

تجزیه و تحلیل سیستم



بررسی سیستم ها و سیگنال ها

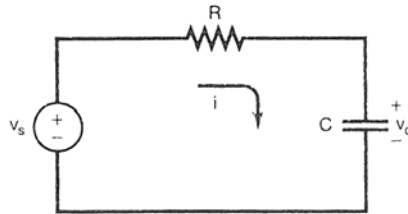
۱-۰ مقدمه

ایده های شهودی سیگنال ها و سیستم ها در حوزه های متنوع و متعددی بروز می کند. در این کتاب خواهید دید که یک چهارچوب تحلیلی - یعنی زبانی برای توصیف سیگنال ها و سیستم ها و ابزارهای پر قدرتی برای تحلیلشان - وجود دارد که به خوبی به اکثر مسایل موجود در حوزه های متنوع قابل اعمال است. در این فصل پی ریزی این چهارچوب را با توصیف و نمایش ریاضی سیگنال ها و سیستم ها می آغازیم. در فصول بعدی برای توصیف مفاهیم و روش های جدید بر این مبانی تکیه می کنیم و به این ترتیب به درک خود از سیگنال ها و سیستم ها و توانایی خود در تحلیل مسایل مربوط به سیگنال ها و سیستم ها در حوزه های وسیع کاربرد آنها می پردازیم.

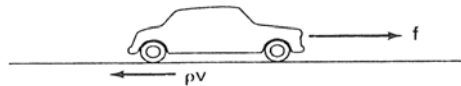
۱-۱ سیگنال های پیوسته و گسسته در زمان

۱-۱-۱ نمونه ها و نمایش ریاضی

سیگنال ها می توانند پدیده های فیزیکی گوناگونی را توصیف کنند. سیگنال ها را می توان به صورت های بسیاری نشان داد اما در تمام موارد اطلاعات موجود در سیگنال در یک منحنی متغیر نهفته است. برای مثال مدار ساده شکل ۱-۱ را در نظر بگیرید. در این حالت تغییرات زمانی ولتاژهای منبع و خازن، V_C و V_S نمونه هایی از سیگنال هستند. در شکل ۱-۲ تغییرات زمانی اعمالی f و سرعت v خودرو سیگنال هستند. به عنوان مثالی دیگر مکانیزم صوتی انسان با ایجاد نوسان در فشار آکوستیکی تولید صدا می کند. شکل ۱-۳ نمونه ضبط شده یک سیگنال صدا را نمایش می دهد که با یک میکروفن به دست آمده است. میکروفن تغییرات آکوستیکی را حس کرده، آن را به سیگنال الکتریکی تبدیل می کند. چنان که در شکل می توان دید، صداهای مختلف تغییرات مختلفی ایجاد می کنند و سیستم صوتی انسان با ایجاد رشته خاصی از این الگوها، سخنان با معنی تولید می کنند. به عنوان مثال دیگر عکس سیاه و سفید شکل ۱-۴ را در نظر بگیرید که در آن تغییرات روشنایی نقاط مختلف اهمیت دارد.

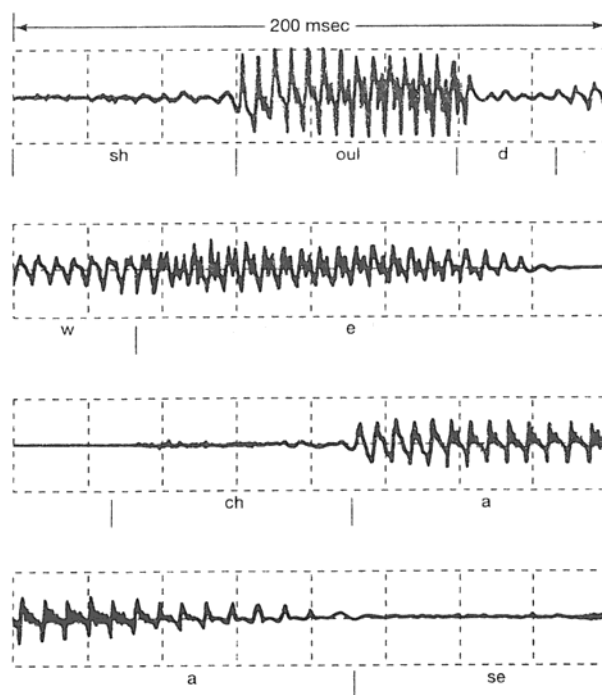


شکل ۱-۱: یک مدار RC ساده با ولتاژ منبع V_S و ولتاژ خازن V_C



شکل ۱-۲: پاسخ خودرو به نیروی f موتور و نیروی بازدارنده ρv که با تندی v اتومبیل متناسب است.

