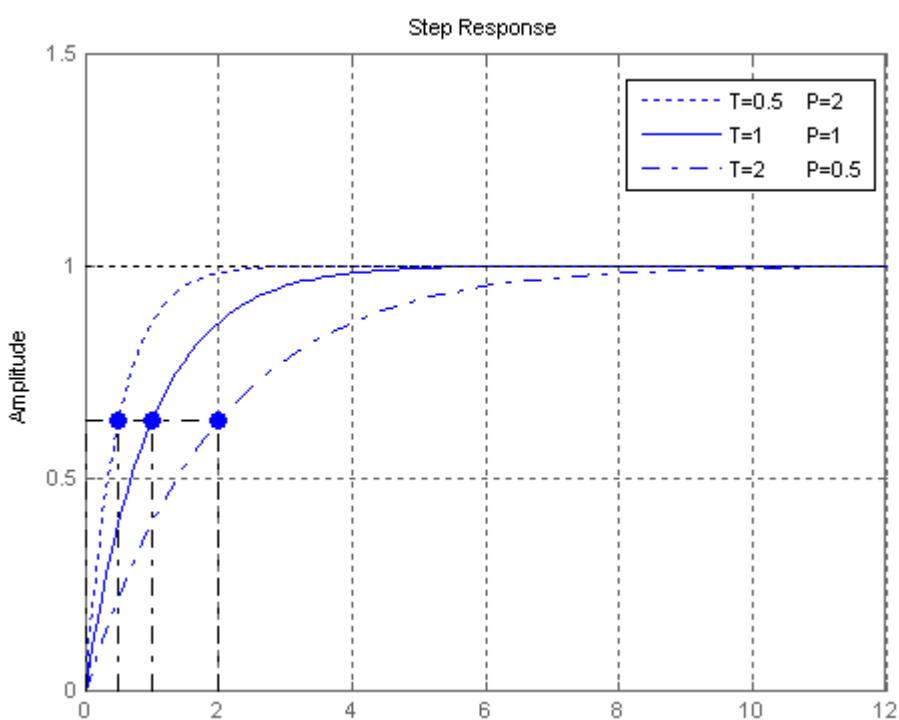
$$Y(s) = G(s) = \frac{R}{s(1+Ts)}$$

$$f^{-1} \Rightarrow y(t) = R \cdot (1 - e^{-t/T}) \cdot u(t)$$

برای سیستم فوق دو ویژگی مهم وجود دارد که عبارتند از ثابت زمانی و مقدار حالت مانا. ثابت زمانی که عکس قطب است و برابر T می‌باشد و مقدار حالت مانا بصورت زیر بدست می‌آید:

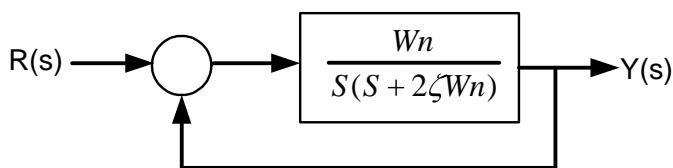
$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sy(s) = R$$

مثال ۱-۵) در شکل زیر پاسخ زمانی سیستم مرتبه اول را با قطب‌های مختلف مشاهده می‌کنیم. ($R=1$)



مشاهده می شود که هرچه قطب کوچکتر باشد ثابت زمانی آن بزرگتر است و سیستم کندتر عمل می کند و هرچه قطب بزرگتر باشد سیستم سریعتر است.

پاسخ سیستمهای مرتبه دوم به ورودی پله:



$$G(s) = \frac{y(s)}{R(s)} = \frac{W_n^2}{s^2 + 2\zeta W_n + W_n^2}$$

$$\text{معادلة متميزة : } S^2 + 2\xi w_n S + w_n^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} S_1 = -\xi w_n + jw_n\sqrt{1-\xi^2} \\ S_2 = -\xi w_n - jw_n\sqrt{1-\xi^2} \end{cases}$$

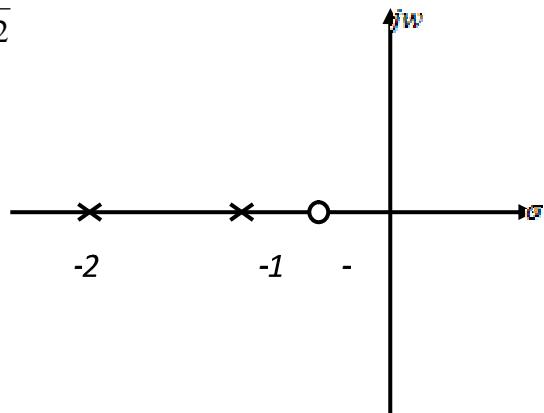
الف) اگر $1 < k$ باشد، دو ریشه حقیقی داریم :

$$G(s) = \frac{2S+1}{S^2 + 3S + 2} = \frac{2(S + \frac{1}{2})}{(S+1)(S+2)} = -\frac{1}{S+1} + \frac{3}{S+2}$$

$$\text{قطبها } \begin{cases} s = -1 \\ s = -2 \end{cases} \quad s = -0.5 \text{ صفر}$$

$$R(S) = 1$$

$$Y(s) = R(S) * G(S) \Rightarrow y(t) = -e^{-t} + 3e^{-2t}$$



ب) اگر $|k| > 1$ باشد، سیستم دارای دو ریشه مختلط خواهد بود:

$$S = -\sigma \pm jWd \quad \longrightarrow \quad \sigma = \zeta Wn \quad \longrightarrow \quad Wd = Wn \sqrt{1 - \zeta^2}$$

پاسخ سیستم مرتبه دوم برای ورودی پله واحد با فرض $1 < |\zeta|$:

$$y(s) = R(s).G(s) = \frac{w_n^2}{s(s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2)} = \frac{w_n^2}{s(s + \delta - jWd)(s + \delta + jWd)}$$

$$Y(s) = \frac{w_n^2}{s((s+\delta)+jWd)((s+\delta)-jWd)} = \frac{1}{s} - \frac{(s+\delta)}{(s+\delta)^2 + w_d^2} - \frac{\delta}{(s+\delta)^2 + w_d^2}$$

$$Y(t) = U(t) - e^{-\delta t}(\cos Wd.t + \frac{\delta}{Wd}\sin Wd.t)$$

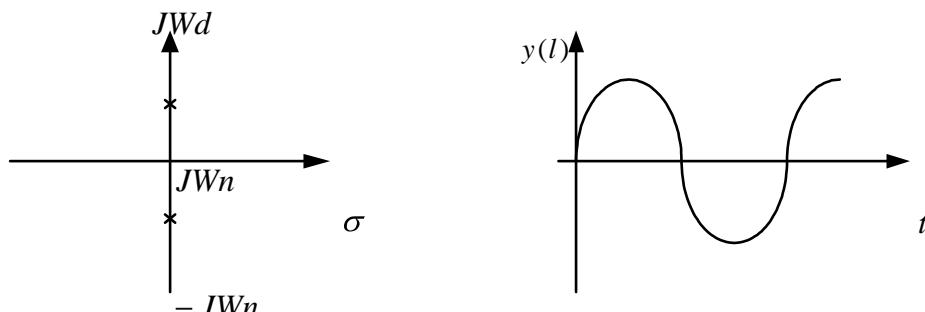
تمرین ۱-۵) نشان دهید که پاسخ فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت؟

$$Y(t) = 1 - \frac{e^{-\delta t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(w_n \sqrt{1-\zeta^2} \cdot t + \cos^{-1} \zeta)$$

چند تعریف:

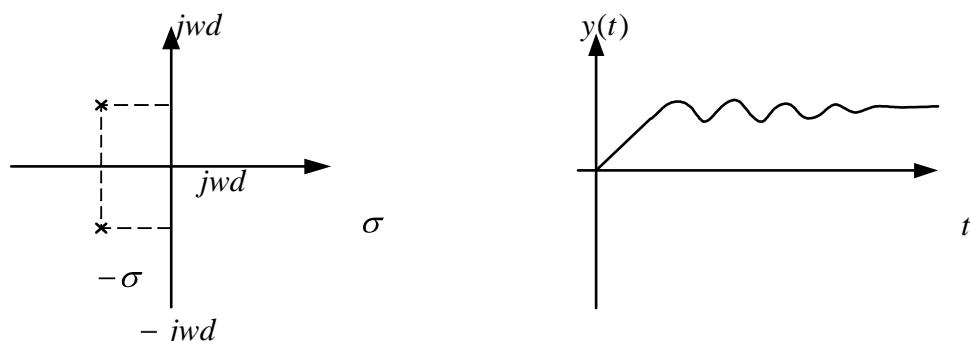
کی : نسبت میرا بی σ فرکانس نامیرا ν : فرکانس میرا ν_m

$$S^2 + Wn^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad S = \pm JWn \quad : \zeta = 0 \text{ کے فرض این کہ}$$



