دوستان سلام

با توجه به اینکه در سالیان اخیر، خروج از کشور امکان تدریس و فعالیت در زمینه الکترومغناطیس را از بنده سلب نموده است، همواره به دنبال این بودم تا فایل کامل کتاب **"الکترومغناطیس مهندسی: تئوری، کاربردها و روش حل مسأله"** را در اختیار همگان قرار دهم. چنین امری به دلیل مشغله کاری و تا حدی کم توجهی بنده، پیش از این مقدور نشده بود؛ به پیوست نسخه الکترونیک کتاب را با کیفیت اصلی به شما تقدیم می‌کنم. علاوه بر این، پاسخ سئوالات بخش الکترومغناطیس کنکور کارشناسی ارشد سال‌های ۱۳۸۷ تا ۱۳۹۲ که در قالب کتاب "بانک سوالات مهندسی برق ۸۸-۹۲" بوسیلهٔ انتشارات آزاده چاپ شده بود، به انتهای مجموعه افزوده شده است. چنانچه مطالب این کتاب را مفید یافتید، از پیشنهاد آن به دیگران دریغ نکنید. برای همه خوانندگان این کتاب آرزوی سلامت، سرافرازی و موفقیت دارم.

با تقدیم احترام،
سید مهدی مظهری
اکتبر ۲۰۱۸

POWEREN.IR

کتاب نوین

الکترومغناطیس مهندسی

تئوری ، کاربردها و روش حل مسئله

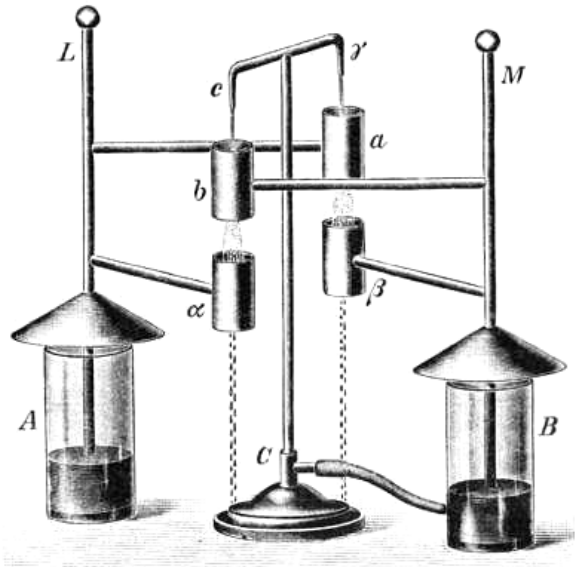
تالیف: سید مهدی مظهری

- قابل استفاده برای دانشجویان دوره کارشناسی و داوطلبان کارشناسی ارشد مهندسی برق و فیزیک
- حاوی: درس ،مثال های کلیدی ،نکات برجسته ،کاربردهای صنعتی و نمونه سوالات کنکور کارشناسی ارشد سراسری و آزاد ۸۰ تا ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

الکترومغناطیس مهندسی

تئوری، کاربردها و روش حل مسئله



تالیف: سید مهدی مظهری

عنوان و نام پدیدآور : الکترومغناطیس مهندسی/تالیف سید مهدی مظهری.
مشخصات نشر : تهران : فرهیختگان دانشگاه ۱۳۹۰.
مشخصات ظاهری : ۵۱۲ ص : جدول، نمودار.
شابک : ۱۳۷۰۰۰ ریال : **978-600-235-004-6**
وضعیت فهرست نویسی: فیپا
یادداشت : تالیف سید مهدی مظهری
موضوع : دانشگاه‌ها و مدارس عالی ایران – ایران – آزمون‌ها
موضوع : الکترومغناطیس – راهنمای آموزشی – (عالی)
شناسه افزوده : الکترومغناطیس – آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی) آزمون دوره‌های تحصیلات تکمیلی ایران
رده‌بندی کنگره : ۷۱۳۹۰ الف ۵۴۸ م/LB۲۳۵۳
رده‌بندی دیویی : ۳۷۸/۱۶۶۴
شماره کتابشناسی ملی : ۲۳۸۲۲۹۷

کتـــاب نوین

عنوان: الکترومغناطیس مهندسی
نویسنده : سید مهدی مظهری
ناشر : فرهیختگان دانشگاه
زیر نظر: حامد غفاری نوین
طراحی جلد: امیر میرزایی
صفحه‌آرا : ندا محمدی
شمارگان : ۱۰۰۰جلد
قطع: وزیری
قیمت : ۱۳۷۰۰۰ ریال
نوبت چاپ : اول ۱۳۹۰
شابک: ۶-۰۰۴-۲۳۵-۶۰۰-۹۷۸

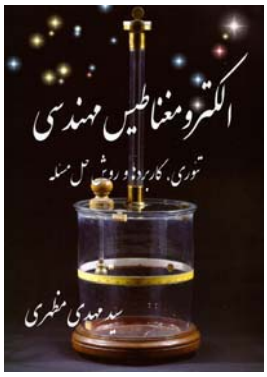
کلیه حقوق مادی و معنوی کتاب متعلق به کتاب نوین می باشد.

تـهران : ضلع‌جنوب شرقی میدان انقلاب، بازار بزرگ کتاب، کتاب‌فروشی نوین،
۶۶۴۰۴۱۳۲-۷۳ ۴۷ ۴۹۸ ۰۹۳۵

POWEREN.IR

POWEREN.IR

کتاب نوین، در راستای توسعهٔ علمی کشور، کتابی دیگر را به دانشجویان و پژوهشگران تقدیم می‌نماید:



الکترومغناطیس مهندسی، تئوری، کاربردها و روش حل مسئله

نویسنده: سید مهدی مظهری

آنچه در این کتاب می‌یابید:

- ✓ پوشش تمامی سرفصل‌های مصوب درس الکترومغناطیس مهندسی.
- ✓ آموزش گام به گام و سلیس مباحث.
- ✓ آموزش روش حل مسئله.
- ✓ ارائهٔ درس‌نامه‌های ویژه برای چند مبحث اساسی الکترومغناطیس.
- ✓ ذکر و بررسی چندین کاربرد الکترومغناطیس در صنعت.
- ✓ حل مثال‌های هدفدار و فراوان.
- ✓ ارائهٔ مثال‌ها و تمرینات کلیدی.
- ✓ ذکر یادآوری‌ها و نکات طلایی.
- ✓ حل سوالات منتخب آزمون‌های کارشناسی ارشد.
- ✓ بررسی سوالات آزمون‌های کارشناسی ارشد سراسری، سال‌های ۱۳۸۰ تا ۱۳۹۰.
- ✓ بررسی سوالات آزمون‌های کارشناسی ارشد آزاد، سال‌های ۱۳۸۴ تا ۱۳۹۰.

نامداران پیشرفت علم الکترومغناطیس

C. Guass

M. Faraday

J. Maxwell

A. Volta

K. Laplace

A. Colomb

W. Bessel

J. Biot

X. Ohm

تقدیم به

والدینم که هر چه دارم از وجود با برکت آن‌ها است

به پاس صبوری و بردباری‌هایشان

مجموعهٔ حوزهٔ علوم اسلامی دانشگاهیان، واحد تهران

به پاس تلاش‌هایشان در راه ایجاد فضای سالم

اعتقادی

POWEREN.IR

این السبب بین الارض و السماء

این الطالب بدم المقتول بکربلاء

(بخشی از دعای ندبه)

بررسی اثرات ناشی از حضور و حرکت بارهای الکتریکی مدت‌ها است که محققان را به خود مشغول کرده است. اطلاع از تئوری الکترومغناطیس، اولین پیش‌نیاز برای مطالعهٔ پدیدهای مرتبط با این بارها است. الکترومغناطیس مهندسی می‌کوشد تا با بیان تئوری‌های اولیه مسیر را برای مطالعهٔ کاربردهای مرتبط با این حوزه، شامل امواج الکترومغناطیس، ماشین‌های الکتریکی و ... مهیا نماید. با توجه به گستردگی مباحث مطرح شده در این درس، عمدهٔ دانشجویان، الکترومغناطیس را سخت‌ترین درس رشتهٔ برق معرفی می‌کنند. بر این اساس، وجود کتابی هدفمند، به نحوی که دانش‌پژوه خود را همراه با نویسنده فرض کرده و گام به گام با مباحث جدید آشنا گردد، مفید به نظر می‌رسد. تحت این شرایط، ساده و سلیس بودن متن و پرهیز از هرگونه تکلفی اولین شرط دانش‌پژوه خواهد بود.

نگارنده با این هدف و به منظور رفع دغدغهٔ دانشجویان اقدام به تالیف کتاب حاضر نموده است. به منظور همراه ساختن خواننده با نگارنده، در این مجموعه از زبان اول شخص جمع با شما صحبت می‌شود. در هر قسمت، ابتدا هدف از بیان آن بخش ذکر می‌گردد؛ سپس با تشریحِ سادهٔ درس، مثال‌هایی هدفدار ارائه می‌شوند. در ضمنِ درس و به منظور رفع پرسش‌هایی که ممکن است برای خواننده پیش آید، مراحل کار به صورت سوال و جواب تشریح می‌شوند. پس از ذکر درسِ هر قسمت، مثال‌های مناسبِ با موضوع ارائه می‌گردند. معمولاً قبل از هر مثال، دلیل ذکر این مثال و نکتهٔ انحرافی موجود در آن نیز بیان می‌شود. به منظور تکرار بیشتر، پس از هر مثال، تمرین مشابهی ذکر شده است. کلیهٔ مثال‌ها و تمرین‌ها هدفمند بوده و از مراجع معتبر و سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته‌های برق، فیزیک و هسته‌ای انتخاب شده‌اند. به منظور حفظ امانت‌داری و ایجاد سهولت برای خواننده، جهت مراجعات احتمالی، مرجع مورد استفاده نیز ذکر شده است. در پایان هر فصل مسائل تکمیلی گنجانده شده‌اند. پاسخ‌گویی به این مسائل نیازمند تسلط کامل بر مطالب و مثال‌های ذکر شده در ضمن هر فصل است.

یکی از سردرگمی‌های همیشگیِ دانشجویان، عدم اطلاعِ دقیق از روابطی است که باید حفظ شوند. برای رفع این مشکل همین‌جا قرارداد می‌کنیم که روابطی که در این مدل کادر قرار گیرند بایستی حفظ شوند. از طرفی به منظور نشان دادن اهمیت این روابط در مثال‌های متنوعی آنها را به‌کار برده و سودمندی آنها نشان داده شده است. برخی از مسائل، با چندین روش حل می‌شوند؛ به منظور باز گذاشتن دست خواننده، در طول کتاب این مثال‌ها با روش‌های مختلف حل شده‌اند. با این حال، پیشنهاد نگارنده این است که یکی از این روش‌ها را انتخاب و برای مسائل آتی از آن بهره ببرید.

یکی دیگر از مشکلات رایج عمدهٔ کتاب‌های الکترومغناطیس، شلوغی بیش از حد کتاب و صفحه‌آرایی نامناسب آنها است. تحت این شرایط خواننده رغبت اندکی به مطالعهٔ کتاب داشته و مطالعهٔ جزوهٔ دست‌نویس را، با تمام نقص‌هایش، ترجیح می‌دهد. در این کتاب وقت زیادی برای رسم شکل‌ها و

صفحه‌آرایی صرف شده است. جدا شدن مثال‌ها با کادر مخصوص از سایر بخش‌ها، ذکر مطالبِ محدود در هر صفحه، مشخص‌سازیِ نکات و سوال‌هایِ کلیدی، رسم شکل‌های مناسب و قرار دادن فضایی خالی در پایین صفحه، جهت خلاصه برداری‌هایِ احتمالیِ خواننده، از جملهٔ این فعالیت‌ها است. علاوه بر این با ذکر نکات طلایی، که این نکات یا در کنکورهای سالیان گذشته آمده و یا احتمال آمدن آن‌ها در کنکورهای آینده زیاد است، یادآوری مناسبی برای خواننده ایجاد شده است.

در ابتدای هر فصل با ارائهٔ یک ساختار درختی فضای فصل بصورت شماتیک نشان داده شده است. مراجعه به این صفحه در شروع هر قسمت از توصیه‌های اصلی نگارنده است. بدین وسیله مسیر مطالعه روشن شده و بخش‌های مطالعه شده در ذهن دسته‌بندی می‌گردند.

با توجه به اینکه پدیده‌های الکترومغناطیسی، ساختاری فیزیکی دارند، لذا به منظور آشنایی بیشتر با مفهوم این کمیات در ضمنِ کتاب پرسش‌هایی نیز طرح شده‌اند. از طرفی برای نشان دادن کاربردهای الکترومغناطیس در صنعت نیز مثال‌هایی آورده شده تا خواننده تلفیقِ مطالبِ تئوری و عملی را لمس کند. به همین دلیل نیز بخشی از عنوان کتاب را کاربردهای الکترومغناطیس تشکیل داده است. اگر چه این بخش بسیار کمتر از حجم اولیه مطالبِ مد نظر نگارنده است ولی با توجه به مشکل حجمِ صفحات و چاپ، قابل قبول است. به امید خدا در آینده آن مطالب در کتاب جداگانه‌ای عرضه خواهد شد. نظر به اینکه مثال‌های حل شدهٔ کتاب زیاد هستند، لذا به جهت دسته‌بندی بهتر سوالات و جلوگیری از سردرگمیِ خواننده، مثال‌های کلیدی مشخص شده‌اند. نگارنده اکیداً توصیه می‌کند که پس از مطالعهٔ توضیحاتِ هر قسمت و حل مثال‌ها، عمدهٔ وقت خود را در آموختن این مسائل صرف نمایید. این مثال‌ها کاملاً رایج‌اند و احتمال آمدن آن‌ها در کنکورهای آینده بسیار زیاد است.

سخنی با دانشجویان دورهٔ کارشناسی

کتاب پیش رو تمامی مباحث درس الکترومغناطیسِ رشته‌های برق و فیزیک در دورهٔ کارشناسی را پوشش داده و می‌تواند به عنوان یک مرجع مستقل مورد استفاده قرار گیرد. مباحث فیزیکی مطرح شده و مثال‌های سادهٔ ابتدای هر قسمت، مطالعه را برای خواننده‌های مبتدی ساده می‌کند. تمرین و تکرار شرط موفقیت در این درس است. توصیه می‌شود که از صرف زمان بیش از حد برای یک قسمت خاص خودداری کنید. یکی از مشکلات دانشجویان کارشناسی که اولین بار درس الکترومغناطیس را بر می‌دارند صرف زمان بیش از اندازه در فصل آنالیز برداری است. برخی از آنها نیمی از ترم را آنالیز برداری مطالعه می‌کنند! این در حالی است که آنالیز برداری فقط یک ابزار است و نباید با اصل موضوع خلط شود. پس فردی موفق است که زمان را بهینه استفاده نماید. توجه داشته باشید که تسلط کامل بر این درس، شما را

در درس‌های ماشین‌های الکتریکی، بررسی سیستم‌های قدرت و میدان‌ها و امواج بیمه می‌کند. پس به آن به چشم یک درس سه واحدی نگاه نکنید!

سخنی با داوطلبان کنکور کارشناسی ارشد

در کنکور کارشناسی ارشد رشتهٔ برق 15 سوال به درس الکترومغناطیس اختصاص دارد. این سوال‌ها در دفترچهٔ شمارهٔ دو و به همراه درس ماشین‌های الکتریکی، در صبح روز دوم، ارائه می‌شوند. معمولا 5 سوال از بخش الکترواستاتیک، فصل دو، 2 یا 3 سوال از فصل سوم، 4 یا 5 سوال از قسمت مغناطیس ساکن، فصل چهارم و یک سوال از فصل پنجم ارائه می‌شود. به طور متوسط هر سوال سه دقیقه زمان می‌برد. داوطلبان کوشای آزمون کارشناسی ارشد در مواجهه با این درس به سه دستهٔ کلی تقسیم می‌شوند:

دستهٔ اول: الکترومغناطیس را مطالعه نکرده و وقت خود را به درس ماشین‌های الکتریکی اختصاص می‌دهند. تجربه ثابت کرده است که میانگین تراز این افراد پایین‌تر از افرادی است که هر دو درس را تقریبا مساوی جواب می‌دهند. اگر چه نمونه‌هایی از رتبه‌های تک‌رقمی که درس الکترومغناطیس را سفید گذاشته‌اند موجود می‌باشد ولی ریسک بالایی دارد بخصوص اگر درس ماشین سخت باشد.

دستهٔ دوم: فقط بخش الکترواستاتیک را مطالعه کرده‌اند.

دستهٔ سوم: ؟

توصیه به هر سه دسته: پایهٔ الکترومغناطیس آنالیز برداری است. از طرفی با توجه به اینکه ارائهٔ مسائل و شکل‌های پیچیده مستلزم حلی بسیار پیچیده‌تر است، پس مسائل الکترومغناطیس از حد خاصی سخت‌تر نمی‌شوند! (طراح نمی‌تواند به جای کره، بار را بر روی بیضی پخش کند!) از طرفی در سنوات اخیر، سوالات الکترواستاتیک، با توجه به سادگیِ محاسباتِ آنها، پیچیده‌تر از مغناطیس ساکن بوده‌اند. پس حذف مغناطیس ساکن، یک اشتباه محرض است. از سوی دیگر، به سادگی می‌توان نشان داد که نیمی از سوالات از موضوعاتی است که تبحر یافتن در آنها دور از دسترس نیست. بدین منظور توصیه اکید نگارنده این است که بخش‌های ذیل که با قالبی جدید در این کتاب ارائه شده‌اند را مطالعه و با تسلط بر همین بخشِ اندک، از پاسخگویی به نیمی از سوالات مطمئن شوید. این بخش‌ها عبارتند از:

الف) الگوریتم کلی محاسبهٔ میدان الکتریکی

ب) الگوریتم کلی محاسبهٔ پتانسیل الکتریکی

ت) الگوریتم کلی محاسبهٔ دوقطبی الکتریکی و مغناطیسی

ث) راهکار دیفرانسیلی محاسبهٔ مقاومت و خازن

ج) الگوریتم کلی محاسبهٔ میدان مغناطیسی

ح) روش رایج محاسبهٔ ولتاژ القایی

خ) جدول دوگانی‌های بین الکترواستاتیک و مغناطیس ساکن

همانطور که ذکر شد، نگارنده فقط و فقط با هدف کمک به دانشجویان اقدام به تالیف کتاب حاضر نموده است. در تهیه این مجموعه از راهنمایی‌ها و کمک دوستان مختلفی برخوردار بوده‌ام. ذکر نام همهٔ این عزیزان مقدور نیست با این حال از دوست و استاد گرانقدر جناب آقای دکتر ناصر مهرشاد، که پایه‌گذاری نگارش کتاب را بر عهده داشته‌اند، سپاسگذاری می‌کنم. همچنین از دوست و استاد ارجمند جناب آقای دکتر حمید فلقی که در زمینه‌های مختلف راهنمایی‌های ارزشمندی نموده‌اند تشکر می‌نمایم. ایشان بسیار پرتلاش هستند و راه را برای آیندگان هموار می‌نمایند. خداوند به هر دو بزرگوار توفیقِ بیشتر مرهمت فرماید. دوستان خوبم جناب آقای مهندس مهدی یوسفی و مهندس سید مرتضی مظهری کل متن کتاب را مطالعه، غلط‌گیری و نظرات اصلاحی ارائه داده‌اند. از زحمات ایشان صمیمانه تشکر می‌کنم. با این همه کتاب عاری از نقص و اشکال نبوده و از اساتید و دانشجویان محترم تقاضا دارم، راهنمایی‌هایشان را از اینجانب دریغ نورزند.

در خاتمه از جناب آقای مهندس نوین، مدیریت انتشارات،که زحمت چاپ و نشر کتاب را متقبل شده و چاپ با کیفیتی را به پژوهشگران عرضه کرده‌اند، قدردانی می‌نمایم.

سید مهدی مظهری
بهمن 1389
تهران
Email: mazhari@ut.ac.ir

POWEREN.IR

فهرست مطالب

فصل اول – آنالیزبرداری 1
1-1- مقدمه 3
1-2- جمع و تفریق برداری 4
1-3- ضرب بردارها 5
1-3-1- ضرب عددی یا داخلی 5
1-3-2- ضرب خارجی 5
1-3-3- ضرب سه بردار 6
1-4- دستگاه‌های متعامد 8
1-4-1- مختصات کارتزین 10
1-4-2- مختصات استوانه‌ای 11
1-4-2-1- ضریب متریک 11
1-4-2-2- تغییرات طول در دستگاه استوانه‌ای 13
1-4-2-3- تغییرات دیفرانسیل سطح 14
1-4-2-4- تبدیل مختصات استوانه‌ای به کارتزین 16
1-4-2-5- محاسبه ضریب متریک با استفاده از روش تحلیلی 19
1-4-3- مختصات کروی 20
1-4-3-1- رابطهٔ بین بردارهای یکه در دستگاه استوانه‌ای و کروی 21
1-4-3-2- تبدیل مختصات در دستگاه کروی 22
1-4-3-3- ضریب متریک 23
1-4-3-4- تغییرات طول در دستگاه کروی 24
1-4-3-5- تغییرات دیفرانسیل سطح 25
1-5- گرادیان یک میدان عددی 27
1-6- دیورژانس یک میدان برداری 30
1-6-1- مفهوم فیزیکی دیورژانس در الکترومغناطیس 32
1-7- قضیهٔ دیورژانس 33
1-8- کرل یک میدان برداری 34

1-8-1- تعبیر فیزیکی کرل 34
1-8-2- چرا دیورژانس نمی‌تواند منابع برداری را شناسایی و مشخص کند؟ 35
1-8-3- مفهوم فیزیکی کرل در الکترومغناطیس 37
1-9- قضیهٔ استوکس 37
1-10- انتگرال‌هایی شامل توابع برداری 39
1-10-1- انتگرال مسیر 40
1-10-2- انتگرال سطح 43
1-10-3- انتگرال حجم 46
1-11- عملگرهای برداری مکرر 46
1-11-1- لاپلاسین 46
1-11-1-1- لاپلاسین اسکالر 46
1-11-1-2- لاپلاسین برداری 47
1-11-2- دو اتحاد صفر : دسته‌بندی میدان‌های برداری 47
1-11-2-1- اتحاد **I** 47
1-11-2-2- اتحاد **II** 48
1-12- قضیهٔ هلم‌هولتز 48
1-13- توابع برداری کنسرواتیو 50
1-14- تئوری انتگرال گرین 52
1-15- انتگرالهای مهم 53
1-16- مسائل پایان فصل 55

فصل دوم – الکترواستاتیک 61
2-1- مقدمه 63
2-2- قانون کولن و فرضیات اصلی الکتریسیته ساکن 63
2-3- رهیافت کلی حل مسائل الکترواستاتیک، آرایش‌های مختلف بار 66
2-3-1- اصول روش 67
2-3-2- میدان‌های ناشی از بار نقطه‌ای 67
2-3-3- میدان‌های ناشی از بار خطی 70

2-3-4- میدان‌های ناشی از بار سطحی 75
2-3-5- میدان‌های ناشی از بار حجمی 78
2-3-6- محاسبهٔ جهت نهایی میدان 80
2-4- قانون گاوس 83
2-5- چگالی شار الکتریکی 88
2-6- پتانسیل الکتریکی 91
2-6-1- پتانسیل الکتریکی ناشی از بارهای نقطه‌ای 93
2-6-2- پتانسیل الکتریکی ناشی از بارهای خطی 94
2-6-3- خطوط هم پتانسیل 95
2-6-4- پتانسیل الکتریکی ناشی از بارهای سطحی 96
2-6-5- پتانسیل الکتریکی ناشی از بارهای حجمی 98
2-6-5-1- بررسی فیزیکی مفهوم پتانسیل الکتریکی در توزیع متقارن کروی 100
2-6-5-2- رابطهٔ پتانسیل و توزیع بار 102
2-7- هادی‌ها در میدان الکتریکی ساکن 105
2-7-1- شرایط مرزی در فصل مشترک هادی– فضای آزاد 106
2-8- دی‌الکتریک‌ها در میدان الکتریکی ساکن 121
2-8-1- توزیع‌های بار معادل در عایق‌های قطبیده 122
2-8-2- چگالی شار الکتریکی و ضریب دی‌الکتریک 127
2-8-3- میدان در عایق و قانون گاوس 131
2-8-4- قطبش متقارن و میدان الکتریکی 135
2-8-4-1- هیچ بار آزادی در فضا نباشد 135
2-8-4-2- فضا دارای بار آزاد متقارن است 136
2-8-4-3- فضا داری بار آزاد غیرمتقارن است 138
2-8-5- شرایط مرزی میدان‌های الکتریکی ساکن 138
2-8-6- بررسی شرایط مرزی بردار پلاریزاسیون 145
2-8-6-1- شرایط مرزی بردار پلاریزاسیون در صورت وجود بار پلاریزه در مرز 145
2-8-6-2- یک شرایط مرزی بردار پلاریزاسیون در عایق‌های خطی 145
2-8-7- مقاومت دی‌الکتریک 146

2-8-8- دوقطبی معادل 148
2-9- خازن و ظرفیت 153
2-9-1- روش دیفرانسیلی 156
2-9-2- تعمیم یافتهٔ روش دیفرانسیلی محاسبهٔ خازن 159
2-10- انرژی 166
2-10-1- انرژی بارهای گسسته 167
2-10-2- انرژی بارهای پیوسته 170
2-10-3- بررسی فیزیکی تغییر انرژی سیستم‌های خازنی 175
2-10-4- چگالی انرژی قطبش 177
2-11- نیرو و گشتاور 178
2-11-1- نیروی وارد بر واحد سطح هادی 179
2-11-2- نیرو و گشتاور وارد بر دوقطبی 180
2-12- خطوط میدان الکتریکی 184
2-13- روش کار مجازی برای محاسبهٔ نیرو 188
2-14- ضرایب پتانسیل و ظرفیت 192
2-14-1- ضرایب پتانسیل کره‌های هادی هم‌مرکز 194
2-14-2- ضرایب پتانسیل استوانه‌های هادی خارج هم 194
2-14-3- ضرایب پتانسیل کره‌های هادی خارج هم 194
2-15- محافظت الکتریسیته ساکن 197
2-16- مسائل پایان فصل 199

فصل سوم – روش‌های خاص حل مسائل الکترواستاتیک و تئوری جریان‌های دائم 211
3-1- مقدمه 213
3-2- روش تصویر 213
3-2-1- روش تصویر در هادی‌ها 215
3-2-1-1- بار نقطه‌ای و صفحات هادی 215
3-2-1-2- دوقطبی و صفحهٔ هادی 220
3-2-1-3- بار خطی و استوانهٔ هادی و موازی 225

3-2-1-4- بار نقطه‌ای و کرهٔ هادی 228
3-2-1-4-1- بار نقطه‌ای و کرهٔ هادی زمین‌شده 228
3-2-1-4-2- بار نقطه‌ای و کرهٔ هادی با پتانسیل مشخص 232
3-2-1-4-3- بار نقطه‌ای و کرهٔ هادی با میزان بار مشخص 233
3-2-1-5- بار سطحی کروی و کرهٔ هادی 235
3-2-1-6- کرهٔ باردار و صفحهٔ زمین شده 235
3-2-1-7- موارد ترکیبی 237
3-2-2- تئوری تصاویر در عایق‌ها 239
3-2-2-1- بار نقطه‌ای و فضای عایق 239
3-2-2-1-1- قضیهٔ اول 239
3-2-2-1-2- قضیهٔ دوم 241
3-2-2-1-3- قضیهٔ سوم 242
3-2-2-2- بار نقطه‌ای و کرهٔ عایق 243
3-3- قضیهٔ هم‌پاسخی گرین 244
3-3-1- بیان اول قضیهٔ هم‌پاسخی 244
3-3-2- بیان دوم قضیهٔ هم‌پاسخی 245
3-4- معادلات لاپلاس و پواسون 252
3-4-1- اصل یکتایی جواب 254
3-4-2- معادلات لاپلاس در دستگاه‌های متعامد 255
3-4-3- حل معادله لاپلاس یک متغیره 261
3-4-3-1- دو هادی مسطح موازی 261
3-4-3-2- دو استوانهٔ هم‌محور 264
3-4-3-3- دو نیم‌صفحه با لبهٔ مشترک 266
3-4-3-3- دو کرهٔ هم‌مرکز 269
3-4-3-4- دو مخروط هم‌محور و هم‌راس 270
3-4-4- حل معادلهٔ لاپلاس در دو بعد 272
3-4-4-1- حل معادلهٔ لاپلاس دو بعدی در دستگاه کارتزین 272
3-4-4-2- حل معادلهٔ لاپلاس دوبعدی در دستگاه استوانه‌ای 282

3-4-4-3- حل معادلهٔ لاپلاس دوبعدی در دستگاه کروی 286
3-4-5- حل معادلهٔ لاپلاس در سه بعد 294
3-4-6- تئوری نقطهٔ میانی 294
3-5- تئوری جریان‌های الکتریکی دائم 296
3-5-1- انواع جریان‌های الکتریکی 296
3-5-1-1- چگالی‌های جریان 296
3-5-1-2- جریان‌های ناشی از حرکت بار= جریان‌های انتقالی 302
3-5-1-3- جریان‌های دائم 304
3-5-2- رسانندگی 305
3-5-2-1- توان اتلافی 305
3-5-3- شرایط مرزی چگالی جریان 306
3-5-4- مقاومت 308
3-5-4-1- شروع با پتانسیل 309
3-5-4-2- شروع با جریان 312
3-5-4-3- استفاده از روش دیفرانسیلی 315
3-5-4-4- استفاده از ظرفیت خازنی برای محاسبهٔ مقاومت و بر عکس 318
3-5-5- سیستم‌های مقاومتی- خازنی 321
3-5-6- اصل بقای بار و معادلهٔ پیوستگی 323
3-6- مسائل پایان فصل 327

فصل چهارم – مغناطیس ساکن 331
4-1- مقدمه 333
4-2- اصول موضوعی مغناطیس ساکن در فضای آزاد 334
4-3- قانون بیوساوار 336
4-3-1- میدان‌های ناشی از توزیع جریان‌های خطی 337
4-3-2- میدان‌های ناشی از توزیع جریان‌های سطحی 344
4-3-2-1- میدان ناشی از یک صفحهٔ بی‌نهایت حامل جریان 346
4-3-2-2- حل توزیع‌های خطی با توزیع‌های سطحی 348

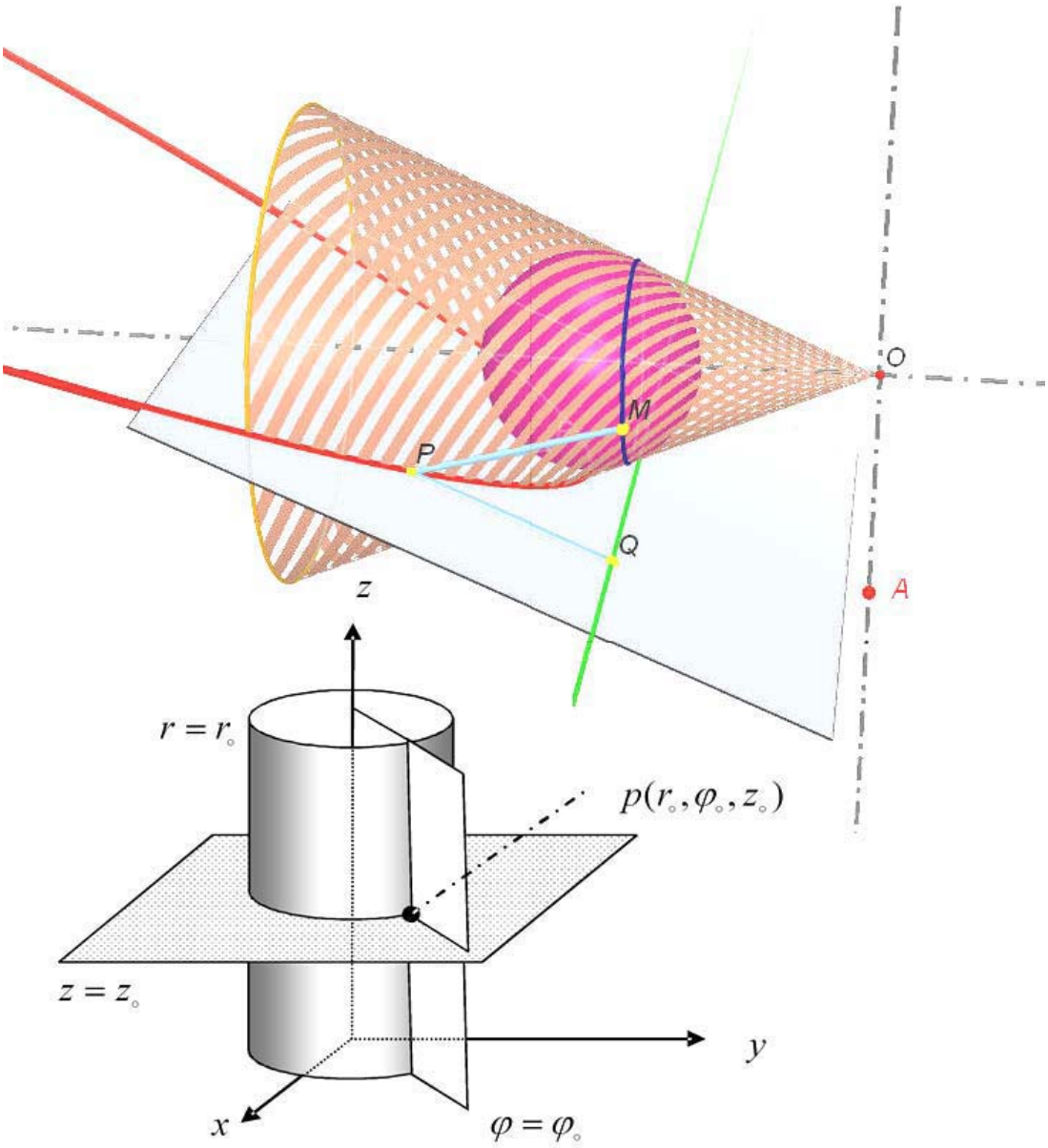
4-3-3- میدان‌های ناشی از توزیع جریان‌های حجمی 348
4-4- قانون مداری آمپر و کاربردهای آن 350
4-5- شار مغناطیسی 357
4-6- پتانسیل مغناطیسی برداری 361
4-6-1- استفاده از رابطهٔ (4-26) برای محاسبهٔ پتانسیل مغناطیسی برداری 362
4-6-2- استفاده از تناظر بین الکترواستاتیک و مغناطیس برای محاسبهٔ پتانسیل 364
4-6-3- استفاده از معادلات لاپلاس و نتایج آن برای محاسبهٔ پتانسیل مغناطیسی 365
4-6-4- استفاده از میدان و حل پواسون برداری برای محاسبهٔ پتانسیل مغناطیسی 367
4-6-5- استفاده از میدان مغناطیسی برای محاسبهٔ پتانسیل مغناطیسی 368
4-6-6- استفاده از رابطهٔ (4-29) برای محاسبهٔ پتانسیل مغناطیسی 370
4-7- دوقطبی مغناطیسی 371
4-8- مغناطیس‌شدگی و چگالی‌های جریان معادل 372
4-8-1- مغناطیس‌شدگی 372
4-8-2- چگالی‌های جریان معادل 376
4-9- شدت میدان مغناطیسی و نفوذپذیری نسبی 379
4-10- پتانسیل مغناطیسی اسکالر و چگالی‌های بار مغناطیسی معادل 383
4-11- انواع مواد مغناطیسی و چگونگی تغییر خواص آنها در حضور میدان 385
4-12- شرایط مرزی میدان‌های مغناطیسی ساکن 390
4-13- دو کاربرد ابزاری از مغناطیسی ساکن 400
4-13-1- اندوکتانس 401
4-13-1-1- اندوکتانس خودی 401
4-13-1-2- اندوکتانس متقابل 404
4-13-2- مدار مغناطیسی 410
4-13-2-1- روش رلوکتانسی 411
4-13-2-2- قانون مداری آمپر 415
4-14- انرژی مغناطیسی 418
4-15- نیروی مغناطیسی 425
4-15-1- نیروی مغناطیسی وارد بر بار متحرک 425

4-15-2- نیروی مغناطیسی وارد بر سیستم حامل جریان 426
4-15-3- نیروی مغناطیسی وارد بر اجسام 430
4-16- گشتاور مغناطیسی 432
4-17- دوگانی بین الکترواستاتیک و مغناطیس ساکن 437
4-18- مسائل پایان فصل 438

فصل پنجم - میدان‌های متغیر با زمان 449
5-1- مقدمه 451
5-2- قانون اول: قانون القای فارادی 451
5-3- هادی متحرک در میدان مغناطیسی ساکن 456
5-4- قانون دوم ماکسول 460
5-5- دیگر معادلات ماکسول 460
5-6- ولتاژهای القایی در مدارهای مغناطیسی 461
5-7- مسائل پایان فصل 464

پیوست- نمونه سوالات کنکور کارشناسی ارشد سال 1390 469

منابع 489



فصل اول: آنالیز برداری

فصل اول: آنالیز برداری

- ۱- قواعد برداری
  - ۱-۲- جمع و تفریق برداری
  - ۱-۳- ضرب بردارها
    - ۱-۳-۱- ضرب عددی یا داخلی
    - ۱-۳-۲- ضرب خارجی
    - ۱-۳-۳- ضرب سه بردار
- ۲- دستگاه‌های متعامد
  - ۱-۴-۱- مختصات کارتزین
  - ۱-۴-۲- مختصات استوانه‌ای
  - ۱-۴-۳- مختصات کروی
- ۳- حساب برداری
  - ۱-۵- گرادیان یک میدان عددی
  - ۱-۶- دیورژانس یک میدان برداری
  - ۱-۷- قضیهٔ دیورژانس
  - ۱-۸- کرل یک میدان برداری
  - ۱-۹- قضیهٔ استوکس
  - ۱-۱۰- انتگرال‌های شامل توابع برداری
    - ۱-۱۰-۱- انتگرال مسیر
    - ۱-۱۰-۲- انتگرال سطح
    - ۱-۱۰-۳- انتگرال حجم
  - ۱-۱۱- عملگرهای برداری مکرر
  - ۱-۱۲- قضیهٔ هلم هولتز
  - ۱-۱۳- توابع برداری کنسرواتیو
  - ۱-۱۴- تئوری انتگرال گرین
  - ۱-۱۵- انتگرال‌های مهم
- ۱- ۱۶- مسائل پایان فصل

۱-۱- مقدمه

در درس الکترومغناطیس با کمیت‌های فیزیکی مختلفی مواجه خواهیم شد، چگونگی بیان و محاسبهٔ این کمیت‌ها (و بعضاً ارتباط بین آنها) از لوازم اساسی این درس است. از طرفی، می‌دانیم که در حالت کلی کمیت‌های فیزیکی به دو دستهٔ اسکالر و برداری تقسیم می‌شوند. کمیت‌های اسکالر فقط دارای اندازه بوده و کار با آنها بسیار ساده است، با این حال کمیت‌های برداری، علاوه بر اندازه دارای جهت بوده و عملیات انجام شده بر روی آنها از قواعد مرسوم برای کمیت‌های اسکالر پیروی نمی‌کنند. با توجه به اینکه بیشتر کمیت‌های الکترومغناطیسی قالبی برداری دارند، در این فصل به بررسی آنالیز برداری خواهیم پرداخت. در ضمنِ فصل، قصد داریم با مرور سادهٔ مطالبی که در درس ریاضیات پایه با آنها آشنا شده‌اید و سپس ارتباط آنها با مباحث فیزیکی، مسیر را برای درک تئوری الکترومغناطیس آماده سازیم. لذا از ذکر مباحث تئوریک و پیچیدهٔ ریاضی، خودداری کرده و فقط آنچه را که لازم است، ارائه می‌کنیم. آشنایی با آنالیز برداری اولین مسیر در درک الکترومغناطیس است ولی مهمترین نیست! پس تاکید می‌کنیم که فقط مطالب کاربردیِ آنالیز برداری (که در ضمنِ فصل به آنها اشاره خواهیم کرد) را فرا گرفته و از صرف زمان بیش از حد در این قسمت خودداری کنید.

موارد فوق و بحث‌های جامع در آنالیز برداری را در این فصل و در سه عنوان اصلی زیر بررسی می‌کنیم:

۱- جبر برداری
۲- دستگاه مختصات متعامد
۳- حساب برداری

مورد اول فقط به صورت یادآوری و دو عنوان دیگر به صورت کامل تشریح می‌شوند، برای هر کدام از بخش‌ها نیز مثال‌ها و تمرینات مختلفی مطرح شده‌اند. آشنایی کامل با دستگاه‌های متعامد به سبب تحلیل سیستم‌ها در حوزه‌های الکترواستاتیک و مغناطیس و همچنین کاربرد آنها در حل مسائل حساب برداری مرتبط با همان حوزه‌ها، بسیار مهم است. هدف اصلی فصل نیز تکیه بر حساب برداری برای حل مسائل الکترومغناطیس است. از اینرو در این فصل روابط متعددی بیان می‌شوند، برای سادگی کار همین‌جا قرارداد می‌کنیم که روابطی که باید حفظ شوند در $\boxed{\text{این مدل کادر}}$ قرار بگیرند. همچنین توجه داشته باشید که در تمامی قسمت‌های کتاب، کمیت برداری مثل A را به صورت $\mathbf{A}$ نمایش خواهیم داد. پیش از شروع این قسمت دوباره تاکید می‌شود که مبحث جبر برداری صرفاً برای مرور بیان می‌گردد، از اینرو فقط به ذکر روابط آن بسنده می‌کنیم.

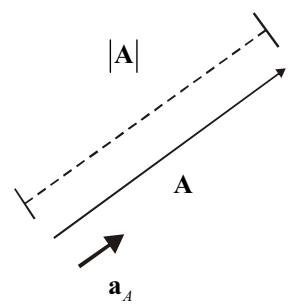
۱-۲- جمع و تفریق برداری

- در ریاضیات هر بردار (مثل A) بوسیلهٔ اندازه($|\mathbf{A}|$) و جهت آن ($\mathbf{a}_A$) مشخص می‌شود.

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\ \mathbf{a}_A \quad ، \quad \mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$$

که در آن $\mathbf{a}_\mathbf{A}$ بردار یکه جهت است، یعنی برداری که هم‌جهت با $\mathbf{A}$ بوده و اندازه آن یک می‌باشد.

- می‌دانیم که دو بردار با استفاده از قواعد مثلث و متوازی‌الاضلاع قابل جمع هستند، از طرفی با توجه به اینکه قرینهٔ $\mathbf{A}$، هم‌اندازهٔ $\mathbf{A}$ و همچنین مختلف‌الجهت با آن است، پس برای تفریق هم مشکل خاصی نداریم.



شکل ۱-۱: بردار $\mathbf{A}$

- در جمع و تفریق بردارها قوانین زیر برقرار است:

۱- $\mathbf{B}+\mathbf{A}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$: قانون جابجایی

۲- $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$: قانون شرکت‌پذیری

- برای اندازهٔ جمع و تفریق دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ نیز داریم:

$$|\mathbf{C}|^۲ = |\mathbf{A}|^۲ + |\mathbf{B}|^۲ + ۲|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\cos\alpha \qquad (۱-۱)$$

$$\boxed{|\mathbf{D}|^۲ = |\mathbf{A}|^۲ + |\mathbf{B}|^۲ - ۲|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\cos\alpha} \qquad (۱-۲)$$

که در آن:

$\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$ ، $\mathbf{D}=\mathbf{A}-\mathbf{B}$ ، α :زاویهٔ بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$

۱-۳- ضرب بردارها

ضرب بردارها به دو دستهٔ کلی تقسیم می‌شود. یکی، ضرب کمیت اسکالر در بردار و دیگری، ضرب دو بردار در یکدیگر. ضرب کمیت اسکالر در یک بردار فقط اندازهٔ بردار را تغییر می‌دهد، در مورد ضرب برداری دو قالب زیر را بررسی خواهیم کرد:

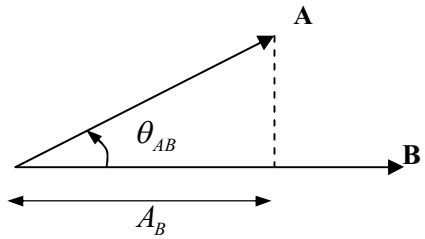
۱-۳-۱- ضرب عددی یا داخلی

- حاصلضرب عددی دو بردار **A** و **B** که با $\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B}$ نمایش داده می‌شود، عددی است، برابر با حاصلضرب اندازه‌های **A** و **B** و کسینوس زاویهٔ بین آنها که مطابق رابطهٔ (۱-۳) محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B} = |A|\,|B|\cos\alpha \qquad (۱-۳)$$

- برای حاصلضرب داخلی یک بردار در خودش داریم: $\mathbf{A}\,.\,\mathbf{A} = |\mathbf{A}|^{۲}$
- اگر داشته باشیم: $\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B} = ۰$ ، $|A| \neq ۰$ ، $|B| \neq ۰$ در این صورت **A** و **B** بر هم عمودند.
- بطور کلی اندازهٔ تصویر بردار **A** روی بردار **B** از رابطهٔ $\mathbf{A}_B = \mathbf{A}\,.\,\mathbf{a}_B$ بدست می‌آید.
- زاویهٔ بین دو بردار **A** و **B** نیز به سادگی از رابطهٔ (۱-۳) نتیجه می‌شود:

$$\theta = \cos^{-۱}\frac{\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B}}{|A|\,|B|} \qquad (۱-۴)$$



شکل ۱-۲: تصویر بردار **A** روی **B**

۱-۳-۲- ضرب خارجی

- حاصلضرب خارجی (یا برداری) دو بردار **A** و **B** که به صورت $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ نمایش داده می‌شود، برداری است عمود بر صفحهٔ شامل **A** و **B** با اندازهٔ $AB\sin\theta_{AB}$ ، که θ_{AB} زاویهٔ کوچکتر بین B و A است و جهت آن نیز از قاعدهٔ دست راست محاسبه می‌گردد.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{a_n} \left| A\ B\ \sin\theta_{AB} \right| \qquad (۵-۱)$$

- در ضرب خارجی داریم:

۱- $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ جابه‌جاپذیر نیست.

۲- $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ شرکت‌پذیر نیست.

۳- $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ توزیع‌پذیر است.

- اگر دو بردار موازی باشند، حاصلضرب خارجی آنها صفر است.

- اندازهٔ حاصلضرب خارجی دو بردار برابر مساحت متوازی‌الاضلاعی است که دو بردار اضلاع مجاور آن هستند.

۱-۳-۳- ضرب سه بردار

در ضرب سه بردار دو نکتهٔ مهم نهفته است. این نکات در اثبات روابطِ برداری کاربرد فراوانی دارند.

۱- ضرب سه‌گانهٔ عددی سه بردار

$$\mathbf{A}\ .\ (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}\ .\ (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C}\ .\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \qquad (۶-۱)$$

- در ضرب سه‌گانهٔ عددی سه بردار جایگشت دورانی وجود دارد.

۲- ضرب سه‌گانهٔ برداری

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\ .\ \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\ .\ \mathbf{B}) \qquad (۷-۱)$$

که به رابطهٔ $back - cab$ معروف است.

مثال ۱-۱ یک بردار مجهول را می‌توان تعیین کرد، اگر هم ضرب عددی و هم ضرب برداری آن با یک بردار معلوم داده شده باشد. با فرض اینکه $\mathbf{A}$ یک بردار معلوم است، بردار مجهول $\mathbf{X}$ را تعیین کنید. اگر هم P و هم $\mathbf{B}$ داده شده باشند. $P = \mathbf{A}.\mathbf{X}$ ، $\mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{X}$

حل: می‌خواهیم با استفاده از بردار معلومی مثل $\mathbf{A}$ بردار مجهول $\mathbf{X}$ را بیابیم. همانطور که در مطلب فوق بیان شد، روابط (۱-۶) و (۱-۷) کاربرد فراوانی در اثبات روابط حوزهٔ جبر برداری دارند. با این تفاسیر برای پیدا کردن $\mathbf{X}$ از رابطهٔ (۱-۷) استفاده می‌کنیم.

ابتدا ضرب خارجی $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ را می‌نویسیم: $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{A}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{X})$

حال از قاعدهٔ $back-cab$ استفاده کرده، داریم:

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{X})=\mathbf{A}(\mathbf{A}\ .\ \mathbf{X})-\mathbf{X}(\mathbf{A}\ .\ \mathbf{A})=P\mathbf{A}-|\mathbf{A}|^{۲}\,\mathbf{X}\Rightarrow\mathbf{X}=\frac{P\mathbf{A}+\mathbf{B}\times\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|^{۲}}$$

همانطور که مشاهده شد با استفاده از نتایج ضرب داخلی و خارجی بردار مجهول $\mathbf{X}$ با بردار معلومی مثل $\mathbf{A}$، توانستیم بردار مجهول را بیابیم.

سوال: آیا می‌توانید تصور فیزیکی درستی از مسئله داشته باشید؟

مثال ۱-۲ بردار واحد $\mathbf{a}_A$ و $\mathbf{a}_B$ بردارهای یکهٔ $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ هستند که مطابق شکل (۱-۳) با محور مرجع x به ترتیب زاویه‌های α و β را می‌سازند.

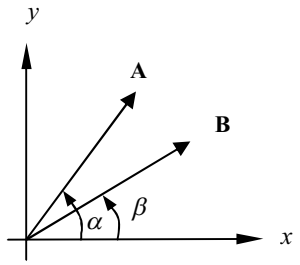
الف) با در نظرگرفتن ضرب عددی $\mathbf{A}\ .\ \mathbf{a}_B$ فرمولی برای بسط کسینوسی اختلاف دو زاویه (یعنی $\cos(\alpha-\beta)$) بیابید.

ب) فرمولی برای $\sin(\alpha-\beta)$ بیابید.

حل: الف) ابتدا بردارهای واحد هر کدام از بردارها را بدست می‌آوریم. بـرای این منظور کافی است با استفاده از شکل (۱-۳) بردارها را به عناصر پایه تجزیه کنیم:

$$\begin{cases}\mathbf{a}_A=\mathbf{a}_x\cos\alpha+\mathbf{a}_y\sin\alpha\\ \mathbf{a}_B=\mathbf{a}_x\cos\beta+\mathbf{a}_y\sin\beta\end{cases}$$

حال از فرمول ضرب داخلی بهره می‌گیریم: $\mathbf{a}_A\ .\ \mathbf{a}_B=|\mathbf{a}_A||\mathbf{a}_B|\cos(\alpha-\beta)$ در اینصورت توجه داریم که $|\mathbf{a}_A|$, $|\mathbf{a}_B|$ برابر یک‌اند، پس:



شکل ۱-۳: شکل مثال ۱-۲

$$\mathbf{a}_A \cdot \mathbf{a}_B = \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

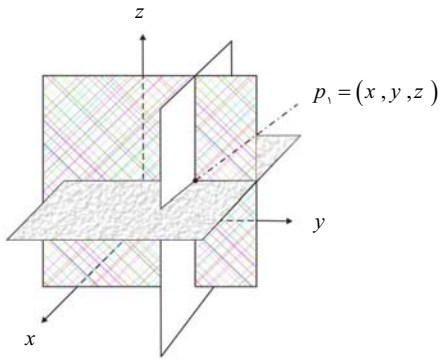
ب) برای حل این قسمت از ضرب خارجی همان بردارها استفاده می‌کنیم:

$$\left|\mathbf{a}_A \times \mathbf{a}_B\right| = \sin(\beta - \alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta$$

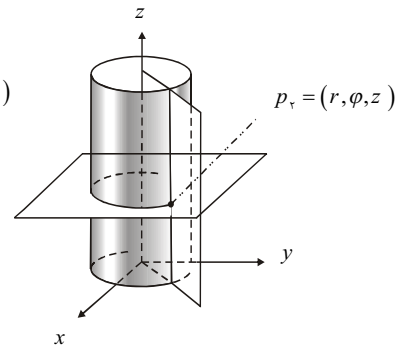
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

۱-۴- دستگاه‌های متعامد

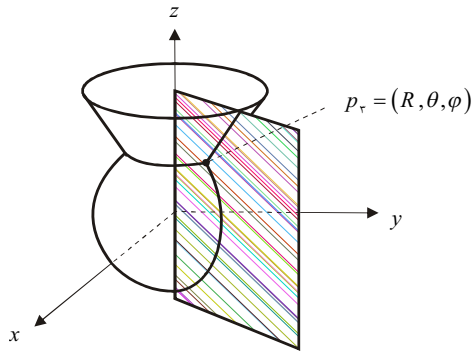
به شکل‌های (۱-۴ الف تا ج) دقت کنید. در فضای سه بعدی یک نقطه در محل تقاطع سه سطح قرار می‌گیرد. (و یا می‌تواند قرار گیرد) در شکل الف تقاطع سه سطح z, y, x نقطهٔ P_1 را تشکیل داده است. در دو شکل دیگر نیز نقطه‌های P_2 و P_3 از تلاقی سه سطح (رویه) ایجاد شده‌اند.



شکل ۱-٤- الف: دستگاه کارتزین



شکل ۱-٤- ب: دستگاه استوانه‌ای



شکل ۱-٤- ج: دستگاه کروی

فرض کنید این سطح‌ها با ثابت‌های $u_۱, u_۲, u_۳$ تعریف شوند. همانطور که در شکل‌ها می‌بینید این uها لزوماً طول نیستند، برای مثال تمام سطوح شکل (۱-۴ الف) از جنس طول‌اند (مثلا می‌توانیم بگوییم صفحهٔ $x = ۳^m$) ولی سطح مخروطی شکل (۱-۴ ب) را نمی‌توان با هیچ مقیاس طولی نمایش داد از اینرو آنرا بر حسب زاویهٔ مخروط با محور z ها می‌شناسیم (مثلا $\theta = ۱۵^\circ$). با این تفاسیر در این فصل سعی می‌کنیم بجای کلمهٔ (صفحه) از (رویه) استفاده نماییم، چرا که طبق تعریف *رویه نمودار تابع‌های دو متغیره است* و این مفهوم، صفحه را نیز شامل می‌شود. اما وجه مشترک این سه شکل را می‌توان در جملهٔ زیر خلاصه کرد:

نکتهٔ طلایی

" اگر رویه‌های $u_۱, u_۲, u_۳$ دو به دو بر هم عمود باشند، دستگاه مختصات متعامد خواهیم داشت."

یعنی هر سه سطحی را که دارای ویژگی فوق بوده و بتواند یک نقطه را به صورت منحصر بفرد در فضا نمایش دهد، می‌توان به عنوان یک دستگاه مختصات بیان نمود.

شکل‌های (۱-۴ الف تا ج) دارای این ویژگی بوده و آنها را به ترتیب با دستگاه کارتزین، استوانه‌ای و کروی نامگذاری می‌کنیم. در این قسمت قصد داریم با بررسی این دستگاه‌های متعامد (که پیش از این با آنها آشنا شده‌اید) پیش‌نیازهای لازم برای درس الکترومغناطیس را یاد بگیریم. پیش از شروع بحث چند رابطهٔ کلی که در هر دستگاه متعامدی صادق‌اند را بررسی کرده و کاربردها و نیز بیان‌های مختلف آنها را در بخش‌های بعد به صورت کامل شرح می‌دهیم.

۱- هر بردار مثل $\mathbf{A}$ می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_{u_۱} A_۱ + \mathbf{a}_{u_۲} A_۲ + \mathbf{a}_{u_۳} A_۳ \qquad (۱-۸)$$

۲- در بخش بعدی فصل (حساب برداری) اغلب لازم است انتگرال‌گیری خطی، سطحی و حجمی انجام شود در هر مورد باید تغییر دیفرانسیلی طولی متناظر با تغییر دیفرانسیلی یکی از مختصات‌ها را بیان کنیم. (مثلا در دستگاه کارتزین، تغییرات x را با dx بیان نماییم) چنانچه بعضی مختصات‌ها مثلا u_i طول نباشد (مثل سطح مخروطی شکل ۱-۴ ج و...) ضریب تبدیلی لازم است تا تغییر دیفرانسیلی du_i را به تغییر طول $d\ell_i$ تبدیل کند:

$$d\ell_i = h_i \, du_i \qquad (۱-۹)$$

که h_i ضریب متریک نامیده می‌شود و خود می‌تواند تابعی از u_1, u_2, u_3 باشد. این موضوع را در هر دستگاه مختصات به طور کامل توضیح می‌دهیم.

۳- در حالت کلی برای دیفرانسیل خط داریم:

$$\boxed{\mathbf{d}\ell = \mathbf{a}_{u_1} d\ell_1 + \mathbf{a}_{u_2} d\ell_2 + \mathbf{a}_{u_3} d\ell_3 = \mathbf{a}_{u_1}(h_1\ du_1) + \mathbf{a}_{u_2}(h_2\ du_2) + \mathbf{a}_{u_3} h_3\ du_3} \qquad (۱-۱۰)$$

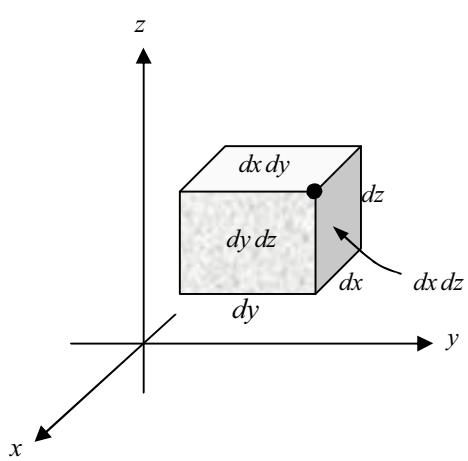
۴- توضیحات مرتبط با دیفرانسیل سطح ds و دیفرانسیل حجم dv در آینده شرح داده می‌شود، با این حال فعلا قبول کنید که:

$$dv = h_1 h_2 h_3\ du_1 du_2 du_3 \qquad (۱-۱۱)$$

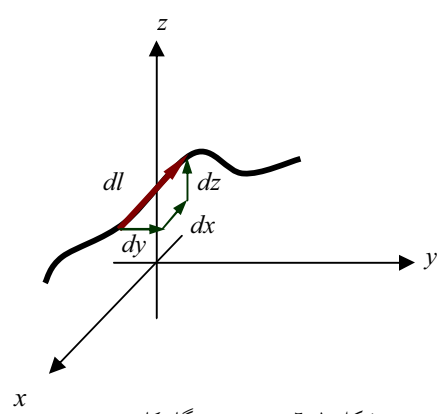
$$\mathbf{ds}_1 = h_2 h_3\ du_2 du_3\ \mathbf{a}_{u_1} \qquad (۱-۱۲)$$

در ادامه سه دستگاه مختصات متعامد را جداگانه بررسی می‌کنیم:

۱- کارتزین ۲- استوانه‌ای ۳- کروی



شکل ۱-۵: دستگاه کارتزین



شکل ۱-٦: خم در دستگاه کارتزین

۱-۴-۱- مختصات کارتزین

با این دستگاه کاملا آشنا هستید. هر یک از محورهای آن را با نام‌های z, y, x و بردارهای واحد آن را با $\mathbf{a}_z, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_x$ می‌شناسیم. در این دستگاه هر نقطه مثل $P(x_1, y_1, z_1)$ از تلاقی صفحات $x = x_1$، $y = y_1$ و $z = z_1$ ایجاد شده است. تمام مقادیر بر حسب طول بوده و لذا تغییر دیفرانسیل آنها را به

ترتیب با dx ، dy و dz نمایش می‌دهیم. (یعنی ضریب متریک (بعدا توضیح می‌دهیم) همگی آن‌ها یک است: $h_1 = h_2 = h_3 = 1$) برای تغییرات طول در این دستگاه خواهیم داشت:

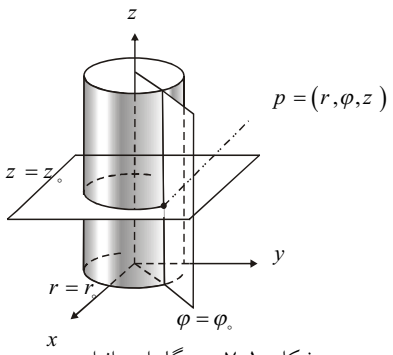
$$\mathbf{d}\ell = \mathbf{a}_x\, dx + \mathbf{a}_y\, dy + \mathbf{a}_z\, dz \qquad (۱-۱۳)$$

یعنی برای بیان $\mathbf{d}l$ در شکل(۱-۶) می‌توان اینطور فرض کنیم که خم C ابتدا به مقدار dy در جهت $\mathbf{a}_y$ تغییر کرده و پس از آن به مقدار dx در امتداد محور x تغییر نموده و در نهایت پس از پیمودن dz در جهت $\mathbf{a}_z$ به پایان خود رسیده است. (به علت سادگی از ذکر دیگر روابط پرهیز می‌شود!)

۱-۴-۲- مختصات استوانه‌ای

به شکل (۱-۷) توجه کنید، در این دستگاه یک نقطه مثل p محل تلاقی سه رویهٔ زیر است:

$$P(r_0, \varphi_0, z_0) \quad \Rightarrow \quad r = r_0 \text{ ، } \varphi = \varphi_0 \text{ ، } z = z_0$$



شکل ۱-۷: دستگاه استوانه‌ای

- رویهٔ $z = c$: صفحه‌ای است با رابطهٔ $z = c$ و موازی صفحهٔ xy .
- رویهٔ $\varphi = c$: صفحه‌ای است با زاویهٔ c نسبت به محور x و بر صفحهٔ xy عمود می‌باشد. (با توجه به این تعریف بدیهی است که φ تابعی از طول نبوده و بر حسب درجه مطرح می‌شود)
- رویهٔ $r = c$: استوانه‌ای است که شعاع مقطع آن c و محورش محور z هاست.

با این توضیحات، مختصات هر نقطه در این دستگاه به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$(u_1, u_2, u_3) = (r, \varphi, z)$$

۱-۴-۲-۱- ضریب متریک

همانطور که قبلا گفتیم این امکان وجود دارد که در یک دستگاه مختصات برخی از ثابت‌ها تابعی از طول نباشند. برای بدست آوردن دیفرانسیل طول آنها بایستی ضریبی با نام ضریب متریک را در دیفرانسیل آن‌ها ضرب کنیم. ($d\ell_i = h_i\, du_i$) در دستگاه استوانه‌ای خواهیم داشت:

۱- کاملا بدیهی‌ست که z تابعی از طول است (مثلا صفحه‌ای با رابطهٔ $z = ۲^{cm}$ موجود است) پس $h_z = ۱$.

۲- متغیر r نیز شعاع دایره است و شعاع دایره بر حسب طول بیان می‌شود، در نتیجه: $h_r = ۱$.

۳- طبق تعریفِ رویهٔ φ، مشخص است که φ تابعی از طول نبوده و وابسته به زاویه است. (مثلا صفحهٔ $\varphi = ۶۰^\circ$ موجود بوده ولی صفحهٔ $\varphi = ۲^m$ معنا ندارد)

پس برای حالت سوم بایستی ضریب متریک را محاسبه نماییم.

روش‌های محاسبهٔ ضریب متریک عبارتند از:

۱- **روش ترسیمی:** در این روش مقطعی از رویه‌های دستگاه را رسم کرده و سعی می‌کنیم تغییرات زاویه را به تغییرات طول نسبت دهیم. (رایج‌ترین روش حل، نسبت دادن آن به محیط است)

۲- **روش تحلیلی:** آن را در آینده مطرح می‌نماییم.

به مثال زیر توجه کنید، در این مثال نحوهٔ کار با روش ترسیمی را بررسی می‌کنیم.

مثال کلیدی

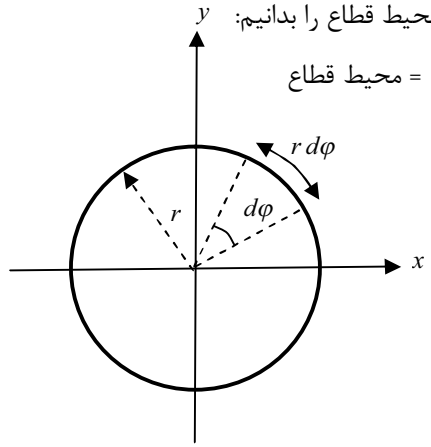
مثال ۱-۳ مطلوب است محاسبهٔ h_φ با استفاده از روش ترسیمی برای دستگاه استوانه‌ای.

حل: ابتدا مقطع دایره‌ای دستگاه را رسم کرده روی آن تغییرات φ(یعنی $d\varphi$) را مشخص می‌کنیم. مشاهده می‌شود که این تغییرات وابسته به زاویه است (یعنی زاویه، $d\varphi$ درجه تغییر کرده) برای تبدیل این تغییر به طول از محیط کمک می‌گیریم. کافی است محیط قطاع را بدانیم:

شعاع قطاع × زاویهٔ قطاع = محیط قطاع

پس محیط مشخص‌شده روی شکل برابر است با $rd\varphi$. با این عمل تغییرات زاویه‌ای مثل $d\varphi$ را با تغییرات طولِ $rd\varphi$ (روی محیط) تبدیل کردیم. ضریب r را ضریب متریک گفته و می‌نویسیم:

$$h_\varphi = r$$



شکل ۱-۸: شکل مثال ۱-3

نکتهٔ طلایی

پس به خاطر داشته باشید که از این پس تغییرات φ را با $r\,d\varphi$ مشخص کرده و $d\varphi$ در حوزهٔ دیفرانسیل این درس کاملا بی‌معناست.

همانطور که ذکر شد، روش تحلیلی محاسبهٔ ضریب متریک را در قسمت‌های بعد بررسی خواهیم کرد.

۱-۴-۲-۲- تغییرات طول در دستگاه استوانه‌ای

با توجه به رابطهٔ (۱-۱۰) در دستگاه استوانه‌ای داریم:

$$\mathbf{d}\ell = \mathbf{a}_r\ dr + \mathbf{a}_\varphi\ r\,d\varphi + \mathbf{a}_z\ dz \qquad (۱۴-۱)$$

توجه داشته باشید که رابطهٔ (۱-۱۴)، حالت کلی تغییرات را بیان می‌کند و بسته به مسئله‌ای که با آن سروکار داریم برخی از این جملات ممکن است صفر شوند.

سوال: برای محاسبهٔ $\mathbf{d}l$ یک مسیر خاص چه باید کرد؟

جواب: ۱- مطابق رابطهٔ (۱-۱۴) فرض می‌کنیم $\mathbf{d}\ell = \mathbf{a}_r\ dr + \mathbf{a}_\varphi\ rd\varphi + \mathbf{a}_z\ dz$.

۲- از خود سوال می‌کنیم که کدام مولفه‌ها ثابت‌اند؟ دیفرانسیل همان مولفه‌ها را صفر فرض می‌کنیم.

برای درک این موضوع به مثال (۱-۴) توجه کنید:

مثال کلیدی

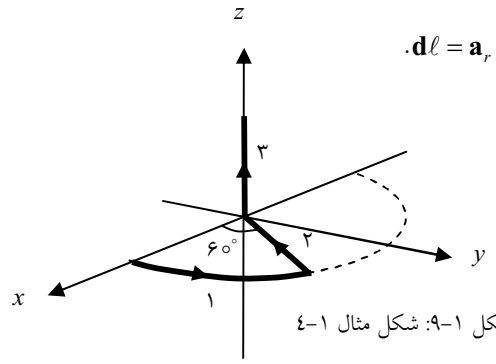
مثال ۱-۴ مطلوب است محاسبه $\mathbf{d}l$ برای سه مسیر نشان داده شده در شکل (۱-۹).

حل: در دستگاه استوانه‌ای $\mathbf{d}\ell = \mathbf{a}_r\ dr + \mathbf{a}_\varphi\ rd\varphi + \mathbf{a}_z\ dz$.

باید ببینیم کدام مولفه‌ها ثابت‌اند؟

برای مسیر ۱:

- در صفحهٔ $z = ۰$ هستیم، پس $dz = ۰$.
- روی کمانی از دایره هستیم، پس $dr = ۰$.



شکل ۱-۹: شکل مثال ۱-٤

تا به اینجا به $\mathbf{d}l_1 = \pm r\,d\varphi\ \mathbf{a}_\varphi$ رسیده‌ایم. دقت دارید که r همان ضریب متریک است. برای محاسبهٔ جهت کافی است بررسی نماییم که حرکت در جهت افزایش φ است یا در جهت کاهش آن. برای این مسیر روشن است که φ از $\varphi = 0$ تا $\varphi = 60^\circ$ افزایش یافته (یعنی همان جهت $+\mathbf{a}_\varphi$) پس در این حالت داریم:

$$\mathbf{d}l_1 = r\,d\varphi\ \mathbf{a}_\varphi$$

موارد فوق را با کمی تمرین و به سرعت می‌توانید یاد گرفت. برای تمرین بیشتر $\mathbf{d}l$ را برای مسیر ۲ نیز محاسبه می‌کنیم:

برای مسیر ۲:

- در صفحهٔ $z = 0$ هستیم، پس $dz = 0$.
- در طول مسیر همواره $\varphi = 60^\circ$، پس $d\varphi = 0$.

پس تا به اینجا $\mathbf{d}l_2 = \pm\ dr\ \mathbf{a}_r$، حال با توجه به اینکه جهت مثبت $\mathbf{a}_r$ به سمت خارج دایره است، پس برای این مسیر خواهیم داشت:

$$\mathbf{d}l_2 = -dr\ \mathbf{a}_r$$

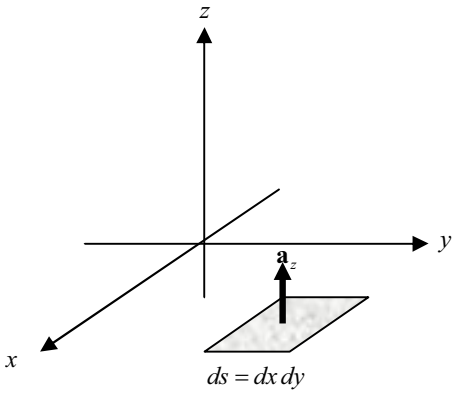
برای مسیر سوم هم به صورت مشابه داریم: $\mathbf{d}l_3 = dz\ \mathbf{a}_z$

۱-۴-۲-۳- تغییرات دیفرانسیل سطح

در درس الکترومغناطیس دو نوع تغییرات سطح داریم: ds و $\mathbf{ds}$. همانطور که مشخص است تنها فرق آنها در اسکالر یا برداری بودن آنهاست.

تغییرات سطح به معنی تغییر دو متغیر از سه متغیر یک دستگاه مختصات است. مثلا در دستگاه کارتزین المان دیفرانسیل در صفحهٔ xy را با $ds = dx\,dy$ نمایش می‌دادیم. برای محاسبهٔ $\mathbf{ds}$ در این حالت کافی است بردار یکهٔ متغیر سوم را در این عبارت ضرب کنیم، یعنی:

$$\mathbf{ds} = dx\,dy\ \mathbf{a}_z$$



شکل ۱-۱۰: المان سطح

دقت داریم که در واقع $\mathbf{a}_z$ برداری عمود بر این المان است. معمولا بردار عمود را به عنوان اندیس ds نیز قرار می‌دهند یعنی برای حالت فوق $\mathbf{ds}_z = dx\,dy\ \mathbf{a}_z$.

سوال: چگونه می‌توان **ds** را برای سطوح دستگاه استوانه‌ای بدست آورد؟

جواب: نه فقط برای سطوح دستگاه استوانه‌ای بلکه برای سطوح دستگاه کروی (در ادامه مطرح می‌شود) نیز می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

کافی است سوال‌های زیر را در مورد سطح مورد نظر پاسخ دهیم:

۱- کدام مولفه ثابت است؟

۲- ضرایب متریک مولفه‌های متغیر کدامند؟

۳- تغییرات دیفرانسیل این دو مولفه چگونه‌اند؟

در این‌حالت نتایج را در قالب زیر قرار می‌دهیم:

نکتهٔ طلایی

$$\mathbf{ds}_{\text{مولفهٔ ثابت}} = \mathbf{a}_{\text{مولفهٔ ثابت}}\ (\text{تغییرات دیفرانسیل دو مولفهٔ متغیر}) \qquad (۱-۱۵)$$

بحث‌های بیشتر در این مورد و محدودیت‌های این رابطه را در آینده مطرح خواهیم کرد. مثال زیر چگونگی بکارگیری رابطه فوق را نشان می‌دهد:

مثال کلیدی

مثال ۱-۵ مطلوب است محاسبه **ds** برای سطح جانبی استوانه‌ای به شعاع r.

حل: به سوالات فوق پاسخ می‌دهیم:

۱- کدام مولفه ثابت است؟ روی سطح جانبی استوانه شعاع همواره ثابت بوده و لذا مولفهٔ ثابت r است.

۲- ضرایب متریک مولفه‌های متغیر کدامند؟ دو مولفهٔ دیگر z و φ اند که برایشان داریم: $h_z = ۱$ ، $h_\varphi = r$.

۳- تغییرات دیفرانسیل این دو مولفه چگونه‌اند؟ dz و $r\,d\varphi$.

با قرار دادن در رابطهٔ (۱-۱۵):

$$\mathbf{ds}_r = r\ d\varphi\ dz\ \mathbf{a}_r$$

کاملاً روشن است که برای محاسبهٔ ds کافی است جهت **ds** را بر داریم.

۱-۴-۲-۴- تبدیل مختصات استوانه‌ای به کارتزین

یکی از اعمالی که در الکترومغناطیس کاملاً معمول است، عمل تبدیل مختصات می‌باشد. یعنی برداری را از یک دستگاه به دستگاه دیگری منتقل می‌کنیم. در اینجا قصد داریم بردار $\mathbf{A}=\mathbf{a}_r\,A_r+\mathbf{a}_\varphi\,A_\varphi+\mathbf{a}_z\,A_z$ را از دستگاه استوانه‌ای به بردار $\mathbf{A}=\mathbf{a}_x\,A_x+\mathbf{a}_y\,A_y+\mathbf{a}_z\,A_z$ در دستگاه کارتزین تبدیل نماییم. برای محاسبهٔ A_x ، A_y ، A_z از ضرب داخلی استفاده می‌کنیم:

$$A_x=\mathbf{A}\,.\,\mathbf{a}_x=A_r(\mathbf{a}_r\,.\,\mathbf{a}_x)+A_\varphi(\mathbf{a}_\varphi\,.\,\mathbf{a}_x)$$

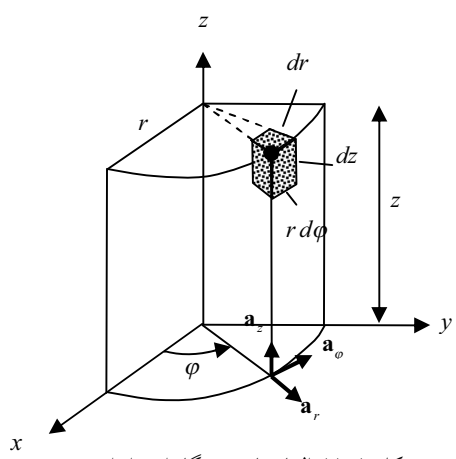
کافی است برای حاصلضرب‌های نقطه‌ای، معادل پیدا کنیم. برای این منظور می‌توانیم از یک محور دوقطبی استفاده نماییم (شکل ۱-۱۲). اگر با دقت به این شکل توجه کنید، مشاهده خواهید کرد که زاویهٔ $\mathbf{a}_r$ و $\mathbf{a}_x$ برابر φ است، پس برای تصویر کردن $\mathbf{a}_r$ روی $\mathbf{a}_x$ کافی است از ضرب داخلی استفاده کنیم:

$$\mathbf{a}_r\,.\,\mathbf{a}_x=|\mathbf{a}_r|\,|\mathbf{a}_x|\,\cos\varphi=۱\times۱\times\cos\varphi=\cos\varphi$$

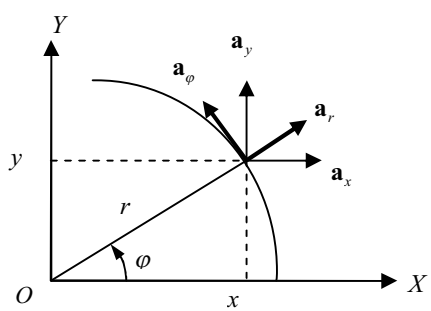
به صورت مشابه زاویهٔ $\mathbf{a}_r$ و $\mathbf{a}_y$ برابر $۹۰-\varphi$ است پس:

$$\mathbf{a}_r\,.\,\mathbf{a}_y=|\mathbf{a}_r|\,|\mathbf{a}_y|\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\varphi\right)=\sin\varphi$$

برای محاسبهٔ $\mathbf{a}_\varphi\,.\,\mathbf{a}_x$ و $\mathbf{a}_\varphi\,.\,\mathbf{a}_y$ نیز روش مشابهی را اعمال می‌کنیم، فقط کافی است دقت نماییم که زاویهٔ بین $\mathbf{a}_r$ و $\mathbf{a}_\varphi$ برابر ۹۰° است (چون بر هم عمودند، به همین دلیل هم اسم دستگاه را متعامد گذاشته‌ایم!) پس:



شکل ۱-۱۱: المان‌های دستگاه استوانه‌ای



شکل ۱-۱۲: بردارهای یکه دستگاه استوانه‌ای در صفحه

$$\mathbf{a}_\varphi \cdot \mathbf{a}_x = \cos(\frac{\pi}{۲}+\varphi) = -\sin\varphi \qquad \mathbf{a}_\varphi \cdot \mathbf{a}_y = \cos\varphi$$

و در حالت کلی:

$$\boxed{\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & ۰ \\ \sin\varphi & \cos\varphi & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}} \qquad (۱-۱۶)$$

پس به خاطر داشته باشید که:

$$\mathbf{a}_r = \cos\varphi\ \mathbf{a}_x + \sin\varphi\ \mathbf{a}_y \qquad \mathbf{a}_\varphi = -\sin\varphi\ \mathbf{a}_x + \cos\varphi\ \mathbf{a}_y$$

از طرفی باید نحوهٔ تبدیل متغیرها را نیز بدانیم. از قبل به یاد داریم که:

$$x = r\cos\varphi \quad ، \quad y = r\sin\varphi \quad ، \quad z = z \qquad (۱-۱۷)$$

$$r = \sqrt{x^۲ + y^۲} \quad ، \quad \varphi = \tan^{-۱}\frac{y}{x} \quad ، \quad z = z \qquad (۱-۱۸)$$

مثال زیر این نکات را در حل مسئله به کار می‌برد:

مثال ۱-۶ بردار $\mathbf{A} = \mathbf{a}_r(۳\cos\varphi) - \mathbf{a}_\varphi ۲r + \mathbf{a}_z ۵$ را در مختصات کارتزین بیان کنید. [۱]

حل: کافی است از رابطهٔ (۱-۱۶) استفاده کنیم:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & ۰ \\ \sin\varphi & \cos\varphi & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳\cos\varphi \\ -۲r \\ ۵ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_x(۳\cos^۲\varphi + ۲r\sin\varphi) + \mathbf{a}_y(۳\sin\varphi\cos\varphi - ۲r\cos\varphi) + \mathbf{a}_z ۵$$

حال با استفاده از رابطهٔ (۱-۱۷):

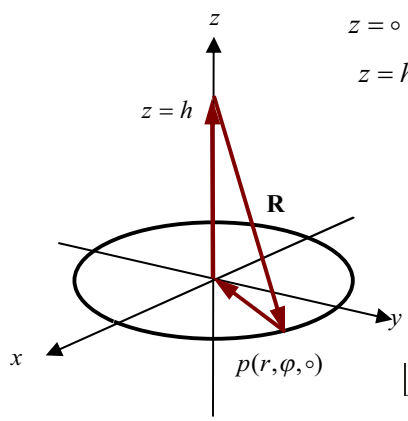
$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲}} \quad ، \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^۲+y^۲}}$$

پس:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_x(\frac{۳x^۲}{x^۲+y^۲} + ۲y) + \mathbf{a}_y(\frac{۳xy}{x^۲+y^۲} - ۲x) + \mathbf{a}_z ۵$$

یکی دیگر از مواردی که در فصول بعد کاربرد فراوانی دارد، بیان بردارها در یک دستگاه خاص است. این مطلب را به دلیل اهمیتی که دارد در آینده کامل توضیح می‌دهیم، با این حال فعلا به مثال زیر اکتفا می‌شود.

مثال ۱-۷ مختصات استوانه‌ای نقطهٔ دلخواه p در صفحهٔ $z=0$ به صورت $(r,\varphi,0)$ است. بردار واحدی را بیاید که از نقطه $z=h$ روی محور z به سمت p امتداد داشته باشد.



شکل ۱-۱۳: شکل مثال ۱-۷

حل:

تذکر: همواره سعی می‌کنیم بردارها را بر اساس مولفه‌های همان دستگاه بنویسیم.

مثلاً در این شکل مایلیم بردار را بر حسب مولفه‌های $\mathbf{a}_r,\mathbf{a}_\varphi,\mathbf{a}_z$ (البته بسته به نیاز) بنویسیم. نقطهٔ p را همانند شکل (۱-۱۳) در نظر می‌گیریم. حال:

برای رفتن از نقطهٔ h به نقطهٔ p لازم است به اندازهٔ h واحد در جهت $-\mathbf{a}_z$ حرکت کرده (یعنی h واحد روی محور z پایین برویم) و سپس به اندازهٔ r واحد به طرف بیرون دایره حرکت کنیم یعنی $r\,\mathbf{a}_r$ (بخوانید r واحد در جهت $\mathbf{a}_r$). پس خواهیم داشت:

$$\mathbf{QP}=\mathbf{OP}-\mathbf{OQ}=-h\,\mathbf{a}_z+r\,\mathbf{a}_r$$

برای محاسبهٔ بردار یکه هم مطابق زیر عمل می‌کنیم:

$$\mathbf{a}_{QP}=\frac{\mathbf{QP}}{|\mathbf{QP}|}=\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}(r\,\mathbf{a}_r-h\,\mathbf{a}_z)$$

۱-۴-۲-۵- محاسبه ضریب متریک با استفاده از روش تحلیلی

از دیدگاه تحلیلی در مورد ضریب متریک می‌توان گفت:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} = h_u \, \mathbf{a}_u \qquad (۱-۱۹)$$

که در آن $\mathbf{R}$ بردار مکان است (یعنی $\mathbf{R} = x\,\mathbf{a}_x + y\,\mathbf{a}_y + z\,\mathbf{a}_z$ در دستگاه کارتزین و یا $\mathbf{R} = r\,\mathbf{a}_r + z\,\mathbf{a}_z$ در دستگاه استوانه‌ای و یا $R\,\mathbf{a}_R$ در دستگاه کروی (بعدا بیان می‌شود)) و کافی است با توجه به ضریب متریک خواسته شده تغییرات لازم را در آن انجام دهیم. مثالی که در ادامه می‌آید، این موضوع را روشن می‌کند.

مثال ۱-۸ با استفاده از روش تحلیلی h_φ را برای مختصات استوانه‌ای بیابید.

حل: بردار مکان را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{R} = x\,\mathbf{a}_x + y\,\mathbf{a}_y + z\,\mathbf{a}_z$$

آن را به دستگاه استوانه‌ای می‌بریم:

$$\mathbf{R} = r\cos\varphi\ \mathbf{a}_x + r\sin\varphi\ \mathbf{a}_y + z\ \mathbf{a}_z$$

حال از رابطهٔ (۱-۱۹) استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\ \mathbf{a}_x + r\cos\varphi\ \mathbf{a}_y = r(-\sin\varphi\ \mathbf{a}_x + \cos\varphi\ \mathbf{a}_y) = r\ \mathbf{a}_\varphi \ \Rightarrow h_\varphi = r$$

همانطور که مشاهده می‌شود، پاسخ با نتیجهٔ روش ترسیمی یکسان است.

تمرین ۱-۱: ضریب متریک h_φ را با کار در دستگاه مختصات استوانه‌ای اثبات نمایید. (یعنی با فرض $\mathbf{R} = r\,\mathbf{a}_r + z\,\mathbf{a}_z$)

تمرین ۱-۲: دو بردار $\mathbf{A} = ۴\,\mathbf{a}_r$, $\mathbf{B} = ۲\,\mathbf{a}_r$ به ترتیب در $\varphi_A = ۳۰, \varphi_B = ۶۰$ داده شده‌اند. در این صورت بردار $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ در نقطهٔ $\varphi = ۴۵$ چقدر است ؟

۱-۴-۳- مختصات کروی

در این دستگاه هر نقطه مثل $P_۳$ محل تلاقی سه رویهٔ زیر است:

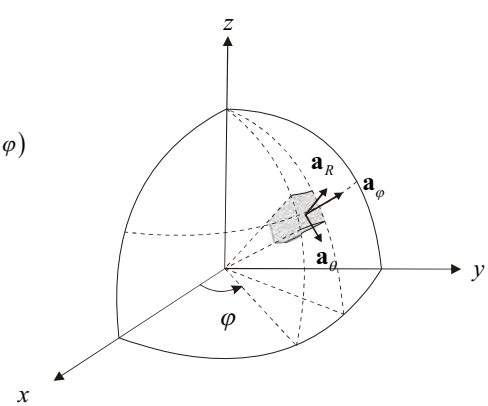
- رویهٔ $R = c$: کره‌ای است با شعاع c و مرکز مبدا مختصات.
- رویهٔ $\theta = c$: مخروطی است با زاویهٔ c نسبت به محور z ها. (با توجه به این تعریف بدیهی است که θ تابعی از طول نبوده و بر حسب درجه مطرح می‌شود!)
- رویهٔ $\varphi = c$: صفحه‌ای است با زاویهٔ c نسبت به محور x و بر صفحهٔ xy عمود می‌باشد. (مشابه حالت استوانه‌ای)

با این توضیحات مختصات هر نقطه را در این دستگاه به صورت زیر نمایش خواهیم داد:

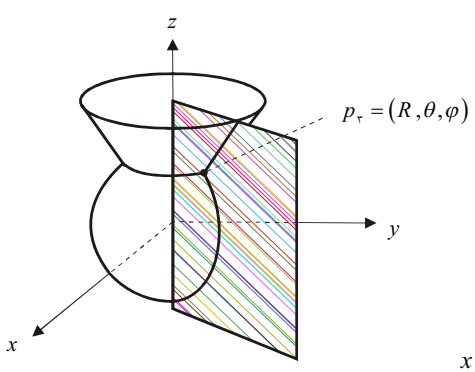
$$(u_۱, u_۲, u_۳) = (R, \theta, \varphi)$$

بردارهای پایهٔ این دستگاه را در شکل (۱-۱۶) مشاهده می‌کنید. بردار پایهٔ $\mathbf{a}_R$ در p از مبداء شعاعی است و با $\mathbf{a}_r$ در مختصات استوانه‌ای متفاوت است، $\mathbf{a}_r$ در مختصات استوانه‌ای بر محور z عمود است. بردار پایه $\mathbf{a}_\theta$ در صفحهٔ $\varphi = \varphi_۱$ واقع بوده و به سطح کروی مماس است. پس هر بردار در این دستگاه می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_R\ A_R + \mathbf{a}_\theta\ A_\theta + \mathbf{a}_\varphi\ A_\varphi$$



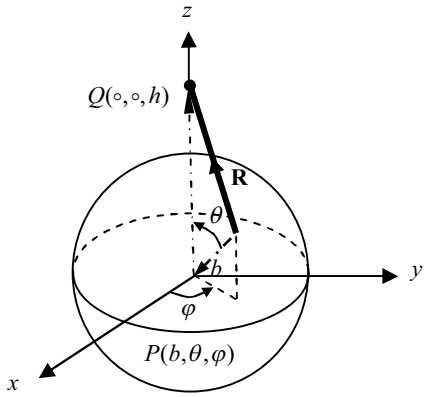
شکل ۱-۱۵: بردارهای پایه در مختصات کروی



شکل ۱-۱٤: دستگاه کروی

مثال کلیدی

مثال ۱- ۹ مختصات نقطه‌ای دلخواه در دستگاه کروی بـه صـورت $P(b,\theta,\varphi)$ اسـت. مطلـوب اسـت محاسبهٔ اندازه بردار $|\mathbf{PQ}|$ که در آن Q نقطه‌ایست در روی محور z و واقع در $z=h$.



شکل ۱-۱۶: شکل مثال ۱-۸

حل: به شکل (۱-۱۶) توجه کنید. می‌خواهیم $\mathbf{R}$ و نیز $|\mathbf{R}|$ را بیابیـم. سـعی می‌کنیـم بـردار $\mathbf{R}$ را بـر اسـاس مولفه‌های دستـگاه‌های قائمی که تـا به اینجـا بررسـی شده بدست آوریم، برای این منظورکافی است در ابتدا به اندازهٔ b واحـد به سمت مرکز کره حرکت کرده، یعنـی $-b\,\mathbf{a}_R$ (بخوانید b واحد در جهت منفی $\mathbf{a}_R$)) و سپس به انـدازهٔ h واحـد در جـهت $\mathbf{a}_z$ حرکت کنیـم. بـا این تفاسیر می‌توان گفت که:

$$\mathbf{R} = -b\,\mathbf{a}_R + h\,\mathbf{a}_z$$

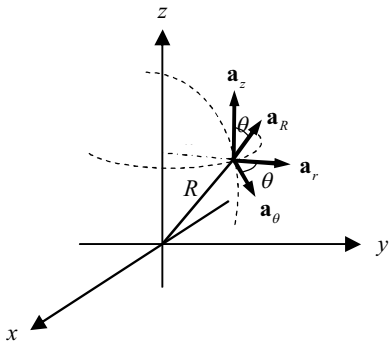
حال $|\mathbf{R}|$ را می‌یابیم. اگر بی‌دقتی کنیم آن را از قضیه فیثـاغورث بدسـت خـواهیم آورد، امـا ایـن پاسـخ کاملا غلط است، چرا که با توجه به شکل این دو مولفه در حالت کلـی بـر هـم عمـود نبـوده و از اینـرو بایستی از قضیهٔ کسینوس‌ها استفاده کرد، که در این صورت خواهیم داشت:

$$|\mathbf{R}|^۲ = b^۲ + h^۲ - ۲ah\,\cos\theta$$

۱-۴-۳-۱- رابطهٔ بین بردارهای یکه در دستگاه استوانه‌ای و کروی

شکل مقابل زاویهٔ بین بردارهای یکه در دستگاه مختـصات را نشان می‌دهد. همان طوریکه دیده می‌شود زاویهٔ بین $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_R$ برابـر $۹۰-\theta$ اسـت. ایـن شـکل در ضـرب بـین دو بـردار در دو دستگاه مختصات فوق بسیار مفید می‌باشد دقت شود کـه بـردار یکه $\mathbf{a}_\varphi$ در هر دو دستگاه مختصات مشترک است.

$$\measuredangle \mathbf{a}_R, \mathbf{a}_r = ۹۰ - \theta \qquad (۲۰-۱)$$



شکل ۱-۱۷: بردار های یکه استوانه‌ای و کروی

مثال ۱-۱۰ زاویهٔ بین دو بردار $\mathbf{A}=\frac{۱}{R}\,\mathbf{a}_R$, $\mathbf{B}=\frac{۱}{۲}\,\mathbf{a}_r$ را در نقطهٔ (۱,۱,۱) بدست آورید و دو بردار را در دستگاه قائم بیان کنید.

حل: از نکتهٔ فوق استفاده می‌کنیم. برای زاویه داریم: $\alpha=۹۰-\theta$

$$\theta=\tan^{-۱}\frac{r}{z}=\tan^{-۱}\frac{\sqrt{۲}}{۱}\rightarrow\alpha=۹۰-۵۴.۷=۳۵.۳^\circ$$

و برای بردار هم پس از حل داریم:

$$\mathbf{A}=\frac{۱}{۳}\mathbf{a}_x+\frac{۱}{۳}\mathbf{a}_y+\frac{۱}{۳}\mathbf{a}_z \qquad \mathbf{B}=\frac{۱}{۲}\mathbf{a}_x+\frac{۱}{۲}\mathbf{a}_y$$

در این دستگاه نیز مواردی از جمله ضرایب متریک، تغییرات دیفرانسیل خط، تغییرات دیفرانسیل سطح و تبدیل مختصات بایستی بررسی شوند. در ادامه هر کدام از آنها را به اختصار مطرح می‌کنیم:

۱-۴-۳-۲- تبدیل مختصات در دستگاه کروی

با روشی مشابه دستگاه استوانه‌ای و با توجه به شکل (۱-۱۵) می‌توان گفت:

الف) در مورد حاصلضرب داخلی بردارها در دستگاه کارتزین و کروی داریم:

$$\mathbf{a}_R.\mathbf{a}_x=\sin\theta\ \cos\varphi \qquad \mathbf{a}_R.\mathbf{a}_y=\sin\theta\ \sin\varphi$$

$$\mathbf{a}_\theta.\mathbf{a}_x=\cos\theta\ \cos\varphi \qquad \mathbf{a}_\theta.\mathbf{a}_y=\cos\theta\ \sin\varphi$$

$$\mathbf{a}_R.\mathbf{a}_z=\cos\theta \qquad \mathbf{a}_\theta.\mathbf{a}_z=-\sin\theta$$

و در حالت کلی:

$$\boxed{\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi\\ \cos\theta & -\sin\theta & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_R\\A_\theta\\A_\phi\end{bmatrix}} \qquad (۱-۲۱)$$

که به سرعت می‌توان نتیجه گرفت:

$$\mathbf{a}_R=\sin\theta\cos\varphi\ \mathbf{a}_x+\sin\theta\sin\varphi\ \mathbf{a}_y+\cos\theta\ \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\ \mathbf{a}_x + \cos\theta\sin\varphi\ \mathbf{a}_y - \sin\theta\ \mathbf{a}_z$$

ب) برای تبدیل یک نقطه از مختصات کروی به کارتزین داریم:

$$\boxed{x = R\sin\theta\cos\varphi \ ،\ y = R\sin\theta\sin\varphi \ ،\ z = R\cos\theta} \qquad (۲۲-۱)$$

پ) و برای تبدیل یک نقطه از مختصات کارتزین به کروی داریم:

$$\boxed{R = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲} \ ،\ \theta = \tan^{-۱}\frac{\sqrt{x^۲ + y^۲}}{z} \ ،\ \varphi = \tan^{-۱}\frac{y}{x}} \qquad (۲۳-۱)$$

ت) برای تبدیل یک بردار از دستگاه کروی به استوانه‌ای از ماتریس زیر استفاده می‌کنیم:

$$\boxed{\begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ \cos\theta & -\sin\theta & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix}} \qquad (۲۴-۱)$$

برای تکمیل بحث تمرین‌های زیر را انجام دهید.

تمرین ۱- ۳: الف) روابط (۱-۲۳) و (۱-۲۴) را مشابه روش حل رابطه (۱-۱۶) اثبات کنید.

ب) با اعمال قیودی بر $\mathbf{a}_\theta$ به $\mathbf{a}_z$ برسید.

تمرین ۱-۴: میدان برداری $\mathbf{A} = R^۳\cos\theta\ \mathbf{a}_R + ۲R\sin\varphi\ \mathbf{a}_\theta + \frac{۲}{R}\sin\theta\ \mathbf{a}_\varphi$ را در دستگاه کارتزین بیان کنید.

۱-۴-۳-۳- ضریب متریک

قبل از هر توضیحی پیشنهاد می‌گردد، همین عنوان را از قسمت دستگاه استوانه‌ای مرور کنید. در دستگاه کروی با توجه به نحوهٔ تعریف رویه‌ها می‌توان گفت:

۱- متغیر R شعاع کره بوده و تابعی از طول است، پس: $h_R = ۱$

۲- متغیر θ وابسته به درجه است و برای آن داریم: $h_\theta = R$

۳- متغیر φ نیز تابع طول نیست از اینرو: $h_\varphi = r = R\sin\theta$

چگونگی محاسبهٔ ضرایب متریک در دستگاه استوانه‌ای را به مثال (۱-۱۱) و تمرین (۱-۵) واگذار می‌کنیم.

مثال ۱-۱۱ مطلوب است ضریب متریک h_φ در دستگاه کروی .

حل: از روش تحلیلی استفاده می‌کنیم. ابتدا بردار مکان را در سیستم کروی بیان می‌نماییم:

$$\mathbf{R} = R\sin\theta\cos\varphi\ \mathbf{a}_x + R\cos\varphi\ \mathbf{a}_y + R\cos\theta\ \mathbf{a}_z$$

حال کافی است از رابطهٔ (۱-۱۹) کمک بگیریم:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \varphi} = R\sin\theta(-\sin\varphi\ \mathbf{a}_x + \cos\varphi\ \mathbf{a}_y) = R\sin\theta\ \mathbf{a}_\varphi \Rightarrow h_\varphi = R\sin\theta$$

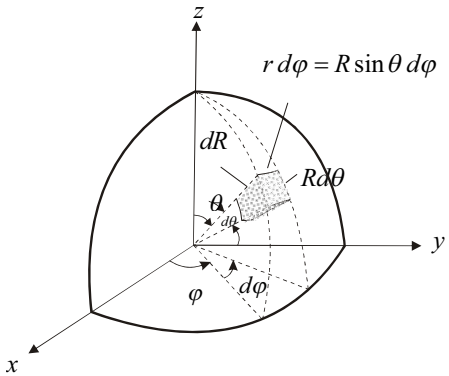
تمرین ۱- ۵: مطلوب است محاسبهٔ h_θ, h_φ در دستگاه کروی با استفاده از روشهای ترسیمی و تحلیلی.

۱-۴-۳-۴- تغییرات طول در دستگاه کروی

از تعمیم رابطهٔ (۱-۱۰) در دستگاه کروی خواهیم داشت:

$$\boxed{\mathbf{d}\ell = \mathbf{a}_R\ dR + \mathbf{a}_\theta\ R\ d\theta + \mathbf{a}_\varphi\ R\sin\theta\ d\varphi}$$

همانطور که پیش از این نیز اشاره شد، این رابطه حالت کلی تغییرات را بیان می‌کند و بسته به مسئله‌ای که با آن سروکار داریم برخی از این جملات ممکن است صفر شوند. مثال زیر این موضوع را روشن می‌کند:



شکل ۱-۱۸: المان‌های دستگاه کروی

مثال ۱-۱۲ مطلوب است محاسبه $\mathbf{d}l$ برای سه مسیر نشان داده شده در شکل (۱-۲۰).

حل: مشابه مثال (۱-۴) عمل می‌کنیم. برای تمرین بیشتر به همان سوالات پاسخ می‌دهیم. در حالت کلی برای $\mathbf{d}l$ داریم:

$$\mathbf{d}\ell = \mathbf{a}_R\ dR + \mathbf{a}_\theta\ R\ d\theta + \mathbf{a}_\varphi\ R\sin\theta\ d\varphi$$

برای مسیر ۱ خواهیم داشت:

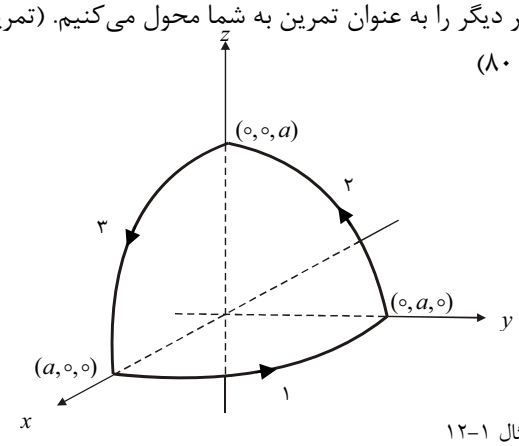
- در صفحهٔ $z = ۰$ و به عبارتی $\theta = \frac{\pi}{۲}$ هستیم، از اینرو $d\theta = ۰$.

- روی کرهٔ به شعاع a هستیم، پس $dR = ۰$.

در نهایت با توجه به جهت‌های تعریف شده خواهیم داشت:

$$\mathbf{d}\ell = \mathbf{a}_\varphi\ R\sin\theta\ d\varphi \Big|_{\substack{R=a \\ \theta=\frac{\pi}{۲}}} = \mathbf{a}_\varphi\ a\ d\varphi$$

محاسبهٔ $\mathbf{d}l$ برای دو مسیر دیگر را به عنوان تمرین به شما محول می‌کنیم. (تمرین ۱-۶) (کارشناسی ارشد فیزیک ۸۰)



شکل ۱-۱۹: شکل مثال ۱-۱۲

تمرین ۱-۶: مطلوب است محاسبه $\mathbf{d}l$ برای مسیرهای ۱ و ۲ نشان داده شده در شکل (۱-۲۰) .

۱-۴-۳-۵- تغییرات دیفرانسیل سطح

ایدهٔ کلی محاسبهٔ **ds** را در قسمت دستگاه استوانه‌ای به تفصیل توضیح داده‌ایم. با استفاده از آن، مثال زیر را حل می‌کنیم.

مثال ۱-۱۳ مطلوب است محاسبهٔ **ds** برای سطوح زیر:

الف) سطح کره‌ای به شعاع a . **ب)** سطح مخروط با $\theta = ۳۰^\circ$.

حل: برای تمرین بیشتر همان سوالات مثال (۱-۵) را مجدداً تکرار می‌کنیم:

الف:

۱- کدام مولفه ثابت است؟ روی سطح کره شعاع همواره ثابت و برابر a است. پس مولفهٔ ثابت، R است.

۲- ضرایب متریک مولفه‌های متغیر کدامند؟ دو مولفهٔ دیگر θ و φ اند و داریم: $h_\theta = R$ ، $h_\varphi = R\sin\theta$.

۳- تغییرات دیفرانسیل این دو مولفه چگونه‌اند؟ $R\,d\theta$ و $R\sin\theta\,d\varphi$.

پس خواهیم داشت:

$$\mathbf{ds}_R = R^{۲}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,\mathbf{a}_R$$

ب:

۱- کدام مولفه ثابت است؟ روی سطح مخروط، زاویه همواره ثابت و برابر ۳۰° است. پس مولفهٔ ثابت، θ می‌باشد.

۲- ضرایب متریک مولفه‌های متغیر کدامند؟ دو مولفهٔ دیگر R و φ اند و داریم: $h_R = ۱$ ، $h_\varphi = R\sin\theta$.

۳- تغییرات دیفرانسیل این دو مولفه چگونه‌اند؟ dR و $R\sin\theta\,d\varphi$.

پس خواهیم داشت:

$$\mathbf{ds}_\theta = R\sin\theta\,dR\,d\varphi\,\mathbf{a}_\theta$$

یک سوال اساسی

ds را برای رویهٔ‌های دستگاه‌های متعامد محاسبه نمودیم. حال سوال اینجاست که این پارامتر را برای اشکالی با معادلات مختلف چگونه می‌توان یافت آیا رابطهٔ (۱-۱۵) در این حالت جوابگو است؟

جواب: خیر رابطهٔ (۱-۱۵) در این حالت صحیح نیست و قالب سوال جزء مباحث پیچیده در حوزهٔ ریاضیات بوده و تحت عنوان (مساحت رویه) در کتب ریاضیات پایه مورد بررسی قرار گرفته است. از آنجا که این موضوع خارج از بحث درس بوده (و در درس ریاضی۲ مطرح شده است) از توضیحات دیگر در این مورد پرهیز می‌شود، با این همه تمرین زیر می‌تواند این موضوع را روشن کند. (توضیحات بیشتر در این مورد را پس از بیان گرادیان و در قسمت انتگرالها بیان خواهیم کرد)

تمرین۱-۷: مطلوب است محاسبهٔ **ds** برای سطح $۲x\,\mathbf{a}_x + ۳y\,\mathbf{a}_y + ۴z\,\mathbf{a}_z = ۰$.

نکته طلایی

نکته مهم: بردارهای بیان شده در مختصات کروی و استوانه‌ای را نمی‌توان مثل حالت قائم براحتی با جمع ضرایب بردارهای یکه مشابه با هم جمع کرد. زیرا جهت بردارهای یکه در این دستگاه مختصات یکسان نیست.

تمرین ۱-۸: دلیل درستی یا نادرستی عبارت زیر را با توجه به نکته فوق توجیه کنید.

$$\mathbf{A} = ۲\mathbf{a}_R \text{ و } \mathbf{B} = ۳\mathbf{a}_R \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}+\mathbf{B} = ۵\mathbf{a}_R$$

تمرین ۱-۹: اگر $\mathbf{A} = ۲\,\mathbf{a}_R$ و $\mathbf{B} = ۳\,\mathbf{a}_r + \mathbf{a}_z$ باشند. در این صورت در چه نقطه‌ای $\mathbf{A},\mathbf{B}$ با هم موازی خواهند بود؟ (جواب: $\theta = ۷۱.۶$)

۱-۵- گرادیان یک میدان عددی

با استفاده از یک روش قاعده‌مند، می‌توان کمیت‌های اسکالر همچون دما را در تمام نقاط فضا یافت. با استفاده از این اطلاعات اتصال نقاطی که دمای یکسان دارند، امکان‌پذیر خواهد بود. هنگامی که این منحنی‌های دما ثابت در یک منحنی دو بعدی ترسیم شوند، اطلاعات ارزشمندی را بدست می‌دهند. این اطلاعات می‌تواند مقدار و جهت نقاطی که حداکثر تغییرات در آن رخ می‌دهد و یا تعیین میزان گرمای گذرنده از آن نقاط باشد. برای مثال این اطلاعات می‌تواند در مکان‌یابی مناسب پیست اسکی بسیار ارزنده باشد. گرادیان یک کمیت اسکالر (که در اینجا به دما اشاره شد) به ما این امکان را می‌دهد تا مقدار و جهتی را که باید در آن حرکت کنیم تا به بیشترین مقدار تغییر آن کمیت اسکالر (جهت رسیدن به هدف مطلوب) برسیم، را پیدا نماییم. پس به طور خلاصه:

نکته طلایی

برداری که اندازه و جهت حداکثر نرخ فضایی افزایش یک کمیت عددی را نمایش می‌دهد، **گرادیان** آن کمیت عددی نامیده می‌شود. اپراتور گرادیان روی یک تابع اسکالر عمل کرده و نتیجه آن ماکزیمم تغییرات تابع اسکالر و جهت آن جهت ماکزیمم تغییرات است.

به شکل‌های (۲۰-۱ الف و ب) دقت کنید. شکل الف منحنی تابع $z = e^{-\left(x^۲+y^۲\right)} = e^{-r^۲}$ و شکل ب منحنی گرادیان این تابع را نشان می‌دهد. در الکترومغناطیس برای یافتن مسیری که بیشترین تغییرات پتانسیل را در واحد طول دارد، بعبارتی میدان الکتریکی، از منفی گرادیان تابع پتانسیل استفاده می‌شود. با توجه به اهمیت پتانسیل در الکترومغناطیس، گرادیان از کاربردی‌ترین عملگرهای این درس

خواهد بود. در اینجا به چگونگی اثبات رابطهٔ گرادیان کاری نداریم (می‌توانید در کتاب ریاضیات پایه آن را بررسی کنید)، با این حال دانستن رابطه‌های (۱-۲۵) و (۱-۲۶) ضروری است.

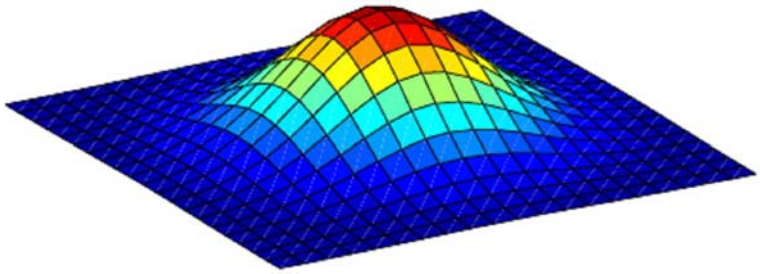
اپراتور گرادیان در مختصات کارتزین به صورت زیر است:

$$\boxed{\nabla = \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z}} \qquad (۱-۲۵)$$

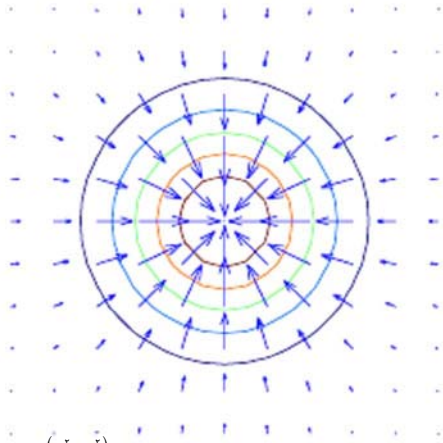
و در حالت کلی:

$$\nabla = \left(\mathbf{a}_{u_1} \frac{\partial}{h_1 \partial u_1} + \mathbf{a}_{u_2} \frac{\partial}{h_2 \partial u_2} + \mathbf{a}_{u_3} \frac{\partial}{h_3 \partial u_3} \right) \qquad (۱-۲۶)$$

پرسش ۱: اگر به سطح تپه‌ای باران ببارد و از ما سوال کنند، در یک نقطه مشخص از تپه آب در کدام مسیر و جهت جاری می‌شود؟ شما چه پاسخی می‌دهید. این مسیر را به صورت ریاضی چگونه می‌یابید؟



شکل ۱-۲۰ الف: منحنی تابع $z = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$



شکل ۱-۲۰ ب: منحنی گرادیان تابع $z = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$

و برای یک رابطهٔ مهم داریم:

$$df = (\nabla f \,.\, \mathbf{d}\ell) \qquad (۲۷-۱)$$

مثال ۱-۱۴ تابع اسکالر رو به رو داده شده است: $V = \sin\left(\frac{\pi}{۲}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{۳}y\right)e^{-z}$

الف) اندازه و جهت ماکزیمم تغییرات V در نقطه $p(۱,۲,۳)$ را بیابید .

ب) میزان افزایش V در نقطهٔ p در جهت مبداء مختصات را بدست آورید .

حل:

الف)

$$-\nabla V\Big|_p = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z\right)\Bigg|_p = \left(\frac{\pi}{۶}\mathbf{a}_y + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\mathbf{a}_z\right)e^{-۳}$$

ب)

$$\mathbf{PO} = -\mathbf{a}_x - ۲\mathbf{a}_y - ۳\mathbf{a}_z \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}_{PO} = \frac{-\mathbf{a}_x - ۲\mathbf{a}_y - ۳\mathbf{a}_z}{\sqrt{۱۴}}$$

$$-\nabla V\Big|_p \,.\, \mathbf{a}_{PO} = \left[\frac{-۲\pi}{۶} - \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\right]\frac{e^{-۳}}{\sqrt{۱۴}}$$

تمرین ۱-۱۰: قضیهٔ اساسی گرادیان به صورت زیر بیان می‌شود. با استفاده از رابطهٔ (۱-۲۷) آن را اثبات کنید.

$$\int_a^b (\nabla f)\,.\,\mathbf{d}\ell = f(b) - f(a) \qquad (۲۸-۱)$$

روابط زیر در مورد گرادیان هموار برقراراند:

$$\nabla(V+U) = \nabla V + \nabla U \qquad (۲۹-۱)$$

$$\nabla(VU) = V(\nabla U) + U(\nabla V) \qquad (۳۰-۱)$$

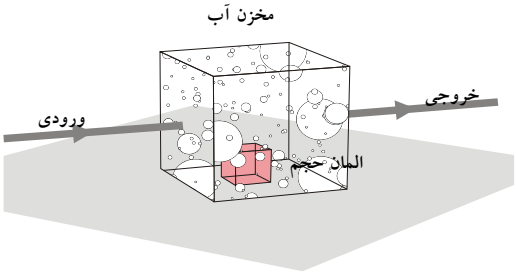
$$\nabla\left(\frac{V}{U}\right) = \frac{U\ \nabla V - V\ \nabla U}{U^۲} \qquad (۳۱-۱)$$

$$\nabla V^n = V^{n-1}\nabla V \qquad (۳۲-۱)$$

۱-۶- دیورژانس یک میدان برداری

اپراتور دیورژانس روی یک تابع برداری (نظیر شار الکتریکی) عمل کرده و نتیجه آن یک تابع اسکالر (نظیر بار الکتریکی) است. در مباحث فیزیکی دیورژانس معرف چشمه یا چاه بودن نقطهٔ خاصی از فضاست. در الکترومغناطیس چشمه نشان‌دهندهٔ بار مثبت و چاه نشان‌دهندهٔ بار منفی است. برای پی‌بردن به مفهوم فیزیکی دیورژانس مثال ساده زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

مخزن آبی را مطابق شکل (۱-۲۱) در نظر بگیرید، این مخزن دارای یک ورودی و یک خروجی می‌باشد. این مخزن را پر از آب می‌کنیم بطوریکه در خروجی آن آب جاری گردد (حالت تعادل).



شکل ۱-۲۱: مخزن آب

حال به این دو سوال پاسخ می‌دهیم:

۱- اگر مقدار آب ورودی بیشتر از خروجی باشد چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲- اگر مقدار آب خروجی بیشتر از ورودی باشد چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

جواب ۱: طبیعی است که در این حالت مخزن دارای خروجی (یا خروجی‌های) دیگری است که باعث می‌شود مقداری از آب، از آنها خارج شده و در نتیجه مقدار آب ورودی بیشتر از خروجی مورد نظر باشد. در اینصورت می‌گوییم چاه داریم، و این یعنی اگر از مخزن آب در این حالت دیورژانس بگیریم، سوراخ بودن آن را به ما نشان خواهد داد.

جواب ۲: در این حالت مخزن دارای ورودی (یا ورودی‌های) دیگری است که باعث می‌شود مقداری آب از آنها وارد شده و در نتیجه مقدار آب خروجی بیشتر از ورودی باشد. در اینصورت می‌گوییم چشمه داریم، و این یعنی اگر از مخزن آب در این حالت دیورژانس بگیریم، وجود منبع (یا منابع) دیگری را به ما نشان خواهد داد.

سوال: اپراتور دیورژانس در دو مورد فوق پاسخ درستی به مسئله می‌دهد. حال اگر فرض کنیم مقدار آب ورودی و خروجی با هم برابر باشد، پاسخ اپراتور دیورژانس چگونه است؟

جواب: در این صورت دو حالت ممکن است وجود داشته باشد:

الف) مخزن هیچ سوراخ (خروجی) و یا چشمهٔ (ورودی) دیگری ندارد. در این حالت اپراتور دیورژانس مقدار صفر را نشان می‌دهد، که با توجه به فرض کاملاً منطقی است.

ب) مخزن دارای سوراخ و چشمه‌های دیگری است که اثر هم را خنثی می‌کنند، که در اینصورت اطلاعاتمان از شرایط ناقص است و نمی‌توان در مورد مخزن توضیحات دقیقی داد.

در مواردی که خروجی با ورودی برابرست، برای این که خطایی صورت نگیرد و بتوان چشمه و سوراخی که اثر هم را خنثی می‌کنند پیدا نمود، می‌توان مخزن آب را به حجم‌های کوچک تقسیم نمود و با مقایسهٔ آب ورودی و خروجی این حجم‌های کوچک، پی به وجود چشمه یا سوراخ در آن مخزن برد. به همین دلیل است که در رابطهٔ (۱-۳۳) حجم به سمت صفر میل کرده است.

$\oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{ds}$ اطلاعاتی از شار الکتریکی ورودی و خروجی و مقایسهٔ آن‌ها را به ما می‌دهد؛ برای اینکه در محاسبهٔ بار داخل سطح بسته دچار خطایی نشویم، سطح بسته‌ای که حول نقطه مورد نظر انتخاب می‌شود، بایستی بسیار کوچک باشد. بعبارتی حجمی که توسط سطح بسته احاطه شده (ΔV) را به سمت صفر میل می‌دهیم (یعنی بسیار کوچک انتخاب می‌کنیم) و برای اینکه بتوانیم اطلاعات مقدار بار در واحد حجم دیفرانسیلی (ΔV) را بدست آوریم، نتیجهٔ حاصله را طبق رابطهٔ زیر به ΔV تقسیم می‌کنیم:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{ds}}{\Delta V} \qquad (۱-۳۳)$$

پس با این رابطه که به رابطه انتگرالی دیورژانس معروف است می‌توان به اطلاعات بار در واحد حجم پی‌برد. وقتی اپراتور دیورژانس روی یک تابع برداری (نظیر چگالی شار الکتریکی) در یک نقطه دلخواه از فضا عمل می‌کند، نتیجهٔ حاصله وجود یا عدم وجود منبع تولید اسکالر آن بردار (مانندچگالی بار الکتریکی) در آن نقطه است. فرم دیفرانسیلی دیورژانس را در زیر بررسی می‌کنیم:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = div\ \mathbf{A}$$

$$\boxed{divA = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}} \qquad (۱-۳۴)$$

نکتهٔ طلایی

باید به خاطر داشته باشیم که در تمامی دستگاه‌های مختصات، بجز مختصات کارتزین، ∇ تنها یک نماد است و نه یک عملگر.

فرم کلی دیورژانس در هر دستگاه متعامد به صورت زیر است:

$$\nabla . \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 A_3)\right] \qquad (۳۵-۱)$$

در حالت کلی استفاده از فرم دیفرانسیلی راحت‌تر است، البته تا وقتی که تابع برداری پیوسته یا معین باشد، در غیر اینصورت باید از فرم انتگرالی استفاده کرد. برای مثال نمی‌توان دیورژانس تابع برداری $\mathbf{D} = \frac{k}{R^2}\mathbf{a}_R$ در نقطه $R = 0$ را از طریق فرم دیفرانسیلی دیورژانس بدست آورد چرا که تابع برداری $\mathbf{D}$ در $R = 0$ نامعین است. پس برای محاسبهٔ دیورژانس $\mathbf{D}$ در $R = 0$ از رابطه انتگرالی دیورژانس استفاده می‌شود.

مثال۱-۱۵ دیورژانس بردار مکان را در دستگاه کارتزین بیابید.

حل: بردار مکان در دستگاه کارتزین به صورت $\mathbf{R} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ و در دستگاه استوانه‌ای به فرم $\mathbf{R} = r\mathbf{a}_r + z\mathbf{a}_z$ و در دستگاه کروی با رابطهٔ $R\,\mathbf{a}_R$ بیان می‌شود. در این صورت داریم:

$$\nabla . \mathbf{R} = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z} = 1+1+1 = 3$$

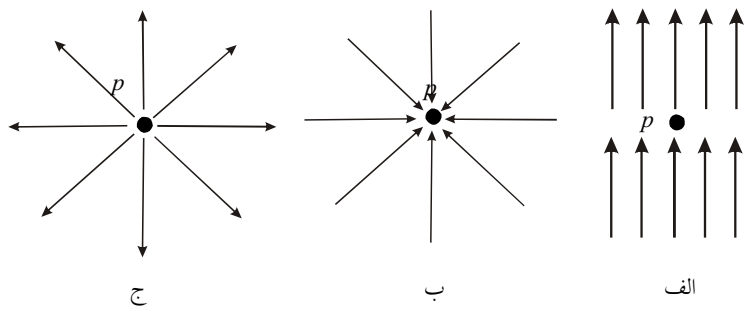
تمرین۱-۱۱: دیورژانس بردار مکان را در دستگاه‌های دیگر (استوانه‌ای و کروی) بیابید.

۱-۶-۱- مفهوم فیزیکی دیورژانس در الکترومغناطیس

در الکترومغناطیس با میدان‌ها سروکار داریم از اینرو مفهوم فیزیکی در آن بایستی به میدان وابسته باشد. این مفهوم را با استفاده از شکل (۱-۲۲) نمایش می‌دهیم. دیورژانس چشمه یا چاه را معرفی می‌کرد، شکل‌های الف تا ج نیز بر مبنای همین اصل شکل گرفته‌اند.

در شکل (۱-۲۲-الف) خطوط میدان از یک نقطهٔ دلخواه همچون p **خارج** شده‌اند، در این حالت دیورژانس در این نقطه **مثبت** خواهد بود. در شکل (۱-۲۲-ب) خطوط میدان به یک نقطهٔ دلخواه همچون p **وارد** شده‌اند، در این حالت دیورژانس در این نقطه **منفی** خواهد بود. در شکل (۱-۲۲-ج)

خطوط میدان هیچگونه هم‌گرایی نسبت به هم ندارند و در این حالت دیورژانس در نقطهٔ p **صفر** خواهد بود.



شکل ۱-۲۲: بیان دیورژانس با استفاده از نمایش خطوط میدان.

۱-۷- قضیهٔ دیورژانس

این قضیه بیان می‌کند که انتگرال حجمی دیورژانس یک میدان برداری برابر است با شار کل خروجی از سطحِ در برگیرنده حجم. و به عبارت دیگر:

$$\boxed{\int \nabla . \mathbf{A}\ dv = \oint_S \mathbf{A} . \mathbf{ds}} \qquad (۳۶-۱)$$

با این قضیه، انتگرال حجمی دیورژانس را به انتگرال سطح بستهٔ برداری تبدیل می‌کنیم. (و برعکس)

سوال: چرا باید انتگرال روی سطح بسته انجام شود؟

جواب: اگر سطح بسته نباشد، حجم ایجاد نمی‌شود و در نتیجه انتگرال حجم بی‌معنا می‌شود!

مثال ۱-۱۶ تابع برداری $\mathbf{D} = ۲x\ \mathbf{a}_x + ۳y\ \mathbf{a}_y + ۵\ \mathbf{a}_z$ مفروض است. صحت قضیهٔ دیورژانس را روی کره‌ای به شعاع a که مرکز آن بر مبداء مختصات منطبق است، بررسی کنید.

حل: ابتدا انتگرال سمت راست را محاسبه می‌کنیم:

$$\oint \mathbf{D} . \mathbf{d}s = \left[\int_۰^{۲\pi} \int_۰^{\pi} \left(۲x\ \mathbf{a}_x + ۳y\ \mathbf{a}_y + ۵\ \mathbf{a}_z \right) R^۲ \sin\theta\ d\theta\ d\varphi\ \mathbf{a}_R \right] \Bigg|_{R=a}$$

$$= a^۲ \int_۰^{۲\pi} \int_۰^{\pi} \left(۲a \sin^۳\theta\ \cos^۲\varphi + ۳a \sin^۳\theta\ \sin^۲\varphi + ۵\sin\theta\ \cos\theta \right) d\theta\ d\varphi = ... = \frac{۲۰\pi\ a^۳}{۳}$$

مثال کلیدی

حال با استفاده از قضیهٔ دیورژانس، سمت چپ را بدست می‌آوریم:

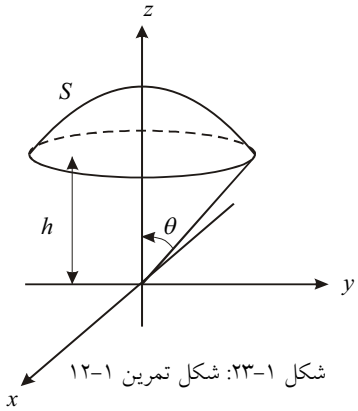
$$\left.\begin{array}{l}\int \nabla . \mathbf{D}\, dv \\ \nabla . \mathbf{D} = ۵\end{array}\right\} \Rightarrow \int ۵\, dv = \frac{۲۰}{۳}\pi\, a^{۳}$$

از برابری پاسخ‌ها نتیجه می‌گیریم که:

$$\oint \mathbf{D} . \mathbf{d}s = \int \nabla . \mathbf{D}\, dv$$

تمرین ۱-۱۲: سطح بستهٔ s نشان داده شده در شکل مقابل بخشی از کره‌ای به شعاع R، که برای آن $\theta \le \theta_{\circ}$ و یک دایره به شعاع $R\sin\theta_{\circ}$ است. برای میدان برداری زیر $\oint \mathbf{D} . \mathbf{d}s$ را محاسبه کنید. [۸]

$$\mathbf{D} = \frac{K_{۱}}{R}\,\mathbf{a}_{\varphi} - \frac{k_{۲}}{R\sin\theta}\,\mathbf{a}_{\theta}$$



شکل ۱-۲۳: شکل تمرین ۱-۱۲

۱-۸- کرل یک میدان برداری

- کرل برداری است که اندازهٔ آن حداکثر گردش خالص A در واحد سطح است وقتی که سطح به سوی صفر میل می‌کند و جهت آن جهت عمود بر سطح است زمانی که سطح طوری جهت داده شده باشد که گردش خالص را حداکثر نماید.

- وقتی اپراتور کرل روی یک میدان برداری (نظیر میدان مغناطیسی) در یک نقطه دلخواه از فضا عمل می‌کند نتیجهٔ آن وجود یا عدم وجود منبع برداری تولید آن بردار (نظیر چگالی جریان) در آن نقطه از فضا است و حتی جهت آن منبع برداری چگالی جریان را نیز به ما می‌دهد.

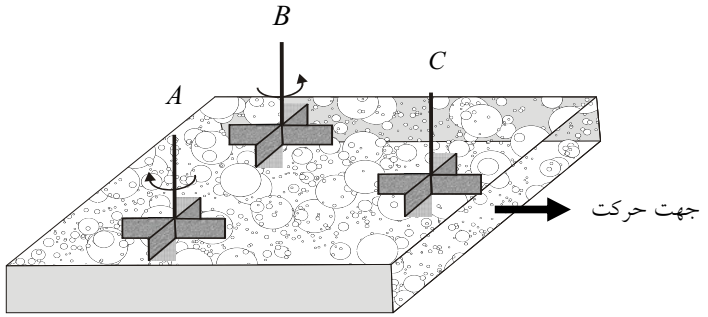
۱-۸-۱- تعبیر فیزیکی کرل

فرض کنید چرخ پره‌داری را به طور قائم در جوی آب فرو کنیم، می‌دانیم که سرعت آب در کناره‌های جوی صفر و در وسط جوی حداکثر است (این یک اصل کلی است). اگر آن را مطابق شکل (۱-۲۴ ، A , C)قرار دهیم با توجه به این اختلاف سرعت در جهات نشان داده شده خواهد چرخید، ولی اگر مطابق شکل (۱-۲۴ B) قرار گیرد چرخشی نخواهیم داشت. در این مورد **بردار کرل محور**

چرخش را نشان می‌دهد و اندازهٔ آن میزان چرخش را. به عبارت دیگر کرل یک بردار میزان چرخشی است که آن بردار ایجاد می‌کند واضح است که اگر چرخ را درست در وسط جوی قرار دهیم نخواهد چرخید، زیرا کرل بردار سرعت در وسط جوی صفر است.

کرل روی یک بردار عمل می‌کند و نتیجهٔ حاصله منبع برداری تولید آن بردار را مشخص می‌کند.

دیورژانس فقط می‌تواند منبع بردارهایی را که منبع تولید آن‌ها اسکالر است، مشخص کند (مانند میدان الکتریکی ناشی از بار الکتریکی) و در مورد بردارهایی که منبع تولید آنها بردار است (مانند میدان مغناطیسی ناشی از جریان الکتریکی) نمی‌تواند اطلاعاتی به ما بدهد.



شکل ۱-۲٤: مدل جوی آب و حلقه

۱-۸-۲- چرا دیورژانس نمی‌تواند منابع برداری را شناسایی و مشخص کند؟

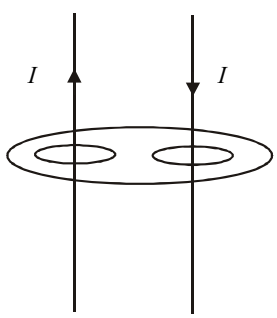
علت آنرا می‌توان فرم میدان مغناطیسی دانست. چرا که فرم میدان مغناطیسی چرخشی است یعنی ابتدا و انتهای آن معلوم نیست و تغییرات آن در صفحه صورت می‌گیرد، این در حالیستکه خطوط میدان الکتریکی به صورت حجمی از بار مثبت شروع و به بار منفی ختم می‌شوند و ابتدا و انتهای آن برای ما معلوم است بنابراین می‌توان با در نظر گرفتن سطح بسته در مسیر خطوط میدان الکتریکی و محاسبهٔ شار الکتریکی ورودی و خروجی به آن سطح بسته، پی به وجود بار در آن برد. ولی اگر در مسیر شار مغناطیسی سطح بسته‌ای انتخاب شود شار مغناطیسی ورودی و خروجی به سطح بسته، حتی در جایی که منبع برداری تولید آن بردار وجود دارد، همیشه صفر است $(\oint \mathbf{B}.\mathbf{dS} = 0)$ بنابراین نمی‌توان با این روش پی به وجود منبع برداری برد.

برای پی‌بردن به وجود منابع برداری (جریان) که میدان‌های حاصله از آن‌ها چرخشی و تغییرات آنها در صفحه عمود بر جریان صورت می‌گیرد به صورت زیر عمل می‌کنیم:

POWEREN.IR

با انتخاب مسیر بسته‌ای در صفحه که تغییرات H در آن ماکزیم است (صفحهٔ عمود بر جریان) و محاسبهٔ $\mathbf{H}\cdot\mathbf{dl}$ روی این مسیر بسته، مقدار جریانی که از این مسیر بسته عبور می‌کند، محاسبه می‌گردد.

اگر مسیر بسته‌ای که انتخاب می‌شود بزرگ باشد ممکن است جهت پی‌بردن به منبع برداری (جریان) عبوری از مسیر بسته مانند شکل (۱-۲۵) دچار خطا شویم. در این شکل انتگرال $\oint \mathbf{H}\cdot\mathbf{d}\ell$ روی مسیر بسته صفر است و نشان می‌دهد که جریانی از مسیر بسته عبور نمی‌کند در صورتیکه، می‌دانیم جریان I در خلاف جهت هم، از سیم‌های ۱و۲ عبور می‌کند، برای مرتفع شدن این خطا مسیر بسته را حول نقطهٔ مورد نظر خیلی کوچک انتخاب می‌کنند. این دلیل میل کردن ΔS به سمت صفر در رابطهٔ (۱-۳۷) است. پس داریم:



شکل ۱-۲۵: خطوط جریان و سطح آمپری

$$\nabla\times\mathbf{H}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint \mathbf{H}\cdot\mathbf{d}\ell}{\Delta s}\mathbf{a}_n \qquad (۱-۳۷)$$

که در آن $\mathbf{a}_n$ بردار یکه عمود بر سطحی‌است که ماکزیمم تغییرات میدان مغناطیسی $\mathbf{H}$ در آن سطح رخ می‌دهد. در واقع $\mathbf{a}_n$ جهت منبع برداری (جریان) را نشان می‌دهد، بنابراین با استفاده از رابطهٔ فوق که به رابطهٔ انتگرالی کرل معروف است، می‌توان به چگالی جریان حجمی الکتریکی پی‌برد و حتی جهت آن را مشخص نمود. کرل یک بردار همچون $\mathbf{A}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{\nabla\times\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}} \qquad (۱-۳۸)$$

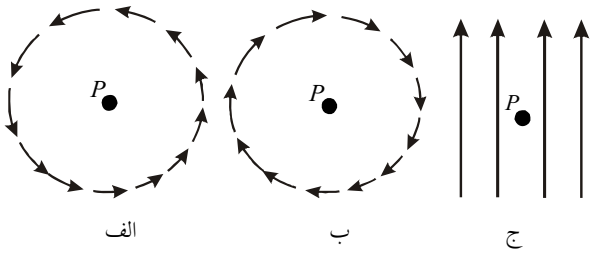
$$\nabla\times\mathbf{A}=\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix}\mathbf{a}_{u_1}h_1 & \mathbf{a}_{u_2}h_2 & \mathbf{a}_{u_3}h_3\\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3}\\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3\end{vmatrix} \qquad (۱-۳۹)$$

تمرین۱-۱۳: مطلوب است محاسبهٔ کرل میدان برداری زیر:

$$\mathbf{F} = \sin\theta\cos\varphi\ \mathbf{a}_R + \cos\theta\cos\varphi\ \mathbf{a}_\theta - \sin\varphi\ \mathbf{a}_\varphi$$

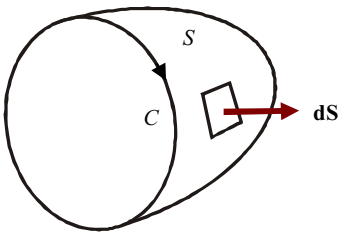
۱-۸-۳- مفهوم فیزیکی کرل در الکترومغناطیس

همانطور که در قسمت دیورژانس توضیح دادیم این مفهوم می‌بایست به میدان مرتبط باشد. از شما می‌خواهیم که کرل و مفهوم آن را با توجه به شکل‌های (۱-۲۶ الف تا ج) بیان کنید.



شکل ۱-۲۶: بیان کرل با استفاده از نمایش خطوط میدان

۱-۹- قضیهٔ استوکس



شکل ۱-۲۷: قضیهٔ استوکس

این قضیه بیان می‌کند که انتگرال سطحی کرل یک میدان برداری روی یک سطح باز، برابر است با انتگرال خطی بسته آن میدان برداری، روی مسیری که سطح را در بر می‌گیرد.

$$\boxed{\int_S (\nabla\times\mathbf{A})\,.\,\mathbf{ds} = \oint \mathbf{A}\,.\,\mathbf{d}\ell} \qquad (۱-۴۰)$$

به شکل(۱-۲۷) توجه کنید، این شکل کاربرد قضیهٔ استوکس را نشان می‌دهد:

قضیهٔ استوکس به ما این اجازه را می‌دهد که به جای انتگرال‌گیری خطی روی مسیر C ، انتگرال سطحی روی S را حل کنیم.

نکتهٔ طلایی

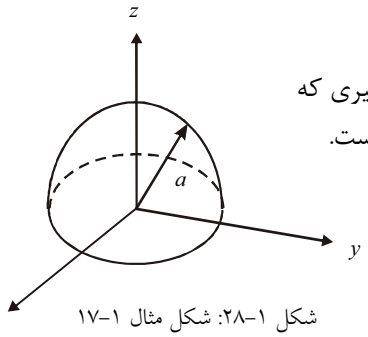
تذکر: انتگرال $\nabla\times\mathbf{A}$ روی هر سطح بسته‌ای صفر است، چون کانتور C بست صفر میل می‌کند.

سوال: چرا باید انتگرال $\mathbf{A}.\mathbf{d}l$ روی مسیر بسته انجام شود؟

جواب: اگر مسیر بسته نباشد، سطح ایجاد نمی‌شود و در نتیجه انتگرال سطحی کرل بی‌معنا می‌شود.

مثال (۱-۱۷) کاربرد این قضیه را بهتر نشان می‌دهد.

مثال ۱-۱۷ تابع برداری $\mathbf{A} = \sin\frac{\varphi}{۲}\mathbf{a}_\varphi$ داده شده است. صحت قضیهٔ استوکس را روی سطح رویه نیم‌کره و مسیر دایره‌ای به شعاع a که سطح نیم‌کره را در صفحهٔ xy دور زده است مطابق شکل (۱-۲۸) بررسی کنید.



شکل ۱-۲۸: شکل مثال ۱-۱۷

حل: ابتدا سمت راست رابطهٔ (۱-۴۰) را محاسبه می‌کنیم. مسیری که باید از آن انتگرال بگیریم دایرهٔ به شعاع a واقع در صفحهٔ xy است.

$$\oint \mathbf{A}\,.\,\mathbf{d}\ell = \int_{۰}^{۲\pi} \sin\left(\frac{\varphi}{۲}\right)\mathbf{a}_\varphi\,.\,a\,d\varphi\;\mathbf{a}_\varphi = ۴a$$

برای محاسبهٔ انتگرال سمت چپ ابتدا کرل $\mathbf{A}$ را می‌یابیم:

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{۱}{R^{۲}\sin\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_R & R\,\mathbf{a}_\theta & R\sin\theta\,\mathbf{a}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ ۰ & ۰ & R\sin\theta\sin\frac{\varphi}{۲} \end{vmatrix} = \ldots$$

حال انتگرال $\int_S (\nabla\times\mathbf{A})\,.\,\mathbf{ds}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\int(\nabla\times\mathbf{A})\,.\,\mathbf{ds} = \int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۱}{R^{۲}\sin\theta}\left[R\cos\theta\,\sin\frac{\varphi}{۲}\mathbf{a}_R - R\sin\theta\,\sin\frac{\varphi}{۲}\mathbf{a}_\theta\right].R^{۲}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,\mathbf{a}_R\Big|_{R=a}$$

$$= \int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} a\cos\theta\sin\frac{\varphi}{۲}\,d\theta\,d\varphi = ۴a$$

پس از برابری پاسخ‌ها نتیجه می‌گیریم که:

$$\oint \mathbf{A}\,.\,\mathbf{d}\ell = \int(\nabla\times\mathbf{A})\,.\,\mathbf{ds}$$

مثال ۱-۱۸ میدان برداری $\mathbf{F} = r^{\frac{-۳}{۲}}\mathbf{a}_\varphi$ و دایرهٔ $r \le ۱$, $z = ۰$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای داده شده است. نشان دهید که قضیهٔ استوکس برای این میدان برداری و این سطح برقرار نیست. [۸]

حل: ابتدا باید $\nabla\times\mathbf{F}$ را بیابیم، داریم:

$$\nabla\times\mathbf{F}=-\frac{۱}{۲}r^{\frac{-۵}{۲}}\mathbf{a}_z \Rightarrow \int(\nabla\times\mathbf{F})\,.\,\mathbf{d}s=\int-\frac{۱}{۲}\,r^{\frac{-۵}{۲}}\mathbf{a}_z\,.\,r\;dr\;d\phi\;\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{F}=-\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲\pi}d\varphi\;\int_{۰}^{۱}r^{\frac{-۳}{۲}}dr=-\pi(-۲\,r^{\frac{-۱}{۲}})\Big|_{۰}^{۱}=\infty$$

حال سمت راست رابطهٔ (۱-۴۰) را محاسبه می‌کنیم:

$$\oint\mathbf{F}\;.\;\mathbf{d}\ell=\int\mathbf{a}_\varphi\,.\,r\,d\varphi\;\mathbf{a}_\varphi=\int_{۰}^{۲\pi}d\varphi=۲\pi$$

با توجه به عدم برابری پاسخ‌ها، نتیجه می‌گیریم که قضیهٔ استوکس برای این میدان برداری و این سطح برقرار نیست و اشکال از وجود نقطهٔ تکین در $r=۰$ است.

تمرین ۱-۱۴: مطلوب است بررسی صحت قضیه استوکس برای میدان برداری $\mathbf{F}=\mathbf{a}_R+\mathbf{a}_\theta+\mathbf{a}_\varphi$ و بر روی سطح $R=a$، $۰\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$ ، $۰\le\varphi\le\frac{\pi}{۲}$. (جهت لبه را پادساعتگرد در نظر بگیرید)

تا به اینجا با سه عملگر مهم آشنا شدیم. در آخر فصل نیز با ترکیب همین عملگرها، عملگرهای مکرر برداری را تولید و در مورد آنها بحث خواهیم نمود. این عملگرها نه تنها معنای فیزیکی خاصی دارند (آنگونه که اشاره شد) بلکه در حل بسیاری از انتگرال‌ها (چیزی که در حل مسائل الکترومغناطیس به وفور با آن مواجه می‌شویم) کاربرد دارند. چگونگی استفادهٔ صحیح و بجا از این عملگرها و قضایای مطرح شده، توجیه مناسبی برای بررسی مجدد انتگرال‌ها (که در ریاضیات پایه با آنها آشنا شده‌اید) خواهد بود.

۱-۱۰- انتگرال‌هایی شامل توابع برداری

در الکترومغناطیس سه نوع انتگرال مورد بحث و تحلیل قرار می‌گیرند. یکی انتگرال روی مسیر (طول) و دیگری روی سطح (هر کدام در دو حالت باز و بسته) و در نهایت انتگرال حجم. هر کدام از این انتگرالها معنی فیزیکی خاصی دارند. انتگرال‌های گفته شده را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\int_{\ell}\mathbf{A}\,.\,\mathbf{d}\ell\;,\;\oint_{C}\mathbf{A}\,.\,\mathbf{d}\ell\;,\;\oint_{S}\mathbf{A}\,.\,\mathbf{ds}\;,\;\int\mathbf{A}\,.\,\mathbf{ds}$$

$$\int_{V}F\;dv\;,\;\int_{\ell}F\;\mathbf{d}\ell\;,\;\oint_{S}F\;\mathbf{ds}\;,\;\int_{S}F\;\mathbf{ds}\;,\;\int_{V}\mathbf{A}\;dv$$

در ادامه به بررسی این انتگرال‌ها پرداخته و در صورت لزوم مثال‌هایی را ارائه خواهیم نمود

۱-۱۰-۱- انتگرال مسیر

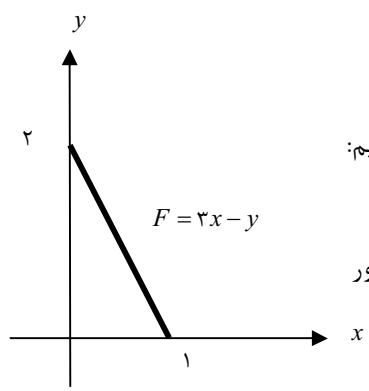
در این درس سه نوع انتگرال مسیر را در نظر می‌گیریم. انتگرال اول به شکل زیر است:

$$\int F\ d\ell = \int_{P_1,C}^{P_2} F(r)\,dt$$

c خمی است که انتگرال روی آن از نقطهٔ p_1 تا p_2 (هر دو روی c) محاسبه می‌شود. t پارامتری است که خم بر اساس آن تعریف شده ولی می‌تواند یکی از متغیرهای فضا مثلاً r,x یا φ و یا یک متغیر چهارم تعریف شود.

مثال کلیدی

مثال ۱-۱۹ تابع $F = 3x - y$ را در نظر بگیرید. مطلوب است محاسبهٔ $\int F\,d\ell$ روی مسیر زیر.



شکل ۱-۲۹: شکل مثال ۱-۱۹

حل: ابتدا معادلهٔ مسیر را محاسبه می‌کنیم: $y = -2x + 2$

با فرض $x = t$ و در نتیجه $y = -2t + 2$ ، تابع F را بدست می‌آوریم:

$$F = 3t - (-2t + 2) = 5t - 2$$

برای محاسبهٔ انتگرال باید $d\ell$ را بدست آوریم، برای این منظور کافی است به صورت زیر عمل نماییم:

$$d\ell = \sqrt{(\frac{\partial x}{\partial t})^2 + (\frac{\partial y}{\partial t})^2}\ dt = \sqrt{1 + (-2)^2}\ dt = \sqrt{5}\ dt$$

پس خواهیم داشت:

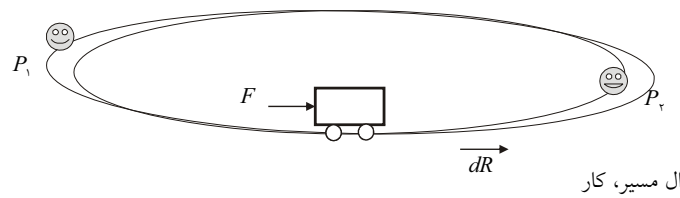
$$\int F\ d\ell = \int_0^1 (5t - 2)\sqrt{5}\ dt = \frac{5\sqrt{5}}{2} t^2 - 2\sqrt{5}\, t \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

تمرین ۱-۱۵: مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $\int F\,d\ell$ روی مسیری با معادلهٔ $x^2 + y^2 = 4$ و $x, y > 0$

برای توابع زیر:

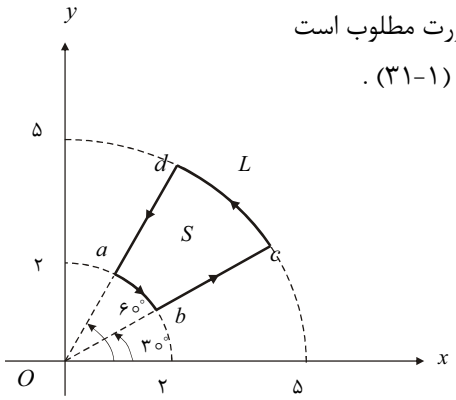
الف) $F = 3x - y$ **ب)** $F = r^2 \cos\varphi + \sin 2\varphi$

دومین انتگرال مسیر، انتگرالی به صورت $\int_{c,p_1}^{p_2} \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dR}$ است. رابطه‌ای آشنا، که میزان کار انجام شده را محاسبه می‌نماید. مسیر انتگرال بین نقطه p_1 و p_2 به عناصر کوچک $\mathbf{dR}$ تقسیم می‌شود. در هر نقطه $\mathbf{F}\,.\,\mathbf{dR}$ محاسبه می‌گردد و حاصل این ضرب‌های داخلی با هم جمع می‌شوند و در حد وقتی $\mathbf{dR} \to 0$ این جمع برابر انتگرال است. چون در حد $\mathbf{dR}$ مماس بر مسیر می‌شود این انتگرال در واقع مولفه‌های مماس بر مسیر میدان برداری $\mathbf{F}$ را به حساب می‌آورد.



شکل ۱-۳۰: انتگرال مسیر، کار

مثال ۱-۲۰ اگر $\mathbf{A} = r\cos\varphi\ \mathbf{a}_r + \sin\varphi\ \mathbf{a}_\varphi$ ، در این‌صورت مطلوب است محاسبهٔ $\oint \mathbf{A}\,.\,\mathbf{dl}$ برای مسیر نشان داده شده در شکل (۱-۳۱) .



شکل ۱-۳۱: شکل مثال ۱-۲۰

حل: می‌توانیم بگوییم که:

$$\oint_L \mathbf{A}\,.\,\mathbf{dl} = \left[\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a\right] \mathbf{A}\,.\,\mathbf{dl}$$

در طول مسیر ab همواره $r = 2$ بوده از اینرو:

$$\mathbf{dl} = -r\,d\varphi\ \mathbf{a}_\varphi = -2\,d\varphi\ \mathbf{a}_\varphi$$

پس:

$$\int_a^b \mathbf{A}\,.\,\mathbf{dl} = \int_{\varphi=60}^{30} (r\cos\varphi\ \mathbf{a}_r + \sin\varphi\ \mathbf{a}_\varphi)\,.\,(-2d\varphi\ \mathbf{a}_\varphi) = -2\cos\varphi\Big|_{60^\circ}^{30^\circ} = -(\sqrt{3}-1)$$

به همین صورت برای دیگر مسیرها خواهیم داشت:

$$\int_b^c \mathbf{A}\,.\,\mathbf{dl} = \int_{r=2}^{5} (r\cos\varphi\ \mathbf{a}_r + \sin\varphi\ \mathbf{a}_\varphi)\,.\,(dr\ \mathbf{a}_r) = \cos 30^\circ\,\frac{r^2}{2}\Big|_2^5 = \frac{21\sqrt{3}}{4}$$

$$\int_c^d \mathbf{A}\,.\,\mathbf{dl} = \int_{\varphi=30}^{60} (r\cos\varphi\ \mathbf{a}_r + \sin\varphi\ \mathbf{a}_\varphi)\,.\,(5d\varphi\ \mathbf{a}_\varphi) = -5\cos\varphi\Big|_{30^\circ}^{60^\circ} = \frac{5}{2}(\sqrt{3}-1)$$

$$\int_c^d \mathbf{A}\ .\ \mathbf{dl} = \int_{r=۵}^{۲} (r\cos\varphi\ \mathbf{a}_r + \sin\varphi\ \mathbf{a}_\varphi)\ .\ (-dr\ \mathbf{a}_r) = \cos ۶۰^\circ \left.\frac{r^۲}{۲}\right|_{۵}^{۲} = -\frac{۲۱}{۴}$$

نتیجه اینکه:

$$\oint_L \mathbf{A}\ .\ \mathbf{dl} = \frac{۲۷}{۴}(\sqrt{۳}-۱) = ۴.۹۴۱$$

تمرین ۱-۱۶: مثال (۱-۲۰) را با استفاده از قضیهٔ استوکس مجدداً حل کنید.

تمرین ۱- ۱۷: کار انجام شده توسط نیروی $\mathbf{F} = \sin\theta\cos\varphi\ \mathbf{a}_R + \cos\theta\cos\varphi\ \mathbf{a}_\theta - \sin\varphi\ \mathbf{a}_\varphi$ برای انتقال جسمی از نقطهٔ $A(۱,\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۲})$ به نقطه $B(۱,\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۴})$ را بدست آورید.

آخرین انتگرال مسیری که بررسی می‌کنیم، انتگرالی به شکل $\int_C \mathbf{F}\ dr$ است. بی‌شک این انتگرال، کاربردی‌ترین انتگرال در الکترومغناطیس و علی‌الخصوص الکترواستاتیک است. بدون این انتگرال استفاده از قانون کولن معنا ندارد، از اینرو به آن توجه زیادی نمایید. در این حالت انتگرالده $\mathbf{F}$ یک تابع برداری و $dr = |\mathbf{dr}|$ دیفرانسیل اسکالر طول است. وقتی انتگرالده بردار باشد باید توجه کرد که انتگرال بیان‌کننده یک جمع برداری است و این باید مطابق قوانین جمع برداری محاسبه شود یعنی علاوه بر اندازه‌ها باید جهت نیز در نظر گرفته شود، بنابراین داریم:

$$\int r\,z\,d\varphi\ \mathbf{a}_r \neq \mathbf{a}_r \int z\ d\varphi$$

از آنجا که به ازای φهای مختلف بردارهای $\mathbf{a}_r$ با هم تفاوت دارند پس اگر اندازهٔ بردارها را با هم جمع کنیم نتیجه صحیح بدست نمی‌آید.

نکتهٔ طلایی

پس برای محاسبه انتگرال فوق باید چه کنیم ؟

تبدیل بردار به دستگاه مختصات قائم، جاییکه بردارهای یکه $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ همیشه ثابت‌اند. بنابراین می‌توان آن‌ها را از زیر انتگرال خارج کرد و به این ترتیب انتگرالی غیر برداری بدست می‌آید. این عمل را برای دستگاه کروی نیز انجام می‌دهیم.

مثال ۱-۲۱ انتگرال زیر را روی دایره‌ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع ۲ واقع در صفحهٔ xy حساب کنید.

$$\mathbf{I} = \int r\cos\varphi\ \mathbf{a}_\varphi\ d\ell$$

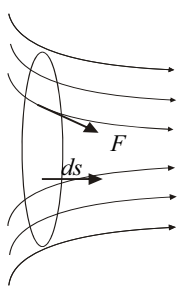
حل: $d\ell$ روی مسیر فوق به صورت $d\ell = ۲d\varphi$ خواهد بود. باید $\mathbf{a}_\varphi$ را به عوامل پایه تجزیه کنیم تا این انتگرال قابل حل شود. داریم:

$$\mathbf{a}_\varphi = -\sin\varphi\ \mathbf{a}_x + \cos\varphi\ \mathbf{a}_y$$

پس به سادگی محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbf{I} = \int r\sin\varphi\ \mathbf{a}_\varphi d\ell = \int_۰^{۲\pi} ۲\cos\varphi\ (-\sin\varphi\ \mathbf{a}_x + \cos\varphi\ \mathbf{a}_y)\ ۲\ d\varphi \Rightarrow \mathbf{I} = \mathbf{a}_y \int_۰^{۲\pi} ۴\cos^۲\varphi\ d\varphi = ۴\pi\ \mathbf{a}_y$$

۱-۱۰-۲- انتگرال سطح



شکل ۱-۳۲ – انتگرال شار

در الکترومغناطیس با سه نوع انتگرال سطح سر و کار داریم:

$$I_۱ = \int_s f\ ds \quad ، \quad I_۲ = \int_s \mathbf{F}\ .\ \mathbf{ds} \quad ، \quad \mathbf{I}_۳ = \int_s \mathbf{F}\ ds$$

انتگرال $I_۱$: یک انتگرال دو گانه ساده است، کافی است ds را یافته و سپس انتگرال را حل کنیم.

انتگرال $I_۲$:

$\mathbf{F}.\mathbf{ds}$ را می‌توان به شکل $\mathbf{F}\ .\ \mathbf{a}_n\ ds$ نوشت که در آن $\mathbf{a}_n$ بردار یکهٔ عمود بر سطح است. $\mathbf{F}\ .\ \mathbf{a}_n$ مولفه عمود بر سطح میدان برداری $\mathbf{F}$ است. پس $I_۲$ در واقع به انتگرال از نوع $I_۱$ تبدیل می‌شود که در آن f مولفهٔ عمود بر سطح $\mathbf{F}$ است. حاصل انتگرال $I_۲$ را شار میدان $\mathbf{F}$ می‌نامند. (به شکل ۱-۳۲ توجه کنید)

انتگرال $I_۳$:

برای محاسبهٔ $\mathbf{I}_۳$ همانند محاسبهٔ انتگرال مسیر $\int \mathbf{F}\ dr$ باید توجه کنیم که انتگرال بردار است و جمع موجود در انتگرال یک جمع برداری است. همچون محاسبهٔ انتگرال مسیر، باید بردار داخل انتگرال را به صورتی در آوریم که جهت بردارهایی که با هم جمع می‌شوند با تغییر متغیر انتگرالگیری تغییر نکند. این کار معمولاً با بیان بردار در دستگاه مختصات قائم انجام می‌شود.

ابتدا نکات مفید زیر را مرور کرده و سپس برای $I_۲$ و $I_۳$ مثالهایی را بررسی می‌کنیم.

سه نکته از ریاضیات

نکتهٔ طلایی

۱- معادله صفحهٔ گذرنده از سه نقطهٔ غیر واقع بر یک خط به صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (۴۱-۱)$$

نکتهٔ طلایی

۲- اگر سطح به صورت $z = f(x,y)$ داده شده باشد، برای دیفرانسیل سطح داریم:

$$ds = \sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2}\ dx\ dy \qquad (۴۲-۱)$$

نکتهٔ طلایی

۳- بردار یکهٔ عمود بر سطح S با فرم کلی $f(x,y,z) = k$ برابر است با:

$$\mathbf{a}_n = \pm \frac{\nabla f(x,y,z)}{|\nabla f(x,y,z)|} \qquad (۴۳-۱)$$

مثال ۱-۲۲ انتگرال $\int \mathbf{F}\, ds$ را روی کره‌ای به شعاع a و به مرکز مبدا مختصات برای تابع $\mathbf{F} = \frac{R\ \mathbf{a}_R}{(R^2 + h^2)}$ بدست آورید.

حل: روی سطح کره $ds = a^2 \sin\theta\ d\theta\ d\varphi$ است، پس:

$$\int \mathbf{F}\ ds = \int \int a^2 \sin\theta \left(\frac{a}{a^2 + h^2} \right) \mathbf{a}_R\ d\theta\ d\varphi$$

باید $\mathbf{a}_R$ را به عناصر پایه تجزیه کنیم:

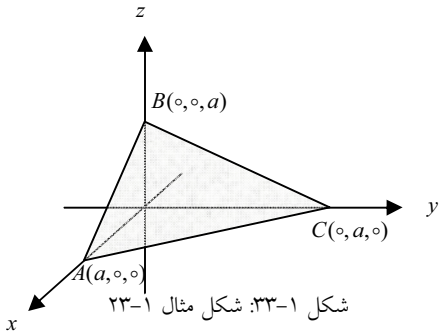
$$\int \mathbf{F}\ ds = \frac{a^3}{a^3 + h^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta \left(\sin\theta \cos\varphi\ \mathbf{a}_x + \sin\theta \sin\varphi\ \mathbf{a}_y + \cos\theta\ \mathbf{a}_z \right) d\theta\ d\varphi$$

ضرایب $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y$ صفراند، زیرا انتگرال $\sin\varphi$ و $\cos\varphi$ روی یک دورهٔ تناوب صفر است. پس:

$$\mathbf{F}\ ds = \frac{a^3}{a^2 + h^2}\ \mathbf{a}_z \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos\theta \sin\theta\ d\theta\ d\varphi = 0$$

تمرین ۱-۱۸: چگالی شار الکتریکی $\mathbf{D} = ۲\mathbf{a}_z$ است. مقدار شاری که از رویهٔ نیم‌کره‌ای به مشخصات زیر عبور می‌کند، چقدر است ؟ $R = a$ ، $۰ < \theta < \frac{\pi}{۲}$ ، $۰ < \varphi < ۲\pi$

مثال ۱-۲۳ انتگرال $\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$ را برای سطح مثلثی شکل زیر و تابع $\mathbf{F} = ۲\mathbf{a}_x$ بدست آورید.



شکل ۱-۳۳: شکل مثال ۱-۲۳

حل: بخش اصلی کار تعیین $\mathbf{ds}$ است. می‌دانیم که:

$$\mathbf{ds} = |ds|\,\mathbf{a}_n$$

از اینرو کارهای زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم.

برای معادلهٔ سطح با استفاده از رابطهٔ (۱-۴۱) داریم:

$$z = a - x - \frac{y}{۲}$$

با استفاده از رابطهٔ (۱-۴۲) خواهیم داشت:

$$ds = \sqrt{۱+۱+\frac{۱}{۴}}\; dx\; dy = \frac{۳}{۲} dx\; dy$$

با استفاده از رابطه (۱-۴۳) داریم:

$$\nabla f(x,y,z) = ۲\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + ۲\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_n = \frac{\nabla f(x,y,z)}{|\nabla f(x,y,z)|} = \frac{۱}{۳}(۲\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + ۲\mathbf{a}_z)$$

حال $\mathbf{ds}$ را می‌یابیم:

$$\mathbf{ds} = |ds|\,\mathbf{a}_n \qquad \Rightarrow \qquad ds = (\mathbf{a}_x + \frac{۱}{۲}\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)\; dx\; dy$$

پس:

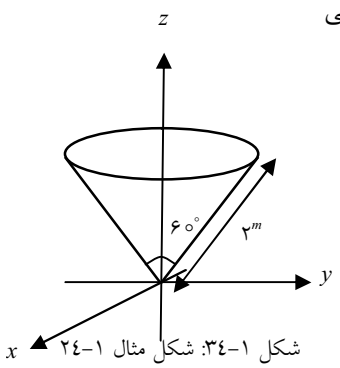
$$\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \int_۰^{۲a} \int_۰^{(a-(y/۲))} ۲\; dx\; dy = ۲a^۲$$

توضیحات تکمیلی انتگرال سطح

در انتگرال $\int \mathbf{A} \cdot \mathbf{ds}$ ، چون در امتداد عمود بر ds همواره دو جهت مخالف یکدیگر وجود دارند از اینرو مقدار $\int_s \mathbf{A} \cdot \mathbf{ds}$ (که یک کمیت اسکالر است) ممکن است + یا - محاسبه شود. به‌ویژه وقتیکه s یک سطح غیره بسته باشد، مگر آنکه نسبت به چگونگی انتخاب بردار ds اطلاعات بیشتری در اختیار باشد. اگر انتگرال روی سطح بسته‌ای انجام شود، معمول این است که بردار ds در تمام نقاط سطح به

طرف بیرون آن در نظر گرفته می‌شود. یادآوری می‌گردد که یک سطح فضا را به دو بخش متمایز تقسیم می‌کند، که یک بخش را درون و بخش دیگر را بیرون این سطح می‌نامیم.

مثال ۱-۲۴ مقدار انتگرال $\int_s \mathbf{A}\,.\,\mathbf{ds}$ که $\mathbf{A} = \frac{۱}{R}\,\mathbf{a}_\theta$ و S سطح جانبی مخروطی به طول ۲^m و زاویهٔ ۶۰° است را بدست آورید.



شکل ۱-۳۴: شکل مثال ۱-۲۴

حل: از روی شکل می‌توان **ds** را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\mathbf{ds} = R\sin ۳۰^\circ \;\; d\varphi \; dR \; \mathbf{a}_\theta = \frac{۱}{۲} R \; dR \; d\varphi \; \mathbf{a}_\theta$$

پس خواهیم داشت:

$$\int \mathbf{A}\,.\,\mathbf{ds} = \int_۰^۲ \int_۰^{۲\pi} \frac{۱}{R}\,\mathbf{a}_\theta \,.\, \frac{۱}{۲} R \; dR \; d\varphi \; \mathbf{a}_\theta = \int_۰^۲ \int_۰^{۲\pi} \frac{۱}{۲}\, dR \; d\varphi = ۲\pi$$

۱-۱۰-۳- انتگرال حجم

دقیقاً مشابه قبل است فقط باید توجه نمود که بسته به حجم مورد نظر باید دستگاه مختصات مناسبی برگزیده شود و حدود انتگرالها به نحوی مشخص گردد که dv تمام حجم را پوشش دهد.

تمرین ۱-۱۹: میدان برداری $\mathbf{F} = R\,\mathbf{a}_R$ و نیمکره $R < ۱$ ، $z > ۰$ را در نظر بگیرید، $\int \mathbf{F}\; dv$ را حساب کنید. (جواب: $\int \mathbf{F}\; dv = \frac{\pi}{۴}\,\mathbf{a}_z$)

۱-۱۱- عملگرهای برداری مکرر

۱-۱۱-۱- لاپلاسین

۱-۱۱-۱-۱- لاپلاسین اسکالر

لاپلاسین یک تابع اسکالر به صورت دیورژانسِ گرادیانِ آن تابع تعریف می‌شود. در دستگاه مختصات کارتزین لاپلاسین تابع اسکالر V را می‌توان به سهولت محاسبه نمود.

$$\boxed{\nabla^2 V = \nabla \cdot (\nabla V) = \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial z^2}} \qquad (۴۴-۱)$$

و در هر دستگاه متعامد داریم:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial V}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial V}{\partial u_1}\right)\right] \qquad (۴۵-۱)$$

تمرین ۱-۲۰: رابطهٔ لاپلاسین را برای دستگاه مختصات کروی و در حالتی که V فقط تابعی از شعاع است، محاسبه کنید.

۱-۱۱-۱-۲- لاپلاسین برداری

عملگری است که روی میدان‌های برداری عمل کرده و میدانی برداری را بدست می‌دهد و به صورت گرادیان دیورژانس، منهای کرلِ کرل آن تعریف می‌شود:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \qquad (۴۶-۱)$$

۱-۱۱-۲- دو اتحاد صفر: دسته‌بندی میدان‌های برداری

در این قسمت دو اتحاد که در آنها عملگر دل به صورت مکرر به کار رفته را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این اتحادها همواره برابر صفر بوده و در حوزهٔ الکترومغناطیس دارای مفهوم فیزیکی هستند.

۱-۱۱-۲-۱- اتحاد I

کرل گرادیان هر میدان عددی متحد با صفر است.

$$\boxed{\nabla \times (\nabla V) = 0} \qquad (۴۷-۱)$$

اگر یک میدان برداری بدون کرل باشد، آنگاه می‌تواند به صورت گرادیان یک میدان عددی بیان شود. فرض کنید $\mathbf{E}$ میدان برداری باشد آنگاه اگر $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ باشد، می‌توانیم میدان عددی V را چنان تعریف کنیم که:

$$\mathbf{E} = -\nabla V \qquad (۴۸-۱)$$

نکتهٔ طلایی

✓ هر میدان بدون کرل را یک میدان برداری غیرگردشی، ابقایی یا کنسرواتیو می‌نامیم.

توجیه علامت منفی رابطهٔ (۱-۴۸): اگر در جهت عکس میدان الکتریکی حرکت کنیم، پتانسیل زیاد می‌شود.

۱-۱۱-۲-۲- اتحاد II

دیورژانس کرل هر میدان برداری متحد با صفر است:

$$\boxed{\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0} \qquad (۱-۴۹)$$

اگر بخواهیم بدون هیچ توضیحی این رابطه را بپذیریم، کافی است به خاطر آوریم که $a \cdot (a \times b) = 0$، در این حالت عملگر دل همچون بردار a عمل می‌کند. اگر یک میدان برداری بدون دیورژانس باشد، آنگاه می‌توان آنرا به صورت کرل میدان برداری دیگری بیان کرد. فرض کنید این میدان برداری $\mathbf{B}$ باشد، این بیانِ وارونه مشخص می‌کند که اگر $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ باشد، میدان برداری $\mathbf{A}$ را می‌توان چنان تعریف نمود که $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

نکتهٔ طلایی

✓ یک میدان بدون دیورژانس را یک میدان سلونوئیدی نامند.

شار خالص خروجی یک میدان سلونوئیدی از هر سطح بسته صفر است و خطوط شار روی خود بسته می‌شوند. چگالی شار مغناطیسی $\mathbf{B}$ سلونوئیدی است و می‌تواند به صورت کرل میدان برداری دیگری (که پتانسیل مغناطیسی برداری $\mathbf{A}$ نیز نامیده می‌شود) بیان گردد.

تمرین ۱-۲۱: منبع تولید بردارهای زیر را بدست آورید و مشخص کنید کدام بردار، منبع تولید آن اسکالر و کدام بردار منبع تولید آن برداری است؟

الف) $\mathbf{H} = \dfrac{1}{2\pi r}\mathbf{a}_\varphi$

ب) $\mathbf{A} = (3y^2 - 2x)\,\mathbf{a}_x + x^2\,\mathbf{a}_y + 2z\,\mathbf{a}_z$

پ) $\mathbf{B} = z^2 \sin\varphi\,\mathbf{a}_r + z^2\cos\varphi\,\mathbf{a}_\varphi + 2rz\sin\varphi\,\mathbf{a}_z$

ت) $\mathbf{C} = \sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{a}_R + \cos\varphi\cos\theta\,\mathbf{a}_\theta - \sin\varphi\,\mathbf{a}_\varphi$

POWEREN.IR

۱-۱۲- قضیهٔ هلم‌هولتز

- دیورژانس یک بردار را می‌توان به عنوان منبع فورانی و کرل آن را به عنوان منبع گردابی آن میدان برداری تلقی کرد.
- قضیهٔ هلم‌هولتز بیان می‌دارد که اگر دیورژانس و کرل یک بردار در کلیهٔ نقاط فضا معلوم باشند آن بردار را می‌توان به طور کامل تعیین نمود بعبارت دیگر اگر منابع بوجود آورندهٔ یک میدان معلوم باشند آن میدان به طور کامل قابل محاسبه است:

$$\mathbf{F} = -\nabla V + \nabla \times \mathbf{A} \qquad (۱-۵۰)$$

مثال‌های (۱-۲۵) و (۱- ۲۶) که در ادامه می‌آیند بخشی از کاربرد این قضیه را در درک میدان‌ها نشان خواهند داد.

مثال ۱-۲۵ تابع برداری زیر مفروض است: [۱]

$$\mathbf{F} = \mathbf{a}_x(۳y - c_۱ z) + \mathbf{a}_y(c_۲ x - ۲z) - \mathbf{a}_z(c_۳ y + z)$$

الف) اگر $\mathbf{F}$ غیرگردشی باشد، ثابت های $c_۱, c_۲, c_۳$ را تعیین کنید.

ب) تابع پتانسیل عددی V را چنان بیابید که $-\nabla V$ برابر $\mathbf{F}$ گردد.

حل: **الف)** تابع $\mathbf{F}$ غیرگردشی است یعنی کرل آن صفر است. پس:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ ۳y - c_۱ z & c_۲ x - ۲z & -(c_۳ y + z) \end{vmatrix} = ۰ \quad \Rightarrow \mathbf{a}_x(-c_۳ + ۲) - \mathbf{a}_y(c_۱) + \mathbf{a}_z(c_۲ - ۳) = ۰$$

که نتیجه می‌دهد:

$$c_۳ = ۲ \quad , \quad c_۱ = ۰ \quad , \quad c_۲ = ۳$$

ب) باید داشته باشیم: $\mathbf{F} = -\nabla V$. آن را بیان کرده و معادله را حل می‌کنیم:

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\mathbf{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} - \mathbf{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} - \mathbf{a}_z \frac{\partial V}{\partial z} = ۳y\,\mathbf{a}_x + (۳x - ۲z)\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z(۲y + z)$$

در نهایت خواهیم داشت:

$$V = ۲yz - ۳xy + \frac{۱}{۲}z^۲$$

مثال ۱-۲۶ مطلوب است ارائهٔ مثالی برای میدان‌های زیر . [۱]

الف) سلونوئیدی و غیرگردشی. $(\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \ , \nabla \times \mathbf{F} = 0)$

ب) سلونوئیدی اما گردشی. $(\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 , \nabla \times \mathbf{F} \neq 0)$

پ) غیرگردشی اما غیرسلونوئیدی. $(\nabla \times \mathbf{F} = 0 \ , \ \nabla \cdot \mathbf{F} \neq 0)$

ت) گردشی و غیرسلونوئیدی.$(\nabla \cdot \mathbf{F} \neq 0 \ , \nabla \times \mathbf{F} \neq 0)$

حل: الف) میدان الکتریکی ساکن در ناحیهٔ تهی از بار .

ب) میدان مغناطیسی دائم در یک هادی حامل جریان.

پ) میدان الکتریکی ساکن در ناحیه‌ای باردار .

ت) میدان الکتریکی در ناحیهٔ باردار به همراه یک میدان مغناطیسی متغیر با زمان.

۱-۱۳- توابع برداری کنسرواتیو

توابع برداری مانند $\mathbf{F}$ که کار انجام شده توسط آن به مسیر حرکت بستگی دارد به توابع برداری غیرابقایی، غیرکنسرواتیو، غیرپایستار و یا چرخشی موسوم‌اند. اگر تابع برداری ابقایی یا غیرچرخشی باشد (یعنی کرل آن صفر باشد) بدان معنی است که کار انجام شده به مسیر حرکت بستگی ندارد، بنابراین برای محاسبهٔ کار انجام شده می‌توانیم از مسیری استفاده کنیم که انتگرال ساده‌تری را نتیجه دهد. برای توابع برداری ابقایی بهترین مسیر جهت انتگرال‌گیری و محاسبهٔ کار انجام شده، بشرطی که تابع برداری در طول مسیر معین و پیوسته باشد، بصورت زیر انتخاب می‌گردد:

در درجهٔ اول: انتخاب مسیری که یک متغیر از دستگاه مورد نظر تغییر کند و دو متغیر دیگر صفر باشند.

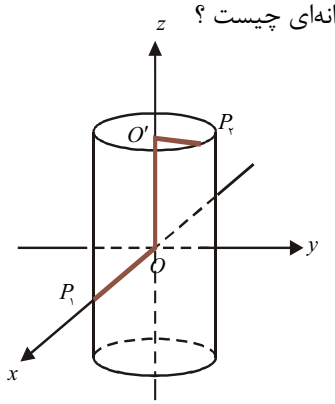
در درجهٔ دوم: انتخاب مسیری که یک متغیراز دستگاه مورد نظر تغییر کند و یک متغیر ثابت و دیگری صفر باشد.

در درجهٔ سوم: انتخاب مسیری که یک متغیر از دستگاه مورد نظر تغییر کند و دو متغیر دیگر ثابت باشند.

تذکر: ملاک برای انتخاب دستگاه تابع داده شده نیست، بلکه مسیر سطح یا حجم مشخص شده در سوال است.

به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱-۲۷ اگر بدانیم تابع نیروی داده شده ابقایی است، بهترین مسیر برای محاسبهٔ کار انجام شده بین نقاط $P_1(5,0,0)$ ، $P_2(10^{cm},60^\circ,20^{cm})$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای چیست ؟



شکل ۱-۳۵: شکل مثال ۱-۲۷

حل: این مسیر را این‌گونه انتخاب می‌کنیم: مسیری که از P_1 مستقیم به مبداء مختصات (o) و سپس روی محور z ها به نقطهٔ (o') با $\varphi = 60^\circ$ و $z = 20$ به نقطهٔ p_2 می‌رود. (مسیر $P_1oo'P_2$).

تذکر:

اگر تابع نیرو $\mathbf{F} = \frac{k_1}{r}\,\mathbf{a}_r + k_2\,\mathbf{a}_z$ باشد، نمی‌توان برای مسیر ابتدا از p_1 به مبداء رفت چون در $r = 0$ تابع نیروی F نامعین است پس مسیر $P_1oo'P_2$ مسیر مناسبی نیست و مسیری که از p_1 به M $(\varphi = 0, z = 0)$ و از M به N $(r = 10, z = 0)$ سپس از N به P_2 $(r = 10, \varphi = 60)$ می‌رود، یعنی (P_1MNP_2) مناسب است. (مسیر مورد نظر را بر روی شکل ۱-۳۵ رسم کنید!)

مثال ۱-۲۸ بردار $\mathbf{A} = \frac{2\cos\theta}{R^3}\mathbf{a}_R + \frac{\sin\theta}{R^3}\mathbf{a}_\theta$ در مختصات کروی مفروض است در این صورت $\int_B^C \mathbf{A}\,.\,\mathbf{d}\ell$ که مختصات C, B در دستگاه کروی به صورت $B = (2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$ و $C = (1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6})$ می‌باشند، را محاسبه کنید.

حل: معمولا در اینگونه سوالات $\mathbf{A}$ یک نیروی کنسراواتیو بوده و به مسیر حرکت وابسته نیست از اینرو با محاسبهٔ $\mathbf{A}\,.\,\mathbf{d}\ell$ در می‌یابیم که نسبت به یک جملهٔ آن مشتق گرفته شده و در اینصورت انتگرال براحتی ساده می‌شود. اگر اینگونه نبود باید مسیرها را می‌شکستیم و مسیرهای جداگانه‌ای تعریف می‌نمودیم (تمرین ۱-۲۲):

$$\int_B^c \mathbf{A}\,.\,\mathbf{d}\ell = \int_B^c \left(\frac{2\cos\theta}{R^3}\,\mathbf{a}_R + \frac{\sin\theta}{R^3}\,\mathbf{a}_\theta\right)\,.\,\left(dR\,\mathbf{a}_R + R\,d\theta\,\mathbf{a}_\theta + R\sin\theta\,d\varphi\,\mathbf{a}_\varphi\right)$$

$$\int_B^C \frac{۲\cos\theta}{R^۳}\, dR + \frac{\sin\theta}{R^۲}\, d\theta = \int_B^C d\left(\frac{-\cos\theta}{R^۲}\right) = \frac{-\cos\theta}{R^۲}\Bigg|_{(۲,\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۴})}^{(۱,\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۶})} = -\frac{\cos\frac{\pi}{۲}}{۱} + \frac{\cos\frac{\pi}{۳}}{۴} = \frac{۱}{۸}$$

تمرین ۱-۲۲: مثال (۱-۲۸) را با انتخاب مسیرهای مناسب مجدداً حل کنید.

۱-۱۴- تئوری انتگرال گرین

فرض کنید که $\mathbf{F} = f\,\nabla g$ آنگاه طبق قضیهٔ دیورژانس نتیجه می‌گیریم که:

$$\oint f\ \nabla g \,.\, \mathbf{ds} = \int \nabla \,.\, (f\ \nabla g)\ dv$$

با استفاده از اتحاد برداری $\nabla \,.\, (f\ \nabla g) = f\ \nabla^۲ g + \nabla f \,.\, \nabla g$ بدست می‌آوریم:

$$\oint f\ \nabla g \,.\, \mathbf{ds} = \int (f\ \nabla^۲ g + \nabla f \,.\, \nabla g)\ dv$$

به صورت مشابه، اگر $\mathbf{G} = g\,\nabla f$ باشد، داریم:

$$\oint g\,\nabla f \,.\, \mathbf{ds} = \int (g\,\nabla^۲ f + \nabla f \,.\, \nabla g)\ dv$$

اگر دو معادلهٔ آخر را از هم کم کنیم، خواهیم داشت:

$$\oint_S (f\ \nabla g - g\,\nabla f)\ .\ \mathbf{ds} = \int_V (f\ \nabla^۲ g - g\,\nabla^۲ f)\ dv \qquad (۵۱\text{-}۱)$$

این رابطه به قضیهٔ متقارن گرین معروف است و در بسیاری از مسائل شرایط مرزی به کار می‌رود، از طرفی این رابطه اساس ساده‌سازی و دستیابی به قضیه هم‌پاسخی گرین است که کاربرد فراوانی در محاسبهٔ بار القایی در اجسام مختلف و علی‌الخصوص هادی‌ها دارد.

مثال ۱-۲۹ اگر $\mathbf{A}$ برداری ثابت و $\mathbf{R}$ بردار مکان باشد و بردار $\mathbf{V}$ به صورت $\mathbf{V} = \mathbf{R}\,(\mathbf{A}\,.\,\mathbf{R})$ تعریف شود نشان دهید که: [۸]

الف) $\nabla .\, \mathbf{V} = ۴(\mathbf{A}\,.\,\mathbf{R})$ ب) $\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{A} \times \mathbf{R}$

حل:

الف) با توجه به اتحاد زیر که در آن φ یک تابع عددی است، داریم:

$$\boxed{\nabla\cdot(\varphi\,\mathbf{E})=\varphi\,\nabla\cdot\mathbf{E}+\mathbf{E}\cdot\nabla\varphi} \qquad (۵۲-۱)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R})\,(\nabla\cdot\mathbf{R})+\mathbf{R}\cdot\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R})$$

از طرفی برای $\nabla\cdot\mathbf{R}=۳$، پس:

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=۳(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R})+(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R})=۴(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R})$$

ب) از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم:

$$\boxed{\nabla\times(\varphi\,\mathbf{M})=\varphi\,\nabla\times\mathbf{M}+\nabla\varphi\times\mathbf{M}} \qquad (۵۳-۱)$$

پس:

$$\nabla\times\left[(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R})\,\mathbf{R}\right]=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R})\,\nabla\times\mathbf{R}+\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R})\times\mathbf{R}$$

از طرفی $\nabla\times\mathbf{R}=۰$، در نتیجه:

$$\nabla\times\mathbf{V}=\mathbf{A}\times\mathbf{R}$$

تمرین ۱-۲۳: در مورد توابع برداری دیفرانسیل پذیر $\mathbf{E}$ و $\mathbf{H}$ ثابت کنید:

$$\boxed{\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{E})-\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})} \qquad (۵۴-۱)$$

تمرین ۱-۲۴: می‌خواهیم با استفاده از اتحاد برداری زیر نشان دهیم که $\mathbf{F}=\nabla(\mathbf{P}\cdot\mathbf{E})=(\mathbf{P}\cdot\nabla)\mathbf{E}$ درست است.

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{A} \qquad (۵۵-۱)$$

در اینصورت:

الف) چه شرایطی برای بردارهای $\mathbf{P}$ و $\mathbf{E}$ لازم است برقرار باشد.

ب) برقراری این شرایط چه مفهومی دارد؟

۱-۱۵- انتگرالهای مهم

انتگرال‌هایی که در حل مسائل الکترومغناطیس کاربرد زیادی دارند در زیر ارائه شده‌اند. انتگرالگیری یکی از بخش‌های حل اغلب سوالات این درس است، از اینرو نسخهٔ کامل‌تری از این انتگرال‌ها به همراه روابط مورد نیاز در پیوست آخر کتاب آورده شده تا در دسترسی به آنها سهولت بیشتری ایجاد گردد. با این حال انتگرال‌های زیر بسیار کاربردی‌اند و دانستن آنها ضروری است.

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} \tag{۱-۵۶}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+a^2}} \tag{۱-۵۷}$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) \tag{۱-۵۸}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) \tag{۱-۵۹}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2} \tag{۱-۶۰}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \tag{۱-۶۱}$$

$$\int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \ln\left(\sqrt{x^2+a^2}\right) \tag{۱-۶۲}$$

$$\int \frac{x^2dx}{x^2+a^2} = x - a\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \tag{۱-۶۳}$$

$$\int u'u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} \tag{۱-۶۴}$$

۱-۱۶- مسائل پایان فصل

۱- دو بـردار $\mathbf{A}=\frac{200}{R^2}\mathbf{a}_R+\frac{8}{2+2\sqrt{2}\cos\theta}\mathbf{a}_\theta+\frac{8+4\sqrt{2}\sin\theta}{2+3\tan\varphi}\mathbf{a}_\varphi$ و $\mathbf{B}=\frac{100}{r^2}\mathbf{a}_r-\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}\mathbf{a}_\varphi+2\mathbf{a}_z$ در نقطه $(3,4,5)$ داده شده‌اند. **اولاً** این دو بردار را در دستگاه قائم بیان کرده و **ثانیاً** زاویهٔ بین ایـن دو بردار را بدست آورید.

۲- بردار $\mathbf{A}=(-6\cos\varphi-3z)\mathbf{a}_r-(2r+4\sqrt{3}\sin\varphi)\mathbf{a}_\varphi+(8r-2z)\mathbf{a}_z$ و $\mathbf{B}=-2\sqrt{3}\sin\varphi\,\mathbf{a}_r+8\cos\varphi\,\mathbf{a}_z$ داده شده‌اند. بردار یکه‌ای که بر هر دو در نقطهٔ $(1,\frac{2\pi}{3},-1)$ عمود است را بدست آورید.

مثال کلیدی

۳- مطلوب است محاسبهٔ dl برای مسیرهای زیر:

الف) روی مرز دایره‌ای به شعاع a **ب)** مسیری با معادلهٔ $y=-2x+2$

(تذکر: برای مورد اول پاسخ را هم در قالب دستگاه کارتزین و هم دستگاه استوانه‌ای بیان کنید)

۴- ارتفاع تپه‌ای با رابطهٔ $h=10-x^2-3y^2$ مدلسازی می‌شود. توپی بدون داشتن اصطحکاک با ایـن سطح از بالاترین نقطه به سمت پایین رها می‌شـود. نقطـه‌ای را کـه در آن، بیـشترین تغییـر ارتفـاع در کمترین تغییرات در سطح افق اتفاق می‌افتد را بیابید.

۵- با مشتق‌گیری مستقیم نشان دهید که $\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=-\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)$ ، که در آن:

$$R=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

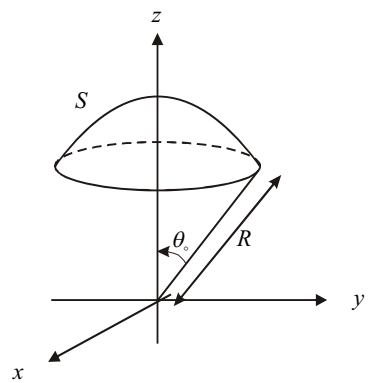
و علامت ∇' نشان‌دهندهٔ گرادیان نسبت به متغیرهای x'، y' و z' است.

۶- با استفاده از یک هشتم کره‌ای به شعاع a قضیهٔ دیورژانس را برای تابع زیر بررسی کنید.

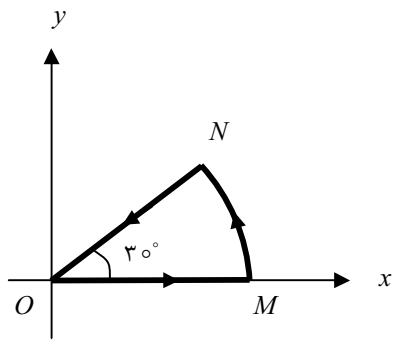
$$\mathbf{F}=R^2\cos\theta\,\mathbf{a}_R+R^2\cos\varphi\,\mathbf{a}_\theta-R^2\cos\theta\sin\varphi\,\mathbf{a}_\varphi$$

۷- میدان بـرداری $\mathbf{A}=x^2y\,\mathbf{a}_x+2x\,\mathbf{a}_y$ را در نظـر بگیریـد. صـحت قـضیهٔ اسـتوکس را روی سـطح $OMNO$ در شکل (۱-۳۶) بررسی کنید.

۸- مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ برای سطح شکل (۱-۳۷) و تابع برداری $\mathbf{E} = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ R^۲}\mathbf{a}_R$.



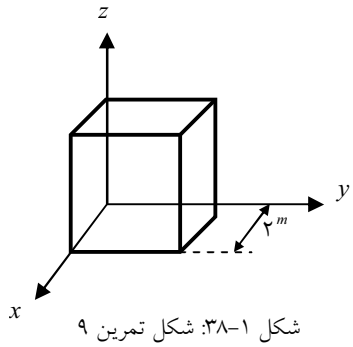
شکل ۱-۳۷: شکل تمرین ۸



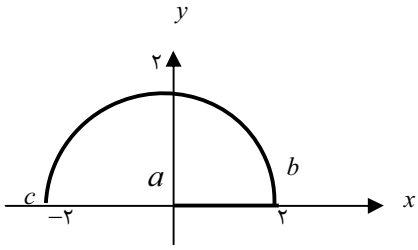
شکل ۱-۳۶: شکل تمرین ۷

۹- کار لازم جهت جابه‌جایی جرم m در مقابل نیروی $\mathbf{F} = r\,\mathbf{a}_r + r\,\varphi\,\mathbf{a}_\varphi$ را در امتداد مسیر abc شکل (۱-۳۸) بیابید.

۱۰- انتگرال سطح بستهٔ $\oint \mathbf{A}.\mathbf{dS}$ را برای تابع برداری $\mathbf{A} = x\,\mathbf{a}_x + y\,\mathbf{a}_y$ و سطح مکعب شکل (۱-۳۹) بیابید. با استفاده از قضیهٔ دیورژانس صحت پاسخ خود را اثبات کنید.



شکل ۱-۳۸: شکل تمرین ۹



شکل ۱-۳۹: شکل تمرین ۱۰

مثال کلیدی

۱۱- با توجه به میدان‌های برداری $\mathbf{E}_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{a}_z$ و $\mathbf{E}_2 = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{a}_z$ و همچنین سطوح S_1 و S_2 شکل (۱-۴۰)، اثبات کنید که:

$$\oint_{S_1} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{d}s + \oint_{S_2} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{d}s = 0$$

۱۲- انتگرال $\int \mathbf{A}\, ds$ را برای میدان برداری $\mathbf{A} = r^2 \sin\varphi\, \mathbf{a}_r - r\cos\varphi\, \mathbf{a}_\varphi$ و سطوح S_1 و S_2 از شکل (۱-۴۱) که استوانه‌ایست به ارتفاع l و شعاع a در فضای $x>0$ ، $y>0$ و $z>0$ محاسبه کنید. [۸]

۱۳- بردار $\mathbf{F} = 2x\, \mathbf{a_x} - y\, \mathbf{a_y} + 3xz\, \mathbf{a_z}$ داده شده است. مطلوب است:

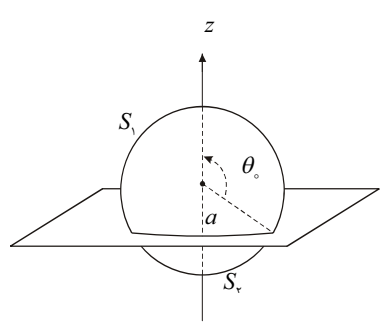
الف) $\int_{A(1,2,3)}^{B(-1,1,3)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl}$ که مسیر انتگرال‌گیری خطی است که A را به B وصل می‌کند.

ب) $\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS}$ که S سطح استوانه‌ای به شعاع ۲ که قاعده‌های آن در صفحات $z=-2$ و $z=2$ می‌باشند.

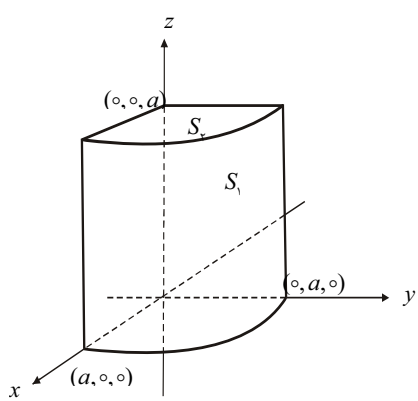
ج) $\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS}$ که S سطح جانبی مخروطی به طول ۲ متر و زاویه 60° درجه است.

۱۴- انتگرال میدان برداری زیر را روی نیم‌دایره‌ای به مرکز $(0,1,0)$ و شعاع ۱ در نیم‌صفحهٔ x^+ محاسبه کنید.

$$\mathbf{A} = r^2 z\, \mathbf{a}_r + \sin\varphi\, \cos\varphi\, \mathbf{a}_\varphi + r^2 \cos^2\varphi\, \mathbf{a}_z$$



شکل ۱-۴۰: شکل تمرین ۱۱



شکل ۱-۴۱: شکل تمرین ۱۲

۱۵- انتگرال میدان برداری زیر را روی مسیری که از برخورد $y = x^{۲}$ $z = ۱$ حاصل می‌شود از نقطهٔ $(۰,۰,۱)$ تا نقطهٔ $(۲,۴,۱)$ محاسبه کنید .

$$\mathbf{F} = ۱۰x\,\mathbf{a}_x - ۵x^{۲}y\,\mathbf{a}_y + ۳yz^{۲}\,\mathbf{a}_z$$

۱۶- میدان برداری $\mathbf{E} = \dfrac{\cos^{۲}\varphi}{R^{۳}}\mathbf{a}_R$ را در کل فضا در نظر بگیرید.