آکوستیکی را بر حسب زمان نشان می دهد، برای بیان ریاضی تصویر، تابعی که روشنایی را بر حسب دو متغیر فضایی نشان می دهد، به کار بریم. در این کتاب توجه خود را به سیگنال هایی که یک متغیر مستقل معطوف می کنیم. برای سهولت متغیر مستقل زمان را در نظر می گیریم. هر چند که در کاربردهای مشخصی ممکن است این متغیر زمان نباشد، مثلاً در ژئوفیزیک برای مطالعه ساختار زمان سیگنال هایی به کار می روند که نشانگر تغییرات کمیت هایی فیزیکی مانند چگالی، تخلخل و مقاومت ویژه الکتریکی هستند.



شکل ۱-۳: مثالی از صدای ثبت شده. این سیگنال تغییرات فشار آکوستیکی متغیر با زمان ناشی از بیان کلمات را نشان می دهد. خط بالا مربوط به کلمه *should*، خط دوم مربوط به کلمه *we*، و دو خط آخر مربوط به *chase* است.



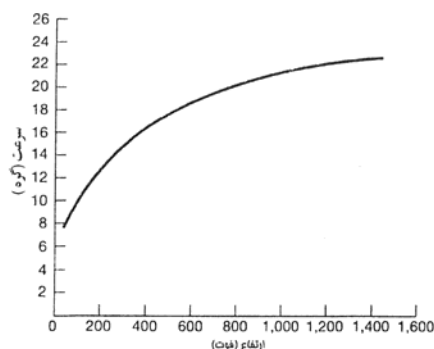
شکل ۱-۴: تصویر سیاه و سفید

زمان با توجه به معادله (۸-۱) داریم

$$P_{\infty} = T \rightarrow \infty \frac{E_{\infty}}{YT} = \dots \quad (1-10)$$

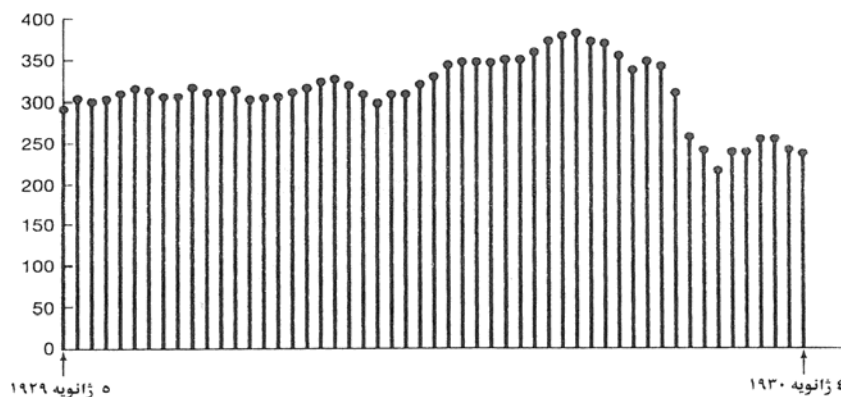
سیگنالی با مقدار ۱ در فاصله ۱ و با مقدار ۰ در بقیه جاها، نمونه ای از سیگنالهای با انرژی محدودست.

برای این مثال $P_{\infty} = 0$ و $E_{\infty} = 1$.