(یاسخ نوسانی، خالص)

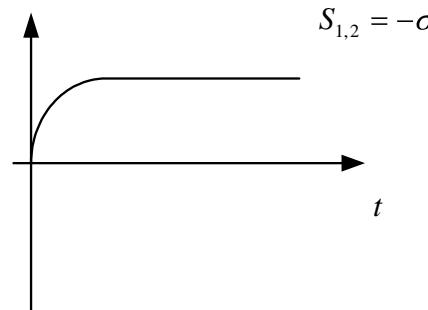
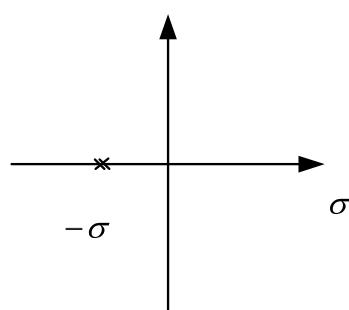
$$S_{1,2} = -\sigma + JWd \quad : 0 < \zeta < 1$$



(پاسخ زیر میرایی یا نوسانی میرا)

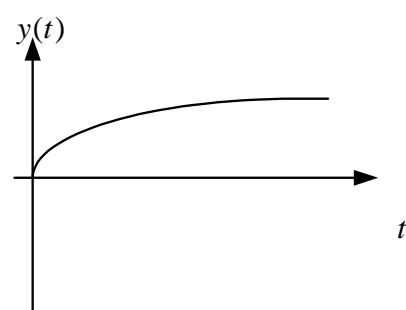
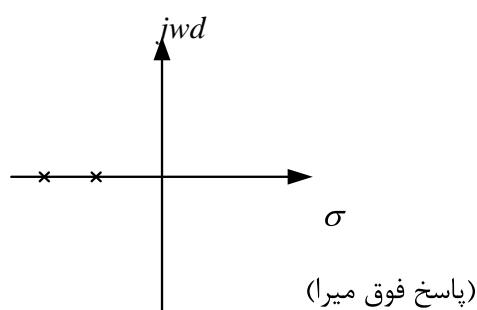
PowerEn.ir

با فرض اینکه $\zeta = 1$ **و** $y(t)$ **جواب** jwd **است**



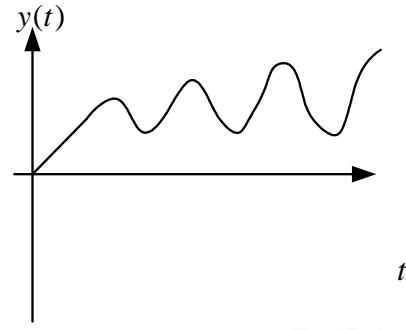
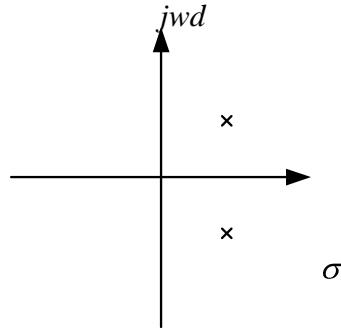
(پاسخ میراپی بحرانی)

$$S_{1,2} = \left\{ \begin{array}{l} -\sigma + wd \\ -\sigma - wd \end{array} \right. \quad \text{با فرض اینکه } \zeta > 1$$



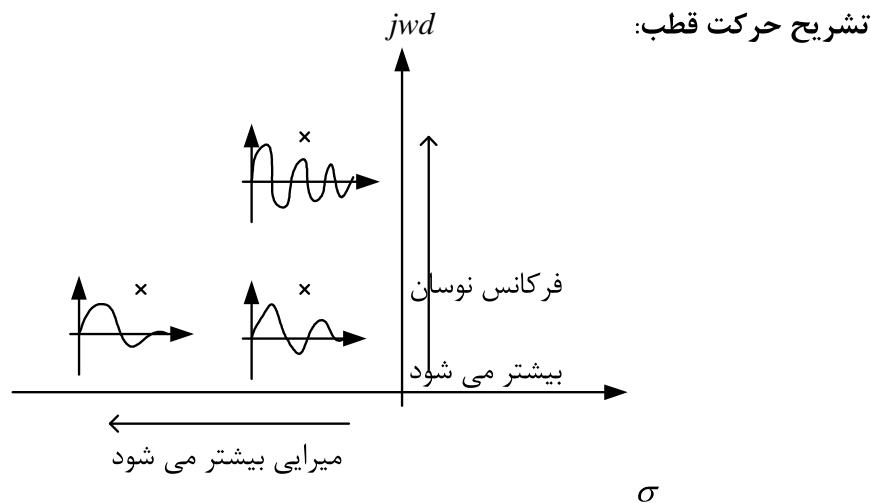
(پاسخ فوق میرا)