الف) قضیهٔ دیورژانس را در ناحیهٔ بین دو پوستهٔ کروی $R = ۱$ و $R = ۲$ تحقیق کنید.

ب) قضیهٔ دیورژانس را برای کره‌ای به شعاع $R = ۳$ تحقیق کنید. آیا قضیه برقرار است؟ چرا؟

پ) برای حل مشکل قسمت ب از قضیهٔ مانده‌ها استفاده کنید.

مثال کلیدی

۱۷- دیورژانس یک میدان برداری صفر است. این میدان چه فرم‌هایی می‌تواند داشته باشد؟ (تذکر: تمام دستگاه‌ها را در نظر بگیرید.)

مثال کلیدی

۱۸- آب جاری شده در کانالی با مرزهای $x = ۰$ و $x = a$ توزیع سرعتی به صورت زیر دارد:

$$v(x,z) = \left[\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲} - \left(x - \frac{a}{۲}\right)^{۲}\right] z^{۲}\,\mathbf{a}_y$$

کف رودخانه در $z = ۰$ قرار دارد. یک پاروی پره‌دار کوچک در امتداد محور z به این کانال وارد شده و می‌تواند آزادانه چرخش کند. نرخ چرخش نسبی پارو را در نقاط زیر بیابید:

$$\left(x = \frac{a}{۴}, z = ۱\right), \left(x = \frac{a}{۲}, z = ۱\right), \left(x = \frac{۳a}{۴}, z = ۱\right)$$

آیا در صورتی که پره‌های پارو در امتداد محور x یا y باشد، بچرخش در می‌آید.

مثال کلیدی

۱۹- می‌دانیم بردار مکان در دستگاه استوانه‌ای بصورت $\mathbf{R} = r\,\mathbf{a}_r + z\,\mathbf{a}_z$ می‌باشد، از طرفی مفهوم بردار مکان بدین‌گونه است که می‌توان هر نقطهٔ دستگاه مذکور را با آن نمایش داد. حال سوال اینجاست که اگر قبول داریم بردار مکان می‌تواند مختصات هر نقطه را بصورت منحصر به فرد نمایش دهد، با توجه به اینکه در بردار فوق فقط کمیات r و z دیده می‌شوند، چه احتیاجی است که در تعریف دستگاه استوانه از r ، φ و z استفاده شود و در واقع آیا نیازی به تعریف کمیت φ داریم یا نه؟ و اگر

داریم پس جایگاه آن در بردار مکان کجاست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا عدم یکتایی جهت را در دستگاه استوانه‌ای درک می‌کنید؟

۲۰- بیانی مشابه آنچه در مسئلهٔ ۱۹ آمد را در مورد دستگاه کروی تشریح کنید.

۲۱- می‌خواهیم با استفاده از اتحاد برداری زیر نشان دهیم که $\mathbf{F}=\nabla(\mathbf{P}\,.\,\mathbf{E})=(\mathbf{P}\,.\nabla)\mathbf{E}$ درست است.

$$\nabla(\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B})=\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})+(\mathbf{A}\,.\nabla)\mathbf{B}+(\mathbf{B}\,.\nabla)\mathbf{A}$$

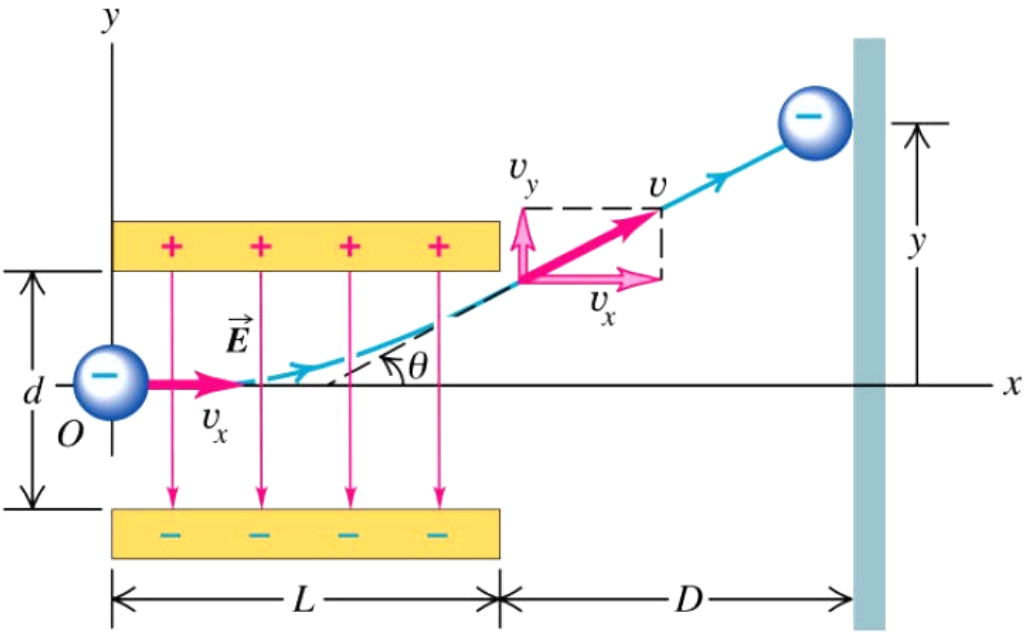
در اینصورت:

الف) چه شرایطی برای بردارهای $\mathbf{P}$ و $\mathbf{E}$ لازم است برقرار باشد.

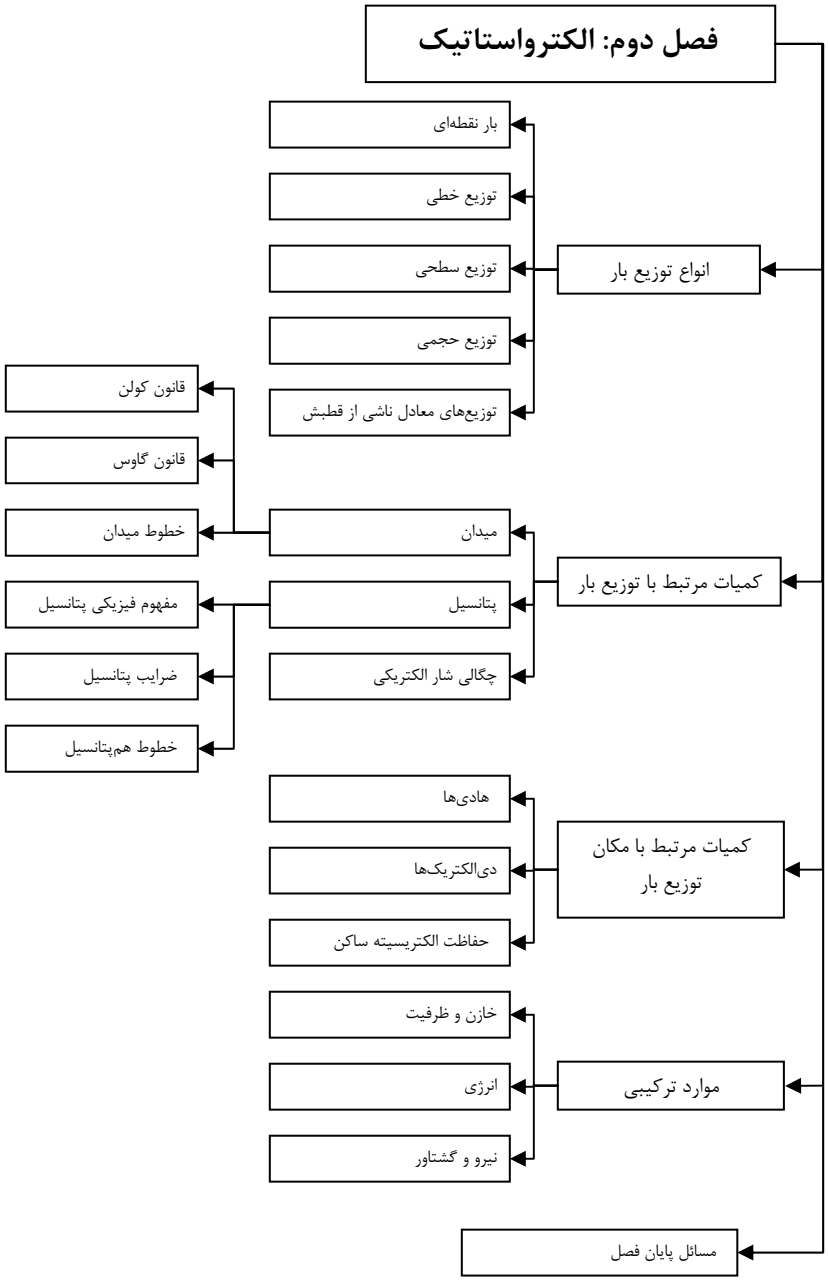
ب) برقراری این شرایط چه مفهومی دارد؟

POWEREN.IR

یادداشت: .....



فصل دوم : الکترواستاتیک


فصل دوم: الکترواستاتیک
انواع توزیع بار
بار نقطه‌ای
توزیع خطی
توزیع سطحی
توزیع حجمی
توزیع‌های معادل ناشی از قطبش
کمیات مرتبط با توزیع بار
میدان
پتانسیل
چگالی شار الکتریکی
قانون کولن
قانون گاوس
خطوط میدان
مفهوم فیزیکی پتانسیل
ضرایب پتانسیل
خطوط هم‌پتانسیل
کمیات مرتبط با مکان توزیع بار
هادی‌ها
دی‌الکتریک‌ها
حفاظت الکتریسیته ساکن
موارد ترکیبی
خازن و ظرفیت
انرژی
نیرو و گشتاور
مسائل پایان فصل

۲-۱- مقدمه

اکثر تجهیزات و دستگاه‌هایی که هر روز با آنها سروکار داریم را می‌توان با تقریب‌های ساده‌ای مدل کرد. (از موتورها و ژنراتورها گرفته تا خطوط انتقال نیرو و انتقالِ امواج و نیز ادوات مخابراتی) آنچه تمام این مدل‌ها را به هم مرتبط کرده **میدان** است. میدان در اکثر سیستم‌ها نقش پیونددهنده دارد و انواع آن عبارتند از:

الف) میدان الکتریکی ساکن **ب)** میدان مغناطیسی **ج)** میدان الکترومغناطیسی

درس الکترومغناطیس بنا دارد تا با بررسی انواع میدان‌ها راهکار کلی طراحی و فهم این مدل‌ها و تجهیزات را به ما بیاموزد. آنچه این میدان‌ها را ایجاد کرده بارهای الکتریکی‌اند، از اینرو **الکترومغناطیس را مطالعهٔ تاثیرات بارهای الکتریکی ساکن و متحرک (جریان) می‌نامیم**.

بررسی تاثیرات بارهای الکتریکی ساکن تحت عنوان الکترواستاتیک در این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این فصل قصد داریم تا انواعِ این بارها و آرایش‌های مختلفِ آنها را یادگرفته و روش محاسبهٔ میدان‌ها (هدف اصلی فصل) و کمیات مرتبط با آن را بیان کنیم. آشنایی کاملی که از آنالیز برداری کسب کرده‌ایم را در حل مسائل بکار می‌گیریم و قواعد مطرح شده در فصل پیش را به صورت فیزیکی درک خواهیم کرد.

در قسمت اول با بیان فرضیات اساسی الکترواستاتیک شرایط اصلی این حوزه را مطرح می‌کنیم، سپس با طرح قانون کولن با مفهوم میدان آشنا می‌شویم. در ادامه نیز با بیان روش‌های محاسبهٔ میدان، درک کاملی از این حوزه کسب کرده و با اتکاء به این موضوع مفاهیم دیگری از الکتریسیته ساکن بررسی می‌شوند. در طول فصل سعی شده با ارائهٔ مطالب اساسی و پرهیز از گزافه‌گویی، اصل مطلب بیان شود، از اینرو ناچارا قسمت‌هایی را نادیده گرفته‌ایم. این عمل موجب پیوستگی بیشتر مطالب شده است، با این همه از اهمیت آنها غافل نشده‌ایم و آنها را در پیوست جامعی در پایان فصل گنجانده‌ایم. پیوست حاوی قسمت‌های مهمی است که پس از مطالعهٔ کامل فصل بایستی به آنها مراجعه شود. این موارد عموماً شامل روش‌هایی برای حل ساده‌تر مسائل و بیان مفاهیم فیزیکی (همچون روش کار مجازی نیرو) است که کاربرد زیادی در درسهای دیگر دارند. با توجه به فیزیکی بودن بحث در طول فصل و به فراخور موضوع پرسش‌هایی نیز مطرح می‌گردند، تا جهت‌دهی مناسبی را به طرز فکرمان از این موضوعات ارائه دهند. این پرسش‌ها به صورت یکجا در پایان فصل نیز آمده‌اند.

۲-۲- قانون کولن و فرضیات اصلی الکتریسیته ساکن

پدیده‌ای که منجر به مطالعهٔ الکترواستاتیک شد به زمان‌های کهن باز می‌گردد. در سال ۶۰۰ قبل از میلاد مسیح، تالس مشاهد کرد که مالش کهربا بر سطح لباس موجب صدور روشنایی از سطح میلهٔ کهربا می‌شود. بعدها نیز مشاهده شده که مالش میلهٔ شیشه‌ای بر لباس ابریشمی و یا درآوردن

سریع لباس پشمی همین اثر را ایجاد می‌کند. امروزه این موضوع را با آشکارشدن الکترون تحت فرآیندی که به جرم، طول و زمان وابسته است، توجیه می‌کنیم. اولین آزمایش‌های تجربی که این موضوع را روشن کرد با نام کولن ثبت شده‌است. قانون تجربی کولن بیان می‌دارد که نیروی بین دو جسم باردار q_1 و q_2 که در فاصلهٔ R از هم قرار دارند به صورت مقابل است:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{R^2}\,\mathbf{a}_{R_{12}} \qquad (1\text{-}2)$$

که در آن:

$\mathbf{F}_{12}$: نیروی وارد شده بر بار ۱ توسط بار ۲

R: فاصلهٔ دو بار

$\mathbf{a}_{R_{12}}$: بردار یکهٔ جهت بین دو بار

نکتهٔ طلایی

توانایی قانون کولن در بیان و توجیه همهٔ کمیات حوزهٔ الکترواستاتیک مهمترین دلیلی است که ما را متقاعد می‌سازد تا از یک قانون تجربی برای شروع کار استفاده کنیم. از اینرو در این قسمت، با استفاده از آن با چند عنوان مهم در الکترواستاتیک آشنا شده و در بخش‌های بعدی فصل به طور کامل در مورد این مطالب بحث خواهیم نمود.

شدت میدان الکتریکی

وقتی برای مشاهدهٔ وزنمان بالای ترازو می‌ایستیم، در محاسبهٔ وزن خود به جرم زمین، جرم خودمان و فاصلهٔ ما تا زمین کاری نداریم! فقط فرض می‌کنیم که میدان جاذبه‌ای موجود است که از ضرب آن در کمیتی معین، وزن ما بدست می‌آید. برای میدان الکتریکی نیز به صورت مشابهی عمل می‌کنیم. طبق تعریف، شدت میدان الکتریکی به صورت نیرو بر واحد بار تعریف می‌شود (همواره فرض می‌کنیم این بارِ آزمون آنقدر کوچک است که توزیع بار منبع را تغییر ندهد (مثل اثر جرم ما نسبت به جرم زمین)):

$$\mathbf{E} = \lim_{q\to 0}\frac{\mathbf{F}}{q} \xrightarrow{(1,2)} \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\,\mathbf{a}_R \qquad (2\text{-}2)$$

فرضیات اصلی الکترواستاتیک

در قسمت قبل با میدان الکتریکی ساکن آشنا شدیم. همانطور که دیدیم، شدت میدان الکتریکی، کمیتی برداری است، پس برای بررسی آن به ابزار برداری نیازمندیم. فرضیات اصلی الکتریسیتهٔ ساکن تعیین کنندهٔ شرایط لازم و همیشگی یک میدان الکتریکی ساکن می‌باشد، در حقیقت این شرایط منحصرا در میدان‌های الکتریکی ساکن برقرار است. برای بررسی این شرایط از

اپراتورهای برداری نظیر (کرل و دیورژانس) استفاده می‌کنیم. روابط (۲-۳) و (۲-۴) اصول موضوعی الکترواستاتیک را نشان داده‌اند، چگونگی اثبات این روابط را در قسمت‌های بعدی بررسی می‌کنیم.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_\circ} \longrightarrow \text{یعنی میدان } E \text{ غیرسلونوئیدی است} \qquad (۲-۳)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \circ \longrightarrow \text{یعنی میدان } E \text{ همواره کنسرواتیو (غیرگردشی) است} \qquad (۲-۴)$$

تذکر:

۱- منظور از فرضیات اصلی این است که یک تابع برداری مثل $\mathbf{E}$، می‌تواند بیان‌کنندهٔ یک میدان الکتریکی ساکن باشد، مشروط بر اینکه در هر دو رابطهٔ فوق صدق کند.

۲- روابط فوق را فرم دیفرانسیلی اصول موضوع الکترواستاتیک می‌نامند، با استفاده از قضیهٔ دیورژانس و استوکس می‌توانیم به فرمهای انتگرالی آنها برسیم:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_\circ} \qquad (۲-۵)$$

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}l = \circ \qquad (۲-۶)$$

مثال ۲-۱ آیا قانون کولن در روابط (۲-۳) تا (۲-۶) صدق می‌کند؟

حل: قانون کولن میدان یک بار نقطه‌ای را برای فاصلهٔ R از آن، به صورت رابطهٔ (۲-۲) بیان می‌کند. یعنی:

$$\mathbf{E} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{q}{R^۲}\,\mathbf{a}_R$$

کافیست این میدان را در روابط قبل قرار دهیم. مثلا با قرار دادن در (۲-۴) داریم:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{۱}{R^۲ \sin\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_R & R\,\mathbf{a}_\theta & R\sin\theta\,\mathbf{a}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial R} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ \dfrac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ R^۲} & \circ & \circ \end{vmatrix} = \circ$$

تمرین ۲-۱: درستی قانون کولن را در روابط (۲-۳)، (۲-۵) و (۲-۶) نشان دهید.

تمرین ۲-۲: با استفاده از رابطهٔ (۲-۴) نشان دهید که اگر در تمام نقاط یک ناحیه میدان E در جهت z باشد، آنگاه در این ناحیه میدان مستقل از x و y است.

آنچه از مطالب فوق و تمرین(۲-۱) می‌فهمیم اثبات این نکته است که:

نکتهٔ طلایی

اگر چه قانون کولن یک قانون تجربی است ولی اساساً یک اصل موضوع است.

پتانسیل الکتریکی

همانطور که دیدیم $\nabla\times\mathbf{E}=0$، از طرفی پیش از این در بخش (۱-۱۱-۲) نشان دادیم که هر میدان برداری بدون کرل را می‌توان به صورت گرادیان یک میدان عددی بیان کرد، پس رابطهٔ (۱-۴۸) را دوباره تکرار می‌کنیم:

$$\mathbf{E}=-\nabla V \qquad (۷-۲)$$

که در آن تابع اسکالر V را پتانسیل الکتریکی می‌نامیم و توجیه علامت منفی را نیز در (۱-۱۱-۲) شرح داده‌ایم. از فیزیک پایه به خاطر داریم که: $\Delta V=\frac{\Delta W}{q}$، این یعنی مفهوم فیزیکی پتانسیل، معادل است با کار انجام شده در حمل واحد بار از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر. همچنین برای کار داریم:

$$\Delta W=-\int\mathbf{F}\ .\ \mathbf{d}l$$

(توجیه علامت منفی: کار باید علیه میدان انجام شود)

در این حالت داریم:

$$V=V-V_{\circ}=\frac{\Delta W}{q}=\frac{-\int\mathbf{F}\ .\ \mathbf{d}l}{q}=\frac{-q\int\mathbf{E}\ .\ \mathbf{d}l}{q}=-\int\mathbf{E}\ .\ \mathbf{d}l$$

با فرض مبداء پتانسیل در بی‌نهایت نتیجه می‌شود:

$$V=-\int\mathbf{E}\ .\ \mathbf{d}l \qquad (۸-۲)$$

حال می‌توانیم از قانون کولن کمک بگیریم، اگر $\mathbf{E}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{q}{R^{۲}}\mathbf{a}_R$ را در رابطهٔ فوق قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$V=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R} \qquad (۹-۲)$$

تذکر: اکثر مطالبی که در ارتباط با میدان و پتانسیل بیان شد در بخش‌های بعد مجدداً به صورت کامل مطرح می‌شوند، اما هدف اصلی از بیان ابتدایی این مطالب را در بخش زیر بررسی می‌کنیم.

۲-۳- رهیافت کلی حل مسائل الکترواستاتیک، آرایش‌های مختلف بار

آنچه در قسمت قبل بیان شد اهمیت قانون کولن را نشان می‌داد. در اینجا می‌خواهیم این اهمیت را چند برابر کنیم، چرا که، شاید به جرأت بتوان گفت، تمام مسائل الکترواستاتیک و تمام پاسخ‌ها نتیجه‌ای از قانون کولن است. در حقیقت:

نکتهٔ طلایی

برای حل یک مسئلهٔ الکترواستاتیک فقط لازم است موارد زیر را داشته باشیم:

۱- قانون کولن را بدانیم ! ۲- کمی دقت کنیم. ۳- تمرین‌های مختلف حل کنیم.

پس هدف اصلی از این قسمت این است که، چگونه می‌توان همهٔ سوالات را با استفاده از قانون کولن و نتایج آن پاسخ داد.

۲-۳-۱- اصول روش

میدان یک بار نقطه‌ای را با استفاده از قانون کولن به صورت زیر بدست آوردیم:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\mathbf{a}_R$$

با توجه به مطالبی که در آنالیز برداری مطرح شد می‌توان $\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}$ را قرار داد، در این صورت داریم:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \qquad (۱۰-۲)$$

اگر به این فرمول دقت کنیم تنها دو چیز حق تغییر کردن دارند:

۱- q ۲- $\mathbf{R}$

هنر اصلی ما نیز تعیین همین دو عامل با استفاده از داده‌های مسئله است.

مورد اول در ادامه به طور کامل و در بخش‌های متعدد مورد بررسی قرار می‌گیرند.

مورد دوم را باید در آنالیز برداری فراگرفته باشید، اگر چه سعی می‌کنیم در طی حل مثالها مجددا به آنها بپردازیم. با این حال پیشنهاد می‌شود قبل از مطالعهٔ قسمت بعد مثال(۱-۷) و مثال (۱-۹) را دوباره حل کنید.

انواع آرایش بارها: این آرایشها به پنج شکل کلی بیان می‌شوند:

۱- بار نقطه‌ای ۲- بار خطی ۳- بار سطحی ۴- بار حجمی ۵- توزیع‌های ناشی از قطبیدگی ماده

و این یعنی از یک دیدگاه می‌توان مسائل را به پنج دسته تقسیم کرد. در ادامه این آرایشها را به طور کامل بیان می‌کنیم.

۲-۳-۲- میدان‌های ناشی از بار نقطه‌ای

این نوع از توزیع، هیچ نکتهٔ جدیدی ندارد و کافی است با توجه به علامت بار از قانون کولن استفاده کنیم؛ برای محاسبهٔ میدان برآیند، کافی است اثر همهٔ بارها را در نقطهٔ مورد نظر بیابیم. مثالهایی که در ادامه آمده‌اند قصد دارند نکات زیر را به ما نشان دهند:

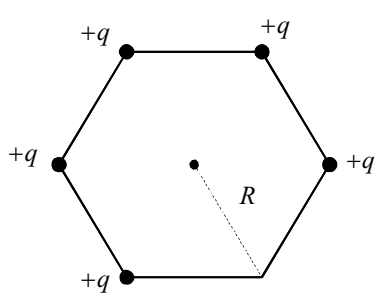
۱- برخی مواقع می‌توانیم هوشمندانه‌تر عمل کرده و مسیر حل را مختصر کنیم. (مثال ۲-۲)
۲- برخی مواقع با توجه به هندسه مسئله می‌توان تقریب‌هایی را به مسئله اعمال کرد. (مثال ۲-۳)
۳- با استفاده از نتایج قانون کولن و روابط قرار گرفته در این مدل کادر می‌توانیم مسائل پیچیده را براحتی حل کنیم. (تمرین ۲-۳)

نکتهٔ طلایی

تذکر: تمامی مثال‌های حل‌شدهٔ کتاب هدفدار انتخاب و یا طراحی شده‌اند، (مشابه نکات فوق) با این حال بدلیل جلوگیری از تکرار، از ذکر آنها در سایر قسمت‌ها صرف‌نظر کرده‌ایم. طبیعی است که خوانندهٔ هوشمند باید بتواند از هر مثال نتیجهٔ مشابه و یا جدیدی را استنباط کند و از آنها برای حل تمرینات ارائه شده ایده بگیرد.

مثال کلیدی

مثال ۲-۲ در ۶ راس از رئوس یک هفت ضلعی منتظم بار $+q$ را قرار داده‌ایم. مطلوب است محاسبهٔ میدان در مرکز این هفت ضلعی.



شکل ۲-۱: شکل مثال ۲-۲

حل: اگر بخواهیم با داشته‌های مسئله پاسخ دهیم، بایستی میدان ناشی از شش بار نقطه‌ای را در مرکز کره بیابیم که به صورت:

$$\mathbf{E}=\sum_{i=1}^{6}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_i^2}\,\mathbf{a}_{R_i}$$

مشکل اساسی اینجاست که جهت هر کدام از بارها در مبداء متفاوت و در نتیجه محاسبه پاسخ دقیق امکان‌پذیر، ولی وقتگیر است. اگر هوشمندانه‌تر فکر می‌کردیم، می‌توانستیم بگوییم: به جای راس هفتم که در آن هیچ باری قرار ندارد، بار $+q-q=0$ را قرار می‌دهیم یعنی یک بار $+q$ و یک بار $-q$ که مجموع آن صفر است. حال از جمع آثار استفاده می‌کنیم. یکبار اثر همهٔ

بارهای مثبت و بار دیگر اثر بار $-q$ را بررسی می‌کنیم. در این صورت بدیهی خواهد بود که میدان ناشی از هفت بار $+q$ در مرکز هفت ضلعی صفر است (چون هفت ضلعی منتظم است) و فقط کافیست میدان ناشی از بار $-q$ را بیابیم که آن هم با استفاده از قانون کولن بدست می‌آید:

$$\mathbf{E} = \frac{-q}{۴\pi\varepsilon_{\circ} R^{۲}}\mathbf{a}_R$$

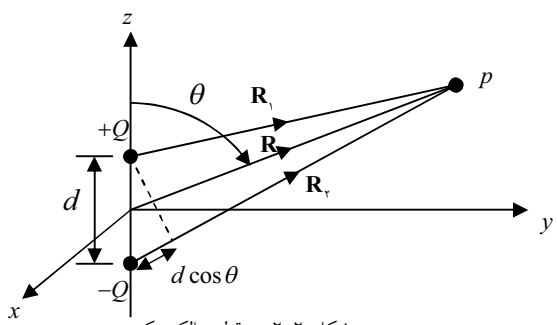
مثال کلیدی

مثال ۲-۳ میدان دوقطبی الکتریکی.

دو بار هم اندازه و مختلف العلامت که در فاصلهٔ d از هم قرار دارند را دوقطبی الکتریکی می‌نامیم. در این مثال می‌خواهیم میدان ناشی از این آرایش بار را در فاصلهٔ R از مرکز دوقطبی بیابیم. ($R >> d$)

حل: بر طبق قانون کولن داریم:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\left(\frac{\mathbf{R}_{۱}}{|\mathbf{R}_{۱}|^{۳}} - \frac{\mathbf{R}_{۲}}{|\mathbf{R}_{۲}|^{۳}}\right) \qquad (۱۱-۲)$$



شکل ۲-۲: دوقطبی الکتریکی

عملا حل مسئله تمام است. اما در همین‌جا **یک شرط کلی** را در تمام مسائل الکترومغناطیس قرار می‌دهیم و آن اینکه پاسخ مسئله همواره بایستی بر حسب داده‌های مسئله باشد. در اینجا نیز تنها دادهٔ مسئله R است. برای رسیدن به پاسخ کامل باید تقریب‌هایی را به کار ببریم. ابتدا با توجه به شکل (۲-۲) مقادیر زیر را می‌یابیم:

$$\begin{cases}\mathbf{R}_{۲} = \mathbf{R} + \dfrac{\mathbf{d}}{۲} \\ \mathbf{R}_{۱} = \mathbf{R} - \dfrac{\mathbf{d}}{۲}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathbf{R}_{۲} + \mathbf{R}_{۱} = ۲\mathbf{R} \\ R_{۲} - R_{۱} \simeq d\cos\theta\end{cases} \text{،} \quad R_{۱}R_{۲} \approx R^{۲}$$

با قرار دادن در رابطهٔ قبلی داریم:

$$\mathbf{E}=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\left(\frac{\mathbf{R}-\frac{\mathbf{d}}{۲}}{\left|\mathbf{R}-\frac{\mathbf{d}}{۲}\right|^{۳}}-\frac{\mathbf{R}+\frac{\mathbf{d}}{۲}}{\left|\mathbf{R}+\frac{\mathbf{d}}{۲}\right|^{۳}}\right) \qquad (۱۲\text{-}۲)$$

برای اعمال تقریب $(R>>d)$ می‌خواهیم روابط را به گونه‌ای ساده کنیم تا در نهایت از هم‌ارزی:

$$\lim_{f(x)\to\circ}(۱+f(x))^{n}\cong ۱+nf(x) \qquad (۱۳\text{-}۲)$$

استفاده کنیم. این مسیر به صورت زیر انجام می‌شود:

$$\left|\mathbf{R}-\frac{\mathbf{d}}{۲}\right|^{-۳}=\left((\mathbf{R}-\frac{\mathbf{d}}{۲})\,.\,(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{d}}{۲})\right)^{\frac{-۳}{۲}}=\left(R^{۲}-\mathbf{R}\,.\,\mathbf{d}+\frac{d^{۲}}{۴}\right)^{\frac{-۳}{۲}}\approx R^{-۳}\left(۱-\frac{\mathbf{R}\,.\,\mathbf{d}}{R^{۲}}\right)^{\frac{-۳}{۲}}$$

از طرفی طبق رابطهٔ (۲-۱۳) داریم:

$$R^{-۳}\left(۱-\frac{\mathbf{R}\,.\,\mathbf{d}}{R^{۲}}\right)^{\frac{-۳}{۲}}\cong R^{-۳}\left(۱+\frac{۳}{۲}\frac{\mathbf{R}\,.\,\mathbf{d}}{R^{۲}}\right)$$

به صورت مشابه:

$$\left|\mathbf{R}+\frac{\mathbf{d}}{۲}\right|^{-۳}\cong R^{-۳}\left(۱-\frac{۳}{۲}\frac{\mathbf{R}\,.\,\mathbf{d}}{R^{۲}}\right)$$

پس با قرار دادن در رابطه (۲-۱۲)خواهیم داشت:

$$\mathbf{E}=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R^{۳}}\left(۳\,\frac{\mathbf{R}\,.\,\mathbf{d}}{R^{۲}}\,\mathbf{R}-\mathbf{d}\right) \qquad (۱۴\text{-}۲)$$

حال گشتاور دوقطبی الکتریکی را به صورت $\mathbf{P}=q\,\mathbf{d}$ تعریف می‌کنیم. جهت آن همواره از بار منفی به سمت بار مثبت است. مثلاً در اینجا:

$$\mathbf{P}=P\;\mathbf{a}_{z}=q\,d\;\mathbf{a}_{z}=p\,(\cos\theta\;\mathbf{a}_{R}-\sin\theta\;\mathbf{a}_{\theta}) \qquad (۱۵\text{-}۲)$$

پس از ساده‌سازی مجدد خواهیم داشت:

$$\boxed{\mathbf{E}=\frac{P}{۴\,\pi\,\varepsilon_{\circ}R^{۳}}(۲\cos\theta\;\mathbf{a}_{R}+\sin\theta\;\mathbf{a}_{\theta})} \qquad (۱۶\text{-}۲)$$

تمرین ۲-۳: سه بار نقطه‌ای $2q$ ، $-4q$ و $2q$ به ترتیب روی محور z ها و در نقاط $z=d$ ، $z=0$ و $z=-d$ قرار دارند. معادلهٔ میدان الکتریکی را در نقطه (R,θ,φ) بدست آورید. $(R>>d)$. [۳]

پرسش ۱: اگر دو دوقطبی با گشتاورهای $\mathbf{P}_1$ و $\mathbf{P}_2$ بر هم نهاده شوند، آیا گشتاور دوقطبی پیکربندی برآیند، از رابطهٔ $\mathbf{P}=\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2$ به دست می‌آید؟

۲-۳-۳- میدان‌های ناشی از بار خطی

مجددا از رابطهٔ (۲-۱۰) شروع می‌کنیم:

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3}$$

بار خطی، بار توزیع شده روی یک بعد از فضا است پس برای q داریم:

$$q=\int\rho_l\,dl \qquad (۲-۱۷)$$

که در آن ρ_l چگالی توزیع بار خطی است. اگر این q را در رابطهٔ (۲-۱۰) قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\mathbf{E}=\frac{\int\rho_l\,dl}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \qquad (۲-۱۸)$$

از آنجا که امکان دارد dl تابعی از R باشد (که معمولا هست)، رابطهٔ فوق را بدین صورت تکمیل می‌کنیم:

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho_l\,dl\,\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \qquad (۲-۱۹)$$

آنچه بیان شد، تغییرات اعمال شده بر روی q بود. اثر تغییرات مورد نیاز روی $\mathbf{R}$ را بایستی با توجه به قواعد آنالیز برداری اعمال کرد.

گفتیم که بار خطی بار توزیع شده روی یک بعد از فضا است، بسته به اینکه این بعد از کدام دستگاه انتخاب شود، مسائل متفاوتی به وجود خواهد آمد. سه مدل اصلی آن عبارتند از:

۱- خط بار بی‌نهایت (مثال ۲-۴)

۲- خط بار محدود (تمرین ۲-۴)

۳- حلقهٔ بار (مثال۲-۵)

الگوریتم کلی حل مسائل میدان الکتریکی ساکن

۱- المان دیفرانسیلی مورد نظر را روی شکل مشخص می‌کنیم.

۲- بردار مکان $\mathbf{R}$ و $|\mathbf{R}|$ را پیدا می‌کنیم. دقت می‌کنیم که جهت بردار مکان از نقطهٔ منبع (جایی که بار داریم) به نقطهٔ میدان (جایی که می‌خواهیم میدان را در آنجا بدست آوریم) است.

۳- با توجه به شکل، dl را می‌یابیم. دقت داریم که طبق رابطهٔ (۱-۱۰) در حالت کلی:

$$dl = h_1\, du_1 + h_2\, du_2 + h_3\, du_3$$

این یعنی در دو چیز باید دقت کنیم یکی مولفه‌ها و دیگری ضریب متریک.

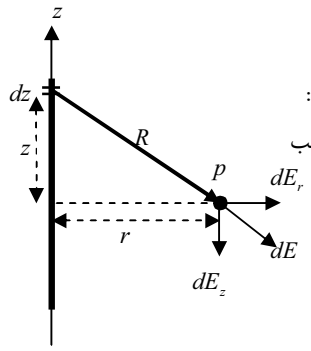
۴- سعی می‌کنیم جهت نهایی میدان را حدس بزنیم. (در ادامه تشریح می‌شود)

۵- انتگرال رابطهٔ (۲-۱۹) را محاسبه می‌کنیم.

تذکر: انتگرال رابطهٔ (۲-۱۹) از نوع $\int \mathbf{F}\, dl$ است، از اینرو پیشنهاد می‌شود یکبار دیگر بخش (۱-۱۰-۱) و به خصوص مثال (۱-۲۱) را مطالعه کنید.

مثالهایی که در ادامه آمده‌اند، قصد دارند نکات زیر را به ما نشان دهند:
۱- الگوریتم کلی حل را بررسی می‌کنند. مثالهای (۲-۴) و (۲-۵) .
۲- با استفاده از نتایج قانون کولن و روابط قرار گرفته در این مدل کادر می‌توانیم مسائل پیچیده را به راحتی حل کنیم. (تمرین ۲-۵)

مثال ۲-۴ شدت میدان الکتریکی یک خط بارِ بی‌نهایت با چگالی یکنواخت ρ_l را در نقطه‌ای مثل p از شکل (۲-۳) تعیین کنید.



شکل ۲-۳: خط بار بی‌نهایت

حل: مطابق شکل (۲-۳) المان دیفرانسیلی dz را در نظر می‌گیریم:

گام ۱: تعیین بردار مکان: همواره سعی می‌کنیم بردارها را بر حسب پارامترهای دستگاهی که انتخاب کرده‌ایم بنویسیم در اینجا داریم:

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{z^2 + r^2} \quad ، \mathbf{R} = -z\,\mathbf{a}_z + r\,\mathbf{a}_r$$

گام ۲: محاسبهٔ dl: بدیهی است که $dl = dz$

گام ۳: تعیین جهت نهایی میدان: با استفاده از تقارن مسئله خواهیم دید که میدان فقط در جهت $\mathbf{a}_r$ مقدار دارد.

تذکر: روش کـلی تعیین جهت نهایی میدان در بخش (۲-۳-۵) بیان خواهد شد.

گام ۴: حــل انتــگرال: بـا قـرار دادن مقادیر محاسـبه شـده در رابطهٔ (۲-۱۲) داریم:

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho_l\,(r\,\mathbf{a}_r-z\,\mathbf{a}_z)}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dz$$

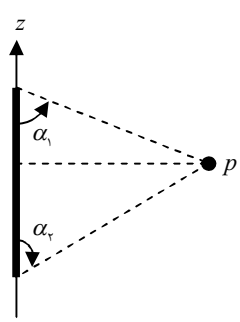
کافیست بتوانیم این انتگرال را حل کنیم. تابع نسبت به z فرد است پس انتگرال ناشی از عامـل $\mathbf{a}_z$ در یک بازهٔ متقارن صفر است. این یعنی، میدان برآیند فقط در جهت $\mathbf{a}_r$ خواهد بود. اگر از نتیجهٔ گام ۳ استفاده می‌کردیم دیگر احتیاجی نبود آن را بررسی کنیم، (این مطلبی است که در آینده اهمیتش روشن‌تر می‌گردد) پس داریم:

$$\mathbf{E}=\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{r\,\mathbf{a}_r}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dz=\frac{\rho_l\,\mathbf{a}_r}{4\pi\varepsilon_0}\left.\frac{r\,z}{r^2\sqrt{r^2+z^2}}\right|_{-\infty}^{+\infty}$$

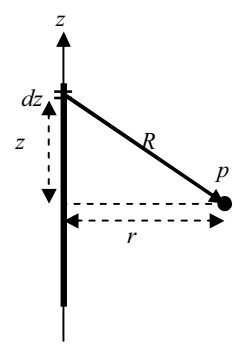
$$\boxed{\mathbf{E}=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0\,r}\,\mathbf{a}_r} \qquad (۲-۲۰)$$

مثال کلیدی

مثال ۲-۵ میدان یک خط بار محدود را در نقطه p از شـکل (۲-۴) و بـا فـرض داشـتن α_1 و α_2 بدست آورید.



شکل ۲-٤: خط بار محدود



شکل ۲-۵: شکل مثال ۲-۵

حل: گام ۱: تعیین بردار مکان:

$$\mathbf{R}=-z\,\mathbf{a}_z+r\,\mathbf{a}_r \;،\; |\mathbf{R}|=\sqrt{z^2+r^2}$$

گام ۲: محاسبهٔ dl: بدیهی است که $dl=dz$

گام ۳: تعیین جهت نهایی میدان: هیچگونه تقارنی نداریم پس جهت نهایی ترکیبی از $\mathbf{a}_r$ و $\mathbf{a}_z$ است.

گام ۴: حل انتگرال: با قرار دادن مقادیر محاسبه شده در رابطهٔ (۲-۱۹) داریم:

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho_l(r\ \mathbf{a}_r-z\ \mathbf{a}_z)}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dz$$

$$=\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{rz}{r^2\left(r^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}\mathbf{a}_r\Bigg|_{-z_1}^{z_2}+\frac{1}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}\mathbf{a}_z\Bigg|_{-z_1}^{z_2}\right)=\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{z}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}\mathbf{a}_r+\frac{r}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}\mathbf{a}_z\right)\Bigg|_{-z_1}^{z_2}$$

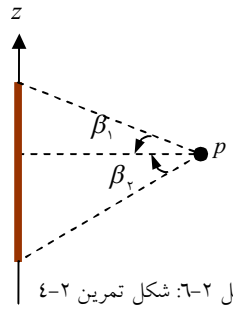
$$=\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\left(\frac{z_2}{\left(r^2+z_2^2\right)^{\frac{1}{2}}}+\frac{z_1}{\left(r^2+z_1^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)\mathbf{a}_r+\left(\frac{r}{\left(r^2+z_2^2\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{r}{\left(r^2+z_1^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)\mathbf{a}_z\right]$$

$$\boxed{\mathbf{E}=\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2)\ \mathbf{a}_r+(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)\ \mathbf{a}_z\right]}\qquad(۲-۲۱)$$

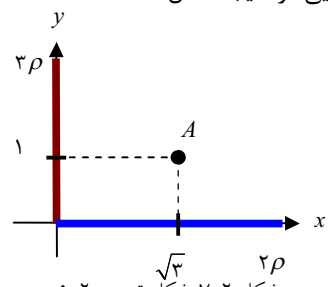
تمرین ۲-۴: پاسخ مثال (۲-۵) را بر حسب زوایای β_1 و β_2 داده شده در شکل (۲-۶) بیان کنید.

پرسش ۲: بار کل روی یک میلهٔ نامحدودِ بار، نامحدود است. چرا میدان E نامحدود نیست؟ مطابق قانون کولن اگر q نامحدود باشد، E نیز نامحدود است.

تمرین ۲-۵: در شکل (۲-۷) میدان را در نقطه $A(\sqrt{3},1)$ بدست آورید. توجه کنید که خط بارهای قرار گرفته شده روی محورها فقط از یک طرف نامحدودند و در ضمن چگالی بار آنها متفاوت است. (راهنمایی: از نتیجهٔ مثال (۲-۵) استفاده کنید) [۳]

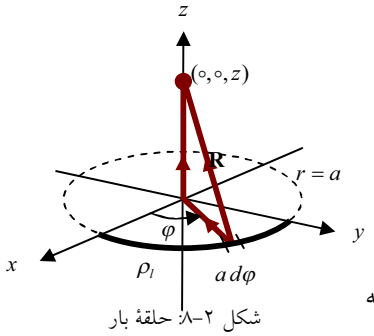


شکل ۲-٦: شکل تمرین ۲-٤



شکل ۲-۷: شکل تمرین ۲-۵

مثال ۲-۶ میدان ناشی از حلقهٔ دایره‌ای به شعاع a و چگالی ρ_l را در نقطه‌ای روی محور میله بدست آورید.



شکل ۲-۸: حلقهٔ بار

حل: گام ۱: تعیین بردار مکان:

$$\mathbf{R} = z\,\mathbf{a}_z - a\,\mathbf{a}_r \quad ، \quad |\mathbf{R}| = \sqrt{z^2 + a^2}$$

گام ۲: محاسبهٔ dl: $dl = a\,d\varphi$

گام ۳: تعیین جهت نهایی میدان: از تقارن دایره‌ای نتیجه می‌گیریم: $\mathbf{a}_z$ (این موضوع را در آینده بررسی می‌کنیم)

گام ۴: حل انتگرال: با قرار دادن مقادیر محاسبه شده در رابطهٔ (۲-۱۹) داریم:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_l\,(-a\,\mathbf{a}_r + z\,\mathbf{a}_z)}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,a\,d\varphi$$

اگر از نتیجهٔ گام ۳ استفاده کنیم، در می‌یابیم که انتگرال عامل $\mathbf{a}_r$ صفر است (چون جهت نهایی میدان $\mathbf{a}_z$ بوده و لذا باید $\mathbf{a}_r$ در جواب نهایی حذف گردد) پس:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} \frac{\rho_l\,z\,\mathbf{a}_z}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,a\,d\varphi$$

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\rho_l\,z\,a}{2\varepsilon_0\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathbf{a}_z} \qquad (۲۲-۲)$$

۲-۳-۴- میدان‌های ناشی از بار سطحی

همان بیان بارهای خطی را با کمی تغییر دوباره مطرح می‌کنیم. بار سطحی، بار توزیع‌شده روی دو بعد از فضا (روی یک رویه) است، پس برای q داریم:

$$q = \int \rho_s\,ds \qquad (۲۳-۲)$$

مشابه قبل نتیجه می‌گیریم که:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_s\,\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3}\,ds \qquad (۲۴-۲)$$

نکتهٔ طلایی

مطلب جدیدی که در این قسمت بیان می‌شود، ارتباط بین بارهای خطی و سطحی و یا به بیان دیگر محاسبهٔ میدان‌های ناشی از توزیع سطحی با استفاده از نتایج توزیع‌های خطی است. برای این منظور کافیست بدانیم که:

$$\rho_l = \rho_s \, dl \qquad (۲۵-۲)$$

این مطلب در مثال (۲-۸) و تمرین (۲-۸) نشان داده شده است.

مثال ۲-۷ میدان ناشی از یک قرص به چگالی بار سطحی ρ_s را روی محور قرص به شعاع a بیابید. با استفاده از آن میدان یک صفحهٔ بی‌نهایت را پیدا کنید.

حل: **گام ۱: تعیین بردار مکان:** $\mathbf{R} = z\,\mathbf{a}_z - r\,\mathbf{a}_r$ ، $|\mathbf{R}| = \sqrt{z^۲ + r^۲}$

گام ۲: محاسبهٔ ds: $ds = r\,dr\,d\varphi$

گام ۳: تعیین جهت نهایی میدان: از تقارن دایره‌ای نتیجه می‌گیریم: $\mathbf{a}_z$

گام ۴: حل انتگرال: با قرار دادن مقادیر محاسبه شده در رابطهٔ (۲-۲۴) داریم:

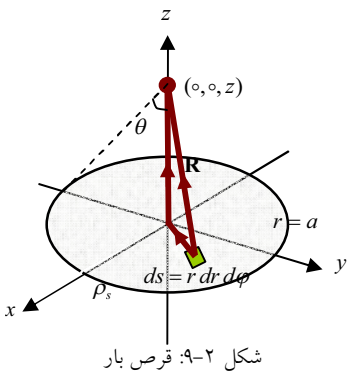
$$\mathbf{E} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{a}\frac{\rho_s(-r\,\mathbf{a}_r + z\,\mathbf{a}_z)}{\left(r^۲+z^۲\right)^{\frac{۳}{۲}}}\,r\,dr\,d\varphi$$

مشابه قبل از گام ۳ نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{E} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{a}\frac{\rho_s z}{\left(r^۲+z^۲\right)^{\frac{۳}{۲}}}\mathbf{a}_z\,r\,dr\,d\varphi$$

پس:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{۲\varepsilon_۰}\left(۱-\frac{z}{\sqrt{a^۲+z^۲}}\right)\mathbf{a}_z \qquad (۲۶-۲)$$



شکل ۲-۹: قرص بار

تذکر:

۱- اگر بخواهیم میدان را بر حسب زاویهٔ θ مشخص شده در شکل (۲-۹) بیان کنیم، داریم:

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{۲\varepsilon_۰}(۱-\cos\theta)\,\mathbf{a}_z} \qquad (۲۷-۲)$$

۲- برای یک صفحهٔ بی‌نهایت $a \to \infty$ (و یا $\theta \to ۹۰^\circ$) در این صورت:

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{۲\varepsilon_\circ}\mathbf{a}_z} \qquad (۲-۲۸)$$

مثال ۲-۸ مثال قبل را با استفاده از میدان ناشی از حلقهٔ بار محاسبه کنید.

حل: میدان ناشی از یک حلقهٔ بار با رابطهٔ (۲-۲۲) بیان می‌شود. این رابطه را مجدداً می‌نویسیم:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_l \ z \ a}{۲\varepsilon_\circ \left(a^۲ + z^۲\right)^{\frac{۳}{۲}}}\mathbf{a}_z$$

طبق رابطهٔ (۲-۲۵)، $\rho_l = \rho_s dl$ از طرفی از روی شکل مشخص است که $dl = dr$ پس $\rho_l = \rho_s \ dr$ در این صورت داریم:

$$\mathbf{dE} = \frac{z \ r \ \rho_s \ dr}{۲\varepsilon_\circ \left(r^۲ + z^۲\right)^{\frac{۳}{۲}}}\mathbf{a}_z$$

کافیست از این رابطه انتگرال بگیریم:

$$\mathbf{E} = \int_\circ^a \frac{z \ r \ \rho_s \ dr}{۲\varepsilon_\circ \left(r^۲ + z^۲\right)^{\frac{۳}{۲}}}\mathbf{a}_z = \frac{\rho_s}{۲\varepsilon_\circ}\left(۱ - \frac{z}{\sqrt{a^۲ + z^۲}}\right)\mathbf{a}_z$$

تمرین۲-۶: شدت میدان الکتریکی را برای کره‌ی به شعاع a و دارای بار الکتریکی با چگالی سطحی $\rho_s = \rho_\circ \cos\theta$ در حالات زیر محاسبه کنید:

الف) در مرکز کره.

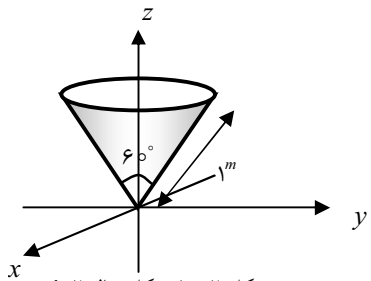
ب) در نقطه‌ای روی محور z و $z > a$.

پ) در نقطه‌ای روی محور z و $z < a$.

تذکر: برای حل قسمت‌های **ب** و **پ** پیشنهاد می‌شود بردار مکان را مشابه بردار مثال (۱-۹) فرض کنید

مثال ۲-۹ بار سطحی با چگالی غیریکنواخت $\rho_s = k\,R$ روی پوستهٔ مخروطی شکل (۲-۱۰) توزیع شده است. میدان $\mathbf{E}$ را در راس مخروط بدست آورید و کل بار Q روی مخروط را محاسبه کنید. (کارشناسی ارشد آزاد برق ۸۱)

حل:



شکل ۲-۱۰: شکل مثال ۲-۹

گام ۱: تعیین بردار مکان: $\mathbf{R} = -R\ \mathbf{a}_R$ ، $|\mathbf{R}| = R$

گام ۲: محاسبهٔ ds: $ds = R\ \sin\theta\ dR\ d\varphi$

گام ۳: تعیین جهت نهایی میدان: $-\ \mathbf{a}_z$

گام ۴: حل انتگرال: با قرار دادن مقادیر محاسبه شده در رابطهٔ (۲-۲۴) داریم:

$$\mathbf{E} = \frac{-k}{۴\pi\varepsilon_\circ}\int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^{۱}\frac{R}{R^۲}\,\mathbf{a}_R\,R\ \sin(۳\circ^\circ)\ dR\ d\varphi = ... = \frac{-k\sqrt{۳}}{۸\varepsilon_\circ}\,\mathbf{a}_z$$

اگر در حل انتگرال فوق مشکل دارید پیشنهاد می‌شود مثال (۱-۲۴) را دوباره بررسی کنید.
برای محاسبهٔ کل بار مخروط، کافیست از توزیع بار روی سطح مخروط انتگرال بگیریم، که بدلیل سادگی حل آنرا به خودتان واگذار می‌کنیم.

مثال ۲-۱۰ در فضای آزاد، صفحه‌ی بارداری به ابعاد ∞ و چگالی یکنواخت ρ_s منطبق بر صفحه‌ی $۲x + ۳y + ۴z = ۶$ وجود دارد. میدان ناشی از این بار سطحی را در مبداء مختصات بدست آورید. (کارشناسی ارشد برق ۷۴)

حل: میدان ناشی از یک صفحهٔ بی‌نهایت از رابطهٔ $\mathbf{E} = \pm\dfrac{\rho_s}{۲\varepsilon_\circ}\,\mathbf{a}_n$ بدست می‌آید، که در این رابطه $\mathbf{a}_n$ بردار عمود بر صفحه و علامت $(+)$ برای نقاط بالای صفحه و علامت $(-)$ برای نقاط زیر آن است. با این تفاسیر برای صفحهٔ مذکور داریم:

– بردار عمود بر سطح از رابطهٔ (۱-۴۳) بدست می‌آید:

$$\mathbf{a}_n = \frac{\nabla f(x,y,z)}{|\nabla f(x,y,z)|} = \frac{۲\mathbf{a}_x + ۳\mathbf{a}_y + ۴\mathbf{a}_z}{\sqrt{۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲۹}}\,(۲\mathbf{a}_x + ۳\mathbf{a}_y + ۴\mathbf{a}_z)$$

– مبداء در زیر این صفحه قرار دارد. برای بررسی این موضوع مختصات مبداء را در صفحه قرار می‌دهیم که در اینصورت:

$\circ < ۶ \ \rightarrow$ مبداء زیر این صفحه است

پس برای میدان خواهیم داشت:

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho_s}{۲\varepsilon_\circ}\frac{۱}{\sqrt{۲۹}}(۲\mathbf{a}_x + ۳\mathbf{a}_y + ۴\mathbf{a}_z)$$

تمرین ۲-۷: مثال (۲-۹) را با استفاده از میدان حلقهٔ بار حل کنید.

۲-۳-۵- میدان‌های ناشی از بار حجمی

فقط برای تکرارِ بیشتر مطرح می‌کنیم که، بار حجمی، بار توزیع شده روی سه بعد از فضا است پس برای q داریم:

$$q = \int \rho_v \, dv \qquad (۲۹-۲)$$

بنابراین:

$$\mathbf{E} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\int \frac{\rho_v \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^۳} dv \qquad (۳۰-۲)$$

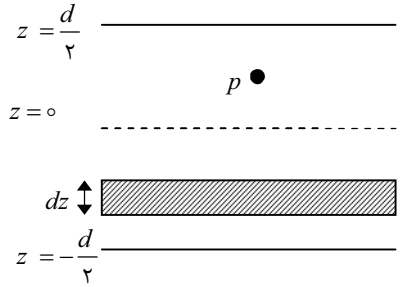
نکته طلایی

باز هم مشابه قبل می‌توانیم میدان‌های ناشی از توزیع حجمی را با استفاده از نتایج توزیع‌های سطحی بدست آوریم، برای این منظور کافیست بدانیم:

$$\rho_s = \rho_v \, dl \qquad (۳۱-۲)$$

الگوریتم حل نیز مشابه قبل است که حل آنها را به مسائل آخر فصل واگذار می‌کنیم. مثالی که در ادامه می‌آید قصد دارد تا با استفاده از روابط (۲-۲۸) و (۲-۳۱) یک توزیع حجمی را تحلیل کند. در اینجا دوباره تاکید می‌کنیم که تمام مثال‌ها و تمرین‌هایی که تا به اینجا بررسی شده‌اند فقط و فقط بوسیلهٔ قانون کولن حل شده‌اند و تنها هنر ما تعمیم مختصر این قانون و ایجاد تغییرات مختصری در شکل رابطه و در نهایت حل انتگرال بود. که این خود به معنای تکنیک حل مسائل الکترومغناطیس است.

مثال ۲-۱۱ بار حجمی به چگالی $\rho = \frac{۲\rho_\circ}{d}z$ در فضای بین $\frac{-d}{۲} \le z \le \frac{d}{۲}$ قرار دارد. میدان الکتریکی داخل این فضا چقدر است؟



شکل ۲-۱۱: شکل مثال ۲-۱۱

حل: از میدان صفحهٔ بی‌نهایت برای حل این توزیع بار استفاده می‌کنیم. توزیع حجمی در فضای بین $z = \frac{d}{۲}$

و $z=-\frac{d}{۲}$ دارای بی‌نهایت صفحه (با ابعاد بی‌نهایت) است که در جهت z با هم ترکیب شده‌اند. بر طبق رابطهٔ (۲-۳۱)، بار سطحی هر کدام از این صفحات به‌صورت $\rho_s=\rho_v\,dz$ است. می‌خواهیم میدان را در یک نقطهٔ دلخواه (مثل p مشخص شده در شکل (۲-۱۱)) بیابیم. برای این منظور از جمع آثار ناشی از تمام صفحات ذکر شده استفاده می‌کنیم. می‌دانیم میدان ناشی از یک صفحهٔ بی‌نهایت برای نقاط بالای آن طبق رابطهٔ (۲-۲۷) به صورت $\mathbf{E}=\frac{\rho_s}{۲\varepsilon_\circ}\mathbf{a}_z$ و برای نقاط زیر آن $\mathbf{E}=-\frac{\rho_s}{۲\varepsilon_\circ}\mathbf{a}_z$ است. برای محاسبهٔ میدان در نقطهٔ p ابتدا میدان ناشی از تمام صفحات زیر این نقطه را محاسبه می‌کنیم. پس جمع آثار این میدان‌ها طبق انتگرال زیر قابل محاسبه است:

$$\int_{-\frac{d}{۲}}^{z}\frac{\rho_s}{۲\varepsilon_\circ}\mathbf{a}_z\,dz \qquad (۲\text{-}۳۲)$$

سپس جمع آثارِ همهٔ صفحات بالای این نقطه را پیدا می‌کنیم. دقت داریم که میدان هر کدام از این صفحات در نقطهٔ p برابر $\mathbf{E}=-\frac{\rho_s}{۲\varepsilon_\circ}\mathbf{a}_z$، پس جمع آثار این میدان‌ها طبق انتگرال زیر قابل محاسبه است:

$$\int_{z}^{\frac{d}{۲}}\frac{-\rho_s}{۲\varepsilon_\circ}\mathbf{a}_z\,dz \qquad (۲\text{-}۳۳)$$

حال با قرار دادن مقدار واقعی ρ_s و جمع روابط (۲-۳۲) و (۲-۳۳) خواهیم داشت:

$$\mathbf{E}=\int_{-\frac{d}{۲}}^{z}\frac{\rho_s}{۲\varepsilon_\circ}\mathbf{a}_z\,dz+\int_{z}^{\frac{d}{۲}}\frac{-\rho_s}{۲\varepsilon_\circ}\mathbf{a}_z\,dz=\int_{-\frac{d}{۲}}^{z}\frac{۲\rho_\circ}{۲\varepsilon_\circ d}z\;dz-\int_{z}^{\frac{d}{۲}}\frac{۲\rho_\circ}{۲\varepsilon_\circ d}z\;dz=\frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ d}\left(z^۲-\frac{d^۲}{۴}\right)\mathbf{a}_z$$

تمرین ۲-۸: در مثال (۲-۱۱) مشاهده کردید که توزیع حجمی بار تابعی از z بود، از طرفی جهت نهایی میدان نیز $\mathbf{a}_z$ بدست آمد.

الف) نشان دهید که در دستگاه کارتزین، توزیع بار تابع هر متغیری باشد، جهت نهایی میدان نیز در جهت همان متغیر است.

ب) آیا استدلال فوق برای دستگاه‌های استوانه‌ای و کروی نیز صادق است؟

پ) ارتباط این استدلال با تمرین (۲-۲) چیست؟

۲-۳-۶- محاسبهٔ جهت نهایی میدان

در این قسمت سعی می‌کنیم تا بدون حل مسئله و به صورت شهودی جهت نهایی میدان را پیدا کنیم. محاسبهٔ جهت نهایی میدان باعث می‌شود که در حل مسائل، انتگرال‌هایی که شامل جهت‌های دیگر است را صفر در نظر گرفته و مسیر حل را کاهش دهیم. از طرفی در بسیاری از سوالات تستی با محاسبهٔ جهت میدان، دو گزینه حذف می‌شوند. از اینرو این موضوع می‌تواند حائز اهمیت باشد.

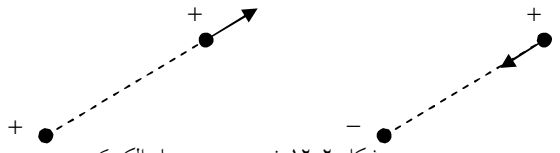
برای محاسبهٔ جهت نهایی میدان اینگونه عمل می‌کنیم:

۱- شکل ساده‌ای از مسئله را رسم می‌کنیم.

۲- در نقطهٔ مورد نظر، بار آزمونِ مثبتی را فرض می‌کنیم.

۳- توجه داریم که نیروی بین دو بار مثبت از نوع دافعه و نیروی بین دو بار مختلف‌العلامت جاذبه است. (مطابق شکل ۲-۱۲)

۴- با توجه به تقارن مسئله المان‌های مناسبی را انتخاب کرده و میدان برآیند را رسم می‌کنیم. جهت نهایی، هم‌جهت بردار برآیند است.

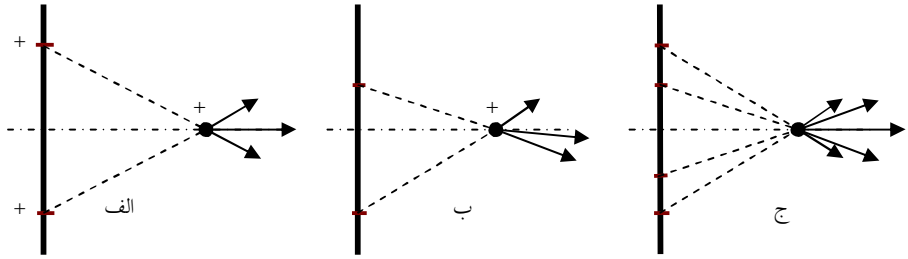


شکل ۲-۱۲: نیروی بین دو بار الکتریکی

مثال کلیدی

مثال۲-۱۲ جهت نهایی میدان ناشی از یک خط بار بی‌نهایت را بیابید.

حل: مطابق شکل (۲-۱۳- الف) بار آزمون + را در نظر گرفته‌ایم. همچنین دو المان متقارن را از روی خط بار انتخاب کرده‌ایم. بدیهی است که برآیند این دو بردار در جهت $\mathbf{a}_r$ خواهد بود.



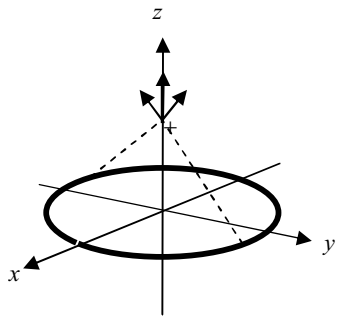
شکل ۲-۱۳: شکل مثال ۲-۱۲

اگر المان‌ها را متقارن نمی‌گرفتیم پاسخ مشابه شکل (۲-۱۳- ب) می‌شد. در این حالت باید دقت کنیم که هر کدام از این المان‌ها یک المان متقارنِ با خود نیز دارند (چون خط بار بی‌نهایت است) پس برای بدست آوردن جواب درست باید آنها را نیز مدّ نظر قرار دهیم. این موضوع در شکل (۲-۱۳- ج) نشان داده شده که باز هم‌جهت نهایی همان $\mathbf{a}_r$ خواهد بود.

تمرین ۲-۹: جهت نهایی میدان ناشی از یک خط بار محدود را تعیین کنید.

مثال۲-۱۳ جهت نهایی میدان را برای یک حلقهٔ بار و در نقطه‌ای روی محور آن بیابید.

حل: چون سیستم متقارن است، ما نیز المان‌های متقارن انتخاب می‌کنیم. همانطور که مشاهده می‌شود جهت نهایی میدان $\mathbf{a}_z$ است.



شکل ۲-۱٤: شکل مثال ۲-۱۳

مثال ۲-۱۴ جهت نهایی میدان را برای یک حلقهٔ با چگالی $\lambda = \rho_\circ \sin\varphi$ و در نقاط زیر بیابید:

الف) در مبداء مختصات.

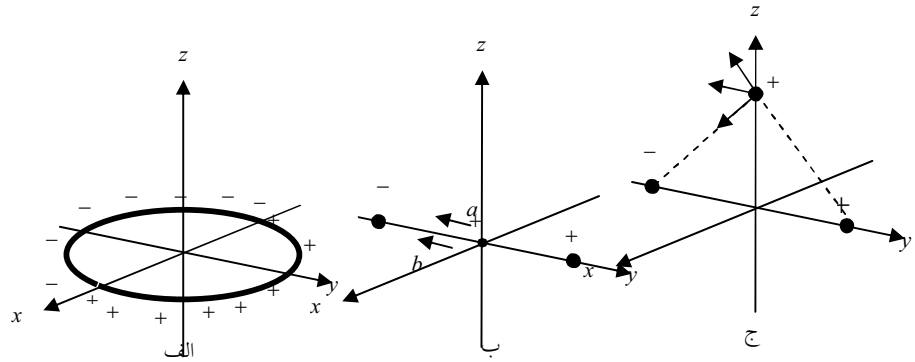
ب) در نقطه‌ای روی محور حلقه و به فاصلهٔ z از آن.

حل: الف) شکل ساده‌ای را رسم کرده و روی آن علامت بارها را در هر بخش حلقه نمایش می‌دهیم. (شکل۲-۱۵- الف) تمام بارهای مثبتِ روی نیم‌دایره را معادل یک بار + فرض کرده و آن را مطابق شکل روی محور y قرار می‌دهیم. عمل مشابهی را برای مجموعهٔ بارهای منفی انجام می‌دهیم. حال با فرض بار آزمون در مبداء به راحتی جهت نهایی میدان را خواهیم یافت. مطابق شکل (۲-۱۵- ب) پاسخ $-\mathbf{a}_y$ است.

در این شکل:

بردار a: خط میدان ناشی از جاذبهٔ بار منفی و بار آزمون واقع در مبداء مختصات.

بردار b: خط میدان ناشی از دافعهٔ بار مثبت و بار آزمون واقع در مبداء مختصات.



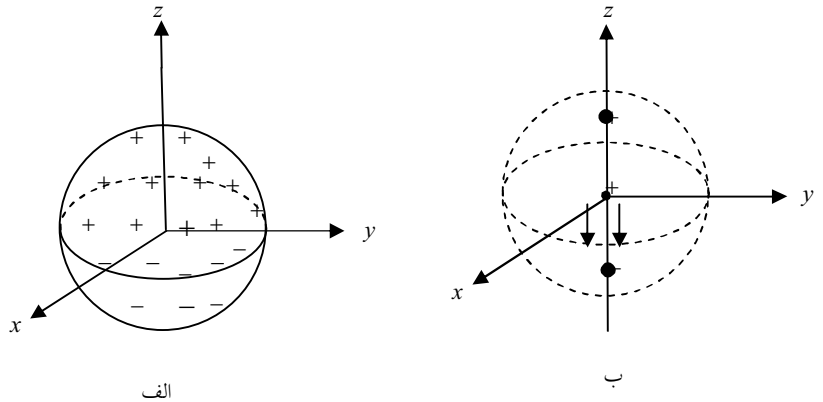
شکل ۲-۱۵: شکل مثال ۲-۱٤

ب) مشابه قسمت قبل عمل می‌کنیم، با این تفاوت که بار آزمون را بر روی محور z قرار می‌دهیم. مطابق شکل (۲-۱۵- ج) جهت نهایی میدان $-\mathbf{a}_y$ خواهد بود.

تمرین ۲-۱۰: با محاسبهٔ میدان ناشی از یک حلقهٔ بار با چگالی $\lambda = \rho_\circ \sin\varphi$ نشان دهید که جهت نهایی میدان در نقطه‌ای روی محور z ها ، $-\mathbf{a}_y$ است.

مثال۲-۱۵ بار $\rho_\circ \cos\theta$ روی سطح کره‌ای به شعاع a توزیع شده است. مطلوب است محاسبهٔ جهت نهایی میدان در مبداء مختصات. (کارشناسی ارشد آزاد برق ۸۱)

حل: شکل ساده‌ای از مسئله را رسم کرده و علامت بارها را روی آن فرض می‌کنیم. (شکل۲-۱۶- الف) با اعمال ساده‌سازی، از شکل (۲-۱۶- ب) کمک می‌گیریم. با توجه به این شکل، بدیهی است که جهت نهایی میدان $-\mathbf{a}_z$ است.



شکل ۲-۱٦: شکل مثال ۲-۱۵

تمرین ۲-۱۱: بار $\rho_\circ \cos\theta$ روی سطح کره‌ای به شعاع a توزیع شده است. مطلوب است محاسبهٔ جهت نهایی میدان در نقطه‌ای روی محور z ها و خارج کره.

تمرین ۲-۱۲: بار حجمی $\rho_v = \rho_\circ \cos\theta$ در داخل کره‌ای به شعاع a توزیع شده است. مطلوب است محاسبهٔ میدان ناشی از این توزیع بار برای نقطهٔ دلخواهی از فضا با مختصات $p(R,\theta,\varphi)$.

۲-۴- قانون گاوس

تا به اینجا روش کلی محاسبهٔ میدان‌های الکترواستاتیک را بر مبنای قانون کولن بیان کردیم و گفتیم که این قانون می‌تواند تمام مسائل را حل کند. آنچه در ادامه می‌آید یا تعمیم و نتیجهٔ قانون کولن است و یا راهکار جدیدی است تا میدان را راحت‌تر محاسبه کنیم. در الکترواستاتیک همه چیز ناشی از میدان است (که آن خود ناشی از بارها). با داشتن میدان، هر کمیتی از چگالی شار و پتانسیل گرفته تا انرژی و نیرو قابل محاسبه خواهد بود. از اینروست که ادعا می‌کنیم قانون کولن می‌تواند تمام مسائل را حل کند.

با این همه، با توجه به نوع سیستم و دینامیک مسئله می‌توان راهکار ساده‌تری را برای محاسبهٔ میدان استفاده کرد. قانون گاوس یکی از این راهکارها بوده و کاربرد آن معطوف به مواردی است که تقارن در مسئله مشهود باشد. قانون گاوس بیان می‌دارد که شار کل خروجی میدان $\mathbf{E}$ از هر سطح بسته در فضای آزاد، برابر کل بار داخل سطح تقسیم بر $\varepsilon_\circ$ است. سطح S می‌تواند هر سطح بستهٔ فرضی باشد:

$$\boxed{\oint_S \mathbf{E}\,.\,\mathbf{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_\circ}} \qquad (۲-۳۴)$$

که این همان رابطهٔ (۲-۵) است. و فرم نقطه‌ای آن هم مطابق (۲-۳) به صورت زیر است:

$$\boxed{\nabla\,.\,\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_\circ}} \qquad (۲-۳۵)$$

نکتهٔ طلایی

در مواردی که تقارن در مسئله مشهود باشد می‌توان با انتخاب یک سطح گاوسی مناسب مسئله را حل کرد.

تقارن یعنی:

الف) شکل و محل توزیع بار متقارن باشد.

مثلاً: - یک کره متقارن و یک نیم‌کره را نامتقارن فرض می‌کنیم.

- یک استوانهٔ بی‌نهایت را متقارن و یک استوانهٔ محدود را نامتقارن در نظر می‌گیریم.

ب)توزیع بار متقارن باشد، که به معنای:

۱- چگالی بار ثابت باشد.

و یا اگر ثابت نیست:

۲- در حالت‌های استوانه‌ای و کروی چگالی فقط تابعی از شعاع و در کارتزین فقط تابع یکی از مولفه‌ها باشد.

مثلاً: - توزیع $\rho_\circ R^{۲}$ در یک کره متقارن ولی توزیع $\rho_\circ \cos\theta$ در همان کره نامتقارن است.

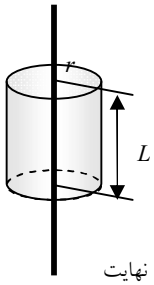
- توزیع $\rho_\circ \cos z$ در دستگاه کارتزین متقارن ولی توزیع $\rho_\circ x \cos z$ در همین دستگاه نامتقارن است.

نکتهٔ طلایی

تذکر: شرط استفاده از قانون گاوس برقراری هر دو تقارن الف و ب است. برای مثال توزیع $\rho_\circ e^{-R}$ در یک کره متقارن ولی در یک نیم‌کره نامتقارن است.

مثال ۲-۱۶ مطلوب است محاسبهٔ میدان خط بار بی‌نهایت با استفاده از قانون گاوس.

حل: مطابق شکل(۲-۱۷) یک سطح گاوسی استوانه‌ای را در نظر می‌گیریم. در این صورت داریم:



$$\oint_S \mathbf{E}\,.\,\mathbf{ds} = E\,S = \frac{Q}{\varepsilon_\circ} \rightarrow \varepsilon_\circ E\,S = Q \rightarrow \varepsilon_\circ E\,(۲\pi r\,l) = \rho_l\,l$$

$$E = \frac{\rho_l}{۲\pi\,\varepsilon_\circ\,r}$$

که همان رابطهٔ (۲-۲۰) است ولی با حلی ساده‌تر.

شکل ۲-۱۷: خط بار بی نهایت

مثال ۲-۱۷ میدان $\mathbf{E}$ ناشی از یک ابر الکترونی با چگالی بار حجمی $\rho = \rho_\circ$ در ناحیهٔ $\circ \le R \le a$ و $\rho = \circ$ در ناحیهٔ $R > a$ را تعیین کنید.

حل: با استفاده از قانون گاوس داریم:

$$\oint_S \mathbf{E}\,.\,\mathbf{ds} = E\,S = \frac{Q}{\varepsilon_\circ} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_\circ E\,S = Q \qquad (a)$$

این قانون را بایستی برای هر قسمتی که توزیع بار متفاوت داشته باشد بنویسیم.

برای داخل پوسته:

مثال کلیدی

$$S = ۴\,\pi\,R^{۲} \quad ، \quad Q = \int \rho\, dV = \rho_{\circ}\frac{۴}{۳}\pi\,R^{۳}$$

با قرار دادن در رابطهٔ (a) خواهیم داشت:

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\rho_{\circ}}{۳\,\varepsilon_{\circ}} R\ \mathbf{a}_R} \qquad \circ \le R \le \circ \qquad (۳۶\text{-}۲)$$

و برای خارج پوسته:

$$S = ۴\,\pi\,R^{۲} \quad ، \quad Q = \int \rho\, dV = \rho_{\circ}\frac{۴}{۳}\pi\,a^{۳}$$

با قرار دادن در رابطهٔ (a) داریم:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_{\circ}\,a^{۳}}{۳\,\varepsilon_{\circ}\,R^{۲}}\,\mathbf{a}_R \qquad R > a \qquad (۳۷\text{-}۲)$$

همانطور که انتظار می‌رفت میدان برای خارج پوسته از فرم قانون کولن $\left(\frac{۱}{R^{۲}}\right)$ پیروی می‌کند، به همین دلیل است که می‌گوییم نیروی الکترواستاتیک وارد بر بار خارج پوسته، برابر است با نیروی وارد بر همان بار وقتی کل بار در مرکز کره فرض شود.

مثال ۲-۱۸ بار الکتریکی با چگالی ρ کولمب بر متر مکعب در حجم کرهٔ حفره داری مطابق شکل (۲-۱۸) توزیع شده است. میدان الکتریکی را درون حفره و روی محور x بیابید. (کارشناسی ارشد برق ۷۳)

حل: از جمع آثار استفاده می‌کنیم. به جای در نظر گرفتن کرهٔ حفره‌دار، فرض می‌کنیم یک کره با چگالی ρ و یک حفره با چگالی $-\rho$ داریم. در اینصورت میدان داخل حفره از جمع آثار این دو توزیع محاسبه می‌گردد. برای این منظور از قانون گاوس و رابطهٔ (۲-۳۶) استفاده می‌کنیم. مطابق شکل (۲-۱۹) میدان در فاصلهٔ x از کرهٔ با چگالی ρ عبارت است از:

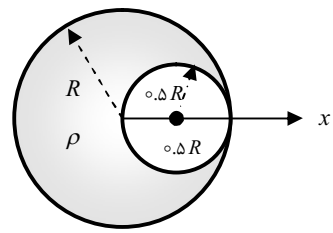
$$\mathbf{E}_{۱} = \frac{\rho}{۳\,\varepsilon_{\circ}} x\ \mathbf{a}_x$$

و میدان در فاصلهٔ $\frac{R}{۲} - x$ از حفرهٔ با توزیع بار $-\rho$:

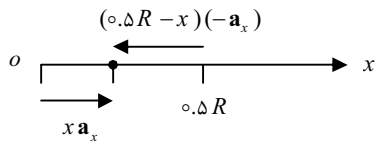
$$\mathbf{E}_{۲} = \frac{-\rho}{۳\,\varepsilon_{\circ}}\,(\circ.۵R - x)(-\mathbf{a}_x)$$

و میدان کل:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{۱} + \mathbf{E}_{۲} = \frac{\rho}{۶\,\varepsilon_{\circ}}\,R\,\mathbf{a}_x$$



شکل ۲-۱۸: شکل مثال ۲-۱۸



شکل ۲-۱۹: فاصله از نقطهٔ مورد نظر

تمرین ۲-۱۳: در مثال (۲-۱۸) میدان را برای یک نقطهٔ دلخواه داخل حفره بیابید.

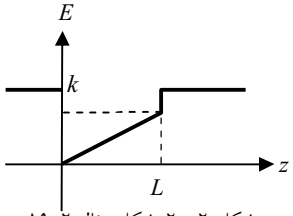
تمرین ۲-۱۴: بار حجمی به چگالی $\rho = \frac{2\rho_\circ}{d} z$ در فضای بین $\frac{-d}{2} \le z \le \frac{d}{2}$ قرار دارد. میدان الکتریکی داخل این فضا را با استفاده از قانون گاوس بیابید. (مثال (۲-۱۱) را ببینید)

پرسش ۳: الف) با اعمال قانون گاوس برای یک بار نقطه‌ای، قانون کولن را نتیجه بگیرید.

ب) آیا می‌توانید با استفاده از قانون کولن به قانون گاوس برسید؟

پ) اگر توان R در قانون کولن دقیقا ۲ نباشد، آیا قانون گاوس معتبر است؟

مثال ۲-۱۹ فرض کنید میدان به صورت زیر داده شده باشد. توزیع باری که این میدان را ایجاد کرده پیدا کنید.



شکل ۲-۲۰: شکل مثال ۲-۱۹

$$\begin{cases} \mathbf{E} = E_\circ\, z\, \mathbf{a}_z & \circ \le z \le l \\ \mathbf{E} = K\, \mathbf{a}_z & oth \end{cases}$$

حل: کافیست از رابطهٔ $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_\circ}$ استفاده کنیم با توجه به فرم میدان می‌توان گفت:

$$\rho = \varepsilon_\circ \frac{dE}{dz}$$

در این صورت:

$$\rho = \begin{cases} \varepsilon_\circ E_\circ & \circ < z < l \\ \circ & z > l, z < \circ \end{cases}$$

سوال: پاسخ در $z = \circ$ و $z = l$ چگونه است؟

در این دو نقطه ناپیوستگی داریم. در اینگونه مواقع به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$z = \circ \rightarrow \rho = \varepsilon_\circ \frac{dE}{dz} = \varepsilon_\circ \frac{\Delta E}{\Delta z} = \varepsilon_\circ \left.\frac{\circ - k}{\Delta z}\right|_{\Delta z = \circ} = -k\ \varepsilon_\circ\ \delta(z)$$

$$z = l \rightarrow \rho = \varepsilon_\circ \frac{dE}{dz} = \varepsilon_\circ \frac{\Delta E}{\Delta z} = \varepsilon_\circ \left. \frac{k - E_\circ l}{\Delta z} \right|_{\Delta z = \circ} = \varepsilon_\circ \ (k - E_\circ l)\ \delta(z - l)$$

مثال۲-۲۰ باری با تقارن کروی، میدان $\mathbf{E} = \frac{q_\circ}{۴\pi\ \varepsilon_\circ}\left[\frac{\left(۱-\sin\left(R\ \mathrm{e}^{-aR}\right)\right)}{R^۲}\ \mathbf{a}_R\right]$ را ایجاد کرده است. توزیع بار را بیابید.

حل: طبق قانون کولن:

$$\mathbf{E} = \frac{۱}{۴\pi\ \varepsilon_\circ}\frac{Q}{R^۲}\ \mathbf{a}_R$$

میدان داده شده در صورت سوال را با قانون کولن مساوی قرار می‌دهیم:

$$\mathbf{E} = \frac{q_\circ}{۴\ \pi\ \varepsilon_\circ}\left[\frac{\left(۱-\sin\left(R\ \mathrm{e}^{-aR}\right)\right)}{R^۲}\ \mathbf{a}_R\right] = \frac{۱}{۴\ \pi\ \varepsilon_\circ}\frac{Q}{R^۲}\ \mathbf{a}_R$$

که نتیجه می‌دهد:

$$Q = q_\circ\left(۱-\sin\left(R\ \mathrm{e}^{-aR}\right)\right) \qquad (a)$$

با توجه به اینکه بار تقارن کروی دارد:

$$Q = \int \rho\, dv = \int \rho\ \ ۴\ \pi R^۲\, dR \qquad (b)$$

از تساوی (a) و (b) خواهیم داشت:

$$\frac{dQ}{dV} = \rho = \frac{-q_\circ\left(e^{-aR} - a R\ \mathrm{e}^{-aR}\right)\cos\left(R\, e^{-aR}\right)}{۴\ \pi R^۲}$$

تمرین ۲-۱۵: مثال (۲-۲۰) را با استفاده از فرم دیفرانسیلی قانون گاوس حل کنید.

۲-۵- چگالی شار الکتریکی

برای حذف تابعیت میدان به خصوصیاتِ الکتریکی محیط، چگالی شار الکتریکی D را بیان کرده و آن را به صورت $\mathbf{D} = \varepsilon_\circ \mathbf{E}$ تعریف می‌کنیم. واحد آن $(\frac{c}{m^۲})$ است و با قرار دادن آن در قانون گاوس به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$Q = \oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{d}s \qquad (۳۸-۲)$$

شاری که از سطح دلخواه s می‌گذرد را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi = \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{d}s \qquad (۳۹-۲)$$

نکتهٔ طلایی

مقایسهٔ دو رابطهٔ فوق این اصل را به ما نشان می‌دهد که **شار عبوری از یک سطح مشخص برابر است با کل بار موجود در آن حجم**.

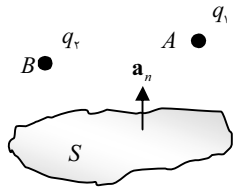
مثال ۲-۲۱ بار خطی با چگالی $\rho_l = \rho_\circ \frac{|z|}{a}$ روی محور zها از $-a < z < a$ قرار گرفته است. مطلوب است محاسبهٔ مقدار شار الکتریکی عبوری از کره‌ای به شعاع $R = ۲a$ و به مرکز مبداء مختصات. (کارشناسی ارشد آزاد برق ۸۳)

حل: کافی است ببینیم چه مقدار بار در داخل کره قرار گرفته است:

$$\varphi = \int_{-a}^{a} \rho_\circ \frac{|z|}{a} dz = ۲ \int_\circ^a \rho_\circ \frac{z}{a} dz = \rho_\circ a$$

تمرین ۲-۱۶: در فضای آزاد میدان الکتریکی با شدت $\mathbf{E} = E_۱ \mathbf{a}_x + E_۲ \mathbf{a}_y + E_۳ \mathbf{a}_z$ وجود دارد. مقدار شار گذرنده از سطح یک نیم‌استوانه به شعاع $r = a$ و $-l \le z \le l$ و $\circ < \varphi < \pi$ را محاسبه کنید.

مثال ۲-۲۲: دو بار نقطه‌ای $q_۱$ و $q_۲$ به ترتیب در نقاط A و B مطابق شکل زیر واقع هستند. شار گذرنده از سطح S در این حالت برابر φ است. اگر مقدار شار الکتریکی هر یک از دو بار نقطه‌ای $q_۱$ و $q_۲$ که در حالت عدم حضور دیگری از سطح S می‌گذرانند به ترتیب برابر $\varphi_۱$ و $\varphi_۲$ باشد، ارتباط بین این شارها را بیابید. [۴]



شکل ۲-۲۱: شکل مثال ۲-۲۲

حل: چگالی شار ناشی از بار $q_۱$ را با $\mathbf{D}_۱$ و چگالی شار ناشی از $q_۲$ را با $\mathbf{D}_۲$ نمایش می‌دهیم. از طرفی در مورد چگالی شار الکتریکی کل در فضا داریم:

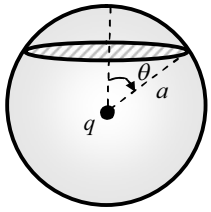
$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_۱ + \mathbf{D}_۲$$

پس:

$$\varphi = \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{d}s = \int (\mathbf{D}_۱ + \mathbf{D}_۲) \cdot \mathbf{d}s = \int \mathbf{D}_۱ \cdot \mathbf{d}s + \int \mathbf{D}_۲ \cdot \mathbf{d}s = \varphi_۱ + \varphi_۲$$

مثال ۲-۲۳ در مرکز کره‌ای به شعاع a بار q را قرار می‌دهیم. حلقه‌ای به گونهٔ زیر روی کره قرار می‌دهیم. شار خارج شونده از حلقه را بدست آورید؟

(کارشناسی ارشد آزاد برق ۸۴)



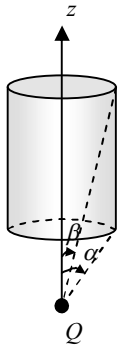
شکل ۲-۲۲: شکل مثال ۲-۲۳

حل: میدان یک بار نقطه‌ای به صورت $\mathbf{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\mathbf{a}_R$ است کافیست از رابطهٔ (۲-۳۹) استفاده کنیم. توجه داریم که:

$$\mathbf{ds}=a^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \mathbf{a}_R$$

$$\varphi=\int_S \varepsilon_0\, \mathbf{E}\,.\,\mathbf{ds}=\int \varepsilon_0\, \mathbf{E}\,.\,a^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \mathbf{a}_R=\int\frac{q}{4\pi a^2}a^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\boxed{\varphi=\frac{q}{2}(1-\cos\theta)} \qquad (۲-۴۰)$$



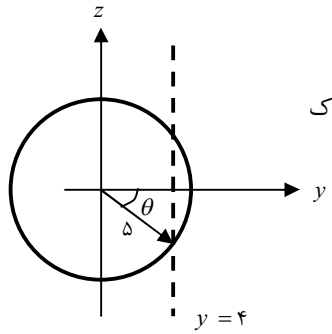
شکل ۲-۲۳: شکل تمرین ۲-۱۷

تمرین ۲-۱۷: سطح استوانه‌ای نشان داده شده در شکل (۲-۲۳) را در نظر بگیرید که بار نقطه‌ای q روی محور آن قرار دارد، به نحوی که لبه‌های استوانه با زاویه‌های α و β از محل بار دیده می‌شوند. میزان شاری را که از سطح جانبی استوانه می‌گذرد را بیابید.

مثال ۲-۲۴ کرهٔ رسانایی به شعاع ۵ و به مرکز مبداء مختصات دارای بار q است. شار گذرنده از صفحهٔ $y=4$ را بیابید. [۴]

حل: می‌دانیم میدان در خارج کره با حالتی که بجای کره یک بار نقطه‌ای q در مبداء مختصات قرار گرفته است، یکسان است. در نتیجه فرض می‌کنیم بجای کره، بار q در مبداء مختصات واقع است. حال برای محاسبهٔ شار گذرنده از صفحهٔ $y=4$ ناشی از این بار نقطه‌ای، کافی است، شار گذرنده از دایرهٔ فصل مشترک صفحهٔ $y=4$ و کرهٔ $R=5$ را از شار گذرنده از صفحهٔ $y=4$ کم کنیم. برای این منظور از شکل (۲-۲۴) و نیز رابطهٔ (۲-۴۰) کمک می‌گیریم:

الف) با توجه به بی‌نهایت بودن صفحهٔ $y=4$، بدیهی است که شار گذرنده از آن برابر $\dfrac{q}{2}$ خواهد بود. (در حقیقت بار q این صفحه را در تمام نیم‌صفحهٔ راست می‌بیند، از طرفی نیمی از شار ناشی از این بار، از نیم‌صفحهٔ راست و نیمی دیگر از نیم‌صفحهٔ چپ می‌گذرد)



شکل ۲-۲۴: شکل مثال ۲-۲۴

$$\varphi_۱ = \frac{q}{۲}$$

ب) با توجه به رابطهٔ (۲-۴۰) شار گذرنده از دایرهٔ فصل مشترک صفحهٔ $y = ۴$ و کرهٔ $R = ۵$ به صورت:

$$\varphi_۲ = \frac{q}{۲}(۱-\cos\theta)$$

که مطابق شکل (۲-۲۴) ، $\cos\theta = \frac{۴}{۵}$، پس:

$$\varphi_۱ - \varphi_۲ = \frac{q}{۲} - \frac{q}{۲}(۱-\cos\theta) = \frac{q}{۲}\cos\theta = \frac{۲q}{۵}$$

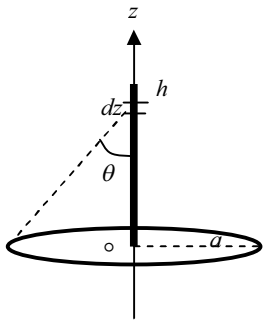
مثال ۲-۲۵ بار الکتریکی با چگالی خطی ρ به طور یکنواخت روی محور z و در فاصلهٔ $۰ < z < h$ توزیع شده است. چه مقدار شار الکتریکی از دایرهٔ واقع در صفحهٔ $z = ۰$ به شعاع a و به مرکز مبداء مختصات می‌گذرد؟ [۴]

حل: باز هم از رابطهٔ (۲-۴۰) استفاده می‌کنیم. طبق این رابطه شار ناشی از بار نقطه‌ای و گذرنده از مقطع دایره به صورت زیر است:

$$\varphi = \frac{q}{۲}(۱-\cos\theta)$$

در اینجا یک توزیع خطی داریم، پس باید شار ناشی از تمام المان‌های شکل (۲-۲۵) را محاسبه کنیم:

$$d\varphi = \frac{\rho\, dz}{۲}(۱-\cos\theta) = \frac{\rho\, dz}{۲}\left(۱-\frac{z}{\sqrt{z^۲+a^۲}}\right)$$



شکل ۲-۲۵: شکل مثال ۲-۲۵

پس:

$$\varphi = \int_۰^h \frac{\rho}{۲}\left(۱-\frac{z}{\sqrt{z^۲+a^۲}}\right) dz = \frac{\rho}{۲}\left(z-\sqrt{z^۲+a^۲}\right)\Bigg|_۰^h = \frac{\rho}{۲}\left(h-\sqrt{h^۲+a^۲}+a\right)$$

۲-۶- پتانسیل الکتریکی

تا به اینجا دو روش کلی را برای محاسبهٔ میدان معرفی کرده‌ایم: یکی قانون کولن و دیگری قانون گاوس. در این قسمت راهکار دیگری را برای محاسبهٔ میدان‌ها، مبتنی بر محاسبهٔ پتانسیل

الکتریکی بررسی می‌کنیم. لازم به توضیح است که طبق روابط (۲-۷) و (۲-۸) که آنها را دوباره در زیر نشان می‌دهیم نه تنها از پتانسیل می‌توان به میدان رسید، بلکه با داشتن میدان، قادریم پتانسیل محیط را نیز محاسبه کنیم، پس ارزش این قسمت بیش از آن چیزی است که در ابتدا گفتیم.

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V} \qquad (۲-۴۱)$$

$$\boxed{V_۲ - V_۱ = -\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}l} \qquad (۲-۴۲)$$

مثال ۲-۲۵ با استفاده از رابطهٔ (۲-۴۲) پتانسیل یک بار نقطه‌ای (رابطهٔ ۲-۹) را بدست آورید.

حل: با قرار دادن رابطهٔ کولن در (۲-۳۰) داریم:

$$V_۲ - V_۱ = -\int_{R_۱}^{R_۲} \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ R^۲}\ \mathbf{a}_R \cdot \mathbf{a}_R\ dR = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ R_۲} - \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ R_۱}$$

با فرض مبداء پتانسیل در بی‌نهایت، یعنی قرار دادن $\begin{cases} R_۱ = \infty \\ V_۱ = \circ \end{cases}$ خواهیم داشت:

$$V = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ R} \qquad (۲-۴۳)$$

حرکت در خلاف جهت میدان باعث افزایش پتانسیل الکتریکی می‌گردد و از طرفی با توجه به اینکه میدان E از بارهای مثبت به منفی جهت می‌گیرد، پتانسیل در خلاف این جهت افزایش می‌یابد. رابطهٔ (۲-۴۲) بسیار مهم است و در الکترومغناطیس کاربردهای فراوانی دارد؛ در مورد این رابطه نکات زیر می‌تواند مورد توجه قرار گیرد:

۱- هیچگاه سعی نکنید $V_۱ = \circ$ قرار داده و در نتیجه، آن را حذف کنید. در اکثر سوالات $V_۱$ مقداری مخالف صفر دارد که محاسبهٔ آن، یک بخش اصلی در مسئله است.

۲- همواره **dl** را به صورت کامل در دستگاه مورد نظر نوشته و با استدلال‌های لازم آن را به مولفه‌های مورد نیاز خود کاهش دهید.

۳- همواره جهت **dl** را جهت مثبت و اصلی دستگاه مورد نظر قرار دهید، در این حالت در مورد مرزهای انتگرال می‌توان گفت:

$$V_{۲} - V_{۱} = -\int_{۱}^{۲} \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}l \qquad (۴۴-۲)$$

مشابه مطالبی که در مورد انواع آرایش بارها در میدان مطرح شد، در پتانسیل هم قابل بحث است. از آنجا که این مطالب به صورت کامل در آنجا بیان شده‌اند، در این قسمت از بسط بیش از حد آنها خودداری کرده و فقط به ذکر روابط اکتفا می‌کنیم.

حال از رابطهٔ $V = \dfrac{q}{\pi \varepsilon_{\circ} R}$ استفاده می‌کنیم و به ازای انواع مختلف آرایش بار داریم:

برای بارهای خطی: $$V = \int \frac{\rho_l}{\pi \varepsilon_{\circ} R}\, dl \qquad (۴۵-۲)$$

برای بارهای سطحی: $$V = \int \frac{\rho_s}{\pi \varepsilon_{\circ} R}\, ds \qquad (۴۶-۲)$$

برای بارهای حجمی: $$V = \int \frac{\rho_v}{\pi \varepsilon_{\circ} R}\, dv \qquad (۴۷-۲)$$

آنچه به سرعت از روابط فوق استنتاج می‌شود، عبارتند از:

۱- نبودن بردار مکان و بسنده کردن به اندازهٔ بردار مکان.

۲- با توجه به اسکالر بودن پتانسیل، گام سوم حل مسائل میدان (تعیین جهت نهایی میدان) در اینجا بی‌معناست.

۳- انتگرال‌های فوق از نوع $\int F\, dv$ اند و بر خلاف میدان ($\mathbf{F}\, dv$) محاسبهٔ آنها بسیار ساده‌تر است.

نتیجه: موارد فوق نشان می‌دهند که در حالت کلی محاسبهٔ پتانسیل ساده‌تر از محاسبهٔ میدان بوده و از اینرو بهتر است تا در مسائل پیچیده به‌جای محاسبهٔ مستقیم میدان، ابتدا پتانسیل را یافته و سپس با استفاده از رابطهٔ $\mathbf{E} = -\nabla V$ میدان را بدست آوریم. مثال‌هایی را که در ادامه می‌آیند، در زیر بخش‌هایی بر اساس نوع آرایش بار قرار داده‌ایم:

۲-۶-۱- پتانسیل الکتریکی ناشی از بارهای نقطه‌ای

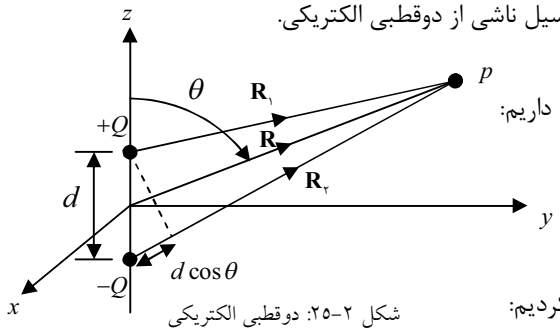
POWEREN.IR

مثال کلیدی

مثال ۲-۲۶ مطلوب است محاسبه پتانسیل ناشی از دوقطبی الکتریکی.
(کارشناسی ارشد آزاد برق ۸۲)

حل: از رابطهٔ (۲-۴۳) استفاده می‌کنیم. داریم:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$



شکل ۲-۲۵: دوقطبی الکتریکی

از طرفی همانطور که قبلا نیز محاسبه کردیم:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_2 = \mathbf{R} + \dfrac{\mathbf{d}}{2} \\ \mathbf{R}_1 = \mathbf{R} - \dfrac{\mathbf{d}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = 2\mathbf{R} \\ R_2 - R_1 \simeq d\cos\theta \end{cases} \quad ، \quad R_1 R_2 \approx R^2$$

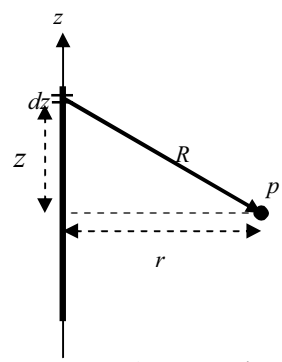
با قرار دادن در رابطه داریم:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{d\cos\theta}{R^2}\right) \Rightarrow \boxed{V = \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2}} \qquad (۲-۴۸)$$

۲-۶-۲- پتانسیل الکتریکی ناشی از بارهای خطی

مثال کلیدی

مثال ۲-۲۷ پتانسیل ناشی از خط بار بی‌نهایت را بیابید.



شکل ۲-۲۶: خط بار بی‌نهایت

حل: از روش کلی حل مسائل پتانسیل استفاده می‌کنیم. به‌کارگیری میدان در محاسبهٔ پتانسیل را در تمرین (۲-۱۸) بررسی می‌کنیم:

گام ۱: تعیین اندازهٔ بردار مکان: $|\mathbf{R}| = \sqrt{z^2 + r^2}$

گام ۲: محاسبهٔ dl: بدیهی است که در اینجا $dl = dz$

گام ۳: حل انتگرال: با قرار دادن در رابطهٔ (۲-۴۵) داریم:

$$V = \int \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 R} dl = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\int_{0}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

با توجه به رابطهٔ (۱-۵۹) یعنی $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = Ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$ خواهیم داشت:

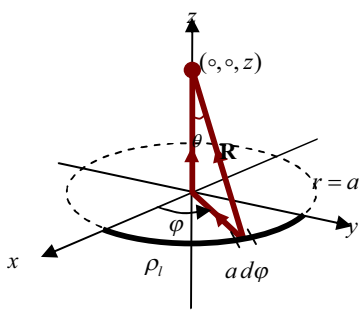
$$V = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_\circ} Ln\left(z+\sqrt{z^2+r^2}\right)\Bigg|_{z=\circ}^{z=\infty} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_\circ}\left[Ln(z\Big|_{\infty}^{\quad}) - Ln\, r\right]$$

با فرض مرجع پتانسیل در $r_\circ$ داریم:

$$\boxed{V = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_\circ} Ln\frac{r_\circ}{r}} \qquad (۴۹-۲)$$

تمرین ۲-۱۸: با استفاده از میدان خط بار بی‌نهایت (رابطهٔ ۲-۲۰) و با توجه به اینکه $V = -\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$ پتانسیل را برای این خط بار بدست آورید. (رابطهٔ ۲-۴۹)

مثال ۲-۲۸ پتانسیل ناشی از حلقهٔ دایره‌ای به شعاع a و چگالی ρ_l را در نقطه‌ای روی محور میله بدست آورید.



شکل ۲-۲۷: حلقهٔ بار

حل:

گام ۱: تعیین اندازهٔ بردار مکان: $|\mathbf{R}| = \sqrt{z^2+a^2}$

گام ۲: محاسبهٔ dl: $dl = a\,d\varphi$

گام ۳: حل انتگرال: با قرار دادن در رابطهٔ (۲-۴۵) داریم:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_\circ^{2\pi} \frac{\rho_l}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}\, a\, d\varphi$$

به سادگی نتیجه می‌شود:

$$\boxed{V = \frac{\rho_l\, a}{2\varepsilon_\circ\sqrt{a^2+z^2}}} \qquad (۵۰-۲)$$

اگر بخواهیم آن را بر حسب زاویهٔ θ نشان داده شده در شکل بیان کنیم، خواهیم داشت:

$$\boxed{V = \frac{\rho_l}{2\varepsilon_\circ}\sin\theta} \qquad (۵۱-۲)$$

تمرین ۲-۱۹: الف) با استفاده از میدان حلقهٔ بار (رابطهٔ ۲-۲۲) و با توجه به اینکه $V = -\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$، پتانسیل ناشی از یک حلقهٔ باردار (رابطهٔ ۲-۵۰) را بدست آورید.

ب) با داشتن (رابطهٔ ۲-۵۰) و استفاده از $\mathbf{E}=-\nabla V$ ،میدان ناشی از حلقهٔ باردار (رابطهٔ ۲-۲۲) را نتیجه بگیرید.

۲-۶-۳- خطوط هم پتانسیل

این خط‌ها بر خطوط میدان عمودند از این جهت می‌توان پس از یافتن رابطهٔ میدان از بحث‌های مربوط به مسیرهای قائم (در درس معادلات دیفرانسیل) کمک گرفت. اما راحترین راه، محاسبهٔ پتانسیل و مساوی قرار دادن آن با یک مقدار ثابت است. به مثال زیر توجه کنید:

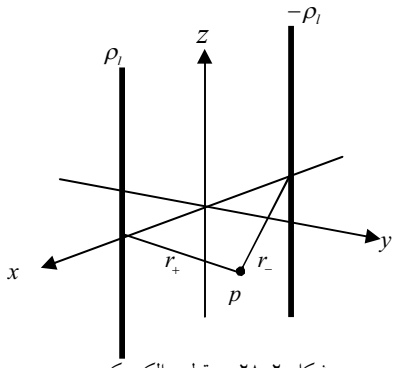
مثال ۲-۲۹ معادلهٔ خطوط هم‌پتانسیل دو قطبی الکتریکی را بیابید.

حل: همانطور که در مثال (۲-۲۶) نشان دادیم پتانسیل دوقطبی با رابط $V=\dfrac{q\,d\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_\circ R^۲}$ بیان می‌شود. در این صورت:

$$V=\frac{q\,d\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_\circ R^۲}=c\rightarrow\frac{c'\cos\theta}{R^۲}=c\Rightarrow R^۲=c''\cos\theta\longrightarrow R=c_v\sqrt{\cos\theta}$$

مثال ۲-۳۰ دو خط بار با چگالی‌های λ و $-\lambda$ به موازات هم و به فاصلهٔ d از یکدیگر قرار دارند. رابطهٔ پتانسیل را در نقطهٔ دلخواه p بیابید. (کارشناسی ارشد آزاد برق ۸۶)

حل: این دو خط را مشابه شکل (۲-۲۸) در نظر گرفته و از رابطهٔ (۲-۴۹) استفاده می‌کنیم. بر طبق جمع آثار داریم:



شکل ۲-۲۸: دوقطبی الکتریکی

$$V_p=\frac{\rho_l}{۲\pi\varepsilon_\circ}Ln\frac{r_\circ}{r_+}+\frac{-\rho_l}{۲\pi\varepsilon_\circ}Ln\frac{r_\circ}{r_-}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\boxed{V_p=\frac{\rho_l}{۲\pi\varepsilon_\circ}Ln\frac{r_-}{r_+}}\qquad(۲\text{-}۵۲)$$

تمرین ۲-۲۰: معادلهٔ خطوط هم‌پتانسیل را برای مثال (۲-۳۰) پیدا کنید.

تمرین ۲-۲۱: بار q در مبدا مختصات و بار $-\frac{q}{۲}$ در روی محور xها در $x = a$ قرار دارد. سطح هم‌پتانسیل $V = ۰$ را تعیین کنید. (کارشناسی ارشد آزاد برق ۷۷)

پرسش ۴: آیا دو سطح هم‌پتانسیلِ متفاوت، می‌توانند متقاطع باشند؟

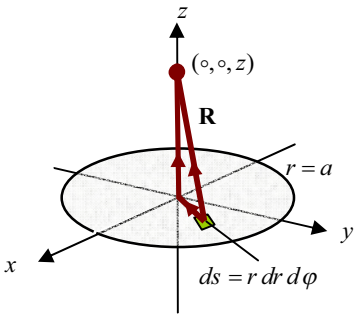
۲-۶ -۴- پتانسیل الکتریکی ناشی از بارهای سطحی

به همین دو جمله بسنده می‌کنیم که:

۱- باید به طریق مناسب از رابطهٔ (۲-۴۶) استفاده کنیم.

۲- می‌توانیم از نتایج بدست آمده از توزیع‌های خطی نیز بهره ببریم.

مثال ۲-۳۱ پتانسیل الکتریکی ناشی از یک دیسک بار با چگالی ρ_s و شعاع a را در نقطه‌ای روی محور آن محاسبه کنید.



شکل ۲-۲۹: دیسک باردار

حل: با توجه به شکل (۲-۲۹):

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{z^۲ + r^۲} \quad \text{و} \quad \mathbf{R} = z\,\mathbf{a}_z - r\,\mathbf{a}_r$$

$$ds = r\,dr\,d\varphi$$

پس طبق رابطهٔ (۲-۴۶) خواهیم داشت:

$$V = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{a}\frac{\rho_s}{\left(r^۲+z^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}}\,r\,dr\,d\varphi$$

که با حل آن:

$$V = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{a}\frac{\rho_s}{\left(r^۲+z^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}}\,r\,dr\,d\varphi = \frac{\rho_s}{۴\pi\varepsilon_۰}\times ۲\pi\times\sqrt{r^۲+z^۲}\,\Bigg|_۰^{a} = \frac{\rho_s}{۲\varepsilon_۰}\left(\sqrt{a^۲+z^۲}-z\right)$$

مثال ۲-۳۲ مثال (۲-۳۱) را با استفاده از نتیجهٔ مثال (۲-۲۸) حل کنید.

حل: در مثال (۲-۲۸) پتانسیل یک حلقه بار را به فرم زیر محاسبه نمودیم:

$$V = \frac{\rho_l\,r}{۲\varepsilon_۰\sqrt{r^۲+z^۲}}$$

با فرض $\rho_l = \rho_s\, dr$ و یکبار انتگرال‌گیری:

$$V = \int_{\circ}^{a} \frac{\rho_s\, r\, dr}{۲\varepsilon_{\circ}\sqrt{r^{۲}+z^{۲}}} = \frac{\rho_s}{۲\varepsilon_{\circ}}\left(\sqrt{a^{۲}+z^{۲}} - z\right)$$

مثال ۲-۳۳ در مثال (۲-۷) میدان یک دیسک باردار را محاسبه کردیم. با استفاده از رابطهٔ $V = -\int \mathbf{E}\,.\,\mathbf{d}l$ پتانسیل را برای این دیسک حساب کرده و به پاسخ مثال (۲-۳۱) برسید.

حل: در ابتدای بخش اهمیت پتانسیل را ذکر کردیم، ضمن حل مثال‌های متعدد نشان دادیم که محاسبهٔ پتانسیل به مراتب راحتتر از میدان است. در تمرینات (۲-۱۸) و (۲-۱۹) از شما خواسته شد تا با محاسبهٔ میدان به پتانسیل (و برعکس) برسید. این مثال که مشابه همین دو تمرین است به عنوان نمونه در زیر حل شده است.

میدان یک دیسک باردار در رابطهٔ (۲-۲۶) و به صورت زیر محاسبه شد:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{۲\varepsilon_{\circ}}\left(۱ - \frac{z}{\sqrt{a^{۲}+z^{۲}}}\right)\mathbf{a}_z$$

با استفاده از رابطهٔ (۲-۴۲) می‌توانیم پتانسیل را محاسبه کنیم:

$$V = -\int \mathbf{E}\,.\,\mathbf{d}l = -\int \frac{\rho_s}{۲\varepsilon_{\circ}}\left(۱ - \frac{z}{\sqrt{a^{۲}+z^{۲}}}\right)\mathbf{a}_z\,.\,\mathbf{a}_z\, dz = \frac{\rho_s}{۲\varepsilon_{\circ}}\left(\sqrt{a^{۲}+z^{۲}} - z\right)$$

تمرین ۲-۲۲: با استفاده از رابطهٔ $\mathbf{E} = -\nabla V$ و همچنین پتانسیل دیسک باردار (محاسبه شده در ۳ مثال اخیر) میدان یک دیسک باردار (رابطهٔ ۲-۲۶) را نتیجه بگیرید.

تمرین ۲-۲۳: توزیع بار $\rho = \rho_{\circ}\cos\theta$ روی سطح کره‌ای به شعاع a قرار دارد. مطلوب است محاسبهٔ پتانسیل ناشی از این توزیع در نقطه‌ای روی محور z و خارج کره.

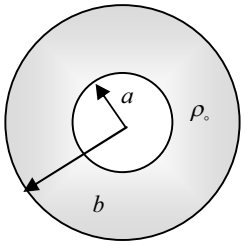
۲-۶-۵- پتانسیل الکتریکی ناشی از بارهای حجمی

این دسته از مسائل اغلب با قانون گاوس و در نهایت با استفاده از رابطهٔ $V_{۲} - V_{۱} = -\int \mathbf{E}\,.\,\mathbf{d}l$ حل می‌شوند، با این حال باز هم تاکید می‌شود که از رابطهٔ (۲-۴۷) غافل نشوید. این رابطه در اغلب مسائلی که هیچگونه تقارنی ندارند، بهترین راه حل است. (مثال ۲-۳۵ را ببینید)

مثال ۲-۳۴ پتانسیل الکتریکی را برای پوستهٔ کروی باردار با چگالی بار $\rho_{\circ}$ بدست آورید.

حل: از قانون گاوس استفاده می‌کنیم. در ضمن توجه کنید، با توجه به اینکه مرجع پتانسیل در بی‌نهایت است ما نیز از لایهٔ خارجی شروع کرده و به لایه‌های داخلی می‌رسیم. برای $R > b$ داریم:

$q = \frac{۴}{۳}\pi\,\rho_\circ(b^۳ - a^۳)$ در این صورت طبق رابطهٔ (۲-۴۳) خواهیم داشت:



شکل ۲-۳۰: شکل مثال ۲-۳٤

$$V = \frac{\rho_\circ(b^۳ - a^۳)}{۳\,\varepsilon_\circ R}$$

با استفاده از قانون گاوس برای $a < R < b$ داریم:

$$\oint_S \mathbf{E}\,.\,\mathbf{ds} = E\;S = \frac{Q}{\varepsilon_\circ} \;\rightarrow\; \varepsilon_\circ\,E\;S = Q \rightarrow \varepsilon_\circ\,E\,(۴\,\pi R^۲) = \frac{۴}{۳}\,\pi\,\rho_\circ(R^۳ - a^۳)$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\rho_\circ(R^۳ - a^۳)}{۳\,\varepsilon_\circ R^۲}\,\mathbf{a}_R$$

در این حالت با استفاده از $V_۲ - V_۱ = -\int \mathbf{E}\,.\,\mathbf{d}l$ و اینکه $V_۱ = \left.\frac{\rho_\circ(b^۳ - a^۳)}{۳\varepsilon_\circ R}\right|_{R=b}$ داریم:

$$V_۲ - \frac{\rho_\circ(b^۳ - a^۳)}{۳\,\varepsilon_\circ b} = -\int_b^R \frac{\rho_\circ(R^۳ - a^۳)}{۳\,\varepsilon_\circ R^۲}\,\mathbf{a}_R\,.\,\mathbf{a}_R\;dR \Rightarrow V_۲ = \frac{\rho_\circ}{۶\,\varepsilon_\circ}(b^۲ - R^۲) + \frac{\rho_\circ a^۳}{۳\,\varepsilon_\circ}\left(\frac{۱}{b} - \frac{۱}{R}\right) + V_۱$$

پس:

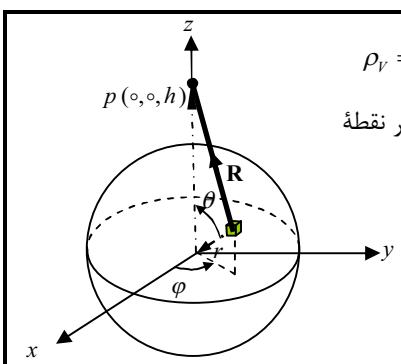
$$V = \begin{cases} \frac{\rho_\circ}{۲\,\varepsilon_\circ}(b^۲ - a^۲) & R < a \\ \frac{\rho_\circ\,b^۲}{۲\,\varepsilon_\circ} - \frac{\rho_\circ\,R^۲}{۶\,\varepsilon_\circ} - \frac{\rho_\circ\,a^۳}{۳\,\varepsilon_\circ R} & a < R < b \\ \frac{\rho_\circ(b^۳ - a^۳)}{۳\,\varepsilon_\circ R} & R > b \end{cases}$$

مثال ۲-۳۵ توزیع بار حجمی: $\rho_V = \begin{cases} \rho_\circ\cos\theta & \circ \le R \le a \\ \circ & R > a \end{cases}$

در مختصات کروی داده شده است. پتانسیل الکتریکی را در نقطهٔ $P(x = \circ, y = \circ, z = h)$ محاسبه کنید. ($h > a$)

حل: طبق شکل (۲-۳۱) می‌توان گفت:

- $\mathbf{R} = z\,\mathbf{a}_z - a\,\mathbf{a}_R$
- $|\mathbf{R}|^۲ = a^۲ + z^۲ - ۲a\,h\,\cos\theta$



شکل ۲-۳۱: شکل مثال ۲-۳۵

$$dv = R^{۲} \sin\theta \, dR \, d\theta \, d\varphi \; -$$

طبق رابطهٔ (۲-۴۷):

$$V = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}} \int_{\circ}^{۲\pi} \int_{\circ}^{\pi} \int_{\circ}^{a} \frac{\rho_{\circ} \cos\theta}{(R^{۲} + h^{۲} - ۲R\,h\,\cos\theta)^{\frac{۱}{۲}}} \; R^{۲} \sin\theta \, dR \, d\theta \, d\varphi$$

برای حل انتگرال فوق از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$u^{۲} = R^{۲} + h^{۲} - ۲R\,h\,\cos\theta$$

بر طبق رابطهٔ فوق می‌توان نوشت:

$$۲u\,du = ۲R\,h\,\sin\theta\,d\theta \quad \text{و} \quad \frac{R^{۲} + h^{۲} - u^{۲}}{۲R\,h} = \cos\theta \quad ، \quad h - R < u < h + R$$

پس:

$$V = \frac{\rho_{\circ}}{۴\pi\varepsilon_{\circ}} \int_{\circ}^{۲\pi} \int_{h+R}^{h-R} \int_{\circ}^{a} \frac{\dfrac{R^{۲} + h^{۲} - u^{۲}}{۲R\,h}}{u} \; R^{۲} dR \, \frac{u\,du}{R\,h} d\varphi = \frac{\rho_{\circ}}{۴\pi\varepsilon_{\circ}} \times ۲\pi$$

$$\times \int_{\circ}^{a} \int_{h+R}^{h-R} \frac{R^{۲} + h^{۲} - u^{۲}}{۲h^{۲}} \, du \; dR = \int_{\circ}^{a} -۲R^{۳} - ۲R\,h^{۲} + \frac{(h+R)^{۳}}{۳} - \frac{(h-R)^{۳}}{۳} dR$$

$$= \frac{-۲R^{۴}}{۴} - R^{۲}h^{۲} + \frac{(h+R)^{۴}}{۱۲} - \frac{(h-R)^{۴}}{۱۲} \Bigg|_{\circ}^{a} = -\frac{a^{۴}}{۲} - a^{۲}h^{۲} + ۸\,a^{۳}h + ۸\,a\,h^{۳}$$

روش ساده‌تر حل این سوال را پس از معرفی دوقطبی معادل بیان می‌کنیم. (مثال ۲-۷۸ را ببینید)

تمرین ۲-۲۴: پتانسیل را در مرکز یک کره به شعاع a و چگالی حجمی $\rho = k\,R$ بیابید

۲-۶-۵-۱- بررسی فیزیکی مفهوم پتانسیل الکتریکی در توزیع متقارن کروی

از فیزیک پایه به یاد داریم که در یک پوستهٔ کروی باردارِ یکنواخت، همواره:

۱- نیروی الکترواستاتیک وارد بر بار نقطه‌ای درون پوسته صفر است.

۲- نیروی وارد بر بار نقطه‌ای واقع در خارج پوسته، همانند حالتیست که تمامی بار پوسته در مرکز آن متمرکز شده باشد.

با توجه به ارتباط نزدیک نیرو و شدت میدان، توضیحات یکسانی برای میدان نیز برقرار است. در این قسمت می‌خواهیم بحث مشابهی را برای پتانسیل بیان کنیم. برای این منظور طی سه مرحله با بیان این دیدگاه، راه حل جدیدی را برای مثال (۲-۳۴) ارائه می‌دهیم.

الف) بار Q بر روی پوستهٔ کروی شکل (۲-۳۲- الف) قرار گرفته، پتانسیل نقطه‌ای همچون p در داخل این پوسته برابر است با:

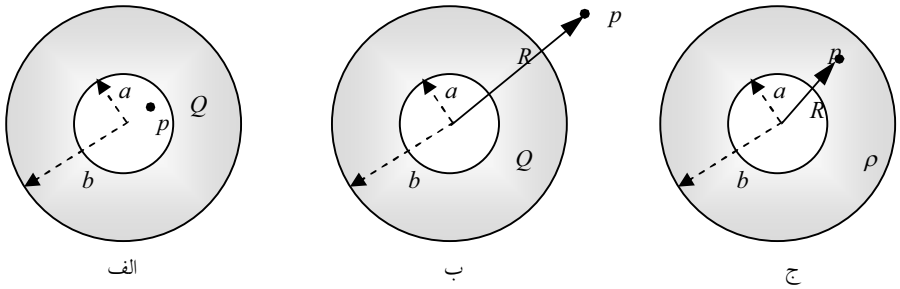
$$V_p = V(a)$$

در واقع پتانسیل نقطهٔ p برابر پتانسیل در آخرین نقطه‌ایست که در آن بار داریم.

ب) بار Q بر روی پوستهٔ کروی شکل (۲-۳۲- ب) قرار گرفته، پتانسیل نقطه‌ای همچون p در خارج این پوسته برابر است با:

$$V_p = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ R}$$

در حقیقت پتانسیل p معادل است با پتانسیل نقطهٔ p وقتیکه کل بار در مرکز پوسته قرار گرفته باشد.



شکل ۲-۳۲: پوستهٔ کروی

ج) حال فرض کنید، توزیع بار حجمی با تقارن کروی در داخل پوستهٔ کروی شکل (۲-۳۲ ج) قرار داشته باشد. می‌خواهیم پتانسل را در نقطهٔ p بررسی کنیم. برای این منظور از جمع آثار استفاده می‌کنیم:

۱- پتانسیل ناشی از پوسته‌های زیر p:

مطابق بحث قسمت ب کافیست بارهای موجودِ بین پوستهٔ داخلی و پوستهٔ p را محاسبه کنیم. در این صورت:

$$V_1 = \frac{\int \rho dv}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\int_a^R \rho 4\pi R'^2 dR'}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{\varepsilon_0 R}\int_a^R \rho R'^2 dR' \qquad (۵۳-۲)$$

۲- پتانسیل ناشی از پوسته‌های بالای p :

مشابه قسمت الف پتانسیل p (ناشی از این پوسته‌ها) برابر پتانسیل در آخرین پوسته ایست که در آنجا بار داریم. یعنی:

$$V_2 = V_b + \int_R^b \frac{\rho 4\pi R'^2 dR'}{4\pi\varepsilon_0 R'} = V_b + \frac{1}{\varepsilon_0}\int_R^b \rho R' dR' \qquad (۵۴-۲)$$

پس پتانسیل برای نقطهٔ p شکل (۲-۳۲- ج) به صورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{V_p = \frac{1}{\varepsilon_0 R}\int_a^R \rho R'^2 dR' + \frac{1}{\varepsilon_0}\int_R^b \rho R' dR' + V_b} \qquad (۵۵-۲)$$

نکتهٔ طلایی

تذکر: همانطور که ذکر شد، شرط صحیح بودن رابطهٔ فوق متقارن بودن توزیع است، یعنی در حالت کلی:

$$\rho = \rho_0 f(R)$$

تمرین ۲-۲۵: با استفاده از رابطهٔ (۲-۵۵) نشان دهید که پتانسیل در نقطه‌ای به فاصلهٔ R داخل کره‌ای با چگالی بار حجمی یکنواخت و به شعاع a از رابطهٔ زیر بدست می‌آید: (مثال ۳-۲۱ را ببینید)

$$V = \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}\left(3a^2 - R^2\right) \qquad (۵۶-۲)$$

تمرین ۲-۲۶: در مرکز یک ابر کروی به شعاع a که در آن بار $-Q$ به صورت یکنواخت توزیع شده است، یک بار نقطه‌ای Q قرار گرفته است. پتانسیل را در نقطه‌ای به فاصلهٔ $\frac{a}{2}$ از مرکز کره بیابید.

۲-۶-۵-۲- رابطهٔ پتانسیل و توزیع بار

پیش از این در محاسبهٔ پتانسیل از روابطی همچون:

$$V = \int \frac{\rho_v}{4\pi\varepsilon_0 R} dv$$

استفاده کردیم. در حقیقت توزیع بار و پتانسیل را با یک انتگرال به هم مرتبط نمودیم. اگر این رابطه را فرم انتگرالی رابطهٔ پتانسیل و توزیع بار بنامیم، می‌توانیم به صورت زیر به فرم دیفرانسیلی آن دست پیدا کنیم:

می‌دانیم که:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \xrightarrow{\mathbf{D}=\varepsilon \mathbf{E}} \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho$$

که با استفاده از اتحاد $\nabla \cdot (\varphi \mathbf{E}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \varphi$ خواهیم داشت:

$$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon = \varepsilon \nabla \cdot (-\nabla V) + \mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon = \rho$$

که نتیجه می‌دهد:

$$-\varepsilon \nabla^{۲} V + \mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon = \rho \qquad (۵۷-۲)$$

در این صورت اگر فرض کنیم $\nabla \varepsilon = ۰$ داریم:

$$\boxed{\nabla^{۲} V = -\frac{\rho}{\varepsilon}} \qquad (۵۸-۲)$$

رابطهٔ فوق را **معادلهٔ پواسون** گویند، در فصل سوم به صورت کامل در مورد آن بحث خواهیم کرد. با این حال آشنایی اولیه‌ای که از آن کسب کرده‌ایم به ما در حل مسائل پتانسیل کمک زیادی خواهد کرد. مثال‌های زیر دو کاربرد ساده از این رابطه را به ما می‌آموزند.

مثال ۲-۳۶ پتانسیل الکترکی در فضا به صورت $V = ۲x^{۲} + ۳y^{۲} + ۶z$ می‌باشد. کل بار موجود در داخل کره‌ای به شعاع ۳^{m} را محاسبه کنید. (کارشناسی ارشد آزاد برق ۷۹)

حل: با استفاده از رابطهٔ (۲-۵۸) چگالی بار را پیدا می‌کنیم:

$$\rho = -\varepsilon_{۰} \nabla^{۲} V = \ldots = -۱۰ \varepsilon_{۰}$$

و برای کل بار کره:

$$Q = \rho \times \frac{۴}{۳} \pi a^{۳} = -۱۰ \varepsilon_{۰} \times \frac{۴}{۳} \pi (۳)^{۳} = -۳۶۰ \pi \varepsilon_{۰} = -۳۶۰ \pi \times \frac{۱}{۳۶ \pi} ۱۰^{-۹} = -۱۰^{-۸} = -۱۰^{-nc}$$

مثال ۲-۳۷ بین دو صفحهٔ $z = ۰$ و $z = ۳$ بار الکتریکی به چگالی $\rho = (۱+z)\varepsilon_{۰}$ قرار دارد. اگر میدان و پتانسیل در $z = ۰$ برابر صفر باشد، پتانسیل را در $z = ۳$ محاسبه کنید. (کارشناسی ارشد برق ۷۳)

حل: از مسیر محاسبهٔ رابطهٔ (۲-۵۸) استفاده می‌کنیم:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho = (1+z)\varepsilon_0$$

از طرفی طبق نتیجهٔ تمرین (۲-۸) میدان فقط در جهت z خواهد بود، پس:

$$\frac{\partial D}{\partial z} = (1+z)\varepsilon_0 \rightarrow D = \left(\frac{z^2}{2} + z + k\right)\varepsilon_0$$

با توجه به شرط مرزی میدان:

$$E = \left(\frac{z^2}{2} + z + k\right) \;,\; E\Big|_{z=0} = 0 \rightarrow k = 0 \rightarrow \mathbf{E} = \left(\frac{z^2}{2} + z\right)\mathbf{a}_z$$

طبق رابطهٔ (۲-۴۱):

$$E = -\nabla V \rightarrow \frac{z^2}{2} + z = -\frac{\partial V}{\partial z} \rightarrow V = -\left(\frac{z^3}{6} + \frac{z^2}{2} + k'\right)$$

با توجه به شرط مرزی پتانسیل:

$$V\Big|_{z=0} = 0 \rightarrow k' = 0 \rightarrow V = -\left(\frac{z^3}{6} + \frac{z^2}{2}\right) \rightarrow V\Big|_{z=3} = -9$$

تمرین ۲-۲۷: صفحهٔ $y=0$ یک رسانای کامل است. برای $y>0$ پتانسیل الکتریکی به صورت زیر است:

$$V(x,y) = V_0 e^{-ax}\sin(ay)$$

بار موجود روی صفحهٔ xy برای $0<x<\infty$ و $0<y<1$ چقدر است؟

حال که به طور کامل با میدان و پتانسیل آشنا شدیم، با بررسی مثال زیر به یک اِشکال رایج در درک مفهوم میدان و بار می‌پردازیم. این بخشِ کار آخرین قسمت در بررسی این دو کمیت (میدان و پتانسیل) است، برای تمرین بیشتر می‌توانید مسائل پایان فصل را حل کنید.

مثال ۲-۳۸ اگر در سطح بستهٔ S هیچ‌گونه بار الکتریکی موجود نباشد و تمامی نقاط این سطح بسته دارای پتانسیل معلومِ V_0 باشند، در مورد شدت میدان نقاط داخل این سطح بسته چه نظری می‌توان داد؟

حل: طبق رابطهٔ (۲-۴۱) میدان و پتانسیل به هم ارتباط پیدا کرده‌اند، پس از همین رابطه شروع می‌کنیم:

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

از طرفی:

$$\nabla^{۲} V = ۰ \rightarrow V = cte$$

پس:

$$\mathbf{E} = -\nabla V \Big|_{V = cte} = ۰$$

تذکر: همانطور که مشاهده شد، برای توجیه پاسخ از پتانسیل استفاده کردیم. اگر پتانسیل مشخص نبود، نمی‌توانستیم در مورد میدان نظر دهیم و **در حالت کلی از نبود بار در محیط نمی‌توان صفر بودن میدان برای آن محیط را نتیجه گرفت**. این اِشکال رایجی است که تصور می‌شود هرجا بار نیست میدان هم نیست!

پرسش ۵: اگر در یک نقطهٔ فرضی، فقط $\mathbf{E}$ را داشته باشید، آیا می‌توانید V را در آن نقطه بدست آورید؟ اگر نه، چه اطلاعات دیگری نیاز دارید؟

پرسش ۶: اگر به داخل یک کرهٔ باردار یکنواخت نفوذ کنید، E باید کاهش پیدا کند، چون از نقطهٔ مشاهده بار کمتری درون کره وجود دارد. از طرف دیگر، با توجه به اینکه به مرکز بار نزدیک می‌شوید باید میدان افزایش پیدا کند. کدامیک از این دو اثر، غالب می‌باشد؟ چرا؟

۲-۷- هادی‌ها در میدان الکتریکی ساکن

به طور کلی مواد بر اساس خواص الکتریکی به سه دسته تقسیم می‌شوند: هادی، نیمه‌هادی و عایق. در این بخش هادی‌ها را مورد بررسی قرار داده و در قسمت بعد عایق‌ها را مطالعه می‌کنیم، با توجه به کاربرد فراوان نیمه‌هادی‌ها در الکترونیک در این درس به بررسی آنها نمی‌پردازیم. بحث را با یک سوال شروع کرده و پس از آشنایی اولیه با هادی، به بررسی شرایط اولیه می‌پردازیم. سپس سعی می‌کنیم با بیان مثال‌های مفهومی، درک درستی از هادی و رفتار آن کسب کنیم. با توجه به گستردگی استفاده از هادی‌ها در الکترومغناطیس، مطالعهٔ این قسمت دقت فوق العاده‌ای را طلب می‌کند.

سوال: فرض کنید بارهای الکتریکی درون یک هادی قرار گرفته باشد. چه اتفاقی می‌افتد؟

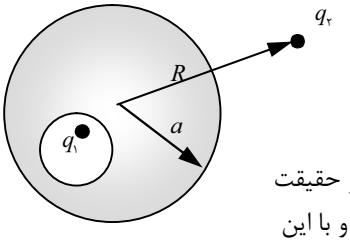
جواب: یک میدان الکتریکی در هادی تشکیل خواهد شد، این میدان بر بارها نیرو وارد کرده و باعث دور شدن آنها از یکدیگر می‌شود. این تحرک آنقدر ادامه خواهد یافت تا اینکه همهٔ بارها به سطح هادی برسند و مجدداً یکدیگر را توزیع کنند در این حالت، هم بار و هم میدان درون هادی صفر خواهد بود. به همین دلیل است که همواره در شرایط **سکون** برای درون هادی داریم:

$$\rho = 0 \quad , \quad \mathbf{E} = 0 \qquad (۵۷-۲)$$

توجه کنید که عبارت فوق فقط برای شرایط سکون است. اتفاقاتی که در شرایط گذرا رخ خواهد داد را در فصل بعد بیان می‌کنیم.

مثال کلیدی

مثال ۲-۳۹ حفاظت الکتریسیته ساکن. یکی از راه‌های حفاظت وسایل خاص (در حوزهٔ امواج بلند) قرار دادن آن در یک مجموعهٔ هادی کامل مطابق شکل (۲-۳۳) است. در این شکل حفره‌ای را در یک هادی کامل ایجاد کرده و بار q_1 را درون آن قرار داده‌ایم. با بررسی نیروهای $\mathbf{F}_{12}$ (نیروی وارد از طرف بار ۲ به بار ۱) و $\mathbf{F}_{21}$ و همچنین محاسبهٔ مقادیر آنها (در صورت امکان) نحوهٔ حفاظت را توضیح دهید.



شکل ۲-۳۳: شکل مثال ۲-۳۹

حل: میدان ناشی از بار q_2 در داخل هادی صفر است، پس میدان در حفرهٔ مذکور نیز صفر بوده و می‌توان گفت: بار q_2 هیچ نیرویی بر بار q_1 وارد نمی‌کند، یعنی $\mathbf{F}_{12} = 0$. در حقیقت اثر هرگونه توزیع باری در خارج کره بر روی بار q_1 صفر است و با این سیستم قادریم بار q_1 را نسبت به خارج کره حفاظت کنیم. بدلیل حضور بار q_1 ، قطعا بارهایی بر سطوح کره القاء می‌شود و به همین دلیل بار q_1 روی سطح خارجی کرهٔ هادی پخش می‌شود، ولی به دلیل حضور بار q_2 در خارج کره این توزیع یکنواخت نخواهد بود. پس اگر چه می‌دانیم بار q_1 بر q_2 نیرو وارد می‌کند ولی به دلیل نداشتن اطلاعات دقیق در مورد چگونگی توزیع q_1 روی سطح خارجی هادی، نمی‌توانیم $\mathbf{F}_{21}$ را محاسبه کنیم. در یک حالت خاص، با فرض اینکه بار q_2 به اندازهٔ کافی از کره دور باشد، می‌توان گفت:

$$\mathbf{F}_{21}\Big|_{R \gg a} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\mathbf{a}_R$$

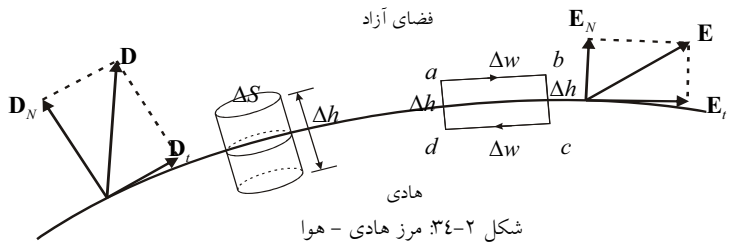
۲-۷-۱- شرایط مرزی در فصل مشترک هادی– فضای آزاد

توزیع بار روی سطح هادی به شکل سطح بستگی دارد. روشن است که اگر شدت میدان الکتریکی دارای مولفهٔ مماسی باشد (یعنی وقتی آن را به بردارهای پایه تجزیه می‌کنیم این مولفه در

میدان وجود داشته باشد) تولید یک نیروی مماسی نموده و در نتیجه بارها را به حرکت در می‌آورد و این عمل باعث از بین رفتن حالت تعادل بار خواهد شد. پس تحت شرایط سکون، میدان **E** روی سطح یک هادی در همه‌جا عمود بر سطح است (تا آن مولفهٔ مماسی ایجاد نشود)، به‌عبارت دیگر تحت شرایط سکون، سطح هادی یک سطح هم‌پتانسیل است. این مطلب را می‌توان به صورت ریاضی اثبات نمود، برای این منظور کافی است از شکل (۲-۳۴) کمک بگیریم:

$$\oint_{abcda} \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}l = E_t \ \Delta w \Big|_{\Delta w \to 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_t = 0} \qquad (۵۸-۲)$$

$$\oint_{S} \mathbf{D} \cdot \mathbf{d}s = \varepsilon_0 \ E_n \ \Delta s = \rho_s \ \Delta s \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_n = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}} \qquad (۵۹-۲)$$



شکل ۲-۳٤: مرز هادی - هوا

مثال ۲-۴۰ اگر میدان در سطح فلز به صورت $\mathbf{E} = E_0 (2\,\mathbf{a}_x - 2\,\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)$ باشد. چگالی سطحی بار روی سطح فلز چقدر است؟ (کارشناسی ارشد آزاد برق ۸۷)

حل: میدان روی سطح فلز بر سطح آن عمود است، پس میدان فوق همان مولفهٔ E_n است. کافیست اندازهٔ آنرا بیابیم:

$$E_n = E_0 \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1} = 9\ E_0$$

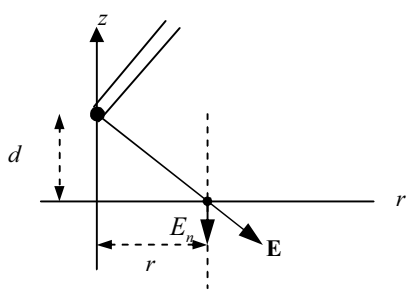
در این صورت برای توزیع بار داریم:

$$\rho_s = \varepsilon_0 E_n = \frac{9}{\varepsilon_0} E_0$$

مثال ۲-۴۱ صفحهٔ هادی بی‌نهایتی در $z=0$ قرار گرفته است. یک خط بار با چگالی λ به موازات صفحه و به فاصلهٔ d از آن قرار دارد. چگالی بار القایی روی صفحه چگونه است؟

حل: در اثر حضور خط بار، میدانی در فضا و البته در داخل هادی ایجاد می‌شود، میدان داخل هادی فقط در شرایط گذرای اولیه موجود خواهد بود؛ چرا که به سرعت بارهایی روی سطح هادی القاء می‌شود تا میدان داخل هادی صفر گردد. قطعا علامت چگالی بارهای القایی مخالف علامت توزیع اولیه است. اگر چگالی بارهای القایی را σ در نظر بگیریم، آنگاه مقدار این توزیع باید به نحوی باشد که مولفهٔ عمودی میدانِ داخل هادی صفر باشد (لازم به ذکر است که مولفهٔ مماسی توان عبور از مرز مشترک هادی و هوا را ندارد، چرا که طبق (۲-۵۸) همواره $E_t=0$) پس میدان ناشی از توزیع بار σ روی صفحهٔ بی‌نهایت (یعنی $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$) باید با مولفهٔ عمودی میدان ناشی از خط بار در هر نقطهٔ دلخواه داخل هادی برابر باشد. برای محاسبهٔ پاسخ از شکل (۲-۳۵) استفاده می‌کنیم. مطابق این شکل مولفهٔ عمودی میدان ناشی از خط بار در داخل هادی عبارت است از:

$$E_n=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\left(d^2+r^2\right)^{\frac{1}{2}}}\times\frac{d}{\left(d^2+r^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$



شکل ۲-۳۵: مولفهٔ عمودی میدان در سطح هادی

پس:

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=-E_n=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\left(d^2+r^2\right)^{\frac{1}{2}}}\times\frac{d}{\left(d^2+r^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

در نهایت:

$$\boxed{\rho_s=-\frac{\lambda d}{\pi\left(d^2+r^2\right)}} \qquad (۲-۶۰)$$

تذکر:

۱- علامت منفی در رابطهٔ فوق بدین دلیل است که علامت چگالی بار القایی، مخالف علامت توزیع بار اولیه است.

۲- **سوال**: به نظر شما کل بار القایی روی صفحه چقدر است؟

جواب: مقدار کل بار القایی دقیقا برابر کل بار روی میله است ولی با علامت منفی.

تمرین ۲-۲۹: با توجه به شرایط مرزی میدان در سطح هادی، می‌دانیم که مولفهٔ عمودی میدان در سطح مشترک هادی و هوا، پیوسته و مولفهٔ مماسی میدان در این مرز مساوی صفر است. با توجه به این دو ویژگی مثال (۲-۴۰) را با روش دیگری حل کنید.

تمرین ۲-۳۰: صفحهٔ هادی بی‌نهایتی در $z=0$ قرار گرفته است. بار نقطه‌ای Q بالای هادی و به فاصلهٔ d از آن قرار دارد. نشان دهید که:

الف) چگالی بار القایی روی صفحه از رابطهٔ (۲-۶۱) تبعیت می‌کند؟

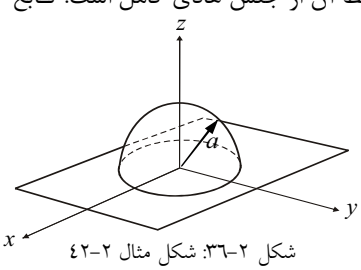
ب) کل بار القایی روی صفحه برابر $-Q$ است.

$$\boxed{\rho_s = -\frac{Q\,d}{2\pi\left(d^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}} \qquad (۲\text{-}۶۱)$$

مثال ۲-۴۲ صفحه $z=0$ و نیم‌کره برجستهٔ به شعاع a وسط آن از جنس هادی کامل است. تابع پتانسیل در فضای بالای این سطح عبارت است از:

$$V = -R\cos\theta + \frac{a^3\cos\theta}{R^2}$$

چگالی بار سطحی روی سطح صاف و روی نیم‌کره را بیابید.



شکل ۲-۳۶: شکل مثال ۲-۴۲

حل: هدف سوال استفادهٔ مناسب از شرایط مرزی میدان در مجاورت سطح هادی است. پس ابتدا میدان را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \cos\theta\left(1+\frac{2a^3}{R^3}\right)\mathbf{a}_R - \sin\theta\left(1-\frac{a^3}{R^3}\right)\mathbf{a}_\theta$$

از طرفی می‌دانیم که میدان در مجاورت سطح هادی فقط مولفهٔ عمودی دارد، پس رابطهٔ فوق مجموع مولفه‌های عمودی مربوط به سطح صاف و سطح نیم‌کره است. طبق رابطهٔ (۲-۵۹)، $\rho_s = \varepsilon_0 E_n$ پس:

الف) برای نیم‌کره:

با توجه به اینکه بردار عمود بر سطح کره دارای جهت $\mathbf{a}_R$ است، می‌توان گفت:

$$E_n = E_R \Big|_{R=a} = \cos\theta \left(1 + \frac{2a^3}{R^3}\right)\Bigg|_{R=a}$$

پس:

$$\rho_s = 3\varepsilon_0 \cos\theta$$

ب) برای سطح صاف:

بردار عمود بر این سطح $\mathbf{a}_z$ است. از آنجایی که میدان (به طور صریح) دارای این مولفه نیست، باید بردارهای یکهٔ $\mathbf{a}_R$ و $\mathbf{a}_\theta$ را به مولفه‌های پایه تجزیه کنیم تا مولفهٔ $\mathbf{a}_z$ ایجاد گردد. روش مذکور طولانی بوده و احتمالِ خطا در آن زیاد است. اگر کمی دقت کنید، قبول خواهید کرد که:

$$-\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_\theta \Big|_{\theta = \frac{\pi}{2}}$$

پس مولفهٔ عمودی سطح صاف:

$$E_n = -E_\theta \Big|_{\theta = \frac{\pi}{2}} = \sin\theta \left(1 - \frac{a^3}{R^3}\right)\Bigg|_{\theta = \frac{\pi}{2}}$$

پس:

$$\rho_s = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{a^3}{R^3}\right)$$

تمرین ۲-۳۰: میدان الکتریکی به شدت $\mathbf{E} = \frac{3}{R}\,\mathbf{a}_R$ در دستگاه مختصات کروی در فضای آزاد موجود است. اگر یک کره فلزی در $R = 3^{cm}$ قرار گیرد، چقدر بار روی سطح داخلی آن جمع می‌شود؟ [۸]

با توجه به حضور گستردهٔ هادی‌ها در سیستم‌های الکترومغناطیسی، تکنیک‌های جذابی برای پاسخگویی و درک هر چه راحتتر آنها ابداع شده است. (مثل روش تصاویر، قضایای هم‌پاسخی، ضرایب پتانسیل، ضرایب ظرفیت، سیستم‌های خازنی و ...) عمدهٔ این روش‌ها را در فصل سوم بیان خواهیم کرد. در ادامه سعی شده تا با ارائهٔ مثالهای هدفدار به فهم بیشتری از هادی‌ها دست پیدا

کنیم. با توجه به توضیحات فوق ممکن است برخی از این مثال‌ها دارای راه حلی ساده‌تر و البته خلاقانه باشند، از این جهت برخی از آنها را مجدداً در فصل بعد آورده‌ایم.

مثال ۲-۴۳ دو هادی کروی به شعاع‌های a و b $(b > a)$ توسط یک سیم هادی به هم وصل شده‌اند. فاصله بین دو هادی در مقایسه با b خیلی بزرگ فرض می‌شود. بار کل Q روی کره‌ها قرار دارد. مطلوب است محاسبهٔ: (کارشناسی ارشد برق ۷۲)

الف) بار روی کره‌ها.

ب) اندازهٔ شدت میدان الکتریکی در سطح کره‌ها.

حل: **الف)** بار روی کره‌ها را به ترتیب Q_1 و Q_2 فرض می‌کنیم. پس از وصل شدن سیم هادی، دو کره هم پتانسیل می‌شوند. پس:

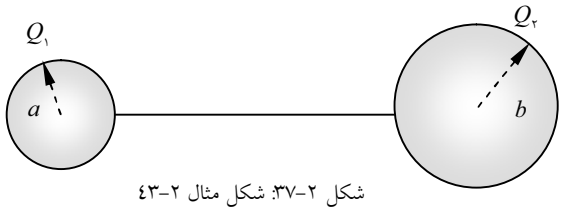
$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a}=\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 b} \rightarrow \frac{Q_1}{a}=\frac{Q_2}{b} \qquad (I)$$

از طرفی با توجه به فرض مسئله:

$$Q_1+Q_2=Q \qquad (II)$$

از ویژگی ترکیب صورت و مخرج در تناسب رابطهٔ I داریم:

$$\frac{Q_1}{a}=\frac{Q_2}{b}=\frac{Q_1+Q_2}{a+b} \xrightarrow{II} \frac{Q_1}{a}=\frac{Q_2}{b}=\frac{Q}{a+b}$$



شکل ۲-۳۷: شکل مثال ۲-۴۳

پس:

$$Q_1=\frac{a}{a+b}Q \quad \text{و} \quad Q_2=\frac{b}{a+b}Q \qquad (III)$$

ب) برای میدان‌ها نیز به سادگی خواهیم داشت:

$$E_1=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a(a+b)} \quad \text{و} \quad E_2=\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 b^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b(a+b)} \qquad (IV)$$

نکتهٔ طلایی

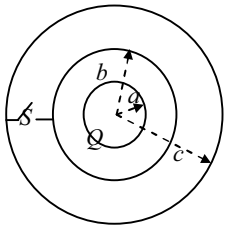
نتایج:

– از III نتیجه می‌گیریم که بار الکتریکی تمایل دارد در نقاط نوک‌تیز (یا با انحنای بیشتر مثل کرهٔ کوچکتر) متمرکز شود.

– از IV می‌توان فهمید که شدت میدان الکتریکی با شعاع نسبت عکس دارد و در سطح کرهٔ کوچکتر که انحنای بیشتری دارد، بزرگتر است.

تمرین ۲-۳۱: دو کره فلزی با شعاع‌های a و $۲a$ به ترتیب دارای پتانسیل ۴۵^V و ۶۰^V هستند. اگر این کره را با یک سیم نازک به هم متصل کنیم، پتانسیل هر کدام چقدر خواهد شد؟ [۳]

مثال ۲-۴۴ سه پوستهٔ نازک کروی رسانا به شعاع‌های a، b و c مطابق شکل (۲-۳۸) هم‌مرکز هستند. بار پوستهٔ کروی به شعاع a برابر Q است و دو پوستهٔ دیگر بی‌بارند. اگر کلید S وصل شود، پس از به تعادل رسیدن بارها، پتانسیل پوستهٔ با شعاع a چه تغییری می‌کند؟ [۴]



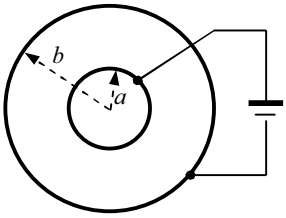
شکل ۲-۳۸: شکل مثال ۲-٤٤

حل: توزیع میدان الکتریکی در خارج از پوستهٔ کروی با شعاع c پس از وصل کلید با قبل از آن هیچ تفاوتی نمی‌کند؛ زیرا اگر یک سطح گوسی کروی هم‌مرکز با کره‌ها و در بیرون از پوستهٔ کروی با شعاع c فرض کنیم، در هر دو حالت بار داخل این سطح گوسی برابر Q است که به طور متقارن درون این کره قرار دارد. به دلیل مشابه توزیع میدان الکتریکی بین دو پوستهٔ با شعاع‌های a و b قبل و بعد از وصل کلید یکسان است. تنها تفاوتی که بین دو حالت وجود دارد این است که در حالت وصل کلید میدان الکتریکی بین دو پوستهٔ کروی با شعاع‌های b و c صفر می‌شود و دو کره هم‌پتانسیل می‌گردند. بنابراین تغییر اختلاف پتانسیل پوستهٔ کروی با شعاع a در دو حالت برابر است با اختلاف پتانسیلی که میدان در حالت قطع کلید بین دو پوستهٔ کروی با شعاع‌های b و c ایجاد می‌کند. با توجه به اینکه میدان الکتریکی بین دو کره در حالت قطع کلید $\mathbf{E}=\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ R^۲}\mathbf{a}_R$ است، اختلاف پتانسیل پوستهٔ کروی به شعاع a برابر است با:

$$\Delta V = \circ - \left(-\int_c^b \mathbf{E}\,.\,\mathbf{d}l\right) = \int_b^c \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ R^۲}\,\mathbf{a}_R\,.\,\mathbf{a}_R\,dR = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{۱}{c}-\frac{۱}{b}\right)$$

مثال ۲-۴۵ بین دو کره فلزی هم‌مرکز به شعاع های $a=۱\circ^{cm}$ و $b=۴\circ^{cm}$ اختلاف پتانسیل $۲۷\circ^V$ برقرار شده به طوریکه کره بزرگتر زمین شده است. پتانسیل را در $R=۳\circ^{cm}$ بدست آورید. (کارشناسی ارشد آزاد برق ۸۵)

حل: روش کلی حل این مسائل به صورت زیر است:



شکل ۲-۳۹: شکل مثال ۲-۴۵

بـار Q را روی کرهٔ داخلی فرض کرده و میـدان ناشـی از آن را محاسبه می‌کنیم. سپس با استفاده از انتگرالِ خطی میدان الکتریکی، اختلاف پتانسیل دو صفحه را می‌یابیم. با توجـه به مشخص بودن اختلاف پتانسیل، تنها مجهول مسئله یعنی بـار Q مشخص می‌شود. حال هر کمیتی را که بخواهیم به سهولت پیدا می‌کنیم. برای این مثال داریم: بار Q را روی کرهٔ داخلی فرض می‌کنیم، میدان ناشی از آن در فضای بین دو کره به صورت زیر است:

$$\mathbf{E}=\frac{Q}{۴\,\pi\,\varepsilon_{\circ}\,R^{۲}}\,\mathbf{a}_R$$

برای اختلاف پتانسیل دو صفحه داریم:

$$V\,(a)-V\,(b)=-\int_b^a \frac{Q}{۴\,\pi\,\varepsilon_{\circ}\,R^{۲}}\,\mathbf{a}_R\,.\,dR\;\mathbf{a}_R=\frac{Q}{۴\,\pi\,\varepsilon_{\circ}}\left(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}\right)=۲۷۰$$

پس:

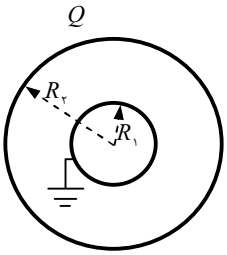
$$Q=\frac{۲۷۰\times ۴\,\pi\,\varepsilon_{\circ}}{\left(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}\right)}$$

حال برای پتانسیل هر نقطهٔ دلخواه از فضای بین دو کره:

$$V\,(R)-\cancel{V\,(b)}^{\circ}=-\int_b^R \frac{Q}{۴\,\pi\,\varepsilon_{\circ}\,R^{۲}}\,\mathbf{a}_R\,.\,dR\;\mathbf{a}_R=\frac{Q}{۴\,\pi\,\varepsilon_{\circ}}\left(\frac{۱}{R}-\frac{۱}{b}\right)=۳۰^{V}$$

تذکر: روش ساده‌تر حل این مثال، اسـتفاده از روش لاپـلاس اسـت کـه آن را در فـصل سـوم بیـان می‌کنیم. (مثال ۳-۲۸ را ببینید)

تمرین ۲-۳۲: سه استوانهٔ فلزی هم‌محور دارای شعاع‌های a، b و c می‌باشند. استوانه‌های داخلی و بیرونی به زمین وصل شده‌اند و روی استوانهٔ میانی بار الکتریکی بـه چگـالی سـطحی ρ_s قـرار داده می‌شود. چگالی سطحی بار استوانه داخلی را بدست آورید.



شکل ۲-۴۰: شکل تمرین ۲-۳۳

تمرین ۲-۳۳: در فضـای خالی بار Q به طور یکنواخت بر روی کـره‌ای به شـعاع $R_۲$ پخش شـده است. این کـره، کرهٔ رسانائی به شعاع $R_۱$ کـه زمیـن شده است را احاطه می‌کنـد. میدان الکتریکی را در فضای بین دو کره محاسبه کنید. (کارشناسی ارشد برق ۷۷)

مثال ۲-۴۶ بار نقطه‌ای Q در فاصلهٔ d از یک کرهٔ هادی بـه شـعاع a قـرار دارد. بـا فـرض اینکـه چگالی بار القایی از رابطهٔ (۲-۶۲) محاسبه شود، مقدار کل بار القایی روی کره چقدر است؟
(کارشناسی ارشد آزاد برق ۸۴)

$$\rho_s = -\frac{Q\left(d^2 - a^2\right)}{4\pi a\left(a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (۲-۶۲)$$

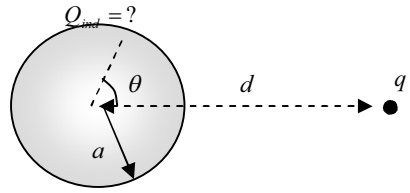
حل: مطابق توصیحات مثال (۲-۴۱)، در اثر حضور این بار، میدانی در داخل هادی ایجاد مـی‌شـود و به صورت طبیعی بارهایی بر روی سطح هادی القاء می‌شوند تا قیود هادی (یعنی روابط ۲-۵۶ تـا ۲-۵۸) برانگیخته نشوند. چگالی این بارهای القایی در صورت سوال داده شده (و آن را در تمرین (۳-۴) اثبات خواهیم کرد) است. برای محاسبهٔ کل بارهای القایی کافی است از این رابطـه روی کـل سـطح کره انتگرالگیری کنیم:

$$Q = \int \rho_s\, ds = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{-Q\left(d^2 - a^2\right)}{4\pi a\left(a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\, a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

که با روشی مشابه مثال (۲-۳۵) حل می‌شود و در نهایت خواهیم داشت:

$$Q_{ind} = -\frac{a}{d} Q \qquad (۲-۶۳)$$

در فصل سوم این مقدار بار القایی را بار تصویر نامگذاری می‌کنیم. رابطهٔ فوق کلید حل دستهٔ مهمـی از مسائل پیچیدهٔ الکترواستاتیک است.



شکل ۲-۴۱: شکل مثال ۲-٤٦

مثال ۲-۴۷ بار نقطه‌ای q در فاصلهٔ d از یک کرهٔ هادی به شعاع a قرار دارد. پتانسیل کرهٔ هادی چقدر خواهد بود؟

حل: روش کلاسیک: چون در فضا هادی داریم، پس روی آن بار القـاء مـی‌شـود. ابتـدا چگـالی ایـن بارهای القایی را بدست می‌آوریم (رابطهٔ ۲-۶۲) سپس با اسـتفاده از جمـع آثـارِ ایـن دو توزیـع (بـار

القایی و بار نقطه‌ای) پتانسیل را محاسبه می‌کنیم. این روش بسیار وقتگیر است و آن را به عنوان تمرین به شما واگذار می‌کنیم. (تمرین ۲-۳۴).

روش‌های ابتکاری: برای حل می‌توان از قضیهٔ هم‌پاسخی یا روش تصاویر استفاده کرد.

استفاده از قضیهٔ هم‌پاسخی: از بیان اول قضیهٔ هم‌پاسخی برای پاسخ به این سوال استفاده می‌کنیم. روش فوق را در فصل سوم به طور کامل بیان می‌کنیم.

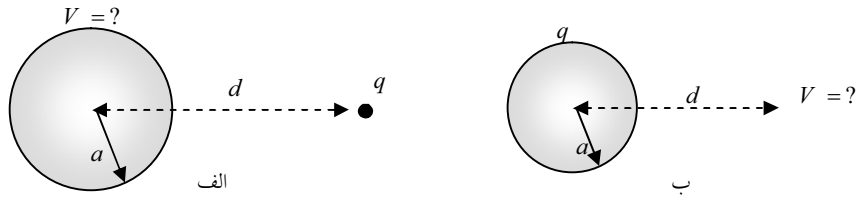
بیان اول قضیهٔ هم‌پاسخی:

برای محاسبهٔ پتانسیل سطح هادی در حضور توزیع بارِ خارجی، ابتدا فرض می‌کنیم توزیع مذکور بر سطح هادی واقع شده، حال کافی است پتانسیل ناشی از این توزیع را در محل قبلی توزیع پیدا کنیم. پتانسیل محاسبه شده برابر پتانسیل سطح هادی است.

روش فوق را به صورت زیر به مسئله اعمال می‌کنیم:

همانطور که در شکل (۲-۴۲- الف) دیده می‌شود، بار q در فاصلهٔ d از کرهٔ هادی قرار گرفته. برای محاسبهٔ پتانسیل فرض می‌کنیم بار q روی سطح هادی قرار داشته باشد (مطابق شکل۲-۴۲- ب) در این صورت پتانسیل در محل قبلی بار به صورت $\frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ d}$ است. طبق قضیهٔ هم‌پاسخی این پتانسیل با پتانسیل سطح هادی برابر است.

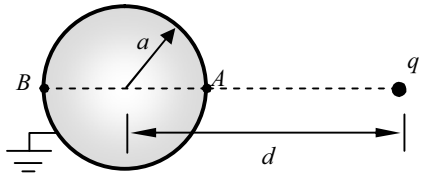
- حل این سوال را بر اساس روش تصویر در فصل سوم یاد می‌گیریم. (مثال ۳-۱۵)



شکل ۲-۴۲: شکل مثال ۲-۴۷

تمرین ۲-۳۴: مثال (۲-۴۷) را با استفاده از روش کلاسیک یا هر روش دلخواه دیگری (از روش تصاویر استفاده نکنید) مجدداً حل کنید.

تمرین ۲-۳۵: در شکل (۲-۴۳) بار q به فاصلهٔ d از مرکز کرهٔ هادی به شعاع a که در پتانسیل صفر قرار دارد، واقع است. چه رابطه‌ای باید بین a و d برقرار باشد تا چگالی بارِ سطحی در نقطهٔ A، ۸ برابرِ چگالی بار سطحی نقطهٔ B باشد؟[۴]



شکل ۲-۴۳: شکل تمرین ۲-۳۵

پرسش ۷: اگر سطح یک رسانای باردار، هم‌پتانسیل باشد، آیا به این معنی است که بار به طور یکنواخت در سطح آن پخش شده است؟ اگر اندازهٔ میدان در سطح رسانا ثابت باشد، آیا بار به طور یکنواخت توزیع شده است؟

مثال کلیدی

مثال ۲-۴۸ پوستهٔ کروی رسانایی به شعاع R در مرکز مختصات قرار دارد. توزیع‌های زیر به صورت همزمان در فضا انجام گرفته:

- بار Q را روی سطح کره قرار داده‌ایم.
- بار نقطه‌ای q_1 را در داخل پوسته و به فاصلهٔ a از مرکز قرار داده‌ایم.
- بار نقطه‌ای q_2 را در خارج پوسته و به فاصلهٔ b از مرکز قرار داده‌ایم.

پتانسیل سطح کره را بیابید. [۴]

حل: از جمع آثار استفاده می‌کنیم. پتانسیل ناشی از بار Q (قرار گرفته روی سطح کره) در سطح کره به صورت $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$ است. پتانسیل ناشی از بار q_1 (قرار گرفته در داخل پوسته) در سطح پوسته نیز بر طبق توضیحات گذشته از رابطهٔ $\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a}$ بدست می‌آید. در نهایت پتانسیل ناشی از بار q_2 (قرار گرفته در خارج پوسته و به فاصلهٔ b از مرکز) در سطح پوسته، طبق نتیجهٔ مثال (۲-۴۷) به صورت $\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 b}$ خواهد بود. پس پتانسیل سطح پوسته عبارت است از:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

تمرین ۲-۳۶: کره‌ای به شعاع a از جنس رسانا با پتانسیل V_0 در فضا وجود دارد؛ این کره ایزوله است. حال بار $+q_1$ را در فاصلهٔ R ($R > a$) از مرکز کره قرار می‌دهیم. پتانسیل کره چقدر خواهد شد؟

مثال ۲-۴۹ بار نقطه‌ای q را به فاصلهٔ d از مرکز یک کرهٔ رسانا به شعاع a ($d > a$) که دارای بار Q است، منتقل می‌کنیم. اگر پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای به فاصلهٔ R از بار و کره ($R >> d$) با $\frac{1}{R^2}$ متناسب باشد، مقدار بار Q را محاسبه کنید.

حل: هیچ احتیاجی به تحلیل شرایط سیستم نداریم! کافیست از داشته‌های مسئله به درستی استفاده کنیم. طبق فرض سوال پتانسیل در فاصلهٔ خیلی دور با $\frac{1}{R^2}$ متناسب است، یعنی سیستم مشابه یک دوقطبی عمل می‌کند، یعنی:

$$Q = -q$$

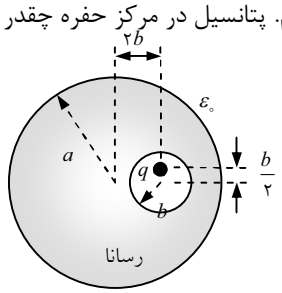
اما، دو پرسش از شما:

پرسش ۸: شرایط فیزیکی سوال (تعیین بارهای القایی و ...) را چگونه تحلیل می‌کنید؟

پرسش ۹: پیش از این آموختیم که در اثر حضور یک توزیع بار در مجاورت سطح یک هادی، بر سطح هادی بار القاء می‌شود. حال سوال این است که اگر هادی دارای مقدار بارِ مشخصی باشد و یا به پتانسیل معینی (الزاما غیر صفر) متصل باشد، باز هم بر سطح آن بار القاء می‌شود یا خیر؟ و اگر القاء می‌شود مقدر این بارهای القایی باید چه قیودی از سیستم را همزمان برآورده سازد؟

پاسخ این دو سوال را در فصل سوم و با استفاده از تئوری تصاویر بررسی خواهیم کرد.

مثال ۲-۵۰ کره‌ای ایزوله به شعاع a از جنس رسانا با حفره‌ای کروی به شعاع b مطابق شکل مفروض است. بار نقطه‌ای q را در فاصلهٔ $\frac{b}{2}$ از مرکز حفره قرار داده‌ایم. پتانسیل در مرکز حفره چقدر است؟ (کارشناسی ارشد برق ۸۶)



شکل ۲-٤٤: شکل مثال ۲-۵۰

حل: در اثر حضور بار q داخل حفره بارهایی در سطوح هادی القاء می‌شود. با اعمال اثر این بارها، پتانسیل را پیدا می‌کنیم. بار نقطه‌ای دو سطح هادی را در مقابل خود می‌بینند. یکی سطح داخلی حفره و دیگری سطح خارجی کرهٔ هادی. چگالی بار القایی روی سطح داخلی حفره را $-\rho_s$ فرض می‌کنیم، کل بار القایی روی سطح خارجی کره نیز $-q$ می‌باشد، که بصورت یکنواخت روی سطح کره توزیع شده است. پتانسل ناشی از آنها به صورت زیر است:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \frac{b}{2}} - \int \frac{\rho_s\, ds}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 b} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

مثال ۲-۵۱ در مجموعهٔ شکل (۲-۴۵)، کرهٔ رسانای مرکزی توسط یک سیم بسیار نازک به پوستهٔ رسانای کروی متصل شده است. بار نقطه‌ای 1^C در فاصلهٔ $\frac{3}{2}a$ از کرهٔ مرکزی قرار دارد. در عین حال 1^C بار دیگر به پوستهٔ کروی اعمال می‌شود. پتانسیل کرهٔ مرکزی را بیابید. (کارشناسی ارشد برق ۸۶)

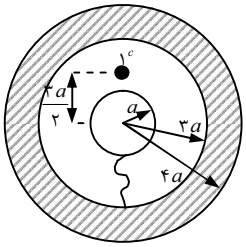
حل: باز هم از جمع آثار استفاده می‌کنیم:

- بار 1^C که به پوستهٔ کروی اعمال می‌شود، تماما روی سطح رسانای خارجی قرار گرفته و به طور یکنواخت توزیع می‌شود. (یعنی روی کرهٔ به شعاع $4a$) این توزیع، پتانسیل $V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0(4a)}$ را در $R < 4a$ ایجاد می‌کند.

- بار نقطه‌ای 1^C که در بین دو رسانا قرار گرفته بار سطحی -1^C را هم روی سطح خارجی کرهٔ به شعاع a و نیز روی سطح داخلی پوستهٔ به شعاع $3a$ و نیز بار 1^C را روی سطح خارجی پوسته القاء می‌کند. بار 1^C که روی سطح خارجی پوسته قرار دارد پتانسیل $V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0(4a)}$ را در $R < 4a$ ایجاد می‌کند. بار نقطه‌ای 1^C و بارهای سطحی روی سطوح $R = a$ و $R = 3a$ آنچنان پخش می‌شوند که میدان الکتریکی در $R > 3a$ صفر گردد. (چرا که مجموع بار قرار گرفته در سطح گوسی صفر است) یعنی پتانسیل در $R = 3a$ و $R = \infty$ برای این بخش از بارها برابر هم و مساوی صفر است و چون کرهٔ به شعاع a بوسیلهٔ سیم به پوسته وصل است، لذا پتانسیل ناشی از این بخش از بارها صفر است.

پس:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 a}$$



شکل ۲-۴۵: شکل مثال ۲-۵۱

مثال ۲-۵۲ در شکل مقابل، حلقه‌ای از بارهای الکتریکی به شعاع r و چگالی بار خطی ثابت λ_0 در مرکز یک پوستهٔ کروی رسانا قرار گرفته است. مرکز پوسته نقطهٔ $(-c,0,0)$ بوده و پوسته به

پتانسیل $V_\circ$ نسبت به نقطه‌ای در بی‌نهایت متصل است. اندازهٔ شار $\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$ عبوری از صفحهٔ $x = \circ$ چقدر است؟ (کارشناسی ارشد برق ۸۷)

حل: کافی است اثرِ مشخص بودن پتانسیل پوسته را درک کنیم. می‌دانیم تمام بار یک هادی در لایهٔ خارجی‌اش جمع می‌شود، از طرفی در تمام فضای هادی پتانسیل ثابت است (چون میدان داخل هادی صفر است) پس وقتی پتانسیل پوستهٔ هادی $V_\circ$ است می‌توان گفت:

$$V_\circ = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ b}$$

در نتیجه:

$$Q = V_\circ ۴\pi\varepsilon_\circ b$$

Q کل بار موجود در داخل سطح گوسی‌ایست که پوسته را فرا گرفته، این یعنی میدان در خارج کره مشخص است (چون کل بار داخل سطح گوسی مشخص است!) پس:

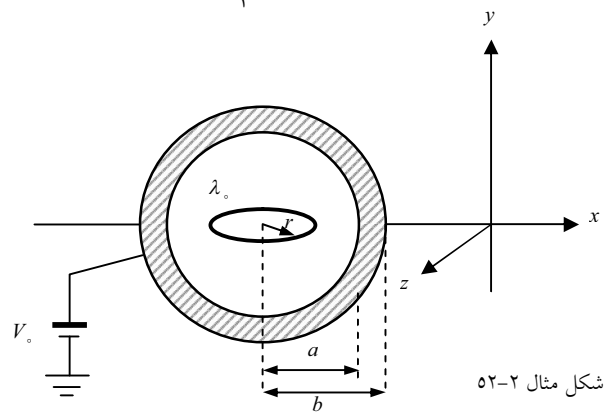
$$\mathbf{E} = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ R^۲}\mathbf{a}_R$$

نتیجه می‌گیریم که:

" با توجه به مشخص بودن پتانسیل پوستهٔ رسانا، بار داخل آن در میدان خارج پوسته بی‌تاثیر است. "

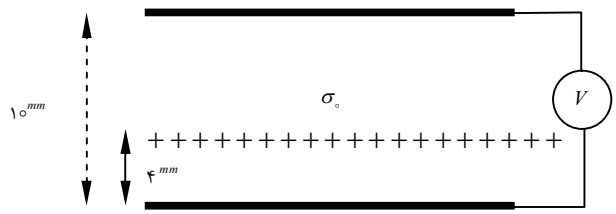
حال که میدان خارج پوسته را محاسبه کردیم، برای بدست آوردن شار گذرنده از سطح $x = \circ$ کافیست $\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$ را روی سطح $x = \circ$ حساب کنیم. طبق توضیحات مثال (۲-۲۴) بدون حل نیز می‌توان گفت که مقدار این شار برابر است با:

$$\varphi = \frac{Q}{۲} = Q = V_\circ ۲\pi\varepsilon_\circ b$$



شکل ۲-٤٦: شکل مثال ۲-۵۲

مثال ۲-۵۳ همانند شکل (۲-۴۷) در فضای بین دو صفحهٔ رسانای موازی نامتناهی، بار صفحه‌ای یکنواخت به چگالی $\sigma_\circ$ موجود است. اگر $\frac{\sigma_\circ}{\varepsilon_\circ}=۱۰۰\ V/m$ باشد، ولتمتر متصل به دو صفحه چه ولتاژی را نشان می‌دهد؟ (کارشناسی ارشد برق ۸۷)



شکل ۲-۴۷: شکل مثال ۲-۵۳

حل: حضور بار سطحی یکنواخت $\sigma_\circ$ میدان‌هایی را در فضای بالا و پایین این توزیع ایجاد می‌کند. میدان در بالای این توزیع $\frac{\sigma_\circ}{۲\varepsilon_\circ}\mathbf{a}_z$ و در پایین آن $-\frac{\sigma_\circ}{۲\varepsilon_\circ}\mathbf{a}_z$ خواهد بود. با توجه به نامتناهی بودن صفحات هادی، رسانا تغییری در این میدان‌ها ایجاد نمی‌کند. (مشابه میدان در بین صفحات خازن) ولتمتر انتگرال خطی میدان الکتریکی را از صفحهٔ بالایی تا صفحهٔ پایینی می‌خواند، پس:

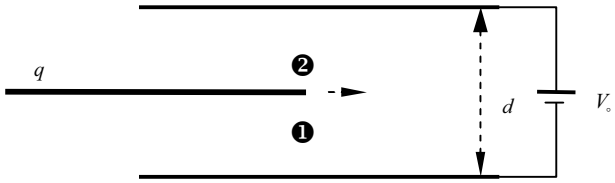
$$V=\int_{up}^{down}\mathbf{E}\cdot\mathbf{d}l=-\frac{\sigma_\circ}{۲\varepsilon_\circ}\left(۶\times۱۰^{-۳}\right)+\frac{\sigma_\circ}{۲\varepsilon_\circ}\left(۴\times۱۰^{-۳}\right)=-۵۰\times۲\times۱۰^{-۳}=-۰.۱^{V}$$

مثال کلیدی

مثال ۲-۵۴ دو ورق هادی بسیار بزرگ با مساحت A به فاصلهٔ d از یکدیگر قرار دارند. پتانسیل دو ورق به ترتیب ۰ و $V_\circ$ ولت می‌باشد. یک ورق دیگر حامل بار q در وسط ناحیهٔ بین دو ورق قرار داده می‌شود. [۶]

الف) پتانسیل V و میدان E را در دو ناحیه تعیین کنید.

ب) پتانسیل ورق میانی را بیابید.



شکل ۲-۴۸: شکل مثال ۲-۵۴

حل: **الف)** از جمع آثار استفاده می‌کنیم. ابتدا فرض کنیم ورق حامل بار q وجود نداشته باشد، در این صورت میدان در فضای بین صفحات به صورت زیر است:

$$V_{\circ} = -\int_{\circ}^{d} \mathbf{E} \cdot dz \ \mathbf{a}_z \ \rightarrow \mathbf{E} = -\frac{V_{\circ}}{d}\mathbf{a}_z$$

در بدست آوردن رابطهٔ فوق از اصل یکنواختی میدان در بین صفحات استفاده کردیم. حال اثر صفحهٔ حامل بار q را بررسی می‌کنیم. این صفحه میدان $\frac{q}{۲A\varepsilon_{\circ}}\mathbf{a}_z$ را در ناحیهٔ ۲ و میدان $-\frac{q}{۲A\varepsilon_{\circ}}\mathbf{a}_z$ را در ناحیهٔ ۱ ایجاد می‌کند. پس برای میدان بین صفحات داریم:

$$\mathbf{E}_{۱} = -\left(\frac{V_{\circ}}{d} + \frac{q}{۲A\varepsilon_{\circ}}\right)\mathbf{a}_z$$

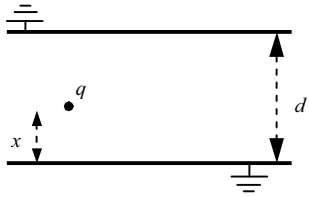
$$\mathbf{E}_{۲} = -\left(\frac{V_{\circ}}{d} - \frac{q}{۲A\varepsilon_{\circ}}\right)\mathbf{a}_z$$

برای محاسبهٔ پتانسیل در هر نقطهٔ بین صفحات کافیست از انتگرال خطی میدان استفاده کنیم. برای مثال پاسخ قسمت ب بدین صورت است:

ب)

$$V_q - \circ = -\int_{\circ}^{\frac{d}{۲}} \mathbf{E}_{۱} \cdot dz \ \mathbf{a}_z = -\int_{\circ}^{\frac{d}{۲}} -\left(\frac{V_{\circ}}{d} + \frac{q}{۲A\varepsilon_{\circ}}\right)\mathbf{a}_z \cdot dz \ \mathbf{a}_z = \frac{V_{\circ}}{۲} + \frac{q\,d}{۴A\varepsilon_{\circ}}$$

تمرین ۲-۳۷: دو صفحهٔ یک خازن مسطح به پتانسیل صفر وصل شده‌اند و بار q به فاصلهٔ x از یکی از صفحات قرار دارد. با این فرض که فاصلهٔ دو صفحه برابر d باشد، مطلوب است محاسبهٔ مقدار بار القاء شده روی صفحات و تابع پتانسیل در فضای بین دو صفحه.



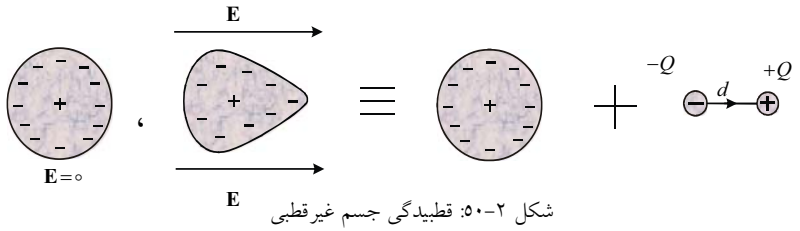
شکل ۲-۴۹: شکل تمرین ۲-۳۷

۲-۸- دی‌الکتریک‌ها در میدان الکتریکی ساکن

پیش از این با عایق‌ها آشنا شده‌ایم، می‌دانیم که در شرایط عادی تعداد کمی از الکترون‌ها می‌توانند از باند ظرفیت وارد باند هدایت گردند؛ از اینرو رسانندگی آنها بسیار کم است. در این قسمت انواع کلی عایق‌ها و تاثیرات میدان بر آنها و همچنین مفهوم بردار قطبی‌شدگی را مطرح می‌کنیم.

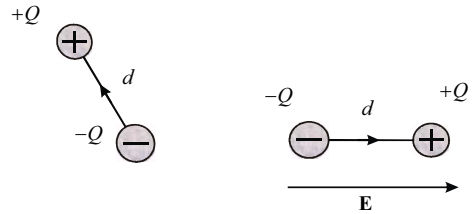
وقتی یک عایق در میدان الکتریکی قرار می‌گیرد یک جابه‌جایی بین مراکز ثقل بارهای مثبت و منفی ایجاد می‌شود. آنچه انواع دی‌الکتریک را دسته‌بندی کرده، چگونگی انجام این جابه‌جایی است که بر اساس آن دو نوع ملکول قطبی و غیرقطبی مطرح است.

در ملکول‌های غیرقطبی و به واسطهٔ اعمال میدان خارجی، بارهای مثبت و منفی در جهت مخالف نیروی جاذبهٔ متقابلِ خود، جابه‌جا شده و تشکیل یک دوقطبی می‌دهند که هم‌جهت با میدان است. (مطابق شکل۲-۵۰)



شکل ۲-۵۰: قطبیدگی جسم غیرقطبی

در ملکولهای قطبی جابه‌جایی به صورت دائمی وجود دارد و اثر آن نیز ایجاد دوقطبی‌هایی با جهت‌های تصادفی است که با اعمال میدان خارجی، این دو قطبی‌ها در یک جهت که همان جهت میدان اعمالی است قرار می‌گیرند. (مطابق شکل۲-۵۱)



شکل ۲-۵۱: قطبیدگی جسم قطبی

۲-۸-۱- توزیع‌های بار معادل در عایق‌های قطبیده

مشخصهٔ همهٔ دی‌الکتریک‌ها ذخیرهٔ انرژی الکتریکی است. این از مهمترین دلایل بررسی دی‌الکتریک‌ها است. همانطور که گفتیم عایق‌ها در اثر میدان الکتریکی قطبیده می‌شوند، یعنی در آنها دوقطبی الکتریکی ایجاد می‌شود، از طرفی پیش از این بردار پلاریزاسیون (قطبش) را برای دوقطبی الکتریکی مطرح کردیم:

$$\mathbf{P} = q\,\mathbf{d} \qquad (۶۴-۲)$$

در یک جسم قطبیده بی‌نهایت بردار قطبیدگی با جهت‌های مختلف وجود دارد، برای اینکه کل قطبش یک جسم
قطبیده را محاسبه کنیم، مشابه اثبات رابطهٔ دیورژانس عمل می‌کنیم:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \to ۰} \frac{\sum_{k=۱}^{n\Delta V} \mathbf{P}_k}{\Delta V} \qquad (۶۵-۲)$$

سوال: بردار **P** چه می‌گوید؟

جواب: در عایق‌ها بار نمی‌تواند آزادانه حرکت کند، بنابراین درون جسم عایق، هم می‌توان بار خالص داشت و هم میدان الکتریکی. بردار **P** نشان می‌دهد که این بارها چگونه و با چه مقداری در دی الکتریک توزیع می‌شوند.

طبق تعریف این توزیع‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

بار سطحی مقید: $$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n \qquad (۶۶\text{-}۲)$$

بار حجمی مقید: $$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \qquad (۶۷\text{-}۲)$$

یعنی در مسائلی که بردار **P** داده شده، با چیز جدیدی مواجه نیستیم. کافیست از روی آن توزیع‌های بار معادل را یافته و با روش‌های گذشته موارد خواسته شده را محاسبه کنیم.

مثال کلیدی

مثال ۲-۵۵ استوانهٔ قائم توپری را با قطبش $\mathbf{P} = P\ \mathbf{a}_z$ در نظر بگیرید. میدان الکتریکی را روی محور zها (محور استوانه) و $z > ۲l$ بدست آورید. طول استوانه $۲l$ و شعاع آن a است.

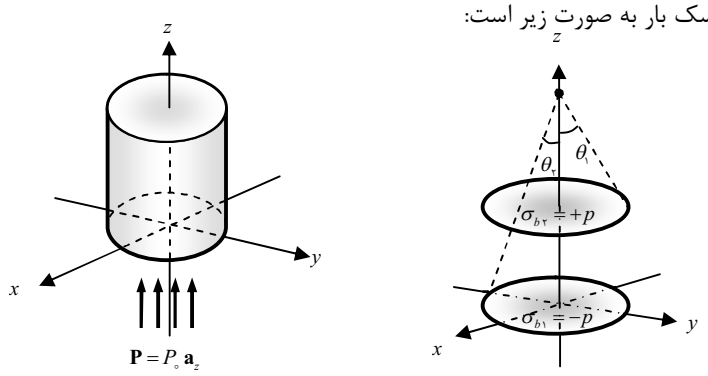
حل: بردار پلاریزاسیون را داریم. باید بارهای مقید را بیابیم:

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = ۰$$

$$\sigma_{b۱} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n \Big|_{z=۰} = P\ \mathbf{a}_z \cdot (-\mathbf{a}_z) = -p$$

$$\sigma_{b۲} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n \Big|_{z=۲l} = P\ \mathbf{a}_z \cdot (+\mathbf{a}_z) = p$$

کافیست میدان ناشی از دو صفحهٔ باردار را در نقطهٔ مورد نظر محاسبه کرده و با هم جمع کنیم. (شکل ۲-۵۲- ب) برای این منظور از نتیجهٔ مثال (۲-۷) استفاده می‌کنیم. طبق رابطهٔ (۲-۲۷) میدان دیسک بار به صورت زیر است:



الف شکل ۲-۵۲: شکل مثال ۲-۵۵ ب

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_\circ}\left(1-\cos\theta\right)\mathbf{a}_z$$

پس:

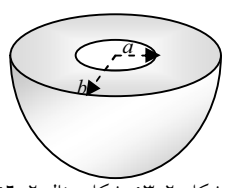
$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_\circ}\left(1-\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\mathbf{a}_z = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_\circ}\left(1-\cos\theta\right)\mathbf{a}_z \Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{P}{2\varepsilon_\circ}\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right)\mathbf{a}_z$$

مثال ۲-۵۶: یک پوسته کروی عایق به شکل نیم‌کره به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b دارای بردار پلاریزاسیون به صورت $\mathbf{P} = P_\circ\,\mathbf{a}_R$ است.

الف) چگالی بارهای معادل مقید و میزان بارهای معادل مقید را بدست آورید.

ب) پتانسیل را در مرکز کره بدست آورید. $(V(\infty)=0)$

حل: مشابه مثال قبل عمل می‌کنیم. برای چگالی‌های سطحی مقید داریم:



شکل ۲-۵۳: شکل مثال ۲-۵۶

$$\sigma_{b1} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{a}_n\Big|_{R=a} = P_\circ\,\mathbf{a}_R\cdot(-\mathbf{a}_R) = -p_\circ$$

$$\sigma_{b2} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{a}_n\Big|_{R=b} = P_\circ\,\mathbf{a}_R\cdot(+\mathbf{a}_R) = +p_\circ$$

برای بارهای حجمی مقید هم باید از رابطهٔ $\rho_b = -\nabla\cdot\mathbf{P}$ استفاده کنیم، با توجه به ثابت بودن بردار پلاریزاسیون، مشتق آن و در نتیجه دیورژانس (و همچنین ρ_b) صفر می‌شود!؟

نکتهٔ طلایی

اگر چه، شاید بتوان دیورژانس را در دستگاه کارتزین مجموع مشتق مولفه‌های یک تابع نسبت به همان مولفه نامید ولی چنین بیانی برای دستگاه‌های دیگر صادق نیست و در حالت کلی **دیورژانس، مشتق نیست!!**

ایراد فوق اشتباه کاملا رایجی است که برای حل آن مسئلهٔ (۱-۱۷) را در پایان فصل اول آورده‌ایم. پس دوباره چگالی برای بارهای حجمی مقید را محاسبه می‌کنیم. طبق رابطهٔ (۱-۳۵):

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 A_3)\right]$$

پس:

$$\rho_b = -\nabla\cdot\mathbf{P} = -\frac{1}{R^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial R}(R^2\sin\theta\,P_\circ)\right] = -\frac{2P_\circ}{R}$$

ب) برای محاسبهٔ پتانسیل از جمع آثار استفاده می‌کنیم:

پتانسیل ناشی از σ_{b1} در مرکز کره:

$$V_1 = \int \frac{\sigma_{b1}\, ds}{4\pi\varepsilon_0 a} = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{-P_0}{4\pi\varepsilon_0 a} \times a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{-aP_0}{2\varepsilon_0}$$

پتانسیل ناشی از σ_{b2} در مرکز کره:

$$V_2 = \int \frac{\sigma_{b2}\, ds}{4\pi\varepsilon_0 b} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{P_0}{4\pi\varepsilon_0 b} \times b^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{bP_0}{2\varepsilon_0}$$

پتانسیل ناشی از ρ_b در مرکز کره:

$$V_3 = \int \frac{\rho_b\, ds}{4\pi\varepsilon_0 b} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_a^b \frac{-\frac{2P_0}{R_0}}{4\pi\varepsilon_0 R} \times R^2 \sin\theta\, dR\, d\theta\, d\varphi = \frac{P_0(b-a)}{2\varepsilon_0}$$

پس:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{P_0(b-a)}{\varepsilon_0}$$

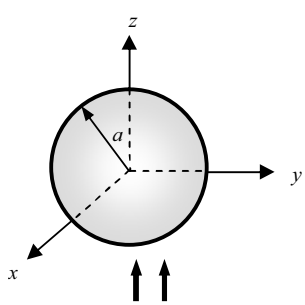
مثال ۲-۵۷ عایقی کروی به شعاع a پلاریزه شده و بردار قطبی‌شدگی آن به صورت $\mathbf{P} = P_0\, \mathbf{a}_z$ است. مطلوب است محاسبهٔ میدان الکتریکی ناشی از این پلاریزاسیون در مرکز کره.

(کارشناسی ارشد هسته‌ای ۸۲ و برق ۷۲)

حل: چگالی بارهای القایی را محاسبه می‌کنیم:

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n \Big|_{R=a} = P_0\, \mathbf{a}_z \cdot (\mathbf{a}_R) = p_0 \cos\theta$$

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$$



شکل ۲-۵٤: شکل مثال ۲-۲۳

کافیست میدان ناشی از این بار سطحی را در مرکز کره بیابیم.

اینکار را در تمرین(۲-۶) انجام داده‌ایم، مطابق پاسخ این تمرین:

$$\mathbf{E} = -\frac{P_0}{3\varepsilon_0}\, \mathbf{a}_z$$

سوال: بردار $\mathbf{P}$ دو توزیع حجمی و سطحی را در دی‌الکتریک ایجاد کرد. آیا این به معنای تولید بار است؟ پس اصل بقای بار چه می‌شود؟

جواب: بردار $\mathbf{P}$ یک مجموعه از بارهای مقید را ایجاد کرده و نه بار آزاد. در ضمن همانطور که در مثال فوق مشاهده شد (و برای هر حالتی به راحتی محاسبه می‌شود) **مجموع بارهای مقید یک جسم قطبیده صفر است** و عملا چیزی (بار آزادی) به کل فضا اضافه (و یا کم) نشده و از اینرو اصل بقای بار همواره برقرار بوده و این دو منافی هم نیستند. کاربرد این مطلب را در مثال‌های زیر ببینید:

مثال ۲-۵۸ بردار پلاریزاسیون برای نقاط یک دی‌الکتریکِ مکعب شکل که دو وجه مقابل آن روی صفحات $z=0$ و $z=a$ واقع هستند، به صورت $\mathbf{P}=P_0\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\mathbf{a}_z$ است. کل بارهای پلاریزهٔ حجمی که در داخل این دی‌الکتریک جمع می‌شود، چقدر است؟ [۴]

حل: می‌دانیم مجموع بارهای پلاریزهٔ سطحی و حجمی در یک دی‌الکتریک همواره برابر صفر است. بنابراین مقدار بار پلاریزهٔ حجمی، قرینهٔ مقدار بار پلاریزهٔ سطحی است. از طرفی چون بردار پلاریزاسیون فقط در جهت محور zها مولفه دارد، بار پلاریزهٔ سطحی فقط روی دو وجه $z=0$ و $z=a$ جمع می‌شود. پس:

$$Q_v=-Q_s=(-S\times\rho_s)-a^2\left[\mathbf{P}(z=0)\cdot(-a_z)+\mathbf{P}(z=a)\cdot(+a_z)\right]=-a^2\left[-P_0-P_0\right]=2a^2P_0$$

مثال ۲-۵۹ بار نقطه‌ای q در مبداء مختصات واقع شده است. درون کرهٔ فرضی به شعاع a اطراف بار نقطه‌ای خلاء و در فضای $R\geq a$ دی‌الکتریکی با ضریب گذردهی نسبی متغیر به صورت $\varepsilon_r=1+\frac{a}{R}$ قرار دارد. کل بار پلاریزه حجمی در فضای بیرون از کره ($R>a$) چقدر است؟

حل: مجموع بارهای پلاریزهٔ سطحی و حجمی در یک دی‌الکتریک همواره برابر صفر است. برای شروع از شرایط فیزیکی سیستم کمک می‌گیریم؛ چون در این مسئله در نقاط خیلی دور از مبداء ($R\to\infty$) مقدار ε_r برابر با ۱ است، پس در بی‌نهایت بار پلاریزه نخواهیم داشت، در نتیجه:

(کل بار پلاریزهٔ سطحی روی سطح کره در $R=a$) $=-$ کل بار پلاریزه حجمی در فضای خارج از کره

بردار پلاریزاسیون در نقاط روی سطح $R=a$ برابر است با:

$$\mathbf{P}_{R=a}=\mathbf{D}_{R=a}-\varepsilon_0\mathbf{E}_{R=a}=\mathbf{D}_{R=a}-\frac{1}{\varepsilon_r(R=a)}\mathbf{D}_{R=a}=(1-\frac{1}{2})\mathbf{D}_{R=a}=\frac{1}{2}\times\frac{q}{4\pi a^2}$$

پس:

$$\rho_s = \mathbf{P}_{R=a} \cdot (-\mathbf{a}_R) = -\frac{1}{2} \times \frac{q}{4\pi a^2}\mathbf{a}_R$$ = چگالی بار پلاریزهٔ سطحی روی سطح کره در $R = a$

$$-\rho_s \times 4\pi a^2 = -\frac{q}{2}$$ = کل بار پلاریزه حجمی در فضای خارج از کره

مثال ۲-۶۰ بردار قطبیدگی درون کره‌ای به شعاع a برابر با $\mathbf{P} = P_0 \left(\frac{a^2}{R^2}\right)\mathbf{a}_R$ است، که در آن R فاصله تا مرکز کره است و $R > 0$، کل بار قطبیده درون کرهٔ فرضی به مرکز کرهٔ فوق و شعاع $\frac{a}{2}$ چقدر است؟ [۴]

حل: چگالی بار مقید حجمی درون کره صفر است، زیرا:

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{1}{R^2}\left[\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 P_0 \left(\frac{a^2}{R^2}\right)\right)\right] = 0$$

چگالی بار مقید سطحی روی سطح کره عبارت است از:

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_R \Big|_{R=a} = P_0$$

پس کل بار مقید سطحی روی کره عبارت است از:

$$Q = 4\pi a^2 P_0$$

از آنجایی که مجموع بار پلاریزهٔ سطحی و حجمی در کره باید صفر شود، مقدار بار مقید $-Q$ و در مبداء مختصات قرار دارد. پس کل بار قطبیده به مرکز کره‌ای با شعاع $\frac{a}{2}$، همان $-Q$ است.

