

فهرست

فصل ۱

۱	مدل الکترومغناطیس
---	-------	-------------------

فصل ۲

۷	آنالیز برداری
---	-------	---------------

فصل ۳

۶۴	میدان های الکتریکی ساکن
----	-------	-------------------------

فصل ۴

۱۵۰	حل مسائل الکتریسیته ساکن
-----	-------	--------------------------

فصل ۵

۲۰۵	جريانهای الکتریکی دائم
-----	-------	------------------------

فصل ۶

۲۴۵	میدان های مغناطیسی ساکن
-----	-------	-------------------------



فصل ۱

۱.۱ مدل الکترومغناطیس

پرسش ۱-۱ : الکترومغناطیس چیست؟

پاسخ پرسش ۱-۱ : الکترومغناطیس، مطالعه تأثیرات بارهای الکتریکی ساکن و متحرک است.

پرسش ۲-۱ : علاوه بر موارد شکل‌های ۱-۱ و ۲-۱ دو پدیده یا مورد دیگر، بیان کرد که توسط نظریه مدار، بطور مناسب قابل توضیح نباشد.

پاسخ پرسش ۲-۱ : اصول نظریه مدار بر معادلات ماکسول استوارند، اما باید مسیر بسته داشته باشیم. ابعاد مدار در مقایسه با طول موج باید کوچک باشند و لازم است که از عناصر تعریف شده استفاده کنیم.

اکتون وسیله‌ای را در نظر می‌گیریم که بیشتر این الزامها در موردش صدق نمی‌کند اما هنوز بسیاری از نتایج تحلیلی را می‌توان با تفسیر جملات نظری مدار برایش بدست آورد.

وسیله‌ای که ما بعنوان مثال مدار معادلی برایش می‌کشیم حفره تشدید هم محور است. چنین تشدید کننده‌هایی نسبت به فرکانس فوق العاده حساس هستند.

بنابراین در فرکانس مترها، آمپلی فایرها تطبیق شده و نوسان سازها مورد استفاده قرار می‌گیرند. حتی می‌توان از آنها برای تعیین ضریب پذیرش و نفوذ مواد عایق مثلاً در کنترل یک فرآیند تولید یا اع. تشخص ... گماء، خاک استفاده کرد.

۲

پاسخ به مسائل فصل دوم

آنالیز برداری

پرسش ۱-۵ : چهار کمیت اصلی میدان در مدل الکترومغناطیسی کدامند؟ واحد آنها چیست؟

جدول ۱.۲ : ۱.۲

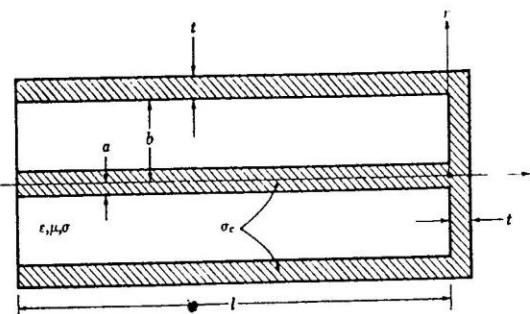
	علامت اختصاری	واحد	نام کمیت میدان
E	$\frac{V}{m}$		شدت میدان الکتریکی
D	$\frac{C}{m}$		چگالی شار الکتریکی
B	T		چگالی شار مغناطیسی
H	$\frac{A}{m}$		شدت میدان مغناطیسی

پرسش ۱-۶ : سه ثابت جهانی مدل الکترومغناطیسی کدامند، و رابطه آنها چیست؟

جدول ۱.۳ : ۱.۳

	علامت اختصاری	واحد	مقدار ثابت	نام ثابت‌های جهانی
c	$\frac{m}{s}$		3×10^8	سرعت نور در فضای آزاد
μ_0	$\frac{H}{m}$		$4\pi \times 10^{-7}$	نفوذ پذیری فضای آزاد
ϵ_0	$\frac{F}{m}$		$\frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$	گذردهی فضای آزاد

پرسش ۱-۷ : کمیات منبع در مدل الکترو مغناطیسی کدامند؟ منبع الکترومغناطیسی همواره بارهای الکتریکی در حال سکون یا متحرک است.



شکل ۱.۱ پرسش ۲

پرسش ۱-۳ : سه گام اساسی در بنا نهادن یک مدل ایده‌آل در مطالعه موضوعات علمی کدامند؟

پاسخ پرسش ۱-۳ : در بنا نهادن نظریه‌ای بر روی یک مدل ایده‌آل سه گام اساسی مطرح است:

۱ - کمیت‌های بنیادی مربوط به موضوع مطالعه تعریف می‌شوند.

۲ - قواعد عملیاتی (ریاضیات) این کمیات مشخص می‌گردند.

۳ - روابط اساسی چندی فرض می‌شوند.

پرسش ۱-۴ : چهار واحد اصلی SI در الکترومغناطیسی کدامند؟

جدول ۱.۱ : ۱.۱

نام کمیت	علامت اختصاری	واحد	طول
m			متر
Kg			کلوگرم
s			ثانیه
A			آمپر
			جریان

فصل ۲

۱.۲ آنالیز برداری

مسئله ۱: سه بردار A , B و C به صورت زیر داده شده‌اند:

$$A = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} - a_z \mathbf{k}$$

$$B = -a_y \mathbf{i} + a_z \mathbf{k}$$

$$C = a_x \mathbf{i} - a_z \mathbf{k}$$

مطلوب است

| $A - B$ | (ب)

a_A (الف)

θ_{AB} (ت)

$A \cdot B$ (پ)

$A \times C$ (ج)

ث) مؤلفه A در جهت C

$A \times (B \times C)$ و $(A \times B) \times C$ (ح)

$(A \times B) \cdot C$ و $A \cdot (B \times C)$ (چ)

پاسخ قسمت (الف)

$$\begin{cases} a_A = \frac{\vec{A}}{|A|} \\ \vec{A} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} - a_z \mathbf{k} \Rightarrow \vec{a}_A = \frac{(a_x + a_y - a_z)}{\sqrt{14}} \\ |A| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14} \end{cases}$$

پاسخ قسمت ب)

$$\begin{cases} A = a_x + \gamma a_y - \tau a_z \\ B = -\gamma a_y + a_z \end{cases}$$

$$A - B = (a_x + \gamma a_y - \tau a_z) - (\gamma a_x - \gamma a_y + a_z)$$

$$A - B = (1 - \gamma) a_x + (\gamma + \gamma) a_y + (-\tau - 1) a_z$$

$$A - B = a_x + \delta a_y - \tau a_z \Rightarrow |A - B| = \sqrt{1 + \delta^2 + \tau^2} = \sqrt{53}$$

پاسخ قسمت ب)

$$\begin{cases} A = a_x + \gamma a_y - \tau a_z \\ B = \gamma a_y - \tau a_z \end{cases}$$

$$A \cdot B = (1 \times \gamma) + (-\tau \times \gamma) + (-\tau \times 1) = \gamma - \tau - \tau = -11$$

پاسخ قسمت ت)

$$A \cdot B = |A||B| \cos(\theta_{AB})$$

$$|B| = \sqrt{\gamma^2 + \tau^2 + 1} \quad \text{و داریم: } |A| = \sqrt{14}$$

$$\Rightarrow \cos(\theta_{AB}) = \frac{A \cdot B}{|A||B|} = \frac{-11}{\sqrt{14} \times \sqrt{17}} = -\gamma / \sqrt{13024095}$$

$$\Rightarrow \theta_{AB}^\circ = \cos^{-1}(-\gamma / \sqrt{13024095}) = 135 / 4814998$$

$$\Rightarrow \theta_{AB}^\circ \simeq 135^\circ$$

پاسخ قسمت ث)

$$\boxed{A_{\vec{C}} = \vec{A} \cdot \vec{a}_c} \\ \Rightarrow A_{\vec{C}} = \vec{A} \cdot \left(\frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} \right) \quad (*)$$

$$\vec{C} = \delta a_x + \gamma a_y - \tau a_z$$

$$|\vec{C}| = \sqrt{\delta^2 + \gamma^2 + \tau^2} = \sqrt{29}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} = \frac{\delta a_x + \gamma a_y - \tau a_z}{\sqrt{29}}$$

$$\begin{aligned} (*) \Rightarrow A_{\vec{C}} &= \frac{(a_x + \gamma a_y - \tau a_z) \cdot (\delta a_x + \gamma a_y - \tau a_z)}{\sqrt{29}} \\ &= \frac{(1 \times \delta) + (\gamma \times \gamma) + (-\tau \times -\tau)}{\sqrt{29}} \\ &= \frac{\delta + \gamma + 16}{\sqrt{29}} = \frac{11}{\sqrt{29}} \end{aligned}$$

پاسخ قسمت ج)

$$\begin{cases} A = a_x + \gamma a_y - \tau a_z \\ C = \delta a_x + \gamma a_y - \tau a_z \\ \Rightarrow \begin{cases} A_x = 1, A_y = \gamma, A_z = -\tau \\ C_x = \delta, C_y = \gamma, C_z = -\tau \end{cases} \end{cases}$$

$$A \times C = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 1 & \gamma & -\tau \\ \delta & \gamma & -\tau \end{vmatrix}$$

حل دترمینان فوق بر روی مدل مثلث بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} -\tau a_z + \gamma a_z - 16 a_y - 10 a_z + \gamma a_x + \gamma a_y \\ = -\tau a_x - 16 a_y - 10 a_z = -(\tau a_x + 16 a_y + 10 a_z) \end{aligned}$$

پاسخ قسمت ج)

$$A \cdot (B \times C) = ?$$

$$B \times C = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 0 & -\tau & \gamma \\ \delta & 0 & -\tau \end{vmatrix}$$

$$\lambda a_x + \gamma a_z + \delta a_y + \gamma a_z + \gamma a_x + \gamma a_y$$

$$= \lambda a_x + \delta a_y + \gamma a_z$$

$$A = a_x + \gamma a_y - \tau a_z$$

$$\Rightarrow A \cdot (B \times C) = (a_x + \gamma a_y - \tau a_z) \cdot (\lambda a_x + \delta a_y + \gamma a_z)$$

(این بردار یعنی $A \times B$ در قسمت ج بتفصیل محاسبه شده است).
لذا :

$$(A \times B) \times C = (-10a_x - a_y - 4a_z) \times (5a_x + 0a_y - 2a_z)$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ (A \times B)_x & (A \times B)_y & (A \times B)_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ -10 & -1 & -4 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 4a_x + 0a_z - 20a_y + 5a_z - 20a_y + 0a_x \\ &= 4a_x - 4a_y + 5a_z \end{aligned}$$

مسئله ۲: بردارهای زیر داده شده اند

$$A = a_x - a_y + a_z$$

$$B = a_x + a_y - a_z$$

عبارتی برای بردار واحد C , که هم بر A و هم بر B عمود پیدا کند.

پاسخ مسئله ۲ :

بردار واحدی که هم بر A و هم بر B عمود است، بردار حاصل ضرب خارجی آنهاست که تبدیل به واحد شده باشد.

$$A \times B = D = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = a_x + 5a_y + 3a_z$$

$$C = \frac{D}{|D|} = \frac{a_x + 5a_y + 3a_z}{\sqrt{35}}$$

مسئله ۳: دو میدان برداری با $B = a_x B_x + a_y B_y + a_z B_z$ و $A = a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z$ داده شده است که در آن، تمام مؤلفه‌ها می‌توانند توابعی از مختصات فضایی باشند. اگر این دو میدان در تمام نقاط با یکدیگر موازی باشند، چه رابطه‌ای باید بین مؤلفه‌های آنها برقرار باشد؟

$$\begin{aligned} &= (1 \times 8) + (2 \times 5) + (-3 \times 2) \\ &= 8 + 10 - 6 = -42 \end{aligned}$$

$$(A \times B) \cdot C = ?$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 4a_x - 4a_z + 0a_y + 0a_z - 14a_x - a_y \\ &= -10a_x - a_y - 4a_z \end{aligned}$$

$$C = 5a_x + 0a_y - 2a_z$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (A \times B) \cdot C &= (-10a_x - a_y - 4a_z) \cdot (5a_x + 0a_y - 2a_z) \\ &= -50 + 0 + 8 = -42 \end{aligned}$$

$$A \times (B \times C) = ? \quad \text{پاسخ قسمت ج}$$

$$B \times C = 8a_z + 5a_y + 2a_z$$

(این بردار یعنی $B \times C$ در قسمت ج بتفصیل محاسبه شده است).

$$A \times (B \times C) = (a_x + 2a_y - 2a_z) \times (8a_z + 5a_y + 2a_z) \quad \text{لذا :}$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ (B \times C)_z & (B \times C)_y & (B \times C)_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 1 & 2 & -3 \\ 8 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$4a_x + 5a_z - 24a_y - 16a_z + 15a_x - 20a_y$$

$$= 55a_x - 44a_y - 11a_z$$

$$(A \times B) \times C = ?$$

$$A \times B = -10a_x - a_y - 4a_z$$

پاسخ مسئله ۳:

تعريف - دو بردار را موازی هم گویند هرگاه مضارب عددی مثبت با منفی یکدیگر باشند. یعنی:

$$\vec{A} \parallel \vec{B} \Rightarrow \begin{cases} \vec{A} = k\vec{B} \\ k \neq 0 \end{cases}$$