$$S_{1,2} = \sigma \pm jwd \quad : -1 < \zeta < 0 \quad \text{با فرض اینکه}$$

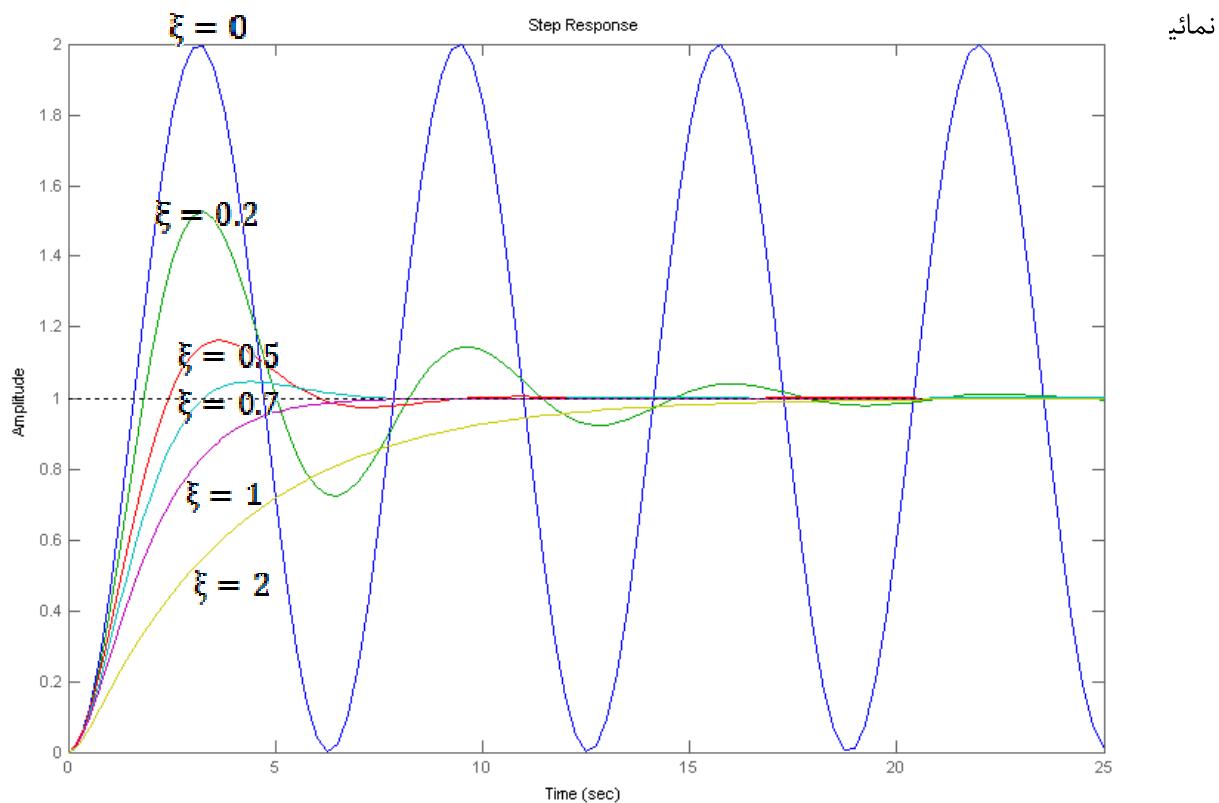


76

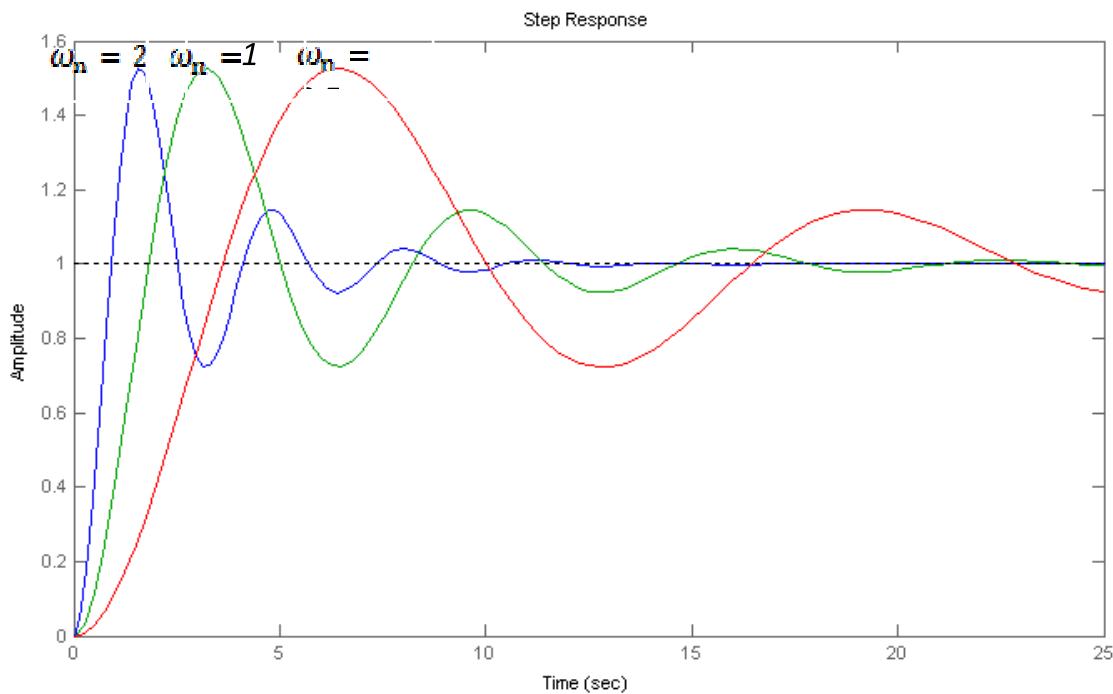
(پاسخ نا میرای منفی)



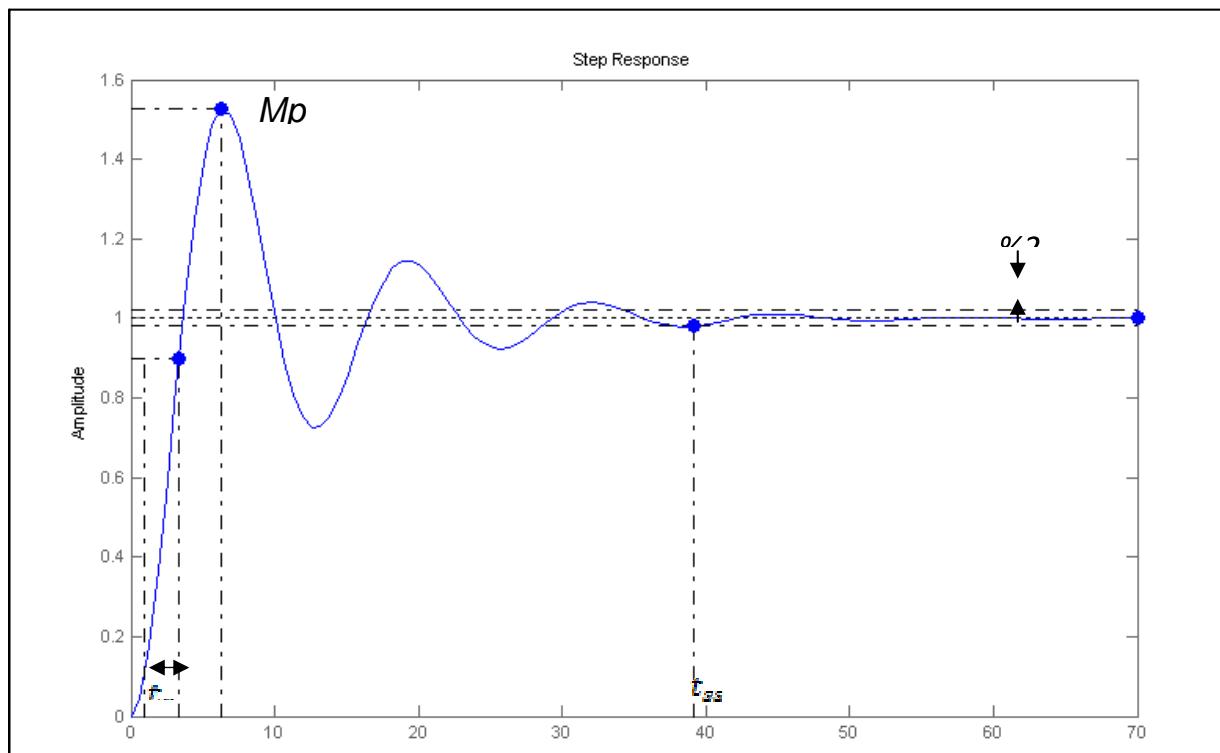
مثال ۵-۲) برای سیستم مرتبه ۲ استاندارد با $w_n = 1$ و ورودی پله پاسخ خروجی را با چند مقدار ξ رسم نمائی



مثال ۳-۵) برای سیستم مرتبه ۲ استاندارد با $\zeta = 0.5$ و ورودی پله پاسخ خروجی را با چند مقدار ω_n رسم



ویژگیهای پاسخ سیستم مرتبه دوم به ورودی پله واحد:



tp : زمان اوج (زمانی است که سیستم به اولین ماکزیمم خود می‌رسد).

Mp : جهش ماکزیمم (فراجهش) تفاوت مقدار نخستین اوج جهش از مقدار واحد را ماکزیمم جهش می‌نامند.

$$\% Mp = \frac{y(tp) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100$$

ts : زمان استقرار (مدت زمانی است که طول می‌کشد تا پاسخ به محدوده پاسخ نهایی برسد و در آن محدوده

باقي بماند، محدوده پاسخ نهایی باندی است که مقدار آن 1% یا 2% یا 5% مقدار نهایی است).

t_r : زمان خیز: مدت زمانی است تا طول می‌کشد تا خروجی از 10% تا 90% درصد مقدار نهائی خود برسد. (معمولًا از 0% تا 100% درصد در نظر می‌گیریم).

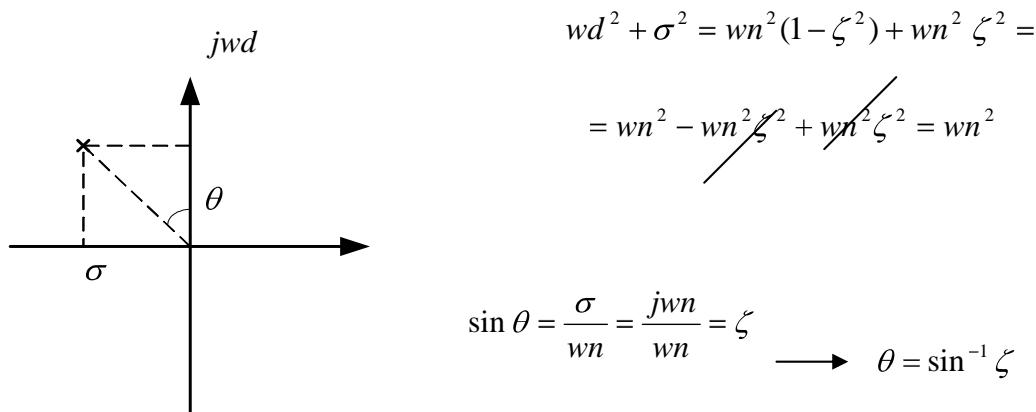
اثبات می‌شود که برای یک سیستم مرتبه دو با ورودی پله واحد ویژگیهای پاسخ از روابط زیر به دست می‌آید:

$$tr = \frac{\pi - \beta}{wd} \quad \beta = \tan^{-1} \frac{wd}{\sigma} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$$