سوال: مطابق توضیحات داده شده قطبی‌شدگی به معنای تولید بار نیست به گونه‌ای که همواره مجموع بارهای مقید یک جسم قطبیده صفر است، پس تاثیر دی‌الکتریک بر محیطی که در آن قرار گرفته است، چیست؟

برای پاسخگویی به این سوال به بخشی که در ادامه می‌آید توجه کنید:

۲-۸-۲- چگالی شار الکتریکی و ضریب دی‌الکتریک

پیش از این چگالی شار الکتریکی را تعریف کرده و روابط مربوطه را بررسی کرده بودیم. دیدیم:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_\circ \ \mathbf{E} \qquad (۶۸-۲)$$

این رابطه را زمانی بدست آوردیم که هنوز عایق‌ها مطرح نشده بودند. ما تاثیر دی‌الکتریک‌ها را بر محیط با تاثیر آنها بر چگالی شار الکتریکی مطالعه می‌کنیم و داریم:

$$\boxed{\mathbf{D} = \varepsilon_\circ \ \mathbf{E} + \mathbf{P}} \qquad (۶۹-۲)$$

برای اینکه مطمئن شویم بار آزادی ایجاد نشده می‌توانیم اینگونه بحث کنیم که:

قانون گاوس به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\boxed{\nabla \ . \ \mathbf{D} = \rho} \qquad (۷۰-۲)$$

در معادلهٔ بالا ρ **تنها بارهای آزاد** است و بارهای مقید ρ_b در نظر گرفته نمی‌شوند، ولی اگر بخواهیم قانون گاوس را برای شدت میدان الکتریکی بنویسیم، باید هر دو بار آزاد و مقید را در نظر بگیریم. یعنی:

$$\varepsilon_\circ \left(\mathbf{E} \ . \ \mathbf{d}s\right) = \rho + \rho_b \qquad (۷۱-۲)$$

عایق‌ها را از منظر دیگر می‌توان به انواع خطی و غیرخطی (با توجه به مشخصهٔ آن در میدان) تقسیم کرد. در عایق‌های خطی پارامتری به نام پذیرندگی الکتریکی χ_e (وابسته به شیب مشخصهٔ بیان شده) تعریف می‌شود. در این صورت می‌توان بردار قطبش و شدت میدان الکتریکی را مطابق رابطهٔ زیر به هم ربط داد:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_\circ \chi_e \mathbf{E} \qquad (۷۲-۲)$$

با قرار دادن این مقدار در رابطهٔ (۲-۶۹) داریم:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_\circ \ \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_\circ \ \mathbf{E} + \varepsilon_\circ \chi_e \ \mathbf{E} = \varepsilon_\circ (۱ + \chi_e) \ \mathbf{E}$$

با تعریف گذرده نسبی به صورت $\varepsilon_r = (۱ + \chi_e)$ برای چگالی شار خواهیم داشت:

$$\boxed{\mathbf{D} = \varepsilon_\circ \varepsilon_r \ \mathbf{E} = \varepsilon_r \ \mathbf{E}} \qquad (۷۳-۲)$$

رابطهٔ فوق فقط مخصوص عایق‌های خطی است و برای دی‌الکتریک‌های غیر خطی ε به صورت ماتریس بیان می‌شود.

پرسش ۹: نشان دهید که می‌توان ثابت دی‌الکتریک یک رسانا را بی‌نهایت بزرگ فرض کرد.

مثال ۲-۶۱ بار Q در داخل کره‌ای با گذردهی ε و شعاع a طوری توزیع شده که میدان قطبش داخل کره در جهت شعاعی بوده و با $\frac{1}{R}$ متناسب است. میدان‌های $\mathbf{P}$، $\mathbf{D}$ و $\mathbf{E}$ را در داخل کره محاسبه کرده و چگونگی توزیع بار را بدست آورید.

حل: میدان قطبش داخل کره شعاعی است و با $\frac{1}{R}$ متناسب است، یعنی می‌توان فرض کرد که:

$$\mathbf{P} = \frac{k}{R}\mathbf{a}_R$$

در این صورت طبق رابطهٔ (۲-۶۹) داریم:

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_\circ \mathbf{E} = (\varepsilon - \varepsilon_\circ)\mathbf{E}$$

پس:

$$\mathbf{E} = \frac{k}{(\varepsilon - \varepsilon_\circ)R}\mathbf{a}_R \ , \ \mathbf{D}_{in} = \varepsilon \mathbf{E} = \frac{\varepsilon k}{(\varepsilon - \varepsilon_\circ)R}\mathbf{a}_R$$

برای محاسبهٔ k دو روش وجود دارد:

روش اول محاسبهٔ k: محاسبهٔ چگالی بار و سپس بدست آوردن کل بار آزاد موجود در سیستم. با توجه به اینکه کل بار آزاد برابر Q است، تنها مجهول مسئله (k) محاسبه می‌شود:

برای محاسبهٔ چگالی بار، از چگالی شار الکتریکی دیورژانس می‌گیریم:

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \left(\frac{\varepsilon k}{(\varepsilon - \varepsilon_\circ)R}\mathbf{a}_R \right) = \frac{\varepsilon k}{(\varepsilon - \varepsilon_\circ)R^2}$$

برای کل بار آزاد داریم:

$$Q = \int \rho \, dv = \frac{\varepsilon k}{(\varepsilon - \varepsilon_\circ)} \int_\circ^a \int_\circ^{2\pi} \int_\circ^{\pi} \frac{1}{R^2} R^2 \sin\theta dR \, d\theta \, d\varphi = \frac{\varepsilon k \, 4\pi a}{(\varepsilon - \varepsilon_\circ)}$$

پس:

$$k = \frac{Q(\varepsilon - \varepsilon_\circ)}{4\pi a \varepsilon}$$

روش دوم محاسبهٔ k: در خارج کره فضای آزاد داریم، پس با فرض یک سطح گوسی کروی به راحتی نتیجه می‌گیریم که چگالی شار الکتریکی در خارج کره به صورت $\mathbf{D}_{out} = \frac{Q}{4\pi R^2}\mathbf{a}_R$ است.

از طرفی باید چگالی شار در مرز پیوسته باشد (یعنی $D_{in} = D_{out}$) پس:

$$\frac{\varepsilon k}{(\varepsilon-\varepsilon_\circ)R}=\frac{Q}{۴\pi R^۲}\Bigg|_{R=a} \rightarrow k=\frac{Q(\varepsilon-\varepsilon_\circ)}{۴\pi a\varepsilon}$$

حال برای محاسبهٔ خواسته‌های مسئله کافیست k را در روابط قبلی قرار دهیم:

$$\rho=\frac{Q}{۴\pi a R^۲}\mathbf{a}_R \text{ ، } \mathbf{P}=\frac{Q(\varepsilon-\varepsilon_\circ)}{۴\pi a\varepsilon R}\mathbf{a}_R \text{ ، } \mathbf{E}_{in}=\frac{Q}{۴\pi\varepsilon a R}\mathbf{a}_R \text{ ، } \mathbf{D}_{in}=\frac{Q}{۴\pi a R}\mathbf{a}_R$$

مثال ۲-۶۲ درون کره‌ای به شعاع ۱^m و به مرکز مبداء مختصات ماده‌ای با ε_r متغیر دارد. بار آزاد حجمی با چگالی یکنواخت ρ_V ۱ درون این کره توزیع شده است. اگر چگالی بار مقید حجمی درون کره به صورت $\rho_{bv}(R)=-\frac{R}{۲}$ باشد، ε_r را بیابید. [۴]

حل: اگر چگالی بار حجمی یکنواخت $\rho_\circ$ درون کره‌ای به مرکز مبداء مختصات پخش شده باشد، طبق حل مثال (۲-۱۷) میدان الکتریکی درون کره به صورت $\mathbf{D}=\frac{\rho_\circ}{۳}\mathbf{a}_R$ خواهد بود. از آنجا که در این سوال ρ_{bv} فقط تابعی از R است، می‌توان نتیجه گرفت که ε_r فقط باید تابعی از R باشد. (چرا؟) پس:

$$\mathbf{E}=\frac{\rho_\circ}{۳\varepsilon_\circ\varepsilon_r(R)}\mathbf{a}_R \rightarrow \mathbf{P}=\mathbf{D}-\varepsilon_\circ\mathbf{E}=\frac{\rho_\circ}{۳}\left(۱-\frac{۱}{\varepsilon_r(R)}\right)\mathbf{a}_R=\frac{۱}{۳}\left(۱-\frac{۱}{\varepsilon_r(R)}\right)\mathbf{a}_R$$

همچنین:

$$\rho_{bv}=-\nabla\cdot\mathbf{P}=-\frac{۱}{R^۲}\left[\frac{\partial}{\partial R}\left(R^۲\frac{۱}{۳}\left(۱-\frac{۱}{\varepsilon_r(R)}\right)\right)\right]=-\frac{R}{۲}$$

که با حل آن داریم:

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(R^۲\left(۱-\frac{۱}{\varepsilon_r(R)}\right)\right)=\frac{۳R^۳}{۲} \rightarrow R^۲\left(۱-\frac{۱}{\varepsilon_r(R)}\right)=\frac{۳R^۴}{۸}+C$$

با فرض $C=\circ$:

$$\left(۱-\frac{۱}{\varepsilon_r(R)}\right)=\frac{۳R^۲}{۸} \rightarrow \varepsilon_r(R)=\frac{۱}{۱-\frac{۳R^۲}{۸}}=\frac{۸}{۸-۳R^۲}$$

POWEREN.IR

تمرین ۲-۳۸: درون کره‌ای به شعاع 1^m و به مرکز مبداء مختصات را با عایقی خطی با نفوذ نسبی ε_r پر کرده‌ایم. بار آزاد حجمی با چگالی یکنواخت $\rho_V = 1$ درون این کره توزیع شده است. اگر چگالی بار مقید حجمی درون کره به صورت $\rho_{bv}(R) = -\frac{R}{2}$ باشد، ε_r را بیابید. (تذکر: به تفاوت این سوال با مثال (۲-۶۲) توجه کنید)

تمرین ۲-۳۹: نشان دهید که در یک عایق خطی، تنها در نقاطی بار مقید حجمی وجود دارد که بار آزاد وجود داشته باشد؟

۲-۸-۳- میدان در عایق و قانون گاوس

اگر در یک سیستم عایقی بار آزاد داشته باشیم، ناچاریم برای تحلیل آن بردار پلاریزاسیون را پیدا کنیم. از طرفی بهترین راهِ محاسبهٔ قطبی‌شدگی بدست آوردن میدان و استفاده از رابطهٔ (۲-۶۷) است. حال که اهمیت محاسبهٔ میدان در عایق‌ها (در حضور بارهای آزاد) را درک کردیم، چگونگی یافتن آن را بررسی می‌کنیم. با توجه به اینکه اکثر سیستم‌های مورد بررسی دارای تقارن می‌باشند، باید شرایط استفاده از قانون گاوس را در عایق‌ها مورد بررسی قرار داد. پیش از این شرایط استفاده از قانون گاوس را مطرح کردیم:

۱- تقارن شکل (تقارن محل توزیع بار)

۲- تقارن توزیع بار

شرایط فوق فقط برای فضای آزاد بوده و در عایق‌ها بحث کمی فرق می‌کند. در اینجا علاوه بر شرایط فوق:

۳- ضریب گذردهی محیط نیز باید متقارن باشد.

برای بررسی تقارنِ ضریب گذردهی کافیست همان شرایط تقارن توزیع بار را تحقیق کنیم. اگر این شرایط برقرار نباشد نمی‌توانیم از قانون گاوس استفاده کنیم. مثلا اگر در فضای کره، ضریب نفوذپذیری به صورت $\varepsilon_r = \frac{1}{R}$ باشد می‌توان از قانون گاوس استفاده کرد ولی اگر بفرم $\varepsilon_r = K\cos\theta$ باشد نمی‌توان از این قانون استفاده کرد و بایستی از شرایط فیزیکی مسئله به پاسخ رسید. مثال‌های (۲-۵۹) و (۲-۶۱) به این موضوع پرداخته‌اند.

مثال ۲-۶۳ بار نقطه‌ای q در مرکز یک پوسته کروی، به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b قرار دارد. گذردهی ماده تشکیل دهنده پوسته به صورت $\frac{\varepsilon_0}{R}$ با شعاع تغییر می‌کند. اختلاف پتانسیل دو سطح پوسته را بیابید. (کارشناسی ارشد آزاد برق ۸۷)

حل: در فضا بار آزاد داریم، سعی می‌کنیم با محاسبهٔ چگالی شار الکتریکی به شدت میدان الکتریکی برسیم، با توجه به توضیحات فوق استفاده از قانون گاوس بلامانع است:

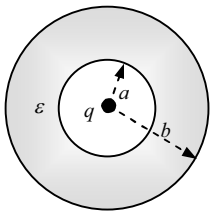
$$\mathbf{D} = \frac{q}{۴\,\pi\,R^{۲}}\,\mathbf{a}_R$$

برای میدان داخل پوسته:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} = \frac{q}{۴\,\pi\,\varepsilon_{\circ}\,R}\,\mathbf{a}_R$$

حال اختلاف پتانسیل را بدست می‌آوریم:

$$V_a - V_b = -\int \mathbf{E}\,.\,\mathbf{d}l = -\frac{q}{۴\,\pi\,\varepsilon_{\circ}}\int_b^a \frac{dR}{R} = \frac{q}{۴\,\pi\,\varepsilon_{\circ}} Ln\,\frac{b}{a}$$



شکل ۲-۵۵: شکل مثال ۲-۲۳

مثال ۲-۶۴ در مختصات کروی عایقی به شکل کره به شعاع a با ضریب عایقی $\varepsilon = \varepsilon_{\circ}(۱+۲R)$ و با بار حجمی $\rho = \rho_{\circ}\left(۱+\frac{R}{a}\right)$ هم‌مرکز با مبداء مختصات مفروض است. اندازهٔ میدان الکتریکی در $R = \frac{a}{۲}$ چقدر است؟ (کارشناسی ارشد برق ۸۶)

حل: با توجه به متقارن بودن ضریب عایقی می‌توانیم برای یافتن چگالی شار الکتریکی از قانون گاوس استفاده کنیم: برای کره‌ای به شعاع R داخل حجم کره داریم:

$$۴\pi R^{۲} D = Q = \int \rho\, dv = \int \int \int \rho_{\circ}\left(۱+\frac{R}{a}\right) R^{۲} \sin\theta\, dR\, d\theta\, d\varphi = \rho_{\circ}\left(\frac{۴}{۳}\pi R^{۳} + \frac{\pi}{a} R^{۴}\right)$$

در $R = \frac{a}{۲}$ خواهیم داشت:

$$D = \left.\frac{\rho_{\circ}\left(\frac{۴}{۳}\pi R^{۳} + \frac{\pi}{a} R^{۴}\right)}{۴\,\pi\,R^{۲}}\right|_{R=\frac{a}{۲}} = \frac{۱۱\,a\,\rho_{\circ}}{۴۸}$$

پس:

$$E = \frac{D}{\varepsilon}\Bigg|_{R=\frac{a}{2}} = \frac{\frac{11\,a\,\rho_0}{48}}{\varepsilon_0\,(1+2R)}\Bigg|_{R=\frac{a}{2}} = \frac{11\,a\,\rho_0}{48\,\varepsilon_0\,(1+a)}$$

تمرین۲-۴۰: کره‌ای از دی‌الکتریکی با ضریب نفوذپذیری $\varepsilon = 2\varepsilon_0$، به شعاع a با چگالی بار حجمی ثابت ρ ساخته شده است. پتانسیل الکتریکی را در مرکز کره بیابید.

مثال ۲-۶۵ بار نقطه‌ای Q در مرکز یک لایهٔ کروی که از جنس عایقی با قابلیت گذردهی ε است، قرار دارد. شعاع درونی لایهٔ کروی برابر a و شعاع بیرونی آن برابر b است. این مجموعه را داخل یک سطح کروی هادی زمین شده به شعاع c قرار می‌دهیم، به‌طوریکه لایهٔ عایق کروی و پوستهٔ هادی هم‌مرکز باشند. میدان‌های $\mathbf{D}$ و $\mathbf{E}$ در نواحی $0 < R < a$، $a < R < b$، $b < R < c$ و $R > c$ و نیز چگالی‌های بارهای مقید را در $a \le R \le b$ بدست آورید.

حل: با فرض یک سطح گوسی در $R < c$ نتیجه می‌گیریم که:

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi R^2}\,\mathbf{a}_R \quad \text{و} \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,\mathbf{a}_R & , \quad 0 < R < a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}\,\mathbf{a}_R & , \quad a < R < b \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,\mathbf{a}_R & , \quad b < R < c \end{cases}$$

برای $a \le R \le b$ داریم:

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{D}_2 - \varepsilon_0\,\mathbf{E}_2 = \frac{Q}{4\pi R^2}\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\mathbf{a}_R$$

$$\sigma_{b1} = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{a}_n\Big|_{R=a} = \frac{Q}{4\pi R^2}\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\mathbf{a}_R \cdot (-\mathbf{a}_R) = \frac{-Q}{4\pi a^2}\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)$$

$$\sigma_{b2} = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{a}_n\Big|_{R=b} = \frac{Q}{4\pi R^2}\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\mathbf{a}_R \cdot (+\mathbf{a}_R) = \frac{Q}{4\pi b^2}\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)$$

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{1}{R^2}\left[\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\,\frac{Q}{4\pi R^2}\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\right)\right] = 0$$

و در نهایت برای $R > c$:

با توجه به صفر بودن پتانسیل کره، بار آزاد موجود در داخل هر سطح گوسی در فضای $R > c$، صفر است. پس در این ناحیه میدان همواره صفر است. ($V = \frac{Q_{tot}}{۴\pi\varepsilon R} = ۰ \quad \rightarrow \quad Q_{tot} = ۰$)

تمرین ۲-۴۱: بار نقطه‌ای Q در مرکز یک پوستهٔ دی‌الکتریکِ کروی بـه شـعاع درونـی a و شـعاع بیرونی b قرار گرفته است. ضریب دی‌الکتریک ε_r است. $\mathbf{E}$، $\mathbf{V}$، $\mathbf{D}$ و $\mathbf{P}$ را مشخص کنید. [۸]

مثال ۲-۶۶ بار آزاد Q روی سطح کرهٔ رسانایی به مرکز مبـداء مختـصات و شـعاع a توزیـع شـده است. فضای بیرون از کره را با ماده‌ای با گذردهی $\varepsilon_r = ۱ + \sin^۲\theta$ پر کرده‌ایم. پتانسیل سطح کـره را بیابید. (کارشناسی ارشد برق ۸۷)

حل: ضریب گذردهی محیط متقارن نیست، پس برای محاسبهٔ چگالی شار الکتریکی حق اسـتفاده از قانون گاوس را نداریم. از شرایط فیزیکی مسئله کمک می‌گیریم:

– مولفهٔ مماسی میدان در مرزها پیوسته است (در قـسمت شـرایط مـرزی عـایق دلـیلش را بررسـی می‌کنیم) پس با تغییرات θ، میدان الکتریکی شعاعی به ازای یک فاصلهٔ ثابت از مرکز کره نباید تغییر کند.

- با دور شدن از کره به ازای یک θ ثابت، میدان الکتریکی باید (همانند میـدان یـک کـرهٔ بـاردار در فضای با ε_r ثابت) با عکس مجذور R کاهش یابد، یعنی:

$$\mathbf{E} = \frac{k}{R^۲}\,\mathbf{a}_R$$

طبق رابطهٔ (۲-۷۳) برای چگالی شار الکتریکی خواهیم داشت:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_\circ\,\varepsilon_r\,\mathbf{E} = \varepsilon_\circ\left(۱+\sin^۲\theta\right)\frac{k}{R^۲}\,\mathbf{a}_R$$

برای محاسبهٔ k مشابه مثال (۲-۵۸) عمل می‌کنیم:

$$Q = \int \rho_s\, dS = \oint \mathbf{D}\,.\,\mathbf{dS} = \int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^{\pi} \varepsilon_\circ\left(۱+\sin^۲\theta\right)\frac{k}{R^۲}\,\mathbf{a}_R\,.\,\mathbf{a}_R\,R^۲\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

که با حل آن:

$$Q = ۲\pi\varepsilon_\circ k\left[-۲\cos\theta + \frac{۱}{۳}\cos^۳\theta\right]\Bigg|_\circ^{\pi} = ۲\pi\varepsilon_\circ k \times \frac{۱۰}{۳}$$

پس:

$$k = \frac{3Q}{20\pi\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{\frac{3Q}{20\pi\varepsilon_0}}{R^2}\mathbf{a}_R = \frac{3Q}{20\pi\varepsilon_0 R^2}\mathbf{a}_R$$

برای پتانسیل نیز داریم:

$$V - 0 = -\int_{\infty}^{a} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int_{\infty}^{a} \frac{3Q}{20\pi\varepsilon_0 R^2}\mathbf{a}_R \cdot \mathbf{a}_R\, dR = \left[\frac{3Q}{20\pi\varepsilon_0 R}\right]\Bigg|_{R=\infty}^{R=a} = \frac{3Q}{20\pi\varepsilon_0 a}$$

تمرین ۲-۴۲: کره فلزی به شعاع a را که دارای پتانسیل V_0 می‌باشد، در یک محیط که ضریب دی الکتریک نسبی آن $\varepsilon_r = 1 + \frac{a}{R}$ است قرار می‌دهیم. در این صورت پتانسیل کره چقدر خواهد شد؟

۲-۸-۴- قطبش متقارن و میدان الکتریکی

یک قالب متداول از سوالات عایق بدین صورت است که با داشتن بردار پلاریزاسیون به میدان (و در نتیجه کمیت‌های مرتبط با آن) دست پیدا کنیم. روش کلی حل این سوالات مشابه آنچه در مثال‌های (۲-۵۵) تا (۲-۵۷) انجام شد، محاسبهٔ توزیع‌های معادل و سپس یافتن میدان ناشی از این توزیع‌هاست. همانطور که مشاهده شد، روش فوق اگر چه ساده ولی وقتگیر است. روش ساده‌تری نیز وجود دارد که فقط برای برخی حالات خاص قابل استفاده است. که البته مهمترین شرط آن نیز تقارن است، یعنی هم باید شکل (فضای عایق) متقارن باشد و هم قطبش. تقارن قطبش، مشابه تقارن چگای بار در قانون گاوس است. برای مثال قطبش‌های $\frac{1}{R}\mathbf{a}_R$ و $P_0\,\mathbf{a}_R$ (و ...) برای یک کره متقارن و قطبش‌های $\frac{\cos\theta}{R^2}\mathbf{a}_R$ (!) و $P_0\,\mathbf{a}_z$ (و ...) برای همان کره نامتقارن‌اند.

اگر در یک سیستم کاملا متقارن، قطبش نیز متقارن باشد برای محاسبهٔ میدان، بسته به شرایط مختلف می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

۲-۸-۴-۱- هیچ بار آزادی در فضا نباشد

در این حالت طبق رابطهٔ (۲-۷۰) و توضیحات مرتبط با آن نتیجه می‌گیریم:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

طبق نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۷ فصل اول، پاسخ‌های ممکن به صورت زیراند:

$$D = cte\ ,\ \mathbf{D} = \frac{cte}{r}\mathbf{a}_r\ ,\ \mathbf{D} = \frac{cte}{R^2}\mathbf{a}_R$$

یعنی یا اندازهٔ چگالی شار الکتریکی ثابت است (در هر دستگاهی) و یا در دستگاه استوانه‌ای به صورت $\mathbf{D} = \frac{cte}{r}\mathbf{a}_r$ می‌باشد و یا در دستگاه کروی دارای قالب $\mathbf{D} = \frac{cte}{R^2}\mathbf{a}_R$ است. آنچه در تمام روابط مشترک است مقدار cte می‌باشد. این مقدار را برای تمام سیستم‌های غیرخازنی برابر صفر در نظر می‌گیریم، پس:

$$\mathbf{D} = 0$$

در این صورت طبق رابطهٔ $\mathbf{D} = \varepsilon_0\ \mathbf{E} + \mathbf{P}$:

$$0 = \varepsilon_0\ \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}} \qquad (۷۴-۲)$$

نکتهٔ طلایی

۱- در سیستم‌خازنی تعیین مقدار دقیق cte (که الزاما غیر صفر است) ، منوط به محاسبهٔ انتگرال خطی شدت میدان در فضای بین دو هادی است.

۲- سیستم خازنی، سیستمی است متشکل از دو هادی که اختلاف پتانسیل بین آن دو مقدار مشخصی است.

به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۲-۶۷ کره‌ای به شعاع a دارای بردار قطبش $\mathbf{P} = \frac{k}{R^2}\mathbf{a}_R$ است. میدان را در داخل و خارج کره بیابید.

حل: شکل سیستم و نیز قطبش دارای تقارن هستند، پس طبق توضیحات ارائه شده در بالا و رابطهٔ (۷۴-۲):

$$\mathbf{P} = \begin{cases} \frac{k}{R^2}\mathbf{a}_R & R < a \\ 0 & oth \end{cases} \xrightarrow{(۴۴-۲)} \mathbf{E} = \begin{cases} -\frac{k}{\varepsilon_0 R^2}\mathbf{a}_R & R < a \\ 0 & oth \end{cases}$$

تمرین ۲-۴۳: یک پوستهٔ استوانه‌ای بی‌نهایت به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b دارای بردار پلاریزاسیونی به صورت $\mathbf{P} = \frac{k}{r}\mathbf{a}_r$ است. شدت میدان الکتریکی را در داخل و خارج کره بیابید.

۲-۸-۴-۲- فضا دارای بار آزاد متقارن است

در این حالت از جمع آثار استفاده می‌کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم هیچ بار آزادی در سیستم وجود نداشته باشد، در این حالت طبق توضیحات قسمت الف و رابطهٔ (۲-۷۴) میدان را می‌یابیم. سپس فرض می‌کنیم که فقط بار آزاد داریم (هیچ عایق و قطبشی در فضا نداریم)، در این صورت میدان را با استفاده از قانون گاوس (اگر نشود از قانون گاوس استفاده کنیم، قطعا توزیع بار نامتقارن است و باید طبق توضیحات قسمت پ، عمل نماییم) پیدا می‌کنیم. میدان کل در هر نقطه از فضا از جمع دو میدان محاسبه شده بدست می‌آید. به این مثال توجه کنید:

مثال کلیدی

مثال ۲-۶۸ در مرکز یک پوستهٔ کروی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b که دارای بردار قطبی‌شدگی به صورت $\mathbf{P}=\frac{k}{R^{۲}}\,\mathbf{a}_R$ می‌باشد، بار نقطه‌ای Q قرار گرفته است.

الف) میدان را در تمام فضا تعیین کنید. (کارشناسی ارشد برق ۷۹)

ب) مقدار k را به نحوی تعیین کنید که میدان در فضای بین دو پوسته صفر گردد.

حل: یک سیستم تماماً متقارن داریم. علاوه بر پلاریزاسیون، بار آزاد نیز در فضا وجود دارد. با توجه به تقارن بار از توضیحات قسمت ب استفاده می‌کنیم:

الف) اثر قطبی‌شدگی طبق حل مثال (۲-۶۷) به صورت زیر است:

$$\mathbf{E}_{۱}=\begin{cases}-\dfrac{k}{\varepsilon_{\circ}\,R^{۲}}\,\mathbf{a}_R & , \quad a<R<b\\[2ex] \circ & , \quad oth\end{cases}$$

حال اثر بار نقطه‌ای را اعمال می‌کنیم. بدیهی است که:

$$\mathbf{E}_{۲}=\frac{Q}{۴\,\pi\,\varepsilon\,R^{۲}}\,\mathbf{a}_R$$

پس:

$$\mathbf{E}=\begin{cases}\left(-\dfrac{k}{\varepsilon_{\circ}R^{۲}}+\dfrac{Q}{۴\,\pi\,\varepsilon_{\circ}R^{۲}}\right)\mathbf{a}_R & , \quad a<R<b\\[2ex] \dfrac{Q}{۴\,\pi\,\varepsilon_{\circ}R^{۲}}\,\mathbf{a}_R & , \quad oth\end{cases}$$

ب) طبق پاسخ فوق برای $a<R<b$:

$$\mathbf{E}=\left(-\frac{k}{\varepsilon_\circ R^{۲}}+\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ R^{۲}}\right)\mathbf{a}_R=\circ \quad\rightarrow\quad k=\frac{Q}{۴\pi}$$

تمرین ۲-۴۴: یک پوستهٔ استوانه‌ای بی‌نهایت به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b دارای بردار پلاریزاسیونی به صورت $\mathbf{P}=\frac{k}{r}\,\mathbf{a}_r$ است. در مرکز این پوسته خط بار بی‌نهایتی با چگالی ρ_l قرار گرفته است. شدت میدان الکتریکی را در داخل و خارج کره بیابید.

۲-۸-۴-۳- فضا داری بار آزاد غیرمتقارن است

تحت این شرایط تنها راهکارِ حل مسئله استفاده از روش کلاسیک است. یعنی محاسبهٔ چگالی بارهای مقید و جمع آثار تمام بارهای موجود در سیستم.

نکتهٔ طلایی

تذکر: عدم تقارن بار آزاد در اینجا بدین معناست که یا:

۱- توزیع بار متقارن نباشد.

۲- و یا، اگر چه توزیع بار متقارن است ولی نسبت به کل سیستم یک حالت نامتقارن ایجاد کند. برای مثال قرار گرفتن خطِ بی‌نهایت بار در محلی غیر از مرکز استوانه در تمرین (۲-۴۳) و یا قرار گرفتن یک خط بار بی‌نهایت در امتداد یکی از قطرهای یک پوستهٔ کروی.

2-۸-۵- شرایط مرزی میدان‌های الکتریکی ساکن

مشابه آنچه که در مورد شرایط مرزی هادی انجام دادیم، را برای عایق‌ها تکرار می‌کنیم:

✓ برای مولفهٔ مماسی (با فرض $\Delta h\rightarrow\circ$) داریم:

$$\oint_{abcda}\mathbf{E}\,.\mathbf{d}l=E_{۱t}\,\Delta w-E_{۲t}\,\Delta w=\circ$$

$$\boxed{E_{۱t}=E_{۲t}} \qquad (۷۵-۲)$$

که بیان می‌دارد:

نکتهٔ طلایی

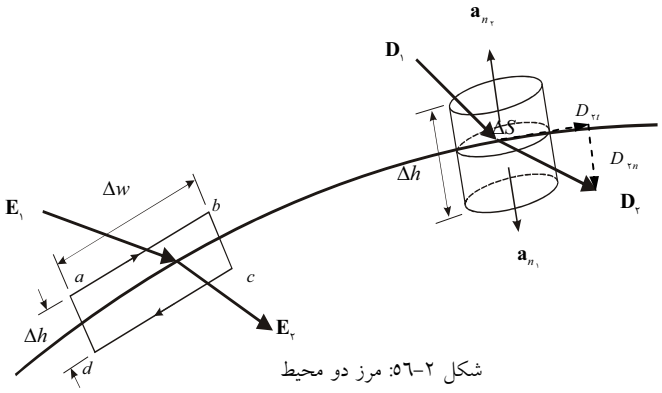
مولفهٔ مماسی $\mathbf{E}$ در سرتاسر فصل مشترک، پیوسته است.

✓ برای مولفهٔ عمودی:

می‌دانیم $\nabla\,.\,\mathbf{D}=\rho$ پس:

$$\oint_S\mathbf{D}\,.\mathbf{d}s=\int(\nabla\,.\mathbf{D})\,dv=\int\rho\,dv$$

حال انتگرال فوق را بر روی استوانهٔ شکل (۲-۵۶) اعمال می‌کنیم:



شکل ۲-۵۶: مرز دو محیط

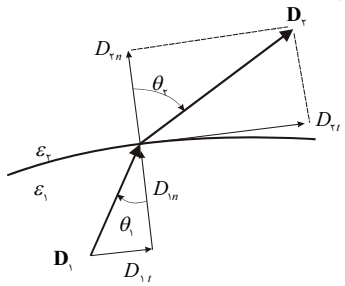
$$\oint_S \mathbf{D}\ .\ \mathbf{d}s = (\mathbf{D}_1\ .\ \mathbf{a}_{n2} + \mathbf{D}_2\ .\ \mathbf{a}_{n1})\Delta s = \mathbf{a}_{n2}\ .\ (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2)\Delta s = \rho\,\Delta s\,\Delta h \Big|_{\Delta h \to 0} = \rho_s\,\Delta s$$

$$\boxed{\mathbf{D}_{1n} - \mathbf{D}_{2n} = \rho_s} \qquad (۷۶\text{-}۲)$$

برای حالتی که در فصل مشترک بار آزاد نداشته باشیم:

$$\mathbf{D}_{1n} = \mathbf{D}_{2n} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_1\ E_{1n} = \varepsilon_2\ E_{2n}} \qquad (۷۷\text{-}۲)$$

مثال ۲-۶۹ دو محیط دی‌الکتریک با گذردهی‌های ε_1 و ε_2 مطابق شکل (۲-۲۵) توسط یک مرز بدون بار جدا شده‌اند. میدان الکتریکی در نقطهٔ P_1 اندازهٔ E_1 را دارد و با امتداد قائم زاویهٔ θ_1 می‌سازد. اندازه و جهت میدان را در نقطهٔ P_2 واقع در محیط ۲ بیابید.



شکل ۲-۵۷: شکل مثال ۲-۶۹

حل:

$$E_{1t} = E_{2t} \to E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2$$

$$D_{1n} = D_{2n} \to \varepsilon_1 E_1 \cos\theta_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\theta_2$$

پس می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{\sin\theta_1}{\varepsilon_1 \cos\theta_1} = \frac{\sin\theta_2}{\varepsilon_2 \cos\theta_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

با کمی حل ریاضی خواهیم داشت:

$$D_2 = D_1 \sqrt{\cos^2\theta_1 + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2 \sin^2\theta_1} \quad ، \quad E_2 = E_1 \sqrt{\sin^2\theta_1 + \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2 \cos^2\theta_1}$$

سوال: اگر بخواهیم خط میدان وارد محیط ۲ نشود و از روی مرز خارج شود (بازتاب کلی) چه شرایطی لازم است؟ (با این کار می‌توانیم محیط ۲ را در مقابل خطوط میدان خارجی حفاظت کنیم)

مثال فوق یک حالت کلی شرایط مرزی را نشان داد. سه مثالی که در ادامه می‌آیند شرایط مرزی را برای هر یک از دستگاه‌ها به وضوح بررسی می‌کنند.

مثال کلیدی

مثال ۲-۷۰ رویهٔ $y-2x+2z=6$ مرز بین دو ناحیهٔ با گذردهی‌های نسبی $\varepsilon_{r_1}=3$ و $\varepsilon_{r_2}=4.5$ است. مبداء در ناحیهٔ یک قرار دارد. اگر در نقطهٔ $P(0,2,2)$ میدان ناحیهٔ یک به صورت $\mathbf{E}_1=-4\mathbf{a}_x-2\mathbf{a}_y+6\mathbf{a}_z$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ میدان در همین نقطه برای ناحیهٔ دو. [۸]

حل: برای محاسبهٔ شرایط مرزی به مولفه‌های مماس و عمود میدان احتیاج داریم. مولفهٔ عمودی را با تصویر میدان روی بردار نرمال رویه بدست می‌آوریم. برای محاسبهٔ مولفهٔ مماس هم از نتیجهٔ ترکیب دو مولفه استفاده خواهیم کرد. بردار نرمالِ رویه عبارت است از:

$$\mathbf{a}_n=\frac{\nabla f}{|\nabla f|}=-\frac{2}{3}\mathbf{a}_x+\frac{1}{3}\mathbf{a}_y+\frac{2}{3}\mathbf{a}_z$$

پس مولفهٔ عمودی میدان در ناحیهٔ یک:

$$\mathbf{E}_{1n}=(\mathbf{E}\cdot\mathbf{a}_n)\mathbf{a}_n=6\mathbf{a}_n=-4\mathbf{a}_x+2\mathbf{a}_y+4\mathbf{a}_z$$

از طرفی $\mathbf{E}_1=\mathbf{E}_{1t}+\mathbf{E}_{1n}$، با توجه به داشتن $\mathbf{E}_1$ و $\mathbf{E}_{1n}$ براحتی برای $\mathbf{E}_{1t}$ داریم:

$$\mathbf{E}_{1t}=\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_{1n}=-4\mathbf{a}_y+2\mathbf{a}_z$$

حال از روابط (۲-۷۵) و (۲-۷۷) استفاده می‌کنیم:

$$\mathbf{E}_{2t}=\mathbf{E}_{1t}=-4\mathbf{a}_y+2\mathbf{a}_z$$

$$\varepsilon_2\mathbf{E}_{2n}=\varepsilon_1\mathbf{E}_{1n}\quad\rightarrow\quad\mathbf{E}_{2n}=1.5\,\mathbf{E}_{1n}=-6\mathbf{a}_x+3\mathbf{a}_y+6\mathbf{a}_z$$

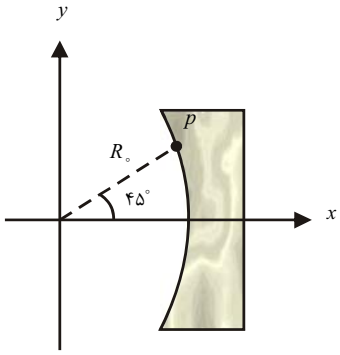
در نتیجه:

$$\mathbf{E}_2=\mathbf{E}_{2t}+\mathbf{E}_{2n}=-6\mathbf{a}_x-\mathbf{a}_y+8\mathbf{a}_z$$

مثال ۲-۷۱ برای همگرا کردن میدان‌های الکتریکی می‌توان از عدسی‌های عایق استفاده کرد. در شکل مقابل یک عدسی نشان داده شده، که سطح سمت راست آن یک صفحه و سمت چپ آن

کره‌ای به شعاع $R_\circ$ است. در نقطه P میدان الکتریکی به صورت $۵\,\mathbf{a}_r - ۳\,\mathbf{a}_\varphi$ است. گذردهی عایق باید چگونه باشد تا میدان در سمت راست عدسی موازی محور x باشد؟ [۱]

حل: اگر بخواهیم میدان در سمت راست عدسی موازی محور x باشد، باید میدان داخل عدسی هم در همین جهت باشد (بدلیل پیوستگی مولفهٔ عمودی میدان در مرز سمت راست عدسی). مرز سمت چپ عدسی بخشی از یک دایره است پس در این مرز مولفهٔ عمودی در جهت $\mathbf{a}_r$ و مولفهٔ مماسی در جهت $\mathbf{a}_\varphi$ می‌باشد. در نتیجه:



شکل ۲-۵۸: شکل مثال ۲-۷۱

برای مولفهٔ مماسی:

$$E_{۱\varphi} = E_{۲\varphi} = -۳$$

برای مولفهٔ عمودی:

$$\varepsilon_۲ E_{۲r} = \varepsilon_۱ E_{۱r} \rightarrow E_{۲r} = \frac{\varepsilon_\circ}{\varepsilon_\circ \varepsilon_{r_۲}} E_{۱r} = \frac{۵}{\varepsilon_{r_۲}}$$

پس:

$$\mathbf{E}_۲ = E_{۲\varphi}\,\mathbf{a}_\varphi + E_{۲r}\,\mathbf{a}_r = -۳\,\mathbf{a}_\varphi + \frac{۵}{\varepsilon_{r_۲}}\mathbf{a}_r$$

با بیان آن در مختصات قائم داریم:

$$\mathbf{E}_۲ = -۳\left(-\sin\varphi\,\mathbf{a}_x + \cos\varphi\,\mathbf{a}_y\right) + \frac{۵}{\varepsilon_{r_۲}}\left(\cos\varphi\,\mathbf{a}_x + \sin\varphi\,\mathbf{a}_y\right)$$

برای اینکه میدان فقط در جهت x باشد، باید ضریب مولفهٔ y صفر باشد:

$$-۳\cos ۴۵ = \frac{۵}{\varepsilon_{r_۲}}\sin ۴۵ \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{r_۲} = \frac{۵}{۳} = ۱.۶۶$$

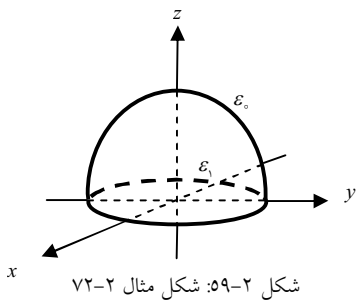
مثال ۲-۷۲ نیم‌کره‌ای به شعاع a از جسم دی‌الکتریک ایزوتروپیکی با ضریب نفوذپذیری الکتریکی $\varepsilon_۱$ در مجاورت هوا با ضریب نفوذپذیری الکتریکی $\varepsilon_\circ$ قرار دارد. هیچ بار آزادی در مرز بین دی‌الکتریک و هوا وجود ندارد. شدت میدان الکتریکی در داخل نیم‌کره با رابطه $\mathbf{E}_۱ = R\sin\theta\,\mathbf{a}_R + \frac{R}{۲}\cos\theta\,\mathbf{a}_\theta$ مشخص می‌شود. $\mathbf{E}_۲$ را در تمام مرزهای بین دی‌الکتریک و هوا بدست آورید.

حل:

برای مرز کره با هوا:

مثال کلیدی

مولفهٔ مماسی $\mathbf{a}_\theta$ و مولفهٔ عمودی $\mathbf{a}_R$ است پس:



شکل ۲-۵۹: شکل مثال ۲-۷۲

برای مولفهٔ مماسی:

$$E_{1\theta} = E_{2\theta} = \frac{R}{2}\cos\theta\Big|_{R=a} = \frac{a}{2}\cos\theta$$

برای مولفهٔ عمودی:

$$\varepsilon_\circ E_{2R} = \varepsilon_1 E_{1R} \rightarrow E_{2R} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_\circ} R\sin\theta\Big|_{R=a} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_\circ} a\sin\theta$$

پس:

$$\mathbf{E}_2 = E_{2\theta}\,\mathbf{a}_\theta + E_{2R}\,\mathbf{a}_R = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_\circ} a\sin\theta\;\mathbf{a}_R + \frac{a}{2}\cos\theta\;\mathbf{a}_\theta$$

<u>برای مرز هوا و قاعدهٔ پایینی نیم‌کره:</u>

مولفهٔ مماسی $\mathbf{a}_r$ و مولفهٔ عمودی $-\mathbf{a}_z$ است. راه حل کلاسیک این است که ابتدا میدان برداری را در دستگاه‌های استوانه‌ای و قائم بیان کرده و سپس مولفه‌های مورد نیاز استخراج شوند. روش دیگر بدین صورت است که:

$$-\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_\theta\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \quad \text{و} \quad \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_R\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

پس:

برای مولفهٔ مماسی:

$$E_{1r} = E_{2r} = E_{1R}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = R\sin\theta\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = r$$

برای مولفهٔ عمودی:

$$\varepsilon_\circ E_{2z} = \varepsilon_1 E_{1z} \rightarrow E_{2z} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_\circ}\frac{R}{2}\cos\theta\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \circ$$

پس:

$$\mathbf{E}_2 = E_{2r}\,\mathbf{a}_r + E_{2z}\,\mathbf{a}_z = r\,\mathbf{a}_r$$

مثال ۲-۷۳ ناحیه $z<0$ از عایقی با ضریب دی‌الکتریک $\varepsilon=\varepsilon_0(1+\frac{1}{z})$ پر شده و ناحیه $z>0$ هواست. میدان الکتریکی $\mathbf{E}=E_0\,\mathbf{a}_z$ در ناحیه $z>0$ وجود دارد. کل بار حجمی پلاریزه در $z<0$ چقدر است؟ (ابعاد صفحه $z=0$ را $a\times b$ فرض کنید.)
(المپیاد غیر متکمرکز برق ۸۴)

حل: در مرز بار آزاد نداریم، پس:

$$\varepsilon_2 E_2=\varepsilon_1 E_1 \;\rightarrow\; \varepsilon E_2=\varepsilon_0 E_1 \;\rightarrow \mathbf{E}_2=\frac{z}{z+1}E_0\,\mathbf{a}_z$$

برای محاسبهٔ بارهای پلاریزه به بردار قطبش احتیاج داریم:

$$\mathbf{P}=\varepsilon_0\left(\varepsilon_r-1\right)\mathbf{E}_2=\frac{\varepsilon_0 E_0}{z+1}\mathbf{a}_z$$

پس:

$$\rho_b=-\nabla\cdot\mathbf{P}=\frac{\varepsilon_0 E_0}{\left(z+1\right)^2}$$

کل بارها را با انتگرال‌گیری از چگالی بار مقید پیدا می‌کنیم:

$$Q_b=\int_0^\infty \rho_b\; a\times b\; dz=\int_0^\infty \frac{\varepsilon_0 E_0}{\left(z+1\right)^2}a\times b\; dz=\varepsilon_0 E_0\times a\times b\left[-\frac{1}{z+1}\right]\Bigg|_0^\infty=\varepsilon_0\; E_0 a\times b$$

تمرین۲-۴۵: عایقی به ضخامت d که بین صفحات $z=0$ و $z=d$ قرار گرفته دارای ضریب دی‌الکتریک $\varepsilon=\varepsilon_0\left(1+\frac{z}{d}\right)$ می‌باشد. اگر این دی‌الکتریک تحت میدان خارجی $\mathbf{E}=E_0\mathbf{a}_z$ قرار گیرد. چگالی بارهای القاء شدهٔ سطحی و حجمی را بدست آورید.

مثال کلیدی

مثال ۲-۷۴ بار نقطه‌ای Q در مرکز دو ناحیه با گذردهی‌های ε_1 و ε_2 قرار دارد. $\mathbf{E}$ را در هر دو ناحیه محاسبه کنید. (کارشناسی ارشد فیزیک ۸۳)

حل: بدیهی است که میدان یک بار نقطه‌ای به صورت شعاعی خواهد بود. از طرفی با توجه به اینکه مولفه‌های مماس بایستی با هم برابر باشند و آن‌ها هم‌شعاعی‌اند (به شکل (۲-۶۰) دقت کنید.) پس نتیجه می‌گیریم:

$$E_{1t}=E_{2t}\Rightarrow E_1=E_2$$

با این وجود بر طبق قانون گاوس داریم:

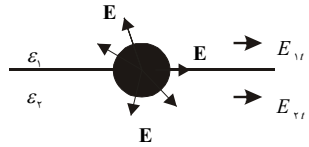
$$\oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{d}s = D_1 S_1 + D_2 S_2 = 2\pi R^2 (D_1 + D_2) = Q$$

از طرفی: $\mathbf{D}_1 = \varepsilon_1 \mathbf{E}_1$ و $\mathbf{D}_2 = \varepsilon_2 \mathbf{E}_2$، پس:

$$2\pi R^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) E = Q$$

و در نهایت:

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{Q}{2\pi R^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \mathbf{a}_R} \qquad (۷۸-۲)$$



شکل ۲-۶۰: شکل مثال ۲-۷۴

مثال ۲-۷۵ یک کرهٔ هادی در مرکز دو ناحیه با گذردهی‌های ε_1 و ε_2 قرار دارد به نحوی که مرز دو ناحیه از مرکز کره می‌گذرد. اگر بار q روی کره قرار داشته باشد:

الف) چگالی بار القاء شده در هر طرف آن چیست؟

ب) اگر کره هادی نباشد، قسمت الف را تکرار کنید.

حل: الف) اگر کره هادی باشد برای محاسبهٔ بار القایی از رابطهٔ (۲-۵۹) کمک می‌گیریم:

$$\rho_s = \varepsilon E_n$$

از طرفی با توجه به توزیع متقارن بار میدان شعاعی بوده و فقط دارای مولفهٔ عمودی است. میدان حاصل را در مثال (۲-۷۴) محاسبه کرده‌ایم. طبق رابطهٔ (۲-۷۸) میدان عبارت است از:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{2\pi R^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \mathbf{a}_R$$

پس چگالی بار القایی عبارت است از:

$$\rho_{S_2} = \frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi R^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \quad ، \quad \rho_{S_1} = \frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi R^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

ب) اگر کره هادی نباشد برای محاسبهٔ چگالی بارهای القایی به بردار پلاریزاسیون احتیاج داریم. طبق رابطهٔ (۲-۶۹):

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E}$$

که E همان میدان رابطهٔ (۲-۷۸) است. پس:

$$P_2 = \frac{Q(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)}{2\pi R^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \mathbf{a}_R \quad ، \quad P_1 = \frac{Q(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{2\pi R^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \mathbf{a}_R$$

از طرفی چگالی بارهای سطحی از رابطهٔ $\sigma = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n$ بدست می‌آید. در نتیجه:

$$\sigma_2 = \mathbf{P}_2 \cdot (-\mathbf{a}_R) = -\frac{Q(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)}{2\pi R^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \quad ، \quad \sigma_1 = \mathbf{P}_1 \cdot (-\mathbf{a}_R) = -\frac{Q(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{2\pi R^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

۲-۸-۶- بررسی شرایط مرزی بردار پلاریزاسیون

در قسمت قبل شرایط مرزی میدان را در مرز مشترک دو دی‌الکتریک بیان کردیم. در آنجا بسته به وجود بار آزاد در مرز (و یا عدم وجود آن) پاسخ‌های متفاوتی داشتیم. روابط مشابهی را برای شرایط مرزی بردار قطبش می‌توان بیان کرد، این روابط را در سه قالب مختلف بررسی می‌کنیم:

۱- شرایط مرزی در صورت وجود بار پلاریزه در مرز

۲- شرایط مرزی در صورت وجود بار آزاد در مرز

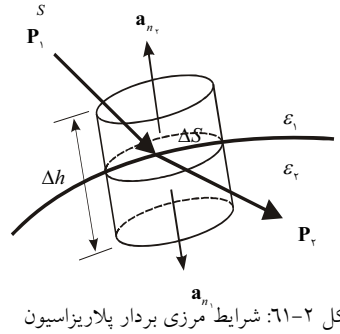
۳- شرایط مرزی در عایق‌های خطی

این حالات را در زیر به تفکیک مطالعه می‌کنیم:

۲-۸-۶-۱- شرایط مرزی بردار پلاریزاسیون در صورت وجود بار پلاریزه در مرز

در مرزِ دو عایق با ضریب نفوذپذیری الکتریکی ε_1 و ε_2، چگالی سطحی بارهای پلاریزه σ_b است. می‌خواهیم ببینیم که چه رابطه‌ای بین مولفه‌های عمودی بردار پلاریزاسیون $\mathbf{P}$ دو طرف مرز برقرار است. طبق رابطهٔ (۲-۶۹) چگالی بارهای حجمی مقید به صورت $\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ است. کافیست از فرم انتگرالی استفاده کرده و حدگیری روی مرز را انجام داد (مشابه آنچه در اثبات رابطهٔ (۲-۷۶) انجام شد):

$$\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{a}_{n2} + \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{a}_{n1})\,\Delta s = \mathbf{a}_{n2} \cdot (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)\,\Delta s = -\rho_b\ \Delta s\ \Delta h$$



شکل ۲-۶۱: شرایط مرزی بردار پلاریزاسیون

با فرض $\Delta h \to 0$:

$$\rho_b\,\Delta s\ \Delta h \simeq \sigma_b\,\Delta s$$

پس:

$$(\mathbf{P}_{n1} - \mathbf{P}_{n2}) = -\sigma_b$$

یا:

$$\boxed{\mathbf{P}_{n1} = \mathbf{P}_{n2} - \sigma_b} \qquad (۲-۷۹)$$

۲-۸-۶-۲- یک شرایط مرزی بردار پلاریزاسیون در عایق‌های خطی

چون عایق خطی است، به راحتی می‌توان شرایط مرزی میدان را به قطبش ارتباط داد. طبق رابطهٔ (۲-۷۲):

$$\mathbf{P} = \varepsilon_\circ \ \chi_e \ \mathbf{E} = \varepsilon_\circ \left(\varepsilon_r - ۱\right) \mathbf{E}$$

از آنجا که:

$$E_{۱t} = E_{۲t}$$

پس:

$$\frac{۱}{\varepsilon_\circ \left(\varepsilon_{r_۱} - ۱\right)} P_{۱t} = \frac{۱}{\varepsilon_\circ \left(\varepsilon_{r_۲} - ۱\right)} P_{۲t} \ \rightarrow \ \chi_{e_۲} P_{۱t} = \chi_{e_۱} P_{۲t}$$

با توجه به اینکه:

$$\varepsilon_۱ \ E_{۱n} = \varepsilon_۲ \ E_{۲n}$$

در نتیجه:

$$\frac{\varepsilon_۱}{\varepsilon_\circ \left(\varepsilon_{r_۱} - ۱\right)} P_{۱n} = \frac{\varepsilon_۲}{\varepsilon_\circ \left(\varepsilon_{r_۲} - ۱\right)} P_{۲n} \ \rightarrow \ \chi_{e_۲} \varepsilon_۱ P_{۱n} = \chi_{e_۱} \varepsilon_۲ P_{۲n}$$

پس به طور خلاصه:

$$\chi_{e_۲} P_{۱t} = \chi_{e_۱} P_{۲t} \qquad (۸۰-۲)$$

$$\chi_{e_۲} \varepsilon_۱ P_{۱n} = \chi_{e_۱} \varepsilon_۲ P_{۲n} \qquad (۸۱-۲)$$

تمرین ۲-۴۶: راهکاری برای بررسی شرایط بردار پلاریزاسیون برای حالتی که در مرز دو محیط بار آزاد وجود دارد ارائه کنید. آیا می‌توان از جمع آثار (کدام اثرها؟) استفاده کرد؟

۲-۸-۷- مقاومت دی‌الکتریک

همانطور که در ابتدای بخش ذکر شد میدان الکتریکی، باعث جابه‌جایی کوچک بارهای مقید در مادهٔ دی‌الکتریک می‌شود و قطبی‌شدگی را به وجود می‌آورد. اگر میدان الکتریکی خیلی قوی باشد، الکترون‌ها را به طور کامل از ملکول‌ها بیرون می‌کشد. الکترون‌ها تحت تاثیر میدان الکتریکی شتاب یافته و با ساختار شبکه‌ای ملکولی به شدت تصادم خواهند کرد و تغییر وضعیت دائمی و صدمه رسانیدن به ماده را موجب خواهند شد. ممکن است اثر بهمنی قطبی‌شدگی ناشی از تصادم‌ها پیش آید. ماده ممکن است هادی شود و جریان‌های بزرگی بوجود آید. (جرقهٔ فوق در هوا را کرونا گویند) این پدیده را **شکست دی‌الکتریک** می‌نامند. حداکثر شدت میدان الکتریکی که یک مادهٔ دی‌الکتریک می‌تواند بدون شکست تحمل کند، **مقاومت دی‌الکتریک** ماده نامیده می‌شود.

مثال ۲-۷۶ در یک کابل هم محور، شعاع هادی داخلی a و شعاع هادی خارجی b است. فضای بین دو هادی با دی‌الکتریکی با ضریب دی‌الکتریک ε و مقاومت دی‌الکتریک E_B پر شده است. ولتاژ

اعمال شده به کابل باید از چه مقداری کمتر باشد تا در هیچ جایی از دی‌الکتریک شکست عایقی اتفاق نیفتد؟ [۶]

حل: برای آنکه شکست عایقی اتفاق نیفتد میدان در هیچ نقطه‌ای از دی‌الکتریک نباید بیشتر از مقاومت دی‌الکتریک باشد. میدان الکتریکی درون دی‌الکتریک را بر حسب ولتاژ اعمال شده به دو هادی کابل محاسبه می‌کنیم. اگر چگالی بار خطی روی هادی درونی λ باشد، میدان درون دی‌الکتریک برابر است با:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{۲\,\pi\,\varepsilon\,r}\,\mathbf{a}_r$$

در نتیجه اگر a شعاع هادی درونی و b شعاع هادی بیرونی باشد:

$$V = -\int_b^a \frac{\lambda}{۲\,\pi\,\varepsilon\,r}\,dr = \frac{\lambda}{۲\,\pi\,\varepsilon} Ln\,\frac{b}{a}$$

از دو رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود که:

$$\mathbf{E} = \frac{V}{r\,Ln\dfrac{b}{a}}\,\mathbf{a}_r$$

برای محاسبهٔ محلی که بیشترین شدت میدان در آن اتفاق می‌افتد باید اکسترمم رابطهٔ فوق را پیدا کرد! بدون انجام این کار و با تعبیر فیزیکی نتیجه شده از مثال (۲-۴۳) این محل را پیدا می‌کنیم. می‌دانیم شدت میدان در نقاط دارای انحنای بیشتر، زیادتر است پس بیشترین شدت میدان در $r = a$ اتفاق می‌افتد. بنابراین:

$$E = \frac{V}{a\,Ln\dfrac{b}{a}} < E_B \quad \rightarrow \quad V = E_B\;a\;Ln\frac{b}{a}$$

تمرین ۲-۴۷: یک کابل هم‌محور شامل یک هادی داخلی مسی با شعاع $a = ۰.۵^{cm}$ ، یک دی الکتریک جامد با ثابت دی‌الکتریک $\varepsilon_{r۱} = ۴.۸$ تا شعاع $r_۰$ و یک لایه روغن با ثابت دی‌الکتریک $\varepsilon_{r۲} = ۲.۴$ از شعاع $r_۰$ تا شعاع $b = ۲^{cm}$ می‌باشد. مقاومت دی‌الکتریک مادهٔ جامد برابر $E_d = ۴۰\times۱۰^۳\ (\frac{kV}{m})$ و مقاومت دی‌الکتریک روغن برابر $E_d = ۳۰\times۱۰^۳\ (\frac{kV}{m})$ است. اندازه $r_۰$ و پتانسیل $V_۰$ بین دو هادی کابل هم‌محور را تعیین کنید، به طوری که حداکثر شدت میدان در دو محیط دی‌الکتریک حاصل شود.

۲-۸-۸- دوقطبی معادل

همانطور که ذکر شد، عایق ممکن است از ملکول‌های قطبی ایجاد شده باشد. در این حالت عایق ترکیبی از بی‌نهایت دوقطبی الکتریکی است که در جهات دلخواهی شکل گرفته‌اند. برای محاسبهٔ بردار پلاریزاسیون حاصل جمع برداری این دوقطبی‌ها را محاسبه می‌کنیم، به همین دلیل است که:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta V} \mathbf{P}_k}{\Delta V}$$

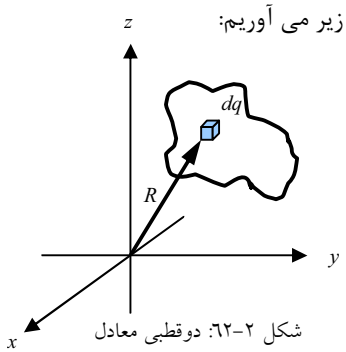
اگر راهکاری برای محاسبهٔ راحت عبارت فوق (برای هر توزیع باری) موجود باشد، می‌توان با استفاه از یک روش میانبر، میدان و پتانسیل ناشی از این توزیع را بدست آورد. این راهکار بحثی است که تحت عنوان دوقطبی معادل بیان می‌شود. هر نوع توزیع باری را می‌توان با یک بردار دوقطبی معادل بیان کرد. کافیست با توجه به شکل (محل توزیع) و نوع توزیع بار از رابطهٔ زیر استفاده کنیم:

$$\mathbf{P} = \int \mathbf{R}\, dq \qquad (۸۲-۲)$$

در رابطهٔ فوق $\mathbf{R}$ بردار مکانی است که باید به تمام نقاط توزیع بار سر بزند و dq المان بار است که بسته به نوع توزیع می‌تواند به صورت‌های زیر باشد:

$$dq = \rho\, dv \quad ، \quad dq = \lambda\, dl \quad ، \quad dq = \sigma\, ds$$

بخش عمده‌ای از قطبش‌هایی که به بررسی آنها می‌پردازیم، قالب دوقطبی به خود گرفته‌اند. برای این گونه قطبش‌ها، پس از محاسبهٔ قطبیدگی معادل، می‌توان از روابط مربوط به میدان و پتانسیل دوقطبی الکتریکی استفاده کرد. این روابط را مجدداً در زیر می آوریم:



شکل ۲-۶۲: دوقطبی معادل

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(3\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{P}}{R^2}\mathbf{R} - \mathbf{P}\right) \qquad (۸۳-۲)$$

$$V = \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \qquad (۸۴-۲)$$

نکتهٔ طلایی

بدیهی است روش فوق در صورتی برقرار خواهد بود که شرایط اولیهٔ دوقطبی موجود باشد، یعنی برای یک مجموعهٔ متقارن مجموع بارها صفر گردد، در غیر اینصورت بردار $\mathbf{P} = 0$ بوده و با استفاده از آن نمی‌توان میدان و پتانسیل را محاسبه نمود.

– رابطهٔ (۲-۸۳) همان رابطهٔ (۲-۱۴) است که با قرار دادن $\mathbf{P} = P\,\mathbf{a}_z$ به میدان دوقطبی الکتریکی می‌انجامد.

مثال ۲-۷۷ روی حلقه‌ای به شعاع a واقع در صفحهٔ $z = 0$، باری با چگالی $\rho_l = \lambda \sin\varphi$ توزیع شده است. میدان و پتانسیل را در نقاط دور بیابید.

حل: با استفاده از رابطهٔ (۲-۸۲) بردار دوقطبی معادل را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbf{P} = \int \mathbf{R}\, dq = \int \mathbf{R}\, \rho_l\, dl$$

$$dl = a\, d\varphi \quad , \quad \mathbf{R} = r\, \mathbf{a}_r = a\, \mathbf{a}_r$$

$$\mathbf{P} = \int_0^{2\pi} (a\, \mathbf{a}_r)\lambda \sin\varphi\, (a\, d\varphi) = a^2 \lambda \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, \mathbf{a}_r\, d\varphi$$

$$\mathbf{P} = a^2 \lambda \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, (\cos\varphi\, \mathbf{a}_x + \sin\varphi\, \mathbf{a}_y)\, d\varphi = 4\, a^2 \lambda\, \mathbf{a}_y$$

حال با استفاده از روابط (۲-۸۳) و (۲-۸۴) برای میدان و پتانسیل خواهیم داشت:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(3\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{P}}{R^2}\mathbf{R} - \mathbf{P}\right)\Bigg|_{\mathbf{P} = 4a^2\lambda\mathbf{a}_y} = \frac{a^2\lambda}{\pi\varepsilon_0 R^3}\left(3\sin\theta\, \sin\varphi\, \mathbf{a}_R - \mathbf{a}_y\right)$$

$$V = \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\Bigg|_{\mathbf{P} = 4a^2\lambda\mathbf{a}_y} = \frac{a^2\lambda\, \sin\theta\, \sin\varphi}{\pi\varepsilon_0 R^2}$$

مثال ۲-۷۸ بر روی یک کرهٔ به شعاع a باری با چگالی $\rho_S = \rho_0 \cos\theta$ قرار دارد. گشتاور دوقطبی این توزیع بار را یافته، میدان و پتانسیل را در نقاط خارج از کره محاسبه کنید.

حل: بردار دوقطبی معادل را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbf{P} = \int \mathbf{R}\, dq = \int \mathbf{R}\, \rho_s\, ds$$

$$ds = \rho_s\, ds = (\rho_0 \cos\theta)\, a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \quad , \quad \mathbf{R} = a\, \mathbf{a}_R$$

پس:

$$\mathbf{P} = \int a^{۳}\, \rho_{\circ}\, \cos\theta\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \mathbf{a}_R$$

با بسط $\mathbf{a}_R$ حول مولفه‌هایش و ساده‌سازی:

$$\mathbf{P} = \mathbf{a}_z\; a^{۳}\, \rho_{\circ} \int_{\circ}^{۲\pi} \int_{\circ}^{\pi} \cos^{۲}\theta\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = a^{۳}\, \rho_{\circ}\, (۲\pi) \left(\frac{۲}{۳}\right) \mathbf{a}_z$$

در نتیجه:

$$\mathbf{P} = \frac{۴}{۳}\, \pi\, a^{۳}\, \rho_{\circ}\, \mathbf{a}_z \qquad (۸۵\text{-}۲)$$

برای میدان و پتانسیل نیز خواهیم داشت:

$$\mathbf{E} = \frac{۱}{۴\,\pi\,\varepsilon_{\circ}\,R^{۳}} \left(۳\, \frac{\mathbf{R}\,.\,\mathbf{P}}{R^{۲}}\, \mathbf{R} - \mathbf{P} \right) \Bigg|_{\mathbf{P} = \frac{۴}{۳}\,\pi\,a^{۳}\,\rho_{\circ}\,\mathbf{a}_z} = \frac{P}{۴\,\pi\,\varepsilon_{\circ}\,R^{۳}} (۲\cos\theta\; \mathbf{a}_R + \sin\theta\; \mathbf{a}_{\theta}) \Bigg|_{P = \frac{۴}{۳}\,\pi\,a^{۳}\,\rho_{\circ}}$$

$$\mathbf{E} = \frac{a^{۳}\,\rho_{\circ}}{۳\,\varepsilon_{\circ}\,R^{۳}} (۲\cos\theta\; \mathbf{a}_R + \sin\theta\; \mathbf{a}_{\theta})$$

$$V = \frac{\mathbf{P}\,.\,\mathbf{a}_R}{۴\,\pi\,\varepsilon_{\circ}\,R^{۲}} \Bigg|_{\mathbf{P} = \frac{۴}{۳}\,\pi\,a^{۳}\,\rho_{\circ}\,\mathbf{a}_z} = \frac{a^{۳}\,\rho_{\circ}}{۳\,\varepsilon_{\circ}\,R^{۲}}\, \cos\theta$$

راه حل فوق روش دیگری برای حل تمرین (۲-۶) و مثال (۲-۳۵) است. برای درک تفاوت این دو روش مجددا آنها را بررسی کنید.

تمرین۲-۴۸: بر روی یک کرهٔ به شعاع a باری با چگالی حجمی $\rho_v = \rho_{\circ}\cos\theta$ قرار دارد. گشتاور دوقطبی این توزیع بار را محاسبه کنید. (کارشناسی ارشد برق ۸۹)

در چند مثال اخیر با استفاده از دوقطبی معادل، میدان و پتانسیل توزیع‌های مختلف بار را بررسی کردیم. در برخی حالات خاص فقط در صورت داشتن بردار پلاریزاسیون می‌توان عمل مشابهی را انجام داد. بدیهی است که قطبش باعث ایجاد بارهای سطحی و حجمی مقید می‌شود و از اینرو با موضوع جدیدی مواجه نیستیم فقط راه‌حل کمی ساده‌تر است.

مثال ۲-۷۹ مرکز کرهٔ عایقی به شعاع a در مبداء مختصات قرار دارد و بردار قطبش در آن $\mathbf{P} = P_{\circ}\, \mathbf{a}_z$ است. گشتاور دوقطبی معادل و نیز میدان و پتانسیل نقاط درون و بیرون را بیابید.

حل: گشتاور دوقطبی الکتریکی را با استفاده از تعریف پلاریزاسیون، محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbf{P}=\frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta v}\rightarrow\Delta\mathbf{P}=\mathbf{P}\ \Delta v=P_{\circ}\,\mathbf{a}_z\,\frac{۴}{۳}\pi a^{۳}$$

اگر اگر قصد استفاده از قالب کلی را داشتیم، بدین صورت عمل می‌کردیم:

$$\sigma_p=\mathbf{P}\ .\ \mathbf{a}_n=\mathbf{P}\ .\ \mathbf{a}_R=P_{\circ}\cos\theta$$

.طبق رابطهٔ (۲-۸۲):

$$\mathbf{P}=\int\mathbf{R}\ dq=\int\mathbf{R}\ \sigma_p\,ds=\int_{\theta=\circ}^{\pi}\int_{\varphi=\circ}^{۲\pi}a\ \mathbf{a}_R\ (P_{\circ}\cos\theta)a^{۲}\sin\theta\,d\varphi\,d\theta=a^{۲}P_{\circ}\,۴\,\pi\ \frac{-\cos^{۳}\theta}{۳}\Bigg|_{\circ}^{\pi}$$

$$\mathbf{P}=P_{\circ}\ \mathbf{a}_z\ \frac{۴}{۳}\ \pi a^{۳}$$

که همان نتیجهٔ قبلی است.

برای محاسبهٔ میدان و پتانسیل خارج کره داریم:

$$\mathbf{E}=\frac{۱}{۴\,\pi\,\varepsilon_{\circ}R^{۲}}\left(۳\frac{\mathbf{R}\ .\ \mathbf{P}}{R^{۲}}\mathbf{R}-\mathbf{P}\right)\Bigg|_{\mathbf{P}=\frac{۴}{۳}\pi a^{۳}\rho_{\circ}\mathbf{a}_z}=\frac{P}{۴\,\pi\,\varepsilon_{\circ}R^{۳}}(۲\cos\theta\ \mathbf{a}_R+\sin\theta\ \mathbf{a}_{\theta})\Bigg|_{P=\frac{۴}{۳}\pi a^{۳}\rho_{\circ}}$$

$$\mathbf{E}=\frac{a^{۳}\rho_{\circ}}{۳\,\varepsilon_{\circ}R^{۳}}(۲\cos\theta\ \mathbf{a}_R+\sin\theta\ \mathbf{a}_{\theta})$$

$$V=\frac{\mathbf{P}\ .\ \mathbf{a}_R}{۴\,\pi\,\varepsilon_{\circ}R^{۲}}\Bigg|_{\mathbf{P}=\frac{۴}{۳}\pi a^{۳}\rho_{\circ}\mathbf{a}_z}=\frac{a^{۳}\rho_{\circ}}{۳\,\varepsilon_{\circ}R^{۲}}\cos\theta$$

اما برای محاسبهٔ میدان و پتانسیل داخل کره با مشکل مواجه می‌شویم و باید راه‌حلی مشابه تمرین (۲-۶) ارائه کنیم (که بسیار وقتگیر است). برای محاسبهٔ آن به گونهٔ دیگری عمل می‌کنیم:

پتانسیل دوقطبی الکتریکی طبق رابطهٔ $V=\frac{\mathbf{P}\ .\ \mathbf{a}_R}{۴\,\pi\,\varepsilon_{\circ}R^{۲}}$ محاسبه می‌شود. اگر در این رابطه دوقطبی‌ها به فرم $\mathbf{P}\,dv$ باشد برای پتانسیل ناشی از دوقطبی خواهیم داشت:

$$V=\frac{۱}{۴\,\pi\,\varepsilon_{\circ}}\int\frac{\mathbf{P}\,dv\ .\ \mathbf{R}}{R^{۳}}\qquad(۲\text{-}۸۶)$$

با توجه به ثابت بودن بردار $\mathbf{P}$ ($\mathbf{P}=P_{\circ}\ \mathbf{a}_z$) ، می‌توان آن را از انتگرال بیرون آورد:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\mathbf{P}\cdot\int\frac{\mathbf{R}}{R^3}\,dv$$

حجم کره را به عناصر dv تقسیم کرده و در هر عنصر دوقطبی $\mathbf{P}\,dv$ وجود دارد. برای حل انتگرال فوق اینطور عمل می‌کنیم:

اگر کره‌ای با چگالی $\rho = 1$ می‌داشتیم، میدان آن به صورت $\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathbf{R}}{R^3}\,dv$ می‌بود، پس:

$$V = \mathbf{P}\cdot\mathbf{E}_1$$

که $\mathbf{E}_1$ میدان کره‌ای با چگالی یکنواخت $\rho = 1$ است و طبق حل مثال (۲-۱۷):

$$\mathbf{E}_1 = \begin{cases} \dfrac{R}{3\varepsilon_0}\,\mathbf{a}_R & , \quad R < a \\[2ex] \dfrac{a^3}{3\varepsilon_0 R^2}\,\mathbf{a}_R & , \quad R > a \end{cases}$$

پس:

$$V = \begin{cases} P_0\,\mathbf{a}_z\cdot\dfrac{R}{3\varepsilon_0}\,\mathbf{a}_R = \dfrac{P_0 R\cos\theta}{3\varepsilon_0} & , \quad R < a \\[2ex] P_0\,\mathbf{a}_z\cdot\dfrac{a^3}{3\varepsilon_0 R^2}\,\mathbf{a}_R = \dfrac{a^3 P_0\cos\theta}{3\varepsilon_0 R^2} & , \quad R > a \end{cases}$$

برای محاسبهٔ میدان از منفی گرادیان ولتاژ استفاده می‌کنیم:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \begin{cases} \dfrac{P_0}{3\varepsilon_0}(\cos\theta\;\mathbf{a}_R - \sin\theta\;\mathbf{a}_\theta) & , \quad R < a \\[2ex] \dfrac{a^3 P_0}{3\varepsilon_0 R^3}(2\cos\theta\;\mathbf{a}_R + \sin\theta\;\mathbf{a}_\theta) & , \quad R > a \end{cases}$$

تمرین ۲-۴۹: یک نیم‌کرهٔ دی‌الکتریک به شعاع a را در نظر بگیرید. صفحهٔ xy منطبق بر سطح مسطح است. نیم‌کره در جهت z به‌صورت $\mathbf{P} = P_0\,\mathbf{a}_z$ بطور یکنواخت پلاریزه شده است.

الف) چگالی بار مقید حجمی و چگالی بار مقید سطحی را روی سطح کروی و سطح مسطح بدست آورید.

ب) کل بار مقید سطحی را روی سطح خارجی نیم‌کره (کروی و مسطح) محاسبه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

پ) گشتاور دوقطبی الکتریکی بارهای مقید کل را بیابید.

ت) گشتاور دوقطبی الکتریکی را با استفاده از تعریف پلاریزاسیون محاسبه کرده و توافق پاسخ‌های قسمت پ و ت را نتیجه بگیرید.

سوال: بردار دوقطبی معادل برای یک توزیع صفر بدست آمده است. آیا این بدین معناست که میدان حاصل از این توزیع در فضای خارج آن صفر است؟

جواب: خیر! به طور قطع در فضای خارجِ توزیع میدان داریم. در حالت کلی میدان ناشی از یک توزیع بار را به صورت مجموع میدان‌های ناشی از چندقطبی‌های معادل (مثل یک‌قطبی، دوقطبی، چهارقطبی ، .... و n۲قطبی) آن توزیع تعریف می‌کنیم. این اثرها به صورت انتگرال بسط لژاندر تابع محاسبه می‌شوند:

$$\mathbf{E} = -\nabla\left[\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{۱}{R^{n+۱}}\int R^{n}\,P_{n}\left(\cos\varphi\right)\rho dv\right] \qquad (۸۷-۲)$$

طبق این رابطه میدان و پتانسیل یک n۲قطبی (برای $n=\circ$ تا ∞) با روابط زیر متناسب است:

$$E \propto \frac{۱}{R^{n+۲}} \qquad (۸۸-۲)$$

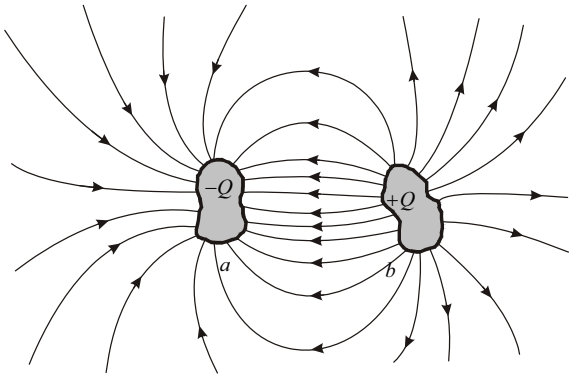
$$V \propto \frac{۱}{R^{n+۱}} \qquad (۹۰-۲)$$

۲-۹- خازن و ظرفیت

دو جسم هادی را مطابق شکل (۲-۶۳) در نظر بگیرید که روی یکی بار $+Q$ و روی دیگری بار $-Q$ قرار داشته باشد. چون پتانسیل تمام نقاط یک هادی یکسان است، می‌توان اختلاف پتانسیل بین دو هادی را به صورت زیر بیان کرد:

$$V = V_{+} - V_{-} = -\int_{-}^{+}\mathbf{E}\cdot\mathbf{d}l \qquad (۹۱-۲)$$

انتگرال فوق از نقطه‌ای روی هادی دارای بار منفی تا نقطه‌ای روی هادی دارای بار مثبت محاسبه می‌شود. این ترکیب خازن نامیده می‌شود. خازن از دو هادی که توسط فضای آزاد و یا محیط دی‌الکتریک از هم جدا شده‌اند، تشکیل شده است. شکل هادی‌ها می‌تواند کاملا دلخواه باشد. وقتی که منبع ولتاژ dc بین دو هادی متصل شود، در نتیجهٔ انتقال بار، روی یک هادی، بار $+Q$ و روی دیگری بار $-Q$ قرار می‌گیرد، مقدار این بار متناسب با ولتاژ است. ظرفیت خازن به شکل هندسی و گذردهی محیط بستگی دارد و در حالت کلی به صورت زیر قابل محاسبه است:



شکل ۲-۶۳: مدل خازن

$$c = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_\circ \int_s \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}s}{\int_{A_1}^{A_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}l} \qquad (۹۲\text{-}۲)$$

از رابطهٔ فوق عدم وابستگی ظرفیت به بار و ولتاژ اثبات می‌شود. برای محاسبهٔ ظرفیت خازن چهار روش کلی داریم:

۱- روی یک هادی بار $+Q$ و روی دیگری بار $-Q$ را در نظر می‌گیریم. سپس میدان $\mathbf{E}$ را ناشی از این بارها پیدا می‌کنیم. در گام بعدی با استفاده از $V = -\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}l$ اختلاف پتانسیل را محاسبه می‌کنیم. در نهایت نیز از رابطهٔ (۲-۹۲) ظرفیت را می‌یابیم.

۲- اختلاف پتانسیل V را دو سر سیستم در نظر گرفته و رابطهٔ آنرا در فضای سیستم یافته، با استفاده از $\mathbf{E} = -\nabla V$ میدان را پیدا می‌کنیم. سپس با توجه به اینکه $Q = \varepsilon_\circ \int_s \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}s$ بار را محاسبه کرده و در نهایت نیز از رابطهٔ (۲-۹۲) ظرفیت را می‌یابیم. (توجه: یافتن رابطهٔ پتانسیل در فضای سیستم را با استفاده از روش لاپلاس در فصل بعد بررسی می‌کنیم)

۳- استفاده از روش دیفرانسیلی: این روش را جداگانه بیان خواهیم کرد.

۴- استفاده از انرژی: در بخش بعد خواهیم دید که در صورت داشتن انرژی، ظرفیت چگونه محاسبه می‌شود. (و یا بالعکس)

در ادامه ظرفیت سه خازن مهم را پیدا می‌کنیم:

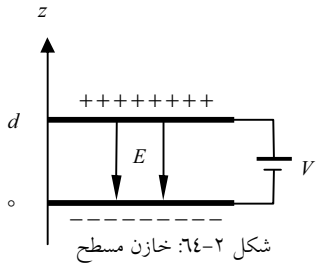
مثال ۲-۸۰ ظرفیت خازن تخت را محاسبه کنید.

حل: بارهای $+Q$ و $-Q$ را مطابق شکل (۲-۶۴) فرض می‌کنیم:

$$\int \mathbf{D}\,.\,\mathbf{d}s = Q \;\rightarrow\; D\,S = Q$$

جهت میدان از بارهای مثبت به سمت بارهای منفی است، پس:

$$\mathbf{E} = -\frac{Q}{\varepsilon s}\,\mathbf{a}_z$$



شکل ۲-٦٤: خازن مسطح

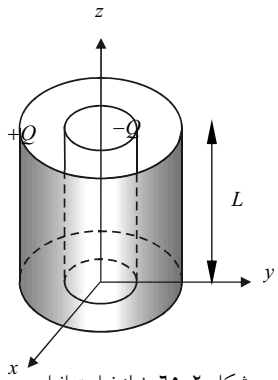
در نتیجه:

$$V = V_+ - V_- = -\int \mathbf{E}\,.\,\mathbf{d}l = \int_{\circ}^{d} \frac{Q}{\varepsilon s}\,\mathbf{a}_z\,.\,\mathbf{a}_z\,dz = \frac{Q}{\varepsilon s}\,d$$

(اگر در تعیین مرزها و یا علامتها در انتگرال فوق مشکل دارید، پیشنهاد می‌شود توضیحات مربوط به رابطهٔ (۲-۴۴) را دوباره مطالعه کنید) حال کافیست طبق رابطهٔ $C = \frac{Q}{V}$ ظرفیت را بیابیم:

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon S}{d}} \qquad (۹۳\text{-}۲)$$

مثال ۲-۸۱ ظرفیت خازن استوانه‌ای را محاسبه کنید.



شکل ۲-٦٥: خازن استوانه‌ای

حل: مطابق شکل (۲-۶۵) بار $-Q$ را روی سطح داخلی و بار $+Q$ را روی سطح خارجی قرار می‌دهیم. داریم:

$$\int \mathbf{D}\,.\,\mathbf{d}s = Q \;\rightarrow\; D\,S = Q$$

با اعمال جهت میدان و سطح S:

$$D\,(۲\,\pi\,r\,l) = Q \;\rightarrow\; \mathbf{E} = \frac{-Q}{۲\,\pi\,\varepsilon\,r\,l}\,\mathbf{a}_r$$

حال پتانسیل را پیدا می‌کنیم:

$$V = V_+ - V_- = -\int_a^b \mathbf{E}\,.\,\mathbf{d}r = \frac{Q}{۲\,\pi\,\varepsilon\,L}\,Ln\,r\,\Big|_a^b = \frac{Q}{۲\,\pi\,\varepsilon\,L}\,Ln\,\frac{b}{a}$$

و در نهایت:

$$\boxed{C = \frac{۲\,\pi\,\varepsilon\,L}{Ln\,\frac{b}{a}}} \qquad (۹۴\text{-}۲)$$

۲-۹-۱- روش دیفرانسیلی

فرض می‌کنیم که یک خازن از بی‌نهایت بخش سری با هم تشکیل شده در این صورت اگر به هر کدام از این بخش‌ها به صورت میکروسکوپی نگاه کنیم، عملا یک خازن تخت خواهیم داشت، پس می‌توان نوشت:

- ظرفیت هر کدام از جزءهای سری:

$$def(C) = \frac{\varepsilon S}{def(d)}$$

- ظرفیت کل سیستم:

$$\boxed{\frac{1}{C} = \int \frac{1}{def(c)} = \int \frac{def(d)}{\varepsilon S}} \qquad (۲-۹۵)$$

برای محاسبهٔ ظرفیت خازن با این روش، کافیست بتوانید جزء دیفرانسیلی C را مدل کنید برای اینکار لازم است:

۱- بجای ε گذردهی سیستم (از هر نوعی (ثابت یا متغیر)) را قرار دهید.

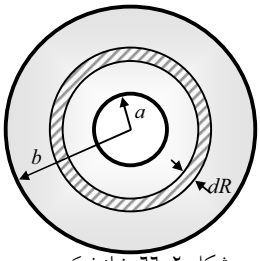
۲- بجای S مساحت خارجی سطح هادی فرض را قرار دهید.

۳- ببینید خازنهای جزیی فرضی شما در چه جهتی با هم سری می‌شوند، آنگاه دیفرانسیل آن مولفه را به جای $def(d)$ قرار دهید. (مثلا برای خازن تخت dz و برای خازن استوانه‌ای dr و...)

کاربرد این روش را در مثال زیر ببینید.

مثال کلیدی

مثال ۲-۸۲ ظرفیت خازن کروی را محاسبه کنید.



شکل ۲-٦٦: خازن کروی

حل: مطابق شکل یک خازن فرضی در نظر گرفتیم. برای آن داریم:

۱- $S = 4\pi R^2$

۲- $def(d) = dR$

حال با استفاده از رابطهٔ (۲-۵۷) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{C} = \int \frac{def(d)}{\varepsilon S} = \int_a^b \frac{dR}{\varepsilon\, 4\pi R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

پس:

$$\boxed{C = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}} \qquad (۲-۹۶)$$

با توجه به این رابطه ظرفیت یک کرهٔ هادی ($b \to \infty$) به صورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{C = ۴\,\pi\,\varepsilon\,a} \qquad (۹۷-۲)$$

تمرین ۲-۴۹: ظرفیت خازن کروی را بدون استفاده از روش دیفرانسیلی بیابید.

مثال ۲-۸۳ ظرفیت خازن کروی را که عایق بین صفحات هادی آن دارای $\varepsilon = \varepsilon_\circ\left(۱+\frac{a^۲}{R^۲}\right)$ می‌باشد ، بدست آورید. (کارشناسی ارشد فیزیک ۸۱)

حل: مشابه مثال (۲-۸۲) عمل می‌کنیم، کافیست گذردهی را در المان دیفرانسیل ظرفیت قرار دهیم:

$$\frac{۱}{C} = \int \frac{def\,(d)}{\varepsilon S} = \int_a^b \frac{dR}{\varepsilon_\circ(۱+\frac{a^۲}{R^۲})\,۴\,\pi R^۲} = \int_a^b \frac{dR}{۴\,\pi\,\varepsilon_\circ(R^۲+a^۲)} = \frac{۱}{۴\,\pi\,\varepsilon_\circ}\int_a^b \frac{dR}{R^۲+a^۲} = \frac{۱}{۴\,\pi\,\varepsilon_\circ}\tan^{-۱}\frac{R}{a}\Bigg|_a^b$$

پس:

$$C = \frac{۴\,\pi\,\varepsilon_\circ}{\left[\tan^{-۱}\left(\frac{b}{a}\right)-\frac{\pi}{۴}\right]}$$

همانطور که مشاهده شد، روش دیفرانسیلی سخت‌ترین خازنها را تبدیل به حل یک انتگرال می‌کند.

تمرین ۲-۵۰: ظرفیت خازن استوانه‌ای را با استفاده از روش دیفرانسیلی بیابید.

مثال ۲-۸۴ نشان دهید که ظرفیت جزئی یک خازن کروی را می‌توان به صورت رابطهٔ (۲-۹۸) نشان داد:

$$dC = \frac{\varepsilon\,d\Omega}{\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}} \qquad (۹۸-۲)$$

که در آن $d\Omega = \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$.

حل: می‌دانیم که:

$$def\,(C) = \frac{\varepsilon\,S}{def\,(d)}$$

از طرفی $def\ (d) = dR$ و $S = \int R^{۲} \sin\theta\ d\theta d\varphi$، پس:

$$\frac{۱}{C} = \int \frac{۱}{def\ (c)} = \int \frac{def\ (d)}{\varepsilon S} = \int_a^b \frac{dR}{\varepsilon R^{۲} \int \sin\theta d\theta d\varphi} = \frac{\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}}{\varepsilon \int \sin\theta d\theta d\varphi}$$

$$C = \frac{\varepsilon \int \sin\theta d\theta d\varphi}{\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}} \rightarrow C = \frac{\varepsilon \int d\Omega}{\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}}$$

در نتیجه:

$$dC = \frac{\varepsilon\ d\Omega}{\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}}$$

رابطهٔ فوق در حل مسائلی که ε در آنها نامتقارن است (یعنی وابسته به θ یا است) کاربرد زیادی دارد.

مثال ۲-۸۵ یک خازن کروی از دو سطح هادی کروی هم‌مرکز به شعاع‌های a و b ($b > a$) تشکیل شده است. فضای بین دو کرهٔ هادی را عایق ناهمگن با ضریب گذردهی $\varepsilon = \varepsilon_{\circ}(۱+\sin\theta)(۱+\cos^{۲}\varphi)$ پر کرده است. ظرفیت این خازن را بیابید. (کارشناسی ارشد برق ۸۹)

حل: گذردهی محیط نامتقارن است، پس طبق رابطهٔ (۲-۹۸):

$$dC = \frac{\varepsilon\ d\Omega}{\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}} = \frac{\varepsilon_{\circ}(۱+\sin\theta)(۱+\cos^{۲}\varphi)\sin\theta\ d\theta d\varphi}{\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}} = \frac{\varepsilon_{\circ}(۱+\sin\theta)\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cos ۲\varphi\right)\sin\theta d\theta d\varphi}{\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}}$$

با توجه به صفر بودن انتگرال $\cos ۲\varphi$ در بازهٔ مورد نظر:

$$C = \frac{\varepsilon_{\circ}}{\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}} \int_{\circ}^{\pi} \left(\frac{۳ \times ۲\pi}{۲}\right)(\sin\theta + \sin^{۲}\theta)\ d\theta = \frac{۳\ \pi\ \varepsilon_{\circ}}{\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}} \left[-\cos\theta + \frac{\theta}{۲} - \frac{۱}{۴}\sin ۲\theta\right]\Bigg|_{\circ}^{\pi} = \frac{۳\ \pi\ \varepsilon_{\circ}}{\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}} \left[۲ + \frac{\pi}{۲}\right]$$

۲-۹-۲- تعمیم یافتهٔ روش دیفرانسیلی محاسبهٔ خازن

پیچیده‌ترین خازنها نیز از مجموعه خازن‌های سری و موازی ایجاد شده‌اند. دو بیان زیر ما را در تحلیل این آشکال یاری می‌دهند:

نکتهٔ طلایی

✓ اگر مرز مشترک دی‌الکتریک‌ها با سطوح هادی خازن **موازی** باشد، در این صورت خازن‌های تشکیل شده با هم **سری**اند.

نکتهٔ طلایی

✓ اگر مرز مشترک دی‌الکتریک‌ها بر سطوح هادی خازن **عمود** باشد، در این صورت خازن‌های تشکیل شده با هم **موازی**اند.

اصولی که بر اساس آن‌ها روش دیفرانسیلی بیان شد، بر پایهٔ سری شدن ظرفیت‌های جزئی در ساختار یک خازن بود. در یک مدل پیچیده ممکن است خازن ترکیبی از جزءهای سری و موازی باشد در اینگونه موارد لازم است از تعمیم روش دیفرانسیلی استفاده شود. بر این اساس در رابطهٔ $C=\frac{\varepsilon S}{d}$، هم‌زمان هم d و هم S به صورت دیفرانسیلی تغییر می‌کنند. روش کلی حل این مسائل را در مثال زیر بررسی کرده‌ایم:

مثال کلیدی

مثال ۲-۸۶ ظرفیت گوهٔ شکل (۲-۶۷) را محاسبه کنید.

حل: ابتدا المانی مشابه شکل(۲-۶۸) را انتخاب می‌کنیم. بدیهی است که با ترکیبات سری و موازی این المان به شکل کامل می‌رسیم. با توجه به نحوهٔ قرارگیری منبع، این المان‌ها در جهت φ سری و در جهت r موازی‌اند. (در حقیقت صفحات $\varphi=0$ و $\varphi=\frac{\pi}{4}$ صفحات هادی این خازن را تشکیل داده است) با توجه به شکل (۲-۶۸) برای تمام المان‌های سری $def\ (d)=r\,d\varphi$ و $S=a\ dr$ و ظرفیت جزئی نیز به صورت $def\ (def\ (C))=\frac{\varepsilon S}{def\ (d)}$ است! ، پس:

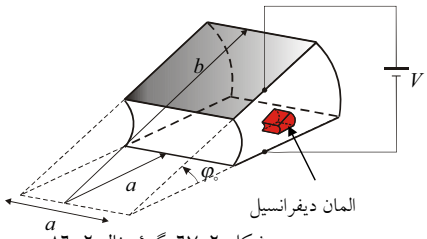
$$def\ (def\ (C))=\frac{\varepsilon\ a\ dr}{r\,d\varphi}$$

کافیست اثر ترکیبات سری و موازی این المان‌ها را اعمال کنیم. **توجه کنید که همیشه اول اثر سری بودن را اعمال می‌کنیم**. در نتیجه:

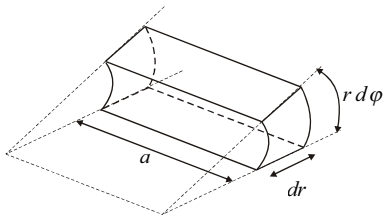
$$\frac{1}{def\ (c)}=\int_0^{\varphi_0}\frac{r\,d\varphi}{\varepsilon\ a\ dr}=\frac{r\,\varphi_0}{\varepsilon\ a\ dr}\rightarrow def\ (c)=\frac{\varepsilon\ a\ dr}{r\,\varphi_0}$$

حال ترکیب موازی المان‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$C=\int_a^b \frac{\varepsilon\, a\, dr}{r\,\varphi_\circ}=\frac{\varepsilon a}{\varphi_\circ}Ln\,\frac{b}{a}\Bigg|_{\varphi_\circ=\frac{\pi}{۴}}=\frac{۴\,\varepsilon\, a}{\pi}Ln\,\frac{b}{a}$$



شکل ۲-۶۷: گوهٔ مثال ۲-۸۶



شکل ۲-۶۸: المان دیفرانسیل

مثال ۲-۸۷ کره‌ای فلزی به شعاع a داریم. یک لایه دی‌الکتریک با ضریب نفوذ نسبی ε_r به ضخامت d روی آن قرار می‌دهیم. d چقدر باشد تا ظرفیت کره ۲ برابر شود؟ (کارشناسی ارشد برق ۷۷)

حل: پیش از این دیدیم که ظرفیت یک کرهٔ فلزی به شعاع a، طبق رابطهٔ (۲-۹۷) به صورت زیر است:

$$C_۱=۴\,\pi\,\varepsilon\,a$$

با قرار دادن دی‌الکتریک، دو خازن سری ایجاد می‌شود:

$$\frac{۱}{C_۲}=\frac{۱}{C_{۲۱}}+\frac{۱}{C_{۲۲}}$$

که:

$$C_{۲۱}=\frac{۴\,\pi\,\varepsilon_\circ\,\varepsilon_r}{\frac{۱}{a}-\frac{۱}{a+d}}\quad,\quad C_{۲۲}=۴\,\pi\,\varepsilon_\circ\left(a+d\right)$$

طبق خواستهٔ مسئله:

$$C_۲=۲\,C_۱=۸\,\pi\,\varepsilon_\circ\,a$$

پس:

$$\frac{۱}{۸\ \pi\varepsilon_{\circ} a}=\frac{\frac{۱}{a}-\frac{۱}{a+d}}{۴\ \pi\varepsilon_{\circ}\varepsilon_r}+\frac{۱}{۴\ \pi\varepsilon_{\circ}(a+d)}\ \rightarrow\ \frac{۱}{۲a}=\frac{۱}{\varepsilon_r}\left(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{a+d}\right)+\frac{۱}{a+d}$$

در نتیجه:

$$\varepsilon_r(a+d)=۲(a+d-a)+۲\varepsilon_r a\ \rightarrow\ d=\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r-۲}a$$

مثال ۲-۸۸ خازن دو سیمه. دو میله با چگالی ρ_l و $-\rho_l$ با شعاع a را در نظر بگیرید. فاصلهٔ دو میله از هم d ($d>>a$) است.

الف) خازن بر واحد طول بین دو میله را بدست آورید.

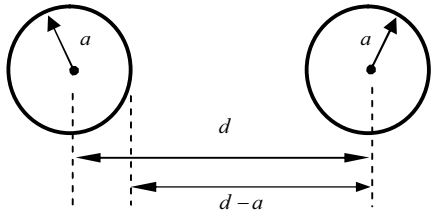
ب) خازن بر واحد طول هر میله را بدست آورید.

حل:الف) با محاسبهٔ پتانسیل شروع کرده و سپس بار را بر آن تقسیم می‌کنیم تا ظرفیت پیدا شود. خوشبختانه پتانسیل ناشی از دو خط بار با بارهای هم اندازه و مختلف العلامت را در مثال (۲-۳۰) و طبق رابطهٔ (۲-۵۲) محاسبه کرده‌ایم:

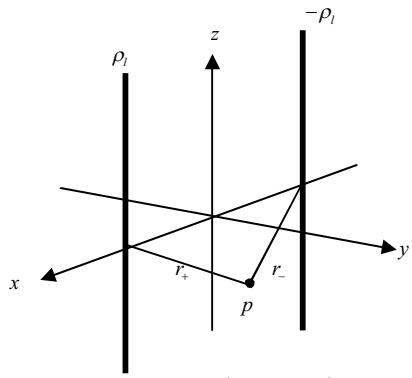
$$V_p=\frac{\rho_l}{۲\ \pi\varepsilon_{\circ}}Ln\ \frac{r_-}{r_+}$$

برای محاسبهٔ اختلاف پتانسیل، پتانسیل در سطح دو هادی را از هم کم می‌کنیم:

$$\Delta V=V_a-V_b=\frac{\rho_l}{۲\ \pi\varepsilon_{\circ}}Ln\ \frac{r_-}{r_+}\Bigg|_{r_-=d-a\ ,\ r_+=a}-\frac{\rho_l}{۲\ \pi\varepsilon_{\circ}}Ln\ \frac{r_-}{r_+}\Bigg|_{r_-=a\ ,\ r_+=d-a}$$



شکل ۲-۷۰: مقطع هادی‌های مثال ۲-۸۸



شکل ۲-۶۹: شکل مثال ۲-۸۸

$$\Delta V = \frac{\rho_l}{۲\pi\varepsilon_\circ} Ln\frac{d-a}{a} - \frac{\rho_l}{۲\pi\varepsilon_\circ} Ln\frac{a}{d-a} = \frac{\rho_l}{\pi\varepsilon_\circ} Ln\frac{d-a}{a} \xrightarrow{d>>a} \Delta V \simeq \frac{\rho_l}{\pi\varepsilon_\circ} Ln\frac{d}{a}$$

لذا:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_l L}{\frac{\rho_l}{\pi\varepsilon_\circ} Ln\frac{d}{a}} = \frac{\pi\varepsilon_\circ}{Ln\frac{d}{a}} L$$

پس خازن بر واحد طول عبارت است از:

$$C_{ab} = \frac{\pi\varepsilon_\circ}{Ln\frac{d}{a}}$$

ب) رابطهٔ فوق ظرفیت بین دو میله بود. به راحتی قابل اثبات است که ظرفیت هر میله دو برابر مقدار فوق است، برای این منظور کافی است دقت کنید که ترکیب سری ظرفیت دو میله معادل ظرفیت خازنی بین آن دو است، از طرفی ترکیب سری دو خازنِ مساوی، نصف هر کدام از آنهاست، پس:

$$C_{an} = \frac{۲\pi\varepsilon_\circ}{Ln\frac{d}{a}} \qquad (۹۹-۲)$$

مثال ۲-۸۹ ظرفیت یک میله به طول L و شعاع R ($L >> R$) را محاسبه کنید. (کارشناسی ارشد برق ۷۹)

حل: مشابه مثال قبل عمل می‌کنیم. ابتدا پتانسیل یک نقطهٔ دلخواه از فضا را محاسبه می‌کنیم:

$$V_p = \int_{-\frac{L}{۲}}^{\frac{L}{۲}} \frac{\rho_l\, dx}{۴\pi\varepsilon_\circ R} = \int_{-\frac{L}{۲}}^{\frac{L}{۲}} \frac{\rho_l\, dx}{۴\pi\varepsilon_\circ \left(x^۲+y^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ L} Ln\frac{\frac{L}{۲}+\sqrt{\left(\frac{L}{۲}\right)^۲+y^۲}}{-\frac{L}{۲}+\sqrt{\left(\frac{L}{۲}\right)^۲+y^۲}}$$

برای محاسبهٔ پتانسیل سطح میله، کافیست در رابطهٔ فوق $y = R$ قرار دهیم:

$$V = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ L} Ln\frac{\frac{L}{۲}+\sqrt{\left(\frac{L}{۲}\right)^۲+R^۲}}{-\frac{L}{۲}+\sqrt{\left(\frac{L}{۲}\right)^۲+R^۲}}$$

برای ساده کردن رابطهٔ فوق به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\sqrt{\left(\frac{L}{۲}\right)^{۲}+R^{۲}}=\frac{L}{۲}\left[\sqrt{۱+\left(\frac{۲R}{L}\right)^{۲}}\right]\cong\frac{L}{۲}\left[۱+\frac{۱}{۲}\left(\frac{۲R}{L}\right)^{۲}\right]=\frac{L}{۲}+\frac{R^{۲}}{L}$$

پس:

$$V=\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}L}Ln\frac{\frac{L}{۲}+\frac{L}{۲}+\frac{R^{۲}}{L}}{-\frac{L}{۲}+\frac{L}{۲}+\frac{R^{۲}}{L}}=\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}L}Ln\left.\frac{L+\frac{R^{۲}}{L}}{\frac{R^{۲}}{L}}\right|_{L>>R}$$

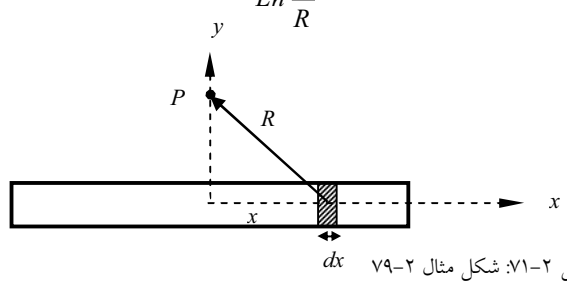
$$V=\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}L}Ln\frac{L}{\frac{R^{۲}}{L}}=\frac{Q}{۲\pi\varepsilon_{\circ}L}Ln\frac{L}{R}$$

در نتیجه:

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{Q}{\frac{Q}{۲\pi\varepsilon_{\circ}L}Ln\frac{L}{R}}=\frac{۲\pi\varepsilon_{\circ}L}{Ln\frac{L}{R}}$$

در نهایت برای خازن در واحد طول میله داریم:

$$C=\frac{۲\pi\varepsilon_{\circ}}{Ln\frac{L}{R}} \qquad (۱۰۰-۲)$$



شکل ۲-۷۱: شکل مثال ۲-۷۹

بخش زیادی از سوالات عایق به صورت خازن مطرح می‌شوند (عایق خازنی) در این حالات نیز با بحث جدیدی مواجه نیستیم، آنها را با مباحث خازن یکسان فرض نکرده و فقط از روش‌های مطرح شده در عایق و میدان استفاده کنید.

مثال ۲-۹۰ کرهٔ فلزی به شعاع a را که دارای پتانسیل $V_\circ$ می‌باشد در یک محیط که ضریب دی‌الکتریک نسبی آن $\varepsilon_r = ۱ + \frac{a}{R}$ می‌باشد، قرار می‌دهیم. در این صورت پتانسیل کره چقدر خواهد شد؟ (المپیاد غیرمتمرکز برق ۸۵)

حل: طبق قانون گاوس چگالی شار الکتریکی خارج کره به صورت زیر است:

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{۴\pi R^۲}\mathbf{a}_R$$

برای میدان هم داریم:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ R(R+a)}\mathbf{a}_R \quad ، \quad Q = ۴\pi\varepsilon_\circ a V_\circ$$

حال براحتی پتانسیل را محاسبه می‌کنیم:

$$V = -\int_\infty^a \mathbf{E}\,.\,\mathbf{d}l = -\int_\infty^a \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ R(R+a)}dR = \int_a^\infty \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{۱}{R} - \frac{۱}{R+a}\right]\frac{۱}{a}dR$$

$$= \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ a} Ln\frac{R}{R+a}\Bigg|_a^\infty = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ a} Ln\,۲ = V_\circ\, Ln\,۲$$

مثال ۲-۹۱ ناحیهٔ $۳ < R < ۵$ بین دو کرهٔ هادی شامل عایق هموژن با $\varepsilon_r = \frac{۱}{R}$ می‌باشد. اگر کرهٔ داخلی دارای پتانسیل ۱۰۰^V باشد، در این صورت تابع پتانسیل بین دو کره را بیابید. (کارشناسی ارشد هسته‌ای ۸۳)

حل: با توجه به اینکه $\rho = \circ$ است (عایق بار آزاد ندارد) پس:

$$\nabla\,.\,\mathbf{D} = \circ \;\rightarrow\; \mathbf{D} = \frac{k}{R^۲}\mathbf{a}_R \;\rightarrow\; \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} = \frac{k}{R}\,\mathbf{a}_R$$

$$V_\circ = V(R=۳) - V(R=۵) = ۱۲۰ - ۱۰۰ = ۲۰ = -\int_۵^۳ \mathbf{E}\,.\,\mathbf{d}l$$

$$V_\circ = \int_۳^۵ \frac{k}{R}dR = k\,Ln\frac{۵}{۳} \rightarrow k = \frac{۲۰}{Ln\frac{۵}{۳}}$$

تابع پتانسیل بین دو کره عبارت است از:

$$V(R)-V(۵)=V(R)-۱۰۰=-\int_{۵}^{R}\mathbf{E}\,.\,\mathbf{d}l=\int_{۳}^{۵}\frac{۳۹.۱۵}{R}dR=۳۹.۱۵\,Ln\frac{۵}{R}$$

$$V(R)=۳۹.۱۵\left(Ln\,۵-Ln\,R\right)+۱۰۰=۱۶۳-۳۹.۱۵\,Ln\,R$$

مثال ۲-۹۲ برای خازن شکل (۲-۷۲) مطلوب است: [۱۴]

الف) چگالی بار حجمی مقید را بدست آورید.

ب) چگالی بار سطحی مقید در سطح $z=d$ چقدر است؟

حل: در فضای سیستم بار آزاد نداریم پس:

$$\nabla\,.\,\mathbf{D}=۰$$

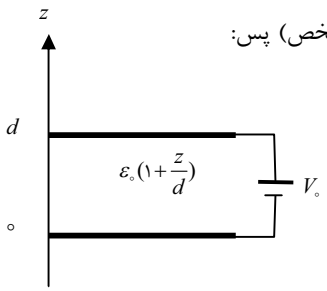
چون یک سیستم خازنی داریم (دو صفحهٔ هادی با پتانسیل مشخص) پس:

$$D=k$$

با توجه به جهت میدان:

$$\mathbf{D}=k\,(-\mathbf{a}_z)$$

$$\mathbf{E}=\frac{\mathbf{D}}{\varepsilon}=\frac{k\,(-\mathbf{a}_z)}{\varepsilon_۰\left(۱+\frac{z}{d}\right)}$$



شکل ۲-۷۲: شکل مثال ۲-۹۲

با توجه به معلوم بودن اختلاف پتانسیل:

$$-\int_{-}^{+}\mathbf{E}\,.\,\mathbf{d}l=-\int_{۰}^{d}\frac{k\,(-\mathbf{a}_z)}{\varepsilon_۰\left(۱+\frac{z}{d}\right)}\,.\,\mathbf{a}_z\,dz=V_۰\;\Rightarrow\;\frac{k\,d}{\varepsilon_۰}\left(Ln\,۲\right)=V_۰\rightarrow k=\frac{\varepsilon_۰V_۰}{d\,Ln\,۲}$$

پس:

$$\mathbf{D}=\frac{\varepsilon_۰V_۰}{d\,Ln\,۲}\left(-\mathbf{a}_z\right)\quad,\quad\mathbf{E}=\frac{V_۰}{\left(d+z\right)Ln\;۲}\left(-\mathbf{a}_z\right)$$

$$\mathbf{P}=\mathbf{D}-\varepsilon_۰\mathbf{E}=\frac{\varepsilon_۰V_۰}{d\,Ln\,۲}(-\mathbf{a}_z)-\frac{\varepsilon_۰V_۰}{\left(d+z\right)Ln\;۲}(-\mathbf{a}_z)=\frac{\varepsilon_۰V_۰}{Ln\,۲}\left(\frac{۱}{d}-\frac{۱}{d+z}\right)(-\mathbf{a}_z)$$

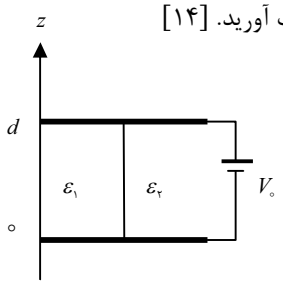
$$\rho_b=-\nabla\,.\,\mathbf{P}=-\frac{\partial P}{\partial z}=-\frac{\varepsilon_۰V_۰}{Ln\,۲}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{۱}{d+z}\right)\right)=\frac{\varepsilon_۰V_۰}{\left(d+z\right)^{۲}Ln\,۲}$$

ب) چگالی بار سطحی مقید در سطح $z=d$:

$$\sigma_b\Big|_{z=d} = -(\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1)\cdot\mathbf{a}_n = -\left[0-\frac{\varepsilon_0 V_0}{Ln\,2}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{d+z}\right)(-\mathbf{a}_z)\right]\cdot\mathbf{a}_z\Big|_{z=d} = -\frac{\varepsilon_0 V_0}{2\,d\,Ln\,2}$$

با توجه به اینکه سطح $z=d$ هادی است، انتظار هم همین بود که $\sigma=\varepsilon_0 E_n$ باشد. (درستی آن را بررسی کنید)

مثال ۲-۹۳ برای خازن مسطح شکل (۲-۷۳) با لایه‌های عایقی موازی بین صفحات هادی، چگالی بار سطحی آزاد و مقید را برای سطح $z=d$ برای هر دو ناحیه بدست آورید. [۱۴]



شکل ۲-۷۳: شکل مثال ۲-۹۳

حل: با توجه به شکل میدان در جهت $-\mathbf{a}_z$ است. از طرفی این مولفه برای مرز مشترک دو محیط معادل مولفهٔ مماسی است، یعنی میدان برای این دو فقط دارای مولفهٔ مماسی است و با توجه به پیوستگی مولفهٔ مماس میدان در مرز مشترک دو محیط، نتیجه می‌گیریم که میدان در دو محیط با هم برابر است! عایق دو محیط ثابت است پس میدان یکنواخت و به صورت $\mathbf{E}=\frac{V_0}{d}(-\mathbf{a}_z)$. رابطهٔ اخیر را با یک انتگرال خطی نیز می‌توان محاسبه نمود:

$$V_0 = -\int_0^d E\,(-\mathbf{a}_z)\cdot dz\;\mathbf{a}_z \;\rightarrow\; E\,d = V_0 \;\Rightarrow\; \mathbf{E}=\frac{V_0}{d}(-\mathbf{a}_z)$$

$$\mathbf{P}_1=\mathbf{D}_1-\varepsilon_0\mathbf{E}_1=(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\frac{V_0}{d}(-\mathbf{a}_z) \quad , \quad \mathbf{P}_2=\mathbf{D}_2-\varepsilon_0\mathbf{E}_2=(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\frac{V_0}{d}(-\mathbf{a}_z)$$

پس:

$$\rho_{S_{f1}}\Big|_{z=d}=\mathbf{D}_1\cdot\mathbf{a}_n=\frac{\varepsilon_1 V_0}{d}(-\mathbf{a}_z)\cdot(-\mathbf{a}_z)=\frac{\varepsilon_1 V_0}{d},\;\; \rho_{S_{f2}}\Big|_{z=d}=\mathbf{D}_2\cdot\mathbf{a}_n=\frac{\varepsilon_2 V_0}{d}(-\mathbf{a}_z)\cdot(-\mathbf{a}_z)=\frac{\varepsilon_2 V_0}{d}$$

$$\sigma_{b1}\Big|_{z=d}=-\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{a}_n=-\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_0)V_0}{d} \quad , \quad \sigma_{b2}\Big|_{z=d}=-\mathbf{P}_2\cdot\mathbf{a}_n=-\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_0)V_0}{d}$$

۲-۱۰- انرژی

انرژی از مهمترین پارامترهای هر سیستمی است. اصولا کارایی عملی هر سیستمی، به طور مستقیم به انرژی آن وابسته است. هدف اصلی از طراحی یک سیستم الکترواستاتیکی این است که

میدان‌ها به گونه‌ای طراحی شوند تا در ناحیهٔ خاصی از فضا مقدار مشخصی انرژی موجود بوده و این انرژی منجر به انجام کار گردد. شاید بخواهیم این میدان بخش خاصی از فضا را تحت تاثیر قرار ندهد در این صورت از حفاظت الکتریسیته ساکن استفاده می‌کنیم(در پیوست فصل بیان می‌شوند) بحث انرژی را برای بارهای گسسته و پیوسته به صورت جداگانه مطرح می‌کنیم:

۲-۱۰-۱- انرژی بارهای گسسته

پتانسیل الکتریکی یک نقطه، برابر است با کار لازم جهت آوردن واحد بار مثبت از مبداء پتانسیل به آن نقطه:

$$V = \frac{W}{q} \qquad (۱۰۱-۲)$$

با انجام یک آزمایش ساده می‌توانیم با مفهوم انرژی الکترواستاتیکی آشنا شویم. فرض کنید که بارها ابتداً در بی‌نهایت واقع شده و به حدی از یکدیگر فاصله دارند که بر یکدیگر هیچ‌گونه نیروی کولنی وارد نکنند. بیایید از شکل (۲-۷۴) برای درک موضوع استفاده کنیم. برای انتقال اولین بار با استفاده از این واگن فرضی، به هیچ نیرویی نیاز نداریم، لذا $W_۱ = ۰$. با این حال برای انتقال دومین بار، بایستی بر نیروی کولنی بین این بار و بار اولی غلبه کنیم، از اینرو:

$$W_۲ = -\int_{-\infty}^{x_b} \frac{Q_۱ Q_۲}{۴\pi\varepsilon_۰ (x - x_a)^۲} dx = \frac{Q_۱ Q_۲}{۴\pi\varepsilon_۰ |x_b - x_a|} = Q_۲ V_۱ \qquad (۱۰۲-۲)$$

در این رابطه $V_۱$ ، پتانسیل ناشی از بار شمارهٔ یک است. با این حال اگر فرض می‌کردیم که بار $Q_۲$ در فضا وجود داشته و بار نقطه‌ای $Q_۱$ را از بی‌نهایت (مبداء پتانسیل) به فاصلهٔ $R_{۱۲}$ آورده باشیم در این صورت انرژی ذخیره شده در فضا به صورت زیر خواهد بود:

$$W_۲ = Q_۱ V_۱ = Q_۱ \frac{Q_۲}{۴\pi\varepsilon_۰ R_{۱۲}} \qquad (۱۰۳-۲)$$

نکتهٔ طلایی

همانطور که مشاهده می‌شود پاسخ‌ها یکسان هستند. در عمل با حضور میدان هر دو بار حرکت می‌کنند، از اینرو انرژی سیستم را می‌توان ترکیبی از روابط (۲-۱۰۲) و (۲-۱۰۳) دانست. پس:

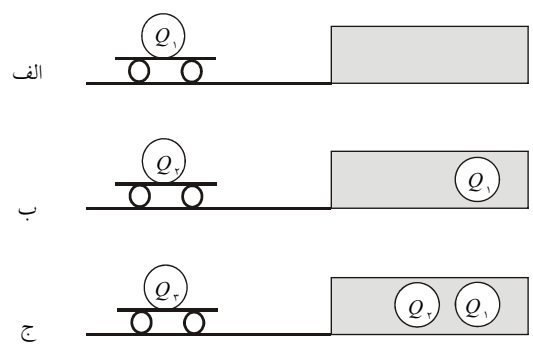
$$\boxed{W_۲ = \frac{۱}{۲}(Q_۱ V_۱ + Q_۲ V_۲)} \qquad (۱۰۴-۲)$$

حال بیایید اثر انتقال بار Q_3 را بررسی کنیم. طبیعی است که در این حالت باید بر نیروهای ناشی از بارهای موجود Q_1 و Q_2 غلبه کنیم:

$$W_3 = -\int_{-\infty}^{x_c} \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\varepsilon_0 (x - x_a)^2} dx - \int_{-\infty}^{x_c} \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\varepsilon_0 (x - x_b)^2} dx$$
$$= \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\varepsilon_0 |x_c - x_a|} + \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\varepsilon_0 |x_c - x_b|} = Q_3 V_1 + Q_3 V_2$$

در اینصورت کار کل انجام شده عبارت خواهد بود:

$$W_{total} = W_1 + W_2 + W_3 = 0 + Q_2 V_{12} + Q_2 (V_{12} + V_{23})$$



شکل ۲-۷٤: انرژی بارهای گسسته

تذکر: حرکت انجام شده توسط بار بایستی به آرامی انجام گیرد، زیرا در غیر این صورت انرژی جنبشی سیستم تغییر می‌کند. می‌توان نشان داد انرژی پتانسیل گروه N بار نقطه‌ای گسسته ساکن از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N} Q_k V_k} \qquad (۱۰۵-۲)$$

در رابطهٔ فوق V_k پتانسیل الکتریکی در نقطهٔ Q_k ناشی از بارهای دیگر است.

سوالات مبحث انرژی، معمولاً با تغییرات انرژی در طی انجام عملی خاص، محاسبه می‌شوند. این یعنی باید انرژی را در لحظهٔ اولیه بدست آورده و با انرژی سیستم پس از اعمال تغییرات مساوی قرار دهیم.

مثال ۲-۹۴ سه بار نقطه‌ای q روی رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $a = ۲^m$ قرار دارند. کار لازم جهت انتقال این سه بار به رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $b = ۱.۵^m$ را بدست آورید. (کارشناسی ارشد برق ۷۷)

حل: انرژی سیستم را برای حالت اولیه طبق رابطهٔ (۲-۱۰۵) محاسبه می‌کنیم:

$$W = \frac{۱}{۲} q \left(\frac{۲q}{۴\pi\varepsilon_\circ a} + \frac{۲q}{۴\pi\varepsilon_\circ a} + \frac{۲q}{۴\pi\varepsilon_\circ a}\right) = \frac{۳q^۲}{۴\pi\varepsilon_\circ a}$$

پس از انتقال به فاصلهٔ b انرژی به صورت زیر خواهد بود:

$$W' = \frac{۱}{۲} q \left(\frac{۲q}{۴\pi\varepsilon_\circ b} + \frac{۲q}{۴\pi\varepsilon_\circ b} + \frac{۲q}{۴\pi\varepsilon_\circ b}\right) = \frac{۳q^۲}{۴\pi\varepsilon_\circ b}$$

کار لازم برابر است با اختلاف این دو انرژی:

$$\text{کار لازم} = W' - W = \frac{۳q^۲}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{۱}{b} - \frac{۱}{a}\right) = \frac{۳q^۲}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{۱}{۱.۵} - \frac{۱}{۲}\right) = \frac{q^۲}{۸\pi\varepsilon_\circ}$$

مثال کلیدی

مثال ۲-۹۵ سه بار الکتریکی q به جرم m در رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a قرار گرفته‌اند. اگر یکی از بارها مجاز به حرکت باشد، سرعت آن در بی‌نهایت چقدر خواهد بود؟ (فرض کنید اصطکاک صفر است و تنها نیروهای کولنی وجود دارند) (کارشناسی ارشد برق ۷۷)

حل: در حالتی که سه بار روی رئوس مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a هستند، انرژی ذخیره شدهٔ الکتریکی عبارت است از:

$$W = ۳ \times \frac{۱}{۲} q \times \frac{۲q}{۴\pi\varepsilon_\circ a} = \frac{۳q^۲}{۴\pi\varepsilon_\circ a}$$

وقتی یکی از بارها به سمت بی‌نهایت می‌رود، انرژی ذخیره شده عبارت است از:

$$W' = ۲ \times \frac{۱}{۲} q \times \frac{۲q}{۴\pi\varepsilon_\circ a} = \frac{q^۲}{۴\pi\varepsilon_\circ a}$$

$$W' + \frac{۱}{۲} m v^۲ = W \quad \rightarrow \quad -\frac{q^۲}{۴\pi\varepsilon_\circ a} + \frac{۳q^۲}{۴\pi\varepsilon_\circ a} = \frac{۱}{۲} m v^۲$$

پس:

$$V = \frac{q}{\sqrt{\pi \varepsilon_{\circ} a m}}$$

مثال ۲-۹۶ بار کوچک q به جرم m را از ارتفاع h نسبت به یک صفحهٔ رسانای بی‌نهایت حداقل با چه سرعتی رو به بالا پرتاب کنیم تا هیچگاه به سمت صفحه برنگردد؟ (از نیروی گرانشی وارد بر بار صرفنظر کنید) [۴]

حل: برای آنکه بار به سمت صفحه برنگردد باید تا بی‌نهایت برود.

انرژی جنبشی در لحظهٔ پرتاب:

$$K_{\circ} = \frac{۱}{۲} m v_{\circ}^{۲}$$

انرژی پتانسیل الکتریکی در لحظهٔ پرتاب نصف انرژی پتانسیل الکتریکی ذخیره شده بین بار q و تصویرش $-q$ است (در فصل بعد با آن آشنا می‌شویم) زیرا توزیع میدان الکتریکی در نیمهٔ بالایی صفحهٔ رسانا، یعنی در نصف فضا وجود دارد و میدان در نیمهٔ پایینی صفحهٔ رسانا صفر است:

$$U_{\circ} = \frac{۱}{۲} \left[\frac{q(-q)}{۴ \pi \varepsilon_{\circ} (۲h)} \right]$$

با فرض آنکه حداقل سرعت لازم را می‌خواهیم، انرژی جنبشی را در بی‌نهایت صفر فرض می‌کنیم. انرژی پتانسیل الکتریکی نیز وقتی بار در بی‌نهایت باشد صفر فرض می‌شود:

$$U_{\infty} = K_{\infty} = \circ$$

طبق قانون بقای انرژی:

$$K_{۱} + U_{۱} = K_{\infty} + U_{\infty} = \circ + \circ = \circ$$

در نتیجه:

$$\frac{۱}{۲} m v_{\circ}^{۲} - \frac{q^{۲}}{۱۶ \pi \varepsilon_{\circ} h} = \circ \rightarrow V_{\circ} = \frac{q}{\sqrt{۸ \pi \varepsilon_{\circ} m h}}$$

POWEREN.IR

۲-۱۰-۲- انرژی بارهای پیوسته

برای بارهای پیوسته روابط مختلفی داریم، این رابطه‌ها می‌توانند وابسته به پتانسیل یا میدان باشند. انرژی مجموعه‌ای از بارهای پیوسته را در **کل فضا** می‌توان از روابط زیر(وابسته به نوع توزیع بار) بدست آورد:

$$W = \frac{1}{2} \int_c \rho_l \; V \; dl \qquad (۱۰۶-۲)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_s \rho_s \; V \; ds \qquad (۱۰۷-۲)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_v \rho_l \; V \; dv \qquad (۱۰۸-۲)$$

دوباره تاکید می‌کنیم که **این انتگرال‌ها باید روی کل فضا گرفته شوند** و نمی‌توان با محاسبهٔ آنها روی بخشی از فضا انرژی ذخیره شده در آن بخش را بدست آورد. (حذف بخشی از فضا معادل این است که بار از بی‌نهایت به نقطهٔ مورد نظر نیاید (از فاصلهٔ نزدیکتری آمده باشد)) پس در این حالت انتگرال فوق هیچ معنای فیزیکی ندارد. راهکار دیگر محاسبهٔ انرژی استفاده از میدان است، اگر در ناحیه‌ای از فضا میدان الکتریکی وجود داشته باشد چگالی انرژی ذخیره شده در آن از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \qquad (۱۰۹-۲)$$

برای یافتن کل انرژی ذخیره شده در یک ناحیه باید از چگالی انرژی در آن ناحیه انتگرال گرفت. اگر عایق‌های موجود در فضا خطی باشند، می‌توان گفت:

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2} \varepsilon |\mathbf{E}|^2 = \frac{1}{2\varepsilon} |\mathbf{D}|^2} \qquad (۱۱۰-۲)$$

بر خلاف روابط قبلی این رابطه را می‌توان روی هر بخشی از فضا به کار برد و انرژی ذخیره شده در آن بخش را بدست آورد. برای محاسبه انرژی یک سیستم کافیست میدان را محاسبه کنیم، آن را در رابطهٔ (۲-۱۱۰) قرار دهیم و از آن روی فضای مورد نظر **انتگرال حجم** بگیریم.

مثال ۲-۹۷ یک قطعه عایق به درون خازنی کشیده می‌شود. خازن به یک باتری با ولتاژ ثابت V متصل شده است. رابطهٔ $Q - V$ عبارت است از:

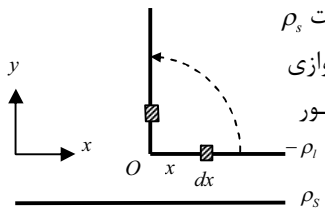
$$Q = \frac{V^3}{(k_1 + k_2 x)}$$

که در آن x فاصلهٔ نقطه‌ای از عایق تا نقطه‌ای از خازن است. نیروی وارد بر عایق را بیابید. [۸]

حل: رابطهٔ $V-Q$ داده شده، پس برای انرژی خواهیم داشت:

$$W=\int V\,dq=\int_{0}^{V}V\times\frac{3V^{2}dV}{(k_1+k_2x)}=\frac{3}{4}\frac{V^{4}}{(k_1+k_2x)}$$

مثال ۲-۹۸ روی یک صفحهٔ بزرگ بار سطحی با چگالی ثابت ρ_s موجود است. میله‌ای به طول L با چگالی $-\rho_l$ به فاصلهٔ h موازی با این صفحه وجود دارد. کار لازم جهت چرخاندن میله به طور عمودی بر صفحه چقدر است؟ [۳]



شکل ۲-۷۵: شکل مثال ۲-۹۸

حل: می‌دانیم میدان ناشی از یک صفحهٔ بی‌نهایت طبق رابطهٔ (۲-۲۸) عبارت است از:

$$\mathbf{E}=\frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\mathbf{a}_y$$

کار لازم جهت چرخاندن بار dq به طول dx در فاصلهٔ x از نقطهٔ O از حالت افقی به عمودی عبارت است از:

$$dW=-dq\int_{x}^{0}\frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{d}l=-\rho_l\,dq\int_{x}^{0}\frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\mathbf{a}_y\cdot(\mathbf{a}_x\,dx+\mathbf{a}_y\,dy)=\frac{\rho_S\,\rho_l}{2\varepsilon_0}x\,dx$$

و در نهایت:

$$W=\int_{0}^{L}\frac{\rho_S\,\rho_l}{2\varepsilon_0}x\,dx=\frac{\rho_S\,\rho_l}{4\varepsilon_0}L^{2}$$

مثال ۲-۹۹ انرژی لازم برای تشکیل یک کرهٔ باردار یکنواخت به شعاع a و چگالی ρ را بیابید. (کارشناسی ارشد آزاد برق ۸۷)

حل: میدان این توزیع بار را در مثال (۲-۱۱) بررسی کرده‌ایم. پاسخ را دوباره می‌نویسیم:

$$\mathbf{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}R\;\mathbf{a}_R & R<a\\[2ex] \dfrac{\rho a^{3}}{3\varepsilon_0 R^{2}}\;\mathbf{a}_R & R>a\end{cases}$$

حال از رابطهٔ (۲-۱۱۰) استفاده می‌کنیم:

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_0^a \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}R\right)^2 \left(4\pi R^2\, dR\right) + \int_a^\infty \left(\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 R^2}\right)^2 \left(4\pi R^2\, dR\right)$$

$$\boxed{W = \frac{4\pi\rho^2 a^5}{15\varepsilon_0} = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 a}} \qquad (۲\text{-}۱۱۱)$$

نکتهٔ طلایی

۱- با توجه به اینکه میدان فقط تابعی از R بود برای حل انتگرال از $dv = 4\pi R^2 dR$ استفاده کردیم.

۲- با توجه به رابطهٔ (۲-۱۱۱) انرژی ایجاد بار نقطه‌ای بی‌نهایت است (یعنی نمی‌توانیم بار تولید کنیم (اصل بقای بار))

تمرین ۲-۵۱: روی یک پوسته کروی به شعاع داخلی a و خارجی $2a$ بارهای الکتریکی به چگالی‌های سطحی ρ_s (روی کرهٔ داخلی) و $2\rho_s$ (روی کرهٔ خارجی) توزیع شده‌اند. انرژی ذخیره شده در فضا را بدست آورید

مثال ۲-۱۰۰ بار q روی یک کره هادی به شعاع a قرار دارد. مطلوب است انرژی ذخیره شده در خارج کره.

حل: روش اول: استفاده از میدان:

برای میدان داریم:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0 & R < a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,\mathbf{a}_R & R > a \end{cases}$$

با استفاده از رابطهٔ (۲-۱۱۰) خواهیم داشت:

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int E^2 dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 R^4} dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{\infty} \frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 R^4} R^2 \sin\theta\, dR\, d\theta\, d\varphi$$

$$\boxed{W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}} \qquad (۲\text{-}۱۱۲)$$

روش دوم: استفاده از پتانسیل:

پتانسیل در سطح کره عبارت است از:

$$V = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_{\circ} a}$$

پس:

$$W = \int V\, dq = \int \frac{Q\, dQ}{۴\pi\varepsilon_{\circ} a} = \frac{Q^{۲}}{۸\pi\varepsilon_{\circ} a}$$

مثال کلیدی

مثال ۲-۱۰۱ دو کره به شعاع a و چگالی ρ داریم. کار لازم را در موارد زیر حساب کنید:

الف) دو کره با هم ادغام شوند و کره‌ای به شعاع a و چگالی یکنواخت حاصل شود.

ب) دو کره با هم ادغام شوند و کره‌ای با چگالی یکنواخت ρ حاصل شود

حل: طبق حل مثال (۲-۹۹) انرژی لازم برای ساختن کره‌ای به شعاع a و چگالی ρ برابر $\frac{۴\pi\rho^{۲}a^{۵}}{۱۵\varepsilon_{\circ}}$ است. پس انرژی اولیهٔ کره‌ها دو برابر این مقدار است:

$$W_{۱} = \frac{۸\pi\rho^{۲}a^{۵}}{۱۵\varepsilon_{\circ}}$$

الف) در این حالت چگالی جدید بارها عبارت است از:

$$\rho' = \frac{Q'}{\frac{۴}{۳}\pi a^{۳}} = \frac{۲\times\frac{۴}{۳}\pi a^{۳}\times\rho}{\frac{۴}{۳}\pi a^{۳}} = ۲\rho$$

پس انرژی کرهٔ جدید:

$$W_{۲} = \frac{۸\pi\rho'^{۲}a^{۵}}{۱۵\varepsilon_{\circ}} = \frac{۱۶\pi\rho^{۲}a^{۵}}{۱۵\varepsilon_{\circ}}$$

و کار لازم برابرست با:

$$\Delta W = W_{۲} - W_{۱} = \frac{۱۶\pi\rho^{۲}a^{۵}}{۱۵\varepsilon_{\circ}} - \frac{۸\pi\rho^{۲}a^{۵}}{۱۵\varepsilon_{\circ}} = \frac{۸\pi\rho^{۲}a^{۵}}{۱۵\varepsilon_{\circ}}$$

ب) در این حالت شعاع جدید عبارت است از:

$$۲\times\frac{۴}{۳}\pi a^{۳}\times\rho = \frac{۴}{۳}\pi a'^{۳}\times\rho \quad\Rightarrow\quad a' = \sqrt[۳]{۲}\, a$$

پس انرژی کرهٔ جدید:

$$W_{۲}=\frac{۸\,\pi\,\rho^{۲}\,a'^{۵}}{۱۵\,\varepsilon_{\circ}}=\frac{۱۶\,\pi\,\rho^{۲}\left(۲\sqrt[۳]{۴}\,a^{۵}\right)}{۱۵\,\varepsilon_{\circ}}$$

و کار لازم برابرست با:

$$\Delta W=W_{۲}-W_{۱}=\frac{۱۶\,\pi\,\rho^{۲}\left(۲\sqrt[۳]{۴}\,a^{۵}\right)}{۱۵\,\varepsilon_{\circ}}-\frac{۸\,\pi\,\rho^{۲}a^{۵}}{۱۵\,\varepsilon_{\circ}}=\frac{۸\,\pi\,\rho^{۲}a^{۵}}{۱۵\,\varepsilon_{\circ}}\left(۴\sqrt[۳]{۴}-۱\right)$$

تمرین ۲-۵۲: بار Q بر روی یک کره هادی کروی به شعاع $R_{۱}$ قرار دارد. اطراف این هادی را تا شعاع $R_{۲}$ با عایقی می‌پوشانیم. اگر گذردهی عایقی ε باشد ، چقدر انرژی صرف پوشاندن کره هادی شده است؟

۲-۱۰-۳- بررسی فیزیکی تغییر انرژی سیستم‌های خازنی

پیش از این و در مبحث خازن گفتیم که، یکی از راه‌های محاسبهٔ ظرفیت استفاده از انرژی است (و بر عکس)، برای این منظور باید بدانیم که:

$$W=\frac{۱}{۲}\,CV^{۲} \qquad (۱۱۳\text{-}۲)$$

$$W=\frac{۱}{۲}\,\frac{Q^{۲}}{C} \qquad (۱۱۴\text{-}۲)$$

دو جسم هادی با بار اولیهٔ Q، اختلاف پتانسیل V و ظرفیت خازنی C را در نظر بگیرید. در اثر جابجایی دو جسم، ظرفیت خازنی جدید C' می‌شود. می‌خواهیم کار انجام شده در این سیستم را بررسی کنیم. دو حالتِ ممکن را در نظر می‌گیریم:

الف) پتانسیل V ثابت باشد (یعنی یک باتری بین دو جسم وصل شده است):

در این حالت در صورت آزاد شدن ورق‌های خازن و نزدیک شدن آنها به یکدیگر و افزایش ظرفیت خازن، انرژی الکتریکی سیستم $W=\frac{۱}{۲}\,CV^{۲}$ افزایش می‌یابد. افزایش انرژی سیستم و کار انجام شده توسط خازن، بوسیلهٔ منبع خارجی یعنی باتری تامین می‌شود.

ب) بار Q ثابت نگه داشته شود (یعنی دو جسم مجزا بوده و باتری به آنها وصل نیست):

در این صورت با رها شدن خازن، به علت نیروی جاذبهٔ بارها، هادی‌ها به یکدیگر نزدیک می‌شوند و فاصلهٔ بین هادی‌های خازن کاهش می‌یابد. در نتیجه ظرفیت خازنی C افزایش می‌یابد و

انرژی الکتریکی سیستم $W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ کاهش می‌یابد، پس کار انجام شده توسط میدان از انرژی الکتریکی سیستم تامین می‌شود.

مثال ۲-۱۰۲ پتانسیل نقاط روی سطح بستهٔ S به مساحت A و حجم v برابر φ_0 است. می‌دانیم حاصلضرب داخلی بردار میدان الکتریکی و بردار یکهٔ عمود بر سطح، در تمام نقاط روی سطح S برابر E_0 است و هیچ منبع الکترومغناطیسی در خارج سطح مفروض وجود ندارد. انرژی پتانسیل ذخیره شده در خارج این سطح را بیابید و در مورد انرژی داخل سطح بحث کنید. [۴]

حل: انرژی پتانسیل الکتریکی ذخیره شده در خارج سطح چنین است:

$$U_{out} = \frac{\varepsilon_0}{2}\oint_S V\ \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} = \frac{\varepsilon_0}{2}\oint_S \varphi_0\ \mathbf{E}\cdot\mathbf{a}_n\, ds = \frac{\varepsilon_0}{2}\oint_S \varphi_0\ \mathbf{E}_0\, ds = \frac{\varepsilon_0}{2}\varphi_0\ \mathbf{E}_0\oint_S ds = \frac{1}{2}\varepsilon_0\ \varphi_0\ \mathbf{E}_0 A$$

اما انرژی پتانسیل الکتریکی ذخیره شده درون سطح بسته را با اطلاعات داده شده نمی‌توان محاسبه کرد؛ زیرا توزیع میدان و یا پتانسیل الکتریکی درون سطح بسته مشخص نیست.

مثال ۲-۱۰۳ مثال (۲-۹۸) را با استفاده از ظرفیت و رابطهٔ (۲-۱۱۳) دوباره حل کنید.

حل: ظرفیت خازن کروی مطابق رابطهٔ (۲-۹۶) به صورت $C = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$ است. با فرض $b=\infty$، ظرفیت یک کره برابر خواهد بود با:

$$C = 4\pi\varepsilon a$$

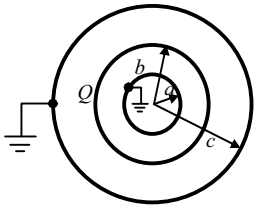
از طرفی پتانسیل کره نیز برابر $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon a}$ پس با استفاده از رابطهٔ (۲-۹۷) داریم:

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(4\pi\varepsilon a)\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon a}\right)^2 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon a}$$

مثال ۲-۱۰۴ سه پوستهٔ کروی هادی هم‌مرکز به شعاع‌های a، b و c در اختیار داریم. پوستهٔ داخلی و خارجی را به زمین وصل می‌کنیم و روی پوستهٔ میانی بار Q را قرار می‌دهیم. انرژی ذخیره شده در این سیستم را بدست آورید.

حل: مشابه مثال (۲-۱۰۱) عمل می‌کنیم. مطابق شکل دو خازن کروی داریم که با هم سری شده‌اند. پس:

$$C_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} \quad , \quad C_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}$$



شکل ۲-۷۶: شکل مثال ۲-۱۰۴

و معادل ترکیب سری آنها:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{c(b-a)+a(c-b)}{abc}$$

از طرفی $W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$، پس:

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{c(b-a)+a(c-b)}{abc}$$

۲-۱۰-۴- چگالی انرژی قطبش

همانطور که پیش از این ذکر شد، مشخصهٔ همهٔ دی‌الکتریک‌ها ذخیره کردن انرژی است. چگالی انرژی ذخیره شده در عایق عبارت است از:

$$\boxed{w_e = \frac{1}{2}\mathbf{P}\,.\,\mathbf{E}} \qquad (۲-۱۱۵)$$

مثال ۲-۱۰۵ انرژی قطبش را برای خازن مسطحی با دی‌الکتریک $\varepsilon_r = 6$ محاسبه کنید. (المپیاد غیرمتمرکز برق ۸۷)

حل: طبق رابطهٔ (۲-۱۱۵) چگالی انرژی قطبش $\frac{1}{2}\mathbf{P}\,.\,\mathbf{E}$ است. با توجه به یکنواخت بودن میدان در میان صفحات هادی خواهیم داشت:

$$Q = \int \mathbf{E}.ds \rightarrow \varepsilon E A = Q \rightarrow E = \frac{Q}{6\varepsilon_0 A}$$

برای بردار پلاریزاسیون داریم:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\mathbf{E}\Big|_{\varepsilon_r = 6} = 5\,\varepsilon_0\,\mathbf{E}$$

پس:

$$w_e = \frac{۱}{۲}\,\mathbf{P}\,.\,\mathbf{E} = \frac{۵Q^۲}{۳۶\varepsilon_\circ A^۲}$$

و کل انرژی قطبش:

$$W_p = \frac{۱}{۲}A\,d\,\frac{۵\,Q^۲}{۳۶\,\varepsilon_\circ A^۲} = \frac{۵\,Q^۲ d}{۷۲\varepsilon_\circ A}\Bigg|_{C=\frac{۶\varepsilon_\circ A}{d}} = \frac{۵\,Q^۲}{۱۲C}$$

۲-۱۱- نیرو و گشتاور

طبق تعریف نیروی وارد بر یک جزء باردار واقع در میدان الکتریکی از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{E}\;dq \qquad (۱۱۶\text{-}۲)$$

با توجه به پیچیدگی توزیع بار، معمولاً محاسبهٔ نیرو از این طریق بسیار مشکل است ولی در پاره‌ای از موارد می‌توان با استفاده از قانون سوم نیوتون به پاسخ مناسب دست یافت. روش رایج محاسبهٔ نیرو استفاده از روش کار مجازی است که در پیوست فصل با آن آشنا خواهیم شد.

مثال ۲-۱۰۶ یک بار خطی به طول L و چگالی یکنواخت λ در امتداد محور z از $z_\circ$ تا $z_\circ+L$ قرار دارد. یک بار حجمی کروی یکنواخت با چگالی ρ و شعاع a ($z_\circ > a$) و مرکزش در مبداء مختصات قرار دارد. نیروی کل وارد بر بار حجمی را بدست آورید. (کارشناسی ارشد برق ۷۶)

حل: از قانون سوم نیوتون بهره می‌گیریم. عمل و عکس‌العمل نیروی وارد بر بار خطی را محاسبه می‌کنیم:

میدان الکتریکی ناشی از بار حجمی کروی در فاصلهٔ z از مرکز کره برابر است با:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{۴\,\pi\,\varepsilon_\circ z^۲}\,\mathbf{a}_z \quad ، \quad Q = \frac{۴}{۳}\,\rho\,\pi\,a^۳$$

پس:

$$F_z = \int E_z\,dq = \int_{z=z_\circ}^{z_\circ+L} \frac{Q}{۴\,\pi\,\varepsilon_\circ z^۲}\,\lambda\,dz = \frac{Q\,\lambda}{۴\,\pi\,\varepsilon_\circ}\left[-\frac{۱}{z}\right]\Bigg|_{z_\circ}^{z_\circ+L} = \frac{Q\,\lambda}{۴\,\pi\,\varepsilon_\circ}\left(\frac{۱}{z_\circ}-\frac{۱}{z_\circ+L}\right)$$

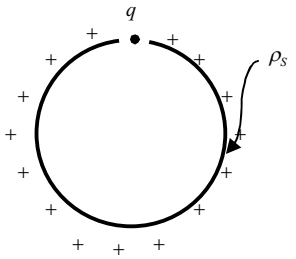
در نتیجه:

$$F_z = \frac{\lambda \rho a^3 L}{3\varepsilon_0 z_0 (z_0 + L)}$$

مثال ۲-۱۰۷ یک پوستهٔ کروی از جنس عایق به شعاع $R = 10^{cm}$ به طور یکنواخت حامل بار سطحی به چگالی $\rho_S = \frac{10^{-3}}{36\pi}$ است. روی این پوسته سوراخ بی‌نهایت کوچکی همانند شکل (۲-۷۷) ایجاد شده و در سوراخ بار نقطه‌ای $q = 1^{\mu c}$ قرار داده می‌شود. با صرفنظر از نیروی وزن، اندازهٔ نیروی وارد بر بار q را بیابید. (کارشناسی ارشد برق ۷۶)

حل: همانطور که می‌دانیم شدت میدان الکتریکی دیگر بارها در نقطه‌ای که بار q قرار دارد برابر $\frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}$ است. پس نیرو برابر است با:

$$F = q\frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\Bigg|_{\rho_S = \frac{10^{-3}}{36\pi},\ q = 1^{\mu c}} = 0.5^{N}$$

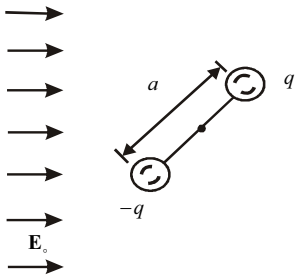


شکل ۲-۷۷: شکل مثال ۲-۱۰۷

تمرین ۲-۵۳: یک دوقطبی الکتریکی که می‌تواند بدون اصطکاک حول محورش دوران کند، همانند شکل (۲-۷۸) در میدان الکتریکی یکنواخت $\mathbf{E}_0$ قرار گرفته است. اگر جرم کل دوقطبی m بوده و زاویهٔ اولیهٔ دوقطبی با خطوط میدان بسیار کوچک باشد. مطلوب است محاسبهٔ: (کارشناسی ارشد برق ۸۷)

الف) نیروی وارد بر دوقطبی.

ب) فرکانس نوسان دوقطبی.



شکل ۲-۷۸: شکل تمرین ۲-۵۳

۲-۱۱-۱- نیروی وارد بر واحد سطح هادی

طبق نتیجهٔ مسئلهٔ ۳۴ پایان فصل دوم، براحتی نشان داده می‌شود که نیروی وارد بر سطح یک مرز از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\mathbf{F}}{ds}=\frac{\sigma}{۲}\left(\mathbf{E}_۱+\mathbf{E}_۲\right) \qquad (۱۱۷-۲)$$

که در آن $\mathbf{E}_۱$ و $\mathbf{E}_۲$ میدان در نواحی ۱ و ۲ است. این مقادیر برای مرز هادی و عایق به صورت:

$$\mathbf{E}_۱=۰ \quad , \quad \mathbf{E}_۲=\frac{\sigma}{\varepsilon}\mathbf{a}_n$$

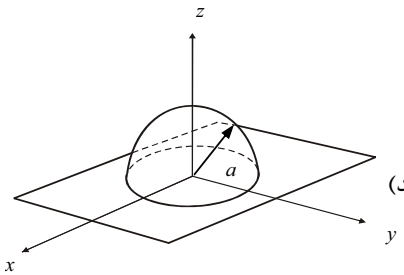
در نتیجه نیروی وارد بر واحد سطح هادی برابر است با:

$$\frac{\mathbf{F}}{ds}=\frac{\sigma^۲}{۲\varepsilon}\mathbf{a}_n \qquad (۱۱۸-۲)$$

مثال کلیدی

مثال ۲-۱۰۸ سطح نشان داده شده در شکل (۲-۱۰۸) هادی کامل است. تابع پتانسیل بالای آن عبارت است از:

$$V=-R\cos\theta+a^۳\frac{\cos\theta}{R^۲}$$



شکل ۲-۷۹: شکل مثال ۲-۱۰۸

نیروی وارد بر بخش کروی را بیابید. (مثال ۲-۴۲ را ببینید) (کارشناسی ارشد هسته‌ای ۷۹)

حل: مطابق حل مثال (۲-۴۲) میدان و چگالی بار سطحی عبارتند از:

$$\mathbf{E}=-\nabla V=\cos\theta\left(۱+\frac{۲a^۳}{R^۳}\right)\mathbf{a}_R-\sin\theta\left(۱-\frac{a^۳}{R^۳}\right)\mathbf{a}_\theta$$

$$\rho_s=۳\varepsilon_۰\cos\theta$$

نیروی وارد بر بخش کروی را با رابطهٔ (۲-۱۱۸) پیدا می‌کنیم:

$$\mathbf{F}=\frac{۱}{۲\varepsilon_۰}\int ۹\varepsilon_۰^۲\cos^۲\theta\, a^۲\sin\theta\, d\theta d\varphi\ \mathbf{a}_R$$

با بسط $\mathbf{a}_R$ در دستگاه کارتزین:

$$\mathbf{F}=۴.۵\ \varepsilon_۰ a^۲\times ۲\pi\ \mathbf{a}_z\int\cos^۳\theta\ \sin\theta\, d\theta=\frac{۹\pi a^۲\varepsilon_۰}{۴}\ \mathbf{a}_z$$

۲-۱۱-۲- نیرو و گشتاور وارد بر دوقطبی

نیروی وارد بر دوقطبی P واقع در میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ به صورت زیر است:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{P} \cdot \nabla)\mathbf{E} \qquad (۱۱۹-۲)$$

طبق مسئلهٔ ۲۱ فصل اول، اثبات می‌شود که عبارت فوق با رابطهٔ زیر برابر است:

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}) \qquad (۱۲۰-۲)$$

طبق تعریف گشتاور وارد بر دوقطبی الکتریکی از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} \times \mathbf{E} \qquad (۱۲۱-۲)$$

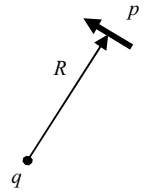
تذکر: در محاسبهٔ نیروی وارد بر دوقطبی به موارد زیر توجه می‌کنیم:

۱- دستگاه مناسبی را انتخاب می‌کنیم، به گونه‌ای که میدان یکی از توزیع‌ها براحتی تعیین گردد.

۲- برای محاسبهٔ نیروی بین یک توزیع بار و یک دوقطبی، بهتر است از رابطهٔ (۲-۱۱۹) استفاده کنیم.

۳- برای محاسبهٔ نیروی بین دو دوقطبی از رابطهٔ (۲-۱۲۰) استفاده کنید.

مثال ۲-۱۰۹ دوقطبی $\mathbf{P}$ به فاصلهٔ R از بار نقطه‌ای q قرار دارد. نیرو و گشتاور وارد بر دوقطبی را بیابید. (کارشناسی ارشد فیزیک ۸۸)



شکل ۲-۸۰: شکل مثال ۲-۱۰۹

حل: برای یافتن نیروی وارد بر دوقطبی از قانون سوم نیوتون استفاده، می‌کنیم پس نیروی وارد بر دوقطبی منفی نیرویی است که بر بار q وارد می‌شود. میدانی که دوقطبی در محل بار ایجاد می‌کند به صورت زیر است:

$$\mathbf{E} = \frac{P}{۴\pi\varepsilon_{\circ} R^{۳}}(۲\cos\theta\ \mathbf{a}_R + \sin\theta\ \mathbf{a}_\theta)$$

نیروی وارد بر بار نقطه‌ای به صورت $q\,\mathbf{E}$ و نیروی وارد بر دوقطبی $-q\,\mathbf{E}$ است. پس:

$$\mathbf{F} = \frac{-P\,q}{۴\pi\varepsilon_{\circ} R^{۳}}(۲\cos\theta\ \mathbf{a}_R + \sin\theta\ \mathbf{a}_\theta)$$

برای محاسبهٔ گشتاور دوقطبی به میدان بار نقطه‌ای نیاز داریم. میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای q در محل دوقطبی به فرم $\mathbf{E} = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ} R^{۲}}\mathbf{a}_R$ است در این صورت طبق رابطهٔ (۲-۱۲۱) خواهیم داشت:

$$\mathbf{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\mathbf{P}\times\mathbf{a}_R\right)\Bigg|_{P=P\,\mathbf{a}_z}=\frac{pq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\sin\theta\,\mathbf{a}_\varphi$$

مثال کلیدی

مثال ۲-۱۱۰ نیرویی را که دوقطبی‌های شکل (۲-۸۱) بر هم وارد می‌کنند، محاسبه کنید.

حل: میدان دوقطبی پایینی در محل بالایی:

$$\mathbf{E}=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(2\cos\theta\,\mathbf{a}_R+\sin\theta\,\mathbf{a}_\theta\right)$$

الف و ب) برای محاسبهٔ نیروی بین دو دوقطبی بهتر است از رابطهٔ (۲-۱۲۰) استفاده کنیم پس ابتدا $\mathbf{P}\,.\,\mathbf{E}$ را پیدا می‌کنیم ($\mathbf{P}=P_0\,\mathbf{a}_z$)

$$\mathbf{P}\,.\,\mathbf{E}=\frac{P^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(2\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)$$

پس:

$$\mathbf{F}=\nabla\left(\mathbf{P}\,.\,\mathbf{E}\right)=\frac{P^2}{4\pi\varepsilon_0 R^4}\left[\left(\sin^2\theta-6\cos^2\theta\right)\mathbf{a}_R-\left(6\sin\theta\cos\theta\right)\mathbf{a}_\theta\right]$$

برای شکل (۲-۸۱- الف):

$$\boxed{\mathbf{F}\Big|_{\theta=0}=\frac{6P^2}{4\pi\varepsilon_0 R^4}\,\mathbf{a}_z} \qquad (۲-۱۲۲)$$

و برای شکل (۲-۸۱- ب):

$$\boxed{\mathbf{F}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{3P^2}{4\pi\varepsilon_0 R^4}\,\mathbf{a}_R} \qquad (۲-۱۲۳)$$

ج) در این حالت برای $\mathbf{P}\,.\,\mathbf{E}$ (که $\mathbf{P}=-P\,\mathbf{a}_R$) داریم:

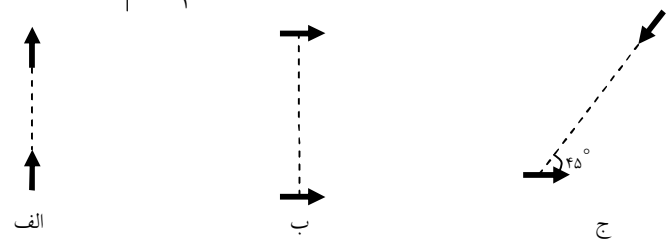
$$\mathbf{P}\,.\,\mathbf{E}=-\frac{P^2\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 R^3}$$

پس:

$$\mathbf{F}=\nabla\left(\mathbf{P}\,.\,\mathbf{E}\right)=\frac{P^2}{2\pi\varepsilon_0 R^4}\left[3\cos\theta\,\mathbf{a}_R+\sin\theta\,\mathbf{a}_\theta\right]$$

در نتیجه:

$$\mathbf{F}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{۴}} = \frac{P^{۲}}{۲\,\pi\,\varepsilon_{\circ}\,R^{۴}}\left[\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\,\mathbf{a}_R + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\,\mathbf{a}_\theta\right]$$



شکل ۲-۸۱: شکل مثال ۲-۱۱۰

تمرین ۲-۵۴: دو عدد بار نقطه‌ای q و $-q$ روی محور x به ترتیب در نقاط d و $-d$ قرار داشته و یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور الکتریکی $\mathbf{P} = P_x\,\mathbf{a}_x + P_z\,\mathbf{a}_z$ روی محور z قرار دارد. نیروی وارد بر دوقطبی را محاسبه کنید.

حرف آخر:

در این فصل میدانهای الکتریکی ساکن را بررسی کردیم. در ابتدای فصل با قانون کولن شروع کردیم و ادعا نمودیم که این رابطه تمام مسائل الکترواستاتیک را حل می‌کند. در اینجا عنوان می‌شود که:

همانطور که دیدید، بخش‌های دیگر فصل (از پتانسیل گرفته تا انرژی) همگی با یک رابطهٔ ساده به میدان مرتبط می‌شدند. این موضوع اهمیت میدان و دلیلی برای تمرین و تکرار بیشتر آن است. اگر در طول فصل راه‌حل میانبری را بیان کردیم، فقط به این دلیل بود که خلاقیت شما را در حل مسائل افزایش دهیم. درس الکترومغناطیس به بیانی محاسبهٔ میدان است، بقیهٔ موارد فرمولی هستند که آنها را وابسته به میدان کرده است. اگر چه تعداد صفحات این فصل (با توجه به اهمیت ویژهٔ آن) زیاد است ولی اگر می‌خواستیم اساس بحث را طرح کنیم چند برگ کافی بود ... .

و اما در ادامهٔ فصل:

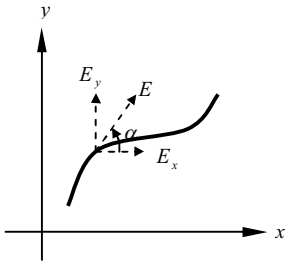
در قسمت بعد مطالبی را در قالب یک پیوست ارائه داده‌ایم. اینها مطالبی بودند که به دلیل جلوگیری از گسستگی مطالب از ذکر آنها در ضمنِ فصل خودداری کردیم. یادگیری این مطالب الزامی بوده و از اینرو شمارهٔ بخش‌های آن در ادامهٔ موارد مطرح شده خواهد بود. مشابه قبل با ارائهٔ توضیحات ضروری (با زبانی نزدیک به محاوره!) به حل مثال‌های کلیدی و نکته‌دار خواهیم پرداخت.

تمرین‌های ذکر شده در پایان هر مثال، تکمیل کنندهٔ موضوع خواهند بود. با این همه در مسائل پایان فصل نیز از آنها غافل نشده‌ایم و به تعداد کافی مسئله برای مرور قرار داده‌ایم.

پیوست‌ها

۲-۱۲- خطوط میدان الکتریکی

خطوط میدان الکتریکی جهت حرکت ذرهٔ باردار را که در آن میدان قرار می‌گیرد، مشخص می‌کند. به عبارت دیگر اگر یک ذره باردار در یک میدان الکتریکی قرار گیرد روی یک مسیر حرکت می‌کند که معادلهٔ این مسیر همان معادلهٔ خطوط میدان الکتریکی است. با توجه به اینکه بردار میدان در هر لحظه بر این مسیر مماس است، با توجه به شکل براحتی می‌توان به تساوی زیر دست یافت:



شکل ۲-۸۲: خطوط میدان

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} \qquad (۱۲۴-۲)$$

که در حالت کلی می‌توان گفت:

$$\boxed{\mathbf{d}l = k\,\mathbf{E}} \qquad (۱۲۵-۲)$$

مثال ۲-۱۱۱ معادله خطوط میدان را برای یک میلهٔ طویل بی‌نهایت با چگالی ρ_l بدست آورید.

حل: طبق رابطهٔ (۲-۱۳) میدان برای این توزیع به صورت $\mathbf{E} = \frac{\rho_l}{۲\,\pi\,\varepsilon_\circ\,r}\,\mathbf{a}_r$ است. پس طبق رابطهٔ (۲-۱۲۵) خواهیم داشت:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_l}{۲\,\pi\,\varepsilon_\circ r}\,\mathbf{a}_r = \frac{k}{r}\,\mathbf{a}_r = \frac{k}{r}\,(\mathbf{a}_x\,\cos\varphi + \mathbf{a}_y\,\sin\varphi) = \mathbf{a}_x\,\frac{x}{x^۲+y^۲} + \mathbf{a}_y\,\frac{y}{x^۲+y^۲}$$

$$\frac{dy}{E_y} = \frac{dx}{E_x} \;\rightarrow\; \frac{dy}{\frac{y}{x^۲+y^۲}} = \frac{dx}{\frac{x}{x^۲+y^۲}} \;\rightarrow\; \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow Ln\,y = Ln\,x + Ln\,c \;\Rightarrow\; y = c\,x$$

همانطور که انتظار داشتیم، خطوط میدان به صورت خط راست در صفحهٔ xy است.

مثال کلیدی

مثال ۲-۱۱۲ مطلوب است محاسبهٔ معادلهٔ خطوط میدان برای دوقطبی الکتریکی.

حل: طبق رابطهٔ (۲-۱۱)، میدان برای این توزیع به صورت $\mathbf{E} = \frac{P}{۴\,\pi\,\varepsilon_\circ\,R^۳}(۲\cos\theta\ \mathbf{a}_R + \sin\theta\ \mathbf{a}_\theta)$ است. داریم:

$$\frac{dR}{E_R} = \frac{R\,d\theta}{E_\theta} \quad \rightarrow \quad \frac{dR}{۲\cos\theta} = \frac{R\,d\theta}{\sin\theta} \quad \rightarrow \quad \frac{dR}{R} = \frac{۲\cos\theta\,d\theta}{\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad Ln\,R = ۲\,Ln\sin\theta + Ln\,c$$

پس:

$$R = c\ \sin^۲\theta$$

مثال ۲-۱۱۳ میدان الکتریکی در مختصات کروی با رابطه $\mathbf{E} = R\ \mathbf{a}_R + \frac{۱+\sin\theta}{\cos\theta}\ \mathbf{a}_\theta$ بیان شده است. اگر بار در نقطه $(۱, \frac{\pi}{۴}, ۰^\circ)$ قرار گیرد، در چه نقطه‌ای به محور r برخورد می‌کند؟

حل: مشابه قبل عمل می‌کنیم:

$$\frac{dR}{E_R} = \frac{R\,d\theta}{E_\theta} \quad \rightarrow \quad \frac{dR}{R^۲} = d\theta\,\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta} \quad \rightarrow \quad \frac{۱}{R} = Ln\ \frac{k}{۱+\sin\theta}$$

با قرار دادن نقطهٔ مورد نظر، مقدار k را پیدا می‌کنیم:

$$R = ۱\,,\ \theta = \frac{\pi}{۴} \ \rightarrow\ k = ۴.۶$$

پس:

$$\frac{۱}{R} = Ln\ \frac{۴.۶}{۱+\sin\theta}$$

در محل برخورد با محور r، $\theta = \frac{\pi}{۲}$:

$$\frac{۱}{R} = Ln\ \frac{۴.۶}{۱+\sin\theta}\ \Bigg|_{\theta = \frac{\pi}{۲}} = Ln\,۲.۳ \ \rightarrow\ R = ۱.۲$$

تمرین۲-۵۵: یک کره به شعاع a دارای بار الکتریکی حجمی به چگالی ثابت $\rho_\circ$ می‌باشد. یک شکاف باریک از مرکز تا محیط کره ایجاد کرده و یک الکترون را در نزدیک مرکز کره قرار می‌دهیم. معادله حرکت الکترون را بدست آورید.

مثال ۲-۱۱۴ دو بار خطی بی‌نهایت به موازات محور zها قرار دارند و از نقاط $x=\pm a$ می‌گذرند. ثابت کنید دو خط نیرو که با زاویه θ از یک بار جدا می‌شوند، در فواصل دور به دو مجانب که با هم زاویه $\frac{\theta}{۲}$ می‌سازند میل می‌کنند.

حل: فرض کنید از هر خط بار، n خط میدان خارج شود، در فواصل نزدیک به خط بارها، اثر همان بار غالب است پس زاویهٔ بین این خطوط $\theta=\frac{۲\pi}{n}$ خواهد بود. در فواصل دور اثر هر دو بار دیده می‌شود پس:

$$\theta_۲=\frac{۲\pi}{۲n}=\frac{\theta}{۲}$$

مثال ۲-۱۱۵ می‌دانیم اگر استوانه‌ای بلند به شعاع a را که محور آن بر محور zها منطبق است، مطابق شکل (۲-۸۳) در میدان الکتریکی یکنواخت $\mathbf{E}=E_\circ\,\mathbf{a}_x$ قرار دهیم، چگالی بار سطحی روی سطح خارجی استوانه برابر $\sigma_S=۲\varepsilon_\circ E_\circ\cos\varphi$ خواهد بود. اگر هر خط میدانی که از نقاط دور با فاصلهٔ $|y|<h$ به استوانه نزدیک می‌شود به سطح آن برخورد نماید، حداکثر مقدار h چقدر است؟ [۴]

حل: طولِ L از استوانه را در نظر می‌گیریم. اگر مطابق شکل (۲-۸۴) خطوط $y=h$ و $y=-h$ آخرین خطوطی باشند که پس از نزدیک شدن به استوانه برخورد می‌کنند، آنگاه شار گذرنده از مستطیلی در نقاط دور، با طول L، عمود بر محور xها و بین دو خط ذکر شده، با شاری که به طول L از نیمهٔ سمت چپ استوانه می‌رسد، برابر است.

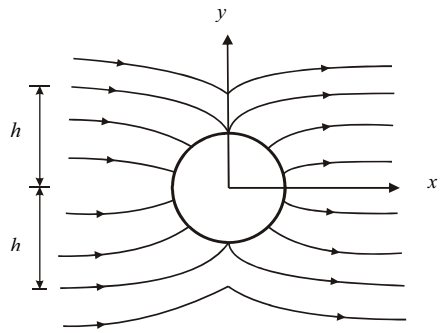
شار گذرنده از مستطیل:

$$(۲hL)\varepsilon_\circ E_\circ$$

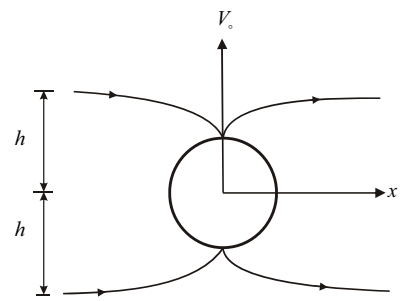
چون استوانه رسانا است، میدان الکتریکی بر سطح خارجی عمود است و فقط مولفهٔ شعاعی دارد.

$$\sigma_S=\varepsilon_\circ\,\mathbf{E}(r=a)\,.\,\mathbf{a}_r \quad\Rightarrow\quad \mathbf{E}(r=a)=۲\varepsilon_\circ E_\circ\cos\varphi\;\mathbf{a}_r$$

شار وارد شده به نیم‌استوانه:



شکل ۲-۸۳: شکل مثال ۲-۱۱۵



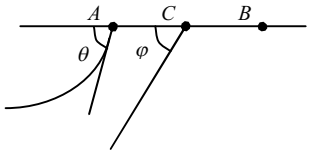
شکل ۲-۸٤: شکل مثال ۲-۱۱۵

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2\varepsilon_\circ E_\circ \cos\varphi\ \mathbf{a}_r \cdot \left(-aL\,d\varphi\,\mathbf{a}_r\right) = -2aL\,\varepsilon_\circ E_\circ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi = 4aL\,\varepsilon_\circ E_\circ$$

مقدار دو شار محاسبه شده برابرند، پس:

$$2hL\,\varepsilon_\circ E_\circ = 4aL\,\varepsilon_\circ E_\circ \rightarrow\ h = a\sqrt{2}$$

مثال ۲-۱۱۶ خطوط میدان دو بار نقطه‌ای q که در نقاط A و B قرار گرفته‌اند، را در نظر بگیرید. خط میدانی که با زاویهٔ θ از بار واقع در A جدا می‌شود، در نقاط بسیار دور مجانبی دارد که خط AB را با زاویهٔ φ در C قطع می‌کند. رابطهٔ بین θ و φ را بیابید.



شکل ۲-۸۵: شکل مثال ۲-۱۱۶

حل: از مفهوم شار الکتریکی و رابطهٔ (۲-۴۰) استفاده می‌کنیم. با توجه به شکل (۲-۸۵)، در فواصل نزدیک با فقط شار ناشی از همان بار دیده می‌شود. شار مخروطی به راس A و زاویهٔ θ عبارت است از:

$$\varphi = \frac{q}{2}\left(1-\cos\theta\right)$$

در نقاط دور اثر تمام بارها مشاهده می‌شود، پس شار گذرنده از مخروطی به راس و زاویهٔ φ عبارت است از:

$$\varphi'' = \frac{2q}{2}\left(1-\cos\varphi\right)$$

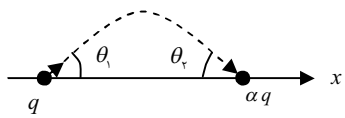
از برابر قرار دادن این شارها (به هر حال باید اصل بقای شار(!) نیز برقرار باشد) نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{q}{۲}\left(۱-\cos\theta\right)=q\left(۱-\cos\varphi\right)$$

در نتیجه:

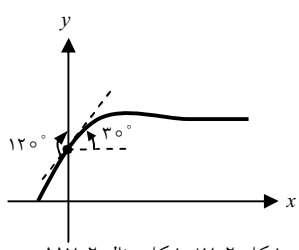
$$\cos\theta=۲\cos\left(\varphi\right)-۱$$

تمرین ۲-۵۶: دو بار نقطه‌ای q و αq مشابه شکل (۲-۸۶) روی محور x قرار گرفته‌اند. یکی از خطوط میدان سیستم در شکل رسم شده است. اگر زاویهٔ بین خط میدان خارج شده از بار q و محور x، $\theta_۱$ باشد. آنگاه زاویهٔ بین خط میدان وارد شده به بار αq و محور x چگونه است؟



شکل ۲-۸۶: شکل تمرین ۲-۵۶

مثال ۲-۱۱۷ پتانسیل الکتریکی در صفحهٔ $z=۰$ با رابطهٔ $V(x,y)=e^{-x}\cos y$ تعیین می‌شود. اگر یک الکترون در نقطهٔ $P(۰,\frac{\pi}{۶})$ قرار داده شود. زاویهٔ بین محور yها و جهت شروع حرکت چند درجه است؟ (کارشناسی ارشد برق ۷۷)



شکل ۲-۸۷: شکل مثال ۲-۱۱۷

حل: ابتدا میدان الکتریکی را بدست می‌آوریم:

$$\mathbf{E}=-\nabla V=e^{-x}\cos y\ \mathbf{a}_x+e^{-x}\sin y\ \mathbf{a}_y$$

میدان را در نقطهٔ مورد نظر محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbf{E}=e^{-x}\cos y\ \mathbf{a}_x+e^{-x}\sin y\ \mathbf{a}_y\Big|_{P(۰,\frac{\pi}{۶})}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\mathbf{a}_x+\frac{۱}{۲}\mathbf{a}_y$$

زاویهٔ B با محور x برابر ۳۰° و با محور y برابر ۶۰° است ولی الکترون در خلاف جهت میدان حرکت می‌کند، یعنی با زاویهٔ ۱۲۰° نسبت به محور yها.

۲-۱۳- روش کار مجازی برای محاسبهٔ نیرو

یکی از روش‌های یافتن نیرو، در زمینه‌های مختلف فیزیک، روش کار مجازی است. در این روش فرض می‌شود که جسم تحت اثر نیرو، به اندازهٔ کوچک Δx جابجا گردد و سپس تغییر انرژی Δw ناشی از این جابجایی حساب می‌شود. در این صورت نیرو برابر خواهد بود با:

$$\left|\mathbf{F}\right|_x = \frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{\partial W}{\partial x} \qquad (۱۲۶-۲)$$

یعنی برای محاسبهٔ نیرو کافیست توانایی محاسبهٔ انرژی را داشته باشیم. روش کار مجازی برای میدانهای الکتریکی ساکن دارای دو بیان است، آنها را در زیر مطرح می‌کنیم:

۱- بار ثابت:

اگر در طی جابه‌جایی، بار واقع بر جسم تغییر نکند، در این صورت رابطهٔ (۲-۱۲۶) به فرم زیر در می‌آید:

$$\boxed{\mathbf{F} = -\nabla W} \qquad (۱۲۷-۲)$$

۲- ولتاژ ثابت:

اگر در طی جابه‌جایی، ولتاژ جسم تغییر نکند، در این صورت رابطهٔ (۲-۱۲۶) به فرم زیر در می‌آید:

$$\boxed{\mathbf{F} = \nabla W} \qquad (۱۲۸-۲)$$

توجه داریم که این دو حالت هیچگاه همزمان اتفاق نمی‌افتد، مثلا اگر منابعی بـه جـسم وصـل باشند (مثل خازنی که به باتری متصل است) آن منابع نیز با جابه‌جا شدن جسم کار انجام می‌دهند و بار روی جسم تغییر می‌کند.

نکتهٔ طلایی

تذکر: روش کار مجازی نیرو یکـی از روش‌هـای کـاربردی در مطالعـهٔ اصـول اساسـی ماشـین‌هـای الکتریکی است. چرا که این اصول برای هر ماشین الکتریکی، ارتباط بـین نیـرو، گـشتاور، ولتـاژ و ... است که در درس ماشین‌های الکتریکی ۱ با آنها آشنا خواهید شد.

مثال ۲-۱۱۸ نیروی بین دو بار نقطه‌ای را به روش کار مجازی بیابید.

حل: انرژی بین این دو بار به صورت زیر است:

$$W = Q_1 V_1 = Q_1 \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

بر طبق رابطه (۲-۱۲۷) خواهیم داشت:

$$\mathbf{F} = -\nabla W = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 x}\right) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

آخرین نکته‌ای که در مورد این قسمت می‌توان گفت مجدداً به ارتباط ظرفیت و انـرژی وابـسته است. پیش از این دیدیم که:

$$W = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \qquad (۱۲۹-۲)$$

در عمل بیشترین کاربرد الکترواستاتیک در صنعت، به نوعی به خازن و تغییرات میدان در آنهـا معطوف می‌گردد. از اینرو استفاده از ظرفیت در محاسبهٔ نیرو کاربرد فراوانی دارد. نیروی یک سیستم خازنی با مشتق‌گیری از رابطهٔ فوق بدست می‌آید:

سیستم خازنی با ولتاژ ثابت:

$$F = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial x} \qquad (۱۳۰-۲)$$

سیستم خازنی با بار ثابت:

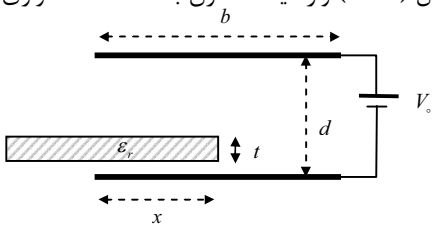
$$F = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{\partial C}{\partial x} \qquad (۱۳۱-۲)$$

نکتهٔ طلایی

یادآوری: مثبت بودن نیرو به معنای نیروی دافعه و منفی بودن آن به معنای نیروی جاذبه است.

مثال کلیدی

مثال ۲-۱۱۹ عایقی با گذردهی نسبی ε_r مطابق شکل (۲-۸۸) وارد یک خـازن بـا صـفحات مـوازی شده است. نیروی وارد بر عایق را بیابید. [۸]



شکل ۲-۸۸: شکل مثال ۲-۱۱۹

حل: ابتدا ظرفیت خازن را می‌یابیم، برای ایـن منظور ظرفیت معادل سه خازن شکل (۲-۸۸) را پیدا می‌کنیم:

$$C = \varepsilon_0 \frac{(b-x)l}{d} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{x\,l}{t + (d-t)\varepsilon_r}$$

طبق رابطهٔ (۲-۱۳۰):

$$F = \frac{1}{2} V^2 \left[\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r\, l}{t + (d-t)\varepsilon_r} - \varepsilon_0 \frac{l}{d} \right]$$

مثال ۲-۱۲۰ نیروی وارد بر خط دوسیمهٔ مثال (۲-۸۸) را بدست آورید. (کارشناسی ارشد برق ۷۳)

POWEREN.IR

حل: ظرفیت این سیستم را در همان مثال محاسبه کرده‌ایم:

$$C = \frac{\pi \varepsilon}{Ln \frac{d}{a}}$$

کافیست از رابطهٔ (۲-۱۳۱) استفاده کنیم:

$$F = \frac{۱}{۲} V^{۲} \frac{-\pi \varepsilon}{d \left(Ln \frac{d}{a} \right)^{۲}}$$

مثال ۲-۱۲۱ در یک خازن کروی با عایق هوا با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b که بار $+Q$ و $-Q$ روی کره هاست. چه نیرویی بر واحد سطح کرهٔ داخلی وارد می‌شود؟ (کارشناسی ارشد فیزیک ۸۳)

حل: ظرفیت خازن کروی برابر $\frac{۴ \pi \varepsilon_{\circ}}{\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}}$ است. انرژی سیستم عبارت است از:

$$W = \frac{۱}{۲} \frac{Q^{۲}}{C} = \frac{Q^{۲}(b-a)}{۸ \pi \varepsilon_{\circ} ab}$$

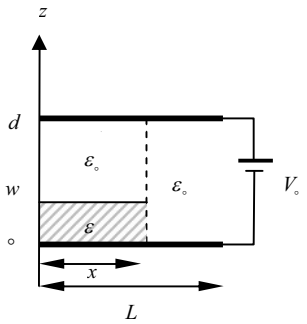
نیروی وارد بر سطح $R = a$ برابرست با:

$$\mathbf{F}\Big|_{R=a} = -\frac{\partial W}{\partial a} \mathbf{a}_R = \frac{Q^{۲}}{۸ \pi \varepsilon_{\circ} a^{۲}} \mathbf{a}_R$$

نیروی وارد بر واحد سطح $R = a$:

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{F}}{۴ \pi a^{۲}} = \frac{Q^{۲}}{۳۲ \pi^{۲} \varepsilon_{\circ} a^{۴}} \mathbf{a}_R$$

تمرین ۲-۵۷: خازن مسطحی که سطح هر الکترود آن S و فاصلهٔ دو الکترود از هم d است به باتری $V_{\circ}$ وصل است. قطعه عایقی به ضخامت w ($d > w$) و هم‌عرض الکترودها را مطابق شکل (۲-۸۹) وارد خازن می‌کنیم. نیرویی که بر سطح عمودی عایق وارد می‌شود را بدست آورید.

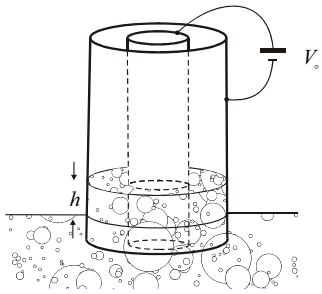


شکل ۲-۸۹: شکل تمرین ۲-۵۷

مثال ۲-۱۲۲ یک کابل هم‌محور با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b مطابق شکل زیر در یک مایع عایق با گذردهی ε قرار گرفته است. مقدار افزایش ارتفاع مایع را محاسبه کنید.

حل: مشابه مثال‌های اخیر، ابتدا ظرفیت سیستم را محاسبه می‌کنیم، دو خازن موازی با هم داریم:

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_{\circ}(L-x)}{Ln\frac{b}{a}}+\frac{2\pi\varepsilon x}{Ln\frac{b}{a}}$$



شکل ۲-۹۰: شکل مثال ۲-۱۲۲

طبق رابطهٔ (۲-۱۳۰) برای نیرو خواهیم داشت:

$$F=\frac{1}{2}V^{2}\frac{2\pi}{Ln\frac{b}{a}}(\varepsilon-\varepsilon_{\circ})$$

این نیرو سطح مایع را تا آنجایی بالا می‌برد که نیروی جاذبه با نیروی فوق مساوی گردد. از طرفی برای نیروی وزن داریم:

$$M\,g=\rho S\,g\,h=\pi\left(b^{2}-a^{2}\right)\rho\,g\,h$$

پس:

$$h=\frac{(\varepsilon-\varepsilon_{\circ})V^{2}}{\left(b^{2}-a^{2}\right)\rho\,g\,Ln\frac{b}{a}}$$

۲-۱۴- ضرایب پتانسیل و ظرفیت

یک سوال اساسی: آیا جملهٔ زیر درست است؟

" اگر روی یک هادی بار نداشته باشیم، پتانسیل هادی صفر است. "

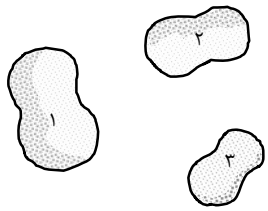
این همان چیزی است که باعث می‌شود، این بخش (یعنی ۲-۱۴)، به عنوان یک بخش درسی بیان شود. پاسخگویی به آن نیازمند بیان یک مدل کامل‌تر در مورد سیستمها است. این مدل با ضرایب پتانسیل همراه است.

شکل (۲-۹۱) سه هادی با شکل دلخواه را نشان می‌دهد. فرض می‌کنیم که روی آنها به ترتیب بارهای Q_1 ، Q_2 ، Q_3 قرار گرفته‌اند. در این صورت پتانسیل هر یک از این هادی‌ها را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$V_1 = P_{11}\,Q_1 + P_{12}\,Q_2 + P_{13}\,Q_3$$

$$V_2 = P_{21}\,Q_1 + P_{22}\,Q_2 + P_{23}\,Q_3 \qquad (۱۳۲-۲)$$

$$V_3 = P_{31}Q_1 + P_{32}Q_2 + P_{33}Q_3$$



شکل ۲-۹۲: سیستمهای چند هادی

که در آن P_{ij} ها ضرایب پتانسیل نامیده می‌شوند و به:

۱- شکل هادی ۲- محل قرار گرفتن آنها در فضا ۳- گذردهی محیط بین آنها

بستگی دارند.

این رابطه را می‌توان به هر تعداد هادی دلخواهی تعمیم داد.

معنای رابطهٔ (۲-۱۳۲) این است که، اگر بیش از یک هادی در فضا موجود باشد پتانسیل آن فقط به بار خودش وابسته نیست، بلکه وابستگی مستقیم با بار هادی‌های دیگر فضا دارد. با این تفاسیر می‌توانیم به سوال ابتدای بخش اینگونه پاسخ دهیم که:

" مطابق رابطهٔ (۲-۱۳۲) این جمله درست است، مشروط بر اینکه در فضا هادی دیگری نداشته باشیم و یا در صورت وجود، با توجه به سه شرط بیان شده، به گونه‌ای شکل گرفته باشند که ضرایب پتانسیل آنها صفر باشد. "

با این توضیحات است که در تمرین (۲-۳۲) می‌توانیم بپذیریم که، چرا با وجود صفر بودن پتانسیل استوانهٔ داخلی، باز هم روی آن بار داریم. این تمرین را می‌توانید با قواعد مطرح شده در بحث هادی‌ها و استفاده از انتگرال $\int \mathbf{E}\,.\,\mathbf{d}l$ ، حل کنید. اگر محیط بین هادی‌ها خطی باشد می‌توان نشان داد که:

$$P_{ij} = P_{ji}$$

مثال ۲-۱۲۳ دو هادی با شکل نامعین در فضای آزاد قرار دارند. هادی اول به زمین وصل شده و روی هادی دوم بار خالصی وجود ندارد. نشان دهید که بار روی هادی اول صفر و پتانسیل هادی دوم نیز صفر است. [۸]

حل: با توجه به رابطهٔ (۲-۱۳۲) داریم:

$$V_1 = P_{11}Q_1 + P_{12}Q_2$$

$$V_2 = P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2$$

از اطلاعات مسئله نتیجه می‌گیریم که:

$$V_1 = 0 \quad , \quad Q_2 = 0$$

اگر اینها را در رابطهٔ ابتدایی قرار دهیم به این نتیجه می‌رسیم که ناچاراً بار روی هادی اول و پتانسیل هادی دوم هر دو بایستی صفر باشند.

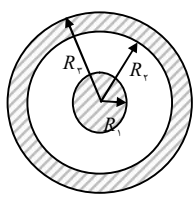
برای محاسبهٔ ضرایب پتانسیل باید با فرض قرار داشتن بار Q_i روی هادی iام، پتانسیل را در سطح هادی iام پیدا کنیم. سپس طبق رابطهٔ (۲-۱۳۲) ضرایب پتانسیل را معین می‌کنیم.

مثال کلیدی

مثال ۲-۱۲۴ کره‌ای هادی به شعاع R_1 هم‌مرکز با یک پوستهٔ کروی به شعاع داخلی R_2 و شعاع خارجی R_3 قرار دارد. ضرایب پتانسیل را بیابید.

حل: روی هادی داخلی بار Q_1 و روی هادی خارجی بار Q_2 را قرار می‌دهیم. حال سعی می‌کنیم پتانسیل هر هادی را محاسبه نماییم. میدان خارج پوسته معادل میدان بار نقطه‌ایست، پس:

$$V_2 = V(R_3) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$



شکل ۲-۹۳: شکل مثال ۲-۱۲٤

میدان بین دو هادی:

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,\mathbf{a}_R$$

پس:

$$V_1 - V(R_1) = -\int_{R_3}^{R_1} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{R} + V(R_3) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

با توجه به مقادیر محاسبه شده و رابطهٔ (۲-۱۳۲) نتیجه می‌گیریم که:

$$P_{11} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$P_{21} = P_{12} = R_{22} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

تمرین ۲-۵۸: دو کرهٔ هادی به شعاع‌های a و b در فضای آزاد و به فاصلهٔ d از هم قرار دارند. ضرایب پتانسیل سیستم را بیابید.

۲-۱۴-۱- ضرایب پتانسیل کره‌های هادی هم‌مرکز

به راحتی اثبات می‌شود که برای n کرهٔ هادی هم‌مرکز بـه شـعاع‌هـای R_i ضـرایب پتانـسیل بـه صورت زیر است:

$$P_{ii} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_i} \quad , \quad P_{ij} = P_{ji} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_j} \quad , \quad R_j > R_i \qquad (۲-۱۳۳)$$

۲-۱۴-۲- ضرایب پتانسیل استوانه‌های هادی خارج هم

اثبات می‌شود که برای n استوانهٔ هادی خارج هم (معادل با خطوط انتقال نیـرو)، کـه شـعاع هـر استوانه برابر r_i و فاصلهٔ دو استوانهٔ i و j برابر r_{ij} باشد به صورت زیر است: (با فرض $r_{ij} >> r_i$)

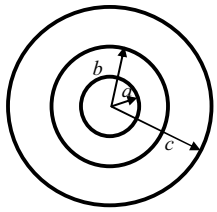
$$P_{ii} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} Ln\,\frac{1}{r_i} \quad , \quad P_{ij} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} Ln\,\frac{1}{r_{ij}} \qquad (۲-۱۳۴)$$

۲-۱۴-۳- ضرایب پتانسیل کره‌های هادی خارج هم

برای n کرهٔ هادی خارج هم، که شعاع هر کره برابر R_i و فاصلهٔ دو کرهٔ i و j برابر R_{ij} باشد به صورت زیر است: (با فرض $R_{ij} >> R_i$)

$$P_{ii} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R_i} \quad , \quad P_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R_{ij}} \qquad (۲-۱۳۵)$$

مثال ۲-۱۲۵ روی سه پوستهٔ کروی هادی هم‌مرکز به شعاع‌های a، b و c به ترتیب بارهای q_1 ، q_2 و q_3 گذاشته شده است. اگر کرهٔ داخلی را به زمین وصل کنیم، پتانسیل کرهٔ بیرونـی چقـدر خواهـد شد؟



شکل ۲-۹٤: شکل مثال ۲-۱۲۵

حل: مطابق رابطهٔ (۲-۱۳۳) ضرایب پتانسیل عبارتند از:

$$P_{11} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} \quad , \quad P_{22} = P_{21} = P_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

$$P_{33} = P_{32} = P_{23} = P_{13} = P_{31} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}$$

طبق رابطهٔ (۲-۱۳۲) برای پتانسیل کرهٔ داخلی و بیرونی داریم:

$$V_1 = P_{11}\,q_1 + P_{12}\,q_2 + P_{13}\,q_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{a} + \frac{q_2}{b} + \frac{q_3}{c}\right)$$

$$V_3 = P_{31}\,q_1 + P_{32}\,q_2 + P_{33}\,q_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{c} + \frac{q_2}{c} + \frac{q_3}{c}\right)$$

وقتی پتانسیل کرهٔ داخلی را صفر می‌کنیم، بار روی آن تغییر می‌کند ولی پتانسیل یا بار دیگر هادی‌ها تغییر نمی‌کند. پس:

$$0 = P_{11}\, q_1' + P_{12}\, q_2 + P_{13}\, q_3 \;\rightarrow\; q_1' = -a\left(\frac{q_2}{b} + \frac{q_3}{c}\right)$$

در نتیجه پتانسیل کرهٔ بیرونی:

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1'}{c} + \frac{q_2}{c} + \frac{q_3}{c}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\left(\frac{q_1(b-a)}{a} + \frac{q_2(c-a)}{c}\right)$$

تمرین ۲-۵۹: سه کرهٔ رسانای یکسان به شعاع a در گوشه‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع l ($l >> a$) قرار گرفته‌اند. در ابتدا بار هر کره Q بوده است. یکی از کره‌ها به زمین متصل می‌شود تا به حالت تعادل برسد. بار کرهٔ زمین شده تقریبا چقدر است؟

مثال ۲-۱۲۶ دو کرهٔ هادی به شعاع a به فاصلهٔ R از یکدیگر قرار دارند. با فرض $R >> a$ ظرفیت بین دو کره و انرژی سیستم را بیابید.

حل: مطابق رابطهٔ (۲-۱۳۵) ضرایب پتانسیل عبارتند:

$$P_{11} = P_{22} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} \quad , \quad P_{21} = P_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

پس طبق رابطهٔ (۲-۱۳۲) برای پتانسیل کره‌ها خواهیم داشت:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\, q_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\, q_2$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\, q_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\, q_2$$

انرژی سیستم برابر است با:

$$W = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1^2}{a} + \frac{2q_1 q_2}{R} + \frac{q_2^2}{a}\right)$$

برای محاسبهٔ ظرفیت سیستم به اختلاف پتانسیل دو هادی نیازمندیم، با توجه به تعریف ظرفیت فرض می‌کنیم که:

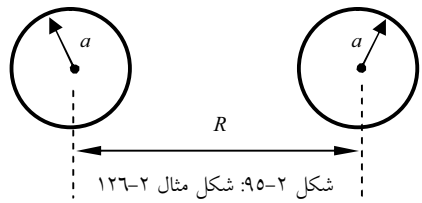
$$q_1 = -q_2 = Q$$

پس:

$$V_1 - V_2 = Q\,(P_{11} + P_{22} - 2P_{12})$$

در نهایت:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{1}{P_{11} + P_{22} - 2P_{12}} = 2\,\pi\,\varepsilon_0 \frac{aR}{R-a}$$



شکل ۲-۹۵: شکل مثال ۲-۱۲۶

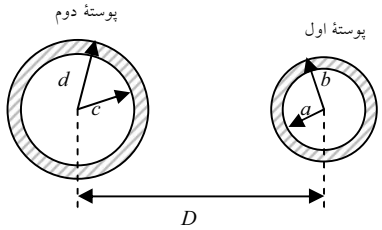
تمرین ۲-۶۰: دو کرهٔ مطرح شده در مثال (۲-۱۲۶) را با یک سیم به هم متصل می‌کنیم. انرژی الکتریکی سیستم را بیابید. آیا انرژی کاهش یافته؟

- با توجه به اینکه بار و پتانسیل در یک مجموعهٔ خازنی بوسیلهٔ ظرفیت به هم مرتبط می‌شوند. اگر رابطهٔ (۲-۷۷) را معکوس کنیم داریم:

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + C_{13}V_3 \\ Q_2 &= C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + C_{23}V_3 \\ Q_3 &= C_{31}V_1 + C_{32}V_2 + C_{33}V_3 \end{aligned} \qquad (۲-۱۳۶)$$

دراین رابطه ضرایب C_{ij} **ضرایب ظرفیت** نامیده می‌شوند. لازم به ذکر است که روابط (۲-۱۳۲) و (۲-۱۳۶) و تعمیم آنها به صورت گسترده در کاربردهای عملی و درس بررسی سیستمهای قدرت به کار می‌روند.