بنابراین:

$$a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z = k(a_x B_x + a_y B_y + a_z B_z)$$

$$a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z = k a_x B_x + k a_y B_y + k a_z B_z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_x = k B_x \\ A_y = k B_y \\ A_z = k B_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{A_x}{B_x} = k \\ \frac{A_y}{B_y} = k \\ \frac{A_z}{B_z} = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z} = k$$

مسئله ۴: نشان دهید اگر $A \times B = A \times C$ و $A \cdot B = A \cdot C$ بردار صفرنیست، آنگاه $B = C$

پاسخ مسئله ۴:

$$\begin{cases} A \cdot B = A \cdot C & (*) \\ A \times B = A \times C & (**) \\ \vec{A} \neq \vec{0} & (***) \end{cases}$$

$$A \times B = A \times C \Rightarrow A \times (A \times B) = A \times (A \times C)$$

بنایه قاعده $cab - back$ مذکور در صفحه ۲۴ کتاب درسی دبیرستان چنگ داریم:

$$A \times (B \times C) = B \times (A \cdot C) - C \times (A \cdot B)$$

$$\begin{cases} A \times (A \times B) = A \times (A \cdot B) - B \times (A \cdot A) \\ A \times (A \times C) = A \times (A \cdot C) - C \times (A \cdot A) \end{cases}$$

$$A \times (A \cdot B) - B \times (A \cdot A) = A \times (A \cdot C) - C(A \cdot A) \quad \text{بنایه } (**)$$

$$A \times (A \cdot B) - B \times (A \cdot A) = A \times (A \cdot B) - C(A \cdot A) \quad \text{بنایه } (*)$$

$$B \times |A|^T = C \times |A|^T \Rightarrow \vec{B} = \vec{C} \quad \text{بنایه } (***)$$

مسئله ۵: یک بردار مجهول را می‌توان تعیین کرد، اگر هم ضرب عددی و هم ضرب برداری آن با یک بردار معلوم داده شده باشد، با فرض اینکه A یک بردار معلوم است، بردار مجهول X را تعیین کنید

$$B = A \times X \quad \text{و } p = A \cdot X \quad \text{داده شده باشد}$$

پاسخ مسئله ۵:

$$P = A \cdot X \Rightarrow \underline{PA} = (A \cdot X)A \quad (*)$$

$$B = A \times X \Rightarrow B \times A = (A \times X) \times A \quad (**)$$

$$A \times (B \times C) = B \times (A \cdot C) - C \times (A \cdot B)$$

$$\Rightarrow (B \times C) \times A = -[B(A \cdot C) - C(A \cdot B)]$$

$$\Rightarrow (B \times C) \times A = C(A \cdot B) - B(A \cdot C) \quad (***)$$

$$(***) , (**) \Rightarrow B \times A = (A \times X) \times A$$

$$= X(A \cdot A) - A(A \cdot X)$$

$$= X A^T - A(A \cdot X)$$

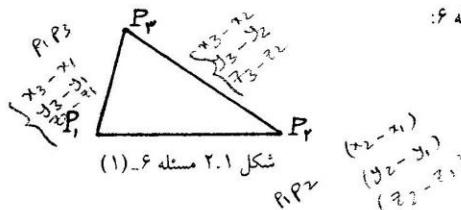
$$(*) \Rightarrow B \times A = X A^T - PA$$

$$\Rightarrow X = \frac{PA + B \times A}{A^T}$$

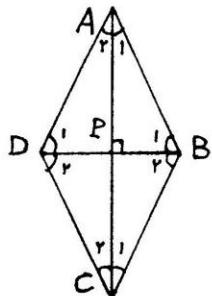
مسئله ۶: سه رأس مثلثی عبارتند از $P_1(6, 2, 5)$ ، $P_2(4, 1, -3)$ و $P_3(-1, -2, 0)$.(الف) تعیین کنید آیا $\Delta P_1 P_2 P_3$ قائم الزاویه است یا نه.

(ب) سطح مثلث را بدست آورید.

پاسخ مسئله ۶:



شکل ۲.۱ مسئله ۶



شکل ۲.۳ مسئله ۷

$$\Delta ABD : AB = AD \Rightarrow \angle B_1 = \angle D_1$$

$$ABCD : \text{متوازی الاضلاع} \Rightarrow \angle B = \angle D$$

$$\begin{cases} \angle B_1 = \angle D_1 \\ \angle B_1 = \angle D_1 \end{cases} \Rightarrow \angle D_1 = \angle D_1 \text{ نیمساز زوایه } DB \text{ است.}$$

بهمن ترتیب ثابت می شود DB نیمساز زوایه B و AC نیمساز زوایه A و C است یعنی :

$$\begin{cases} \angle A_1 = \angle A_2 \\ \angle B_1 = \angle B_2 \\ \angle C_1 = \angle C_2 \end{cases}$$

$$ABCD : \text{متوازی الاضلاع} \Rightarrow \angle A + \angle B = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\angle A + \angle B}{2} \right) = 90^\circ$$

$$\Rightarrow (\angle A_1 + \angle B_1) = 90^\circ$$

$$\Delta APB : \begin{cases} \angle A_1 + \angle B_1 + \angle P = 180^\circ \\ \angle A_1 + \angle B_1 = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle P = 90^\circ \Rightarrow AC \perp DB$$

مسئله ۸: ثابت کنید خطی که نقاط وسط دو ضلع مثلثی را به هم وصل می کند، موازی ضلع سوم و مساوی نصف آن است.

پاسخ مسئله ۸:

$$\begin{cases} BH = AH \\ BK = CK \end{cases}$$

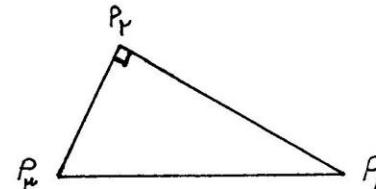
پاسخ قسمت (الف)

بردارهای $P_2P_1, P_1P_2, P_1P_3, P_3P_1$ را تشکیل می دهیم. می دانیم هرگاه دو بردار برهم عمود باشند، حاصل ضرب داخلی آنها مساوی صفر است. لذا حاصل ضرب داخلی دو بردی بردارهای فوق را تشکیل می دهیم هر کدام صفر شد آن دو بردار برهم عمودند یعنی :

$$\begin{cases} P_1P_2 = 4a_x + 0a_y - a_z \\ P_1P_3 = 5a_x + a_y + \sqrt{a}_z \\ P_3P_1 = 2a_x + a_y + \lambda a_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} (P_1P_2) \cdot (P_1P_3) = 24 + 0 - \sqrt{a} \neq 0 \\ (P_1P_3) \cdot (P_3P_1) = 8 + 0 - 8 = 0 \\ (P_1P_3) \cdot (P_3P_1) = 12 + 1 + 5\sqrt{a} \neq 0 \end{cases}$$

بنابراین مثلث $P_1P_2P_3$ در راس P_2 قائم الزاویه است.



شکل ۲.۲ مسئله ۶-(۲)

پاسخ قسمت (ب)

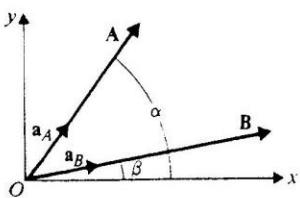
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |P_1P_2| \cdot |P_2P_3| \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{16+0+1})(\sqrt{4+1+64}) = \frac{(\sqrt{17})(\sqrt{69})}{2} = 17/\sqrt{12454379} \end{aligned}$$

مسئله ۷: نشان دهید که قطرهای یک لوزی برهم عمودند. (لوزی یک متوازی الاضلاع با اضلاع متساوی است).

پاسخ مسئله ۷:

$$\begin{cases} AB \parallel DC \\ DB \text{ مورب} \end{cases} \Rightarrow \angle B_1 = \angle D_2$$

پاسخ مسئله ۹
قسمت الف)



شکل ۲.۵ مسئله ۹

$$A \cdot a_B = |A| |a_B| \cos(\alpha - \beta) = |A| \cos(\alpha - \beta)$$

$$A \cdot a_B = (A_x a_x + A_y a_y) \cdot a_B = |A| \cos(\alpha - \beta)$$

$$A_x(a_x \cdot a_B) + A_y(a_y \cdot a_B) = A_x |a_y| |a_B| \cos \beta + A_y |a_y| |a_B| \cos(90^\circ - \beta)$$

$$= A_x \cos \beta + A_y \sin \beta = |A| \cos(\alpha - \beta)$$

$$\begin{cases} A_x = |A| \cos \alpha, A_y = |A| \sin \alpha \\ A_x \cos \beta + A_y \sin \beta = |A| \cos(\alpha - \beta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}$$

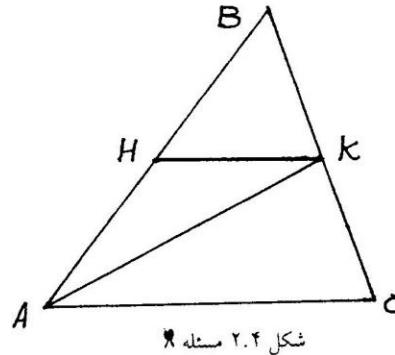
پاسخ قسمت ب)

$$A \times a_B = |A| \sin(\alpha - \beta)$$

$$A \times a_B = (A_x a_x + A_y a_y) \times a_B = A_x(a_x \times a_B) + A_y(a_y \times a_B)$$

$$= A_x \sin \beta + A_y \sin(90^\circ - \beta)$$

$$= |A| \sin(\alpha - \beta)$$



شکل ۲.۴ مسئله ۹

$$\begin{aligned} HK &= AK - AH = (AB + BK) - AH \\ &= (AB + \frac{1}{2}BC) - \frac{1}{2}AB \\ \frac{1}{2}(AB + BC) &= \frac{1}{2}AC \end{aligned}$$

رابطه اخیر نشان می‌دهد که بردار HK مضرب عددی مثبتی از بردار AC است لذا این دو بردار موازی هم هستند. ضریب $\frac{1}{2}$ نیز نشان می‌دهد که اندازه بردار HK نصف اندازه بردار AC است.

مسئله ۹: بردارهای واحد a_A و a_B جهت‌های بردارهای دو بعدی A و B را نشان می‌دهند که مطابق شکل ۲.۴ با محور مرجع، x ، به ترتیب زاویه α و β را می‌سازند.

الف) با در نظر گرفتن ضرب عددی $A \cdot a_B$ ، فرمولی برای بسط کسینوس اختلاف دو زاویه $\cos(\alpha - \beta)$ بیاید.

ب) فرمولی برای $\sin(\alpha - \beta)$ بدست آورید.

$$|AB||BC|\sin B|\vec{a}_N = |AC||BC|\sin C|\vec{a}_N$$

$$|AB|\sin B = |AC|\sin C$$

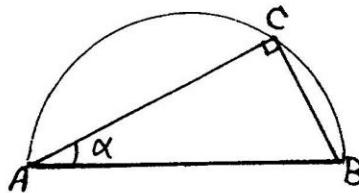
$$c \cdot \sin B = b \sin C \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (**)$$

$$(**), (*) \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

مسئله ۱۱: ثابت کنید زاویه محاطی در یک نیم دایره قائم است.

پاسخ مسئله ۱۱:

$$\begin{aligned} AC \cdot CB &= AC(CA + AB) \\ &= AC \cdot CA + AC \cdot AB \end{aligned}$$



شکل ۲.۷ مسئله ۱۱

$$\begin{aligned} &= -|AC|^2 + |AC||AB|\cos\alpha \\ &= -|AC|^2 + |AC||AB|\frac{|AC|}{|AB|} \\ &= -|AC|^2 + |AC|^2 = 0 \end{aligned}$$

حاصل ضرب داخلی دو بردار AC و CB مساوی با صفر شد، لذا زاویه بین این دو بردار 90° است.

مسئله ۱۲: درستی قاعده $back - cab$ را در مورد ضرب سه گانه برداری سه بردار، طبق معادله

$$\begin{cases} A_x = |A| \cos \alpha, A_y = |A| \sin \alpha \\ A_x \sin \beta + A_y \cos \beta = |A| \sin(\alpha - \beta) \end{cases}$$

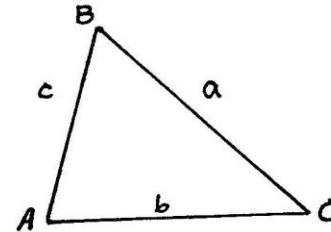
$$\Rightarrow \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

مسئله ۱۰: قانون سینوس ها را در یک مثلث اثبات کنید.

پاسخ مسئله ۱۰:

$$\begin{cases} |AB| = c \\ |BC| = a \\ |AC| = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} AB \times AC = |AB| \cdot |AC| \cdot |\sin A| \vec{a}_N = \gamma S \\ AC \times BC = |AC| \cdot |BC| \cdot |\sin C| \vec{a}_N = \gamma S \end{cases}$$



شکل ۲.۶ مسئله ۱۰

مساحت مثلث ABC می باشد).

$$|AB| \cdot |AC| \cdot |\sin A| \vec{a}_N = |AC||BC| \sin C \vec{a}_N$$

$$|AB| \cdot |\sin A| = |BC| \cdot |\sin C|$$

$$c \cdot \sin A = a \sin C \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \quad (*)$$

$$\begin{cases} AC \times BC = |AC| \cdot |BC| \cdot |\sin C| \vec{a}_N = \gamma S \\ AB \times BC = |AB| \cdot |BC| \cdot |\sin B| \vec{a}_N = \gamma S \end{cases}$$

(۲۰-۲) در مختصات کارتیین تحقیق نماید.