$$tp = \frac{\pi}{wd} \quad Mp = e^{-(\frac{\sigma}{wd})\pi} = e^{-(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}})\pi}$$

$$ts \Big|_{1\%} = \frac{4.6}{\sigma} \quad ts \Big|_{2\%} = \frac{4}{\sigma} \quad ts \Big|_{5\%} = \frac{3}{\sigma}$$

jwd

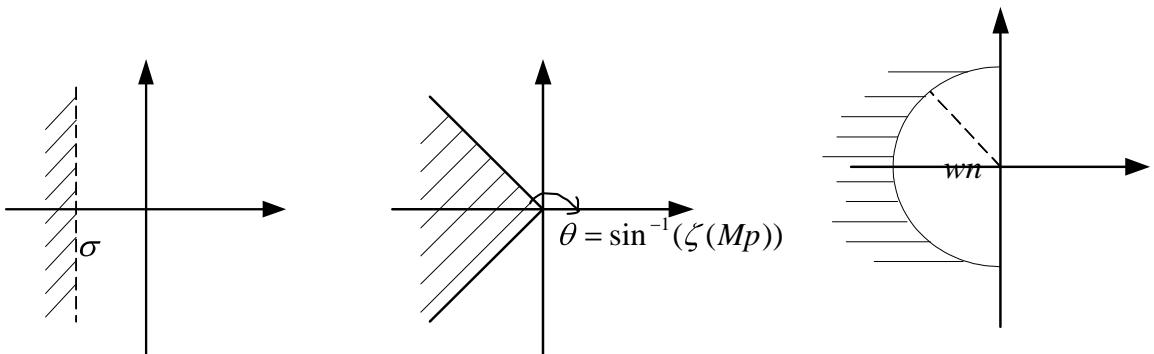


نتایجی از روابط بالا برای طراحی سیستم با قطب‌های مورد نظر :

$$wn \geq \frac{\pi - \beta}{\sqrt{1 - \zeta} \times tr}$$

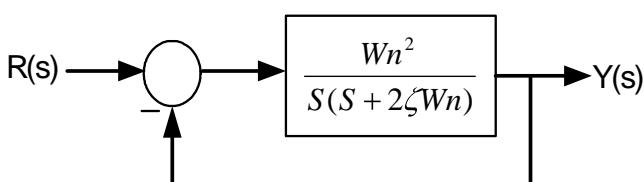
$$\zeta \geq \zeta(Mp)$$

$$\sigma \geq \frac{4.6}{ts}$$



تمرین ۵-۲) مکان هندسی موقعیت قطبها را به گونه‌ای تعیین کنید که $Mp \geq ts \geq 3s \geq 10\%$ باشد؟

مثال ۴-۵) در سیستم زیر مطلوب است محاسبه ts و Mp و tp و tr و



$$Wn = 5 \text{ rad/s}$$

$$\zeta = 0.6$$

$$\sigma = \zeta Wn = 3 \quad Wd = Wn \sqrt{1 - \zeta^2} = 4$$

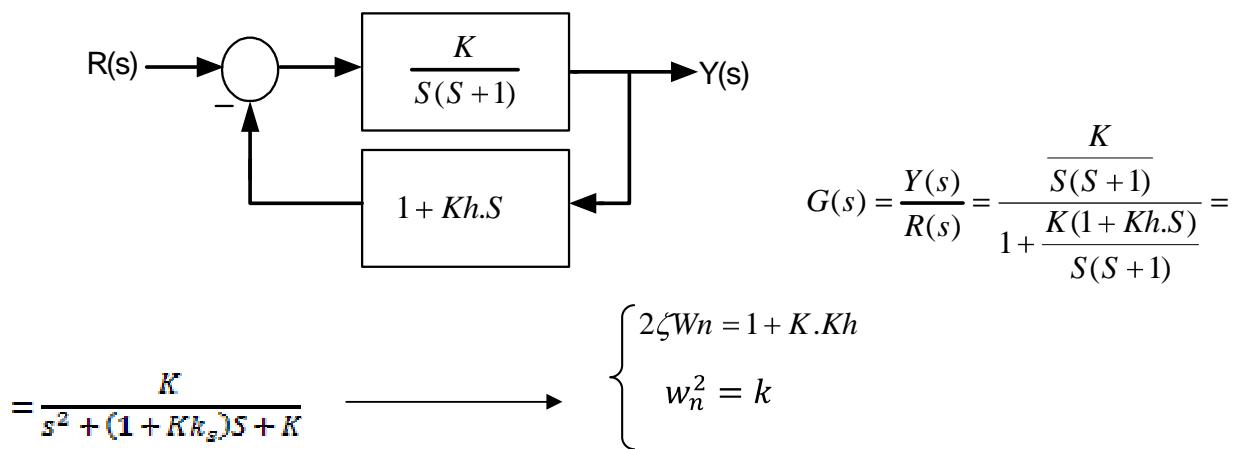
$$tr = \frac{\pi - \beta}{Wd} = \frac{3.14 - 0.93}{4} = 0.55^{(S)} \quad \beta = \tan^{-1} \frac{Wd}{\sigma} = 0.93^{(rad)} \quad tp = \frac{\pi}{Wd} = 0.785^{(S)}$$

$$Mp = e^{-(\frac{\sigma}{Wd})\pi} = 0.095 \quad Mp \% = 9.5\% \quad ts = \frac{4}{\sigma} \Big|_{2\%} = 1.33^{(S)} \quad ts = \frac{3}{\sigma} \Big|_{5\%} = 1^{(S)}$$

مثال ۵-۵) در سیستم مقادیر K و Kh را چنان تعیین کنید که بیشینه جهش برابر با $\frac{1}{2}$ و زمان اوج ۱

ثانیه

شود سپس زمان استقرار را بیابید؟



$$Mp = 0.2 = e^{-(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}})\pi} \rightarrow \zeta = 0.456$$

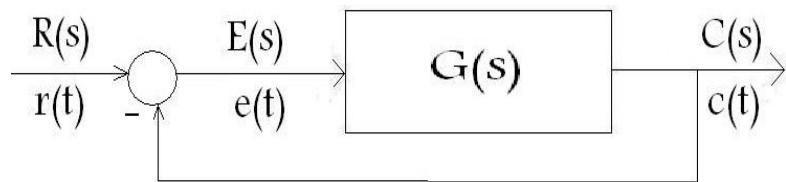
$$tp = \frac{\pi}{Wd} = 1 \rightarrow Wd = 3.14 \rightarrow Wn = \frac{3.14}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 3.53$$

$$w_n^2 = k = 12.6 \quad 2\zeta w_n = 1 + KK_h \quad K_h = \frac{2\zeta W_n - 1}{12.67} = 0.174$$

$$tr = \frac{\pi - \beta}{Wd} = \frac{3.14 - 1.10}{3.14} = 0.65^{(S)} \quad \beta = \tan^{-1}\left(\frac{Wd}{\sigma}\right) = \tan^{-1}(1.95) = 1.10$$

$$ts = \frac{4}{\sigma} \Big|_{2\%} = 2.48^{(S)}$$

خطای حالت مانا در سیستم های کنترل خطی:



تعریف خطای اساس آرایش سیستم:

در صورتی که سیستم دارای فیدبک واحد باشد:

$$e(t) = r(t) - c(t) \Rightarrow E(s) = R(s) - C(s) \Rightarrow E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)}$$

و اگر سیستم دارای فیدبک غیر واحد است، خطای اساس آرایش سیستم را بصورت زیر محاسبه می شود:

$$e(t) = r(t) - b(t) \implies E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - C(s)H(s) \implies E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}$$

نوع سیستم های کنترل خطی:

فرض میکنیم تابع تبدیل حلقه باز در یک سیستم کنترولی بصورت زیر باشد:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{K(1+T_1s)(1+T_2s)\dots(1+T_ms)}{s^l(1+T_ls)(1+T_bs)\dots(1+T_hs)}$$

که در آن همه T_i ها و K ضرایب ثابت هستند. در این سیستم j ، که تعداد قطبها موجود در صفر است، نوع سیستم می باشد.

$$R(s) = \frac{R}{s}$$

خطای حالت مانا به ورودی پله:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{R/s}}{1+G(s).H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{1+G(s).H(s)} = \frac{R}{1+\lim_{s \rightarrow 0} G(s).H(s)}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s).H(s) = K_p \Rightarrow e_{ss} = \frac{R}{1+K_p} \quad \begin{cases} j=0 \Rightarrow K_p = const \Rightarrow e_{ss} = \infty \\ j \geq 1 \Rightarrow K_p = \infty \Rightarrow e_{ss} = 0 \end{cases}$$