تمرین ۲-۶۱: در فضای خالی همانند شکل (۲-۹۶) دو پوستهٔ کروی رسانا در مجاورت یکدیگر قرار گرفته‌اند. هرگاه در مرکز پوستهٔ اول بار نقطه‌ای q قرار داده شود، پتانسیل پوستهٔ دوم نسبت به نقطه‌ای در بی‌نهایت به ۱۰ ولت می‌رسد. اگر این بار از مرکز پوستهٔ اول به مرکز پوستهٔ دوم منتقل شود، پتانسیل پوستهٔ اول نسبت به نقطه‌ای در بی‌نهایت چند ولت خواهد شد؟ (کارشناسی ارشد برق)



شکل ۲-۹۶: شکل تمرین ۲-۶۱

۲-۱۵- محافظت الکتریسیته ساکن

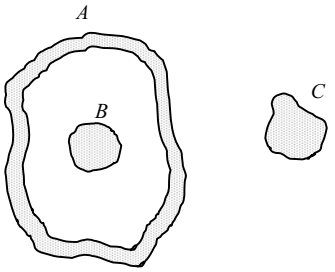
با توجه به کاربردهای فراوانِ میدان‌های الکتریکی، بحث حفاظت یک موضوع اساسی و عملیاتی است. از اینرو روشهای بسیاری برای این کار طراحی شده است. ما به صورت اجمالی سه روش از این نوع حفاظت‌ها را بیان خواهیم کرد. لازم به توضیح است که اساس تمام این روش‌ها ایزوله کردن محیط از میدان و یا اثرات نامطلوب مجموعه‌ای از بارها است.

با دو روش آن از پیش آشنا شده‌ایم:

۱- در مثال (۲-۳۹) سعی شده تا ضمن بیان ویژگی‌های هادی یک ایدهٔ عملی برای حفاظت مطرح شود. روش ذکر شده در برخی از پرینترهای لیزری و برای حفاظت سیم حامل اطلاعات در مقابل میدان تونر (میدان ایجاد شده در فضای بین کارتریج و صفحهٔ کاغذ) به کار می‌رود. توضیحات بیشتر را به خودتان واگذار می‌کنیم.

۲- در مثال (۲-۶۹) سوالی مطرح شده که پاسخ آن ایدهٔ جدیدی را برای حفاظت الکتریسیتهٔ ساکن در اختیار شما می‌گذارد. (مباحث تکمیلی این موضوع را در مبحث" برخورد مایل موج به مرزِ مسطحِ دی‌الکتریک و انواع قطبی‌شدگی‌ها (عمودی و موازی)" در درس میدانها و امواج، می‌توانید بررسی کنید)

۳- اما اساس روش سوم، بر مبنای کاهش تزویج خازنی بین اجسام هادی است که تعمیم روش اول است. مطابق شکل (۲-۹۷) بوسیلهٔ پوستهٔ هادی A از هادی B محافظت می‌شود. (پوستهٔ A باید زمین شده باشد، که در شکل فرض نشده) اگر مبحث ضرایب ظرفیت را به درستی بدانید با کمی استدلال می‌توانید نتیجه بگیرید که تغییر در پتانسیل هادی C، اثری بر بار روی هادی B ندارد. (مسئلهٔ ۳۸ پایان فصل راببینید.) این موضوع تحت عنوان *Electrostatic screening* در مقالات مطرح می‌شود، چرا که ادعا می‌کنند پوستهٔ A مشابه *screen* (سد، غربال) عمل کرده و از هادی B محافظت می‌کند.



شکل ۲-۹۷: حفاظت الکتریسیته ساکن

۲-۱۶- مسائل پایان فصل

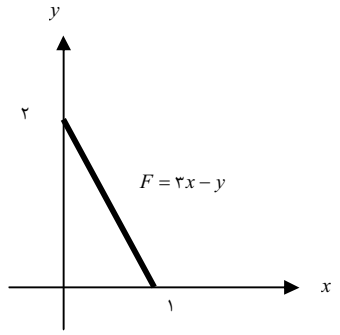
۱- روی نواری به عرض $2a$ که در صفحه $z=0$ قرار دارد و با معادلات $-\infty < x < \infty$ و $|y| < a$ توصیف می‌شود، باری با چگالی یکنواخت σ کولن بر متر مربع قرار دارد. شدت میدان الکتریکی را در نقطه p، به فاصلهٔ d از نوار و بالای آن، بدست آورید. [۸]

۲- میله‌ای مطابق شکل (۲-۹۸) در صفحه xy و دارای بار الکتریکی به چگالی $\rho_l = 3x - y$ می‌باشد. کل بار توزیع شده روی میله را بدست آورید. (مثال (۱-۱۹) فصل اول را ببینید)

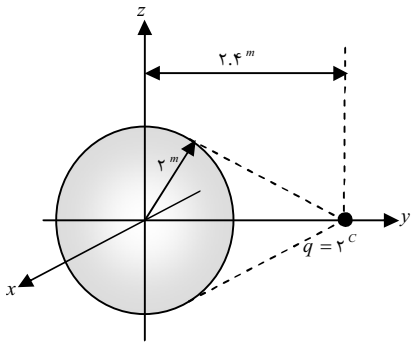
۳- یک میله طویل دارای بار الکتریکی به چگالی طولی $\rho_l = 2\pi\varepsilon_0$ می‌باشد.مطلوب است معادله خطوط میدان. (کارشناسی ارشد برق)

۴- روی سطح $z=0$ باری با چگالی $\sigma\ \frac{c}{m^2}$ قرار دارد. صحت قانون گاوس را برای یک سطح کره ای ثابت کنید، چه این سطح $z=0$ را قطع کند و چه قطع نکند. (مسئلهٔ ۱۱ پایان فصل اول را ببینید)

۵- بار $Q = 2^c$ مطابق شکل (۲-۹۹) خارج کره ای به شعاع 2^m قرار دارد. شار الکتریکی وارد شده به کره را بدست آورید. [۳]



شکل ۲-۹۸: شکل مسئلهٔ ۲



شکل ۲-۹۹: شکل مسئلهٔ ۵

۶- بار q در مبدا مختصات و بار $-\frac{q}{2}$ در روی محور xها در $x=a$ قرار دارد. سطح هم‌پتانسیل $V=0$ را تعیین کنید. (کارشناسی ارشد برق ۶۹)

۷- توزیع بار سطحی به شکل یک عرقچین کروی به شعاع a و با چگالی بار سطحی ρ_s وجود دارد. مطلوب است محاسبه میدان در مبداء مختصات.

۸- توزیع بار سطحی $\rho_s = \begin{cases} k\sin\varphi & , \quad a<r<b, z=0 \\ 0 & , \quad other \end{cases}$ را در مختصات استوانه‌ای در نظر بگیرید. مطلوب است محاسبهٔ

الف) شدت میدان الکتریکی **ب)** پتانسیل الکتریکی در نقطه $P(0,0,z_0)$

مثال کلیدی

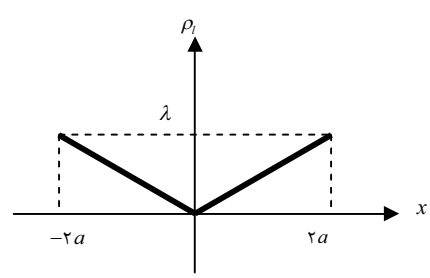
۹- در سیستم مختصات کروی میدان الکتریکی $\mathbf{E} = \begin{cases} k\,r\,\mathbf{a}_r & , \quad r<1 \\ \dfrac{2k}{r^2}\mathbf{a}_r & , \quad r>1 \end{cases}$ مفروض است. مطلوب است محاسبه:

الف) توزیع‌های بار مولد میدان.

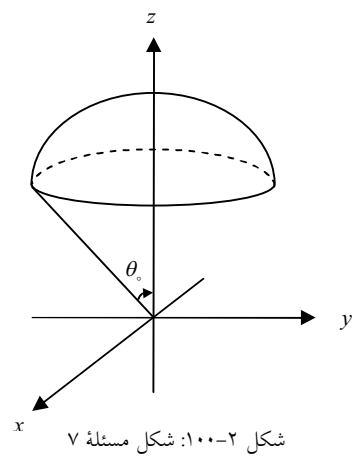
ب) اختلاف پتانسیل V_{AB} بین دو نقطه $A(x=0, y=0, z=2)$ و $B(x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}, z=0)$.

مثال کلیدی

۱۰- یک فیبر نوری با طول $4a$ دارای یک توزیع بار خطی مطابق شکل (۲-۱۰۱) است. پتانسیل و شدت میدان الکتریکی را روی دایره $y^2+z^2h^2$ در صفحه yz محاسبه کنید. [۶]



شکل ۲-۱۰۱: شکل مسئلهٔ ۱۰



شکل ۲-۱۰۰: شکل مسئلهٔ ۷

۱۱- بین دو صفحهٔ $z=0$ و $z=3$ بار الکتریکی به چگالی $\rho=(1+z)\varepsilon_0$ قرار دارد. اگر میدان و پتانسیل در $z=0$ برابر صفر باشد، پتانسیل را در $z=3$ محاسبه کنید.

۱۲- یک بار خطی به شکل سهمی به معادله $y^2=4x$ بین $-4\le y\le 4$ و به چگالی $\rho_l=2(\frac{nc}{m})$ مفروض است. میدان الکتریکی را در نقطه $(1\,,0)$ بدست آورید.

۱۳- سه بار خطی نامتناهی موازی محور z مطابق شکل (۲-۱۰۲) قرار دارند. چگالی بارهای خطی در شکل (۲-۱۰۲) نشان داده شده‌اند.[۶]

الف) میدان الکتریکی را در نقطه P روی محور y تعیین کنید.

ب) نشان دهید که نقطه P یک بار خطی با چگالی معادل $-\lambda\cos 2\theta$ را می‌بینند.

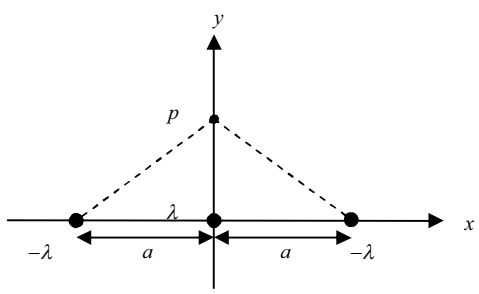
ج) نشان دهید که عبارت میدان حاصل، اندازه‌های حدی مورد انتظار را روی محور y به دست می‌دهد. برای مثال، برای $b \to \infty$، میدان در واقع ناشی از یک خط بار $-\lambda$ می‌باشد.

۱۴- سه بار خطی با چگالی بار یکنواخت ρ_{l_1}، ρ_{l_2} و ρ_{l_3} هر کدام به طول L یک مثلث را تشکیل می‌دهند. با فرض اینکه $\rho_{l_1} = 2\rho_{l_2} = 2\rho_{l_3}$ میدان را در مرکز مثلث محاسبه کنید.

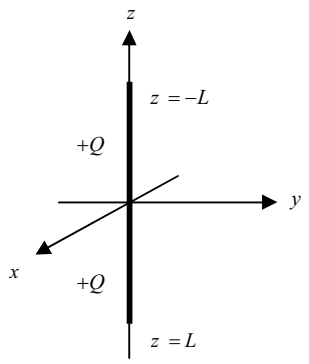
۱۵- یک بار الکتریکی $8\times10^{-9}(c)$ در مرکز یک کره با شعاع 2^m قرار دارد. شار الکتریکی را که از سطح کره بین عرض‌های جغرافیایی $\pm 60^\circ$ و طول‌های جغرافیایی $\pm 20^\circ$ می‌گذرد، را محاسبه کنید.

مثال کلیدی

۱۶- یک دوقطبی الکتریکی با توزیع بار پیوسته خطی را مطابق شکل (۲-۱۰۳) در نظر بگیرید. پتانسیل الکتریکی را در نقاط دور محاسبه کنید.در مورد نتیجه بحث کنید.



شکل ۲-۱۰۲: شکل مسئلهٔ ۱۳



شکل ۲-۱۰۳: شکل مسئلهٔ ۱۶

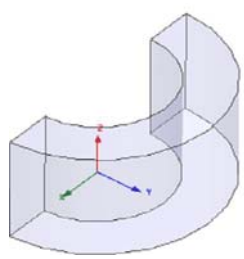
۱۷- دو میله بینهایت طویل روی قسمت مثبت محورهای x و y قرار دارند و در مبدا به هم متصل شده‌اند. چگالی خطی این دو میله $\rho_l = 4\pi\varepsilon_0(\frac{c}{m})$ می‌باشد. بار الکتریکی $q = 1^{\mu c}$ با جرم ۱۰ میلی‌گرم در روی نیم‌ساز دو میله و در نقطه $(1,1)$ رها می‌شود. سرعت این بار در لحظه‌ای که به نقطه $(4,4)$ می‌رسد، چقدر است؟

۱۸- بار Q_1 به طور یکنواخت روی سطح نیم‌کره‌ای توزیع شده است. تعداد N بار نقطه‌ای در امتداد محور گذرنده از مرکز نیم‌کره و عمود بر قاعده‌اش قرار دارد. (دو عدد از این مجموعه بارهای نقطه‌ای به عنوان مثال در شکل (۲-۱۰۴) نشان داده شده است) فاصله kامین بار نقطه‌ای از مرکز نیم‌کره برابر:

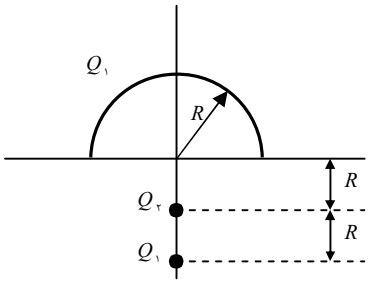
$$2^{k-1}R \qquad : \qquad k = 1, 2, \ldots, N$$

اندازه Q_2 را بر حسب Q_1 در حالتی که پتانسیل در مرکز نیم‌کره برابر صفر باشد، بدست آورید. این رابطه را برای بی‌نهایت بار نقطه ($N \to \infty$) تعیین کنید. [۶]

۱۹- یک پوسته نیم‌استوانه‌ای عایق به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b و ارتفاع h به طور یکنواخت دارای قطبی‌شدگی $\mathbf{P} = p_0 \mathbf{a}_z$ است. پتانسیل یک نقطه دلخواه روی محور استوانه را بیابید.



شکل ۲-۱۰۵: شکل مسئلهٔ ۱۹



شکل ۲-۱۰۴: شکل مسئلهٔ ۱۸

۲۰- ضریب نفوذپذیری الکتریکی عایق بین صفحات یک خازن با مساحت صفحات S و فاصله بین صفحات d، به صورت $\varepsilon = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} z + \varepsilon_1$ تغییر می‌کند (صفحات خازن را موازی صفحه xy و در $z = 0$ و $z = d$ در نظر بگیرید)

الف) ظرفیت خازن را بدست آورید.

ب) چگالی سطحی و حجمی بار پلاریزاسیون را در عایق خازن وقتی بار q روی خازن قرار دارد محاسبه کنید.

۲۱- یک میله عایق باریک با سطح مقطع A در امتداد محور z از $z = 0$ تا $z = l$ قرار دارد. بردار پلاریزاسیون برای میله $\mathbf{P} = (az^2 + b)\mathbf{a}_z$ می‌باشد. **الف)** چگالی بار های مقید را بدست آورید.

ب) بار مقید کل چقدر است؟ **ج)** اگر میدان الکتریکی در تمام نقاط میله برابر $\mathbf{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{a}_z$ باشد، ضریب نفوذپذیری نسبی میله چقدر است؟

مثال کلیدی

۲۲- ناحیه $z<0$ از عایقی با ضریب دی‌الکتریک $\varepsilon=\varepsilon_0\left(1+\frac{1}{z}\right)$ پر شده است و ناحیه $z>0$ هواست. میدان الکتریکی $\mathbf{E}=E_0\mathbf{a}_z$ در ناحیه $z>0$ وجود دارد. کل بار حجمی پلاریزه در $z<0$ چقدر است؟ (ابعاد صفحه $z=0$ را $a\times b$ فرض کنید) (کارشناسی ارشد برق)

۲۳- پتانسیل الکتریکی در ناحیه $x>0$ در فضا به‌صورت $V=2e^{-4y}\sin 4x$ می باشد. اگر $x=\frac{\pi}{4}$ یک صفحه رسانای کامل باشد مقدار بار جمع شده در فاصله $0<y<\infty$ و $0<z<5$ روی صفحه $x=\frac{\pi}{4}$ در طرفی از صفحه که رو به روی مبداء نیست کدام است؟ (کارشناسی ارشد برق ۷۹)

۲۴- اگر در ناحیهٔ $z>0$ که در آن $\varepsilon_r=2$ است، $\mathbf{E}=2\mathbf{a}_x-3\mathbf{a}_y+5\mathbf{a}_z$، زاویه‌ای که میدان الکتریکی در ناحیهٔ $z\le 0$ با $\varepsilon_r=5$ با سطح جدایی دو محیط می‌سازد، چند درجه است؟ (کارشناسی ارشد برق ۸۱)

۲۵- میدان الکتریکی به شدت $\mathbf{E}=\frac{3}{R}\mathbf{a}_R$ در دستگاه مختصات کروی در فضای آزاد موجود است. اگر یک کره فلزی در $R=3^{cm}$ قرار گیرد، چقدر بار روی سطح داخلی آن جمع می‌شود؟ (کارشناسی ارشد هسته‌ای)

۲۶- دو کره به شعاع‌های مساوی a و مراکز $(0,0,d)$ و $(0,0,-d)$ دارای بارهای حجمی ثابتی برابر ρ_0 و $-\rho_0$ هستند. $(d<a)$ میدان الکتریکی را در فضای بین دو کره بیابید (کارشناسی ارشد برق ۸۰)

مثال کلیدی

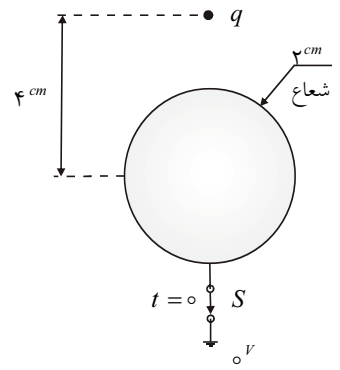
۲۷- کرهٔ رسانایی از طریق کلید S به زمین ایده‌آل با پتانسیل صفر ولت متصل شده است. بار نقطه‌ای q در مجاورت این کره و در محل نشان داده شده در شکل قرار گرفته است. کلید S در زمان $t=0$ باز می‌شود و سپس بار q به آرامی به نقطه‌ای در بی‌نهایت منتقل می‌گردد. پتانسیل کره، پس از این فرآیند چند ولت خواهد بود؟ (کارشناسی ارشد برق)

مثال کلیدی

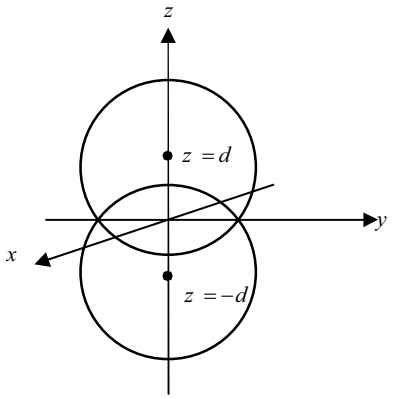
۲۸- دو خازن یکسان با هم موازی شده و به یک باطری با ولتاژ $V_\circ$ وصل شده‌اند. سپس باطری جدا شده ولی خازن‌ها همچنان موازی باقی می‌مانند و یکی از خازن‌ها با ماده‌ای با ضریب دی‌الکتریک نسبی ε_r پر می‌شود. اختلاف پتانسیل نهایی بین خازن‌ها را پیدا کنید.

۲۹- کابل هم‌محوری منطبق بر محور x مفروض است. شعاع هادی داخلی a و شعاع هادی خارجی b می‌باشد. فضای بین دو رسانا از مادهٔ عایق ناهمگنی با ضریب دی‌الکتریک $\varepsilon = \varepsilon_\circ e^{-|x|}$ پرشده است. ظرفیت خازنی چنین کابلی با طول بی‌نهایت را محاسبه کنید.

۳۰- کره‌ای فلزی به شعاع a در فضای آزاد هم مرکز با مبداء مختصات دارای پتانسیل $V_\circ$ است. انرژی پتانسیل الکتریکی کل سیستم را محاسبه نمایید. (کارشناسی ارشد برق)



شکل ۲-۱۰۷: شکل مسئلهٔ ۲۷



شکل ۲-۱۰۶: شکل مسئلهٔ ۲۶

۳۱- از سه کره هادی هم مرکز، کره میانی به شعاع b زمین شده است. روی کره درونی به شعاع a بار مثبت Q_1 و روی کره بیرونی به شعاع c بار منفی $-Q_2$ قرار دارد. فضای اطراف هادی ها هوا با ضریب نفوذپذیری $\varepsilon_\circ$ می‌باشد. مطلوب است:

الف) محاسبه پتانسیل و رسم تغییرات آن بر حسب

ب) محاسبه انرژی دخیره شده در این سیستم.

۳۲- در یک خازن کروی با عایق هوا با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b ، چه نیرویی بر واحد سطح کرهٔ داخلی وارد می‌شود؟

۳۳- چهار بار نقطه‌ای q، $-q$، $2q$ و $4q$ به‌ترتیب بر روی سطح کره‌ای به شعاع a قرار دارند. چه میزان کار لازم است تا همین مجموعه به اندازهٔ ۴۵ درجه تغییر زاویه دهد؟ (کارشناسی ارشد فیزیک)

۳۴- نشان دهید نیروی وارد بر واحد سطح یک مرز عبارت است از:

$$\frac{\mathbf{F}}{ds} = \frac{\sigma}{2}(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)$$

۳۵- با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۳۴ نیروی وارد واحد سطح هادی را بدست آورید.

۳۶- دو کرهٔ رسانای کوچک به شعاع‌های a و $2a$ و به فاصلهٔ بسیار زیاد $(d = 20a)$ از یکدیگر قرار دارند. ظرفیت دقیق خازن را محاسبه نموده و سپس با استفاده از تقریب‌های مناسبی به پاسخ ساده‌ای برای این سیستم دست‌یابید.

مثال کلیدی

۳۷- سه کره فلزی نازک هم محور به ترتیب دارای شعاع‌های $_1$، $_2$ و $_3$ هستند. محیط بین کره‌ها فضای آزاد است. بار $_2$ روی کره هادی میانی قرار داده می‌شود. کره‌های داخلی و خارجی به زمین وصل شده‌اند.

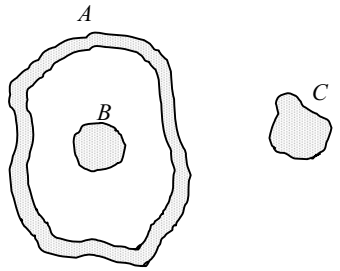
الف) بار القائی $_1$ روی کره داخلی را تعیین کنید.

ب) بار القائی $_3$ روی کره خارجی را بدست آورید.

ج) پتانسیل $_2$ کره میانی را تعیین کنید.

مثال کلیدی

۳۸- با استفاده از ضرایب پتانسیل و در شکل (۲-۱۰۸) نشان دهید که در صورت صفر بودن پتانسیل پوستهٔ A، تغییرات پتانسیل در هادی C، هیچگونه تاثیری بر هادی B نخواهد داشت.



شکل ۳۸

POWEREN.IR

۳۹- بار حجمی با چگالی $\rho = \frac{۱}{۴+x^۲}$ در فضای آزاد در مختصات قائم توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی را در نقطهٔ $P(۱,۱,۱)$ محاسبه کنید. (کارشناسی ارشد برق ۷۵)

۴۰- میدان الکتریکی در مختصات کروی با رابطه $\mathbf{E} = R\,\mathbf{a}_R + \frac{۱+\sin\theta}{\cos\theta}\,\mathbf{a}_\theta$ بیان شده است. اگر بار در نقطه $(۱,\frac{\pi}{۴},۰^\circ)$ قرار گیرد، در چه نقطه‌ای به محور r برخورد می‌کند؟ (کارشناسی ارشد برق)

۴۱- n قطره هادی هر کدام دارای پتانسیل $V_۰$ می‌باشند. اگر پتانسیل قطره‌ای که از به هم پیوستن این قطره‌ها به وجود می‌آید $۱۶V_۰$ باشد، در این صورت n چقدر است؟ [۳]

۴۲- در شکل (۲-۱۰۹) کره‌های A و B با شعاع‌های a و b رسانا هستند و فاصلهٔ مراکز آنها از هم d است. پوستهٔ رسانای کروی بی‌بار به شعاع c کرهٔ A را در بر می‌گیرد و با آن هم‌مرکز است. اگر کرهٔ B دارای بار Q باشد و کرهٔ A به زمین وصل شده باشد، با شرط $d >> b$ ، چقدر بار روی سطح کرهٔ B جمع می‌شود؟ [۴]

۴۳- در شکل (۲-۱۱۰) دو کرهٔ رسانا با شعاع‌های برابر a و به فاصلهٔ d ($d >> a$) با سیم نازکی به هم متصل شده‌اند. بار نقطه‌ای q روی خط واصل دو کره و در فاصلهٔ $\frac{d}{۴}$ از کرهٔ سمت چپ واقع است. با فرض اینکه سیم نازک توزیع میدان الکتریکی در فضا را به هم نمی‌زند، پتانسیل کره‌ها چقدر است؟ [۴]

۴۴- دو پوستهٔ یک خازن کروی را به پتانسیل صفر وصل کرده‌ایم و بار نقطه‌ای q را در فاصلهٔ R از مرکز دو کره قرار داده‌ایم. بار القاء شده روی پوستهٔ کروی داخلی را بیابید. این مقدار را برای تمام حالات ممکن محاسبه کنید.

۴۵- هر ضلع یک N ضلعی منتظم را یک خط بار با چگالی λ تشکیل داده است. با فرض اینکه شعاع دایرهٔ محیطی این N ضلعی برابر R باشد.

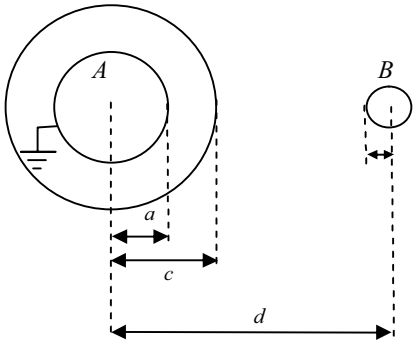
الف) مطلوب است محاسبهٔ میدان ناشی از این N ضلعی در نقطه‌ای روی محور آن و به ارتفاع h .

ب) نشان دهید که میدان فوق با میل کردن N به سمت بی‌نهایت ($N \to \infty$) به میدان یک حلقهٔ بار تبدیل می‌شود.

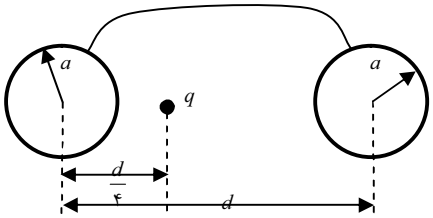
۴۶- یک گوه عایقی با نیم‌صفحات نامتناهی دارای ثابت دی الکتریک k می‌باشد، در یک میدان الکتریکی یکنواخت E_φ قرار دارد. چگالی بار سطحی مقید σ_p روی یک رویه آن وجود دارد. گوه در امتداد عمود بر صفحات کاغذ یکنواخت است.

الف) میدان الکتریکی **E** و چگالی شار الکتریکی **D** را داخل و خارج گوه دی الکتریک به دست آورید.(از اثرات لبه‌ها صرفنظر کنید.)

ب) میدان‌های **E** و **D** را برای مقادیر $k = ۵$ و $\sigma_p = ۱$ محاسبه کنید.



شکل ۲-۱۰۹: شکل مسئلهٔ ۴۲

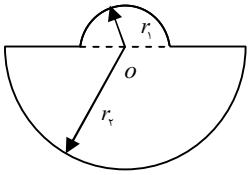


شکل ۲-۱۱۰: شکل مسئلهٔ ۴۳

۴۷- در شکل (۲-۱۱۱) چگالی با خطی روی نیم‌دایرهٔ با شعاع $r_۱$ برابر $\lambda_۱$ و روی نیم‌دایرهٔ با شعاع $r_۲$ و در بازهٔ دو طرف آن $\lambda_۲$ است. در هر یک از حالات زیر نسبت $\frac{\lambda_۱}{\lambda_۲}$ را بیابید:

الف) میدان در نقطهٔ o صفر باشد.

ب) پتانسیل در نقطهٔ o صفر باشد.



شکل ۲-۱۱۱: شکل مسئلهٔ ۴۷

۴۸- یک سیم هادی با شعاع a حامل بار الکتریکی آزاد با چگالی خطی λ در امتداد محور یک استوانه مستدیر (با شعاع b) دی الکتریک با گذردهی ε_R قرار دارد.

الف) بار الکتریکی مقید را روی دو سطح داخلی و خارجی استوانه دی الکتریک تعیین کنید. چه ارتباطی بین این بارهای مقید وجود دارد؟

ب) چگالی بار خطی منتجه (بارهای آزاد و مقید) را در امتداد سیم هادی در شعاع a بدست آورید.

۴۹- بار نقطه‌ای Q به فاصله d از مرز دو ناحیه عایق با گذردهی‌های ε_1 و ε_2 قرار دارد. نشان دهید میدان داخل ناحیهٔ اول را می‌توان ناشی از بار q و بار تصویر q' دانست، که هر دو در ناحیه‌ای با گذردهی ε_1 قرار داشته باشند و میدان ناحیه دوم را ناشی از بار q'' واقع در محل بار نقطه‌ای q ، با فرض اینکه گذردهی کل فضا ε_2 است. (راهنمایی: برای این منظور باید نشان دهید که با انتخاب مناسب مقادیر q' و q'' در هر حالت ، شرایط مرزی ارضاء می‌شود.)

۵۰- بار سطحی یکنواخت ρ_s روی سطح کره‌ای به شعاع R_1 هم مرکز با کره‌ای فلزی با پتانسیل V_0 به شعاع a پخش شده است، ($R_1 > a$) مطلوب است محاسبهٔ پتانسیل در فضای $a < R < R_1$.

۵۱- فضای $y > 0$ هوا و فضای $y < 0$ با یک دی‌الکتریک نسبی $\varepsilon_r = 4$ پر شده و بار q در نقطهٔ $y = 2a$ روی محور yها ثاقع است. کره فرضی به مرکز مبداء مختصات و شعاع a را در نظر بگیرید. حاصل $\dfrac{\int_{S_R} \mathbf{E}.\mathbf{d}s}{\int_{S_L} \mathbf{E}.\mathbf{d}s}$ که در آن S_R و S_L به ترتیب سطوح نیم‌کره‌های واقع در $y > 0$ و $y < 0$ هستند، چقدر است؟ (کارشناسی ارشد برق)

۵۲- دسته سطوح هم‌پتانسیل توسط رابطهٔ $y^2 = x\,y + c$ بیان می‌شوند. از طرفی می‌دانیم که $E_z = 0$ است. در صورتیکه در نقطهٔ (۲,۵,۷) مقدار $E_x = 20\dfrac{V}{m}$ باشد، $\mathbf{E}$ را بیابید. (کارشناسی ارشد برق)

مثال کلیدی

۵۳- یک کرهٔ رسانای حامل بار Q توسط یک پوستهٔ رسانای کروی احاطه شده است.

الف) بار خالص روی سطح داخلی پوسته چیست؟

ب) یک بار q دیگر بیرون پوسته قرار داده می‌شود. در این حالت بار خالص روی سطح داخلی پوسته چیست؟

پ) اگر q به مکانی بین پوسته و کره منتقل شود، بار خالص روی سطح داخلی پوسته چه خواهد بود؟

ت) آیا پاسخ‌های شما در صورتیکه کره و پوسته هم‌مرکز نباشند، معتبر است؟

۵۴- پوستهٔ کروی نازک، رسانا و منفردی را در نظر بگیرید که به طور یکنواخت باردار شده و چگالی بار آن σ است. کار انجام شده برای انتقال بار مثبت آزمون را در حالات زیر بدست آورید:

الف) از سطح کره به داخل آن از طریق یک حفره.

ب) از یک نقطه روی سطح به نقطهٔ دیگر (بدون در نظر گرفتن مسیر).

پ) از یک نقطه به نقطهٔ دیگر در داخل پوسته.

ت) از یک نقطه مثل p در خارج پوسته در هر مسیر دلخواه (چه از پوسته عبور کند یا نه) و برگشت به نقطهٔ p.

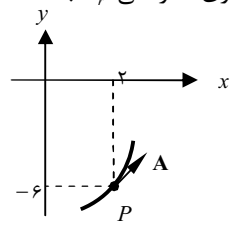
ث) برای شرایط فرض شده، آیا رسانایی کره مهم است یا نه؟

۵۵- باری با چگالی زیر داریم:

$$\rho = \begin{cases} \dfrac{\rho_\circ R}{a} & R < a \\ \circ & R > a \end{cases}$$

می‌خواهیم این بار را به طور یکنواخت در $R < a$ توزیع کنیم. برای این منظور چقدر انرژی لازم است؟

۵۶- شکل (۲-۱۱۲) قسمتی از سطح مقطع یک رسانای کامل که در امتداد محور z بی‌نهایت فرض می‌شود را نشان می‌دهد. در نقطهٔ $P(۲,-۶,\circ)$ روی مرز رسانا و هوا چگالی بار سطحی $\rho_s = \sqrt{۱\circ}\,\varepsilon_\circ$ وجود دارد. برداری مثل $\mathbf{A}$ در این نقطه بر سطح رسانا مماس است. شدت میدان الکتریکی را در این نقطه پیدا کنید. (کارشناسی ارشد برق)



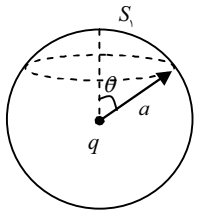
شکل ۲-۱۱۲: شکل مسئلهٔ ۵۶

۵۷- یک استوانهٔ بی‌نهایت به شعاع a به طور یکنواخت قطبیده شده و P در جهت x است. میدان و پتانسیل را در داخل و خارج استوانه بیابید.

۵۸- در شکل (۲-۱۱۳) بار نقطه‌ای q در مرکز کره‌ای با شعاع قرار دارد. مطلوب است محاسبهٔ شار خارج شونده از سطح $S_۱$ در هر یک از حالات زیر: (کارشناسی ارشد برق)

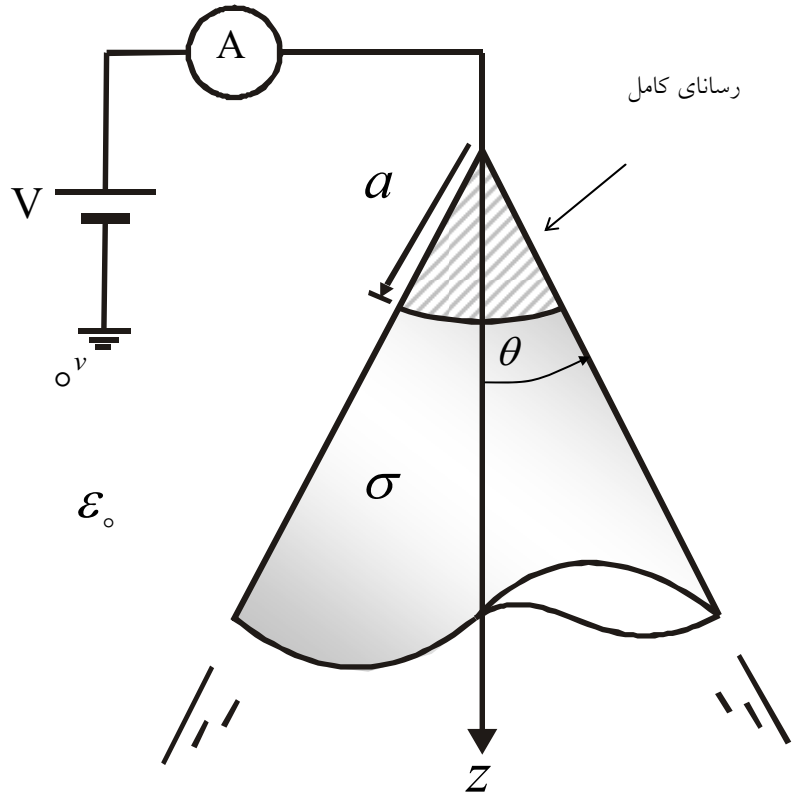
الف) کره دارای گذردهی نسبی $\varepsilon_\circ$ باشد.

ب) کره داری گذردهی ε_r باشد.



شکل ۲-۱۱۳: شکل مسئلهٔ ۵۸

یادداشت: .....



فصل سوم : روش‌های خاص حل مسائل الکترواستاتیک و تئوری جریان‌های دائم

فصل سوم: روش‌های خاص حل مسائل الکترواستاتیک و تئوری جریان‌های دائم

- **۱- روش‌های خاص حل مسائل الکترواستاتیک**
  - ۳-۲- روش تصویر
    - ۳-۲-۱- روش تصویر در هادی‌ها
    - ۳-۲-۲- تئوری تصاویر در عایق‌ها
  - ۳-۳- قضیهٔ هم‌پاسخی گرین
    - ۳-۳-۱- بیان اول قضیهٔ هم‌پاسخی
    - ۳-۳-۲- بیان دوم قضیهٔ هم‌پاسخی
  - ۳-۴- معادلات لاپلاس و پواسون
    - ۳-۴-۳- حل معادله لاپلاس یک متغیره
    - ۳-۴-۴- حل معادلهٔ لاپلاس در دو بعد
    - ۳-۴-۵- حل معادلهٔ لاپلاس در سه بعد
    - ۳-۴-۶- تئوری نقطهٔ میانی
- **۲- تئوری جریان‌های دائم**
  - ۳-۵-۱- انواع جریان‌های الکتریکی
  - ۳-۵-۲- رسانندگی
  - ۳-۵-۳- شرایط مرزی چگالی جریان
  - ۳-۵-۴- مقاومت
  - ۳-۵-۵- سیستم‌های مقاومتی- خازنی
  - ۳-۵-۶- اصل بقای بار و معادلهٔ پیوستگی
- ۳-۶- مسائل پایان فصل

POWEREN.IR

۳-۱- مقدمه

در فصل گذشته به بررسی کلی مباحث الکترواستاتیک پرداختیم. این موضوع را از قانون تجربی کولن شروع کرده و با بررسی پتانسیل، عناوین اصلی این حوزه را مورد مطالعه قرار دادیم. در ادامهٔ فصل دوم با بحث پیرامون تئوری قطبیدگی مواد، شرایط مرزی میدان‌ها و تشریح انرژی و نیرو به فصل پایان دادیم. با این همه، حل برخی از مسائل حوزهٔ الکترواستاتیک نیازمند دانستن تکنیک‌های خاصی است و یا اینکه دانستن این راهکارها، مسیر حل مسئله را کوتاهتر می‌کند. این گونه موارد را در این فصل بیان خواهیم کرد و از اینروست که بخشی از نام فصل را **روش‌های خاص حل مسائل الکترواستاتیک** گذاشته‌ایم. این روش‌ها گستردگی زیادی داشته و بعضا، فقط برای یک یا چند مسئلهٔ خاص به‌کار می‌روند؛ از اینرو در این قسمت سه عنوان کلیدی آنها را که گستردگی جامعی دارند مورد ارزیابی قرار می‌دهیم. این مباحث که به ترتیب با آنها آشنا خواهیم شد، عبارتند از:

۱- روش تصویر.
۲- قضیهٔ هم‌پاسخی گرین.
۳- روش لاپلاس و پواسون.

مباحث فوق بخش اول این فصل را تشکیل می‌دهند. در ادامهٔ فصل **تئوری جریان‌های دائم** بیان شده‌اند. با استفاده از آنها، شرایط الکترواستاتیکی سیستم را در ضمنِ حرکت بار بررسی کرده و آمادگی مناسبی برای ورود به فصل چهارم (مغناطیس ساکن) کسب خواهیم نمود. در این قسمت نیز با مواردی از جمله:

۱- انواع جریان‌ها و توزیع‌های جریانی.
۲- اصل بقای بار و معادلهٔ پیوستگی.
۳- شرایط مرزی چگالی جریان.
۴- روش‌های محاسبهٔ مقاومت.

آشنا خواهیم شد. در هر یک از این قسمت‌ها سعی کرده‌ایم تا با ارائهٔ مثال‌هایی روشن به درک موضوع (تا حد امکان) کمک گردد.

۳-۲- روش تصویر

اگر توزیع باری در مجاورت سطح یک هادی وجود داشته باشد، محاسبهٔ میدان در نقاط مختلف فضا، کار نسبتا دشواری خواهد بود. چرا که بدلیل ویژگی‌های ساختاری هادی (میدان درونی صفر،

میدان در سطح فقط دارای مولفهٔ عمودی) روی سطح هادی بارهایی القاء خواهد شد، در اینصورت برای محاسبهٔ میدان (و یا هر کمیتِ مرتبط) ابتدا بایستی چگالی بارهای القاء شده روی سطح هادی را یافته و سپس میدان را در هر نقطه‌ای از فضا با استفاده از جمع آثار (جمع اثرهای توزیع اولیه و بارهای القایی) بیابیم. که خود مسیری طولانی را در ذهن متصور می‌سازد، از طرفی با توجه به پیچیدگی توزیع بار (که معمولاً اینگونه است) محاسبهٔ انتگرال‌ها نسبتاً دشوار بوده و به صورت دستی قابل حل نیستند. با این تفاسیر تئوری تصاویر را اینگونه بیان می‌کنیم:

> وقتی پیدا کردن میدان ناشی از بارهای نقطه‌ای یا بارهای با توزیع خطی (و در موارد خاصی سطحی) در مجاورت هادی‌هایی با اشکال ساده (و در برخی موارد عایق‌های خطی) مورد نظر باشد از روش تصاویر استفاده می‌شود، با این روش بجای هادی از بار الکتریکی معادلی استفاده می‌کنیم که پتانسیل سطح هادی را در همان مقدار قبلی ثابت نگه دارد.
> مثلا اگر هادی زمین شده باشد، بار تصویر چنان انتخاب می‌شود که مجموع پتانسیل ناشی از بار اصلی و بار تصویر در محلی که قبلا هادی بوده صفر گردد.

بر اساس نوع توزیع، تکنیک‌های روش تصاویر را در عناوین زیر بررسی می‌کنیم:

در مجاورت هادی‌ها:
- الف) بار نقطه‌ای و صفحات هادی
- ب) دوقطبی و صفحهٔ هادی
- ج) بار خطی و استوانهٔ هادی موازی با آن
- د) بار نقطه‌ای و کرهٔ هادی
- ه) بار سطحی کروی و کرهٔ هادی
- و) کرهٔ باردار و صفحهٔ زمین شده

در مجاورت عایق‌ها:
- الف) بار نقطه‌ای و فضای عایق
- ب) بار نقطه‌ای و کرهٔ عایق

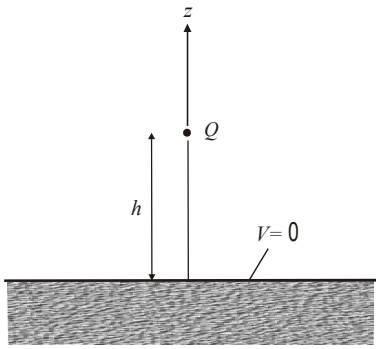
۳-۲-۱- روش تصویر در هادی‌ها

همانطور که در فصل دوم و در قسمت هادی‌ها ذکر شد، هادی، از کاربردی‌ترین ادوات صنعت برق می‌باشد، از اینرو برررسی میدان (و البته سایر کمیت‌ها) در حضور هادی یک نیاز ضروری به‌نظر می‌رسد. در مثال‌های (۲-۴۵) تا (۲-۴۹) تا حدی با روش کار در هادی‌ها آشنا شدیم. با این همه سختی مسیر حل، محققان را به یافتن راهکارهای جدید ترغیب نموده است. آنچه در این قسمت می‌آید، تکمیل‌شدهٔ ایدهٔ تصاویر بوده که مدت‌ها پیش، پژوهشگران از آن استفاده کرده‌اند. ایده‌های جدید مبتنی بر روش اجزای محدود را می‌توانید در پیوست کتاب مطالعه کنید.

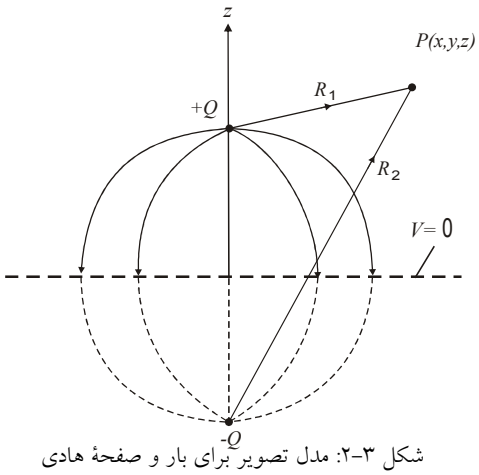
۳-۲-۱-۱- بار نقطه‌ای و صفحات هادی

تصویر یک بار نقطه‌ای $+Q$ قرار گرفته در فاصلهٔ h بالای هادی زمین شده، یک بار نقطه‌ای $-Q$ است در فاصلهٔ h زیر هادی. اگر بخواهیم به این مقدار فیزیکی‌تر نگاه کنیم می‌توان گفت که:

در اثر وجود باری معادل $+Q$ در بالای سطح هادی، باری سطحی با چگالی $\sigma = -\dfrac{Q\,h}{2\,\pi\,(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$ روی سطح هادی القاء می‌شود تا میدان درون آن تغییر نکند. (مثال ۲-۴۱ را ببینید) اگر بخواهیم کل بار القاء شده روی سطح را بدست آوریم، بایستی از این رابطه روی تمام سطح انتگرال بگیریم. (پیشنهاد می‌کنیم این کار را انجام دهید) با انجام این کار به پاسخ جالبی دست خواهید یافت، مشاهده خواهید کرد که کل بار القاء شده روی سطح هادی برابر $-Q$ است، **یعنی همان بار فرضی روش تصویر**.



شکل ۳-۱: بار نقطه‌ای و صفحهٔ هادی



شکل ۳-۲: مدل تصویر برای بار و صفحهٔ هادی

به شکل (۳-۱) توجه کنید. در این شکل بار Q دارای مشخصات مطرح شده در فوق است. از این جهت بار تصویر را همانگونه که در شکل (۳-۲) نشان داده شده، در نظر گرفته‌ایم. حال کافی است برای محاسبهٔ هر کمیتی از نیرو و میدان گرفته تا پتانسیل و در هر نقطهٔ بالای هادی از جمع آثار ناشی از همین دو بار استفاده کنیم. به مثال‌های (۳-۱) و (۳-۲) توجه کنید.

مثال ۳-۱ مطلوب است رسم بارهای تصویر برای شکل (۳-۳) .

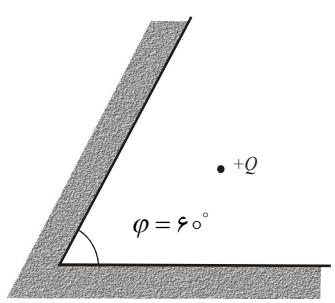
حل: در مسائلی از این نوع، که بار نقطه‌ای در مجاورت سطح دو هادی منقطع قرار دارد، برای محاسبهٔ تعداد بارهای تصویر از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$N = \left(\frac{۳۶۰}{\varphi} - ۱\right) \qquad (۳-۱)$$

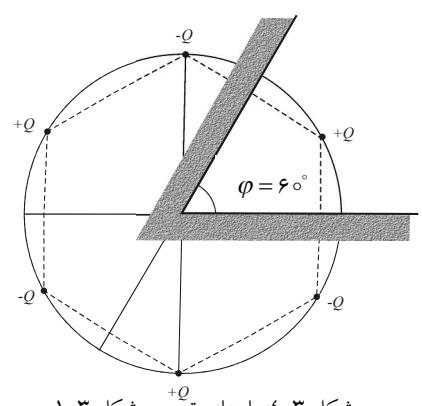
در این رابطه N تعداد بارهای تصویر و φ زاویهٔ بین دو صفحه است. مثلا برای شکل (۳-۳) داریم:

$$N = \left(\frac{۳۶۰}{۶۰} - ۱\right) = ۵$$

و این یعنی باید ۵ بار تصویر برای شکل مفروض رسم کنیم. لازم به ذکر است که این بارها روی دایره‌ای به مرکز محل تقاطع و شعاعی به اندازهٔ فاصلهٔ بار اصلی از محل تقاطع قرار دارند. به شکل (۳-۴) توجه کنید تا این موضوع را دریابید.



شکل ۳-۳: شکل مثال ۳-۱



شکل ۳-٤: بارهای تصویر شکل ۳-۱

مثال ۳-۲ بار نقطه‌ای Q مطابق شکل (۳-۵) و با فاصله‌های مشخص شده از دو صفحهٔ هـادی زمـین شده قرار دارد. نیروی وارد بر Q را در نتیجهٔ بارهای القایی روی صفحات تعیین کنید.

حل: بارهای تصویر را مطابق شکل (۳-۶) انتخاب می‌کنیم. حال نیروی وارد بر این بار را بـا اسـتفاده از جمع آثار پیدا می‌کنیم. پس:

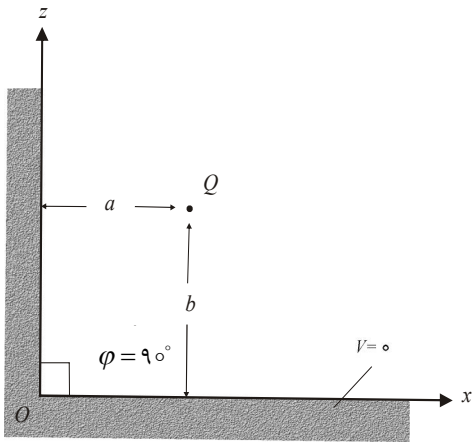
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{a}_z \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 (2b)^2} \quad ، \quad \mathbf{F}_2 = -\mathbf{a}_x \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 (2a)^2}$$

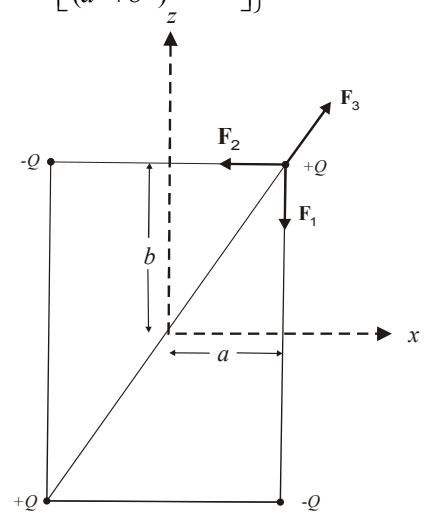
$$\mathbf{F}_3 = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 \left[(2a)^2 + (2b)^2\right]^{\frac{3}{2}}} (\mathbf{a}_x 2a + \mathbf{a}_z 2b)$$

حال از جمع آثار استفاده می‌کنیم:

$$\mathbf{F} = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0} \left\{ \mathbf{a}_x \left[\frac{a}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{a^2} \right] + \mathbf{a}_z \left[\frac{b}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{b^2} \right] \right\}$$



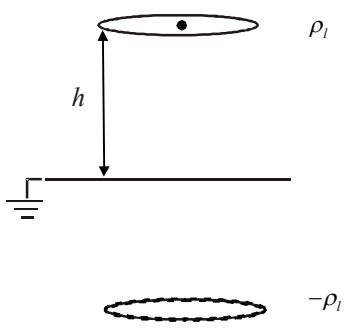
شکل ۳-۵ : شکل مثال ۳-۲



شکل ۳- ٦: روش تصویر مربوط به شکل ۳-۵

مثال ۳-۳ حلقه‌ای به شعاع a و چگالی بار طولی ρ_ℓ در فاصلهٔ h از صفحهٔ هادی زمین شده قرار دارد. میدان الکتریکی را در مرکز حلقه بدست آورید. (کارشناسی ارشد برق)

حل: روش تصویر نه فقط در مورد بار نقطه‌ای بالای صفحهٔ هادی زمین‌شده، بلکه در مورد هر نوع توزیع بار یکنواختی بالای این صفحه، صادق است. مثال اخیر نمونه‌ای از این موارد است. در این حالت، بار تصویر برابرست با یک حلقهٔ با چگالی بار $-\rho_\ell$ و به فاصلهٔ h زیر هادی. پس میدان در نقطهٔ مورد نظر از جمع آثار این دو توزیع بار بدست می‌آید. از طرفی طبق نتیجهٔ مثال (۲-۶)، یعنی رابطهٔ (۲-۲۲)، میدان در نقطه‌ای به فاصلهٔ h از یک حلقهٔ باردار عبارتست از:



شکل ۳-۷: شکل مثال ۳-۳

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_l\, h\, a}{2\varepsilon_\circ \left(a^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}\, \mathbf{a}_z$$

با این تفاسیر، میدان ناشی از توزیع بار حلقوی ρ_ℓ در مرکز آن (یعنی $h = \circ$) برابر صفر بوده و در مورد میدان بار تصویر هم داریم:

$$\mathbf{E} = \frac{-\rho_l\,(2h)\,a}{2\varepsilon_\circ \left(a^2 + (2h)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\, \mathbf{a}_z$$

مثال ۳-۴ بار نقطه‌ای q بالای صفحهٔ زمین بی‌نهایت و به ارتفاع h از آن قرار دارد. خط میدانی که به موازات صفحهٔ زمین از بار نقطه‌ای خارج می‌شود، در چه فاصله‌ای از نقطه‌ی o با صفحهٔ زمین برخورد می‌کند. (کارشناسی ارشد برق ۶۷)

حل: همانطور که در فصل دوم محاسبه کردیم (تمرین ۲-۳۰ را ببینید)، چگالی سطحی بار القایی در نقطه‌ای به فاصلهٔ r از نقطهٔ o عبارست از:

$$\rho_s = \frac{-q\, h}{2\pi (r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (۲-۳)$$

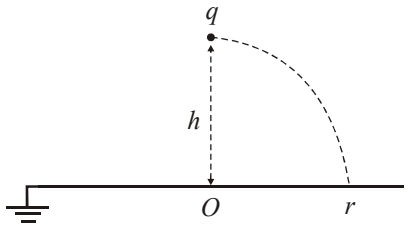
چون کل بار القایی در صفحهٔ زمین $-q$ است (بر طبق تئوری تصاویر و توضیحات ابتدای بخش) بار القا شده در فاصلهٔ o تا نقطه‌ای به فاصلهٔ r برابر $\frac{-q}{۲}$ است، زیرا خطی که موازی صفحهٔ زمین‌شده از بـار q خارج می‌شود از وسط بار q می‌گذرد. پس کافی است از توزیع فوق روی سطح انتگرال گرفته و پاسخ را برابر $\frac{-q}{۲}$ در نظر بگیریم. مقدار r محاسبه شده از این طریق همان فاصلهٔ مورد نظر خواهد بود. پس:

$$\int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{r}\rho_s\ ds=-\frac{q}{۲}\ \Rightarrow\ \int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{r}\frac{-q\ h\ r\ dr\ d\varphi}{۲\pi\,(r^{۲}+h^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}=-\frac{q}{۲}\ \rightarrow\ \int_{\circ}^{r}\frac{-q\ h\ r\ dr}{(r^{۲}+h^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}=-\frac{q}{۲}$$

$$-q\,h\left[\frac{-۱}{(r^{۲}+h^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}\right]\Bigg|_{\circ}^{r}=-\frac{q}{۲}$$

که نتیجه می‌دهد:

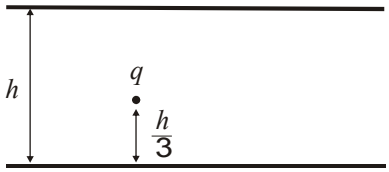
$$h\left[\frac{۱}{h}-\frac{۱}{\sqrt{r^{۲}+h^{۲}}}\right]=\frac{۱}{۲}\ \rightarrow\ ۱-\frac{h}{\sqrt{r^{۲}+h^{۲}}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow r=\sqrt{۳}\,h$$



شکل ۳-۸: شکل مثال ۳-٤

مثال (۳-۱)، نحوهٔ نمایش بارهای تصویر در فضای بین دو هادی متقاطع را بـه مـا آمـوزش داد. بـا استفاده از این مفهوم و نیز روابط فصل دوم، در مثال (۳-۲) (که مثال رایج تقریباً تمام کتاب‌هاست) بـه محاسبهٔ نیرو پرداختیم. طبیعی است که در صـورت مـوازی شـدن دو صـفحهٔ هـادی ($\varphi=\circ$)، تعـداد تصاویر بی‌نهایت خواهد بود. در اینگونه مواقع باید از ایدهٔ سری‌های بی‌نهایت استفاده نمـاییم. چگـونگی محاسبهٔ اینگونه مسائل را در تمرین (۳-۱) بررسی خواهیم نمود.

تمرین ۳-۱: بار نقطه‌ای q بین دو صفحهٔ هادی موازی قرار دارد. فاصلهٔ دو صفحه h و فاصلهٔ بار تا صفحهٔ پایینی $\frac{h}{۳}$ است . نیروی وارد بر بار Q را بیابید.



شکل ۳-۹: شکل تمرین ۳-۱

۳-۲-۱-۲- دوقطبی و صفحهٔ هادی

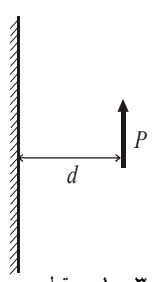
اگر دوقطبی الکتریکی را با استفاده از تعریف، دو بار نقطه‌ای مختلف‌العلامت فرض کنیم، می‌توانیم تصویر آن را در مجاورت سطح یک هادی زمین شده بیابیم. برای این منظور به ترتیب به شکل‌های (۳-۱۰) تا (۳-۱۲) توجه کنید:

در شکل (۳-۱۰) یک دوقطبی را در مجارت سطح هادی زمین شده می‌بینید. در شکل (۳-۱۱) دوقطبی را با بارهای معادل آن مدل کرده و تصویر هر کدام از این بارها را یافته‌ایم. در شکل (۳-۱۲) مدل مذکور را به دوقطبی تبدیل کرده‌ایم. از این شکل‌ها می‌توان نتیجه گرفت که:

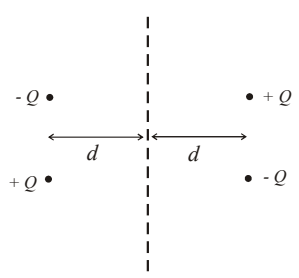
نکتهٔ طلایی

تصویر یک دوقطبی در مجاورت صفحهٔ هادی، یک دوقطبی با جهت مخالف است.

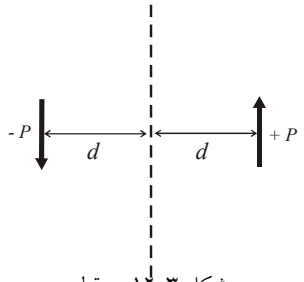
مجاورت دوقطبی و سطوح هادی مسائل مختلفی را پدید می‌آورد. دسته‌ای از این مسائل (همچون گذشته) به بررسی میدان، پتانسیل، نیرو و ... می‌پردازند. دسته‌ای دیگر همین کمیت‌ها را در حضور تعداد وسیع‌تری از دوقطبی‌ها، یعنی در حضور قطبیدگی، مورد ارزیابی قرار می‌دهند. توجه داشته باشید که روش تصویر برای دوقطبی معمولاً در مجاورت صفحات زمین شده مطرح می‌گردد. بررسی



شکل ۳-۱۰: دوقطبی در مجاورت صفحهٔ هادی



شکل ۳-۱۱: مدل بار نقطه‌ای دوقطبی



شکل ۳-۱۲: دوقطبی تصویر

کمیات مختلف در حضور صفحات هادی زمین‌نشده و یا سطوح دیگر (همچون کره)، از جمله مباحثی است که در قسمت معادلات لاپلاس و پواسون به آنها خواهیم پرداخت.

مثال ۳-۵ یک دوقطبی الکتریکی با بردار ممان $\mathbf{P}$ مانند شکل (۳-۱۳) در فاصلهٔ d به موازات یک صفحهٔ هادی نامتناهی قرار دارد، پتانسیل الکتریکی در نقاط دور R (یعنی $R >> d$):

الف) چگونه است؟ (کارشناسی ارشد برق)

ب) بدون حل حدس بزنید که چه تابعی از R دارد؟

حل: ابتدا به قسمت ب پاسخ می‌دهیم تا خوانندهٔ هوشمند از حل قسمت الف بی‌نیاز گردد!

ب) همانطور که ذکر شد، دوقطبی مذکور و تصویر آنرا می‌توان مشابه شکل (۳-۱۱)، با چهار بار الکتریکی معادل فرض نمود. کمی دقت در این شکل نشان می‌دهد که با یک چهارقطبی الکتریکی مواجهیم. از طرفی طبق رابطهٔ (۲-۹۰) پتانسیلِ ناشی از یک $2n$قطبی الکتریکی و در فواصل دور از آن با رابطهٔ زیر متناسب است:

$$V \propto \frac{1}{R^{n+1}}$$

پس، بدون حل می‌توان گفت که پاسخ پتانسیل ناشی از شکل (۳-۱۳) با $\frac{1}{R^3}$ متناسب خواهد بود.

الف) تصویر دوقطبی را مشابه شکل (۳-۱۴) در نظر می‌گیریم. مطابق این شکل پتانسیل عبارتست از:

$$V = V_2 - V_1 = \frac{P\,\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_{R_1}}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} - \frac{P\,\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_{R_2}}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} = -\frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right) = -\frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(R_2^2 - R_1^2\right)}{R_1^2 \times R_2^2}$$

برای محاسبهٔ R_1 و R_2 به شکل‌های (۳-۱۴) و (۳-۱۵) توجه کنید:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_1 = \mathbf{R} + \mathbf{d} \\ \left|R_1\right|^2 = R^2 + d^2 + 2R\,d\cos\left(90 - \theta\right) \rightarrow R_1 \simeq \left(R^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{2d\sin\theta}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq R + d\sin\theta \end{cases}$$

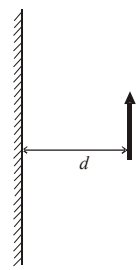
به صورت مشابه:

$$R_2 \simeq R - d\sin\theta$$

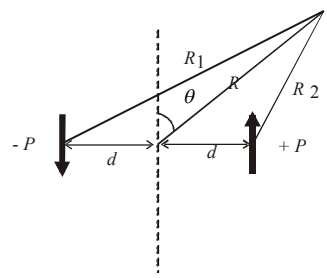
از طرفی کاملاً بدیهی ست که: $R_1^2 \times R_2^2 = R^4$

در اینصورت:

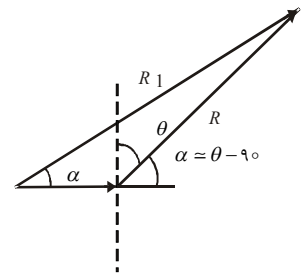
$$V = -\frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(R_2^2 - R_1^2\right)}{R_1^2 \times R_2^2} = \frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4R\,d\sin\theta}{R^4} = \frac{P\,d\sin 2\theta}{2\pi\varepsilon_0 R^3}$$



شکل ۳- ۱۳: شکل مثال ۳-۵



شکل ۳-۱٤



شکل ۳-۱۵

مثال ۳ -۶ دوقطبی **P** بالای سطح هادی زمین‌شده‌ای قرار گرفته است. طبیعی است که در اثر القای بار بر سطح هادی نیرویی بر این دوقطبی وارد گردد. این نیرو و نیز گشتاور وارد بر دوقطبی را بیابید.

حل: مشابه شکل (۳-۱۶) عمل می‌کنیم. در این شکل بردارهای پلاریزاسیون به مولفه‌های سازندهٔ آنها تقسیم شده‌اند. در حقیقت قصد داریم، مطابق حل تمرین (۲-۵۴) و از روابط قرار گرفته در این مدل کادر استفاده کنیم. برای مرور بیشتر این روابط را تکرار می‌کنیم. در ضمن، فرض می‌کنیم که بردار پلاریزاسیون به صورت $\mathbf{P} = P\left(\mathbf{a}_z + \mathbf{a}_x\right)$

مطابق رابطهٔ (۲-۱۲۲) آموختیم که نیروی ناشی از دو دوقطبی پشت سر هم (قرار گفته بر روی محور z ها) و به فاصلهٔ R از یکدیگر عبارتست از:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{6P^2}{4\pi\varepsilon_0 R^4}\,\mathbf{a}_z \qquad (۳-۳)$$

مطابق رابطهٔ (۲-۱۲۳) آموختیم که نیروی ناشی از دو دوقطبی موازی با هم (و به موازات محور r ها) و به فاصلهٔ R از یکدیگر عبارتست از:

$$\mathbf{F}_{۲} = \frac{۳P^{۲}}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R^{۴}}\,\mathbf{a}_R \qquad (۴\text{-}۳)$$

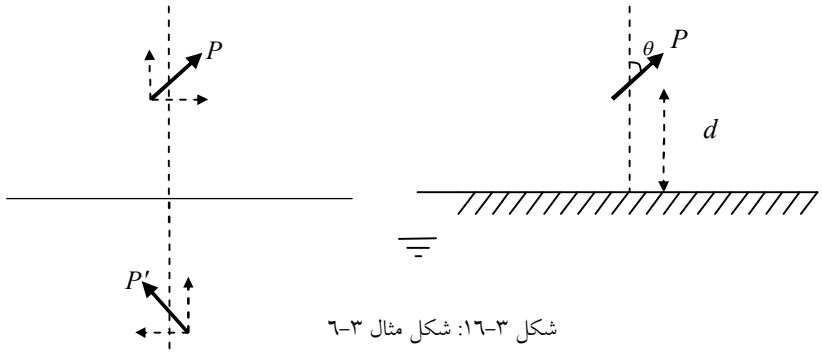
کافی است همین عمل را برای دوقطبی‌های شکل (۳-۱۶) انجام دهیم. با توجه به روابط فوق می‌توان گفت که نیروی کل برابر است با:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{۱} - \mathbf{F}_{۲}$$

و در نتیجه با فرض $R = ۲d$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{۱} - \mathbf{F}_{۲} = \frac{۶P^{۲}}{۴\pi\varepsilon_{\circ}(۲d)^{۴}}\,\mathbf{a}_z - \frac{۳P^{۲}}{۴\pi\varepsilon_{\circ}(۲d)^{۴}}\,\mathbf{a}_R$$

- اگر فرض کنیم که میدان ناشی از دوقطبی بالایی معادل $\mathbf{E} = \frac{P}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R^{۳}}(۲\cos\theta\,\mathbf{a}_R + \sin\theta\,\mathbf{a}_\theta)$ است، آنگاه طبق رابطهٔ (۲-۱۲۱) گشتاور از رابطهٔ $\mathbf{T} = \mathbf{P}' \times \mathbf{E}$ محاسبه می‌شود. با فرض پلاریزاسیون به صورت $\mathbf{p}' = P(-\mathbf{a}_r + \mathbf{a}_z)$، این ضرب خارجی را محاسبه نمایید!



شکل ۳-۱۶: شکل مثال ۳-۶

مثال ۳-۷ فضای درون یک استوانه به شعاع واحد و ارتفاع واحد توسط دوقطبی‌های میکروسکوپی اشغال شده است. بردار پلاریزاسیون برای این توزیع $\mathbf{P} = P_{\circ}\,\mathbf{a}_z$ که در آن $P_{\circ} = \frac{۱۰^{-۹}}{۳۶\pi}\left(\frac{C}{m^{۲}}\right)$ است. این استوانه نظیر شکل (۳-۱۷)، در بالای یک صفحهٔ نامحدودِ رسانا با پتانسیل صفر ولت قرار دارد و فضای اطراف آن خلاء است. میدان الکتریکی را در مرکز قاعدهٔ پایینی استوانه محاسبه کنید. (ارشد برق ۸۵)

حل: ابتدا بارهای مقید را یافته و سپس از روش تصاویر استفاده می‌کنیم. بارهای مقید سطحی روی سطوح بالایی و پایینی استوانه بترتیب برابرند با:

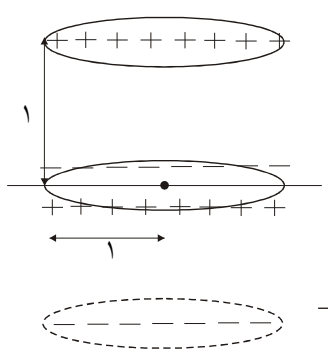
$$\rho_{sb_1} = \mathbf{P}\,.\,\mathbf{a}_z = P_\circ \quad ، \quad \rho_{sb_2} = \mathbf{P}\,.\,(-\mathbf{a}_z) = -P_\circ$$

حال مطابق شکل (۳-۱۸) از جمع آثار ناشی از این توزیع‌ها استفاده می‌کنیم. میدان را در نقطهٔ خواسته‌شده، با استفاده از رابطهٔ (۲-۲۷) محاسبه می‌کنیم:

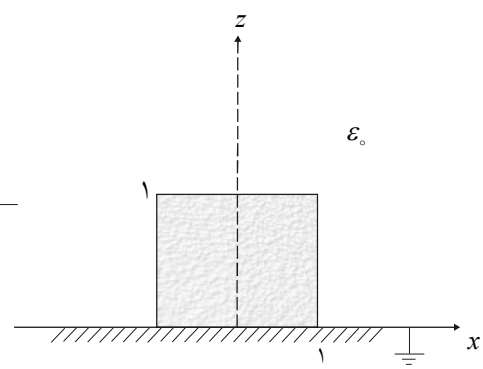
$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_\circ}\left(1-\cos\theta\right)\mathbf{a}_z$$

میدان برآیند عبارتست از:

$$\mathbf{E} = \frac{-P_\circ}{2\varepsilon_\circ}\left(1-\cos\left(45^\circ\right)\right)\mathbf{a}_z + \frac{P_\circ}{2\varepsilon_\circ}\left(1-\cos\left(45^\circ\right)\right)\left(-\mathbf{a}_z\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)\mathbf{a}_z$$

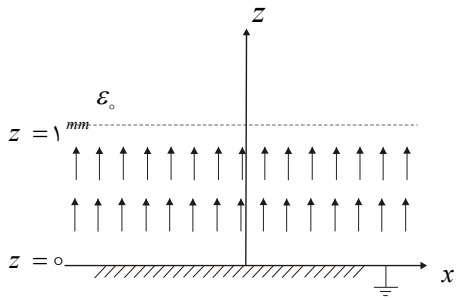


شکل ۳-۱۸



شکل ۳-۱۷: شکل مثال ۳-۷

تمرین ۳-۲: در شکل (۳-۱۹)، صفحهٔ $z = \circ$ یک صفحهٔ رسانای نامتناهی با پتانسیل الکتریکی صفر ولت است. ناحیهٔ $z > 1^{mm}$ فضای خالی و بخش $\circ \le z \le 1^{mm}$ این ناحیه توسط دوقطبی‌های الکتریکی میکروسکوپی اشغال شده است. گشتاور هر یک از دوقطبی‌های میکروسکوپی $\mathbf{P} = 2\times10^{-18}\,\mathbf{a}_z$ و تعداد آنها در واحد حجم 10^{11} است. پتانسیل

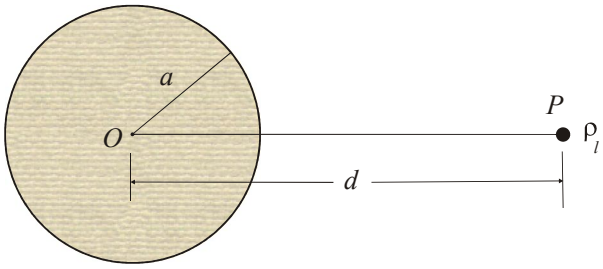


شکل ۳-۱۹: شکل تمرین ۳-۲

الکتریکی ناشی از این دوقطبی‌ها در نقطهٔ $(x, y, z) = (0, 0, 0.5^{mm})$ چند ولت خواهد بود؟ (کارشناسی ارشد برق ۸۶)

۳-۲-۱-۳- بار خطی و استوانهٔ هادی و موازی

در این حالت بار خطی $\rho_\ell(\frac{c}{m})$ قرار گرفته در فاصلهٔ d از محور یک استوانهٔ هادی موازی با آن به شعاع a را در نظر می‌گیریم. همانطور که پیش از این ذکر شد، توزیع بار تصویر باید به نحوی باشد که شرایط مرزی پتانسیل در فضا برقرار باشد. اما در این حالت چه شرطِ مرزی می‌تواند برقرار گردد؟ شرط مرزی از ویژگی فیزیکی سیستم استنتاج می‌شود، سطح هادی معادل یک سطح هم‌پتانسیل است.



شکل ۳-۲۰: بار خطی در مجاورت استوانهٔ هادی

توجه داریم که:

تصویر باید یک بار خطی موازی در درون استوانه باشد تا اینکه سطح استوانه را در $r = a$ یک سطح هم‌پتانسیل کند. و از طرفی با توجه به تقارن، طبیعی است که در امتداد OP باشد. برای بررسی بیشتر بیایید مثال (۲-۳۰) را با هم بررسی کنیم. در این مثال دو خط بارِ مساوی و مختلف‌العلامت داده شده و معادلهٔ پتانسیل (و البته خطوط هم‌پتانسیل) خواسته شده بود. همانطور که دیدیم، خطوط هم‌پتانسیل، خطوطی دایره شکل هستند. از این مثال ایده گرفته و به محاسبهٔ بار تصویر می‌پردازیم. با توجه به این مثال بار تصویر را معادل $\rho_i = -\rho_\ell$ فرض کرده و صحت برقراری شرطِ مرزی پتانسیل را بررسی خواهیم نمود. برای این منظور می‌توان گفت که:

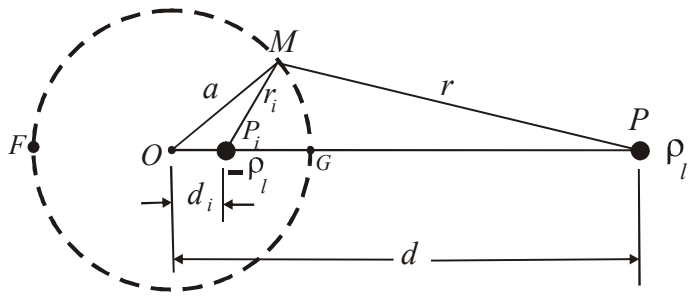
اگر قرار باشد یک سطح هم‌پتانسیل بر سطح استوانه منطبق شود، نقطهٔ P_i باید به صورتی قرار گیرد که مثلث‌های OMP_i و OMP متشابه باشند. یعنی:

$$\frac{P_iM}{PM} = \frac{OP_i}{OM} = \frac{OM}{OP}$$

به عبارت دیگر باید داشته باشیم:

$$\frac{r_i}{r} = \frac{d_i}{a} = \frac{a}{d}$$

که نتیجه می‌دهد:



شکل ۳-۲۱: بار تصویر در مجاورت سطح هادی استوانه‌ای

$$\boxed{d_i = \frac{a^2}{d}} \qquad (۳-۵)$$

و این یعنی:

نکتهٔ طلایی

تصویرِ یک بار خطی به چگالی ρ_ℓ و به فاصلهٔ d از مرکز استوانه‌ای به شعاع a ، یک بار خطی $-\rho_\ell$ است که در فاصلهٔ $\frac{a^2}{d}$ از مرکز استوانه قرار گرفته باشد.

تذکر:

۱- همانطور که نشان داده شد، با استفاده از تشابه مثلث‌ها به اثبات صحت بار تصویر مورد نظر پرداختیم. دلیل استفاده از تشابه را می‌توانید از قضیهٔ زیر نتیجه‌گیری کنید:

نقاطی که نسبت فواصلشان از دو نقطهٔ ثابت برابر مقدار معینِ c باشد، دایره‌ایست به قطر مزدوج توافقی این دو نقطه. یعنی:

$$\frac{PG}{P_iG} = \frac{PF}{P_iF}$$

۲- بدون استفاده از تشابه نیز می‌توانستیم به رابطهٔ (۳-۵) دست یابیم، کافی بود برابری پتانسیل را در نقاط F و G (که روی سطح استوانه‌اند و طبق فرض، پتانسیل‌شان یکسان است) بررسی کنیم. این کار را در تمرین (۳-۳) به شما واگذار کرده‌ایم.

تمرین ۳-۳: با استفاده از ایدهٔ بیان شده در تذکر ۲، رابطهٔ (۳-۵) را نتیجه بگیرید.

مثال ۳-۸ دو بار خطی به چگالی ρ_ℓ , $-\rho_\ell$ به فاصلهٔ h از زمین قرار دارند. فاصلهٔ بارها d و شعاع هر کدام a می‌باشد، ظرفیت خازن بین دو بار خطی را بدست آورید . ($h >> a$, $d >> a$) (کارشناسی ارشد برق)

حل: در سوال (۲-۸۸) ظرفیت همین مجموعه را بدون در نظر گرفتن اثر زمین محاسبه نمودیم. در اینجا با رسم بارهای تصویر (مطابق شکل۳-۲۲) به بررسی ظرفیت می‌پردازیم. براحتی محاسبه می‌شود که پتانسیل ناشی از این مجموعهٔ بار به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$V_p = \frac{\rho_l}{۲\,\pi\,\varepsilon_\circ}\, Ln\left(\frac{r_۲ \times r_۳}{r_۱ \times r_۴}\right)$$

برای محاسبهٔ ظرفیت، ابتدا پتانسیل را در سطح فلزات محاسبه کرده و سپس از رابطهٔ $c = \frac{Q}{V}$ استفاده می‌کنیم. پتانسیل در سطح میلهٔ اول عبارتست از:

$$V_۱ = \frac{\rho_l}{۲\,\pi\,\varepsilon_\circ}\, Ln\left(\frac{d \times ۲h}{a \times \sqrt{d^۲ + (۲h)^۲}}\right)$$

و پتانسیل در سطح میلهٔ دوم:

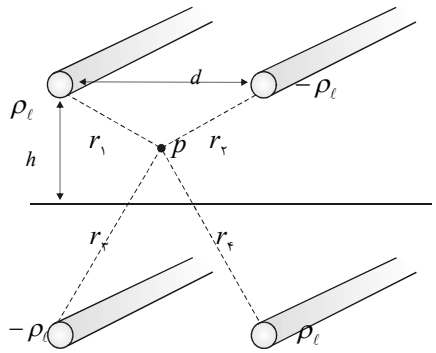
$$V_۲ = \frac{\rho_l}{۲\,\pi\,\varepsilon_\circ}\, Ln\left(\frac{a \times \sqrt{d^۲ + (۲h)^۲}}{d \times ۲h}\right)$$

و اختلاف پتانسیل بین این دو برابر است با:

$$V_۱ - V_۲ = \frac{\rho_l}{\pi\,\varepsilon_\circ}\, Ln\left(\frac{d \times ۲h}{a \times \sqrt{d^۲ + (۲h)^۲}}\right)$$

برای محاسبهٔ ظرفیت بر واحد طول از رابطهٔ $C = \frac{\rho_\ell}{V_۱ - V_۲}$ استفاده می‌کنیم:

$$C = \frac{\pi\,\varepsilon_\circ}{Ln\left(\frac{۲d\,h}{a\sqrt{d^۲ + (۲h)^۲}}\right)} \qquad (۳-۶)$$



شکل ۳-۲۲: شکل مثال ۳-۸

به تفاوت رابطهٔ (۳-۶) و پاسخ مثال (۲-۸۸) یعنی $C_{an} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0}{Ln\dfrac{d}{a}}$ توجه کنید. درصد خطا را برای $h = 10^m$، محاسبه نموده و اثر $h \to \infty$ را بر رابطهٔ (۳-۶) بررسی کنید.

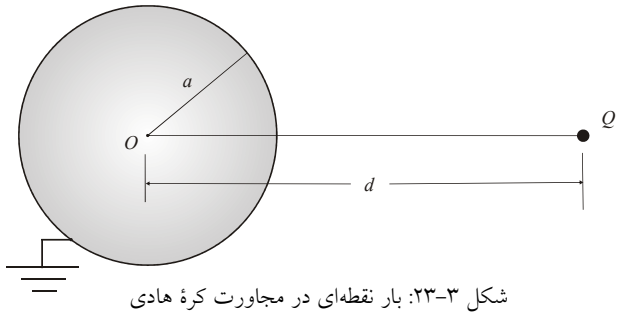
در مثال قبل اثر زمین را بر محاسبهٔ ظرفیت خازنی کابل دوسیمه محاسبه نمودیم. برای این منظور از قواعد تصویرِ مطرح شده در قسمت‌های قبل استفاده کردیم. حال سوال اینجاست که در صورت بزرگ بودن شعاع هادی، ظرفیت خازنی چگونه تغییر خواهد کرد. این موضوع را در تمرین زیر بررسی خواهیم کرد. با توجه به تشابه زیادِ مجاورتِ توزیع بار و استوانهٔ هادی، با کرهٔ هادی، مثال‌های بیشتر را در قسمت بعد، بررسی می‌کنیم.

تمرین ۳-۴: ظرفیت بین دو سیمِ هادی مدورِ موازی طویل به شعاع a را در واحد طول بدست آورید، محور سیم‌ها از هم فاصله D دارند. (دقت کنید که هیچ شرط ویژه‌ای در نظر گرفته نشده و شعاع هادی نسبت به فاصله، زیاد نیست و باید در محاسبات در نظر گرفته شود.)

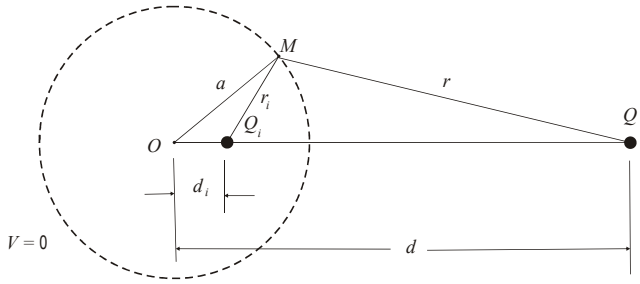
۳-۲-۱-۴- بار نقطه‌ای و کرهٔ هادی

۳-۲-۱-۴-۱- بار نقطه‌ای و کرهٔ هادی زمین‌شده

قرارگرفتن یک بار نقطه‌ای در مجاورت یک کرهٔ هادی زمین‌شده، بخش مهمی از کاربردهای روش تصویر را تشکیل می‌دهد. شکل (۳-۲۳) این مدل را نشان می‌دهد. به دلیل تقارن، انتظار داریم که بار تصویر Q_i ، یک بار نقطه‌ای منفی در درون کره و روی خط واصلِ OQ باشد . در اینجا همزمان d_i و هم Q_i را مجهول در نظر می‌گیریم. (به شکل ۳-۲۴ توجه کنید) ابتدا پتانسیل نقطهٔ دلخواهی مثل M را می‌یابیم. بدیهی است که:



شکل ۳-۲۳: بار نقطه‌ای در مجاورت کرهٔ هادی



شکل ۳-۲٤: یافتن بار تصویر شده در کرهٔ هادی

$$V_M = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{Q}{r}+\frac{Q_i}{r_i}\right) \tag{۷-۳}$$

از طرفی با توجه به فرض، پتانسیل هر یک از این نقاط باید صفر باشد، پس:

$$V_m = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{Q}{r}+\frac{Q_i}{r_i}\right)=\circ \;\rightarrow\; \frac{Q}{r}=-\frac{Q_i}{r_i} \rightarrow Q_i=-Q\frac{r_i}{r}$$

یعنی مقدار بار تصویر، معادل است با:

$$Q_i = -Q\frac{r_i}{r} \tag{۸-۳}$$

حال اگر همان تشابه بخش قبل را در اینجا نیز اعمال کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{P_iM}{PM}=\frac{OP_i}{OM}=\frac{OM}{OP}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{r_i}{r}=\frac{d_i}{a}=\frac{a}{d}$$

پس:

$$\boxed{Q_i = -\frac{a}{d}Q} \qquad (۹-۳)$$

$$\boxed{d_i = \frac{a^۲}{d}} \qquad (۱۰-۳)$$

و در اینصورت می‌توان گفت که:

نکتهٔ طلایی

تصویر بار نقطه‌ای Q در مجاورت هادی کروی زمین شده‌ای به شعاع a، باری است معادل $Q_i = -\frac{a}{d}Q$ که در فاصلهٔ $\frac{a^۲}{d}$ از مرکز کره قرار دارد.

مثال ۳-۹ دوقطبی با گشتاور p ($p = qd$) به فاصلهٔ h از مرکز کرهٔ زمین‌شدهٔ به شعاع a قرار دارد. اگر فاصلهٔ بارهای دوقطبی $d = \varepsilon h$ (و $\varepsilon << ۱$) باشد، کل بارِ القایی روی سطح کره را بدست آورید. (کارشناسی ارشد فیزیک ۸۳)

حل: مشابه شکل (۳-۲۵)، دوقطبی را با بارهای آن مدل می‌کنیم. در این صورت بارهای تصویر عبارتند از:

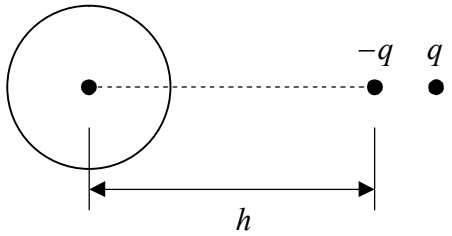
$$q'_۱ = -(-q)\times\left(\frac{a}{h}\right) = \frac{aq}{h} \quad : \text{تصویر بار } -q$$

$$q'_۲ = (-q)\times\left(\frac{a}{h+d}\right) = \frac{-aq}{h(\varepsilon+۱)} \quad : \text{تصویر بار } q$$

و کل بار القایی عبارتست از:

$$q'_۱ + q'_۲ = \frac{aq}{h} + \frac{-aq}{h(\varepsilon+۱)} = \frac{aq}{h}\left(۱ - \frac{۱}{\varepsilon+۱}\right)$$

دوقطبی تصویر را یافته و نشان دهید که احتمالاً با آنچه حدس می‌زنید، متفاوت است!



شکل ۳-۲۵: شکل مثال ۳-۹

تمرین ۳-۴: بار نقطه‌ای Q در فاصلهٔ d از یک کرهٔ هادی زمین‌شده قرار دارد. نشان دهید که چگالی بار القاء شده بر روی کره از رابطهٔ زیر محاسبه می‌گردد:

$$\rho_s = -\frac{Q\left(d^2 - a^2\right)}{4\pi a\left(a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (۳-۱۱)$$

در مثال قبل با تجزیهٔ دوقطبی به بارهای مجزا میزان بار القایی را محاسبه نمودیم. این روش کار را می‌توان در مورد بارهای پیوسته نیز به کار برد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال کلیدی

مثال ۳-۱۰ بار خطی یکنواخت ρ_ℓ روی محور y از $y=0$ تا $y=L$ مفروض است. کرهٔ فلزی به شعاع a با پتانسیل صفر در فاصلهٔ R از بار خطی، مطابق شکل (۳-۲۶) مفروض است، به‌طوریکه طول بار خطی تحت زاویهٔ β از مرکز کره دیده می‌شود. بار القایی در کره را بدست آورید. (کارشناسی ارشد برق ۷۵)

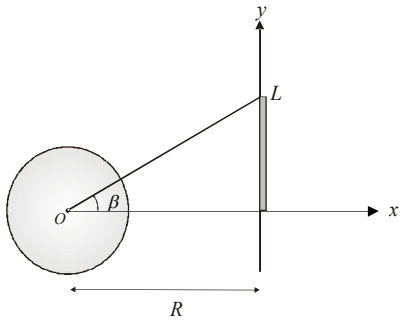
حل: توزیع پیوسته را به صورت مجموع توزیع‌های گسسته فرض کرده و از نکات پیشین استفاده می‌کنیم. اگر عنصر dy ازمیله را در نظر بگیریم، تصویر آن عبارتست از:

$$dq' = -\rho_\ell\, dy \times \frac{a}{R} = \frac{-\rho_\ell\, a\, dy}{\sqrt{y^2 + R^2}}$$

و با جمع این اثرات داریم:

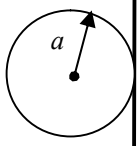
$$q' = \int_0^L \frac{-\rho_\ell\, a\, dy}{\sqrt{y^2 + R^2}} = -\rho_\ell\, a \sinh^{-1}\left(\frac{y}{R}\right)\Bigg|_0^L = -\rho_\ell\, a\; Ln\left(\frac{L}{R} + \sqrt{1 + \left(\frac{L}{R}\right)^2}\right)$$

تمرین: پاسخ نهایی را فقط بر حسب β بیان کنید!



شکل ۳-۲۶: شکل مثال ۳-۱۰

تمرین ۳-۵: میله‌ای بسیار بلند مطابق شکل به طور تقریباً چسبیده به یک کره هادی به شعاع a قرار دارد. در این صورت تصویر این میله، داخل کره هادی چگونه است؟ (کارشناسی ارشد فیزیک)



شکل ۳-۲۷: شکل تمرین ۳-۵

۳-۲-۱-۴-۲- بار نقطه‌ای و کرهٔ هادی با پتانسیل مشخص

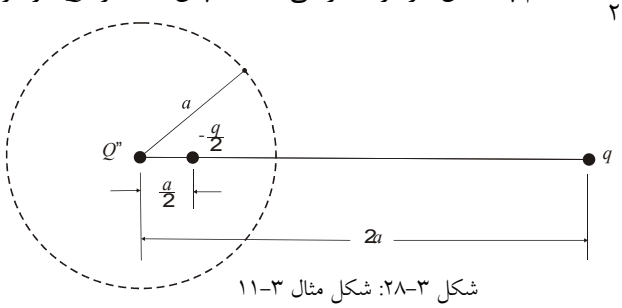
روش تصاویر را برای کرهٔ با پتانسیل صفر بررسی نمودیم. حال سوال اینجاست که اثر مشخص بودن پتانسیل کره چیست؟ آیا باز هم می‌توان از روش تصویر استفاده کرد؟ برای این منظور کافی است اثر مشخص بودن پتانسیل کره را مدل کرده و از جمع آثار استفاده کنیم. در حقیقت فرض می‌کنیم که باری معادل $Q = ۴\pi\varepsilon_{\circ}V\ R$ در مرکز کره قرار داشته که پتانسیل آن برابر V شده است. پس فرض می‌کنیم که یک بار $Q = ۴\pi\varepsilon_{\circ}V\ R$ و یک کرهٔ هادی با پتانسیل صفر داریم! حال مشابه قبل از جمع آثار استفاده می‌کنیم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳-۱۱ بار q به فاصله‌ی $۲a$ از مرکز یک کرهٔ فلزی به شعاع a قرار داده شده است. با این فرض که کره دارای پتانسیل $V_{\circ}$ است **الف)** نیروی وارد بر کره از طرف بار q و **ب)** بار القائی روی کره را بیابید. (کارشناسی ارشد برق)

حل: الف) مقدار بار تصویر و فاصلهٔ آن تا مرکز کره مطابق روابط (۳-۹) و (۳-۱۰) به صورت زیرند:

$$Q = -q\frac{a}{۲a} = \frac{-q}{۲} \qquad , \qquad R_{۲} = \frac{a^{۲}}{R_{۱}} = \frac{a^{۲}}{۲a} = \frac{a}{۲}$$

بنابراین برای اینکه کرهٔ فلزی یک سطح هم پتانسیل باشد باید بار $-\frac{q}{۲}$ به فاصلهٔ $\frac{a}{۲}$ از مرکز آن قرار گیرد، اما بار q و $-\frac{q}{۲}$ با هم پتانسیل کره را صفر می‌کنند. سپس باید بار Q'' در مرکز کره قرار گیرد



شکل ۳-۲۸: شکل مثال ۳-۱۱

مثال کلیدی

تا پتانسیل کره $V_\circ$ شـود. بدیهی است که $Q'' = ۴\pi\varepsilon_\circ a V_\circ$. بنابراین داخـل کره دو بار $-\frac{q}{۲}$ و Q'' و در خارج کره بار q قرار دارد .پس نیروی وارد بر بار q عبارت است از مجموع نیروهـای ناشـی از $\frac{-q}{۲}$ و Q'' بر q. در نتیجه:

$$F_q = \frac{Q''q}{۴\pi\varepsilon_\circ(۲a)^۲} + \frac{\frac{-q}{۲}q}{۴\pi\varepsilon_\circ(\frac{۳a}{۲})^۲} = \frac{۴\pi\varepsilon_\circ aV_\circ q}{۴\pi\varepsilon_\circ(۴a)^۲} - \frac{q^۲}{۱۸\pi\varepsilon_\circ a^۲} = \frac{V_\circ q}{۴a} - \frac{q^۲}{۱۸\pi\varepsilon_\circ a^۲}$$

که در حقیقت F_q نیروی وارد از طرف کره بر بار q است. طبق قانون عمل و عکس‌العمل نیروی وارد بـر کره از طرف بار q برابر است با $-F_q$ یعنی:

$$F = \frac{q^۲}{۱۸\pi\varepsilon_\circ a^۲} - \frac{V_\circ q}{۴a}$$

ب) بـار القـائی روی کـره برابراسـت بـا مجمـوع بـار داخـل کـره یعنـی $(Q''-\frac{q}{۲})$ و بـه عبـارت دیگر $(۴\pi\varepsilon_\circ aV_\circ - \frac{q}{۲})$

۳-۲-۱-۴-۳- بار نقطه‌ای و کرهٔ هادی با میزان بار مشخص

در دو قسمت قبل اثر کرهٔ زمین‌شده و کرهٔ هـادی بـا پتانـسیل معـین را بررسـی کـردیم. در ایـن قسمت اثر مشخص بودن بار کره را ارزیابی می‌کنیم. اگر بخواهیم همچون گذشته عمل کنـیم بایـد بـار نقطه‌ای تصویر را درون کره قرار دهیم، در اینصورت دیگر مجموع بار درون کره برابر مقـدار معـین‌شـده نخواهد بود (به اندازهٔ بار تصویر قرار گرفته درون کره تغییر کرده اسـت). از اینـرو بـرای حـذف اثـر بـار تصویر کافی است ، باری به اندازهٔ بار تصویر ولی با علامت مخالف را به همراه مقـدار بـار اولیـهٔ کـره، در مرکز کره قرار دهیم. حال می‌توانیم مشابه قبل از روش تصویر استفاده کنیم. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۳-۱۲ بار q به فاصله‌ی $۲a$ از مرکز یک کرهٔ فلزی به شعاع a قرار داده شده است. با این فـرض که کره دارای بار $q_\circ$ باشد، مطلوب است: (کارشناسی ارشد برق و هسته‌ای)

الف) نیروی وارد بر کره از طرف بار q.

ب) پتانسیل کره.

حل: الف) مقدار بار تصویر و فاصلهٔ آن تا مرکز کره مطابق روابط (۳-۹) و (۳-۱۰) به صورت زیراند:

$$Q = -q\frac{a}{۲a} = \frac{-q}{۲} \quad , \quad R_۲ = \frac{a^۲}{R_۱} = \frac{a^۲}{۲a} = \frac{a}{۲}$$

ابتدا بار تصویر را قرار می‌دهیم. در این حالت کل بار داخل کره برابر $-\frac{q}{۲}$ است. ولی طبق فرض باید مجموع بار داخل کره برابر $q_\circ$ باشد، از اینرو باید بار $(q_\circ + \frac{q}{۲})$ در مرکز کره قرار گیرد تا مجموع بار داخل کره $q_\circ$ باشد. حال نیروی وارد بر بار q عبارتست از مجموع نیروهای ناشی از بارهای $-\frac{q}{۲}$ و $(q_\circ + \frac{q}{۲})$ که برابر خواهد بود با:

$$F_q = \frac{(q_\circ + \frac{q}{۲})q}{۴\pi\varepsilon_\circ (۲a)^۲} - \frac{q\,(\frac{q}{۲})}{۴\pi\varepsilon_\circ (\frac{۳a}{۲})^۲} = \frac{q_\circ q}{۱۶\pi\varepsilon_\circ a^۲} + \frac{q^۲}{۳۲\pi\varepsilon_\circ a^۲} - \frac{q^۲}{۱۸\pi\varepsilon_\circ a^۲} = \frac{q_\circ q}{۱۶\pi\varepsilon_\circ a^۲} - \frac{۷q^۲}{۲۸۸\pi\varepsilon_\circ a^۲}$$

نیروی وارد از طرف بار q بر کره هادی برابر است با $F = -F_q$

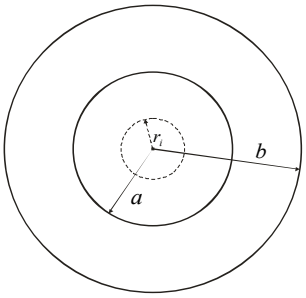
ب) پتانسیل کره عبارتست از پتانسیل ناشی از بارهای q , $\frac{-q}{۲}$, $q_\circ + \frac{q}{۲}$ ، اما مجموع پتانسیل ناشی از بارهای q , $-\frac{q}{۲}$ روی کره صفر است، زیرا q , $-\frac{q}{۲}$ بار اصلی و تصویر آن می‌باشند پس پتانسیل کره فقط پتانسیل ناشی از بار $q_\circ + \frac{q}{۲}$ است که در مرکز کره قرار گرفته است یعنی پتانسیل کره برابر است با:

$$\frac{q_\circ + \frac{q}{۲}}{۴\pi\varepsilon_\circ a}$$

تمرین ۳-۶: بار q به فاصله‌ی $۲a$ از مرکز کره‌ی بدون بار به شعاع a قرار دارد. انرژی کل سیستم را بدست آورید. (کارشناسی ارشد فیزیک)

۳-۲-۱-۵- بار سطحی کروی و کرهٔ هادی

روش تصویر نه‌تنها در مورد بار مجزا و کرهٔ هادی بلکه در مورد بار سطحی و کرهٔ هادی نیز به کار می‌رود. کافی است فرض کنید، بار سطحی معادل همان بار مجزا است. برای مثال فرض کنید که کره‌ای به شعاع b و چگالی بار سطحی ρ_s، کره هادی هم‌مرکز به شعاع a ($b > a$) را در بر گرفته است. برای محاسبهٔ چگالی بار تصویر، کرهٔ تصویری را در داخل کرهٔ هادی در نظر می‌گیریم، مشابه قبل برای یافتن شعاع از رابطهٔ (۳-۱۰) کمک می‌گیریم:



شکل ۳-۲۹: بار سطحی کروی و کرهٔ هادی

$$r_i = \frac{a^2}{b}$$

بار dq را روی کرهٔ b فرض می‌کنیم:

$$dq_i = -\frac{a}{b}dq \;\rightarrow\; Q_i = -\frac{a}{b}Q$$

برای محاسبهٔ چگالی بار از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\rho_{si} = \frac{Q_i}{4\pi r_i^2}$$

در اینصورت خواهیم داشت:

$$\rho_{si} = \frac{Q_i}{4\pi r_i^2} = \frac{-\frac{a}{b}Q}{4\pi\left(\frac{a^2}{b}\right)^2} = -\frac{bQ}{4\pi a^3} = -\frac{b^3}{a^3}\frac{Q}{4\pi b^2} = -\frac{b^3}{a^3}\rho_s$$

همانطور که مشاهده کردیم، حضور یک توزیع سطحی کروی در مجاورت کرهٔ هادی، یک چگالی سطحی کروی تصویر را ایجاد کرد. برای تکمیل مطلب می‌توانید تمرین زیر را حل کنید.

تمرین ۳-۷: بار سطحی یکنواخت ρ_s روی سطح کره‌ای به شعاع R_1 هم‌مرکز با کره‌ای فلزی با پتانسیل V_0 به شعاع a پخش شده است، ($R_1 > a$) مطلوب است محاسبهٔ پتانسیل در فضای $a < R < R_1$.

۳-۲-۱-۶- کرهٔ باردار و صفحهٔ زمین شده

به شکل (۳-۳۰) توجه کنید. در این شکل یک کرهٔ باردار در مجاورت صفحهٔ زمین‌شده‌ای قرار دارد، فرض می‌کنیم بار Q_0 در مرکز کره قرار گرفته باشد، می‌خواهیم مجموعه‌ای از بارهای تصویر را

پیدا کنیم که به همراه $Q_\circ$ هم کره و هم صفحه را سطوح هم‌پتانسیل نمایند. حال به شکل (۳-۳۱) دقت کنید:

با توجه به روش تصاویر برای بار نقطه‌ای و صفحهٔ زمین‌شده، باید بار $-Q_\circ$ را به همان فاصله از سمت دیگر صفحه قرار دهیم. حال این بارِ $Q_\circ$ باعث می‌شود که سطح کره هم‌پتانسیل نباشد، لذا بار تصویرِ $Q=-\alpha\, Q_\circ$ را در فاصلهٔ d_1 تصویرِ $Q=-\alpha\, Q_\circ$ را در فاصلهٔ d_1 قرار می‌دهیم، حال برای هم‌پتانسیل شدن صفحه، بار $-Q$ را در سمت دیگر صفحه در نظر می‌گیریم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم:

$$Q_1=(\frac{a}{2c})Q_\circ=\alpha\, Q_\circ \quad , \quad Q_2=\frac{a}{(2c-\frac{a^2}{2c})}Q_1=\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}Q_\circ$$

با توجه به این تفاسیر کل بار داخل کره عبارت خواهد بود از:

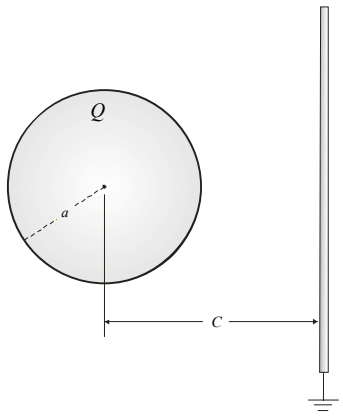
$$Q=Q_\circ+Q_1+Q_2+.....=Q_\circ\left(1+\alpha+\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}+.....\right),\ \alpha=\frac{a}{2c} \qquad (۱۲\text{-}۳)$$

همانطور که مشاهده می‌شود پاسخ را به $Q_\circ$ وابسته کرده‌ایم، پس اگر مقدار بار کره را داشته باشیم با توجه به این رابطه مقدار بار $Q_\circ$، که در ابتدا فرض کرده بودیم، قابل محاسبه خواهد بود.

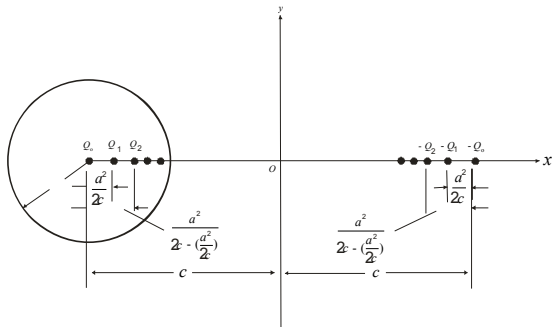
حال به سوال‌های زیر توجه کنید:

سوال اول: پتانسل کره چقدر است؟

جواب: چون جفت بارهای $(-Q_\circ, Q_1)$, $(-Q_2, Q_2)$, ... پتانسیل روی کره را صفر می‌کنند تنها $Q_\circ$ در پتانسیل کره سهیم است از این رو:



شکل ۳-۳۰: کرهٔ باردار و صفحهٔ زمین‌شده



شکل ۳-۳۱: مدل تصویر ارائه شده

$$V_{\circ} = \frac{Q_{\circ}}{۴\pi\varepsilon_{\circ}a} \qquad (۱۳-۳)$$

سوال دوم: با توجه به روابط (۳-۱۲) و (۳-۱۳) ظرفیت کره را بیابید.

جواب: داریم:

$$c = \frac{Q}{V_{\circ}} = ۴\pi\varepsilon_{\circ}a\left(۱+\alpha+\frac{\alpha^{۲}}{۱-\alpha^{۲}}+.....\right) \qquad (۱۴-۳)$$

لازم به ذکر است که مدل کره و صفحهٔ هادی، که تحت عنوان گوی و صفحه در درس عایق و فشارقوی مطرح می‌شود، یکی از روش‌های متدوال در اندازه‌گیری فشارقوی و قدرت عایقی تجهیزات و محیط‌های تحت آزمایش است.

۳-۲-۱-۷- موارد ترکیبی

آنچه تا به اینجا مطرح شد، راهکارهای کلی روش تصویر بودند. بخشی از آنها را در اکثر کتب خواهید یافت، تعدادی از آنها نیز نتیجه شدهٔ روش‌های کلی هستند. با این همه ممکن است توزیع‌هایی را در مجاورت سطح فلزاتِ با اشکال گوناگون و یا شرایط مختلف پیدا کنید، و در نتیجه در استفاده از روش تصاویر ناتوان شوید. این امر کاملاً رایج بوده و در اکثر موارد چاره‌ای جز استفاده از روش لاپلاس (که تقریباً خیلی زمان‌بر است) ندارید. با این همه یک خوانندهٔ هوشمند قادر است با ترکیب موارد مطرح شده و نیز استفاده از جمع آثار و یا سعی در تولید شرایط مناسب برای استفاده از روش تصاویر، راهکار سریعتری را بیابد. توجه داشته باشید که اگر شرایط سیستم متفاوت با آنچه در قضایای مطرح شده، باشد؛ استفاده از روش تصاویر به هیچ عنوان پاسخ درستی را بدست نمی‌دهد. برای مثال در قسمتِ اولِ تصاویر، به بررسی روش تصویرِ مربوط به بار نقطه‌ای و صفحهٔ هادی زمین‌شده پرداختیم، حال تصور کنید که این صفحه به پتانسیل $V_{\circ}$ متصل باشد؛ طبیعی است که در این حالت روش تصاویر پاسخ نادرستی را به همراه خواهد داشت. برای استفاده از این روش، ابتدا باید توزیع باری را به نحوی بیابیم که پتانسیل صفحه را $V_{\circ}$ کند، آنگاه می‌توانیم از جمع آثار این توزیع بار و نیز بار نقطه‌ای ابتدایی و صفحهٔ هادی زمین‌شده استفاده کنیم. مشکل اینجاست که محاسبهٔ محل و میزان این توزیع (در اکثر مواقع) فوق‌العاده مشکل است! آنچه در مورد بار نقطه‌ای و کرهٔ هادی با پتانسیل مشخص و یا کرهٔ هادی با بار مشخص، مطرح کردیم، با همین روش محاسبه نموده بودیم.

برای آشنا شدن با ایدهٔ جمع آثار در روش تصاویر به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳-۱۳ بار نقطه‌ای Q در فاصله $d = ۲a$ از مرکز یک نیم‌کره به شعاع a که روی یک صفحه مسطحِ بی‌نهایتِ زمین‌شده می‌باشد، قرار دارد. بار القاء شده روی صفحه مسطح چقدر است؟ (از $r = a$ تا بی نهایت)[۵]

حل: از جمع آثار استفاده می‌کنیم. ابتدا تصویر بار Q را در نیم‌کره پیدا می‌کنیم (Q'). سپس نیم‌کره را حذف کرده و برای حذف صفحهٔ هادی، لازم است بارهای تصویر مربوط به این دو را در نظر بگیریم ($-Q$ و $-Q'$). توجه کنید که کل بار القایی (در نیم‌کره و صفحهٔ مسطح) برابر با جمع بارهای تصویر (یعنی $Q' + -Q' - Q = -Q$) است. اما صورت سوال کل بار القاء شده در صفحهٔ مسطح را می‌خواهد. برای این منظور کافی است از رابطهٔ (۲-۶۱) استفاده کنیم. در واقع در تمرین (۲-۳۰) یاد گرفتیم که اگر بار Q به فاصلهٔ d و بالای یک صفحهٔ هادی قرار داشته باشد، چگالی بار القاء شده به صورت زیر خواهد بود:

$$\rho_s = -\frac{Q\,d}{۲\pi\left(d^۲ + r^۲\right)^{\frac{۳}{۲}}}$$

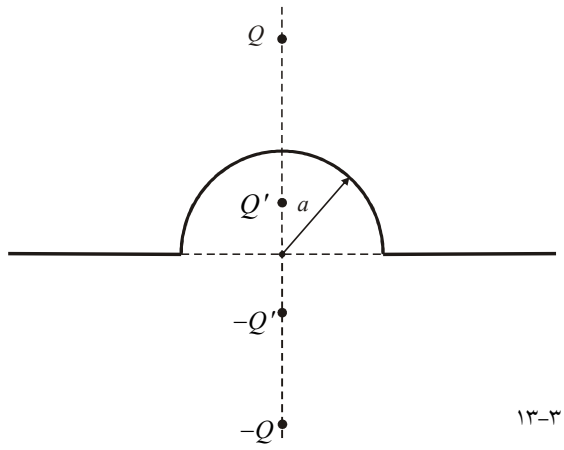
پس می‌توان چگالی بار القاء شده در صفحهٔ مسطح را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\rho_s = -\frac{Q\,(۲a)}{۲\pi\left((۲a)^۲ + r^۲\right)^{\frac{۳}{۲}}} + \frac{\left(\frac{Q}{۲}\right)\left(\frac{a}{۲}\right)}{۲\pi\left(\left(\frac{a}{۲}\right)^۲ + r^۲\right)^{\frac{۳}{۲}}}$$

در نتیجه کل بار القاء شده در صفحهٔ مسطح عبارتست از:

$$Q_{ind} = \int_a^\infty \int_۰^{۲\pi} \rho_s\, ds = \int_a^\infty \int_۰^{۲\pi} \frac{-Q\,(۲a)}{۲\pi\left((۲a)^۲ + r^۲\right)^{\frac{۳}{۲}}}\, r\,dr\,d\varphi + \int_a^\infty \int_۰^{۲\pi} \frac{\left(\frac{Q}{۲}\right)\left(\frac{a}{۲}\right)}{۲\pi\left(\left(\frac{a}{۲}\right)^۲ + r^۲\right)^{\frac{۳}{۲}}}\, r\,dr\,d\varphi$$

$$Q_{ind} = aQ\left[\frac{۲}{\sqrt{r^۲ + ۴a^۲}}\right]\Bigg|_a^\infty - \frac{aQ}{۸}\left[\frac{۲}{\sqrt{r^۲ + \frac{a^۲}{۴}}}\right]\Bigg|_a^\infty = \ldots = \frac{-۳}{۲\sqrt{۵}}Q$$



شکل ۳-۳۲: شکل مثال ۳-۱۳

تمرین ۳-۸: دوقطبی $\mathbf{P} = P_\circ \mathbf{a}_z$ در مرکز یک پوستهٔ کروی هادی به شعاع R قرار گرفته است. چگالی بار القاء شده بر سطح داخلی پوسته را بیابید. (المپیاد جهانی فیزیک ۲۰۰۲)

۳-۲-۲- تئوری تصاویر در عایق‌ها

در قسمت قبل تئوری تصاویر را در هادی‌ها بررسی کردیم و در تمامی این حالات محیط سیستم از نوع خلاء بود. حال فرض کنید این محیط دارای ضریب گذردهی ε بوده و به‌جای هادی، مرز بین دو ناحیهٔ با گذردهی‌های متفاوت را داشته باشیم. آیا باز هم می‌توان از روش تصاویر استفاده کرد؟ قضایایی که در ادامه مطرح می‌کنیم، ما را در پاسخگویی به این سوال راهنمایی می‌کنند.

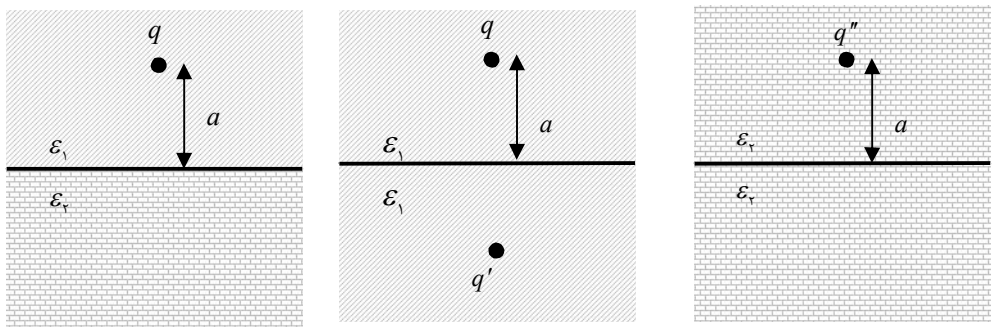
۳-۲-۲-۱- بار نقطه‌ای و فضای عایق

۳-۲-۲-۱-۱- قضیهٔ اول

بار نقطه‌ای q مطابق شکل در ناحیه‌ای با گذردهی ε_1 قرار دارد.

الف) میدان در ناحیهٔ اول را می‌توان میدان ناشی از همین بار و بار تصویر $q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q$ دانست به گونه‌ای که هر دو ناحیه دارای گذردهی ε_1 باشند.

ب) به طور مشابه می‌توان میدان در ناحیهٔ دوم را ناشی از بار تصویر $q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q$ دانست، به گونه‌ای که کل محیط دارای گذردهی ε_2 باشد.



شکل ۳-۳۳: بار نقطه‌ای در فضای عایق

اثبات: فرض مورد نظر را درست گرفته و میدان را در ناحیهٔ اول و دوم پیدا می‌کنیم، در ضمنِ حل، شرایط مرزی پتانسیل و مولفهٔ عمودی میدان را نیز بررسی می‌کنیم. مطابق شکل (۳-۳۴)، پتانسیل در ناحیهٔ اول و دوم به صورت زیر خواهد بود:

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1 R_1} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_1 R_2} \quad ، \quad V_2 = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_2 R_3}$$

شرط مرزی پتانسیل را بررسی می‌کنیم. بر طبق این شرط، پتانسیل در مرز دو محیط برابر خواهد بود:

$$V_1 = V_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1 R_1} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_1 R_2} = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_2 R_3}\Bigg|_{R_1 = R_2 = R_3 = R} \rightarrow \frac{q+q'}{\varepsilon_1} = \frac{q''}{\varepsilon_2}$$

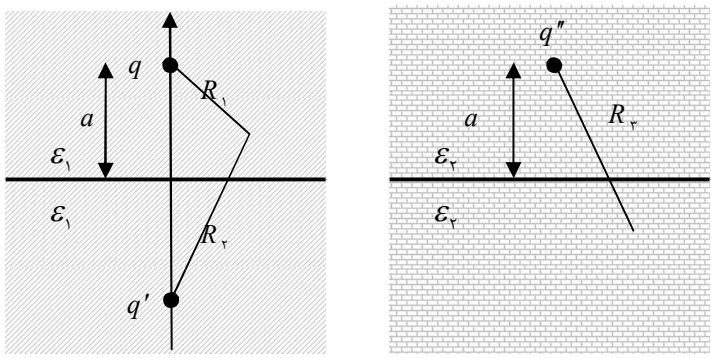
حال شرط تساوی مولفهٔ عمودی میدان در مرز دو محیط را بررسی می‌کنیم. برای این منظور از منفی گرادیان پتانسیل استفاده خواهیم کرد:

$$\varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial z} = \varepsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial z}\Bigg|_{z=0} \xrightarrow{\begin{cases} R = \sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2} \\ R_2 = \sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2} \\ R_1 = R_3 = R \end{cases}} q'' = q - q'$$

از ترکیب دو نتیجهٔ اخیر، خواهیم داشت:

$$q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \qquad (۱۵-۳)$$

$$q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \qquad (۱۶-۳)$$



شکل ۳-۳٤: بار نقطه‌ای در فضای عایق

۳-۲-۲-۱-۲- قضیهٔ دوم

در تمرین (۲-۳۰) نشان دادیم که در اثر قرارگیری بار Q در فاصلهٔ d بالای هادی، باری بر سطح هادی القاء می‌شود که چگالی آن به صورت زیر است:

$$\rho_s = -\frac{Q\,d}{2\pi\left(d^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

به سادگی نشان داده می‌شود که اگر بار مذکور را در فضای آزاد فرض کرده و به جای صفحهٔ هادی، مرز دو محیطِ خلاء و محیطی با گذردهی نسبی ε_r را مدّ نظر قرار دهیم، چگالی بار القاء شده (البته از نوع مقید) برابر است با:

$$\rho_{S_b} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\,\rho_s \qquad (۳\text{-}۱۷)$$

اگر به صورت رابطهٔ فوق توجه کنید، مشاهده خواهید کرد که در صورت نبود مرز (یعنی $\varepsilon_r = 1$)، طبیعتاً باری هم القاء نخواهد شد.

اثبات: بر روی سطح $z = 0$ فقط بار سطحی مقید داریم. (چرا؟) این توزیع نتیجهٔ رابطهٔ زیر خواهد بود:

$$\rho_{S_b} = \mathbf{P}\,.\,\mathbf{a}_z = P_z$$

از طرفی از خطی بودن عایق نتیجه می‌شود که:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\left(\varepsilon_r - 1\right)\mathbf{E} \xrightarrow{\rho_{S_b} = \mathbf{P}\,.\,\mathbf{a}_z = P_z} \rho_{S_b} = \varepsilon_0\left(\varepsilon_r - 1\right)E_z$$

که E_z مولفهٔ عمودی میدان بوده و از جمع آثار ناشی از مولفهٔ عمودی میدانِ بارِ Q در صفحهٔ $z=0$ (E_1) و نیز میدان ناشی از بار مقید سطحی ρ_{S_b} (E_2)، ایجاد شده است. پس در مورد آن می‌توان گفت:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1 = \dfrac{q\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0\left(d^2+r^2\right)}\left(-\mathbf{a}_z\right) = \dfrac{-q\,d}{4\pi\varepsilon_0\left(d^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{a}_z \\ \mathbf{E}_2 = \dfrac{\rho_{S_b}}{2\varepsilon_0}\left(\pm\,\mathbf{a}_z\right) \end{cases} \rightarrow \; E_z = E_1 + E_2$$

پس:

$$\rho_{S_b} = \varepsilon_0\left(\varepsilon_r - 1\right)\left[\frac{-q\,d}{4\pi\varepsilon_0\left(d^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho_{S_b}}{2\varepsilon_0}\right]$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\rho_{S_b} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\;\rho_s = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\;\frac{Q\,d}{2\pi\left(d^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

۳-۲-۲-۱-۳- قضیهٔ سوم

بار نقطه‌ای q در مرز بین دو محیط دی‌الکتریک با گذردهی‌های ε_1 و ε_2 قرار دارد.

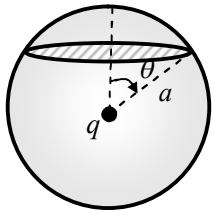
الف) اگر هدف محاسبهٔ میدان در محیط اول باشد، می‌توان بار تصویر q' را در محل بار q قرار داد و فرض نمود که کل فضا دارای گذردهی ε_1 است.

$$q' = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \qquad (۱۸-۳)$$

ب) اگر هدف محاسبهٔ میدان در محیط دوم باشد، می‌توان بار تصویر q'' را در محل بار q قرار داد و فرض نمود که کل فضا دارای گذردهی ε_2 است.

$$q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \qquad (۱۹-۳)$$

تمرین ۳-۹: با محاسبهٔ میدان ناشی از بار q (ذکر شده در قضیهٔ فوق) و در تمام فضا، صحت قضیه را اثبات کنید. (راهنمایی: میدان خواسته شده را در مثال (۲-۷۴) محاسبه نموده‌ایم، کافی است با قرار دادن روابط (۳-۱۸) و (۳-۱۹) در آن صحت قضیه را مشاهده کنید!)



شکل ۳-۳۵

۳-۲-۲-۲- بار نقطه‌ای و کرهٔ عایق

در مثال (۲-۲۳) نشان دادیم که شار خروجی از حلقهٔ نشان داده شده در شکل (۳-۳۵) برابر است با:

$$\varphi = \frac{q}{۲}\left(۱-\cos\theta\right)$$

نکتهٔ طلایی

حال اگر فرض کنیم، کرهٔ نشان داده شده دارای گذردهی ε_r باشد، به راحتی می‌توان شان داد که شار خروجی از این حلقه از رابطهٔ زیر محاسبه خواهد شد:

$$\varphi' = \frac{\varepsilon_r - ۱}{\varepsilon_r}\times\varphi = \frac{\varepsilon_r - ۱}{\varepsilon_r}\times\frac{q}{۲}\left(۱-\cos\theta\right) \qquad (۳-۲۰)$$

اثبات: اگر مرکز کرهٔ عایقی منطبق بر مبداء مختصات فرض گردد، برای داخل کرهٔ عایق خواهیم داشت:

$$\mathbf{D} = \frac{q}{۴\pi R^۲}\,\mathbf{a}_R \quad , \quad \mathbf{E} = \frac{q}{۴\pi\varepsilon R^۲}\,\mathbf{a}_R \quad , \quad \mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_\circ \mathbf{E} = \frac{\left(\varepsilon_r - ۱\right)q}{۴\pi\varepsilon_r R^۲}\,\mathbf{a}_R$$

چگالی بارهای مقید نیز عبارتند از:

$$\rho_{vb} = -\nabla\cdot\mathbf{P} = \circ \quad , \quad \rho_{sb} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{a}_R\Big|_{R=a} = \frac{\left(\varepsilon_r - ۱\right)}{۴\pi\varepsilon_r a^۲}q$$

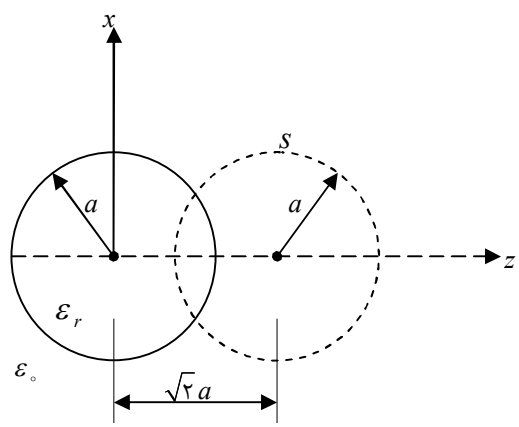
کل شار خارج شده از سطح مورد نظر به صورت زیر خواهد بود:

$$\varphi = \oint_S \varepsilon_\circ \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s} - \oint_S \mathbf{P}\cdot d\mathbf{s} = \int_V \left(\nabla\cdot\mathbf{P}\right)\,dv = \int_V \rho_{vb}\,dv$$

به گونه‌ای که حجم v بوسیلهٔ سطح S نشان داده شده در شکل محصور شده باشد. کافی است توجه کنیم که در فضای مذکور فقط بار سطحی مقید داریم، از اینرو:

$$\varphi=\int_s \rho_{sb}\,dS=\int_0^{2\pi}\int_0^{\theta}\left(\frac{(\varepsilon_r-1)}{4\pi\varepsilon_r a^2}\right)\left(a^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\right)=\ldots=\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\times\frac{q}{2}\left(1-\cos\theta\right)$$

روش تصویر در مورد کرهٔ عایق، یک نکتهٔ دیگر هم دارد که آنرا در ضمنِ بیان قسمت لاپلاس معرفی می‌کنیم. چرا که برای اثبات آن به اطلاعات کاملی از حل معادلات لاپلاس نیاز خواهیم داشت.



تمرین (بی‌شماره!): بار نقطه‌ای q در مرکز یک کرهٔ عایق به شعاع a قرار گرفته است. ضریب عایقی کره $\varepsilon_0\varepsilon_r$ فرض می‌شود. این مجموعه در فضای خالی قرار می‌گیرد. حاصل انتگرال $\oint_S \varepsilon_0\,\mathbf{E}\,.\,\mathbf{ds}$ بر روی سطح s که سطح کروی نشان داده شده در شکل مقابل است، را بیابید.

۳-۳- قضیهٔ هم‌پاسخی گرین

یکی از کاربردی‌ترین روش‌ها در محاسبهٔ مقدار بار القایی بر روی سطح هادی‌ها قضیهٔ هم‌پاسخی گرین است. این قضیه دارای دو بیان مختلف است که هر دو هدف یکسانی را دنبال می‌کنند. موارد استفاده از روش گرین، محدود ولی فوق‌العاده جذاب‌اند. در فصل گذشته، بخش مختصری از آن را مطرح نمودیم. در این قسمت با بیان کامل قضیه، مثال‌های مختلفی را بررسی کرده و نحوهٔ کار با آن را به طور کامل فرا می‌گیریم.

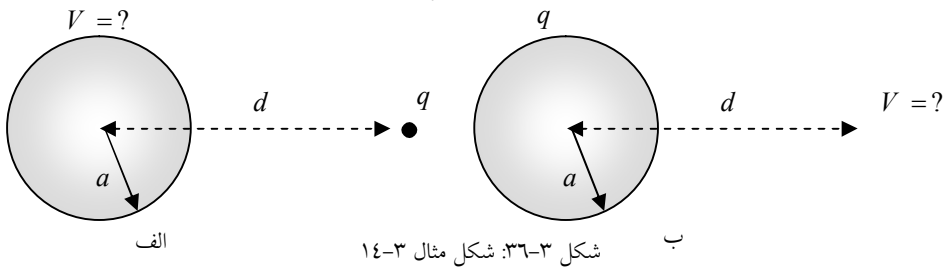
۳-۳-۱- بیان اول قضیهٔ هم‌پاسخی

بیان اول، برای محاسبهٔ پتانسیل به‌کار می‌رود. این بیان به ما کمک می‌کند تا بدون محاسبهٔ میزان بار القایی بر سطح هادی، پتانسیل (و در نتیجه میدان و ...) را محاسبه کنیم. طبق تعریف:

برای محاسبهٔ پتانسیل سطح هادی در حضور توزیع بارِ خارجی، ابتدا فرض می‌کنیم، توزیع مذکور بر سطح هادی واقع شده، حال کافی است پتانسیل ناشی از این توزیع را در محل قبلی توزیع پیدا کنیم. پتانسیل محاسبه شده برابر پتانسیل سطح هادی است.به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳-۱۴ بار نقطه‌ای q در فاصلهٔ d از یک کرهٔ هادی به شعاع a قرار دارد. پتانسیل کرهٔ هادی چقدر خواهد بود؟

حل: همانطور که در شکل (۳-۳۶- الف) دیده می‌شود، بار q در فاصلهٔ d از کرهٔ هادی قرار گرفته. برای محاسبهٔ پتانسیل فرض می‌کنیم بار q روی سطح هادی قرار داشته باشد (مطابق شکل۳-۳۶- ب) در این صورت پتانسیل در محل قبلی بار به صورت $\frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ d}$ است. طبق قضیهٔ هم‌پاسخی این



شکل ۳-۳۶: شکل مثال ۳-۱۴

پتانسیل با پتانسیل سطح هادی برابر است.

مثال ۳-۱۵ مثال (۳-۱۴) را با استفاده از روش تصویر حل کنید.

حل: ابتدا بار تصویر $q' = -\frac{a}{d}q$ را در فاصلهٔ $\frac{a^2}{d}$ از مرکز کره قرار می‌دهیم. با توجه به اینکه کره در ابتدا بی‌بار بوده، ناچاریم بار $q'' = \frac{a}{d}q$ را در مرکز کره قرار دهیم (تا ترکیب آن با بار تصویر، بار کل داخل کره را صفر کند). از طرفی، بار q و تصویر آن، پتانسیل سطح کره را صفر می‌کنند: لذا پتانسیل در سطح کره فقط از بار q'' قرار گرفته در مرکز کره ناشی شده است. پس:

$$V = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_\circ a} = \frac{\frac{a}{d}q}{4\pi\varepsilon_\circ a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ d}$$

۳-۳-۲- بیان دوم قضیهٔ هم‌پاسخی

بیان دوم، راهکار هدفمندی را برای محاسبهٔ بار القایی در اجسامِ با پتانسیل معین (ترجیحاً با پتانسیل صفر) قرار می‌دهد. طبق تعریف:

نکتهٔ طلایی

هرگاه دو توزیع بار مختلف در فضا موجود باشد و هر کدام از آنها پتانسیل خاصی (مقداری مشخص و یا قابل محاسبه) را ایجاد کرده باشند، می‌توان از این قضیه هم‌پاسخی استفاده کرد.

مثلاً اگر توزیع بار حجمی ρ_1 بتواند پتانسیل V_1 را ایجاد کند و به صورت مشابه توزیع ρ_2 پتانسیل V_2 ، می‌توان اثبات نمود که:

$$\int V_1\ \rho_1\ dv = \int V_2\ \rho_2\ dv \qquad (۲۱-۳)$$

لازم به ذکر است که در نوع توزیع هیچ محدودیتی نداریم. مثلاً برای توزیع سطحی روی سطح یک هادی می‌توان نوشت:

$$\int V_1\ \sigma_1\ ds = \int V_2\ \sigma_2\ ds$$

از طرفی می‌دانیم که سطح هادی یک سطح هم‌پتانسیل است. از اینرو می‌توان پتانسیل‌ها را از انتگرال بیرون آورد و نوشت:

$$\int V_1\ \sigma_1\ ds = V_1 \int \sigma_1\ ds = V_1 Q_1$$

و اگر به صورت مشابه همین عمل را برای سطح دوم انجام دهیم، خواهیم داشت:

$$\sum V_1\ Q_1 = \sum V_2\ Q_2 \qquad (۲۲-۳)$$

نکتهٔ طلایی

تذکر می‌دهیم که استفاده از $\sum$ در روابط فوق، عملاً روش هم‌پاسخی را به سیستم‌های n هادی تعمیم می‌دهد. رابطهٔ (۳-۲۲) در محاسبهٔ بار القایی روی سطوح هادی به ما کمک می‌کند. هنر اصلی استفاده از قضیهٔ هم‌پاسخی، ساختن دو حالت متفاوت، به‌گونه‌ایست که تمامی کمیات لازم در رابطهٔ (۳-۲۲) در آنها موجود باشد.

مثال زیر کاربرد این قضیه را در سیستم‌های تک هادی نشان می‌دهد.

مثال ۳-۱۶ بار نقطه‌ای q به فاصلهٔ d از مرکز یک کرهٔ هادی زمین شده به شعاع a قرار دارد. کل بار القاء شده بر روی کرهٔ هادی را بیابید. (کارشناسی ارشد هسته‌ای ۸۳)

حل: از روش تصویر می‌دانیم که کل بار القاء شده در داخل کره، برابر است با مقدار بار تصویر، یعنی $Q = -\frac{a}{d}\ q$. حال می‌خواهیم این موضوع را با استفاده از قضیهٔ هم‌پاسخی اثبات کنیم. در فصل دوم نیز این رابطه را با استفاده از میدان اثبات نموریم. (مثال ۲-۴۹ را ببینید)

دو وضعیت زیر را در نظر بگیرید:

الف) بار نقطه‌ای q به فاصلهٔ d از مرکز کرهٔ هادی زمین شده قرار دارد و روی کرهٔ هادی بـار Q القـاء شده است. (شکل ۳-۳۷)

ب) بار q روی کرهٔ هادی قرار دارد و پتانسیل در فاصلهٔ d از مرکز کره (یعنی محل بـار اصـلی) برابـر $V = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ d}$ می‌باشد. (شکل۳-۳۸)

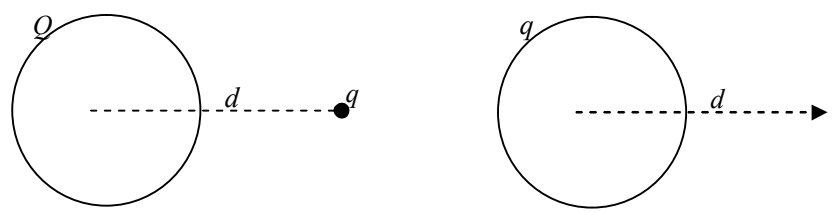
حال طبق رابطهٔ زیر از قضیهٔ هم‌پاسخی استفاده می‌کنیم:

$$\sum \text{(پتانسیل در حالت اول) (بار در حالت دوم)} = \sum \text{(پتانسیل در حالت دوم) (بار در حالت اول)} \quad (۳-۲۲)$$

$$\frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ d}\times q + \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ a}\times Q = \left((\circ \times q) + (V \times \circ)\right)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$Q = -\frac{a}{d}q$$



شکل ۳-۳۸: حالت اول قضیهٔ هم‌پاسخی

شکل ۳-۳۷: حالت اول قضیهٔ هم‌پاسخی

همانطور که مشاهده شد، در سیستم‌های تک هادی اگر چـه بـا انتخـاب فـرض‌هـای مناسـب بـا استفاده از روش هم‌پاسخی به جوابهای درستی دست می‌یابیم ولی انتخاب این فـرض‌هـا (بـه خـصوص فرض دوم که در مسئله داده نشده) کمی پیچیده است. با این همه اگـر تمـرین (۳-۴) را حـل کـرده و روش طولانی و سخت آن را لمس کرده باشید، باز هم به یادگیری این روش اشتیاق نشان خواهیـد داد. با اینکه حل سیستم‌های تک هادی کمی دشوار است ولی در سیستم‌های دو هادی (و یـا چنـد هـادی) (که با روش‌های دیگر فوق‌العاده پیچده می‌شوند) کار ساده‌ای در پیش داریم. در این گونـه سیـستم‌هـا مرسوم است که فرض دوم را یک اختلاف پتانسیل $V_\circ$ بین دو هادی در نظر می‌گیرند و برای این منظور صفحه‌ای را که قصد دارند بار القایی را برایش محاسبه کنند، به پتانسیل $V_\circ$ و صفحهٔ دیگر را بـه زمـین وصل می‌کنند (یعنی پتانسیل صفر) در این حالت قضیهٔ هم‌پاسخی راهگشای حل مسئله خواهد بود. بـه مثال‌هایی که در ادامه می‌آید، توجه کنید.

مثال ۳-۱۷ دو صفحهٔ یک خازن مسطح به پتانسیل صفر وصل شده‌اند و بار q به فاصلهٔ x از یکی از صفحات قرار دارد. با این فرض که فاصلهٔ دو صفحه برابر d باشد، مطلوب است محاسبهٔ مقدار بار القاءشده روی صفحات.

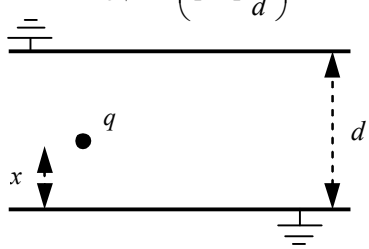
حل: مثال اخیر راه‌حل دیگری برای تمرین (۲-۳۷) است. از قضیهٔ گرین استفاده می‌کنیم، شرایط فعلی سیستم را حالت اول فرض می‌کنیم. برای رسیدن به حالت دوم، بین دو صفحه اختلاف پتانسیل $V_\circ$ را برقرار می‌نماییم. پتانسیل بین دو صفحه به صورت $V = (x/d)V_\circ$ خواهد بود. (روش کلی محاسبهٔ پتانسیل را در قسمت لاپلاس یاد خواهیم گرفت (مثال ۳-۲۳ را ببینید)) پس:

$$\sum \text{(پتانسیل در حالت اول) (بار در حالت اول)} = \sum \text{(پتانسیل در حالت دوم) (بار در حالت دوم)}$$

$$Q_1 V_\circ + q\,\frac{x}{d}V_\circ + Q_2 \times \circ = \circ \;\rightarrow\; Q_1 = -q\,\frac{x}{d}$$

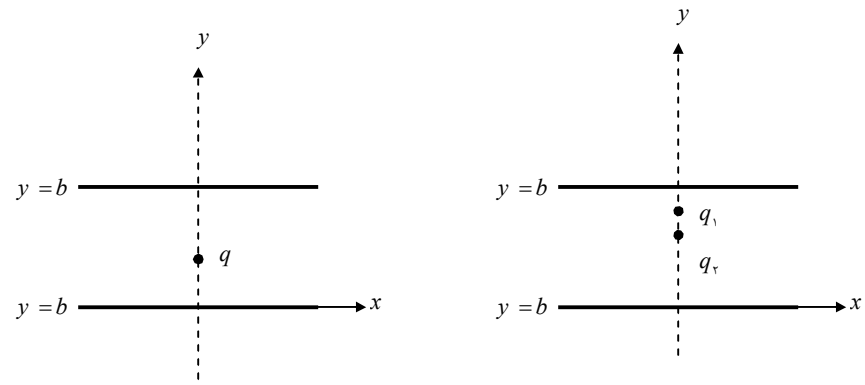
با توجه به اینکه کل بار القایی باید برابر $-q$ باشد، در مورد بار القایی بر صفحهٔ دوم می‌توان گفت:

$$Q_2 = -\left(q - q\,\frac{x}{d}\right)$$



شکل ۳-۳۹: شکل مثال ۳-۱۷

تمرین ۳-۱۰: دو صفحهٔ رسانای موازی و نامتناهی که به پتانسیل صفر ولت متصل شده‌اند، همانند شکل مفروض‌اند. در شکل الف بار $q = 2^c$ در نقطهٔ $(x, y, z) = (\circ, a, \circ)$ قرار گرفته است و کل بار القاء شده روی صفحهٔ $y = \circ$ برابر -1.5^c می‌باشد. اگر نظیر شکل ب، بار نقطه‌ای $q_1 = -3^c$ و $q_1 = 5^c$ به ترتیب در نقاط $(\circ, b-a, \circ)$ و قرار گیرند، کل بار القایی روی صفحهٔ $y = \circ$ چند کولن است؟



شکل ۳-۴۰: شکل تمرین ۳-۱۰

مثال ۳-۱۸ سه استوانهٔ فلزی نازک هم‌محور به ترتیب دارای شعاع‌های r_1 ، r_2 و r_3 هستند. محیط بین استوانه‌ها فضای آزاد است. بار Q_2 روی استوانهٔ هادی میانی قرار داده می‌شود. استوانهٔ داخلی و خارجی به زمین وصل شده‌اند.

الف) بار القائی Q_1 روی استوانهٔ داخلی را تعیین کنید.

ب) بار القائی Q_3 روی استوانهٔ خارجی را بدست آورید.

حل: راه‌حل کلی اینگونه مسائل استفاده از شرایط فیزیکی سیستم است. همانطور که مشاهده می‌شود، دو استوانهٔ داخلی و خارجی به پتانسیل صفر متصل شده‌اند. این بدین معناست که اختلاف پتانسیل بین هادی وسطی و هادی داخلی با اختلاف پتانسیل بین هادی مرکزی و هادی خارجی، یکسان است! کافی است ، با استفاده از یک سطح گوسی مناسب، میدان و در نتیجه اختلاف پتانسیل را یافته و از برابری اختلاف پتانسیل‌ها، به پاسخ مسئله دست یابیم. اما در اینجا قصد داریم تا با استفاده از قضیهٔ گرین به حل مسئله بپردازیم. دو حالت مختلف را در نظر می‌گیریم. حالت اول شرایط فعلی سیستم و حالت دوم، وضعیتی است که در آن پتانسیل استوانهٔ داخلی برابر V_0 فرض شود. در این صورت پتانسیل در فضای بین هادی داخلی و هادی مرکزی به صورت زیر خواهد بود:

$$V(r) = \frac{V_0}{Ln\frac{a}{c}}\left(Ln\frac{r}{c}\right)$$

در نتیجه، طبق قضیهٔ هم‌پاسخی خواهیم داشت:

$$\sum \text{(پتانسیل در حالت اول) (بار در حالت اول)} = \sum \text{(پتانسیل در حالت دوم) (بار در حالت دوم)}$$

$$Q_{۲} \times \frac{V_{\circ}}{Ln\frac{a}{c}}\left(Ln\frac{b}{c}\right)+Q_{۱}V_{\circ}+Q_{۳}\times \circ=\circ$$

پس:

$$Q_{۱}=-\frac{Q_{۲}}{Ln\frac{a}{c}}\left(Ln\frac{b}{c}\right)$$

با توجه به اینکه کل بار القایی برابر $-Q_{۲}$ است، برای بار القایی هادی سوم داریم:

$$Q_{۳}=-\left(Q_{۱}+Q_{۲}\right)$$

تمرین ۳-۱۱: دو پوستهٔ کروی تشکیل دهندهٔ خازن کروی را بـه پتانـسیل صـفر وصـل کـرده‌ایـم. بـار نقطه‌ای q را در فاصلهٔ R از مرکز دو کره قرار داده‌ایم. بار القاء شده روی پوستهٔ کروی داخلی را بیابید.

مثال ۳-۱۹ در شکل (۳-۴۱) کره‌های A و B با شعاع‌های a و b رسانا هستند و فاصلهٔ مراکز آنها از یکدیگر d است. پوستهٔ رسانای کروی بی‌بار به شعاع c کرهٔ A را در بر می‌گیرد و با آن هم‌مرکز اسـت. اگر کرهٔ B دارای بار Q باشد و کرهٔ A به زمین وصل شده باشد، با شرط $d >> b$، چقدر بار روی سـطح کرهٔ A جمع می‌شود؟ [۴]

حل: مشابه چند مثال اخیر از قضیهٔ هم‌پاسخی استفاده می‌کنیم. حالت اولیه را شرایط فعلی سیـستم و حالت دوم را شرایطی که در آن بار Q بر سطح کرهٔ A قرار گرفته است، فرض می‌کنـیم. در هـر یـک از این حالات داده‌های زیر را داریم:

حالت اولیه:

$$Q_{A۱} \quad , \quad Q_{s۱}=\circ \quad , \quad Q_{B۱}=Q \quad , \quad V_{A۱}=\circ$$

حالت ثانویه:

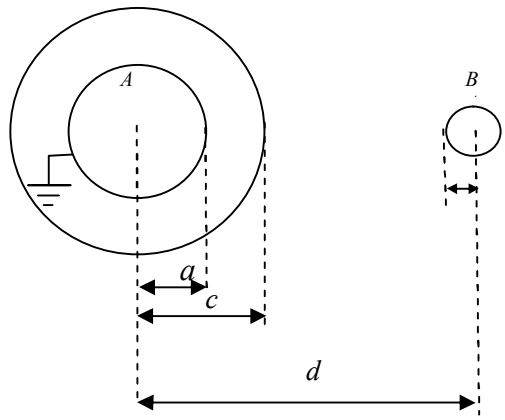
$$Q_{A۲}=Q \quad , \quad Q_{s۲}=\circ \quad , \quad Q_{B۲}=\circ \quad , \quad V_{A۲}=\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}a} \quad , \quad V_{B۲}=\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}d}$$

طبق قضیهٔ هم‌پاسخی:

$$\sum \text{(پتانسیل در حالت اول) (بار در حالت دوم)} = \sum \text{(پتانسیل در حالت دوم) (بار در حالت اول)}$$

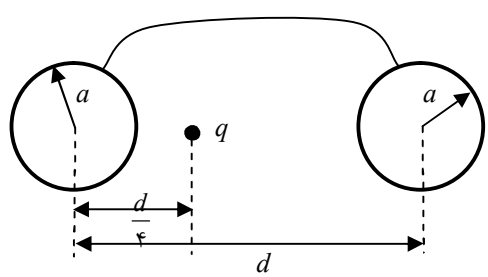
پس:

$$\left(Q_{A1}\times\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\right)+0+\left(Q\times\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d}\right)=0+0+0 \quad\rightarrow\quad Q_{A1}=-\frac{a}{d}Q$$

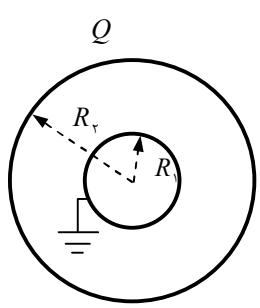


شکل ۳-۴۱: شکل مثال ۳-۱۹

تمرین ۳-۱۲: در شکل (۳-۴۲) دو کرهٔ رسانا با شعاع‌های برابر a و بـه فاصـلهٔ d ($d >> a$) بـا سـیم نازکی به هم متصل شده‌اند. بـار نقطه‌ای q روی خط واصـل دو کره و در فاصلهٔ $\frac{d}{4}$ از کرهٔ سـمت چـپ واقع است. با فرض اینـکه سیم نازک توزیع میدان الکتریکی در فضا را بر هم نمی‌زند، پتانـسیل کـره‌هـا چقدر است؟ [۴]



شکل ۳-۴۲: شکل تمرین ۳-۱۲



شکل ۳-۴۳: شکل تمرین ۳-۱۳

تمرین ۳-۱۳: در فضای خالی بار Q به طور یکنواخت بر روی کره‌ای به شعاع R_2 پخش شده است. این کره، کرهٔ رسانائی به شعاع R_1 که زمین شده است را احاطه می‌کند. میدان الکتریکی را در فضای بین دوکره محاسبه کنید. (کارشناسی ارشد برق)

تمرینات تکمیلی این قسمت را در مسائل پایان فصل خواهید یافت.

۳-۴- معادلات لاپلاس و پواسون

در فصل دوم سعی کردیم تا به طرق مختلف به محاسبهٔ میدان بپردازیم. در تمامی این حالات، یا توزیع بار در فضا کاملاً مشخص بود و ما به دلخواه (بسته به نوع مسئله) از روش قانون کولن و یا قانون گاوس استفاده می‌کردیم، و یا اینکه تابع پتانسیل در فضا معین بود و با منفی گرادیان گرفتن از آن به میدان می‌رسیدیم. با این حال در عمدهٔ کارهای عملی، تابع توزیع بار و یا تابع پتانسیل در فضا معین نیستند، بلکه فقط شرایط الکترواستاتیکی (بار و پتانسیل) در تعدادی از مرزهای سیستم مشخص است؛ قصد داریم در این شرایط میدان الکتریکی و پتانسیل را محاسبه کنیم. بخشی از این دست مسائل را در قسمت قبل بررسی کردیم، با این همه بخش مهمی از آنها با روابط لاپلاس و پواسون حل می‌شوند. از طرفی روش لاپلاس با توجه به شرایط ویژه‌اش (به خصوص برنامه‌پذیری برای الگوریتم‌های کامپیوتری) راهکاری کاملاً عملیاتی در تحلیل سیستم‌ها و علل خصوص در صنعت می‌باشد.

می‌دانیم که:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \xrightarrow{\mathbf{D}=\varepsilon\,\mathbf{E}} \quad \nabla \cdot (\varepsilon\,\mathbf{E}) = \rho$$

با استفاده از اتحاد $\nabla \cdot (\varphi\,\mathbf{E}) = \varphi\,\nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla\varphi$ خواهیم داشت:

$$\nabla \cdot (\varepsilon\,\mathbf{E}) = \varepsilon\,\nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla\varepsilon = \varepsilon\,\nabla \cdot (-\nabla V) + \mathbf{E} \cdot \nabla\varepsilon = \rho$$

که نتیجه می‌دهد:

$$-\varepsilon\,\nabla^2 V + \mathbf{E} \cdot \nabla\varepsilon = \rho \qquad (۲۳\text{-}۳)$$

در این صورت اگر فرض کنیم $\nabla\varepsilon = 0$ داریم:

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}} \qquad (۲۴\text{-}۳)$$

رابطهٔ فوق را **معادلهٔ پواسون** گویند، در این رابطه اگر $\rho = 0$، آنگاه:

$$\boxed{\nabla^{۲} V = ۰} \qquad (۳\text{-}۲۵)$$

رابطهٔ اخیر را **معادلهٔ لاپلاس** می‌نامیم. معادلات لاپلاس و پواسون به ازای شرایط مرزی مشخص، جواب یکتا دارند. نتیجه این اصلِ یکتایی جواب این است که، اگر بتوان نشان داد که تابعی معادله و شرایط مرزی را ارضا می‌کند، جواب و تنها جواب مسئله است. این موضوع را در قسمت بعدی مطرح می‌کنیم، پیش از آن به نکات زیر توجه کنید:

الف) همانطور که در رابطهٔ (۳-۲۴) نشان داده شد، تنها شرط برقراری معادلهٔ پواسون، $\nabla \varepsilon = ۰$ است و این موضوع به معنای **همگن بودن محیط** می‌باشد.

ب) از آنجا که برقراری معادلهٔ لاپلاس به معنای صفر بودن مشتق دوم پتانسیل در یک محیط است، می‌توان گفت که اگر در محیطی معادلهٔ لاپلاس برقرار باشد، در این محیط پتانسیل نه ماکزیمم دارد و نه مینیمم. (به یاد آزمون دوم مشتق بیفتید!)

پ) بر طبق اصل یکتایی جواب می‌توان نشان داد که اگر پتانسیل روی مرز بسته‌ای ثابت باشد، پتانسیل داخل آن مرز نیز ثابت خواهد بود.

پیش از این و در فصل دوم، تا حدی با کار با رابطه‌های فوق آشنا شدیم، مثال زیر برای آشنایی اولیه مناسب خواهد بود:

مثال ۳-۲۰ مطلوب است محاسبهٔ پتانسیل در $x = ۰.۲۴$ در یک خازن با صفحات بی‌نهایت و موازی، در حالیکه در $x = ۰$، $V = ۰$ و در $x = ۱$، $V = ۱۰۰$ ولت باشد. مابین دو صفحهٔ خازن، دی‌الکتریک غیرهمگن با مشخصات $\varepsilon = \varepsilon_{۰}\left(۱+x^{۲}\right)$ پر شده است. (کارشناسی ارشد برق)

حل: از قالب استفاده شده در صفحهٔ قبل استفاده می‌کنیم. می‌دانیم که:

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon \mathbf{E}\right) = ۰ \quad \rightarrow \quad \varepsilon\left(\nabla \cdot \mathbf{E}\right) + \left(\mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon\right)$$

که با فرض $\mathbf{E} = E_x \, \mathbf{a}_x$ (به هر حال میدان در بین صفحات خازن باید یکنواخت باشد!)، نتیجه می‌دهد:

$$\varepsilon_{۰}\left(۱+x^{۲}\right)\frac{dE}{dx} + ۲\varepsilon_{۰} x \, E_x = ۰ \quad \rightarrow \quad E_x = \frac{k}{۱+x^{۲}}$$

پس با استفاده از اختلاف پتانسیل، برای مقدار k داریم:

$$\int_{۰}^{d} E_x \, dx = k \int_{۰}^{d} \frac{dx}{۱+x^{۲}} = ۱۰۰ \quad \rightarrow \quad k = \frac{۱۰۰}{\tan^{-۱} d}$$

در اینصورت میدان و پتانسیل به صورت زیر خواهد بود:

$$E_x = \frac{100}{\tan^{-1} d} \times \frac{1}{1+x^2}$$

$$V(x) = \int_0^x E_x \, dx = \frac{100}{\tan^{-1} d} \times \tan^{-1} x \Big|_{x=0.24,\, d=1} \simeq 30^V$$

همانطور که مشاهده کردیم، بخش اصلی کار، تعیین ثابت‌هاست. در بخش‌های بعدی فصل ایده‌های مناسبی را برای محاسبهٔ سریع ضرایب ثابت، ارائه می‌کنیم. در ادامه اصل یکتایی جواب را بیان خواهیم کرد.

۳-۴-۱- اصل یکتایی جواب

فرض کنید برای یک مسئلهٔ با شرایط مرزی معلوم، دو جواب V_1 , V_2 یافت شده باشند. هر یک از جوابها باید در معادله پواسون (یا در معادله لاپلاس (اگر $\rho = 0$)) صدق کند، لذا می‌توان نوشت:

$$\nabla^2 V_1 = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla^2 V_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

اکنون توجه خود را به اختلاف پتانسیل‌ها یعنی $V_d = V_1 - V_2$ معطوف نموده و لاپلاسین V_d را محاسبه می‌کنیم:

$$\nabla^2 V_d = \nabla^2 (V_1 - V_2) = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon} - (-\frac{\rho}{\varepsilon}) = 0$$

از طرف دیگر، چون V_1 و V_2 هر دو جواب یک مسئله فرض می‌شوند، باید شرایط مرزی یکسانی را برآورده سازند؛ به عبارت دیگر باید $[V_1]_S = [V_2]_S$ باشد. (که S بیانگر سطح مرزی است) آنگاه برای V_d می‌توان نوشت:

$$[V_d]_S = [V_2 - V_1]_S = [V_1]_S - [V_2]_S = 0 \qquad (۳-۲۶)$$

حال با استفاده از اتحاد برداری $\nabla \cdot (V\,\mathbf{A}) = V \times (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot \nabla V$ می‌توان با جایگزین نمودن V با V_d و A با ∇V_d چنین نوشت:

$$\nabla \cdot \left(V_d \times \nabla V_d\right) = V_d \times \nabla^2 V_d + \left|\nabla V_d\right|^2$$

با انتگرال گرفتن از رابطهٔ فوق در حجم V که محدود به سطح S باشد، داریم:

$$\int_v \nabla \cdot \left(V_d \times \nabla V_d\right) dv = \int_v \left(V_d \times \nabla^2 V_d\right) dv + \int_v \left|\nabla V_d\right|^2 dv \qquad (۳-۲۷)$$

با استفاده از قضیه دیورژانس انتگرال سمت چپ رابطه فوق را به یک انتگرال سطح تبدیل می‌کنیم و چون V_d طبق رابطه (۳-۲۶) روی سطح S صفر است، داریم:

$$\int_v \nabla \cdot \left(V_d \times \nabla V_d\right) dv = \oint_S \left(V_d \times \nabla V_d\right) \cdot ds = 0$$

حال با توجه به اینکه $\nabla^2 V_d = 0$ است، انتگرال اول سمت راست رابطه (۳-۲۷) نیز صفر بوده و در نتیجه:

$$\int_v \left|\nabla V_d\right|^2 dv = 0 \qquad (۳-۲۸)$$

اما از آنجا که $\left|\nabla V_d\right|^2$ همه جا مثبت است، برقراری رابطه (۳-۲۸) فقط وقتی امکان‌پذیر است که ∇V_d در همه جای حجم v برابر صفر باشد، بنابراین:

$$\nabla V_d = 0$$

که بدیهی‌ترین نتیجهٔ آن عبارتست از:

$$V_d = V_1 - V_2 = cte$$

اما چون V_d روی سطح مرزی صفر است، مقدار ثابت در سمت راست رابطه نیز باید برابر صفر باشد و در نتیجه در کلیه نقاط حجم مورد نظر داریم $V_1 = V_2$ و قضیه یگانگی جواب اثبات شده است. همین‌طور که پیش از این ذکر شد، اگر بتوان نشان داد که تابعی معادله و شرایط مرزی را ارضا می‌کند، جواب و تنها جواب مسئله است.

۳-۴-۲- معادلات لاپلاس در دستگاه‌های متعامد

بیان معادلهٔ لاپلاس در دستگاه‌های مختلف را در زیر نشان داده‌ایم. این روابط را می‌توانید بسادگی و با توجه به قواعد مربوط به دیورژانس و گرادیان که در فصل اول بیان شد، محاسبه کنید.

دستگاه مختصات کارتزین:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \qquad (۳-۲۹)$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \qquad (۳-۳۰)$$

دستگاه مختصات کروی:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \qquad (۳-۳۱)$$

لازم به ذکر است که این روابط در حل معادلات پواسون در حالت‌های تک‌روند نیز کاربرد دارند. مثال زیر یکی از این کاربردها را نشان می‌دهد:

مثال کلیدی

مثال ۳-۲۱ پتانسیل را در داخل کره‌ای به شعاع a که دارای بار حجم با چگالی یکنواخت ρ_0 است بیابید. (با استفاده از معادله پواسون)

حل: همانطور که در صورت سوال گفته‌شده بایستی از معادله پواسون استفاده کنیم، چرا که در داخل کره بار داریم. اگر هنوز تمرین (۲-۲۵) را حل نکرده‌اید، در اینجا آن را با روش پواسون حل خواهیم کرد! با توجه به تقارنی که در جهت R داریم کافی است از همین مولفه در محاسبهٔ پواسون استفاده کنیم:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V}{\partial R}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

که پس از حل و ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$V(R) = -\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}R^2 - \frac{A}{R} + B$$

که در آن B, A ثابت‌هایی‌اند که لازم است با توجه به شرایط مرزی تعیین گردند.

نکتهٔ طلایی

به طور کلی در مسائل مربوط به لاپلاس و پواسون شرایط مرزی ناشی از دو چیز هستند:

۱) شرط مولفهٔ عمودی میدان (با فرض نبود بار در مرز):

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \;\rightarrow\; \varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial R} = \varepsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial R}$$

۲) پیوستگی پتانسیل در مرزها

برای بررسی این دو شرط به میدان و پتانسیل در $R > a$ احتیاج داریم. کافی است از قانون گاوس استفاده کنیم:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 R^2}\mathbf{a}_R \quad , \quad V = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 R} \qquad : R \geq a$$

تنها مرز موجود در سیستم مرز $R = a$ است که در آن داریم:

$$-\frac{\partial V}{\partial R}\bigg|_{R=a} = \frac{2\rho_0}{6\varepsilon_0}R + \frac{A}{R^2}\bigg|_{R=a} = \frac{\rho_0 a}{3\varepsilon_0} = E\bigg|_{R=a}$$

که از آن نتیجه می‌گیریم: $A = 0$.

حال پتانسیل را بررسی می‌کنیم. می‌دانیم در مرز $R = a$ بایستی پتانسیل پیوسته باشد:

$$\frac{-\rho_0}{6\varepsilon_0}a^2 - \cancel{\frac{A}{a}}^{\,0} + B = \frac{\rho_0 a^2}{3\varepsilon_0} = V(R)\bigg|_{R=a}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$B = \frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0}$$

پس پتانسیل به فرم زیر خواهد بود:

$$V(R) = \frac{-\rho_0}{6\varepsilon_0}R^2 + \frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}(3a^2 - R^2)$$

این همان رابطهٔ (۲-۵۶) است که در تمرین (۲-۲۵) حل آن از شما خواسته شده بود.

با حل مثال زیر، با روش کار بیشتر آشنا خواهید شد. با این همه سعی کنید آن را با روش مرسوم (قانون گاوس) نیز حل کنید.

مثال ۳-۲۲ فرض کنید که توزیع بارهای الکتریکی حجمی داخل یک اتم هیدروژن دارای چگالی حجمی زیر باشد:

$$\rho_v = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 A\ \alpha^3 e^{-\alpha R}$$

(α و A ثابت‌های سیستم‌اند) پتانسیل داخل اتم هیدروژن را از طریق حل معادلهٔ پواسون بدست آورید.

حل: طبق رابطهٔ پواسون داریم:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R}\right) = \frac{1}{2} A\ \alpha^3 e^{-\alpha R}$$

در نتیجه:

$$R^2 \frac{\partial V}{\partial R} = \int \frac{1}{2} A\ \alpha^3 R^2 e^{-\alpha R}\ dR + C_1$$

پس از حل انتگرال (که به نظر کار سختی هم هست! (از روش جزء به جزء استفاده کنید)) خواهیم داشت:

$$\frac{dV}{dR} = \frac{1}{2} A\ \alpha^3 \left(-\frac{R^2}{\alpha} - \frac{2R}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3}\right)\frac{e^{-\alpha R}}{R^2} + \frac{C_1}{R^2} = -\frac{A}{2R^2}\left(\alpha^2 R^2 + 2\alpha R + 2\right)e^{-\alpha R} + \frac{C_1}{R^2}$$

شرط مرزی $\left.\frac{dV}{dR}\right|_{R=0} = 0$ مستلزم تساوی زیر است:

$$\frac{C_1}{R^2} - \frac{A}{R^2} = 0 \rightarrow A = C$$

پس:

$$\frac{dV}{dR} = -E_R = -\frac{A}{2R^2}\left(\alpha^2 R^2 + 2\alpha R + 2\right)e^{-\alpha R} + \frac{A}{R^2}$$

و در نتیجه:

$$V = \int -\frac{A\alpha^2}{2R^2} e^{-\alpha R}\, dR - \int A\left(\frac{\alpha}{R} + \frac{1}{R^2}\right)e^{-\alpha R}\, dR + \int \frac{A}{R^2} dR + C_2$$

$$= \frac{A}{2}\alpha e^{-\alpha R} + \frac{A}{R} e^{-\alpha R} - \frac{A}{R} + C_2$$

شرط مرزی $V\Big|_{R\to\infty}=0$ مستلزم اینست که: $C_2=0$

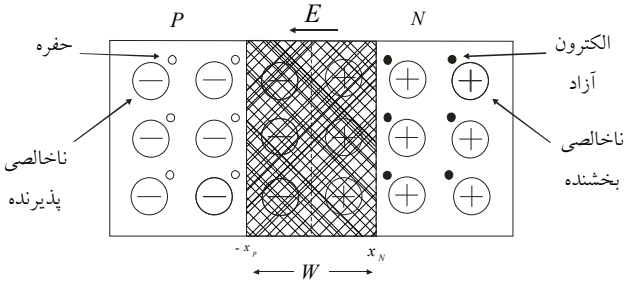
با این تفاسیر:

$$V(R)=\frac{A}{2}\alpha e^{-\alpha R}+\frac{A}{R}e^{-\alpha R}-\frac{A}{R}$$

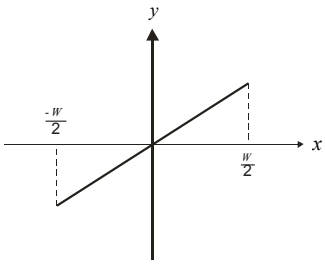
همانطور که مشاهده می‌شود، در حالت کلی حل معادله پواسون کار پیچیده‌ایست، با این حال در اکثر کاربردهای عملی حل معادلهٔ یک متغیره کفایت می‌کند. در ادامه با ذکر یک مثال عملی که در درس فیزیک الکترونیک بررسی می‌گردد، بحث در مورد معادلهٔ پواسون را پایان داده و به تشریح معادلهٔ لاپلاس می‌پردازیم. لازم به ذکر است که ما بر خلاف عُرفِ رایج، ابتدا معادلهٔ پواسون را بیان کرده‌ایم، مهمترین دلیل این عمل، گستردگی فوق‌العادهٔ مباحث در قسمت لاپلاس می‌باشد، با این کار علاوه بر آشنایی شما با مسیر کلی حل معادلات پواسون (و البته لاپلاس که به صورت مشابه می‌تواند انجام گیرد و کافی است در تمام روابط محاسبه شده $\rho=0$ قرار دهیم) اهمیت روش‌های ساده‌سازی شده‌ای که در قسمت بعد بیان خواهیم کرد، را یادآوری نموده‌ایم.

برای نشان دادن کاربرد عملی معادلهٔ پواسون به بررسی یک نوع دیود نیمه‌هادی که در آن چگالی بار الکتریکی در ناحیه پیوند بطور خطی تغییر می‌کند، می‌پردازیم. شکل (۳-۴۴) پیوند $p-n$ و شکل (۳-۴۵) تغییرات چگالی بار را برای این دیود نشان می‌دهد. با فرض آنکه چگالی توزیع بار در سطح مقطع دیود، یکنواخت و تغییرات آن در فاصلهٔ $|x|\le\frac{W}{2}$ توسط رابطهٔ $\rho=ax$ بیان شود، آنگاه معادلهٔ پواسون به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d^2V}{dx^2}=-\frac{ax}{\varepsilon}$$



شکل ۳-٤٤: پیوند $p-n$



شکل ۳-٤٥: چگالی بار در پیوند

که ε ضریب نفوذپذیری الکتریکی نیمه‌هادی است. پس از یکبار انتگرال گرفتن از طرفین معادله داریم:

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{a}{۲\varepsilon}x^{۲} + c_{۱} \qquad (۳۲\text{-}۳)$$

ثابت $c_{۱}$ را می‌توان با استفاده از این شرط حدی که میدان الکتریکی باید در $x = \pm \frac{W}{۲}$ صفر باشد بدست آورد. در واقع میدان الکتریکی فقط در ناحیه پیوند (لایه تهی)، که بارهای مثبت و منفی پس از نفوذ حفره‌ها و الکترونها از یکطرف پیوند بطرف دیگر تشکیل می‌شوند، وجود دارد. خطوط میدان از بارهای مثبت شروع و به بارهای منفی ختم می‌شوند. با اعمال شرط مذکور $c_{۱} = \frac{\alpha W^{۲}}{۸\varepsilon}$ محاسبه می‌گردد. یادآوری می‌شود که در محاسبه این ثابت از $E_x = -\frac{dV}{dx}$ استفاده شده است، پس از جایگزین نمودن مقدار این ضریب در (۳-۳۲) و یکبار دیگر انتگرال گرفتن داریم:

$$V = -\frac{a}{۶\varepsilon}x^{۳} + \frac{aW^{۲}}{۸\varepsilon}x + c_{۲}$$

که در آن $c_{۲}$ مقداری ثابت است. اگر پتانسیل در $x = ۰$ را به‌دلخواه برابر صفر در نظر بگیریم. این ثابت برابر صفر محاسبه می‌شود. افت پتانسیل روی پیوند عبارتست از:

$$V_j = V\left(+\frac{W}{۲}\right) - V\left(-\frac{W}{۲}\right) = \frac{aW^{۳}}{۱۲\varepsilon}$$

با در دست داشتن ولتاژ پیوند می‌توان ظرفیت خازن تشکیل شده در لایهٔ تهی را که از رابطه $C = \frac{dQ}{dV_j}$ بدست می‌آید محاسبه نمود. برای این منظور ابتدا Q را بدست می‌آوریم:

$$Q = A\int_{۰}^{\frac{w}{۲}} a\,x\;dx = A\,\frac{aW^{۲}}{۸}$$

که در آن A مساحت سطح مقطع پیوند است. حال در مورد ظرفیت می‌توان گفت که:

$$C = \frac{dQ}{dV_j} = \frac{dQ}{dW}\times\frac{dW}{dV_j} = \frac{dQ}{dW}\left(\frac{dV_j}{dW}\right)^{-۱} = \left(\frac{A\,aW}{۴}\right)\left(\frac{aW^{۲}}{۴\varepsilon}\right)^{-۱} = \varepsilon\,\frac{A}{W}$$

پس از جایگزین نمودن W بر حسب V_j داریم:

$$C = A\left(\frac{a\,\varepsilon^{۲}}{۱۲V_j}\right)^{\frac{۱}{۳}} \qquad (۳۳\text{-}۳)$$

همانطور که مشاهده شد، یکی از کاربردهای معادلهٔ پواسون محاسبهٔ خازن اتصال در دیود $p-n$ است. با آن در درس فیزیک الکترونیک آشنا خواهید شد.

۳-۴-۳- حل معادله لاپلاس یک متغیره

بخش مهمی از مسائل عملی، براحتی با استفاده از معادلهٔ لاپلاس یک متغیره حل می‌شوند. در این موارد معادله لاپلاس یک معادله دیفرانسیل معمولی است و از حل پیچیدهٔ معادلات دیفرانسیل جزیی بی‌نیاز هستیم. این حالت‌ها اگر چه خیلی ایده‌آل به نظر می‌رسند اما دقت پاسخ‌ها مناسب است. هر یک از این حالت‌ها را در ادامه بررسی می‌کنیم:

۳-۴-۳-۱- دو هادی مسطح موازی

این دو صفحه را مطابق شکل (۳-۴۶) در نظر بگیرید. رابطهٔ (۳-۲۹) را برای این سیستم حل می‌کنیم:

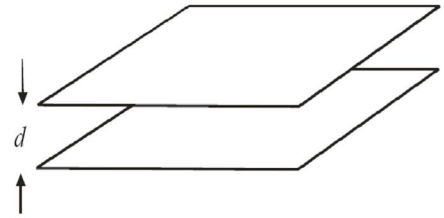
$$\nabla^{۲}V = \frac{\partial^{۲}V}{\partial x^{۲}} + \frac{\partial^{۲}V}{\partial y^{۲}} + \frac{\partial^{۲}V}{\partial z^{۲}} = ۰ \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^{۲}V}{\partial z^{۲}} = ۰$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\boxed{V(z) = A\,z + B} \qquad (۳۴\text{-}۳)$$

نکتهٔ طلایی

رابطهٔ فوق پتانسیل در فضای بین این دو صفحهٔ هادی است و ضرایب A و B با توجه به شرایط مرزی مسئله تعیین می‌شوند.



$V(z) = A\,z + B$

شکل ۳-٤٦: دو صفحهٔ هادی موازی

مثال ۳-۲۳ دو صفحهٔ یک خازن مسطح به ترتیب به پتانسیل‌های صفر و $V_\circ$ وصل شده‌اند و بار q به فاصلهٔ x از یکی از صفحات قرار دارد. با این فرض که فاصلهٔ دو صفحه برابر d باشد، مطلوب است محاسبهٔ تابع پتانسیل در فضای بین دو صفحه.

حل: در مثال (۳-۱۷) با این مسئله آشنا شدیم، با این حال در آنجا، چگونگی محاسبهٔ پتانسیل را بررسی نکردیم. در این قسمت با استفاده از رابطهٔ (۳-۳۴) اینکار را انجام می‌دهیم. مطمئناً سهولت بیش از اندازهٔ حل، در یادگیری بهتر بخش لاپلاس، یاری‌دهنده خواهد بود.

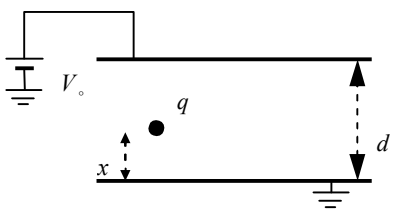
طبق رابطهٔ (۳-۳۴) تابع پتانسیل در فضای بین دو صفحه برابر $V(x)=Ax+B$ خواهد بود. کافی است با استفاده از شرایط مرزی، مقادیر ثابت را تعیین کنیم:

- پتانسیل صفحهٔ پایین ($x=\circ$) صفر است:

$$V(x)=Ax+B\Big|_{x=\circ}=\circ \rightarrow B=\circ$$

- پتانسیل صفحهٔ فوقانی ($x=d$) برابر $V_\circ$ است:

$$V(x)=Ax+B\Big|_{x=d}=V_\circ \rightarrow A=\frac{V_\circ}{d}$$



شکل ۳-۴۷: شکل مثال ۳-۲۳

در نتیجه:

$$V(x)=\frac{V_\circ}{d}x$$

مثال (۳-۹) استفادهٔ همزمان از رابطهٔ (۳-۳۴) و معادلهٔ پواسون را نشان داده و از این جهت مثال مهمی به نظر می‌رسد.

مثال ۳-۲۴ ناحیهٔ $|z|<l$ دارای بار یکنواختی با چگالی $\rho\frac{c}{m^۳}$ است. پتانسیل را در تمام نقاط فضا بدست آورید.

حل: در نواحی $|z|>l$ هیچگونه باری نداریم، از اینرو در این فضا معادله لاپلاس صادق است؛ پس برای $|z|>l$ داریم:

$$V_۱=A_۱z+A_۲ \quad , \quad z>l$$

$$V_2 = A_3 z + A_4 \quad , \quad z < -l$$

از تقارن مسئله روشن است که باید پتانسیل در دو ناحیه با هم برابر باشند، پس:

$$A_2 = A_4 \quad , \quad A_1 = -A_3$$

لازم است دقت کنید که بدلیل منفی بودن مقدار z برای $z < -l$ باید مقدار A_3 را منفی مقدار A_1 انتخاب کنیم.

در ناحیهٔ $|z| < l$ بار داریم، از اینرو در این فضا معادله پواسون برقرارست:

$$\nabla^2 V_3 = \frac{\partial^2 V_3}{\partial z^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial V_3}{\partial z} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} z + K_1$$

$$V_3 = -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} z^2 + K_1 z + K_2$$

مشابه قسمت قبل این رابطه نیز باید دارای تقارن باشد در واقع باید پتانسیل در $0 < z < l$ با پتانسیل در $-l < z < 0$ برابر باشد. از اینرو الزاماً:

$$K_1 = 0$$

حال پیوستگی پتانسیل و شرط مرزی میدان را بررسی می‌کنیم:

پیوستگی پتانسیل در $z = l$ نتیجه می‌دهد:

$$-\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} l^2 + K_2 = A_1 l + A_2$$

همچنین چون بار سطحی نداریم باید در $z = l$ داشته باشیم:

$$-\frac{\partial V_3}{\partial z} = -\frac{\partial V_1}{\partial z}$$

که بدست می‌آوریم:

$$\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} l = -A_1$$

$$K_2 = A_2 - \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} l^2 + \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} l^2 = A_2 - \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} l^2$$

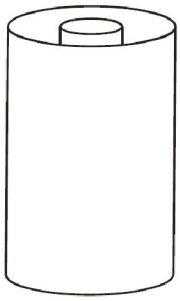
پس:

$$V_{۲} = V_{۱} = -\frac{\rho_{\circ} l}{\varepsilon_{\circ}}|z| \quad , \quad |z| > l$$

$$V_{۳} = -\frac{\rho_{\circ}}{۲\varepsilon_{\circ}} z^{۲} \quad , \quad |z| < l$$

همانطور که در این مثال دیدیم قسمت عمدهٔ کار یافتن ضرایب ثابت است و اگر در مسئله احتیاجی به استفاده از روش پواسون نداشته باشیم با بحث بسیار ساده‌ای مواجه خواهیم بود. کافی است به دقت از شرایط مرزی استفاده کنیم، اگر در مسئله به معادلهٔ پواسون برخورد کردیم داشتن یک دید فیزیکی از مسئله و تقارن می‌تواند راهگشای حل باشد.

۳-۴-۳-۲- دو استوانهٔ هم‌محور



شکل ۳-۴۸: دو استوانهٔ هم‌محور

در این حالت رابطهٔ (۳-۳۰) را با توجه به تقارن موجود به صورت زیر در می‌آوریم:

$$\nabla^{۲} V = \frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial^{۲} V}{\partial \varphi^{۲}} + \frac{\partial^{۲} V}{\partial z^{۲}} = \circ \quad \rightarrow \quad \frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = \circ$$

که حل آن نتیجه می‌دهد:

$$\boxed{V(r) = A\, Ln\, r + B} \qquad (۳-۳۵)$$

در این‌جا نیز ثابت‌های رابطه از شرایط مرزی مشخص می‌شوند.

مثال ۳-۲۵ سه استوانهٔ فلزی نازک هم‌محور به ترتیب دارای شعاع‌های $r_{۱}$ ، $r_{۲}$ و $r_{۳}$ هستند. محیط بین استوانه‌ها فضای آزاد است. بار $Q_{۲}$ روی استوانهٔ هادی میانی قرار داده می‌شود. استوانهٔ داخلی به پتانسیل $V_{\circ}$ و خارجی به زمین وصل شده‌اند. تابع پتانسیل را در فضای بین هادی داخلی و استوانهٔ مرکزی بیابید.

حل: در مثال (۳-۱۸) با این مسئله آشنا شدیم، با این حال در آنجا چگونگی محاسبهٔ پتانسیل را بررسی نکردیم. در این قسمت با استفاده از رابطهٔ (۳-۳۵) اینکار را انجام می‌دهیم. طبق این رابطه پتانسیل در فضای مذکور به صورت $V(r) = A\, Ln\, r + B$ است. برای تعیین ثابت‌ها به فرم زیر عمل می‌کنیم:

- پتانسیل در استوانهٔ داخلی $V_{\circ}$ است، پس:

$$V(r) = A\,Ln\,r + B\Big|_{r=a} = V_\circ \;\rightarrow\; A\,Ln\,a + B = V_\circ$$

- پتانسیل در استوانهٔ خارجی، صفر است، لذا:

$$V(r) = A\,Ln\,r + B\Big|_{r=c} = V_\circ \;\rightarrow\; A\,Ln\,c + B = \circ$$

از حل همزمان دو معادلهٔ فوق نتیجه می‌گیریم که:

$$V(r) = \frac{V_\circ}{Ln\frac{a}{c}}\left(Ln\,r - Lnc\right) = \frac{V_\circ}{Ln\frac{a}{c}}\left(Ln\frac{r}{c}\right)$$

مثال ۳-۲۶ کابل هم‌محوری با شعاع هادی داخلی a و شعاع هادی خارجی b را در نظر بگیرید. محور کابل در امتداد محور x می‌باشد. فضای داخلی کابل با مادهٔ عایق ناهمگنی با ضریب دی‌الکتریکی $\varepsilon = \varepsilon_\circ e^{-|x|}$ پر شده است. ظرفیت خازنی در واحد طول کابل هم‌محور را بدست آورید. (کارشناسی ارشد فیزیک)

حل: از آنجا که ساختار مسئله دارای تقارن استوانه‌ایست و میدان تنها به r بستگی دارد، معادلهٔ لاپلاس را با فرض، همگن بودن محیط در امتداد شعاع، حل می‌کنیم. با این تفاسیر کافی است از رابطهٔ (۳-۳۵) استفاده کنیم:

$$V(r) = A\,Ln\,r + B \quad , \quad E = -\frac{dV}{dr} = -\frac{A}{r}$$

با اعمال شرایط مرزی $V\Big|_{r=a} = V_\circ$ و $V\Big|_{r=b} = \circ$ خواهیم داشت:

$$V = V_\circ \frac{Ln\left(\frac{b}{r}\right)}{Ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad , \quad E_r = \frac{V_\circ}{r\,Ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

پس می‌توان گفت که:

$$D_r = \varepsilon E_r = \varepsilon_\circ e^{-x}\frac{V_\circ}{r\,Ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad , \quad \sigma = \mathbf{D}\,.\,\mathbf{a}_n = \varepsilon_\circ e^{-x}\frac{V_\circ}{a\,Ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

حال می‌توانیم میزان بار را محاسبه کنیم:

$$Q=\int \sigma\, ds=\int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{\infty}\varepsilon_{\circ}e^{-x}\frac{V_{\circ}}{a\,Ln\left(\frac{b}{a}\right)}a\,d\varphi dx=\frac{۲\pi\varepsilon_{\circ}V_{\circ}}{Ln\left(\frac{b}{a}\right)}\times\left.\frac{e^{-x}}{-۱}\right|_{\circ}^{\infty}=\frac{۲\pi\varepsilon_{\circ}V_{\circ}}{Ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

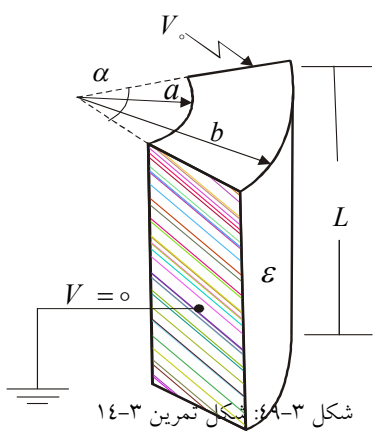
ظرفیت خازنی کابل هم‌محور در ناحیهٔ $\circ<x<\infty$ به فرم زیر خواهد بود:

$$C=\frac{Q}{V_{\circ}}=\frac{۲\pi\varepsilon_{\circ}}{Ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

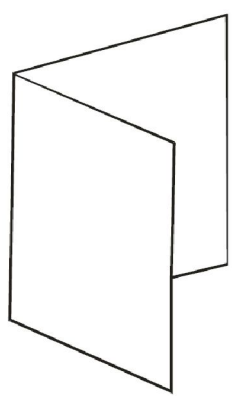
ظرفیت خازنی در $x<\circ$ نیز موازی ظرفیت‌اش در $x>\circ$ است، پس دو ظرفیت خازنی موازی را جمع می‌کنیم:

$$C_{total}=۲C=\frac{۴\pi\varepsilon_{\circ}}{Ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

تمرین ۳-۱۴: یک خازن توسط یک قطعه از دو استوانهٔ هم‌محورِ ناقص مطابق شکل (۳-۴۹) ساخته شده است. دو صفحهٔ قائم دو دورق خازن را تشکیل می‌دهند. ظرفیت خازنی را برای ابعاد نشان داده شده در شکل و پارامترهای $(\varepsilon, L, a, b, \alpha)$ محاسبه کنید. از اثرات کناری صرف‌نظر کنید.



شکل ۳-۴۹: شکل تمرین ۳-۱۴



شکل ۳-۵۰: دو نیم‌صفحهٔ با لبهٔ مشترک $V(\varphi)=۲A\varphi+B$

۳-۴-۳-۳- دو نیم‌صفحه با لبهٔ مشترک

در این حالت پتانسیل تابعی تک متغیره از φ است. شکل (۳-۵۰) این مدل را نشان می‌دهد. اگر معادلهٔ (۳-۳۱) را ساده کنیم، خواهیم داشت:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}=0$$

که نتیجه می‌شود:

$$\boxed{V(\varphi)=A\,\varphi+B} \qquad (۳۶-۳)$$

مثال زیر کاربرد این رابطه را نشان می‌دهد:

مثال ۳-۲۷ دو نیم‌رسانا واقع در ناحیهٔ $\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای به ترتیب دارای پتانسیل‌های صفر و V_0 می‌باشند. ناحیهٔ $0<\varphi<\frac{\pi}{3}$ را عایقی کامل با ضریب دی‌الکتریک $\varepsilon_1=3\varepsilon_0$ و ناحیهٔ $\frac{\pi}{3}<\varphi<\frac{\pi}{2}$ را عایق دیگری با ضریب دی‌الکتریک $\varepsilon_2=5\varepsilon_0$ فرا گرفته است، چگالی سطحی بارهای پلاریزه را در $\varphi=\frac{\pi}{3}$ بدست آورید. (کارشناسی ارشد برق ۷۵)

حل: V فقط تابعی از φ است پس طبق رابطهٔ (۳-۳۶) داریم:

$$V_1=A_1\varphi_1+B_1$$
$$V_2=A_2\varphi_2+B_2$$

همانطور که مشاهده می‌شود بدلیل متفاوت بودن گذردهی در دو محیط ما نیز دو رابطه برای پتانسیل در نظر گرفته‌ایم. این روابط پاسخ نهایی مسئله بوده و کافی است مقادیر ثابت را بیابیم، تمام کارهایی که از این پس انجام می‌دهیم برای محاسبهٔ این ضرایب ثابت است؛ در واقع اگر بتوانید بدون حل جواب‌هایی را برای این ثابت‌ها حدس بزنید (به گونه‌ای که شرایط مرزی را ارضا کنند) حل مسئله تمام است، چرا که طبق اصل یکتایی جواب این پاسخ‌ها تنها جواب مسئله‌اند. ما برای محاسبهٔ این ضرایب اینگونه عمل می‌کنیم:

- ابتدا شرط مرزی پتانسیل در $\varphi=0$ را بررسی می‌کنیم:

$$V_1=A_1\varphi_1+B_1 \xrightarrow{V_1(\varphi=0)=0} B_1=0 \rightarrow V_1=A_1\varphi_1$$

- از طرفی در مرز بین دو محیط باید پتانسیل‌ها یکسان باشد، پس:

$$V_1(\varphi=\frac{\pi}{3})=V_2(\varphi=\frac{\pi}{3}) \qquad \rightarrow A_1\frac{\pi}{3}=A_2\frac{\pi}{3}+B_2 \quad (1)$$

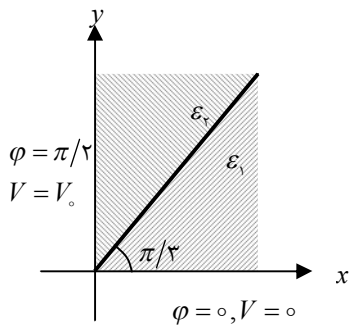
مثال کلیدی

- همچنین برای شرط مرزی $\varphi = \frac{\pi}{۲}$ داریم:

$$V_۲(\varphi = \frac{\pi}{۲}) = A_۲ \frac{\pi}{۲} + B_۲ = V \qquad (۲)$$

- شرط آخر شرط مرزی میدان است. برای آن خواهیم داشت:

$$\varepsilon_۱ \frac{\partial V_۱}{\partial \varphi} = \varepsilon_۲ \frac{\partial V_۲}{\partial \varphi} \rightarrow ۳A_۱ = ۵A_۲ \qquad (۳)$$



شکل ۳- ۵۱: شکل مثال ۳-۲۷

از حل همزمان (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که:

$$B_۲ = \frac{۴}{۱۳} V_\circ \quad ، \quad A_۲ = \frac{۱۸}{۱۳\pi} V_\circ \quad ، \quad A_۱ = \frac{۳\circ}{۱۳\pi} V_\circ$$

پس:

$$V_۱ = \frac{۳\circ}{۱۳\pi} V_\circ \varphi \quad \rightarrow \quad \mathbf{E}_۱ = -\nabla V_۱ = -\frac{۱}{r}\left(\frac{۳\circ}{۱۳\pi} V_\circ\right)\mathbf{a}_\varphi$$

$$V_۲ = \frac{۱۸}{۱۳\pi} V_\circ \varphi + \frac{۴}{۱۳} V_\circ \quad \rightarrow \quad \mathbf{E}_۲ = -\nabla V_۲ = -\frac{۱}{r}\left(\frac{۱۸}{۱۳\pi} V_\circ\right)\mathbf{a}_\varphi$$

و در نتیجه برای محاسبهٔ بار مقید به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\rho_{sb_۱} = \mathbf{P}_۱ \cdot \mathbf{a}_n = \varepsilon_\circ(\varepsilon_{r۱} - ۱)\mathbf{E}_۱ \cdot \mathbf{a}_\varphi = -\frac{۶\circ V_\circ \varepsilon_\circ}{۱۳\pi\, r}$$

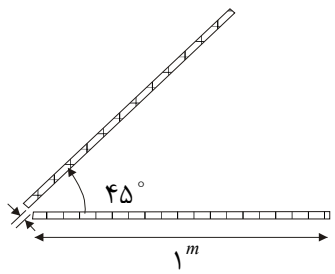
$$\rho_{sb_۲} = \mathbf{P}_۲ \cdot \mathbf{a}_n = \varepsilon_\circ(\varepsilon_{r۲} - ۱)\mathbf{E}_۲ \cdot \mathbf{a}_\varphi = \frac{۷۲ V_\circ \varepsilon_\circ}{۱۳\pi\, r}$$

بار سطحی مورد نظر مجموع این دو جواب است، یعنی:

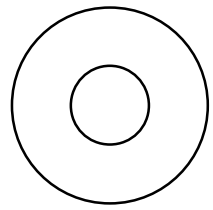
$$\rho_{sb} = \rho_{sb_۱} + \rho_{sb_۲} = \frac{۱۲ V_\circ \varepsilon_\circ}{۱۳\pi\, r}$$

تمرین ۳-۱۵: دو صفحهٔ هادی با ابعاد ۱×۵^m با یکدیگر زاویهٔ ۴۵° ساخته‌اند. صفحات مذکور یکدیگر را قطع نکرده و به یک فاصلهٔ هوایی ۴^{mm} ختم می‌شوند. با این فرض که محیط بین دو صفحه از ماده‌ای

با گذردهی نسبی $\varepsilon_r = ۱.۵$ تشکیل شده باشند، اگر اختلاف پتانسیل ۵۰^V بین دو صفحه برقرار گـردد، چه مقدار بار بر روی هر صفحه قرار می‌گیرد؟ (کارشناسی ارشد برق)



شکل ۳-۵۲: شکل تمرین ۳-۱۵


$V(R) = \frac{A}{R} + B$

شکل ۳-۵۳: دو کرهٔ هم‌مرکز

۳-۴-۳-۳- دو کرهٔ هم‌مرکز

در این حالت رابطهٔ (۳-۳۲) را به فرم زیر ساده می‌نماییم:

$$\nabla^۲ V = ۰ \rightarrow \frac{۱}{R^۲}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^۲ \frac{\partial V}{\partial R}\right) = ۰$$

که از حل آن نتیجه می‌گیریم:

$$\boxed{V(R) = \frac{A}{R} + B} \qquad (۳۷-۳)$$

مثال (۳-۲۸) کاربرد این رابطه را نشان می‌دهد.