پاسخ مسئله ۱۲ :

$$A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C) : \text{فرض کیم}$$

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$

$$B \times C = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix}$$

$$= a_x(y_B z_C - z_B y_C) + a_y(z_B x_C - x_B z_C) + a_z(x_B y_C - y_B x_C)$$

$$A \times (B \times C) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ x_A & y_A & z_A \\ y_B z_C - z_B y_C & z_B x_C - x_B z_C & x_B y_C - y_B x_C \end{vmatrix}$$

$$= (x_B z_C z_A - x_C z_A z_B + x_B y_A y_C - x_C y_A y_B) a_x$$

$$+ (y_B z_A z_C - y_C z_A z_B - x_A x_B y_C + x_A x_C y_B) a_y$$

$$+ (x_A x_C z_B - x_A x_B z_C - y_A y_B z_C + y_A y_C z_B) a_z \quad (*)$$

$$A \cdot C = x_A x_C + y_A y_C + z_A z_C$$

$$A \cdot B = x_A x_B y_A + y_B + z_A z_B$$

$$B(A \cdot C) = (x_A x_B x_C + x_B y_A y_C + x_B z_A z_C, x_A x_C y_B + y_A y_B y_C + y_B z_A z_C, x_A x_C z_B + y_A y_C z_B + z_A z_B z_C) \quad (**) \quad$$

$$C(A \cdot B) = (x_A x_B x_C + x_C y_A y_B + x_C z_A z_B, x_A x_B y_C + y_A y_B y_C + y_C z_A z_B, x_A x_B z_C + y_A y_B z_C + z_A z_B z_C) \quad (***)$$

رابطه (**) را از (**) کم می‌کنیم:

$$B(A \cdot C) - C(A \cdot B) = (x_B z_C z_A - x_C z_A z_B + x_B y_A y_C - x_C y_A y_B$$

$$, y_B z_A z_C - y_C z_A z_B + x_A x_C y_B - x_A x_B y_C$$

$$, x_A x_C z_B - x_A x_B z_C - y_A y_B z_C + y_A y_C z_B)$$

$$= (x_B z_C z_A - x_C z_A z_B + x_B y_A y_C - x_C y_A y_B) a_x$$

$$+ (y_B z_A z_C - y_C z_A z_B - x_A x_B y_C + x_A x_C y_B) a_y$$

$$+ (x_A x_C z_B - x_A x_B z_C - y_A y_B z_C + y_A y_C z_B) a_z \quad (****)$$

$$(****), (*) \Rightarrow A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$

مسئله ۱۳: با روابط برداری ثابت کنید که دو خط در صفحه

$$(L_1 : b'_1 x + b'_2 y = c' \quad : \quad L_2 : b'_1 x + b'_2 y = c) xy \quad \text{برهم عمود هستند اگر شب آنها}$$

منفی معکوس یکدیگر باشد.

پاسخ مسئله ۱۳

$$\begin{cases} L_1 : \text{شب} = m_1 = -\frac{b'_1}{b'_2} \\ L_2 : \text{شب} = m_2 = -\frac{b'_2}{b'_1} \end{cases}$$

بنابه فرض مسئله :

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \Rightarrow m_1 = -(-\frac{b'_2}{b'_1}) = \frac{b'_2}{b'_1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_1 : -b'_1 x + b'_2 y = \frac{cb'_1}{b'_2} \\ L_2 : b'_1 x + b'_2 y = c' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_1 : (-b'_2) a_x + (b'_1) a_y + 0 a_z = V_1 \quad \text{بردار هادی خط ۱} \\ L_2 : (b'_1) a_x + (b'_2) a_y + 0 a_z = V_2 \quad \text{بردار هادی خط ۲} \end{cases}$$

$$V_1 \cdot V_2 = -b'_1 b'_2 + b'_1 b'_2 + 0 = 0 \Rightarrow V_1 \perp V_2$$

مسئله ۱۴

الف) ثابت کنید که معادله هر صفحه در فضای را می‌توان به صورت $b_1 x + b_2 y + b_3 z = c$ نوشت.

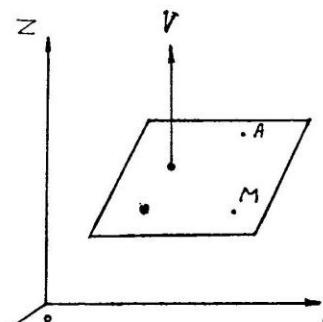
(راهنمانی) : ثابت کنید ضرب نقطه‌ای بردار مکان به هر نقطه از صفحه و یک بردار عمودی، ثابت

است.

ب) عبارتی را برای عمود واحد گزیننده از مبدأ بیابید.

پ) در مورد صفحه $5 - 2x + 6z = 0$ ، فاصله عمودی از مبدأ تا صفحه را پیدا کنید.

پاسخ مسئله ۱۴:



شکل ۲.۸ مسئله ۱۴

پاسخ قسمت (الف)

فرض می‌کنیم از نقطه مفروض $P(x_1, y_1, z_1)$ صفحه $M(x_1, y_1, z_1)$ عمود بر بردار $\vec{V}(b_1, b_2, b_3)$ رسم شده باشد. در این صورت بردار \vec{V} همان بردار نرمال صفحه خواهد بود. بنابراین اگر نقطه $A(x, y, z)$ نقطه‌ای اختیاری از صفحه P باشد نتیجه می‌گیریم:

$$\vec{MA} \cdot \vec{V} = 0$$

$$\forall A \in P \Rightarrow \vec{V} \perp \vec{MA} \Rightarrow \vec{V} \cdot \vec{MA} = 0$$

$$\Rightarrow b_1(x - x_1) + b_2(y - y_1) + b_3(z - z_1) = 0$$

$$b_1x + b_2y + b_3z = \underbrace{b_1x_1 + b_2y_1 + b_3z_1}_C$$

$$b_1x + b_2y + b_3z = c$$

پاسخ قسمت (ب)

$$\begin{cases} \vec{V}(b_1, b_2, b_3) = \text{بردار نرمال صفحه} = b_1a_x + b_2a_y + b_3a_z \\ |\vec{V}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \end{cases}$$

$$a_v = \frac{\vec{V}}{|V|} = \frac{1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}(b_1a_x + b_2a_y + b_3a_z)$$

پاسخ قسمت (پ)

شرطی که معادله صفحه بصورت $ax + by + cz = d$ و مختصات نقطه بصورت (x_0, y_0, z_0) باشد، فاصله این نقطه از صفحه فوق از رابطه $h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ بدست می‌آید.

$$\left\{ \begin{array}{l} P : 3x - 2y + yz = 5 \\ (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0) \end{array} \right. \Rightarrow h = \frac{|3(0) - 2(0) + 0 - 5|}{\sqrt{9 + 4 + 36}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{46}} = 0.652$$

مسئله ۱۵: مؤلفه بردار $A = -a_y z + a_z y$ را در نقطه $P_1(0, -2, 3)$ که به سمت نقطه $P_2(\sqrt{3} - 6, 0, 1)$ جهت گرفته است، بیابید.

پاسخ مسئله ۱۵

در مختصات استوانه‌ای داده شده است لذا:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \phi = \sqrt{3} \cos(-60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = r \sin \phi = \sqrt{3} \sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right.$$

$$P_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \Rightarrow \vec{P_1P_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -2\right)$$

$$\vec{P_1P_2} = \frac{(A \cdot \vec{P_1P_2})}{|\vec{P_1P_2}|}$$

$$= \frac{-\frac{z}{r} - 2y}{\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 4}} = \frac{-(z + 4y)}{2\sqrt{5}} = \frac{-(3 - 8)}{2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{5\sqrt{5}}{4 \times 5} = \frac{\sqrt{5}}{4} = 1/118033989 \approx 1/12$$

مسئله ۱۶: موقعیت یک نقطه در مختصات استوانه‌ای توسط $(\frac{4}{3}, \frac{2\pi}{3})$ مشخص شده است.

محل نقطه را در حالتهای زیر تعیین کنید.

الف) در مختصات کارترین؟

ب) در مختصات کروی؟

پاسخ مسئله ۱۶:

قسمت الف)

$$\Rightarrow E = a_R \left(\frac{25}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

$$\Rightarrow |E| = \frac{25}{9 + 16 + 25} = \frac{1}{2} \quad \text{در نقطه } P$$

$$E_x = \vec{E} \cdot a_x = \frac{25}{R^2} (a_R \cdot a_x) = \frac{25}{R^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

$$= \frac{25}{R^2} \left(\frac{-2}{\sqrt{9 + 16 + 25}} \right) = \frac{25(-2)}{50(\sqrt{50})}$$

$$= \frac{-2}{10\sqrt{2}} = -0/2121220334 \simeq -0/212$$

پاسخ قسمت ب)

$$E = a_R \left(\frac{25}{R^2} \right) + a_\theta (\circ) + a_\phi (\circ)$$

میدان E را به مختصات کارترین می‌بریم :

$$E = a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z$$

که در آن :

$$\begin{cases} A_x = \frac{A_R x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \circ - \circ \\ A_y = \frac{A_R y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \circ + \circ \\ A_z = \frac{A_R z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \circ \end{cases}$$

(رجوع کنید به مثال (۱۱-۲) حل شده در صفحه ۴۳ کتاب درسی)

$$\Rightarrow E = a_x \left(\frac{25x}{R^2} \right) + a_y \left(\frac{25y}{R^2} \right) + a_z \left(\frac{25z}{R^2} \right)$$

$$\begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} \\ P(-2, 4, -5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \phi = 4 \times \cos \frac{4\pi}{3} = -2 \\ y = r \sin \phi = 4 \times \sin \frac{4\pi}{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow A(-2, 2\sqrt{3}, 2) \\ z = z = 2 \end{cases}$$

پاسخ قسمت ب)

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{4 + 12 + 9} = 5$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \cos^{-1} \frac{2}{\sqrt{4 + 12 + 9}} \\ = \cos^{-1} (\circ/6) = (53^\circ, 57', 48/37'')$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{2\sqrt{3}}{-2} \right) = 120^\circ$$

مسئله ۱۷: یک میدان در مختصات کروی توسط $E = a_R (25/R^2)$ توصیف شده است.

الف) $|E|$ و E_x را در نقطه $P(-3, 4, -5)$ پیابید.

ب) زاویه‌ای را که E با بردار $B = a_x 2 - a_y 2 + a_z 2$ در نقطه P می‌سازد بدست آورید.

پاسخ مسئله ۱۷:

پاسخ قسمت الف)

$$E = a_R \left(\frac{25}{R^2} \right)$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{در مختصات کروی}$$

$$\Rightarrow a_R = \frac{xa_x + ya_y + za_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\begin{cases} (a_\theta \cdot a_x)a_x = \cos \theta \cos \phi a_x \\ (a_\theta \cdot a_y)a_y = \cos \theta \sin \phi a_y \\ (a_\theta \cdot a_z)a_z = -\sin \theta a_z \end{cases}$$

$$a_\theta = \cos \theta \cos \phi a_x + \cos \theta \sin \phi a_y - \sin \theta a_z$$

$$\begin{cases} \tan \phi = \frac{y}{x}, \frac{1}{1 + \tan^2 \phi} = \cos^2 \phi \\ \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

بطور مشابه:

$$\Rightarrow a_\theta = \frac{xza_x + yza_y}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} a_z$$

$$\begin{cases} (a_\theta \cdot a_x)a_x = -\sin \phi a_x \\ (a_\theta \cdot a_y)a_y = \cos \phi a_y \\ (a_\theta \cdot a_z)a_z = 0 \end{cases}$$

$$a_\phi = -\sin \phi a_x + \cos \phi a_y$$

$$\Rightarrow a_\phi = \frac{-ya_x + xa_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\Rightarrow E = a_x \left(\frac{25(-2)}{50\sqrt{50}} \right) + a_y \left(\frac{25(4)}{50\sqrt{50}} \right) + a_z \left(\frac{25(-5)}{50\sqrt{50}} \right)$$

$$= a_x (-0/2121220224) + a_y (+0/2828427125) + a_z (-0/3535532906)$$

$$E \cdot B = |E||B| \cos \theta \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{E \cdot B}{|E||B|} \right)$$

$$E \cdot B = 2(-0/2121220224) - 2(+0/2828427125) + 1(-0/3535532906)$$

$$= -1/343502884$$

$$\begin{cases} |E| = \frac{1}{2} \\ |B| = 2 \end{cases} \Rightarrow |E||B| = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{-1/343502884}{(\frac{1}{2})} \right) = 153/5944376 \simeq 154^\circ$$

مسئله ۱۸: بردارهای پایه a_R, a_θ, a_ϕ و دستگاه مختصات کروی را در مختصات کارتزین بیان کنید.