خطای حالت مانا به ورودی شبیه:

$$R(s) = \frac{R}{s^2} \Rightarrow e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{s+s.G(s).H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{s.G(s).H(s)}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s.G(s).H(s) = Kv \Rightarrow e_{ss} = \frac{R}{Kv} \quad \begin{cases} j=0 \Rightarrow Kv = 0 \Rightarrow e_{ss} = \infty \\ j=1 \Rightarrow Kv = const \Rightarrow e_{ss} = const \\ j \geq 3 \Rightarrow Kv = \infty \Rightarrow e_{ss} = 0 \end{cases}$$

خطای حالت مانا به ورودی سهموی واحد:

$$R(s) = \frac{R}{s^3} \Rightarrow e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{s^2+s.G(s).H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{s^2.G(s).H(s)}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^2.G(s).H(s) = Ka \Rightarrow e_{ss} = \frac{R}{Ka} \quad \begin{cases} j \leq 1 \Rightarrow Ka = 0 \Rightarrow e_{ss} = \infty \\ j = 2 \Rightarrow Ka = const \Rightarrow e_{ss} = const \\ j \geq 3 \Rightarrow Ka = \infty \Rightarrow e_{ss} = 0 \end{cases}$$

در اصل j تعداد قطبها در نقطه صفر و یا تعداد انتگرال گیرهایی است که در سیستم وجود دارد. لذا اگر در سیستمهای کنترلی از خطا انتگرال گرفته شود خطای حالت ماندگار کاهش می یابد. و این موضوع کاری است که یک کنترل کننده انتگرالی انجام میدهد.

خلاصه مطالب مربوط به خطا

j	K _p	K _v	K _a	خطای ول	خطای شوب	خطای سهی
0	K	0	0	$\frac{R}{1+K}$	0	0
1	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$	∞
2	∞	$\frac{R}{K}$	K	0	0	$\frac{R}{K}$
3	∞	$\frac{R}{K}$	$\frac{R}{K}$	0	0	0

چند نکته:

- سیگنال خطا را همواره با توجه به ارایش سیستم باید تعیین کرد.
- تابع تبدیل $SE(S)$ نباید هیچ ریشه‌ای در سمت راست محور W داشته باشد.
- اگر چند ورودی همزمان به سیستم اعمال شود بر اساس قانون جمع آثار خطای حالت ماندگار برابر مجموع خطاهای هر ورودی است.

محک پایداری راث-هروبنز:

با استفاده از این روش میتوان از تعداد قطب‌های سمت راست محور W برای یک سیستم آگاهی یافت. و به کمک آن پایداری را بررسی کرد:

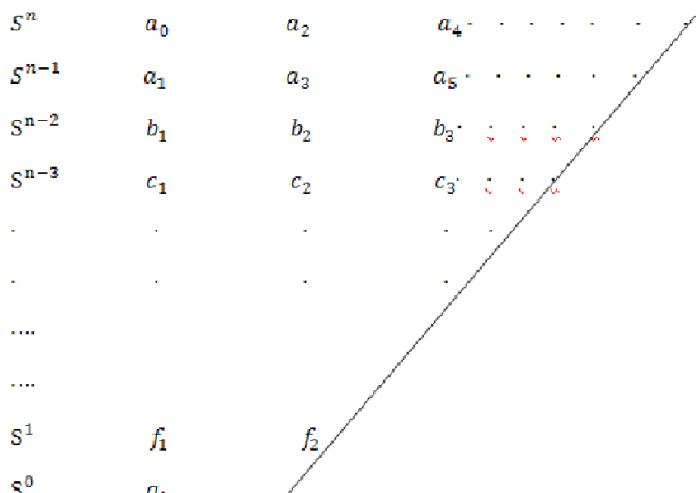
مراحل این محک:

۱- ابتدا معادله مشخصه سیستم را بر حسب توان S مرتب میکنیم:

$$a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + a_2 S^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

۲- شرط لازم برای پایدار بودن سیستم این است که تمامی ضرایب موجود و هم علامت باشند.

۳- اگر شرط فوق برقرار بود آرایه i زیر را تشکیل میدهیم:



که در آن عناصر به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$b_3 = -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

۴- بنابر محک راث تعداد قطبها^{ای} که در سمت راست محور W وجود دارد برابر است با تعداد تغییر علامتها^{ای} که در ستون اول آرایه فوق به وجود می آید. به عبارت دیگر شرط لازم و کافی برای پایداری این است که تمام ضرایب ستون اول آرایه^{ای} فوق هم علامت باشند

مثال ۵-۶) پایداری سیستم زیر را با استفاده از محک راث بررسی کنید

$$S^4 + 2S^3 + 3S^2 + 4S + 5 = 0$$

$$+ S^4: \quad 1 \quad 3 \quad 5$$

$$+ S^3: \quad 2 \quad 4 \quad 0$$

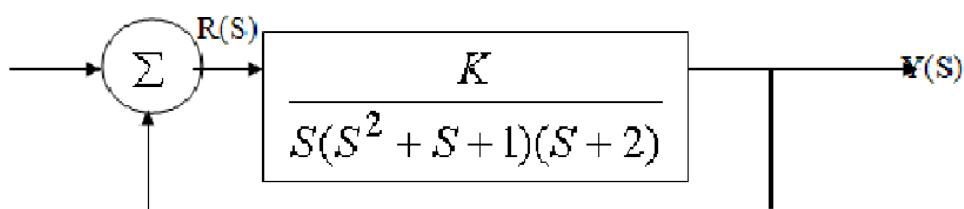
$$+ S^2: \quad 1 \quad 5 \quad 0$$

$$- S^1: -6 \quad 0$$

$$+ S^0: \quad 5$$

چون ۲ بار تغییر علامت داریم پس ۲ قطب در سمت راست محور وجوددارد، پس سیستم ناپایدار است.

تمرین ۳-۵) در سیستم یک محدوده ای برای K و در سیستم ۲ محدوده ای برای k بباید به گونه ای که سیستم ها پایدار شوند.



$$\frac{K}{S^4 + 3S^3 + 3S^2 + 2S + K} = G_{(s)}$$

تابع تبدیل می

$$\frac{K}{(S^3 + S^2 + S)(S + 2)} = \frac{K}{S^4 + 3S^3 + 3S^2 + 2S}$$

شرط پایداری سیستم این است که هیچ قطبی سمت راست محور jW نباشد. بنابر این بر طبق قانون محک راث ستون سمت اول باید مثبت باشند پس:

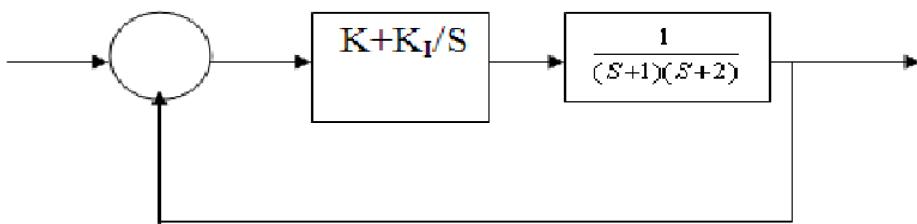
$$\xi^4: \quad 1 \quad 3 \quad K$$

$$S: \quad 3 \quad 2 \quad 0$$

$$S: \quad B_1 = 7/3 \quad B_2 = K$$

$$S: \frac{14/9 - sK}{7} \quad s^0: k$$

$$K < 14.9 \rightarrow 0 < k < 14/9$$



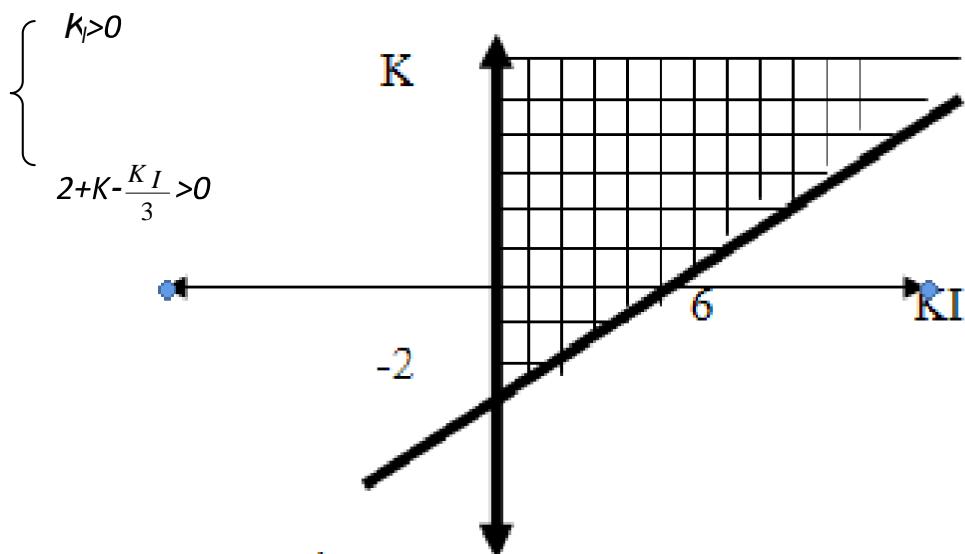
$$\rightarrow \frac{KS + K_I}{S^3 + 3S^2 + 2S} \quad G = \frac{KS + K_I}{S^3 + 3S^2 + S(2+K) + K_I}$$