مثال ۳-۲۸ بین دو کرهٔ فلزی هم مرکز به شعاع‌های $a = ۱۰^{cm}$ و $b = ۴۰^{cm}$ اخـتلاف پتانـسیل ۲۷۰^V برقرار شده است.، به طوریکه کره بزرگتر زمـین شـده اسـت. پتانـسیل در $R = ۳۰^{cm}$ را بدسـت آوریـد. (کارشناسی ارشد برق)

حل: در فضای بین دو کره بار نداریم، از اینرو معادلهٔ لاپلاس برقرار است. با توجه به آرایش مـسئله کـه مشابه شکل(۳-۵۳) می‌باشد، می‌توان گفت که تابع پتانسیل در فضای بین دو کره به صورت زیر است:

$$V(R) = \frac{A}{R} + B$$

از طرفی اگر شرایط مرزی مسئله یعنی: $V(a) = ۲۷۰$ و $V(b) = ۰$ را در نظر بگیریم، قادر خواهیم بود ضرایب نامعین رابطهٔ فوق را بیابیم:

$$B = -۹۰ \quad \text{و} \quad A = ۳۶$$

در این صورت پتانسیل در فضای بین دو کره از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

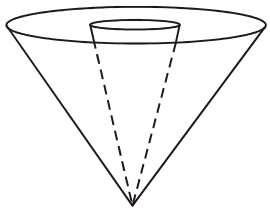
$$V(R) = \frac{۳۶}{R} - ۹۰$$

برای بدست آوردن پتانسیل در هر نقطهٔ موجود در این فضا، کافی است از این رابطه استفاده کنیم. مثلاً برای خواستهٔ مسئله داریم:

$$V(۳۰) = \frac{۳۶}{R} - ۹۰ \Big|_{R=۳۰} = ۳۰^{v}$$

تذکر: این مسئله را در مثال (۲-۴۵) نیز حل نمودیم، به نظرتان کدام راه‌حل بهتر است؟ پیشنهاد می‌کنیم که مسئله را با استفاده از قضیهٔ هم‌پاسخی نیز حل کرده و در نهایت با مقایسه‌ای که انجام می‌دهید، تکنیک خاصی را برای خود پیدا کنید.

تمرین ۳-۱۶: ظرفیت یک خازن کروی را با شروع از پتانسیل، محاسبه کنید.



شکل ۳-٥٤: دو مخروط هم‌راس و هم‌محور

۳-۴-۳-۴- دو مخروط هم‌محور و هم‌راس

در این حالت نیز رابطهٔ (۳-۳۲) را به صورت زیر ساده خواهیم کرد.:

$$\nabla^{۲} V = ۰ \quad \rightarrow \quad \frac{۱}{R^{۲}\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) = ۰$$

بیایید آن را با هم حل کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) = ۰ \quad \rightarrow \sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta} = A$$

پس:

$$V = A\int\frac{d\theta}{\sin\theta} = A\int\frac{d\theta}{۲\cos(\theta/۲)\sin(\theta/۲)} = A\int\frac{(۱/۲)\sec^{۲}(\theta/۲)d\theta}{\tan(\theta/۲)} = A\int\frac{d\left(\tan(\theta/۲)\right)}{\tan(\theta/۲)}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\boxed{V(\theta) = A\,Ln\left(\tan\frac{\theta}{۲}\right) + B} \qquad (۳۸-۳)$$

مثال ۳-۲۹ دو مخروط هم‌راس بی‌نهایت بوسیلهٔ یک فاصلهٔ هوایی قرار گرفته در راس مخروط از هم جدا شده‌اند. با فرض اینکه مخروط داخلی زمین شده و مخروط خارجی به پتانسیل $V_\circ$ وصل باشد، میدان را در فضای بین دو مخروط بیابید.

حل: ابتدا با استفاده از رابطهٔ (۳-۳۸) پتانسیل را یافته و سپس به میدان می‌رسیم. طبق این رابطه پتانسیل در فضای بین دو مخروط به صورت $V(\theta) = A\,Ln\left(\tan\frac{\theta}{۲}\right) + B$ است. برای محاسبهٔ ضرایب ثابت، از شرایط مرزی استفاده می‌کنیم:

- پتانسیل مخروط داخلی صفر است، پس:

$$V(\theta) = A\,Ln\left(\tan\frac{\theta}{۲}\right) + B\Bigg|_{\theta=\theta_۱} = \circ \quad \rightarrow \quad B = -A\,Ln\left(\tan\frac{\theta_۱}{۲}\right)$$

- پتانسیل مخروط خارجی برابر $V_\circ$ است:

$$V(\theta) = A\,Ln\left(\tan\frac{\theta}{۲}\right) + \overset{B=-A\,Ln\left(\tan\frac{\theta_۱}{۲}\right)}{\cancel{B}}\Bigg|_{\theta=\theta_۲} = V_\circ \quad \rightarrow \quad A = \frac{V_\circ}{Ln\left[\dfrac{\tan(\theta_۲/۲)}{\tan(\theta_۱/۲)}\right]}$$

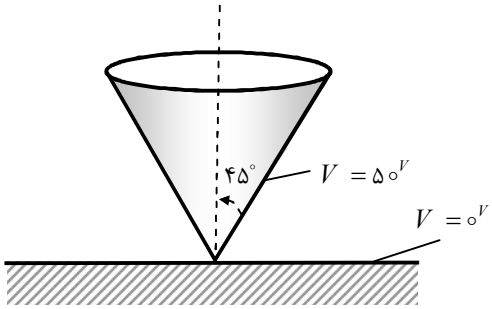
پس برای پتانسیل خواهیم داشت:

$$V = \frac{V_\circ\,Ln\left[\dfrac{\tan(\theta/۲)}{\tan(\theta_۱/۲)}\right]}{Ln\left[\dfrac{\tan(\theta_۲/۲)}{\tan(\theta_۱/۲)}\right]}$$

برای میدان نیز داریم:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{۱}{R}\frac{dV}{d\theta}\mathbf{a}_\theta = -\frac{V_\circ}{R\sin\theta\,Ln\left[\dfrac{\tan(\theta_۲/۲)}{\tan(\theta_۱/۲)}\right]}\mathbf{a}_\theta$$

تمرین ۳-۱۷: یک مخروط با زاویهٔ ۴۵° با فاصلهٔ اندکی بالای یک صفحهٔ هادی زمین‌شده قرار گرفته است. اگر مخروط به پتانسیل ۵۰^V وصل شود، میدان و پتانسیل را در نقطهٔ $(-۳,۴,۲)$ بیابید. (کارشناسی ارشد برق ۸۷)



شکل ۳-۵۵: شکل تمرین ۳-۱۷

نکتهٔ طلایی

پس آنچه تا به اینجا فهمیدیم، اینست که در تمام مسائلی که با لاپلاس حل می‌شوند، موارد زیر باید تعیین گردند:

الف) معادلهٔ مناسب

ب) محل مورد مطالعه (ناحیه‌ای که باید در آن پتانسیل تعیین گردد)

پ) شرایط مرزی معین

۳-۴-۴- حل معادلهٔ لاپلاس در دو بعد

در قسمت قبل بحث جامعی را در ضمینهٔ معادلات لاپلاس تک‌بعدی انجام دادیم. همانطور که مشاهده شد، دانستن روابط معین‌شده، راهگشای حل مسئله بود. درتمامی موارد با استفاده از شرایط مرزی روابط مورد نظر به طور کامل تعیین شده و با توجه به اقناع شدن تمام شرایط، طبق اصل یکتایی جواب، تنها پاسخ مسئله بودند. در این قسمت، معادلهٔ لاپلاس دو متغیره را بررسی خواهیم کرد. همانطور که تعداد بُعدها افزایش یافته‌اند، مسئله نیز پیچیده‌تر شده. در این حالت مسئله نه فقط یک جواب بلکه یک دسته جواب دارد. برای ترکیب این پاسخ‌ها از سری کمک می‌گیریم. با این تفاسیر از همین حالا می‌توانید حدس بزنید که به پیش‌نیاز کاملی از معادلات دیفرانسیل جزئی و سری فوریه نیاز خواهد بود. با این وجود سعی می‌کنیم، مطالب را با کمترین وابستگی ممکن به سطح ریاضیات شما طرح‌ریزی کرده و به حل مسائل بپردازیم. در ضمنِ ارائهٔ هر قسمت، قالبی کلی برای دسته جواب پیدا می‌کنیم. برای اینکه در هر مرتبهٔ حل مسئله، نیازی به محاسبهٔ آن نباشد، این قالب‌های کلی را حفظ کرده و فقط به تعیین ضرایب ثابت آن و یا ساده نمودن قالب (با توجه به ساختار مسئله) می‌پردازیم. بخش مهمی از سوالاتی که به لاپلاس دوبعدی مرتبط‌اند، فقط فرم کلی جواب را می‌خواهند، در هر یک از این مسائل توجه به شرایط مرزی، بخشی از فرم کلی جواب را حذف یا ساده می‌کنند. برای اینکه با

نحوهٔ ساده‌سازی قالب کلی جواب‌ها آشنا شوید، برخی از سوالات را به صورت تستی آورده‌ایم. دقت در این مسائل، سرعت حل مسئله را برایتان بیشتر می‌کند. این دسته از معادلات بسته به دستگاهی که در آن بیان شده‌اند، فرمت خاصی خواهند داشت:

۳-۴-۴-۱- حل معادلهٔ لاپلاس دو بعدی در دستگاه کارتزین

چگونگی حل معادلهٔ لاپلاس را می‌توانید در پیوست کتاب مطالعه کنید. در این قسمت فقط به بررسی پاسخ‌ها می‌پردازیم. فرض کنید تابع پتانسیل مستقل از یکی از مولفه‌های دستگاه کارتزین باشد (مثلا z) در اینصورت بسته به اینکه پتانسیل، در امتداد کدام کمیت، متناوب باشد دو رابطهٔ مختلف (که هر کدام نیز دو بیان مختلف دارند) داریم:

اگر پتانسیل در جهت y متناوب باشد:

$$\boxed{V(x,y)=\sum\left(A\sin ky+B\cos ky\right)\left(C\,e^{-kx}+D\,e^{+kx}\right)} \qquad (۳۹-۳)$$

که می‌توان آنرا بر حسب توابع هایپربولیک نیز بیان کرد:

$$V(x,y)=\sum\left(A\sin ky+B\cos ky\right)\left(C\sinh kx+D\cosh kx\right) \qquad (۴۰-۳)$$

و اگر پتانسیل در جهت x متناوب باشد:

$$V(x,y)=\sum\left(A\sin kx+B\cos kx\right)\left(Ce^{-ky}+De^{+ky}\right) \qquad (۴۱-۳)$$

مشابه قبل می‌توان بیان دیگری برای آن به صورت زیر تعریف کرد:

$$V(x,y)=\sum\left(A\sin kx+B\cos kx\right)\left(C\sinh ky+D\cosh ky\right) \qquad (۴۲-۳)$$

همانطور که ذکر شد، حل مسئله به معنای تعیین ضرایب ثابتِ یکی از معادلات بالاست. با توجه به گستردگی و البته سهولت بیشترِ دستگاه کارتزین، پایه‌گذاری فهم عمیقِ معادلات لاپلاس دوبعدی را در این قسمت قرار داده‌ایم. به همین علت در ادامه با مثال‌های زیاد و متنوعی مواجه می‌شویم. هر یک از این مثال‌ها نکتهٔ مهمی را در خود نهفته دارند. هنر شما درک مثال و فهم آن نکات است. کار را با یک مثال ساده شروع می‌کنیم:

مثال ۳-۳۰ در شکل (۳-۵۶) صفحات پتانسیل در جهت z ، بی‌نهایت فرض می‌شوند. توزیع پتانسیل درون این ناحیه را بیابید.

حل: کافی است یکی از روابط مطرح شده را به کار گیریم. **از آنجایی که وقتی در جهت محور y ها از $y=\circ$ تا $y=b$ دو دفعه به سطح $V=\circ$ می‌رسیم، نتیجه می‌گیریم که پاسخ کلی در جهت y متناوب است** پس رابطهٔ (۳-۳۹) را برگزیده و شرایط مرزی را روی آن اعمال می‌کنیم. این کار را به ترتیب زیر انجام می‌دهیم:

۱) $V(x,\circ)=\circ$:
$$V(x,\circ)=\circ \quad \rightarrow \quad B=\circ$$

۲) $V(x,b)=\circ$:
$$V(x,b)=\circ \rightarrow A\sin kb=\circ \rightarrow k=\frac{n\pi}{b}$$

۳) $V(\circ,y)=\circ$:
$$V(\circ,y)=\circ \rightarrow C+D=\circ \rightarrow C=-D$$

پس تا به اینجا داریم:

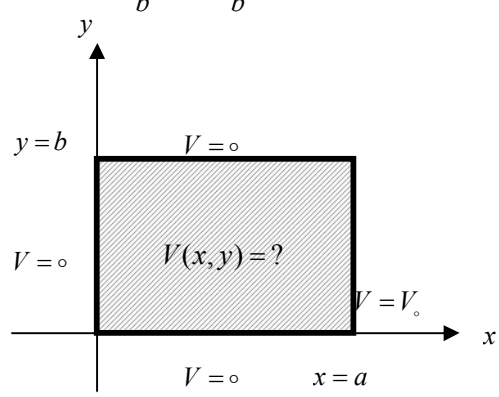
$$V(x,y)=\left(A\sin\frac{n\pi}{b}\right)(Ce^{-kx}-Ce^{kx})$$

که می‌توانیم آن را به فرم هایپربویک هم بیان کنیم:

$$V(x,y)=(AC)\sin\frac{n\pi}{b}\sinh\frac{n\pi}{b}$$

حال کافی است آخرین شرط را اعمال کنیم:

۴) $V(a,y)=V_\circ$:
$$(AC)\sin\frac{n\pi}{b}\sinh\frac{n\pi}{b}=V_\circ$$



شکل ۳-۵۶: شکل مثال ۳-۳۰

با توجه به اینکه رابطهٔ فوق به ازای یک n خاص صادق نیست، از سری آنها استفاده می‌کنیم .

$$V(x,y)=\sum C_n\sin\frac{n\pi}{b}\sinh\frac{n\pi}{b}=V_\circ$$

که ضرایب C_n را از بسط سینوسی $V_\circ$ می‌توانیم بدست آوریم، با استفاده از روش‌های ریاضی مهندسی در نهایت خواهیم داشت (!..؟):

$$V(x,y)=\frac{4V_\circ}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\left(\frac{(2n-1)\pi}{b}x\right)}{(2n-1)\sinh\left(\frac{(2n-1)\pi}{b}a\right)}\sin\left(\frac{(2n-1)x}{b}y\right)$$

اگر آن را فقط روی nهای فرد اعمال کنیم: $2n-1=m$

$$V(x,y)=\frac{4V_\circ}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sinh\left(\frac{m\,a}{b}x\right)}{m\sinh\left(\frac{m\,\pi}{b}a\right)}\sin\left(\frac{mx}{b}y\right)$$

مثال ۳-۳۱ دو نیم‌صفحهٔ هادی را به فاصلهٔ b از یکدیگر در نظر بگیرید. پتانسیل نیم‌صفحهٔ پایینی صفر بوده و پتانسیل نیم‌صفحهٔ فوقانی $V_\circ$ است. یک نوار هادی با پهنای b بین دو نیم‌صفحه مطابق شکل (۳-۵۷) قرار داشته و پتانسیل‌اش صفر است. پتانسیل الکتریکی در ناحیهٔ بین دو نیم‌صفحهٔ هادی را تعیین کنید. (کارشناسی ارشد برق ۷۶)

حل: از رابطهٔ (۳-۳۹) استفاده می‌کنیم. چرا که در جهت x به بی‌نهایت رفته‌ایم پس الزاماً تناوب روی محور y خواهد بود. از آنجایی که پتانسیل باید همواره محدود بماند، پس در این رابطه، جملهٔ e^{kx} را حذف می‌کنیم. پس شرایط مرزی در $y=\circ$، $y=b$، $x\to\infty$ توسط عبارت زیر اقناع می‌شود:

$$V=\frac{V_\circ}{b}y+\sum_{n=1}A_n e^{-\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

شرط مرزی در $x=\circ$ به صورت $V=\circ$ است. پس:

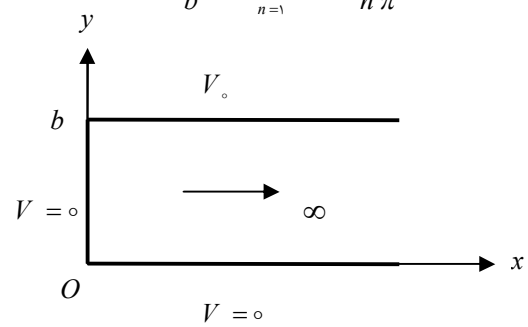
$$-\frac{V_\circ}{b}y=\sum_{n=1}A_n\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$A_n=\frac{2}{b}\int_\circ^b -\frac{V_\circ}{b}y\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy=-\frac{2V_\circ}{b^2}\int_\circ^b y\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy$$

$$=\frac{2V_\circ}{n\pi}\cos(n\pi)=(-1)^n\frac{2V_\circ}{n\pi}$$

در نتیجه:

$$V = \frac{V_\circ}{b} y + \sum_{n=1} (-1)^n \frac{2V_\circ}{n\pi} \times e^{-\left(\frac{n\pi y}{b}\right)} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$



شکل ۳-۵۷: شکل مثال ۳-۳۱

در مثال‌های فوق، لاپلاس دوبعدی را در کارتزین و برای حالت‌های محدود و نامحدود بررسی کردیم. مثال زیر مدل عددسازی شدهٔ این مثال‌ها را نشان می‌دهد:

مثال ۳-۳۲ بار خطی یکنواخت به چگالی $\lambda_\circ$، همانند شکل (۳-۵۸) به موازات محور z و در وسط صفحهٔ رسانای موازی که دارای پتانسیل صفر هستند، واقع گردیده است. چنانچه در نقطهٔ A به مختصات $(x, y) = (20,1)$ پتانسیل الکتریکی 0.1^V می‌باشد. پتانسیل را در نقطهٔ $(x, y) = (22,1)$ بیابید. (کارشناسی ارشد برق ۸۴)

حل: پاسخ‌های ممکن در فضای دو بعدی بین دو صفحهٔ رسانا با پتانسیل‌های صفر عبارتست از:

$$V = \sum_{n=1} A_n e^{-\left(\frac{n\pi x}{b}\right)} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

در این رابطه b فاصلهٔ دو صفحه و برابر ۲ است. در فواصل دور به ازای xهای زیاد تنها جملهٔ اول حائز اهمیت است، پس در نقطهٔ A داریم:

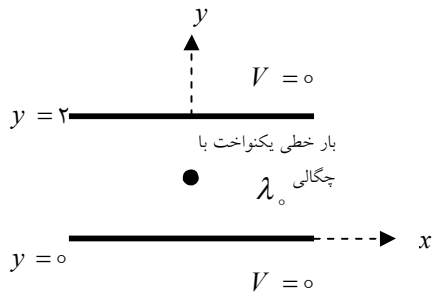
$$0.1 = A_1 e^{-\frac{\pi}{2}\times 20} = A_1 e^{-(10\pi)} \quad \rightarrow \quad A_1 = \frac{0.1}{e^{-(10\pi)}}$$

پس برای پتانسیل خواهیم داشت:

$$V = \frac{0.1}{e^{-(10\pi)}} e^{-\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

و برای نقطهٔ مورد نظر نیز داریم:

$$V\left(x=۲۲\right)=\frac{۰.۱}{e^{-(۱۰\pi)}}e^{-\left(\frac{\pi}{۲}\times ۲۲\right)}=۰.۱e^{-\pi}$$



شکل ۳-۵۸: شکل مثال ۳-۳۲

در برخی از مسائل شکل سیستم گول‌زننده است! شاید بتوان سیستم را تک‌متغیره فرض کرد و یا از ایدهٔ نگاشت در حل مسئله بهره جست. به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۳-۳۳ معادلهٔ لاپلاس را با شرایط مرزی داده شده در شکل (۳-۵۹) حل کنید. (کارشناسی ارشد برق)

حل: به‌جای اینکه به مختصات کارتزین شکل فکر کنیم، دید خود را وسیع‌تر کرده و از دستگاه استوانه‌ای استفاده می‌کنیم! توجه داریم که قسمت مثبت محور x ها معادل $\varphi=۰$ و قسمت منفی آن معادل $\varphi=\pi$ است. پس از رابطهٔ (۳-۳۶) استفاده می‌کنیم. مطابق این رابطه، پتانسیل در فضا به صورت $V(\varphi)=A\,\varphi+B$ خواهد بود. برای تعیین ضرایب ثابت، از شرایط مرزی استفاده می‌کنیم.

- پتانسیل در قسمت مثبت محور x ها برابر ۲ است:

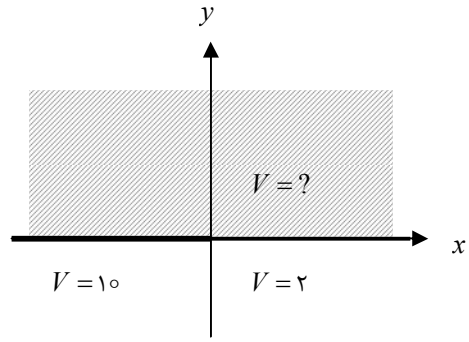
$$V(\varphi)=A\,\varphi+B\Big|_{\varphi=۰}=۲\ \rightarrow\ B=۲$$

- پتانسیل در قسمت منفی محور x ها برابر ۱۰ است:

$$V(\varphi)=A\,\varphi+\overset{۲}{B}\Big|_{\varphi=\pi}=۱۰\ \rightarrow\ A=۸/\pi$$

پس تابع پتانسیل در فضای مفروض به فرم زیر خواهد بود:

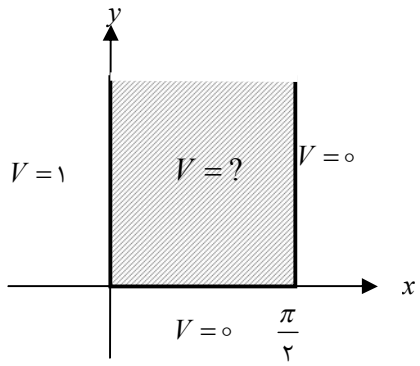
$$V(\varphi)=\left(۸/\pi\right)\varphi+۲$$



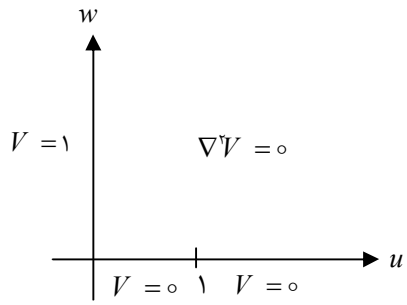
شکل ۳-۵۹: شکل مثال ۳-۳۳

مثال ۳-۳۴ معادلهٔ لاپلاس را با شرایط مرزی داده شده در شکل (۳-۶۰) حل کنید. (کارشناسی ارشد برق ۷۸)

حل: اگر بخواهیم با روش مرسوم حل کنیم، فرم کلی پاسخ مشابه مثال (۳-۳۱) خواهد بود و کافی است جای x و y را عوض کنیم. اما اگر با نگاشت $\sin z$ آشنا باشید، تصدیق خواهید کرد که این نگاشت نوار $0 < x < \frac{\pi}{2}$ و $0 < y < \infty$ را به ربع اول صفحهٔ z نگاشت می‌دهد. در اینصورت شرایط مرزی مطابق شکل (۳-۶۱) خواهد بود.



شکل ۳-۶۰: شکل مثال ۳-۳۴



شکل ۳-۶۱: مرز سیستم با انجام نگاشت

$$V(u,w) = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\frac{w}{u}$$

$$z = u + iw = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

پس:

$$V(u,w) = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\frac{w}{u} = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\cos x \sinh y}{\sin x \cosh y}\right) = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\cot x \tanh y\right)$$

همانطور که مشاهده کردید، هر چه پایهٔ ریاضی قوی‌تری داشته باشید، راهکارهای ساده‌تری را در ذهن خواهید داشت. برای آشنایی بیشتر با این قالب از مسائل می‌توانید تمرین زیر را حل کنید. برای حل خلاقانه پیشنهاد استفاده از نگاشت $Ln\, z$ را می‌دهیم.

تمرین ۳-۱۸: تابع پتانسیل را در فضای $\circ < y < \pi$ به نحوی بیابید که شرایط مرزی زیر اقناع گردد:

$$V = \begin{cases} \circ & , \quad x > \circ \\ ۱ & , \quad x < \circ \end{cases}$$

(سیزدهمین المپیاد دانشجویی غیر متمرکز)

در قسمت‌های قبل با دو قالب کلی از مسائل لاپلاس دوبعدی آشنا شدیم. در این قسمت با آخرین فرم از این مسائل آشنا می‌شویم. در این گونه مسائل، معمولا شرایط مرزی محدودی از مسئله داده شده و فرم کلی جواب خواسته می‌شود. توجه دقیق به شرایط مرزی، استفاده از جمع آثار، دقت در ویژگی جملات فرم پیشنهادی، در حذف گزینه‌ها و رسیدن به پاسخ نهایی راهگشا خواهند بود.

مثال ۳-۳۵ قالب کلی توزیع پتانسیل را برای شکل (۳-۶۲) بدست آورید.

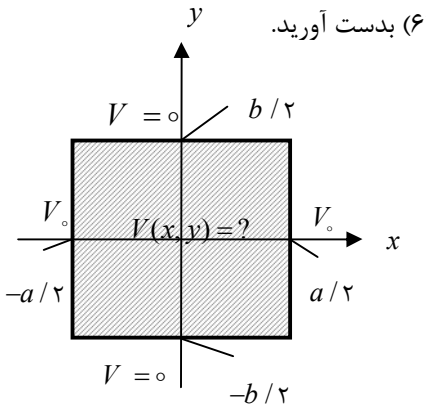
الف) $\sum A_n \cos(k_n x)\cos(k_n y)$

ب) $\sum A_n \cosh(k_n x)\cosh(k_n y)$

پ) $\sum A_n \cos(k_n x)\cosh(k_n y)$

ت) $\sum A_n \cosh(k_n x)\cos(k_n y)$

(کارشناسی ارشد برق)



شکل ۳-۶۲: شکل مثال ۳-۳۵

حل: پاسخ‌های معادلهٔ لاپلاس در فضای دو بعدی یا باید در هر دو جهت $\mathbf{a}_x$ و $\mathbf{a}_y$ خطی باشند که با توجه به شرایط مرزی مسأله امکان ندارد و یا باید در یک جهت پریودیک و در جهت دیگر نمایی باشند. با توجه به زوج بودن شرایط مرزی در هر دو جهت x و y در یک جهت به صورت cos و در جهت دیگر به صورت cosh باید باشند. از طرف دیگر چون cosh نمی‌تواند مقداری کمتر از یک داشته باشد (و در نتیجه نمی‌تواند صفر گردد) پس در جهت y نمی‌توان cosh را انتخاب نمود، یعنی در جهت x تغییرات به صورت cosh و در جهت y پریودیک به‌صورت cos خواهد بود. پس پاسخ (ت) مناسب خواهد بود.

مثال ۳-۳۶ اگر بخواهیم توزیع پتانسیل را در داخل کانال مربعی شکل (۳-۶۳) بدست آوریم، جواب مسئله چه صورتی دارد؟[۴]

حل: حل دوبعدی معادلهٔ لاپلاس در حوزهٔ کارتزین مستلزم متناوب بودن پتانسیل در یکی از جهت‌هاست. با این حال، همانطور که در شکل (۳-۶۳) می‌بینیم، هیچ تناوبی موجود نیست. برای اینکه سیستم حالت متناوب به خود بگیرد مسئله را به دو زیر مسئلهٔ ساده‌تر تقسیم کرده و از جمع آثار استفاده می‌کنیم. برای این منظور به شکل‌های (۳-۶۴) و (۳-۶۵) نگاه کنید. همانطور که مشاهده می‌شود یکبار تناوب را در جهت x و بار دیگر در جهت y قرار داده و مسئله را حل می‌کنیم. برای شکل (۳-۶۴) می‌توان گفت که اگر مشابه مثال (۳-۳۵) عمل کنید، پاسخ کلی مسئله را به صورت زیر خواهید یافت:

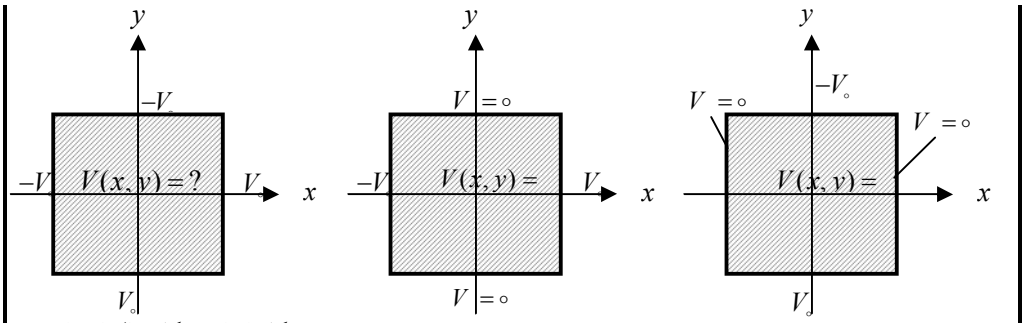
$$V_1 = \sum A_n \sinh\left(k_n x\right) \cos\left(k_n y\right)$$

برای شکل (۳-۶۵) نیز می‌توانید به صورت مشابه عمل کنید. با این حال یک راه ساده‌تر توجه به وضعیت سیستم است. اگر درست به شکل (۳-۶۵) دقت کنید، مشاهده می‌کنید که وضعیت سیستم همان شکل (۳-۶۴) است که به اندازهٔ ۹۰ درجه در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران داده شده است. در واقع پتانسیل این حالت نیز همان پتانسیل شکل (۳-۶۴) است، با این تفاوت که در آن به جای x قرار دهیم $-y$ (چونکه ۹۰ درجه دوران داشته‌ایم، اگر ۱۸۰ درجه دوران می‌کردیم y را به $-x$ تبدیل می‌نمودیم) و y را به x (دوگان قبلی!) و نیز کل پاسخ را در یک علامت منفی ضرب کنیم.(چونکه در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت کرده‌ایم، اگر در جهت عقربه‌های ساعت حرکت می‌نمودیم، پاسخ را در علامت مثبت ضرب می‌کردیم) یعنی:

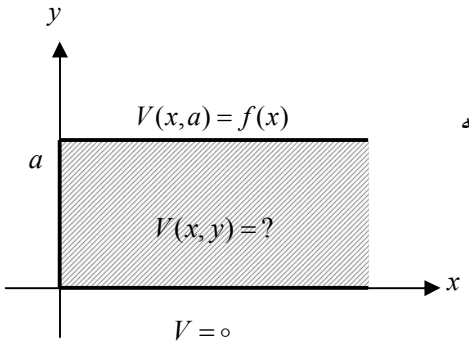
$$V_2 = -\sum A_n \sinh\left(k_n\left(-y\right)\right) \cos\left(k_n y\right) = \sum A_n \sinh\left(k_n y\right) \cos\left(k_n x\right)$$

در نتیجه تابع پتانسیل در کانال مربعی شکل (۳-۶۳) به صورت زیر خواهد بود:

$$V = V_1 + V_2 = \sum A_n \sinh\left(k_n x\right) \cos\left(k_n y\right) + \sum A_n \sinh\left(k_n y\right) \cos\left(k_n x\right)$$



شکل ۳-۶۳: شکل مثال ۳-۳۶ شکل ۳-۶۴: حالت اول شکل ۳-۶۵: حالت دوم



شکل ۳-۶۶: شکل تمرین ۳-۱۹

تمرین ۳-۱۹: عبارت پتانسیل الکتریکی در نیم‌نوار داده شده (شکل ۳-۶۶) و با شرایط مرزی مشخص شده به چه صورتی خواهد بود؟ (کارشناسی ارشد برق)

بحث این قسمت را با یک مثال ترکیبی- مروری پایان می‌دهیم:

مثال ۳-۳۷ در کانال مربعی شکل زیر، شرایط مرزی پتانسیل مشخص شده‌اند. چگالی بار سطحی را بر روی دیوارهٔ پایینی کانال بیابید.

حل: تناوب پتانسیل در جهت x است. (دقت کنید که پتانسیل دو بار صفر شده، در واقع پتانسیل در ابتدا صفر بوده، پس درون کانال مقادری متفاوتی را اختیار کرده و سپس مجدداً در مرز دیگر کانال، صفر شده است. پس در همین جهت نیز متناوب خواهد بود.) با این تفاسیر از رابطهٔ (۳-۴۲) استفاده می‌کنیم:

$$V(x,y)=\sum\left(A\sin kx+B\cos kx\right)\left(C\sinh ky+D\cosh ky\right)$$

به شکل (۳-۶۷) دقت کنید. پتانسیل در جهت محور x از روی محور y شروع و در بخشی از محور x پایان می‌پذیرد. در واقع می‌خواهم بگویم که منحنی رسم شده نسبت به محور x متقارن نیست، یعنی تابع پتانسیل زوج نیست، یعنی ضریب B، صفر است. پس تا به اینجا:

$$V(x,y)=\sum\left(A\sin kx\right)\left(C\sinh ky+D\cosh ky\right)$$

از طرفی پتانسیل در جهت محور y از صفر شروع شده و تا مقدار $\sin(۲\pi x)$ زیاد می‌شود. در واقع می‌خواهم بگویم که مقدار پتانسیل در جهت محور y همواره از یک کمتر است، یعنی از آنجا که cosh همواره از یک بزرگتر است در جواب پتانسیل نباید ظاهر شود، یعنی $D=۰$. پس قالب ساده‌شدهٔ پتانسیل به صورت زیر خواهد بود:

$$V(x,y)=\sum\left(A\sin kx\right)\left(\sinh ky\right)$$

برای تعیین مقدار k به شکل توجه کنید. در حالت کلی مقدار k از رابطهٔ $k=\frac{n\pi}{\ell}$ بدست می‌آید که در آن ℓ، فاصلهٔ تناوب پتانسیل است. پس در اینجا:

$$k=\frac{n\pi}{\ell}\bigg|_{\ell=۲}=\frac{n\pi}{۲}$$

در نتیجه، پتانسیل به صورت زیر خواهد بود:

$$V(x,y)=\sum A\left[\sin\left(\frac{n\pi}{۲}x\right)\right]\left[\sinh\left(\frac{n\pi}{۲}y\right)\right]$$

از شرط مرزی $y=۱$ نتیجه می‌گیریم که:

$$V(x,۱)=\sum_n A\left[\sin\left(\frac{n\pi}{۲}x\right)\right]\left[\sinh\left(\frac{n\pi}{۲}y\right)\right]\bigg|_{y=۱}=\sin(۲\pi x)$$

فقط $n=۴$ برای اقناع شرایط مرزی کفایت می‌کند. لذا:

$$V(x,y)=A\left[\sin(۲\pi x)\right]\left[\sinh(۲\pi y)\right]$$

و با استفاده از همان شرط مرزی نتیجه می‌گیریم که $A=\frac{۱}{\sinh(۲\pi)}$ و در نهایت:

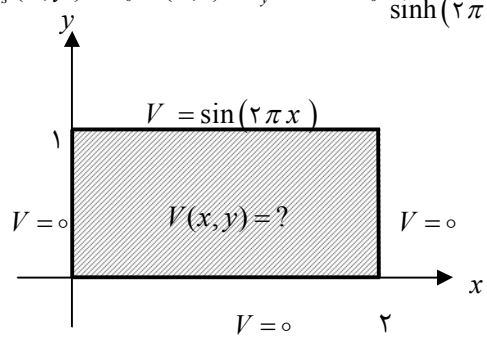
$$V(x,y)=\frac{\left[\sin(۲\pi x)\right]\left[\sinh(۲\pi y)\right]}{\sinh(۲\pi)}$$

برای محاسبهٔ چگالی بار سطحی به شدت میدان الکتریکی نیاز داریم:

$$\mathbf{E}(x,y)=-\nabla V(x,y)=\frac{-۲\pi}{\sinh(۲\pi)}\left[\cos(۲\pi x)\sinh(۲\pi y)\mathbf{a}_x+\sin(۲\pi x)\cosh(۲\pi y)\mathbf{a}_y\right]$$

و برای بار سطحی خواهیم داشت:

$$\rho_s(x,y)=\varepsilon_\circ\ \mathbf{E}(x,\circ)\ .\ \mathbf{a}_y=-۲\pi\,\varepsilon_\circ\frac{\sin(۲\pi x)}{\sinh(۲\pi)}$$



شکل ۳-۶۷: شکل مثال ۳-۳۷

۳-۴-۴-۲- حل معادلهٔ لاپلاس دوبعدی در دستگاه استوانه‌ای

در این دستگاه حل مسئله پیچیده‌تر می‌گردد (به همین دلیل بود که تا توانستیم در قسمت قبل که ساده‌تر بود ،مثال هدفدار حل کردیم)، تا حدی که اگر سیستم نسبت به φ مستقل باشد در حل مسئله توابع بسل و نیومن ایجاد می‌شوند. فرمت کلی این روابط را در زیر ببینید:

نکتهٔ طلایی

اگر پتانسیل مستقل از z باشد:

$$V(r,\varphi)=\sum(A\cos n\varphi+B\sin n\varphi)(C\,r^n+D\,r^{-n}) \qquad (۴۳-۳)$$

در این حالت توجه به این موضوع که فضای مورد نظر شامل مبداء یا بی‌نهایت است می‌تواند یکی از جملات را حذف کند، به گونه‌ای که اگر سیستم شامل مبداء باشد مقدار $D=\circ$ خواهد بود چرا که با توجه به منفی بودن توان و قرارگیری r در مخرج یعنی $D\times\frac{۱}{r^n}\Big|_{r=\circ}=D\times\infty$ طبیعی است که مقدار D باید صفر باشد. (تا شرط محدود ماندن پتانسیل اقناع گردد) از طرف دیگر اگر فضای مورد نظر شامل بی‌نهایت باشد، مقدار C صفر خواهد بود. (چرا؟)

نکتهٔ طلایی

اگر پتانسیل مستقل از φ باشد:

$$V(r,z)=(A\,e^{\lambda z}+B\,e^{-\lambda z})\left[C\,J_{\circ}(\lambda r)+D\,Y_{\circ}(\lambda r)\right] \qquad (۴۴\text{-}۳)$$

در این رابطه $J_{\circ}$ معرف تابع بسل و $Y_{\circ}$ معرف توابع نیومن است. شخصاً پیشنهاد می‌کنم که اگر در مسئله‌ای به قالبی مشابه رابطهٔ (۳-۴۴) برخوردید، یا روش حل را عوض کنید و یا از حل سوال صرفنظر کنید!

مثال ۳-۳۸ بر روی استوانه‌ای به شعاع a چگالی بار به صورت $\sigma=\sigma_{۱}\sin ۲\varphi+\sigma_{۲}\cos\varphi$ است. پتانسیل را در داخل و خارج استوانه بیابید. [۸]

حل: تابع پتانسیل را برای فضای داخل استوانه $V_{۱}$ و در فضای خارج آن $V_{۲}$ فرض می‌کنیم. با توجه به استقلالی که نسبت به محور zها داریم، از رابطهٔ (۳-۴۳) استفاده می‌کنیم. مطابق توضیحات ارائه شده در فضای داخل استوانه، $D=\circ$ و در فضای خارج آن $C=\circ$ است. پس:

$$V_{۱}(r,\varphi)=\sum_{n}\left(A_{n}\cos n\varphi+B_{n}\sin n\varphi\right)r^{n}$$

$$V_{۲}(r,\varphi)=\sum_{n}\left(A'_{n}\cos n\varphi+B'_{n}\sin n\varphi\right)r^{-n}$$

حال با برقراری شرایط مرزی ثابت‌های سیستم را بدست می‌آوریم.

از پیوستگی پتانسیل در $r=a$ داریم:

$$B_{n}\,a^{n}=B'_{n}\,a^{-n} \qquad , \qquad A_{n}\,a^{n}=A'_{n}\,a^{-n}$$

از پیوستگی مولفهٔ عمودی میدان در مرز داریم:

$$\varepsilon_{\circ}E_{n۲}-\varepsilon_{\circ}E_{n۱}=\sigma \;\rightarrow\; \left.\frac{-\partial V_{۲}}{\partial r}+\frac{\partial V_{۱}}{\partial r}=\frac{\sigma}{\varepsilon_{\circ}}\right|_{r=a}$$

که از آن نتیجه می‌گیریم:

$$\sum_n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) n\, a^{n-1} + \sum_n \left(A'_n \cos n\varphi + B'_n \sin n\varphi\right) n\, a^{-n-1} = \frac{\sigma_1 \sin 2\varphi}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2 \cos\varphi}{\varepsilon_0}$$

حال تساوی را برقرار می‌کنیم:

$$\begin{cases} n=1: & A_1 + \dfrac{A'_1}{a^2} = \dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_0} \\ n=2: & 2a B_2 + \dfrac{2}{a^3} B'_2 = \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \\ n = other: & 0 \end{cases}$$

با ترکیب اینها و نتایج ناشی از پیوستگی پتانسیل خواهیم داشت:

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \quad , \quad A'_1 = \dfrac{\sigma_2 a^2}{2\varepsilon_0} \\ B_2 = \dfrac{\sigma_1}{4\varepsilon_0 a} \quad , \quad B'_2 = \dfrac{\sigma_1 a^3}{4\varepsilon_0} \end{cases}$$

پس تابع پتانسیل در فضای درون و بیرون استوانه به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} r\cos\varphi + \dfrac{\sigma_1}{4\varepsilon_0 a} r^2 \sin 2\varphi \\ V_2 = \dfrac{\sigma_2 a^2}{2\varepsilon_0} \dfrac{\cos\varphi}{r} + \dfrac{\sigma_1 a^3}{4\varepsilon_0} \dfrac{\sin 2\varphi}{r^2} \end{cases}$$

تمرین ۳-۲۰: میدان پتانسیل $V = 10(r^m + r^{-n})\cos 8\varphi$ در مختصات استوانه‌ای داده شده است.

الف) مقادیر m , n را طوری تعیین کنید که از معادله لاپلاس تبعیت کند.

ب) مقادیر مثبتی برای m , n انتخاب کنید و $|E|$, V را در $r=1$, $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ را بیابید.

مثال ۳-۳۹ شکل کلی جواب معادلهٔ لاپلاس در داخل دو نیم‌استوانهٔ طویل با شرایط مرزی نشان داده شده در شکل (۳-۶۸) چگونه است؟ (کارشناسی ارشد برق ۸۲)

حل: مسئله را به دو بخش ساده‌تر تقسیم کرده و از جمع آثار آنها استفاده می‌کنیم. بـه شـکل (۳-۶۹) توجه کنید. برای قسمت ب، یک مسئلهٔ متقارن داریم، پاسخ مناسب به صورت زیر است:

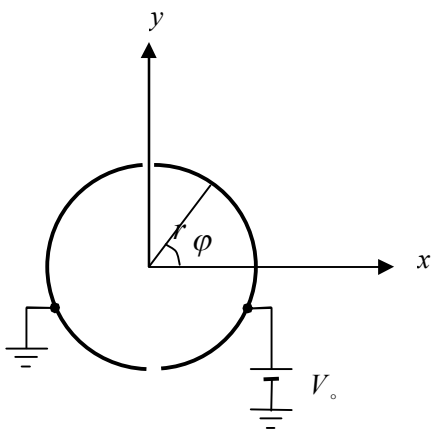
$$V(r,\varphi)=\sum(A'_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)(C_n r^n+D_n r^{-n})$$

با توجه به شرط محدود ماندن پاسخ در مبداء مختصات، الزامـاً $D_n=\circ$ و از طرفـی بـدلیل زوج بـودن پاسخ نسبت به φ می‌توان گفت:

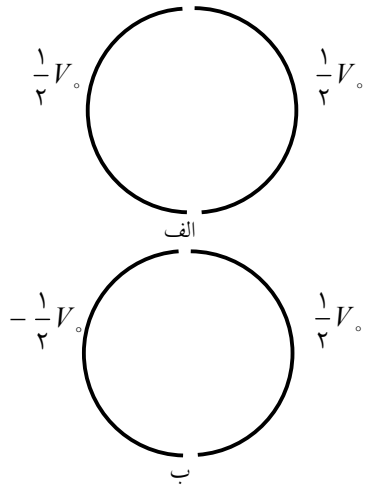
$$V(r,\varphi)=\sum\left(A_n\cos n\varphi\right)r^n$$

حال به شکل الف نگاه کنید، طبق اصل یکتایی جواب، پاسخ پتانسیل برای این حالت برابـر $\frac{V_\circ}{۲}$ خواهـد بود. پس جواب نهایی پتانسیل به صورت زیر است:

$$V(r,\varphi)=\frac{V_\circ}{۲}+\sum\left(A_n\cos n\varphi\right)r^n$$



شکل ۳-۶۸: شکل مثال ۳-۳۹



شکل ۳-۶۹

همانطور که مشاهده کردید، مسیر کار اگر چه روشن ولی کـاملاً وقتگیـر و طـولانی اسـت. مـشابه روش حل معادلهٔ پواسون مجبور بودیم برای محاسبهٔ ضرایب ثابت از شرط مرزی میدان اسـتفاده کنـیم. کار اضافی که در اینجا لازم بود انجام گیرد تعیین تعداد پاسخ‌هاست (n). این عـدد را از شـرط مـرزی میدان پیدا کرده و ضرایب ثابت را می‌یابیم. همین که با مسیر حل آشنا باشید، کافی است و نیـازی بـه

حل مثال بیشتر حس نمی‌شود (چون نکتهٔ دیگری ندارد!) با این حال تعدادی از مسائل پایان فصل را می‌توانید برای تمرین بیشتر با این روش حل کنید.

۳-۴-۴-۳- حل معادلهٔ لاپلاس دوبعدی در دستگاه کروی

در قسمت‌های قبلی حل معادلهٔ لاپلاس دوبعدی در دستگاه‌های کارتزین و استوانه‌ای را بررسی کردیم. در دستگاه کارتزین توضیحات جامعی را ارائه داده و با مفهوم لاپلاس دوبعدی آشنا شدیم. در دستگاه استوانه‌ای با بیان یک مثال نسبتاً مفصل، چگونگی حل مسائل در این دستگاه را مطرح کردیم. در این قسمت قصد داریم تا با بیان لاپلاس دوبعدی در دستگاه کروی، بحث را تکمیل کنیم. توجه داشته باشید که مسیر حل، تا حد زیادی مشابه کار در دستگاه استوانه‌ای خواهد با این همه، پاسخگویی به سوالات طولانی‌تر و جواب‌های محاسبه شده ارزشمندتر هستند. دستهٔ مهمی از مسائل عملی با راهکار این قسمت حل شده و پاسخ آنها از قالب کلی ارائه شده، پیروی خواهد کرد. پس با این تفاسیر توجه داشته باشید که:

- ✓ از حل نسبتاً طولانی سوالات خسته نشوید.
- ✓ در صورت تمایل می‌توانید فقط به یادگیری مسیر حل بسنده کنید.
- ✓ پاسخ‌های نهایی قرار گرفته در $\boxed{\text{این مدل کادر}}$ را به خاطر بسپارید.

در این قسمت فقط به بررسی حالتی که پتانسیل مستقل از φ باشد، پرداخته و به مابقی حالات کاری نداریم.

نکتهٔ طلایی

اگر **پتانسیل مستقل از φ باشد** داریم:

$$\boxed{V(R,\theta)=\sum_n\left(A_n R^n+B_n R^{-(n+1)}\right)\left[C_n P_n(\cos\theta)+D_n Q_n(\cos\theta)\right]} \qquad (۴۵-۳)$$

در این رابطه P_n و Q_n چند جمله‌ای‌های لژاندر بوده و محاسبهٔ آنها بخشی از حل مسئله است. اگر $\theta=0$ بخشی از فضای مورد نظر باشد Q_n بی‌نهایت بوده و از اینرو $D=0$ فرض می‌کنیم. بسط تابع لژاندر نیز از **فرمول ردریگس** بدست می‌آید:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n \qquad (۴۶-۳)$$

کافی است با توجه به مقدار n این رابطه را بسط داده و بجای x، $\cos\theta$ قرار دهیم. بسط کاملی از توابع لژاندر و روابط مرتبط با این حوزه در پیوست آخر فصل آمده‌اند. جدول (۳-۱) (که بخشی از این پیوست است) در حل مسائل کاربرد زیادی خواهد داشت.

n	$P_n(\cos\theta)$
۰	۱
۱	$\cos\theta$
۲	$\frac{۱}{۲}\left(۳\cos^{۲}\theta-۱\right)$

جدول ۳-۱: اطلاعات بسط لژاندر تابع کسینوس

مثال ۳-۴۰ دو سطح کروی هم‌مرکز به شعاع‌های a و b داریم ($b>a$). پتانسیل کرهٔ وسطی صفر و پتانسیل کرهٔ بیرونی $V_{\circ}\cos\theta$ است. مطلوب است محاسبهٔ پتانسیل در فضای بین دو کره. (کارشناسی ارشد برق)

حل: تابع پتانسیل در فضای بین دو کره به صورت رابطهٔ (۳-۴۵) است: با توجه به اینکه $\theta=\circ$ بخشی از فضای مورد نظر است، Q_n بی‌نهایت بوده و از اینرو $D=\circ$ فرض می‌کنیم، لذا:

$$V(R,\theta)=\sum_n\left(A_n R^n+B_n R^{-(n+۱)}\right)P_n(\cos\theta)$$

از شرط پیوستگی پتانسیل در مرز داریم:

$$A_n a^n+B_n a^{-(n+۱)}=\circ \qquad \rightarrow \quad B_n=-a^{۲n+۱}A_n$$

از پیوستگی پتانسیل در مرز $R=b$ داریم:

$$V_{\circ}\cos\theta=\left(A_{\circ}+\frac{B_{\circ}}{b}\right)+\left(A_{۱}b+\frac{B_{۱}}{b^{۲}}\right)\cos\theta+\ldots$$

از رابطهٔ اخیر نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{cases} n=۱: & A_{۱}b+\dfrac{B_{۱}}{b^{۲}}=V_{\circ} \\ n=other: & \circ \end{cases}$$

از ترکیب این نتایج نتیجه می‌شود که:

$$A_1 = \frac{V_0 b^2}{b^3 - a^3} \qquad , \qquad B_1 = -a^3 A_1$$

با این تفاسیر، تابع پتانسیل در فضای بین دو کره به صورت زیر خواهد بود:

$$V(R,\theta) = \frac{V_0 b^2}{b^3 - a^3}\left(R - \frac{a^3}{R^2}\right)\cos\theta$$

مثال ۳-۴۱ کرهٔ عایقی با ضریب دی‌الکتریک ε_1 در مایع عایق نامحدودی با ضریب دی‌الکتریک ε_2 قرار می‌گیرد. میدان الکتریکی یکنواخت $\mathbf{E}$ درون این مایع برقرار است. میدان الکتریکی برآیند را در داخل و خارج کره بیابید.

حل: فرض می‌کنیم که کرهٔ مفروض در مبداء مختصات قرار داشته و میدان ذکر شده در جهت z باشد. (مشابه شکل ۳-۷۰) با توجه به تقارن موجود پتانسیل در فضای داخل و خارج به صورت زیر خواهد بود:

$$V_{in}(R,\theta) = \sum_n \left(A_n R^n + B_n R^{-(n+1)}\right) P_n(\cos\theta)$$

$$V_{out}(R,\theta) = \sum_n \left(C_n R^n + D_n R^{-(n+1)}\right) P_n(\cos\theta)$$

شرایط مرزی زیر باید در فضای سیستم برقرار باشند:

۱- V_{in} باید در $R = 0$ محدود باشد.

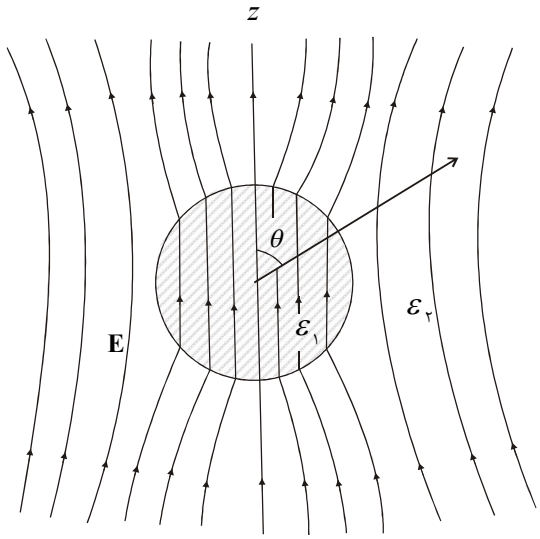
۲- $V_{out}\Big|_{R\to\infty} = -E\,z = -E\,R\cos\theta = -E\,R\,P_1(\cos\theta)$

۳- $V_{in} = V_{out}\Big|_{R=a} \;,\; \varepsilon_1 \dfrac{\partial V_{in}}{\partial R} = \varepsilon_2 \dfrac{\partial V_{out}}{\partial R}\Big|_{R=a}$

حال شرط (۳) را بررسی می‌کنیم:

$V_{in} = V_{out}\Big|_{R=a}$:

$$-E\,a\,P_1(\cos\theta) + \sum_n D_n a^{-(n+1)} P_n(\cos\theta) = \sum_n A_n a^n P_n(\cos\theta)$$



شکل ۳-۷۰: شکل مثال ۳-۴۱

$$\varepsilon_1 \frac{\partial V_{in}}{\partial R} = \varepsilon_2 \frac{\partial V_{out}}{\partial R}\bigg|_{R=a} \quad :$$

$$-\varepsilon_2\left[E\,P_1(\cos\theta) + \sum_n (n+1) D_n\, a^{-(n+2)}\, P_n(\cos\theta)\right] = \varepsilon_1 \sum_n A_n\, a^{n-1}\, P_n(\cos\theta)$$

از حل دو معادلهٔ اخیر نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{cases} A_1 = -\dfrac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E \quad , \quad D_1 = -\dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E\, a^3 \\ A_n = D_n = 0 \quad : \quad (n \neq 1) \end{cases}$$

در نتیجه تابع پتانسیل در فضای داخل و خارج به صورت زیر خواهد بود:

$$V_{in} = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E\, R \cos\theta$$

$$V_{out} = -\left[1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}\left(\frac{a}{R}\right)^3\right] E\, R \cos\theta$$

در اینصورت، میدان در فضا به صورت زیر است:

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla V_{in} = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}\mathbf{E} \qquad , \qquad (R < a)$$

$$\mathbf{E}_2 = -\nabla V_{out} = \mathbf{E} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} a^2 \left[\frac{3(\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_R)\mathbf{a}_R}{R^5} - \frac{\mathbf{E}}{R^3} \right] \qquad , \qquad (R > a)$$

مثال ۳-۴۲ کرهٔ عایقی با گذردهی ε در میدان یکنواخت $E_0 \mathbf{a}_z$ قرار دارد. نشان دهید که چگالی سطحی بار القایی به صورت زیر است:

$$\sigma(\theta) = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta$$

حل: با استفاده از حل مثال (۳-۴۱) نتیجه می‌گیریم که میدان در داخل کره به صورت زیر است:

$$\mathbf{E} = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\mathbf{E}_0$$

در اینصورت بردار پلاریزاسیون به شکل زیر خواهد بود:

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\mathbf{E} = \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\mathbf{E}_0$$

با این تفاسیر چگالی سطحی بار القایی به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma(\theta) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta$$

مثال ۳-۴۳ یک کرهٔ هادی در میدان یکنواختی که در جهت z است، قرار گرفته. چگالی بار سطحی القایی در سطح کره را بیابید.

حل: شرایط مرزی سیستم به صورت زیر است:

$$V = V_s = constant$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial R} = -\sigma$$

که در آن V_s پتانسیل در سطح کره و σ چگالی سطحی بار القایی است. با توجه به تقارن موجود تابع پتانسیل در فضای خارج کره به شکل زیر خواهد بود:

$$V(R,\theta)=\sum_n \left(C_n R^n + D_n R^{-(n+1)}\right) P_n(\cos\theta)$$

از آنجا که میدان در $R\to\infty$ باید به همان شکل اولیه (یعنی $E_\circ \mathbf{a}_z$) باشد، لذا:

$$\mathbf{E}=-\nabla V\Big|_{E_\circ \mathbf{a}_z = E_\circ \cos\theta \mathbf{a}_z} \to V=-E_\circ R\cos\theta=-E_\circ R P_1(\cos\theta)$$

پس:

$$C_1=-E_\circ\ ,\ D_1=E_\circ a^3\ ,\quad C_n=D_n=\circ \qquad : \quad n\neq 1$$

در نتیجه برای تابع پتانسیل خواهیم داشت:

$$V=-E_\circ R\cos\theta+\frac{E_\circ a^3}{R^2}\cos\theta$$

با استفاده از شرط مرزی دوم نتیجه می‌گیریم که:

$$\sigma=3\varepsilon_\circ E_\circ\cos\theta$$

تمرین ۳-۲۱: پتانسیل در سطح کره‌ای به شعاع a ، برابر $V=k\cos 3\theta$ است. پتانسیل را در فضای داخل و خارج کره بیابید. [۸]

نکات:

در قسمت قبل با ارائهٔ چند مثال جامع، کار با معادلهٔ لاپلاس دوبعدی در دستگاه کروی را یاد گرفتیم. همانطور که قبلاً نیز گفته بودیم، پاسخ مثال‌های این قسمت، نکات مهمی را به همراه داشته و در حل دیگر مسائل کاربرد زیادی دارند. در این قسمت نکات را به صورت اجمالی ارائه می‌نماییم:

۱- کرهٔ عایقی با گذردهی ε_1، در میدان یکنواخت $\mathbf{E}=E_\circ \mathbf{a}_z$ قرار گرفته و گذردهی در فضای خارج کره برابر ε_2 است. در اینصورت شدت میدان الکتریکی درون کره به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{E}=\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}E_\circ \mathbf{a}_z \qquad (۴۷\text{-}۳)$$

۲- که اگر میدان در فضای خارج کره‌ای با نفوذپذیری ε_r یکنواخت و به صورت $\mathbf{E}=E_\circ\,\mathbf{a}_z$، آنگاه میدان در داخل کره از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{E}=\frac{۳}{۲+\varepsilon_r}E_\circ\,\mathbf{a}_z \qquad (۴۸\text{-}۳)$$

۳- اگر میدان در فضای خارج کره‌ای یکنواخت و به صورت $\mathbf{E}=E_\circ\,\mathbf{a}_z$ باشد و از طرفی نفوذپذیری کره $\varepsilon_\circ$ و نفوذپذیری فضای خارج آن ε_r باشد. در اینصورت میدان داخل کره از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{E}=\frac{۳}{۲+\frac{۱}{\varepsilon_r}}E_\circ\,\mathbf{a}_z \qquad (۴۹\text{-}۳)$$

۴- اگر کرهٔ عایقی با گذردهی ε در میدان یکنواخت $\mathbf{E}_\circ$ قرار داشته باشد. چگالی سطحی بار القایی به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma(\theta)=\frac{\varepsilon-\varepsilon_\circ}{\varepsilon+۲\varepsilon_\circ}۳\,\varepsilon_\circ E_\circ\cos\theta \qquad (۵۰\text{-}۳)$$

۵- اگر یک کرهٔ هادی در میدان ابتداً یکنواختی مثل $\mathbf{E}=E_\circ\,\mathbf{a}_z$ قرار گیرد، چگالی باری معادل زیر روی سطح کره القاء می‌شود:

$$\sigma=۳\,\varepsilon_\circ E_\circ\cos\theta \qquad (۵۱\text{-}۳)$$

تذکر: با توجه به نکتهٔ ۳ و۴ یک ایده از روش تصویر را بیابید!

مثال ۳-۴۴ دوقطبی $\mathbf{P}=P_\circ\,\mathbf{a}_z$ در مرکز یک پوستهٔ کروی هادی به شعاع R قرار گرفته است. چگالی بار القاء شده بر سطح داخلی پوسته را بیابید.

حل: از نکتهٔ مطرح شده و رابطهٔ (۳-۵۱) کمک می‌گیریم. طبق این رابطه چگالی بار القاء شده بر سطح کره (که با توجه به نحوهٔ قرار گیری میدان در اینجا منظور سطح داخلی است) از رابطهٔ زیر تبعیت می‌کند:

$$\sigma=۳\,\varepsilon_\circ E_\circ\cos\theta$$

در این رابطه $E_\circ$ اندازهٔ شدت میدان اولیه است. از طرفی دوقطبی قرار گرفته، میدانی را مطابق رابطهٔ (۲-۱۶) ایجاد خواهد کرد:

$$\mathbf{E}=\frac{P}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R^{۳}}(۲\cos\theta\ \mathbf{a}_R+\sin\theta\ \mathbf{a}_\theta)$$

اندازهٔ این میدان به صورت زیر است:

$$E_{\circ}=\frac{P}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R^{۳}}$$

و در نتیجه چگالی سطحی بار القاء شده عبارت است از:

$$\sigma=۳\varepsilon_{\circ}E_{\circ}\cos\theta\Big|_{E_{\circ}=\frac{P}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R^{۳}}}=\frac{۳\varepsilon_{\circ}P}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R^{۳}}\cos\theta$$

مثال ۳-۴۵ یک پوستهٔ عایق به شعاع داخلی $a=۰.۱^{cm}$ و شعاع خارجی $b=۳^{cm}$ در محیطی که میدان یکنواخت $\mathbf{E}=۳۰۰\mathbf{a}_z$ وجود دارد، قرار می‌گیرد. اگر ضریب دی‌الکتریک نسبی پوسته $\varepsilon_r=۸$ باشد، میدان را در $R<a$ محاسبه کنید. (کارشناسی ارشد برق ۷۵)

حل: طبق رابطهٔ (۳-۴۸) میدان در فضای $a<R<b$ به صورت زیر است:

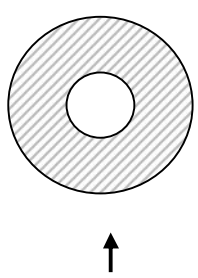
$$\mathbf{E}'=\frac{۳\varepsilon_{\circ}}{\varepsilon+۲\varepsilon_{\circ}}\mathbf{E}_{\circ}=\frac{۳}{\varepsilon_r+۲}\mathbf{E}_{\circ}$$

که با عددگذاری خواهیم داشت:

$$\mathbf{E}'=\frac{۳}{۸+۲}\times۳۰۰\ \mathbf{a}_z=۹۰\ \mathbf{a}_z$$

حال طبق رابطهٔ (۳-۴۹) میدان را در $R<۰.۱$ می‌یابیم:

$$\mathbf{E}''=\frac{\frac{۳}{\varepsilon_{\circ}}}{\frac{۱}{\varepsilon}+\frac{۲}{\varepsilon_{\circ}}}\mathbf{E}'_{\circ}=\frac{۳}{\frac{۱}{\varepsilon_r}+۲}\mathbf{E}'_{\circ}$$



شکل ۳-۷۱: شکل مثال ۳-۴۵

که با عددگذاری خواهیم داشت:

$$\mathbf{E}''=\frac{۳}{\frac{۱}{۸}+۲}\times۹۰\mathbf{a}_z=۱۲۷\mathbf{a}_z$$

مثال کلیدی

۳-۴-۵- معادلهٔ لاپلاس در سه بعد

همانطور که دیدیم، حل معادلهٔ لاپلاس در فضای تک‌بعدی، ساده و البته کاربردی، حل آن در فضای دوبعدی، وقت‌گیر ولی ضابطه‌مند خواهد بود. حل معادلهٔ لاپلاس در فضای سه‌بعدی بسیار پیچیده و وقت‌گیر است و از اینرو از بررسی آن در سطح این کتاب خودداری می‌کنیم.

۳-۴-۶- تئوری نقطهٔ میانی

در قسمت‌های قبلی فصل، مثال‌های متفاوتی را بررسی کردیم، با درک دستگاه و بُعد پتانسیل در فضا (با توجه به تقارن مسئله)، رابطهٔ مناسبی را اختیار کرده و با استفاده از شرایط مرزی به محاسبهٔ دقیق پتانسیل پرداختیم. در این قسمت با ذکر تئوری نقطهٔ میانی، راهکار ساده‌ای را برای محاسبهٔ پتانسیل نقطهٔ مرکزی سیستم (البته با مشخص بودن مقدار پتانسیل در مرزها) ارائه می‌کنیم. طبق تعریف:

نکتهٔ طلایی

اگر پتانسیل در تمام مرزهای یک سیستم مشخص باشد، پتانسیل در مرکز آن برابر میانگین پتانسیل مرزهای آن است.

مثال ۳-۴۶ الف) پتانسیل یک وجه از مکعب برابر ۱۲ ولت و پتانسیل سایر وجوه، صفر است. پتانسیل در مرکز مکعب را بیابید. (کارشناسی ارشد برق)

ب) نیمهٔ فوقانی کره‌ای به شعاع a و به مرکز مبداء، دارای پتانسیل $V_\circ$ و نیمهٔ تحتانی آن دارای پتانسیل صفر است. مطلوب است محاسبهٔ پتانسیل در مرکز این کره .

حل: الف) اگر بخواهیم با تئوری نقطهٔ میانی به سوال پاسخ دهیم، کار ساده‌ای داریم. طبق این قضیه:

$$V_{center} = \frac{۱۲ + ۵ \times ۰}{۶} = ۲$$

اما بیایید، تا حدی با عملکرد تئوری میانی آشنا شویم. اگر مکعبی در دست باشد که پتانسیل تمام وجوه آن ۱۲ ولت باشد، طبق اصل یکتایی جواب، پتانسیل در مرکز مکعب برابر ۱۲ ولت خواهد بود.

مثال کلیدی

حال فرض کنید که این مکعب از جمع شش مکعب دیگر که در هر کدام از مکعب‌های جدید، پتانسیل یک وجه ۱۲ و پتانسیل سایر وجوه صفر است، تشکیل شده باشد. (مطابق شکل ۳-۷۲) با این تفاسیر، پتانسیل در مرکز مکعبی که یک وجه آن ۱۲ ولت و سایر وجوهش صفراند برابرِ یک ششمِ پتانسیل در مرکز مکعبی است که تمام وجوهش به پتانسیل ۱۲ ولت و صل است (مطابق شکل ۳-۷۳) و لذا:

$$V_{center} = \frac{۱}{۶} \times ۱۲ = ۲^{v}$$

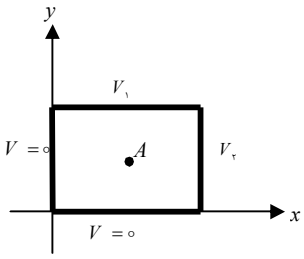
شکل ۳-۷۲: شکل مثال ۳-٤٦- الف

شکل ۳-۷۳

ب) مطابق توضیحات ارائه شده، داریم:

$$V_{center} = \frac{V_{\circ} + \circ}{۲} = \frac{V_{\circ}}{۲}$$

تمرین ۳-۲۲: در شکل (۳-۶۴) ولتاژ دیواره‌های پایین و چپ کانال، برابر صفر هستند. از طرفی ولتاژ دیواره‌های بالا و راست کانال به ترتیب برابر $V_{۱}$ و $V_{۲}$ می‌باشند. نقطهٔ A نقطهٔ میانی کانال و V_A ولتاژ آن است. هنگامیکه $\begin{cases} V_{۱} = V_{\circ} \\ V_{۲} = \circ \end{cases}$ است، $V_A = \frac{۲}{۳} V_{\circ}$ می‌شود. در حالتیکه $V_{۲} = V_{\circ}$ است، مقدار $V_{۱}$ چه باید باشد تا $V_A = \circ$ گردد؟[۴]



شکل ۳- ٧٤: شکل تمرین ۳-۲۳

مثال ۳-۴۷ در مختصات کروی، پتانسیل الکتریکی روی سطح کره‌ای به شعاع r به مرکز مبداء مختصات که هیچ بار الکتریکی را احاطه نمی‌کند، به صورت $V = \cos^{۲}\theta$ تغییر می‌کند. پتانسیل الکتریکی در مبداء مختصات چقدر است؟ (کارشناسی ارشد برق ۸۴)

حل: از آنجایی که تابع پتانسیل در سطح کره، تابعی از شعاع نیست، پس چنانچه r به سمت صفر میل کند، می‌توان با متوسط‌گیری، پتانسیل در مبداء را بدست آورد. در نتیجه طبق تئوری نقطهٔ میانی داریم:

$$V = \frac{1}{4\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos^2\theta R^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{1}{3}$$

۳-۵- تئوری جریان‌های الکتریکی دائم

۳-۵-۱- انواع جریان‌های الکتریکی

جریان‌های الکتریکی ناشی از حرکت بارهای آزاد چند دسته‌اند:

۱- **جریان‌های هدایتی:** که در هادی‌ها و نیمه هادی‌ها موجود بوده و توسط حرکت رانشی الکترون‌ها یا حفرها به وجود می‌آیند.

۲- **جریان‌های الکترولیتی:** این دسته از جریان‌ها نتیجهٔ نقل مکان یون‌های مثبت و منفی‌اند.

۳- **جریان‌های انتقالی:** که از حرکت الکترون‌ها و یون‌ها در خلاء نتیجه می‌شود.

در الکترومغناطیس بیشتر با جریان‌های ناشی از نوع اول و سوم سروکار داریم. ذکر این نکته خالی از لطف نیست که مهمترین فرق جریان‌های انتقالی با دو نوع دیگر در این است که در جریان انتقالی، کل محیط باردار بوده ولی در دو فرم دیگر کل محیط از نظر الکتریکی خنثی است. توضیحات بیشتر در این مورد را در آینده مطرح کرده و دلیل ذکر عنوان **دائم** (در کنار نام جریان) را تشریح می‌کنیم.

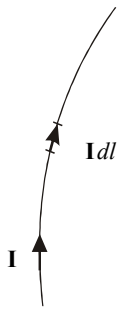
۳-۵-۱-۱- چگالی‌های جریان

در این درس با سه نوع توزیع جریان برخورد داریم. این توزیع‌ها را در شکل‌های (۳-۷۵) تا (۳-۷۷) مشاهده می‌کنید. توزیع‌های فوق را به ترتیب خطی، سطحی و حجمی نامیده و از همین نمادها برای نام‌گذاری استفاده خواهیم کرد.

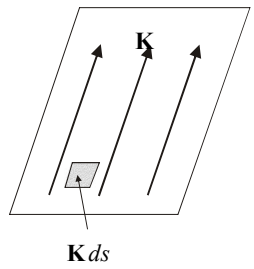
جریان حجمی گذرنده از مقطع یک سطح را می‌توان به صورت زیر یافت:

$$I = \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{ds} \qquad (۳-۵۲)$$

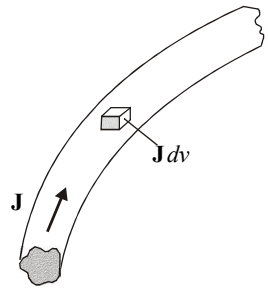
توجه دارید که از چگالی حجمی جریان انتگرال سطح گرفتیم (یعنی یک بُعد کمتر) به همین صورت برای چگالی سطحی از انتگرال خط استفاده می‌کنیم:



شکل ۳- ۷۵



شکل ۳- ۷۶



شکل ۳- ۷۷

اگر جریان از حجمی بگذرد که یکی از ابعاد آن بسیار کوچک باشد، آن را چگالی جریان سطحی نامیده و با $\mathbf{K}$ (بر حسب آمپر بر متر) بیان می‌کنیم. در این صورت جریان گذرنده از یک سطح به شکل زیر بدست می‌آید:

$$I = \int (\mathbf{K} \cdot \mathbf{a}_n)\, dl \qquad (۵۳-۳)$$

که در آن $\mathbf{a}_n$ بردار یکهٔ عمود بر خط، واقع در صفحهٔ جریان است.

در حالت کلی درک چگونگی توزیع جریان (حجمی یا سطحی) مستلزم توجه فیزیکی به مسئله است، مگر آنکه با توزیع ساده‌ای سروکار داشته باشیم. این روابط را در مثال‌های زیر نشان داده‌ایم.

مثال ۳-۴۸ کل جریانی را که از حجم کره‌ای به شعاع a و بوسیلهٔ چگالی جریان حجمی $\mathbf{J} = \frac{۱}{R^۲}\mathbf{a}_R$ می‌گذرد، بیابید. (کارشناسی ارشد هسته‌ای ۷۹)

حل: چگالی جریان حجمی داریم پس با یک انتگرال سطح بر مرز فضای مذکور پاسخ را بدست می‌آوریم. برای این منظور کافی است از رابطهٔ (۳-۵۲) استفاده کنیم. در این صورت:

$$I = \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{ds} = \int_۰^{۲\pi} \int_۰^{\pi} \frac{۱}{R^۲}\mathbf{a}_R \cdot R^۲ \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \mathbf{a}_R = ۴\pi$$

POWEREN.IR

همانطور که مشاهده شد در جریان‌های حجمی با حالت بسیار ساده‌ای مواجهیم، کافی است بتوانیم به درستی انتگرال بگیریم. برخی مواقع می‌توان به‌جای انتگرال‌گیری از قضایای فصل اول استفاده کرد. مثلاً:

مثال ۳-۴۹ در اطراف نقطه $P(۵, ۷, -۵)$ چگالی جریان به صورت زیر است:

$$\mathbf{J} = ۲x^{۳}y\ \mathbf{a}_x - ۵x^{۲}z^{۲}\mathbf{a}_y + ۴x^{۲}y\,z\,\mathbf{a}_z$$

مکعبی به ضلع ۱^m ، با اضلاع موازی محورهای مختصات و به مرکز نقطه P را در نظر بگیرید. جریانی را که از این مکعب خارج می شود بدست آورید.

حل: طبق رابطهٔ (۳-۵۲) برای جریان داریم:

$$I = \oint_S \mathbf{J}\ .\ \mathbf{ds}$$

از طرفی طبق قضیهٔ دیورژانس می‌توان گفت:

$$I = \oint_S \mathbf{J}\ .\ \mathbf{ds} = \int (\nabla\ .\ \mathbf{J})dv$$

پس:

$$I = \int_{-۵.۵}^{-۴.۵} \int_{۶.۵}^{۷.۵} \int_{۴.۵}^{۵.۵} \left(۶x^{۲}y + ۴x^{۲}y\right)dx\,dy\,dz = ۱۷۵۶^{A}$$

مثال ۳-۵۰ از استوانه‌ای به شعاع a جریانی با چگالی $\mathbf{J} = k_{\circ}e^{-k_{۱}r}\mathbf{a}_z$ می‌گذرد. محور استوانه روی محور zها قرار دارد. جریان گذرنده از استوانه چقدر است؟

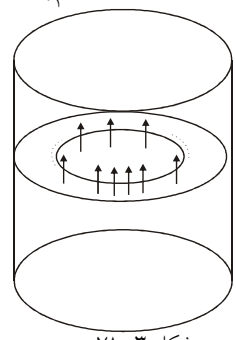
حل: دو مثال قبل توزیع جریان حجمی در دستگاه‌های کروی و کارتزین را نشان دادند. در این مثال نیز با دستگاه استوانه‌ای کار خواهیم کرد. با چگالی حجمی جریان مواجهیم. برای درک بهتر به نحوهٔ توجیه حجمی بودن چگالی جریان که در زیر می‌آید، توجه کنید:

چگالی جریان در جهت z بوده و فقط تابعی از r است، پس مطابق شکل (۳-۷۸) و مقطع مشخص شده در شکل (۳-۷۹) ، برای مقطعی دایروی از استوانه و به شعاع r چگالی جریان به صورت $\mathbf{J} = k_{\circ}e^{-k_{۱}r}\mathbf{a}_z$ است. در حقیقت توزیع جریان در امتداد محیط دایره تغییر نمی‌کند، با

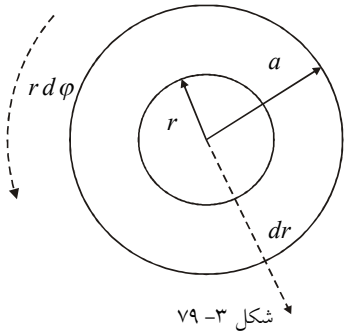
مثال کلیدی

این حال چون چگالی در جهت z است، پس بردارهای مشابهی را در امتداد مرز داریم (بردارهـای نشان داده شده در شکل ۳-۷۸) در نتیجه برای پوشش دادن توزیع یکبار باید در جهت r انتگرال گرفت (که در این حالت با افـزایش شـعاع توزیـع هـم تغییـر مـی‌کنـد) و بـار دیگـر در مـسیر φ انتگرال‌گیری کرد(که در این حالت توزیع بار در هر شعاع ثابت است) و در نتیجه به انتگرال‌گیـری سطح احتیاج داریم:

$$I=\int \mathbf{J}\,.\,\mathbf{ds}=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{a} k_{0}e^{-k_{1}r}\,\mathbf{a}_z\,.\,r\,dr\,d\varphi\;\mathbf{a}_z=\frac{2\pi k_{0}}{k_{1}^{2}}\left(1-\left(1+k_{1}a\right)e^{-k_{1}a}\right)$$



شکل ۳- ۷۸



شکل ۳- ۷۹

مثال ۳-۵۱ واشر به شعاع داخلی ۲ و شعاع خارجی ۵ واقع در صفحه xy، دارای چگـالی جریـان سطحی $\mathbf{K}=4r\,\mathbf{a}_{\varphi}$ است. چه جریانی از واشر می‌گذرد؟ (کارشناسی ارشد برق ۷۲)

حل: در این حالت با چگالی جریان سطحی مواجهیم. هـر رشـته از ایـن جریـان‌هـا در جهـت φ متقارن‌اند ولی در جهت r مقادیر متفاوتی را ایجاد می‌کننـد (یعنـی چگـالی جریـان نقطـه‌ای بـه مختصات (r,φ_1) با چگالی جریان نقطه‌ای همچون (r,φ_2) هیچ تفاوتی ندارد.(کافی است به J_S نگاه کنید) ولی چگالی جریان نقاط (r_1,φ) و (r_2,φ) بـا هـم متفاوتنـد.) از اینـرو بـرای محاسـبهٔ جریان کافی است این چگالی‌ها را در امتداد r جاروب کنیم. پس طبـق رابطـهٔ (۳-۵۳) خـواهیم داشت:

$$I=\int(\mathbf{K}\,.\,\mathbf{a}_n)\,dl=\int_{2}^{5}(4r\,\mathbf{a}_{\varphi}\,.\,\mathbf{a}_{\varphi})dr=2r^{2}\Big|_{2}^{5}=\frac{21}{2}$$

در اینجا این موضوع را متذکر می‌شویم که همواره بردار $\mathbf{a}_n$ در رابطهٔ (۳-۵۳) همان مولفهٔ چگالی جریان سطحی (یعنی همان مولفهٔای که تغییر مختصات به ازای آن تغییری را در چگالی جریان سطحی ایجاد نمی‌کند) است.

تذکر: تا به اینجا باید ماهیت چگالی حجمی و سطحی را درک کرده باشید. همانطور که در مثال فوق دیدیم چگالی $\mathbf{J} = ۴r\,\mathbf{a}_\varphi$ در یک سیستم در هر صورت دارای ماهیت سطحی است ولی چگالی جریانی به فرم $\mathbf{M} = ۴r\cos\varphi\ \mathbf{a}_\varphi$ در یک سیستم استوانه‌ای دارای ماهیت حجمی است و برای محاسبهٔ جریان ناشی از آن از انتگرال سطح استفاده کرد. (چرا که توزیع داده شده قالب نقطه‌ای دارد (برای هر نقطه متفاوت است) و از اینرو در مقطع سیستم به انتگرال سطح نیاز داریم)

تمرین ۳-۲۳: چگالی جریان $\mathbf{M} = ۴r\cos\varphi\ \mathbf{a}_\varphi$ در یک دستگاه استوانه‌ای داده شده است. مقدار کل جریان را در هر یک از حالات زیر تعیین کنید:

الف) چگالی فوق از سطح خارجی استوانه‌ای به شعاع ۲ عبور کند.

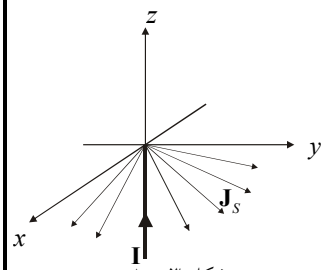
ب) چگال فوق از مقطع یک واشر به شعاع داخلی ۲ و شعاع خارجی ۴ عبور کند.

پ) چگالی فوق از حجم استوانه‌ای به شعاع ۲ عبور کند.

در برخی مسائل جریان‌های حجمی، سطحی و یا خطی به یکدیگر تبدیل می‌شوند. در این موارد نیز با حالت جدیدی مواجه نیستیم و مشابه قبل عمل می‌کنیم. به مثال‌های (۳-۵۲) و (۳-۵۳) توجه کنید.

مثال کلیدی

مثال ۳-۵۲ جریان I که در قسمت منفی محور z وجود دارد به صفحهٔ xy برخورد کرده و به طور یکنواخت و شعاعی روی ربع اول صفحهٔ xy پخش می‌شود. چگالی سطحی جریان را در ربع اول صفحهٔ xy بیابید.



شکل ۳- ۸۰

حل: جریان مذکور به صورت یکنواخت و شعاعی پخش شده است، پس در حالت کلی چگالی جریان سطحی به صورت زیر خواهد بود:

$$J_S = J_{S_\circ}\,\mathbf{a}_r$$

چگالی فوق دارای قالب سطحی است، در نتیجه طبق رابطهٔ

(۳-۵۳) داریم:

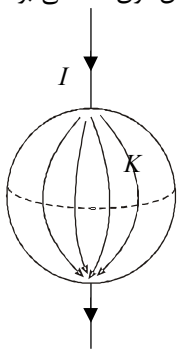
$$I = \int (\mathbf{K} \cdot \mathbf{a}_n)\, dl = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(J_{S_0}\, \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r\right) r\, d\varphi$$

که نتیجه می‌دهد:

$$J_{S_0} = \frac{2I}{r\pi} \quad \rightarrow \quad \mathbf{J}_S = \frac{2I}{r\pi}\, \mathbf{a}_r$$

مثال ۳-۵۳ جریان I به یک پوستهٔ کروی نازک وارد شده و از نقطهٔ مقابل قطری آن خارج می‌شود، چگالی جریان سطحی روی کره را بیابید. [۸]

حل: جریان مطابق شکل (۳-۸۱) از سیم خارج شده و بر سطح کره جاری می‌شود. مطابق شکل براحتی استدلال می‌شود که جریان با قالبی در جهت $\mathbf{a}_\theta$ حرکت می‌کند. جریان فوق سطحی بوده و بر طبق رابطهٔ (۳-۵۳) داریم:



شکل ۳- ۸۱

$$I = \int (\mathbf{K} \cdot \mathbf{a}_n)\, dl = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(K\, \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_\theta\right) R \sin\theta\, d\varphi$$

و در نتیجه:

$$I = 2\pi R \sin\theta\, K$$

پس:

$$\mathbf{K} = \frac{I}{2\pi R \sin\theta}\, \mathbf{a}_\theta$$

در حقیقت می‌توان اینطور بیان کرد که چگالی بار در سطح کره به صورت یکنواخت بوده و در جهت $\mathbf{a}_\theta$ است در نتیجه برای محاسبهٔ کل جریان کافی است تمامی این جریان‌ها را در جهت φ جاروب کنیم.

مثال‌های فوق چگونگی محاسبهٔ جریان‌های هدایتی (*conductive current*) را در قالب‌های مختلف نشان می‌داد. با این همه باز هم همچون قبل اکیداً توصیه می‌کنیم که از اصل جمع آثار غافل نشوید، شاید در یک مسئلهٔ ترکیبی مجبور به استفاده از چند مدل توزیع مختلف باشید. مثال زیر یک نمونه از اینها را نشان می‌دهد، موارد دیگر را در تمرینات آخر فصل خواهید یافت.

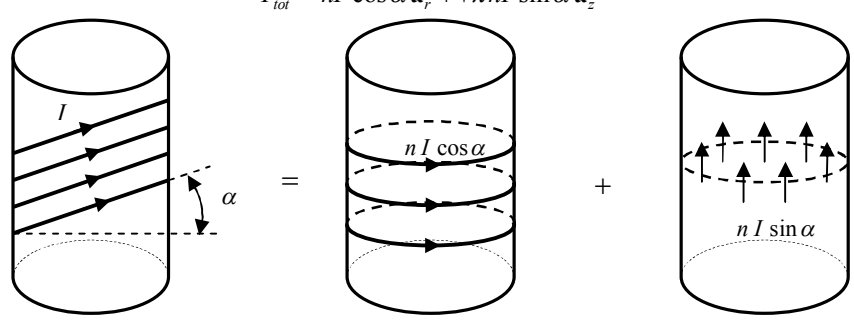
مثال ۳-۵۴ روی استوانه‌ای بسیار بلند به شعاع a سیم‌های نازکی به صورت شکل (۳-۸۲) پیچیده شده‌اند. با فرض اینکه جریان هر سیم I و تعداد دور در واحد طول n باشد، جریان کل گذرنده از استوانه را بیابید.

حل: از اصل جمع آثار استفاده می‌کنیم. جریان هر سیم‌پیچ را به دو مولفه، یکی در جهت z و دیگری در جهت r تجزیه می‌کنیم. (مطابق شکل ۳-۸۳)

همانطور که در شکل فوق مشاهده می‌شود جریان ناشی از یک سیم به دو مولفهٔ $I\cos\alpha\,\mathbf{a}_r$ و $I\sin\alpha\,\mathbf{a}_z$ تقسیم می‌شود. با توجه به اینکه تعداد دور سیم‌پیچ در واحد طول n است، پس در حقیقت هر دسته جریان، n برابر این مقدار را ایجاد خواهد کرد. برای محاسبهٔ جریان کل گذرنده از سیم‌پیچ اثر این دو دسته جریان را جمع می‌کنیم. کل جریان گذرنده از سطح هسته در جهت r به صورت $nI\cos\alpha\,\mathbf{a}_r$ و در جهت z برابر $۲\pi\times nI\sin\alpha\,\mathbf{a}_z$ است.(برای توجیه ضریب ۲π به شکل (۳-۸۳) نگاه کنید. مطابق این شکل جریان دسته سیم‌پیچ‌ها را در امتداد محیط مقطع جاروب کرده‌ایم)

پس:

$$I_{tot} = nI\cos\alpha\,\mathbf{a}_r + ۲\pi nI\sin\alpha\,\mathbf{a}_z$$



شکل ۳- ۸۲ شکل ۳- ۸۳

۳-۵-۱-۲- جریان‌های ناشی از حرکت بار= جریان‌های انتقالی

همانطور که پیش از این ذکر شد، حرکت بار می‌تواند جریانی را در یک جسم پدید آورد. برای محاسبهٔ چگالی جریان ناشی از این حرکت کافی است سرعت حرکت بار را در چگالی بار (از هر نوعی) ضرب کنیم. مثلا اگر بار سطحی σ توزیع شده روی صفحه‌ای را در جهت مماس برآن

با سرعت v حرکت دهیم، توزیع جریانی معادل $J = \sigma v$ ایجاد خواهد شد و یا عبور بار q با سرعت v جریانی با مقدار qv را ایجاد خواهد کرد.

مثال ۳-۵۵ یک ذره با بار Q ، جرم m و انرژی جنبشی T حول یک دایره با شعاع r در یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}$ دارای یک حرکت دورانی می‌باشد.جریان حلقه را بیابید. (کارشناسی ارشد فیزیک ۸۳)

حل: بار Q بر روی حلقه قرار گرفته پس چگالی بار خطی به صورت زیر است:

$$\lambda = \frac{Q}{۲\pi r}$$

طبق توضیحات فوق جریان عبارت است از:

$$I = \lambda v = \frac{Q}{۲\pi r} v$$

و با قرار دادن:

$$T = \frac{۱}{۲} m v^{۲}$$

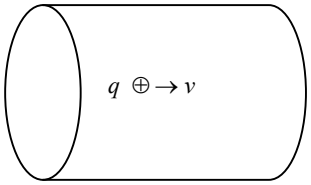
پس:

$$I = \frac{Q}{۲\pi r}\sqrt{\frac{۲T}{m}}$$

تمرین ۳-۲۴: یک تابه استوانه‌ای با شعاع R حاوی ذرات با بار مثبت q و تراکم N (در واحد حجم) و دارای سرعت محوری v می‌باشد. هیچگونه میدان الکتریکی یا مغناطیسی خارجی وجود ندارد.

الف) چگالی بار الکتریکی خطی λ را بیابید

ب) جریان الکتریکی I را محاسبه کنید.



شکل ۳- ۸٤: شکل تمرین ۳-۲٤

۳-۵-۱-۳- جریان‌های دائم

طبق تعریف جریان دائم به جریانی اطلاق می‌شود کـه دیـورژانس آن صـفر باشـد. اینچنـین جریانی می‌تواند میدان مغناطیسی ساکن تولید کند. در مورد بارهای متحرک می‌توان گفت:

بارهای متحرک به شرطی میدان مغناطیسی ساکن ایجاد می‌کنند که با حرکتشان وضـعیت بارها تغییر نکند (به عبارتی همواره $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$) که توضـیحات بیـشتر را در فـصل آینـده مطـرح می‌کنیم؛ ولی به همین جمله بسنده می‌کنیم که اگر حلقه‌ای با توزیع بار ρ_S را در امتداد محوری که از مرکزش نمی‌گذرد دوران دهیم، ناشی از این حرکت بار، جریان داریم ولی این جریان میدان الکترومغناطیسی (یعنی هم میدان الکتریکی و هم میدان مغناطیسی) تولید می‌کند، که تحلیل آن کار دشواری است.

مثال کلیدی

مثال ۳-۵۶ کره‌ای با بار حجمی یکنواخت ρ را حول محوری که از مرکزش می‌گذرد با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌دهیم. چگالی جریان معادل را بیابید.

حل: کره با سرعت زاویه‌ای چرخیده است برای تبـدیل آن بـه سـرعت خطـی لازم اسـت ω را در شعاع دایره‌ای که حول آن دوران می‌کند، ضرب کنیم. با کمی دقت قبول می‌کنید که با توجه بـه ساختار شکل این شعاع همواره برابر r خواهد بود پس می‌توان نوشت:

$$J = \rho v = \rho\, r\, \omega$$

از طرفی می‌دانیم که $r = R\sin\theta$ است و همچنین جهت مـورد انتظـار بـرای چگـالی جریـان $\mathbf{a}_\varphi$ خواهد بود (چرا؟) پس:

$$J = \rho v = \rho\, r\, \omega = \rho\, R \sin\theta\, \omega$$

تمرین ۳-۲۵: یک دیسک عایق با شعاع r دارای بار الکتریکی سطحی با چگالی σ است. دیسک با سرعت ثابت n دور در دقیقه حول محورش دوران می‌کند، در نتیجه یک جریـان سـطحی روی دیسک ایجاد می‌شود. مقدار این جریان سطحی را بیابید.

تمرین ۳-۲۶: روی سطح نیم‌کره‌ای $\begin{cases} R = a \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$، چگالی جریان $\mathbf{K} = K_0 \sin\theta\, \mathbf{a}_\varphi$ وجود دارد.

الف) کل جریان گذرنده از نیم‌کره را بیابید.

ب) آیا با دوران بار سطحی می‌توان این جریان را ایجاد کرد؟ چه توزیع بار سطحی و چگونه دوران کند تا این جریان ایجاد شود؟

۳-۵-۲- رسانندگی

خواص ماکروسکوپی الکتریکی محیط‌های مادی با پارامتری به نام رسانندگی تعریف می‌شود. این پارامتر مشخص‌کنندهٔ مقدار زمان گذار لازم برای توزیع بارها بر روی سطح هادی است و به صورت زیر میدان الکتریکی ساکن را به چگالی جریان مرتبط می‌کند:

$$\mathbf{J} = \sigma\,\mathbf{E} \qquad (۵۴\text{-}۳)$$

لازم به ذکر است که رابطهٔ (۳-۵۴) رابطهٔ اساسی محیط‌های هادی است و محیط‌هایی که این رابطه در مورد آنها صدق کند، محیط اهمی نامیده می‌شوند. رابطهٔ فوق کلید دستیابی به قانون اهم است که توضیحات بیشتر در این مورد را در آینده مطرح می‌کنیم.

۳-۵-۲-۱- توان اتلافی

توان تلف‌شده در یک مادهٔ رسانا بوسیلهٔ شدت میدان الکتریکی و جریان قابل محاسبه است. طبق تعریف برای چگالی حجمی توان اتلافی خواهیم داشت:

$$P = \mathbf{J}\,.\,\mathbf{E} \qquad (۵۵\text{-}۳)$$

که واحد آن وات بر متر مکعب بوده و برای محاسبهٔ کل توان اتلافی از آن در حجم مورد نظر انتگرال می‌گیریم.

مثال ۳-۵۷ استوانهٔ قائمی به شعاع a و ارتفاع L را در نظر بگیرید. با فرض اینکه استوانه از هادی غیرکاملی با رسانندگی σ ایجاد شده باشد و اختلاف پتانسیل V دو سر استوانه برقرار گردد، توان کل اتلافی در استوانه را بیابید.

حل: اگر جریان کل گذرنده از استوانه I باشد، برای چگالی جریان داریم:

$$\mathbf{J} = \frac{I}{\pi r^{۲}}\mathbf{a}_z$$

همچنین شدت میدان الکتریکی به صورت $\frac{V}{L}$ خواهد بود. پس برای توان اتلافی خواهیم داشت:

$$P = \int_{\Delta V} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \int_{0}^{L} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{a} \left(\frac{I}{\pi a^{2}}\right)\left(\frac{V}{L}\right) r\, dr\, d\varphi\, dz = VI$$

۳-۵-۳- شرایط مرزی چگالی جریان

معادلات حاکم بر شرایط مرزی چگالی جریان در حالت دائم را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \qquad (۵۶\text{-}۳)$$

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}}{\sigma}\right) = 0 \qquad (۵۷\text{-}۳)$$

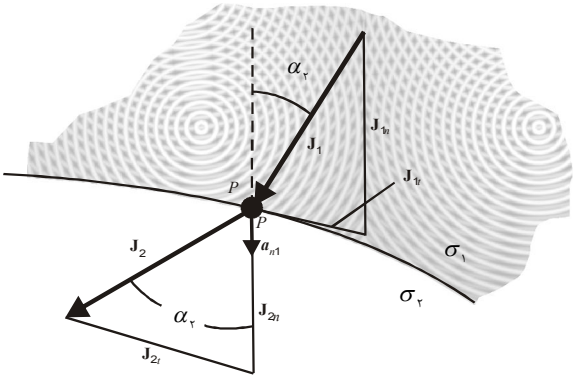
برای اثبات این روابط، بر خلاف روش مطرح شده در مورد شرایط مرزی الکترواستاتیک و مغناطیس ساکن (که در فصل بعد آن‌ها را مطرح می‌کنیم) قصد داریم تا از نتایج آن‌ها بهره بگیریم. این موارد را به صورت زیر دسته‌بندی کرده‌ایم:

۱- مولفهٔ عمودی یک میدان بدون دیورژانس پیوسته است. (در ارتباط با میدان‌های مغناطیسی)

۲- مولفهٔ مماسی یک میدان بدون کرل روی فصل مشترک پیوسته است. (نتیجه شده از الکترواستاتیک)

پس از اولین نکته نتیجه می‌شود که:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \;\rightarrow\; J_{1n} = J_{2n} \qquad (۵۸\text{-}۳)$$



شکل ۳-۸۵: شرایط مرزی چگالی جریان

و به صورت مشابه از دومی می‌توان فهمید که:

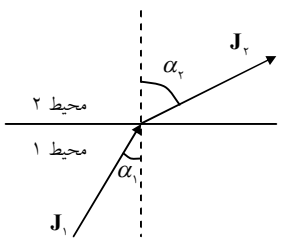
$$\nabla \times (\frac{\mathbf{J}}{\sigma}) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{J_{1t}}{\sigma_1} = \frac{J_{2t}}{\sigma_2} \qquad (۵۹-۳)$$

و این یعنی نسبت مولفه‌های مماسی چگالی جریان در دو طرف فصل مشترک برابر نسبت رسانندگی‌هاست

مثال ۳-۵۸ در شکل (۳-۸۶) اندازه و جهت چگالی جریان را در محیط ۲ مشخص کنید.

حل: شرایط مرزی محاسبه شده در روابط (۳-۵۸) و (۳-۵۹) را برای این مرز بررسی می‌کنیم:

$$\frac{J_{1t}}{\sigma_1} = \frac{J_{2t}}{\sigma_2}$$



شکل ۳-۸۶: شکل مثال ۳-۵۸

که نتیجه می‌دهد:

$$J_1 \sin\alpha_1 \frac{1}{\sigma_1} = J_2 \sin\alpha_2 \frac{1}{\sigma_2} \qquad (۱)$$

از شرط $J_{1n} = J_{2n}$ نتیجه می‌گیریم که:

$$J_1 \cos\alpha_1 = J_2 \cos\alpha_2 \qquad (۲)$$

از ترکیب روابط (۱) و (۲) بدست می‌آید که:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sigma_1 \cos\alpha_1} = \frac{\sin\alpha_2}{\sigma_2 \cos\alpha_2} \quad \rightarrow \quad \frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

در این صورت برای محیط ۲ خواهیم داشت:

$$J_2 = \sqrt{J_{2t}^{\ 2} + J_{2n}^{\ 2}} = \sqrt{(J_2 \cos\alpha_2)^2 + (J_2 \sin\alpha_2)^2} = \sqrt{(J_1 \cos\alpha_1)^2 + (J_1 \sin\alpha_1 \frac{\sigma_2}{\sigma_1})^2}$$

پس:

$$J_2 = J_1 \sqrt{\cos^2\alpha_1 + (\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \sin\alpha_1)^2}$$

مثال ۳-۵۹ نشان دهید در عبور جریان دائم از مرز بین دو دی‌الکتریک، امکان ایجاد بار سطحی در فصل مشترک وجود دارد. مقدار این چگالی بار را بدست آورید.

حل: از رابطهٔ (۳-۵۸) که پیوند بین جریان‌های دائم و شرایط مرزی میدانهای الکتریکی ساکن است شروع می‌کنیم:

$$J_{1n} = J_{2n} \quad \rightarrow \quad \sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}$$

با تبدیل شدت میدان الکتریکی به چگالی شار الکتریکی می‌توانیم نفوذپذیری را به این عبارت وارد کنیم. کافی است قرار دهیم:

$$D_{1n} = \varepsilon_1 E_{1n} \qquad , \qquad D_{2n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

اگر از رابطهٔ (۲-۷۶) که شرط مرزی میدان‌های ساکن را بیان می‌کند استفاده شود:

$$\rho_s = D_{1n} - D_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = (\varepsilon_1 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \varepsilon_2) E_{2n} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2}) E_n$$

مشاهده می‌شود که بجز حالتی که در آن $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ ، در بقیهٔ مواقع همواره توزیع ρ_s در مرز دو محیط وجود دارد.

تمرین ۳-۲۷: ناحیهٔ $z > 0$ از محیط همگن با ضرایب σ_1 و ε_1 و ناحیهٔ $z < 0$ از محیطی با ضرایب σ_2 و ε_2 مفروض است. اگر در محیط ۱ داشته باشیم $\mathbf{J}_1 = J_0 \left(\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z\right)$، چگالی بار سطحی را در $z = 0$ بدست آورید. (کارشناسی ارشد برق)

۳-۵-۴- مقاومت

همانطور که در توضیحات رسانندگی بیان شد، محیطی را که در آن رابطهٔ $\mathbf{J} = \sigma\ \mathbf{E}$ برقرار باشد، محیط اهمی گویند. بر این اساس قانون اهم را در مورد شکل (۳-۸۷) بدین صورت بررسی می‌کنیم:

$$I = \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{ds} = JS \qquad \text{و} \qquad \mathbf{J} = \sigma\ \mathbf{E}$$

$$\frac{I}{S} = \sigma\ E = \sigma \frac{V}{\ell} \qquad \rightarrow \qquad V = \frac{\ell}{\sigma\ S} I = RI$$

پس:

$$R = \frac{\ell}{\sigma S} \qquad (۶۰-۳)$$

همانطور که می‌دانیم برای محاسبهٔ مقاومت بایستی ولتاژ را بر جریان تقسیم کرد، از اینرو لازم است تا با فرض نمودن یکی از آنها به دیگری برسیم. روش‌های مرسومِ محاسبهٔ مقاومت بر همین اساس دسته‌بندی می‌شوند.

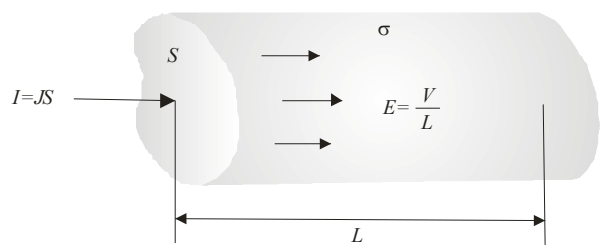
۳-۵-۴-۱- شروع با پتانسیل

در این حالت به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱- اختلاف پتانسیل $V_\circ$ را دو سر هادی‌های سیستم در نظر می‌گیریم.

۲- تابع پتانسیل را در فضای مورد نظر می‌یابیم. لازم به یادآوری‌است که این عمل معمولاً

با استفاده از رابطهٔ لاپلاس انجام می‌شود.



شکل ۳-۸۷: بررسی قانون اهم

۳- با استفاده از رابطهٔ $\mathbf{E} = -\nabla V$ شدت میدان را پیدا می‌کنیم.

۴- جریان سیستم را به کمک حل انتگرال $I = \int \mathbf{J}\,.\,\mathbf{ds} = \int_S \sigma\, \mathbf{E}\,.\,\mathbf{ds}$ پیدا می‌کنیم.

۵- حال با استفاده از رابطهٔ $R = \frac{V_\circ}{I}$ مقاومت را محاسبه می‌کنیم.

به مثال‌هایی که در ادامه می‌آید توجه کنید.

مثال ۳-۶۰ مقاومت یک خازن استوانه‌ای به شعاع داخلی a، شعاع خارجی b و طول ℓ را بیابید.

حل: استوانهٔ داخلی را به پتانسیل $V_\circ$ و استوانهٔ خارجی را به پتانسیل صفر وصل می‌کنیم. بر طبق حل لاپلاس پتانسیل در فضای بین دو استوانه از رابطهٔ $V(r) = A\,Ln\,r + B$ بدست می‌آید. اگر شرایط مرزی را برای محاسبهٔ ضرایب ثابت بکار گیریم، خواهیم داشت:

$$V(r) = \frac{V_\circ}{Ln\frac{b}{a}} Ln\frac{b}{r}$$

برای شدت میدان نیز خواهیم داشت:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{V_\circ}{r\,Ln\frac{b}{a}}\,\mathbf{a}_r \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J} = \frac{\sigma\,V_\circ}{r\,Ln\frac{b}{a}}\,\mathbf{a}_r$$

حال جریان سیستم را پیدا می‌کنیم:

$$I = \int \mathbf{J}\,.\,\mathbf{ds} = \frac{\sigma V_\circ}{Ln\frac{b}{a}} \int_S \frac{r\,d\varphi\,dz}{r} = \frac{۲\pi\sigma\,V_\circ}{Ln\frac{b}{a}}$$

در این صورت بدست می‌آوریم:

$$R = \frac{Ln\frac{b}{a}}{۲\pi\sigma\,V_\circ} \qquad (۶۱\text{-}۳)$$

مثال ۳-۶۱ در مختصات استوانه‌ای ناحیهٔ $۰.۵^m < r < ۳^m$, $۰ \le z \le ۱۰$, $۰ \le \varphi \le ۲\pi$ از ماده‌ای با ضریب هدایت الکتریکی $\sigma = ۲۰\frac{V}{m}$ پر شده است. باتری به پتانسیل $V_\circ$ بین دو صفحه $r = ۳, r = ۰.۵$ متصل شده است. اگر بخواهیم توان ۲۵^{KW} در ماده به صورت حرارت تلف شود، مقدار $V_\circ$ چقدر باید باشد ؟ (کارشناسی ارشد برق)

حل: این تلف حرارتی بدلیل مقاومت فضا است. از اینرو آن را یافته و از رابطهٔ $P = \frac{V_\circ^{۲}}{R}$ مقدار ولتاژ را محاسبه می‌کنیم.

بر طبق حل لاپلاس و شرایط مرزی، تابع پتانسیل را در فضا بدست می‌آوریم:

$$V = A\,Ln\,r + B$$

$$\left.\begin{array}{l} V\,(r=۰.۵) = V_۰ = A\,Ln\,۰.۵ + B \\ V\,(r=۳) = ۰ = A\,Ln\,۳ + B \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = \dfrac{-V_۰}{Ln\,۶} \\ B = V_۰\dfrac{Ln\,۳}{Ln\,۶} \end{array}\right.$$

پس:

$$V = \frac{-V_۰}{Ln\,۶}Ln\,r + V_۰\frac{Ln\,۳}{Ln\,۶} = \frac{V_۰}{Ln\,۶}\,Ln\frac{۳}{r}$$

حال شدت میدان را می‌یابیم:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{V_۰}{r\,Ln\,۶}\mathbf{a}_r \quad , \quad \mathbf{J} = \frac{\sigma V_۰}{r\,Ln\,۶}\mathbf{a}_r$$

برای جریان داریم:

$$I = \int_۰^{۱۰}\int_۰^{۲\pi}\frac{\sigma V_۰}{r\,Ln\,۶}r\;d\varphi\;dz = \ldots = \frac{۲۰\pi\sigma V_۰}{Ln\,۶}$$

پس مقدار مقاومت به صورت زیر خواهد بود:

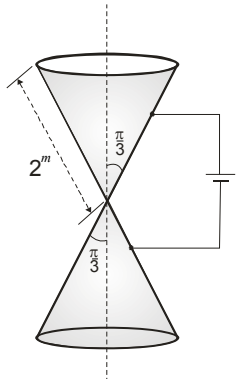
$$R = \frac{Ln\,۶}{۲\pi\sigma} = \ldots. = \frac{Ln\,۶}{۴۰\pi}$$

با توجه به توضیحات ابتدایی برای ولتاژ خواهیم داشت:

$$\frac{V_۰^{\;۲}}{R} = ۲۵۰۰۰ \;\Rightarrow\; V_۰ = ۵۰\sqrt{۱۰}\times\left(\frac{Ln\,۶}{۴۰\pi}\right)^{\frac{۱}{۲}} = ۱۸.۹$$

مثال ۳-۶۲ بین دو قیف مطابق شکل (۳-۸۸) از ماده‌ای با ضریب هدایت الکتریکی $\sigma = ۲\times۱۰^{-۳}$ پر شده است. مقاومت الکتریکی بین دو قیف را بدست آورید؟ (کارشناسی ارشد)

حل: از رابطهٔ (۳-۳۸) استفاده می‌کنیم، با توجه به شرایط مرزی داریم:



شکل ۳-۸۸

$$\begin{cases} V(\theta) = A\,Ln\left(\tan\dfrac{\theta}{۲}\right)+B \Big|_{\theta=\frac{\pi}{۳}} = V_\circ \\ V(\theta) = A\,Ln\left(\tan\dfrac{\theta}{۲}\right)+B \Big|_{\theta=\frac{۲\pi}{۳}} = \circ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{V_\circ}{۲Ln\sqrt{۳}} \\ B = \dfrac{V_\circ}{۲} \end{cases}$$

پس برای پتانسیل و میدان می‌توان گفت:

$$V = -\frac{V_\circ Ln\left(\tan\frac{\theta}{۲}\right)}{۲Ln\sqrt{۳}} + \frac{V_\circ}{۲} \quad , \quad \mathbf{E} = -\nabla V = \frac{V_\circ}{۲R\sin\theta\, Ln\sqrt{۳}}\mathbf{a}_\theta$$

و برای چگالی جریان داریم:

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = \frac{\sigma V_\circ}{۲R\sin\theta\, Ln\sqrt{۳}}\mathbf{a}_\theta$$

با انتگرال‌گیری از آن، کل جریان را محاسبه می‌کنیم:

$$I = \iint \mathbf{J}\,.\,\mathbf{ds} = \int_\circ^{۲}\int_\circ^{۲\pi} \frac{\sigma V_\circ}{۲R\sin\theta\, Ln\sqrt{۳}} \times R\sin\theta\, d\varphi dR = \ldots = \frac{۲\pi\sigma V_\circ}{Ln\sqrt{۳}}$$

پس مقاومت به صورت زیر خواهد بود:

$$R = \frac{V_\circ}{I} = \frac{Ln\sqrt{۳}}{۲\pi\sigma} = \frac{۲۵\circ}{\pi}Ln\sqrt{۳} = ۴۳.۷^{\Omega}$$

۳-۵-۴-۲- شروع با جریان

اگر محیطی که در آن قرار داریم همگن نباشد، اجازهٔ استفاده از لاپلاس را نداریم. در اینگونه از مواقع مشروط بر اینکه هندسهٔ مسئله به ما اجازه دهد، (این شرایط را در ضمن حل مسئله بررسی می‌کنیم) به صورت زیر عمل خواهیم کرد:

۱- فرض می‌کنیم جریان $I_\circ$ در فضا برقرار است.

۲- با توجه به هندسهٔ مسئله از جریان به چگالی حجمی می‌رسیم، یعنی $J = \frac{I}{S}$.

۳- با استفاده از چگالی جریانِ فوق شدت میدان را محاسبه می‌کنیم. $E = \frac{J}{\sigma}$.

۴- حال به کمک رابطهٔ $V = -\int \mathbf{E}\,.\,\mathbf{dl}$ تابع پتانسیل را بدست می‌آوریم.

۵- در نهایت کافی است با استفاده از رابطهٔ $R = \frac{V}{I_\circ}$ مقاومت را محاسبه کنیم.

مثال ۳-۶۳ مقاومت خازن کروی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b را بیابید.

حل: جریان I را بین دو هادی در نظر می‌گیریم. در اینصورت برای چگالی جریان و شدت میدان خواهیم داشت:

$$J = \frac{I}{۴\pi R^۲} \quad ، \quad E = \frac{I}{۴\pi\sigma R^۲}$$

حال پتانسیل را اینگونه می‌یابیم:

$$V(a) - V(b) = -\int_b^a \frac{I}{۴\pi\sigma R^۲} dR = \frac{I}{۴\pi\sigma}\left(\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}\right)$$

پس برای مقاومت خواهیم داشت:

$$R = \frac{\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}}{۴\pi\sigma} \qquad (۶۲\text{-}۳)$$

مثال ۳-۶۴ بین دو کره هادی به شعاع‌های a و $b = ۳a$ دو ماده یکی با رسانایی ویژه σ و گذردهی $۲\varepsilon_\circ$ و یکی با رسانایی ویژه ۳σ و گذردهی $۳\varepsilon_\circ$ ، به صورت نشان داده شده در شکل (۳-۸۹) قرار دارد. بین دو کره اختلاف پتانسیل $V_\circ$ برقرار شده است. مقاومت بین دو کره را بیابید. [۸]

حل: اگر مثال (۲-۷۴) را خوب فهمیده باشید، قبول خواهید کرد که میدان در دو ناحیه با هم برابر است. فرض می‌کنیم جریان بین دو کره $I_\circ$ باشد، در اینصورت:

$$I_\circ = \int \mathbf{J}_۱ . \mathbf{ds} + \int \mathbf{J}_۲ . \mathbf{ds} = ۲\pi R^۲ \mathbf{J}_۱ + ۲\pi R^۲ \mathbf{J}_۲ = ۲\pi R^۲ \left(\mathbf{J}_۱ + \mathbf{J}_۲\right)$$

شرط مرزی چگالی جریان را بررسی می‌کنیم:

$$\frac{\mathbf{J}_1}{\sigma_1}=\frac{\mathbf{J}_2}{\sigma_2} \;\Rightarrow\; \mathbf{J}_2=3\mathbf{J}_1$$

از دو رابطهٔ اخیر نتیجه می‌گیریم که:

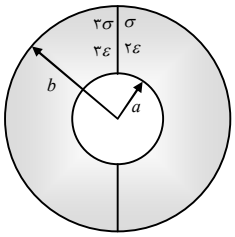
$$\mathbf{J}_1=\frac{I_0}{8\pi R^2}\mathbf{a}_R$$

برای اختلاف پتانسیل دو کره داریم:

$$V_0=-\int_{3a}^{a}\mathbf{E}_1\cdot d\mathbf{R}=-\int_{3a}^{a}\frac{\mathbf{J}_1}{\sigma_1}\cdot d\mathbf{R}=-\frac{I_0}{8\pi\sigma}\int\frac{dR}{R^2}=\frac{I_0}{8\pi\sigma}\frac{2}{3a}$$

پس:

$$R=\frac{V_0}{I_0}=\frac{1}{12\pi\sigma a}$$



شکل ۳-۸۹: شکل مثال ۳-٦٤

مثال کلیدی

مثال ۳-۶۵ خازن با صفحات موازی از دو دی‌الکتریک با اتلاف با رسانندگی و گذردهی و ضخامت‌های به ترتیب σ_1 و σ_2 ، ε_1 و ε_2 ، d_1 و d_2 تشکیل شده است. به دو سر خازن ولتاژ V_0 اعمال می‌کنیم. چگالی بار سطحی روی صفحات و فصل مشترک را بدست آورید.

حل: با توجه به شکل (۳-۹۰):

$$V_0=V_1+V_2=I\,R_1+I\,R_2=I\left(\frac{d_1}{\sigma_1 S}+\frac{d_2}{\sigma_2 S}\right)$$

پس برای چگالی جریان خواهیم داشت:

$$J=\frac{I}{S}=\frac{V_0}{\dfrac{d_1}{\sigma_1}+\dfrac{d_2}{\sigma_2}}=\frac{\sigma_1\sigma_2 V_0}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}$$

طبق شرایط مرزی:

$$J_1=J_2 \;\rightarrow\; \sigma_1 E_1=\sigma_2 E_2 \quad , \quad V_0=E_1 d_1+E_2 d_2$$

پس:

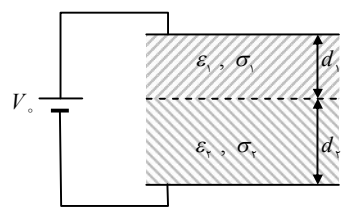
$$E_1 = \frac{\sigma_2 V_0}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} \quad , \quad E_2 = \frac{\sigma_1 V_0}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

طبق تعریف برای چگالی‌های بار سطحی داریم:

$$\rho_{S_1} = \varepsilon_1 E_1 = \frac{\varepsilon_1 \sigma_2 V_0}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} \quad , \quad \rho_{S_2} = \varepsilon_2 E_2 = \frac{\varepsilon_2 \sigma_1 V_0}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

در اینصورت چگالی بار سطحی در فصل مشترک عبارتست از:

$$\rho_S = \left(\varepsilon_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} - \varepsilon_1\right) \frac{\sigma_2 V_0}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} = \frac{(\varepsilon_2 \sigma_1 - \varepsilon_1 \sigma_2) V_0}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$



شکل ۳-۹۰: شکل مثال ۳-۶۵

تمرین ۳-۲۸: بین دو پوستهٔ هادی استوانه‌ای هم‌محور به شعاع‌های a و b ماده‌ای با گذردهی ε و رسانایی ویژهٔ $\sigma = \frac{\sigma_0}{r}$ قرار دارد. چگالی بارهای روی دو سطح و چگالی بار در ماده را بیابید.

۳-۵-۴-۳- استفاده از روش دیفرانسیلی

در فصل گذشته با روش دیفرانسیلی برای محاسبهٔ خازن آشنا شدیم، همانطور که دیدیم روش دیفرانسیلی، محاسبهٔ ظرفیت را به محاسبهٔ یک انتگرال تبدیل می‌کند. در این قسمت قصد داریم تا با بکارگیری روش دیفرانسیلی، مقاومت یک جسم فرض را محاسبه نماییم. در این مسیر از $R = \frac{\ell}{\sigma S}$ استفاده کرده و مشابه قبل عمل می‌نماییم. در حقیقت این رابطهٔ را مبنا قرار داده و با بردن دیفرانسیل آن به سیستم‌های مورد نظر از سری (یا موازی) بودن مقاومت‌های جزیی به مقاومت سیستم دست پیدا می‌کنیم. این روش کاملاً مشابه روش دیفرانسیلی محاسبهٔ خازن است، از اینرو از توضیحات بیشتر خودداری کرده و به ذکر مثال‌ها اکتفا می‌کنیم.

مثال ۳-۶۶ مقاومت خازن کروی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b را بیابید.

حل: باید از دیفرانسیل رابطهٔ $R=\dfrac{\ell}{\sigma S}$ استفاده کنیم. داریم (تذکر جهت جلوگیری از تداخل مقاومت با مولفهٔ R دستگاه کروی در این حالت از $\Re$ برای بیان مقاومت استفاده می‌کنیم.

$$d\Re=\frac{dR}{\sigma\ ۴\pi\ R^{۲}}$$

در رابطهٔ فوق به جای ℓ از dR که ضخامت یک کره بوده و بجای S از $۴\pi R^{۲}$ که مساحت کرهٔ دلخواهی به شعاع R است، استفاده کرده‌ایم. حال کافی است حاصل سری‌شدن بی‌نهایت مقاومت را در فاصلهٔ a تا b بیابیم. می‌دانیم مقاومت معادلی که از سری‌شدن چند مقاومت بدست می‌آید برابر مجموع آنهاست، پس:

$$\Re=\int_a^b\frac{dR}{\sigma\ ۴\pi\ R^{۲}}=\frac{\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}}{۴\pi\sigma}$$

که همان رابطهٔ (۳-۶۲) است.

مثال ۳-۶۷ مقاومت مخروط ناقص شکل (۳-۹۱) را که دارای ضریب هدایت الکتریکی σ است را بیابید. (المپیاد غیرمتمرکز برق)

حل: اگر استوانه‌ای به ارتفاع dz و شعاع r انتخاب کنیم، دیفرانسیل مقاومت به صورت زیر خواهد بود:

$$dR=\frac{dz}{\sigma\pi r^{۲}}$$

برای اینکه درست انتگرال‌گیری کنیم، به شکل (۳-۹۲) توجه می‌کنیم. طبق این شکل اگر شعاع قاعدهٔ بالا a و شعاع قاعدهٔ پایین b باشد، می‌توان r را به صورت زیر بر حسب z نوشت:

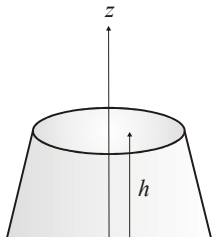
$$z=-\frac{h}{b-a}r+\frac{hb}{b-a}=\frac{h}{a-b}(r-b)$$

در نتیجه:

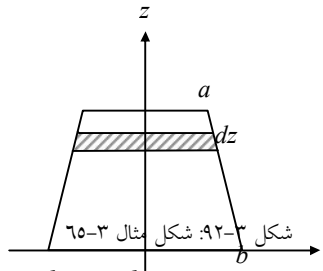
$$dz=h\frac{dr}{a-b}$$

پس دیفرانسیل مقاومت به شکل زیر تکمیل می‌شود:

$$dR = h\frac{dr}{a-b}\times\frac{1}{\sigma\pi r^2}$$



شکل ۳-۹۱: شکل مثال ۳-۶۵



شکل ۳-۹۲: شکل مثال ۳-۶۵

پس:

$$R = \int_a^b dR = \int_a^b \frac{h}{\sigma\pi(a-b)}\times\frac{dr}{r^2} = \frac{h}{\sigma\pi ab}$$

مثال ۳-۶۸ مقاومت گوۀ شکل (۳-۹۳) را محاسبه کنید.

حل: ابتدا المانی مشابه شکل(۲-۹۴) را انتخاب می‌کنیم. بدیهی است که با ترکیبات سری و موازی این المان به شکل کامل می‌رسیم. با توجه به نحوۀ قرارگیری منبع، این المان‌ها در جهت φ سری و در جهت r موازی‌اند. (در حقیقت صفحات $\varphi = 0$ و $\varphi = \frac{\pi}{4}$ صفحات هادی این خازن را تشکیل داده است) با توجه به شکل (۲-۹۴) برای تمام المان‌های سری $def\ (\ell) = r\,d\varphi$ و $S = a\,dr$ و مقاومت جزئی نیز به صورت $def\ (def\ (R)) = \frac{def\ (\ell)}{\sigma S}$ است! ، پس:

$$def\ (def\ (R)) = \frac{r\,d\varphi}{\sigma\ a\ dr}$$

کافی است اثر ترکیبات سری و موازی این المان‌ها را اعمال کنیم. **توجه کنید که همیشه اول اثر سری بودن را اعمال می‌کنیم**. در نتیجه:

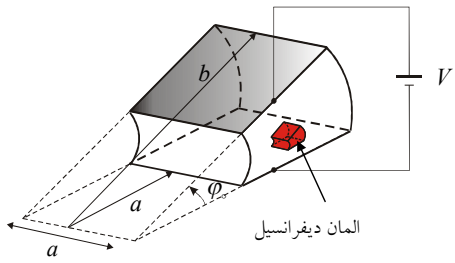
$$def\ (R) = \int_0^{\varphi_0} \frac{r\,d\varphi}{\sigma\ a\ dr} = \frac{r\,\varphi_0}{\sigma\ a\ dr}$$

حال ترکیب موازی المان‌ها را پیدا می‌کنیم:

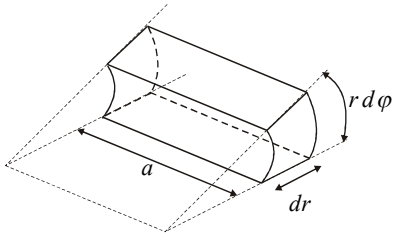
$$\frac{1}{R}=\int_a^b \frac{\sigma\, a\, dr}{r\,\varphi_\circ}=\frac{\sigma a}{\varphi_\circ}Ln\,\frac{b}{a}$$

پس:

$$R=\frac{\varphi_\circ}{\sigma\, a\, Ln\,\dfrac{b}{a}}$$



شکل ۳-۹۳ گوۀ مثال ۳-۶۸



شکل ۳-۹٤: المان دیفرانسیل

تمرین ۳-۲۹: مقاومت گوۀ شکل (۳-۹۳) را با این فرض که اختلاف پتانسیل بین دو سطحِ شعاع ثابت برقرار گردد، بیابید.

۳-۵-۴-۴- استفاده از ظرفیت خازنی برای محاسبۀ مقاومت و برعکس

نکتۀ طلایی

اگر ظرفیت خازنی سیستمی را محاسبه کرده باشیم، برای بدست آوردن مقاومت مشکل خاصی نداشته و کافی است از رابطۀ زیر استفاده نماییم:

$$RC=\frac{\varepsilon}{\sigma} \qquad (۶۳-۳)$$

به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۳-۶۹ مقاومت یک خازن کروی را بیابید.

حل: پیش از این و در رابطۀ (۲-۹۶) ظرفیت یک خازن کروی را به صورت زیر یافته‌ایم:

$$C=\frac{۴\pi\varepsilon}{\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}}$$

برای محاسبهٔ مقاومت از رابطهٔ (۳-۶۳) استفاده می‌کنیم:

$$RC=\frac{\varepsilon}{\sigma}\quad\rightarrow\quad R\times\frac{۴\pi\varepsilon}{\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}}=\frac{\varepsilon}{\sigma}\quad\Rightarrow\quad R=\frac{\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}}{۴\pi\sigma}$$

تذکر: هر یک از روش‌های فوق را بسته به شرایط به هر سیستمی می‌توان اعمال کرد. هدف ما از محاسبهٔ مقاومت خازن کروی (با استفاده از همهٔ روش‌ها) فقط به این دلیل بود که شما بتوانید مقایسهٔ درستی را بین این راه‌حل‌ها داشته باشید و بدین معنا که آنها فقط برای این مدل صادقند، نخواهد بود.

در مثال قبلی مقادیر ε و σ ثابت بودند. اگر اینطور نباشد باید از نکات زیر استفاده کرد:

نکتهٔ طلایی

۱- اگر نسبت ε به σ هنگامی که از لایه‌های درونی به لایه‌های خارجی حرکت می‌کنیم، **افزایش** یابد، باید نسبت $\frac{\varepsilon}{\sigma}$ را با قرار دادن مختصات **آخرین** لایهٔ خارجی به یک مقدار ثابت تبدیل کنیم.

نکتهٔ طلایی

۲- اگر نسبت ε به σ هنگامی که از لایه‌های درونی به لایه‌های خارجی حرکت می‌کنیم، **کاهش** یابد، باید نسبت $\frac{\varepsilon}{\sigma}$ را با قرار دادن مختصات **اولین** لایهٔ داخلی به یک مقدار ثابت تبدیل کنیم.

به مثال زیر توجه کنید تا اهمیت این نکات را درک کنید.

مثال ۳-۷۰ ظرفیت شکل (۳-۹۵) را بیابید.

حل: رسانندگی مقداری ثابت است، از اینرو طبق رابطهٔ (۳-۶۲) برای مقاومت خواهیم داشت:

$$R=\frac{\frac{۱}{a}-\frac{۱}{۲a}}{۴\pi\sigma_{\circ}}=\frac{۱}{۴\pi\sigma_{\circ}}\frac{۱}{۲a}$$

برای محاسبهٔ ظرفیت از رابطهٔ (۳-۶۳) استفاده می‌کنیم. پیش از آن به نسبت $\frac{\varepsilon}{\sigma}$ توجه خواهیم داشت:

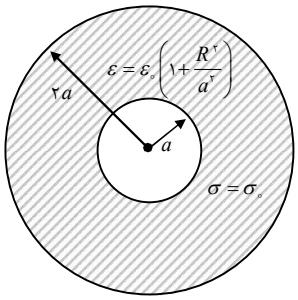
$$\frac{\varepsilon}{\sigma}=\frac{\varepsilon_{\circ}}{\sigma_{\circ}}(۱+\frac{R^{۲}}{a^{۲}})$$

کاملاً مشخص است که این نسبت با افزایش شعاع (یعنی حرکت به سمت لایه‌های خارجی) افزایش می‌یابد. از اینرو برای استفاده از رابطهٔ (۳-۶۳) مقدار این نسبت را در لایهٔ خارجی در نظر
خواهیم گرفت. یعنی:

$$\frac{\varepsilon}{\sigma}=\frac{\varepsilon_{\circ}}{\sigma_{\circ}}\left(۱+\frac{R^{۲}}{a^{۲}}\right)\Bigg|_{R=۲a}=\frac{۵\varepsilon_{\circ}}{\sigma_{\circ}}$$

پس طبق رابطهٔ (۳-۶۳) داریم:

$$RC=\frac{\varepsilon}{\sigma}\rightarrow\frac{۱}{۴\pi\sigma_{\circ}}\frac{۱}{۲a}\times C=\frac{۵\varepsilon_{\circ}}{\sigma_{\circ}}\rightarrow C=۴\circ\pi\varepsilon_{\circ}a$$



شکل ۳-۹۵: شکل مثال ۳-۷۰

مثال ۳-۷۱ دو کرهٔ هادی به شعاع a و به‌فاصلهٔ d از هم قرار دارند. با فرض اینکه ضریب هدایت الکتریکی فضا σ باشد، مقاومت بین دو کره را بدست آورید. (کارشناسی ارشد برق)

حل: در مثال‌های قبلی راهکارهای مختلفی را برای محاسبهٔ مقاومت ارائه دادیم، در این مثال از ضرایب پتانسیل استفاده می‌کنیم. طبق رابطهٔ (۲-۱۳۳)، پتانسیل در سطح هادی‌ها به صورت زیر است:

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{d}\right)$$
$$V_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{a}\right)$$

برای اختلاف پتانسیل داریم:

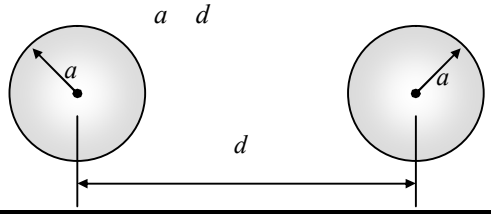
$$\Delta V = V_0 = V_1 - V_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{d}\right)$$

پس ظرفیت سیستم عبارتست از:

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{d}}$$

طبق رابطهٔ (۳-۶۳) داریم:

$$RC = \frac{\varepsilon}{\sigma} \rightarrow \frac{2\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{d}}\times R = \frac{\varepsilon_0}{\sigma} \rightarrow R = \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{d}}{2\pi\sigma}$$



شکل ۳-۹۶: شکل مثال ۳-۷۱

۳-۵-۵- سیستم‌های مقاومتی- خازنی

در برخی از سیستم‌ها گذردهی و ضریب هدایت الکتریکی به صورت همزمان داده شده‌اند. در این شرایط بررسی پتانسیل و جریان مستلزم مدلسازی الکتریکی سیستم است. توجه به این نکته حائز اهمیت است که در مدل مذکور مقاومت و خازن را موازی می‌گیریم. به مثال‌های زیر دقت کنید.

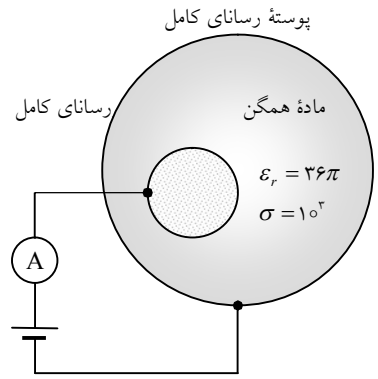
مثال ۳-۷۲ اگر آمپرمتر شکل (۳-۹۷)، ۱۰ آمپر را نشان دهد، مقدار بار جمع‌شده بـر روی کـرهٔ داخلی چند کولن بوده است؟ (کارشناسی ارشد برق ۸۰)

حل: مدار معادل الکتریکی مسئله را در شکل (۳-۹۸) مشاهده می‌کنید. طبق این شـکل (و البتـه همان رابطهٔ ۳-۶۳) داریم:

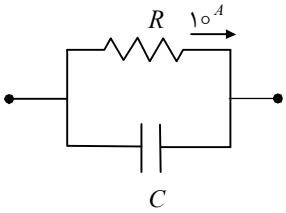
$$RC = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

برای رسیدن به پاسخ، کافی است کمی با روابط آشنای قبلی بازی کنیم. می‌دانیم کـه $Q = CV$ از طرفی مطابق شکل، $V = RI$ ، پس می‌توان نوشت:

$$Q = CV = CRI \Big|_{CR = \frac{\varepsilon}{\sigma} = ۱۰^{-۱۲} \times ۱۰ = ۱۰^{pc}}$$



شکل ۳-۹۷: شکل مثال ۳-۷۲



شکل ۳-۹۸: مدل الکتریکی مثال ۳-۷۲

مثال ۳-۷۳ در شکل (۳-۹۹)، شعاع کره‌های رسانای داخلی و خـارجی خـازن بترتیـب a و $۲a$ است. فضای میان دو کره تا شعاع $R = \frac{۳}{۲}a$ با ماده‌ای با رسانندگی $\sigma_۱$ و ضریب گذردهی $\varepsilon_۱$ و بقیهٔ آن با ماده‌ای با رسانندگی $\sigma_۲ = ۲\sigma_۱$ و ضریب گذردهی $\varepsilon_۲ = ۳\varepsilon_۱$ پر شده است. پتانسیل نقطـهٔ A واقع در $R = \frac{۳}{۲}a$ دقیقاً پس از وصل کلید، $t = ۰^{+}$ ، چقدر است؟ [۴]

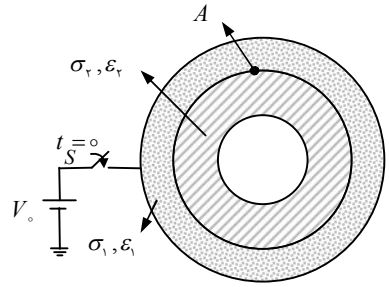
حل: مشابه مثال قبل عمل کرده و ابتدا مدار معادل الکتریکی سیستم را رسم می‌کنیم. (مشابه شکل ۳-۱۰۰) در مدار معادل، حلقهٔ خازنی داریم، پس ولتاژ در لحظهٔ خواسته شده از تقسیم ولتاژ بین خازن‌ها قابل محاسبه خواهد بود. برای این منظور کافی است ظرفیت خازن‌ها را محاسبه کنیم:

$$C_1 = \frac{4\pi\varepsilon_1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{3a/2}} = 12\pi\varepsilon_1 a$$

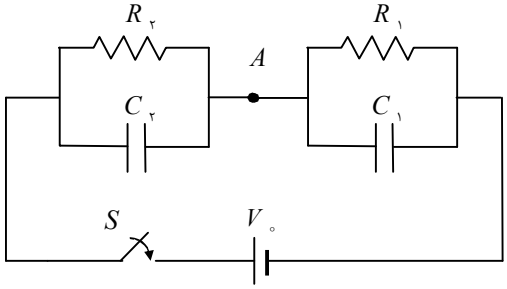
$$C_1 = \frac{4\pi\varepsilon_2}{\frac{1}{3a/2} - \frac{1}{2a}} = 72\pi\varepsilon_2 a$$

طبق تقسیم ولتاژ:

$$V_A\left(0^+\right) = \frac{C_2}{C_1 + C_2} V_0 = \frac{72\pi\varepsilon_2 a}{12\pi\varepsilon_1 a + 72\pi\varepsilon_2 a} V_0 = \frac{6}{7} V_0$$

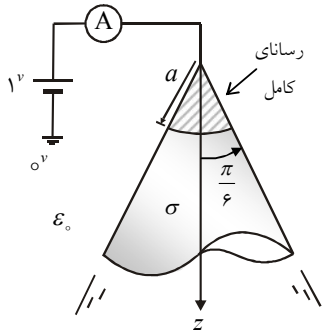


شکل ۳-۹۹: شکل مثال ۳-۷۳



شکل ۳-۱۰۰: مدل الکتریکی شکل ۳-۹۹

تمرین ۳-۳۰: ناحیهٔ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{6}$ از دستگاه مختصات کروی را در نظر بگیرید. بخش $R < a$ در این ناحیه با یک رسانای کامل و بخش $R \ge a$ این ناحیه با ماده‌ای به رسانایی $\sigma = 4^{\frac{S}{m}}$ پر شده است. اگر همانند شکل (۳-۱۰۱) رسانای کامل به منبع ولتاژ ایده‌آل ۱ ولت متصل شود، آمپرمتر چه جریانی را نشان خواهد داد؟ (کارشناسی ارشد برق ۸۶)



شکل ۳-۱۰۱: شکل تمرین ۳-۳۰

۳-۵-۶- اصل بقای بار و معادلهٔ پیوستگی

طبق رابطهٔ (۳-۵۲) جریان کل از انتگرال‌گیری از چگالی جریان بدست می‌آید:

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{ds} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dv$$

از طرفی طبق قضیهٔ دیورژانس:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{ds} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv$$

در نتیجه:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dv \;\rightarrow\; \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

پس:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \qquad (۶۴\text{-}۳)$$

رابطهٔ فوق را معادلهٔ پیوستگی گوییم و این معادله همواره در هر نقطهٔ یک محیط مادی برقرار است و از حل آن نتیجه می‌گیریم که:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (۶۵\text{-}۳)$$

که در آن ρ_0 چگالی بار در لحظهٔ $t = 0$ و τ ثابت زمانی (یا زمان واهلش) نامیده شده و برابر است با:

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma} \qquad (۶۶\text{-}۳)$$

سوال: رابطهٔ (۳-۶۵) چه می‌گوید؟

جواب: این رابطه نشان می‌دهد که اگر باری با چگالی ρ_0 در بخشی از فضا توزیع شود، مطابق تصور فیزیکی‌مان در ابتدا بارها به صورت غیریکنواخت پخش شده و این بارها آنقدر به هم نیرو وارد می‌کنند که پس از مدت زمان کوتاهی شکل یکنواختی را به خود می‌گیرند. پیش از این در تحلیل سیستم‌ها، حالت پایدار را در نظر می‌گرفتیم، یعنی $t \rightarrow \infty$ ، به همین دلیل است که اگر در رابطهٔ (۳-۶۴) بجای زمان، $t = \infty$ را قرار دهیم به $\rho = 0$ می‌رسیم. به مثال زیر توجه کنید تا این توضیحات را تکمیل کنیم:

مثال ۳-۷۴ در لحظهٔ $t=0$ کره‌ای به شعاع a با رسانایی ویژهٔ σ و گذردهی ε_0 به طور یکنواخت و با چگالی ρ_0 باردار شده است. می‌دانیم که به علت صفر نبودن σ این بار نهایتاً روی سطح کره ظاهر می‌شود. چگالی بار داخل کره، بار سطحی کره، میدان‌های داخل و خارج کره را بر حسب زمان بدست آورید. (کارشناسی ارشد برق)

حل: پیش از این مسائلی از این دست را بدون در نظر گرفتن زمان بررسی کرده‌ایم. در اینجا اثر حالت گذرا را در حل مسئله در نظر می‌گیریم. طبق معادلهٔ پیوستگی چگالی بار را به صورت $\rho=\rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ در نظر می‌گیریم. میدان را در داخل و خارج کره با استفاده ار قانون گاوس بدست می‌آوریم:

$$\mathbf{E}_i=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}R\,\mathbf{a}_R=\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}e^{-\frac{t}{\tau}}R\,\mathbf{a}_R \quad , \quad \mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$$

و این یعنی میدان داخل کره نیز با مرور زمان کم شده و نهایتاً به صفر می‌رسد. با توجه به اینکه کل بار داخل کره همواره برابر $\frac{4}{3}\rho_0\pi a^3$ است، پس:

$$\mathbf{E}_0=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,\mathbf{a}_R=\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 R^2}\,\mathbf{a}_R$$

پس میدان خارج کره در تمام زمان‌ها ثابت است. از آنجا که در خارج کره $\sigma=0$ و $J=0$ است، پس روی مرز $R=a$ ناپیوستگی مولفهٔ عمودی میدان باعث ایجاد چگالی بار سطحی ایجاد می‌شود:

$$\sigma_b=\varepsilon_0 E_0-\varepsilon_0 E_i=\frac{\rho_0 a^3}{3R^2}-\frac{\rho_0 a}{3}e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{\rho_0 a}{3}(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$$

و این یعنی چگالی بار در ابتدا صفر و در نهایت برابر $\frac{\rho_0 a}{3}$ خواهد بود.

مثال ۳-۷۵ ناحیهٔ $a\le R\le b$ در مختصات کروی از ماده‌ای با ضریب دی‌الکتریک ε_0 و ضریب رسانش σ پر شده است. بار Q_0 را در لحظهٔ $t=0$ بطور یکنواخت روی سطح $R=a$ قرار می‌دهیم. چگالی بار سطحی روی سطح $R=b$ را برای $t\ge 0$ بدست آورید.

حل: عایق غیرکامل است، پس بارِ روی سطح $R = a$ با رابطهٔ $Q = Q_\circ e^{-\frac{t}{\tau}}$ تغییر می‌کند. چگالی بار سطحی در مرز دو محیط را با استفاده از شرط مرزی $\rho_s = \left(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2\right) \cdot \mathbf{a}_n$ پیدا می‌کنیم. چگالی شار الکتریکی در فضا به صورت زیر است:

$$\mathbf{D}_{out} = \mathbf{D}_1 = \frac{Q_\circ}{4\pi b^2}\mathbf{a}_R \quad , \quad \mathbf{D}_{in} = \mathbf{D}_2 = \frac{Q_\circ e^{-\frac{t}{\tau}}}{4\pi b^2}\mathbf{a}_R$$

پس:

$$\rho_s = \frac{Q_\circ}{4\pi b^2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

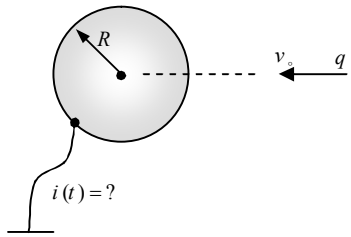
تمرین ۳-۳۱: یک خازن با صفحات موازی حاوی یک مادهٔ دی‌الکتریک غیر ایده‌آل با ثابت دی‌الکتریک ε_r و ضریب هدایت σ می‌باشد. بار الکتریکی اولیهٔ روی ورق‌های خازن برابر $Q_\circ$ و $-Q_\circ$ است. مساحت ورق‌های خازن S و فاصلهٔ بین آنها d می‌باشد.

الف) بار الکتریکی روی ورق‌های خازن را به صورت تابع زمان تعیین کنید.

ب) توان حرارتی کل تلف‌شده در خازن را یافته و نشان دهید که با انرژی الکتریکی اولیهٔ ذخیره شده در خازن برابر است.

فصل را با یک مثال ترکیبی مدار الکتریکی - الکترواستاتیکی - سینماتیکی (!) خاتمه می‌دهیم.

مثال ۳-۷۶: بار نقطه‌ای q با سرعت بسیار کم $v_\circ$ در امتداد یکی از شعاع‌های یک کرهٔ رسانا، به آن نزدیک می‌شود. کره با سیم بسیار نازکی به پتانسیل صفر متصل است. اگر قبل از حرکت، فاصلهٔ q با مرکز کره D بوده باشد و شعاع کره R فرض شود، جریان $i(t)$ قبل از رسیدن q به کره را بیابید. (کارشناسی ارشد برق ۸۰)



شکل ۳-۱۰۲: شکل مثال ۳-۷۶

حل: اگر بار q در لحظهٔ t در فاصلهٔ x از مرکز کره قرار داشته باشد، بار القایی در کره برابر خواهد بود با:

$$Q' = -\frac{R}{x}q$$

که در این رابطه، $x = D - v_\circ t$ می‌باشد. پس با مشتق گیری از بار القایی، جریانی که به کره وارد می‌گردد را

محاسبه می‌کنیم:

$$i(t)=\frac{dQ'}{dt}=\frac{d}{dt}\left(-\frac{R\,q}{D-v_{\circ}t}\right)=-\frac{R\,q\,v_{\circ}}{\left(D-v_{\circ}t\right)^{۲}}$$

۳-۶- مسائل پایان فصل

مثال کلیدی

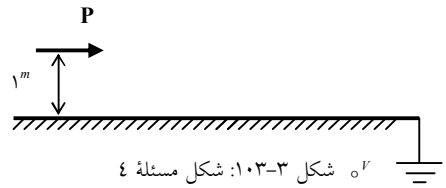
۱- کرهٔ فلزی به شعاع a مفروض است. بار سطحی یکنواخت ρ_s روی سطح کره‌ای به شعاع b ($b>a$) هم‌مرکز با کره فلزی در فضای آزاد حضور دارد. اگر کره فلزی بدون بار باشد، چه پتانسیلی روی آن القاء می‌شود؟

۲- نیم‌فضای $z<\circ$ رسانای کامل است. یک بارِ رشته‌ای با چگالی خطی یکنواخت λ موازی با صفحهٔ xoy و به فاصلهٔ ۱ متری از آن و در صفحهٔ xoz قرار دارد. مقدار بار القاء شده در فاصلهٔ نواری شکل $|y|\leq ۱$ و بر واحد طول آن چند کولن است؟

۳- یک حلقهٔ با چگالی بار خطی یکنواخت ρ_ℓ به شعاع d هم‌مرکز با کرهٔ هادی به شعاع a می‌باشد، ($d>a$) کره در پتانسیل صفر قرار دارد. چگالی بار خطی حلقهٔ تصویر چقدر است؟

۴- یک دوقطبی الکتریکی دیفرانسیلی با گشتاور $|\mathbf{P}|=۳$ کولن‌متر از نقطه‌ای در بی‌نهایت به فاصلهٔ یک متری از یک صفحهٔ فلزی نامتناهی منتقل می‌شود. فرض کنید همانند شکل (۳-۱۰۳) صفحهٔ فلزی زمین‌شده و دوقطبی به موازات آن استقرار یافته باشد. کار انجام شده توسط عامل خارجی چند ژول بوده است؟

۵- نیم‌فضای $z<\circ$ رسانای کامل است. یک بارِ رشته‌ای با چگالی خطی یکنواخت $\lambda\, e^{-z^{۲}}$ موازی با صفحهٔ xoy و به فاصلهٔ ۱ متری از آن و در صفحهٔ xoz قرار دارد. مقدار بار القاء شده در فاصلهٔ نواری شکل $|y|\leq ۱$ و بر واحد طول آن چند کولن است؟ (کارشناسی ارشد برق)



شکل ۳-۱۰۳: شکل مسئلهٔ ٤

مثال کلیدی

۶- سه کره فلزی نازک هم‌محور به ترتیب دارای شعاع‌های R_1، R_2 و R_3 هستند. محیط بین کره‌ها فضای آزاد است. بار Q_2 روی کره هادی میانی قرار داده می‌شود. کره‌های داخلی و خارجی به زمین وصل شده‌اند.

الف) بار القائی Q_1 روی کره داخلی را تعیین کنید.

ب) بار القائی Q_3 روی کره خارجی را بدست آورید.

ج) پتانسیل V_2 کره میانی را تعیین کنید.

۷- ناحیه $-d < z < d$ دارای بار یکنواختی با چگالی $\rho_0 \ {}^{c}/_{m^3}$ است. مطلوب است محاسبه پتانسیل در تمام فضا با استفاده از روش های زیر:

الف) استفاده از صفحه بار. **ب)** با استفاده از قانون گاوس.

پ) با استفاده از روش لاپلاس.

۸- خازن متغیری با عایق هوا، بطور خطی از ۲۵ تا ۳۵۰ پیکوفاراد به ازای چرخش θ از صفر تا ۱۸۰ درجه، ۹۰ تغییر می‌کند. چنانچه اختلاف پتانسیل دو سر خازن $V = 400^V$ باشد، گشتاور نیروی اعمالی به هر یک از صفحات خازن در $\theta = 90$ درجه، چقدر است؟

۹- بار سطحی یکنواخت ρ_s روی سطح کره‌ای به شعاع R_1 هم مرکز با کره‌ای فلزی با پتانسیل V_0 به شعاع a پخش شده است، ($R_1 > a$) مطلوب است محاسبهٔ پتانسیل در فضای $a < R < R_1$.

۱۰- صفحهٔ $z = 0$ به نوارهایی در امتداد محور y تقسیم شده و یک در میان پتانسیل $+70$, -70 به نوارها اعمال شده است. عرض هر نوار $\frac{a}{2}$ است. میدان را در فضای $z > 0$ بیابید.

۱۱- ولتاژ V_0 به در سر خازن استوانه‌ای به طول l اعمال شده است. شعاع هادی‌های درونی و بیرونی به ترتیب a و b است. فضای بین هادی‌ها با دو دی‌الکتریک متفاوت دارای اتلاف با گذردهی ε_1 و رسانندگی σ_1 در ناحیه $a < r < c$ و گذردهی ε_2 و رسانندگی σ_2 در ناحیه $c < r < b$ پر شده است.

الف) چگالی جریان را در هر ناحیه تعیین کنید.

ب) چگالی بار سطحی روی هادی‌های درونی و بیرونی و فصل مشترک بین این دو دی‌الکتریک را تعیین کنید.

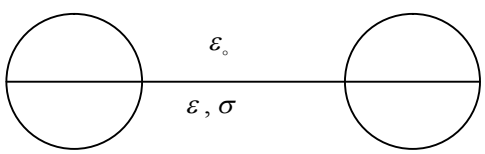
پ) مقاومت و ظرفیت خازن را بیابید.

۱۲- در مختصات کروی فضاهای $R < a$ و $a < R < b$ به ترتیب از محیط‌هایی با ضرایب رسانش و دی‌الکتریک σ_1 و ε_1 و نیز σ_2 و ε_2 پر شده است. بار سطحی یکنواخت ρ_S را درلحظهٔ $t = 0$ در مرز محیط قرار داده‌ایم. چگالی جریان دو محیط را بیابید.

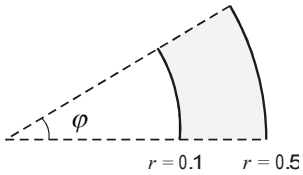
۱۳- دو استوانه طویل به شعاع a به فاصله $d >> a$ تا نیمه در خاکِ با ضریب هدایت الکتریکی σ و ضریب دی‌الکتریک ε فرو رفته‌اند. خازن و مقاومت بین دو استوانه را بدست آورید.

۱۴- یک کره هادی کامل به شعاع a در محیط بسیار بزرگی با رسانایی ویژه σ و گذردهی ε قرار دارد. مقاومت بین این کره و یک هادی واقع در بی‌نهایت را بدست آورید.

۱۵- با دفن یک هادی نیم کروی به شعاع 25^{mm} در زمین به صورتی که قاعده آن به سمت بالا قرار می‌گیرد، یک اتصال زمین ساخته شده است. با فرض اینکه رسانندگی زمین $10^{-6}\ (S/m)$ باشد. مقاومت بین هادی و نقاط بسیار دور در زمین را بیابید. (کارشناسی ارشد آزاد ۸۲)



شکل ۳-۱۰۴: شکل مسئلهٔ ۱۳

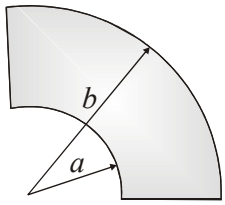


شکل ۳-۱۰۵: شکل مسئلهٔ ۱۶

۱۶- در شکل (۳-۱۰۵) (که یک گوه می‌باشد)، مقاومت الکتریکی بین سطح $r = 0.1^m$ و $r = 0.5^m$ چقدر است؟ ارتفاع گوه $h = 0.1^m$ ، زاویه آن $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ و ضریب هدایت الکتریکی بین دو سطح $\sigma = 2r\cos\varphi$ می‌باشد. (کارشناسی ارشد برق)

مثال کلیدی

۱۷- مقاومت قطعه نشان داده شده در شکل مقابل را در حالات زیر محاسبه کنید: (رسانندگی را σ و ضخامت قطعه را h بگیرید)



الف) اختلاف ولتاژ دو سر $\varphi = 0$ و $\varphi = \frac{\pi}{2}$ قرار گیرد.

ب) اختلاف ولتاژ دو سر $r = a$ و $r = b$ قرار گیرد.

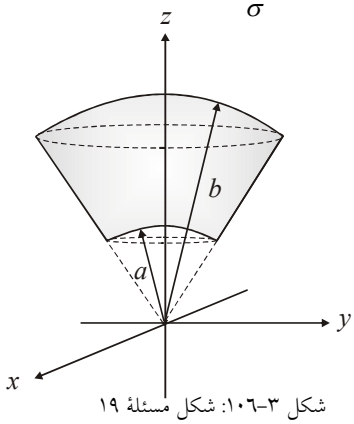
پ) چرا جواب قسمت‌های الف و ب متفاوت است؟

۱۸- فضای بین دو ورق هادی موازی با مادهٔ دی‌الکتریک دارای ضریب مقاومت $\rho = \frac{1}{\sigma} = 10^{6}\ (\Omega - m)$ و ثابت دی‌الکتریک $\varepsilon_r = 1$ پر شده است. فاصلهٔ بین دو ورق هادی برابر $d = 0.05^{m}$ بوده و طول ورق برابر $\ell = 0.1^{m}$ و پهنایش برابر $W = 0.1^{m}$ است. در لحظهٔ $t = 0$ یک بار الکتریکی برابر $Q = 10^{-6}$ کولن بطور یکنواخت روی ورق فوقانی توزیع شده و در تمام این مدت ورق پایینی به زمین وصل شده است. با فرض اینکه میدان بین دو ورق یکنواخت باشد، چگالی جریان را به صورت یک تابع موقعیت داخل دی‌الکتریک بیابید.

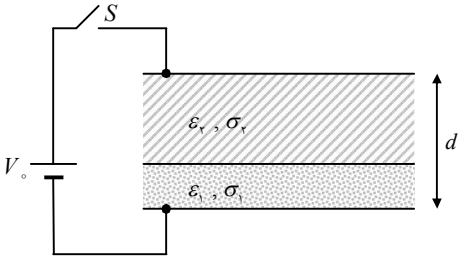
۱۹- مطلوب است محاسبه مقاوت مخروط شکل (۳-۱۰۶) .

۲۰- در شکل (۳-۱۰۷) کلید S برای مدت طولانی بسته بوده و در زمان صفر باز می‌شود. ولتاژ دو سر خازن را پس از باز شدن کلید بیابید. [۴]

۲۱- در لحظهٔ $t = 0$ درون یک جسم هادی با رسانایی ویژهٔ σ و نفوذپذیری ε_0 بارالکتریکی بطور یکنواخت با چگالی حجمی ثابت ρ_0 رها می‌شود. در لحظهٔ $t = \frac{\varepsilon_0}{\sigma} Ln\,2$ درون کره‌ای به شعاع a چقدر بار وجود خواهد داشت؟

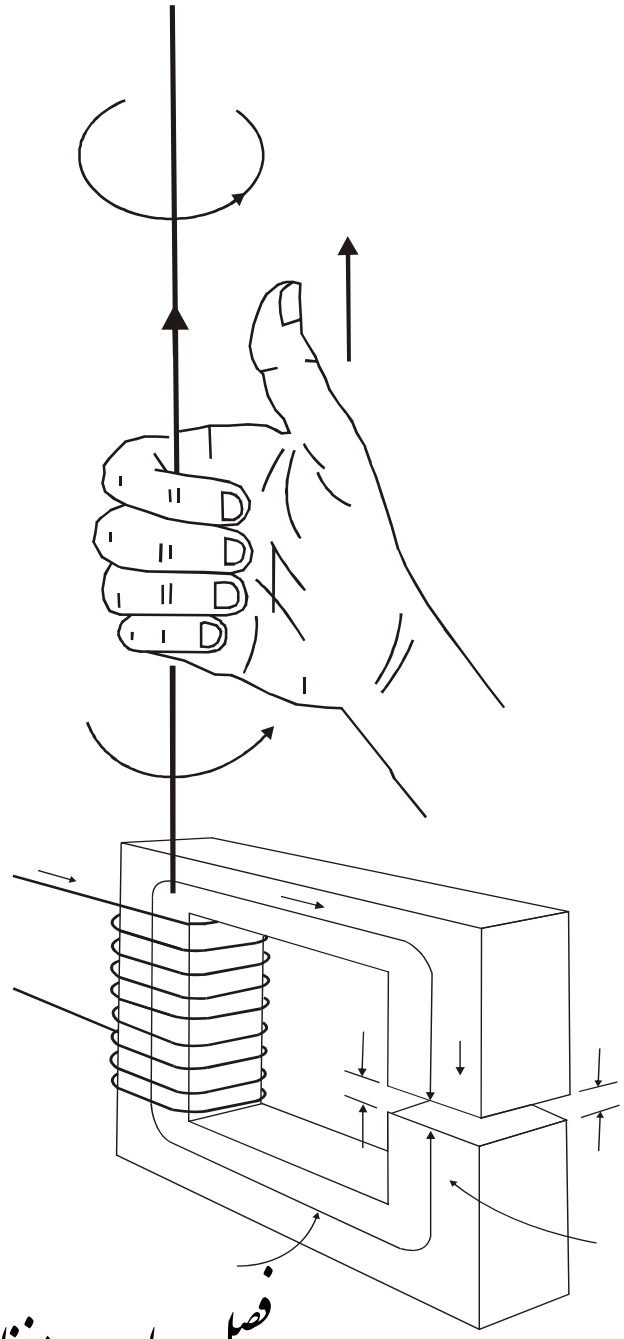


شکل ۳-۱۰۶: شکل مسئلهٔ ۱۹



شکل ۳-۱۰۷: شکل مسئلهٔ ۲۰

یادداشت: .....



فصل چهارم : مغناطیس ساکن

فصل چهارم: مغناطیس ساکن

- انواع توزیع جریان
  - بار مغناطیسی، تئوری مغناطیسی مواد
  - توزیع خطی
  - توزیع سطحی
  - توزیع حجمی
  - توزیع‌های معادل ناشی از مغناطش
- کمیات مرتبط با توزیع جریان
  - میدان
    - قانون بیوساوار
    - قانون آمپر
  - پتانسیل
    - پتانسیل مغناطیسی
    - پتانسیل مغناطیسی عددی
  - چگالی شار مغناطیسی
- کمیات مرتبط با مکان توزیع جریان
  - مدار مغناطیسی
  - شار متقابل
  - شرایط مرزی میدان‌های مغناطیسی
- موارد ترکیبی
  - اندوکتانس و اندوکتانس متقابل
  - انرژی
  - نیرو و گشتاور
  - دوگانی الکترواستاتیک و مغناطیس
- مسائل پایان فصل

۴-۱- مقدمه

در فصل دوم با میدان‌های الکتریکی ساکن آشنا شده و کمیت‌های مختلف مربوط به آنها را بررسی کردیم. همانطور که مشاهده شد، در این دسته میدان‌ها، بارهای الکتریکی ساکن به عنوان عامل اصلی تولید میدان شناخته می‌شوند. در فصل سوم در ضمنِ بیان جریان‌های الکتریکی دائم، گریزی هر چند کوچک به این فصل زده شد، در حقیقت ذکر شد که بارهای متحرک، عامل اصلی ایجاد میدان‌های مغناطیس ساکن‌اند. (در فصل پنجم یکی دیگر از عوامل ایجاد میدان‌های مغناطیسی و الکترواستاتیکی را بررسی خواهیم نمود) در این فصل قصد داریم تا با آشنایی کامل با میدان‌های مغناطیسی ساکن، کمیت‌های مرتبط با این حوزه را شناخته و آنها را به سیستم‌های واقعی اعمال کنیم. لازم به ذکر است که میدان‌های مغناطیسی را می‌توان (از نظرگاه عملی) مهمترین بخش الکترومغناطیس دانست، چرا که تقریبا همه دستگاه‌های الکتریکی (و حتی الکترونیکی) در ساختار خود از این میدان بهره گرفته‌اند. (ماشین‌های الکتریکی، سیستم‌های توزیع و انتقال انرژی، دستگاه‌های اندازه‌گیری و ...) از این جهت در این فصل، توضیحاتی عملی را پیرامون میدان‌ها و مواد مغناطیسی نیز ارائه می‌کنیم. اگر چه مغناطیس ساکن بحث جدیدی است ولی تناظر بسیاری بین آن و الکترواستاتیک وجود دارد، پس اگر الکترواستاتیک را به خوبی می‌دانید، نگران یادگیری مغناطیس ساکن نباشید. باید توجه داشته باشید که این ارتباط به حدی قوی است که دانستن الکترواستاتیک به مفهوم پیمودن بیش از ۷۰ درصد مسیر یادگیری مغناطیس ساکن است. سعی کنید مطالب مطرح‌شده را به مباحث فصل دوم مرتبط کنید، ما نیز با ارائهٔ جدول‌های مقایسه‌ای که به‌صورت پیوسته در ضمنِ فصل آمده‌اند در این راه به شما کمک می‌کنیم. در پایان فصل نیز قاعدهٔ دوگانی بررسی شده که این تناظر را به صورت سیستماتیک و به گونه‌ای ضابطه‌مند مطرح می‌کند، با این حال انتظار داریم که شما (با توجه به جدول‌های ارائه شده) پیش از رسیدن به بحث دوگانی خود بتوانید این تناظر را تشخیص دهید.

در ادامه، با بیان اصول موضوعی مغناطیس ساکن، شرایط لازم و کافی برای اینگونه میدان‌ها را شناخته و سپس با بررسی قانون بیوساوار (که مشابه قانون کولن است) چگونگی محاسبهٔ میدان‌های مغناطیسی ساکن را فرا می‌گیریم. پس از آن قانون مداری آمپر بیان خواهد شد، تا با استفاده از آن بتوانید، برخی از میدان‌ها را ساده‌تر محاسبه کنید (که مشابه قانون گاوس است). بقیهٔ موارد را از دوگانی موجود حدس بزنید. (پتانسیل مغناطیسی به‌جای پتانسیل الکتریکی، مغناطش به‌جای قطبیدگی، نیروی مغناطیسی به‌جای نیروی الکتریکی، شار مغناطیسی به‌جای شار الکتریکی، اندوکتانس به‌جای خازن و ...)

۴-۲- اصول موضوعی مغناطیس ساکن در فضای آزاد

همانطور که در فصل دوم دیدیم، اصول موضوعی هر سیستمی، شرایط لازم و کافی برای برقراری آن سیستم را روایت می‌کند. باید توجه داشته باشید، که کمیات منبع در مغناطیس ساکن، بارهای متحرک (یعنی جریان‌های الکتریکی) هستند، از اینرو حضور آنها در این روابط اجتناب ناپذیر است. کمیات میدان نیز شامل شدت میدان مغناطیسی ($\mathbf{H}$) و چگالی شار مغناطیسی ($\mathbf{B}$) خواهند بود، با این تفاسیر می‌توان اثبات کرد که:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0} \qquad (۴-۱)$$

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}} \qquad (۴-۲)$$

که در آن μ_0 نفوذپذیری فضای آزاد بوده و برابر است با:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \quad (\frac{H}{m})$$

واحد آن نیز، هانری بر متر است (توجه داشته باشید که واحد گذردهی فضای آزاد (ε) فاراد بر متر می‌باشد) در ضمن، همانطور که ذکر شد، $\mathbf{B}$ چگالی شار مغناطیسی بوده که بر حسب $\frac{A}{m^2}$ بیان می‌شود و هدف اصلی فصل نیز محاسبهٔ این کمیت است.

برای اینکه بدانیم، چه نوع جریان‌هایی می‌توانند میدان مغناطیسی ساکن ایجاد کنند، کافیست از رابطهٔ (۴-۲) دیورژانس بگیریم:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{J}) \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \qquad (۴-۳)$$

نکتهٔ طلایی

و این یعنی، فقط جریان‌هایی میدان مغناطیسی ساکن ایجاد می‌کنند که دیورژانس چگالی آنها، صفر باشد، طبیعتاً اگر جریانی اینگونه نباشد، میدان مغناطیسی ایجاد می‌کند ولی آن میدان ساکن نیست!

روابط (۴-۱) و (۴-۲) شکل دیفرانسیلی اصول موضوع هستند، برای رسیدن به فرم انتگرالی آنها کافیست از قضایای استوکس و دیورژانس استفاده کنیم، مثلاً با اعمال قضیهٔ استوکس به رابطهٔ (۴-۲) داریم:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \xrightarrow{stoke's} \oint_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \qquad (۴-۴)$$

رابطهٔ اخیر شکلی از قانون مداری آمپر است که در آینده به‌صورت کامل بیان خواهد شد. از طرفی با اعمال قضیهٔ دیورژانس به رابطهٔ (۴-۱) داریم:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \xrightarrow{div} \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \qquad (۴-۵)$$

از این رابطهٔ نتیجه می‌گیریم که هیچ منبع شار مغناطیسی وجود نداشته و خطوط شار مغناطیسی در خود بسته می‌شوند. (آیا می‌توانید ارتباط این بیان را با دلیل عدم توانایی دیورژانس در یافتن منبع میدان‌های برداری دریابید؟)

جدول‌های (۴-۱) و (۴-۲) ارتباط بین اصول موضوع میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را نشان می‌دهند.

جدول ۴-۱: تناظر بین فرم‌های نقطه‌ای اصول موضوعی دو میدان

فرم نقطه‌ای روابط	
اصول موضوع الکترواستاتیک	**اصول موضوع مغناطیس ساکن**
$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$

جدول ۴-۲: تناظر بین فرم‌های انتگرالی اصول موضوعی دو میدان

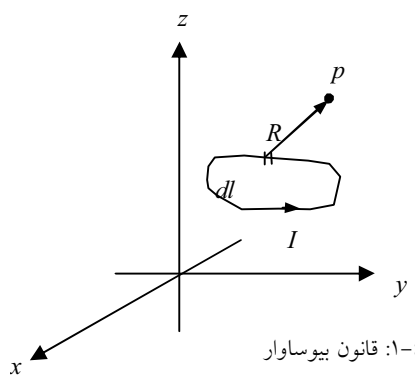
فرم انتگرالی روابط	
اصول موضوع الکترواستاتیک	**اصول موضوع مغناطیس ساکن**
$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$	$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$
$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$

۴-۳- قانون بیوساوار

قانون بیوساوار در مغناطیس معادل قانون کولن در حوزهٔ الکترواستاتیک است. شاید به جرات بتوان گفت که برای بررسی و محاسبهٔ تمام کمیت‌های موجود در مغناطیس ساکن دانستن این قانون کفایت می‌کند، از اینرو توجه زیادی را به آن مبذول دارید.

فرض کنید در بخشی از فضا جریان I مطابق شکل(۴-۱) برقرار باشد. در این صورت برای محاسبهٔ میدان مغناطیسی ناشی از این حلقه در هر نقطه‌ای از فضا، المانی از تغییرات دیفرانسیلی مسیر را انتخاب کرده و به نقطهٔ میدان وصل می‌کنیم. حال با استفاده از رابطهٔ زیر که مشهور به قانون بیوساوار است، میدان را در هر نقطهٔ دلخواهی از فضا می‌یابیم.

$$\boxed{\mathbf{H} = \oint_C \frac{I\ \mathbf{dl} \times \mathbf{a}_R}{۴\ \pi\ R^۲}} \qquad (۶-۴)$$



شکل ٤-۱: قانون بیوساوار

و اگر مطابق مطالب فصل سوم جریان‌های سطحی و حجمی داشته باشیم:

$$\mathbf{H} = \oint_S \frac{\mathbf{K}\ ds \times \mathbf{R}}{۴\ \pi\ R^۳} \qquad (۷-۴)$$

$$\mathbf{H} = \oint_V \frac{\mathbf{J}\ dV \times \mathbf{R}}{۴\ \pi\ R^۳} \qquad (۸-۴)$$

برای محاسبهٔ میدان مغناطیسی با استفاده از قانون بیوساوار به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱- بردار مکان را پیدا کرده و اندازه‌اش را حساب می‌کنیم.

۲- المان $I\ \mathbf{dl}$ (یا $\mathbf{K}\ ds$ و یا $\mathbf{J}\ dV$) را با توجه به دستگاه انتخاب شده پیدا می‌نماییم.

۳- جهت نهایی میدان را تقریب می‌زنیم.

۴- حاصلضرب خارجی موجود را می‌یابیم.

۵- انتگرال را محاسبه می‌کنیم.

در ادامه میدان‌ها را با توجه به نوع توزیع جریان تقسیم‌بندی کرده و بررسی می‌کنیم، اما پیش از آن به تفاوت بین قانون کولن و قانون بیوساوار در جدول (۴-۳) توجه کنید.

جدول ۴-۳: تناظر بین قانون کولن و قانون بیوساوار

تناظر بین میدان‌ها	
قانون کولن (الکترواستاتیک)	**قانون بیوساوار (مغناطیس)**
$\mathbf{E}=\int \frac{\rho_l\, dl}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{\mathbf{R}}{\lvert\mathbf{R}\rvert^3}$	$\mathbf{B}=\oint_C \frac{\mu_\circ I\, \mathbf{dl}\times\mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$

۴-۳-۱- میدان‌های ناشی از توزیع جریان‌های خطی

اگر چه با توجه به ماهیت جریان الکتریکی و با توجه به ساختار سیستم‌های مورد بررسی نمی‌توانیم فرق چندانی بین انواع توزیع جریان ایجاد کنیم (مثلاً یک توزیع حجمی یا سطحی در فاصله‌ای دور به‌صورت خطی دیده می‌شود و یا یک توزیع خطی در داخل خود به‌صورت حجمی توزیع شده) با این حال، با کمی اغماض، مثال‌های زیر را از نوع توزیع خطی فرض می‌کنیم.

مثال ۴-۱ شدت میدان مغناطیسی را در نقطهٔ P بیابید. (کارشناسی ارشد)

حل:

۱) ابتدا بردار $\mathbf{R}$ را می‌یابیم: $\mathbf{R}=-z\,\mathbf{a}_z+r\,\mathbf{a}_r$ ، $\lvert\mathbf{R}\rvert=(z^2+r^2)^{\frac{1}{2}}$

۲) برای المان $I\,\mathbf{dl}$ داریم: $I\,\mathbf{dl}=I\,dz\,\mathbf{a}_z$

۳) جهت نهایی میدان: اگر سیم را مطابق شکل (۴-۳) در دست بگیریم بر طبق قاعدهٔ دست راست بدیهی خواهد بود که میدان در نقطهٔ مورد نظر در جهت $\mathbf{a}_\varphi$ خواهد بود.

۴) حاصلضرب خارجی: $I\,\mathbf{dl}\times\mathbf{R}=I\,dz\,\mathbf{a}_z\times\left(-z\,\mathbf{a}_z+r\,\mathbf{a}_r\right)=r\,dz\,\mathbf{a}_\varphi$

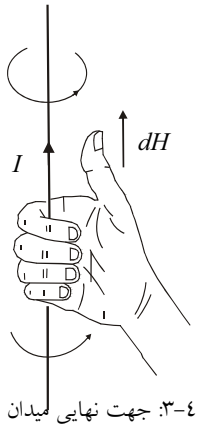
۵) حال بر طبق رابطهٔ (۴-۶) به محاسبهٔ انتگرال می‌پردازیم:

$$\mathbf{H}=\oint_C \frac{I\ \mathbf{dl}\times\mathbf{a}_R}{4\pi R^2}=\frac{I}{4\pi}\int_{-z_1}^{z_2}\frac{r\ dz\ \mathbf{a}_\varphi}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{I}{4\pi}\left[\frac{z_2}{(z_2^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{z_1}{(z_1^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}\right]\mathbf{a}_\varphi$$

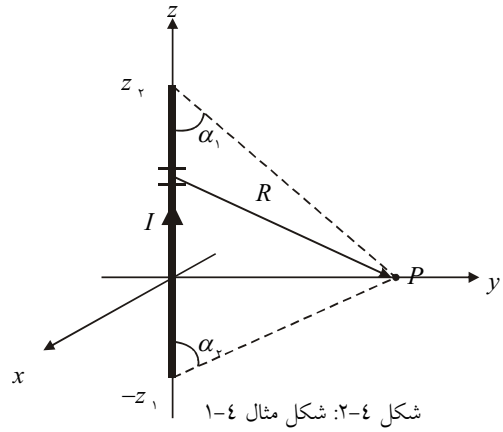
$$\boxed{\mathbf{H}=\frac{I}{4\pi r}\left(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2\right)\ \mathbf{a}_\varphi} \qquad (۹-۴)$$

و برای چگالی شار مغناطیسی داریم:

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2\right)\ \mathbf{a}_\varphi \qquad (۱۰-۴)$$



شکل ٤-۳: جهت نهایی میدان



شکل ٤-۲: شکل مثال ٤-۱

روابط (۴-۹) و (۴-۱۰) از جمله روابط پرکاربرد در مغناطیس ساکن‌اند، از اینرو یادگیری آنها اهمیت فراوانی دارد. مثال‌های (۴-۲) و (۴-۳) و همچنین تمرین (۱-۱) کاربردهای این روابط را نشان می‌دهند.

مثال ۴-۲ سیمی حامل جریان I به‌صورت نشان داده شده در شکل(۴-۴) ایجاد شده است. میدان مغناطیسی را در مبداء بیابید. (کارشناسی ارشد برق ۷۳)

حل: از رابطهٔ (۴-۹) استفاده می‌کنیم:

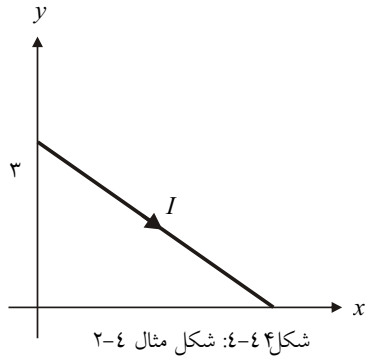
$$H=\frac{I}{4\pi r}\left(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2\right)$$

کافیست زوایای $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ و همچنین مقدار r را بیابیم. برای این منظور به شکل (۴-۵) توجه کنید:

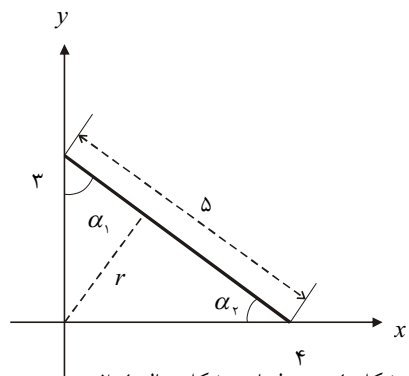
$$\cos\alpha_۱ = \frac{۴}{۵} \quad ، \quad \cos\alpha_۱ = \frac{۳}{۵}$$

برای محاسبهٔ r از مساحت کمک می‌گیریم:

$$r \times ۵ = ۳ \times ۴ \;\rightarrow\; r = \frac{۱۲}{۵}$$



شکل۴ ٤-٤: شکل مثال ٤-۲



شکل ٤-٥: مدلسازی شکل مثال ٤-۲

پس:

$$H = \frac{I}{۴\pi \times \frac{۱۲}{۵}}\left(\frac{۳}{۵} + \frac{۴}{۵}\right) = \frac{۷I}{۴۸\pi}$$

برای جهت میدان هم با استفاده از قانون دست راست در مبداء داریم: $-\mathbf{a}_z$

پس:

$$\mathbf{H} = \frac{-۷I}{۴۸\ \pi}\ \mathbf{a}_z$$

مثال ۴-۳ با استفاده از رابطهٔ (۴-۱۰) چگالی شار مغناطیسی را برای یک کابل بی‌نهایت محاسبه کنید.

حل: در این صورت زاویه‌های $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ به سمت صفر میل می‌کنند از اینرو:

$$\cos\alpha_۱ = \cos\alpha_۲ = ۱$$

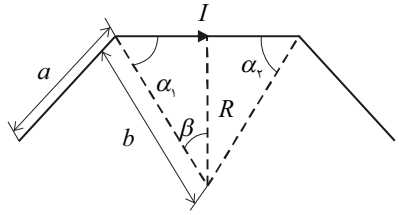
پس:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ I}{۲\,\pi\, r}\ \mathbf{a}_\varphi \qquad (۱۱\text{-}۴)$$

مثال ۴-۴ شدت میدان مغناطیسی را در مرکز یک N ضلعی منتظم به ضلع a و حامل جریان I محاسبه کنید. (کارشناسی ارشد برق)

حل: میدان ناشی از یک ضلع را بدست آورده و سپس N برابر می‌کنیم تا میدان ناشی از تمام اضلاع بدست آید. با توجه به شکل (۴-۶) داریم:

$$\begin{cases} H_۱ = \dfrac{I}{۴\,\pi\, R}\left(\cos\alpha_۱ + \cos\alpha_۲\right) \xrightarrow{\alpha_۱ = \alpha_۲} H_۱ = \dfrac{I}{۲\,\pi\, R}\cos\alpha_۱ \\ \cos\alpha_۱ = \sin\beta = \sin\dfrac{\pi}{N} \end{cases}$$



شکل ٤-٦: شکل مثال ٤-٤

پس:

$$H_۱ = \frac{I}{۲\,\pi\, b\ \cos\beta}\sin\beta = \frac{I}{۲\,\pi\, b}\tan\beta$$

$$H = N\, H_۱ = \frac{N\, I}{۲\,\pi\, b}\tan\beta$$

تمرین ۴-۱: شدت میدان مغناطیسی ناشی از یک N ضلعی منتظم را در نقطه‌ای به فاصلهٔ h روی محور و بالای N ضلعی بیابید.

همانند میدان‌های الکتریکی ساکن در مغناطیس نیز گونهٔ دیگری از توزیع‌های خطی توزیع در حلقه است. مثال زیر این مورد را بررسی می‌کند.

مثال ۴-۵ چگالی شار مغناطیسی را در نقطه‌ای روی محور یک حلقه دایره‌ای به شعاع r و حامل جریان I ، پیدا کنید.

حل: از شکل (۴-۷) استفاده می‌کنیم:

۱) ابتدا بردار $\mathbf{R}$ را می‌یابیم: $\mathbf{R} = -r\ \mathbf{a}_r + z\ \mathbf{a}_z$ ، $|\mathbf{R}| = (z^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}$

۲) برای المان $I\,\mathbf{dl}$ داریم: $I\ \mathbf{dl} = I\ r\ d\varphi\ \mathbf{a}_\varphi$

۳) جهت نهایی میدان: اگر سیم را مطابق شکل (۴-۸) در دست بگیریم بر طبق قاعدهٔ دست راست میدان در نقطهٔ مورد نظر در جهت z خواهد بود. در واقع با توجه به شکل (۴-۷) می‌توان گفت که مولفه‌های dH_r یکدیگر را حذف می‌کنند.

۴) حاصلضرب خارجی:

$$I\ \mathbf{dl} \times \mathbf{R} = I\ r\ d\varphi\ \mathbf{a}_\varphi \times (-r\ \mathbf{a}_r + z\ \mathbf{a}_z) = I\,r\,z\ d\varphi\ \mathbf{a}_r + I\,r^2 d\varphi\ \mathbf{a}_z$$

۵) حال بر طبق رابطهٔ (۴-۶) به محاسبهٔ انتگرال می‌پردازیم:

$$\mathbf{B} = \oint_C \frac{\mu_\circ I\ \mathbf{dl} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} = \frac{\mu_\circ I}{4\pi} \int_\circ^{2\pi} \frac{r\ z\ d\varphi\ \mathbf{a}_r + r^2 d\varphi\ \mathbf{a}_z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

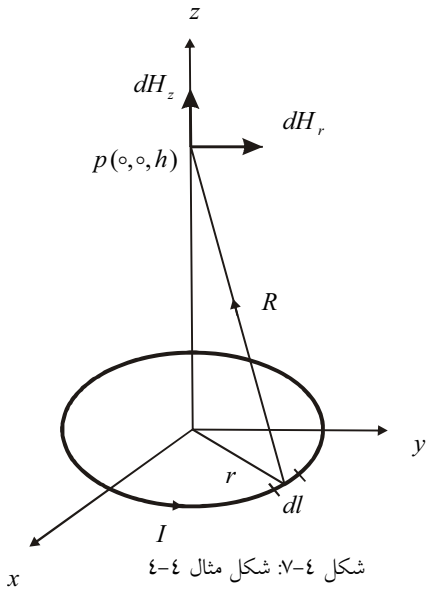
که پس از محاسبه خواهیم داشت:

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ I\ r^2}{2\,(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathbf{a}_z} \qquad (۱۲\text{-}۴)$$

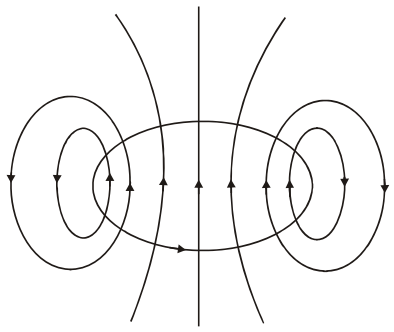
و اگر این نقطه در $z = \circ$ قرار داشت:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ I}{2\,r}\,\mathbf{a}_z \qquad (۱۳\text{-}۴)$$

همانطور که پیش‌بینی کردیم جهت نهایی میدان $+\mathbf{a}_z$ بود. این موضوع را از روی خطوط شار رسم شده در شکل (۴-۸) نیز می‌توان فهمید.

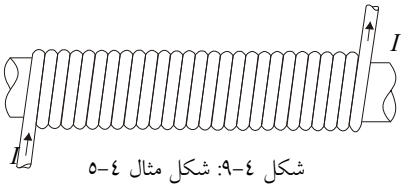


شکل ٤-٧: شکل مثال ٤-٤



شکل ٤-٨: جهت نهایی میدان

مثال ۴-۶ یک سلونوئید با طول ℓ و شعاع a دارای N دور سیم که حامل جریان Iاند می‌باشد. میدان را در داخل سلونوئید بیابید. (کارشناسی ارشد آزاد ۸۳)



شکل ٤-٩: شکل مثال ٤-٥

حل: شکل (۴-۹) را در نظر بگیرید: با این فرض که حلقه‌ها به‌صورت دایره قرار گرفته‌اند و هیچ زاویه‌ای ندارند می‌توان از رابطهٔ (۴-۱۲) در این مثال استفاده کرد. میدان در هر نقطه را ناشی از حلقه‌های زیرین و فوقانی آن نقطه می‌دانیم: پس بدون کوچکترین توجهی می‌توان فهمید که میدان در داخل سلونوئید فقط جهت $\mathbf{a}_z$ خواهد داشت. در این صورت:

$$d\mathbf{H}_z = \frac{I\ dl\ a^{۲}}{۲\ (a^{۲}+z^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\mathbf{a}_z = \frac{I\ a^{۲}\ n\ dz}{۲\ (a^{۲}+z^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\mathbf{a}_z$$

مثال کلیدی

که در آن $dl = n\,dz = (\frac{N}{\ell})dz$ و n تعداد دور در واحد طول سیم است. اگر بخواهیم پاسخ را بر حسب زوایای نشان داده شده در شکل (۴-۱۰) بدست آوریم، بایستی دقت کنیم که $\tan\theta = \frac{a}{z}$ از اینرو:

$$dz = -a\,\csc^{۲}\theta\; d\theta = -\frac{(a^{۲}+z^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}{a^{۲}}\sin\theta\; d\theta$$

پس:

$$dH_z = -\frac{nI}{۲}\sin\theta\; d\theta$$

$$H_z = -\frac{n\,I}{۲}\int_{\theta_۱}^{\theta_۲}\sin\theta\; d\theta$$

و در نتیجه:

$$\mathbf{H} = \frac{n\,I}{۲}(\cos\theta_۲ - \cos\theta_۱)\;\mathbf{a}_z = \frac{N\,I}{۲\,\ell}(\cos\theta_۲ - \cos\theta_۱)\;\mathbf{a}_z \qquad (۱۴\text{-}۴)$$

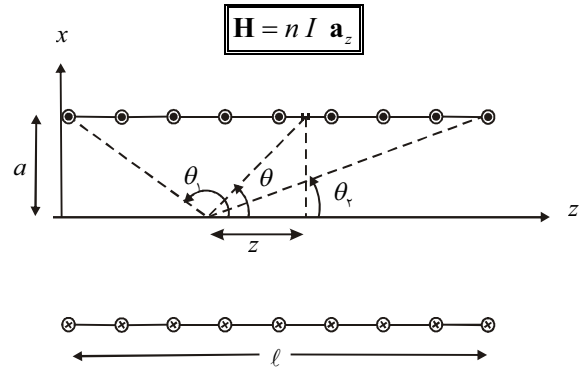
و برای یک حالت خاص:

اگر طول سلونوئید بی‌نهایت باشد $(\ell >> a)$ برای زوایای فوق داریم:

$$\theta_۲ \approx ۰ \quad ، \quad \theta_۱ \approx \pi$$

پس:

$$\boxed{\mathbf{H} = n\,I\;\mathbf{a}_z} \qquad (۱۵\text{-}۴)$$



شکل ٤-۱۰: مدل سلونوئید مثال ٤-٥

تناظر بین توزیع‌های خطی الکترواستاتیک و مغناطیس ساکن را در جدول (۴-۴) مشاهده می‌کنید.

جدول ۴-۴: تناظر بین توزیع‌های خطی معروف

موضوع	الکترواستاتیک	مغناطیس
خط بار (کابل جریان)	$\mathbf{E}=\dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_\circ r}\mathbf{a}_r$	$\mathbf{B}=\dfrac{\mu_\circ I}{2\pi r}\mathbf{a}_\varphi$
حلقه بار (حلقه جریان)	$\mathbf{E}=\dfrac{\rho_l z a}{2\varepsilon_\circ\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{a}_z$	$\mathbf{B}=\dfrac{\mu_\circ I r^2}{2(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{a}_z$

۴-۳-۲- میدان‌های ناشی از توزیع جریان‌های سطحی

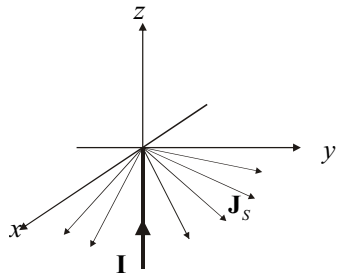
برای اینگونه توزیع‌ها، کافیست با توجه به سیستم دستگاه مناسبی را برگزیده و سپس از رابطهٔ $\mathbf{H}=\oint_S\dfrac{\mathbf{K}\,ds\times\mathbf{R}}{4\pi R^2}$ استفاده کنیم. مثال زیر فرم کلی حل اینگونه مسائل را نشان می‌دهد.

مثال ۴-۷ جریان I که در قسمت منفی محور z وجود دارد به صفحه xy برخورد کرده و روی ربع اول صفحه xy به‌طور یکنواخت و شعاعی پخش می‌شود. میدان مغناطیسی را روی محور z و در نقطه $P(\circ,\circ,h)$ بدست آورید. [۸]

حل: ابتدا فرم جریان سطحی را می‌یابیم:

مطابق شکل مشاهده می‌شود که جریان به‌صورت شعاعی پخش‌شده و از طرفی مجموع این جریان‌ها در ربع اول برابر مقدار I است. از اینرو با جاروب کردن این جریان‌ها از زاویه ۰ تا $\dfrac{\pi}{2}$ این ارتباط را برقرار می‌کنیم:

$$I=\int_\circ^{\pi/2}J_\circ\, r\, d\varphi\ \rightarrow\ \mathbf{J}_\circ=\frac{2I}{\pi r}\mathbf{a}_r$$



شکل ٤-١١: شکل مثال ٤-٧

حال به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) ابتدا بردار R را می‌یابیم.

$$|\mathbf{R}|=(h^2+r^2)^{\frac{1}{2}}\quad،\quad \mathbf{R}=-r\,\mathbf{a}_r+h\,\mathbf{a}_z$$

۲) برای المان $\mathbf{J}_\circ ds$ داریم:

$$\mathbf{J}_\circ\, ds = (\frac{۲I}{\pi\, r}\mathbf{a}_r)(r\ dr\ d\varphi) = \frac{۲I}{\pi} dr\ d\varphi\ \mathbf{a}_r$$

۳) با توجه به پیچیدگی این حالت حدس جهت نهایی میدان به‌راحتی امکان‌پذیر نیست.

۴) و با اعمال ضرب خارجی:

$$\mathbf{J}_\circ\, ds \times \mathbf{R} = \frac{۲I}{\pi} dr\ d\varphi\ \mathbf{a}_r \times (-r\ \mathbf{a}_r + h\ \mathbf{a}_z) = \frac{-۲I\ h}{\pi} dr\ d\varphi\ \mathbf{a}_\varphi$$

۵) در نهایت با حل انتگرال خواهیم داشت:

$$\mathbf{H} = \oint_S \frac{\mathbf{J}_\circ\, ds \times \mathbf{R}}{۴\,\pi R^۲} \rightarrow \mathbf{H} = \int_\circ^\infty \int_\circ^{\frac{\pi}{۲}} \frac{-I\ h}{۲\,\pi^۲ (h^۲ + r^۲)^{\frac{۳}{۲}}} dr\ d\varphi\ \mathbf{a}_\varphi$$

که پس از حل آن به جواب زیر می‌رسیم:

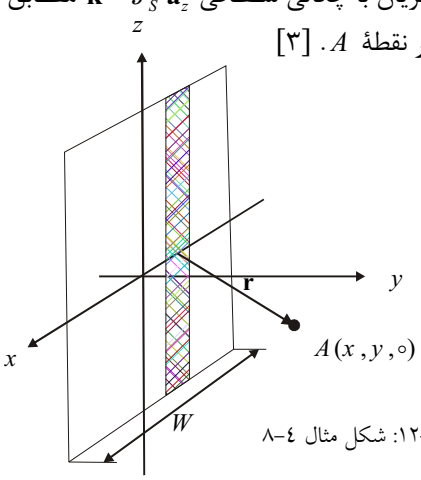
$$\mathbf{H} = \frac{I}{۲\,\pi\ h}(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y)$$

همچون گذشته، در مغناطیس نیز می‌توان برای یافتن میدان‌های ناشی از توزیع سطحی، از نتایج توزیع خطی استفاده کرد، کافیست دقت کنیم که:

$$dI = K\, dl \qquad (۱۶\text{-}۴)$$

به مثال زیر دقت کنید.