پاسخ مسئله ۱۸:

	a_R	a_θ	a_ϕ
a_x	$\sin \theta \cos \phi$	$\cos \theta \cos \phi$	$-\sin \phi$
a_y	$\sin \theta \sin \phi$	$\cos \theta \sin \phi$	$\cos \phi$
a_z	$\cos \theta$	$-\sin \phi$	۰

$$\begin{cases} (a_R \cdot a_x)a_x = \sin \theta \cos \phi a_x \\ (a_R \cdot a_y)a_y = \sin \theta \sin \phi a_y \\ (a_R \cdot a_z)a_z = \cos \theta a_z \end{cases}$$

$$a_R = \sin \theta \cos \phi a_x + \sin \theta \sin \phi a_y + \cos \theta a_z$$

$$x = R \sin \theta \cos \phi \Rightarrow \sin \theta \cos \phi = \frac{x}{R} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$y = R \sin \theta \sin \phi \Rightarrow \sin \theta \sin \phi = \frac{y}{R} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

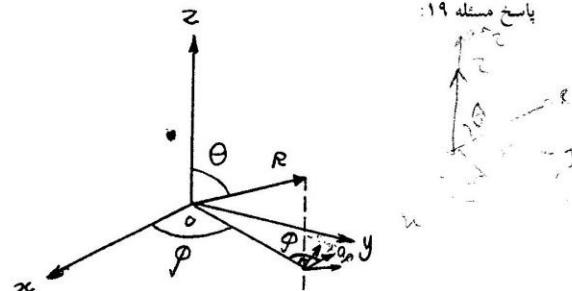
$$z = \cos \theta R \Rightarrow \cos \theta = \frac{z}{R} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

✓

مسئله ۱۹: مقادیر ضربهای زیر را در مورد بردارهای پایه تعیین کنید:

$$\begin{array}{lll} a_r \times a_x & \text{(ب)} & a_\theta \cdot a_y & \text{(ب)} & a_x \cdot a_\phi & \text{(الف)} \\ a_R \cdot a_z & \text{(ج)} & a_y \cdot a_R & \text{(ث)} & a_R \cdot a_r & \text{(ت)} \\ a_z \times a_\theta & \text{(خ)} & a_\theta \cdot a_z & \text{(ح)} & a_R \times a_z & \text{(ج)} \end{array}$$

پاسخ مسئله ۱۹:



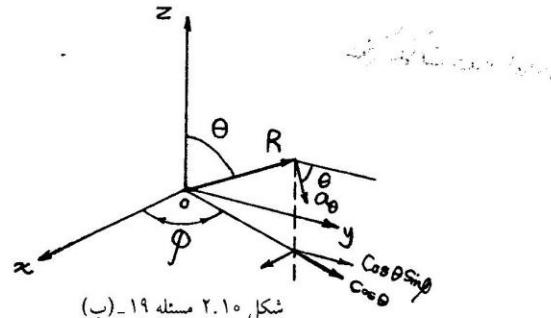
شکل ۲.۹ مسئله ۱۹-(الف)

 $a_x \cdot a_\phi$

$$a_x \cdot a_\phi = 1 \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin \phi$$

چون در جهت $(-a_x)$ لذا: $a_\theta \cdot a_y$

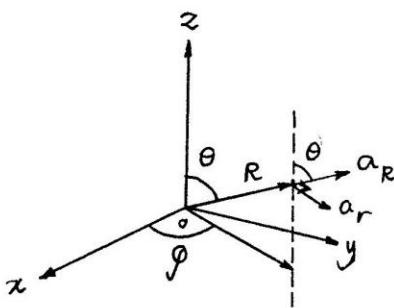
$$a_\theta \cdot a_y = \cos \theta \sin \phi$$



شکل ۲.۱۰ مسئله ۱۹-(ب)

 $a_R \cdot a_r$

$$a_R \cdot a_r = \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$



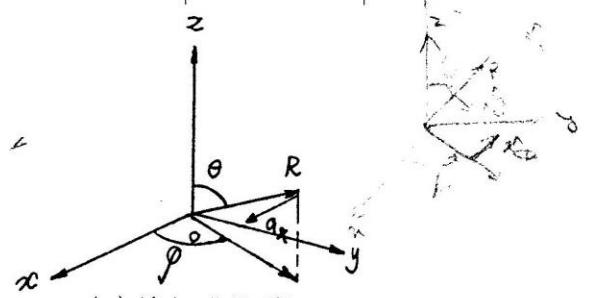
شکل ۲.۱۲ مسئله ۱۹-(ت)

 $a_y \cdot a_R$

$$a_y \cdot a_R = \sin \theta \sin \phi$$

$$a_r \times a_x \quad \text{(ب)}$$

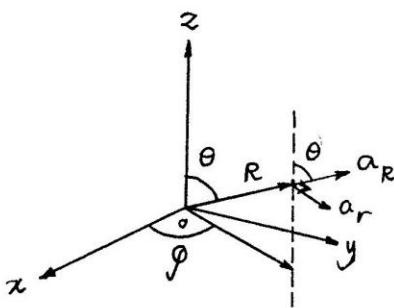
$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z \end{cases} \quad a_r \times a_x = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\sin \phi a_z$$



شکل ۲.۱۱ مسئله ۱۹-(ب)

 $a_R \cdot a_r$

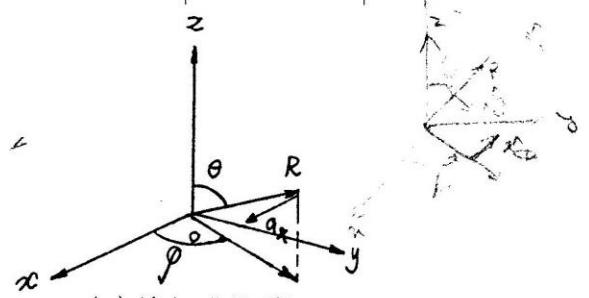
$$a_R \cdot a_r = \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$



شکل ۲.۱۲ مسئله ۱۹-(ت)

$$a_r \times a_x \quad \text{(ب)}$$

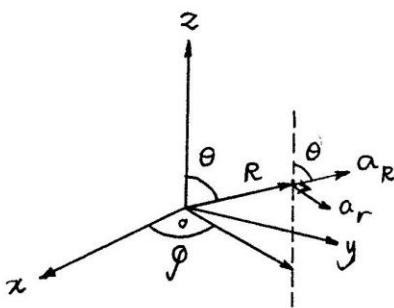
$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z \end{cases} \quad a_r \times a_x = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\sin \phi a_z$$



شکل ۲.۱۱ مسئله ۱۹-(ب)

 $a_R \cdot a_r$

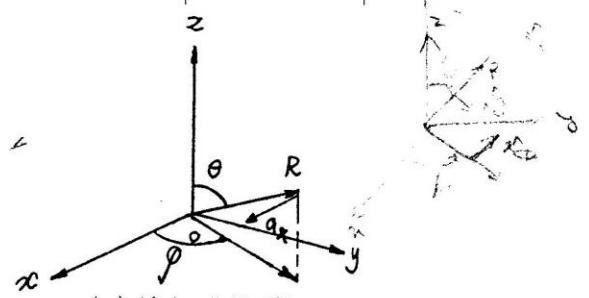
$$a_R \cdot a_r = \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$



شکل ۲.۱۲ مسئله ۱۹-(ت)

$$a_r \times a_x \quad \text{(ب)}$$

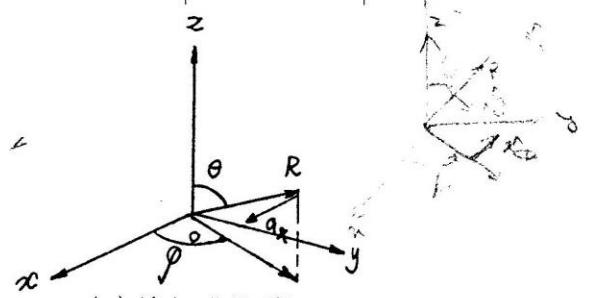
$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z \end{cases} \quad a_r \times a_x = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\sin \phi a_z$$



شکل ۲.۱۱ مسئله ۱۹-(ب)

$$a_r \times a_x \quad \text{(ب)}$$

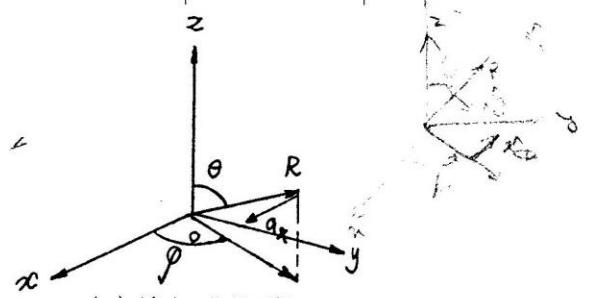
$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z \end{cases} \quad a_r \times a_x = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\sin \phi a_z$$



شکل ۲.۱۱ مسئله ۱۹-(ب)

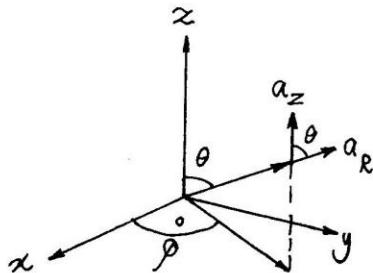
$$a_r \times a_x \quad \text{(ب)}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z \end{cases} \quad a_r \times a_x = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\sin \phi a_z$$



شکل ۲.۱۱ مسئله ۱۹-(ب)

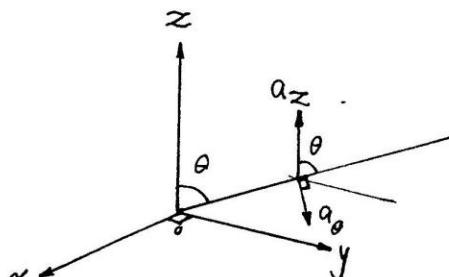
$$\begin{aligned}
 &= \sin \theta \cdot \sin \phi a_x - \cos \phi \sin \theta a_y \\
 &= \sin \theta (\sin \phi a_x - \cos \phi a_y) \\
 &= -\sin \theta \cdot a_\phi \\
 (a_\phi &= -\sin \phi a_x + \cos \phi a_y \quad \text{:! رج})
 \end{aligned}$$



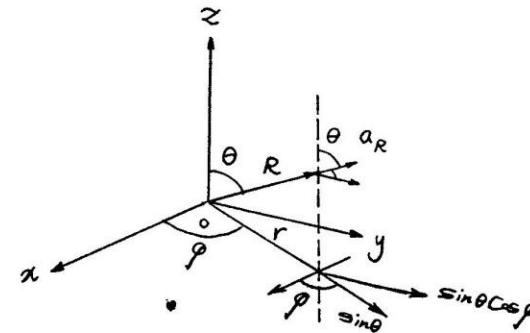
شكل ٢.١٥ مسئلہ ١٩-(ج)

 $a_\theta \cdot a_z$ (ج)

$$\begin{aligned}
 a_\theta \cdot a_z &= |1| \cdot |1| \cos(a_\theta, \widehat{a}_z) = \cos\left(\frac{\pi}{r} + \theta\right) \\
 &= -\sin \theta
 \end{aligned}$$



شكل ٢.١٦ مسئلہ ١٩-(ج)

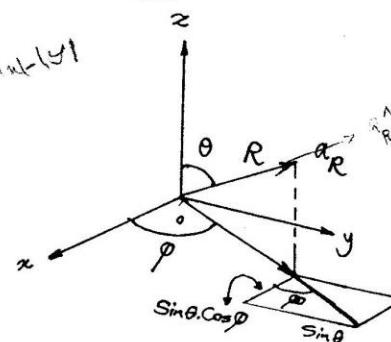


شكل ٢.١٣ مسئلہ ١٩-(ث)

 $a_R \cdot a_z$ (ج)

$$a_R \cdot a_z = |1| \cdot |1| \cos(a_R, \widehat{a}_z)$$

$$= \cos \theta$$

 $|a_R| < |a_z|$ 

شكل ٢.١٤ مسئلہ ١٩-(ج)

 $a_R \times a_z$ (ج)

$$\begin{cases} a_R = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \\ a_z = (0, 0, 1) \end{cases}$$

$$a_R \times a_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\int F \cdot dl = \int [a_x xy + a_y (2x - y)] [a_x dx + a_y dy + a_z dz]$$

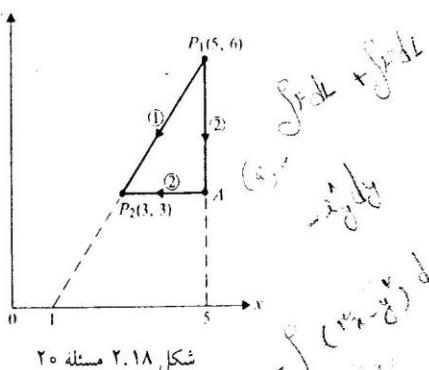
$$= \int [xydx + (2x - y)dy] = \int xydx + \int (2x - y)dy$$

معادله مسیر P_1, P_2 بصورت زیر است:

$$\frac{y - 6}{x - 3} = \frac{2}{1} \Rightarrow x = \frac{2x - 2y}{2} \quad , \quad y = \frac{2x - 3}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{P_1, P_2} F \cdot dl = \int_2^5 x \left(\frac{2x - 2y}{2} \right) dx + \int_2^5 \left[2 \left(\frac{2x - 3}{2} \right) - y \right] dy$$

$$= \frac{2}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_2^5 + \left(-\frac{y^2}{2} + \frac{2y^2}{2} + 2y \right) \Big|_2^5 \\ = \frac{2}{2} \left(9 - \frac{9}{2} - \frac{125}{2} + \frac{25}{2} \right) + (-9 + 9 + 9 + 72 - 36 - 18) = -10$$



شکل ۲.۱۸ مسئله ۲۰

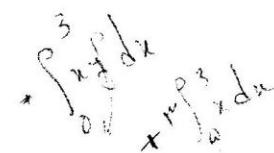
پاسخ قسمت ب)

$$\int_{P_1, AP_2} F \cdot dl = \int_{P_1 A} AF \cdot dl + \int_{AP_2} F \cdot dl$$

$$= \int_{P_1 A} xydy + \int_{P_1 A} (2x - y)dy + \int_{AP_2} xydx + \int_{AP_2} (2x - y)dy$$

$$= 0 + \int_2^5 (2(5) - y)dy + 2 \int_5^0 xdx + 0$$

$$= (10y - \frac{y^2}{2}) \Big|_2^5 + \frac{2x^2}{2} \Big|_5^0$$



$$a_z \times a_\theta \quad (خ)$$

$$\begin{cases} a_z = (0, 0, 1) \\ a_\theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) \end{cases}$$

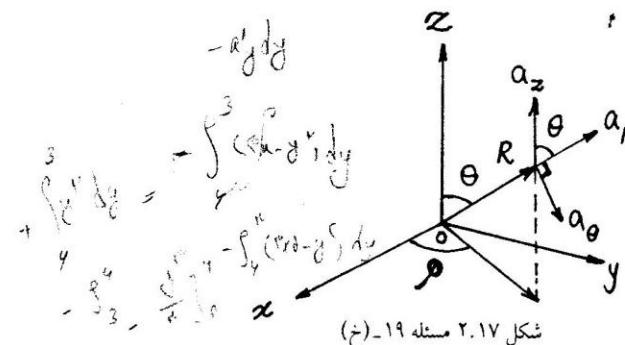
$$a_z \times a_\theta = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos \theta \cdot \cos \phi \cdot a_y - \cos \theta \cdot \sin \phi \cdot a_x$$

$$= \cos \theta(-\sin \phi a_x + \cos \phi a_y)$$

$$= \cos \theta \cdot a_\phi$$

$$(a_\phi = -\sin \phi \cdot a_x + \cos \phi \cdot a_y \quad : \text{زیرا})$$



شکل ۲.۱۹ (خ)

مسئله ۲۰: تابع برداری $F = a_x xy + a_y (2x - y)$ داده شده است، انتگرال $\int F \cdot dl$ را از

تا $P_2(3, 3)$ در شکل ۲.۱۹ محاسبه کنید.