$$\xi^3: \quad 1 \quad (2+K)$$

$$S^3: \quad 3 \quad K_I$$

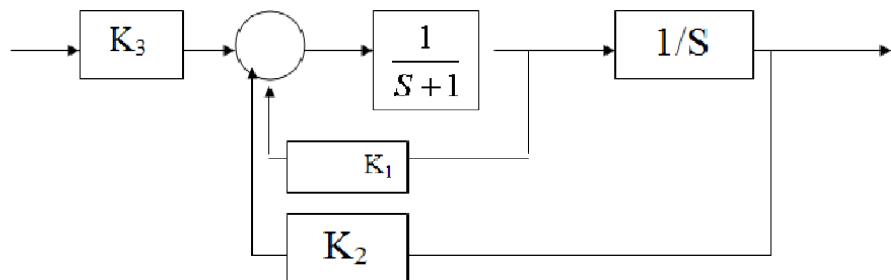
$$S: \quad b = \frac{6+3k-k_i}{3} \quad 0$$

$$S^0: \quad K_I$$



تمرین ۴-۵) در سیستم زیر مقادیر K_1 و K_2 و K_3 را به گونه ای بیابید که خطای حالت ماندگار به ورودی

پله صفر شود؟



حالت های خاص در محک راث هرویتز:

حالات خاص ۱:

اگر ستون اول در یک سطر از آرایه صفر شود، در این حالت به جای صفر یک عدد مثبت خیلی کوچک (مثل ۶) قرار می‌دهیم و با آن آرایه را تکمیل می‌کنیم. شرط پایداری برای این سیستم همچنان این است که همه می‌اعضای ستون اول هم علامت باشند.

مثال ۷-۵) محک پایداری را برای سیستم زیر بررسی کنید

$$S^4 + S^3 + 2S^2 + 2S + 3 = 0$$

$$\begin{array}{ccccc}
 + & S^4 & 1 & 2 & 3 \\
 + & S^3 & 1 & 2 & 0 \\
 + & S^2 & B_1 = 0 & B_2 = 3 & 0
 \end{array}$$

به جای صفر ۶ میگذاریم:

$$\begin{array}{cccc} + & S^2 & B_1 = \varepsilon & B_2 = 3 \\ - & S & C_1 = \frac{\varepsilon - 3}{\varepsilon} & 0 \\ + & S^0 & 3 & 0 \end{array}$$

حالت خاص ۲:

اگر همه ضرایب در یک سطر صفر شوند، آنگاه یک یا چند احتمال زیر برای ریشه‌ها وجود دارد:

- سیستم دارای دو ریشه‌ی حقیقی، مساوی و مختلف العلامه است.
 - سیستم دارای یک یا چند جفت ریشه‌ی موهومی خالص است.
 - سیستم دارای چند جفت ریشه‌ی مزدوج و مختلف است که نسبت به مبدأ مختصات تقارن دارد.
- در این حالت یک معادله به نام معادله‌ی کمکی تشکیل می‌دهیم. ضرائب این معادله از سطر قبل از سطر صفر تعیین می‌شود. از معادله‌ی کمکی مشتق گرفته و ضرائب آن را به جای سطر صفر قرار می‌دهیم و آرایه را با آن تکمیل می‌کنیم.

مثال ۸-۵) محک پایداری را برای سیستم زیر پیدا کنید؟

$$\begin{array}{r}
 S^5 + 4S^4 + 8S^3 + 8S^2 + 7S + 4 = 0 \\
 S^4 \quad 1 \quad 8 \quad 7 \\
 S^3 \quad 4 \quad 8 \quad 4 \\
 S^2 \quad 6 \quad 6 \quad 0 \\
 S^1 \quad 4 \quad 4 \quad 0 \\
 S^0 \quad 0 \quad 0
 \end{array}$$

جواب:

در اینجا است که طبق رابطه گفته شده عمل می‌کنیم:

$$\rightarrow p_a = 4s^2 + 4$$

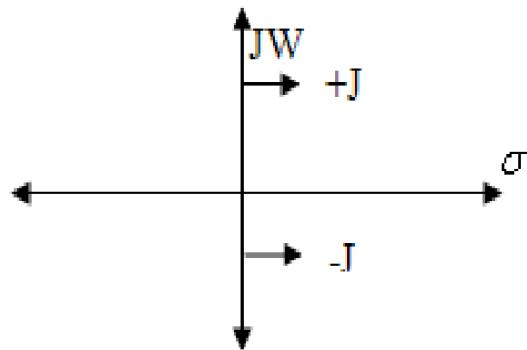
$$\frac{dp}{dt} = 8s + 0$$

$$s^1 \quad 8 \quad 0$$

$$s^0 \quad 4$$

ریشه‌های این معادله بصورت زیر بدست می‌آید:

$$4s^2 + 4 = 0 \longrightarrow 4(s^2 + 1) = 0 \longrightarrow s = \pm j$$



مثال ۹-۵) محک پایداری را در سیستم زیر بررسی کنید؟

$$S^5 + 2S^4 + 240S^3 + 48S^2 + 25S + 50 = 0$$

ξ^5	1	240	25
ξ^4	2	48	50
ξ^3	0	0	0

همان که دیده می شود سطر آخر صفر است و

در اینجاست که طبق رابطه عمل می کنیم:

$$\frac{dP}{dt} = 8s^3 + 96s$$

s^3	8	96	0
s^2	24	-50	0
s^1	112.7	0	0
s^0	-50	0	0

حال با جای گذاری در رابطه داریم:



برای اطلاعات بیشتر از قطب ها اینگونه ریشه ها را حساب می کنیم:

$$p_{a-2s^4+48s^2-50} \quad \text{با در نظر گرفتن یک تغییر متغیر مانند } S^2 = x \text{ داریم:}$$

$$p_a = 2x^2$$

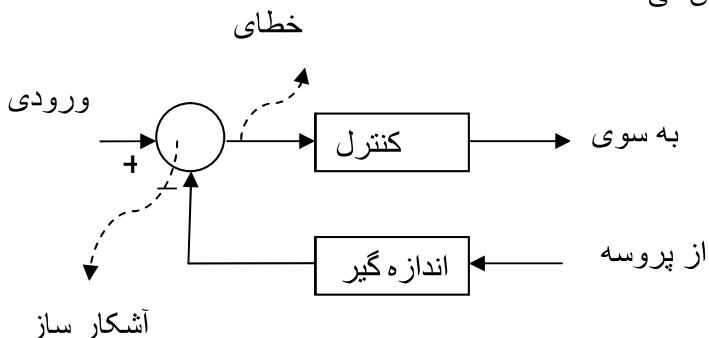


فصل ششم

کنترل کننده ها

کنترل کننده ابزاری است که با توجه به خطای موجود (اختلاف رفتار پروسه با رفتار مطلوب) و با در نظر گرفتن قوانین کنترل که طراح به آن یاد داده است . دستوری را جهت اصلاح و هدایت پروسه به آن اعمال می کند .

شکل زیر ساختار استفاده از یک کنترل کننده را نشان می دهد .



کنترل کننده ها از نظر مورد استفاده به سه دسته الکتریکی ، پنوماتیکی و هیدرولیکی تقسیم می شوند و از نظر قانون کنترل دارای انواع زیر هستند .