مثال ۴-۸ صفحه‌ای به عرض W و طول بی‌نهایت حامل جریان با چگالی سطحی $\mathbf{k} = J_S\ \mathbf{a}_z$ مطابق شکل (۴-۱۲) است. مطلوبست محاسبهٔ میدان مغناطیسی در نقطهٔ A. [۳]



شکل ٤-۱۲: شکل مثال ٤-۸

حل: نواری به ضخامت dx' را مطابق شکل در نظر می‌گیریم. مطابق رابطهٔ (۴-۱۶) جریان گذرنده از آن برابر $dI = J_{S_\circ}\, dx'$ خواهد بود. میدان ناشی از این نوار هاشور خورده را در نقطهٔ A محاسبه کرده و سپس با انتگرال‌گیری مناسب، آن را به سایر قسمت‌ها تعمیم می‌دهیم. طبق رابطهٔ (۴-۱۰) داریم:

$$d\mathbf{H}_A = \frac{dI}{۲\pi r}\mathbf{a}_\varphi$$

که در آن:

$$\mathbf{r} = (x - x')\mathbf{a}_x + y\,\mathbf{a}_y \quad , \quad \mathbf{a}_\varphi = \frac{\left(-y\,\mathbf{a}_x + (x - x')\mathbf{a}_y\right)}{r}$$

پس با انتگرال‌گیری داریم:

$$\mathbf{H}_A = \int_{-W/۲}^{W/۲} \frac{J_{S_\circ}\,dx'}{۲\pi} \times \frac{\left(-y\,\mathbf{a}_x + (x - x')\mathbf{a}_y\right)}{(x - x')^۲ + y^۲}$$

که از حل آن نتیجه می‌گیریم:

$$\mathbf{H}_A = \frac{J_{S_\circ}}{۲\pi}\left[\tan^{-۱}\left(\frac{x - W/۲}{y}\right) - \tan^{-۱}\left(\frac{x + W/۲}{y}\right)\right]\mathbf{a}_x - \frac{J_{S_\circ}}{۴\pi} Ln\left(\frac{y^۲ + \left(x - W/۲\right)^۲}{y^۲ + \left(x + W/۲\right)^۲}\right)\mathbf{a}_y$$

تمرین ۴-۲: مطلوبست محاسبهٔ میدان برای مثال (۴-۸) و در همان نقطه وقتیکه $W \to \infty$.

تمرین ۴-۳: روی سطح نیمکره‌ای قرار گرفته بر مبداء مختصات و به شعاع a، چگالی جریان $\mathbf{K} = K_\circ \sin\theta\,\mathbf{a}_\theta$ وجود دارد. شدت میدان مغناطیسی را در مبداء مختصات بیابید.

۴-۳-۲-۱- میدان ناشی از یک صفحهٔ بی‌نهایت حامل جریان

مشابه الکترواستاتیک، در مغناطیس نیز صفحهٔ بی‌نهایت جریان مطرح است. این صفحه دارای ابعاد بی‌نهایت بوده و جریانی در یک جهت از آن می‌گذرد. اگر تمرین (۴-۲) را حل کرده و پاسخ را به صفحهٔ با $W \to \infty$ تعمیم دهید می‌توانید میدان را برای این چنین سیستمی پیدا کنید. با تعمیم نتیجهٔ تمرین (۴-۲) و برای یک حالت کلی (مسئله ۹ آخر فصل) خواهید دید که میدان برای نقطه‌ای بالای صفحهٔ بی‌نهایت حامل جریان $\mathbf{J}_S$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{۱}{۲}\,\mathbf{J}_S \times \mathbf{a}_n} \qquad (۱۷\text{-}۴)$$

که در آن $\mathbf{a}_n$ بردار عمود بر این صفحه است. طبیعی است که در صورت قرار گرفتن این نقطه در زیر صفحه بردار $\mathbf{a}_n$ منفی خواهد شد. مثال زیر این موضوع را روشن می‌کند.

مثـــال ۴-۹ در فــضای آزاد صــفحه $x+۲y+۳z=۴$ شــامل جریــان ســطحی بــه چگــالی $\mathbf{K}=K_{\circ}(-\mathbf{a_x}+۳\mathbf{a_y}-\mathbf{a_z})$ مـی‌باشـد. مطلوبـست محاسـبه میـدان مغناطیـسی در مبـداء مختـصات. (کارشناسی ارشد برق)

حل: ابتدا بردار عمود بر صفحه را پیدا می‌کنیم:

$$\mathbf{a}_{\mathrm{n}}=\pm\frac{\nabla f}{|\nabla f|}=\pm\left[\frac{\mathbf{a}_x+۲\mathbf{a}_y+۳\mathbf{a}_z}{\sqrt{۱۴}}\right]$$

اگر مختصات مبداء را در معادلهٔ صفحه قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\circ<۴$$

این یعنی مبداء زیر صفحهٔ مورد نظر بوده و در این صورت بردار $\mathbf{a}_n$ برابر است با:

$$\mathbf{a}_{\mathrm{n}}=-\left[\frac{\mathbf{a}_x+۲\mathbf{a}_y+۳\mathbf{a}_z}{\sqrt{۱۴}}\right]$$

حال کافیست از رابطهٔ (۴-۱۶) استفاده کنیم:

$$\mathbf{H}=\frac{۱}{۲}\mathbf{K}\times\mathbf{a}_n=\frac{K_{\circ}}{۲}(-\mathbf{a_x}+۳\mathbf{a_y}-\mathbf{a_z})\times\left\{-\left[\frac{\mathbf{a}_x+۲\mathbf{a}_y+۳\mathbf{a}_z}{\sqrt{۱۴}}\right]\right\}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\mathbf{H}=\frac{K_{\circ}}{۲\sqrt{۱۴}}(۱۱\mathbf{a_x}+۲\mathbf{a_y}-۵\mathbf{a_z})$$

برای پی‌بردن به تفاوت میدان‌ها در توزیع سطحی و در دو حوزهٔ مختلف به جدول (۴-۵) نگاه کنید.

جدول ۴-۵: تناظر بین میدان ناشی از صفحهٔ بی‌نهایت برای دو حوزهٔ مختلف

میدان صفحهٔ بی‌نهایت	
الکترواستاتیک	**مغناطیس**
$\mathbf{E}=\frac{\rho_s}{۲\varepsilon_{\circ}}\mathbf{a}_n$	$\mathbf{B}=\frac{۱}{۲}\mathbf{J}_S\times\mathbf{a}_n$

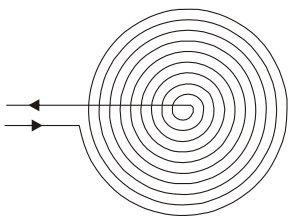
۴-۳-۲-۲- حل توزیع‌های خطی با توزیع‌های سطحی

در قسمت قبل نحوهٔ تعمیم توزیع‌های سطحی به خطی را بررسی کردیم. در برخی از موارد تکرار ممتد توزیع خطی، یک توزیع شبه سطحی تولید می‌کند. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴-۱۰ یک سیم‌پیچ مسطح دارای N دور سیم متراکم با شعاع داخلی r_i و شعاع خارجی r_o، حامل جریان I است. چگالی شار مغناطیسی را در مرکز سیم‌پیچ محاسبه کنید. (کارشناسی ارشد ۷۳)

حل: چگالی شار مغناطیسی در مرکز یک حلقه دایره‌ای به شعاع r حامل جریان I، مطابق رابطهٔ (۴-۱۳) به شکل زیر است:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ I}{۲\, r}\mathbf{a}_z$$



شکل ٤-۱۳: شکل مثال ٤-۱۰

مطابق شکل (۴-۱۳)، چگالی جریان سطحی عبارتست از:

$$\mathbf{J}_S = \frac{N\, I}{r_o - r_i}\mathbf{a}_\varphi$$

پس:

$$B_Z = \int_{r_i}^{r_o} \frac{\mu_\circ\, dI}{۲\, r} = \int_{r_i}^{r_o} \frac{\mu_\circ\, N\, I}{۲\left(r_o - r_i\right) r} dr = \frac{\mu_\circ\, N\, I}{۲\left(r_o - r_i\right)} Ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)$$

۴-۳-۳- میدان‌های ناشی از توزیع جریان‌های حجمی

در این حالت بحث جدیدی نداشته و کاملاً مشابه قبل عمل می‌کنیم. تنها تفاوت در قرار دادن $\mathbf{J}\, dV$ به جای $\mathbf{K}\, ds$ است، که با توجه دستگاه مختصات انتخاب‌شده به‌راحتی انجام می‌گیرد. در اینجا نیز می‌توانیم از نتایج توزیع‌های سطحی و خطی استفاده کنیم، کافیست در هر مورد توجه داشته باشیم که:

$$d\mathbf{I} = \mathbf{J}\, ds \quad ، \quad d\mathbf{K} = \mathbf{J}_v\, dl$$

به مثال زیر توجه کنید.

مثال کلیدی

مثال ۴-۱۱ جریان الکتریکی در امتداد محور z و با چگالی یکنواخت $\mathbf{J}$ در ناحیه‌ای از فضا که بین دو صفحه $y = a$ و $y = -a$ محصور شده است، می‌گذرد. مطلوبست میدان مغناطیسی ناشی از این توزیع جریان در تمام نقاط فضا.

حل: حجم را به صفحات بی‌نهایت در امتداد محور y تقسیم می‌کنیم در این صورت چگالی جریان سطحی هر صفحه Jdy خواهد بود.

میدان در هر نقطه از فضا که در $-a < y < a$ قرار دارد، عبارتست از میدان ناشی از تمام صفحات زیر و تمام صفحات روی آن. از طرفی میدان صفحات زیرین طبق رابطهٔ (۴-۱۶) به‌صورت $\mathbf{H} = \frac{1}{2} J\ \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_y = -\frac{1}{2} J\, dy\ \mathbf{a}_x$ و میدان ناشی از صفحات فوقانی نیز به صورت $\mathbf{H} = \frac{1}{2} J\ \mathbf{a}_z \times -\mathbf{a}_y = \frac{1}{2} J\ dy\ \mathbf{a}_x$ می‌باشد، حال میدان نهایی را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbf{H} = \int_{-a}^{y} -\frac{1}{2} J\ dy\ \mathbf{a}_x + \int_{y}^{a} \frac{1}{2} J\ dy\ \mathbf{a}_x = -J\ y\ \mathbf{a}_x$$

برای نقاط دیگر فضا نیز به‌صورت مشابه عمل می‌نماییم. مثلا برای نقاط $y > a$ تمام صفحات زیر این نقطه‌اند از اینرو:

$$\mathbf{H} = \int_{-a}^{a} -\frac{1}{2} J\, dy\ \mathbf{a}_x = -J\ a\ \mathbf{a}_x$$

برای نقاط $y < -a$ نیز خواهیم داشت:

$$\mathbf{H} = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2} J\ dy\ \ \mathbf{a}_x = -J\ a\ \mathbf{a}_x$$

تمرین ۴-۴: مثال (۴-۱۱) را مجداً با استفاده از روش مستقیم محاسبهٔ توزیع حجمی حل کنید.

تمرین۴-۵: جریان I به‌طور یکنواخت از درون کابلی بی‌نهایت با شعاع a می‌گذرد. مطلوبست محاسبهٔ شدت میدان مغناطیسی برای نقطهٔ دلخواهی درون کابل با استفاده از قانون بیوساوار.

تذکر: تا به اینجا بخش اصلی مغناطیس را پشت سر گذاشته‌ایم! (اگر چه صفحات پیش رو چیز دیگری را نشان می‌دهد) به همین دلیل پیشنهاد می‌کنیم که تمام مطالب ذکر شده تا به اینجا را مجدداً مرور کرده و سپس بحث را ادامه دهید. لازم به ذکر است که، اگر چه سعی کرده‌ایم که در هر قسمت

توضیحات کافی و لازم را ارائه کنیم، ولی حجم مطالب ذکر شده نسبت به فصل دوم خیلی کمتر است. چرا که اعتقاد داریم، مثال‌های ارائه شده، همگی دوگان الکترواستاتیک بوده‌اند، از اینرو پیشنهاد می‌کنیم که در ضمن مرور قسمت ذکر شده، آنها را با دوگان خود در فصل دوم مقایسه کنید. جدول (۴-۶) تناظر بین مثال‌های حل‌شده را نشان می‌دهد.

جدول ۴-۶: تناظر بین مثال‌های حل شده برای دو حوزهٔ مختلف

تناظر بین مثال‌های حل شده	
الکترواستاتیک	**مغناطیس**
مثال (۲-۵)	مثال (۴-۱)
مثال (۲-۴)	مثال (۴-۳)
مثال (۲-۶)	مثال (۴-۵)
مثال (۲-۱۰)	مثال (۴-۹)
مثال (۲-۱۱)	مثال (۴-۱۱)

۴-۴- قانون مداری آمپر و کاربردهای آن

قانون مداری آمپر معادل قانون گاوس در الکترواستاتیک است. این قانون در مواردی که تقارن در مسئله مشهود باشد به کار می‌رود و مسیر حل را بسیار ساده می‌کند. این قانون به‌صورت زیر مطرح می‌گردد:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \mu_\circ I \qquad (۱۸-۴)$$

این رابطه بیان می‌کند که گردش چگالی شار مغناطیسی در فضای آزاد، به دور هر مسیر بسته، برابر است با حاصلضرب $\mu_\circ$ در کل جریان گذرنده از سطح محصور شده توسط این مسیر است. قانون مداری آمپر در تعیین چگالی شار مغناطیسی B، ناشی از جریان I، هنگامیکه مسیر بسته C به دور جریان چنان وجود داشته باشد که اندازهٔ B روی مسیر ثابت باشد، بسیار مفید است.

برای استفاده از قانون مداری آمپر به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱- به وجود تقارن در مسئله توجه می‌کنیم. (نحوهٔ پیدا کردن این تقارن را بایستی در اثر تجربه کسب کرد!)

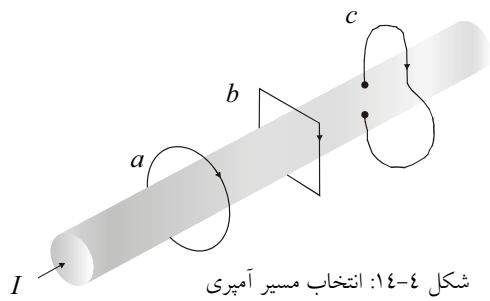
۲- به تعداد بخش‌هایی که توزیع جریان متفاوت است، مسیر آمپری در نظر می‌گیریم.

۳- در رابطهٔ (۴-۱۸) $\mathbf{dl}$ دیفرانسیل طول مسیر آمپری است.

۴- I در رابطهٔ (۴-۱۸) کل جریان موجود در سطح آمپری می‌باشد.

نکتهٔ طلایی

تذکر: برای انتخاب سطح آمپری به خود زحمت نداده و ساده‌ترین سطحی که بتوانیم روی آن انتگرال مسیر مورد نظر را بگیریم، انتخاب می‌کنیم. مثلا در شکل (۴-۱۴) مقدار جریان گذرنده از تمام سطوح آمپری برابر I می‌باشد و این بسته به سیستم مورد بررسی است که کدام مسیر می‌تواند بهتر باشد.



شکل ٤-١٤: انتخاب مسیر آمپری

قانون آمپر کاربرد فراوانی در محاسبهٔ میدان‌های مغناطیسی دارد. از این جمله می‌توان موارد زیر را مطرح کرد:

الف) میدان در داخل و خارج کابل با توزیع جریان محوری.

ب) میدان داخل سلونوئید طویل.

ج) میدان داخل چنبره.

د) میدان خارج یک صفحهٔ بی‌نهایت.

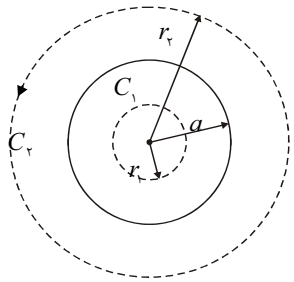
ه) میدان برای یک کابل کواکسیال بسیار طویل خط انتقال.

در ادامه سعی شده تا با ارائهٔ مثال‌هایی، اهمیت قانون مداری آمپر را نشان داده شود، برای این منظور برخی از مسائل حل‌شده را مجدداً بررسی می‌کنیم.

مثال ۴-۱۲ یک هادی مستقیم بی‌نهایت طویل، با مقطع مدور به شعاع a، جریان دائم I را حمل می‌کند. چگالی شار مغناطیسی را در داخل و خارج هادی تعیین کنید.

حل: از قانون مداری آمپر استفاده می‌کنیم. دو سطح آمپری در نظر می‌گیریم، یکی برای داخل هادی

که توزیع جریان به صورت I است و دیگری بـرای خارج کابـل که هیچ جریانی نداریم.



شکل ٤-١٥: شکل مثال ٤-١٢

برای $r < a$:

۱- جهت میدان در سطح آمپری: میدان در داخل این سطح آمپری درجهت φ است (با استفاده از قانون دست راست.) $\mathbf{B}_1 = B_1\ \mathbf{a}_\varphi$

۲- $\mathbf{dl}$: برای سطح آمپری مشخص شده داریم: $\mathbf{dl}_{C_1} = r_1\ d\varphi\ \mathbf{a}_\varphi$

۳- جریان در سطح آمپری: کل جریان I از مقطع $\pi\ a^2$ عبور می‌کند. جریـان سـطح آمپـری بخـشی از همین جریان است که از مقطع $\pi\ r_1^2$ می‌گذرد در این صورت این مقدار جریان را بـه‌صـورت زیـر پیـدا می‌کنیم:

$$\frac{I_1}{I} = \frac{\pi\ r_1^2}{\pi\ a^2} \rightarrow I_1 = (\frac{r_1}{a})^2 I$$

۴- رابطه را نوشته و داریم:

$$\oint_{C_1} \mathbf{B}_1\ .\ \mathbf{dl}_1 = \mu_\circ I_1 \rightarrow \int_\circ^{2\pi} B_1\ r_1\ d\varphi = 2\ \pi\ r_1\ B_1 = \mu_\circ\ I_1 = \mu_\circ \left(\frac{r_1}{a}\right)^2 I$$

$$\mathbf{B}_1 = B_1\ \mathbf{a}_\varphi = \frac{\mu_\circ\ r_1\ I}{2\ \pi\ a^2}\mathbf{a}_\varphi$$

برای $r > a$: مشابه قبل عمل می‌کنیم:

۱- جهت میدان در سطح آمپری: میدان در داخل این سطح آمپـری در جهـت φ اسـت (بـا اسـتفاده از قانون دست راست.) $\mathbf{B}_2 = B_2\ \mathbf{a}_\varphi$

۲- $\mathbf{dl}$: برای سطح آمپری مشخص شده داریم: $\mathbf{dl}_{C_2} = r_2\ d\varphi\ \mathbf{a}_\varphi$

۳- جریان در سطح آمپری: بدیهی است که از سطح C_2 کل جریان I عبور می‌کند، پس $I_2 = I$.

۴- رابطه را نوشته و داریم:

$$\oint_{C_2} \mathbf{B}_2\ .\ \mathbf{dl}_2 = \mu_\circ\ I_2 \rightarrow \int_\circ^{2\pi} B_2\ r_2\ d\varphi = \ 2\ \pi\ r_2\ B_2 = \mu_\circ\ I_2 = \mu_\circ\ I$$

$$\mathbf{B}_2 = B_2\ \mathbf{a}_\varphi = \frac{\mu_\circ\ I}{2\ \pi\ r_2}\mathbf{a}_\varphi$$

پس به‌صورت کلی می‌توان گفت:

$$\mathbf{B}=\begin{cases}\dfrac{\mu_\circ\, r\, I}{۲\,\pi\, a^{۲}}\mathbf{a}_\varphi & , \quad r<a\\[2ex] \dfrac{\mu_\circ\, I}{۲\,\pi\, r}\mathbf{a}_\varphi & , \quad r>a\end{cases} \qquad (۱۹\text{-}۴)$$

مثال ۴-۱۳ دو استوانه بی‌نهایت طویل به شعاع‌های a و b که محورهایشان به موازات هم و به فاصله $x<a-b$ از یکدیگر می‌باشند، وجود دارد. جریان به چگالی یکنواخت $J_\circ$ در فضای بین دو استوانه و در امتداد محورهای آنها عبور داده می‌شود. با استفاده از فرم انتگرالی قانون مداری آمپر، میدان مغناطیسی را در درون استوانه به شعاع b بدست آورید. $(b<a)$

حل: سوال اخیر، دوگان مثال (۲-۱۸) است. کافیست از رابطهٔ (۴-۱۹) استفاده کنیم. چگالی جریان را در استوانهٔ بیرونی $J_\circ$ و در استوانهٔ داخلی $-J_\circ$ فرض می‌کنیم. در این صورت میدان ناشی از این توزیع‌ها به ترتیب زیر خواهد بود:

$$\mathbf{B}_۱=\frac{\mu_\circ\, r_۱\, I}{۲\,\pi\, a^{۲}}\mathbf{a}_\varphi \xrightarrow{I=J_\circ\pi a^{۲}} \mathbf{B}_۱=\frac{\mu_\circ J_\circ\, r_۱}{۲}\mathbf{a}_\varphi=\frac{\mu_\circ J_\circ}{۲}\left(\mathbf{a}_z\times\mathbf{r}_۱\right)$$

$$\mathbf{B}_۲=\frac{\mu_\circ\, r_۲\, I}{۲\,\pi\, b^{۲}}\mathbf{a}_\varphi \xrightarrow{I=-J_\circ\pi b^{۲}} \mathbf{B}_۲=-\frac{\mu_\circ J_\circ\, r_۲}{۲}\mathbf{a}_\varphi=-\frac{\mu_\circ J_\circ}{۲}\left(\mathbf{a}_z\times\mathbf{r}_۲\right)$$

در نتیجه، از برآیند میدان‌ها خواهیم داشت:

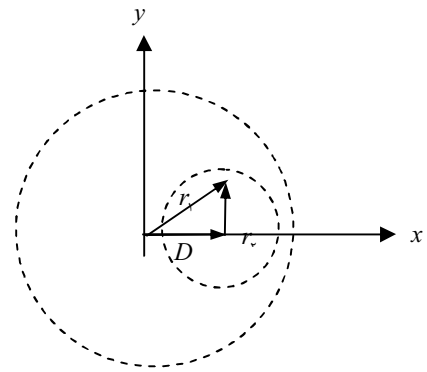
$$\mathbf{B}=\mathbf{B}_۱+\mathbf{B}_۲=\frac{\mu_\circ J_\circ}{۲}\left(\mathbf{a}_z\times\mathbf{r}_۱-\mathbf{a}_z\times\mathbf{r}_۲\right)=\frac{\mu_\circ J_\circ}{۲}\left(\mathbf{a}_z\times(\mathbf{r}_۱-\mathbf{r}_۲)\right)$$

از طرفی مطابق شکل (۴-۱۷) نتیجه می‌گیریم که:

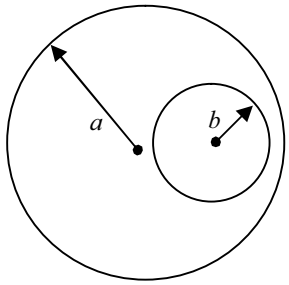
$$\mathbf{r}_۱-\mathbf{r}_۲=D\,\mathbf{a}_x$$

پس:

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_\circ J_\circ D}{۲}\left(\mathbf{a}_z\times\mathbf{a}_x\right)=\frac{\mu_\circ J_\circ D}{۲}\mathbf{a}_y$$

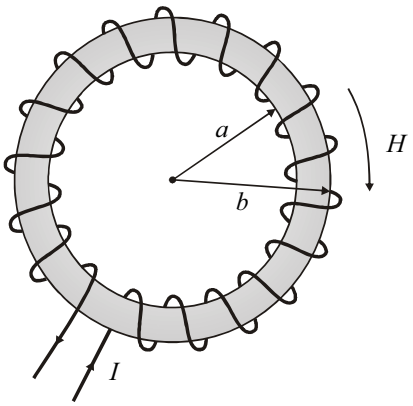


شکل ٤-١٧: میدان در یک نقطهٔ خاص



شکل ٤-١٦: شکل مثال ٤-١٣

مثال ۴-۱۴ چگالی شار مغناطیسی در درون یک سیم‌پیچ چنبره‌ای با هسته هوائی و N دور سیم‌پیچ به‌هم فشرده حامل جریان I را تعیین کنید.



شکل ٤-١٨: شکل مثال ٤-١٤

حل: مشابه قبل سطح آمپری را در درون سیم‌پیچ در نظر می‌گیریم. مقدار کل جریان موجود در این سطح برابر NI خواهد بود. در این صورت:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \mu_\circ I_{total} \rightarrow ۲\,\pi\, r\, B = \mu_\circ N\, I$$

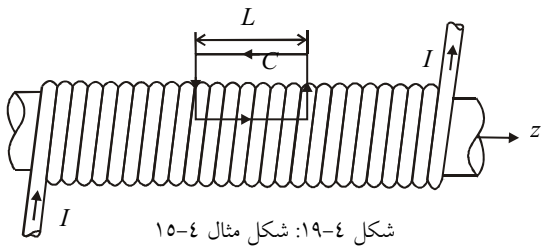
پس:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ N\, I}{۲\,\pi\, r}\mathbf{a}_\varphi \qquad (۲۰-۴)$$

مثال ۴-۱۵ چگالی شار مغناطیسی در درون یک سلونوئید بی‌نهایت طویل با هسته هوایی و دارای n دور سیم‌پیچ فشرده در واحد طول ، حامل جریان I را با استفاده از قانون مداری آمپرتعیین کنید. پاسخ را با نتیجه مثال (۴-۵) مقایسه کنید. [۱]

حل: طبق قانون دست راست میدان فقط در داخل سلونوئید و در جهت z خواهد بود. برای محاسبهٔ این میدان، سطح آمپری مشابه شکل (۴-۱۹) را در نظر گرفته و رابطهٔ $\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \mu_\circ I$ را برای آن تحقیق می‌کنیم، در این صورت بدیهی خواهد بود که:

$$B\,L = \mu_\circ n\,L\,I \;\rightarrow B = \mu_\circ n\,I$$



شکل ٤-۱۹: شکل مثال ٤-۱۵

مثال ۴-۱۶ روی استوانه‌ای بسیار بلند به شعاع a سیم‌های نازکی به صورت شکل (۴-۲۰) پیچیده شده‌اند. با فرض اینکه جریان هر سیم I و تعداد دور در واحد طول n باشد، مطلوبست محاسبهٔ چگالی شار مغناطیسی برای تمام فضا.

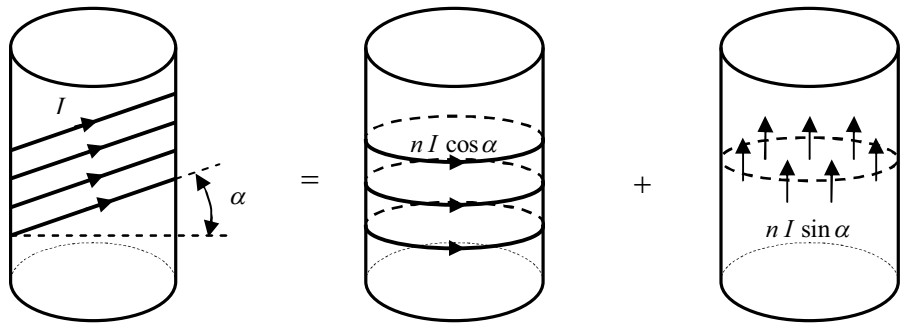
حل: مثال (۳-۵۴) را ببینید. مطابق حل این مثال، کافیست از ترکیب میدان جریان‌های محاسبه شده استفاده کنیم. میدان ناشی از جریان‌های افقی عبارتست از:

$$\mathbf{B}_۱ = \begin{cases} \mu_\circ n\,I\cos\alpha\,\mathbf{a}_z & , \quad r < a \\ \circ & , \quad r > a \end{cases}$$

میدان ناشی از مولفهٔ عمودی جریان نیز به‌صورت زیر خواهد بود:

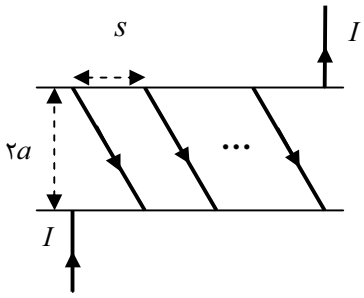
$$\mathbf{B}_۲ = \begin{cases} \circ & , \quad r < a \\ \dfrac{\mu_\circ n\,I\;a\sin\alpha\,\mathbf{a}_\varphi}{r} & , \quad r > a \end{cases}$$

و میدان برآیند از جمع این دو میدان حاصل می‌شود.



شکل ٤-٢٠: شکل مثال ٤-١٦

تمرین ۴-۶: یک سیم با تعداد N دور روی سطح یک استوانه با شعاع a پیچیده شده است. زاویهٔ گام سیم‌پیچ برابر α است (یعنی یک دور به اندازهٔ $s = ۲\pi a \tan\alpha$ به جلو پیش می‌رود.) جریان در سیم‌پیچ برابر I است. چگالی شار مغناطیسی $\mathbf{B}$ را در مرکز سیم‌پیچ بدست آورید.



شکل ٤-٢١: شکل تمرین ٤-٦

تمرین ۴-۷: سیمی به شعاع a حامل جریان غیر یکنواخت به چگالی $\mathbf{J} = J_\circ \frac{r}{a}\mathbf{a}_z$ می باشد. میدان مغناطیسی را در داخل و خارج سیم بدست آورید. (کارشناسی ارشد برق)

در تمام مثال‌هایی که تا به اینجا بررسی کرده‌ایم، میدان مغناطیسی از حضور جریان‌های هدایتی نشئت گرفته بود. با این همه، همانطور که در فصل سوم دیدیم، جریان‌های انتقالی از حرکت بارها در خلاء نشئت می‌گیرند. در ادامه با ذکر یک مثال کار با این دسته از جریان‌ها را یاد می‌گیریم.

مثال ۴-۱۷ یک دیسک عایق با شعاع a دارای بار الکتریکی سطحی با چگالی σ است. دیسک با سرعت ثابت n دور در دقیقه حول محورش دوران می‌کند، در نتیجه یک جریان سطحی روی دیسک ایجاد می‌شود. میدان مغناطیسی را در مرکز دیسک تعیین کنید. (کارشناسی ارشد فیزیک ۸۲)

حل: جریان سطحی ناشی از حرکت بار را به‌صورت زیر می‌یابیم:

$$dI = \frac{dq}{dt} = \frac{\sigma\, dS}{dt} = \frac{\sigma\, r\, dr\, d\varphi}{dt} = \sigma\, r\, dr\, \frac{d\varphi}{dt} = \sigma\, r\, dr\, \omega$$

$$\mathbf{K} = \frac{dI}{dr} = \sigma\, r\, \omega = \sigma\, r\left(۲\pi f\right)\mathbf{a}_\varphi = ۲\pi\sigma\frac{N}{۶۰} r\, \mathbf{a}_\varphi$$

میدان در مرکز دیسک عبارتست از:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\int_\circ^a \int_\circ^{۲\pi} \frac{۲\pi\sigma\frac{N}{۶۰}r^۲}{r^۳} r\, dr\, d\varphi\, \mathbf{a}_z = \ldots = \frac{\pi}{۶۰}\mu_\circ\, \sigma\, N\, a\, \mathbf{a}_z$$

۴-۵- شار مغناطیسی

گذر خطوط میدان از بخشی از فضا را شار می‌نامیم. در مغناطیس با دو نوع شار سروکار داریم:

۱- شار مغناطیسی (واحد آن wb (وبر) است)

۲- شار پیوندی (واحد آن $\frac{wb}{N}$ (بخوانید: وبر بر دور) است)

نکتهٔ طلایی

شار مغناطیسی خود دارای دو نوع مختلف است:

الف) شار خودی ب) شار متقابل

الف) شار خودی:

عبارت است از مقدار شار گذرنده از سطحی از فضا که در آن هیچ جریانی برقرار نیست و یا مقدار شار گذرنده از مقطع خودِ تولیدکنندهٔ میدان. (مثلاً برای شکل (۴-۲۲) معادل است با گذر خطوط میدان ناشی از حلقهٔ اولی از مقطع خودش)

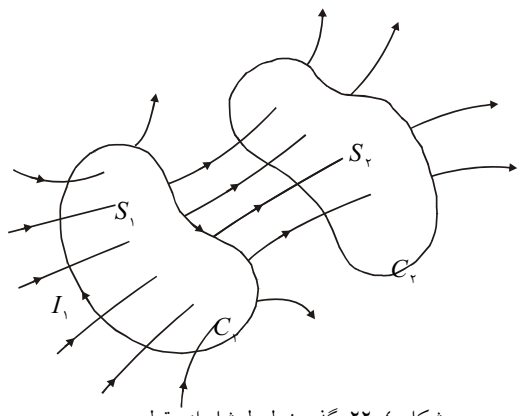
$$\varphi = \int_S \mathbf{B}\,.\,\mathbf{ds} \qquad (۲۱-۴)$$

ب) شار متقابل:

شار گذرنده از بخشی از فضا (که خود می‌تواند حاوی جریان باشد) بوسیلهٔ میدان ناشی از توزیع جریانی در بخش دیگری از فضا. (برای شکل (۴-۲۲) معادل است با گذر خطوط میدان ناشی از حلقهٔ اولی از مقطع دومی):

$$\varphi_{۲۱} = \int_{S_۲} \mathbf{B}_۱ \cdot \mathbf{ds}_۲ \qquad (۲۲-۴)$$

مثال‌های زیر این موارد را روشن خواهند کرد:



شکل ٤-۲۲: گذر خطوط شار از مقطع جسم

مثال ۴-۱۸ مقدار شار مغناطیسی گذرنده از یک حلقهٔ جریان به شعاع a را بیابید. (کارشناسی ارشد برق)

حل: میدان ناشی از یک حلقه به شعاع r در مرکز حلقه را پیش از این در رابطهٔ (۴-۱۳) بدست آوردیم.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ I}{۲r}\mathbf{a}_z$$

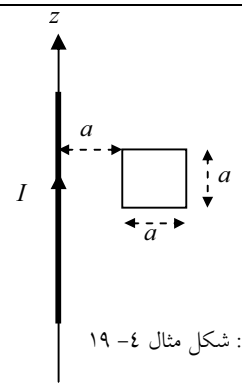
برای این سطح دایره‌ای ds به‌صورت زیر است:

$$ds = r\,dr\,d\varphi$$

پس:

$$\varphi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} = \int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^{a} \frac{\mu_\circ I}{۲r}\mathbf{a}_z \cdot r\ dr\ d\varphi\ \mathbf{a}_z = \mu_\circ\ I\ \pi\ a$$

مثال ۴-۱۹ شار متقابل بین سیم بی‌نهایت حامل جریان و حلقهٔ موجود در شکل (۴-۲۳) را بیابید. (کارشناسی ارشد آزاد ۸۰)



شکل ٤-۲۳: شکل مثال ٤- ۱۹

حل: میدان ناشی از سیم حامل جریان در محل حلقه به شکل زیر است:

$$\mathbf{B}_۱ = -\frac{\mu_\circ I}{۲\,\pi\, y}\ \mathbf{a}_x$$

برای حلقه داریم:

$$\mathbf{ds}_۲ = dz\ dy\ \ \mathbf{a}_x$$

در این صورت:

$$\varphi_{۲۱} = \int_{S_۲} \mathbf{B}_۱ \,.\, \mathbf{ds}_۲ = \int_a^{a+a} \int_\circ^{a} -\frac{\mu_\circ I}{۲\pi y}\ \mathbf{a}_x \ .\, dz\ \ dy\ \ \mathbf{a}_x = -\frac{\mu_\circ I\ a}{۲\pi} Ln\frac{۲a}{a} = \frac{\mu_\circ I\ a}{۲\pi} Ln\frac{۱}{۲}$$

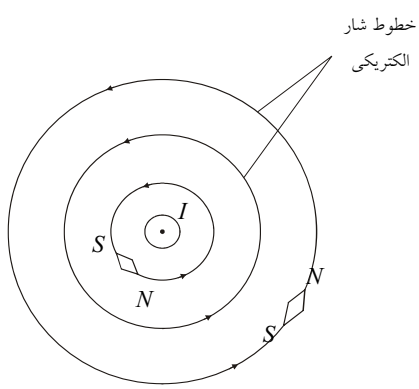
یک سوال اساسی:

حاصل انتگرال $\varphi = \oint \mathbf{B}\,.\,\mathbf{ds} = ?$ چقدر است و چه مفهومی را به همراه دارد؟

جواب:

پیش از این در مورد شار الکتریکی خارج‌شونده از بار نقطه‌ای صحبت کرده‌ایم. در آنجا گفتیم که شار الکتریکی را گذر خطوط میدان خارج‌شده از همین بار نقطه‌ای تعریف می‌کنیم، از اینرو اگر کره‌ای به شعاع دلخواه را به‌صورت فرضی بر روی این بار نقطه‌ای در نظر بگیریم، کل شار خارج‌شونده از کره برابر خواهد بود با مقدار همان بار نقطه‌ای. که این موضوع به این دلیل است که خطوط شار (خطوط میدان) الکتریکی بر روی خود بسته نمی‌شوند از اینرو حاصل انتگرال $\oint \mathbf{D}\,.\,\mathbf{ds} = Q$ و این به مفهوم وجود بار نقطه‌ایست. پس تا به اینجا متوجه شدیم که کلید پاسخ در نوع خطوط میدان نهفته است. با طرح یک سوال دیگر بحث را پیش گرفته تا به جواب مناسب برسیم:

- در میدان‌های الکتریکی خطوط میدان مشخص‌کنندهٔ مسیر عبور بار الکتریکی بود. و اما خطوط میدان مغناطیسی چه مفهومی دارند؟



شکل ٤-۲٤: خطوط شار کابل حامل

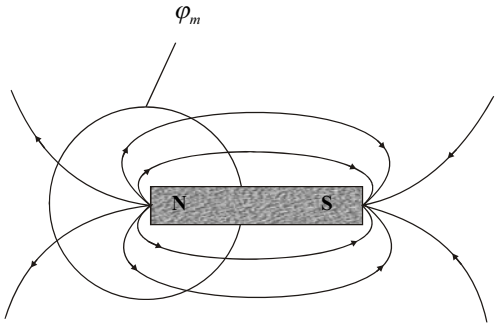
خطوط میدان مغناطیسی مشخص می‌کنند که اگر یک قطب‌نما (دوقطبی) در هر نقطه قرار گیرد، چگونه جهت‌گیری خواهد کرد. مثلاً به خطوط میدان مغناطیسی یک کابل بی‌نهایت که در شکل (۴-۲۴) دیده می‌شود، توجه کنید. همان‌گونه که در این شکل دیده می‌شود جهت دوقطبی در این شکل مشهود است. به دلیل بسته بودن خطوط میدان مغناطیسی حاصل انتگرال $\varphi = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$ برابر صفر خواهد بود.

- بر خلاف خطوط شار الکتریکی، خطوط شار مغناطیسی همواره بر روی خود بسته می‌شوند، از اینرو پاسخ انتگرال همواره صفر است. که یک نتیجهٔ فوق‌العاده مهم را به همراه خواهد داشت و آن اینکه:

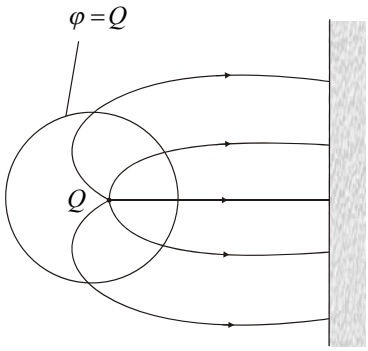
نکتهٔ طلایی

تک‌قطبی مغناطیسی (و یا بار مغناطیسی) مجزا وجود ندارد.

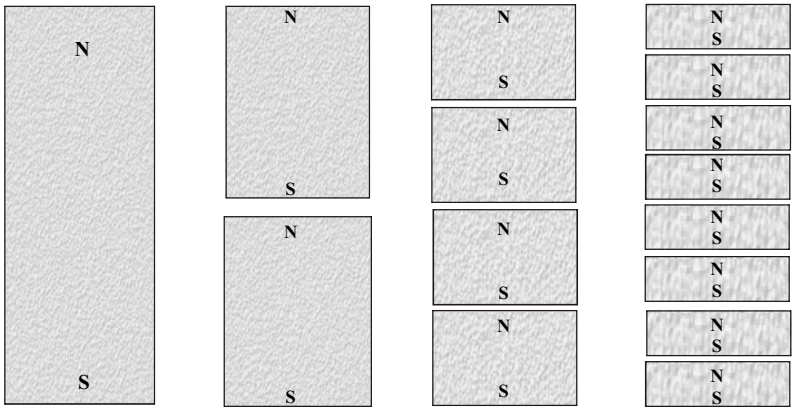
دقیقاً به همین دلیل است که اگر یک آهنربا را به بی‌نهایت بخش کوچکتر نیز تقسیم کنیم، باز هم هر یک از این بخش‌های کوچک خود یک دوقطبی کاملند. برای درک بهتر مفاهیم مطرح‌شده پیشنهاد می‌کنیم به شکل‌های (۴-۲۵) تا (۴-۲۷) توجه کنید.



شکل ٤-۲۵: شار ناشی از میدان مغناطیسی



شکل ٤-۲٦: شار ناشی از میدان الکتریکی



شکل ٤-۲۷: دوقطبی مغناطیسی دائمی

با توجه به مطالب اخیر می‌توان جدولی مطابق زیر تشکیل داد:

جدول ۴-۷: تناظر بین شار در دو حوزهٔ مختلف

الکترواستاتیک	مغناطیس
$\varphi = \int_S \mathbf{D} \,.\, \mathbf{d}s$	$\varphi = \int_S \mathbf{B} \,.\, \mathbf{ds}$
$\oint_S \mathbf{D} \,.\, \mathbf{ds} = Q$	$\oint \mathbf{B} \,.\, \mathbf{ds} = ۰$

۴-۶- پتانسیل مغناطیسی برداری

پیش از این با این بردار آشنا شده‌ایم، به خاطر دارید که در فصل اول اثبات کردیم که هر بردار بدون دیورژانس را می‌توان به صورت کرل یک میدان برداری دیگر نشان داد. از طرف دیگر در اصول موضوع مغناطیس گفتیم که همواره $\nabla \,.\, \mathbf{B} = ۰$ پس $\mathbf{B}$ را می‌توان به‌صورت کرل میدان برداری دیگری مثل $\mathbf{A}$ نوشت:

$$\nabla \,.\, \mathbf{B} = ۰ \quad \rightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad (۲۳\text{-}۴)$$

$\mathbf{A}$ را پتانسیل مغناطیسی برداری نامیده و واحد آن $\frac{wb}{m}$ است.

اگر از لاپلاسین برداری که در فصل اول بیان شد استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\nabla^۲ \mathbf{A} = \nabla(\nabla \,.\, \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \qquad (۲۴\text{-}۴)$$

از این رابطه دو نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_۰ \mathbf{J} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times \mathbf{B} = \mu_۰ \mathbf{J} \qquad -۱$$

۲- از آنجا که $\nabla \,.\, \mathbf{A} = ۰$ (مسئلهٔ ۱۵ را حل کنید) پس $\nabla(\nabla \,.\, \mathbf{A}) = ۰$ و در نتیجه:

$$\nabla^۲ \mathbf{A} = -\mu_۰ \mathbf{J} \qquad (۲۵\text{-}۴)$$

از حل این معادله بدست می‌آید که:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_۰}{۴\pi} \int_v \frac{\mathbf{J}\, dv}{R} \qquad (۲۶\text{-}۴)$$

و البته با توجه به نوع توزیع و با استفاده از تغییر متغیر می‌توان نوشت:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\int_s \frac{\mathbf{K}\, ds}{R} \qquad (۲۷-۴)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\int_C \frac{I\ \mathbf{dl}}{R} \qquad (۲۸-۴)$$

در حالت کلی به دو دلیل پتانسیل مغناطیس برداری را مطرح می‌کنیم:

الف) در برخی مواقع محاسبهٔ چگالی شار مغناطیسی بسیار سخت بوده ولی برعکس محاسبهٔ پتانسیل مغناطیسی برداری ساده‌تر است در این مواقع با محاسبهٔ پتانسیل و استفاده از رابطهٔ $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ، با کرل گرفتن از پتانسیل به چگالی شار مغناطیسی خواهیم رسید.

ب) همانطور که گفتیم واحد پتانسیل مغناطیس برداری $\frac{wb}{m}$ است، اگر کمی دقت کنید می‌توانید به ارتباط پتانسیل با شار پی ببرید:

نکتهٔ طلایی

پتانسیل مغناطیسی برداری دارای مفهوم فیزیکی است، بدین معنی که انتگرال خطی آن به دور هر مسیر بسته برابر کل شار مغناطیسی گذرنده از سطح محصور شده توسط این مسیر است. به عبارتی:

$$\varphi = \oint_C \mathbf{A}\ .\ \mathbf{dl} \qquad (۲۹-۴)$$

پس یکی دیگر از کاربردهای آن یافتن شار مغناطیسی است.

به جدول (۴-۸) دقت کنید. توضیحات مرتبط با این جدول را در قسمت‌های بعد بیان می‌کنیم.

جدول ۴-۸: تناظر بین پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی

تناظر بین پتانسیل‌ها	
الکترواستاتیک	مغناطیس
$V = \int \frac{\rho_l}{۴\pi\varepsilon_\circ R} dl$	$\mathbf{A} = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\int_C \frac{I\ \mathbf{dl}}{R}$

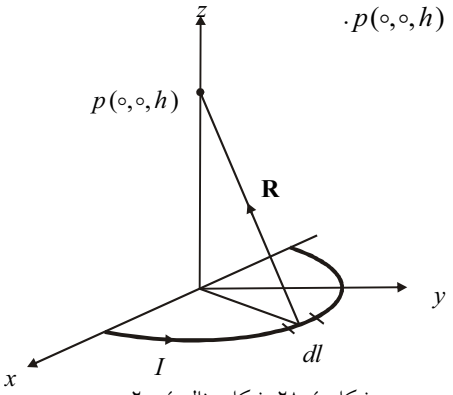
برای یافتن پتانسیل مغناطیسی روش‌های مختلفی (بسته به شرایط مسئله) وجود دارد. در ادامه این روش‌ها را مطرح کرده و با ارائهٔ مثال‌هایی، آنها را توضیح خواهیم داد.

۱۴-۶-۱- استفاده از رابطهٔ (۴-۲۶) برای محاسبهٔ پتانسیل مغناطیسی برداری

در این حالت به همان شکلی که میدان را حساب می‌کردیم، عمل می‌نماییم. کافی است اندازهٔ بردار مکان را یافته و آن را در المان دیفرانسیلی مورد نظر ضرب کرده و در نهایت انتگرال را حل کنیم. همانگونه که مشاهده می‌شود انتگرال موجود در رابطهٔ (۴-۲۶) فاقد ضرب خارجی است پس مسیر حل کمتری را شاهد خواهیم بود. مثال زیر این موضوع را بررسی کرده است.

مثال ۴-۲۰ مطلوبست محاسبه پتانسیل مغناطیسی برداری ناشی از نیم‌دایره $\left| \begin{array}{l} r=1 \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{array} \right.$ حامل جریان I واقع در صفحه $z=0$ در نقطه‌ای به مختصات $p(0,0,h)$.
(کارشناسی ارشد برق)

حل: مطابق شکل (۴-۲۸) بردار مکان را رسم می‌کنیم:



شکل ٤-۲۸: شکل مثال ٤-۲۰

$$\mathbf{R} = -r\ \mathbf{a}_r + z\ \mathbf{a}_z \quad ، \quad |\mathbf{R}| = (z^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}$$

همچنین:

$$I\ \mathbf{dl} = I\ r\, d\varphi\, \mathbf{a}_\varphi$$

پس:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I\ \mathbf{dl}}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\pi \frac{I\ r\ d\varphi\ \mathbf{a}_\varphi}{(z^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I\ r}{4\pi (z^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} \int_0^\pi (-\sin\varphi\ \mathbf{a}_x + \cos\varphi\ \mathbf{a}_y)\, d\varphi = \frac{\mu_0 I\ r(-\mathbf{a}_x)}{2\pi (z^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}$$

کافی است در رابطهٔ فوق قرار دهیم $r=1, z=h$.

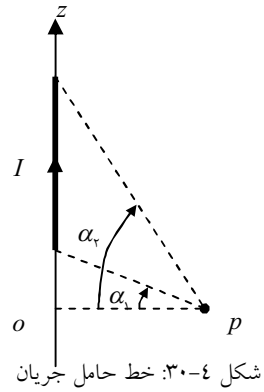
مثال ۴-۲۱ دو قطعه سیم نازک مستقیم با جریان I به طول a مطابق شکل (۴-۲۹) دو ضلع یک مربع را تشکیل می‌دهند. بردار پتانسیل مغناطیسی $\mathbf{A}$ در گوشهٔ مقابل چقدر است؟ (کارشناسی ارشد برق ۷۳)

حل: ابتدا پتانسیل مغناطیسی ناشی از یک کابل محدود را بررسی کرده و با استفاده از آن به سوال پاسخ می‌دهیم. طبق رابطهٔ (۴-۲۶) میدان ناشی از شکل (۴-۳۰) در نقطه‌ای مثل p عبارتست از:

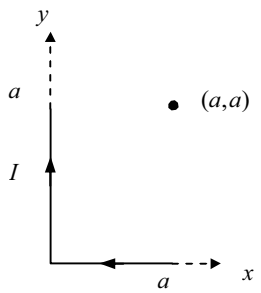
$$\mathbf{A}=\frac{\mu_\circ I}{۴\pi}\int_{\alpha_۱}^{\alpha_۲}\frac{d\alpha}{\cos\alpha}\mathbf{a}_z=\mathbf{a}_z\frac{\mu_\circ I}{۴\pi}Ln\left[\frac{\cos\alpha_۱\times\left(۱+\sin\alpha_۲\right)}{\cos\alpha_۲\times\left(۱+\sin\alpha_۱\right)}\right] \qquad (۳۰-۴)$$

با استفاده از رابطهٔ فوق و جمع آثار خواهیم داشت:

$$\mathbf{A}=\frac{\mu_\circ I}{۴\pi}Ln\left(۱+\sqrt{۲}\right)\left(\mathbf{a}_y-\mathbf{a}_x\right)$$



شکل ٤-۳۰: خط حامل جریان



شکل ٤-۲۹: شکل مثال ٤-۲۱

تمرین ۴-۸: پتانسیل مغناطیسی برداری کابلی بی‌نهایت با شعاع داخلی a را در تمام فضا بیابید.

تمرین ۴-۹: یک کابل هم‌محور به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b که هم‌محور با محور z بوده و در مغزی آن جریان $I_\circ\mathbf{a}_z$ و در شیلد خارجی آن جریان $-I_\circ\mathbf{a}_z$ جاری می‌باشد، در اختیار داریم. با فرض اینکه بردار پتانسیل مغناطیسی در $r=b$ صفر است، مطلوبست محاسبه بردار پتانسیل مغناطیسی در $a<r<b$. (این ناحیه از فضای آزاد پر شده است) (تذکر: سعی کنید این تمرین را فقط با استفاده از روش حل مثال (۴-۲۰) حل کنید.)

۴-۶-۲- استفاده از تناظر بین الکترواستاتیک و مغناطیس برای محاسبهٔ پتانسیل مغناطیسی برداری

به جدول (۴-۸) دقت کنید. بخش کوچکی از کاربرد دوگانی در حل مسائل مغناطیس ساکن را در این قسمت مشاهده خواهید کرد. به‌راحتی می‌توان دریافت که پتانسیل مغناطیسی همان پتانسیل الکتریکی است مشروط بر اینکه فرض کنیم توزیع بار ρ معادل جریان I است و از طرفی به جای $\varepsilon_\circ$، $\frac{۱}{\mu_\circ}$ قرار گرفته است. لازم به ذکر است که این روش برای محاسبهٔ پتانسیل مغناطیسی، فقط در برخی

مواقع به‌کار رفته و کاربرد آن معمولاً به مواردی که دارای توزیع خطی و یا یک جهته است، محدود می‌گردد.

مثال ۴-۲۲ پتانسیل مغناطیسی برداری کابلی بی‌نهایت با شعاع داخلی a را در خارج کابل بیابید. (کارشناسی ارشد هسته‌ای ۷۷)

حل: پتانسیل الکتریکی یک خط بار بی‌نهایت از رابطهٔ زیر (رابطه ۲-۴۹) بدست می‌آید:

$$V = \frac{\rho_l}{۲\pi\varepsilon_\circ} Ln \frac{r_\circ}{r}$$

برای بدست آوردن پتانسیل مغناطیسی برداری کافی است به‌صورت زیر عمل کنیم:

۱- به‌جای ρ_l قرار دهیم I .

۲- به‌جای $\varepsilon_\circ$ قرار دهیم $\frac{۱}{\mu_\circ}$.

۳- به‌جای V قرار دهیم I .

که خواهیم داشت:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_\circ \mathbf{I}}{۲\pi} Ln\left(\frac{r_\circ}{r}\right) \qquad (۳۱-۴)$$

تمرین ۴-۱۰: با روشی مشابه مثال (۴-۲۲) پتانسیل مغناطیسی برداری را برای یک کابل رفت و برگشت که به فاصله d از هم قرار دارند، محاسبه کنید. (رابطهٔ ۲-۵۲ را ببینید)

تمرین ۴-۱۱: با روشی مشابه مثال (۴-۲۲)، تمرین (۴-۹) را دوباره حل کنید.

تمرین ۴-۱۲: فرض کنید باری با چگالی یکنواخت ρ در حجم استوانهٔ بی‌نهایت به شعاع a توزیع شده است.

الف) پتانسیل الکتریکی را برای نقاط داخل استوانه پیدا کنید.

ب) با استفاده از روش حل مثال (۴-۱۴) پتانسیل مغناطیسی برداری را برای نقاط درون کابل محاسبه نموده و با نتیجهٔ تمرین (۴-۸) مقایسه کنید.

۴-۶-۳- استفاده از معادلات لاپلاس و نتایج آن برای محاسبهٔ پتانسیل مغناطیسی برداری

اگر در بخشی از فضا جریان وجود نداشته باشد، برای محاسبهٔ پتانسیل مغناطیسی برداری در آن بخش از فضا می‌توانیم از حل معادلهٔ لاپلاس استفاده کنیم. دلیل این مطلب را به‌صورت زیر تشریح می‌کنیم:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \xrightarrow{J=0} \nabla^2 \mathbf{A} = 0 \leftrightarrow \text{لاپلاس}$$

به مثال زیر توجه کنید.

مثال کلیدی

مثال ۴-۲۳ یک کابل هم‌محور به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b که هم‌محور با محور z بوده و در مغزی آن جریان $I_0 \mathbf{a}_z$ و در شیلد خارجی آن جریان $-I_0 \mathbf{a}_z$ جاری می‌باشد در اختیار داریم. با فرض اینکه بردار پتانسیل مغناطیسی در $r = b$ صفر است، مطلوبست محاسبه بردار پتانسیل مغناطیسی در $a < r < b$. (این ناحیه از فضای آزاد پر شده است)

حل: با دو استدلال ساده به پاسخ می‌رسیم:

- چون جریان در جهت z است نتیجه می‌گیریم که پتانسیل مغناطیسی برداری نیز فقط دارای مولفهٔ z است. (این موضوع را می‌توان از بسط معادله پواسون $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$ در دستگاه مختصات قائم بدست آورد، همچنین می‌توان نتیجه گرفت که در دستگاه کارتزین هر جهتی که توزیع جریان داشته باشد بردار پتانسیل مغناطیسی نیز دارای همان جهت است) پس تا به اینجا فهمیدیم که: $\mathbf{A} = A_z \mathbf{a}_z$

- می‌دانیم که در $a < r < b$ میدان مشابه میدان یک کابل بوده و در نتیجه در جهت φ است. از طرفی با توجه به اینکه $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_z}{\partial r}\right) = 0$$

که رابطهٔ فوق جملهٔ z معادلهٔ لاپلاس است. از این رابطه نتیجه می‌گیریم که:

$$A_z = k_1 Ln\, r + k_2$$

برای بدست آوردن ضرایب ثابت باید دو شرط مرزی را بررسی کنیم:

۱- پتانسیل در $r = b$.

۲- برقراری رابطهٔ $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ برای فضای $a < r < b$.

داریم:

$$\left.\begin{array}{lll} A_z(r=b) & \rightarrow & k_1 Ln\, b + k_2 = 0 \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} & \rightarrow & -\dfrac{\partial A_z}{\partial r}\mathbf{a}_\varphi = \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\mathbf{a}_\varphi \end{array}\right\}$$

که پس از حل دستگاه نتیجه می‌گیریم:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} Ln\left(\frac{b}{r}\right)\mathbf{a}_z \qquad (۳۲-۴)$$

۴-۶-۴- استفاده از میدان و حل پواسون برداری برای محاسبهٔ پتانسیل مغناطیسی برداری

اگر در بخشی از فضا جریان وجود داشته باشد و نتوانیم از موارد گذشته به‌راحتی پتانسیل را بیابیم، به شرط داشتن میدان در آن بخش از فضا، می‌توانیم با حل معادلهٔ برداری پواسون به پتانسیل برسیم.

مثال ۴-۲۴ جریان I به‌طور یکنواخت از پوسته‌ی استوانه‌ای به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b می‌گذرد. قالب پتانسیل مغناطیسی (بدون بررسی ضرایب نامعین) را در $a < r < b$ بیابید. [۸]

حل: چگالی جریان در جهت z است پس مطابق توضیحات مثال (۴-۲۳) پتانسیل مغناطیسی برداری فقط داری مولفهٔ z است. در نتیجه:

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

که در آن J_z چگالی حجمی جریان است و به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$J_z = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)}$$

از طرفی با توجه به اینکه توزیع جریان تابعی از z یا φ نبوده و فقط با فرم شعاعی توزیع می‌شود، پس A_z فقط تابعی از r می‌باشد. در این صورت از لاپلاسین داریم:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_z}{\partial r}\right) = -\mu_0 J_z$$

کافی است از این رابطهٔ دوبار انتگرال بگیریم:

$$A_z = -\frac{\mu_\circ r^۲ J_z}{۴} + k_۱ Ln\, r + k_۲$$

پس نتیجه خواهد داد:

$$\mathbf{A} = \left[-\frac{\mu_\circ r^۲ I}{۴\,\pi\,(b^۲ - a^۲)} + k_۱ Ln\, r + k_۲ \right] \mathbf{a}_z$$

تذکر: اگر در رسیدن به رابطهٔ فوق مشکل دارید، می‌توانید به‌صورت زیر عمل نمایید:
قطعاً پتانسیل مغناطیسی برداری دو بخش اصلی دارد، یکی جهت و دیگری اندازه. پس باید تعیین کنیم که جهت چیست و اندازهٔ پتانسیل با چه متغیری تغییر می‌کند؟
- همانطور که پیش از این اشاره کردیم، جهت پتانسیل مغناطیسی برداری جهت حرکت جریان است (یعنی در این مثال همان جهت z)
- با استفاده از قانون دست راست، جهت میدان مغناطیسی را تشخیص می‌دهیم (در این حالت در جهت φ). پس تا به اینجا دو جهت را پیدا کرده‌ایم (یکی z و دیگری φ) جهت سوم، متغیری است که اندازهٔ پتانسیل مغناطیسی را تغییر می‌دهد (یعنی r). پس تا به اینجا فهمیدیم که:

$$\mathbf{A} = A(r)\,\mathbf{a}_z$$

حل کافی است جملهٔ مربوطه را از رابطهٔ کرل انتخاب کرده و بسط دهیم (همان کاری که در بالا کرده‌ایم)

برای محاسبهٔ ضرایب ثابت بایستی دو موضوع را بررسی کنیم:
۱- محاسبهٔ میدان در $a < r < b$ و محاسبهٔ پتانسیل با کرل گرفتن از پاسخ. با این عمل می‌توانیم ضریب $k_۱$ را بیابیم.
۲- محاسبهٔ پتانسیل مغناطیسی برداری برای $r > b$ و برابر قرار دادن پاسخ با پتانسیل محاسبه شده برای $a < r < b$. با این عمل می‌توان $k_۲$ را محاسبه کرد.
این کار به عنوان تمرین به شما واگذار شده است. (تمرین ۴-۱۳ را ببینید.)

تمرین ۴-۱۳: با توجه به موارد مطرح شده در مثال (۴-۲۴) مطلوبست محاسبهٔ:
الف) پتانسیل مغناطیس برداری برای $r > b$.
ب) محاسبهٔ ضرایب $k_۱$ و $k_۲$.

POWEREN.IR

۴-۶-۵- استفاده از میدان مغناطیسی برای محاسبهٔ پتانسیل مغناطیسی برداری

همانطور که می‌توانیم از پتانسیل مغناطیسی برداری به رابطهٔ میدان برسیم، به‌صورت مشابه قادریم تا با محاسبهٔ میدان به پتانسیل دست پیدا کنیم. مشکل مهمی که در این حالت با آن مواجهیم رسیدن به یک معادلهٔ دیفرانسیل پاره‌ایست که حل آن تقریبا غیر ممکن می‌باشد. با این حال اگر سیستم دارای تقارن باشد می‌توان با یک انتگرال‌گیری راحت به فرم کلی پتانسیل رسید. برای تعیین ضرایب نامعین پاسخ نیز یا باید از شرایط فیزیکی سیستم و یا شرایط اولیهٔ مسئله استفاده کرد. مثال زیر این ایده را توضیح می‌دهد. برای تمرین بیشتر می‌توانید تمرین (۴-۱۵) را حل کنید.

مثال کلیدی

مثال ۴-۲۵ یک سلونوئید طویل با n دور سیم‌پیچ در واحد طول حامل جریان I می‌باشد. بردار پتانسیل مغناطیسی برداری را داخل سلونوئید بیابید. (کارشناسی ارشد برق)

حل: شدت میدان مغناطیسی را در داخل سلونوئید محاسبه کرده‌ایم: $\mathbf{H} = n\,I\,\mathbf{a}_z$

با توجه به اینکه میدان در جهت z است و همچنین $\nabla \times \mathbf{A} = \mu_\circ \mathbf{H}$ پس ضریب مولفهٔ z کرل را می‌نویسیم:

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right) = \mu_\circ\, n\, I$$

از آنجا که سیستم نسبت به φ متقارن است، جملهٔ $\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}$ صفر خواهد بود (چرا؟) پس خواهیم داشت:

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right) = \mu_\circ\, n\, I$$

قبل از اینکه ادامه دهیم ابتدا دو سئوال جهت‌دار را جواب می‌دهیم:

سوال ۱: جهت جریان روی سلونوئید چگونه است؟

جواب: در جهت φ ، یعنی $\mathbf{I} = I_\circ\,\mathbf{a}_\varphi$.

سوال ۲: با توجه به آخرین رابطهٔ محاسبه شده جهت پتانسیل مغناطیسی برداری چیست؟

جواب: فقط جملهٔ A_φ باقیمانده است پس $\mathbf{A} = A_\varphi\ \mathbf{a}_\varphi$.

(حال شما پاسخ دهید: از موارد فوق چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟)

ادامه حل را پی می‌گیریم. کافی است از رابطهٔ بدست آمده انتگرال بگیریم، داریم:

$$A_\varphi = \frac{۱}{۲}\mu_\circ n I r + \frac{k}{r}$$

برای تعیین ضریب نامعین k از شرایط فیزیکی سیستم کمک می‌گیریم. اگر دقت کنیم با توجه به رابطهٔ محاسبه شده پتانسیل در محور سلونوئید ($r = \circ$) بی‌نهایت می‌شود، که این با واقعیت سازگاری ندارد (چرا؟) پس ضریب k بایستی برابر صفر باشد و از اینرو خواهیم داشت:

$$\mathbf{A} = \frac{۱}{۲}\mu_\circ n I r \mathbf{a}_\varphi \qquad (۳۳-۴)$$

۴-۶-۶- استفاده از رابطهٔ (۴-۲۹) برای محاسبهٔ پتانسیل مغناطیسی برداری

یکی از روش‌های ساده برای محاسبهٔ پتانسیل مغناطیسی برداری و البته برای برخی از حالات خاص، استفاده از رابطهٔ زیر است:

$$\varphi = \oint_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{dl} \qquad (۳۴-۴)$$

در قسمت قبل، شار مغناطیسی را بررسی کردیم، در آنجا نشان دادیم که:

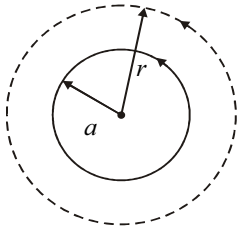
$$\varphi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} \qquad (۳۵-۴)$$

اگر تقارن در سیستمی باعث شود که $B\,S = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds}$، آنگاه برای چنین سیستم می‌توان نوشت:

$$A\,L = B\,S$$

و به‌راحتی پتانسیل مغناطیسی برداری را محاسبه نمود. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۴-۲۶ از یک سیم‌پیچ استوانه‌ای نامحدود (سیملوله) جریان ثابت $\mathbf{I}$ می‌گذرد. تعداد دورها بسیار زیاد و n بر واحد طول فرض می‌شود. بردار پتانسیل مغناطیسی $\mathbf{A}$ خارج از سیملوله و در فاصلهٔ r از محور آن (محور z) چگونه است؟ (کارشناسی ارشد برق)



شکل ٤-۳۱: شکل مثال ٤-٢٦

حل: طبق توضیحات مطرح‌شده:

$$\varphi = \oint_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{dl} = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds}$$

پس:

$$A\,L = B\,S \quad \rightarrow A \times (۲\pi\, r) = (\mu_\circ\, n\, I) \times (\pi\, a^۲)$$

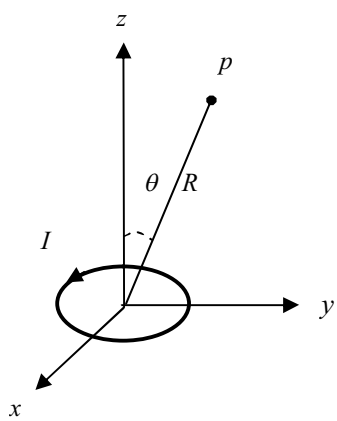
که نتیجه می‌دهد:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_\circ\, n\, I\, a^۲}{۲\, r}\mathbf{a}_\varphi$$

تمرین ۴-۱۴: روی صفحهٔ $z = \circ$، چگالی جریان سطحی $\mathbf{k} = k_\circ\, \mathbf{a}_x$ جاریست. پتانسیل مغناطیسی برداری را در تمام فضا پیدا کنید.

۴-۷- دوقطبی مغناطیسی

یک حلقهٔ کوچک حامل جریان را دوقطبی مغناطیسی می‌نامیم. (مطابق شکل ۴-۳۲) محاسبهٔ میدان و پتانسیل ناشی از این حلقهٔ کوچک جریان را در نقاط دور ($R >> a$) به مسئلهٔ ۱۰ آخر فصل واگذار می‌کنیم. با این حال به دلیل اهمیت فوق العاده این پاسخ‌ها آنها را در اینجا می‌آوریم.



شکل ٤-۳۲: دوقطبی مغناطیسی

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ\, m}{۴\,\pi\, R^۳}(۲\cos\theta\ \mathbf{a}_R + \sin\theta\ \mathbf{a}_\theta)} \qquad (۴\text{-}۳۶)$$

$$\boxed{\mathbf{A} = \frac{\mu_\circ\ \mathbf{m} \times \mathbf{a}_R}{۴\,\pi\, R^۲}} \qquad (۴\text{-}۳۷)$$

که در این روابط $\mathbf{m}$ بردار گشتاور دوقطبی مغناطیسی بوده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{m} = I\ \pi\ a^۲\, \mathbf{a}_z \qquad (۴\text{-}۳۸)$$

با توجه به این رابطه کاملا واضح است که واحد آن $A\,.\,m^۲$ است.

در اینجا لازم است تشابه و مقایسهٔ مطالب اخیر را با حوزهٔ الکترواستاتیک بررسی کنیم. از این جهت به جدول (۴-۹) توجه نمایید. توضیحات بیشتر در مورد دوقطبی‌ها را به پس از بیان مغناطیس‌شدگی موکول می‌کنیم.

جدول ۴-۹: تناظر بین دوقطبی‌های الکتریکی و مغناطیسی

تناظر بین دو حوزهٔ الکترواستاتیک و مغناطیس ساکن در ارتباط با دوقطبی‌ها		
	الکترواستاتیک	**مغناطیس**
گشتاور دوقطبی	$\mathbf{P} = q\, d\, \mathbf{a}_n$	$\mathbf{m} = I\ \pi\ a^{۲} \mathbf{a}_z$
میدان دوقطبی	$\mathbf{E} = \frac{P}{۴\ \pi\ \varepsilon_{\circ} R^{۳}} (۲\cos\theta\ \mathbf{a}_R + \sin\theta\ \mathbf{a}_\theta)$	$\mathbf{B} = \frac{\mu_{\circ} m}{۴\ \pi\ R^{۳}} (۲\cos\theta\ \mathbf{a}_R + \sin\theta\ \mathbf{a}_\theta)$
پتانسیل دوقطبی	$V = \frac{\mathbf{P}\ .\ \mathbf{a}_R}{۴\ \pi\ \varepsilon_{\circ} R^{۲}}$	$\mathbf{A} = \frac{\mu_{\circ}\ \mathbf{m} \times \mathbf{a}_R}{۴\ \pi\ R^{۲}}$

۴-۸- مغناطیس‌شدگی و چگالی‌های جریان معادل

۴-۸-۱- مغناطیس‌شدگی

الکترون‌های موجود در اتم‌های مواد به خاطر چرخش اسپینی و اربیتالی دارای گشتاور دوقطبی مغناطیسی هستند. این گشتاورهای بسیار کوچک، به این دلیل که در راستاهای مختلفی قرار دارند میدان مغناطیسی ایجاد نمی‌کنند. قرار گرفتن در یک میدان مغناطیسی خارجی باعث هم‌راستا شدن نسبی دوقطبی‌های مغناطیسی می‌شود، به نحوی که اگر مجموع دوقطبی‌های موجود در حجم کوچک dv را با هم جمع کنیم، دیگر حاصل جمع صفر نمی‌شود، بردار مغناطش چنین ماده‌ای به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \to \circ} \frac{\sum_{k=۱}^{n\Delta V} \mathbf{m}_k}{\Delta V} \qquad (۳۹-۴)$$

- مقدار گشتاور دوقطبی معادل برای توزیع‌های پیوسته از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{M} = \frac{۱}{۲} I \int \mathbf{R} \times \mathbf{dl} \qquad (۴۰-۴)$$

در رابطهٔ فوق R بردار مکانی در داخل توزیع، I جریان معادل توزیع، dl بردار دیفرانسیل روی مسیر خارجی توزیع است.

- رابطهٔ (۴-۴۰) برای یک حلقهٔ جریانی مسطح به‌صورت زیر در خواهد آمد:

$$\boxed{\mathbf{M} = S\ I\ \mathbf{a}_n} \qquad (۴۱-۴)$$

که در این رابطه S مساحت حلقه، I جریان گذرنده از حلقه و $\mathbf{a}_n$ بردار عمود بر حلقه است. به مثال‌های زیر توجه کنید تا به این موضوع پی‌ببرید:

مثال ۴-۲۷ مطلوبست محاسبهٔ بردار گشتاور مغناطیسی برای یک دوقطبی مغناطیسی مشابه شکل (۴-۳۲). (کارشناسی ارشد برق ۶۹)

حل: در بخش قبل گشتاور دوقطبی مغناطیسی را برای یک دوقطبی به‌صورت $\mathbf{m} = I\ \pi\ a^{۲}\mathbf{a}_z$ مطرح کردیم در این قسمت سعی می‌کنیم تا با استفاده از هر یک از روابط (۴-۴۰) و (۴-۴۱) این مقدار را بدست آوریم.

الف) با استفاده از رابطهٔ (۴-۴۰):

در این حالت R بردار مکانی است که مرکز حلقه را به هر نقطه روی آن متصل می‌کند، پس:

$$\mathbf{R} = a\ \mathbf{a}_r$$

از طرفی، روی محیطِ یک حلقه دایره‌ای، dl برابر خواهد بود با: $\mathbf{dl} = a\ d\varphi\ \mathbf{a}_\varphi$. حال از رابطهٔ (۴-۴۰) استفاده می‌کنیم:

$$\mathbf{M} = \frac{۱}{۲} I \int \mathbf{R} \times \mathbf{dl} = \frac{۱}{۲} I \int a\ \mathbf{a}_r \times a\ d\varphi\ \mathbf{a}_\varphi = \frac{۱}{۲} I \int_{۰}^{۲\pi} a^{۲} d\varphi\ \mathbf{a}_z = \pi\ a^{۲}\mathbf{a}_z$$

ب) با استفاده از رابطهٔ (۴-۴۱):

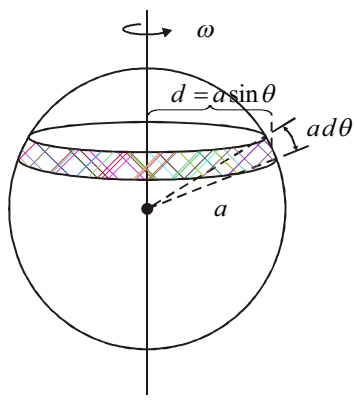
حلقه مسطح است و مساحت آن برابر $\pi a^{۲}$ می‌باشد. همچنین بردار عمود بر سطح حلقه نیز $\mathbf{a}_z$ است، پس بر طبق رابطهٔ (۴-۴۱) خواهیم داشت:

$$\mathbf{M} = S\ I\ \mathbf{a}_n = \pi\ a^{۲} I\ \mathbf{a}_z \qquad (۴۲\text{-}۴)$$

که در هر دو حالت به پاسخ مطلوب دست یافتیم.

مثال ۴-۲۸ بار Q به‌طور یکنواخت روی کره‌ای به شعاع a قرار دارد و کره با سرعت زاویه‌ای ω حول محوری که از مرکزش می‌گذرد، می‌چرخد. گشتاور دوقطبی مغناطیسی معادل را بیابید.

حل: در مسائلی از این دست و با هر نوع توزیعی ابتدا یک نوار حلقه‌ای را انتخاب کرده و با تعمیم آن به شکل مورد نظر دست خواهیم یافت. در هر مورد یکی از مهمترین بخش‌های حل یافتن مقدار جریان است. این موضوع تا حد زیادی در فصل سوم تشریح شده است.



شکل ٤-٣٣: شکل مثال ٤-٢٨

در فصل سوم دیدیم که برای محاسبهٔ جریان ناشی از دوران یک جسم با سرعت زاویه‌ای ω، ابتدا فاصله المانِ حلقوی را تا محور دوران یافته و سپس آن را در سرعت ضرب می‌کنیم. اگر حاصل را در چگالی سطحی بار ضرب کنیم به مقدار جریان رسیده‌ایم. در اینجا نیز به‌صورت مشابه عمل می‌کنیم. یک نوار را از روی کره انتخاب می‌کنیم. فاصلهٔ هر نقطه از این نوار تا محور برابر است با شعاع همین دایرهٔ فرضی که این شعاع برابر است با $d = a\sin\theta$. از طرف دیگر با توجه به شکل کره عرض هر یک از این نوارها برابر $ad\theta$ است. پس با فرض اینکه چگالی جریان سطحی برای این نوار σ است در مورد جریان آن داریم:

$$I = (\sigma\, a\, d\theta)(a\sin\theta)\,\omega$$

در این حالت ممان این حلقه ($\mathbf{M} = S\, I\, \mathbf{a}_n$) به این صورت خواهد بود:

$$\mathbf{dM} = \left(\sigma a^{۲}\omega\sin\theta\, d\theta \times \pi(a\sin\theta)^{۲}\right)\mathbf{a}_z = \pi\ \sigma\ a^{۴}\sin^{۳}\theta\ \omega\ d\theta\ \mathbf{a}_z$$

که در این رابطه $\pi(a\sin\theta)^{۲}$ مساحت همان نوار فرضی است. حال برای محاسبهٔ گشتاور دوقطبی مغناطیسی معادل کافی است از رابطهٔ فوق در بازهٔ مربوطه انتگرال بگیریم:

$$\mathbf{M} = \int_{۰}^{\pi} \pi\ \sigma\ a^{۴}\sin^{۳}\theta\ \omega\ d\theta\ \mathbf{a}_z = \frac{۴}{۳}\pi\ \sigma\ a^{۴}\omega\ \mathbf{a}_z \xrightarrow{Q=\sigma\ \pi\ a^{۲}} \mathbf{M} = \frac{Q\ a^{۲}\omega}{۳}\mathbf{a}_z$$

نکتهٔ طلایی

محاسبهٔ گشتاور مغناطیسی معادل، یکی از بهترین راهکارها برای بدست آوردن پتانسیل و میدان یک توزیع، در فاصلهٔ دوری از آن است. در این موارد به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱- گشتاور مغناطیسی معادل را برای توزیع مورد نظر می‌یابیم.

۲- برای محاسبهٔ میدان و یا پتانسیل در هر نقطهٔ دلخواهی از فضا که دارای فاصلهٔ نسبتاً دوری از توزیع است، کافی است بردار **M** بدست آمده از قسمت قبل را در رابطه‌های (۴-۳۶) و (۴-۳۷) قرار دهیم.

به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴-۲۹ مطلوبست محاسبهٔ:

الف) میدان ناشی از توزیع مثال (۴-۲۸) در نقطهٔای خارج کره.

ب) پتانسیل مغناطیسی برداری حلقهٔ مربع شکلی بـه ضـلع a بـه مرکـز مبـداء مختـصات را در نقطـهٔ $(۳a,\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴})$.

حل: الف) مطابق حل مثال (۴-۲۸) گشتاور مغناطیسی معـادل ایـن توزیـع بـصورت $\mathbf{M}=\frac{Q\ a^{۲}\omega}{۳}\mathbf{a}_z$ است. کافی است آن را در رابطهٔ (۴-۳۶) قرار دهیم:

$$\begin{cases}\mathbf{B}=\dfrac{\mu_\circ m}{۴\ \pi R^{۳}}(۲\cos\theta\ \mathbf{a}_R+\sin\theta\ \mathbf{a}_\theta)\\ m=\dfrac{Q\ a^{۲}\omega}{۳}\end{cases}\rightarrow\quad \mathbf{B}=\frac{\mu_\circ Q\ a^{۲}\omega}{۱۲\ \pi R^{۳}}(۲\cos\theta\ \mathbf{a}_R+\sin\theta\ \mathbf{a}_\theta)$$

ب) گشتاور دوقطبی مغناطیسی سیستم مذکور به‌صورت $\mathbf{M}=S\ I\ \mathbf{a}_n=a^{۲}I\ \mathbf{a}_z$ اسـت. بـا قـرار دادن آن در رابطهٔ (۴-۳۷) خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\mathbf{A}=\dfrac{\mu_\circ\ M\times\mathbf{a}_R}{۴\ \pi R^{۲}}\\ \mathbf{M}=a^{۲}I\ \mathbf{a}_z\end{cases}\Bigg|_{\substack{R=۳a\\ \theta=\frac{\pi}{۴}}}\rightarrow\mathbf{A}=\frac{\mu_\circ a^{۲}I(\mathbf{a}_z\times\mathbf{a}_R)}{۴\ \pi(۳a)^{۲}}=\frac{\mu_\circ a^{۲}I\cos\theta}{۴\ \pi(۳a)^{۲}}\mathbf{a}_\varphi\Bigg|_{\theta=\frac{\pi}{۴}}\rightarrow\mathbf{A}=\frac{\mu_\circ I\sqrt{۲}}{۷۲\ \pi}\mathbf{a}_\varphi$$

مثال ۴-۳۰ بار Q بطور یکنواخت روی قرصی به شعاع a قرار دارد. قرص با سرعت زاویه‌ای ω حـول محوری که از مرکزش می‌گذرد می‌چرخد. مطلوبست محاسبهٔ‌گشتاور دوقطبی مغناطیسی معادل ناشـی از این توزیع.

حـــل: در مثـــال (۴-۲۸) راهکـــار کلـــی محاســـبهٔ گـــشتاور دوقطبـــی مغناطیـــسی بـــا اســـتفاده از رابطهٔ $\mathbf{M}=S\ I\ \mathbf{a}_n$ را یاد گرفتیم. در این مثال، از رابطهٔ (۴-۴۰) استفاده می‌کنیم. طبق این رابطه:

$$\mathbf{M} = \frac{۱}{۲} I \int \mathbf{R} \times \mathbf{dl} = \frac{۱}{۲} \int \mathbf{R} \times \mathbf{J}\, ds$$

که در آن:

$$\mathbf{R} = r\,\mathbf{a}_r \quad , \quad \mathbf{J} = \sigma\, r\, \omega\, \mathbf{a}_\varphi \;, ds = r\, dr\, d\varphi$$

پس:

$$\mathbf{M} = \frac{۱}{۲} \int \mathbf{R} \times \mathbf{J}\, ds = \frac{۱}{۲} \int_{۰}^{a} \int_{۰}^{۲\pi} \left(r\,\mathbf{a}_r\right) \times \left(\sigma\, r\, \omega\, \mathbf{a}_\varphi\right) \times r\, dr\, d\varphi = \ldots = \frac{\sigma\, \pi\, \omega\, a^{۴}}{۴} \mathbf{a}_z$$

تمرین ۴-۱۶: برای مثال (۴-۳۰) مطلوبست:

الف) محاسبهٔ چگالی شار مغناطیسی و پتانسیل مغناطیسی برداری در نقطهٔ دلخواهی از فضا با استفاده از روشی مشابه .

ب) محاسبهٔ چگالی شار مغناطیسی و پتانسیل مغناطیسی برداری در مبداء مختصات با استفاده از قانون بیوساوار.

تذکر: در کلیه موارد فرض کنید که مرکز قرص مبداء مختصات بوده و محور آن در جهت محور z است.

۴-۸-۲- چگالی‌های جریان معادل

در بخش قبل در مورد مغناطیس‌شدگی صحبت کردیم. گفتیم که قرارگیری برخی مواد در مجاورت میدان‌های مغناطیسی موجب مغناطیده شدن آنها می‌شود (به یاد چگونگی آهنربا کردن یک میخ در آزمایش‌های دبستان بیفتید!) در این قسمت می‌خواهیم چگونگی مدل کردن این قطبیدگی را بیان کرده و در واقع قصد داریم نشان دهیم که چگونه و چه مقدار جریانی را به یک جسم بدهیم تا بتوانیم همان قطبیدگی (و میدان جدید ناشی از این قطبش) را ایجاد کنیم. این جریان‌های را جریان‌های معادل می‌نامیم (همچون بارهای الکتریکی مقید در پلاریزه شدن یک جسم) از اینروست که عنوان این قسمت را چگالی‌های جریان معادل گذاشته‌ایم.

می‌توان نشان داد که برای یک جسم مغناطیده جریان‌های حجمی و سطحی مقید بصورت زیر تعریف می‌شوند:

چگالی جریان حجمی: $$\boxed{\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}} \qquad (۴۳-۴)$$

چگالی جریان سطحی: $$\boxed{\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times \mathbf{a}_n} \qquad (۴۴-۴)$$

نکتهٔ طلایی

مجموع جریان‌های مقید یک جسم مغناطیده، صفر است.

- برای یک جسم مغناطیده بردار پتانسیل مغناطیسی را می‌توان از روابط زیر یافت:

$$\boxed{\mathbf{A} = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\int \frac{\mathbf{M}\times\mathbf{R}}{|R|^۳}dv} \qquad (۴۵-۴)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\int \frac{\nabla\times\mathbf{M}}{R}dv + \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\oint_S \frac{\mathbf{M}\times\mathbf{a}_n}{R}ds \qquad (۴۶-۴)$$

جدول (۴-۱۰) شباهت این مباحث را با الکترواستاتیک نشان داده است:

جدول ۴- ۱۰: تناظر بین مغناطش و پلاریزاسیون

تناظر بین بارهای مقید و جریان‌های معادل در دو حوزهٔ مختلف		
حوزه مطالعه	بار(جریان) مقید(معادل) سطحی	بار(جریان) مقید(معادل) حجمی
الکترواستاتیک	$\sigma_b = \mathbf{P}\cdot\mathbf{a}_n$	$\rho_b = -\nabla\cdot\mathbf{P}$
مغناطیس ساکن	$\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M}\times\mathbf{a}_n$	$\mathbf{J}_m = \nabla\times\mathbf{M}$

برای حل مسائل این قسمت کافی است چگالی‌های جریان معادل را یافته و سپس کمیت خواسته شده ناشی از این جریان‌ها را بیابید.

مثال ۴-۳۱ استوانه‌ای به طول L و شعاع a دارای محور z است. این استوانه به صورت محوری و با بردار مغناطیس‌شدگی $\mathbf{M} = M_\circ\mathbf{a}_z$ مغناطیده شده است. چگالی شار مغناطیسی را در نقطهٔ دلخواهی روی محور استوانه بیابید. [۱]

حل) چگالی‌های جریان معادل را می‌یابیم. دقت داریم که برای محاسبهٔ چگالی سطحی بردار عمود بر تمام سطوح را در نظر گرفته و در بردار مغناطیس‌شدگی ضرب خارجی می‌کنیم.

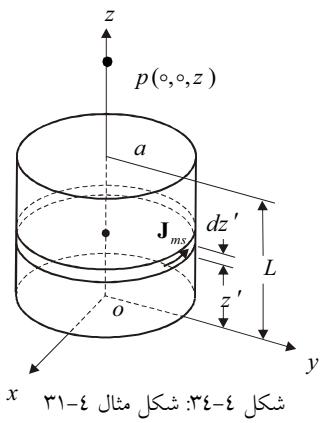
بردارهای عمود بر سطوح عبارتند از: $\mathbf{a}_r$, $-\mathbf{a}_z$, $+\mathbf{a}_z$.

پس:

$$\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times \mathbf{a}_n = \begin{cases} M_\circ \mathbf{a}_z \times (+\mathbf{a}_z) = \circ \\ M_\circ \mathbf{a}_z \times (-\mathbf{a}_z) = \circ \\ M_\circ \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_r = M_\circ \mathbf{a}_\varphi \end{cases}$$

همچنین:

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = \nabla \times M_\circ \mathbf{a}_z = \circ$$



شکل ٤-٣٤: شکل مثال ٤-٣١

پس مغناطش استوانه معادل است با گذر جریان سطحی معادل $M_\circ \mathbf{a}_\varphi$ از سطح خارجی آن. برای محاسبهٔ میدان در روی محور کافی است میدان ناشی از این جریان را بیابیم. اگر کمی دقت کرده باشید می‌توانید برای محاسبهٔ چگالی شار مغناطیسی از میدان حلقه جریان (رابطهٔ ۴-۱۲) استفاده کنید:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ dI\, r^۲}{۲\left(r^۲ + (z - z')^۲\right)^{\frac{۳}{۲}}}\mathbf{a}_z = \frac{\mu_\circ M_\circ dz'\, r^۲}{۲\left(r^۲ + (z - z')^۲\right)^{\frac{۳}{۲}}}\mathbf{a}_z$$

پس:

$$\mathbf{B} = \int_\circ^L \frac{\mu_\circ M_\circ dz'\, r^۲}{۲\left(r^۲ + (z - z')^۲\right)^{\frac{۳}{۲}}}\mathbf{a}_z = ... = \frac{\mu_\circ M_\circ}{۲}\left[\frac{z}{\sqrt{z^۲ + a^۲}} - \frac{z - L}{\sqrt{(z - L)^۲ + a^۲}}\right]\mathbf{a}_z$$

مثال ۴-۳۲ استوانه‌ای به شعاع a و ارتفاع h در امتداد محورش بطور یکنواخت مغناطیده شده است. میدان مغناطیسی را روی استوانه بیابید. (کارشناسی ارشد فیزیک ۸۱)

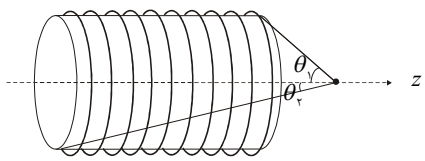
حل: مغناطش یکنواخت است، یعنی با فرض اینکه محور استوانه z باشد، بردار مغناطش $\mathbf{M} = M_\circ \mathbf{a}_z$ است. کافی است جریان‌های مقید را محاسبه کنیم:

$$\mathbf{J}_{mv} = \nabla \times \mathbf{M} = \circ$$

$$\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times \mathbf{a}_n = M_\circ \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_r = M_\circ \mathbf{a}_\varphi$$

یعنی روی استوانه جریان سطحی با توزیع $M_\circ \mathbf{a}_\varphi$ داریم، در حقیقت سیستم این مثال را می‌توانیم به صورت شکل (۴-۳۵) مدل کنیم. پس پاسخی مشابه یک سلونوئید خواهیم داشت. کافی است از رابطهٔ (۴-۱۴) استفاده کنیم، در این صورت اگر بجای $\frac{N\,I}{\ell}$ ، $M_\circ$ قرار دهیم:

$$\mathbf{H} = \frac{M_\circ}{۲}\left(\cos\theta_۲ - \cos\theta_۱\right)\,\mathbf{a}_z$$



شکل ٤-۳۵: شکل مثال ٤-۳۲

تمرین ۴-۱۷: کره‌ای به شعاع R به وسیلهٔ $\mathbf{M} = M_\circ \mathbf{a}_z$ به طور یکنواخت مغناطیده شده. مطلوبست محاسبهٔ:

الف) میدان مغناطیسی در فضای خارج کره با استفاده از روش حل مثال (۴-۳۱) .

ب) میدان مغناطیسی در تمام فضا با محاسبهٔ جریان‌های معادل و استفاده از قانون بیوساوار.

پ) میدان مغناطیسی در تمام فضا با محاسبهٔ بردار پتانسیل مغناطیسی و کرل گرفتن از آن.

۴-۹- شدت میدان مغناطیسی و نفوذپذیری نسبی

پیش از این در فضای آزاد روابط زیر را داشته‌ایم:

$$\mathbf{B} = \mu_\circ \mathbf{H} \quad ، \quad \nabla\times\mathbf{B} = \mu_\circ \mathbf{J}$$

که در این رابطه J چگالی جریان آزاد است.

اگر در یک محیط مغناطیده قرار داشته باشیم علاوه بر این جریان آزاد، جریان‌های معادلی نیز در محیط وجود دارند، از اینرو در این محیط‌ها روابط به فرم دیگری بیان می‌شوند:

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu_\circ(\mathbf{H}+\mathbf{M})} \qquad (۴۷-۴)$$

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_\circ\,(\mathbf{J}+\mathbf{J}_m) \qquad (۴۸-۴)$$

اگر ضریب حساسیت مغناطیسی را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

آنگاه با قرار دادن این مقدار در رابطهٔ (۴-۴۷) خواهیم داشت:

$$\mathbf{B} = \mu_\circ(\mathbf{H}+\mathbf{M}) = \mu_\circ(\mathbf{H}+\chi_m\mathbf{H}) = \mu_\circ(1+\chi_m)\mathbf{H} = \mu_\circ\,\mu_r\,\mathbf{H} = \mu\,\mathbf{H} \qquad (۴-۴۹)$$

که در آن μ_r را نفوذپذیری نسبی محیط نامند. پس این قسمت کاملا مشابه بحث چگالی شار الکتریکی است. به جدول (۴-۱۱) توجه کنید.

نکتهٔ طلایی

در محیطی که جریان آزاد نداریم، شدت میدان مغناطیسی صفر است.

این موارد را در مثال زیر به کار برده‌ایم:

جدول ۴-۱۱: تناظر بین نفوذپذیری الکتریکی و مغناطیسی

تناظر بین چگالی شار الکتریکی و شدت میدان مغناطیسی	
الکترواستاتیک	مغناطیس ساکن
$\mathbf{P} = \varepsilon_\circ\,\chi_e\,\mathbf{E}$	$\mathbf{M} = \chi_m\,\mathbf{H}$
$\nabla\,.\,\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_\circ}\left(\rho+\rho_b\right)$	$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_\circ\left(\mathbf{J}+\mathbf{J}_m\right)$
$\mathbf{D} = \varepsilon_\circ\,\mathbf{E}+\mathbf{P}$	$\mathbf{B} = \mu_\circ\left(\mathbf{H}+\mathbf{M}\right)$
$\nabla\,.\,\mathbf{D} = \rho$	$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J}$

مثال ۴-۳۳ یک مادهٔ فرومغناطیس به شکل یک لولهٔ بی‌نهایت طویل با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b به قسمی مغناطیده شده که بردار دوقطبی مغناطیسی برای $a<r<b$ برابر $\mathbf{M} = \frac{A}{r}\mathbf{a}_\varphi$ است. مطلوبست محاسبهٔ میدان‌های $\mathbf{B}$ و $\mathbf{H}$ در ناحیهٔ $a<r<b$. (کارشناسی ارشد برق)

حل: ابتدا چگالی جریان‌های معادل را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbf{J}_m = \nabla\times\mathbf{M} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix}\mathbf{a}_r & r\,\mathbf{a}_\varphi & \mathbf{a}_z\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \circ & A & \circ\end{vmatrix} = \circ$$

$$\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M}\times\mathbf{a}_n = \frac{A}{r}\mathbf{a}_\varphi \times (-\mathbf{a}_r)\Big|_{r=a} = \frac{A}{a}\mathbf{a}_z$$

حال از قانون مداری آمپر استفاده می‌کنیم:

$$\oint \mathbf{B}\ .\ \mathbf{dl} = \mu_\circ I$$

پس:

$$B(۲\ \pi\ r) = \mu_\circ \frac{A}{a} ۲\pi a \quad \rightarrow \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_\circ A}{r}\mathbf{a}_\varphi \quad , \quad a<r<b$$

حال با استفاده از رابطهٔ (۴-۴۹) برای شدت میدان مغناطیسی داریم:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_\circ} - \mathbf{M} = \circ$$

اگر کمی بیشتر دقت داشتیم، می‌توانستیم اینگونه حل کنیم:

در فضای $a<r<b$ هیچگونه جریان آزادی نداریم، پس: $\mathbf{H}=\circ$

در این صورت داریم:

$$\mathbf{B} = \mu_\circ\left(\circ + \mathbf{M}\right) = \mu_\circ \mathbf{M} = \frac{\mu_\circ A}{r}\mathbf{a}_\varphi$$

مثال ۴-۳۴ بردار مغناطیس‌شدگی در حجم کره‌ای به شعاع R به صورت $\mathbf{M} = M_\circ \mathbf{a}_z$ ($M_\circ$ ثابت) داده شده است. شدت میدان مغناطیسی را در مرکز کره بیابید. (کارشناسی ارشد برق ۷۹)

حل: جریان‌های مقید را پیدا می‌کنیم. با فرض اینکه کره بر مبداء مختصات منطبق باشد:

$$\text{جریان مقید سطحی} = \mathbf{J}_s = \mathbf{M}\times\mathbf{a}_r = M_\circ \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_r = M_\circ \sin\theta\, \mathbf{a}_\varphi$$

$$\text{جریان مقید حجمی} = \circ$$

پس با استفاده از رابطهٔ (۴-۱۲) داریم:

$$\mathbf{dB} = \frac{\mu_\circ M_\circ \sin\theta \times a d\theta \times \left(a\sin\theta\right)^۲}{۲a^۳}\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_z \frac{\mu_\circ M_\circ}{۲} \int_\circ^\pi \sin^۳ \theta d\theta = ... = \frac{۲\mu_\circ M_\circ}{۳} \mathbf{a}_z$$

پس:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_\circ} - \mathbf{M} = \frac{۲}{۳} M_\circ \mathbf{a}_z - M_\circ \mathbf{a}_z = -\frac{۱}{۳} M_\circ \mathbf{a}_z$$

تمرین ۴-۱۸: یک پوستهٔ استوانه‌ای به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b از یک ماده مغناطیسی به ضریب نفوذپذیری نسبی $\mu_r = ۱ + \frac{۱}{r}$ ساخته شده است. سیمی حامل جریان I در روی محور این پوسته قرار دارد. مطلوبست محاسبهٔ:

الف) چگالی جریان‌های مغناطیسی در داخل و روی سطوح این پوسته.

ب) کل جریان مغناطیسی این جسم مغناطیده.

مثال ۴-۳۵ در شکل زیر سیم و مادهٔ مغناطیسی در امتداد محور z کشیده شده‌اند. اگر جهت جریان در سیم خارج از صفحهٔ کاغذ باشد، حاصل انتگرال $\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl}$ روی مسیر خط‌چین چند $\frac{wb}{m}$ است؟ (جریان سیم را ۲^A و $\mu_r = ۱۰$ فرض کنید.) (کارشناسی ارشد برق ۸۱)

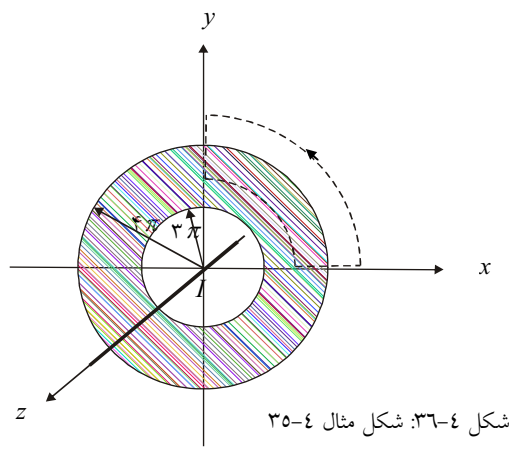
حل: میدان ناشی از سیم حامل جریان بصورت $\mathbf{H} = \frac{I}{۲\pi r} \mathbf{a}_\varphi$ است. چگالی شار مغناطیسی در فضا به شکل زیر خواهد بود:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu H = \frac{۱۰\mu_\circ}{\pi r} \mathbf{a}_\varphi & , \quad ۳\pi < r < ۴\pi \\ \mu_\circ H = \frac{\mu_\circ}{\pi r} \mathbf{a}_\varphi & , \quad r > ۴\pi \end{cases}$$

پس برای پاسخ خواهیم داشت:

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \int_\circ^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\mu_\circ}{\pi r} \mathbf{a}_\varphi \cdot r\, d\varphi\, \mathbf{a}_\varphi + \circ + \int_{\frac{\pi}{۲}}^\circ \frac{۱۰\,\mu_\circ}{\pi r} \mathbf{a}_\varphi \cdot r\, d\varphi\, \mathbf{a}_\varphi + \circ$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \frac{\mu_\circ}{۲} - \frac{۱۰\,\mu_\circ}{۲} = -\frac{۹\,\mu_\circ}{۲}$$



شکل ٤-٣٦: شکل مثال ٤-٣٥

تمرین ۴-۱۹: کره‌ای به شعاع a دارای ضریب نفوذپذیری نسبی μ_r است. با این فرض که چگالی شار مغناطیسی در خارج کره $\mathbf{B} = B_\circ \mathbf{a}_z$ است، چگالی شار را در داخل کره بیابید.

۴-۱۰- پتانسیل مغناطیسی اسکالر و چگالی‌های بار مغناطیسی معادل

یکی از اصول موضوع مغناطیس ساکن به صورت زیر است:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_\circ \mathbf{J}$$

اگر در یک ناحیه جریان نداشته باشیم:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \circ$$

یک میدان بدون کرل را می‌توان به صورت گرادیان یک میدان عددی نوشت:

$$\boxed{\mathbf{B} = -\mu_\circ \nabla V_m} \qquad (۵۰-۴)$$

که در آن V_m پتانسیل مغناطیسی اسکالر نامیده می‌شود (واحد آن آمپر است)

پیش از این در مورد بارهای مغناطیسی و اینکه از لحاظ عملی وجود آنها غیر ممکن است، صحبت کردیم. با این وجود اگر فرض کنیم که این چنین بارهایی موجود باشند، می‌توان پتانسیل مغناطیسی اسکالر را به صورت زیر یافت:

$$V_m = \frac{۱}{۴\pi} \int_v \frac{\rho_m}{R} dv \qquad (۵۱-۴)$$

در این رابطه ρ_m چگالی حجمی بارهای مغناطیسی است. این بارهای مغناطیسی می‌توانند دارای توزیع حجمی و یا سطحی باشند. در حل مسائل می‌توانیم این بارهای مغناطیسی را معادل بارهای الکتریکی و پتانسیل مغناطیسی اسکالر را معادل پتانسیل الکتریکی در نظر بگیریم، در این حالت مسئلهٔ مغناطیس را به یک مسئله الکترواستاتیک بدل کرده‌ایم. در واقع پتانسیل مغناطیسی اسکالر رهیافت مناسبی است برای حل مسائل حوزهٔ مغناطیس، البته مشروط بر اینکه بارهای مغناطیسی را داشته باشیم یا بتوانیم محاسبه کنیم.

خوشبختانه، در محاسبات میدان، جسم مغناطیس‌شده را می‌توان با یک چگالی بار سطحی مغناطیس‌شدگی (فرضی) معادل ρ_{ms} و یک چگالی بار حجمی مغناطیس‌شدگی معادل ρ_m ، چنان جایگزین نمود که:

$$\boxed{\rho_{ms} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{a}_n} \qquad (۵۲-۴)$$

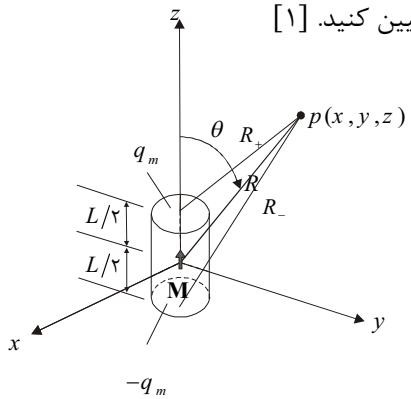
$$\boxed{\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M}} \qquad (۵۳-۴)$$

در این صورت قادریم پتانسل مغناطیسی اسکالر را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$V_m = \frac{۱}{۴\pi}\int \frac{-(\nabla \cdot \mathbf{M})}{R} dv + \frac{۱}{۴\pi}\oint_S \frac{(\mathbf{M} \cdot \mathbf{a}_n)}{R} ds$$

مثال زیر نحوهٔ کار با پتانسیل مغناطیسی اسکالر را نشان می‌دهد، مثال‌های بهتر را پس از بیان شرایط مرزی مغناطیس ساکن بررسی خواهیم کرد.

مثال ۴-۳۶ یک آهنربای میله‌ای استوانه‌ای به شعاع a و طول L دارای مغناطیس‌شدگی یکنواختی به صورت $\mathbf{M} = M_\circ \mathbf{a}_z$ در امتداد محور خود است. با استفاده از مفهوم چگالی بار مغناطیسی معادل، چگالی شار مغناطیسی یک نقطهٔ دلخواه در فاصلهٔ دور را تعیین کنید. [۱]



شکل ٤-۳۷: شکل مثال ٤-٣٦

حل: ابتدا چگالی بارهای مغناطیسی را می‌یابیم، این عمل را برای تمام سطوح و حجم داخلی استوانه انجام می‌دهیم:

$$\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M} = \circ$$

$$\rho_{ms} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{a}_n = \begin{cases} M_\circ \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = M_\circ \\ M_\circ \mathbf{a}_z \cdot (-\mathbf{a}_z) = -M_\circ \\ M_{.\circ} \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r = \circ \end{cases}$$

پس هیچ گونه بار حجمی نداریم و فقط روی وجوه بالایی و پایینی بارهایی با چگالی یکنواخت $\circ$ داریم. به راحتی می‌توانیم بار مغناطیسی را بیابیم کافی است هر یک از این چگالی‌ها را در مساحت وجه ($\pi a^{۲}$) ضرب کنیم:

$$q_m = \pm \pi a^{۲} M_{\circ}$$

این دو بار هم‌اندازه و مختلف‌العلامت برای نقاط دور از خود به صورت یک دوقطبی الکتریکی دیده می‌شوند، پس برای محاسبهٔ پتانسیل در فواصل دور از رابطهٔ پتانسیل دوقطبی الکتریکی (رابطهٔ ۲-۴۸) استفاده می‌کنیم:

$$V_m = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_R}{۴ \pi R^{۲}} = \frac{q_m L \cos\theta}{۴ \pi R^{۲}} = \frac{M_T \cos\theta}{۴ \pi R^{۲}}$$

که در آن $M_T = \pi a^{۲} L M_{\circ}$ است. در این صورت برای میدان داریم:

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_{\circ} M_T}{۴ \pi R^{۳}} (۲\cos\theta \, \mathbf{a}_R + \sin\theta \, \mathbf{a}_{\theta})} \quad \mathbf{B} = -\mu_{\circ} \nabla V_m \quad \rightarrow \qquad (۵۴\text{-}۴)$$

تمرین ۴-۲۰: اثبات کنید که پتانسیل مغناطیسی اسکالر بر خلاف پتانسیل الکتریکی، تابع مسیر است.

جدول (۴-۱۲) یک تناظر تصویری بین الکترواستاتیک و مغناطیس ساکن را نشان می‌دهد. در ادامه با معرفی انواع مواد مغناطیسی با این ویژگی‌ها آشنا شده و دلیل برخی از این خواص را بررسی می‌کنیم.

۴-۱۱- انواع مواد مغناطیسی و چگونگی تغییر خواص آنها در حضور میدان

رفتار مغناطیسی مواد بر پایهٔ حرکت‌های مداری و اسپینی آنهاست. هر یک از این حرکت‌ها گشتاوری ایجاد می‌کنند که برآیند آنها گشتاور مغناطیسی ماده را معین می‌کند. اساساً تعریف شدن ثابتی همچون μ_r نیز به دلیل فرق گذاشتن بین مواد است. بر این اساس می‌توان سه نوع کلی مواد مغناطیسی را به صورت زیر دسته‌بندی کرد:

دیامغناطیس که μ_r برای آنها خیلی از یک کمتر است.
پارامغناطیس که μ_r برای آنها از یک بیشتر است.
فرومغناطیس که μ_r برای آنها خیلی از یک بیشتر است.

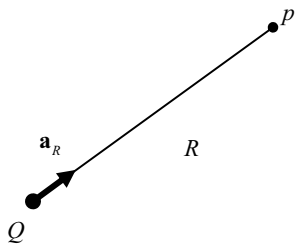
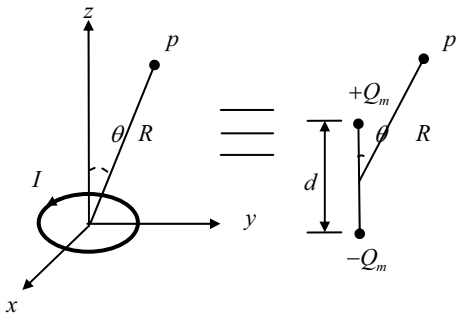
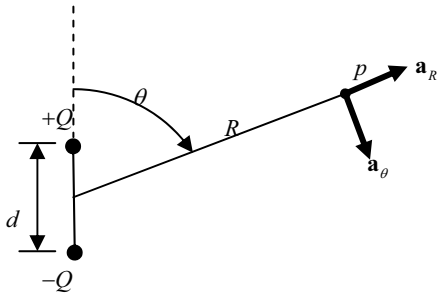
برای درگیر شدن در بحث به تمرین زیر پاسخ دهید:

POWEREN.IR

تمرین ۴-۲۱: با توجه به اینکه $\mu_r = ۱ + \chi_m$ و همچنین توضیحات فوق، بازهٔ مقداری χ_m را برای هر کدام از مواد بیان شده پیدا کنید!

حال به بررسی هر یک از این مواد می‌پردازیم، سعی شده توضیح هر قسمت مختصر ولی مفید باشد.

جدول ۴-۱۲: تناظر تصویری مغناطیس ساکن و الکترواستاتیک

قیاس تصویری دوقطبی و تک‌قطبی در حوزه‌های الکترواستاتیک و مغناطیس ساکن	
مغناطیس ساکن	الکترواستاتیک
 به صورت تجربی وجود ندارد. **تک‌قطبی مغناطیسی**	 $\mathbf{E} = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ R^۲}\mathbf{a}_R$ $V = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ R}$ **بار ساکن**
 $\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ m}{۴\pi R^۳}(۲\cos\theta\ \mathbf{a}_R + \sin\theta\ \mathbf{a}_\theta)$ $\mathbf{A} = \frac{\mu_\circ \mathbf{m}\times\mathbf{a}_R}{۴\pi R^۲}$ **دوقطبی مغناطیسی**	 $\mathbf{E} = \frac{P}{۴\pi\varepsilon_\circ R^۳}(۲\cos\theta\ \mathbf{a}_R + \sin\theta\ \mathbf{a}_\theta)$ $V = \frac{\mathbf{P}\ .\ \mathbf{a}_R}{۴\pi\varepsilon_\circ R^۲}$ **دوقطبی الکتریکی**

دیامغناطیس

این خاصیت از حرکت مداری الکترون‌ها نشئت می‌گیرد، با این همه در این مواد گشتاور خالص ناشی از حرکت مداری و چرخشی ماده، در غیاب میدان خارجی صفر است. اگر تمرین (۴-۲۱) را حل کرده باشید، به این نتیجه رسیده‌اید که **برای مواد دیامغناطیس χ_m مقداری منفی است.** ریشهٔ این موضوع در اعمال میدان به این مواد نهفته است. با اعمال میدان خارجی نیرویی بر الکترونهای دارای حرکت مداری وارد شده و باعث ایجاد گشتاور مغناطیسی می‌گردد، بر طبق قانون لنز گشتاور ایجاد شده باید با عامل به وجود آورنده‌اش (میدان خارجی) مخالفت کند، از اینرو چگالی شار مغناطیسی را کاهش می‌دهد ($\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$) این یعنی μ_r کم می‌شود، یعنی χ_m منفی می‌گردد.

مواد دیامغناطیس هیچ خاصیت مغناطیسی دائمی از خود نشان نمی‌دهند. این مواد در میدان‌های مغناطیسی به بخش‌های ضعیف‌تر متمایلند، چرا که میدان‌های مغناطیسی این مواد را دفع می‌کنند. وقتی میدان مغناطیسی خارجی حذف شود، گشتاور مغناطیسی ایجاد شده نیز از بین می‌رود. سرب، جیوه، نقره، طلا، مس، الماس و ... از جملهٔ این موادند.

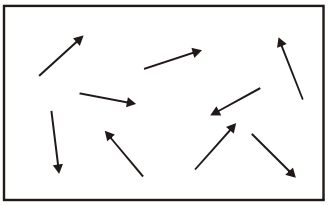
پارامغناطیس

در این دسته از مواد گشتاور مغناطیسی ناشی از حرکت‌های اربیتالی و اسپینی الکترون‌ها صفر نبوده و یکدیگر را به طور کامل خنثی نمی‌کنند. اساساً پارامغناطیس از گشتاور مغناطیسی ناشی از الکترون‌های چرخنده حاصل می‌شود. وقتی یک میدان خارجی را به آن اعمال کنیم، میدان سعی در هم‌جهت کردن گشتاورها با جهت خود را دارد. به همین علت چگالی شار افزایش می‌یابد (و نتیجهٔ دیگری که از تمرین (۴-۲۱) می‌گیریم اینگونه توجیه می‌گردد !) پس:

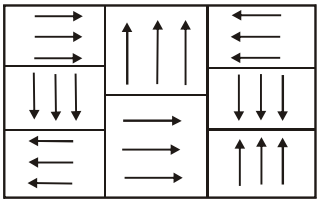
با اعمال میدان خارجی، ماده به سمت بخش‌های نسبتاً قوی میدان منحرف می‌شود و با قطع میدان باز هم گشتاور مغناطیسی برآیند مخالف صفر خواهد بود. موادی همچون آلومینیوم، تنگستن و ... دارای این چنین ویژگی در ساختار خود هستند. شکل (۴-۳۸) تا حدودی ساختار داخلی این مواد را مدل کرده است.

فرومغناطیس

این مواد مشابه پارامغناطیس‌ها در حالت عادی دارای گشتاور مغناطیسی غیر صفرند ولی شدت آن خیلی بیشتر است. توضیح طبیعت این مواد بر مبنای تعریف حوزه‌های مغناطیسی استوار است. از اینرو به شکل (۴-۳۹) توجه کنید تا توضیحات ذیل را بهتر درک نمایید:



شکل ٤-۳۹: ساختار داخلی یک مادهٔ فرومغناطیس



شکل ٤-۳۸: ساختار داخلی یک مادهٔ پارامغناطیس

در یک مادهٔ فرومغناطیس حوزه‌های مغناطیسی که هر کدام دارای تعداد کثیری اتم می‌باشند، جهت‌گیری ماده را معین می‌کنند. بین هر کدام از حوزه‌ها دیوارهٔ جدا کننده‌ای حضور دارد، از اینرو در شرایط نبود میدان خارجی، هر کدام از این حوزه‌ها دارای جهات متفاوتی هستند. با اعمال میدان خارجی دیوارهٔ حوزه‌هایی که گشتاور آنها با میدان هم‌راستا شده شروع به حرکت کرده به گونه‌ای که حجم این حوزه‌ها نسبت به سایرین بیشتر می‌گردد، پس چگالی شار مغناطیسی افزایش می‌یابد. افزایش میدان باعث افزایش حوزه خواهد شد و با کاهش میدان حالت بازگشتی اتفاق می‌افتد. آنچه اهمیت فوق العاده‌ای دارد این است که:

حوزه‌ها در بازگشت از مسیر قبلی پیروی نکرده و از مسیر دیگری این عمل را انجام می‌دهند. این موضوع باعث ایجاد حلقه‌ای در منحنی $B-H$ این مواد می‌گردد. این اتفاق را پسماند و منحنی حاصل را منحنی هیسترزیس می‌نامند. به شکل (۴-۴۰) نگاه کنید تا این موارد را از روی شکل توضیح دهیم:

افزایش شدت میدان

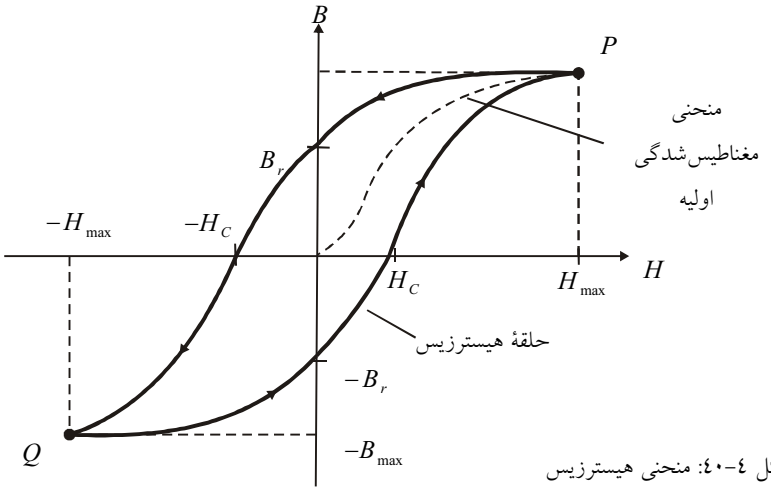
در ابتدا با افزایش میدان، حوزه‌های ذکر شده گسترش می‌یابند (چگالی شار زیاد می‌شود)، این افزایش تا رسیدن به نقطهٔ p ادامه خواهد یافت. پس از آن هر چقدر هم که شدت میدان را زیاد کنیم چگالی شار ثابت خواهد ماند (این موضوع را اشباع مغناطیسی می‌گویند)

کاهش شدت میدان

حال اگر شدت میدان را کاهش دهیم، اندازهٔ حوزه‌ها کاهش می‌یابد (چگالی شار کم می‌شود)، اما نه مثل قبل، بلکه از مسیری دیگر (و با شکل‌دهی متفاوت)، با کاهش هر چه بیشتر میدان می‌توان چگالی شار را تا نقطهٔ Q کم کرد ولی پس از آن همان شرایط قبلی تکرار می‌شود.

ایجاد حلقه

افزایش مجدد میدان، ما را به نقطهٔ p خواهد رساند، در این حالت منحنی $B-H$ شکل یک حلقه (لوپ هیسترزیس) را به خود گرفته است. این حلقه نماد موثری در بیان ویژگی‌های یک مادهٔ مغناطیسی است و کاربردهای فراوانی در صنعت دارد. از این جمله می‌توان به:



شکل ٤-٤٠: منحنی هیسترزیس

۱- دسته‌بندی مواد بر اساس ساختار حلقه (مثل: نرم و سخت)

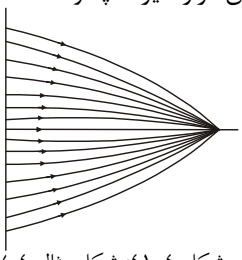
۲- چگونگی تحریک بر اساس پهنای آن (مثل: تحریک ac یا dc)

۳- میزان تلفات بر اساس مساحت حلقه.

۴- تقسیم‌بندی مواد مغناطیسی بر اساس نقاط مشترک حلقه‌ها (مثل: تزویج و مقاومت مغناطیسی) اشاره کرد.

کبالت، نیکل، آهن و ... از جملهٔ مواد فرومغناطیس‌اند. توضیحات تکمیلی و کاربردهای این حلقه را به درس ماشین‌های الکتریکی واگذار می‌کنیم.

مثال ۴-۳۷ در شکل (۴-۴۱) با استفاده از یک تحریک ac یک میدان مغناطیسی غیریکنواخت ایجاد کرده‌ایم. توضیح دهید که اگر هر یک از انواع مواد مغناطیسی در این میدان قرار گیرد، چگونه منحرف می‌شود؟


شکل ٤-٤١: شکل مثال ٤-٣٧

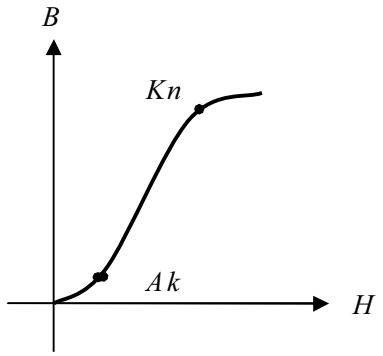
حل: جهت‌گیری مواد را بدین صورت تشریح می‌کنیم:

۱- دیامغناطیس: میدان مغناطیسی مواد دیامغناطیس را دفع می‌کند از اینرو اگر مادهٔ دیامغناطیسی در این توزیع قرار گیرد به سمت میدان ضعیف‌تر (یعنی سمت چپ شکل) جهت‌گیری می‌کند.

۲- پارامغناطیس: مواد پارامغناطیس در صورت حضورِ میدان، با آن همراستا می‌شوند از اینرو به سمت میدان‌های قوی‌تر حرکت کرده و تا حدودی به سمت راست منحرف می‌شوند.

۳- فرومغناطیس: این مواد به شدت تحت تاثیر میدان قرار می‌گیرند به نحوی که در صورت قرارگیری در این توزیع به نقطهٔ نوک‌تیز خواهند چسبید.

تمرین ۴-۲۲: بخش عمده‌ای از وسایل اندازه‌گیری دارای هستهٔ آهنی هستند. در حالت کلی می‌توان منحنی هیسترزیس آنها را مطابق شکل مقابل فرض کرد. همانطور که مشاهده می‌شود هسته در ناحیهٔ بین *Ankle point* و *knee point* خطی است. با توجه به اینکه یک وسیلهٔ اندازه‌گیری نیازمند دقت در محدودهٔ ۰% تا ۱۲۰% کمیت مورد نظر است، بهترین ناحیه برای کار این دستگاه را تعیین کنید. [۱۳]



شکل ٤-٤٢: شکل تمرین ٤-٢٢

۴-۱۲- شرایط مرزی میدان‌های مغناطیسی ساکن

از آنجا که نفوذپذیری مغناطیسی محیط‌های مختلف متفاوت است و از طرفی ساختارِ منشاء میدان مغناطیسی معمولاً به گونه‌ایست که اجباراً میدان مغناطیسی از چند محیط مختلف گذر کرده و سپس به محل مورد بررسی می‌رسد، بایستی شرایط مرزی میدان‌های مغناطیسی را بدانیم تا با اعمال این تغییرات به نتایج درستی در تحلیل سیستم مورد نظر دست یابیم.

پس تغییرات مولفه‌های مماسی و عمودی میدان مغناطیسی در مرز مشترک دو محیط را با توجه به شکل (۴-۴۳) مورد ارزیابی قرار می‌دهیم:

برای تعیین رابطهٔ بین مولفه‌های مماسی میدان مغناطیسی در مرز مشترک دو ناحیه با نفوذپذیری μ_1 و μ_2 ، مسیر بسته مستطیل شکل *abcda* را در نظر گرفته و قانون مداری آمپر را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\oint_{abcda} \mathbf{H} \cdot \mathbf{dl} = I = \int_{abcd} \mathbf{J} \cdot \mathbf{ds}$$

با فرض اینکه عرض این مستطیل به سمت صفر میل کند (چرا اینچنین فرضی را در نظر می‌گیریم؟) خواهیم داشت:

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot \Delta\mathbf{L} = (\mathbf{J}_S \times \mathbf{a}_n)\, \Delta L$$

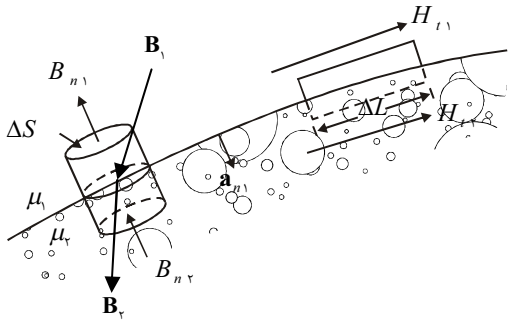
که می‌توان از آن به نتیجهٔ زیر رسید:

$$\mathbf{a}_n \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_S \qquad (۵۵-۴)$$

اگر $\mathbf{J}_S$ در امتداد محور عمود بر مولفه‌های مماسی $\mathbf{H}_1$ و $\mathbf{H}_2$ باشند (چه فرقی دارد؟)، داریم:

$$\boxed{\mathbf{H}_{1t} - \mathbf{H}_{2t} = \mathbf{J}_S} \qquad (۵۶-۴)$$

و اگر $\mathbf{J}_S = 0$ آنگاه:



شکل ٤-٤٣: مرز دو محیط با تراوایی‌های مختلف

$$\mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t} \qquad (۵۷-۴)$$

برای تعیین رابطهٔ بین مولفه‌های عمودی در مرز مشترک دو محیط از استوانهٔ شکل (۴-۴۳) استفاده می‌کنیم.

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

اگر ارتفاع استوانه به سمت صفر میل کند داریم:

$$\mathbf{B}_2 \cdot \Delta\mathbf{S}_2 - \mathbf{B}_1 \cdot \Delta\mathbf{S}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{a}_n \cdot (\mathbf{B}_{n1} - \mathbf{B}_{n2}) = 0$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\boxed{\mathbf{B}_{n1} = \mathbf{B}_{n2}} \qquad (۵۸-۴)$$

و این یعنی مولفه‌های عمودی چگالی شار مغناطیسی در دو طرف مرز پیوسته است.

مثال ۴-۳۸ دو محیط مغناطیسی با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی μ_1 و μ_2 داده شده‌اند. اگر میدان در محیط ۱ مطابق شکل (۴-۴۴) با خط عمود بر مرز مشترک دو محیط زاویهٔ θ_1 بسازد:

الف) مطلوبست میدان در ناحیهٔ ۲ و زاویهٔ آن با خط عمود بر مرز مشترک دو محیط.

ب) ثابت کنید میدان بر مرز مشترک هوا با یک محیط با ضریب نفوذ مغناطیسی بسیار بالا عمود است.

حل: الف) اگر فرض کنیم در مرز مشترک هیچ جریان آزادی نباشد، می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$\mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2}$$

از طرفی همواره روی مرز: $\mathbf{B}_{n1} = \mathbf{B}_{n2}$

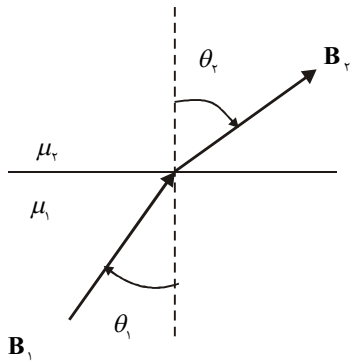
پس از تجزیه این بردارها به مولفه‌های اولیه می‌توان گفت:

$$\mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2} \Rightarrow H_2 \sin\theta_2 = H_1 \sin\theta_1$$

$$\mathbf{B}_{n2} = \mathbf{B}_{n1} \Rightarrow \mu_2 H_2 \cos\theta_2 = \mu_1 H_1 \cos\theta_1$$

از تقسیم کردن دو رابطهٔ فوق بر هم داریم:

$$\tan\theta_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1}\tan\theta_1$$



شکل ٤-٤٤: شکل مثال ٤-٣٨

پس:

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1\left[\sin^2\theta_1 + (\frac{\mu_2}{\mu_1})\cos^2\theta_1\right]^{\frac{1}{2}}$$

ب) کافی است فرض کنیم: $\mu_1 = \mu_0 \mu_r$ و $\mu_2 = \mu_0$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\tan\theta_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1}\tan\theta_1 \rightarrow \tan\theta_2 = \frac{1}{\mu_r}\tan\theta_1 \xrightarrow{\mu_r >> 1} \theta_2 = 0$$

و در نتیجه H_2 بر مرز مشترک دو محیط عمود است.

سوال: پاسخ شما را به یاد چه میدانی می‌اندازد؟ چه نتیجه‌هایی می‌گیرید؟

جواب: به این نتیجه رسیدیم که روی محیط‌های دارای تراوایی خیلی زیاد میدان مغناطیسی تقریباً عمود است. یعنی شبیه میدان الکتریکی روی هادی کامل! نتیجهٔ دیگری که می‌گیریم این است که مولفهٔ مماسی میدانِ ناحیهٔ با تراوایی بزرگ به ناحیهٔ با تراوایی کوچک نفوذ نمی‌کند. این امر کاربرد مدارهای مغناطیسی را عملی کرده است.

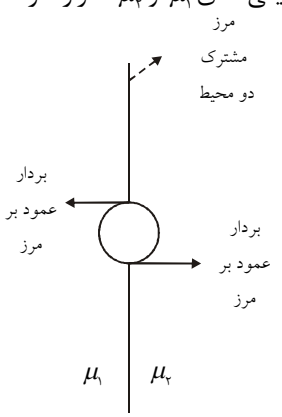
تمرین ۴-۲۳: صفحهٔ $z = 0$ فصل مشترک دو ناحیهٔ ۱ و ۲ بوده و دارای جریان آزاد با چگالی سطحی $\mathbf{K} = \frac{1}{\mu_0}\left(-\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y\right)$ (آمپر بر متر) می‌باشد. در ناحیهٔ ۱ $(z < 0)$ $\mu_{r_1} = 2$ و در ناحیهٔ ۲ $(z > 0)$ $\mu_{r_2} = 3$. اگر در ناحیهٔ ۱ چگالی شار مغناطیسی بصورت $\mathbf{B}_1 = \left(2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z\right)$ باشد، بردار مغناطیس‌شدگی را در ناحیهٔ دوم بیابید (کارشناسی ارشد برق ۸۷)

مثال ۴-۳۹ در مرز دو محیط با ضرایب نفوذپذیری مغناطیسی μ_1 و μ_2، چگالی جریان سطحی مقید $\mathbf{J}_{sb}$ است. چه رابطه‌ای بین بردار چگالی مغناطیسی $\mathbf{M}$ دو طرف مرز برقرار است؟ ($\mathbf{a}_n$ بردار عمود بر مرز است) (کارشناسی ارشد برق)

حل: مسئلهٔ مطرح‌شده دوگان بحث بررسی‌شده در قسمت (۲-۸-۶-۱) است، لذا پیشنهاد می‌کنیم قبل از حل مثال، مرور کوتاه به آن بیاندازید. طبق رابطهٔ $\nabla\times\mathbf{M}=\mathbf{J}_b$ با انتگرال‌گیری روی محیط مستطیل شکل (۴-۴۳) و به سمت مرز میل دادن آن به این نتیجه می‌رسیم که:

$$\mathbf{a}_n\times\left(\mathbf{M}_1-\mathbf{M}_2\right)=\mathbf{J}_{sb} \qquad (۴-۵۹)$$

مثال ۴-۴۰ کابلی حاوی جریان I در مرز مشترک دو ناحیه با تراوایی‌های μ_1 و μ_2 قرار دارد. مطلوبست محاسبهٔ چگالی شار مغناطیسی در تمام فضا.



شکل ٤-٤٥: شکل مثال ٤-٤٠

حل: مسئلهٔ مطرح‌شده دوگان مثال (۲-۷۴) است، لذا ... !

حل این مثال را با سه سوال و جواب کوتاه پی می‌گیریم:

سوال اول: میدان یک کابل در هر نقطه‌ای از فضا دارای چه جهتی است؟

جواب ۱: طبیعتاً در جهت φ یعنی تنها مولفهٔ $\mathbf{a}_\varphi$ در رابطهٔ پاسخ میدان دیده می‌شود.

سوال دوم: مولفهٔ عمود بر مرز مشترک را همواره با چه جهتی می‌توانیم بیان کنیم؟ (اگر شکل را به درستی رسم کنید این مولفه می‌تواند بر سطح کابل مماس باشد)

جواب ۲: از شکل (۴-۴۵) استفاده می‌کنیم. کاملاً مشخص است که بردار عمود بر مرز، در مرز مشترک دو محیط، بر کابل مماس است و در نتیجه مولفهٔ عمود بر مرز مشترک نیز $\mathbf{a}_\varphi$ خواهد بود.

سوال سوم: با توجه به اینکه در مرز مشترک دو محیط مولفهٔ عمودی چگالی شار برابر است (یعنی $\mathbf{B}_{n1}=\mathbf{B}_{n2}$) و با توجه به پاسخ دو سوال قبل چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

جواب ۳: از آنجا که میدانِ کابل دارای مولفهٔ $\mathbf{a}_\varphi$ بوده و این مولفه همان مولفهٔ عمود بر مرز است و از آنجایی که در مرز مشترک دو محیط، مولفهٔ عمودی چگالی شار برابراند، می‌توان نتیجه گرفت که چگالی شار مغناطیسی در هر دو محیط برابراند. پس:

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}$$

حال که فهمیدیم چگالی شار در تمام فضا یکسان است، از قانون آمپر بدین شکل استفاده می‌کنیم:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad \rightarrow \quad \oint \frac{\mathbf{B}}{\mu} \cdot d\mathbf{l} = I$$

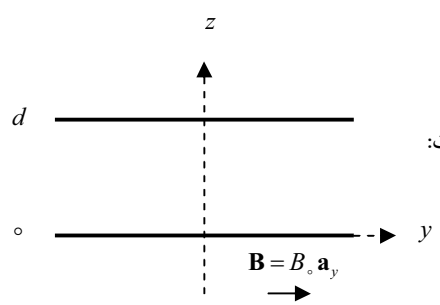
$$\left(\frac{B}{\mu_1} + \frac{B}{\mu_2}\right) \pi r = I$$

پس:

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{I}{\pi r}\left(\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\right) \mathbf{a}_\varphi} \qquad (۶۰-۴)$$

مثال ۴-۴۱ ناحیهٔ $0 \le z \le d$ از ماده‌ای با ضریب نفوذپذیری $\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{z}{d}\right)^2$ پر شده است. چگالی شار مغناطیسی $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{a}_y$ را اعمال می‌نماییم. خارجِ این ناحیه، فضای آزاد با نفوذپذیری μ_0 است. چگالی جریان مغناطیسی مقید حجمی داخل ناحیه چقدر است؟ (کارشناسی ارشد فیزیک)

حل: طبق تعریف در فضای خارج $\mathbf{H} = \frac{B_0}{\mu_0} \mathbf{a}_y$ و با توجه به شرایط مرزی برای ناحیهٔ داخلی نیز داریم:



شکل ٤-٤٦: شکل مثال ٤-٤١

$$\mathbf{H} = \frac{B_0}{\mu_0} \mathbf{a}_y \qquad , \quad 0 < z < d$$

در این ناحیه برای چگالی شار مغناطیسی خواهیم داشت:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = B_0 \left(1 + \frac{z}{d}\right)^2 \mathbf{a}_y$$

پس:

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H} = \frac{B_0}{\mu_0}\left[\left(1 + \frac{z}{d}\right)^2 - 1\right] \mathbf{a}_y$$

و برای چگالی جریان مقید حجمی داریم:

$$\mathbf{J}_{v_b} = \nabla \times \mathbf{M} = -\frac{2B_0}{\mu_0 d}\left(1 + \frac{z}{d}\right) \mathbf{a}_x$$

مثال ۴-۴۲ شکل زیر یک کابل هم‌محورِ متقارن را نشان می‌دهد که بخش $z > ۰$ آن با یک مادهٔ مغناطیسی با $\mu_r = ۳$ پر شده است. اگر جریان عبوری از رسانای مرکزی این کابل $I = ۲^A$ باشد، جریان مقید سطحی در فاصلهٔ $۲a$ از محور سیم، روی فصل مشترک $z = ۰$ چقدر است؟
(کارشناسی ارشد برق ۸۶)

حل: از پیوستگی شدت میدان مغناطیسی استفاده می‌کنیم. شدت میدان مغناطیسی در هر دو محیط برابر $\mathbf{H} = \frac{I}{۲\pi r}\mathbf{a}_\varphi$ می‌باشد. در مرز $r = ۲a$ این مقدار برابر $\mathbf{H} = \frac{۲}{۲\pi(۲a)}\mathbf{a}_\varphi = \frac{۱}{۲\pi a}\mathbf{a}_\varphi$ خواهد بود.

ابتدا مغناطیس‌شدگی را در هر دو محیط پیدا می‌کنیم.

در محیط هوا:

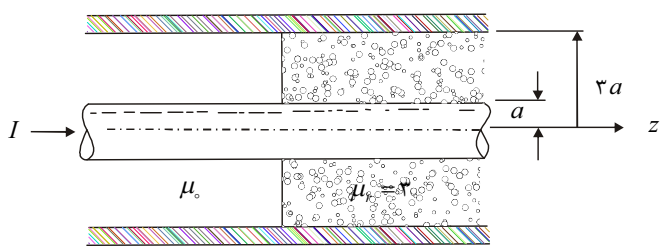
$$\mathbf{B}_۱ = \frac{\mu_۰}{۲\pi a}\mathbf{a}_\varphi \quad , \quad \mathbf{M}_۱ = ۰$$

و در محیط دیگر:

$$\mathbf{B}_۲ = \frac{۳\mu_۰}{۲\pi a}\mathbf{a}_\varphi \quad , \quad \mathbf{M}_۲ = \frac{\mathbf{B}_۲}{\mu_۰} - \mathbf{H} = \left(\frac{۳}{۲\pi a} - \frac{۱}{۲\pi a}\right)\mathbf{a}_\varphi = \frac{۱}{\pi a}\mathbf{a}_\varphi$$

پس برای جریان مقید سطحی داریم:

$$\mathbf{J}_{sb} = \mathbf{M}_۲ \times \mathbf{a}_n = \mathbf{M}_۲ \times (-\mathbf{a}_z) = -\frac{۱}{\pi a}\mathbf{a}_\varphi \times \mathbf{a}_z = -\frac{۱}{\pi a}\mathbf{a}_r$$



شکل ٤-٤٧: شکل مثال ٤-٤٢

مثال ۴-۴۳ سیمی منطبق بر محور x به موازات صفحهٔ $z = ۰$ و به فاصلهٔ d از آن قرار داشته و حامل جریان I می‌باشد. نشان دهید که:

الف) میدان در ناحیهٔ اول ($z > 0$) را می‌توان میدان ناشی از همین جریان و جریان تصویر $I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I$ (قرار گرفته در $z = -d$ دانست به گونه‌ای که هر دو ناحیه دارای گذردهی μ_1 باشند.

ب) بطور مشابه می‌توان میدان در ناحیهٔ دوم را ناشی از جریان تصویر $I'' = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I$ دانست، به گونه‌ای که کل محیط دارای گذردهی μ_2 باشد. (مطابق شکل ۴-۴۸ - پ)

حل: مطابق فرض‌ها عمل کرده و شرایط مرزی را برای هر دو حالت سیستم بررسی می‌کنیم:

شرایط مرزی قسمت (الف) عبارتند از:

$$H_{t1} = \frac{I}{2\pi R}\cos\alpha - \frac{I'}{2\pi R}\cos\alpha$$

$$B_{n1} = \frac{\mu_1 I}{2\pi R}\sin\alpha - \frac{\mu_1 I'}{2\pi R}\sin\alpha$$

شرایط مرزی قسمت (ب) عبارتند از:

$$H_{t2} = \frac{I''}{2\pi R}\cos\alpha$$

$$B_{n2} = \frac{\mu_1 I''}{2\pi R}\sin\alpha$$

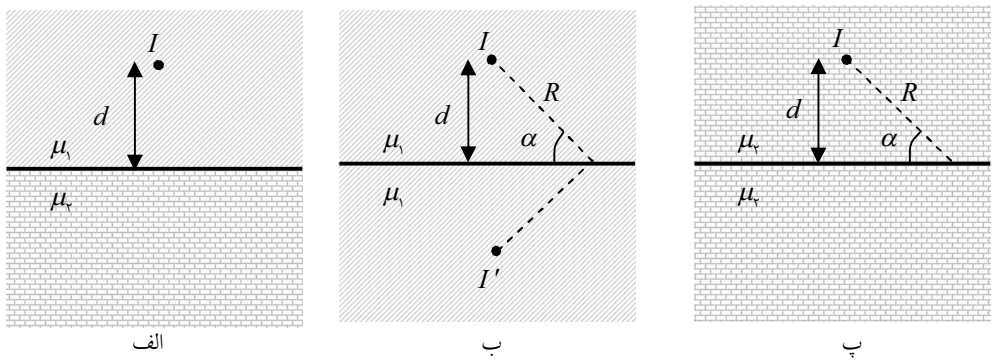
پس از پیوستگی موارد ذکر شده در مرز سیستم خواهیم داشت:

$$H_{t1} = H_{t2} \quad \rightarrow \quad \frac{I}{2\pi R}\cos\alpha - \frac{I'}{2\pi R}\cos\alpha = \frac{I''}{2\pi R}\cos\alpha$$

$$B_{n1} = B_{n2} \quad \rightarrow \quad \frac{\mu_1 I}{2\pi R}\sin\alpha - \frac{\mu_1 I'}{2\pi R}\sin\alpha = \frac{\mu_1 I''}{2\pi R}\sin\alpha$$

نتیجه اینکه:

$$\begin{cases} I - I' = I'' \\ I + I' = \dfrac{\mu_۲}{\mu_۱} I'' \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} I' = \dfrac{\mu_۲ - \mu_۱}{\mu_۱ + \mu_۲} I \\ I'' = \dfrac{۲\mu_۱}{\mu_۱ + \mu_۲} I \end{cases} \qquad (۶۱\text{-}۴)$$



شکل ٤-٤٨: شکل مثال ٤-٤٣

مثال ۴-۴۴ یک رشته سیم نازک حامل جریان I به صورت یک پوسته کروی به شعاع a مطابق شکل (۴-۴۹) سیم‌پیچی می‌شود. با فرض اینکه تعداد سیم‌پیچ‌ها در واحد طول در امتداد محور z یکنواخت باشد. توزیع جریان حاصل از این سیم‌پیچی را می‌توان با یک لایه کروی جریان به چگالی سطحی $\mathbf{J}_s = J_\circ \sin\theta\, \mathbf{a}_\varphi$ تقریب زد. مطلوبست محاسبهٔ شدت میدان مغناطیسی در درون و بیرون کره.

حل: یکی از کاربردهای مهم پتانسیل مغناطیسی اسکالر استفاده از لاپلاس است! در واقع برای حل مسائل پیچیدهٔ حوزهٔ مغناطیس ابتدا آنها را به حوزهٔ استاتیک برده و سپس از ابزار قدرتمند لاپلاس استفاده می‌کنیم. در این مثال شرایط مرزی زیر را خواهیم داشت (مثال ۳-۴۱ را ببینید)

۱- V_m باید در $R = \circ$ محدود باشد.

۲- V_m باید در $R = \infty$ محدود باشد.

۳- $B_{۱n} = B_{۲n}\Big|_{R=a} \rightarrow B_{۱R} = B_{۲R}$

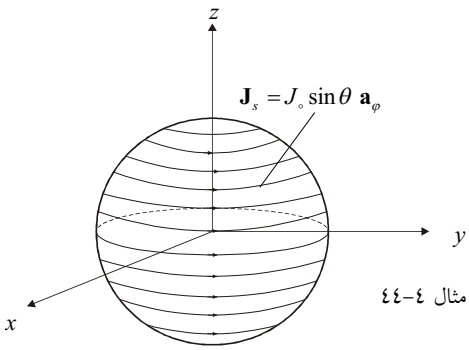
۴- $H_{2t} - H_{1t} = J_S \Big|_{R=a} \rightarrow H_{2\theta} - H_{1\theta} = J_\circ \sin\theta$

با توجه به تقارن موجود پتانسیل در فضای داخل و خارج را به صورت زیر خواهد بود:

$$V_{m_{in}}(R,\theta) = \sum_n \left(A_n R^n + B_n R^{-(n+1)}\right) P_n(\cos\theta)$$

$$V_{m_{out}}(R,\theta) = \sum_n \left(C_n R^n + D_n R^{-(n+1)}\right) P_n(\cos\theta)$$

طبق حل مثال (۳-۴۱) فرم پتانسیل الکتریکی و بصورت مشابه با بررسی شروط ۳ و ۴ داریم:



شکل ٤-٤٩: شکل مثال ٤-٤٤

$$B_n = 0 \quad , \quad \begin{cases} A_1 = \dfrac{-2}{3} J_\circ \\ A_n = 0\ ,\ n \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_2 = \dfrac{1}{3} a^3 J_\circ \\ D_n = 0\ ,\ n \neq 2 \end{cases} \quad , \quad C_n = 0$$

پس:

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \dfrac{2}{3} J_\circ \left(\cos\theta\, \mathbf{a}_R - \sin\theta\, \mathbf{a}_\theta\right) = \dfrac{2}{3} J_\circ \mathbf{a}_z & , \quad R < a \\ \dfrac{a^3}{3R^3} J_\circ \left(2\cos\theta\, \mathbf{a}_R + \sin\theta\, \mathbf{a}_\theta\right) & , \quad R > a \end{cases} \qquad (۶۲-۴)$$

تمرین ۴-۲۴: برای مثال (۴-۴۴) مطلوبست:

الف) محاسبهٔ شدت میدان مغناطیسی در درون و بیرون کره با استفاده از پتانسیل مغناطیسی برداری.

ب) محاسبهٔ شدت میدان مغناطیسی در بیرون کره با محاسبهٔ گشتاور دوقطبی معادل.

پ) بررسی نتایج حاصل از مراحل فوق و نتیجه‌گیری.

مثال ۴-۴۵ کره‌ای به شعاع a که دارای ضریب نفوذپذیری نسبی μ_r بوده در میدان مغناطیسی ابتداً یکنواختی همچون $\mathbf{H} = H_\circ \mathbf{a}_z$ قرار گرفته است. شدت میدان مغناطیسی را برای داخل و خارج کره پیدا کنید.

حل: مثال اخیر دوگان مثال (۳-۴۱) است، از اینرو پیش از بررسی این سوال، نگاه مختصری به آن بیاندازید. فرض می‌کنیم که کرهٔ مفروض در مبداء مختصات قرار داشته باشد. با توجه به تقارن موجود پتانسیل در فضای داخل و خارج را به صورت زیر خواهد بود:

$$V_{in}(R,\theta) = \sum_n \left(A_n R^n + B_n R^{-(n+1)}\right) P_n(\cos\theta) \quad , \quad R < a$$

$$V_{out}(R,\theta) = \sum_n \left(C_n R^n + D_n R^{-(n+1)}\right) P_n(\cos\theta) \quad , \quad R > a$$

شرایط مرزی زیر باید در فضای سیستم برقرار باشند:

۱- V_{in} باید در $R = \circ$ محدود باشد.

۲- $V_{out}\Big|_{R\to\infty} = -H\,z = -H\,R\cos\theta = -H\,R\,P_1(\cos\theta)$

۳- $V_{in} = V_{out}\Big|_{R=a} \quad , \quad B_{in} = B_{out} \;\rightarrow\; \mu_r \dfrac{\partial V_{in}}{\partial R} = \dfrac{\partial V_{out}}{\partial R}\Big|_{R=a}$

از بررسی شرایط فوق (مشابه مثال ۳-۴۱) نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{cases} A_1 = -\dfrac{-3}{2+\mu_r} H_\circ \quad , \quad D_1 = -\dfrac{\mu_r - 1}{2+\mu_r} H_\circ a^3 \\ A_n = D_n = \circ \quad : \quad (n \neq 1) \end{cases}$$

پس:

$$\mathbf{H}_{in} = -\nabla V_{in} = \frac{3}{2+\mu_r} H_\circ \mathbf{a}_z \qquad , \qquad (R < a)$$

$$\mathbf{H}_{out} = -\nabla V_{out} = H_\circ \mathbf{a}_z + \frac{\mu_r - 1}{2+\mu_r}\frac{a^3}{R^3} H_\circ \left[2\cos\theta\,\mathbf{a}_R + \sin\theta\,\mathbf{a}_\theta\right] \qquad , \qquad (R > a) \tag{۶۳-۴}$$

با توجه به مثال (۴-۴۵) استدلال می‌شود که:

نکتهٔ طلایی

الف) اگر میدان در فضای خارج کره‌ای با تراوایی μ_r یکنواخت و به صورت $\mathbf{H} = H_\circ \mathbf{a}_z$، آنگاه میدان در داخل کره از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{H} = \frac{۳}{۲+\mu_r} H_\circ \mathbf{a}_z \qquad (۶۴\text{-}۴)$$

نکتهٔ طلایی

ب) اگر میدان در فضای خارج کره‌ای، یکنواخت و به صورت $\mathbf{H} = H_\circ \mathbf{a}_z$ باشد و از طرفی نفوذپذیری کره $\mu_\circ$ و نفوذپذیری فضای خارج آن μ_r باشد. در این صورت میدان داخل کره از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

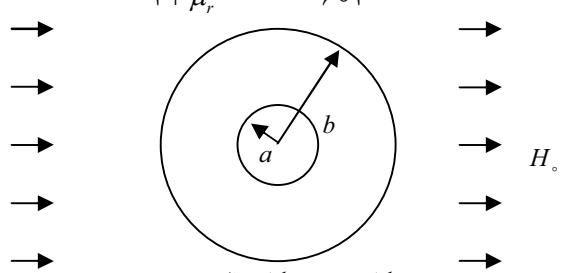
$$\mathbf{H} = \frac{۳}{۲+\frac{۱}{\mu_r}} H_\circ \mathbf{a}_z \qquad (۶۵\text{-}۴)$$

مثال کلیدی

مثال ۴-۴۶ در شکل (۴-۵۰) یک کره از جنس مادهٔ مغناطیسی به شعاع a و با پرمابلیتهٔ نسبی $\mu_r = ۶۰۰$ نشان داده شده است. در درون آن حفره‌ای به شعاع b هم‌مرکز با آن وجود دارد ($b << a$). کره را در میدان مغناطیسی یکنواخت با شدت $H_\circ$ قرار داده‌ایم. شدت میدان مغناطیسی در درون حفره چقدر است؟ (کارشناسی ارشد برق)

حل: از روابط (۴-۶۴) و (۴-۶۵) استفاده می‌کنیم. ابتدا با استفاده از رابطهٔ (۴-۶۴) میدان را در فضای بین دو کره محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbf{H}' = \frac{۳}{۲+\mu_r} H_\circ \mathbf{a}_z = \frac{۳}{۶۰۲} H_\circ \mathbf{a}_z$$



شکل ٤-٥٠: شکل مثال ٤-٤٦

حال با استفاده از رابطهٔ (۴-۶۵) میدان در کرهٔ داخلی را پیدا می‌کنیم:

$$\mathbf{H}'' = \frac{۳}{۲+\frac{۱}{\mu_r}} H' \mathbf{a}_z = ... = \frac{۳H_\circ}{۴۰۰}$$

جدول (۴-۱۳) قیاس مختصری بین الکترواستاتیک و مغناطیس در این موارد انجام داده است:

جدول ۴- ۱۳: مقایسهٔ شرایط مرزی در مغناطیس و استاتیک

تناظر بین مولفه‌های مماس و عمود در مرز برای دو حوزهٔ مختلف		
حوزه مطالعه	مولفهٔ مماس	مولفهٔ عمود
الکترواستاتیک	$E_{۱t} = E_{۲t}$	$\mathbf{D}_{۱n} - \mathbf{D}_{۲n} = \rho_S$
مغناطیس ساکن	$\mathbf{H}_{t۱} - \mathbf{H}_{t۲} = \mathbf{J}_S$	$\mathbf{B}_{n۱} = \mathbf{B}_{n۲}$

۴-۱۳- دو کاربرد ابزاری از مغناطیسی ساکن

در این قسمت دو مفهوم جدید که از نتایج مغناطیس ساکن است را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این موارد عبارتند از:

۱- اندوکتانس (اندوکتانس خودی و متقابل)

۲- مدارهای مغناطیسی

این دو عنوان را کوچکترین کاربردهای مغناطیس بدانید، موارد کاراتر و عملیاتی را در آینده توضیح خواهیم داد. دو عنوانی را که در ادامه مطرح می‌شوند، پایهٔ درس ماشین‌های الکتریکی و همچنین درس بررسی سیستم‌های قدرت می‌باشند.(به علاوه اندوکتانس خودی یکی از مباحث مهم در درس مدار الکتریکی ۲ است) از اینرو لازم است توجه زیادی را به آن داشته باشید. در ضمنِ بحث سعی می‌کنیم با ارائهٔ مثال‌های مناسب موضوع را روشن نماییم.

۴-۱۳-۱- اندوکتانس

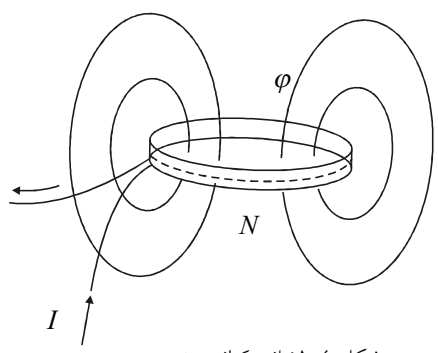
اندوکتانس مفهومی است که در مدارهای ac معنا پیدا می‌کند. مادهٔ مغناطیسی را که منحنی $B-H$ آن خطی با شیب واحد و گذرنده از مبداء باشد، مادهٔ خطی فرض می‌کنیم، معمولاً اندوکتانس‌ها را برای مدارهای خطی تعریف می‌کنند. (مدار مغناطیسی را در قسمت بعدی بررسی می‌کنیم) اندوکتانس به دو دستهٔ خودی و متقابل تعریف می‌شود.

۴-۱۳-۱-۱- اندوکتانس خودی

یک حلقهٔ حامل جریان (مثل I) را در نظر بگیرید. (به شکل ۴-۵۱ نگاه کنید) کاملا بدیهی است که این حلقه میدانی را در فضا ایجاد می‌کند. از طرف دیگر در بخش (۴-۵) نشان دادیم که این میدان شاری را از درون حلقه عبور می‌دهد و مقدار این شار نیز محاسبه شد. با این تفاسیر اندوکتانس خودی را اینگونه تعریف می‌کنیم:

نسبت گذر شار به جریان را اندوکتانس خودی گوییم، یعنی:

$$L = \frac{\varphi}{I} \qquad (۶۶-۴)$$



شکل ٤-٥١:اندوکتانس خودی

که در آن φ شار گذرنده از حلقه (و یا هر جسمی) است و طبق رابطهٔ (۴-۲۱) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\varphi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} \qquad (۶۷-۴)$$

لازم به ذکر است که اگر این سیستم دارای N حلقه باشد، مقدار شار N برابر می‌گردد. این مطلب را تحت عنوان شار پیوندی (یا شار دور) مطرح می‌کنند. بر این اساس داریم:

$$L = \frac{\lambda}{I} \qquad (۶۸-۴)$$

و برای λ که آن را شار پیوندی می‌نامیم:

$$\lambda = N\varphi \qquad (۶۹-۴)$$

پس برای محاسبهٔ اندوکتانس خودی یک سیستم کافی است به صورت زیر عمل کنیم:

۱- میدان ناشی از توزیع جریانِ مجموعه را بیابیم.

۲- با استفاده از رابطهٔ (۴-۵۶) شار گذرنده از مقطع سیستم را بیابیم.
۳- اگر سیستم دارای N حلقه باشد، شار را N برابر می‌کنیم.
۴- پاسخ قسمت قبل را بر جریان مجموعه تقسیم کنیم.

تذکر: از آنجا که تمام این موارد را پیش از این مطرح کرده‌ایم پس با نکتهٔ جدیدی روبرو نیستم، فقط باید آنها را به درستی به کار گیریم.

مثال ۴-۴۷ ضریب خودالقای یک سیم‌پیچ (سلونوئید) بلند را به ازای واحد طول آن بیابید. فرض کنید شعاع سیم‌پیچ a و تعداد دورهای آن در واحد طول n است. (کارشناسی ارشد برق)

حل: میدان سیم‌پیچ را پیش از این محاسبه کرده‌ایم. (رابطهٔ ۴-۱۵ را ببینید.)

$$\mathbf{B} = \mu_\circ n I \, \mathbf{a}_z$$

برای شار گذرنده از مقطع سیم‌پیچ داریم:

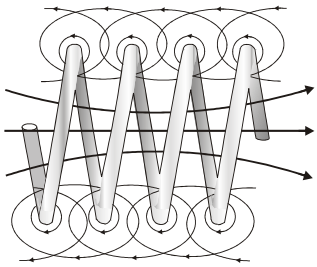
$$\varphi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} = B\,S = \mu_\circ n I \pi a^2$$

از آنجا که سیم‌پیچ داری n حلقه در واحد طول است داریم:

$$\lambda = n\varphi = \mu_\circ n^2 I \pi a^2$$

پس:

$$L = \frac{\lambda}{I} = \frac{n\varphi}{I} = \frac{\mu_\circ n^2 I \pi a^2}{I} = \mu_\circ n^2 \pi a^2$$



شکل ٤-٥٢: شکل مثال ٤-٤٧

مثال ۴-۴۸ دو نوار فلزی به عرض b و طول بی‌نهایت و فاصلهٔ d مفروضند. جریان‌های مساوی و مختلف‌الجهت I از این دو نوار می‌گذرند. اگر $b >> d$ باشد، اندوکتانس در واحد طول را بیابید. (کارشناسی ارشد برق ۸۱)

حل: از شکل (۴-۵۳) استفاده می‌کنیم. با محاسبهٔ شار مغناطیسی به اندوکتانس می‌رسیم. با توجه به شکل در مورد جریان‌های سطحی داریم:

$$\text{چگالی جریان سطحی روی سطح بالایی} = \frac{I}{b}(-\mathbf{a}_y)$$

$$\text{چگالی جریان سطحی روی سطح پایینی} = \frac{I}{b}(\mathbf{a}_y)$$

پس شدت میدان مغناطیسی بین دو سطح $\frac{I}{b}(\mathbf{a}_x)$ و در نتیجه چگالی شار مغناطیسی بصورت زیر است:

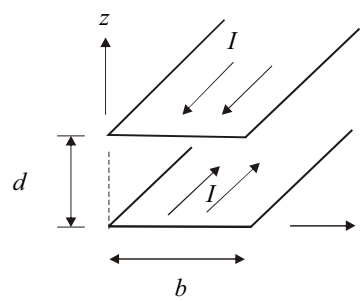
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ I}{b}(\mathbf{a}_x)$$

با این تفاسیر برای شار مغناطیسی داریم:

$$\varphi_m = B\,S = B \times d \times \ell \rightarrow \varphi_m = \frac{\mu_\circ I}{b} d$$

پس:

$$L = \frac{\varphi_m}{I} = \frac{\mu_\circ}{b} d$$



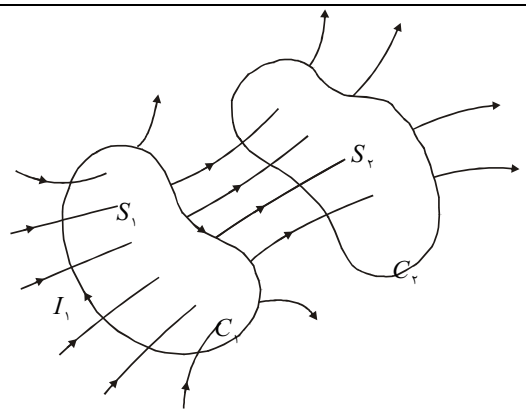
شکل ٤-٥٣: شکل مثال ٤-٤٨

مثال‌های بیشتر را در قسمت اندوکتانس متقابل بررسی خواهیم کرد.

۴-۱۳-۱-۲- اندوکتانس متقابل

برای سیستم‌های دارای تزویج (یعنی خطوط شار ناشی از یکی از مقطع دیگری بگذرد و به عبارت دیگر دارای شار متقابل باشند) علاوه بر اندوکتانس خودی، اندوکتانس متقابل نیز تعریف می‌شود. مثلا در شکل (۴-۵۴) حلقهٔ ۱ دارای جریان I_1 است از اینرو دارای اندوکتانس خودی‌ای به صورت زیر است:

$$L_{11} = \frac{\lambda_{11}}{I_1} = \frac{N_1 \varphi_{11}}{I_1} = \frac{N_1 \int_{S_1} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{ds}_1}{I_1} \qquad (۷۰-۴)$$



شکل ٤-٥٤: بررسی اندوکتانس خودی و متقابل

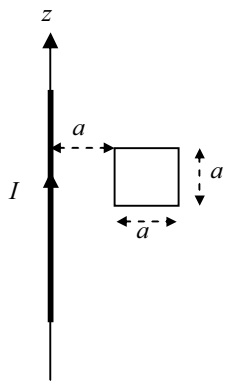
اندوکتانس متقابل عبارت است از:

نسبت شار متقابلِ گذرنده از مقطع سیستمی تقسیم بر جریان سیستمِ تولید کنندهٔ شار.

که با توجه به شکل (۴-۵۴) می‌تواند در چنین قالبی جای گیرد:

$$L_{۲۱} = \frac{\lambda_{۲۱}}{I_۱} = \frac{N_۲ \varphi_{۲۱}}{I_۱} = \frac{N_۲ \int_{S_۲} \mathbf{B}_۱ \cdot \mathbf{ds}_۲}{I_۱} \qquad (۷۱-۴)$$

مثال ۴-۴۹ از یک سیم بی‌نهایت طویل منطبق بر محور z ها جریان I عبور می‌کند. یک حلقهٔ مربع شکل به ضلع a در مجاورت سیم و در فاصلهٔ a از آن قرار دارد.(شکل ۴-۵۵) ضریب القاء متقابل بین سیم و حلقه را بیابید. (کارشناسی ارشد برق ۷۵)



شکل ٤-٥٥: شکل مثال ٤-٤٩

حل: شار متقابل این سوال را در مثال (۴-۱۹) محاسبه کرده‌ایم. با این حال برای تمرین بیشتر مجددا آن را تکرار می‌کنیم. میدان ناشی از سیم حامل جریان در محل حلقه به شکل زیر است:

$$\mathbf{B}_۱ = -\frac{\mu_\circ I}{۲\pi y}\,\mathbf{a}_x$$

برای حلقه داریم:

$$\mathbf{ds}_۲ = dz\,dy\,\mathbf{a}_x$$

در این صورت:

$$\varphi_{۲۱} = \int_{S_۲} \mathbf{B}_۱ \cdot \mathbf{ds}_۲ = \int_a^{a+a} \int_\circ^a -\frac{\mu_\circ I}{۲\pi y}\, \mathbf{a}_x \cdot dz\ dy\ \mathbf{a}_x = -\frac{\mu_\circ I\, a}{۲\pi} Ln \frac{۲a}{a}$$

$$\varphi_{۲۱} = \frac{\mu_\circ I\, a}{۲\pi} Ln \frac{۱}{۲}$$

با توجه به اینکه حلقه فقط یک دور دارد. $\lambda_{۲۱} = \varphi_{۲۱}$

پس برای اندوکتانس متقابل خواهیم داشت:

$$L_{۲۱} = \frac{\lambda_{۲۱}}{I} = \frac{\frac{\mu_\circ I\, a}{۲\pi} Ln \frac{۱}{۲}}{I} = \frac{\mu_\circ a}{۲\pi} Ln \frac{۱}{۲}$$

مثال ۴-۵۰ اندوکتانس متقابل بین یک حلقهٔ هادی مثلثی و یک سیم مستقیم طویل که در شکل (۴-۵۶) نمایش داده شده است، را بیابید. [۱]

حل: مشابه مثال (۴-۴۹) عمل می‌کنیم. شار متقابل از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\varphi_{۲۱} = \int_{S_۲} \mathbf{B}_۱ \cdot \mathbf{ds}_۲$$

در این رابطه $\mathbf{B}_۱ = -\frac{\mu_\circ I}{۲\pi r}\, \mathbf{a}_\varphi$ بوده و کافی است $\mathbf{ds}_۲$ را پیدا کنیم. مطابق شکل (۴-۵۷) می‌توان گفت که:

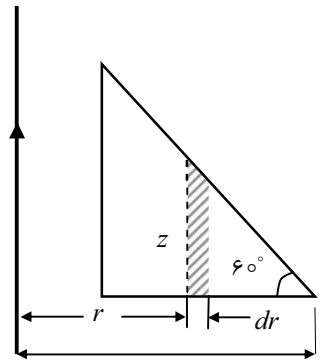
$$\mathbf{ds}_۲ = z\ dr\ \mathbf{a}_\varphi$$

برای مرتبط کردن z و r کافی است معادلهٔ خطِ خط‌چین شدهٔ شکل (۴-۵۷) را محاسبه کنیم:

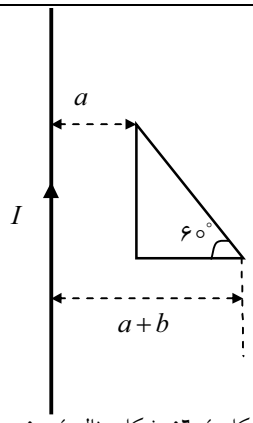
$$z - \circ = -\frac{\Delta z}{\Delta r}\big(r - (a+b)\big) \Bigg|_{\frac{\Delta z}{\Delta r} = \sqrt{۳}}$$

پس:

$$\varphi_{۲۱} = \int_{S_۲} -\frac{\mu_\circ I}{۲\pi r}\, \mathbf{a}_\varphi \cdot \Big(-\sqrt{۳}\big(r-(a+b)\big)\Big)\mathbf{a}_\varphi\, dr = \frac{\sqrt{۳}\,\mu_\circ I}{۲\pi}\left[(a+b)Ln\left(۱+\frac{b}{a}\right) - b\right]$$



شکل ٤-٥٧: شکل حل مثال ٤-٥٠



شکل ٤-٥٦: شکل مثال ٤-٥٠

در این صورت برای اندوکتانس متقابل خواهیم داشت:

$$L_{۲۱}=\frac{\varphi_{۲۱}}{I}=\frac{\sqrt{۳}\,\mu_{\circ}}{۲\pi}\left[\left(d+b\right)Ln\left(۱+\frac{b}{d}\right)-b\right]$$

برای اینکه با نحوهٔ المان‌گیری این مسائل بیشتر آشنا شوید، مثال زیر را ببینید:

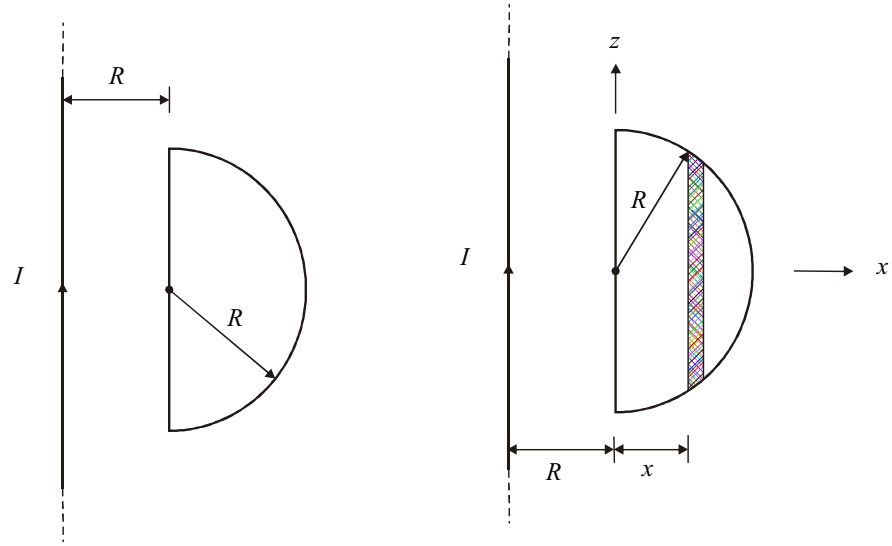
مثال ۴-۵۱ یک سیم بسیار بلند و یک مدار نیم‌دایره به شعاع R که قطر آن موازی با سیم است (مطابق شکل ۴-۵۸) در یک صفحه قرار گرفته‌اند. ضریب القای متقابل بین آن دو را پیدا کنید.
(کارشناسی ارشد برق ۸۴)

حل: از شکل (۴-۵۹) استفاده می‌کنیم، شار مغناطیسی گذرنده از نوار را محاسبه کرده و آن را به کل نیم‌دایره تعمیم می‌دهیم:

$$d\varphi_{۲۱}=\mu_{\circ}\frac{I}{۲\pi\left(R+x\right)}\times\left(۲\sqrt{R^{۲}-x^{۲}}\right)dx$$

پس:

$$\varphi_{۲۱}=\int_{\circ}^{R}\frac{\mu_{\circ}I\sqrt{R^{۲}-x^{۲}}}{\pi\left(R+x\right)}dx=\frac{\mu_{\circ}I}{\pi}\int_{\circ}^{R}\frac{\sqrt{R-x}}{\sqrt{R+x}}dx$$



شکل ٤-٥٨: شکل مثال ٤-٥١

شکل ٤-٥٩: شکل حل مثال ٤-٥١

مثال ۴-۵۲ دو سیم‌پیچ بلند به شعاع a و b حامل جریان‌های I_1 و I_2 می‌باشند و به صورت هم‌محور قرار دارند.($a < b$) اگر تعداد دورهای این سیم‌پیچ بر واحد طول به ترتیب n_1 و n_2 باشد، ضریب القاء هر یک و ضریب القاء متقابل بین دو سیم‌پیچ را بر واحد طول بیابید. [۱]

حل: اندوکتانس خودی را پیش از این در مثال (۴-۴۷) پیدا کرده‌ایم از اینرو فقط به ذکر پاسخ کفایت می‌کنیم:

$$L_{11} = \mu_0 n_1^2 \pi a^2$$

$$L_{22} = \mu_0 n_2^2 \pi b^2$$

برای محاسبهٔ ضریب القای متقابل ابتدا میدان‌های هر کدام را محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم:

$$H_1 = \begin{cases} n_1 I_1 & , \quad r < a \\ 0 & , \quad r > a \end{cases} \quad ، \quad H_2 = \begin{cases} n_2 I_2 & , \quad r < b \\ 0 & , \quad r > b \end{cases}$$

در این صورت برای φ_{21} داریم:

$$\varphi_{21} = \int \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{ds}_2 = \int_0^a \int_0^{2\pi} \mu_0 (n_1 I_1)\, r\, dr\, d\varphi + \int_a^b \int_0^{2\pi} \mu_0 (0)\, r\, dr\, d\varphi = \mu_0 n_1 I_1 \pi a^2$$

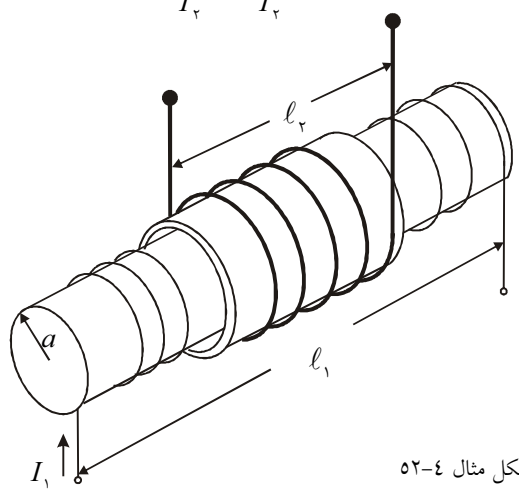
به صورت مشابه اثبات می‌شود که:

$$\varphi_{12} = \mu_0 n_2 I_2 \pi a^2$$

در این صورت داریم:

$$L_{21} = \frac{\lambda_{21}}{I_1} = \frac{n_2 \varphi_{21}}{I_1} = \mu_0 n_1 n_2 \pi a^2$$

$$L_{12} = \frac{\lambda_{12}}{I_2} = \frac{n_1 \varphi_{12}}{I_2} = \mu_0 n_1 n_2 \pi a^2$$



شکل ٤-٦٠: شکل مثال ٤-٥٢

مثال ۴-۵۳ یک کابل کواکسیال به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b دارای جریان I می‌باشد. ضریب خودالقاء این کابل بر واحد طول چقدر است؟

حل: از رابطهٔ (۴-۱۹) استفاده می‌کنیم. میدان در $r < a$ به صورت زیرست:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 r I}{2 \pi a^2} \mathbf{a}_\varphi$$

شار موجود بصورت $\varphi_{11} = \int \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{ds}_1$ و شار پیوندی از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\lambda_{11} = N \varphi_{11} \ , N = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} = \frac{r^2}{a^2}$$

پس:

$$\lambda_{۱۱} = \int_{۰}^{a} \frac{r^{۲}}{a^{۲}} \frac{\mu_{۰}\, r\, I}{۲\,\pi\, a^{۲}}\, dr = \frac{\mu_{۰}}{۸\pi} I \qquad (۷۲\text{-}۴)$$

و برای $a < r < b$ نیز مطابق رابطهٔ(۴-۱۹) داریم:

$$\mathbf{B}_{۲} = \frac{\mu_{۰} I}{۲\,\pi\, r} \mathbf{a}_{\varphi}$$

شار ناشی از آن نیز از رابطهٔ $\varphi_{۲۲} = \int \mathbf{B}_{۲} \,.\, \mathbf{ds}_{۲}$ بدست می‌آید. با توجه به اینکه کل شار تولیدی از ناحیهٔ مذکور می‌گذرد، پس:

$$\lambda_{۲۲} = \varphi_{۲۲}$$

با این تفاسیر:

$$\lambda_{۲۲} = \varphi_{۲۲} = \frac{\mu_{۰} I}{۲\pi} \int_{a}^{b} \frac{۱}{r} dr = \frac{\mu_{۰} I}{۲\pi} Ln \frac{b}{a} \qquad (۷۳\text{-}۴)$$

برای محاسبهٔ اندوکتانس کل، کافی است روابط (۴-۷۲) و (۴-۷۳) را جمع کرده و بر میزان جریان تقسیم کنیم:

$$L = \frac{\lambda_{۱۱} + \lambda_{۲۲}}{I} = \frac{\mu_{۰}}{۸\pi} + \frac{\mu_{۰}}{۲\pi} Ln \frac{b}{a} \qquad (۷۴\text{-}۴)$$

مثال ۴-۵۴ دو سیم موازی بلندِ یک خط انتقال به شعاع a و به فاصلهٔ $d >> a$ از هم قرار دارند. ضریب خود القاء این دو سیم در واحد طول چقدر است؟

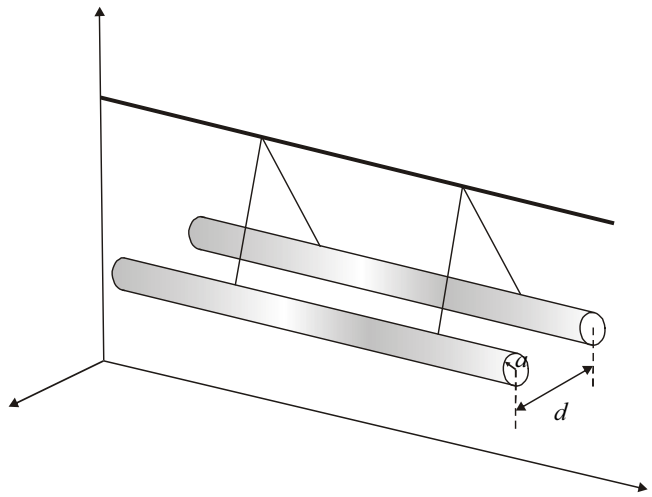
حل: چگالی شار مغناطیسی بین دو سیم از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$B = \frac{\mu_{۰} I}{۲\pi} \left(\frac{۱}{r} + \frac{۱}{d-r} \right)$$

برای محاسبهٔ شار مغناطیسی باید چگالی شار مغناطیسی را در فضای بین دو هادی جاروب کنیم، پس:

$$\varphi = \int \mathbf{B} \,.\, \mathbf{ds} = \int_{a}^{d-a} \frac{\mu_{۰} I}{۲\pi} \left(\frac{۱}{r} - \frac{۱}{d-r} \right) dr = \frac{\mu_{۰} I}{\pi} Ln \frac{d}{a}$$

در نتیجه:



شکل ٤-٦١: شکل مثال ٤-٥٤

$$L = \frac{\varphi}{I} = \frac{\mu_\circ I}{\pi} Ln \frac{d}{a} \qquad (۷۵-۴)$$

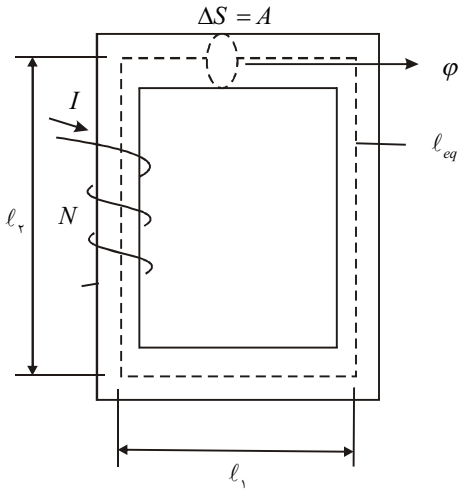
تمرینات بیشتر را در مسائل آخر فصل خواهید یافت.

۴-۱۳-۲- مدار مغناطیسی

یک یا چند سیم که حامل جریان باشد و بر ضمینهٔ مادهٔ مغناطیسی ایجاد میدان مغناطیسی نماید را **مدار مغناطیسی** می‌نامند. در مدارهای مغناطیسی هدف محاسبهٔ شدت و چگالی میدان مغناطیسی در نقاط مختلف هسته است.

مدار مغناطیسی راهکاری است برای بررسی ابزارهای عملی (مثل ترانسفورماتورها، مولدها، موتورها، رله‌ها و ...) که در آنها از این قالب استفاده شده است.

در این قسمت قصد داریم تا با بیان مفاهیم اولیه این مدارها چگونگی تحلیلشان را



شکل ٤-٦٢: مدار مغناطیسی

با هم بررسی کنیم. شکل (۴-۶۲) مدل یک هسته و سیم‌پیچ را نشان می‌دهد. این شکل را یک مدار مغناطیسی می‌نامیم. برای حل اینگونه مدارها دو روش کلی وجود دارد:

۱- روش رلوکتانسی.
۲- قانون مداری آمپر.

۴-۱۳-۲-۱- روش رلوکتانسی

در این روش بایستی اجزای موجود در شکل را مدلسازی کنیم، برای این منظور:

۱- برای هر شاخه یک رلوکتانس به صورت زیر تعریف می‌نماییم:

$$\Re = \frac{\ell_{eq}}{\mu A} \qquad (۴-۷۶)$$

که در این رابطه:

ℓ_{eq}: اندازهٔ مسیر متوسط شاخه است. مثلاً در شکل (۴-۶۲)، $\ell_{eq} = ۲\ (\ell_۱ + \ell_۲)$.

A: سطح مقطع شاخه مورد نظر است.

μ: نفوذپذیری مغناطیسی هسته یا شاخهٔ مورد نظر است.

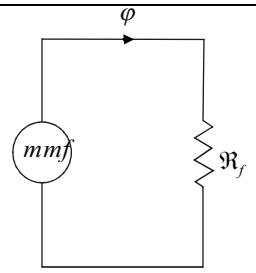
دقت کنید که منظور از شاخه:

بخشی از مدار مغناطیسی که در هر لحظه از زمان شار عبوری از هر سطح مقطع دلخواهش یکسان باشد، یک شاخهٔ مغناطیسی است. (مثلاً شکل (۴-۶۲) داری یک شاخهٔ مغناطیسی است، چرا که هسته‌ای داریم که فقط از یک مادهٔ مغناطیسی تشکیل شده و در آن هیچ فاصلهٔ هوایی وجود ندارد (پس μ در همه جا ثابت است) و از طرفی سطح مقطع نیز در تمام نقاط یکسان است.) توضیحات بیشتر در این مورد را در ضمن حل مثال‌ها مطرح می‌کنیم.

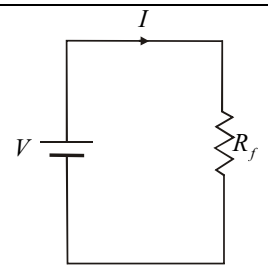
۲- برای هر سیم‌پیچ یک نیروی محرکهٔ مغناطیسی معادل با NI قرار می‌دهیم، یعنی برای هر سیم‌پیچ داریم:

$$mmf = NI \qquad (۴-۷۷)$$

حال کافی است به جای شاخه‌ها، رلوکتانس (از نظر ظاهری چیزی شبیه مقاومت) و بجای سیم‌پیچ‌ها، mmf مربوطه (چیزی شبیه منبع ولتاژ) را قرار دهیم در این صورت به شکلی مشابه (۴-۶۳) دست خواهیم یافت.



شکل ٤-٦٣: مدار مغناطیسی معادل



شکل ٤-٦٤: مدار الکتریکی معادل

سوالی که در اینجا برایمان پیش می‌آید اینست که:

اینگونه مدلسازی چه نفعی برایمان دارد چرا که هنوز نتوانسته‌ایم مقدار چگالی شار را (که هدف اصلی در بررسی مدارهای مغناطیسی است) محاسبه کنیم؟

در پاسخ باید گفت که:

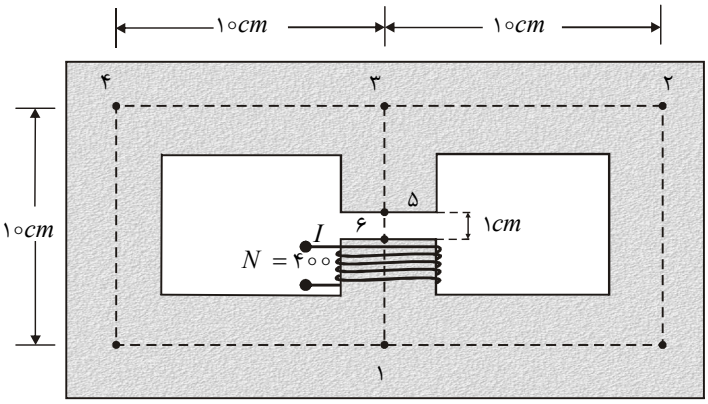
خوشبختانه می‌توانیم با استفاده از تشابه موجود بین مدارهای الکتریکی و مغناطیسی، شکل (۴-۶۳) را به شکل (۴-۶۴) که (یک مدار الکتریکی است) تبدیل کرده و به جای تحلیل مدار مغناطیسی این مدار الکتریکی را (که بسیار هم ساده می‌باشد) تحلیل کنیم و در نهایت با استفاده از جدول (۴-۱۴) به جای کمیت‌های الکتریکی دوگان آنها را در حوزهٔ مغناطیس قرار دهیم.

جدول ۴-۱۴: مقایسهٔ مدار الکتریکی و مغناطیسی

تناظر بین مدارهای الکتریکی و مغناطیسی	
مدارهای مغناطیسی	مدارهای الکتریکی
mmf ، NI	emf ، V
شار مغناطیسی ، $\varphi = (BA)$	جریان الکتریکی ، I
رلوکتانس ، $\Re$	مقاومت ، R
نفوذپذیری ، μ	رسانندگی ، σ

برای اینکه این موارد را به خوبی درک کنید به مثال (۴-۵۵) توجه نمایید.

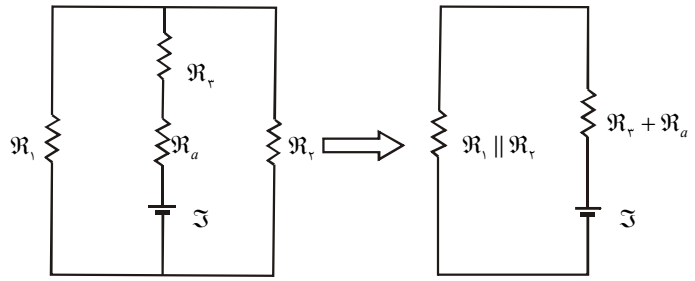
مثال ۴-۵۵ در مدار مغناطیسی شکل (۴-۶۵) مطلوبست محاسبهٔ مقدار جریان سیم‌پیچ که در صورت برقراری، چگالی شار $۱.۵\frac{Wb}{m^۲}$ در فاصلهٔ هوایی ایجاد گردد. فرض کنید که تراوایی هسته برابر $\mu = ۵۰\mu_۰$ و سطح مقطع تمام شاخه‌ها یکسان و برابر $۱۰\ cm^۲$ است.



حل: مدار مغناطیسی مدل شده در شکل (۴-۶۶) دیده می‌شود. در این شکل $\Re_۱$ ، $\Re_۲$، $\Re_۳$ و $\Re_a$ به ترتیب رلوکتانس مربوط به مسیرهای ۱۴۳، ۱۲۳، (۳۵ و ۱۶) و ۵۶ (یعنی فاصلهٔ هوایی) است. به این ترتیب برای هر کدام داریم:

$$\Re_۱ = \Re_۲ = \frac{\ell}{\mu_۰ \mu_r A} = \frac{۳۰\times۱۰^{-۲}}{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۵۰)(۱۰\times۱۰^{-۴})} = \frac{۳\times۱۰^{۸}}{۲۰\pi}$$

$$\Re_۳ = \frac{۹\times۱۰^{-۲}}{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۵۰)(۱۰\times۱۰^{-۴})} = \frac{۰.۹\times۱۰^{۸}}{۲۰\pi}$$



الف ب

شکل ٤-٦٦: مدار مغناطیسی معادل

$$\Re_a = \frac{۱\times۱۰^{-۲}}{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۱)(۱۰\times۱۰^{-۴})} = \frac{۵\times۱۰^{۸}}{۲۰\pi}$$

رلوکتانس‌های $\Re_۱$ و $\Re_۲$ را که با یکدیگر موازیند، ترکیب می‌کنیم:

$$\Re_۱ \parallel \Re_۲ = \frac{\Re_۱\Re_۲}{\Re_۱+\Re_۲} = \frac{\Re_۱}{۲} = \frac{۱.۵\times۱۰^{۸}}{۲۰\pi}$$

در این صورت رلوکتانس معادل برابر خواهد بود با:

$$\Re_T = \Re_a + \Re_۳ + \Re_۱ \parallel \Re_۲ = \frac{۷.۴\times۱۰^{۸}}{۲۰\pi}$$

حال می‌توانیم از ارتباط شار و mmf که به صورت زیر است، جریان سیم‌پیچ را محاسبه کنیم:

$$mmf = \Im = NI = \Re_T\,\varphi$$

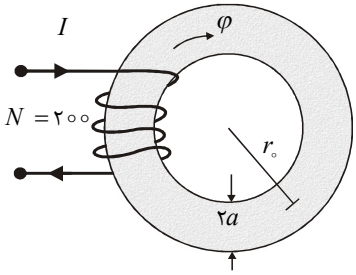
از طرفی برای شار داریم:

$$\varphi = B_a S$$

پس:

$$I = \frac{B_a S\,\Re_T}{N} = \frac{۱.۵\times۱۰\times۱۰^{-۴}\times۷.۴\times۱۰^{۸}}{۴۰۰\times۲۰\pi} = ۴۴.۱۶A$$

تمرین ۴-۲۵: هستهٔ یک چنبره در شکل (۴-۴۵) دیده می‌شود. برای این چنبره شعاع مسیر متوسط $۱۰\,cm$ است. و شعاع مقطع (که دایره است) برابر $a = ۱\ cm$ می‌باشد. اگر هسته از فولاد ($\mu = ۱۰۰۰\ \mu_۰$) و با تعداد ۲۰۰ دور ساخته شده باشد. مقدار جریان لازم را برای ایجاد شاری معادل $۰.۵\ mWb$ در داخل هسته بیابید.

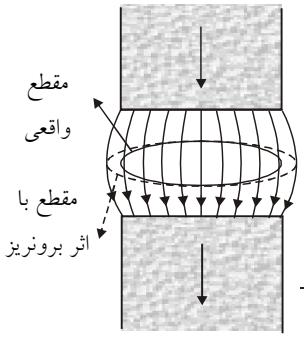


شکل ٤-٦٧: شکل تمرین ٤-٢٥

شکفتگی شار

همانطور که پیش از این گفتیم، در مدارهای مغناطیسی هدف محاسبهٔ چگالی شار مغناطیسی است. اما هدف از طراحی یک مدار مغناطیسی قرار دادن فاصلهٔ هوایی در محل مناسبی از هسته است، به‌نحوی که با نفوذ شار مغناطیسی به آن فاصلهٔ هوایی، بتوان از ویژگی‌های شار مغناطیسی (از جمله کار و گشتاور) بهره برد. با این تفاسیر عبور دادن شار از فاصلهٔ هوایی اهمیت ویژه‌ای دارد. یکی از

اتفاقات فیزیکی که در هنگام ورود شار به فاصلهٔ هوایی (و برعکس در هنگام خروج از فاصلهٔ هوایی و ورود به هسته) اتفاق می‌افتد، شکفتگی شار است. اصطلاحاً، اثر برونریزِ شار در فاصلهٔ هوایی را شکفتگی شار می‌نامند و مطابق شکل (۴-۶۸)، این اثر سبب افزایش سطح مقطع در فاصلهٔ هوایی می‌شود.



شکل ٤-٦٨: شکفتگی شار

تذکر: باید به این نکتهٔ مهم اشاره کنیم که روش رلوکتانسی فقط برای مدارهای خطی به کار می‌رود. مدار خطی مداری است که در آن از اثر اشباع هسته صرف نظر می‌شود (و یا تراوایی آن بی‌نهایت باشد و به عبارت دیگر منحنی $B-H$ آن خطی باشد)

۴-۱۳-۲-۲- قانون مداری آمپر

بر خلاف روش رلوکتانسی که فقط در مدارهای خطی به کار می‌رود، با استفاده از قانون مداری آمپر می‌توان هر گونه مداری را تحلیل کرد. کافی است به دو قانون زیر توجه داشته باشیم:

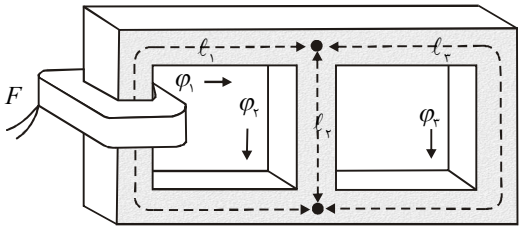
$$\oint \mathbf{H}\ .\ \mathbf{dl} = \int \mathbf{J}\ .\ \mathbf{ds} \rightarrow \sum_{K=1}^{n} H_K \ell_K = \sum_{j=1}^{m} N_j I_j \qquad (۷۸-۴)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi_i = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} B_i A_i = 0 \qquad (۷۹-۴)$$

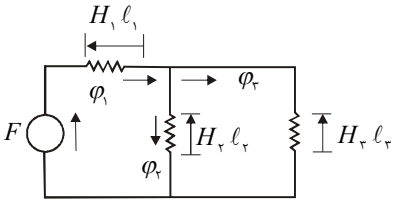
مثلا برای هسته شکل (۴-۶۹) که مدار مغناطیسی آن به صورت شکل (۴-۷۰) نشان داده شده است، می‌توانیم این دو رابطه را به صورت زیر نمایش دهیم:

$$F - H_1 \ell_1 = H_2 \ell_2 + H_3 \ell_3$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_3$$



شکل ٤-٦٩: هستهٔ مغناطیسی

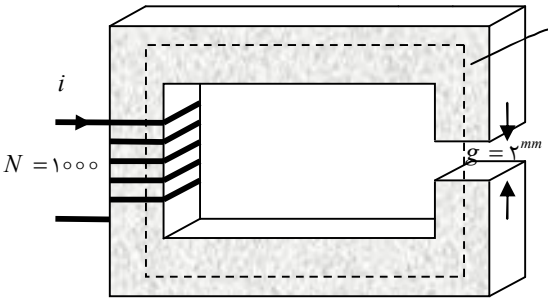


شکل ٤-٧٠: مدار مغناطیسی معادل

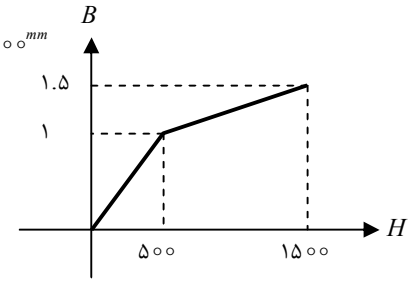
مثال ۴-۵۶ در مدار شکل (۴-۷۱):

الف) اگر چگالی شار مغناطیسی برابر ۱^T باشد، مطلوبست محاسبهٔ جریان i و ضریب نفوذپذیری مغناطیسی هسته.