الف) در امتداد مسیر مستقیم P_1, P_2 .

ب) در امتداد مسیر P_1, AP_2 .

پاسخ مسئله ۲۰ :

پاسخ قسمت الف)

$$\begin{cases} F = a_x xy + a_y (2x - y) \\ dl = a_x dx + a_y dy + a_z dz \end{cases}$$

$$= (45 - 9) - (90 - 72) + \frac{3}{2}(9 - 25) = -6$$

مسئله ۲۱ تابع برداری $E = a_x y + a_y x$ داده شده است. انتگرال خطی عددی $\int E \cdot dl$ را از

نقطه $P_1(1, 2, -1)$ تا نقطه $P_2(2, 1, -1)$ محاسبه کنید.

(الف) در امتداد سهیم $x = 2y^2$

(ب) در امتداد خط راست رابط دو نقطه.

آیا E یک میدان ذخیره شونده است؟

پاسخ مسئله ۲۱ :

پاسخ قسمت (الف)

$$\begin{cases} E = a_x y + a_y x \\ dl = a_x dx + a_y dy \end{cases} \Rightarrow \int_{P_1}^{P_2} E \cdot dl = \int_{P_1}^{P_2} (ydx + xdy)$$

$$2y^2 = x \Rightarrow y = \sqrt{\frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow \int_{P_1}^{P_2} E \cdot dl = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{\frac{x}{2}} dx + \int_{P_1}^{P_2} 2y^2 dy$$

$$\begin{aligned} &= \int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} dx + 2 \int_1^2 y^2 dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^2 x^{\frac{1}{2}} dx + \frac{2}{3} y^3 \Big|_1^2 \\ &= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}} \Big|_1^2 + \frac{2}{3}(8 - 1) = \frac{2}{3} \left[\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 1 \right] = 14 \end{aligned}$$

پاسخ قسمت (ب)

معادله خط گذرنده از نقاط P_1, P_2 :

$$\begin{cases} \frac{x-2}{6} = \frac{y-1}{1} \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6y - 4 \\ y = \frac{x}{6} + \frac{1}{6} \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\int_{P_1}^{P_2} E \cdot dl = \int_{P_1}^{P_2} ydx + \int_{P_1}^{P_2} xdy$$

$$\begin{aligned} &= \int_1^2 \left(\frac{x}{6} + \frac{4}{6} \right) dx + \int_1^2 (6y - 4) dy \\ &= \left(\frac{x^2}{12} + \frac{4x}{6} \right)_1^2 + [6y^2 - 4y]_1^2 \\ &= \left[\frac{64}{12} + \frac{4(8)}{6} - \frac{4}{12} - \frac{4(2)}{6} \right] + [2(4) - 4(2) - 2 + 4] = 9 + 5 = 14 \end{aligned}$$

خبربر. زیرا کرل ($curl$) آن مخالف صفر است.

مسئله ۲۲: برای E در مسئله ۲۱ دار $\int E \cdot dl$ را از $P_2(2, 1, -1)$ تا $P_4(4, -3, -2)$ با تبدیل

E و نیز موقیت‌های P_2 و P_4 به مختصات استوانه‌ای، محاسبه کنید.

پاسخ مسئله ۲۲ :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \phi = \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

$$P_1 \begin{cases} r_1 = \sqrt{9+16} = 5 \\ \phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = (53^\circ, 1^\circ, 48/37'') = 0/92729521\Lambda(Rad) \\ z_1 = -1 \end{cases}$$

$$P_4 \begin{cases} r_4 = \sqrt{16+9} = 5 \\ \phi_4 = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right) = (-36^\circ, 52', 11/63'') = -0/6425011088\Lambda(Rad) \\ z_4 = -1 \end{cases}$$

E را به مختصات استوانه‌ای تبدیل می‌کنیم :

$$E = ya_x + xa_y$$

$$E_r = E \cdot a_r = E_x(a_x \cdot a_r) + E_y(a_y \cdot a_r)$$

$$= y \cos \phi + x \sin \phi = r \sin \phi \cos \phi + r \sin \phi \cos \phi = r \sin \phi \cos \phi$$

$$E_\phi = E \cdot a_\phi = E_x(a_x \cdot a_\phi) + E_y(a_y \cdot a_\phi) = -r \sin^2 \phi + r \cos^2 \phi$$

$$E_z = E \cdot a_z = E_z(a_z \cdot a_z) = 0(1) = 0$$

$$\begin{cases} E = (r \sin \phi) a_r + (r \cos \phi) a_\phi \\ dl = a_r dr + a_\phi r d\phi + a_z dz \end{cases} \quad (\text{در مختصات استوانه‌ای})$$

پاسخ قسمت ب)

$$\begin{cases} P(1, 2, 3) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \Rightarrow \vec{PO} = -a_x - 2a_y - 3a_z$$

$$|\vec{PO}| = \sqrt{14} \Rightarrow \vec{a}_{PO} = \frac{-a_x - 2a_y - 3a_z}{\sqrt{14}}$$

$$\nabla V_P \cdot \vec{a}_{PO} = ((0)a_x - 0/026a_y - 0/043) \frac{(-a_x - 2a_y - 3a_z)}{\sqrt{14}} \\ = \frac{(0/026)(2) + (0/043)(3)}{\sqrt{14}} = 0/04837 \approx 0/0485$$

البته تقریب فوق بادید محاسباتی تقریب خوبی نیست و علت این امر در گرد کردن مقادیر است و گرنه در یک محاسبه دقیق داریم:

$$\frac{\pi}{\gamma} e^{-r} \cos \frac{2\pi}{\gamma} \sin \frac{\pi}{\gamma} = -0/02606844804 = A$$

$$-e^{-r} \sin \frac{\pi}{\gamma} \sin \frac{2\pi}{\gamma} = -0/04311686599 = B$$

$$\Rightarrow \nabla V_P \cdot \vec{a}_{PO} = \frac{(-2A - 3B)}{\sqrt{14}} = 0/04850457305$$

که دقیقتر است.

مسئله ۲۴: انتگرال

$$\oint_s (a_R r^3 \sin \theta) \cdot ds$$

را روی سطح کروی به شعاع ۵ و مرکز مبدأ مختصات محاسبه کنید.

پاسخ مسئله ۲۴:

$$I = \oint_c (a_R r^3 \sin \theta) \cdot ds = \oint_c (a_R r^3 \sin \theta) (R^r \sin \theta d\theta d\phi)$$

(در مختصات کروی بر روی سطح R ثابت R داشته باشیم) $ds = R^r \sin \theta d\theta d\phi$. برای اطلاع بیشتر رجوع کنید به صفحه ۴۱ کتاب درسی رابطه ۶۷-۲ (الف))

$$I = 2R^r \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \sin^r \theta d\theta d\phi = 2(25)(2\pi) \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ = \frac{75(2\pi)}{2} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = 75\pi(\pi - 0 - 0 + 0) = 75\pi^2$$

$$E \cdot dl = r \sin \varphi dr + r^2 \cos \varphi d\phi \\ \int E \cdot dl = \int r \sin \varphi dr + \int r^2 \cos \varphi d\phi = 0 + 25 \int \cos \varphi d\phi \\ \int E \cdot dl = 25 \int_{0^\circ}^{360^\circ} \cos \varphi d\phi = -25$$

(انتگرال گیری در مدار دایان انجام شده است).

مسئله ۲۲: تابع عددی

$$V = \left(\sin \frac{\pi}{\gamma} x \right) \left(\sin \frac{\pi}{\gamma} y \right) e^{-z}$$

داده شده است.

(الف) اندازه و جهت حداقل نرخ افزایش V را در نقطه (۱، ۲، ۳) P تعیین کنید.

(ب) نرخ افزایش V در P را در جهت مبدأ تعیین کنید.

پاسخ مسئله ۲۲:

پاسخ قسمت (الف)

حداقل نرخ افزایش V در جهت بردار گرادیان است.

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{a}_z \\ = \left(\frac{\pi}{\gamma} e^{-z} \cos \frac{\pi}{\gamma} x \sin \frac{\pi}{\gamma} y \right) a_x \\ + \left(\frac{\pi}{\gamma} e^{-z} \cos \frac{\pi}{\gamma} y \sin \frac{\pi}{\gamma} x \right) a_y - e^{-z} \sin \frac{\pi}{\gamma} x \sin \frac{\pi}{\gamma} y a_z$$

در نقطه P :

$$\nabla V_{(P)} = \left(\frac{\pi}{\gamma} e^{-r} \cos \frac{\pi}{\gamma} \sin \frac{2\pi}{\gamma} \right) a_x \\ + \left(\frac{\pi}{\gamma} e^{-r} \cos \frac{2\pi}{\gamma} \sin \frac{\pi}{\gamma} \right) a_y - e^{-r} \sin \frac{\pi}{\gamma} \sin \frac{2\pi}{\gamma} a_z \\ = (0)a_x - 0/026a_y - 0/043a_z \\ |\nabla V_P| = \sqrt{(-0/026)^2 + (-0/043)^2} = 0/05$$

$$a_n = \frac{a_N}{|a_N|} = \frac{\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{a}_y + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{a}_z \quad (\text{تبديل به واحد})$$

$$\Rightarrow a_n = \mathbf{a}_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{a}_y + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{a}_z \Rightarrow \begin{cases} l = 0 \\ m = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ p = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$s \cos \alpha = s' \Rightarrow ds' = \cos \alpha ds \Rightarrow ds = \frac{1}{\cos \alpha} ds' = \frac{1}{\sqrt{2}} dx dy = \sqrt{2} dx dy$$

$$\int (F \cdot ds) a_n = \int (a_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)(\mathbf{a}_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{a}_y + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{a}_z) ds$$

$$\int (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}) ds = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2}(1)(1) = \sqrt{2}$$

روش دوم :

$$\int (F \cdot ds) a_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \int ds$$

که بیانگر مساحت مربع است یعنی :

$$\int ds = 1 \times 1\sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \int ds = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = 1$$

مسئله ۲۶: دیورزانس میدانهای برداری شعاعی زیر را پیدا کنید:

$$f_1(R) = a_R R^n$$

$$f_2(R) = a_R \frac{k}{R}$$

پاسخ مسئله ۲۶

پاسخ قسمت (الف)

$$\nabla \cdot f_1 = \frac{1}{R^n} \frac{\partial (R^n A_R)}{\partial R} = \frac{1}{R^n} \frac{\partial (R^{n+1} A_R)}{\partial R} \\ = \frac{(n+1) R^{n+1}}{R^n} = (n+1) R^{n-1}$$



مسئله ۲۵: معادله صفحه‌ای در فضای نقطه (x_1, y_1, z_1) را در خود دارد، به صورت زیر قابل نوشتن است

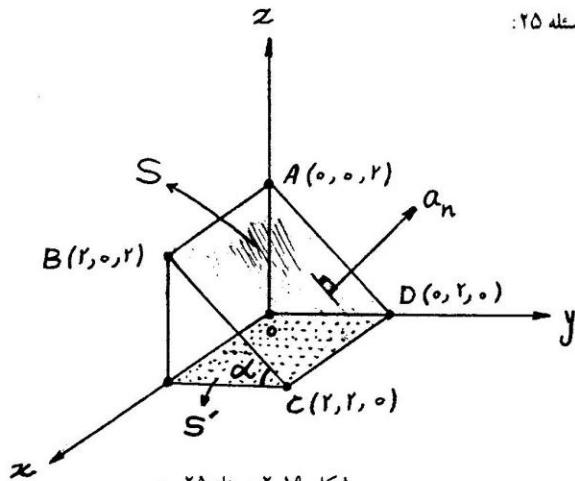
$$l(x - x_1) + m(y - y_1) + p(z - z_1) = 0$$

که در آن l, m و p کسینوس‌های جهتی عمود واحد بر سطح هستند:

$$a_n = a_x l + a_y m + a_z p$$

میدان برداری $\mathbf{F} = a_x + a_y + a_z$ داده شده است، انتگرال $\int_S F \cdot ds$ را روی سطح مسطح مربعی شکلی که رئوس آن در $(0,0,0), (2,0,0), (0,2,0)$ و $(2,2,0)$ هستند، محاسبه کنید.