(1) دو وضعیتی (*ON – OFF*)

(2) تناسبی (*Proportional*)

(3) انتگرالی (*integral*)

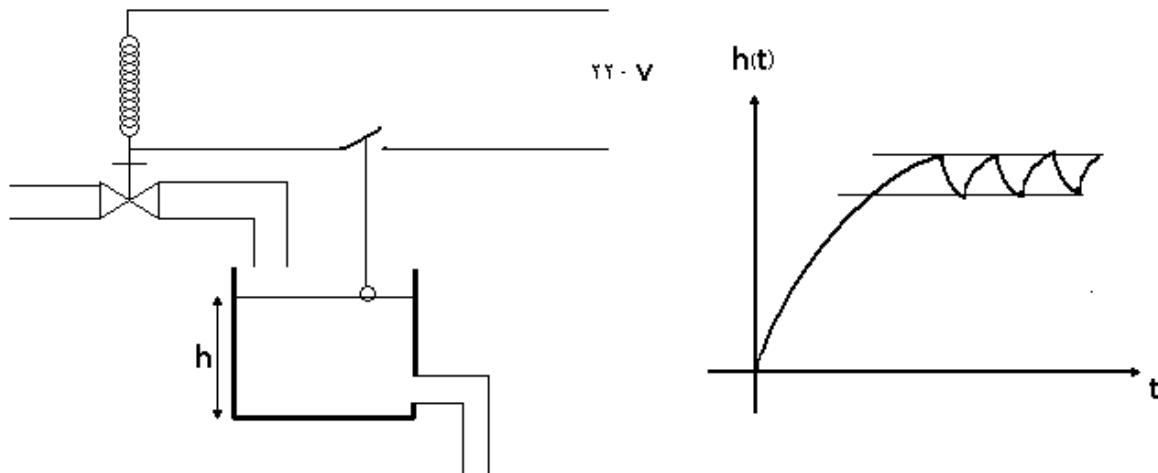
(4) مشتقی (*derivative*)

(5) تناسبی مشتقی *PD*

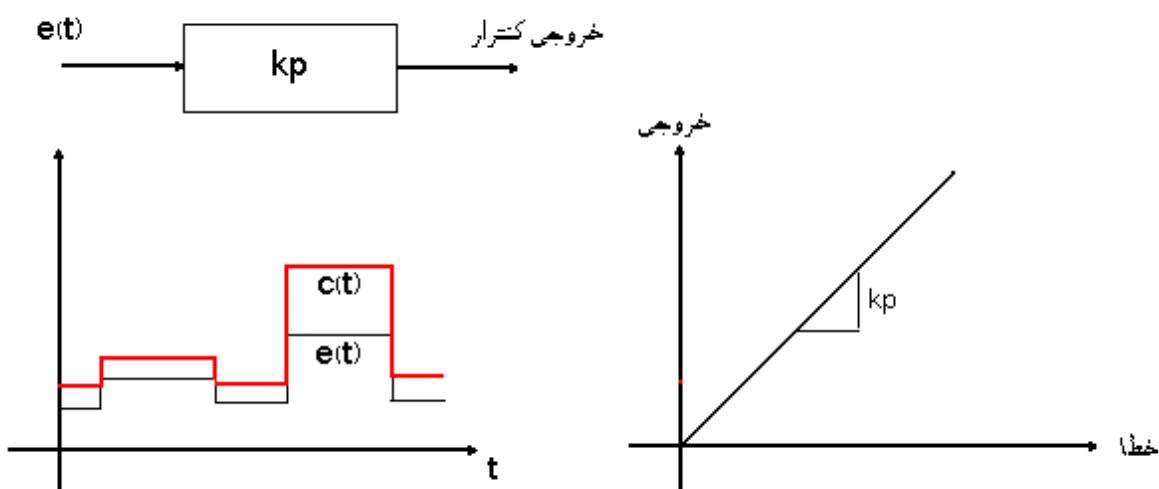
٦) تناسبی انتگرالی PI

۷) تناسبی انتگرالی مشتقی PID

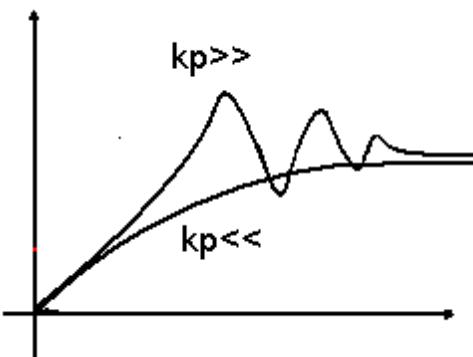
کنترل کننده دو وضعیتی :



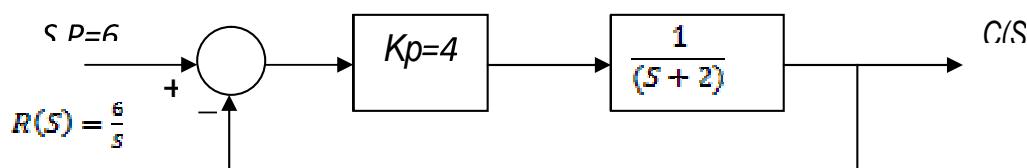
کنترل کننده تنااسبی :



کنترل کننده تناسبی به تنها یک قادر به حذف خطا در حالت ماندگار نیست شکل زیر وضعیت خروجی را برای یک سیستم نمونه در حالت $k_p >>$ و $k_p <<$ نشان می‌دهد.



مثال ۱-۶) در سیستم زیر خطای پروسه را بدست آورید؟

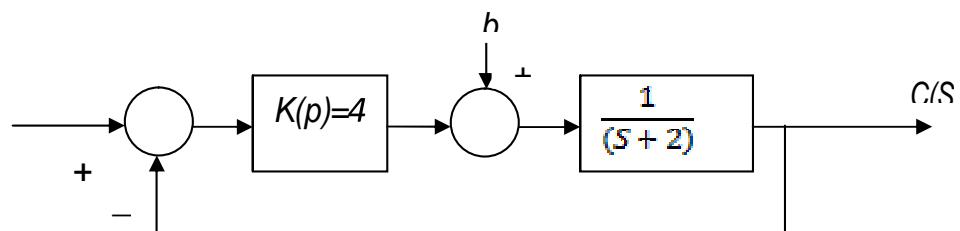
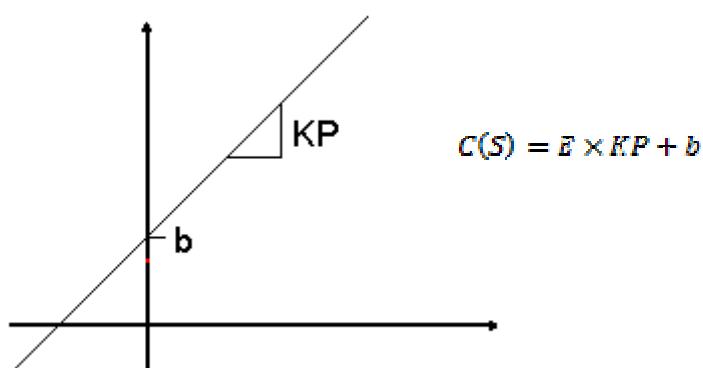


$$E(S) = R(S) - C(S), \quad C(S) = E(S) \times 4 \times \frac{1}{s+2}$$

$$E(S) = R(S) - \frac{4}{s+2} \times E(S) \Rightarrow E(S) = \frac{R(S) \times (s+2)}{(s+6)}$$

$$E(S) = \frac{6(s+2)}{s(s+6)} \quad \lim_{S \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{S \rightarrow 0} SE(S) = 2$$

کنترل کننده تناسبی با یاس دار :



خطای حالت ماندگار صفر می شود ؟ مثال ۶-۲) نشان دهید که در شکل بالا با قرار دادن

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$C(s) = \frac{[(E(s) * 4) + b(s)]}{s + 2} \rightarrow E(s)$$

$$= R(s) - (4 \cdot E(s) + b(s)) \frac{1}{s + 2}$$

$$\Rightarrow E(s) \cdot \left(1 + \frac{4}{s + 2}\right) = R(s) - \frac{b(s)}{s + 2} \Rightarrow E(s) = \frac{R(s) - \frac{b(s)}{s + 2}}{\frac{s + 6}{s + 2}}$$