ب) اگر جریان $I = ۰.۵^A$ باشد چگالی شار در فاصلهٔ هوایی را بدست آورید.



شکل ٤-۷۱: شکل مثال ٤-٥٦



شکل ٤-۷۲: منحنی $B-H$ هسته

حل: منحنی $B-H$ هسته، غیرخطی است، پس از از قانون مداری آمپر استفاده می‌کنیم. ابتدا سیستم را مطابق شکل (۴-۷۳) مدل می‌کنیم:

الف) با نوشتن اختلاف پتانسیل‌ها حول حلقهٔ شکل (۴-۷۳) داریم:

$$H_C\,\ell_C + H_g\,\ell_g = Ni \qquad (۱)$$

برای محاسبهٔ جریان، باید تمام متغیرهای سمت راست رابطهٔ فوق را پیدا کنیم.

چگالی شار در هسته ۱^T است، با توجه به شکل (۴-۷۲):

$$B_C = ۱^T \;\rightarrow\; H_C = ۵۰۰ \qquad (۲)$$

برای تعیین H_g به صورت زیر عمل می‌نماییم:

$$\begin{cases}\varphi_C = \varphi_g \\ A_C = A_g \\ B_g = \mu_\circ H_g\end{cases} \rightarrow B_C = B_g \quad \Rightarrow \quad H_g = \frac{B_C}{\mu_\circ}$$

پس:

$$H_C\,\ell_C + H_g\,\ell_g = Ni \quad \rightarrow \quad \begin{cases} i = ۱.۷۹۲^A \\ \mu = B_C / H_C = ۱/۵۰۰\end{cases}$$

ب) کافی است رابطه‌ای بر حسب $B_C - H_C$ پیدا کنیم، آنگاه می‌توانیم با تلاقی آن با منحنی شکل (۴-۷۲) به نتیجهٔ مناسب دست یابیم:

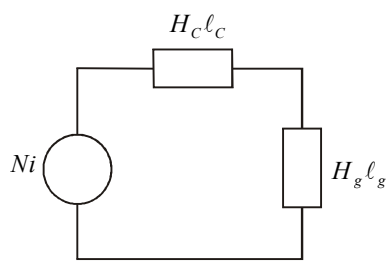
$$H_C\,\ell_C + H_g\,\ell_g = Ni \quad \rightarrow \quad H_C\,\ell_C + \frac{B_C}{\mu_\circ}\ell_g = Ni$$

در نتیجه:

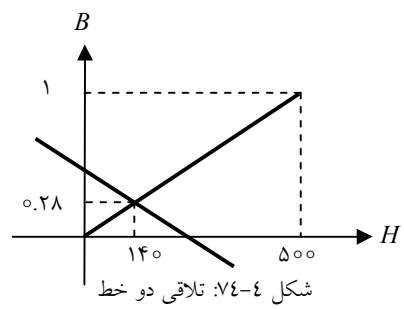
$$۰.۴H_C + ۱۵۹۱.۵B_C = ۵۰۰$$

با تلاقی آن مطابق شکل (۴-۷۴) نتیجه می‌گیریم:

$$H_C = ۱۴۰ \;,\; B_C = ۰.۲۸^T$$



شکل ٤-۷۳: مدار معادل شکل ٤-۷۱



شکل ٤-۷٤: تلاقی دو خط

در برخی از مدارهای مغناطیسی، هسته از دو بخشِ خطی و غیرخطی تشکیل شده است. مثال زیر نمونه‌ای از آنها را نشان می‌دهد:

مثال ۴-۵۷ مدار مغناطیسی شکل (۴-۷۵) از دو قسمت خطی و غیرخطی تشکیل شده است. برای قسمت غیرخطی داریم: $\varphi_m = (F_m + ۰.۰۱F_m^۲)\times ۱۰^{-۴}$. تعیین کنید که برای ایجاد چگالی شار مغناطیسی برابر ۱.۱^T چه جریانِ dc لازم است تا از سیم‌پیچ عبور کند؟ (فرض کنید که $A = ۱۰^{cm^۲}$ و $\mu = ۱۱\times ۱۰^{-۴}\,(\frac{H}{m})$) (کارشناسی ارشد برق)

حل: مدار مغناطیسی معادل به‌صورت شکل (۴-۷۶) است. شار گذرنده از هسته به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\varphi = \varphi_m = B\,A = ۱.۱\times ۱۰\times ۱۰^{-۴} = ۱.۱\times ۱۰^{-۳}$$

پس:

$$\varphi_m = (F_m + ۰.۰۱F_m^۲)\times ۱۰^{-۴} = ۱.۱\times ۱۰^{-۳}$$

که از حل آن داریم:

$$F_m = ۱۰, -۱۱۰$$

که مقدار منفی غیر قابل قبول بوده و لذا:

$$F_m = ۱۰$$

برای محاسبهٔ جریان سیم‌پیچ داریم:

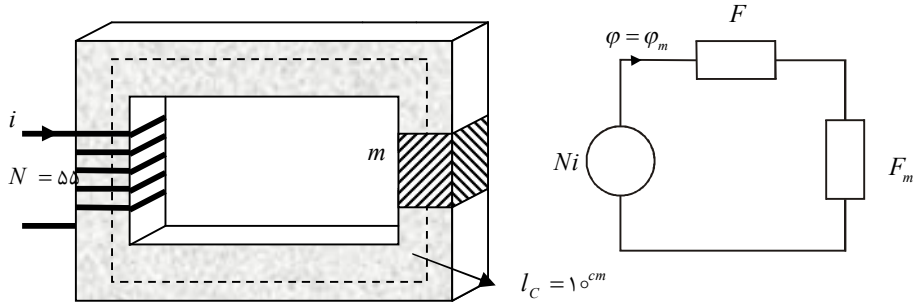
$$F + F_m = Ni$$

که در آن:

$$F = H\,\ell = \frac{B}{\mu}\ell = \frac{۱.۱}{۱۱\times ۱۰^{-۴}}\times ۱۰\times ۱۰^{-۲} = ۱۰۰$$

در نتیجه:

$$F + F_m = Ni \xrightarrow[F_m = ۱۰]{F = ۱۰۰} ۱۱۰ = ۵۵i \;\rightarrow\; i = ۲^{A}$$



شکل ٤-٧٦: مدار معادل شکل ٤-٧٥ شکل ٤-٧٥: شکل مثال ٤-٥٧

۴-۱۴- انرژی مغناطیسی

در مورد انرژی مغناطیسی روابطی مشابه میدان‌های الکتریکی خواهیم داشت. این روابط را در زیر مطرح کرده و جدولی برای قیاس آنها با حوزهٔ الکترواستاتیک ارائه داده‌ایم.

- برای محاسبهٔ انرژی مغناطیسی ذخیره‌شده در بخش خاصی از فضا، می‌توانیم ابتدا چگالی حجمی انرژی را محاسبه کرده و سپس در حجم مورد نظر انتگرال بگیریم. چگالی انرژی مغناطیسی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{w_m = \frac{۱}{۲}\mathbf{B}\,.\,\mathbf{H}} \qquad (۸۰-۴)$$

اگر در محیطی با تراوایی μ حضور داشته باشیم، این رابطه را می‌توان به روابط زیر تعمیم داد:

$$w_m = \frac{1}{2}\mu H^2 \qquad (۸۱-۴)$$

$$w_m = \frac{1}{2\mu} B^2 \qquad (۸۲-۴)$$

- برای محاسبهٔ کل انرژی مغناطیسی ناشی از یک توزیع جریان می‌توانیم روابط فوق را روی کل فضا محاسبه کرده و یا از این روابط استفاده کنیم:

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}\int \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}\, dv} \qquad (۸۳-۴)$$

$$W_m = \frac{1}{2}\int \mathbf{K} \cdot \mathbf{A}\, ds \qquad (۸۴-۴)$$

$$W_m = \frac{1}{2}\int \mathbf{I} \cdot \mathbf{A}\, dl \qquad (۸۵-۴)$$

- یکی از مهمترین نکاتی که در مورد انرژی وجود دارد ارتباط آن با اندوکتانس است. بر طبق رابطه‌ای که بیان و اثبات می‌کنیم، قادر خواهیم بود تا با استفاده از انرژی به اندوکتانس (و برعکس) برسیم.

می‌دانیم که در یک سیم‌پیچ به ضریب خودالقاء L رابطهٔ بین جریان و ولتاژ به صورت $V = L\frac{dI}{dt}$ بوده، بنابراین انرژی مغناطیسی ذخیره شده عبارت است از:

$$W = \int V\, I\, dt = \int_0^t L\frac{dI}{dt} I\, dt = \int L\, I\, dI$$

که نتیجه می‌دهد:

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 \qquad (۸۶-۴)$$

اگر سطح مقطع سیم‌پیچ را S فرض کنیم، چگالی حجمی انرژی مغناطیسی عبارت خواهد بود:

$$w_m = \frac{W_m}{S \times \ell} = \frac{\frac{1}{2}(\pi a^2 \mu_0 N^2) I^2}{\pi a^2 \ell} = \frac{1}{2}\mu_0 (NI)^2 = \frac{1}{2}\mu_0 H^2$$

که همان رابطهٔ (۴-۸۱) است.

اگر در سیستم مورد بررسی اندوکتانس متقابل نیز موجود باشد، رابطهٔ (۴-۶۸) را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد:

$$W_m = \frac{1}{2}L_{11}I_1^2 + \frac{1}{2}L_{21}I_1I_2 + \frac{1}{2}L_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}L_{22}I_2^2 \qquad (۸۷-۴)$$

و اگر در این سیستم $L_{12} = L_{21} = M$ (که معمولا در سیستم‌هایی که ما بررسی می‌کنیم اینگونه است) خواهیم داشت:

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}L_{11}I_1^2 + M\,I_1I_2 + \frac{1}{2}L_{22}I_2^2} \qquad (۸۸-۴)$$

به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال ۴-۵۸ یک کابل کواکسیال به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b حامل جریان I می‌باشد. انرژی مغناطیسی ذخیره شده در واحد طول کابل چقدر است؟ (کارشناسی ارشد آزاد ۸۷)

حل: ابتدا شدت میدان مغناطیسی را محاسبه می‌کنیم. از قبل می‌دانیم که:

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \dfrac{I\,r}{2\,\pi a^2}\mathbf{a}_\varphi & , \quad r < a \\ \dfrac{I}{2\pi\,r}\mathbf{a}_\varphi & , \quad r > a \end{cases}$$

در این صورت با استفاده از رابطهٔ (۴-۸۱) انرژی ذخیره شده در سیستم را اینگونه می‌یابیم:

$$W_m = \int \frac{1}{2}\mu_0 H^2 dv = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{2}\mu_0 \left(\frac{I\,r}{2\pi\,a^2}\right)^2 r\,dr\,d\varphi\,dz + \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{2}\mu_0 \left(\frac{I}{2\pi\,r}\right)^2 r\,dr\,d\varphi\,dz$$

$$W_m = \frac{\mu_0}{16\pi}I^2 + \frac{\mu_0}{4\pi}I^2 Ln\frac{b}{a}$$

سوال: به نظر شما برای محاسبهٔ اندوکتانس باید چه کار کنیم؟

جواب: کافی است انرژی محاسبه شده را مساوی $\frac{1}{2}L\,I^2$ قرار داده و L را بیابیم:

$$W_m = \frac{\mu_0}{16\pi}I^2 + \frac{\mu_0}{4\pi}I^2 + Ln\frac{b}{a} = \frac{1}{2}L\,I^2$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\boxed{L = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi}Ln\frac{b}{a}} \qquad (۸۹-۴)$$

این همان پاسخ مثال (۴-۵۳) است ولی با روشی دیگر.

مثال ۴-۵۹ یک هسته به ارتفاع h با سطح مقطع مستطیلی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b دارای دو نوع سیم‌پیچ می‌باشد. سیم‌پیچ حامل جریان I_1 دارای N_1 دور و سیم‌پیچ حامل جریان I_2 دارای N_2 دور می‌باشد. با استفاده از انرژی مغناطیسی ذخیره شده L_{11} ، L_{22} و M را محاسبه کنید.

حل: شکل (۴-۷۷) این وضعیت را نمایش می‌دهد. در اینجا قصد داریم تا با استفاده از انرژی به پاسخ برسیم. حل مثال با استفاده از روش کلی را به عنوان تمرین به شما واگذار کرده‌ایم (تمرین (۴-۲۶) را ببینید). برای محاسبهٔ انرژی ابتدا شدت میدان مغناطیسی را با استفاده از قانون مداری آمپر می‌یابیم:

$$\oint \mathbf{H}\ .\mathbf{d}\ell = N_1 I_1 + N_2 I_2 \rightarrow H = \frac{N_1 I_1 + N_2 I_2}{2\pi r}$$

حال با استفاده از رابطهٔ (۴-۸۱) انرژی را محاسبه می‌کنیم. (برای اینکه تصور فیزیکی مناسبی از حجم جسم و چگونگی انتگرال‌گیری بدست آورید به شکل (۴-۷۸) نگاه کنید)

$$W_m = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{1}{2}\mu_0 \left(\frac{N_1 I_1 + N_2 I_2}{2\pi r}\right)^2 r\, dr\, d\varphi\, dz$$

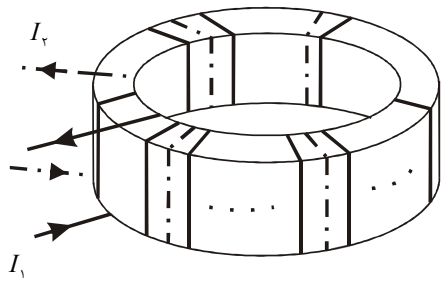
که پس از حل خواهیم داشت:

$$W_m = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0}{2\pi} h N_1^2 Ln\frac{b}{a}\right) I_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0}{2\pi} h N_2^2 Ln\frac{b}{a}\right) I_2^2 + \left(\frac{\mu_0 N_1 N_2}{\pi} Ln\frac{b}{a}\right) I_1 I_2$$

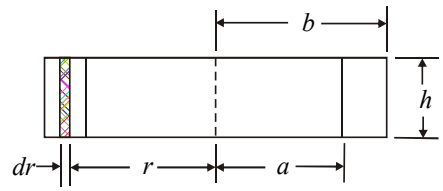
با مقایسهٔ پاسخ با رابطهٔ (۴-۸۸) نتیجه می‌گیریم:

$$L_{11} = \frac{\mu_0 h N_1^2}{2\pi} Ln\frac{b}{a} \qquad L_{22} = \frac{\mu_0 h N_2^2}{2\pi} Ln\frac{b}{a}$$

$$M = \frac{\mu_0 h N_1 N_2}{\pi} Ln\frac{b}{a}$$



شکل ٤-٧٧: شکل مثال ٤-٥٩



شکل ٤-٧٨: مقطع شکل ٤-٧٧

تمرین ۴-۲۶: دو سیم‌پیچ هم‌محور به شعاع a و b به ترتیب حامل جریان I_1 و I_2 و تعداد سیم‌پیچ در واحد طول n_1 و n_2 می‌باشند. انرژی ذخیره شده در واحد طول این دو سیم‌پیچ را بدست آورید. (فرض کنید $a < b$)

مثال ۴-۶۰ از یک هادی استوانه‌ای طویلِ توپر به شعاع a با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی نسبی $\mu_r = 1$ که محور آن منطبق بر محور z هاست، جریان الکتریکی با چگالی $\mathbf{J} = J_0 r\,\mathbf{a}_z$ می‌گذرد. اندوکتانس داخلی این هادی را در واحد طول بیابید. (کارشناسی ارشد برق)

حل: ابتدا جریان را محاسبه می‌کنیم:

$$I = \int \mathbf{J}.\mathbf{ds} = \int J_0 r\,\mathbf{a}_z . r\,dr\,d\varphi\,\mathbf{a}_z = 2\pi J_0 \frac{r^3}{3}$$

برای محاسبه اندوکتانس از انرژی استفاده می‌کنیم، برای این منظور به شدت میدان مغناطیسی نیاز خواهیم داشت. طبق تعریف شدت میدان مغناطیسی ناشی از این کابل عبارت خواهد بود از:

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r}\mathbf{a}_\varphi \xrightarrow{2\pi J_0 \frac{r^3}{3}} \mathbf{H} = \frac{J_0 r^2}{3}\mathbf{a}_\varphi$$

پس:

$$W_m = \frac{1}{2}\mu_0 \int H_\varphi^2 dv = \frac{1}{2}\mu_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{J_0^2 r^4}{9} r\,dr\,d\varphi\,dz = \frac{2\pi\mu_0 J_0^2 a^6}{108}$$

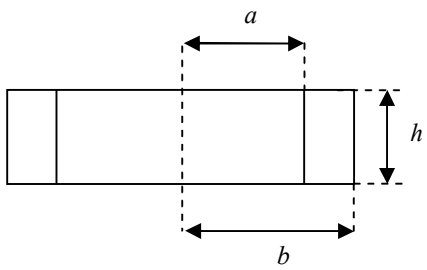
با مساوی قرار دادن رابطهٔ فوق با رابطهٔ زیر:

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 \Big|_{r=a}$$

نتیجه می‌گیریم که:

$$L = \frac{\mu_0}{12\pi}$$

تمرین ۴-۲۷: چه مقدار انرژی باید مصرف کنیم تا جریان I در یک چنبره با هسته هوایی به شعاع داخلی a و خارجی b با سطح مقطع مستطیلی با ابعاد $b-a$ و ارتفاع h با N دور سیم‌پیچی برقرار شود. فرض بر این است که سیم‌پیچی منظم باشد، آنچنان که تنها مولفهٔ B_φ در داخل هسته حضور داشته باشد و در داخل چنبره میدان صفر است.



شکل ٤-۷۹: شکل تمرین ٤-۲۷

- در مدارهای مغناطیسی که هستهٔ غیرخطی دارند، بخشی از انرژی تولیدی توسط منبع در هسته تلف می‌شود. برای محاسبهٔ این انرژی اتلافی از منحنی هیسترزیس استفاده می‌کنند. برای این منظور از مساحت حلقه بهره می‌گیرند و لذا چگالی انرژی تلف‌شده از رابطهٔ زیر محاسبه می‌گردد:

$$w_m = \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \qquad (۹۰-۴)$$

مثال ۴-۶۱ منحنی $B-H$ مربوط به یک مادهٔ فرومغناطیس به صورت $\mathbf{B} = \mu_0 k |\mathbf{H}| \mathbf{H}$ تقریب زده می‌شود، بطوریکه k عدد ثابت بر حسب متر بر آمپر است. انرژی ذخیره‌شده در واحد حجم، جهت مغناطیس کردن این ماده از صفر تا مقدار نهایی B_0 چقدر است؟ (کارشناسی ارشد برق ۸۵)

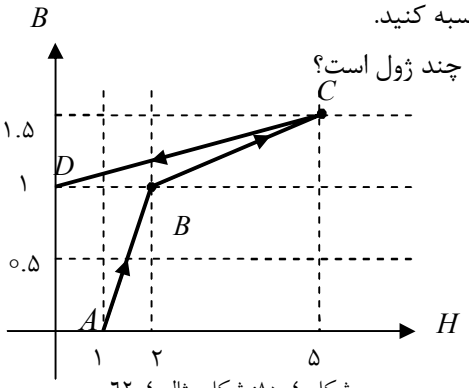
حل: مطابق رابطهٔ (۴-۹۰) انرژی ذخیره‌شده برابرست با:

$$W_m = \int_0^{B_0} H\, dB = \int_0^{H_0} 2\mu_0 k H^2 dH = \frac{2}{3}\mu_0 k H_0^3 = \frac{2B_0^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\mu_0 k}}$$

مثال ۴-۶۲ مشخصهٔ $B-H$ یک مدار مغناطیسی در شکل (۴-۸۰) داده شده است.

الف) انرژی ذخیره‌شده در مدار در نقاط B و C را محاسبه کنید.

ب) در این مشخصه مقدار توان تلف‌شده در کل فرآیند چند ژول است؟



شکل ٤-۸۰: شکل مثال ٤-٦٢

حل: الف) انرژی ذخیره‌شده در هر نقطه برای مساحت تشکیل‌شده زیر محور B نمودار تا آن نقطه است:

$$W_B = \frac{۱}{۲}(۱+۲)\times ۱ = ۱.۵$$

$$W_C = \frac{۱}{۲}(۱+۲)\times ۱ + \frac{۱}{۲}(۲+۵)\times ۰.۵ = ۳.۲۵$$

ب) کل توان تلف‌شده در این فرآیند برابر است با مساحت حلقه:

$$W_{loss} = \frac{۱}{۲}(۱+۲)\times ۱ + \frac{۱}{۲}(۲+۵)\times ۰.۵ - \frac{۱}{۲}(۰.۵\times ۵) = ۲$$

نکتهٔ طلایی

- انرژی یک دوقطبی واقع در میدان مغناطیسی B را می‌توان از رابطهٔ زیر محاسبه کرد:

$$W_m = -\mathbf{m}\,.\,\mathbf{B} \qquad (۹۱-۴)$$

جدول ۴-۱۵: مقایسهٔ انرژی مغناطیسی و الکتریکی

تناظر بین روابط مرتبط با انرژی در دو حوزهٔ مختلف		
موضوع	**الکترواستاتیک**	**مغناطیس ساکن**
انرژی بارهای گسسته	$W_e = \frac{۱}{۲}\sum_{k=۰}^{N} Q_k V_k$	بار مغناطیسی نداریم
چگالی حجمی انرژی	$W_e = \frac{۱}{۲}\mathbf{D}\,.\,\mathbf{E}$	$w_m = \frac{۱}{۲}\mathbf{B}\,.\,\mathbf{H}$
انرژی تمام فضا	$W_e = \frac{۱}{۲}\int_c \rho_l V\, dl$	$W_m = \frac{۱}{۲}\int \mathbf{I}\,.\,\mathbf{A}\, dl$
بیان دیگر انرژی	$W_e = \frac{۱}{۲}CV^۲$	$W_m = \frac{۱}{۲}LI^۲$
انرژی دوقطبی	$W_e = \frac{۱}{۲}\mathbf{P}\,.\,\mathbf{E}$	$W_m = -\mathbf{m}\,.\,\mathbf{B}$

۴-۱۵- نیروی مغناطیسی

بحث نیرو و گشتاور (که در قسمت بعدی مطرح می‌شود) بی‌شک اصلی‌ترین هدف درس الکترومغناطیس است، شاید بتوان بدون اغراق گفت که: تمام قسمت‌های قبلی (اگر چه قسمت عمدهٔ درس بود) ولی پیش‌نیازی برای بیان این دو قسمت است چرا که از دیدگاه عملی اکثر دستگاه‌های مرتبط با این حوزه با توجه به مقدار نیرو و گشتاور لازم، ساخته می‌شوند و عملا آنچه می‌تواند کار انجام دهد نتیجه‌ای از نیرو (که ما آن را با حرکت و جابه‌جایی می‌شناسیم) می‌باشد. در این قسمت نیرو را از جهات مختلف بررسی می‌کنیم. انواع نیروی مغناطیسی عبارتند از:

۱- نیروی مغناطیسی وارد بر بار متحرک.
۲- نیروی مغناطیسی وارد بر جریان.
۳- نیروی مغناطیسی وارد بر اجسام.

در ادامه هر یک از این قسمت‌ها را جداگانه توضیح می‌دهیم:

۴-۱۵-۱- نیروی مغناطیسی وارد بر بار متحرک

نیروی مغناطیسی وارد بر باری معادل q که با سرعت V در میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ حرکت می‌کند از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{F}_m = q\,\mathbf{V}\times\mathbf{B} \qquad (۹۱\text{-}۴)$$

اگر نیروی الکتریکی را که پیش از این بررسی شده بود ($\mathbf{F}_e = \mathbf{E}\,q$) نیز به این پاسخ بیفزاییم، داریم:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = q\,\mathbf{V}\times\mathbf{B} + \mathbf{E}\,q = q\,(\mathbf{V}\times\mathbf{B} + \mathbf{E}) \qquad (۹۲\text{-}۴)$$

رابطهٔ فوق را رابطهٔ نیروی لورنتس می‌نامیم و مجموع نیروهای الکتریکی و مغناطیسی وارد بر یک بار را برایمان محاسبه می‌کند. از آنجا که برای تحلیل این معادله بایستی همزمان اثرات میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را در نظر گرفت (که تحت عنوان الکترومغناطیس آن را می‌شناسیم) در اینجا به همین توضیحات اکتفا کرده و با حل مثال زیر موضوع را بررسی می‌کنیم. تمرینات بیشتر را در مسائل پایان فصل خواهید یافت.

مثال ۴-۶۳ در محیطی میدان‌های یکنواخت عمود بر هم B و E وجود دارد. بار q باید در این محیط با چه سرعتی در جهت عمود بر B حرکت کند تا بر آن نیرویی وارد نشود؟

حل: طبق رابطهٔ (۴-۹۲) برای صفر شدن نیرو باید داشته باشیم:

$$\mathbf{F} = q\,(\mathbf{V}\times\mathbf{B}+\mathbf{E}) = 0 \rightarrow \mathbf{E} = -\mathbf{V}\times\mathbf{B} = \mathbf{B}\times\mathbf{V}$$

کافی است دو طرف را در $\mathbf{B}$ ضرب کنیم، در اینصورت:

$$\mathbf{E}\times\mathbf{B} = (\mathbf{B}\times\mathbf{V})\times\mathbf{B} \xrightarrow{back\ cab} \mathbf{V}(\mathbf{B}\,.\,\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{B}\,.\,\mathbf{V})$$

با توجه به اینکه $\mathbf{B}\,.\,\mathbf{V} = 0$ لذا:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B^2}$$

تمرین ۴-۲۸: نیروهای وارد بر یک بار آزمون واقع در یک نقطه در یک ناحیه با میدان الکتریکی E و میدان مغناطیسی B برای سه سرعت متفاوت زیر عبارتند از:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_1 = q\,E_0(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z) & , \quad \mathbf{V}_1 = V_0\,\mathbf{a}_x \\ \mathbf{F}_2 = q\,E_0(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z) & , \quad \mathbf{V}_2 = V_0\,\mathbf{a}_y \\ \mathbf{F}_3 = 0 & , \quad \mathbf{V}_3 = V_0\,\mathbf{a}_z \end{cases}$$

q و E_0 مقادیر ثابتی هستند. میدانهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ را بدست آورید.

۴-۱۵-۲- نیروی مغناطیسی وارد بر سیستم حامل جریان

اگر در بخشی از فضا جریان وجود داشته باشد، می‌توان نیروی مغناطیسی وارد بر این بخش را (بسته به چگونگی توزیع جریان در آن بخش) از روابط زیر بدست آورد:

$$\mathbf{F}_m = \int \mu_0\, I\ \mathbf{d}\ell\times\mathbf{H} \qquad (۹۳\text{-}۴)$$

$$\mathbf{F}_m = \int \mu_0\, \mathbf{K}\times\mathbf{H}\ ds \qquad (۹۴\text{-}۴)$$

$$\mathbf{F}_m = \int \mu_0\, \mathbf{J}\times\mathbf{H}\ dv \qquad (۹۵\text{-}۴)$$

یک سوال: مگر حرکت بار تولید جریان نمی‌کند؟ اگر اینگونه است (که هست) پس چرا برای بار نقطه‌ای متحرک رابطهٔ جداگانه‌ای برای نیرو بیان شد؟

جواب: کاملاً درست است که حرکت بار باعث ایجاد جریان می‌گردد و همچنین باید بگوییم که اگر چه برای بار نقطه‌ای رابطهٔ جداگانه‌ای بیان کرده‌ایم، ولی این مطلب تناقضی با روابط دیگر (نیروی وارد بر

جریان) ندارد و در واقع ما می‌توانیم به راحتی از نیروی وارد بر جریان به قانون لورنتس برسیم. دقت کنید:

$$\mathbf{F}_m = \int \mu_\circ I\, \mathbf{d}\ell \times \mathbf{H} = \int \mu_\circ \frac{dq}{dt}\mathbf{d}\ell \times \mathbf{H} = \int \mu_\circ\, dq\, \frac{\mathbf{d}\ell}{dt} \times \mathbf{H}$$

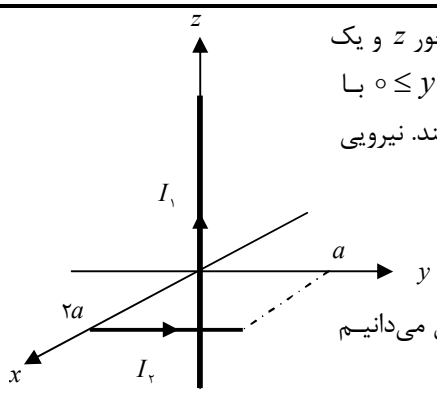
پس:

$$\mathbf{F}_m = \mu_\circ q\, \mathbf{V} \times \mathbf{H} \;\rightarrow\; \mathbf{F}_m = q\, \mathbf{V} \times \mathbf{B}$$

و این تحقیقاً اثبات کاری است که لورنتس انجام داده بود. مثال‌هایی که در ادامه آمده‌اند نحوهٔ محاسبهٔ نیروی وارد بر سیستم‌های حاوی جریان را نمایش داده‌اند.

مثال کلیدی

مثال ۴-۶۴ یک سیم نامتناهی حامل جریان I_1 روی محور z و یک قطعه سیم حامل جریان I_2 در $z = 0$ ، $x = 2a$ و $0 \le y \le a$ با جهت‌های نشان داده شده در شکل (۴-۵۳) مفروض هستند. نیرویی که سیم نامتناهی به قطعه سیم وارد می‌کند چقدر است؟ (کارشناسی ارشد برق ۷۹)



شکل ٤-٨١: شکل مثال ٤- ٦٤

حل: ابتدا میدان ناشی از سیم بی‌نهایت را می‌یابیم. از قبل می‌دانیم که:

$$\mathbf{H}_1 = \frac{I_1}{2\pi r}\mathbf{a}_\varphi = \frac{I_1}{2\pi(x^2+y^2)}\left[-y\,\mathbf{a}_x + x\,\mathbf{a}_y\right]$$

حال نیروی وارد بر سیم حامل جریان I_2 را با استفاده از رابطهٔ (۴-۹۳) پیدا می‌کنیم:

$$\mathbf{F}_{m21} = \mu_\circ \int_\circ^a I_2\, dy\, \mathbf{a}_y \times \frac{I_1}{2\pi(4a^2+y^2)}\left[-y\,\mathbf{a}_x + x\,\mathbf{a}_y\right]$$

$$\mathbf{F}_{m21} = \frac{\mu_\circ I_1 I_2}{2\pi}\mathbf{a}_z \int_\circ^a \frac{y\,dy}{4a^2+y^2} = \frac{\mu_\circ I_1 I_2}{4\pi}\mathbf{a}_z \left[Ln(4a^2+y^2)\right]\Big|_\circ^a = \frac{\mu_\circ I_1 I_2}{4\pi} Ln\frac{5}{4}\,\mathbf{a}_z$$

مثال ۴-۶۵ دو صفحهٔ بزرگ موازی در $z=0$ و $z=d$ قرار دارند و به ترتیب حامل جریان سطحی $J_{S_0}a_y$ و $-J_{S_0}a_y$ می‌باشند. نیروی وارد بر یک متر مربع از صفحهٔ پایینی از طرف صفحهٔ بالایی چقدر است؟ (کارشناسی ارشد برق)

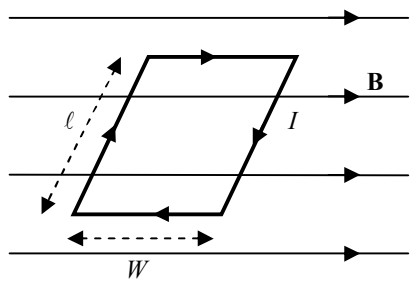
حل: ابتدا میدان ناشی از صفحهٔ بالایی را در محل صفحهٔ پایینی پیدا می‌کنیم. این کار را با استفاده از رابطهٔ (۴-۱۷) انجام می‌دهیم:

$$\mathbf{B}_2=\mu_0\frac{1}{2}\mathbf{J}_S\times\mathbf{a}_z=\mu_0\frac{1}{2}(-J_{S_0}\mathbf{a}_y)\times-\mathbf{a}_z=\frac{\mu_0}{2}J_{S_0}\mathbf{a}_x$$

حال می‌توانیم برای محاسبهٔ نیرو از رابطهٔ (۴-۹۴) بهره بگیریم:

$$\mathbf{F}_{12}=\int_s\mathbf{J}_{S_1}\times\mathbf{B}_2\,ds=J_{S_0}\mathbf{a}_y\times\frac{\mu_0}{2}J_{S_0}\mathbf{a}_x\ \rightarrow\ \mathbf{F}_{12}=\frac{-\mu_0}{2}J_{S_0}{}^2\mathbf{a}_z$$

تمرین ۴-۲۹: نیروی خالص وارد بر حلقهٔ شکل (۴-۸۲) را بیابید. در این شکل $\ell=2^m$ ، $w=1^m$، $I=10^A$ و شدت میدان $B=0.2T$ می‌باشد. در ضمن زاویهٔ حلقه با جهت مثبت محور xها را 15° در نظر بگیرید.



شکل ٤-۸۲: شکل تمرین ٤-۲۹

مثال ۴-۶۶ از یک پوستهٔ رسانای کاملِ نازک به شکل نیم‌استوانه و به شعاع a که طول آن بی‌نهایت فرض می‌شود، جریان I بطور یکنواخت در جهت $-\mathbf{a}_z$ عبور کرده و سپس این جریان از سیمی که بر روی محور نیم‌استوانه (محور zها) قرار دارد، برمی‌گردد. نیروی وارد بر واحد طول سیم را بیابید. (کارشناسی ارشد برق ۸۷)

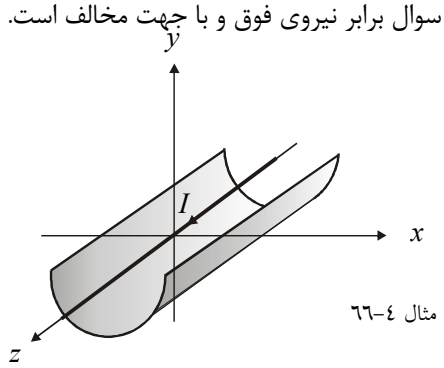
حل: نیروی وارد بر پوستهٔ نیم‌استوانه‌ای (از طرف سیم) را محاسبه کرده و با عوض کردن جهتش به نیروی وارد بر سیم می‌رسیم. میدان ناشی از سیم حامل جریان در محل پوسته به شکل زیر است:

$$\mathbf{H} = \frac{I}{۲\pi r}\mathbf{a}_\varphi \Bigg|_{r=a} = \frac{I}{۲\pi a}\mathbf{a}_\varphi$$

برای محاسبهٔ نیروی وارد بر نیم‌استوانه از رابطهٔ (۴-۹۳) استفاده می‌کنیم؛ طبیعی است که در این رابطه $I\,\mathbf{d}\ell = \frac{I}{\pi a}(-\mathbf{a}_z)\,a\,d\varphi$ خواهد بود. پس:

$$\mathbf{F}_m = \int_{-\pi}^{\circ} \mu_\circ \frac{I}{\pi a}(-\mathbf{a}_z)\,a\,d\varphi \times \frac{I}{۲\pi a}\mathbf{a}_\varphi = \ldots = \frac{\mu_\circ I^۲}{\pi^۲ a}(-\mathbf{a}_y)$$

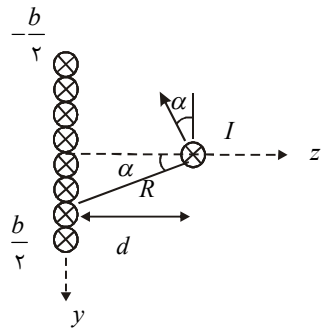
همانطور که ذکر شد، پاسخ سوال برابر نیروی فوق و با جهت مخالف است.



شکل ٤-۸۳: شکل مثال ٤-٦٦

مثال ۴-۶۷ نواری به صورت $\frac{-b}{۲} < y < \frac{b}{۲}$ در صفحهٔ $z = \circ$ جریان کل I آمپر را به صورت یکنواخت در جهت $\mathbf{a}_x$ از خود عبور می‌دهد. همچنین در مختصات $y = \circ$ و $y = d$ فیلامانی قرار گرفته است که جریان I آمپر را در جهت $-\mathbf{a}_x$ از خود عبور می‌دهد. مطلوبست محاسبهٔ نیروی وارده بر واحد طول نوار توسط فیلامان. (کارشناسی ارشد برق)

حل: برای حل از شکل (۴-۸۴) استفاده می‌کنیم. مطابق این شکل برای شدت میدان مغناطیسی داریم:



شکل ٤-٨٤: شکل مثال ٤-٦٧

$$\begin{cases} dH_y = -\dfrac{J_S\, dy'}{2\pi R}\cos\alpha \\ R = \sqrt{d^2 + y^2} \\ J_S = -\dfrac{I}{b} \end{cases} \rightarrow \quad dH_y = \frac{-I\, d}{2\pi b} \times \frac{dy'}{d^2 + y'^2}$$

$$H_y = \frac{-I\, d}{2\pi b}\int_{-b/2}^{b/2} \frac{dy'}{d^2 + y'^2} = \ldots = \frac{-I}{\pi b}\left[\tan^{-1}\left(\frac{b}{2d}\right)\right]$$

طبق رابطهٔ (۴-۹۳) برای نیروی وارده خواهیم داشت:

$$\mathbf{F} = I\, \mathbf{L}\times\mathbf{B} = I\left(-\mathbf{a}_x\right)\times\left(-\mathbf{a}_y\, \frac{-\mu_\circ I}{\pi b}\tan^{-1}\left(\frac{b}{2d}\right)\right) = \frac{\mu_\circ I^2}{\pi b}\tan^{-1}\left(\frac{b}{2d}\right)\mathbf{a}_z$$

۴-۱۵-۳- نیروی مغناطیسی وارد بر اجسام

برای محاسبهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر اجسام (و یا حتی توزیع جریان) از روش مجازی نیرو که پیش از این در قسمت الکترواستاتیک با آن آشنا شده‌اید، استفاده می‌کنیم. اثبات می‌شود که نیروی مغناطیسی را می‌توان از روی تغییر انرژی ذخیره شده در یک جسم و در دو حالت زیر بدست آورد:

$$\mathbf{F} = \begin{cases} \nabla W_m & , \quad \text{تحت جریان ثابت} \\ -\nabla W_m & , \quad \text{تحت شار ثابت} \end{cases} \qquad (۴-۹۶)$$

- همچنین اگر اندوکتانس متقابل را داشته باشیم، می‌توان به راحتی اثبات کرد (مسئلهٔ ۳۲ پایان فصل) که قادریم بیان فوق را با رابطهٔ زیر نشان دهیم:

$$\left|\mathbf{F}_m\right| = \left|\nabla W_m\right| = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial x} \qquad (۴-۹۷)$$

(تذکر: کافی است از رابطهٔ (۴-۸۸) با فرض ثابت بودن L_{11} و L_{22} نسبت به x مشتق بگیریم).

به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۴-۶۸ دو پیچک با تعداد دورهای N_1 و N_2 در واحد طول با شعاع تقریبا مساوی a مفروضند. اگر پیچک اولی بتواند در داخل پیچک دومی بلغزد، نیروی متقابل بین دو پیچک را در واحد طول بدست آورید. (کارشناسی ارشد برق)

حل: این مثال را با استفاده از رابطهٔ (۴-۹۷) حل می‌کنیم. بهترین روش حل تمرین (۴-۳۰) نیز استفاده از رابطهٔ (۴-۹۶) است، بدین طریق کار با هر دو رابطه را یاد خواهیم گرفت. خوشبختانه اندوکتانس متقابل این سیستم را در مثال (۴-۵۲) محاسبه کرده‌ایم:

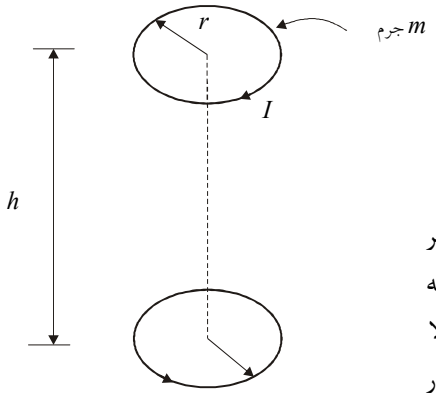
$$L_{21} = M = \mu_0 N_1 N_2 \pi a^2$$

پس:

$$\left|\mathbf{F}_m\right| = \left|\nabla W_m\right| = I_1 I_2 \frac{\partial M_{21}}{\partial x} = \mu_0 N_1 N_2 \pi a^2 I_1 I_2$$

تمرین ۴-۳۰: سیملوله‌ای از N دور سیم نازک کنار هم پیچیده، تشکیل شده است. طول سیملوله ℓ و شعاع آن a است و از سیم‌ها جریان I می‌گذرد. نیروی مغناطیسی وارد بر واحد طول سیم‌ها را با استفاده از روش کار مجازی بیابید.

مثال ۴-۶۹ دو حلقه به شعاع $r = 1^m$ و به فاصلهٔ h از یکدیگر ($h >> r$) دارای جریان I در جهت خلاف یکدیگر (مطابق شکل ۴-۸۵) هستند. اگر حلقهٔ پایینی روی زمین بوده و اندازهٔ ضریب القاء متقابل دو حلقه برابر $\frac{\mu_0 \pi r^4}{2h^3}$ باشد،چه رابطه‌ای باید بین جریان I و جرم حلقه m وجود داشته باشد تا حلقهٔ بالایی معلق بماند؟ (کارشناسی ارشد برق ۸۰)



شکل ٤-۸۵: شکل مثال ٤-٦٩

حل: حلقه‌های ذکر شده در مثال را حلقه‌های هلم‌هولتز می‌نامند. با توجه به اینکه جهت جریان در دو حلقه مخالف هم است، از طرف حلقهٔ پایینی نیرویی به سمت بالا به حلقهٔ بالایی اعمال می‌شود. طبق رابطهٔ (۴-۹۷) مقدار این نیرو برابرست با:

$$\mathbf{F} = I_1 I_2 \nabla\left(L_{12}\right)$$

اگر فاصلهٔ دو حلقه را $h = z$ فرض کنیم، مقدار این نیرو برابرست با:

$$F_z = \left| I_1 I_2 \frac{d}{dz}\left(\frac{\mu_\circ \pi r^4}{2z^3}\right)\right| = I_1 I_2 \frac{3\mu_\circ \pi r^4}{2z^4}\Bigg|_{z=h} = I_1 I_2 \frac{3\mu_\circ \pi r^4}{2h^4}$$

کافی است نیروی محاسبه شده را با نیروی وزن مساوی قرار دهیم:

$$I_1 I_2 \frac{3\mu_\circ \pi r^4}{2h^4}\Bigg|_{I_1 = I_2 = I,\, r = 1^m} = m\,g \;\rightarrow\; I = h^2\sqrt{\frac{2m\,g}{3\mu_\circ \pi}}$$

جدول (۴-۱۶) دوگانی بین الکترواستاتیک و مغناطیس را در ارتباط با نیرو آشکار کرده است:

جدول ۴-۱۶: مقایسهٔ نیروی مغناطیسی و الکتریکی

تناظر بین روابط مرتبط با نیرو در دو حوزهٔ مختلف			
موضوع		الکترواستاتیک	مغناطیس ساکن
نیروی بار گسسته (متحرک)		$\mathbf{F}_e = \mathbf{E}\,q$	$\mathbf{F}_m = q\,\mathbf{V}\times\mathbf{B}$
نیروی توزیع بار (جریان)		$W_e = \frac{1}{2}\mathbf{P}\,.\,\mathbf{E}$	$\mathbf{F}_m = \int \mu_\circ I\,\mathbf{d}\ell\times\mathbf{H}$
روش مجازی نیرو	ولتاژ(جریان) ثابت	$\mathbf{F}_e = \nabla W_e$	$\mathbf{F}_m = \nabla W_m$
	بار (شار) ثابت	$\mathbf{F}_e = -\nabla W_e$	$\mathbf{F}_m = -\nabla W_m$
چگالی نیروی وارد بر دوقطبی		$\mathbf{F}_e = (\mathbf{P}\,.\,\nabla)\,\mathbf{E}$	$\mathbf{F}_m = (\mathbf{m}\,.\,\nabla)\,\mathbf{B}$

۴-۱۶- گشتاور مغناطیسی

اگر تمرین (۴-۲۹) را به درستی حل کرده باشید، پاسخ خود را در این جمله خواهید یافت:

نکتهٔ طلایی

اگر مدار بستهٔ C حامل جریان I باشد و در میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}$ قرار بگیرد، مقدار خالص نیروی اعمال‌شده به آن همواره صفر است.

در مدار مذکور اگر چه مقدار خالصِ نیروی اعمال‌شده صفر است، ولی گشتاور مکانیکی اعمال‌شده بر مدار جریان صفر نخواهد بود. این گشتاور سعی بر چرخانیدن حلقهٔ جریان دارد به گونه‌ای که میدان حاصل از حلقهٔ جریان (یا به عبارت دقیقتر گشتاور مغناطیسی حلقه حامل جریان) با میدان **B** هم‌جهت شود.

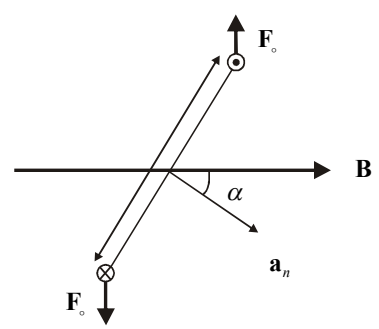
به صورتی که در مسئلهٔ ۲۲ پایان فصل آمده است، اثبات می‌شود که گشتاور مغناطیسی وارد بر حلقهٔ حامل جریانی به صورت شکل (۴-۸۶) از رابطهٔ زیر محاسبه می‌گردد:

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \qquad (۹۸\text{-}۴)$$

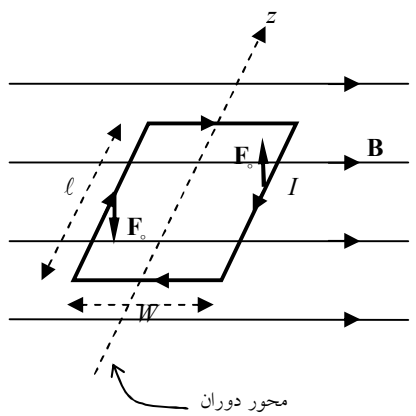
که در آن **m** ممان مغناطیسی وارد بر حلقه است که طبق بخش (۴-۶) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{m} = S\, I\, \mathbf{a}_n \qquad (۹۹\text{-}۴)$$

پس اگر چه بحث مهم است ولی با موضوع بسیار ساده‌ای مواجهیم. به مثال‌های زیر توجه کنید.



شکل ٤-٨٧: نیروی وارد بر حلقهٔ شکل ٤-٨٦



شکل ٤-٨٦: حلقهٔ حامل جریان قرار گرفته در میدان مغناطیسی

مثال ۴-۷۰ جریان I در یک حلقهٔ مربعی شکل به ضلع a در جهت مثلثاتی جاری است. حلقه در صفحهٔ xy قرار داشته و محور آن بر محور z منطبق است. از طرفی اضلاع آن موازی محورهای x و y می‌باشند. اگر این حلقه در میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B} = B_\circ(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z)$ قرار بگیرد، چه گشتاوری بر حلقه وارد می‌شود؟ (کارشناسی ارشد آزاد برق ۸۲)

حل: اگر چه صورت سوال بسیار طولانی است ولی پاسخ فقط یک خط است. کافی است از رابطهٔ (۴-۹۸) استفاده کنیم و در ضمن کاملاً مشخص است که (طبق رابطهٔ ۴-۹۹) مقدار ممان مغناطیسی برابر $\mathbf{m} = a^2 I\, \mathbf{a}_z$ است، پس:

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = a^2 I\, \mathbf{a}_z \times B_0 (\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z) = B_0 a^2 I\, \mathbf{a}_y$$

مثال ۴-۷۱ در مختصات استوانه‌ای حلقهٔ جریانی در صفحهٔ $z = 0$ هم‌مرکز با مبداء مختصات به شعاع a که جریان $\mathbf{I} = I_0 \mathbf{a}_\varphi$ در محیط آن برقرار است، در معرض میدان مغناطیسی $\mathbf{H} = H_0 \mathbf{a}_\varphi$ در فضای آزاد قرار دارد. گشتاور نیروی اعمالی به آن چقدر است؟ (کارشناسی ارشد آزاد ۸۴)

حل: کاملا مشابه مثال (۴-۷۰) است. و تنها هدف از بیان آن اینست که رابطه‌های (۴-۸۰) و (۴-۸۱) برای هر دستگاه مختصاتی و هر نوع سیستمی صادقند. ابتدا بردار ممان را می‌یابیم. کاملا مشخص است که:

$$\mathbf{m} = S\, I\, \mathbf{a}_n = \pi\, a^2 I\, \mathbf{a}_z$$

حال بر طبق رابطهٔ (۴-۸۰) خواهیم داشت:

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = \pi a^2 I\, \mathbf{a}_z \times \mu_0 H_0\, \mathbf{a}_\varphi = -\pi a^2 I\, \mu_0 H_0\, \mathbf{a}_r$$

در مثال‌های بررسی شده همواره شدت میدان یکنواخت بود. حال **سوال** اینجاست که اگر شدت میدان متغیر و تابعی از دستگاه مختصات مورد نظر بود باید چه کنیم؟

جواب: در این حالت دیفرانسیل گشتاور را از رابطهٔ زیر یافته و در نهایت از آن انتگرال سطح می‌گیریم:

$$d\,\mathbf{T} = d\,\mathbf{m} \times \mathbf{B} \qquad (۱۰۰\text{-}۴)$$

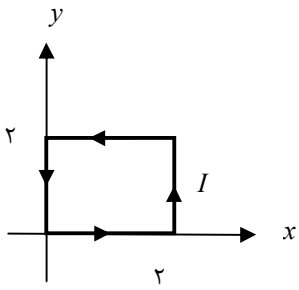
$$\mathbf{T} = \int_S d\,\mathbf{m} \times \mathbf{B} \qquad (۱۰۱\text{-}۴)$$

باید تذکر دهیم که همانطور که در رابطهٔ (۴-۱۰۰) مشاهده شده دیفرانسیل گشتاور متناظر با دیفرانسیل ممان (و در نتیجه متناظر با دیفرانسیل سطح حلقه) است و رابطه‌ای به صورت زیر در حالت کلی نادرست می‌باشد:

$$d\,\mathbf{T} \neq \mathbf{m} \times d\,\mathbf{B}$$

برای اینکه با فرم کلی حل این مسائل آشنا شوید به مثال (۴-۷۲) توجه کنید و برای اینکه تـذکر اخیـر را دریابید تمرین (۴-۳۱) را حل کنید.

مثال ۴-۷۲ حلقهٔ مربع شکل به ضـلع ۲^m در صـفحهٔ xy مطـابق شـکل (۴-۸۸) قـرار دارد. میـدان $\mathbf{H} = \frac{۲}{\mu_\circ} xy\ \mathbf{a}_x$ در فضا موجود است. اگر مقدار جریـان حاصـل ۱۰^A باشـد، گـشتاور وارد بـر حلقـه را بیابید. (کارشناسی ارشد برق ۷۶)



شکل ٤-۸۸: شکل مثال ٤-۷۲

حل: چون میدان متغیر داریم از رابطهٔ (۴-۸۲) استفاده می‌کنیم:

$$d\,\mathbf{T} = d\,\mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

طبیعی است که برای دیفرانسیل ممان به صورت زیر عمل کنیم:

$$d\,\mathbf{m} = I\,dx\,dy\,\mathbf{a}_z$$

پس:

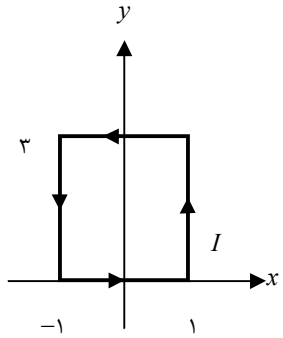
$$\mathbf{T} = \int_S d\ \mathbf{m} \times \mathbf{B} = \int_\circ^۲ \int_\circ^۲ I\,dx\,dy\ \mathbf{a}_z \times \mu_\circ \frac{۲}{\mu_\circ} x\ y\ \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{T} = \int_\circ^۲ \int_\circ^۲ ۲\circ\,dx\,dy\,x\,y\ (\mathbf{a}_y) = ۵x^۲y^۲ \Big|_\circ^۲ \mathbf{a}_y = ۸\circ\,\mathbf{a}_y$$

تمرین ۴-۳۱: حلقـهٔ مـستطیل شـکلی مطـابق شـکل (۴-۸۹) در معرض میدان $\mathbf{H} = ۶x^۲y\ \mathbf{a}_x$ قرار دارد. جریان حلقه را ۵^A در نظر بگیرید. (کارشناسی ارشد برق ۷۷)

الف) گشتاور وارد بر حلقه چقدر است؟

ب) گشتاور وارد بر حلقه را بـا اسـتفاده از رابطـهٔ $\mathbf{T} = \int_S \mathbf{m} \times d\,\mathbf{B}$ محاسبه کرده و نشان دهید که پاسخ با قسمت الف متفاوت است.



شکل ٤-۸۹: شکل تمرین ٤-۳۱

مثـال ۴-۷۳ یـک سـیم‌پـیچ مـستطیلی $a \times b$ دارای N دور، حامـل جریـان I مـی‌باشـد و در صفحهٔ $\varphi = \frac{۳\pi}{۲}$ قرار دارد. یک میدان مغناطیسی با چگالی $\mathbf{B} = B_\circ(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y)$ در فضا وجـود دارد. اگـر

یک ضلع مستطیل در امتداد محور z ثابت شده و بتواند حول آن بچرخد، در این صورت اگر سیم‌پیچ رها شود، چه زاویه‌ای را طی می‌کند تا بایستد؟ (کارشناسی ارشد برق ۷۳)

حل: به شکل (۴-۹۰) نگاه کنید تا شرایط مسئله را بهتر درک نمایید.

سیم‌پیچ آنقدر می‌چرخد تا گشتاور وارد بر آن از طرف میدان مغناطیسی صفر شود؛ در این حالت ماکزیمم مقدار شار از حلقه خواهد گذشت. حال سوال اینجاست که سیم‌پیچ چقدر باید بچرخد تا این اتفاق بیفتد. با چند سوال و جواب، پاسخ مناسبی برای آن خواهیم یافت:

سوال اول: در ضرب خارجی دو کمیت چه زمانی پاسخ صفر می‌شود؟

جواب ۱: همانطور که در فصل اول مطرح شد، مشروط بر اینکه هیچیک از دو کمیت صفر نباشند مقدار ضرب خارجی تنها و تنها زمانی صفر است که هر دو کمیت هم جهت باشند.

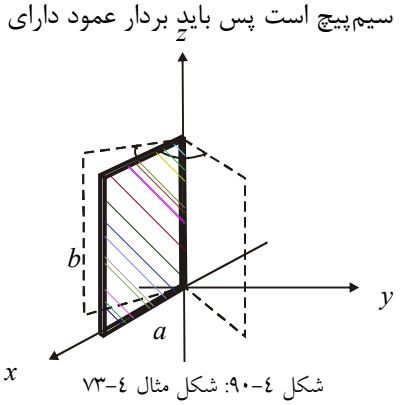
سوال دوم: با توجه به اینکه گشتاور مغناطیسی نیز از جنس ضرب خارجی است و با داشتن مقدار چگالی شار چه نتیجه‌ای در مورد جهت ممان می‌توان گرفت؟

جواب ۲: طبیعتا مطابق پاسخ سوال اول بردار ممان باید هم جهت میدان مغناطیسی قرار گیرد. از طرفی با توجه به اینکه جهت بردار ممان جهت عمود بر سطح سیم‌پیچ است پس باید بردار عمود دارای جهتی به فرم $(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y)$ گردد. یعنی بایدبه مقدار α بچرخد:

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y)\,.\,\mathbf{a}_x}{\sqrt{2}} = \cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

پس حلقه باید به اندازهٔ 45° گردش کند.

کلاً هر ماده‌ای در طبیعت تمایل دارد که به حالت پایدار خود برسد به همین دلیل است که با آزاد شدن سیم‌پیچ، به‌گونه‌ای قرار خواهد گرفت که هم‌جهت با میدان شود و در نتیجه بیشترین مقدار شار را از خود عبور دهد.



شکل ٤-۹۰: شکل مثال ٤-۷۳

سوال: به نظر شما حلقه به کدام جهت خواهد چرخید؟ (مثلثاتی و یا عکس آن؟)

تمرین ۴-۳۲: جریان $I = 5^A$ از حلقه‌ای مستطیل شکل به ابعاد $(0.4\times 0.6)^{m^2}$ که در صفحهٔ $z = 0$ و به مرکزیت مبداء مختصات واقع شده، می‌گذرد. اگر میدان یکنواخت باعث گشتاور $0.5\ N.m$ بر حلقه شود، مقدار چگالی شار مغناطیسی $\mathbf{B}$ را با این فرض که $B_x = B_y$ بیابید. (کارشناسی ارشد برق)

مشابه فصل دوم، می‌شود توضیحاتی در مورد نیرو و گشتاور بین دوقطبی‌ها بیان کرد، ولی با توجه به طولانی شدن بحث و البته مشابهت بسیار زیاد پاسخ‌ها با حوزهٔ الکترواستاتیک و نیز کاربردی نبودن آنها، از بیانشان خودداری کرده و به ذکر نمونه‌هایی در مسائل پایان فصل بسنده می‌کنیم.

از آنجا که دوقطبی مغناطیسی را معادل با حلقهٔ کوچک حامل جریان در نظر گرفته‌ایم، پس گشتاور مغناطیسی وارد بر دوقطبی از همان رابطهٔ (۴-۹۸) بدست می‌آید و از اینرو می‌توان تناظری معادل آنچه در جدول (۴-۱۷) دیده می‌شود، را در مورد دوقطبی مطرح کرد.

جدول ۴-۱۷: مقایسهٔ گشتاور وارد بر دوقطبی مغناطیسی و الکتریکی

تناظر بین روابط مرتبط با گشتاور وارد بر دوقطبی در دو حوزهٔ مختلف		
موضوع	الکترواستاتیک	مغناطیس ساکن
گشتاور وارد بر دوقطبی	$\mathbf{T}_e = \mathbf{P} \times \mathbf{E}$	$\mathbf{T}_m = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$

۴-۱۷- دوگانی بین الکترواستاتیک و مغناطیس ساکن

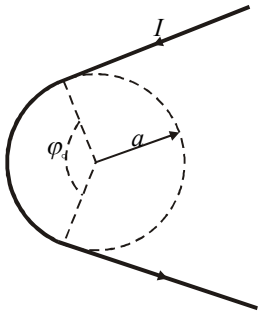
همانطور که در ابتدای فصل گفتیم سعی شد با نوعِ بیان و انتخاب مثال‌های خاص نشان دهیم، تناظر فوق‌العاده‌ای بین دو حوزهٔ الکترواستاتیک و مغناطیس ساکن موجود است. اگر برگردید و فصل را دوباره ورق بزنید به این واقعیت پی خواهید برد که ما برای هر سرفصل یک جدول دوگانی مطرح کرده‌ایم از اینرو واقعا انتظار اینست که این موضوع را بطور کامل دریافته باشید. با این حال جدولی که در زیر آمده است سعی دارد این حقیقت را به شکلی سیستماتیک بیان کند.

قبل از اینکه به جدول نگاه کنید باید تذکر دهیم که با توجه به پیچیدگی بسیار زیاد بحث مغناطیس این دوگانی‌ها برای همهٔ موارد برقرار نیستند، با این حال رهیافتی هستند برای راحت‌تر ارتباط برقرار کردن با مغناطیس ساکن.

جدول ۴-۱۸: دوگانی

دوگانی بین الکترواستاتیک و مغناطیس	
الکترواستاتیک	مغناطیس ساکن
$\mathbf{E}$	$\mathbf{B}$
$\mathbf{D}$	$\mathbf{H}$
ε	$\frac{1}{\mu}$
$\mathbf{P}$	$-\mathbf{M}$
ρ	$\mathbf{J}$
V	$\mathbf{A}$
$\cdot$	$\times$
$\times$	$\cdot$

۴-۱۸- مسائل



شکل ٤-۹۱: شکل مسئلهٔ ۱

۱- سیم بلندی حامل جریان I در صفحهٔ $z=\circ$ مطابق شکل (۴-۹۱) قرار دارد. چگالی شار مغناطیسی را در مبداء مختصات بیابید.

۲- یک استوانهٔ بسیار بلند به شعاع a دارای بار حجمی یکنواخت با چگالی ρ است. این استوانه حول محور خود با سرعت زاویه‌ای ω رادیان بر ثانیه می‌چرخد. با فرض اینکه محور استوانه منطبق بر محور z ها باشد، مطلوبست محاسبهٔ چگالی شار مغناطیسی در $r=\frac{a}{۲}$.

مثال کلیدی

۳- سیمی به شعاع a حامل جریان غیریکنواخت به چگالی $\mathbf{J}=J_\circ\frac{r}{a}\mathbf{a}_z$ می‌باشد. میدان مغناطیسی را در داخل و خارج سیم بدست آورید.

۴- در استوانهٔ بلندی به شعاع a:

الف) جریان سطحی $\mathbf{k}=k_\circ\mathbf{a}_\varphi$ وجود دارد. میدان را در تمام فضا بیابید.

ب) جریان سطحی $\mathbf{J}=J_\circ\mathbf{a}_\varphi$ وجود دارد. میدان را در تمام فضا محاسبه کنید.

۵- جریان I که در قسمت منفی محور z وجود دارد به صفحه xy برخورد کرده و روی ربع اول صفحه xy بطور یکنواخت و شعاعی پخش می‌شود. میدان مغناطیسی را روی محور z و در نقطه $P(\circ,\circ,h)$ بدست آورید.

مثال کلیدی

۶- جریان I که در قسمت منفی محور z وجود دارد در مبداء مختصات به صورت یکنواخت روی سطح $\theta=\frac{\pi}{۶}$ پخش می‌شود:

الف) چگالی جریان سطحی را بیابید.

ب) آیا می‌توان میدان را در یک نقطهٔ دلخواه از فضا با استفاده از قانون مداری آمپر یافت؟ (با محاسبه نشان دهید)

پ) میدان را در یک نقطهٔ دلخواه با استفاده از قانون بیوساوار بیابید.

مثال کلیدی
مثال کلیدی

مثال کلیدی

۷- بار Q بطور یکنواخت روی قرصی به شعاع a قرار دارد. قرص با سرعت زاویه‌ای ω حول محوری که از مرکزش می‌گذرد می‌چرخد. مطلوبست محاسبهٔ:

الف) گشتاور دوقطبی مغناطیسی معادل ناشی از این توزیع.

ب) محاسبهٔ چگالی شار مغناطیسی و پتانسیل مغناطیسی برداری در نقطهٔ دلخواهی از فضا با استفاده از روشی مشابه

پ) محاسبهٔ چگالی شار مغناطیسی و پتانسیل مغناطیسی برداری در مبداء مختصات با استفاده از قانون بیوساوار.

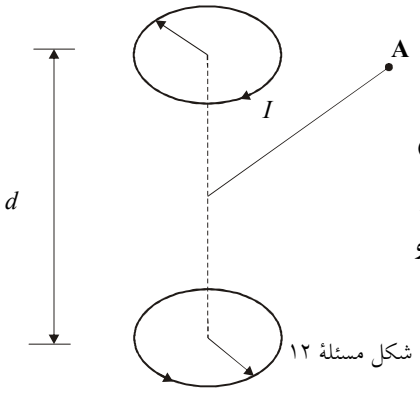
۸- اندازهٔ شدت میدان مغناطیسی H را در مرکز یک میلهٔ مغناطیسی بلند بدست آورید. طول میله ℓ ، سطح مقطع میله $\pi a^{۲}$ و مغناطیس‌شدگی یکنواخت و در امتداد محور میله است.

۹- نشان دهید که شدت میدان مغناطیسی ناشی از یک صفحهٔ بی‌نهایت حامل جریان با چگالی سطحی $\mathbf{J}_S$ از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{H} = \frac{۱}{۲}\,\mathbf{J}_S \times \mathbf{a}_n$$

۱۰- چگالی شار و پتانسیل مغناطیسی برداری دوقطبی مغناطیسی واقع در مبداء مختصات را محاسبه کنید.

۱۱- استوانهٔ بلندی به شعاع a دارای مغناطیس‌شدگی $\mathbf{M} = k\, r^{۲}\, \mathbf{a}_\varphi$ است. میدان مغناطیسی را درون و بیرون استوانه بیابید..



۱۲- فاصلهٔ مراکز دو حلقه سیم دایروی مشابه شکل (۴-۹۲) از یکدیگر d بوده و جریان حلقه‌های نظیر شکل، مساوی و مختلف‌الجهت است. در فواصل بسیار دور، یعنی $r >> d$ و $r >> R$، بردار پتانسیل مغناطیسی را پیدا کنید.
(کارشناسی ارشد فیزیک ۷۹)

شکل ٤-۹۲: شکل مسئلهٔ ۱۲

۱۳- در فضای آزاد میدان مغناطیسی به صورت $\mathbf{B} = R\sin\theta\ \mathbf{a}_\varphi$ داده شده است. جریانی را که از عرقچین کروی توصیف شده با معادلات $R = ۱\ ,\ ۰ < \varphi < ۲\pi\ ,\ ۰ < \theta < \frac{\pi}{۶}$ می‌گذرد را:

الف) با استفاده از فرم دیفرانسیلی قانون آمپر بیابید. ($\nabla \times \mathbf{B} = \mu_۰ \mathbf{J}$)

ب) با استفاده از فرم انتگرالی قانون مداری آمپر بیابید.

POWEREN.IR

۱۴- فرق مسیر آمپری با سطح گوسی چیست؟

۱۵- نشان دهید که برای پتانسیل مغناطیسی برداری، همواره:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = ۰$$

۱۶- پتانسیل مغناطیسی اسکالر V_m را روی محور یک حلقهٔ جریان به شعاع a بیابید.

۱۷- نشان دهید در مرز بین یک مادهٔ قطبیده و هوا (ناحیهٔ ۱) می‌توان شرط مرزی مولفهٔ عمودی میدان را به صورت زیر بیان کرد:

$$\mathbf{a}_n \cdot (\mathbf{H}_۱ - \mathbf{H}_۲) = \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{M}$$

۱۸- یک ذره با بار q ، جرم m و انرژی جنبشی k حول یک دایره با شعاع r در میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}$ دارای حرکت دورانی است. گشتاور مغناطیسی $\mathbf{m}$ ذره را تعیین کنید.

۱۹- بار Q بطور یکنواخت روی کره‌ای به شعاع a قرار دارد و کره با سرعت زاویه‌ای ω حول محوری که از مرکزش می‌گذرد، می‌چرخد. گشتاور دوقطبی مغناطیسی معادل را بیابید.

مثال کلیدی

۲۰- یک کره با شعاع a دارای توزیع بار حجمی یکنواخت با چگالی ρ حول یک قطرش با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند، گشتاور مغناطیسی $\mathbf{m}$ آن را تعیین کنید.

۲۱- یک کرهٔ هادی با شعاع a را به پتانسیل $V_۰$ وصل می‌کنیم و حول یک قطرش با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌دهیم.

الف) چگالی بار سطحی σ کره را بدست آورید. **ب)** چگالی جریان سطحی $\mathbf{k}$ را تعیین کنید.

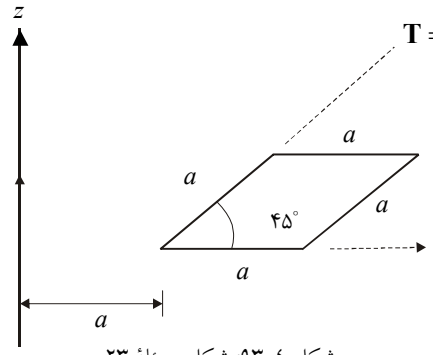
پ) چگالی شار مغناطیسی **B** را در مرکز کره محاسبه کنید.

ت) گشتاور دوقطبی مغناطیسی **m** کرهٔ باردار دوار را بیابید.

۲۲- نشان دهید که گشتاور مغناطیسی ناشی از یک دوقطبی مغناطیسی از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

۲۳- جریان I_1 روی محور z ها و حلقه سیم نازکی به شکل متوازی‌الاضلاع که طول هر ضلع آن برابر a می‌باشد. مطابق شکل (۴-۹۳) در فضای آزاد مفروض است. ضریب القاء متقابل را بدست آورید. (کارشناسی ارشد برق)



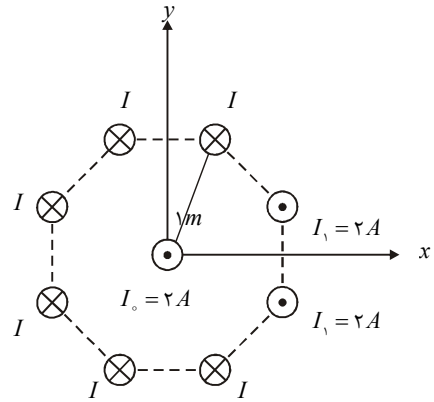
شکل ٤-۹۳: شکل مسئلهٔ ۲۳

۲۴- دو سیم‌پیچ هم‌محور به ترتیب دارای شعاع‌های a و b و تعداد دورهای N_a و N_b را درنظر بگیرید. فاصلهٔ دو سیم‌پیچ z بوده و $b \ll a$ می‌باشد. ضریب القاء متقابل M دو سیم‌پیچ را بدست آورید.

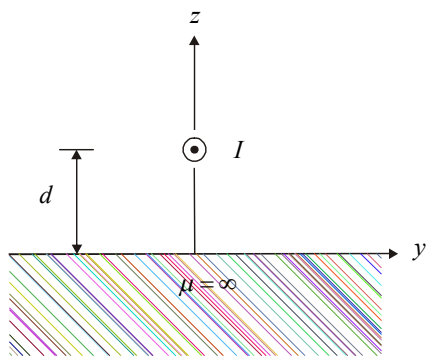
۲۵- دو بار خطی بی‌نهایت به موازات هم و به فاصلهٔ d از یکدیگر قرار دارند. اگر دو بار خطی با سرعت v در یک جهت حرکت کنند، به ازای چه سرعتی نیروی مغناطیسی بین آنها نیروی دافعهٔ الکتریکی بین آنها را خنثی می‌کند؟

۲۶- ناحیهٔ $z > 0$ فضای آزاد و $z < 0$ محیطی با $\mu = \infty$ است. سیم حامل جریان I در جهت محور x در فضای آزاد به فاصلهٔ d از صفحهٔ $z = 0$ قرار دارد. نیروی وارد بر واحد طول سیم را پیدا کنید.

۲۷- هشت سیم نازک جریان، در رئوس یک هشت‌ضلعی منتظم حول محور z ها و موازی با آن قرار دارند. فاصلهٔ سیم‌ها تا محور z نیز 1^m است (مطابق شکل ۴-۹۵). سیم حامل جریان $I = 1^A$ در خلاف جهت محور z ها و دو سیم مجاور حامل جریان $I_1 = 2^A$ در جهت محور z و نیز یک سیم حامل جریان I_0 در مرکز این هشت‌ضلعی قرار دارد. نیروی وارد شده بر واحد طول سیم مرکزی را حساب کنید. (کارشناسی ارشد برق ۸۴)



شکل ٤-٩٥: شکل مسئلهٔ ۲۷



شکل ٤-٩٤: شکل مسئلهٔ ۲٦

۲۸- سیملوله‌ای از N دور سیم نازک کنار هم پیچیده، تشکیل شده است. طول سیملوله ℓ و شعاع آن a است و از سیم‌ها جریان I می‌گذرد. نیروی مغناطیسی وارد بر واحد طول سیم‌ها را با استفاده از روش کار مجازی بیابید

۲۹- یک تابه استوانه‌ای با شعاع R حاوی ذرات با بار مثبت q و تراکم N (در واحد حجم) و دارای سرعت محوری v می‌باشد. هیچگونه میدان الکتریکی یا مغناطیسی خارجی وجود ندارد.

الف) چگالی بار الکتریکی خطی λ را بیابید

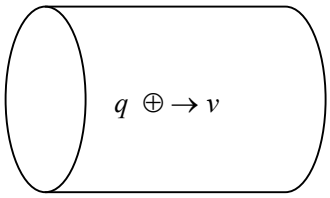
ب) جریان الکتریکی I را محاسبه کنید.

پ) نیروی الکتریکی وارد بر یک ذره واقع در سطح خارجی تابه را تعیین کنید.

ت) نیروی مغناطیسی وارد بر این ذره را بدست آورید.

ث) برآیند نیروی وارد بر این ذره را تعیین کنید.

ه) تحت چه شرایطی نیروی وارد بر ذره صفر خواهد بود؟



شکل ٤-٩٦: شکل مسئلهٔ ۲۹

۳۰- یک رشته سیم مستقیم بی‌نهایت طویل حامل جریان I_1 در پایین، سمت چپ و موازی با یک خط تلفن دو سیمه که جریان I_2 از آن می‌گذرد قرار دارد. مطلوبست ضریب القای متقابل بین دو سیم حامل جریان I_1 و خط تلفن در واحد طول و نیروی وارد بر واحد طول سیم تلفن از طرف سیم مستقیم در جهت z.

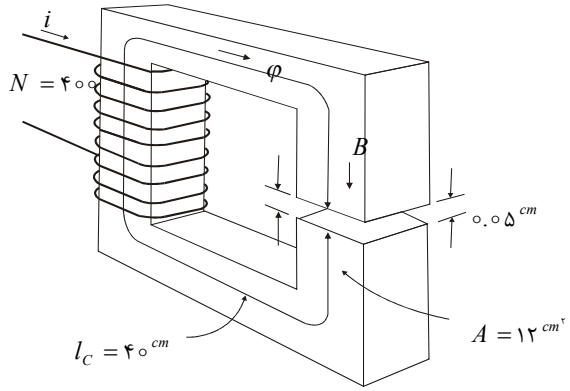
۳۱- در مختصات استوانه‌ای حلقهٔ جریانی در صفحهٔ $z = ۰$ هم‌مرکز با مبداء مختصات به شعاع a که جریان $\mathbf{I} = I_{۰}\ \mathbf{a}_{\varphi}$ در محیط آن برقرار است در معرض میدان مغناطیسی $\mathbf{H} = H_{۰}\ \mathbf{a}_{\varphi}$ در فضای آزاد قرار می‌گیرد. گشتاور نیروی اعمالی به آن چقدرست؟

۳۲- نشان دهید که نیرو با رابطهٔ زیر بوسیلهٔ روش کار مجازی نیرو به اندوکتانس متقابل مرتبط می‌شود:

$$\left|\mathbf{F}_m\right| = \left|\nabla W_m\right| = I_{۱} I_{۲} \frac{\partial M}{\partial x}$$

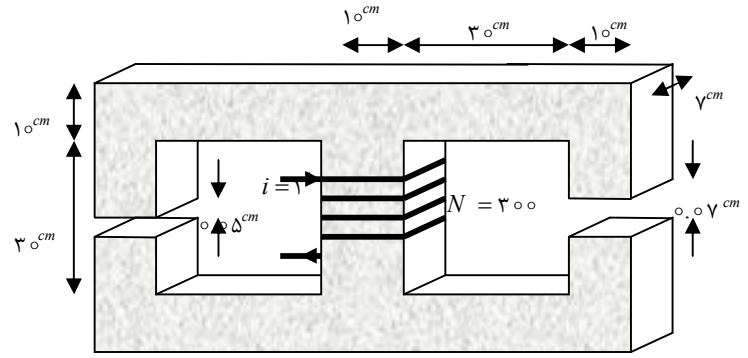
مثال کلیدی

۳۳- شکل (۴-۹۷) یک هسته فرومغناطیسی را نشان می‌دهد که طول مسیر متوسط آن ۴۰^{cm} است. یک فاصلهٔ هوایی ۰.۵^{cm} در ساختمان یکپارچه هسته وجود دارد. سطح مقطع آن $۱۲^{cm^{۲}}$ ، تراوایی نسبی آن ۴۰۰۰ و تعداد دورهای سیم‌پیچ ۴۰۰ است. فرض کنید اثر برون‌ریز فاصلهٔ هوایی ۵% باشد.
الف) رلوکتانس هسته و فاصلهٔ هوایی را بیابید. **ب)** جریان لازم برای تولید چگالی شار ۰.۵^{T} در فاصلهٔ هوایی چقدر است؟



شکل ٤-۹۷: شکل مسئلهٔ ۳۳

۳۴- در مدار مغناطیسی شکل (۴-۹۸) مقدار فلو را در هر یک از ساق‌ها یافته و چگالی شار را در هر یک از فواصل هوایی محاسبه کنید. (اثر برون‌ریز را ۵% و $\mu_r = ۲۰۰۰$ فرض کنید)



شکل ٤-۹۸: شکل مسئلهٔ ٣٤

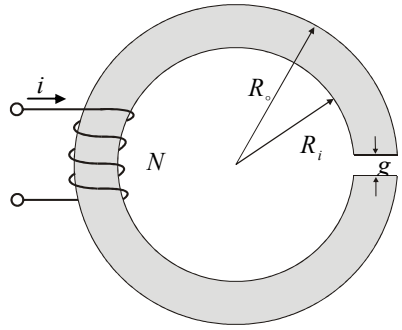
مثال کلیدی

۳۵- مدار مغناطیسی شکل (۴-۹۹) را در نظر بگیرید. با فرض اینکه هسته دارای $\mu_r = ۱۰۰۰$ و $N = ۲۵۰$ باشد. مطلوبست:

الف) رلوکتانس و اندوکتانس دیده شده از دو سر سیم‌پیچ.

ب) جریان i لازم برای ایجاد چگالی شار $B = ۱.۲۵^T$ در فاصلهٔ هوایی.

($A = ۸^{cm^۲}$ و $g = ۱^{cm}$ ، $R_O = ۱۲^{cm}$ ، $R_i = ۸^{cm}$)



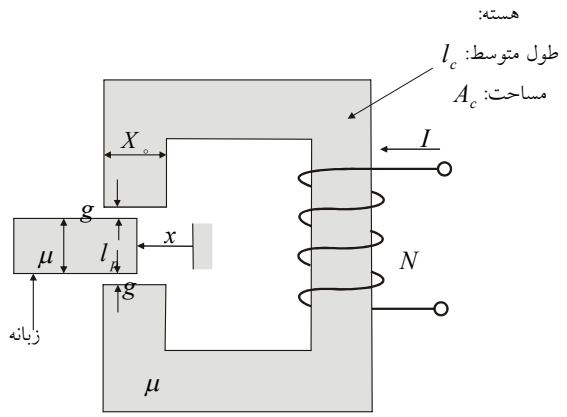
شکل ٤-۹۹: شکل مسئلهٔ ۳۵

۳۶- مدار مغناطیسی شکل (۴-۱۰۰) یک هسته و یک زبانه به پهنای l_P، هر دو با تراوایی μ دارد. مساحت مقطع هسته A_C و طول متوسط آن l_C است. مساحت دو شکاف هوایی A_g تابعی از موقعیت زبانه است و می‌تواند به صورت زیر تغییر کند:

$$A_g = A_C\left(۱-\frac{x}{X_\circ}\right)$$

الف) با فرض $\mu \to \infty$ عبارتی برای چگالی شار مغناطیسی هسته B_C بر حسب جریان پیچک I و موقعیت زبانه، در گسترهٔ ($\circ \le x \le \circ.۸X_\circ$) بدست آورید.

ب) قسمت‌های فوق را برای μ محدود تکرار کنید.



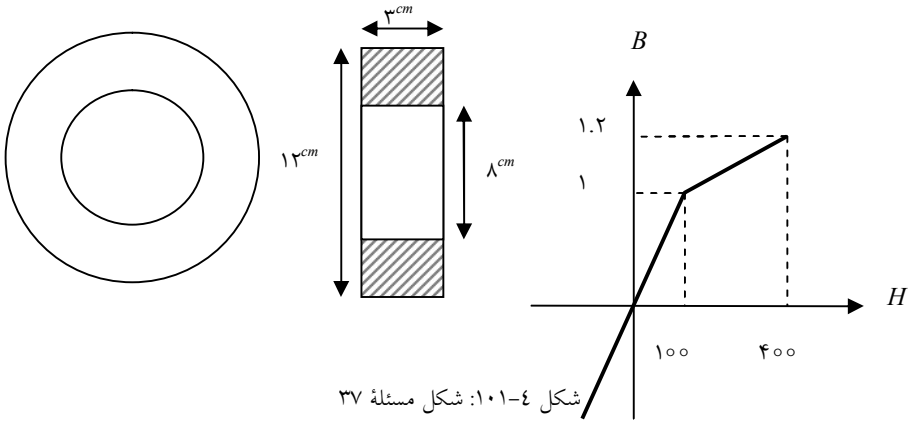
شکل ٤-١٠٠: شکل مسئلهٔ ٣٦

۳۷- شکل (۴-۱۰۱) چنبره‌ای را نشان می‌دهد که سطح مقطع آن چهار گوش بوده و به دور آن سیم‌پیچ ۱۰۰ دوری پیچیده شده است. منحنی $B-H$ هسته نیز به طور تقریبی در زیر رسم شده است.

الف) اگر چگالی شار در هر نقطهٔ هسته کمتر از یک تسلا باشد. اندوکتانس سیم‌پیچ چقدر است؟

ب) با شرایط فرض (الف) حداکثر جریان را حساب کنید.

پ) اگر بخواهیم کل هسته دارای چگالی شاری معادل 1^T باشد، حداقل جریان را حساب کنید.



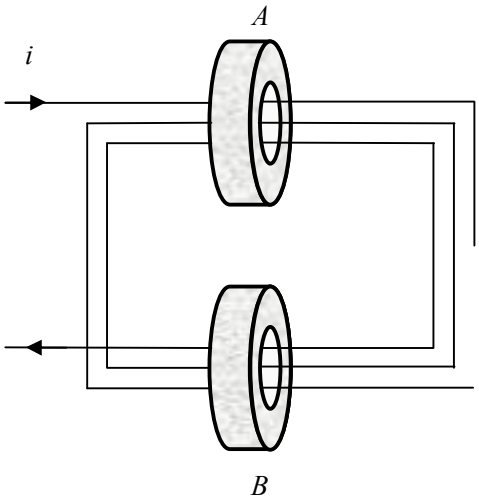
شکل ٤-١٠١: شکل مسئلهٔ ٣٧

۳۸- یک پیچک ۸۰۰دوری روی دو هستهٔ چنبره‌ای مطابق شکل زیر پیچیده شده است. هستهٔ A دارای قطر متوسط ۱۰۰^{mm} و سطح مقطع $۱۵۰^{mm^۲}$ می‌باشد. هستهٔ B قطر متوسط ۱۲۰^{mm} و سطح مقطع $۲۵۰^{mm^۲}$ را دارا می‌باشد. در ضمن ضریب نفوذپذیری نسبی هسته‌ها ۲۸۰۰ است.

الف) مدار معادلی را برای این سیستم رسم کنید.

ب) مقاومت مغناطیسی هسته‌ها را پیدا کنید.

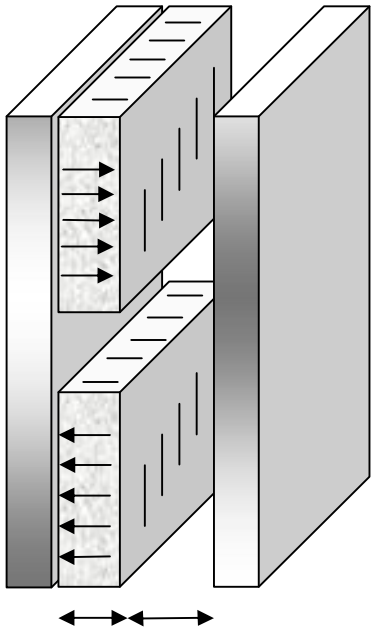
پ) جریان لازم پیچک را برای تولید شار دربرگیرندهٔ پیچک به اندازهٔ ۰.۲^{wb} بیابید.

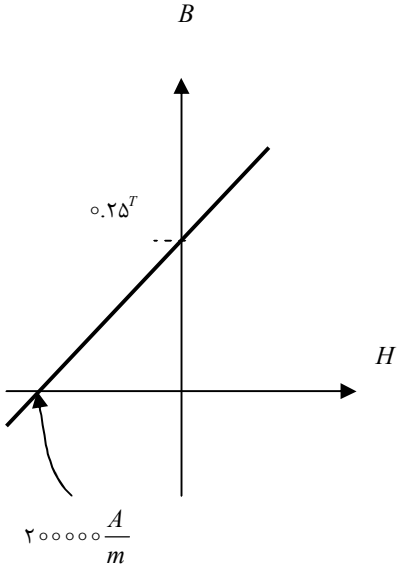


شکل ٤-۱۰۲: شکل مسئلهٔ ۳۸

۳۹- وسیلهٔ نگهدارندهٔ مغناطیسی شکل (۴-۱۰۳) شامل دو آهنربا می‌باشد. ضریب نفوذ صفحهٔ آهنی بالاست.

الف) مدار معادل مربوطه را رسم کنید. **ب)** میزان شار را در فاصلهٔ هوایی بیابید.



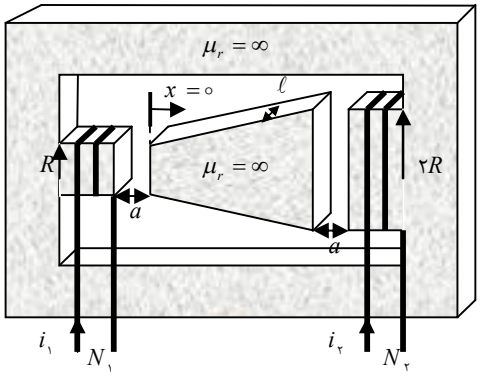


شکل ٤-۱۰۳: شکل مسئلهٔ ۳۹

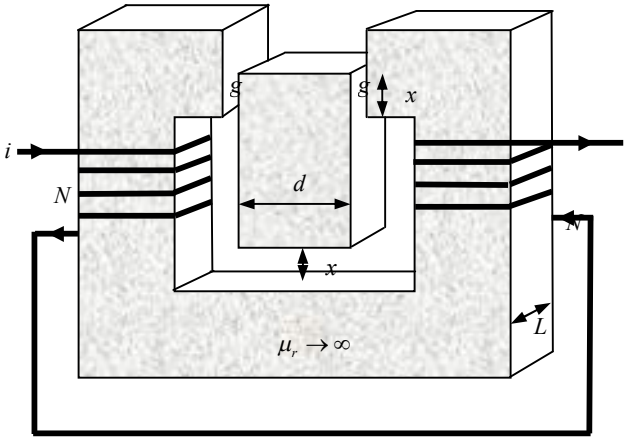
۴۰- در مدار مغناطیسی شکل‌های (۴-۱۰۴) و (۴-۱۰۵) مطلوبست: (کارشناسی ارشد برق ۸۹)

الف) رسم مدار معادل مغناطیسی.

ب) محاسبهٔ اندوکتانس خودی و متقابل.



شکل ٤-١٠٤: شکل مسئلهٔ ٤٠



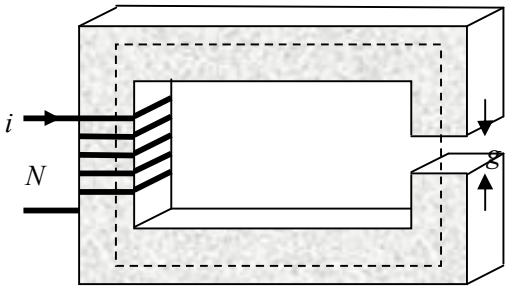
شکل ٤-١٠٥: شکل مسئلهٔ ٤٠

۴۱- در مدار مغناطیسی شکل (۴-۱۰۶) یک فاصلهٔ هوایی وجود دارد.

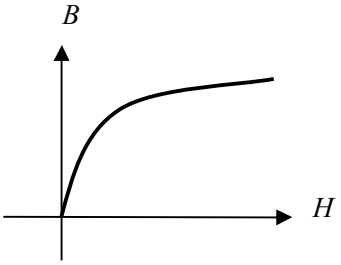
الف) با فرض اینکه ضریب نفوذ هسته μ باشد. نسبت انرژی ذخیره شده در فاصلهٔ هوایی به هستهٔ آهنی را بیابید.

ب) اگر هسته ایده‌آل باشد قسمت الف را تکرار کنید.

پ) اگر هسته دارای مشخصهٔ $B-H$ غیرخطی مطابق شکل (۴-۱۰۷) باشد، با توجه به نتایج قسمت‌های الف و ب نقطهٔ کار مناسبی را برای سیستم یافته و دلیل انتخاب آن را توجیه کنید.



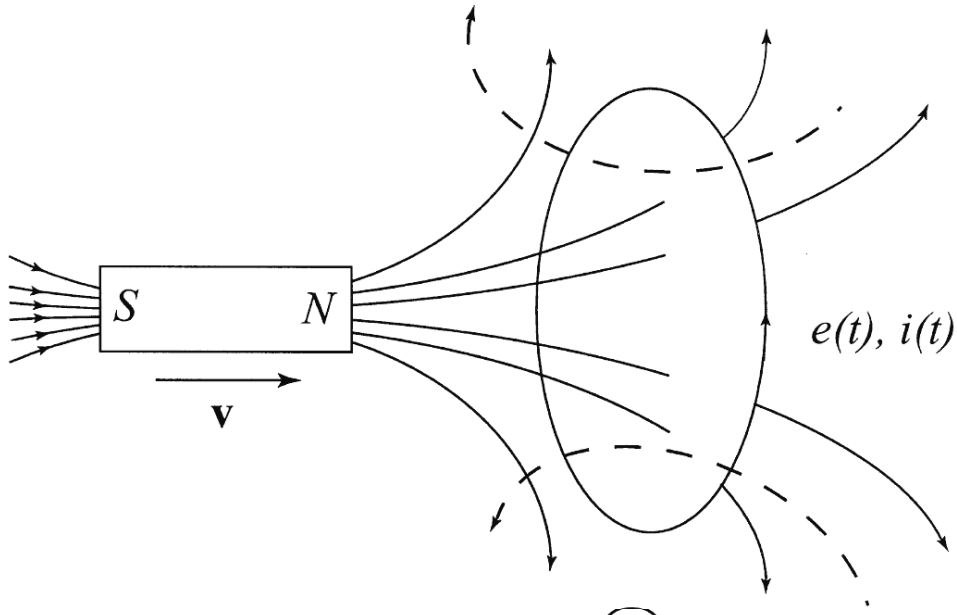
شکل ٤-١٠٦: شکل مسئلهٔ ٤١

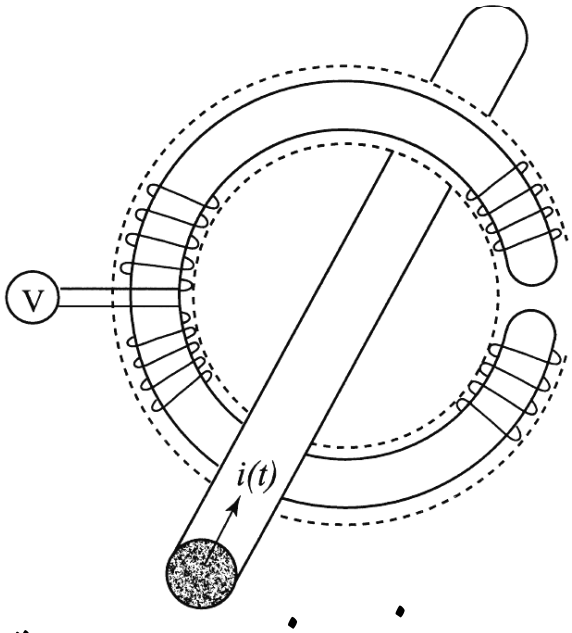


شکل ٤-١٠٧: منحنی $B-H$

۴۲- دلیل استفاده از مواد مغناطیس دائم در ساختار برخی از مدارهای مغناطیسی چیست؟

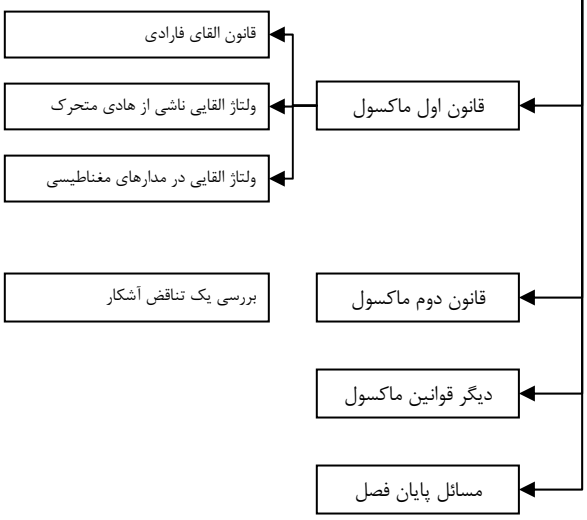
یادداشت: .....





فصل پنجم : میدان‌های متغیر با زمان

فصل پنجم: میدان‌های متغیر با زمان



۵-۱- مقدمه

در شروع فصل‌های دوم و چهارم، اصول موضوعی حوزه‌های مورد نظر را بررسی کردیم. واقعیت این است که صحت تمامی روابط محاسبه شده مبتنی بر صحت اصول موضوع است. با این همه، اگر به عنوان فصل‌های دوم و چهارم توجه کنید، واژهٔ سکون را مشاهده خواهید کرد (الکترواستاتیک، مغناطیسی ساکن). اینها همه بدین معناست که محاسبات انجام‌شده با فرض سکون میدان انجام شده و اگر میدان با زمان تغییر کند، صحت روابط محاسبه شده ملغی اعلام می‌شود! از طرفی اکثر میدان‌های واقعی ویژگی تغییرپذیری با زمان را دارند، پس برای بررسی آنها، اصول موضوع جدیدی را لازم خواهیم داشت. برای این منظور گذری به قرن نوزدهم میلادی زده و از اطلاعات کلارک ماکسول، کسی که این اصول را تعریف کرده، استفاده می‌کنیم. در ادامه نیز کاربرد آن را در چند حوزهٔ مختلف و البته به اختصار بررسی می‌نماییم.

۵-۲- قانون اول: قانون القای فارادی

در سال ۱۸۳۱ میلادی، مایکل فارادی برای بررسی اینکه آیا در مدار بستهٔ قرارگرفته در نزدیکی یک میدان مغناطیسی، جریان dc ایجاد می‌شود یا خیر، آزمایش‌هایی را انجام داد. اگر چه پاسخ منفی بود ولی فارادی فهمید که با جابه‌جا کردن میدان، جریانِ متغیر با زمانی در حلقه ایجاد می‌شود. بی‌شک قانون فارادی مهمترین قانون در الکترومغناطیس است، چرا که بدون آن هیچ برقی از چرخش ژنراتورها ایجاد نمی‌شد و در نتیجه ... ! می‌خواهیم نشان دهیم که میدان مغناطیسی متغیر با زمان در حلقه ولتاژ القاء می‌کند، با توجه به اینکه حلقه یک مسیر بسته بوده و از طرفی مسیر فوق دارای مقداری مقاومت الکتریکی است، پس در حلقه جریان القاء می‌گردد. با توجه به اینکه شدت میدان الکتریکی متناسب با توزیع جریان است ($J = \sigma E$)، پس میدان مغناطیسی متغیر با زمان میدان الکتریکی متغیر با زمان ایجاد خواهد کرد.

بر اساس رابطهٔ تجربی فارادی، ولتاژ القایی در یک حلقه عبارتست از:

$$e = \frac{d\varphi}{dt} \qquad (۵-۱)$$

و با اعمال قانون لنز:

$$\boxed{e = -\frac{d\varphi}{dt}} \qquad (۵-۲)$$

همانطور که می‌دانید، طبق قانون لنز جهت جریان القایی در حلقه باید به‌نحوی باشد که با عامل بوجود آورنده‌اش (در اینجا، تغییر شار) مخالفت کند. با توجه به اینکه ولتاژ القایی از جنس اختلاف پتانسیل است، لذا:

$$e = \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} \qquad (۵-۳)$$

از طرفی با توجه به اینکه:

$$\varphi = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} \qquad (۵-۴)$$

پس می‌توان رابطهٔ (۵-۲) را به شکل زیر اصلاح نمود:

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} \qquad (۵-۵)$$

و با فرض اینکه تغییر شار ناشی از چگالی شار مغناطیسی باشد:

$$\boxed{\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \int -\frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{ds}} \qquad (۵-۶)$$

با اعمال قضیهٔ استوکس به سمت چپ رابطهٔ فوق:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (۵-۷)$$

رابطهٔ فوق اولین رابطهٔ ماکسول است.

مثال ۵-۱ میدان مغناطیسی مربوط به میدان الکتریکی زیر را بیابید. (کارشناسی ارشد برق ۷۰)

$$\mathbf{E} = E_1 \sin(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_y + E_2 \cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x$$

حل: طبق رابطهٔ (۵-۷):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow -\beta E_1 \cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x + \beta E_2 \sin(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_y = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

پس:

$$\mathbf{B} = -\frac{\beta E_1}{\omega} \sin(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x - \frac{\beta E_2}{\omega} \cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_y$$

مثال ۵-۲ یک قاب مستطیلی شکل با ابعاد a و b بطوری که در شکل (۵-۱) نشان داده شده است، با سرعت ثابت $v_\circ$ از خط هادی مستقیمی که از آن جریان مستقیم I عبور می‌کند، دور می‌شود. سیم و قاب در خلاء قرار گرفته‌اند. با فرض اینکه در زمان $t=\circ$ فاصلهٔ ضلع دست چپ از خط هادی $r=r_\circ$ باشد، نیروی محرکهٔ القائی در حلقه بر حسب زمان چقدرست؟ (کارشناسی ارشد برق ۷۰)

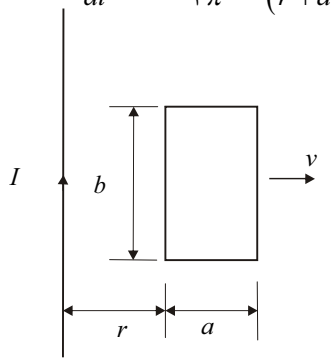
حل: کافی است از رابطهٔ (۵-۲) استفاده کنیم. طبق توضیحات فصل چهارم، بدیهی است که:

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi r}\mathbf{a}_\varphi$$

$$\varphi_m=\int\mathbf{B}\,.\,\mathbf{ds}=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi}\int_r^{r+a}\frac{b\,dr}{r}=\frac{\mu_\circ I\,b}{۲\pi}Ln\frac{r+a}{r}\Bigg|_{r=r_\circ+v_\circ t}=\frac{\mu_\circ I\,b}{۲\pi}Ln\frac{r_\circ+v_\circ t+a}{r_\circ+v_\circ t}$$

پس مطابق رابطهٔ (۵-۲)

$$emf=-\frac{d\varphi_m}{dt}=-\frac{\mu_\circ I\,b}{۲\pi}\times\frac{a\,v_\circ}{(r+a)r}$$



شکل ۵-۱: شکل مثال ۵-۲

مثال ۵-۳ از سیمی که دارای مقاومت $۱\circ\ \Omega/m$ می‌باشد، مستطیلی با ابعاد $۱\circ\times۱۵^{cm^۲}$ ساخته‌ایم. حال به فاصلهٔ ۵ سانتیمتر از چپ مدار، سمت راست را با فرکانس ۵۰ دور بر ثانیه بالا برده (تا $\theta=۹\circ^\circ$) برمی‌گردانیم. با فرض اینکه شدت میدان مغناطیسی $\frac{۱\circ}{\mu_\circ}\mathbf{a}_z$ باشد، ماکزیمم جریان القاء شده را بیابید. (کارشناسی ارشد برق ۶۹)

حل: کافی است از رابطهٔ (۵-۲) استفاده کنیم. برای این منظور ابتدا چگالی شار و سپس شار مغناطیسی را محاسبه می‌کنیم.

$$\mathbf{B} = \mu_\circ \mathbf{H} = ۱۰\mathbf{a}_z$$

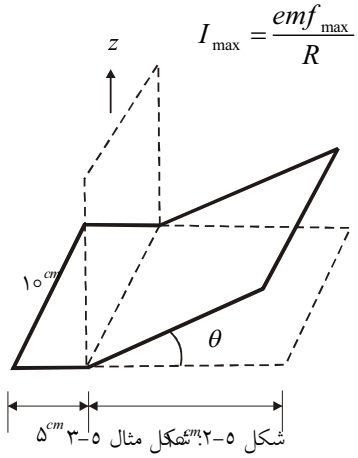
$$\varphi_m = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} = ۱۰\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_n S \Big|_{S = ۰.۰۱^{m^۲},\ \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_n = \cos(۲\pi f\ t)} = ۰.۱ \cos(۱۰۰\pi t)$$

پس طبق رابطهٔ (۵-۲):

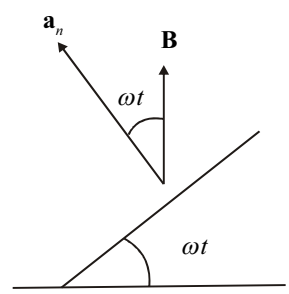
$$emf = -\frac{d\varphi_m}{dt} = ۱۰\pi \sin(۱۰۰\pi t)$$

و جریان ماکزیمم عبارتست از:

$$I_{\max} = \frac{emf_{\max}}{R} = \frac{۱۰\ \pi}{(۵ \times ۰.۱ \times ۱۰)} = ۲\pi$$



شکل ۵-۲: شکل مثال ۵-۳



شکل ۵-۳: شکل پاسخ مثال ۵-۳

مثال ۵-۴ حلقه‌های سیمی و نازک به شکل مربع به ضلع a مطابق شکل (۵-۴) به فاصلهٔ d از محور z ها قرار دارند. جریان I در امتداد محور z ها برقرار است. اگر حلقه حول محور z با سرعت زاویه‌ای یکنواخت ω بچرخد، مقدار emf را در حلقه بدست آورید. (کارشناسی ارشد برق ۷۳)

حل: از شکل (۵-۵) استفاده می‌کنیم. مطابق این شکل:

$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + d^2 - 2\times\frac{a}{2}\times d\cos\omega t}$$

$$r_2 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + d^2 + 2\times\frac{a}{2}\times d\cos\omega t}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ I}{2\pi r}\mathbf{a}_\varphi$$

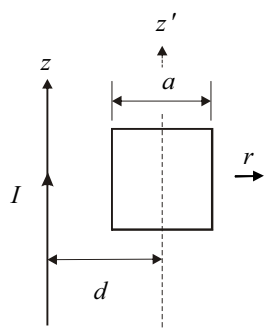
پس:

$$\varphi_m = \int \mathbf{B}\,.\,\mathbf{ds} = \frac{\mu_\circ I\,a}{2\pi} Ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

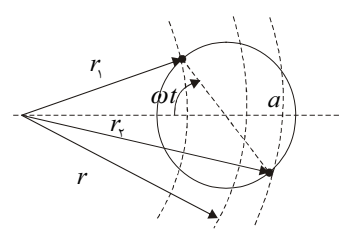
در اینصورت برای emf خواهیم داشت:

$$emf = -\frac{d\varphi_m}{dt} = -\frac{\mu_\circ I\,a}{4\pi}\frac{d}{dt}\left(Ln\left(\frac{a^2+4d^2+4ad\cos\omega t}{a^2+4d^2-4ad\cos\omega t}\right)\right)$$

$$emf = \frac{2\mu_\circ I\,a^2\,\omega d}{\pi}\times\frac{\left(a^2+4d^2\right)\sin\omega t}{\left(a^2+4d^2\right)^2-16a^2d^2\cos^2\omega t}$$



شکل ۵-٤: شکل مثال ۵-٤



شکل ۵-۵: دوران شکل ۵-٤

تمرین ۵-۱: یک موج الکترومغناطیسی در یک محیط معین توسط پتانسیل‌های برداری و عددی زیر تعیین می‌شود:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\sin\omega t\,\mathbf{a}_z \quad , \quad V = 0$$

ω عددی ثابت است. میدان $\mathbf{E}$ و چگالی شار مغناطیسی $\mathbf{B}$ را بیابید. (کارشناسی ارشد برق)

۵-۳- هادی متحرک در میدان مغناطیسی ساکن

پیش از این در مورد میدان‌های مغناطیسی متغیر با زمان بحث کردیم، با این حال حرکت یک هادی در میدان مغناطیسی ساکن، اتفاق مشابهی را باعث می‌شود. در این قسمت قصد داریم تا با بررسی یک هادی متحرک، رابطهٔ مناسبی را برای این شرایط بیابیم. به شکل (۵-۶) توجه کنید، در اثر حرکت میله بر روی ریل، ولتاژی در مجموعه القاء می‌شود. طبق رابطهٔ (۴-۲۱) شار گذرنده از حلقه به صورت زیرست:

$$\varphi = B\,S$$

پس طبق رابطهٔ (۵-۲) ولتاژ القاء شده در حلقه عبارتست از:

$$e = -\frac{d\,\varphi}{d\,t} = -B\,\frac{d\,S}{d\,t} = -B\,L\,\frac{d\,x}{d\,t} = -B\,L\,v \qquad (۵-۸)$$

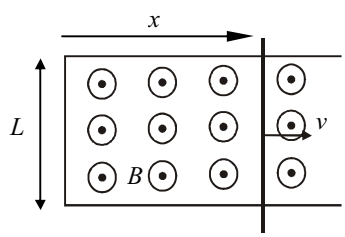
در حالت کلی برای محاسبهٔ ولتاژ القایی به شکل زیر عمل می‌کنیم:

- نیروی وارد بر جزئی از حلقه مطابق رابطهٔ (۴-۹۱) به صورت:

$$\mathbf{F}_m = q\,\mathbf{v}\times\mathbf{B} \qquad (۵-۹)$$

با توجه به اینکه:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_m}{q} = \mathbf{v}\times\mathbf{B} \qquad (۵-۱۰)$$



شکل ۵-۶: میلهٔ در حال حرکت

پس طبق رابطهٔ (۵-۱):

$$e = \oint\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)\,.\,\mathbf{dl} \qquad (۵-۱۱)$$

با توجه به اینکه در یک سیستم واقعی ممکن است هر دو حالت ذکر شده (یعنی هم حرکت میله در میدان یکنواخت و هم متغیر با زمان بودن میدان) پیش بیاید، لذا ولتاژ القایی را به صورت زیر اصلاح می‌کنیم:

$$e = \oint\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)\,.\,\mathbf{dl} + \left\{-\frac{d}{d\,t}\int\mathbf{B}\,.\,\mathbf{ds}\right\} \qquad (۵-۱۲)$$

مثال ۵-۵ دیسک مولد فارادی از یک سیم با سرعت زاویه‌ای مشخص و قرار گرفته در میدان یکنواخت تشکیل شده است. با فرض اینکه سرعت و شعاع دیسک به ترتیب $\omega = ۶۰۰ s^{-1}$، $a = ۰.۵\ ^m$ و میدان یکنواخت به فرم $\mathbf{B} = B_\circ\,\mathbf{a}_z$ که در آن $B_\circ = ۴\ ^T$ باشد، ولتاژ القایی مدار باز را بیابید.

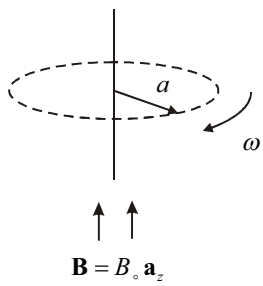
(کارشناسی ارشد فیزیک ۸۲)

حل: طبق رابطهٔ (۵-۱۱) ولتاژ القایی عبارتست از:

$$e = \oint (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\,.\,\mathbf{dl} = \int_{\circ}^{a} \left(r\,\omega\,\mathbf{a}_{\varphi}\times B_{\circ}\,\mathbf{a}_{z}\right).\,dr\,\mathbf{a}_{r} = \ldots = \frac{۱}{۲}B_{\circ}\,a^{۲}\,\omega$$

و با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت:

$$e = \frac{۱}{۲}B_{\circ}\,a^{۲}\,\omega \Big|_{\omega = ۶۰۰,\ a = ۰.۵\ ,\ B_{\circ} = ۴} = ۳۰۰^{\,volt}$$



شکل ۵-۷: شکل مثال ۵-۵

مثال ۵-۶ بار نقطه‌ای q با جرم m در میدان مغناطیسی $\mathbf{B} = B_{\circ}\,\mathbf{a}_{z}$ با سرعت ثابت حول دایره‌ای به شعاع a در صفحهٔ xoy در جهت مثلثاتی دوران می‌کند. ($B_{\circ}$ ثابت است) اندازهٔ میدان الکتریکی که توسط ناظری که با بار حرکت می‌کند، اندازه‌گیری می‌شود را محاسبه کنید. (کارشناسی ارشد برق)

حل: برای داشتن حرکت دورانی حول شعاع ثابت a با سرعت ثابت $v_{\circ}$ باید داشته باشیم:

$$m\,\frac{v_{\circ}}{a} = q\,E = q\,v_{\circ}\,B_{\circ}$$

که از آن نتیجه می‌شود:

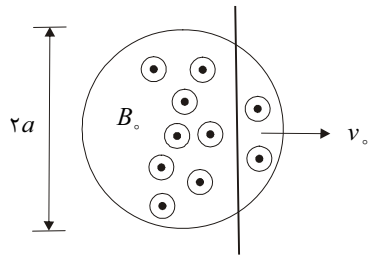
$$a = \frac{m\,v_{\circ}}{q\,B_{\circ}} = \frac{m\,E}{q\,B_{\circ}^{۲}} \;\rightarrow\; E = \frac{a\,q\,B_{\circ}^{۲}}{m}$$

مثال ۵-۷ یک میلهٔ رسانا با سرعت ثابت $v_{\circ}$ با فاصلهٔ ناچیزی از روی قطب یک آهنربا با مقطع دایروی و با شعاع a که چگالی میدان مغناطیسی یکنواخت آن $B_{\circ}$ است، عبور می‌کند. در صورتیکه میله در $t = \circ$ در مرکز قطب آهنربا باشد، مقدار ولتاژ القاء شده در آن را بیابید. (کارشناسی ارشد برق ۷۷)

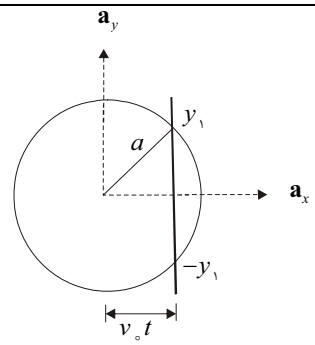
حل: از رابطهٔ (۵-۱۱) استفاده می‌کنیم. طبق تعریف:

$$emf = \int_{-y_{۱}}^{+y_{۱}} (\mathbf{V}\times\mathbf{B})\,.\,\mathbf{dl} = \int_{-y_{۱}}^{+y_{۱}} \left(v_{\circ}\,\mathbf{a}_{x}\times B_{\circ}\,\mathbf{a}_{z}\right).\,dy\,\mathbf{a}_{y}$$

$$emf = -v_{\circ}\,B_{\circ}\int_{-y_{۱}}^{+y_{۱}} dy = -۲\,v_{\circ}\,B_{\circ}\sqrt{a^{۲} - v_{\circ}^{۲}\,t^{۲}}$$



شکل ۵-۸: شکل مثال ۵-۷



شکل ۵-۹: مقطع شکل ۵-۸

مثال ۵-۸ قطعه‌ای از یک مدار به شکل یک هادی به طول ۱ در امتداد محور x با جریان I در جهت $\mathbf{a}_x$ قرار دارد. کار لازم برای اینکه میلهٔ فوق در میدان یکنواخت $\mathbf{B} = B_\circ \mathbf{a}_z$ بچرخد و روی محور y قرار گیرد، چقدر است؟ (کارشناسی ارشد برق ۷۵)

حل: فرض می‌کنیم که میله در اثر این کار، در مرحله‌ای مطابق شکل (۵-۱۱) باشد. نیروی اعمالی بر عنصر $\mathbf{dl} = \mathbf{a}_r\, dr$ از این میله برابر است با:

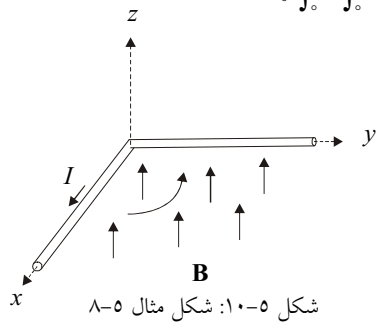
$$\mathbf{dF} = I\, dr\, \mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_z\, B_\circ = -\mathbf{a}_\varphi\, I\, B_\circ\, dr$$

کار لازم جهت حرکت دادن این عنصر به اندازهٔ $\mathbf{d}l = r\, d\varphi\, \mathbf{a}_\varphi$ برابر است با:

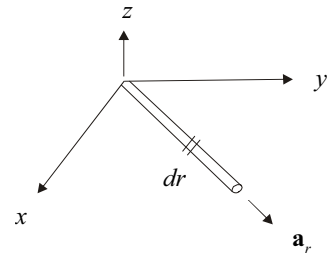
$$dW = -\mathbf{dF}.\mathbf{d}l = I\, B_\circ\, r\, dr\, d\varphi$$

در اینصورت کل کار برابرست با:

$$W = I\, B_\circ \int_\circ^{۱} \int_\circ^{\pi/۲} r\, dr\, d\varphi = \frac{I\, B_\circ\, I^{۲}\, \pi}{۴}$$



شکل ۵-۱۰: شکل مثال ۵-۸



شکل ۵-۱۱: دوران شکل ۵-۱۰

مثال ۵-۹ حلقهٔ سیم نازکی به شکل مربع به ابعاد a هم‌مرکز با مبداء مختصات در صفحهٔ $x=0$ مفروض است بطوریکه اضلاع آن بموازات محورهای y و z می‌باشند. چگالی شار مغناطیسی $\mathbf{B}=B_0|y|\mathbf{a}_x$ در فضا حضور دارد. حلقه با سرعت زاویه‌ای یکنواخت ω حول محور z ها دوران می‌کند. emf در حلقه را بدست آورید. (کارشناسی ارشد برق ۷۷)

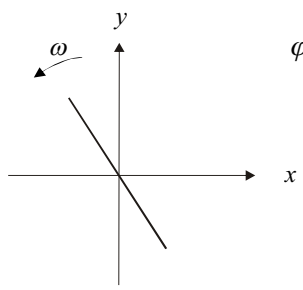
حل: از رابطهٔ (۵-۲) استفاده می‌کنیم. کافی است رابطهٔ شار مغناطیسی را بر حسب زمان بیابیم:

$$\varphi_m=\int \mathbf{B}\,.\,\mathbf{ds}=\int_{-\frac{a}{2}\cos\omega t}^{\frac{a}{2}\cos\omega t}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} B_x\,dz\,dy=2B_0\int_0^{\frac{a}{2}\cos\omega t}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dz$$

$$\varphi_m=B_0\times\frac{a^3}{4}\times\cos^2\omega t$$

پس:

$$emf=-\frac{d\varphi_m}{dt}=B_0\times\frac{a^3\omega}{4}\times\sin 2\omega t$$



شکل ۵-۱۲: شکل مثال ۵-۹

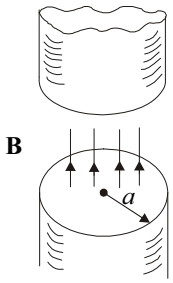
تمرین ۵-۲: مثال (۵-۹) را با استفاده از رابطهٔ (۵-۱۱) مجدداً حل کنید.

مثال ۵-۱۰ بین دو قطب یک آهنربای الکتریکی که به شکل دوایری به شعاع a هستند، میدان $\mathbf{B}$ به صورت $B=\frac{B_0}{\tau}t$ برای $0\le t\le\tau$ و $0\le r\le a$ تغییر می‌کند. B_0 ثابت بوده و جهت B مطابق شکل (۵-۱۳) می‌باشد. حداقل مقدار τ چقدر باشد تا در هوا شکست عایقی رخ ندهد؟ (حداکثر میدان الکتریکی قابل تحمل فضا را E_0 فرض کنید) (کارشناسی ارشد برق ۸۰)

حل: از رابطهٔ (۵-۶) استفاده می‌کنیم. این رابطه را بر محیط دایره‌ای به شعاع r به موازات سطوح قطب‌ها و متقارن نسبت به محور قطب‌ها اعمال می‌کنیم:

$$\oint \mathbf{E}\,.\,\mathbf{dl}=-\int\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\,.\,\mathbf{ds}\ \rightarrow\ 2\pi r E_\varphi=-\frac{d}{dt}\left(\frac{B_0}{\tau}t\,\pi r^2\right)\ \rightarrow\ E_\varphi=\frac{B_0 r}{2\tau}$$

حداکثر E_φ به ازای $r=a$ ایجاد می‌شود که باید به ازای حداقل τ از E_0 کمتر



شکل ۵-۱۳: شکل مثال ۵-۱۰

باشد، یعنی $E_{\circ} = \frac{B_{\circ} a}{۲\tau}$ و در نتیجه:

$$\tau = \frac{B_{\circ} a}{۲E_{\circ}}$$

۵-۴- قانون دوم ماکسول

این قانون با ایجاد یک تناقض آشکار بین اطلاعات ریاضی و فیزیکی، رابطهٔ مناسبی را برای رفع تناقض ارائه می‌کند. برای درک موضوع رابطهٔ (۴-۲) را در زیر تکرار می‌کنیم:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

به منظور رسیدن به تناقض، کافی است از این رابطه دیورژانس بگیریم:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{J}$$

مشکلی زمانی پیش می‌آید که بدانیم:

الف) طبق مطالب فصل اول، دیورژانس کرل هر میدان برداری صفر است، پس:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J} = \circ \qquad (۱۳\text{-}۵)$$

ب) از طرفی معادلهٔ پیوستگی و رابطهٔ (۳-۶۴):

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (۱۴\text{-}۵)$$

برای رفع مشکل مطابق مسئلهٔ ۱۲ پایان فصل، ماکسول پیشنهاد داده است که رابطهٔ (۴-۲) را به شکل زیر اصلاح کنیم:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad (۱۵\text{-}۵)$$

۵-۵- دیگر معادلات ماکسول

معادلات ماکسول، اصول موضوعی الکترومغناطیس را نشان می‌دهد. تا به حال با دو معادلهٔ آن آشنا شده‌ایم، دو معادلهٔ دیگر را از الکترواستاتیک و مغناطیس ساکن، قرض می‌گیریم. پس مجموعهٔ معادلات ماکسول را به صورت زیر جمع‌بندی می‌کنیم:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (۱۶-۵)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad (۱۷-۵)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad (۱۸-۵)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = ۰ \qquad (۱۹-۵)$$

روابط فوق فرم دیفرانسیلی معادلات ماکسول هستند، فرم انتگرالی آنها به شکل زیر است:

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \int -\frac{d\,\mathbf{B}}{d\,t} \cdot \mathbf{ds} \qquad (۲۰-۵)$$

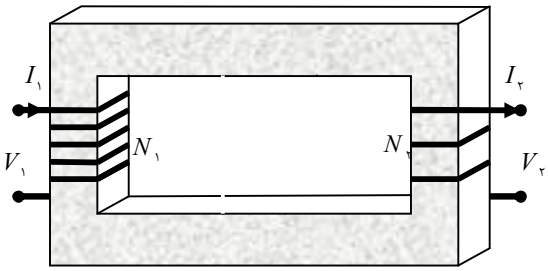
$$\oint \mathbf{H} \cdot \mathbf{dl} = \int \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{ds} \qquad (۲۱-۵)$$

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot \mathbf{ds} = \int_V \rho\, dv \qquad (۲۲-۵)$$

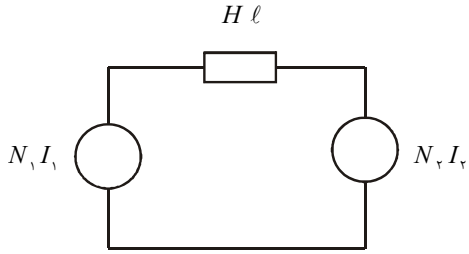
$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} = ۰ \qquad (۲۳-۵)$$

۵-۶- ولتاژهای القایی در مدارهای مغناطیسی

القاء ولتاژ در مدارهای مغناطیسی، کاربرد زیادی در صنعت دارد. در این قسمت ضمنِ معرفی یکی از این کاربردها، با بررسی یک حالت کلی، راهکار جدیدی را برای حل اینگونه مسائل ارائه می‌نماییم. شکل (۵-۱۴) ساختار داخلی یک ترانسفورماتور را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌کنید، دو دسته سیم‌پیچ با تعداد دور متفاوت بر روی یک هسته قرار گرفته‌اند. مدار معادل سیستم به صورت شکل (۵-۱۵) خواهد بود. در ترانسفورماتورها بررسی نسبت جریان‌ها و ولتاژهای ورودی به خروجی



شکل ۵-۱۴: مدل ترانسفورماتور



شکل ۵-۱۵: مدار معادل شکل ۵-۱۳

اهمیت زیادی دارد. برای محاسبهٔ نسبت ولتاژها به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$V_1 = -\frac{N_1 d\,\varphi_1}{d\,t} \quad , \quad V_2 = -\frac{N_2 d\,\varphi_2}{d\,t}$$

و در نتیجه:

$$\varphi_1 = \frac{1}{N_1}\int V_1 dt \quad , \quad \varphi_2 = \frac{1}{N_2}\int V_2 dt$$

با فرض اینکه شار گذرنده از هسته، هیچ اتلاف و یا پراکندگی‌ای نداشته باشد، شار گذرنده از هر دو سیم‌پیچ یکسان خواهد بود، پس:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi \quad \rightarrow \quad \frac{1}{N_1}\int V_1 dt = \frac{1}{N_2}\int V_2 dt$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} \qquad (۲۰-۵)$$

یعنی مطابق رابطهٔ (۵-۲۰) نسبت ولتاژ القایی در سیم‌پیچ‌ها با تعداد دور سیم‌پیچ‌ها متناسب است. برای محاسبهٔ نسبت جریان‌ها، فرض می‌کنیم که ضریب نفوذپذیری مغناطیسی هسته بی‌نهایت بوده و در نتیجه:

$$H\,\ell = 0$$

حال با جمع اختلاف پتانسیل‌ها حول حلقهٔ شکل (۵-۱۵) خواهیم داشت:

$$-N_1 I_1 + H\,\ell + N_2 I_2 = 0 \quad \rightarrow \quad -N_1 I_1 + N_2 I_2 = 0$$

پس:

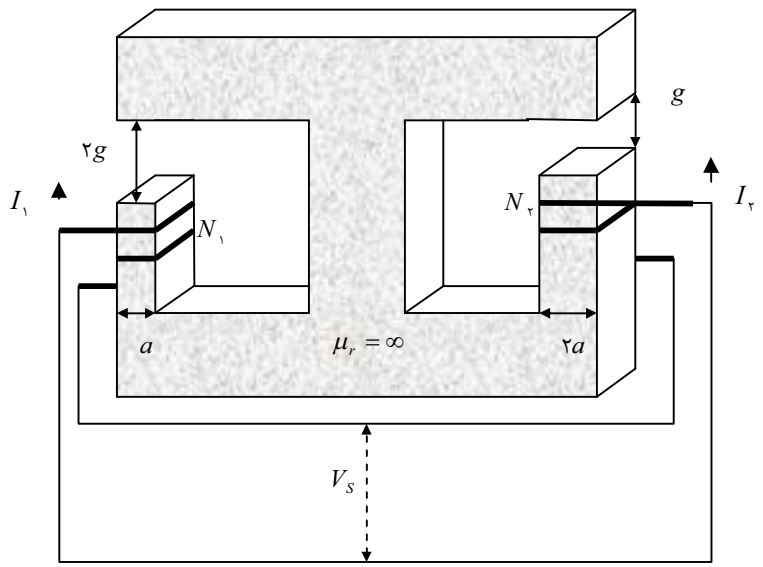
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} \qquad (۲۱-۵)$$

در واقع نسبت جریان‌ها با عکس نسبت تعداد دور سیم‌پیچ‌ها متناسب خواهد بود.

تمرین ۵-۳: در مورد نسبت امپدانس‌های دیده شده از دو سر سیم‌پیچ‌ها رابطهٔ مناسبی پیدا کنید.

تذکر: همانطور که ذکر شد، در محاسبهٔ نسبت ولتاژهای ترانسفورماتور، از پراکندگی شار و در محاسبهٔ نسبت جریان‌ها از تلفات هسته، صرفنظر کردیم، محاسبهٔ دقیق این نسبت‌ها را در مسئلهٔ ۱۱ پایان فصل بررسی می‌نماییم.

تمرین ۵-۴: در مدار مغناطیسی شکل (۵-۱۶) ضریب نفوذپذیری هسته بسیار بزرگ است و مقاومت سیم‌پیچ‌ها ناچیز می‌باشد، نسبت $\frac{I_۲}{I_۱}$ را بدست آورید. (کارشناسی ارشد برق)

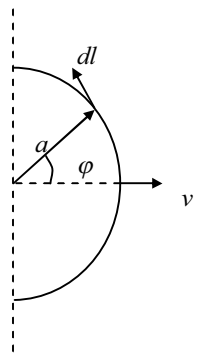


شکل ۵-۱۶: شکل تمرین ۵-٤

۵-۷- مسائل پایان فصل

۱- یک میدان مغناطیسی یکنواخت و ثابت با $B_z = ۱۰^{mT}$ در امتداد محور z در یک محور مختصات قائم وجود دارد. یک مسیر دایروی با مرکز مبداء مختصات را در نظر بگیرید. شعاع دایره با سرعت $۱۰۰\left(\frac{m}{S}\right)$ کاهش می‌یابد. با فرض اینکه شعاع اولیهٔ دایره ۱۰۰^{mm} بوده، پتانسیل القایی در مسیر دایروی را بیابید. (کارشناسی ارشد برق)

۲- یک هادی نیم‌دایره‌ای با سرعت ثابت $v_\circ$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B} = B_\circ \mathbf{a}_z$ حرکت می‌کند. پتانسیل القایی در دو انتهای نیم‌دایره را محاسبه کنید. (کارشناسی ارشد برق)



شکل ۵-۱۷: شکل مسئلهٔ ۲

۳- یک مایع هادی با سرعت v در یک کانال افقی با عمق w و پهنای ℓ حرکت می‌کند. فرض کنید که مولفهٔ قائم چگالی شار مغناطیسی زمین برابر B_d باشد. دو الکترود مستطیلی با ابعاد a و b به فاصلهٔ d از کف کانال، موازی دو دیوارهٔ کانال قرار دارد. پتانسیل الکتریکی القایی بین دو الکترود را پیدا کنید.

۴- میدان الکتریکی ناشی از چگالی شار مغناطیسی زیر را بیابید:

$$B = \begin{cases} B_\circ \sin \omega t & , \quad r < a \\ \circ & , \quad r > a \end{cases}$$

۵- یک ارابه روی دو ریل موازی حرکت می‌کند. فاصلهٔ دو ریل ۳ متر بوده و حداکثر سرعت ارابه $۲۰\frac{m}{S}$ می‌باشد. با فرض اینکه مولفهٔ قائم چگالی شار مغناطیسی زمین $۲\times۱۰^{-۵}\ T$ باشد، حداکثر ولتاژ القایی بین دو ریل را محاسبه نمایید. (کارشناسی ارشد برق)

میدان کلیدی

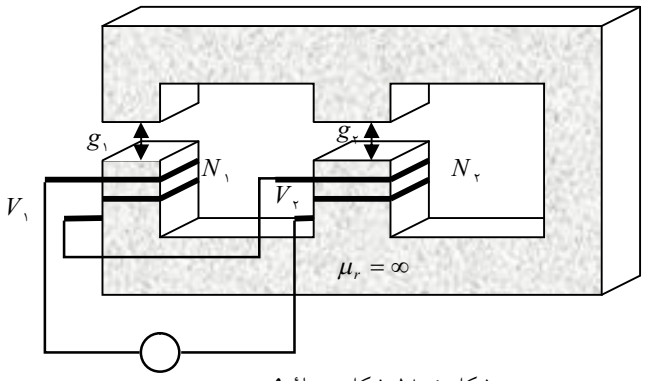
۶- یک حلقهٔ مستطیلی قائم با ابعاد a و b تحت تاثیر نیروی ثقل و حضور یک میدان مغناطیسی $\mathbf{B} = B_\circ \mathbf{a}_z$ سقوط می‌کند. پتانسیل القایی در حلقهٔ مستطیلی را پیدا کنید.

۷- یک حلقهٔ هادی دایروی با شعاع a حول یک قطرش با سرعت زاویه‌ای ω در حضور یک میدان مغناطیسی ثابت و عمود بر محور چرخشش دوران می‌کند. جریان جاری شده در حلقه را پیدا کنید.

۸- مدل یک ابر صاعقه‌دار را می‌توان به صورت یک خازن که مساحت ورقه‌هایش $۱۰^{km^۲}$ و فاصلهٔ دو ورق آن ۵ کیلومتر است، مدل کرد. اگر ابر توسط هر جهش برق در هر دقیقه تخلیه شود، کل بار داخل ابر را بیابید. (سرعت حرکت ابر را ۲۰ متر بر ثانیه فرض کنید)

مثال کلیدی

۹- در یک سیستم الکترومغناطیسی مطابق شکل زیر دو سیم‌پیچ ۱ و ۲ سری‌اند و به منبع ولتاژ $V(t) = ۲V \sin\omega t$ وصل شده‌اند. هسته ایده‌آل فرض شده و مقاومت سیم‌پیچ‌ها ناچیز است. اگر مقدار موثر ولتاژهای القایی دو سیم‌پیچ را به ترتیب $V_۱$ و $V_۲$ بنامیم، نسبت $\frac{V_۱}{V_۲}$ را بیابید.(سطح مقطع در همه جا ثابت است) (کارشناسی ارشد برق)



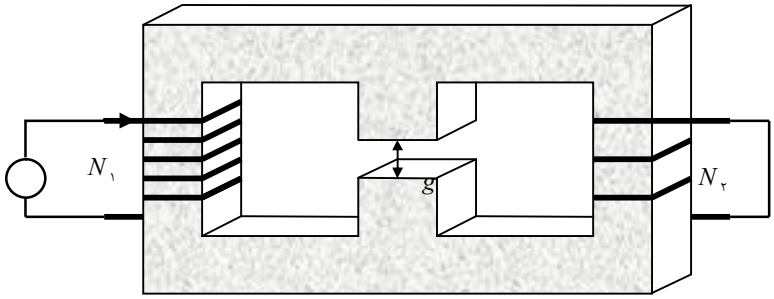
شکل ۵-۱۸: شکل مسئلهٔ ۹

مثال کلیدی

۱۰- در سیستم الکترومغناطیسی شکل زیر مقاومت سیم‌پیچ‌ها ناچیز بوده و هسته ایده‌آل است. سطح مقطع هسته در کل مسیر یکنواخت و معادل A می‌باشد. اگر سیم‌پیچ شمارهٔ یک به منبع سینوسی با $V(t) = V \sin\omega t$ وصل شود و سیم‌پیچ شمارهٔ دو اتصال کوتاه گردد، جریان موثر اتصال کوتاه را در شرایط ماندگار در سیم‌پیچ شمارهٔ یک بیابید. (کارشناسی ارشد برق)

مثال کلیدی

مثال کلیدی



شکل ۵-۱۹: شکل مسئلهٔ ۱۰

۱۱- به مدار مغناطیسی زیر توجه کنید. با استفاده از یک منبع سینوسی با مقدار موثر V_1، سیم‌پیچ N_1 دوری را تحریک کرده‌ایم و در اینصورت جریان I_1 در سیم‌پیچ جاری می‌شود. همانطور که در شکل دیده می‌شود سیم‌پیچ N_2 دوری مدار باز است و در آن ولتاژ V_2 القاء می‌شود. با فرض ایده‌آل بودن هسته به موارد زیر پاسخ دهید:

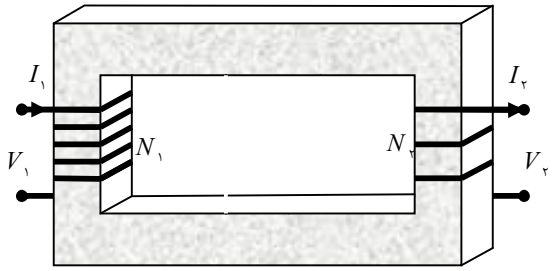
الف) نسبت $\frac{V_1}{V_2}$ چگونه است؟

ب) نسبت $\frac{I_1}{I_2}$ را بدست آورید. (فرض کنید با وصل کردن سیم‌پیچ دوم به بار جریان I_2 بتواند جاری شود)

پ) به نظر شما اگر سیم‌پیچ‌ها دارای مقاومت باشند، نسبت‌های فوق چه تغییری می‌کنند.

ت) به نظر شما اگر هسته ایده‌آل نباشد، نسبت‌های فوق چه تغییری می‌کنند.

ث) این وسیله را در صنعت چه می‌نامند و با توجه به قسمت‌های الف و ب کاربردهایی را برای آن بیابید.

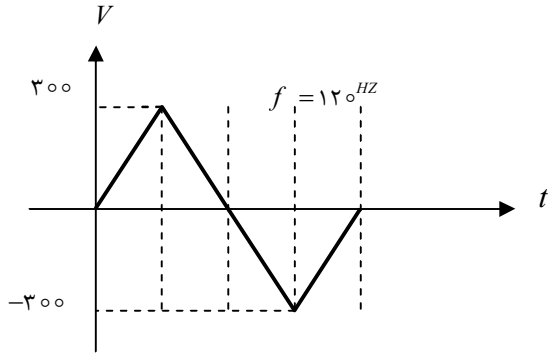


شکل ۵-۲۰: شکل مسئلهٔ ۱۱

POWEREN.IR

۱۲- قانون دوم ماکسول را اثبات کنید.

۱۳- تغییرات ولتاژ هستهٔ فرومغناطیسی نسبت به زمان مطابق شکل زیر می‌باشد. مطلوب است محاسبهٔ ماکزیمم دامنهٔ چگالی شار در هسته در صورتیکه سطح مقطع هسته برابر $۱۰^{cm^۲}$ و تعداد دور سیم‌پیچ برابر ۳۰۰ دور باشد.



شکل ۵-۲۱: شکل مسئلهٔ ۱۳

یادداشت: .....

نمونه سوالات کنکور
کارشناسی ارشد سراسری و
آزاد سال 1390

سوالات کنکور کارشناسی ارشد سراسری سال 1390

1- روی خط به معادلهٔ $\mathbf{r}\times\mathbf{a}_x=-5\mathbf{a}_z$ بار الکتریکی با چگالی یکنواخت به اندازهٔ $\frac{1}{36\pi}\times 10^{-9}$ کولن بر متر توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ در فضای آزاد در نقطه‌ای به مختصات $(2,5,4)$ با کدام رابطهٔ زیر داده می‌شود؟ (می‌دانیم $\varepsilon_\circ=\frac{1}{36\pi}\times 10^{-9}\frac{F}{M}$)

1) $-\frac{1}{8\pi}\mathbf{a}_z$

2) $-\frac{1}{10\pi}\mathbf{a}_y$

3) $\frac{1}{10\pi}\mathbf{a}_y$

4) $\frac{1}{8\pi}\mathbf{a}_z$

2- در مرکز یک حلقهٔ جریان دایروی به شعاع b و جریان I_1 ، حلقهٔ جریان دایروی دیگری به شعاع $\frac{b}{100}$ و جریان I_2 به طور مایل قرار دارد، به قسمی که محور این دو حلقه با یکدیگر زاویهٔ $\theta_\circ$ می‌سازند. اندازهٔ اندوکتانس متقابل M_{12} این دو حلقه چقدر است؟

1) $\frac{\mu_\circ \pi b}{2}\sin\theta_\circ$

1) $\frac{\mu_\circ \pi b}{2}\cos\theta_\circ$

3) $\frac{\mu_\circ \pi b}{2\times 10^4}\sin\theta_\circ$

4) $\frac{\mu_\circ \pi b}{2\times 10^4}\cos\theta_\circ$

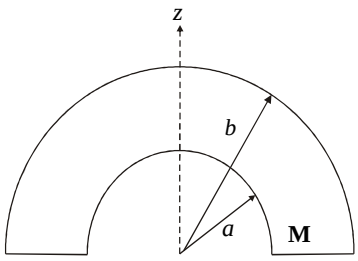
3- بار حجمی یکنواخت با چگالی ثابت $\rho_\circ$ کولن بر متر مکعب، در حجمی به شکل نیم‌کره به شعاع a توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای از قاعدهٔ نیم‌کره به فاصلهٔ $\frac{a}{2}$ از مرکز نیم‌کره چند ولت است؟

1) $\frac{11}{48}\frac{\rho_\circ a^2}{\varepsilon_\circ}$

2) $\frac{11}{24}\frac{\rho_\circ a^2}{\varepsilon_\circ}$

3) $\frac{3}{24}\frac{\rho_\circ a^2}{\varepsilon_\circ}$

4) $\frac{3}{48}\frac{\rho_\circ a^2}{\varepsilon_\circ}$



4- یک آهنربای دائمی به شکل نیم‌کره‌ای به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b دارای مغناطیس‌شدگی غیریکنواخت شعاعی با بردار $\mathbf{M}=CR\mathbf{a}_R$ می‌باشد که در آن C یک عدد ثابت است. اندازهٔ پتانسیل مغناطیسی $|\mathbf{A}|$ ناشی از این آهنربا در نقطه‌ای روی محور z کدام است؟

1) $\frac{\mu_\circ C}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+b^2}}-\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)$

2) $\frac{\mu_\circ C}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2+b^2}}-\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)$

3) $\frac{\mu_\circ C}{2}$

4) صفر

5- حلقهٔ دایروی به شعاع a در صفحهٔ $z=0$ و به مرکز مبداء مختصات مفروض است. به ازای $y>0$ بارالکتریکی با چگالی خطی q کولن بر متر و به ازای $y<0$ بار الکتریکی با چگالی خطی $-q$ کولن بر متر بر روی این حلقه توزیع شده است. کدام رابطهٔ زیر اندازهٔ میدان الکتریکی $|\mathbf{E}|$ در نقطهٔ $(0,0,z)$ است؟

1) $\dfrac{a^2 q}{2\pi\varepsilon_0\left(a^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

2) $\dfrac{2a^2 q}{\pi\varepsilon_0\left(a^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

3) $\dfrac{a^2 q}{\pi\varepsilon_0\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

4) $\dfrac{2a^2 q}{\pi\varepsilon_0\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

6- یک بار نقطه‌ای به جرم m و بار $-q$ در مرکز یک حلقهٔ بار دایروی به شعاع a و چگالی خطی λ کولن بر متر قرار گرفته است. پریود نوسانات این بار نقطه‌ای برای جابجائی‌های بسیار کوچک در راستای محور حلقهٔ بار کدام است؟

1) $\pi a\sqrt{\dfrac{4m\varepsilon_0}{\lambda q}}$

2) $\pi a\sqrt{\dfrac{8m\varepsilon_0}{\lambda q}}$

3) $\pi a\sqrt{\dfrac{4\varepsilon_0}{m\lambda q}}$

4) $\pi a\sqrt{\dfrac{8m}{\varepsilon_0\lambda q}}$

7- یک استوانهٔ نامحدود از جنس فروالکتریک دارای پلاریزاسیون دائمی $\mathbf{P}(r)=\left(1-\dfrac{r}{a}\right)\mathbf{a}_r$ می‌باشد که در آن a شعاع استوانه و r فاصله از محور استوانه است. این استوانه با سرعت زاویه‌ای ω حول محور خود در جهت مثلثاتی می‌چرخد. شدت میدان مغناطیسی $\mathbf{H}$ درون استوانه یعنی برای $0<r<a$ کدام است؟

1) $\omega\left(1-\dfrac{r^2}{a^2}\right)\mathbf{a}_z$

2) $\dfrac{\omega}{r}\left(1-\dfrac{r}{a}\right)\mathbf{a}_z$

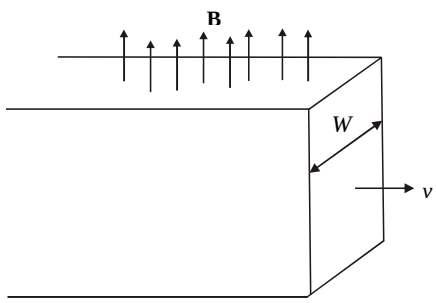
3) $\omega r\left(1-\dfrac{r}{a}\right)\mathbf{a}_z$

4) $\omega r\left(1+\dfrac{r}{a}\right)\mathbf{a}_z$

8- زاویهٔ بردار شدت میدان مغناطیسی $\mathbf{H}$ با خط عمود بر مرز مشترک دو مادهٔ مغناطیسی در سمت مادهٔ اولیه 45° و در سمت مادهٔ دوم 30° است. اگر در مرز مشترک این دو محیط هیچ جریان آزادی نداشته باشیم، چگالی انرژی مغناطیسی در کدام طرف مرز بیشتر است؟

1) طرف مادهٔ اول
2) طرفی مادهٔ دوم
3) در دو طرف یکسان است.
4) نمی‌توان قضاوت کرد.

9- بار سطحی با چگالی $\rho_s = \sigma \cos \beta x$ کولن بر متر مربع روی صفحهٔ $y = 0$ توزیع شده است. معادلهٔ خطوط میدان الکتریکی در نیم‌فضای $y > 0$ کدام است؟



1) $e^{-\beta y}|\sin \beta x| =$ ثابت
2) $e^{-\beta y}|\cos \beta x| =$ ثابت
3) $e^{-\beta y}|\csc \beta x| =$ ثابت
4) $e^{-\beta y}|\sec \beta x| =$ ثابت

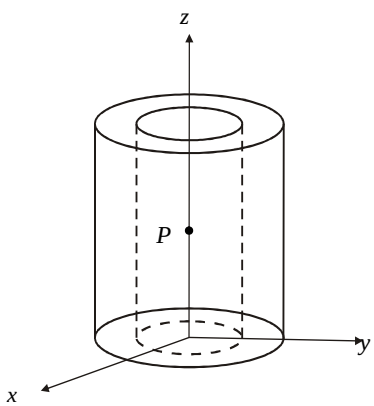
10- یک ورقهٔ بزرگ فلزی با رسانایی ویژهٔ σ و ضخامت W به طور عمودی داخل یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}$ با سرعت $\mathbf{V}$ (ثابت) حرکت می‌کند. اگر $\mathbf{V}$ بر $\mathbf{B}$ عمود باشد، اندازهٔ نیروی بازدارندهٔ حرکت بر واحد سطح قطعهٔ رسانا چقدر است؟ می‌دانیم $|\mathbf{B}| = B$ و $|\mathbf{V}| = v$

1) $\sigma v W B$
2) $\sigma v W B^2$
3) $\sigma v^2 B^2$
4) $\sigma v^2 B^2 W$

11- یک کرهٔ رسانا به شعاع a و پتانسیل V_0 در فضای آزاد قرار دارد. این کره را در محیطی به ضریب گذردهی $\varepsilon = \varepsilon_0\left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)$ قرار می‌دهیم. میزان تغییر انرژی ذخیره شده در سیستم Δw طی این فرآیند چقدر است؟

1) $\left(\frac{\pi}{4}-1\right)2\pi\varepsilon_0 a V_0^2$
2) $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)2\pi\varepsilon_0 a V_0^2$
2) $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)2\pi\varepsilon_0 a V_0^2$
4) $\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\right)2\pi\varepsilon_0 a V_0^2$

12- مطابق شکل ناحیهٔ $0 \le z \le L$، $0 \le \varphi \le 2\pi$ و $\frac{L}{2} \le r \le L$ توسط دوقطبی‌های مغناطیسی با مغناطیس‌شدگی یکنواخت $M_0 \mathbf{a}_z$ پر شده و بقیهٔ نواحی خلاء است. $\mathbf{B}$ چگالی شار مغناطیسی ناشی از این دوقطبی‌ها در نقطهٔ $P(0,0,\frac{L}{2})$ چقدر است؟



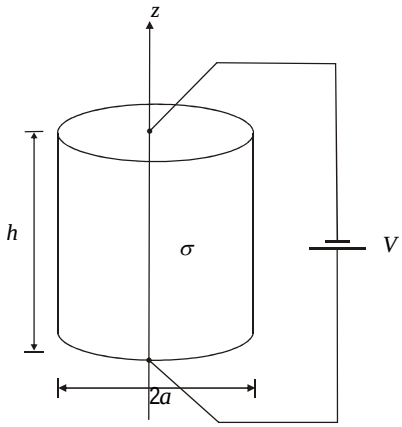
1) 0

2) $\mu_0 M_0 \mathbf{a}_z$

3) $\mu_0 M_0 \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}}\right)\mathbf{a}_z$

4) $\mu_0 M_0 \left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{8}}{\sqrt{10}}\right)\mathbf{a}_z$

13- فاصلهٔ بین دو دیسک دایروی به شعاع a از جنس رسانای کامل هستند توسط ماده‌ای با رسانایی ناهمگن $\sigma = k\left(1+\frac{z}{h}\right)\left(1+\frac{r}{a}\right)$ پر شده که h فاصلهٔ بین دو دیسک بوده و $0 \le z \le h$ و r فاصلهٔ محور ساختار می‌باشد. مقاومت اهمی R بین دو دیسک چقدر است؟



1) $\frac{3Ln2}{5\pi}\frac{h}{ka^2}$

2) $\frac{3Ln2}{10\pi}\frac{h}{ka^2}$

3) $\frac{Ln2}{4\pi}\frac{h}{ka^2}$

4) $\frac{3Ln2}{\pi}\frac{h}{ka^2}$

14- یک خازن مسطح در دست است. صفحهٔ زیرین خازن در صفحهٔ $z=0$ و صفحهٔ بالایی آن در صفحهٔ $z=h$ قرار گرفته است. مساحت هر صفحه A فرض می‌شود. بین دو صفحهٔ این خازن یک عایق غیر همگن با ضریب گذردهی نسبی به صورت $\varepsilon_r = \varepsilon_0\left(1+a^2 z^2\right)$ قرار دارد. ظرفیت این خازن با فرض $h^2 \square A$ کدام است؟

1) $\frac{2\varepsilon_0 Aa}{\tan^{-1}(2ah)}$

2) $\frac{\varepsilon_0 Aa}{\tan^{-1}(ah)}$

3) $\frac{2\sqrt{2}\,\varepsilon_0 Aa}{\tan^{-1}(2\sqrt{2}\,ah)}$

4) $\frac{\sqrt{2}\,\varepsilon_0 Aa}{\tan^{-1}(\sqrt{2}\,ah)}$

15- شدت میدان مغناطیسی در نیم‌فضای $0 < x < \infty$ که هیچ جریان الکتریکی در آن وجود ندارد بـه صورت $\mathbf{H} = e^{-bx}\left[3\sin 2y\,\mathbf{a}_x + a\cos 2y\,\mathbf{a}_y\right]$ داده شده که در آن a و b اعداد ثابت و مجهول هسـتند. پتانسیل برداری مغناطیسی $\mathbf{A} = A_z(x,y)\mathbf{a}_z$ در این ناحیه کدام است؟

1) $A_z = \frac{3}{2}\mu_0 e^{2x}\sin 2y + c$

2) $A_z = -\frac{3}{2}\mu_0 e^{2x}\sin 2y + c$

3) $A_z = \frac{3}{2}\mu_0 e^{2x}\cos 2y + c$

4) $A_z = -\frac{3}{2}\mu_0 e^{2x}\cos 2y + c$

پاسخ سوالات کنکور کارشناسی ارشد سراسری سال 1390

1- یک خط بار و یک نقطه در فضا داده شده است. هدف محاسبهٔ میدان ناشی از خط بار در محل نقطهٔ ذکر شده است. بر این اساس کافی است از رابطهٔ (2-21) استفاده کنیم. (مثال 2-5 و تمرین 2-5 را برای تمرین بیشتر مرور کنید)

$$\mathbf{E}=\frac{\rho_l}{4\,\pi\,\varepsilon_\circ\,r}\left[(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2)\,\mathbf{a}_r+(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)\,\mathbf{a}_z\right]$$

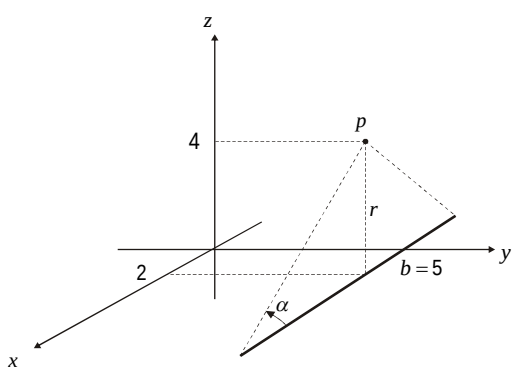
مطابق این رابطه کافیست محل تقاطع خط بار ذکر شده با محورهای x و y محاسبه شود. تحت چنین شرایطی r محاسبه شده و با توجه به نامحدود بودن خط بار، $\alpha_1=\alpha_2=\circ$ و پاسخ مسئله یافت می‌شود. بدین منظور:

$$\mathbf{r}=a\,\mathbf{a}_x+b\,\mathbf{a}_y\xrightarrow{\mathbf{r}\times\mathbf{a}_x=-5\,\mathbf{a}_z}\circ-b\,\mathbf{a}_z=-5\mathbf{a}_z\rightarrow b=-5$$

طراحی مسئله را به نحوی تعریف کرده که نیازی به محاسبهٔ a نباشد! در واقع کافیست به این دقت کنید که عرض نقطهٔ برخورد خط بار با عرض نقطهٔ میدان برابر است. (به شکل زیر نگاه کنید) بر طبق رابطهٔ فوق، و ضمن توجه به وضعیت بردارهای مماس و عمود، نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{E}=\frac{\frac{1}{36\pi}\times1\circ^{-9}}{4\,\pi\,\frac{1}{36\pi}\times1\circ^{-9}\times4}\left[(\cos\circ+\cos\circ)\,\mathbf{a}_z+(\sin\circ-\sin\circ)\,\mathbf{a}_r\right]=\frac{1}{8\pi}\mathbf{a}_z$$

بر این اساس گزینهٔ (4) صحیح خواهد بود.



2- با توجه به اینکه شعاع حلقهٔ بزرگتر نسبت به حلقهٔ داخلی بسیار بزرگتر است لذا میدان این حلقه در مرکز خود دچار تغییر محسوسی نمی‌شود. لذا:

$$\varphi=B_{12}\,S_2\xrightarrow[S_2=\pi\left(\frac{b}{1\circ\circ}\right)^2\cos\theta]{B_{12}=\frac{\mu_\circ I_1}{2b}}\varphi_{21}=\frac{\mu_\circ I_1}{2\times1\circ^4}\pi\,b\cos\theta_\circ$$

پس:

$$L_{12} = \frac{\varphi}{I_1} = \frac{\mu_\circ}{2\times 1\circ^4}\pi b\cos\theta_\circ$$

در نتیجه گزینهٔ (4) صحیح خواهد بود.

3- کافی است تمرین (2-25) را مشاهده کنید. مطابق رابطهٔ (2-56) پتانسیل در نقطه‌ای به فاصلهٔ R داخل کره‌ای با چگالی بار حجمی یکنواخت و به شعاع a از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$V = \frac{\rho_\circ}{6\,\varepsilon_\circ}\left(3a^2 - R^2\right)\Bigg|_{R=a/2} = \frac{11}{24}\frac{\rho_\circ a^2}{\varepsilon_\circ}$$

بنابراین گزینهٔ (2) صحیح است.

4- سوال بسیار ساده‌ای است. مطابق روابط (4-43) و (4-44) برای چگالی جریان داریم:

$$\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M}\times\mathbf{a}_n = C\,R\,\mathbf{a}_R\times\mathbf{a}_R = \circ$$

$$\mathbf{J}_{ms} = \nabla\times\mathbf{M} = \ldots = \circ$$

پس جریانی وجود نداشته و لذا $|A| = \circ$ و پاسخ صحیح گزینهٔ (4) خواهد بود.

5- دقیقاً مثال (2-77) است! (جالب است بدانید که این کتاب چندین ماه پیش از آزمون سراسری 90 نوشته شده است!)

بنابراین گزینهٔ (3) صحیح است.

6- بسیار مشابه تمرین (2-53) است.

یک بار نقطه‌ای در مرکز حلقهٔ بار قرار گرفته است. اگر قرار باشد نوسان کند باید بدان نیرو وارد شود. نیروی الکتریکی نیز ناشی از میدان الکتریکی ذکر شده در رابطهٔ (2-22) است. از آنجایی که هدف مسئله پریود نوسانات است، پس باید رابطه‌ای برای رسیدن به خواستهٔ مسئله یافت شود. همانطور که می‌دانیم پریود نوسانات مطابق رابطهٔ زیر به سرعت زاویه‌ای وابسته می‌شود:

$$T = 2\pi\,r\,\omega$$

برای رسیدن به سرعت زاویه‌ای نیز می‌توان یک معادلهٔ دو مجهولی به صورت زیر را حل نمود:

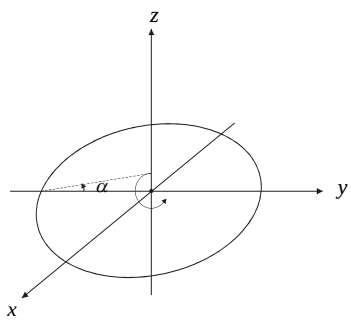
$$F = ma \rightarrow a = \frac{d^2\alpha}{d\,t^2}$$

مقدار نیروی وارد بر بار مطابق شکل زیر عبارتست از:

$$\mathbf{E}=\frac{\rho_l\, z\, a}{2\varepsilon_\circ\left(a^2+\circ^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathbf{a}_z,\ \ \mathbf{F}=-\mathbf{E}\,q,\ \ \sin\alpha=\frac{z}{\left(a^2+z^2\right)^{1/2}}$$

با توجه به اینکه فرض بر پریود کوچک نوسانات است، $\sin\alpha=\alpha$، پس:

$$\mathbf{F}=-\mathbf{E}\,q=\frac{\rho_l\,\alpha}{2\varepsilon_\circ a}\,\mathbf{a}_z$$



نتیجه اینکه:

$$F=m\,a\rightarrow a=\frac{d^2\alpha}{d\,t^2}=\frac{\rho_l\,\alpha}{2\varepsilon_\circ a}\,\mathbf{a}_z$$

که با حل این معادله ریشه‌هایی به صورت ذیل بدست می‌آید:

$$\omega=\sqrt{\frac{q\,\rho_\ell}{2\varepsilon_\circ\,a^2\,m}}\rightarrow\ldots T=\pi\,a\sqrt{\frac{8\varepsilon_\circ\,m}{q\,\rho_\ell}}$$

بنابراین گزینهٔ (2) صحیح است.

7- با محاسبهٔ بارهای مقید جریان را بدست می‌آوریم.

$$\rho_{bv}=-\nabla\,.\,\mathbf{P}=-\nabla\,.\left[\left(1-\frac{r}{a}\right)\mathbf{a}_r\right]=-\frac{1}{r}+\frac{2}{a}$$

$$\rho_{bs}=\mathbf{P}\,.\,\mathbf{a}_n\Big|_{r=a}=\ldots=\circ$$

از طرفی برای محاسبهٔ چگالی جریان می‌توان نوشت:

$$\mathbf{J}=\rho V=\rho\left(r\,\omega\,\mathbf{a}_\varphi\right)\rightarrow J=\left(-\frac{1}{r}+\frac{2}{a}\right)r\,\omega\,\mathbf{a}_\varphi$$

بر این اساس مقدار جریان کل عبارت خواهد بود از:

$$I=\int_\circ^\ell\int_r^a\left(-\frac{1}{r}+\frac{2}{a}\right)r\,\omega\,dr\,dz=\ldots=\ell\,\omega\,r\left(1-\frac{r}{a}\right)$$

با توجه به رابطهٔ (4-4) داریم:

$$\oint\mathbf{H}\,.\,\mathbf{d}l=I_{tot}\ \rightarrow\ H\,\ell=I_{tot}\ \rightarrow\ H=\omega\,r\left(1-\frac{r}{a}\right)$$

بنابراین گزینهٔ (3) صحیح خواهد بود.

8- مطابق نتیجهٔ مثال (4-38) داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{\mu_1}{\tan\theta_2}=\dfrac{\mu_2}{\tan\theta_1}\ \rightarrow\ \mu_1=\sqrt{3}\,\mu_2\\[2ex]\dfrac{H_1}{\sin\theta_2}=\dfrac{H_2}{\sin\theta_1}\ \rightarrow\ H_1=\sqrt{2}/2\,H_2\end{cases}$$

با توجه به رابطهٔ $W=\frac{1}{2}\mu H^2$ برای دو ناحیه داریم:

$$W_1=\frac{1}{2}\mu_1 H_1^2=\frac{1}{2}\mu_1\left(\sqrt{2}/2\,H_2\right)^2=\frac{1}{4}\mu_1 H_2^2 \xrightarrow{\mu_1=\sqrt{3}\,\mu_2} W_1=\frac{\sqrt{3}}{2}W_1$$

بنابراین گزینهٔ (1) صحیح خواهد بود.

9- برای حل سوال ناچاریم میدان الکتریکی را در فضا محاسبه نموده و سپس با استفاده از رابطهٔ (2-124) معادلهٔ خطوط میدان را محاسبه کنیم. برای محاسبهٔ شدت میدان از حل معادلهٔ لاپلاس و از رابطهٔ (3-39) کمک می‌گیریم.

$$V(x,y)=\sum\left(A\sin kx+B\cos kx\right)\left(e^{-ky}\right)$$

از طرفی:

$$\mathbf{E}=-\nabla V=\sum_{i=0}^{\infty}\left[\left(Ak_i\sin\left(k_ix\right)-Bk_i\cos\left(k_ix\right)\right)e^{-k_iy}\mathbf{a}_x-k_i\left(A\cos\left(k_ix\right)+B\sin\left(k_ix\right)\right)e^{-k_iy}\mathbf{a}_y\right]$$

با اعمال شرایط مسئله، یعنی $\mathbf{E}\Big|_{y=0}.\mathbf{a}_x=\rho_s,\ \rho_s=\sigma_0\cos\beta x$ داریم:

$$Ak_i=\sigma_0\ ,\ \ k_i=\beta\ \Rightarrow \mathbf{E}=\sigma_0 e^{-\beta y}\sin\beta x\,\mathbf{a}_x+\sigma_0 e^{-\beta y}\cos\beta x\,\mathbf{a}_y$$

بر طبق رابطهٔ (2-124):

$$\frac{dx}{E_x}=\frac{dy}{E_y}\ \rightarrow\ \frac{dx}{\sin\beta x}=\frac{dy}{\cos\beta x}\ \Rightarrow e^{-\beta y}\sin\beta x=cte$$

پس گزینهٔ (2) صحیح است.

10- نیروی حاصل از تحرک مجموعهٔ حاوی جریان برابر $F=BI\omega$ خواهد بود. از طرفی در اثر تحرک در فضای میدان مغناطیسی، ولتاژ القایی $\mathbf{E}=\mathbf{V}\times\mathbf{B}$ را خواهیم داشت. می‌توان نتیجه گرفت:

$$\mathbf{E}=\mathbf{V}\times\mathbf{B}\ \rightarrow |E|=|V||B|$$

پس:

$$F=BI\omega\xrightarrow[J=\sigma E]{I=JS}F=B^2Sv\sigma\omega$$

در نتیجه گزینهٔ (2) صحیح خواهد بود

11- این سوال را با درک سیستمی و توجه به مثال‌های کتاب حل می‌کنیم. تغییر انرژی در سیستم برابر است با:

$$\Delta w=\frac{1}{2}C_2V_0^2-\frac{1}{2}C_1V_0^2$$

که در آن C_1 در مثال (2-82) و C_2 در مثال (2-83) این حل شده است! بنابراین گزینهٔ (1) صحیح است!

12- چگالی حجمی جریان‌های مقید برابر صفر است (چرا؟) برای چگالی‌های سطحی داریم:

$$\mathbf{J}_{ms,1} = \mathbf{M}\times\mathbf{a}_n\Big|_{r=L,\mathbf{a}_n=\mathbf{a}_r} = -M_\circ\,\mathbf{a}_\varphi$$

$$\mathbf{J}_{ms,2} = \mathbf{M}\times\mathbf{a}_n\Big|_{r=L/2,\mathbf{a}_n=\mathbf{a}_r} = M_\circ\,\mathbf{a}_\varphi$$

میدان مغناطیسی ناشی از این جریان‌ها مطابق مثال (4-10) در نقطهٔ موردنظر بدست می‌آوریم. اگر کمی دقت کنیم یک سیستم شبه‌سلونوئیدی داریم. در حقیقت می‌توان از نتیجهٔ مثال (4-6) استفاده کرد. با استفاده از رابطهٔ (4-14) داریم:

$$|B| = \frac{-\mu_\circ M_\circ}{\sqrt{5}} + \frac{\mu_\circ M_\circ\sqrt{2}}{2}$$

پس گزینهٔ (3) صحیح خواهد بود.

13- استفاده از رابطهٔ دیفرانسیلی محاسبهٔ مقاومت (ارائه شده در قسمت 3-5-4-3 کتاب) ساده‌ترین راهکار حل مسئله است. در حقیقت به جای حل یک مسئلهٔ فیزیکی یک انتگرال ساده می‌گیریم!

$$R = \int \frac{def(\ell)}{\sigma S}\Bigg|_{def(\ell)=dz}$$

از طرفی با توجه به تغییرات σ با متغیرهای فضا:

$$\sigma S = \int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{a} k\left(1+\frac{z}{h}\right)\left(1+\frac{r}{a}\right) r\,dr\,d\varphi = \ldots = 2\pi k\left(1+\frac{z}{h}\right)\left(\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3a}\right)$$

پس:

$$R = \int \frac{def(\ell)}{\sigma S} = \int_\circ^{h} \frac{dz}{2\pi k\left(1+\frac{z}{h}\right)\left(\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3a}\right)} = \ldots = \frac{3h}{5\pi k a^2}\left(Ln2h - Lnh\right) = \frac{3h}{5\pi k a^2}Ln2$$

همانطور که مشاهده می‌شود، گزینهٔ (1) صحیح خواهد بود.

14- همانطور که پیش از این نیز گفته بودیم، سوالات مربوط به خازن، با اطلاع دقیق از روش دیفرانسیلی، جزء ساده‌ترین مسائل مغناطیس هستند. در این مثال نیز کافی است از رابطهٔ (2-95) استفاده کنیم:

$$\frac{1}{C} = \int \frac{1}{def\ (c)} = \int \frac{def\ (d)}{\varepsilon S}$$

پس:

$$\frac{1}{C} = \int \frac{def\,(d)}{\varepsilon S}\Bigg|_{def\,(d)=dz,\ S=\iint \varepsilon\,dx\,dy} \rightarrow \int_\circ^{h} \frac{dz}{\varepsilon_\circ A\left(1+a^2 z^2\right)} = \frac{1}{\varepsilon_\circ A\,a}\tan^{-1}(ah)\Big|_\circ^{h} = \frac{1}{\varepsilon_\circ A\,a}\tan^{-1}(ah)$$

$$C = \frac{\varepsilon_\circ A\, a}{\tan^{-1}(ah)}$$

بنابراین گزینهٔ (2) صحیح است.

15- مطابق صورت سوال شدت میدان مغناطیسی داده شده است، بر این اساس با استفاده از رابطهٔ (4-33) می‌توان تناظر مناسبی میان میدان مغناطیسی و پتانسیل مغناطیسی ایجاد نمود.

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_\circ} \nabla \times \mathbf{A}$$

از طرفی برای $\nabla \times \mathbf{A}$ داریم:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \ldots = \frac{\partial A_z}{\partial y}\mathbf{a}_x - \frac{\partial A_z}{\partial x}\mathbf{a}_y = \mu_\circ e^{-bx}\left[3\sin 2y\,\mathbf{a}_x + a\cos 2y\,\mathbf{a}_y\right]$$

که از حل آن نتیجه می‌شود:

$$A_z = -\frac{3}{2}\mu_\circ e^{2x}\cos 2y + c$$

لذا گزینهٔ (4) صحیح خواهد بود.

سوالات کنکور کارشناسی ارشد آزاد سال 1390

1- کره‌ای باردار با بار یکنواخت به میزان کل $-Q$ و شعاع a در دست است. مرکز کره منطبق بر مرکز مختصات می‌باشد. اگر پتانسیل در $r=\circ$ برابر صفر باشد، پتانسیل در $r<a$ را تعیین نمایید.

1) $V=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{1}{a}-\frac{R^2}{a^3}\right]$

2) $V=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{R^2}{a^3}-\frac{1}{a}\right]$

3) $V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{R^2}{a^3}-\frac{1}{a}\right]$

4) $V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{1}{a}-\frac{R^2}{a^3}\right]$

2- میدان الکتریکی توسط یک کرهٔ باردار به شعاع a و چگالی بار حجمی $\rho(r)$ توسط روابط زیر داده شده است. $\rho(r)$ را بدست آورید.

$$E(R)=\begin{cases} R^3+AR^2 & , \quad R\le a \\ \left(a^5+Aa^4\right)R^{-2} & , \quad R\ge a \end{cases}$$

1) $\rho(R)=\varepsilon_\circ\left(5R+4A\right)$

2) $\rho(R)=\varepsilon_\circ R\left(R+A\right)$

3) $\rho(R)=\varepsilon_\circ\left(R+A\right)$

4) $\rho(R)=\varepsilon_\circ R\left(5R+4A\right)$

3- اگر چگالی بار حجمی $\rho=\rho_\circ\frac{a}{R}$ در مختصات کروی داده شده است. پتانسیل V را با فرض $V=\circ$ در $R=1\circ$ تعیین نمایید.

1) $V=\frac{a\rho_\circ}{2\varepsilon_\circ}\left(1\circ-R\right)$

2) $V=\frac{a\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}\left(1\circ-R\right)$

3) $V=\frac{a\rho_\circ}{2\varepsilon_\circ}\left(1\circ\circ-R^2\right)$

4) $V=\frac{a\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}\left(1\circ\circ-R^2\right)$

4- بدست آورید کار انجام شده در حرکت بار یک کولمب از نقطهٔ $(1,2,-1)$ به نقطهٔ $(2,8,-1)$ در میدان $\mathbf{E}=y\mathbf{a}_x+x\mathbf{a}_y$ و در امتداد منحنی هذلولی $x=\frac{8}{7-3y}$،

1) $W=14^J$

2) $W=-14^J$

3) $W=12^J$

4) $W=-12^J$

5- بار خطی $\rho_\ell^{(C/m)}$ (با طول L) به فاصلهٔ a از صفحهٔ باردار با چگالی ρ_S قرار دارد. چه میزان کار لازم است تا بار خطی را چرخانده و در حالت عمود بر صفحه قرار دهد. فرض نمایید در حالت اخیر حداقل فاصله بار خطی از صفحه برابر a باشد.

1) $W=\frac{-\rho_\ell\rho_S L^2}{4\varepsilon_\circ}$

2) $W=\frac{\rho_\ell\rho_S L^2}{4\varepsilon_\circ}$

3) $W=\frac{-\rho_\ell\rho_S L^2}{2\varepsilon_\circ}$

4) $W=\frac{\rho_\ell\rho_S L^2}{2\varepsilon_\circ}$

6- پوستهٔ نیم‌کرهٔ هادی با شعاع R در صفحهٔ $z=0$ با چگالی بار سطحی ρ_S مفروض است. مرکز کره منطبق بر مبداء مختصات می‌باشد. گشتاور دوقطبی حاصل را نسبت به مبداء مختصات بدست آورید.

1) $\rho_S \pi R^3$
2) $\frac{\rho_S}{2}\pi R^3$
3) $2\rho_S \pi R^3$
4) $\frac{\rho_S}{4}\pi R^3$

7- یک کرهٔ هادی به شعاع 1^{cm} دارای ظرفیت C می‌باشد. روی کرهٔ عایقی به ضخامت 1^{cm} قرار می‌دهیم. اگر $\varepsilon_r = 2$ باشد، C را بدست آورید.

1) $C=\frac{0.32\pi\varepsilon_0}{3}$
2) $C=\frac{0.16\varepsilon_0}{3}$
3) $C=\frac{0.16\pi\varepsilon_0}{3}$
4) $C=\frac{0.32\varepsilon_0}{3}$

8- بین دو کرهٔ هادی هم‌مرکز شعاع‌های a و b $(b>a)$، ماده‌ای اتلافی با ضرایب ε و σ پر شده است. مقاومت بین دو کره را بر حسب ε و σ و خازن بین دو کره C، تعیین کنید. C ظرفیت بین دو کره در حالی است که مادهٔ اتلافی توسط دی‌الکتریک با ضریب ε جابجا شده باشد.

1) $R=\frac{2\varepsilon}{\sigma C}$
2) $R=\frac{\varepsilon}{2\sigma C}$
3) $R=\frac{\varepsilon}{4\sigma C}$
4) $R=\frac{\varepsilon}{\sigma C}$

9- بین دو صفحهٔ موازی هادی به سطوح S و فاصلهٔ d از یکدیگر ماده‌ای با ضریب هدایتی متغیر σ پر شده است. میزان σ از σ_1 در صفحهٔ زیرین تا σ_2 در صفحهٔ بالایی به طور خطی تغییر می‌کند. $(\sigma_2>\sigma_1)$ مقاومت بین دو صفحه را تعیین نمایید.

1) $R=\frac{d\,Ln\left(\frac{2\sigma_2}{\sigma_1}\right)}{S(\sigma_2-\sigma_1)}$
2) $R=\frac{d\,Ln\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)}{2S(\sigma_2-\sigma_1)}$
3) $R=\frac{d\,Ln\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)}{S(\sigma_2-\sigma_1)}$
4) $R=\frac{d\,Ln\left(\frac{2\sigma_2}{\sigma_1}\right)}{2S(\sigma_2-\sigma_1)}$

10- یک دوقطبی با ممان P با یک میدان الکتریکی یکنواخت E زاویهٔ θ می‌سازد. کار لازم جهت چرخاندن دوقطبی از $\theta=0$ تا زاویهٔ θ را بدست آورید.

1) $W=-PE(\cos\theta-1)$
2) $W=PE(\cos\theta-1)$
3) $W=-PE(\cos\theta+1)$
4) $W=-PE(\cos\theta+1)$

11- بار نقطه‌ای مثبت Q در میدان الکتریکی $E_\circ \mathbf{a}_x$ به فاصلهٔ x از صفحهٔ هادی متصل به زمین قرار گرفته است. صفحهٔ هادی در صفحهٔ $x=\circ$ می‌باشد. به ازای چه میزانی از x نیروی وارده بر بار صفر می‌شود؟

1) $x=\sqrt{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ E_\circ}}$

2) $x=\sqrt{\dfrac{Q}{16\pi\varepsilon_\circ E_\circ}}$

3) $x=\sqrt{\dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_\circ E_\circ}}$

4) $x=\sqrt{\dfrac{Q}{32\pi\varepsilon_\circ E_\circ}}$

12- استوانهٔ هادی به طول بی‌نهایت با مقطع دایره‌ای به شعاع R و مرکز مبداء مختصات در دست است. استوانه‌ای خارج از مرکز توخالی شعاع $a<R$ در استوانهٔ هادی ایجاد شده است. فاصلهٔ مرکز سطح مقطع دایره‌ای استوانهٔ توخالی تا مبداء مختصات $b>a$ می‌باشد. اگر جریان I از استوانه عبور نماید، شدت میدان مغناطیسی را در داخل استوانه توخالی بدست آورید.

1) $H=\dfrac{I\,b}{\pi\left(R^2-a^2\right)}$

2) $H=\dfrac{I\,b}{2\pi\left(R^2-b^2\right)}$

3) $H=\dfrac{I\,b}{\pi\left(R^2-b^2\right)}$

4) $H=\dfrac{I\,b}{2\pi\left(R^2-a^2\right)}$

13- مطلوبست تعیین بردار پتانسیل مغناطیسی $|A|$ را در یک هادی استوانه‌ای به شعاع سطح مقطع a که جریان I را از خود عبور می‌دهد. فرض کنید $A\Big|_{r=a}=\circ$.

1) $\dfrac{I}{2\pi}\left(1-\dfrac{r^2}{a^2}\right)$

2) $\dfrac{I}{4\pi}\left(1-\dfrac{r}{a}\right)^2$

3) $\dfrac{I}{4\pi}\left(1-\dfrac{r^2}{a^2}\right)$

4) $\dfrac{I}{2\pi}\left(1-\dfrac{r}{a}\right)^2$

14- جریان ثابت $J_s\mathbf{a}_\varphi$ در سطح پوستهٔ کروی به شعاع a جاری است. شدت میدان مغناطیسی در مرکز کره را بدست آورید.

1) $\mathbf{H}=\dfrac{\pi J_s}{4}\mathbf{a}_\theta$

2) $\mathbf{H}=\dfrac{\pi J_s}{2}\mathbf{a}_\theta$

3) $\mathbf{H}=\dfrac{\pi J_s}{4}\mathbf{a}_z$

4) $\mathbf{H}=\dfrac{\pi J_s}{2}\mathbf{a}_z$

15- از پوستهٔ استوانه‌ای هادی کامل به شعاع سطح مقطع a و طول L، جریان سطحی $J_s \mathbf{a}_\varphi$ عبور می‌کند. محور استوانه در امتداد محور zها و به طور مشابه از $\frac{-L}{2}$ تا $\frac{L}{2}$ در جهت z قرار گرفته است. شدت میدان مغناطیسی را روی محور zها و در $z=\circ$ بدست آورید.

1) $H_z = \frac{J_s L}{2\sqrt{L^2+4a^2}}$

2) $H_z = \frac{J_s L}{\sqrt{4L^2+a^2}}$

3) $H_z = \frac{J_s L}{2\sqrt{4L^2+a^2}}$

4) $H_z = \frac{J_s L}{\sqrt{L^2+4a^2}}$

16- کابل هم‌محوری دارای صفحهٔ انتهایی اتصال کوتاه می‌باشد. طوری که می‌تواند در امتدادهای داخلی کابل حرکت نماید. شعاع هادی داخلی a و شعاع هادی خارجی b می‌باشد. ابتدای کابل در صفحهٔ $x=\circ$ و محور آن در امتداد محور xها قرار گرفته است. ضریب خودالقای متقابل را بر حسب تابعی از x بدست آورید.

1) $L = \frac{\mu_\circ x}{2\pi^2} Ln\left(\frac{b}{a}\right)$

2) $L = \frac{\mu_\circ x}{2\pi} Ln\left(\frac{b}{a}\right)$

3) $L = \frac{\mu_\circ x}{4\pi} Ln\left(\frac{b}{a}\right)$

4) $L = \frac{\mu_\circ x}{4\pi^2} Ln\left(\frac{b}{a}\right)$

16- کابل هم‌محوری به شعاع داخلی a و شعاع هادی خارجی b دارای مادهٔ عایقی با ضریب دی‌الکتریک نسبی $\varepsilon_r = e^{|x|}$ می‌باشد. محور کابل در امتداد محور x هاست. مطلوبست محاسبهٔ ظرفیت خازنی این کابل در واحد طول.

1) $\frac{4\pi^2 \varepsilon_\circ}{Ln\frac{b}{a}}$

2) $\frac{2\pi \varepsilon_\circ}{Ln\frac{b}{a}}$

3) $\frac{2\pi^2 \varepsilon_\circ}{Ln\frac{b}{a}}$

4) $\frac{4\pi \varepsilon_\circ}{Ln\frac{b}{a}}$

18- خطوط جریانی میدان الکتریکی E را در صفحهٔ $z=\circ$ بیابید.

$$\mathbf{E} = -e^x\left(\sin y\,\mathbf{a}_x + \cos y\,\mathbf{a}_y\right)$$

1) $\cos y = \exp\left(-(x+c)\right)$

2) $\cos y = \exp(x+c)$

3) $\sin y = \exp\left(-(x+c)\right)$

4) $\sin y = \exp(x+c)$

پاسخ سوالات کنکور کارشناسی ارشد آزاد سال 1390

1- دقیقاً تمرین (2-25) است. کافی است در رابطهٔ (2-56) به جای $\rho = -Q\Big/\frac{4}{3}\pi a^3$ را قرار دهید. در اینصورت گزینهٔ (1) صحیح خواهد بود.

2- مشابه مثال (2-19) است. کافی است از دیورژانس چگالی شار الکتریکی به چگالی حجمی بارها برسیم.

$$\rho = \nabla \,.\, \mathbf{D}\Big|_{\mathbf{D}=\varepsilon_\circ \mathbf{E}} = \ldots = \frac{\varepsilon_\circ}{R^2}\left(5R^4 + 4AR^3\right) = \varepsilon_\circ R\,(5R + 4A)$$

پس گزینهٔ (4) صحیح است.

3- ابتدا میدان را با استفاده از قانون گاوس محاسبه نموده و سپس پتانسیل را می‌یابیم.

$$\oiint_S \mathbf{E}\,.\,\mathbf{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_\circ}, Q = \int \rho_v\, dv = \int_\circ^\pi \int_\circ^{2\pi} \int_\circ^R \frac{\rho_\circ}{R} a R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 2\pi\, \rho_\circ\, a R^2$$

با توجه به رابطهٔ (2-44) داریم:

$$V = -\int_{1\circ}^R \mathbf{E}\,.\,\mathbf{d}l = -\int_{1\circ}^R \frac{2\pi\, \rho_\circ\, a R^2}{\varepsilon_\circ\, 4\pi R^2} dR = \frac{\rho_\circ\, a}{2\varepsilon_\circ}(1\circ - R)$$

پس گزینهٔ (1) صحیح خواهد بود.

4- کافی است از رابطهٔ (2-44) استفاده کرده و پتانسیل را محاسبه کنیم. طبق رابطهٔ (2-101)، $W = V q$ خواهد بود.

$$V_{BA} = -\int_A^B \mathbf{E}\,.\,\mathbf{d}l = -\int_A^B \left(y\,\mathbf{a}_x + x\,\mathbf{a}_y\right).\,\mathbf{d}l$$

مطابق توضیحات فصل اول، $\mathbf{d}l = dx\,\mathbf{a}_x + dy\,\mathbf{a}_y + dz\,\mathbf{a}_z$ خواهد بود.

پس:

$$V_{BA} = -\int_A^B \left(y\,\mathbf{a}_x + x\,\mathbf{a}_y\right).\left(dx\,\mathbf{a}_x + dy\,\mathbf{a}_y + dz\,\mathbf{a}_z\right) = \ldots. = -14$$

در نتیجه، گزینهٔ (2) صحیح است.

5- دقیقاً مثال (3-98) است. پس گزینهٔ (2) درست خواهد بود.

6- از رابطهٔ (2-82) استفاده می‌کنیم.

$$P = \int R\, dq = \int_\circ^{2\pi} \int_\circ^{\frac{\pi}{2}} \rho_S\, R^3 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 2\pi\, \rho_S\, R^3$$

پس گزینهٔ (3) صحیح خواهد بود.

7- با توجه به اینکه سوال دقیقاً مشخص نکرده که ظرفیت را قبل و یا بعد از قرار دادن عایق می‌خواهد و از طرفی با توجه به اینکه ظرفیت خازن در اثر قرار گیری عایق قطعاً تغییر خواهد کرد (که در صورت سوال به آن اشاره نشده) سوال غلط است.

8- بخش (3-5-4-4) کتاب به بررسی نتایج پاسخ این سوال پرداخت است. مطابق رابطهٔ (3-63) جواب گزینهٔ (4) خواهد بود.

9- سوال ساده‌ای است. کافی است $\sigma(z)$ را محاسبه نموده و سپس مشابه قسمت (3-4-5-3) کتاب عمل کنیم.

$$\sigma = a\,z + b\Big|_{\substack{z=\circ \to \sigma_1 \\ z=d \to \sigma_2}} \Rightarrow \sigma = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{d}\, z + \sigma_1$$

$$R = \int \frac{def(\ell)}{\sigma S} = \int_\circ^d \frac{dz}{\iint \sigma\, dx\, dy} = \int_\circ^d \frac{dz}{\iint \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{d}\, z + \sigma_1\right) dx\, dy} = \ldots = \frac{d}{S(\sigma_2 - \sigma_1)} Ln\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)$$

پس گزینهٔ (3) صحیح است.

10- برای حل سوال از رابطهٔ (2-119) استفاده کرده و نیرو را می‌یابیم. سپس اثر جابه‌جایی نیرو، و در نتیجه کار انجام شده، را محاسبه می‌کنیم.

$$\mathbf{F} = -\nabla(\mathbf{P}.\,\mathbf{E}) = -\nabla(PE\cos\theta) = \frac{1}{R} PE\sin\theta\, \mathbf{a}_\theta$$

و برای کار انجام شده داریم:

$$W = \int \mathbf{F}\,.\,\mathbf{d}l = \int_\circ^\theta \left(\frac{1}{R} PE\sin\theta\right) R\, d\theta = -PE(\cos\theta - 1)$$

پس گزینهٔ (1) صحیح است.

11- مثال فوق‌العاده ساده‌ای است. (به شکل‌های 3-1 و 3-2) نگاه کنید. نیرویی که بار و بار تصویر بر هم وارد می‌کنند عبارتست از:

$$E_\circ Q = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_\circ (2x)^2} \to x = \sqrt{\frac{Q}{16\pi\varepsilon_\circ E_\circ}}$$

بنابراین گزینهٔ (2) صحیح است.

12- دقیقاً مثال (4-13) است. کافی است چگالی جریان را محاسبه کرده و در پاسخ این مثال قرار دهیم.

$$I = \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{d}s = J\,\pi\left(r^2 - a^2\right)$$

پس:

$$H = \frac{I\,b}{2\pi\left(r^2 - a^2\right)}$$

در نتیجه گزینهٔ (4) صحیح خواهد بود.

13- مشابه مثال (4-23) عمل می‌کنیم:

$$\nabla^2 A_z = -\mu_\circ J_z \rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_z}{\partial r}\right) = -\mu_\circ$$

که نتیجه می‌دهد:

$$A_z = -\frac{\mu_\circ}{4} J_z r^2 + a\,Ln\,r + b$$

که با استفاده از شرایط مرزی بدست می‌آوریم:

$$A_z = -\frac{\mu_\circ}{4} J_z r^2 + \frac{\mu_\circ}{4} J_z a^2 \xrightarrow{I = J\pi a^2} \frac{\mu_\circ I}{4\pi}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$$

اگر $\mu_\circ$ را اغماض کنیم، گزینهٔ (3) صحیح خواهد بود.

14- مشابه مثال (4-5) عمل می‌کنیم.

1) ابتدا بردار $\mathbf{R}$ را می‌یابیم: $\mathbf{R} = -a\,\mathbf{a}_R$ ، $|\mathbf{R}| = a$

2) برای المان $I\,\mathbf{dl}$ داریم: $J\,\mathbf{d}s = J_s\,a^2 \sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,\mathbf{a}_\varphi$

3) جهت نهایی میدان: مشابه میدان حلقه در جهت مثبت محور zها خواهد بود.

4) حاصلضرب خارجی:

$$J\,\mathbf{d}s \times \mathbf{R} = J_s\,a^2 \sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,\mathbf{a}_\varphi \times \left(-a\,\mathbf{a}_R\right) = -J_s\,a^3 \sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,\mathbf{a}_\theta$$

5) حال بر طبق رابطهٔ (4-7) به محاسبهٔ انتگرال می‌پردازیم:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{J_s\,a^3 \sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,\mathbf{a}_\theta}{a^3} = \ldots = \frac{J_s}{4}\pi\,\mathbf{a}_z$$

بنابراین گزینهٔ (3) صحیح خواهد بود.

15- این مثال را با روش کنکوری‌ها حل می‌کنیم! میدان ناشی از یک استوانهٔ بی‌نهایت در محور داخلی برابر $H = nI$ است. منظور از nI چگالی جریان در سطح استوانه یعنی $J_s\,\mathbf{a}_\varphi$ است. (مثال 4-15 و 4-16) را ببینید. پس تا اینجا فهمیدیم که :

$$H = J_s$$

برای اینکه استوانهٔ محدود ذکر شده در سوال، بی‌نهایت شود باید $L \to \infty$ با قرار دادن در گزینه‌ها باید رابطهٔ $H = J_s$ حاصل شود. این اتفاق فقط در گزینهٔ (4) رخ می‌دهد!

16- دقیقاً بخش از مثال (4-53) است. جواب مطابق رابطهٔ (4-73) گزینهٔ (2) خواهد بود.

17- دقیقاً مشابه مثال (2-81) است. بنا بر رابطهٔ (2-94)، پاسخ صحیح گزینهٔ (2) خواهد بود.

18- از رابطهٔ (2-124) استفاده می‌کنیم:

$$\frac{E_x}{dx} = \frac{E_y}{dy} \rightarrow \frac{-e^x \sin y}{dx} = \frac{-e^x \cos y}{dy} \Rightarrow Ln \cos y = -x + c \rightarrow e^{-x+c} = \cos y$$

بنابراین، گزینهٔ (1) صحیح است.

منابع

[1] چنگ، دیوید. ک، مترجمان: دکتر پرویز جبه‌دار مارالانی، دکتر محمد قوامی، الکترومغناطیس میدان و موج، انتشارات دانشگاه تهران.

[2] پوپویچ، برانکود، مترجمان: دکتر محمود محمد طاهری، مهندس محمدرضا پورفراهانی، مبانی الکترومغناطیس مهندسی، انتشارات دانشگاه تهران.

[3] صفایی، احمد، مبانی الکترومغناطیس، انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان.

[4] عریضی، همایون، حل المسائل الکترومغناطیس، انتشارات دانشگاه علم و صنعت.

[5] هیت، مترجمان: القابی و باغداساریان، الکترومغناطیس مهندسی.

[6] دیانی، محمود، رهیافت حل مسئله در الکترومغناطیس، انتشارات نص.

[7] جبه‌دار، پرویز و دیگران، مجموعه سوالات کنکور کارشناسی ارشد و حل آنها، انتشارات دانشگاه تهران

[8] بیم‌بهارا، مترجمان: دکتر حمید لسانی و دکتر مسعود سلطانی- ماشین‌های الکتریکی تئوری، عملکرد و کاربردها، انتشارات قائم.

[9] فیتز جرالد، مترجم: محمود دیانی، ماشین‌های الکتریکی، انتشارات نص.

[10] سن، مترجم: دکتر مهرداد عابدی، ماشین‌های الکتریکی تحلیل، بهره‌برداری، کنترل، انتشارات کارآفرینان بصیر.

[11] سلطانی، مسعود، رله و حفاظت سیستم‌ها، انتشارات دانشگاه تهران.

[12] محسنی، حسین، مبانی مهندسی فشارقوی الکتریکی، انتشارات دانشگاه تهران.

[13] Rothwell. E ,Cloud. M, *Electromagnetics*, CRS press, 1995.

[14] Edminister. J, *Schaum's outlines of theory and problems of electromagnetics*, MacGraw-Hil publishing, 2002.

[15] Carter. R, *Electromagnetism for Electronic Engineers*, Ventus publishing, 2005.