پاسخ مسئله ۲۵ :



شکل ۲.۱۹ مسئله ۲۵

$$AB : (2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)$$

$$AD : (\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z)$$

$$a_N = AB \times AD = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 4\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$$

پاسخ قسمت ب)

$$\nabla \cdot f_r = \frac{1}{R^r} \frac{\partial (R^r A_R)}{\partial R} = \frac{1}{R^r} \frac{\partial (R^r K / R^r)}{\partial R} = 0.$$

مسئله ۲۷: نشان دهد $\frac{1}{3} \oint_s R \cdot ds = V$ که در آن R بردار شعاعی و V حجم ناحیه در برگرفته شده توسط S است.

پاسخ مسئله ۲۷:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \oint_s R \cdot ds &= \frac{1}{3} \oint_s R \cdot R^r \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\pi \int_0^\pi R^r \sin \theta d\theta d\phi = \frac{1\pi(R^r)}{3} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1\pi}{3} R^r (-\cos \theta) \Big|_0^\pi = \frac{1\pi}{3} R^r = V \Rightarrow \frac{1}{3} \oint_s R \cdot ds = V \end{aligned}$$

مسئله ۲۸: برای تابع عددی f و تابع برداری A ، رابطه

$$\nabla \cdot (fA) = f \nabla \cdot A + A \cdot \nabla f$$

را در مختصات کارتزین ثابت کنید.

پاسخ مسئله ۲۸:

$$A = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z$$

$$(F_x a_x + F_y a_y + F_z a_z) \cdot (\nabla \cdot A)$$

$$\nabla \cdot (f A_x a_x + f A_y a_y + f A_z a_z)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (f A_x) + \frac{\partial}{\partial y} (f A_y) + \frac{\partial}{\partial z} (f A_z) \quad \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)$$

$$= f \frac{\partial A_x}{\partial x} + f \frac{\partial A_y}{\partial y} + f \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

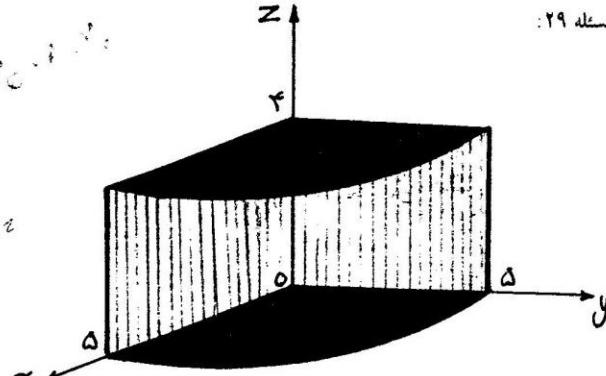
$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} A_x}_{F_x} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y} A_y}_{F_y} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z} A_z}_{F_z} + \underbrace{f \frac{\partial A_x}{\partial x}}_{F_x} + \underbrace{f \frac{\partial A_y}{\partial y}}_{F_y} + \underbrace{f \frac{\partial A_z}{\partial z}}_{F_z}$$

$$+ A_x \frac{\partial f}{\partial x} + A_y \frac{\partial f}{\partial y} + A_z \frac{\partial f}{\partial z} = f \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)$$

$$+ (A_x + A_y + A_z) \cdot (\nabla f) = f(\nabla \cdot A) + A \cdot \nabla f$$

مسئله ۲۹: برای تابع برداری $A = a_r r^r + a_z z$ ، قضیه دیورزانس را در مورد ناحیه مدور استوانه ای محصور توسط $r = 5$ و $z = 0$ تحقیق نماید.

پاسخ مسئله ۲۹:



شکل ۲.۲۰ مسئله ۲۹ - (ربع استوانه مورد نظر)

$$\oint_s A \cdot ds = \underbrace{\int_{s_1} A \cdot ds_1}_{\text{(سطح پائین)}} + \underbrace{\int_{s_2} A \cdot ds_2}_{\text{(سطح بالا)}} + \underbrace{\int_{s_3} A \cdot ds_3}_{\text{(سطح جانبی)}}$$

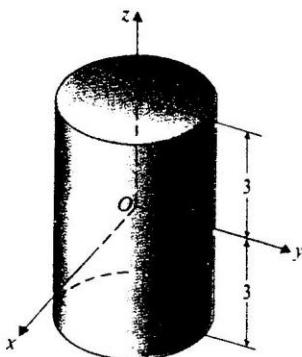
$$\begin{cases} ds_1 = a_r r d\phi dz \\ ds_2 = a_z r d\phi dr \\ ds_3 = -a_z r d\phi dr \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{s_1} A \cdot ds_1 &= \int_{s_1} (a_r r^r + a_z z) \cdot (a_r r d\phi dz) \\ &= \int \int r^r d\phi dz = 125 \int_0^\pi d\phi \int_0^5 dz = 125(2\pi)(5) = 1000\pi \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{\partial(A_\phi)}{\partial \phi} + \frac{r\partial(A_z)}{\partial z} \right]$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot F &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(\frac{rk_1}{r})}{\partial r} + \frac{\partial(0)}{\partial \phi} + \frac{r\partial(k_1 z)}{\partial z} \right] \\ &= k_1 \Rightarrow \nabla \cdot F = k_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint \nabla \cdot F dv &= \int_0^{\pi} \int_0^r \int_{-r}^r k_1 r dr d\phi dz \\ &= k_1 (\pi) \left(\frac{r^2}{2} \right)_0^r (z)_{-r}^r = \frac{\pi}{2} r^2 k_1 \end{aligned}$$



شکل ۲.۲۱ مسئله ۳۰-(۲)

علت در ماندن قضیه دیورژانس عدم پوستگی F در r است.

مسئله ۳۱: از تعریف معادله (۹۸-۲) برای نتیجه گرفتن عبارت $\nabla \cdot A$ در مورد میدان برداری

$A = a_r A_r + a_\theta A_\theta + a_z A_z$ در مختصات استوانه‌ای استفاده کنید.

پاسخ مسئله ۳۱:

$$\begin{aligned} \int_{S_r} A \cdot ds_r &= \int_{S_r} (a_r r^\gamma + a_z \gamma z) \cdot (a_z r d\phi dr) \\ &= \int \int \gamma z r d\phi dr = \gamma \int_0^{\pi} d\phi \int_0^{\Delta} r dr = \gamma (\pi) \left(\frac{r^\Delta}{2} \right)_0^{\Delta} = \gamma \cdot \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{S_r} A \cdot ds_r &= \int_{S_r} (r^\gamma a_r + \gamma z a_z) (-a_z r d\phi dr) \\ &= \int \int -\gamma z r d\phi dr = \int \int -\gamma (0) r d\phi dr = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \oint A \cdot ds = \gamma \cdot \pi + 0 = \gamma \cdot \pi \quad (*)$$

$$\int_v \operatorname{div} A \cdot dv = ? \quad r dr d\phi dz$$

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{\partial(A_\phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial(rA_z)}{\partial z} \right]$$

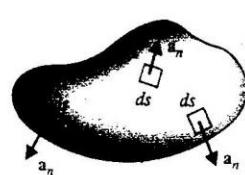
$$\Rightarrow \operatorname{div} A = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r \times r^\gamma)}{\partial r} + 0 + \frac{r\partial(\gamma z)}{\partial z} \right] = \frac{1}{r} [\gamma r^\gamma + \gamma r] = \gamma r + \gamma$$

$$\Rightarrow \int_v \operatorname{div} A \cdot dv = \int \int \int (\gamma r + \gamma) r dr d\phi dz = \int_0^{\Delta} \int_0^{\pi} \int_0^{\Delta} (\gamma r + \gamma) r dr d\phi dz \\ = \gamma \pi (12\Delta + 2\Delta) = 12\pi \gamma \quad (**)$$

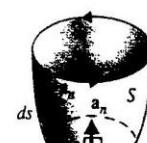
$$(**), (*) \Rightarrow \oint_s A \cdot ds = \int_v \operatorname{div} A \cdot dv \quad \begin{matrix} r^\Delta \\ \gamma r + \gamma \\ \gamma + \gamma \end{matrix} \quad \begin{matrix} r^\Delta \\ \gamma \\ \gamma \end{matrix}$$

مسئله ۳۰: در مورد تابع برداری $F = a_r k_1/r + a_z k_2 z$ داده شده در مثال ۱۵-۲ (صفحة ۵۰)، $\nabla \cdot F dv$ را روی حجم توصیف شده در آن مثال محاسبه نماید، توضیع دهید چرا قضیه دیورژانس در می‌ماند.

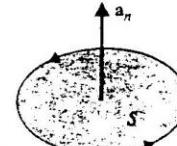
پاسخ مسئله ۳۰:



ب) یک سطح بسته



ب) یک سطح باز



الف) یک قرص

شکل ۲.۲۱ مسئله ۳۰-(۱)

$$= \left(A_{z_*} - \frac{\partial A_z}{\partial z} \frac{\Delta z}{\gamma} \right) (-r \Delta r \Delta \phi)$$

$$\int_{\text{سطح پشت}} A_{\tau} \cdot ds = A_{\tau} \cdot (\Delta z \Delta r a \phi) = A_{\phi}(r_*, \phi_* + \frac{\Delta \phi}{\gamma}, z_*) (\Delta z \Delta r a \phi)$$

$$= (A_{\phi_0} - \frac{\Delta\phi}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi})(\Delta z \Delta r)$$

$$\int_{\text{سطح جلو}} A_{\nabla} \cdot ds = A_{\nabla} \cdot (\Delta z \Delta r (-a_{\phi}))$$

$$= A_\phi(r_*, \phi_* - \frac{\Delta\phi}{\gamma}, z_*)(-\Delta z \Delta r a_\phi)$$

$$= (A_{\phi_*} - \frac{\Delta\phi}{\gamma} \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi})(-\Delta z \Delta r)$$

$$\int_{\text{سطح جب}} A_\delta \cdot ds = A_\delta (-r \Delta \phi \Delta z a_r)$$

$$= A_r(r_* - \frac{\Delta r}{\gamma}, \phi_*, z_*)(-r\Delta\phi\Delta za_r)$$

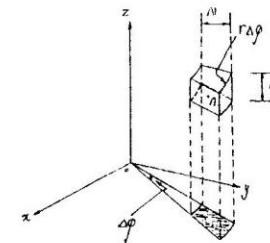
$$= (A_{r_*} - \frac{\Delta r}{\gamma} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r})(-\Delta\phi\Delta z)$$

$$\int_{\text{سطح راست}} A_{\mathfrak{s}} \cdot ds = A_{\mathfrak{s}} \cdot (r \Delta \phi \Delta z a_r)$$

$$= A_r(r_* + \frac{\Delta r}{\gamma}, \phi_*, z_*)(r \Delta \phi \Delta z a_r)$$

$$= (A_{r_*} + \frac{\Delta r}{\gamma} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r})(\Delta\phi\Delta z)$$

$$\oint_s A \cdot ds(\mathcal{S}) = \frac{\partial A_z}{\partial z} r \Delta r \Delta \phi \Delta z + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \Delta \phi \Delta z \Delta r$$



٣١ ٢.٢٣ مسکل

عادله (۹۸-۲) :

$$div A \stackrel{\Delta}{=} \nabla \cdot A = \frac{1}{\Delta v} \oint_s A \cdot ds$$

سوزرت معادله (۹۸-۲) که نمایشگر شار خالص خروجی است، انتگرالی روی کل سطح Ω است
حجم را در بردارد.

$$\oint_s A \cdot ds = \int_{\text{سطح پائین}} A_\downarrow \cdot ds + \int_{\text{سطح بالا}} A_\uparrow \cdot ds$$

$$+ \int_{\text{سطح راست}} A_4 \cdot ds + \int_{\text{سطح } \hat{C}_B} A_5 \cdot ds + \int_{\text{سطح جلو}} A_6 \cdot ds$$

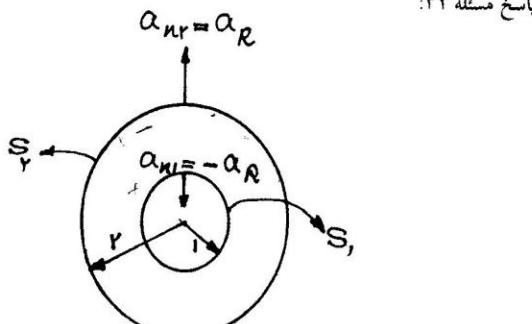
$$\int_{\text{سطح بالا}} A_\lambda \cdot ds = A_\lambda \cdot (r \Delta r \Delta \phi a_z) = A_z(r_*, \phi_*, z_* + \frac{\Delta z}{\gamma})(r \Delta r \Delta \phi a_z)$$

$$= (A_{z_0} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \frac{\Delta z}{r}) r \Delta r \Delta \phi$$

نوصیه می شود قبل از حل این مسئله، صفحات ۵۷ تا ۶۰ کتاب درسی را دقیقاً مطالعه نماید.)

$$\int A_\gamma \cdot ds = A_\gamma \cdot (-r\Delta r \Delta \phi a_z) = A_z(r_*, \phi_*, z_*) - \frac{\Delta z}{\gamma} (-r\Delta r \Delta \phi a_z)$$