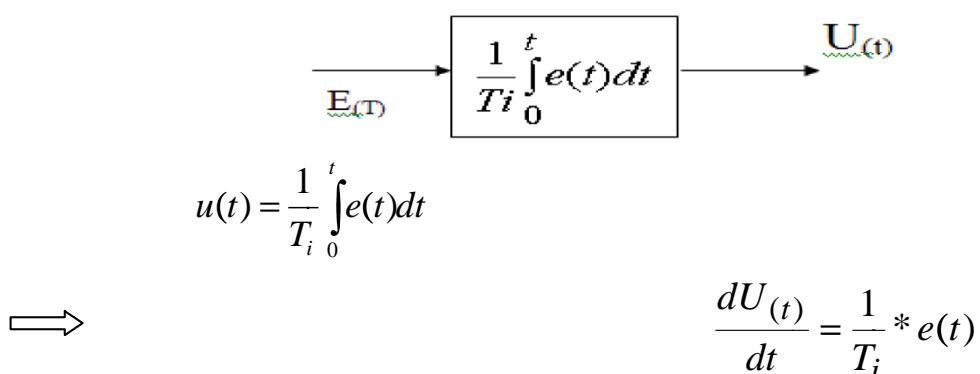
$$= \frac{R(s)(s + 2) - b(s)}{s + 6}$$

$$\begin{cases} R(s) = \\ b(s) = \frac{1}{s} \end{cases}$$

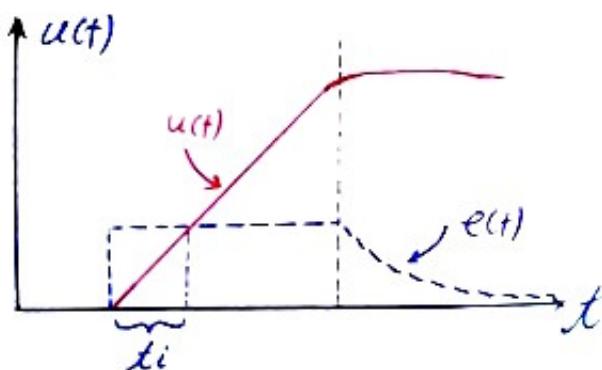
تمرین: نشان دهید که با عوض کردن مقدار $S.P=8$ در کنترل کننده تناوبی بایاس دار با مقادیر مثال قبل خطای دوباره ظاهر می شود و سپس مقداری برای b بباید که خطای از بین ببرد.

کنترل کننده انتگرالی:

در این کنترل کننده خروجی کنترل کننده با مجموع خطای متناسب است. در این روش خروجی کنترل کننده آنقدر افزایش پیدا می کند تا سیگنال خطای صفر شود



طبق رابطه هرگاه خطای صفر شود تغییرات خروجی صفر میشود و ثابت می ماند.

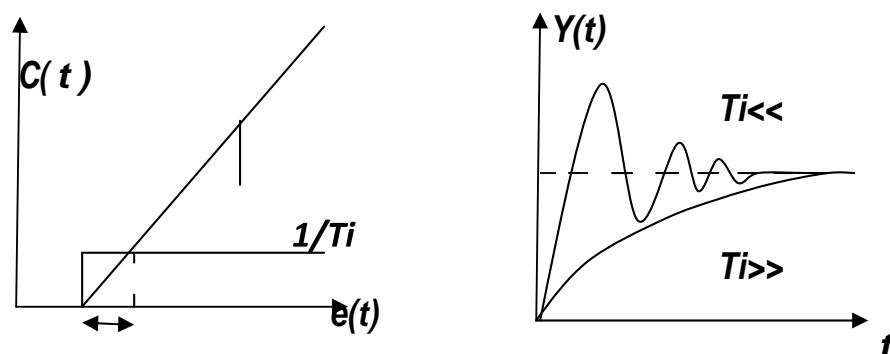


وقتی خطا صفر میشود خروجی ثابت

می ماند

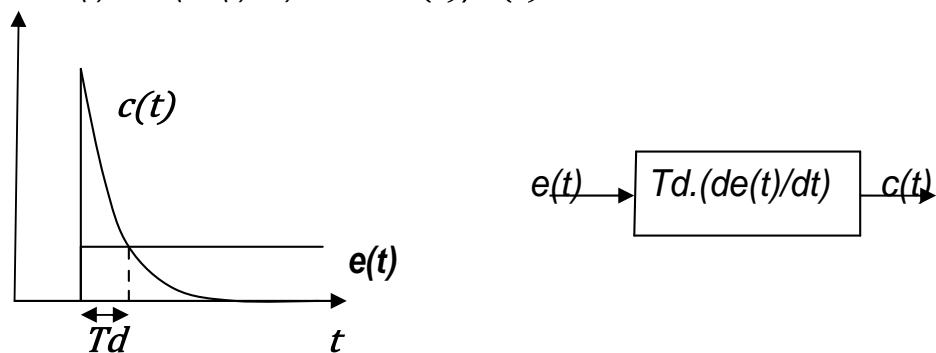
در پروسه ای که سرعت برای ما مهم نیست فقط این مهم است که در نهایت، خروجی ثابت داشته باشیم به ازای خطای صفر ما از این کنترل کننده استفاده می کنیم.

t_i زمان انتگرال گیری است و برابر با زمانی است که خروجی کنترل کننده انتگرالی با خطا برابر می شود. هر چه t_i کوچک باشد مقداری که در هر بار انتگرال گیری به خروجی کنترل کننده اضافه می شود بیشتر خواهد بود و هرچه t_i بزرگتر باشد برعکس می شود. (مثل این است که بگوییم بهره بالا می رود).

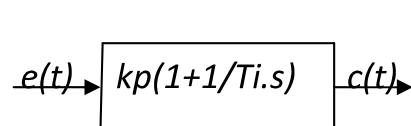


کنترل کننده مشتقی:

$$c(t) = Td \cdot (de(t)/dt) \Rightarrow C(s)/E(s) = Td \cdot s$$

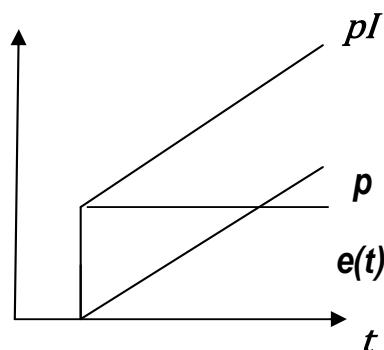


در کنترل کننده مشتقگیر سیگنال کنترل مشتق خطا است. با توجه به اینکه آغاز هر خطای در سیستم با تغییرات خطای همراه است لذا به محض ایجاد تغییر در خطا کنترلر مشتقگیر از خود عکس العمل نشان داده و جلوی ایجاد خطای گیرد. بهمین دلیل معمولاً گفته می شود که کنترلر مشتقگیر توانایی پیش بینی خطا را دارد.

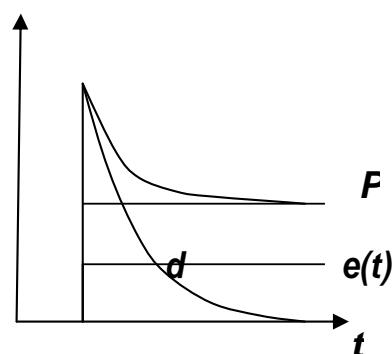
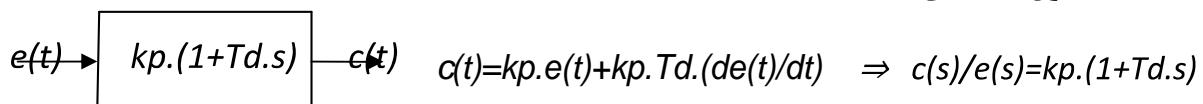


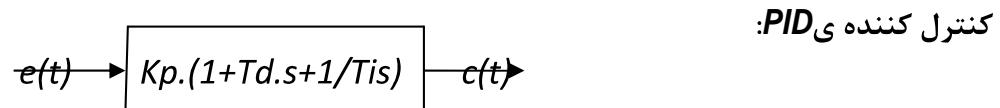
$$c(t) = kp \cdot e(t) + kp/Ti \int_0^t e(t) dt \Rightarrow C(s)/E(s) = kp(1 + 1/Ti \cdot s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(s)/E(s) = kp \cdot (Ti \cdot s + 1)/Ti \cdot s$$



کنترل کننده‌ی **PD**:





$$c(t) = k_p \cdot e(t) + k_p \cdot T_d \cdot de(t)/dt + k_p / T_i \int_0^t e(t) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(s)/E(s) = k_p \cdot (1 + T_d \cdot s + \frac{1}{T_i \cdot s})$$