[16] Sadiku. M, *Elements of Electromagnetics*, Wilfrid Laurier university press, 2003.

[17] Lonngren. K, *Fundamentals of Electromagnetics with Matlab*, SciTeach publishing, 2006.

[18] Bansal. R, *Handbook of Engineering Electromagnetics*, Mrcel Dekler publishing, 2008.

[19] Milford, *Foundations of Electromagnetic Theory*, Addison-wesley publishing, 1999.

[20] Lim-Yung-Kuo, *Problems and Solutions on Electromagnetism*, Word Scientific publishing, 2009.

[21] Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, John Wily & Sons publishing, 2002.

[22] Crowley. R, *Fundamentals of Applied Electrostatics*, John Wily & Sons publishing, 2001.

[23] Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics 9th*, John Wily & Sons publishing, 2003.

[24] جزوات اساتید منتخب دانشگاه‌ها.

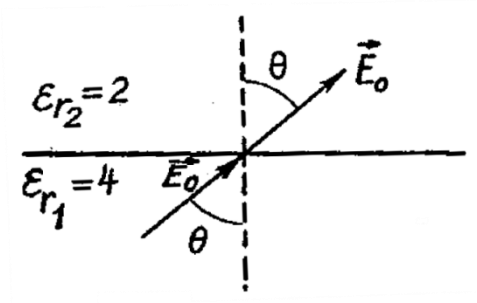
[25] مجموعه سوالات کنکور کارشناسی ارشد سراسری و آزاد.

پاسخ سئوالات بخش الکترومغناطیس کنکور کارشناسی ارشد سال‌های ۱۳۸۷ تا ۱۳۹۲

سوالات آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل – سال ۱۳۸۷

الکترومغناطیس

۷۶- مطلوبست محاسبه بار سطحی آزاد روی مرز بین دو محیط در شکل زیر:



۱) $-2\varepsilon_0 |\vec{E}_0| \cos\theta$

۲) $-2\varepsilon_0 |\vec{E}_0| \sin\theta$

۳) $+2\varepsilon_0 |\vec{E}_0| \cos\theta$

۴) $+2\varepsilon_0 |\vec{E}_0| \sin\theta$

۷۷- یک کره رسانا به مرکز مبداء مختصات با شعاع R به پتانسیل V_0 وصل شده است و با سرعت زاویه‌ای ω حول محور z دوران می‌کند. اندازه چگالی جریان سطحی الکترونیکی روی سطح کره کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\varepsilon_0 w V_0 \cos\theta$

۲) $\varepsilon_0 w V_0$

۳) $\varepsilon_0 w V_0 \cos\theta$

۴) $\varepsilon_0 w V_0 \sin\theta$

۷۸- کره‌ای به شعاع a از جنس رسانا با پتانسیل V_0 در فضای آزاد مفروض است. این کره ایزوله است. حال بار مثبت $+q_1$ را به فاصله $3a$ از مرکز این کره قرار می‌دهیم به طوری که کل نیروی اعمالی بر آن صفر شود. مقدار پتانسیل V_0 چقدر بوده است؟ ($\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}\times 10^{-9}\ \frac{f}{m}$)

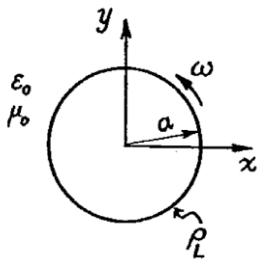
۱) $\frac{64\times 10^9}{51a} q_1$

۲) $\frac{51\times 10^9}{64a} q_1$

۳) $\frac{q_1 + \frac{1}{3}q_1}{4\pi\varepsilon_0 a}$

۴) $\frac{q_1 - \frac{1}{3}q_1}{4\pi\varepsilon_0 a}$

۷۹- بار الکتریکی خطی یکنواخت $p_L(\frac{C}{m})$ روی محیط دایره‌ای به شعاع a واقع در صفحه‌ی xoy هم مرکز با مبداء مختصات مفروض است. این بار خطی با سرعت زاویه‌ای یکنواخت $w(\frac{rad}{s})$ حول مبداء مختصات می‌چرخد. بار نقطه‌ای q در لحظه‌ی $t=\circ$ با سرعت $\vec{V}=v_\circ\,\mathbf{a}_z(\frac{m}{s})$ در مبداء مختصات قرار دارد. نیروی اعمالی بر این بار در $t=\circ$ چقدر است؟



۱) صفر

۲) $q\,\frac{p_L\,۲\pi a}{۴\pi\varepsilon_\circ a^۲}\mathbf{a}_z$

۳) $q(v_\circ\,\mathbf{a}_z\times\frac{\mu_\circ p_L a w}{۴\pi a^۲}\mathbf{a}_\theta)$

۴) $q\left[\frac{p_L}{۲\varepsilon_\circ a}+v_\circ\,\frac{\mu_\circ p_L w}{۴\pi a}\right]\mathbf{a}_z$

۸۰- هم‌مرکز با یک کره‌ی رسانا با بار اولیه صفر به شعاع $۱m$ یک حفره‌ی مکعبی شکل به ضلع $۸۰cm$ ایجاد می‌گردد. یک لایه عایقی یکنواخت به ضخامت $۲۰cm$ و قابلیت گذردهی نسبی $\varepsilon_\circ=۲$ نیز روی سطح خارجی کره هادی را پوشانده است. یک حلقه‌ی بار به شعاع $۲۵cm$ و با چگالی خطی غیریکنواخت $p_L=۴\varepsilon_\circ\sin^۲\rho(\frac{c}{m})$ مرکز حفره‌ی مکعبی قرار داده می‌شود. (ρ متغیر زاویه در دستگاه استوانه‌ای است.) مقدار انرژی الکتریکی ذخیره شده در فضای بیرون از کره‌ی هادی کدام است؟

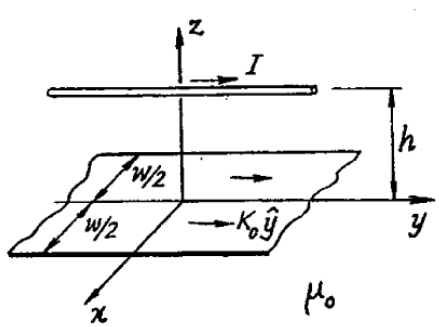
۱) $\frac{\pi\,\varepsilon_\circ}{۸}$

۲) $\frac{۱۱\pi\,\varepsilon_\circ}{۹۶}$

۳) $\frac{۱۱\pi\,\varepsilon_\circ}{۶}$

۴) $\frac{۱۱\varepsilon_\circ}{۳۸۴}$

۸۱- سیمی حامل جریان I، به موازات یک نوار جریان با چگالی جریان سطحی $K_\circ\,\mathbf{a}_y$ و عرض w مطابق شکل مفروض است. نیروی وارد بر واحد طول سیم کدام است؟



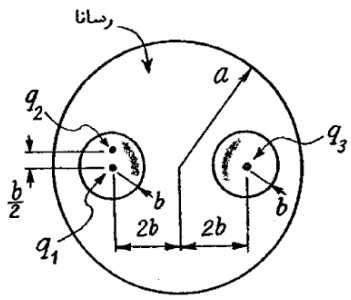
۱) $-\mathbf{a}_z\,\frac{\mu_\circ\,I\,K_\circ}{۴}$

۲) $-\mathbf{a}_z\,\frac{\mu_\circ\,I\,K_\circ}{۲}\tan^{-۱}(\frac{w}{h})$

۳) $-\mathbf{a}_z\,\frac{\mu_\circ\,I\,K_\circ}{\pi}\tan^{-۱}(\frac{w}{۲h})$

۴) $-\mathbf{a}_z\,\frac{\mu_\circ\,I\,K_\circ}{۲\pi}\tan^{-۱}(\frac{w}{۲h})$

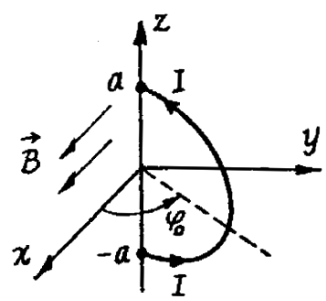
۸۲- داخل کره‌ای به شعاع a از جنس رسانا دو حفره به شعاع‌های یکسان b $(a > ۲b)$ مطابق شکل مفروض است. بارهای $q_۱$ و $q_۲$ را داخل حفره‌ی اول و بار $q_۳$ را در مرکز حفره‌ی دوم قرار می‌دهیم. الف) اندازه نیروی اعمالی $q_۳$ بر $q_۱$ و ب) اندازه نیروی اعمالی از $q_۲$ بر $q_۱$ چقدراست؟



۱) الف) $\frac{q_۱ q_۳}{۴\pi\varepsilon_\circ (۴b^۲)}$ ب) $\frac{q_۱ q_۳}{۴\pi\varepsilon_\circ b^۲}$ ۳) الف) صفر ب) $\frac{q_۱ q_۲}{۴\pi\varepsilon_\circ b^۲}$

۲) الف) $\frac{q_۱ q_۳}{۴\pi\varepsilon_\circ (۴b^۲)}$ ب) $\frac{q_۱ q_۳}{\pi\varepsilon_\circ b^۲}$ ۴) الف) صفر ب) $\frac{q_۱ q_۲}{\pi\varepsilon_\circ b^۲}$

۸۳- در میدان مغناطیسی ثابت $\vec{B} = B_\circ \mathbf{a}_x$ مطابق شکل به نیم‌حلقه دایروی به شعاع a در صفحه $\rho = \rho_\circ$ با جریان ثابت I چه نیرو و گشتاوری وارد می‌شود؟



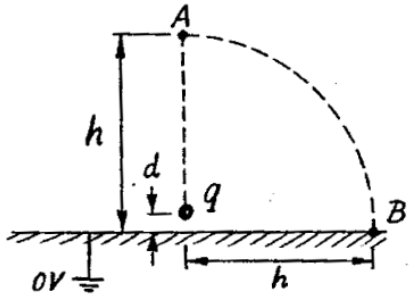
۱) $\vec{f} = \pi a I B_\circ \hat{y},\ \vec{T} = \pi a^۲ I B_\circ \sin\rho_\circ \hat{z}$

۲) $\vec{f} = ۲a I B_\circ \hat{y},\ \vec{T} = \frac{۱}{۲}\pi a^۲ I B_\circ \cos\rho_\circ \hat{z}$

۳) $\vec{f} = \pi a I B_\circ \cos\rho_\circ \hat{y},\ \vec{T} = \pi a^۲ I B_\circ \sin\rho_\circ \hat{z}$

۴) $\vec{f} = ۲a I B_\circ \hat{y},\ \vec{T} = \pi a^۲ I B_\circ \cos\rho_\circ \hat{z}$

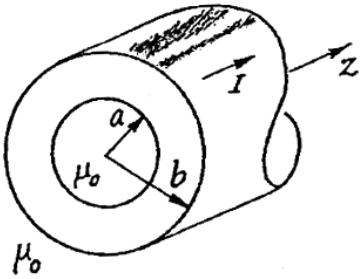
۸۴- بار نقطه‌ای q به فاصله‌ی بسیار کوچک d از یک صفحه رسانای نامحدود با پتانسیل صفر قرار گرفته است. اندازه‌ی میدان الکتریکی در نقطه‌ی A به فاصله‌ی h بالای صفحه در مقایسه با میدان نقطه‌ی B در فاصله‌ی h از پای عمود در صفحه‌ی افقی برابر است با:



۱) $E_B = E_A$ ۳) $E_A = ۲E_B$

۲) $E_A = \sqrt{۲}E_B$ ۴) $E_B = ۲E_A$

۸۵- فضای $a < r < b$ با رسانای غیرمغناطیسی پر شده است. مطابق شکل جریان I در امتداد محور z با توزیع یکنواخت در این رسانا جاری است. اندوکتانس داخلی واحد طول چقدر است؟



۱) $\frac{\mu_\circ}{۸\pi a^۲}\left[b^۲ - a^۲\right]$

۲) $\frac{\mu_\circ \pi}{۸b^۲}\ b^۲ - a^۲$

۳) $\frac{\mu_\circ}{۴\pi\ b^۲ - a^۲}\left[\frac{۳}{۴}a^۲ + a^۲\ln(\frac{b}{a}) + \frac{۱}{۴}b^۲ - ab\right]$

۴) $\frac{\mu_\circ}{۲\pi\ b^۲ - a^۲}^{۲}\left[\frac{۳}{۴}a^۴ + a^۴\ln(\frac{b}{a}) + \frac{۱}{۴}b^۴ - a^۲b^۲\right]$

۸۶- یک کره فلزی به شعاع a را در یک فضای بی‌نهایت که از عایقی با ضریب دی الکتریک نسبی $\varepsilon_r = ۱ + \frac{a}{r}$ پر شده قرار می‌دهیم. ظرفیت کره فلزی نسبت به حالتی که این کره در فضای خالی $\varepsilon_\circ$ قرار بگیرد، تقریبا چند برابر می‌شود؟ ($ln۲ \approx ۰/۶۹$)

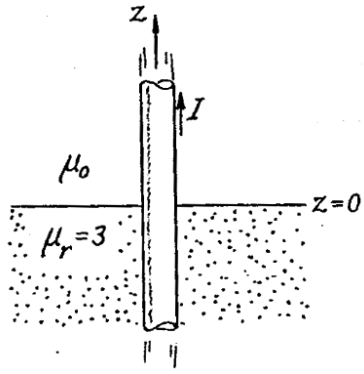
۱) ۱/۴

۲) ۱/۶

۳) ۱/۸

۴) ۲

۸۷- یک سیم از ماده‌ای غیرمغناطیسی با سطح مقطع دایروی به شعاع a در داخل یک نیم‌فضای پر شده از ماده‌ای مغناطیسی با $\mu_r = ۳$ قرار دارد. با فرض آنکه طول سیم بی‌نهایت بوده و جریان عبوری از آن $I = ۲A$ باشد، جریان مقید سطحی در فاصله‌ی $۲a$ از محور سیم روی فصل مشترک $z = \circ$ چند آمپر است؟



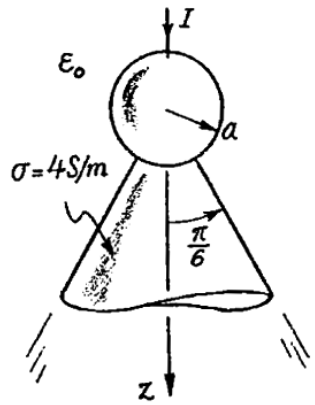
۱) $-\frac{۲}{\pi a}\mathbf{a}_r$

۲) $-\frac{۱}{\pi a}\mathbf{a}_r$

۳) $\frac{۱}{\pi a}\mathbf{a}_r$

۴) $\frac{۲}{\pi a}\mathbf{a}_r$

۸۸- ناحیه‌ی $0 \le \theta \le \frac{\pi}{6}$ و $r \ge a$ از دستگاه مختصات کروی با ماده‌ای به رسانایی $\sigma = 4\frac{S}{m}$ به طور همگن پرشده است. یک کره رسانای کامل به شعاع a همانند شکل در تماس با ناحیه مزبور است. اگر جریان $I = 1A$ به این کره رسانای کامل وارد شود، کدام گزینه ولتاژ این کره را نشان می‌دهد؟



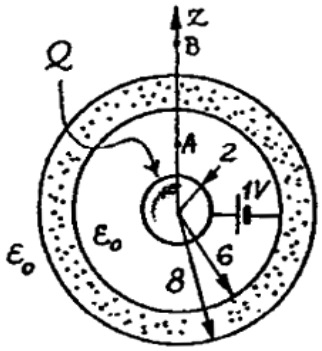
۱) $\frac{1}{16\pi a}$

۲) $\frac{6}{4\pi a}$

۳) $\frac{9}{\pi^2 a}$

۴) $\frac{1}{4\pi(2-\sqrt{3})a}$

۸۹- شکل زیر یک خازن کروی را نشان می‌دهد. ابعاد این خازن بر حسب متر در شکل ملاحظه می‌شوند. این خازن توسط یک منبع ولتاژ ایده‌آل یک ولت شارژ می‌شود. علاوه بر این، از طریق تماس، بار الکتریکی $Q = \frac{1}{9}\times 10^{-9}\ C$ را به رسانای کروی مرکزی می‌دهیم. پس از برقراری تعادل الکترواستاتیک، اندازه‌ی میدان الکتریکی در نقطه‌ی A واقع بر $r = 4$ و در نقطه‌ی B واقع بر $r = 10$ به ترتیب برابر کدام است؟ ($\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}\times 10^{-9}$)



۱) $E_A = \frac{1}{16},\ E_B = 0$

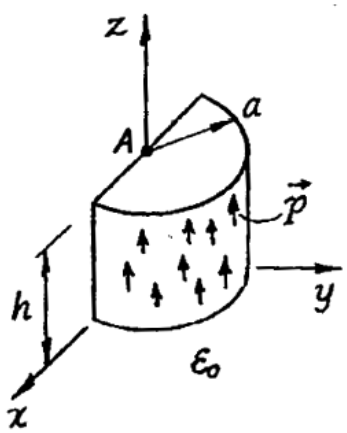
۲) $E_A = \frac{3}{16},\ E_B = \frac{1}{100}$

۳) $E_A = \frac{1}{4},\ E_B = \frac{1}{100}$

۴) $E_A = \frac{3}{4},\ E_B = 0$

POWEREN.IR

۹۰- در فضای خالی دوقطبی‌های الکتریکی میکروسکوپی هر یک با گشتاور $\vec{p} = p_\circ \mathbf{a}_z$، که تعداد آن‌ها در واحد حجم n عدد است، ناحیه‌ی نیم‌استوانه‌ای شکل زیر را اشغال کرده‌اند. پتانسیل الکتریکی ناشی از این دوقطبی‌ها در نقطه‌ی A برابر کدام است؟



۱) $\frac{np_\circ}{۲\varepsilon_\circ}\ a - h + \sqrt{a^۲ + h^۲}$

۲) $\frac{np_\circ}{۲\varepsilon_\circ}\ a + h - \sqrt{a^۲ + h^۲}$

۳) $\frac{np_\circ}{۴\varepsilon_\circ}\ a + h - \sqrt{a^۲ + h^۲}$

۴) $\frac{np_\circ}{۴\varepsilon_\circ}\ a - h + \sqrt{a^۲ + h^۲}$

POWEREN.IR

پاسخ سوالات آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل – سال ۱۳۸۷

الکترومغناطیس

(سید مهدی مظهری؛ آزمایشگاه آنالیز سیستم‌های قدرت، دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

۷۶- سوال بسیار ساده‌ای است؛ چگالی بار سطحی آزاد در مرز مشترک میان دو محیط مطابق رابطهٔ $D_{2n} - D_{1n} = \rho_{sf}$ محاسبه می‌شود. با توجه به اینکه $\left|D\right| = \varepsilon_0 \, \varepsilon_r \left|E\right|$ لذا:

$$(2-4)\times \varepsilon_0 \left|\vec{E}_0\right| \cos\theta = \rho_{sf}$$

پس:

$$\rho_{sf} = -2\varepsilon_0 \left|\vec{E}_0\right| \cos\theta$$

همانطور که مشاهده می‌شود، گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۷۷- دوران یک توزیع بار با سرعت ثابت چگالی جریان ایجاد می‌کند. ابتدا با استفاده از پتانسیل داده‌شده، بار را یافت نموده و از دوران چگالی بار، چگالی جریان را پیدا می‌کنیم:

$$q = 4\pi\varepsilon_0 R V_0 \;\rightarrow \rho_s = \frac{q}{4\pi R^2} = \frac{\varepsilon_0 V_0}{R}$$

پس:

$$\left|\vec{J}_s\right| = \left|\rho_s \vec{V}\right| = \rho_s \, R\,\omega \sin\theta = \varepsilon_0 \, V_0 \, \omega \sin\theta$$

بر این اساس، گزینهٔ ۴ صحیح می‌باشد.

۷۸- با محاسبهٔ مقدار بار بر حسب پتانسیل، نیرو را بدست آورده و از مساوی صفر قرار دادن آن، پتانسیل اولیه را می‌یابیم!.

$$\vec{F}_1 = q_1\vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q+\frac{q_1}{3}}{9a^2}+\frac{-\frac{q_1}{3}}{\left(3a-\frac{a}{3}\right)^2}\right]=0 \Rightarrow q=\frac{17}{3\times 64}q_1$$

$$\begin{cases} q = 4\pi\varepsilon_0 a V_0 \\ q = \frac{17}{3\times 64}q_1 \end{cases} \Rightarrow V_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{(17q_1)/(3\times 64)}{4\pi(10^{-9}/36\pi)a} = \frac{51\times 10^9}{64a}q_1$$

بر این اساس، گزینه ۲ صحیح است.

۷۹- این سوال احتیاجی به حل ندارد! جهت میدان مغناطیسی و جهت حرکت بار نقطه‌ای یکسان است؛ از قانون دست راست می‌توان دید که نیرو نداریم! ضمن تشکر از سوال سادهٔ طراح محترم، گزینه ۱ صحیح است.

۸۰- ابتدا بار ذخیره‌شده در حلقه را محاسبه نموده و پتانیل سطح کره هادی را با توجه به آن می‌یابیم:

$$Q_f = \int \rho_l dl = \int_0^{2\pi} 4\varepsilon_0 \sin^2\varphi \; 0/25\, d\varphi = \varepsilon_0\pi \;\rightarrow\; V\Big|_{R=1/2m} = \frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0 1/2}\Big|_{Q_f=\varepsilon_0\pi} = \frac{1}{4/8}$$

حال مقدار پتانسیل را در سطح کره رسانا پیدا می‌کنیم:

$$V\Big|_{R=1m} = \frac{1}{4/8} - \int_{1/2}^{1}\frac{\varepsilon_0\pi}{4\pi 2\varepsilon_0 R^2}dR = \frac{1}{4/8}+\frac{1}{8}\left[1-\frac{1}{1/2}\right] = \frac{2/2}{9/6}$$

مقدار انرژی ذخیره‌شده به صورت زیر خواهد بود:

$$W_e = \frac{1}{2}\int \rho_s V ds = \frac{V}{2}\int \rho_s ds = \frac{1}{2}V\Big|_{R=1m} Q_f = \frac{1}{2}\times\frac{2/2}{9/6}\varepsilon_0\pi = \frac{11\pi\varepsilon_0}{96}$$

بنابراین، گزینه ۲ صحیح است.

۸۱- ابتدا شدت میدان مغناطیسی را در سطح موردنظر محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{H}\Big|_{z=h} = ۲\int_{\circ}^{\frac{W}{۲}} \frac{k_{\circ}\, dx}{۲\pi\sqrt{x^{۲}+h^{۲}}}\cos\alpha\,\hat{a}_x = \frac{k_{\circ}}{\pi}\int_{\circ}^{\frac{W}{۲}} \frac{h\, dx}{(x^{۲}+h^{۲})}\hat{a}_x = \frac{k_{\circ}}{\pi}\tan^{-۱}\frac{W}{۲h}\,\hat{a}_x$$

برای نیروی مغناطیسی نیز خواهیم داشت:

$$\vec{F}_m = \int_{\circ}^{۱} I\, dy\,\hat{a}_y \times \mu_{\circ}\vec{H} = \frac{\mu_{\circ}\, k_{\circ}\, I}{\pi}\tan^{-۱}\frac{W}{۲h}(-\hat{a}_z)$$

بنابراین، گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۸۲- با توجه به اینکه حفره‌ها توسط هادی میان آن‌ها ایزوله شده‌اند، نیروی اعمالی $q_۳$ بر $q_۱$ صفر می‌باشد؛ اندازه نیروی اعمالی از $q_۲$ بر $q_۱$ نیز برابر $q_۱\dfrac{q_۲}{۴\pi\varepsilon_{\circ}\left(\dfrac{b}{۲}\right)^{۲}}$ می‌باشد؛ لذا گزینه ۴ صحیح خواهد بود.

۸۳- چنانچه نیم‌حلقه را از روی محور zها بسته فرض کنیم گشتاور حاصله تفاوتی نمی‌کند (چرا!؟) پس:

$$\vec{T} = \vec{m}\times\vec{B} = \frac{۱}{۲}\pi a^{۲}(-\hat{a}_{\varphi})\times B_{\circ}\,\hat{a}_z = \frac{۱}{۲}\pi\, a^{۲} I\Big[- -\sin\varphi\,\hat{a}_z + \cos\varphi\,\hat{a}_y\Big]\times B\,\hat{a}_z = \frac{۱}{۲}\pi a^{۲} IB\cos\varphi\,\hat{a}_z$$

بر این اساس، گزینهٔ ۲ صحیح می‌باشد.

۸۴- مسأله به سادگی و با استفاده از روش تصاویر حل می‌شود:

$$\vec{E} = \frac{|p|}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R^{۳}}\Big[۲\cos\theta\,\hat{a}_R + \sin\theta\,\hat{a}_{\theta}\Big] \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_{A|_{\theta=\circ}} = \dfrac{|p|}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R^{۳}}\Big[۲\,\hat{a}_R\Big] \\ \vec{E}_{B\Big|_{\theta=\frac{\pi}{۲}}} = \dfrac{|p|}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R^{۳}}\Big[\hat{a}_R\Big] \end{cases} \Rightarrow |E_A| = ۲|E_B|$$

همانطور که مشاهده می‌شود، گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۸۵- از اصل موضوع مغناطیس ساکن شدت میدان مغناطیسی را محاسبه می‌کنیم:

$$a<r<b,\ \oint \vec{H}.d\vec{l}=I_m \ \rightarrow\ H2\pi r=\frac{I}{\pi(b^2-a^2)}\pi(r^2-a^2)\Rightarrow \vec{H}=\frac{I}{2\pi(b^2-a^2)}\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\hat{a}_\varphi$$

انرژی ذخیره‌شده در فضا از طریق رابطهٔ $W_m=\frac{1}{2}\int \mu_0\left|\vec{H}\right|^2 dv$ بدست می‌آید:

$$W_m=\frac{\mu_0}{2}\int_0^4\int_a^b\int_0^{2\pi} I^2\left(\frac{(r-\frac{a^2}{r})^2}{4\pi^2(b^2-a^2)^2}\right)r\,d\varphi\,dr\,dz=\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2(b^2-a^2)^2}\left[\frac{3}{4}a^4+a^4\ln\frac{b}{a}+\frac{1}{4}b^4-a^2b^2\right]$$

مطابق رابطهٔ $W_m=\frac{1}{2}LI^2$، گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۸۶- فرض می‌کنیم که یک خازن از بی‌نهایت بخش سری با هم تشکیل شده در این صورت اگر به هر کدام از این بخش‌ها بـه صـورت میکروسکوپی نگاه کنیم، عملا یک خازن تخت خواهیم داشت، پس می‌توان نوشت:

- ظرفیت هر کدام از جزءهای سری:

$$def(C)=\frac{\varepsilon S}{def(d)}$$

- ظرفیت کل سیستم:

$$\frac{1}{C}=\int\frac{1}{def(c)}=\int\frac{def(d)}{\varepsilon S}$$

برای محاسبهٔ ظرفیت خازن با این روش، کافیست بتوانید جزء دیفرانسیلی C را مدل کنید برای اینکار لازم است:

- ✓ بجای ε گذردهی سیستم (از هر نوعی (ثابت یا متغیر)) را قرار دهید؛
- ✓ بجای S مساحت خارجی سطح هادی فرض را قرار دهید؛
- ✓ ببینید خازنهای جزیی فرضی شما در چه جهتی با هم سری می‌شوند، آنگاه دیفرانسیل آن مولفه را به جای $def(d)$ قرار دهید. (مثلا برای خازن تخت dz و برای خازن استوانه‌ای dr و...).

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{1}{C_2}=\displaystyle\int_a^{\infty}\dfrac{dR}{4\pi\varepsilon_0(R^2+aR)}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{R}{R+a}\Big]_a^{\infty}\ \Rightarrow C_2=\dfrac{4\pi\varepsilon_0 a}{\ln 2}\\ C_1=\dfrac{4\pi\varepsilon_0 a}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{\infty}}=4\pi\varepsilon_0 a\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{C_2}{C_1}=\frac{1}{Ln2}\cong 1/4$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

۸۷- با توجه به اصل موضوع مغناطیس ساکن در $r>a$:

$$\oint\vec{H}.\overrightarrow{dl}=I_{in}\Rightarrow H2\pi r=I\Rightarrow\overrightarrow{H}=\frac{I}{2\pi r}\mathbf{a}_{\varphi}$$

پس:

$$\overrightarrow{B}=3\mu_0\overrightarrow{H}=\frac{3\mu_0}{\pi r}\mathbf{a}_{\varphi}\Rightarrow\overrightarrow{M}=\frac{B}{\mu_0}-\overrightarrow{H}=\frac{2}{\pi r}\mathbf{a}_{\varphi}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\vec{J}_{sm}=\vec{M}\times\vec{n}_s=\frac{2}{\pi(2a)}\vec{a}_{\varphi}\times\vec{a}_z=\frac{1}{\pi a}\vec{a}_r$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۸۸- ولتاژ سیستم از افت‌ولتاژ بر روی مقاومت ظاهری آن بدست می‌آید؛ لذا:

$$\begin{cases}R=\displaystyle\int_a^{\infty}\dfrac{dR}{\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}=\ldots=\dfrac{1}{4\pi a(2-\sqrt{3})}\\ V=RI\end{cases}\xrightarrow{I=1}V=\frac{1}{4\pi a(2-\sqrt{3})}$$

بنابراین، گزینهٔ ۳ صحیح به نظر می‌رسد.

۸۹- یک توزیع بار ثابت بر روی کره پتانسیل یک ولت را ایجاد کرده است؛ پس از میدان این بار شبه‌نقطه‌ای به پاسخ می‌رسیم:

$$۱=\int_{۲}^{۶}\frac{q_{۱}}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R^{۲}}\mathbf{a}_{R}.\ dR\,\mathbf{a}_{R}\quad\Rightarrow\quad ۱=\frac{q_{۱}}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\left[\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۶}\right]\rightarrow\begin{cases}q_{۱}=۱۲\pi\varepsilon_{\circ}\\E_{A}=\dfrac{۳}{۶}\end{cases}$$

بر این اساس، گزینهٔ ۲ پاسخ صحیح خواهد بود.

۹۰- ابتدا چگالی بارهای مقید در سطوح جانبی را محاسبه می‌کنیم:

$$\rho_{sb}\Big|_{z=h}=np_{\circ}\,\vec{a}_{z}.\vec{a}_{z}=np$$

$$\rho_{sb}\Big|_{z=h}=np_{\circ}\,\vec{a}_{z}.(-\vec{a}_{z})=-np$$

با استفاده از پتانسیل استوانهٔ باردار و اصل جمع آثار:

$$V_{A}=\frac{n\,p_{\circ}\,a}{۴\,\varepsilon_{\circ}}-\frac{n\,p_{\circ}}{۴\,\varepsilon_{\circ}}\ \sqrt{a^{۲}+h^{۲}}-h\ =\frac{n\,p_{\circ}}{۴\,\varepsilon_{\circ}}\ a+h-\sqrt{a^{۲}+h^{۲}}$$

بنابراین، گزینهٔ ۳ پاسخ صحیح می‌باشد.

سوالات آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل – سال ۱۳۸۸

الکترومغناطیس

۷۶- در میدان الکتریکی تولید شده توسط یک بار خطی بی‌نهایت طویل واقع بر محور z با چگالی خطی $۲\pi\varepsilon_{\circ}(\frac{C}{m})$، از سطحی با مشخصات $r=۱$ و $\frac{\pi}{۶}\leq\theta\leq\frac{\pi}{۴}$ و $\circ\leq\varphi\leq ۲\pi$ چه مقدار شار الکتریکی عبور می‌کند؟

۱) $\pi(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$

۲) $۲\pi(\sqrt{۲}-۱)$

۳) $\pi(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})$

۴) $\pi(\sqrt{۳}-۱)$

۷۷- روی یک صفحه (دیسک) دایره شکل به شعاع a چگالی جریان سطحی گردشی $\mathbf{K}=۲r\,\mathbf{a}_{\varphi}(A/m)$ برقرار است که در آن r فاصله از مرکز دایره می‌باشد. اندازهٔ گشتاور دوقطبی مغناطیسی این دیسک برابر است با:

۱) $\pi a^{۴}$

۲) $\frac{\pi a^{۴}}{۲}$

۳) $۲\pi^{۴}$

۴) $\frac{\pi a^{۴}}{۴}$

۷۸- بار الکتریکی Q در بالای صفحهٔ هادی بی‌نهایت به فاصلهٔ d از آن قرار گرفته است. فرض کنید نقطهٔ O در صفحهٔ هادی در محل کوتاهترین فاصله نسبت به بار باشد. به مرکز O دایره‌ای در صفحهٔ هادی ترسیم می‌کنیم. اگر شعاع دایره a باشد، مطلوبست محاسبهٔ a به قسمی که داخل این دایره یک چهارم کل بار القائی صفحهٔ هادی بی‌نهایت وجود داشته باشد.

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}d$

۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}d$

۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}d$

۴) $\frac{\sqrt{۷}}{۳}d$

۷۹- در فضای خالی در ناحیهٔ کروی $r \le a$ مغناطیس‌شدگی با چگالی یکنواخت $\mathbf{M} = M_\circ \mathbf{a}_z$ موجود است. مقدار تابع پتانسیل مغناطیس اسکالر V_m ناشی از این مغناطیس‌شدگی در نقطهٔ ($r = ۲a, \theta = \frac{\pi}{۴}, \varphi = \circ$) چقدر است؟ (فرض کنید مرجع پتانسیل در بی‌نهایت است)

۱) $\frac{M_\circ a}{۳}$

۲) $\frac{۲M_\circ a\sqrt{۲}}{۳}$

۳) $\frac{M_\circ a\sqrt{۲}}{۶}$

۴) $\frac{M_\circ a\sqrt{۲}}{۲۴}$

۸۰- بین صفحات مسطح خازنی که در $z = \circ$ و $z = d$ قرار دارند، مادهٔ عایقی با $\varepsilon = \varepsilon_\circ\left(۱ + \frac{z^۲}{d^۲}\right)$ قرار دارد. اگر چگالی بار سطحی روی صفحات این خازن $\pm\rho_s(\frac{C}{m^۲})$ باشد، اختلاف ولتاژ بین صفحات خازن چقدر است؟

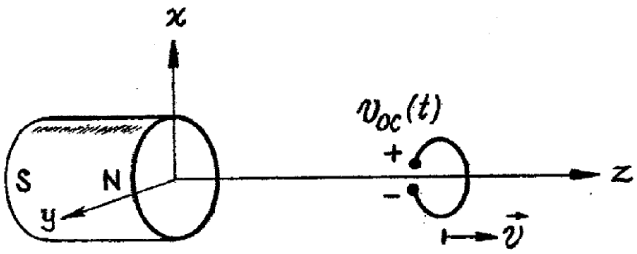
۱) $\frac{\rho_s d}{۲\varepsilon_\circ}$

۲) $\frac{\rho_s}{۲\pi\varepsilon_\circ}$

۳) $\frac{۲\pi\rho_s d}{\varepsilon_\circ}$

۴) $\frac{\pi\rho_s d}{۴\varepsilon_\circ}$

۸۱- محور یک آهنربای دائمی میله‌ای همانند شکل بر محور z منطبق است. یک حلقه سیم نازک از جنس مادهٔ غیرمغناطیسی که به صورت مدار باز است از $z = \circ$ با سرعت ثابت v در راستای z های مثبت به آرامی به حرکت در می‌آید. ولتاژ مدارباز دو سر حلقه سیم $v_{oc}(t)$ در زمان‌های بزرگ چه رابطه‌ای با زمان t خواهد داشت؟



۱) $\frac{۱}{t^۴}$

۲) e^{-t}

۳) $\frac{۱}{t^۳}$

۴) e^{-vt}

۸۲- پوستهٔ کروی توخالی از ماده‌ای رسانا بدون بار اولیه به شعاع a هم‌مرکز با مبدأ مختصات که زمین نشده است، مفروض است. بار مثبت q_1 خارج کره در فاصلهٔ R_1 از مرکز کره روی محور x ها قرار دارد. بار منفی q_2 داخل کره با قدرمطلق $q_1 \frac{a}{R_1}$ در فاصلهٔ $R_2 = \frac{a^2}{R_1}$ از مرکز روی محور x های مثبت قرار دارد. پتانسیل خارج پوستهٔ کروی در نقطه‌ای به فاصلهٔ x از مرکز پوسته چقدر است؟

۱) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q_1}{|x-R_1|}\right\}$

۲) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q_1}{|x-R_1|}+\frac{q_2}{|x-R_2|}\right\}$

۳) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q_1}{|x-R_1|}-\frac{q_2}{|x-R_2|}\right\}$

۴) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q_1}{|x-R_1|}-\frac{q_2}{|x-R_2|}+\frac{q_2}{|x|}\right\}$

۸۳- کابل هم‌محور به شعاع‌های a و b ($b > a$) مفروض است. محور این کابل بر محور z ها منطبق است. در فضای بین دو رسانا ناحیهٔ اول $y > 0$ و ناحیهٔ دوم $y < 0$ به ترتیب از مواد با نفوذپذیری مغناطیسی (پرمابلیته) μ_1 و μ_2 پر شده است. اگر جریان I در جهت $\mathbf{a}_z$ از رسانای داخلی عبور کند، چگالی شار مغناطیسی در دو ناحیه را بدست آورید.

۱) $\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_2}{2\mu_1}\frac{I}{\pi r}\mathbf{a}_\varphi\,,\ \mathbf{B}_1 = \frac{\mu_1}{2\mu_2}\frac{I}{\pi r}\mathbf{a}_\varphi$

۲) $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \frac{2\sqrt{\mu_1\mu_2}}{(\mu_1+\mu_2)^2}\frac{I}{\pi r}\mathbf{a}_\varphi$

۳) $\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_2^2}{\mu_1+\mu_2}\frac{I}{\pi r}\mathbf{a}_\varphi\,,\ \mathbf{B}_1 = \frac{\mu_1^2}{\mu_1+\mu_2}\frac{I}{\pi r}\mathbf{a}_\varphi$

۴) $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_1\mu_2}{(\mu_1+\mu_2)^2}\frac{I}{\pi r}\mathbf{a}_\varphi$

۸۴- یک توزیع بار خطی با چگالی بار $\rho = \begin{cases} +\lambda & ; \quad 0 < z < l \\ -\lambda & ; \quad -l < z < 0 \end{cases}$ که در آن λ یک عدد ثابت است، در نظر می‌گیریم. اندازهٔ گشتاور دوقطبی این توزیع بار برابر است با:

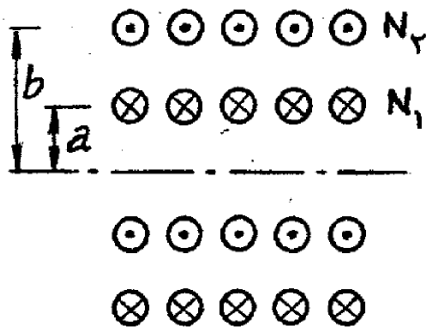
۱) λl^2

۲) $2\lambda l^2$

۳) $\frac{\lambda l^2}{2}$

۴) $4\lambda l^2$

۸۵- دو سیم‌پیچی خیلی بلند متحدالمحور به شعاع‌های a و b با جریان‌های یکسان $I = 1^A$ در جهت‌های نشان‌داده شده و تعداد دور سیم‌پیچی‌ها در واحد طول به ترتیب N_1 و N_2 مطابق شکل مفروض هستند. انرژی کل مغناطیسی ذخیره‌شده در واحد طول چقدر است؟



۱) $\frac{1}{2}\mu_0\pi\ a^2N_1^2 + b^2N_2^2 + 2N_1N_2a^2$

۲) $\frac{1}{2}\mu_0\pi\ a^2N_1^2 + b^2N_2^2 - 2N_1N_2a^2$

۳) $\mu_0\pi\ a^2N_1^2 + b^2N_2^2 + N_1N_2ab$

۴) $\mu_0\pi\left(\frac{1}{2}a^2N_1^2 + \frac{1}{2}b^2N_2^2 - 2N_1N_2a^2\right)$

۸۶- نسبت انرژی الکتریکی W لازم برای تشکیل یک لایه بار الکتریکی در فضای خالی بین دو سطح کروی $r = a$ و $r = 2a$ با چگالی حجمی ثابت ρ_0 به کل بار الکتریکی Q موجود در لایه چقدر است؟

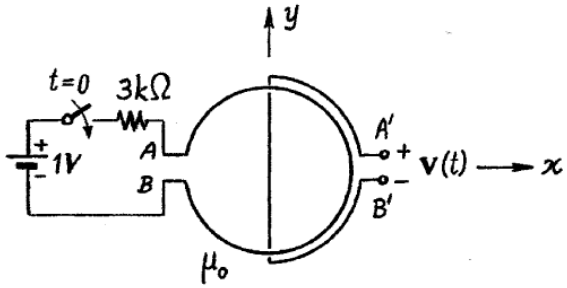
۱) $\frac{W}{Q} = \frac{15}{24}\frac{a^2\rho_0}{\varepsilon_0}$

۲) $\frac{W}{Q} = \frac{47}{70}\frac{a^2\rho_0}{\varepsilon_0}$

۳) $\frac{W}{Q} = \frac{35}{48}\frac{a^2\rho_0}{\varepsilon_0}$

۴) $\frac{W}{Q} = \frac{31}{25}\frac{a^2\rho_0}{\varepsilon_0}$

۸۷- در فضای خالی در صفحهٔ xy یک حلقه سیم به شکل دایره و دیگری به شکل نیم‌دایره همانند شکل بر روی یکدیگر منطبق شده‌اند. سیم‌ها از جنس رسانای غیرمغناطیسی فرض می‌شوند. در حالتی که سرهای $A'B'$ باز هستند، اندوکتانس دیده شده از سرهای AB برابر $0/6\mu\mathbf{H}$ است. ولتاژ مدار باز $v(t)$ برای $t \geq 0$ (پس از بسته‌شدن کلید) کدام است؟



۱) $\frac{1}{6}\exp\left(-10^{10}\frac{t}{2}\right)$

۲) $-\frac{1}{6}\exp\left(-10^{10}\frac{t}{2}\right)$

۳) $-\frac{1}{2}\exp\left(-10^{10}\frac{t}{2}\right)$

۴) $\frac{1}{2}\exp\left(-10^{10}\frac{t}{2}\right)$

۸۸- در فضای خالی تابع پتانسیل الکتریکی در ناحیهٔ داخل کره‌ای به شعاع ۳ متر به صورت $V(x,y,z)=6x^2-5y+4z$ داده شده است. کل بار موجود در داخل این کره کدام است؟ $\left(\varepsilon_0=\frac{1}{36}\times 10^{-9}\ \frac{F}{m}\right)$

۱) $-80\,nC$

۲) $-20\,nC$

۳) $-10\,nC$

۴) $-4\,nC$

۸۹- یک استوانهٔ نامتناهی از جنس ماده‌ای دیامغناطیس با $\mu_r=\frac{1}{2}$ ناحیهٔ $r\le a$ یک دستگاه مختصات استوانه‌ای را اشغال کرده است. روی سطح $r=2a$ جریان سطحی الکتریکی با چگالی ثابت $2\frac{A}{m}$ در جهت $\mathbf{a}_\varphi$ در گردش است. مطلوب است تعیین چگالی جریان مقید سطحی روی استوانه دیامغناطیس یعنی روی $r=a$ بر حسب $\frac{A}{m}$.

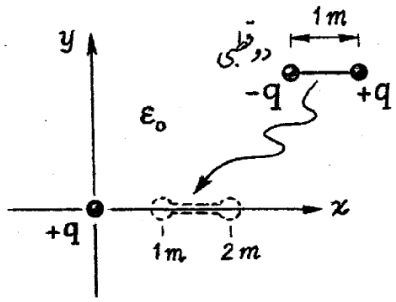
۱) $-\mathbf{a}_\varphi$

۲) $+\mathbf{a}_\varphi$

۳) $+3\mathbf{a}_\varphi$

۴) $-3\mathbf{a}_\varphi$

۹۰- دوقطبی نشان داده شده در شکل توسط عامل خارجی از بی‌نهایت به مجاورت بار نقطه‌ای q واقع در مبدأ مختصات آورده می‌شود. محل نهایی دوقطبی به قسمی است که بار $+q$ در $x=2m$ و بار $-q$ در $x=1m$ قرار می‌گیرد. اگر $q=1^{\mu C}$ باشد، آنگاه کار عامل خارجی چند میلی‌ژول بوده است؟ $\left(\varepsilon_0=\frac{1}{36}\times 10^{-9}\ \frac{F}{m}\right)$



۱) $-13/5$

۲) $+4/5$

۳) $-4/5$

۴) $+13/5$

پاسخ سوالات آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل – سال ۱۳۸۸

الکترومغناطیس

(سید مهدی مظهری؛ آزمایشگاه آنالیز سیستم‌های قدرت، دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

۷۶- طبق تعریف، شاری که از سطح دلخواه S می‌گذرد از رابطهٔ $\varphi = \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{d}S$ محاسبه می‌شود. شدت میدان حاصل از سیم حامل جریان مطابق رابطهٔ زیر می‌باشد:

$$\vec{E} = \frac{\rho_\ell}{۲\pi\varepsilon_\circ r}\vec{a}_r = \frac{۱}{r}\vec{a}_r$$

لذا:

$$\varphi = \int E_\circ \, dS = \int\int \frac{۱}{r}\vec{a}_r . \vec{a}_R R^۲ \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \Bigg|_{\substack{\vec{a}_r . \vec{a}_R = \sin\theta \\ r = R\sin\theta \\ R = ۱}}$$

که از حل آن نتیجه می‌شود:

$$\varphi = \int\int \frac{۱}{R\sin\theta} \times \sin\theta \times \sin\theta d\theta d\varphi = \int_\circ^{۲\pi}\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۴}} \sin\theta d\theta d\varphi = ۲\pi \left[\cos\theta \Big|_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۴}} \right] = ۲\pi(\frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}) = \pi(\sqrt{۳} - \sqrt{۲})$$

بر این اساس، گزینهٔ ۳ صحیح می‌باشد.

۷۷- مقدار گشتاور دوقطبی معادل برای توزیع‌های پیوسته از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{M} = \frac{۱}{۲} I \int \mathbf{R} \times \mathbf{dl}$$

در رابطهٔ فوق R بردار مکانی در داخل توزیع، I جریان معادل توزیع، dl بردار دیفرانسیل روی مسیر خارجی توزیع است. با توجه به صورت سوال:

$$\vec{R} = -r\vec{a}_r, \; J_s = ۲r\vec{a}_r$$

پس:

$$\mathbf{M}=\frac{1}{2}\int \vec{J}_s ds\times\vec{R}=\frac{1}{2}2r\,\vec{a}_\varphi(rdrd\varphi)\times(-r\,\vec{a}_r)=\int_0^a\int_0^{2\pi} r^3 drd\varphi\,\vec{a}_z=2\pi(\frac{a^4}{4})=\frac{\pi a^4}{2}$$

بر این اساس، گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

۷۸- کافی است مولفهٔ عمودی میدان در مرز را محاسبه نموده و با استفاده از آن بار القایی را بیابیم:

$$\left.\begin{array}{l} E_T=2E\cos\theta(-\vec{a}_z)\\ E=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\\ \cos\theta=\dfrac{d}{R}=\dfrac{a}{\sqrt{d^2+r^2}}\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{D}_T=\varepsilon_0 E_T=\frac{Q\,d\,(-\vec{a}_z)}{2\pi(r^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

مطابق قانون ماکسول برای بار القایی خواهیم داشت:

$$Q_a=-Qd\int \vec{D}_T.\vec{ds}=\int\frac{-Qdrdrd\varphi}{2\pi(r^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}=-Qd\int\frac{rdr}{(r^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}=...=-Qd\left[\frac{1}{d}-\frac{1}{\sqrt{a^2+d^2}}\right]$$

پس:

$$\frac{Q_a}{-Q}=\left[1-\frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}}\right]=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{d^2}{a^2+d^2}=\frac{9}{16}\Rightarrow 7d^2=9a^2\Rightarrow a=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

مطابق این روش حل، گزینه ۴ به نظر صحیح می‌آید.

۷۹- طبق تعریف پتانسیل مغناطیسی، $V_m=\dfrac{\vec{m}.\vec{a}_R}{4\pi R^2}$ پس ابتدا ممان مغناطیسی را محاسبه نموده و سپس پتانسیل را می‌یابیم:

$$\vec{m}=\int\vec{M}\,dV=M_0(\frac{4\pi}{3}a^3)\vec{a}_z$$

پس:

$$V_m=\frac{\vec{m}.\vec{a}_R}{4\pi R^2}=\frac{M_0\frac{4\pi}{3}a^3\cos\theta}{4\pi R^2}=\left.\frac{M_0\,a^3\cos\theta}{3R^2}\right|_{r=2a,\theta=\frac{\pi}{4},\varphi=0}=\frac{M_0\,a\sqrt{2}}{24}$$

بر این اساس، گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۸۰- سوال ساده و مرسومی در الکترواستاتیک است؛ کافی است شدت میدان و در نهایت پتانسیل را محاسبه کنیم:

$$\vec{D} = \rho_s \vec{a}_z \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_s \vec{a}_z}{\varepsilon_\circ (۱ + \frac{z^۲}{d^۲})}$$

برای پتانسیل نیز داریم:

$$V_{+,-} = -\int_d^\circ E.\vec{a}_z\, dz = \int_\circ^d \frac{\rho_s dz}{\varepsilon_\circ (۱ + \frac{z^۲}{d^۲})} = \frac{\rho_s d^۲}{\varepsilon_\circ} \int \frac{dz}{z^۲ + d^۲} = \frac{\rho_s d}{\varepsilon_\circ} \left[\tan^{-۱}(\frac{z}{d}) \right] \Bigg|_\circ^d$$

پس:

$$V_{+,-} = \frac{\rho_s d}{\varepsilon_\circ} (\frac{\pi}{۴}) = \frac{\pi \rho_s d}{۴ \varepsilon_\circ}$$

مطابق این توضیحات، گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۸۱- میدان ناشی از یک دوقطبی الکتریکی در فواصل بسیار دور با $\frac{۱}{R^۳}$ متناسب می‌باشد؛ ولتاژ القاء شده در حلقه طبق قانون فارادای با مشتق شار متناسب است. با توجه به اینکه شار نسبت مستقیم با میدان مغناطیسی دارد، پس انتظار داریم که توان چهارم زمان را در مخرج رابطه داشته باشیم. بر این اساس، گزینهٔ ۱ صحیح به نظر می‌رسد.

۸۲- سوال بسیار ساده‌ای است؛ در حقیقت طراح محترم تعریف اولیه‌ای از تئوری تصاویر در سیستم‌های کروی را ارائه داده است. پتانسیل در هر نقطهٔ دلخواه خارج کره از جمع آثار بار مثبت و منفی بدست می‌آید:

$$V(x) = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ} \left\{ \frac{q_۱}{|x - R_۱|} - \frac{q_۲}{|x - R_۲|} \right\}$$

بر این اساس، گزینه ۳ صحیح به نظر می‌رسد.

۸۳- با توجه به شرایط مرزی، چگالی شار مغناطیسی در هر دو ناحیه یکسان است؛ لذا گزینه‌های ۱ و ۲ نادرست هستند.

$$\oint H.d\ell = I = \int H_۱.d\ell + \int H_۲.d\ell = I \xrightarrow{B_{۱n} = B_{۲n} = B} \frac{B}{\mu_۱}(\pi r) + \frac{B}{\mu_۲}(\pi r) = I \;\Rightarrow\; \mathbf{B} = \frac{\mu_۱ \mu_۲ I}{\mu_۱ + \mu_۲\;\; \pi r} \mathbf{a}_\varphi$$

لذا، گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۸۴- با استفاده از رابطهٔ $\mathbf{P} = \int \mathbf{R}\; dq$ بردار دوقطبی معادل را محاسبه می‌کنیم؛ با توجه به نوع توزیع بار، از جهت بردارها صرفنظر می‌شود:

$$P = \frac{۱}{۲} \left[\int_\circ^\ell \rho_\ell dz\;\; z + \int_{-\ell}^\circ \rho_\ell\, dz\;\; z \right] = \int_\circ^\ell \lambda\, z\, dz = \lambda \ell^۲$$

همانطور که مشاهده می‌کنید، گزینه ۱ صحیح خواهد بود.

۸۵- انرژی کل را با استفاده از اندوکتانس سیم‌پیچ‌ها محاسبه می‌نماییم:

اندوکتانس متقابل دو سیم‌پیچ به ترتیب:

$$L=\frac{\phi}{I}=\frac{NBA}{I}=\frac{\mu_\circ N^۲ I\ \ \pi r^۲}{I}=\mu_\circ \pi N^۲ r^۲\ \ \rightarrow \begin{cases} L_۱=\mu_\circ \pi N_۱^۲ a^۲ \\ L_۲=\mu_\circ \pi N_۲^۲ a^۲ \end{cases}$$

و اندوکتانس متقابل آن‌ها:

$$L_{۱۲}=\frac{\phi_{۱۲}}{I}=\frac{N_۱\ \ \mu_\circ N_۲ I_۱\ \ \pi a^۲}{I_۱}=\mu_\circ \pi N_۱ N_۲ a^۲$$

پس:

$$W=\frac{۱}{۲}L_۱ I_۱^۲+\frac{۱}{۲}L_۲ I_۲^۲-L_{۱۲} I_۱ I_۲=\mu_\circ \pi\ \ a^۲ N_۱^۲+b^۲ N_۲^۲+N_۱ N_۲ ab$$

لذا، گزینه ۳ صحیح خواهد بود.

۸۶- چگالی شار الکتریکی را یافته و با استفاده از آن انرژی را محاسبه می‌نماییم. برای لایهٔ ذکرشده:

$$\oint D.dS=Q_{in}\Rightarrow D\ \ ۴\pi r^۲\ \ =\rho_\circ(\frac{۴\pi}{۳}r^۳-\frac{۴\pi}{۳}a^۳)\Rightarrow \vec{D}_{in}=\frac{\rho_\circ}{۳}(r-\frac{a^۳}{r^۲})\vec{a}_R$$

پس:

$$W_{in}=\frac{۱}{۲}\int\frac{D_{in}^۲}{\varepsilon_\circ}dV=\frac{\rho_\circ^۲}{۲\varepsilon_\circ\times ۹}\int(r-\frac{a^۳}{r^۲})^۲ ۴\pi r^۲ dr=\frac{۲\pi\rho_\circ^۲}{۹\varepsilon_\circ}\int_a^{۲a}(r^۴+\frac{a^۶}{r^۲}-۲a^۳ r)dr=\frac{۲\pi\rho_\circ^۲}{۹\varepsilon_\circ}\left[\frac{۳۷}{۱\circ}a^۵\right]=\frac{\pi\rho_\circ^۲}{۹\varepsilon_\circ}(\frac{۳۷a^۵}{۵})$$

و برای فضای خارج لایه:

$$W_{out}=\frac{۱}{۲}\int\frac{D_{out}^۲}{\varepsilon_\circ}\ \ dV\Bigg|_{\mathbf{D}_{out}=\frac{Q}{۴\pi r^۲}\vec{a}_r}=\frac{Q^۲}{۸\pi\varepsilon_\circ}\int_{۲a}^{\infty}\frac{dr}{r^۲}=\frac{Q^۲}{۱۶\pi\varepsilon_\circ a}\Bigg|_{Q=\frac{۴\pi}{۳}\rho_\circ(۷a^۳)}=\frac{\rho_\circ^۲\ \ \pi\ \ \times ۴۹a^۵}{۹\varepsilon_\circ}$$

مجموع این انرژی‌ها به صورت زیر خواهد بود:

$$W_T=W_{in}+W_{out}=\frac{\pi\rho_\circ^۲}{۹\varepsilon_\circ}\left[۴۹a^۵+\frac{۳۷}{۵}a^۵\right]=\frac{\pi\rho_\circ^۲}{۹\varepsilon_\circ}(\frac{۲۸۲}{۵}a^۵)$$

پس:

$$\frac{W_T}{Q}=\frac{۴۷\rho_\circ a^۲}{۷\circ\varepsilon_\circ}$$

بر این اساس، گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

۸۷- یک مدار RL سری داریم که با استفاده از یک منبع ولتاژ ثابت تحریک شده است. ولتاژ دو سر سلف نوسان نموده و در نهایت به صفر می‌رسد. با توجه به اینکه سر منفی ولتاژ به نقطهٔ B متصل است، پس ولتاژ در لحظهٔ صفر منفی بوده و گزینه‌های ۱ و ۴ نادرست خواهند بود (چرا!؟). انتظار این است که با حل مدار مرتبهٔ اول پاسخ نهایی حاصل شود؛ با این وجود، مطابق پاسخ‌های طراح محترم، گزینهٔ ۳ صحیح است.

۸۸- این سوال یکی از مثال‌های مرسوم در الکترواستاتیک است؛ کافی است با گرادیان‌گیری از پتانسیل شدت میدان و سپس توزیع بار را بیابیم:

$$\vec{E} = -\nabla V \xrightarrow{V=۶x^۲-۵y+۴z^۲} \vec{E} = -۱۲x\,\vec{a}_x + ۵\,\vec{a}_y - ۸z\,\vec{a}_z$$

بر این اساس، توزیع بار به صورت زیر خواهد بود:

$$\rho = \vec{V}.\vec{D} = \varepsilon_\circ\left[-۱۲+\circ-۸\right] = -۲\circ\,\varepsilon_\circ$$

پس:

$$Q = \rho\left(\frac{۴\pi}{۳}R^۳\right) = -۲\circ\,\varepsilon_\circ\left[\frac{۴\pi}{۳}\times ۲۷\right] = -۲\circ\times\frac{۱\circ^{-۹}}{۳۶\pi}۳۶\pi = -۲\circ\,nc$$

همانطور که مشاهده می‌شود، گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

۸۹- از اصل موضوع مغناطیس ساکن استفاده می‌کنیم:

$$\oint B.d\ell = \mu_\circ\,\mu_r I_{in} \rightarrow B\,L = \mu_\circ\mu_r(J_S\,L) \quad\Rightarrow\quad \vec{B} = \mu_\circ\,\mu_r J_S\,\vec{a}_z$$

ممان مغناطیسی به صورت زیر خواهد بود:

$$\vec{M} = \frac{(\mu_r-۱)}{\mu_\circ\,\mu_r}\vec{B} = -\frac{۱}{۲}\times J_S\,\vec{a}_z = -\vec{a}_z$$

پس:

$$\vec{J}_{ms} = \vec{M}\times\vec{a}_r = -\vec{a}_z\times\vec{a}_r = -\vec{a}_\phi$$

بر این اساس، گزینه ۱ صحیح خواهد بود.

۹۰- برای محاسبهٔ کار تغییرات نیرو در راستای اعمال آن را بررسی می‌کنیم؛ برای $\vec{F}_{۱P}$ داریم:

$$\vec{F}_{۱P} = -\vec{F}_{P۱} = -\left[\frac{Kq^۲}{x^۲}\vec{a}_x + \frac{Kq^۲}{(x+۱)^۲}(-\vec{a}_x)\right] = Kq^۲\left[\frac{۱}{(x+۱)^۲}-\frac{۱}{x^۲}\right]\vec{a}_x = K\,q^۲\left[\frac{-(۲x+۱)}{(x^۲+x)^۲}\right]\vec{a}_x$$

مقدار کار انجام‌شده عبارت خواهد بود از:

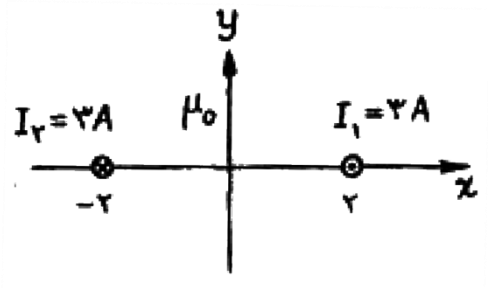
$$W = \int_{\infty}^{۱} \vec{F}_{۱P} \cdot \vec{a}_x \, dx - Kq^{۲} \left[\frac{۱}{x^{۲} + x} \right]_{\infty}^{۱} = \frac{-Kq^{۲}}{۲} = \frac{-۹ \times ۱۰^{۹} \times ۱۰^{-۱۲}}{۲} = -۴/۵mJ$$

بنابراین، گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

سوالات آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل – سال ۱۳۸۹

الکترومغناطیس

۹۱- جریان‌های رشته‌ای I_1 و I_2 به موازات محور z همانند شکل در فضای خالی ایجاد شده‌اند. محل، جهت و مقدار دو جریان رشته‌ای در شکل داده شده است. اگر $\vec{A}$ بردار پتانسیل مغناطیسی ناشی از این دو جریان باشد. آنگاه مقدار مشتق نسبی $\frac{\partial A_z}{\partial_x}$ در نقطه $(0,0,0)$ کدام است؟ (می‌دانیم $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{H}{m}$)



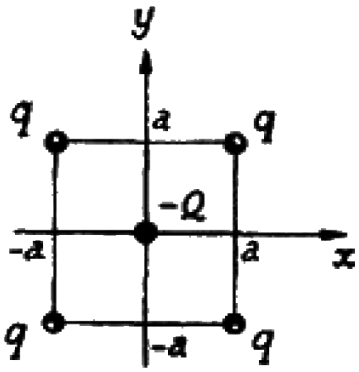
۱) -6×10^{-7}

۲) 3×10^{-7}

۳) -3×10^{-7}

۴) 6×10^{-7}

۹۲- چهاربار نقطه‌ای q در چهار رأس یک مربع به ضلع $2a$ بطور متقارن نسبت به مبدأ مختصات مانند شکل قرار دارند. یک ذره‌ی باردار به جرم m و بار $-Q$ در مرکز مربع قرار می‌دهیم. پریود نوسانات این ذره‌ی باردار برای جابجایی‌های کوچک در راستای محور z کدام است؟



۱) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 ma^3}{qQ}}$

۲) $T = 2\pi\sqrt{\frac{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 ma^3}{qQ}}$

۳) $T = 2\pi\sqrt{\frac{qQ}{2\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 ma^3}}$

۴) $T = 2\pi\sqrt{\frac{8\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 ma^3}{qQ}}$

۹۳- از یک سیم‌پیچ استوانه‌ای نامحدود (سیملوله) جریان ثابت I می‌گذرد. تعداد دورها بسیار زیاد و n دور بر واحد طول فرض می‌شود. بردار پتانسیل مغناطیسی $\vec{A}$ خارج از سیم‌پیچ و در فاصله‌ی r از محور آن(محور z) با کدام عبارت بیان می‌شود؟ (شعاع سیم پیچ را a و جهت آن را $\mathbf{a}_\varphi$ فرض کنید.)

۱) $\frac{\mu_0 nIa^2}{2r}\mathbf{a}_\varphi$

۲) $\frac{\mu_0 nIr}{2}\mathbf{a}_\varphi$

۳) $\frac{\mu_0 nIa}{2}\mathbf{a}_\varphi$

۴) $\frac{\mu_0 nIa^2}{2\pi r}\mathbf{a}_\varphi$

۹۴- در دستگاه مختصات کروی روی سطح مخروط $\theta = \frac{\pi}{۶}$ برای $\circ < r < a$ بار سطحی الکتریکی غیر یکنواخت با چگالی $\rho_s = r^۲$ کولن بر متر مربع توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی در مبدأ مختصات کدام است؟ (مرجع پتانسیل در بی‌نهایت فرض می‌شود.)

۱) $\frac{a^۲}{۱۲\varepsilon_\circ}$

۲) $\frac{a^۳}{۶\varepsilon_\circ}$

۳) $\frac{a^۳}{۱۲\varepsilon_\circ}$

۴) $\frac{a^۲}{۶\varepsilon_\circ}$

۹۵- در فضای خالی یک دوقطبی مغناطیسی بی‌نهایت کوچک با گشتاور $m\mathbf{a}_z$ در مبدأ مختصات قرار دارد. انرژی مغناطیسی ذخیره شده در ناحیه کروی $a < r < b$, $\circ < \theta < \frac{\pi}{۲}$, $\circ < \varphi < \pi$ کدام است؟

۱) $\frac{\mu_\circ m^۲}{۴\pi}(\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b})$

۲) $\frac{\mu_\circ m^۲}{۴۸\pi}(\frac{۱}{a^۳} - \frac{۱}{b^۳})$

۳) $\frac{\mu_\circ m^۲}{۴۸\pi}(\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b})$

۴) $\frac{\mu_\circ m^۲}{۴\pi}(\frac{۱}{a^۳} - \frac{۱}{b^۳})$

۹۶- یک خازن کروی از دو سطح هادی کروی هم‌مرکز به شعاع های a و b ($a < b$) تشکیل شده است. فضای بین دو کره‌ی هادی را عایقی ناهمگن با ضریب گذردهی $\varepsilon = \varepsilon_\circ \; ۱ + \sin\theta \; ۱ + \cos^۲\varphi$ پر کرده است. ظرفیت خازن کدام است؟

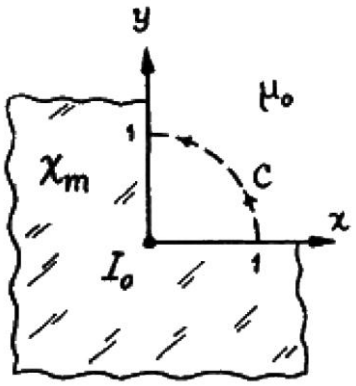
۱) $\frac{\varepsilon_\circ \pi}{\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}}(۶ + \frac{۳}{۲}\pi)$

۲) $\frac{\varepsilon_\circ \pi}{\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}}(۶ + \pi)$

۳) $\frac{\varepsilon_\circ \pi}{\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}}(۳ + \pi)$

۴) $\frac{\varepsilon_\circ \pi}{\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}}(۶ + ۳\pi)$

۹۷- رشته جریان یکنواخت $I_\circ$ روی محور z قرار گرفته است. همانند شکل ناحیه‌ی $\circ < \varphi < \frac{\pi}{۲}$ فضای خالی و ناحیه $\frac{\pi}{۲} \le \varphi \le ۲\pi$ با یک ماده مغناطیسی همگن با حساسیت مغناطیسی $x_m = ۳$ پر شده است. حاصل انتگرال خط $\int_c \vec{H}.\vec{dl}$ روی C که ربع دایره ی واحد در شکل است، کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۴}I_\circ$

۲) $\frac{۴}{۵}I_\circ$

۳) $\frac{۲}{۵}I_\circ$

۴) $\frac{۴}{۷}I_\circ$

۹۸- در حجم کره‌ای به شعاع a بارهای حجمی با چگالی بار $\rho = \rho_\circ \cos\theta (\frac{C}{m^۳})$ ($\rho_\circ$ ثابت است) گسترده شده‌اند. بردار گشتاور دو قطبی الکتریکی ($DipoleMoment$) $\vec{p}$ این توزیع بار کدام است؟

۱) $\frac{\pi \rho_\circ a^۳}{۳}\mathbf{a}_z$

۲) $\frac{\pi \rho_\circ a^۴}{۶}\mathbf{a}_z$

۳) $\frac{\pi \rho_\circ a^۴}{۳}\mathbf{a}_z$

۴) $\frac{\pi \rho_\circ a^۳}{۶}\mathbf{a}_z$

۹۹- یک حلقه دایروی در صفحه xy به شعاع کوچک a و مرکز مبدأ و حلقه دیگر در صفحه $x+y+۳z=d$ به شعاع کوچک b و مرکز $(\frac{d}{۲},\frac{d}{۲},\circ)$ بطوریکه $a,b << d$ می‌باشند، قرار دارند. اندازه‌ی اندوکتانس متقابل بین این دو حلقه کدام است؟

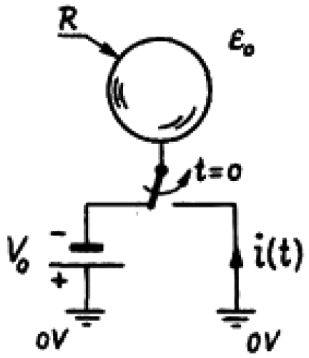
۱) $\frac{\mu_\circ \pi^۲ a^۲ b^۲}{۲d^۳}$

۲) $\frac{\mu_\circ \pi^۲ a^۲ b^۲}{\sqrt{۱۱}\, d^۳}$

۳) $\frac{۲\mu_\circ \pi a^۲ b^۲}{\sqrt{۲۲}\, d^۳}$

۴) $\frac{۳\mu_\circ \pi a^۲ b^۲}{\sqrt{۲۲}\, d^۳}$

۱۰۰- کره‌ای رسانا به شعاع $R = ۲m$ در فضای خالی قرار گرفته است. همانند شکل این کره برای مدت زمان طولانی به منبع ولتاژ مستقیم $V_\circ = ۱\circ V$ با علامت نشان داده شده در شکل متصل بوده است. در لحظه $t=\circ$ همانند شکل کره را ولتاژ صفر متصل کرده‌ایم. حاصل انتگرال $\int_\circ^\infty -i(t')\,dt'$ کدام است؟ ($i(t)$ در شکل ملاحظه می‌شود.)



۱) $-۴\circ \pi \varepsilon_\circ$

۲) $۴\circ \pi \varepsilon_\circ$

۳) $۸\circ \pi \varepsilon_\circ$

۴) $-۸\circ \pi \varepsilon_\circ$

۱۰۱-یک مدار مغناطیسی با سطح مقطع یکنواخت $۲^{cm^۲}$، شامل ۲^{mm} فاصله هوائی و ۵^{cm} طول مدار مغناطیسی می‌باشد. با فرض $\mu_r = ۲\circ\circ$. اندوکتانس چنین مداری با N دور سیم بر روی آن، کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۹\circ}\mu_\circ N^۲$

۲) $\frac{۴}{۹\circ}\mu_\circ N^۲$

۳) $\frac{۲}{۹\circ}\mu_\circ N^۲$

۴) $\frac{۱۶}{۹\circ}\mu_\circ N^۲$

۱۰۲- درفضای خالی در ناحیه‌ی $|z| < h, \circ \le \varphi \le ۲\pi, \circ \le r \le a$ از یک دستگاه مختصات استوانه‌ای بارهای الکتریکی با چگالی حجمی یکنواخت ρ توزیع شده‌اند. پتانسیل الکتریکی ناشی از این توزیع بار در محل مبدأ مختصات یک ولت است. اگر a و h هر دو نصف شوند ولی ρ بدون تغییر بماند، آنگاه پتانسیل الکتریکی در محل مبدأ مختصات چند ولت خواهد بود؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

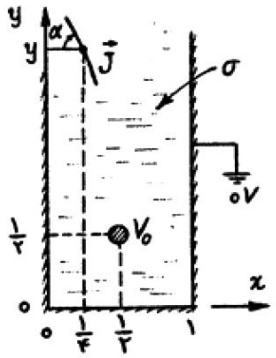
۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) ۱

۱۰۳-در فضای خالی جریان سطحی با چگالی $\vec{J}_s = \cos(\beta y)\mathbf{a}_z$ بر روی صفحه‌ی $x = \circ$ قرار دارد. معادله‌ی خط میدان مغناطیسی در نیم‌فضای $x > \circ$ کدام است؟

۱) $e^{\beta x}\left|\cos\beta y\right| = const.$ ۳) $e^{-\beta x}\left|\cos\beta y\right| = const.$

۲) $e^{-\beta x}\left|\sin\beta y\right| = const.$ ۴) $e^{\beta x}\left|\sin\beta y\right| = const.$

۱۰۴- یک استوانه‌ی رسانا که به ولتاژ مستقیم $V_\circ$ متصل است همانند شکل در محل $(x,y) = (\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$ در داخل یک کانال آب با رسانائی σ قرار دارد. دیواره‌های کانال یعنی صفحات $x = \circ$، $x = ۱$ و $y = \circ$ همگی در پتانسیل صفر ولت قرار دارند. زاویه خطوط چگالی جریان $\vec{J}$ در داخل آب محل $x = \frac{۱}{۴}$ برای $y >> ۱$ که در شکل با α نشان داده شده است؟



۱) $\frac{\pi}{۶}$

۲) $\frac{\pi}{۴}$

۳) $\frac{\pi}{۳}$

۴) $\frac{\pi}{۸}$

۱۰۵-مطلوبست محاسبه انرژی ذخیره‌شده در واحد طول درون یک پوسته استوانه‌ای رسانا (غیر مغناطیسی) با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b از این پوسته، جریان I به صورت یکنواخت عبور می‌کند.

۱) $\frac{\mu_\circ I^۲}{۸\pi(b^۲ - a^۲)}(b^۲ - ۳a^۲ + \frac{۴a^۴}{b^۲ - a^۲}\ln\frac{b}{a})$

۲) $\frac{\mu_\circ I^۲}{۱۶\pi(b^۲ - a^۲)}(b^۲ - ۳a^۲ + \frac{۴a^۴}{b^۲ - a^۲}\ln\frac{b}{a})$

۳) $\frac{\mu_\circ I^۲}{۱۶\pi(b^۲ - a^۲)}(b^۲ + ۳a^۲ + \frac{۴a^۴}{b^۲ - a^۲}\ln\frac{b}{a})$

۴) $\frac{\mu_\circ I^۲}{۸\pi(b^۲ - a^۲)}(b^۲ + ۳a^۲ + \frac{۴a^۴}{b^۲ - a^۲}\ln\frac{b}{a})$

پاسخ سوالات آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل – سال ۱۳۸۹

الکترومغناطیس

(سید مهدی مظهری؛ آزمایشگاه آنالیز سیستم‌های قدرت، دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

۹۱-همانطور که می‌دانید، هر بردار بدون دیورژانس را می‌توان به صورت کرل یک میدان برداری دیگر نشان داد. از طرفی،طبق اصول موضوع مغناطیس همواره $\nabla . \mathbf{B} = ۰$؛بر این اساس، $\mathbf{B}$ را می‌توان به‌صورت کرل میدان برداری دیگری مثل $\mathbf{A}$ نوشت:

$$\nabla . \mathbf{B} = ۰ \quad \rightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

با توجه به این موضوع و اینکه میدان مغناطیسی حاصل از سیم بی‌نهایت حامل جریان از رابطهٔ $\mathbf{B} = \frac{\mu_۰ I}{۲\pi r}\mathbf{a}_\varphi$ بدست می‌آید، داریم:

$$\vec{B}_T = \frac{\mu_۰ I}{۲\pi(x-۲)}\vec{a}_y - \frac{\mu_۰ I}{۲\pi(x+۲)}\vec{a}_y = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{bmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ۰ & ۰ & A_z \end{bmatrix}$$

$$\frac{\mu_۰ I}{۲\pi}\left[\frac{۱}{x-۲} - \frac{۱}{x+۲}\right]\vec{a}_y = -\vec{a}_y\frac{\partial A_z}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{۴\pi\times ۱۰^{-۷}\times ۳}{۲\pi}\left[\frac{۱}{۲} - \frac{-۱}{۲}\right] = ۶\times ۱۰^{-۷}$$

بر این اساس، گزینهٔ ۴ صحیح می‌باشد.

۹۲- پریود نوسانات ار تعامل گشتاورهای الکتریکی و مغناطیسی بدست می‌آید. گشتاور نیز معادل نیروی محوری اعمال‌شده بر زوایهٔ دوران می‌باشد. نیروی الکتریکی هر بار نقطه‌ای از قانون کولن محاسبه می‌شود؛ با درنظر داشتن هم‌ارزی $\sin\theta$ حول مبداء مختصات، برایند نیروی الکتریکی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\left.\begin{array}{l} |F| = \frac{qQ}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲} \\ F_T = ۴F\sin\theta \approx ۴F\theta \\ \sin\theta \approx \theta \end{array}\right\} \Rightarrow F_T = \frac{qQ\theta}{\pi\varepsilon_۰ r^۲}$$

با توجه به اینکه گشتاور مغناطیسی از نظر اندازه برابر و از نظر علامت، مخالف گشتاور الکتریکی است (به نظر شما چرا؟)، لذا:

$$F_T \times r = -F_m \times r \quad \Rightarrow \quad F_T = -F_m \Rightarrow \frac{qQ\theta}{\pi\varepsilon_\circ r^۲} = -ma'$$

به منظور محاسبهٔ پریود نوسانات، لازم است تا سرعت زاویه‌ای محاسبه شده و سپس مطابق رابطهٔ $w = \frac{۲\pi}{T}$ دورهٔ نوسانات بدست می‌آید. برای محاسبهٔ سرعت زاویه‌ای از شتاب و برای محاسبهٔ شتاب از نیرو $F_m = m\,a'$ استفاده می‌شود:

$$\text{شتاب}\, a' = \frac{d^۲ l}{dt^۲} = r\frac{d^۲\theta}{dt^۲}$$

$$F_m = m\,a' \Rightarrow \frac{qQ\theta}{\pi\varepsilon_\circ r^۲} = -mr\frac{d^۲\theta}{dt^۲} + \frac{qQ}{m\pi\varepsilon_\circ r^۳}\theta = \circ$$

مطابق روش لاپلاس معادلهٔ دیفرانسل فوق ساده‌سازی می‌شود:

$$S^۲ + \frac{qQ}{m\pi\varepsilon_\circ r^۳} = \circ$$

و در نهایت:

$$\left.\begin{array}{l} r = a\sqrt{۲} \Rightarrow w = \sqrt{\dfrac{qQ}{m\pi\varepsilon_\circ ۲\sqrt{۲}a^۳}} \\ w = \dfrac{۲\pi}{T} \end{array}\right\} \Rightarrow T = ۲\pi\sqrt{\frac{۲\sqrt{۲}\pi\varepsilon_\circ ma^۳}{qQ}}$$

همانطور که مشاهده می‌شود، گزینهٔ ۱ پاسخ صحیح این سوال می‌باشد.

۹۳-با ذکر یک یادآوری ساده مسأله را حل می‌کنیم: پتانسیل مغناطیسی برداری دارای مفهوم فیزیکی است، بدین معنی که انتگرال خطی آن به دور هر مسیر بسته برابر کل شار مغناطیسی گذرنده از سطح محصور شده توسط این مسیر است. به عبارت دیگر $\oint_C \vec{A}.\vec{dl} = \phi_m$. پس کافی است یک انتگرال ساده را حل کنیم:

$$\oint_C \vec{A}.\vec{dl} = \phi_m = BS = B(\pi a^۲) \Rightarrow A(۲\pi r) = (\mu_\circ I)\pi a^۲ \Rightarrow \mathbf{A} = \left[\frac{\mu_\circ nIa^۲}{۲r}\right]\alpha\vec{\varphi}$$

مطابق این پاسخ، گزینهٔ ۱ صحیح می‌باشد.

۹۴- سوال بسیار ساده‌ای است؛ بار الکتریکی با یک توزیع توان‌دوم کروی بر روی سطح مخروط توزیع شده است. محاسبهٔ پتانسیل در این فضا معادل محاسبهٔ یک انتگرال است!

$$V=\int\frac{dQ}{۴\pi\varepsilon_{\circ}\left|R\right|}\left|\begin{cases}\rho_s=R^{۲}\\ dQ=\rho_s dS_{\theta}\\ \vec{R}=-R\ \vec{a}_R\end{cases}\right.=\int\frac{R^{۲}\times R\sin\theta dRd\varphi}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R}=\frac{۱}{۸\pi\varepsilon_{\circ}}\times ۲\pi\times\int_{\circ}^{a}R^{۲}dR=\frac{a^{۳}}{۱۲\varepsilon_{\circ}}$$

همانطور که مشاهده می‌شود، گزینهٔ ۳ پاسخ صحیح خواهد بود.

۹۵- یک حلقهٔ کوچک حامل جریان دوقطبی مغناطیسی نامیده شده و شدت میدان مغناطیسی حاصل از آن در نقطهٔ دلخواهی از فضا از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\vec{B}=\frac{\mu_{\circ}\left|\vec{m}\right|}{۴\pi R^{۳}}\left[۲\cos\theta\,\vec{a}_R+\sin\theta\,\vec{a}_{\theta}\right]$$

از طرفی، چگالی انرژی در محیط با تراوایی μ مطابق رابطهٔ $w_m=\frac{۱}{۲\mu}B^{۲}$ محاسبه می‌شود.

$$\left|B\right|^{۲}=\frac{\mu_{\circ}^{۲}m^{۲}}{(۴\pi)^{۲}R^{۶}}\left[۴\cos^{۲}\theta+\sin^{۲}\theta\right]=\frac{\mu_{\circ}^{۲}m^{۲}}{(۴\pi)^{۲}R^{۶}}\left[۳\cos^{۲}\theta+۱\right]$$

$$W=\frac{۱}{۲}\int\frac{\left|B\right|^{۲}}{\mu_{\circ}}dV=\frac{۱}{۲}\int\frac{\mu_{\circ}m^{۲}}{(۴\pi)^{۲}R^{۶}}\left[۳\cos^{۲}\theta+۱\right]R^{۲}\sin\theta dRd\theta d\varphi$$

$$=\frac{\mu_{\circ}m^{۲}}{۲(۴\pi)^{۲}}\times\pi\times\int\int\frac{۱}{R^{۴}}\left[۳\cos^{۲}\theta+\sin\theta\right]d\theta dR=\frac{\mu_{\circ}m^{۲}}{۳۲\pi}\left[-\cos^{۳}\theta-\cos\theta\right]_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{\partial}^{b}\frac{dR}{R^{۴}}=\frac{\mu_{\circ}m^{۲}}{۴۸\pi}\left[\frac{۱}{a^{۳}}-\frac{۱}{b^{۳}}\right]$$

بر این اساس، گزینهٔ ۲ صحیح می‌باشد.

۹۶- ظرفیت جزئی یک خازن کروی مطابق رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$dC=\frac{\varepsilon\ d\Omega}{\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}}$$

که در آن $d\Omega=\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ می‌باشد. در سوال اخیر گذردهی محیط نامتقارن است؛ لذا مطابق رابطهٔ فوق:

$$dC=\frac{\varepsilon\ d\Omega}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{\varepsilon_0\ 1+\sin\theta\ \ 1+\cos^2\varphi\ \sin\theta\ d\theta\, d\varphi}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{\varepsilon_0\ 1+\sin\theta\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$$

با توجه به صفر بودن انتگرال $\cos 2\varphi$ در بازهٔ موردنظر:

$$C=\frac{\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\int_0^{\pi}\left(\frac{3\times 2\pi}{2}\right)\sin\theta+\sin^3\theta\ \ d\theta=\frac{3\ \pi\,\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\left[-\cos\theta+\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]\Bigg|_0^{\pi}=\frac{3\ \pi\,\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\left[2+\frac{\pi}{2}\right]$$

مطابق این توضیحات، گزینهٔ ۱ صحیح می‌باشد. چنانچه در محاسبهٔ ظرفیت جزئی مشکل دارید، توضیحات ذیل ممکن است مفید واقع شود:

می‌دانیم که:

$$def(C)=\frac{\varepsilon\, S}{def(d)}$$

از طرفی $def(d)=dR$ و $S=\int R^2\sin\theta\ d\theta\, d\varphi$، پس:

$$\frac{1}{C}=\int\frac{1}{def(c)}=\int\frac{def(d)}{\varepsilon\, S}=\int_a^b\frac{dR}{\varepsilon\, R^2\int\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}=\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\varepsilon\int\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}$$

$$C=\frac{\varepsilon\int\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\ \rightarrow C=\frac{\varepsilon\int d\Omega}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$$

در نتیجه:

$$dC=\frac{\varepsilon\ d\Omega}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$$

رابطهٔ فوق در حل مسائلی که ε در آنها نامتقارن است (یعنی وابسته به θ یا است) کاربرد زیادی دارد.

۹۷-ابتدا ضریب تراوایی را محاسبه می‌کنیم:

$$x_3=3\Rightarrow\mu_r=x_m+1=4$$

با توجه به شرایط مرزی:

$$B_{1n}=B_{2n}\Rightarrow B_1=B_2$$

$$\oint \vec{H}.\overrightarrow{dl} = I_\circ \quad \rightarrow \quad \int_{C_۱} \vec{H}.\overrightarrow{dl} + \int_{C_۲} \vec{H}_۲.\overrightarrow{dl} = I_\circ$$

از این رابطه برای محاسبهٔ چگالی میدان مغناطیسی استفاده می‌کنیم:

$$\frac{B}{\mu_\circ}(\frac{\pi}{۲}r) + \frac{B}{۴\mu_\circ}(\frac{۳\pi}{۲}r) = I_\circ \Rightarrow B = \frac{۸\mu_\circ I_\circ}{۷\pi r}$$

و در نهایت:

$$\int_{C_۱} \vec{H}.\overrightarrow{dl} = \frac{B}{\mu_\circ}(\frac{\pi}{۲}r) = \frac{۴I_\circ}{۷}$$

بنابراین گزینهٔ ۴ صحیح است.

۹۸-همانطور که می‌دانید، ممکن است عایق از ملکول‌های قطبی ایجاد شده باشد؛ در این حالت عایق ترکیبی از بی‌نهایت دوقطبی الکتریکی بوده که در جهات دلخواهی شکل گرفته‌اند. برای محاسبهٔ بردار پلاریزاسیون حاصل‌جمع برداری این دوقطبی‌ها را محاسبه می‌کنیم، بر این اساس:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \to \circ} \frac{\sum_{k=۱}^{n\Delta V} \mathbf{P}_k}{\Delta V}$$

چنانچه راهکاری برای محاسبهٔ سادهٔ عبارت فوق (برای هر توزیع باری) پیدا شود، می‌توان با استفاه از یک روش میانبر، میدان و پتانسیل ناشی از این توزیع را بدست آورد. بدین منظور، با توجه به شکل (محل توزیع) و نوع توزیع بار از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\mathbf{P} = \int \mathbf{R}\ dq$$

در رابطهٔ فوق $\mathbf{R}$ بردار مکانی بوده و می‌بایست به تمام نقاط توزیع بار سر بزند؛ dq المان بار است و بسته به نوع توزیع می‌تواند به صورت‌های زیر باشد:

$$dq = \rho\, dv \quad ، \quad dq = \lambda\, dl \quad ، \quad dq = \sigma\, ds$$

مطابق این روابط، در این سوال:

$$\vec{P} = \frac{۱}{۲}\int dQ\vec{R} = \frac{۱}{۲}\int (\rho_\circ \cos\theta)(R^۳ \sin\theta\, dR\, d\theta\, d\phi)(R\vec{a}_R)$$

$$\frac{\rho_\circ}{۲}\int R^۳ \cos^۲\theta \sin\theta\, dR\, d\theta\, d\varphi\, \vec{a}_z = \frac{۱}{۲}\rho_\circ \times ۲\pi \times \frac{a^۴}{۴}(\frac{-۱}{۳}\cos\theta)\Big|_\circ^\pi \vec{a}_z = \frac{\pi\, \rho\, a^۴}{۶}\vec{a}_z$$

لذا، گزینهٔ ۲ صحیح می‌باشد.

۹۹-طبق تعریف، نسبت شار متقابلِ گذرنده از مقطع یک سیستم تقسیم بر جریان سیستمِ تولید کنندهٔ شار، معرف اندوکتانس متقابل است. چنانچه مولد جریان در سیستم یک باشد، اندوکتانس متقابل رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$L_{۲۱}=\frac{\lambda_{۲۱}}{I_{۱}}=\frac{N_{۲}\varphi_{۲۱}}{I_{۱}}=\frac{N_{۲}\int_{S_{۲}}\mathbf{B}_{۱}\cdot\mathbf{ds}_{۲}}{I_{۱}}$$

برای محاسبهٔ انتگرال فوق، به بردار عمود بر صفحه نیاز داریم:

$$\vec{a}_{n}=\frac{\vec{a}_{x}+\vec{a}_{y}+\vec{a}_{z}}{\sqrt{۱۱}},\quad \vec{a}_{n}.\vec{a}_{n}=\cos\theta=\frac{۳}{\sqrt{۱۱}}$$

لذا:

$$L_{۱۲}=\frac{\phi_{۱۲}}{I}=\frac{BS\cos\theta}{I}=\frac{\frac{\mu_{\circ}I}{۲}\frac{a^{۲}}{(a^{۲}+h^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\times\pi b^{۲}\times\cos\theta}{I}$$

با قراردادن مقادیر ارائه‌شده در سوال:

$$\left.\begin{array}{l} h>>a\Rightarrow L_{۱۲}=\dfrac{\mu_{\circ}\pi a^{۲}b^{۲}\times\dfrac{۳}{\sqrt{۱۱}}}{۲h^{۳}} \\ h=\dfrac{d}{۴}\sqrt{۳}\end{array}\right\}\Rightarrow L_{۱۲}=\frac{۳\mu_{\circ}\pi a^{۲}b^{۲}}{d^{۳}\times\sqrt{۲۲}}$$

بنابراین، گزینهٔ ۴ صحیح است.

۱۰۰-پیش از قطع کلید،کرهٔ رسانا دارای پتانسیل است؛ پس تغییرات جریان در این مجموعه مشابه تغییرات جریان دو سر خازن است. پس، ابتدا ظرفیت را محاسبه نموده و با توجه به اختلاف پتانسیل، جریان را پیدا می‌کنیم:

$$C=۴\pi\varepsilon_{\circ}R=۸\pi\varepsilon_{\circ},\ V_{C}(\circ^{-})=+V_{\circ}=۱\circ^{V}$$

$$i_{c}(t)=C\frac{dV}{dt}\quad\rightarrow\quad I=\int_{\circ^{-}}^{\infty}i(t)\ dt=-\int_{\circ^{-}}^{\infty}i_{C}(t)dt=C\Big[V_{C}(\circ^{-})-V_{C}(\infty)\Big]=۸\pi\varepsilon_{\circ}\times۱\circ=۸\circ\pi\varepsilon_{\circ}$$

بنابراین،گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۱۰۱- ابتدا رلوکتانس مغناطیسی هسته و فاصلهٔ هوایی را محاسبه می‌کنیم:

$$R=\frac{l}{۲۰۰\mu_{\circ}S}+\frac{l_g}{\mu_{\circ}S}\xrightarrow{A=۲\times۱۰^{-۴},l_g=۲\times۱۰^{-۳},l=۵۰\times۱۰^{-۳}}R=\frac{۲\times۱۰^{-۳}}{\mu_{\circ}S}+\frac{۵۰\times۱۰^{-۳}}{۲۰۰\mu_{\circ}S}$$

با استفاده از شارمغناطیسی، اندوکتانس بدست می‌آید:

$$\varphi=\frac{NI}{R}=NI\left[\frac{۴\mu_{\circ}S\times۱۰^{۳}}{۹}\right]\rightarrow L=\frac{N\varphi}{I}=\frac{۸\mu_{\circ}N^{۲}}{۹۰}$$

بر این اساس، گزینه ۱ صحیح است.

۱۰۲- پتانسیل ناشی از دیسک با چگالی بار ρ_s برابر $V=\frac{\rho_s}{۲\varepsilon_{\circ}}(\sqrt{a^{۲}+z^{۲}}-z)$ می‌باشد. با قرار دادن توزیع بار و انتگرال‌گیری، پتانسیل در مبدأ مختصات مطابق رابطهٔ زیر است:

$$V=۲\times\int_{\circ}^{h}\frac{\rho\,dz}{۲\varepsilon_{\circ}}(\sqrt{a^{۲}+z^{۲}}-z)\Rightarrow V\times\left[(a^{۲}+h^{۲})^{\frac{۳}{۲}}-\frac{۱}{۲}h^{۲}\right]$$

اگر a و h نصف شوند مقدار V یک چهارم می‌شود؛ پس گزینه ۲ صحیح است.

۱۰۳-با توجه به اینکه میدان مغناطیسی در $x\rightarrow\infty$ وجود ندارد، بنابراین خطوط میدان در جهت x می‌بایست به فرم e^{-bx} باشد.با توجه به اینکه در $y=\circ$ خطوط میدان غیر صفر است، خطوط میدان نمی‌توانندبه صورت $\sin By$ باشند، لذاگزینهٔ ۳ صحیح است.

۱۰۴-برای محاسبهٔ میدان از گرادیان پتانسیل استفاده می‌کنیم؛ مطابق قضیهٔ شرایط مرزی، تابع پتانسیل در فضا به صورت زیر می‌باشد (چرا؟):

$$V(x,y)=\sum_{n=\circ}^{\infty}V_{\circ}e^{-n\pi(y-\frac{۱}{۲})}\cos n\pi(x-\frac{۱}{۲})$$

با توجه به اینکه به دنبال میدان در $y\rightarrow\infty$ هستیم،تنها جملهٔ اول مدنظر خواهد بود:

$$V(x,y)=V_{\circ}e^{-\pi(y-\frac{۱}{۲})}\cos\pi(x-\frac{۱}{۲})$$

با گرادیان‌گیری از تابع پتانسیل:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\nabla V} = -V_{\circ}\left[-\pi e^{-\pi(y-\frac{۱}{۲})}\sin\pi(x-\frac{۱}{۲})\vec{a}_x - \pi e^{-(y--\frac{۱}{۲})}\cos\pi(x-\frac{۱}{۲})\vec{a}_y\right]$$

پس:

$$\tan\alpha = \left|\frac{E_y}{E_x}\right|_{x=\frac{۱}{۴}} = \left|\frac{\cos(\pi\times\frac{۱}{۴})}{\sin(\pi\times\frac{-۱}{۴})}\right| = ۱ \qquad \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۴}$$

بنابراین، گزینهٔ ۲ صحیح می‌باشد.

۱۰۵- از اصل موضوع مغناطیس ساکن استفاده می‌کنیم؛کافی است با استفاده از $\oint H.dl$ حول مقطع هادی، شدت میدان مغناطیسی را محاسبه و در نهایت انرژی مغناطیسی را بدست آوریم. برای شدت میدان مغناطیسی خواهیم داشت:

$$\oint H.dl = I_{in} \quad \rightarrow H\,۲\pi r = \frac{I\,\pi\,(r^۲-a^۲)}{\pi\,(b^۲-a^۲)} \quad \Rightarrow H = \frac{I}{۲\pi(b^۲-a^۲)}(r-\frac{a^۲}{r})a_{\phi}$$

برای محاسبهٔ انرژی لازم است تا چگالی انرژی را در فضای محصورشده محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} W_{in} &= \frac{۱}{۲}\int_{\circ}^{۱}\int_{a}^{b}\int_{\circ}^{۲\pi}\mu_{\circ}\left|H\right|^۲ r\,dr\,d\phi\;dz = \frac{\mu_{\circ}\,I^۲}{۴\,\pi\,(b^۲-a^۲)^۲}\int_{a}^{b}(r^۳+\frac{a^۴}{r}-۲a^۲) \\ &= \frac{\mu_{\circ}\,I^۲}{۴\,\pi\,(b^۲-a^۲)^۲}\left[\frac{۱}{۴}(b^۴-a^۴)+a^۴\ln\frac{b}{a}-a^۲(b^۲-a^۲)\right] \\ &= \frac{\mu_{\circ}\,I^۲}{۱۶\,\pi\,(b^۲-a^۲)^۲}\left[b^۲-۳a^۲+\frac{۴\,a^۲\ln\frac{b}{a}}{(a^۲-b^۲)}\right] \end{aligned}$$

بر این اساس، گزینهٔ ۲ صحیح می‌باشد.

سوالات آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل – سال ۱۳۹۰

الکترومغناطیس

۹۱- روی خط به معادلهٔ $\mathbf{r}\times\mathbf{a}_x=-5\mathbf{a}_z$ بار الکتریکی با چگالی یکنواخت به اندازهٔ $\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}$ کولن بر متر توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ در فضای آزاد در نقطه‌ای به مختصات $(2,5,4)$ با کدام رابطهٔ زیر داده می‌شود؟ (می‌دانیم $\varepsilon_0=\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\frac{F}{M}$)

۱) $-\frac{1}{8\pi}\mathbf{a}_z$

۲) $-\frac{1}{10\pi}\mathbf{a}_y$

۳) $\frac{1}{10\pi}\mathbf{a}_y$

۴) $\frac{1}{8\pi}\mathbf{a}_z$

۹۲- در مرکز یک حلقهٔ جریان دایروی به شعاع b و جریان I_1 ، حلقهٔ جریان دایروی دیگری به شعاع $\frac{b}{100}$ و جریان I_2 به طور مایل قرار دارد، به قسمی که محور این دو حلقه با یکدیگر زاویهٔ θ_0 می‌سازند. اندازهٔ اندوکتانس متقابل M_{12} این دو حلقه چقدر است؟

۱) $\frac{\mu_0\pi b}{2}\sin\theta_0$

۱) $\frac{\mu_0\pi b}{2}\cos\theta_0$

۳) $\frac{\mu_0\pi b}{2\times10^4}\sin\theta_0$

۴) $\frac{\mu_0\pi b}{2\times10^4}\cos\theta_0$

۹۳- بار حجمی یکنواخت با چگالی ثابت ρ_0 کولن بر متر مکعب، در حجمی به شکل نیم‌کره به شعاع a توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای از قاعدهٔ نیم‌کره به فاصلهٔ $\frac{a}{2}$ از مرکز نیم‌کره چند ولت است؟

۱) $\frac{11}{48}\frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0}$

۲) $\frac{11}{24}\frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0}$

۳) $\frac{3}{24}\frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0}$

۴) $\frac{3}{48}\frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0}$

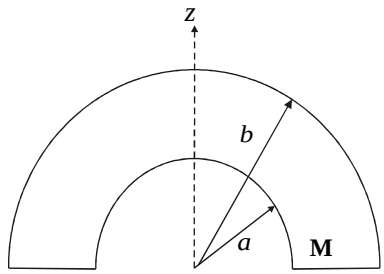
۹۴- یک آهنربای دائمی به شکل نیم‌کره‌ای به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b دارای مغناطیس‌شدگی غیریکنواخت شعاعی با بردار $\mathbf{M}=CR\mathbf{a}_R$ می‌باشد که در آن C یک عدد ثابت است. اندازهٔ پتانسیل مغناطیسی $|\mathbf{A}|$ ناشی از این آهنربا در نقطه‌ای روی محور z کدام است؟

۱) $\frac{\mu_0 C}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+b^2}}-\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)$

۲) $\frac{\mu_0 C}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2+b^2}}-\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)$

۳) $\frac{\mu_0 C}{2}$

۴) صفر



۹۵- حلقهٔ دایروی به شعاع a در صفحهٔ $z=0$ و به مرکز مبداء مختصات مفروض است. به ازای $y>0$ بارالکتریکی با چگالی خطی q کولن بر متر و به ازای $y<0$ بار الکتریکی با چگالی خطی $-q$ کولن بر متر بر روی این حلقه توزیع شده است. کدام رابطهٔ زیر اندازهٔ میدان الکتریکی $|\mathbf{E}|$ در نقطهٔ $(0,0,z)$ است؟

۱) $\dfrac{a^2 q}{2\pi\varepsilon_0 \left(a^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

۲) $\dfrac{2a^2 q}{\pi\varepsilon_0 \left(a^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

۳) $\dfrac{a^2 q}{\pi\varepsilon_0 \left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

۴) $\dfrac{2a^2 q}{\pi\varepsilon_0 \left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

۹۶- یک بار نقطه‌ای به جرم m و بار $-q$ در مرکز یک حلقهٔ بار دایروی به شعاع a و چگالی خطی λ کولن بر متر قرار گرفته است. پریود نوسانات این بار نقطه‌ای برای جابجائی‌های بسیار کوچک در راستای محور حلقهٔ بار کدام است؟

۱) $\pi a\sqrt{\dfrac{4m\varepsilon_0}{\lambda q}}$

۲) $\pi a\sqrt{\dfrac{8m\varepsilon_0}{\lambda q}}$

۳) $\pi a\sqrt{\dfrac{4\varepsilon_0}{m\lambda q}}$

۴) $\pi a\sqrt{\dfrac{8m}{\varepsilon_0\lambda q}}$

۹۷- یک استوانهٔ نامحدود از جنس فروالکتریک دارای پلاریزاسیون دائمی $\mathbf{P}(r)=\left(1-\dfrac{r}{a}\right)\mathbf{a}_r$ می‌باشد که در آن a شعاع استوانه و r فاصله از محور استوانه است. این استوانه با سرعت زاویه‌ای ω حول محور خود در جهت مثلثاتی می‌چرخد. شدت میدان مغناطیسی $\mathbf{H}$ درون استوانه یعنی برای $0<r<a$ کدام است؟

۱) $\omega\left(1-\dfrac{r^2}{a^2}\right)\mathbf{a}_z$

۲) $\dfrac{\omega}{r}\left(1-\dfrac{r}{a}\right)\mathbf{a}_z$

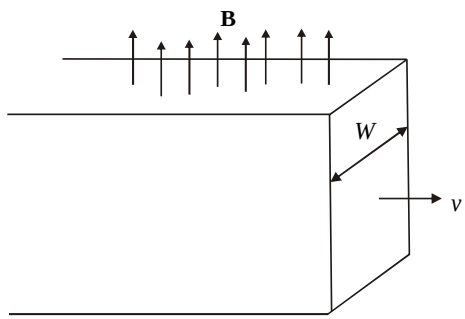
۳) $\omega r\left(1-\dfrac{r}{a}\right)\mathbf{a}_z$

۴) $\omega r\left(1+\dfrac{r}{a}\right)\mathbf{a}_z$

۹۸- زاویهٔ بردار شدت میدان مغناطیسی $\mathbf{H}$ با خط عمود بر مرز مشترک دو مادهٔ مغناطیسی در سمت مادهٔ اولیه ۴۵° و در سمت مادهٔ دوم ۳۰° است. اگر در مرز مشترک این دو محیط هیچ جریان آزادی نداشته باشیم، چگالی انرژی مغناطیسی در کدام طرف مرز بیشتر است؟

۱) طرف مادهٔ اول
۲) طرفی مادهٔ دوم
۳) در دو طرف یکسان است.
۴) نمی‌توان قضاوت کرد.

۹۹- بار سطحی با چگالی $\rho_s = \sigma \cos \beta x$ کولن بر متر مربع روی صفحهٔ $y = ۰$ توزیع شده است. معادلهٔ خطوط میدان الکتریکی در نیم‌فضای $y > ۰$ کدام است؟



۱) $e^{-\beta y}\left|\sin \beta x\right| =$ ثابت
۲) $e^{-\beta y}\left|\cos \beta x\right| =$ ثابت
۳) $e^{-\beta y}\left|\csc \beta x\right| =$ ثابت
۴) $e^{-\beta y}\left|\sec \beta x\right| =$ ثابت

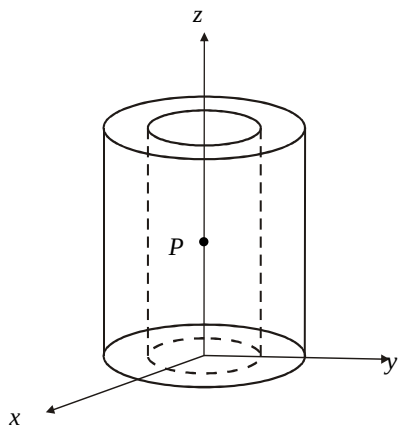
۱۰۰- یک ورقهٔ بزرگ فلزی با رسانایی ویژهٔ σ و ضخامت W به طور عمودی داخل یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}$ با سرعت $\mathbf{V}$ (ثابت) حرکت می‌کند. اگر $\mathbf{V}$ بر $\mathbf{B}$ عمود باشد، اندازهٔ نیروی بازدارندهٔ حرکت بر واحد سطح قطعهٔ رسانا چقدر است؟ می‌دانیم $\left|\mathbf{B}\right| = B$ و $\left|\mathbf{V}\right| = v$

۱) $\sigma v W B$
۲) $\sigma v W B^۲$
۳) $\sigma v^۲ B^۲$
۴) $\sigma v^۲ B^۲ W$

۱۰۱- یک کرهٔ رسانا به شعاع a و پتانسیل $V_۰$ در فضای آزاد قرار دارد. این کره را در محیطی به ضریب گذردهی $\varepsilon = \varepsilon_۰\left(۱+\frac{a^۲}{R^۲}\right)$ قرار می‌دهیم. میزان تغییر انرژی ذخیره شده در سیستم Δw طی این فرآیند چقدر است؟

۱) $\left(\frac{\pi}{۴}-۱\right)۲\pi\varepsilon_۰ a V_۰^۲$
۲) $\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{۱}{۲}\right)۲\pi\varepsilon_۰ a V_۰^۲$
۲) $\left(\frac{\pi}{۲}-۱\right)۲\pi\varepsilon_۰ a V_۰^۲$
۴) $\left(\frac{\pi}{۲}-\frac{۱}{۲}\right)۲\pi\varepsilon_۰ a V_۰^۲$

۱۰۲- مطابق شکل ناحیهٔ $0 \le z \le L$، $0 \le \varphi \le 2\pi$ و $\frac{L}{2} \le r \le L$ توسط دوقطبی‌های مغناطیسی با مغناطیس‌شدگی یکنواخت $M_0 \mathbf{a}_z$ پر شده و بقیهٔ نواحی خلاء است. $\mathbf{B}$ چگالی شار مغناطیسی ناشی از این دوقطبی‌ها در نقطهٔ $P(0,0,\frac{L}{2})$ چقدر است؟



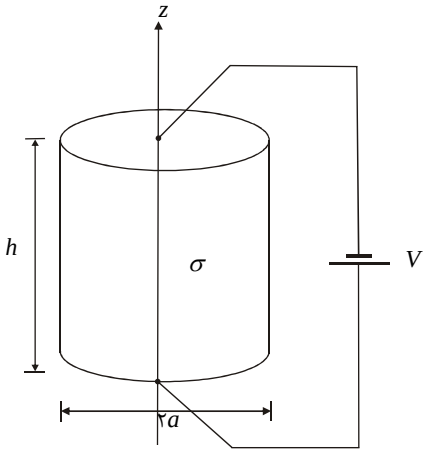
۱) 0

۲) $\mu_0 M_0 \mathbf{a}_z$

۳) $\mu_0 M_0 \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}}\right)\mathbf{a}_z$

۴) $\mu_0 M_0 \left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{8}}{\sqrt{10}}\right)\mathbf{a}_z$

۱۰۳- فاصلهٔ بین دو دیسک دایروی به شعاع a از جنس رسانای کامل هستند توسط ماده‌ای با رسانایی ناهمگن $\sigma = k\left(1+\frac{z}{h}\right)\left(1+\frac{r}{a}\right)$ پر شده که h فاصلهٔ بین دو دیسک بوده و $0 \le z \le h$ و r فاصلهٔ محور ساختار می‌باشد. مقاومت اهمی R بین دو دیسک چقدر است؟



۱) $\frac{3\,Ln2}{5\pi}\frac{h}{ka^2}$

۲) $\frac{3\,Ln2}{10\pi}\frac{h}{ka^2}$

۳) $\frac{Ln2}{4\pi}\frac{h}{ka^2}$

۴) $\frac{3\,Ln2}{\pi}\frac{h}{ka^2}$

۱۰۴- یک خازن مسطح در دست است. صفحهٔ زیرین خازن در صفحهٔ $z=0$ و صفحهٔ بالایی آن در صفحهٔ $z=h$ قرار گرفته است. مساحت هر صفحه A فرض می‌شود. بین دو صفحهٔ این خازن یک عایق غیر همگن با ضریب گذردهی نسبی به صورت $\varepsilon_r = \varepsilon_0\,1+a^2 z^2$ قرار دارد. ظرفیت این خازن با فرض $h^2 \ll A$ کدام است؟

۱) $\frac{2\varepsilon_0 Aa}{\tan^{-1}(2ah)}$

۲) $\frac{\varepsilon_0 Aa}{\tan^{-1}(ah)}$

۳) $\frac{2\sqrt{2}\varepsilon_0 Aa}{\tan^{-1}(2\sqrt{2}ah)}$

۴) $\frac{\sqrt{2}\varepsilon_0 Aa}{\tan^{-1}(\sqrt{2}ah)}$

۱۰۵- شدت میدان مغناطیسی در نیم‌فضای $0 < x < \infty$ که هیچ جریان الکتریکی در آن وجود ندارد به صورت $\mathbf{H} = e^{-bx}\left[3\sin 2y\,\mathbf{a}_x + a\cos 2y\,\mathbf{a}_y\right]$ داده شده که در آن a و b اعداد ثابت و مجهول هستند. پتانسیل برداری مغناطیسی $\mathbf{A} = A_z(x,y)\,\mathbf{a}_z$ در این ناحیه کدام است؟

۱) $A_z = \frac{3}{2}\mu_0 e^{2x}\sin 2y + c$

۲) $A_z = -\frac{3}{2}\mu_0 e^{2x}\sin 2y + c$

۳) $A_z = \frac{3}{2}\mu_0 e^{2x}\cos 2y + c$

۴) $A_z = -\frac{3}{2}\mu_0 e^{2x}\cos 2y + c$

پاسخ سوالات آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل – سال ۱۳۹۰

الکترومغناطیس

(سید مهدی مظهری؛ آزمایشگاه آنالیز سیستم‌های قدرت، دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

۹۱- یک خط بار و یک نقطه در فضا داده شده است. هدف محاسبهٔ میدان ناشی از خط بار در محل نقطهٔ ذکر شده است. بر این اساس لازم است تا رابطهٔ میدان حاصل از خط بار نامحدود در یک نقطهٔ دلخواه از فضا را به خاطر داشته باشید. مطابق شکل مقابل، شدت میدان در نقطهٔ از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{E}=\frac{\rho_l}{۴\,\pi\,\varepsilon_\circ\,r}\Big[(\cos\alpha_۱+\cos\alpha_۲)\,\mathbf{a}_r+(\sin\alpha_۱-\sin\alpha_۲)\,\mathbf{a}_z\Big]$$

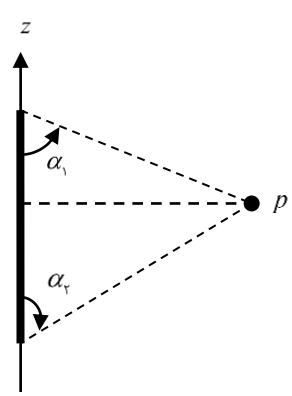
مطابق این رابطه کافی است محل تقاطع خط بار ذکر شده با محورهای x و y محاسبه شود. تحت چنین شرایطی r محاسبه شده و با توجه به نامحدود بودن خط بار، $\alpha_۱=\alpha_۲=\circ$ و پاسخ مسئله یافت می‌شود. بدین منظور:

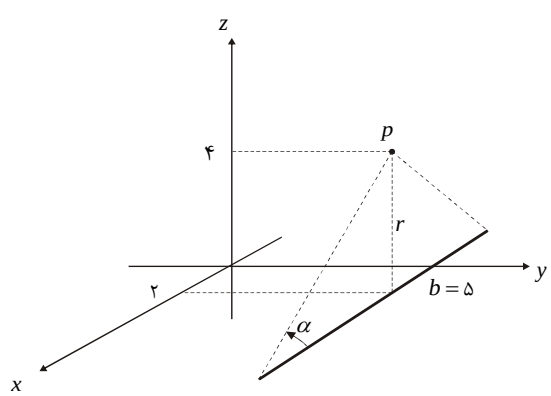
$$\mathbf{r}=a\,\mathbf{a}_x+b\,\mathbf{a}_y\xrightarrow{\mathbf{r}\times\mathbf{a}_x=-۵\,\mathbf{a}_z}\circ-b\,\mathbf{a}_z=-۵\,\mathbf{a}_z\;\rightarrow b=-۵$$

طراح مسأله را به نحوی تعریف کرده که نیازی به محاسبهٔ a نباشد! در واقع کافی است به این دقت کنید که عرض نقطهٔ برخورد خط بار با عرض نقطهٔ میدان برابر است. (به شکل زیر نگاه کنید) بر طبق رابطهٔ فوق، و ضمن توجه به وضعیت بردارهای مماس و عمود، نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{E}=\frac{\frac{۱}{۳۶\pi}\times۱\circ^{-۹}}{۴\,\pi\,\frac{۱}{۳۶\pi}\times۱\circ^{-۹}\times۴}\Big[(\cos\circ+\cos\circ)\,\mathbf{a}_z+(\sin\circ-\sin\circ)\,\mathbf{a}_r\Big]=\frac{۱}{۸\pi}\mathbf{a}_z$$

بر این اساس گزینهٔ (۴) صحیح خواهد بود.





۹۲- با توجه به اینکه شعاع حلقهٔ بزرگتر نسبت به حلقهٔ داخلی بسیار بزرگتر است لذا میدان این حلقه در مرکز خود دچار تغییر محسوسی نمی‌شود. لذا:

$$\varphi = B_{12}\, S_2 \xrightarrow[S_2=\pi\left(\frac{b}{100}\right)^2 \cos\theta]{B_{12}=\frac{\mu_0 I_1}{2b}} \varphi_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{2\times 10^4}\pi\, b\cos\theta_0$$

پس:

$$L_{12} = \frac{\varphi}{I_1} = \frac{\mu_0}{2\times 10^4}\pi\, b\cos\theta_0$$

در نتیجه گزینهٔ (۴) صحیح خواهد بود.

۹۳- میزان پتانسیل در نقطه‌ای به فاصلهٔ R داخل کره‌ای با چگالی بار حجمی یکنواخت و به شعاع a از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$V = \frac{\rho_0}{6\,\varepsilon_0}\; 3a^2 - R^2$$

کافی است در این رابطه $R = a/2$ فرض شود:

$$V = \frac{\rho_0}{6\,\varepsilon_0}\; 3a^2 - R^2 \Bigg|_{R=a/2} = \frac{11}{24}\frac{\rho_0\, a^2}{\varepsilon_0}$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است. چنانچه در یافتن رابطهٔ پتانسیل ضعف دارید، مطالب زیر ممکن است مفید فایده واقع شود:

بررسی فیزیکی مفهوم پتانسیل الکتریکی در توزیع متقارن کروی

از فیزیک پایه به یاد دارید که در یک پوستهٔ کروی باردارِ یکنواخت، همواره:

۱- نیروی الکترواستاتیک وارد بر بار نقطه‌ای درون پوسته صفر است.

۲- نیروی وارد بر بار نقطه‌ای واقع در خارج پوسته، همانند حالتیست که تمامی بار پوسته در مرکز آن متمرکز شده باشد.

با توجه به ارتباط نزدیک نیرو و شدت میدان، توضیحات یکسانی برای میدان نیز برقرار است. در این قسمت توضیحات مشابهی را برای پتانسیل بیان می‌شود. برای این منظور در سه مرحله با بیان این دیدگاه، راه حل‌کار ساده‌ای برای درک محاسبهٔ پتانسیل ساختارهای تو در تو ارائه می‌شود.

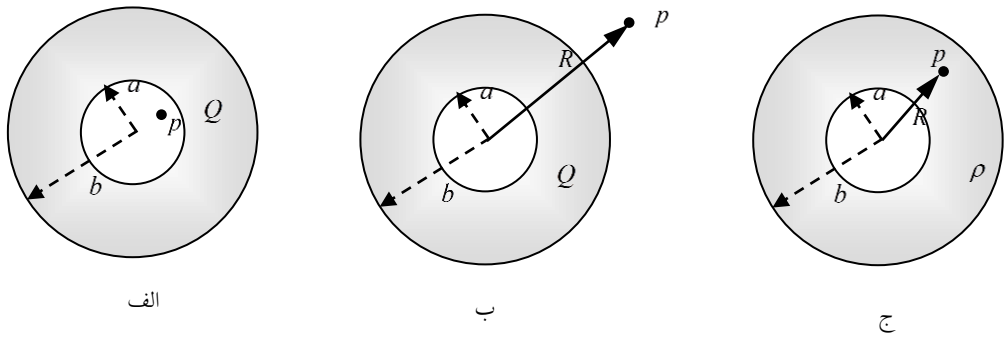
الف) بار Q بر روی پوستهٔ کروی شکل (الف) قرار گرفته، پتانسیل نقطه‌ای همچون p در داخل این پوسته برابر است با:

$$V_p = V(a)$$

در واقع پتانسیل نقطهٔ p برابر پتانسیل در آخرین نقطه‌ای است که در آن بار وجود دارد.

ب) بار Q بر روی پوستهٔ کروی شکل (ب) قرار گرفته، پتانسیل نقطه‌ای همچون p در خارج این پوسته برابر است با:

$$V_p = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0\, R}$$



در حقیقت پتانسیل p معادل است با پتانسیل نقطهٔ p وقتیکه کل بار در مرکز پوسته قرار گرفته باشد.

ج) حال فرض کنید، توزیع بار حجمی با تقارن کروی در داخل پوستهٔ کروی شکل (ج) قرار داشته باشد. برای محاسبهٔ پتانسل در نقطهٔ p از جمع آثار استفاده می‌کنیم:

۱- پتانسیل ناشی از پوسته‌های زیر p:

مطابق بحث قسمت ب کافی است بارهای موجودِ بین پوستهٔ داخلی و پوستهٔ p محاسبه شود. در این صورت:

$$V_1 = \frac{\int \rho\, dv}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\int_a^R \rho\, 4\pi R'^2\, dR'}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{\varepsilon_0 R}\int_a^R \rho R'^2\, dR'$$

۲- پتانسیل ناشی از پوسته‌های بالای p:

مشابه قسمت الف پتانسیل p (ناشی از این پوسته‌ها) برابر پتانسیل در آخرین پوسته‌ای است که در آنجا بار حضور دارد. به عبارتی:

$$V_2 = V_b + \int_R^b \frac{\rho\, 4\pi R'^2\, dR'}{4\pi\varepsilon_0 R'} = V_b + \frac{1}{\varepsilon_0}\int_R^b \rho R'\, dR'$$

پس پتانسیل برای نقطهٔ p شکل (ج) به صورت زیر خواهد بود:

$$V_p = \frac{1}{\varepsilon_0 R}\int_a^R \rho\, R'^2\, dR' + \frac{1}{\varepsilon_0}\int_R^b \rho\, R'\, dR' + V_b$$

تذکر: همانطور که ذکر شد، شرط صحیح بودن رابطهٔ فوق متقارن بودن توزیع بار است، یعنی در حالت کلی می‌بایست $\rho = \rho_0 f(R)$ باشد.

۹۴- می‌توان نشان داد که برای یک جسم مغناطیده جریان‌های حجمی و سطحی مقید بصورت زیر تعریف می‌شوند:

چگالی جریان حجمی: $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$

چگالی جریان سطحی: $\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times \mathbf{a}_n$

بر این اساس:

$$\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times \mathbf{a}_n = C\,R\,\mathbf{a}_R \times \mathbf{a}_R = ۰$$

$$\mathbf{J}_{ms} = \nabla \times \mathbf{M} = \ldots = ۰$$

پس جریانی وجود نداشته و لذا $|A| = ۰$ و پاسخ صحیح گزینهٔ (۴) خواهد بود.

۹۵- با استفاده از رابطهٔ $\mathbf{P} = \int \mathbf{R}\ dq$ بردار دوقطبی معادل را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbf{P} = \int \mathbf{R}\ dq = \int \mathbf{R}\ \rho_l\ dl$$

$$dl = a\ d\varphi \quad , \quad \mathbf{R} = r\ \mathbf{a}_r = a\ \mathbf{a}_r$$

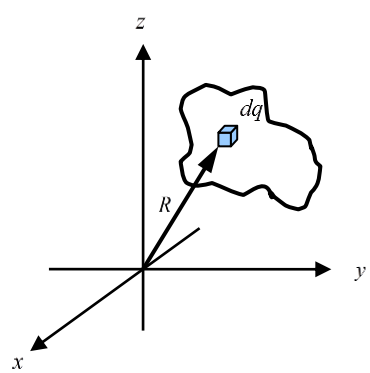
$$\mathbf{P} = \int_۰^{۲\pi} a\ \mathbf{a}_r\ \lambda\ \sin\varphi\ \ a\,d\varphi = a^۲ \lambda \int_۰^{۲\pi} \sin\varphi\ \mathbf{a}_r\ d\varphi$$

$$\mathbf{P} = a^۲ \lambda \int_۰^{۲\pi} \sin\varphi\,(\cos\varphi\ \mathbf{a}_x + \sin\varphi\ \mathbf{a}_y)\,d\varphi = ۴\ a^۲\ \lambda\ \mathbf{a}_y$$

حال با استفاده از روابط زیر شدت میدان و پتانسیل الکتریکی را محاسبه می‌نماییم:

$$\mathbf{E} = \frac{۱}{۴\ \pi\ \varepsilon_۰\ R^۳}\left(۳\frac{\mathbf{R}\ .\ \mathbf{P}}{R^۲}\ \mathbf{R} - \mathbf{P}\right)$$

$$V = \frac{\mathbf{P}\ .\ \mathbf{a}_R}{۴\ \pi\ \varepsilon_۰\ R^۲}$$



لذا برای میدان و پتانسیل خواهیم داشت:

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_{\circ}\,R^{3}}\left(3\frac{\mathbf{R}\,.\,\mathbf{P}}{R^{2}}\mathbf{R}-\mathbf{P}\right)\Bigg|_{\mathbf{P}=4\,a^{2}\,\lambda\,\mathbf{a}_{y}}=\frac{a^{2}\,\lambda}{\pi\,\varepsilon_{\circ}\,R^{3}}\;3\sin\theta\;\sin\varphi\;\mathbf{a}_{R}-\mathbf{a}_{y}$$

$$V=\frac{\mathbf{P}\;.\;\mathbf{a}_{R}}{4\,\pi\,\varepsilon_{\circ}\,R^{2}}\Bigg|_{\mathbf{P}=4\,a^{2}\,\lambda\,\mathbf{a}_{y}}=\frac{a^{2}\,\lambda\,\sin\theta\,\sin\varphi}{\pi\,\varepsilon_{\circ}\,R^{2}}$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

۹۶- یک بار نقطه‌ای در مرکز حلقهٔ بار قرار گرفته است. اگر قرار باشد نوسان کند باید به آن نیرو وارد شود. نیروی الکتریکی نیز ناشی از میدان الکتریکی حلقه بار بوده و مطابق رابطهٔ $\mathbf{E}=\dfrac{\rho_{l}\,z\,a}{2\varepsilon_{\circ}\;\;a^{2}+z^{2}\;^{\frac{3}{2}}}\;\mathbf{a}_{z}$ محاسبه می‌شود. با توجه به این موضوع که هدف مسأله پریود نوسانات است، پس باید رابطه‌ای برای رسیدن به خواستهٔ مسأله یافت شود. همانطور که می‌دانیم پریود نوسانات مطابق رابطهٔ زیر به سرعت زاویه‌ای وابسته می‌شود:

$$T=2\pi\,r\,\omega$$

برای رسیدن به سرعت زاویه‌ای نیز می‌توان یک معادلهٔ دو مجهولی به صورت زیر را حل نمود:

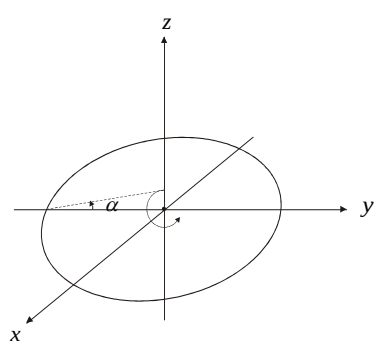
$$F=m\,a\rightarrow a=\frac{d^{2}\alpha}{d\,t^{2}}$$

مقدار نیروی وارد بر بار مطابق شکل زیر عبارتست از:

$$\mathbf{E}=\frac{\rho_{l}\,z\,a}{2\varepsilon_{\circ}\;\;a^{2}+\circ^{2}\;^{\frac{3}{2}}}\;\mathbf{a}_{z},\;\;\mathbf{F}=-\mathbf{E}\,q,\;\;\sin\alpha=\frac{z}{a^{2}+z^{2}\;^{1/2}}$$

با توجه به اینکه فرض بر پریود کوچک نوسانات است، $\sin\alpha=\alpha$. پس:

$$\mathbf{F}=-\mathbf{E}\,q=\frac{\rho_{l}\;\alpha}{2\varepsilon_{\circ}a}\;\mathbf{a}_{z}$$



نتیجه اینکه:

$$F = m\,a \rightarrow a = \frac{d^{۲}\alpha}{d\,t^{۲}} = \frac{\rho_{l}\ \alpha}{۲\varepsilon_{\circ} a}\ \mathbf{a}_{z}$$

که با حل این معادله ریشه‌هایی به صورت ذیل بدست می‌آید:

$$\omega = \sqrt{\frac{q\,\rho_{\ell}}{۲\varepsilon_{\circ}\,a^{۲}\,m}} \rightarrow ... T = \pi\,a\sqrt{\frac{۸\,\varepsilon_{\circ}\,m}{q\,\rho_{\ell}}}$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

۹۷- با محاسبهٔ بارهای مقید جریان را بدست می‌آوریم.

$$\rho_{bv} = -\nabla\ .\ \mathbf{P} = -\nabla\ .\left[\left(۱-\frac{r}{a}\right)\mathbf{a}_{r}\right] = -\frac{۱}{r}+\frac{۲}{a}$$

$$\rho_{bs} = \mathbf{P}\ .\ \mathbf{a}_{n}\Big|_{r\,=\,a} = ... = \circ$$

از طرفی برای محاسبهٔ چگالی جریان می‌توان نوشت:

$$\mathbf{J} = \rho V = \rho\ \ r\,\omega\,\mathbf{a}_{\varphi}\ \ \rightarrow J = \left(-\frac{۱}{r}+\frac{۲}{a}\right) r\,\omega\,\mathbf{a}_{\varphi}$$

بر این اساس مقدار جریان کل عبارت خواهد بود از:

$$I = \int_{\circ}^{\ell}\ \int_{r}^{a}\left(-\frac{۱}{r}+\frac{۲}{a}\right) r\,\omega\,dr\,dz = ... = \ell\,\omega\,r\left(۱-\frac{r}{a}\right)$$

با توجه به رابطهٔ $\oint_{C}\mathbf{B}\ .\ \mathbf{dl} = \mu_{\circ}\,I$ داریم:

$$\oint\ \mathbf{H}\ .\ \mathbf{d}l = I_{tot}\ \ \rightarrow\ \ H\,\ell = I_{tot}\ \rightarrow\ \ H = \omega\,r\left(۱-\frac{r}{a}\right)$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح خواهد بود.

۹۸- در مرز دو ناحیه روابط $\tan\theta_{۲} = \frac{\mu_{۲}}{\mu_{۱}}\tan\theta_{۱}$ و $H_{۲}\sin\theta_{۲} = H_{۱}\sin\theta_{۱}$ برقرار است لذا:

$$\begin{cases} \dfrac{\mu_{۱}}{\tan\theta_{۲}} = \dfrac{\mu_{۲}}{\tan\theta_{۱}}\ \ \rightarrow\ \ \mu_{۱} = \sqrt{۳}\,\mu_{۲} \\ \dfrac{H_{۱}}{\sin\theta_{۲}} = \dfrac{H_{۲}}{\sin\theta_{۱}}\ \ \rightarrow\ \ H_{۱} = \sqrt{۲}/۲\,H_{۲} \end{cases}$$

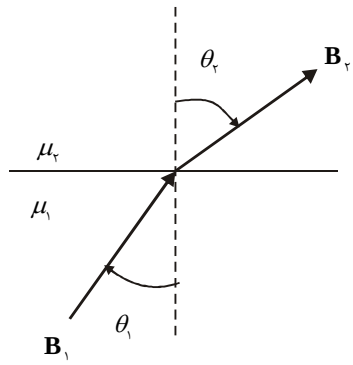
با توجه به رابطهٔ $W = \frac{۱}{۲}\mu\,H^{۲}$ برای دو ناحیه داریم:

$$W_{۱} = \frac{۱}{۲}\mu_{۱}\,H_{۱}^{۲} = \frac{۱}{۲}\mu_{۱}\ \sqrt{۲}/۲\,H_{۲}\ ^{۲} = \frac{۱}{۴}\mu_{۱}\,H_{۲}^{۲}\ \xrightarrow{\mu_{۱}=\sqrt{۳}\,\mu_{۲}}\ W_{۱} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}W_{۱}$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح خواهد بود.

چنانچه روابط متقابل در مرز دو ناحیه مغناطیسی با تراوایایی متفاوت را به خاطر ندارید، توضیحات ذیل ممکن است مفید واقع شود:

دو محیط مغناطیسی با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی μ_1 و μ_2 داده شده‌اند. اگر میدان در محیط ۱ مطابق شکل زیر با خط عمود بر مرز مشترک دو محیط زاویهٔ θ_1 بسازد:



الف) مطلوبست میدان در ناحیهٔ ۲ و زاویهٔ آن با خط عمود بر مرز مشترک دو محیط.

ب) ثابت کنید میدان بر مرز مشترک هوا با یک محیط با ضریب نفوذ مغناطیسی بسیار بالا عمود است.

حل: الف) با این فرض که در مرز مشترک جریان آزاد وجود ندارد، می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2}$$

از طرفی همواره روی مرز: $\mathbf{B}_{n1} = \mathbf{B}_{n2}$

پس از تجزیه این بردارها به مولفه‌های اولیه می‌توان گفت:

$$\mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2} \Rightarrow H_2 \sin\theta_2 = H_1 \sin\theta_1$$

$$\mathbf{B}_{n2} = \mathbf{B}_{n1} \Rightarrow \mu_2 H_2 \cos\theta_2 = \mu_1 H_1 \cos\theta_1$$

از تقسیم کردن دو رابطهٔ فوق بر هم داریم:

$$\tan\theta_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1}\tan\theta_1$$

پس:

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1\left[\sin^2\theta_1 + (\frac{\mu_2}{\mu_1})\cos^2\theta_1\right]^{\frac{1}{2}}$$

ب) کافی است فرض کنیم: $\mu_1 = \mu_0 \mu_r$ و $\mu_2 = \mu_0$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\tan\theta_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1}\tan\theta_1 \rightarrow \tan\theta_2 = \frac{1}{\mu_r}\tan\theta_1 \xrightarrow{\mu_r >> 1} \theta_2 = 0$$

و در نتیجه H_2 بر مرز مشترک دو محیط عمود است.

سوال: پاسخ شما را به یاد چه میدانی می‌اندازد؟ چه نتیجه‌هایی می‌گیرید؟

جواب: به این نتیجه رسیدیم که روی محیط‌های دارای تراوایی خیلی زیاد میدان مغناطیسی تقریباً عمود است. یعنی شبیه میدان الکتریکی روی هادی کامل! نتیجهٔ دیگری که می‌گیریم این است که مولفهٔ مماسی میدانِ ناحیهٔ با تراوایی بزرگ به ناحیهٔ با تراوایی کوچک نفوذ نمی‌کند. این امر کاربرد مدارهای مغناطیسی را عملی کرده است.

۹۹- برای حل سوال ناچاریم میدان الکتریکی را در فضا محاسبه نموده و سپس معادلهٔ خطوط میدان را محاسبه کنیم. برای محاسبهٔ شدت میدان از حل معادلهٔ لاپلاس و از رابطهٔ زیر کمک می‌گیریم:

$$V(x,y)=\sum\ A\sin ky+B\cos ky\quad Ce^{-kx}+De^{+kx}$$

با توجه به توضیحات مسأله ساده‌سازی انجام می‌دهیم:

$$V(x,y)=\sum\ A\sin kx+B\cos kx\quad e^{-ky}$$

از طرفی:

$$\mathbf{E}=-\nabla V=\sum_{i=\circ}^{\infty}\Big[\ Ak_i\sin\ k_ix\ -Bk_i\cos\ k_ix\ \ e^{-k_iy}\,\mathbf{a}_x-k_i\ \ A\cos\ k_ix\ +B\sin\ k_ix\ \ e^{-k_iy}\,\mathbf{a}_y\Big]$$

با اعمال شرایط مسئله، یعنی $\mathbf{a}_x=\rho_s,\ \rho_s=\sigma_\circ\cos\beta x$. $\mathbf{E}\Big|_{y=\circ}$ داریم:

$$Ak_i=\sigma_\circ\ \ ,\ \ k_i=\beta\ \ \Rightarrow\mathbf{E}=\sigma_\circ e^{-\beta y}\sin\beta x\ \mathbf{a}_x+\sigma_\circ e^{-\beta y}\cos\beta x\ \mathbf{a}_y$$

معادلهٔ خطوط میدان از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\tan\alpha=\frac{dy}{dx}=\frac{E_y}{E_x}$$

لذا:

$$\frac{dx}{E_x}=\frac{dy}{E_y}\ \ \rightarrow\ \ \frac{dx}{\sin\beta x}=\frac{dy}{\cos\beta x}\ \ \Rightarrow e^{-\beta y}\sin\beta x=cte$$

پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

۱۰۰- نیروی حاصل از تحرک مجموعهٔ حاوی جریان برابر $F=BI\omega$ خواهد بود. از طرفی در اثر تحرک در فضای میدان مغناطیسی، ولتاژ القایی $\mathbf{E}=\mathbf{V}\times\mathbf{B}$ را خواهیم داشت. می‌توان نتیجه گرفت:

$$\mathbf{E}=\mathbf{V}\times\mathbf{B}\ \ \rightarrow\left|E\right|=\left|V\right|\left|B\right|$$

پس:

$$F=BI\omega\xrightarrow[J=\sigma E]{I=JS}F=B^{۲}Sv\sigma\omega$$

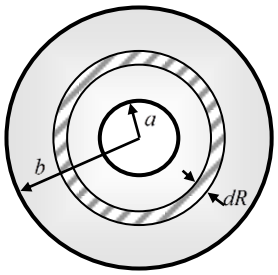
در نتیجه گزینهٔ (۲) صحیح خواهد بود

۱۰۱- این سوال را با درک سیستمی و توجه به روابط مرسوم ظرفیت خازن حل می‌کنیم. تغییر انرژی در سیستم برابر است با:

$$\Delta w = \frac{۱}{۲} C_۲ V_\circ^۲ - \frac{۱}{۲} C_۱ V_\circ^۲$$

که در آن $C_۱$ برابر $\frac{۴\pi\varepsilon}{\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}}$ و $C_۲$ مساوی $C = \frac{۴\pi\varepsilon_\circ}{\left[\tan^{-۱}\left(\frac{b}{a}\right)-\frac{\pi}{۴}\right]}$ می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است!

چنانچه در محاسبهٔ این ظرفیت‌ها ضعف دارید، توضیحات ذیل ممکن است مفید واقع شود:



مطابق شکل یک خازن کروی فرضی در نظر گرفتیم. در این مجموعه:

۱- $S = ۴\pi R^۲$

۲- $def(d) = dR$

برای مجموعه‌ای از خازن‌های سری:

$$\frac{۱}{C} = \int \frac{def(d)}{\varepsilon S} = \int_a^b \frac{dR}{\varepsilon\, ۴\pi R^۲} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon}\left(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}\right)$$

پس:

$$C = \frac{۴\pi\varepsilon}{\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}}$$

با توجه به این رابطه ظرفیت یک کرهٔ هادی ($b \to \infty$) به صورت زیر خواهد بود:

$$C = ۴\pi\varepsilon a$$

حال ظرفیت خازن کروی را که عایق بین صفحات هادی آن دارای $\varepsilon = \varepsilon_\circ\left(۱+\frac{a^۲}{R^۲}\right)$ می‌باشد، بدست می‌آوریم:

مشابه ظرفیت کروی عمل می‌کنیم؛ کافی است گذردهی را در المان دیفرانسیل ظرفیت قرار دهیم:

$$\frac{۱}{C} = \int \frac{def(d)}{\varepsilon S} = \int_a^b \frac{dR}{\varepsilon_\circ(۱+\frac{a^۲}{R^۲})\, ۴\pi R^۲} = \int_a^b \frac{dR}{۴\pi\varepsilon_\circ(R^۲+a^۲)} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\int_a^b \frac{dR}{R^۲+a^۲} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\tan^{-۱}\frac{R}{a}\Bigg|_a^b$$

پس:

$$C = \frac{۴\,\pi\,\varepsilon_{\circ}}{\left[\tan^{-۱}\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{\pi}{۴}\right]}$$

همانطور که مشاهده شد، روش دیفرانسیلی سخت‌ترین خازن‌ها را تبدیل به حل یک انتگرال می‌کند.

۱۰۲- چگالی حجمی جریان‌های مقید برابر صفر است (چرا؟) برای چگالی‌های سطحی داریم:

$$\mathbf{J}_{ms,۱} = \mathbf{M}\times\mathbf{a}_n\Big|_{r=L,\mathbf{a}_n=\mathbf{a}_r} = -M_{\circ}\,\mathbf{a}_{\varphi}$$

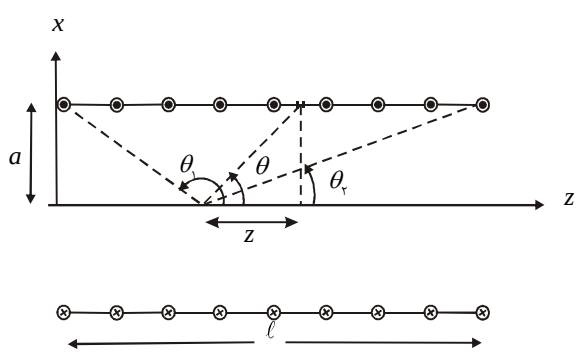
$$\mathbf{J}_{ms,۲} = \mathbf{M}\times\mathbf{a}_n\Big|_{r=L/۲,\mathbf{a}_n=\mathbf{a}_r} = M_{\circ}\,\mathbf{a}_{\varphi}$$

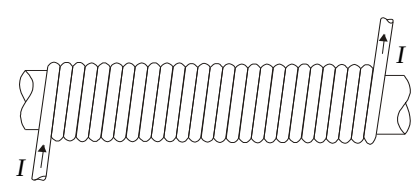
میدان مغناطیسی ناشی از این جریان‌ها مشابه میدان ناشی از سیم‌پیچ مسطح متراکم در نقطه‌ای بالای آن است. اگر کمی دقت کنید یک سیستم شبه‌سلونوئیدی داشته و میدان از رابطهٔ $\mathbf{H} = \frac{n\,I}{۲}(\cos\theta_۲ - \cos\theta_۱)\,\mathbf{a}_z = \frac{N\,I}{۲\,\ell}(\cos\theta_۲ - \cos\theta_۱)\,\mathbf{a}_z$ بدست می‌آید. لذا:

$$|B| = \frac{-\mu_{\circ}\,M_{\circ}}{\sqrt{۵}} + \frac{\mu_{\circ}\,M_{\circ}\sqrt{۲}}{۲}$$

پس گزینهٔ (۳) صحیح خواهد بود. چنانچه در محاسبهٔ میدان مشکل دارید، توضیحات زیر ممکن است مفید واقع شود:

یک سلونوئید با طول ℓ و شعاع a دارای N دور سیم که حامل جریان I اند می‌باشد. میدان را در داخل سلونوئید می‌یابیم





شکل فوق را در نظر بگیرید: با این فرض که حلقه‌ها به‌صورت دایره قرار گرفته‌اند و هیچ زاویه‌ای ندارند می‌توان از رابطهٔ $\mathbf{B} = \frac{\mu_{\circ}\,I\,r^۲}{۲\,(r^۲+z^۲)^{\frac{۳}{۲}}}\mathbf{a}_z$ در این مثال استفاده کرد. میدان در هر نقطه را ناشی از حلقه‌های زیرین و فوقانی آن نقطه می‌دانیم: پس بدون کوچکترین توجهی می‌توان فهمید که میدان در داخل سلونوئید فقط جهت $\mathbf{a}_z$ خواهد داشت. در این صورت:

$$d\mathbf{H}_z = \frac{I\ dl\ a^2}{2\ (a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{a}_z = \frac{I\ a^2\ n\ dz}{2\ (a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{a}_z$$

که در آن $dl = n\,dz = (\frac{N}{\ell})dz$ و n تعداد دور در واحد طول سیم است. اگر بخواهیم پاسخ را بر حسب زوایای نشان داده شده در شکل بدست آوریم، بایستی دقت کنیم که $\tan\theta = \frac{a}{z}$ از اینرو:

$$dz = -a\ \csc^2\theta\ d\theta = -\frac{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}\sin\theta\ d\theta$$

پس:

$$dH_z = -\frac{nI}{2}\sin\theta\ d\theta$$

$$H_z = -\frac{n\,I}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\ d\theta$$

و در نتیجه:

$$\mathbf{H} = \frac{n\,I}{2}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\ \mathbf{a}_z = \frac{N\,I}{2\ \ell}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\ \mathbf{a}_z$$

و برای یک حالت خاص:

اگر طول سلونوئید بی‌نهایت باشد $(\ell >> a)$ برای زوایای فوق داریم:

$$\theta_2 \approx 0 \quad ، \quad \theta_1 \approx \pi$$

پس:

$$\mathbf{H} = n\,I\ \mathbf{a}_z$$

۱۰۳- استفاده از رابطهٔ دیفرانسیلی محاسبهٔ مقاومت ساده‌ترین راهکار حل مسأله است. در حقیقت به جای حل یک مسئلهٔ فیزیکی یک انتگرال ساده می‌گیریم!

$$R = \int \frac{def(\ell)}{\sigma\,S}\bigg|_{def(\ell)=dz}$$

از طرفی با توجه به تغییرات σ با متغیرهای فضا:

$$\sigma\,S = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} k\left(1+\frac{z}{h}\right)\left(1+\frac{r}{a}\right)r\,dr\,d\varphi = \ldots = 2\,\pi\,k\left(1+\frac{z}{h}\right)\left(\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3\,a}\right)$$

پس:

$$R = \int\frac{def(\ell)}{\sigma\,S} = \int_0^{h}\frac{dz}{2\,\pi\,k\left(1+\frac{z}{h}\right)\left(\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3\,a}\right)} = \ldots = \frac{3\,h}{5\,\pi\,k\,a^2}\ Ln\,2h - Lnh\ = \frac{3\,h}{5\,\pi\,k\,a^2}Ln\,2$$

همانطور که مشاهده می‌شود، گزینهٔ (۱) صحیح خواهد بود.

۱۰۴- همانطور که می‌دانید، سوالات مربوط به خازن، با اطلاع دقیق از روش دیفرانسیلی، جزء ساده‌ترین مسائل مغناطیس هستند. در این مثال نیز کافی است از رابطهٔ زیر استفاده کنیم:

$$\frac{1}{C}=\int\frac{1}{def(c)}=\int\frac{def(d)}{\varepsilon S}$$

پس:

$$\frac{1}{C}=\int\frac{def(d)}{\varepsilon S}\Bigg|_{def(d)=dz,\ S=\iint\varepsilon\,dx\,dy}\rightarrow\int_0^h\frac{dz}{\varepsilon_0 A\ 1+a^2 z^2}=\frac{1}{\varepsilon_0 A\ a}\tan^{-1}(ah)\Bigg|_0^h=\frac{1}{\varepsilon_0 A\ a}\tan^{-1}(ah)$$

$$C=\frac{\varepsilon_0 A\ a}{\tan^{-1}(ah)}$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

۱۰۵- مطابق صورت سوال شدت میدان مغناطیسی داده شده است. بر این اساس با استفاده از رابطهٔ زیر می‌توان تناظر مناسبی میان میدان مغناطیسی و پتانسیل مغناطیسی ایجاد نمود.

$$\mathbf{H}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\mathbf{A}$$

از طرفی برای $\nabla\times\mathbf{A}$ داریم:

$$\nabla\times\mathbf{A}=...=\frac{\partial A_z}{\partial y}\mathbf{a}_x-\frac{\partial A_z}{\partial x}\mathbf{a}_y=\mu_0 e^{-bx}\left[3\sin 2y\,\mathbf{a}_x+a\cos 2y\,\mathbf{a}_y\right]$$

که از حل آن نتیجه می‌شود:

$$A_z=-\frac{3}{2}\mu_0\,e^{2x}\cos 2y+c$$

لذا گزینهٔ (۴) صحیح خواهد بود.

سوالات آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل – سال ۱۳۹۱

الکترومغناطیس

۱۲۷- صفحه $y=0$ دو ماده مغناطیسی همگن را از یکدیگرجدا می‌سازد. در $y>0$ ضریب نفوذپذیری نسبی $\mu_{r1}=2$ و در $y<0$، $\mu_{r2}=3$ می‌باشد. اگر در $y<0$ میدان مغناطیسی $\vec{B}=\mu_0(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$ باشد، بردار مغناطیس‌شدگی $\vec{M}$ در ناحیه $y>0$ کدام است؟

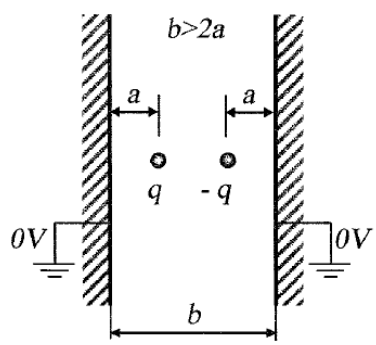
۱) $\frac{1}{2}\hat{x}+\frac{1}{2}\hat{y}+\frac{1}{2}\hat{z}$

۲) $\frac{1}{3}\hat{x}+\frac{1}{3}\hat{y}+\frac{1}{2}\hat{z}$

۳) $\frac{1}{3}\hat{x}+\frac{1}{2}\hat{y}+\frac{1}{3}\hat{z}$

۴) $\frac{1}{2}\hat{x}+\frac{1}{3}\hat{y}+\frac{1}{2}\hat{z}$

۱۲۸- مطابق شکل دوبار نقطه‌ای q و $-q$ در فاصله a از دو صفحه رسانای موازی و نامحدود که فاصله آن‌ها از یکدیگر b می‌باشد قرار دارند. اندازه بارکل القا شده روی هر یک از دو صفحه رسانا کدام است؟



۱) $\frac{b-2a}{b}q$

۲) $\frac{b-a}{b}q$

۳) $\frac{b-2a}{2a}q$

۴) $\frac{2b-a}{2a}q$

۱۲۹- استوانه توپری از جنس یک ماده مغناطیسی رسانا با ضریب نفوذپذیری نسبی $\mu_r=4\pi$ در دست است. محور این استوانه بر محور z منطبق می‌باشد. شعاع استوانه a طول آن بی‌نهایت و کل جریان عبوری از آن در جهت $\hat{z}$ برابر I است. بردار پتانسیل مغناطیسی $\vec{A}$ با فرض یکنواخت بودن توزیع جریان در داخل استوانه کدام است؟ فرض کنید در $r=a$ داشته باشیم $\vec{A}=0$.

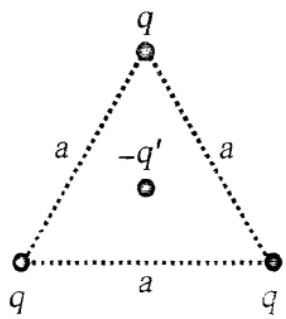
۱) $\frac{\mu_0 I}{\pi}(1-\frac{r^2}{a^2})\hat{z}$

۲) $\mu_0 I(1-\frac{r^2}{a^2})\hat{z}$

۳) $\frac{\mu_0 I}{4}(1-\frac{r^2}{a^2})\hat{z}$

۴) $\frac{\mu_\circ I}{۴\pi}(۱-\frac{r^۲}{a^۲})\hat{z}$

۱۳۰- سه بار نقطه‌ای q در رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a قرار دارند. یک ذره باردار به جرم m و بار $-q'$ در مرکز مثلث قرار دارد. اگر این ذره را به مقدار بسیار کوچکی در راستای عمود بر صفحه مثلث جابه جا و رها کنیم، پریود نوسانات آن در این راستا چقدر خواهد بود؟



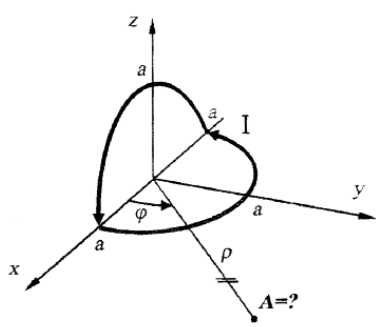
۱) $\frac{۴\pi}{۳}\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_\circ m a^۳}{\sqrt{۳}qq'}}$

۲) $\frac{۴\pi}{۹}\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_\circ m a^۳}{qq'}}$

۳) $\frac{۴\pi}{۹}\sqrt{\frac{\pi\sqrt{۳}\varepsilon_\circ m a^۳}{qq'}}$

۴) $\frac{۴\pi}{۳}\sqrt{\frac{\pi\sqrt{۳}\varepsilon_\circ m a^۳}{qq'}}$

۱۳۱- جریان مستقیم I مطابق شکل در یک مدار بسته شامل دو نیم‌دایره عمود بر هم جاری است. پتانسیل برداری $\vec{A}(\rho,\varphi,z=\circ)$ در فواصل خیلی دور از مدار و در صفحه $z=\circ$ کدام است؟



۱) $\frac{\mu_\circ I a^۲}{۸\rho^۲}=[(\hat{y}-\hat{z})\cos\varphi-\hat{x}\sin\varphi]$

۲) $\frac{\mu_\circ I a^۲}{۸\rho^۲}=[(\hat{y}+\hat{z})\sin\varphi-\hat{x}\cos\varphi]$

۳) $\frac{\mu_\circ I a^۲}{۸\rho^۲}=[(\hat{y}-\hat{z})\sin\varphi-\hat{x}\cos\varphi]$

۴) $\frac{\mu_\circ I a^۲}{۸\rho^۲}=[(\hat{y}+\hat{z})\cos\varphi+\hat{x}\sin\varphi]$

۱۳۲- یک کره عایق به شعاع ۲ متر، به مرکز مبدا مختصات و با حساسیت الکتریکی $\chi=۳$ در فضای خالی قرار دارد. دوبار نقطه‌ای $q=۴C$ یکی در محل $(r,\theta,\varphi)=(۱,\circ,\circ)$ و دیگری در محل $(r,\theta,\varphi)=(۱,\pi,\circ)$، در داخل کره عایق قرار گرفته اند.کل بار سطحی مقید $(bound)$ روی نیمی از سطح جانبی کره عایق به ازای $\circ\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$ چند کولن است؟

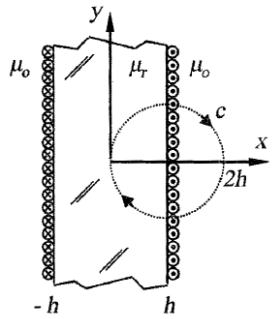
۱) ۲

۲) ۶

۳) ۴

۴) ۳

۱۳۳- ناحیه $|x| < h$ همانند شکل توسط یک تیغه با ضریب نفوذپذیری نسبی $\mu_r = ۳$ پر شده است، در حالی که فضای اطراف این تیغه خالی است. حال توسط منابع مناسب روی صفحه $x = h$ جریان الکتریکی سطحی با چگالی $-K_\circ \hat{z}$ برقرار می‌شود. در این صورت حاصل انتگرال خط $\oint_C \vec{B}.d\vec{l}$ روی مسیر دایروی بسته C به شعاع h در جهت نشان داده شده در شکل کدام است؟



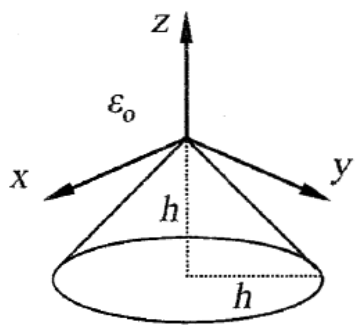
۱) $-\mu_\circ K_\circ h$

۲) $-۶\mu_\circ K_\circ h$

۳) $-۳\mu_\circ K_\circ h$

۴) $-۲\mu_\circ K_\circ h$

۱۳۴- یک فضای مخروطی به شعاع قائده h و ارتفاع h مطابق شکل از دو قطبی‌های الکتریکی با بردار پلاریزاسیون ثابت $P\hat{z}$ در امتداد محور مخروط پر شده است. پتانسیل الکتریکی در مبدا مختصات کدام است؟



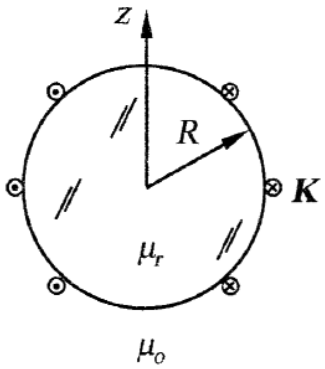
۱) $\frac{Ph}{۴\varepsilon_\circ}(۳\sqrt{۲} - ۲)$

۲) $\frac{Ph}{۲\varepsilon_\circ}(۲ - \sqrt{۲})$

۳) $\frac{Ph}{۲\varepsilon_\circ}(۳\sqrt{۲} - ۲)$

۴) $\frac{Ph}{۴\varepsilon_\circ}(۲ - \sqrt{۲})$

۱۳۵- یک کره به شعاع R از یک ماده مغناطیسی با ضریب نفوذپذیری نسبی $\mu_r = ۴$ مفروض است. همانند شکل فضای اطراف کره خالی است و مرکز کره بر مبدا مختصات منطبق است. روی کره سیم‌پیچ نازکی وجود که با عبور جریان مستقیم از آن جریان سطحی الکتریکی با چگالی $\mathbf{K} = K_\circ \sin\theta\, \mathbf{a}_\varphi$ بر روی سطح کره برقرار شده و کره مغناطیسی می‌شود. در این صورت چگالی جریان سطحی مقید $\vec{K}_m$ معادل مغناطیسی‌شدگی کره در $\theta = \frac{\pi}{۲}$ کدام است؟



۱) $-K_\circ \mathbf{a}_\varphi$

۲) $-\frac{K_\circ \mathbf{a}_\varphi}{۳}$

۳) $+\frac{K_\circ \mathbf{a}_\varphi}{۳}$

۴) $+K_\circ \mathbf{a}_\varphi$

۱۳۶- ناحیه $d < x < ۲d$ از عایقی با ضریب گذردهی غیر یکنواخت به صورت $\varepsilon(x) = ۴\varepsilon_\circ x / d$ پر شده است .اگر پتانسیل الکتریکی در صفحه $x = d$ و $x = ۲d$ به ترتیب صفر و $V_\circ$ باشد، آنگاه تابع پتانسیل الکتریکی در ناحیه $d < x < ۲d$ کدام است؟

۱) $V_\circ(\frac{x}{d} - ۱)$

۲) $V_\circ \frac{۱}{\ln ۲} \ln \frac{x}{d}$

۳) $\frac{V_\circ}{\ln(\frac{۷}{۳})} \ln(\frac{۴}{۳}\frac{x}{d} - \frac{۱}{۳})$

۴) $\frac{V_\circ}{۳}\left(\left(\frac{x}{d}\right)^۲ - ۱)\right)$

۱۳۷- یک دو قطبی بی‌نهایت کوچک مغناطیسی با گشتاور $m_۱\hat{z}$ واقع در مبدأ مختصات بر دوقطبی مغناطیسی بی‌نهایت کوچک با گشتاور $m_۲$ که در فاصله d خیلی دور از آن در امتداد نیم‌ساز ربع اول صفحه yz قرار دارد چه گشتاوری وارد می‌کند؟

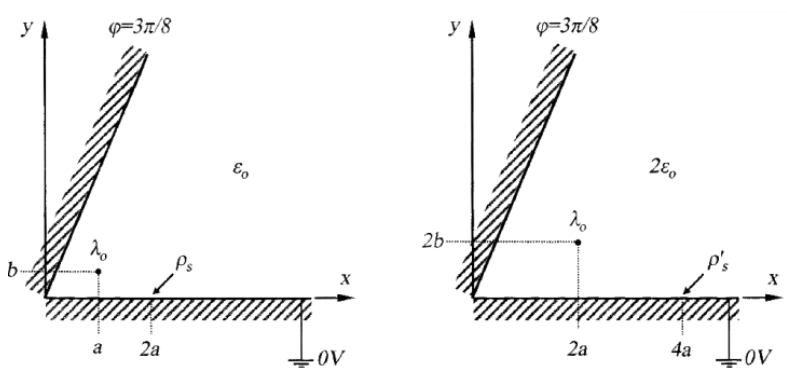
۱) $-\frac{\mu_\circ m_۱ m_۲}{۸\sqrt{۲}\pi d^۳}\ \hat{y} + \hat{z}$

۲) $-\frac{\mu_\circ m_۱ m_۲}{۸\sqrt{۲}\pi d^۳}\hat{x}$

۳) $-\frac{\sqrt{۲}\mu_\circ m_۱ m_۲}{۸\pi d^۳}\hat{x}$

۴) $+\frac{\mu_\circ m_۱ m_۲}{۸\sqrt{۲}\pi d^۳}\ \hat{y} + \hat{z}$

۱۳۸- دو مسأله شکل زیر را در نظر بگیرید. در هر دو مسأله صفحات $\varphi = \circ, \varphi = \frac{۳\pi}{۸}$ صفحات رسانای زمین شده (با پتانسیل صفر ولت) هستند. در مسأله اول یک بار خطی یکنواخت با چگالی ثابت $\lambda_\circ$ به موازات محور z از نقطه $(x,y) = (a,b)$ و در مسأله دوم همین توزیع بار خطی ار نقطه $(x,y,z) = (۲a,\circ,\circ)$ می‌گذرد. اگر در مسأله اول ρ_s' چگالی بار سطحی القأ شده روی صفحه رسانا در محل $(x,y,z) = (۲a,\circ,\circ)$ باشد، آنگاه ρ_s / ρ_s' کدام است؟ دقت شود که ضریب گذردهی در مسأله دوم دو برابر این ضریب در مسأله اول فرض می‌شود.



۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) ۲

۳) ۱

۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ سوالات آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل – سال ۱۳۹۱

الکترومغناطیس

(سید مهدی مظهری؛ آزمایشگاه آنالیز سیستم‌های قدرت، دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

۱۲۷- از قضیهٔ شرایط مرزی استفاده می‌کنیم:

با توجه به اینکه $\mathbf{M}_1 = (\mu_{r1} - 1)\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_1$، برای یافتن $\mathbf{M}_1$ کافی است $\mathbf{H}_1$ را محاسبه نماییم.

$$B_{1n} = B_{2n} \;\rightarrow\; \mu_0\ \mu_{r1} H_{1y} = B_{2y} \;\Rightarrow\; H_{1y} = \frac{1}{2\mu_0} B_{2y} = \frac{1}{2}$$

$$J_S = 0 \;\rightarrow\; \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t} = \frac{\mathbf{B}_{2t}}{\mu_0\ \mu_{r2}} = \frac{1}{3}\mathbf{a}_x + \frac{1}{3}\mathbf{a}_z$$

پس:

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_{1t} + \mathbf{H}_{1y} = \frac{1}{3}\mathbf{a}_x + \frac{1}{2}\mathbf{a}_y + \frac{1}{3}\mathbf{a}_z$$

بر این اساس، گزینهٔ ۱ صحیح می‌باشد.

۱۲۸- طبق نتایج تئوری تصاویر، چنانچه بار q در فاصلهٔ x از صفحهٔ اول باشد، بار القاءشده روی آن صفحه برابر $q_{i,x} = q\left(\frac{x-b}{b}\right)$ می‌باشد. اثر عدم حضور هر یک از بارهای مثبت و منفی را مطابق این رابطه محاسبه می‌نماییم:

$$\begin{cases} q_{i,(+q)} = -q\left(\frac{(b-a)-b}{b}\right) = q\frac{a}{b} \\ q_{i,(-q)} = q\left(\frac{a-b}{b}\right) \end{cases} \Rightarrow \left|q_{i,(+q)} + q_{i,(-q)}\right| = q\left(\frac{b-2a}{b}\right)$$

بر این اساس، گزینهٔ ۲ صحیح خواهد بود.

۱۲۹- برای محاسبهٔ بردار پتانسیل مغناطیسی به چگالی میدان مغناطیسی نیاز داریم.

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_\circ\,\mu_r\,J}{۲}\,r\,\mathbf{a}_\varphi\Bigg|_{J=\frac{I}{\pi\,a^۲}}=\frac{۲\,\mu_\circ\,I}{a^۲}\,r\,\mathbf{a}_\varphi$$

از مولفهٔ $\mathbf{a}_\varphi$ کرل بردار موردنظر را پیدا می‌کنیم:

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}=\frac{۱}{r}\begin{vmatrix}\mathbf{a}_r & r\,\mathbf{a}_\varphi & \mathbf{a}_z\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \circ & \circ & A_z\end{vmatrix}\rightarrow\frac{۲\,\mu_\circ\,I}{a^۲}\,r\,\mathbf{a}_\varphi=-\frac{۱}{r}\,r\,\mathbf{a}_\varphi\,\frac{\partial A_z}{\partial r}\;\Rightarrow\;\frac{\partial A_z}{\partial r}=-\frac{۲\,\mu_\circ\,I}{a^۲}\,r$$

$$A_z=-\frac{\mu_\circ\,I}{a^۲}\,r^۲+C\Bigg|_{A_z(r=a)=\circ}=\mu_\circ\,I\left(۱-\frac{r^۲}{a^۲}\right)$$

لذا گزینهٔ ۲ صحیح به نظر می‌رسد.

۱۳۰- روش کلی محاسبهٔ پریود نوسانات بدین صورت است که: ابتدا نیرو را محاسبه نموده و با استفاده از رابطهٔ $F=ma$ شتاب بدست می‌آید. شتاب با مشتق سرعت زاویه‌ای ارتباط داشته و معمولاً با حل یک معادلهٔ دیفرانسیل ساده، سرعت زاویه‌ای یافت می‌شود. توجه شود که در اینگونه مسائل معمولاً از هم‌ارزی‌های مثلثاتی برای ساده‌تر شده مسیر حل استفاده می‌شود. پس از محاسبهٔ سرعت زاویه‌ای، با توجه به رابطهٔ $T=\frac{۲\pi}{\omega}$ پریود نوسانات بدست می‌آید.

$$F_T=۳\,F_{۱T}=۳\left|F_۱\right|\sin\theta=۳\left|\frac{-q\,q'}{۴\,\pi\,\varepsilon_\circ\,(r')^۲}\right|\sin\theta\Bigg|_{\sin\theta\approx\theta}=\frac{۳\,q\,q'}{۴\,\pi\,\varepsilon_\circ\,(r')^۲}\,\theta$$

$$F=-ma\Bigg|_{a=r\frac{d^۲\theta}{dt^۲},\,r\approx r'}\rightarrow\frac{۳\,q\,q'}{۴\,\pi\,\varepsilon_\circ\,r^۲}\,\theta=-mr\frac{d^۲\theta}{dt^۲}$$

که از حل آن نتیجه می‌شود:

$$w=\sqrt{\frac{۳\,q\,q'}{۴\,\pi\,\varepsilon_{\circ}\,r^{۲}}}$$

و برای پریود نوسانات داریم:

$$T=\frac{۲\pi}{\omega}\bigg|_{r=\frac{a}{\sqrt{۳}}}=\frac{۴\pi}{۳}\sqrt{\frac{\pi\,\varepsilon_{\circ}\,m\,a^{۳}}{\sqrt{۳}\,q\,q'}}$$

بنابراین، گزینهٔ ۳ صحیح می‌باشد.

۱۳۱- ابتدا ممان‌های مغناطیسی را محاسبه نموده و با بکارگیری آن‌ها، پتانسیل مغناطیسی را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\mathbf{M}_{۱}=I\,S_{۱}\,\mathbf{a}_{z}=\left(\dfrac{I\,\pi\,a^{۲}}{۲}\right)\mathbf{a}_{z}\\ \mathbf{M}_{۲}=I\,S_{۲}\,\mathbf{a}_{y}=\left(\dfrac{I\,\pi\,a^{۲}}{۲}\right)\mathbf{a}_{y}\end{cases}$$

$$\mathbf{A}_{۱}=\frac{\mu_{\circ}\,\mathbf{M}_{۱}\times\mathbf{a}_{R}}{۴\,\pi\,r^{۲}}=\frac{\mu_{\circ}\;\;I\,\pi\,a^{۲}\big/۲\;\;\mathbf{a}_{z}\times\mathbf{a}_{R}}{۴\,\pi\,r^{۲}}=\frac{\mu_{\circ}\,I\,a^{۲}}{۸\,\pi\,r^{۲}}\sin\theta\;\;\mathbf{a}_{\varphi}\bigg|_{\theta=۹۰}=\frac{\mu_{\circ}\,I\,a^{۲}}{۸\,\pi\,r^{۲}}\mathbf{a}_{\varphi}=\frac{\mu_{\circ}\,I\,a^{۲}}{۸\,\pi\,r^{۲}}(-\sin\varphi\,\mathbf{a}_{x}+\cos\varphi\,\mathbf{a}_{y})$$

به صورت مشابه برای $\mathbf{A}_{۲}$ داریم:

$$\mathbf{A}_{۲}=-\frac{\mu_{\circ}\,I\,a^{۲}}{۸\,\pi\,r^{۲}}\;\cos\varphi\;\;\mathbf{a}_{z}$$

بردار پتانسیل مغناطیسی برایند عبارتست از:

$$\mathbf{A}_{۱}+\mathbf{A}_{۲}=\frac{\mu_{\circ}\,I\,a^{۲}}{۸\,\pi\,r^{۲}}\Big[-\sin\varphi\,\mathbf{a}_{x}+\cos\varphi(\mathbf{a}_{y}-\mathbf{a}_{z})\Big]$$

بنابراین، گزینهٔ ۳ صحیح است.

۱۳۲- با توجه به تقارن، شار عبوری از نیم‌کرهٔ بالایی نصف شار کل کره و برابر ۴ کولن می‌باشد، لذا:

$$\int_{0\le\theta\le\pi/2} D.dS = 4$$

بار مقید از انتگرال سطحی بردار قطبش بدست می‌آید:

$$Q_b = \int P.dS\Big|_{P=\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}D,\varepsilon_r=4} = \frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\int D.dS = 3$$

بنابراین، گزینهٔ ۱ صحیح است.

۱۳۳- از اصل موضوع مفناطیس ساکن استفاده می‌کنیم، لذا ابتدا چگالی شار مغناطیسی را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbf{B}_{in} = -2\left(\mu\frac{|k|}{2}\right)\mathbf{a}_y = -\mu_0\,\mu_r\,k_0\,\mathbf{a}_y = -3\,\mu_0\,k_0\,\mathbf{a}_y$$

پس:

$$\oint \mathbf{B}_{in}\,.\,d\mathbf{l} = -3\,\mu_0\,k_0\,\cancel{\int_{2h}\mathbf{a}_y\,.\,d\mathbf{l}} = -6\,\mu_0\,k_0\,h$$

بنابراین، گزینهٔ ۴ صحیح می‌باشد.

۱۳۴- یکی از سوال‌های مرسوم در الکترواستاتیک است؛ توزیع بار مقید را پیدا نموده و با استفاده از آن پتانسیل را در فضای هدف محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases}\sigma_{sb,1} = \mathbf{P}.(-\mathbf{a}_z) = -P\\ \sigma_{sb,2} = \mathbf{P}.(-\mathbf{a}_\theta)\Big|_{\theta=45} = P\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

پتانسیل حاصل از توزیع بار سطح اول از رابطهٔ $\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2+h^2}-z\right]$ بدست می‌آید:

$$V_1 = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2+h^2}-z\right]\Bigg|_{\rho_s=\sigma_{sb,1},\, z=h} = \frac{Ph}{2\varepsilon_0}(1-\sqrt{2})$$

برای توزیع بار دوم خواهیم داشت:

$$V_2 = \int \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R} = \int \frac{(P\sqrt{2}/2)R\sin\theta\, dR\, d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R} = \ldots = \frac{P}{8\pi\varepsilon_0}\times 2\pi\times h\sqrt{2} = \frac{Ph\sqrt{2}}{4\varepsilon_0}$$

برآیند این پتانسیل‌ها به صورت زیر می‌باشد:

$$V_1+V_2 = \frac{Ph}{2\varepsilon_0}(1-\sqrt{2}) + \frac{Ph\sqrt{2}}{4\varepsilon_0} = \frac{Ph}{4\varepsilon_0}(2-\sqrt{2})$$

بنابراین، گزینهٔ ۲ صحیح است.

۱۳۵- با توجه به جریان ممان مغناطیسی را محاسبه می‌نماییم:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int \mathbf{J}_s\, dS\times\mathbf{R} = \frac{1}{2}\int (k_0\sin\theta\,\mathbf{a}_\varphi)(R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi)\times(-R\,\mathbf{a}_R) = \frac{4}{3}\pi R^3 k_0\,\mathbf{a}_z$$

حال باید ببینیم که این مغناطیس‌شدگی از چه ممان حجمی‌ای ناشی شده است:

$$\mathbf{m} = \int \mathbf{M}\, dV \;\rightarrow\; \frac{4}{3}\pi R^3 k_0\,\mathbf{a}_z = \mathbf{M}_0\frac{4}{3}\pi R^3 \;\Rightarrow\; \mathbf{M}_0 = k_0\,\mathbf{a}_z$$

جریان ناشی از مغناطیس‌شدگی به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{J}_{mS} = \mathbf{M}\times\mathbf{a}_n = k_0\,\mathbf{a}_z\times\mathbf{a}_R = k_0\sin\theta\,\mathbf{a}_\varphi\Big|_{\theta=\pi/2} = k_0\,\mathbf{a}_\varphi$$

بنابراین گزینهٔ ۲ صحیح می‌باشد.

۱۳۶- چگالی شار در فضای بین دو صفحه به صورت $\mathbf{D} = -k\,\mathbf{a}_x$ فرض می‌شود. با توجه بـه اخـتلاف پتانسـیل میـان دو صـفحه، مقدار k را پیدا می‌کنیم:

$$V_۲ - V_۱ = -\int_d^{۲d} \mathbf{E}.d\mathbf{l} = \int_d^{۲d} \frac{k\,d}{۴\,\varepsilon_\circ\,x}\,dx = V_\circ$$

که از حل آن نتیجه می‌شود:

$$k = \frac{۴\,\varepsilon_\circ\,V_\circ}{d\ln ۲}$$

پس:

$$V(x) - V_۱ = -\int_d^{x} \mathbf{E}.d\mathbf{l} = \frac{V_\circ}{\ln ۲}\ln\left(\frac{x}{d}\right)$$

بنابراین گزینهٔ ۴ صحیح است.

۱۳۷- چگالی میدان مغناطیسی ناشی از دوقطبی مغناطیسی به صورت $\mathbf{B}_۱ = \frac{\mu_\circ\,m_۱}{۴\,\pi\,d^۳}\left[۲\cos\theta\,\mathbf{a}_R + \sin\theta\,\mathbf{a}_\theta\right]$ مـی‌باشـد. گشـتاور حاصل از اعمال $\mathbf{B}_۱$ بر روی مطابق $\mathbf{m}_۲$ رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\tau = \mathbf{m}_۲ \times \mathbf{B}_۱ = m_۲\,\mathbf{a}_R \times \frac{\mu_\circ\,m_۱}{۴\,\pi\,d^۳}\left[۲\cos\theta\,\mathbf{a}_R + \sin\theta\,\mathbf{a}_\theta\right] = \ldots = \frac{\mu_\circ\,m_۱\,m_۲}{۸\,\pi\,d^۳}\,\mathbf{a}_\varphi$$

در صفحهٔ خواسته‌شده در صورت سوال:

$$\tau = \frac{\mu_\circ\,m_۱\,m_۲}{۸\,\pi\,d^۳}\,\mathbf{a}_\varphi = \frac{\mu_\circ\,m_۱\,m_۲}{۸\,\pi\,d^۳}\left[\cos\varphi\,\mathbf{a}_y - \sin\varphi\,\mathbf{a}_x\right]\Bigg|_{\varphi = ۹\circ} = -\frac{\sqrt{۲}\,\mu_\circ\,m_۱\,m_۲}{۸\,\pi\,d^۳}\,\mathbf{a}_x$$

۱۳۸- ابتدا چگالی بار مقید در دو محیط را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \sigma_S = \varepsilon\,\mathbf{E}.\mathbf{a}_n = \varepsilon_\circ\,\varepsilon_r\left(\dfrac{-k\lambda_\circ}{r}\right)\cos\alpha \\ \sigma'_S = \varepsilon\,\mathbf{E}.\mathbf{a}_n = \varepsilon_\circ\,\varepsilon'_r\left(\dfrac{-k\lambda_\circ}{r'}\right)\cos\alpha' \end{cases}$$

پس:

$$\frac{\sigma_S}{\sigma'_S} = \frac{۱}{\varepsilon_r}\frac{r'}{r}\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'}\Bigg|_{\cos\alpha = \frac{b}{r},\,\cos\alpha' = \frac{۲b}{r}} = \frac{۱}{۴}\left(\frac{r'}{r}\right)^۲$$

از طرفی:

$$\begin{cases} r' = \sqrt{۴b^۲ + ۴a^۲} \\ r = \sqrt{b^۲ + a^۲} \end{cases} \rightarrow \frac{r'}{r} = ۲$$

لذا، $\frac{\sigma_S}{\sigma'_S} = ۱$ و بنابراین گزینهٔ ۱ صحیح است.

POWEREN.IR

پاسخ سوالات آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل – سال ۱۳۹۲

الکترومغناطیس

(سید مهدی مظهری؛ آزمایشگاه آنالیز سیستم‌های قدرت، دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

۱۲۷- بار درون کره به سادگی و با انتگرال‌گیری از توزیع بار محاسبه می‌شود:

$$Q_S = \int p_S \, dS_z = \int a\, y^2 r \, dr \, d\phi$$

که در آن $y = r\cos\phi$ می‌باشد؛ برای محاسبهٔ شعاع از قضیهٔ فیثا غورث استفاده می‌کنیم ($y = \sqrt{a^2 - (z')^2}\Big|_{a=1,\, z'=0.5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$).

پس:

$$Q_S = a\int r^3 \cos^2\phi \; dr \, d\phi \xrightarrow{\int_0^{2\pi} \cos^2\phi \, d\phi = \pi} Q_S = a\,\pi \left(\frac{r^4}{4}\right)_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{9\,\pi\, a}{64}$$

بر این اساس، گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۱۲۸- پتانسیل مجموعهٔ ذکرشده با استفاده از جمع آثار ناشی از بارهای نقطه‌ای بدست می‌آید پتانسل حاصل از بار نقطه‌ای Q_i در نقطهٔ z_i مطابق رابطهٔ زیر می‌باشد:

$$V_i = \frac{Q_i}{4\,\pi\,\varepsilon_0\, z_i} = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{1}{9^i}$$

پس، برای پتانسیل مجموعهٔ بارها خواهیم داشت:

$$V = \sum_{i=0}^{\infty} V_i = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^i$$

سری فوق بیانگر یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدر نسبت $\frac{1}{9}$ می‌باشد؛ لذا:

$$V = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9}{32\,\pi\,\varepsilon_0}$$

بر این اساس، گزینه ۳ صحیح خواهد بود.

۱۲۹- هر کدام از حلقه‌ها، حاوی جریان بوده و بیانگر یک دوقطبی مغناطیسی می‌باشد. ممان حلقهٔ مربعی مطابق رابطهٔ زیر می‌باشد:

$$\vec{m}_۲ = I_۲ \vec{S}_۲ = b^۲ I_۲ \vec{a}_z$$

طبق تعریف، گشتاور وارد بر حلقهٔ مربعی از رابطهٔ $\tau_{۱۲} = \vec{m}_۲ \times \vec{B}_{۱۲}$ محاسبه می‌شود؛ چگالی شار مغناطیسی نیز مطابق رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\vec{B}_{۱۲} = -\frac{\mu_\circ m_۱}{۴\pi \ell^۳} \vec{a}_z = -\frac{\mu_\circ \pi a^۲ I_۱}{۴\pi \ell^۳} \vec{a}_z$$

با توجه به اینکه بردارهای $\vec{B}_{۱۲}$ و $\vec{m}_۲$ هم‌جهت هستند، گشتاوری بر حلقهٔ مربعی وارد نمی‌شود؛ به نظر می‌رسد که پاسخ مناسب این سوال در گزینه‌ها ارائه نشده است.

۱۳۰- دو راه حل متفاوت برای حل مسأله وجود دارد؛ در روش اول می‌توان با توجه به داشتن میدان، تناظری میان جریان و پتانسیل برقرار نمود. در روش دوم، می‌توان برای پیدا نمودن این تناظر از مقاومت الکتریکی تجهیز کمک گرفت. مطابق روش اول، با توجه به اینکه میدان در فضای میان دو کره ثابت است:

$$E = \frac{V}{b-a}$$

علاوه بر این، برای چگالی جریان خواهیم داشت:

$$\vec{J} = -\frac{I}{۴\pi R^۲} \vec{a}_R$$

با توجه به اینکه $\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma}$ و با در نظر داشتن رابطهٔ اول می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{cases} E = \frac{J}{\sigma} = \ldots = -\frac{I}{۴\pi\sigma_\circ} \\ E = \frac{V}{b-a} \end{cases} \rightarrow \vec{J} = -\frac{\sigma_\circ V_\circ}{b-a \ R^۲} \vec{a}_R$$

بنابراین، گزینه ۲ صحیح خواهد بود.

۱۳۱- پتانسیل برداری را با استفاده از جمع آثار محاسبه می‌کنیم. مثال ساده ولی وقت‌گیر است.

برای بخش نیم‌دایره داریم:

$$\vec{A}_1 = \int \frac{\mu_\circ I\, a\, d\phi\ \vec{a}_\phi}{4\pi a\sqrt{2}} = \frac{\mu_\circ I}{4\pi\sqrt{2}} \int_\circ^\pi - \sin\varphi\ d\phi\ \vec{a}_x = \frac{\mu_\circ I}{4\pi}\ -\sqrt{2}\ \vec{a}_x$$

برای پاره خط نیز داریم:

$$\vec{A}_2 = \int \frac{\mu_\circ I\, dx\, \vec{a}_x}{4\pi\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{\mu_\circ I}{4\pi} Ln\left[x+\sqrt{x^2+a^2}\right]_{-a}^{+a} \vec{a}_x = \frac{\mu_\circ I}{4\pi} Ln\left[\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right]\vec{a}_x$$

پس:

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \frac{\mu_\circ I}{4\pi}\left[Ln\left[\frac{\sqrt{2}+21}{\sqrt{2}-2}\right] - \sqrt{2}\right]\vec{a}_x$$

بنابراین، گزینه ۳ صحیح است.

۱۳۲- می‌توان بار الکتریکی $-\rho_\circ$ را در فضای حفره ایجاد و از جمع آثار دو شکل هندسی استفاده نمود؛ در غیر این صورت می‌بایست شدت میدان الکتریکی با محاسبهٔ دقیق مرزهای انتگرال‌گیری مورد بررسی قرار گیرد:

$$\vec{E} = \int \frac{dQ\,\vec{R}}{4\pi\varepsilon_\circ\left|\vec{R}\right|^3}\Bigg|_{\substack{dQ=\rho_\circ R^2 \sin\theta\, dR\, d\theta\, d\phi \\ \vec{R}=-R\vec{a}_R}} = \int\int \frac{\rho R^2 \sin\theta\, dR\, d\theta\, d\phi\ \ -R\vec{a}_R}{4\pi\varepsilon_\circ R^3}$$

در حالی که تغییرات θ به صورت $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ می‌باشد، برای R داریم:

$$r^2 + (z-a)^2 = a^2 \Bigg|_{\substack{r=R\sin\theta \\ r=R\sin\theta}} \rightarrow R^2 - 2aR\cos\theta = \circ \Rightarrow R = 2a\cos\theta$$

پس:

$$\vec{E} = \frac{-\rho_\circ\ 2\pi}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_\circ^{2a\cos\theta} dR\,(\sin\theta\cos\theta\, d\theta)\,\vec{a}_z = \frac{-\rho_\circ}{2\varepsilon_\circ}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2a\sin\theta\cos^2\theta\, d\theta\,\vec{a}_z = \frac{-\rho_\circ\, a\sqrt{2}}{12\varepsilon_\circ}\vec{a}_z$$

بر این اساس، گزینه ۳ صحیح به نظر می‌رسد.

۱۳۳- این سوال از متن فصل مغناطیس ساکن کتاب چنگ طراحی شده است! یک نمونه از حل را مبتنی بر بردارهای مغناطیس‌شدگی در آن‌جا ببینید. در این بخش با یک نکتهٔ ساده مثال را حل می‌کنیم:

استوانه‌ای به شعاع a و ارتفاع h در امتداد محورش بطور یکنواخت مغناطیده شده است. چگالی شار مغناطیسی مطابق رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

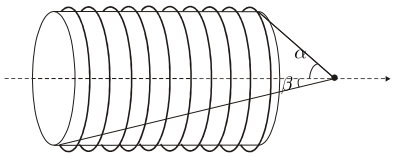
$$\vec{B} = \mu_\circ M_\circ \left[\frac{cos\alpha - cos\beta}{۲}\right]\mathbf{a}_z$$

توجیه: مغناطش یکنواخت است، یعنی با فرض اینکه محور استوانه z باشد، بردار مغناطش $\mathbf{M} = M_\circ \mathbf{a}_z$ است. کافی است جریان‌های مقید را محاسبه کنیم:

$$\mathbf{J}_{mv} = \nabla \times \mathbf{M} = \circ$$

$$\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times \mathbf{a}_n = M_\circ \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_r = M_\circ \mathbf{a}_\varphi$$

یعنی روی استوانه جریان سطحی با توزیع $M_\circ \mathbf{a}_\varphi$ داریم، در حقیقت سیستم این مثال را می‌توانیم به صورت شکل زیر مدل کنیم. پس پاسخی مشابه یک سلونوئید خواهیم داشت.



در سوال اخیر:

$$cos\,\alpha = \frac{\sqrt{۳}}{۲}, cos\,\beta = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

پس:

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ M_\circ}{۲}\left[\frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right] = \frac{\mu_\circ M_\circ}{۴}\left[\sqrt{۳}z - \sqrt{۲}\right]\mathbf{a}_z$$

بنابراین، گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

۱۳۴- بار قرار گرفته بر روی سطح داخلی کره را محاسبه نموده و چگالی آن را می‌یابیم. با توجه به اینکه پوستهٔ خارجی به پتانسیل V متصل شده، لذا:

$$Q_{\circ} = ۴\pi\varepsilon_{\circ} b V_{\circ}$$

پس:

$$\rho_{S,b} = \frac{Q_{\circ}}{۴\pi b^{۲}} = \frac{۴\pi\varepsilon_{\circ} b V_{\circ}}{۴\pi b^{۲}} = \frac{\varepsilon_{\circ} V_{\circ}}{b}$$

مطابق صورت سوال، و بدون کوچکترین توضیح اضافی!، گزینه ۱ صحیح است.

۱۳۵- برای محاسبهٔ نیرو وارد بر حلقه مربعی باید نیروی وارد بر اضلاع مختلف را محاسبه کنیم. با توجه به جهت جریان‌ها و قانون دست راست، هیچ نیرویی بر اضلاع افقی وارد نمی‌شود. علاوه بر این، با توجه به اینکه میدان در فضای $r < a$ صفر است، هیچ نیرویی بر ضلع عمودی داخل استوانه وارد نمی‌شود؛ نتیجه اینکه فقط به ضلع عمودی خارجی نیرو اعمال می‌شود.

با توجه به اینکه میدان حاصل از سیم حامل جریان در محل ضلع عمودی خارجی به صورت $\vec{B} = \frac{\mu_{\circ} I_{۱}}{۲\pi(۲b)}$ است، لذا:

$$\vec{F} = I_{۲}\,\ell_{۲}\,\vec{B}_{۱} = \frac{\mu_{\circ} I_{۱} I_{۲}}{۲\pi}\,\vec{a}_{r}$$

پس، گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۱۳۶- کافی است انتگرال سطحی چگالی جریان را محاسبه کنیم!

$$I = \int \vec{J}.\,d\vec{S}_{z}\Bigg|_{\vec{J}=\frac{۱}{R^{۲}\,sin\theta}\vec{a}_{R}-\frac{۱}{R^{۲}}\vec{a}_{\varphi}} = \int \frac{۱}{R^{۲}\,sin\theta}\,\vec{a}_{R}.\vec{a}_{z}\,dS_{z}\Bigg|_{\substack{\vec{a}_{R}.\vec{a}_{z}=\cos\theta \\ R\,sin\theta = r}} = \int\int \frac{sin\theta.cos\theta}{r^{۲}}\,r\,dr\,d\phi$$

با توجه به اینکه:

$$sin\theta = \frac{r}{\sqrt{r^{۲}+z^{۲}}},\ cos\theta = \frac{z}{\sqrt{r^{۲}+z^{۲}}}$$

لذا:

$$I=\int \frac{\frac{r}{\sqrt{r^{۲}+z^{۲}}}\times\frac{z}{\sqrt{r^{۲}+z^{۲}}}}{r^{۲}}\,r\,dr\,d\phi=\int\frac{z}{r^{۲}+z^{۲}}\,dr\,d\phi=\frac{۱}{h}\;۲\pi\;R$$

بنابراین، گزینه ۳ صحیح خواهد بود.

۱۳۷- سوال ساده‌ای است؛ ابتدا مقدار و محل بار تصویر را محاسبه نموده و سپس با استفاده از میدان دوقطبی الکتریکی پاسخ را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} q'=-\dfrac{a}{d}q=-\dfrac{a}{a+\delta}q\approx -q \\ d'=\dfrac{a^{۲}}{d}=\dfrac{a^{۲}}{a+\delta} \end{cases}$$

با فرض اینکه فاصلهٔ دو بار الکتریکی d'' باشد:

$$d''=a+\delta-d'=\frac{(a+\delta)^{۲}-a^{۲}}{a+\delta}=\frac{\delta^{۲}+۲a\delta}{a+\delta}\approx\frac{۲a\delta}{a}=۲\delta$$

شدت میدان الکتریکی مطابق رابطهٔ زیر محاسبه می‌گردد:

$$\vec{E}=\frac{|P|}{۴\pi\varepsilon_{\circ}r^{۳}}\left[۲\cos\theta\,\vec{a}_R+\sin\theta\,\vec{a}_\theta\right]\Bigg|_{P=q\,d'',\theta=۶۰}$$

که از ساده‌سازی آن نتیجه می‌شود:

$$\vec{E}=\frac{\delta q}{۲\pi\varepsilon_{\circ}}\left[\frac{۱}{۲}\vec{a}_z+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\vec{a}_x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\vec{a}_x-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\vec{a}_z\right)\right]=\frac{\delta q}{۲\pi\varepsilon_{\circ}}\left[\left(\frac{۱}{۴}\right)\;۳\sqrt{۳}\,\vec{a}_x-\vec{a}_z\right]$$

بنابراین، گزینه ۴ صحیح است.

۱۳۸- ابتدا جریان‌های مقید حجمی و سطحی را محاسبه می‌کنیم:

سطحی:

$$\begin{cases} \vec{J}_{MS,۱}\Big|_{r=a}=\vec{M}\times(-\vec{a}_r)=M_{\circ}\sin^{۲}\phi\;\vec{a}_z\times(-\vec{a}_r)=-M_{\circ}\sin^{۲}\phi\,\vec{a}_\phi \\ \vec{J}_{MS,۲}\Big|_{r=b}=\vec{M}\times(+\vec{a}_r)=M_{\circ}\sin^{۲}\phi\,\vec{a}_z\times\vec{a}_r=M_{\circ}\sin^{۲}\phi\;\vec{a} \end{cases}$$

حجمی:

$$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{a}_r & r\vec{a}_\phi & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & M_0 \sin^2\phi \end{vmatrix} = 0$$

با استفاده از جمع آثار، میدان برآیند ناشی از جریان‌های مقید سطحی را محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{H}_1 = \int \frac{\vec{J}_{MS,1}\, dS_2 \times \vec{R}}{4\pi |R|^3}\Bigg|_{\vec{R}=-a\vec{a}_r - z\vec{a}_z} = \int \frac{(-M_0 \sin^2\phi\ \vec{a}_\phi)\, a\, d\phi\, dz \times [-(a\vec{a}_r - z\vec{a}_z)]}{4\pi (a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \ldots = \frac{M_0 L}{2}\frac{1}{\sqrt{L^2+a^2}}(-\vec{a}_z)$$

به صورت مشابه برای H_2 خواهیم داشت:

$$\vec{H}_2 = \ldots = \frac{M_0 L}{2}\frac{1}{\sqrt{L^2+b^2}}(+\vec{a}_z)$$

پس:

$$\vec{H} = \frac{M_0 L}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{L^2+b^2}} - \frac{1}{\sqrt{L^2+a^2}}\right]\vec{a}_z$$

بنابراین، گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

POWEREN.IR