(سطح پائین)



شکل ۲.۲۴ مسئله ۲.۲۴

پاسخ قسمت (الف)

$$D \cdot ds = (a_R(\cos^\gamma \phi)/R^\gamma)(a_R(R^\gamma \sin \theta d\theta d\phi)) = \frac{\cos^\gamma \phi \sin \theta d\theta d\phi}{R}$$

$$\Rightarrow \oint_s D \cdot ds = \oint \frac{\cos^\gamma \phi \sin \theta d\theta d\phi}{R}$$

$$= \frac{1}{R} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \cos^\gamma \phi \sin \theta d\theta d\phi$$

$$= \frac{1}{R} \int_0^{\pi} -(\cos \pi - \cos 0) \cos^\gamma \phi d\phi$$

$$= \frac{\gamma}{R} \int_0^{\pi} \cos^\gamma \phi d\phi$$

$$= \frac{\gamma}{R} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \cos^\gamma \phi \right) d\phi = \left(\frac{1}{\gamma} \phi + \frac{1}{\gamma} \sin^\gamma \phi \right) \Big|_0^{\pi} \times \frac{\gamma}{R}$$

$$= \frac{\gamma \pi}{R} = \frac{\gamma \pi}{R^\gamma} = \pi(R^\gamma \text{ سطح})$$

$$(R_1 = 1 : \oint D \cdot ds = -\frac{\gamma \pi}{R} = -\frac{\gamma \pi}{1} = -\gamma \pi)$$

$$\oint D \cdot ds_{\text{کل}} = \oint_{S_1} D \cdot ds + \oint_{S_2} D \cdot ds = \pi + (-\gamma \pi) = -\pi$$

توضیح اینکه، برای سطح S_2 بردار a_n بطرف بیرون و مثبت است در حالیکه برای سطح S_1 بردار

پاسخ مسئله ۲۴

$$+ \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} \Delta r \Delta \phi \Delta z = \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta v + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \Delta v \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_r) \Delta v = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z}(rA_z) \Delta v \\ \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \Delta v + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_r) \Delta v$$

پنا به تعریف :

$$\text{div } A \stackrel{\Delta}{=} \nabla \cdot A \rightarrow \frac{\oint_s A \cdot ds}{\Delta v}$$

$$\Delta v \stackrel{\Delta}{=} \frac{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z}(rA_z) \Delta v + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \Delta v + \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} \Delta v}{\Delta v} \\ \Delta v \rightarrow 0$$

$$\stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{\partial}{\partial \phi}(A_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(rA_z) \right] = \nabla \cdot A \\ \Delta v \rightarrow 0$$

معادله (۱۱۴-۲) را بینند.

مسئله ۳۲ میدان برداری $D = a_R(\cos^\gamma \phi)/R^\gamma$ در ناحیه‌ای بین دو پوسته کروی توصیف شده توسط $R = 1$ و $R = 2$ موجود است.

(الف) $\oint D \cdot ds$
(ب) $\int \nabla \cdot D dv$
را محاسبه کنید.

$$+ \frac{\partial(E_z H_x)}{\partial y} - \frac{\partial(E_x H_z)}{\partial y} + \frac{\partial(E_x H_y)}{\partial z} - \frac{\partial(E_y H_x)}{\partial z}$$

$$= E_y \frac{\partial H_z}{\partial x} + H_z \frac{\partial E_y}{\partial x} - H_y \frac{\partial E_z}{\partial x} - E_z \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$+ H_x \frac{\partial E_z}{\partial y} - E_x \frac{\partial H_z}{\partial y} - H_z \frac{\partial E_x}{\partial y} + E_z \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

$$+ E_x \frac{\partial H_y}{\partial z} + H_y \frac{\partial E_x}{\partial z} - E_y \frac{\partial H_x}{\partial z} - H_x \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

$$= (H_x \frac{\partial E_z}{\partial y} - H_z \frac{\partial E_y}{\partial z}) + (H_y \frac{\partial E_x}{\partial z} - H_x \frac{\partial E_z}{\partial x})$$

$$+ (H_z \frac{\partial E_y}{\partial x} - H_x \frac{\partial E_z}{\partial y}) - (E_x \frac{\partial H_z}{\partial y} - E_z \frac{\partial H_y}{\partial z})$$

$$- (E_y \frac{\partial H_x}{\partial z} - E_z \frac{\partial H_x}{\partial x}) - (E_z \frac{\partial H_y}{\partial x} - E_x \frac{\partial H_z}{\partial y})$$

$$= (H_x a_x + H_y a_y + H_z a_z) (\text{Curl } E) - (E_x a_x + E_y a_y + E_z a_z) (\text{Curl } H)$$

$$= H \cdot (\nabla \times E) - E \cdot (\nabla \times H)$$

مسئله ۳۴: تابع برداری $A = a_x x^3 y^2 - a_y x^2 y^3$ را در نظر بگیرید.
 (الف) $\oint A \cdot dl$ را به دور مسیر مثلثی شکل نشان داده شده در شکل ۲-۳۶ بیاورد.

(ب) آنرا روی سطح مثلثی فوق محاسبه کنید.

(پ) آیا A می‌تواند به صورت گرادیان یک کمیت عددی بیان شود؟ توضیح دهد.

a_n بطرف درون و منفی است. این موضوع در شکل مشهود است.
 پاسخ قسمت ب)

$$\text{div } D = \frac{1}{R^3 \sin \theta} \left[\frac{\partial(R^3 \sin \theta \cos^3 \phi / R^3)}{\partial R} + \dots + \dots \right]$$

$$= \frac{-\cos^3 \phi \sin \theta}{R^3 \sin \theta} = \frac{-\cos^3 \phi}{R^3}$$

$$\int \nabla \cdot D dv = - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{\cos^3 \phi R^3 \sin \theta dr d\theta d\phi}{R^3} \right)$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1}{R} \cos^3 \phi \sin \theta \right) d\theta d\phi$$

$$= -\left(\frac{1}{4} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{2\pi} = -\pi$$

مسئله ۳۳: در مورد توابع برداری دیفرانسیل پذیر E و H ثابت کنید:

$$\nabla \cdot (E \times H) = H \cdot (\nabla \times E) - E \cdot (\nabla \times H)$$

پاسخ مسئله ۳۳:

$$E = E_x a_x + E_y a_y + E_z a_z$$

$$H = H_x a_x + H_y a_y + H_z a_z$$

$$E \times H = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ E_x & E_y & E_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

$$= a_x (E_y H_z - E_z H_y) + a_y (E_z H_x - E_x H_z) + a_z (E_x H_y - E_y H_x)$$

$$\text{div}(E \times H) = \frac{\partial(E_y H_z - E_z H_y)}{\partial x} + \frac{\partial(E_z H_x - E_x H_z)}{\partial y}$$

$$+ \frac{\partial(E_x H_y - E_y H_x)}{\partial z} = \frac{\partial(E_y H_z)}{\partial x} - \frac{\partial(E_z H_y)}{\partial x}$$

پاسخ مسئله ۳۴:

$$\operatorname{curl} A = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^T y^T & -x^T y^T & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_z(-x^T y^T) - a_z(x^T y) = a_z(-x^T y - x^T y)$$

$$ds = -a_z dx dy$$

$$\int (\nabla \times A) \cdot ds = \int_1^2 \int_y^1 (-x^T y + x^T y) dx dy$$

$$= 2 \int_1^2 \int_y^1 x^T y^T dx dy + 6 \int_1^2 \int_y^1 x^T y dx dy$$

$$= 2 \int_1^2 \left(\frac{x^T y^T}{2} \right)_y^1 dy + 6 \int_1^2 \left(\frac{x^T y}{2} \right)_y^1 dy$$

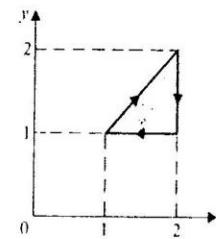
$$= 2 \int_1^2 \left(\frac{\lambda y^T}{2} - \frac{y^5}{2} \right)_y^1 dy + 6 \int_1^2 \left(\frac{\lambda y}{2} - \frac{y^4}{2} \right)_y^1 dy$$

$$= 2 \left(\frac{\lambda y^T}{2} - \frac{y^5}{10} \right)_1^2 + 6 \left(\frac{\lambda y}{2} - \frac{y^4}{10} \right)_1^2 = 19/76666667$$

پاسخ قسمت ب) با توجه به عبارت «اگر یک میدان برداری بدون کل باشد، آنگاه می‌تواند به صورت گرادیان یک میدان عددی بیان شود».

مندرج در صفحه ۷۵ از فصل دوم کتاب درسی، چون $\operatorname{curl} A$ مخالف صفر است پس نمی‌تواند بصورت گرادیان یک میدان عددی بیان شود.

مسئله ۳۵: با استفاده از تعریف معادله (۱۲۶-۲) عبارتی برای مؤلفه $A_R \times A$ در مختصات کروی، در مورد میدان برداری $A = a_R A_R + a_\theta A_\theta + a_\phi A_\phi$ نتیجه بگیرید.



شکل ۲.۲۶ مسئله ۳۴

پاسخ قسمت (الف)

$$\begin{aligned} \oint_C A \cdot dl &= \oint_C (a_x x^T y^T - a_y x^T y^T)(dx a_x + dy a_y + dz a_z) \\ &= \int_1^2 2x^T y^T dx - \int_1^2 x^T y^T dy = \int_1^2 2x^T x^T dx - \int_1^2 y^T y^T dy \\ &= \frac{2x^5}{5} \Big|_1^2 - \frac{y^6}{6} \Big|_1^2 = \frac{243}{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oint_C A \cdot dl &= \oint_C (a_x x^T y^T - a_y x^T y^T)(dx a_x + dy a_y + dz a_z) \\ &= \int_1^2 2x^T y^T dx - \int_1^2 x^T y^T dy = 0 - \lambda \int_1^2 y^T dy = \frac{56}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oint_C A \cdot dl &= \int_1^2 2x^T dx - 0 = \frac{2x^2}{2} \Big|_1^2 = -7 \\ \Rightarrow \oint_{\Delta} A \cdot dl &= \frac{243}{20} + \frac{56}{3} - 7 = 19/76666667 \end{aligned}$$

پاسخ قسمت (ب)

$$\int (\nabla \times A) \cdot ds = ?$$

$$= [A\phi_* + \frac{\Delta\theta}{r} \frac{\partial}{\partial\theta}(A\phi \sin\theta)]R\Delta\phi$$

$$\begin{aligned}\int_{rr} A_r \cdot dl &= A_\theta(R_*, \theta_*, \phi_* + \frac{\Delta\theta}{r})(-R\Delta\theta) \\ &= [A\theta_* + \frac{\partial}{\partial\phi}(A_\theta)\frac{\Delta\phi}{r}](-R\Delta\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{rr} A_r \cdot dl &= A_\phi(R_*, \theta_*, \phi_* + \frac{\Delta\theta}{r}, \phi_*)(-R\sin\theta\Delta\phi) \\ &= [A\phi_* - \frac{\Delta\theta}{r} \frac{\partial}{\partial\theta}(A\phi \sin\theta)](-R\Delta\phi)\end{aligned}$$

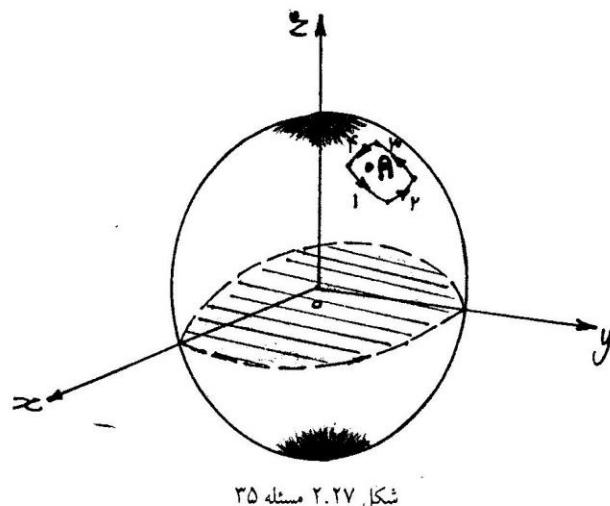
$$\begin{aligned}\int_{rr} A_r \cdot dl &= A_\theta(R_*, \theta_*, \phi_*, -\frac{\Delta\phi}{r})R\Delta\theta \\ &= [A\theta_* - \frac{\Delta\phi}{r} \frac{\partial}{\partial\phi}(A\theta)](R\Delta\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\oint_{rrrr} A \cdot dl &= [A\phi_* + \frac{\Delta\theta}{r} \frac{\partial}{\partial\theta}(A\phi \sin\theta)]R\Delta\phi \\ &\quad + [A_* + \frac{\Delta\phi}{r} \frac{\partial}{\partial\phi}(A\theta)](-R\Delta\theta) \\ &\quad + [A\phi_* - \frac{\Delta\theta}{r} \frac{\partial}{\partial\theta}(A\theta \sin\theta)](-R\Delta\phi) \\ &\quad + [A_\theta_* - \frac{\Delta\phi}{r} \frac{\partial}{\partial\phi}(A\theta)](R\Delta\theta) \\ &= \frac{\partial}{\partial\theta}(A\phi \sin\theta)R\Delta\theta\Delta\phi - \frac{\partial}{\partial\phi}(A_\theta)R\Delta\phi\Delta\theta \\ &\quad \underset{\Delta s \rightarrow 0}{\text{محدود}} \frac{\oint A \cdot dl}{\Delta s} \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial\theta}(A\phi \sin\theta)R\Delta\theta\Delta\phi - \frac{\partial}{\partial\phi}(A_\theta)R\Delta\phi\Delta\theta}{R^r \sin\theta\Delta\phi\Delta\theta}\end{aligned}$$

پاسخ مسئله ۳۵
معادله (۱۲۶-۲):

$$(\nabla \times A) = a_u \cdot (\nabla \times A) = \lim_{\Delta s_u \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s_u} \left(\oint_{c_u} A \cdot dl \right)$$

(توصیه می‌شود قبل از حل این مسئله، صفحات ۶۷ تا ۷۰ کتاب درسی را دقیقاً مطالعه فرماید.)



شکل ۲.۲۷ مسئله ۳۵

$$(\nabla \times A)_n = \left(\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\oint A \cdot dl}{\Delta s} \right)_n, n = a_R$$

$$\oint_{rrrr} A \cdot dl = \int_{rr} A_r \cdot dl + \int_{rr} A_r \cdot dl + \int_{rr} A_r \cdot dl + \int_{rr} A_r \cdot dl$$

$$\begin{aligned}\int_{rr} A_r \cdot dl &= A_r \cdot (R \sin\theta \Delta\phi a_\phi) = A_\phi R \sin\theta \Delta\phi \\ &= A\phi(R_*, \theta_*, \phi_*) R \sin\theta \Delta\phi\end{aligned}$$

$$\nabla \times A = \left(\frac{1}{R^r \sin \theta} \right) \begin{vmatrix} a_R & Ra_\theta & R^r \sin \theta a_\phi \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \circ & \circ & R \sin\left(\frac{\phi}{r}\right) \sin \theta \end{vmatrix}$$

$$= ((R \sin\left(\frac{\phi}{r}\right) \cos \theta)a_R - (R \sin\left(\frac{\phi}{r}\right) \sin \theta)a_\theta) \times \frac{1}{R^r \sin \theta}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\phi}{r}\right) \cos \theta a_R - \sin\left(\frac{\phi}{r}\right) \sin \theta a_\theta}{R \sin \theta}$$

$$ds = R^r \sin \theta d\phi d\theta \vec{a}_R \Rightarrow \int_s (\nabla \times A) \cdot ds = \int R \sin\left(\frac{\phi}{r}\right) \cos \theta d\phi d\theta$$

$$= b(-\gamma \cos \frac{\phi}{r})_{\circ}^{\pi} (\sin \theta)_{\circ}^{\pi/r} = b(\gamma)(1) = \gamma b \quad (**)$$

$$(**), (*) \Rightarrow \boxed{\oint_c A \cdot dl = \int_s (\nabla \times A) \cdot ds}$$

مسئله ۳۷: در مورد تابع عددی f و تابع برداری G , رابطه زیر در مختصات کارتزین ثابت کنید.

$$\nabla \times (fG) = f \nabla \times G + (\nabla f) \times G$$

پاسخ مسئله ۳۷

$$G = G_x a_x + G_y a_y + G_z a_z$$

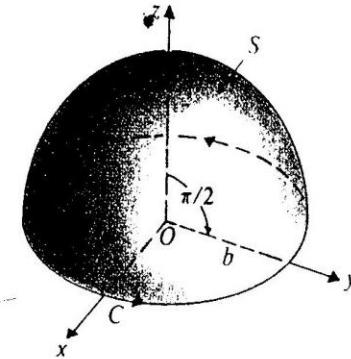
$$fG = fG_x a_x + fG_y a_y + fG_z a_z$$

$$\nabla \times (fG) = \text{curl}(fG) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ fG_x & fG_y & fG_z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{R \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\theta) \right] = (\nabla \times A)_{a_R}$$

مسئله ۳۶: تابع برداری $A = a_\phi \sin(\phi/2)$ داده شده است. قضیه استوکس را روی سطح نم کرروی و مسیر دایره‌ای آن طبق شکل ۲-۳۷ تحقیق نماید.

پاسخ مسئله ۳۶



شکل ۲.۲۸ مسئله ۳۶

$$\oint_c A \cdot dl = \int_s (\nabla \times A) \cdot ds$$

$$\begin{cases} A = a_\phi \sin(\phi/2) \\ dl = dRa_R + Rd\theta a_\theta + R \sin \theta d\phi a_\phi \end{cases}$$

$$A \cdot dl = R \sin \theta \sin(\phi/2) d\phi$$

$$\oint_c A \cdot dl = \oint_0^{\pi} R \sin \theta \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) d\phi = R \sin \theta \left(-\gamma \cos \frac{\phi}{2}\right) \Big|_0^{\pi} = -\gamma R \sin \theta (-\gamma)$$

$$(\theta = \frac{\pi}{2}, R = b) \Rightarrow \oint_c A \cdot dl = -\gamma(b)(1)(-\gamma) = \gamma b \quad (*)$$

$$\nabla \times (\nabla V) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 a_{u_1} & h_2 a_{u_2} & h_3 a_{u_3} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 \frac{\partial V}{\partial u_1} & h_2 \frac{\partial V}{\partial u_2} & h_3 \frac{\partial V}{\partial u_3} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} [[h_1 \frac{\partial}{\partial u_2} (\frac{\partial V}{\partial u_3}) - h_1 \frac{\partial}{\partial u_3} (\frac{\partial V}{\partial u_2})] a_{u_1} + [h_2 \frac{\partial}{\partial u_3} (\frac{\partial V}{\partial u_1}) - h_2 \frac{\partial}{\partial u_1} (\frac{\partial V}{\partial u_3})] a_{u_2} + [h_3 \frac{\partial}{\partial u_1} (\frac{\partial V}{\partial u_2}) - h_3 \frac{\partial}{\partial u_2} (\frac{\partial V}{\partial u_1})] a_{u_3}]$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2} (\frac{\partial^2 V}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial^2 V}{\partial u_2 \partial u_1}) a_{u_1} + \frac{1}{h_1 h_3} (\frac{\partial^2 V}{\partial u_1 \partial u_3} - \frac{\partial^2 V}{\partial u_3 \partial u_1}) a_{u_2} + \frac{1}{h_2 h_3} (\frac{\partial^2 V}{\partial u_2 \partial u_3} - \frac{\partial^2 V}{\partial u_3 \partial u_2}) a_{u_3}$$

(*) می دانیم اگر f و مشتقهای جزئی آن در مراتب اول و دوم پیوسته باشند آنگاه:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

لذا:

$$\nabla \times (\nabla V) = \frac{1}{h_1 h_2} (\circ) + \frac{1}{h_1 h_3} (\circ) + \frac{1}{h_2 h_3} (\circ) = \circ$$

$$\Rightarrow \nabla \times (\nabla V) \equiv \circ$$

پاسخ قسمت ب)

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) \stackrel{?}{=} \circ$$

$$\begin{aligned} & a_x \frac{\partial f G_z}{\partial y} + a_z \frac{\partial f G_y}{\partial x} + a_y \frac{\partial f G_x}{\partial z} \\ & - a_z \frac{\partial f G_x}{\partial y} - a_y \frac{\partial f G_z}{\partial x} - a_x \frac{\partial f G_y}{\partial z} \\ & = a_x \frac{\partial f}{\partial y} G_z + a_x \frac{\partial G_z}{\partial y} f + a_z \frac{\partial f}{\partial x} G_y + a_z \frac{\partial G_y}{\partial x} f \\ & + a_y \frac{\partial f}{\partial z} G_x + a_y \frac{\partial G_x}{\partial z} f - a_z \frac{\partial f}{\partial y} G_x - a_z \frac{\partial G_x}{\partial y} f \\ & - a_y \frac{\partial f}{\partial x} G_z - a_y \frac{\partial G_z}{\partial x} f - a_x \frac{\partial f}{\partial z} G_y - a_x \frac{\partial G_y}{\partial z} f \\ & = f a_x (\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z}) + f a_y (\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x}) \\ & + f a_z (\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y}) + a_x (\frac{\partial f}{\partial y} G_z - \frac{\partial f}{\partial z} G_y) \\ & + a_y (\frac{\partial f}{\partial z} G_x - \frac{\partial f}{\partial x} G_z) + a_z (\frac{\partial f}{\partial x} G_y - \frac{\partial f}{\partial y} G_x) \end{aligned}$$

$$= f(\nabla \times G) + (\nabla f) \times G$$

مسئله ۳۸: اتحادهای صفر زیر را با سطح در مختصات کلی منحنی الخط متعدد ثابت کنید.

$$\int_V (\nabla \times A) dV = \int_S (A \times \hat{n}) ds \quad (\text{الف}) \quad \nabla \cdot (\nabla V) \equiv 0$$

$$\int_V A \cdot dL = 0 \quad (\text{ب}) \quad \nabla \cdot (\nabla \times A) \equiv 0$$

$$\int_C A \cdot dL = 0 \quad (\text{پاسخ مسئله ۳۸}) \quad \int_S A \cdot \hat{n} ds = 0 \quad (\text{پاسخ قسمت الف})$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial u_1} a_{u_1} + \frac{\partial V}{\partial u_2} a_{u_2} + \frac{\partial V}{\partial u_3} a_{u_3}$$

$$\int_S \nabla \times (\nabla V) \cdot \hat{n} ds = \int_C A \cdot dL$$

مسئله ۳۹: تابع برداری $F = a_x(x + c_1z) + a_y(c_1x - 2z) + a_z(x + c_2y + c_3z)$ شده است.

الف) اگر F غیر گردشی باشد، ثابت های c_1, c_2, c_3 را تعیین کنید.

ب) اگر F غیر سلوونوئیدی نبز باشد، ثابت c_3 را نبز تعیین کنید.

پ) تابع پتانسیل عددی V را که منفی گرادیان آن برابر F است، تعیین کنید.

پاسخ مسئله ۳۹

پاسخ قسمت الف)

$$\text{غیر گردشی } F \Rightarrow \text{curl } F = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + c_1z & c_1x - 2z & x + c_2y + c_3z \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow a_x(c_1) + a_z(c_1) + a_y(c_1) - a_z(-2) - a_y(1) = 0$$

$$\Rightarrow a_x(c_1 + 2) + a_y(c_1 - 1) + a_z(c_1 - 0) = 0 \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = -2$$

پاسخ قسمت ب)

$$\text{سلولونوئیدی } F \Rightarrow \text{div } F = 0 \Rightarrow 1 + c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = -1$$

پاسخ قسمت ب)

$$-\nabla V = F, -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}a_x + \frac{\partial V}{\partial y}a_y + \frac{\partial V}{\partial z}a_z\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial V}{\partial x} = x + c_1z \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = -x - c_1z \Rightarrow V = -\frac{x^2}{2} - zx + f(y, z) \\ -\frac{\partial V}{\partial y} = c_1x - 2z \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = -c_1x + 2z \Rightarrow V = 2zy + f(x, z) \\ -\frac{\partial V}{\partial z} = x + c_2y + c_3z \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial z} = -x - c_2y - c_3z \\ \Rightarrow V = -x^2 + 2zy + \frac{z^2}{2}f(x, y) \end{array} \right.$$

$$\nabla \times A = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 a_{u_1} & h_2 a_{u_2} & h_3 a_{u_3} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_{u_1} & h_2 A_{u_2} & h_3 A_{u_3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[[h_1 \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 A_{u_1}) - h_1 \frac{\partial}{\partial u_3} (h_2 A_{u_1})] a_{u_1} \right. \\ &\quad \left. + [h_2 \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 A_{u_1}) - h_2 \frac{\partial}{\partial u_1} (h_3 A_{u_1})] a_{u_2} \right. \\ &\quad \left. + [h_3 \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 A_{u_1}) - h_3 \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 A_{u_1})] a_{u_3} \right] \\ &= \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 A_{u_1}) - \frac{\partial}{\partial u_3} (h_2 A_{u_1}) \right) a_{u_1} \\ &\quad + \frac{1}{h_1 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 A_{u_1}) - \frac{\partial}{\partial u_1} (h_3 A_{u_1}) \right) a_{u_2} \\ &\quad + \frac{1}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 A_{u_1}) - \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 A_{u_1}) \right) a_{u_3} \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left[\frac{h_2 h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_3 A_{u_1})}{\partial u_2} - \frac{h_1 h_3}{h_2 h_3} \frac{\partial (h_2 A_{u_1})}{\partial u_3} \right] \right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial u_2} \left[\frac{h_1 h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_1 A_{u_1})}{\partial u_3} - \frac{h_1 h_2}{h_2 h_3} \frac{\partial (h_3 A_{u_1})}{\partial u_1} \right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial u_3} \left[\frac{h_1 h_2}{h_1 h_3} \frac{\partial (h_2 A_{u_1})}{\partial u_1} - \frac{h_1 h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_1 A_{u_1})}{\partial u_2} \right]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial^2 (h_3 A_{u_1})}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial^2 (h_2 A_{u_1})}{\partial u_1 \partial u_3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 (h_1 A_{u_1})}{\partial u_2 \partial u_3} - \frac{\partial^2 (h_3 A_{u_1})}{\partial u_2 \partial u_1} + \frac{\partial^2 (h_2 A_{u_1})}{\partial u_3 \partial u_1} - \frac{\partial^2 (h_1 A_{u_1})}{\partial u_3 \partial u_2} \right] \\ (*) \Rightarrow & \boxed{\nabla \cdot (\nabla \times A) \equiv 0} \end{aligned}$$