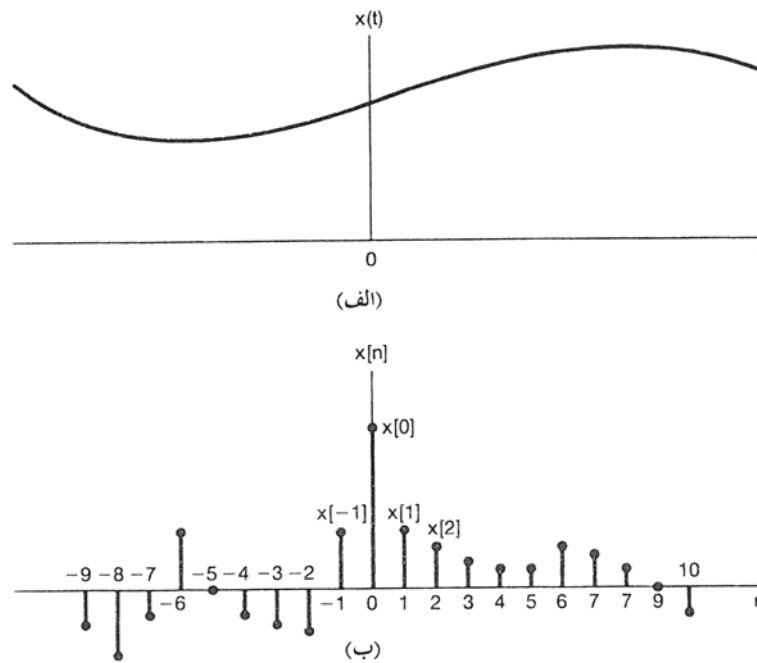
شکل ۱-۵: منحنی میانگین سالانه سرعت باد

دسته دوم سیگنالهایی هستند که توان متوسط محدودی دارند. با توجه به مطلب بیان شده در بالا می بینیم که اگر برای این سیگنالها $P_{\infty} > 0$ ، ضروری است که $E_{\infty} = \infty$ باشد. این مطلب معقول است، زیرا اگر انرژی متوسط در واحد زمان غیر صفر باشد (یعنی توان متوسط غیر صفر باشد) انتگرالگیری یا جمع بستن آن در فاصله بی نهایت به انرژی کل بی نهایت منجر می شود. برای مثال سیگنال ثابت $x(t) = 4$ بی نهایت انرژی دارد، ولی توان متوسط آن $P_{\infty} = 16$ است. همچنین سیگنالهایی وجود دارند که هم P_{∞} و هم E_{∞} آنها نامحدودست. سیگنال $x(t) = t$ نمونه ساده ای از این دسته است. در ادامه این فصل با نمونه های دیگری از سیگنالهای این دسته ها روبرو می شویم.



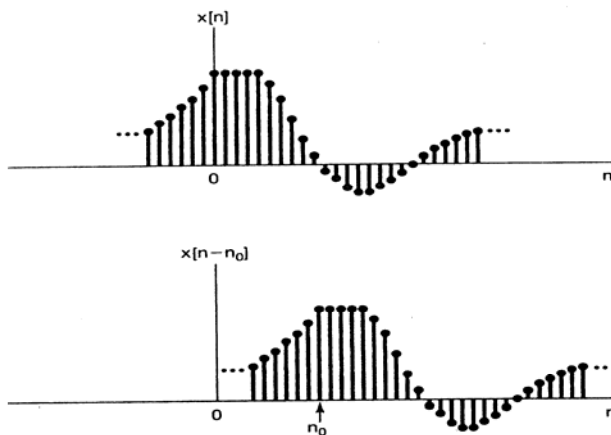
شکل ۱-۶: نمونه ای از یک سیگنال گسسته در زمان

یکی از مفاهیم بنیادی تحلیل سیگنال و سیستم، تبدیل سیگنال است. مثلاً در یک سیستم کنترل هواپیما سیگنالهای متناظر با کارهای خلبان توسط سیستمهای مکانیکی و الکتریکی به تغییر نیروی پشیران هواپیما یا رویه های کنترل موقعیت مثل بالکها تبدیل می شوند و اینها نیز به نوبه خود توسط وضعیت دینامیکی و سینماتیکی هواپیما به تغییر سرعت و جهت منجر می شوند. در یک سیستم صوتی سیگنال ورودی که موسیقی ضبط شده بر روی نوار یا دیسک است برای بهبود مشخصات مطلوب یا حذف نویز یا موازنه بخشهای مختلف (زیر و بم) پردازش می شود. در این بخش به تبدیلهای بسیار محدود و مقدماتی و در عین حال مهم سیگنالها می پردازیم که در آنها متغیر مستقل، یعنی محور زمان، تغییر می یابد. چنانچه در این بخش و بخشهای آتی این فصل خواهیم دید، این تبدیلهای مقدماتی به بیان ویژگیهای خاصی از سیگنالها و سیستمها کمک می کند. در فصول بعد در می یابیم که این تبدیلهای نقش مهمی در تعریف مشخصات دسته های مهمتری از سیستمها بازی می کنند.

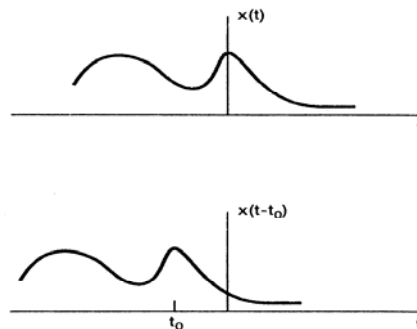
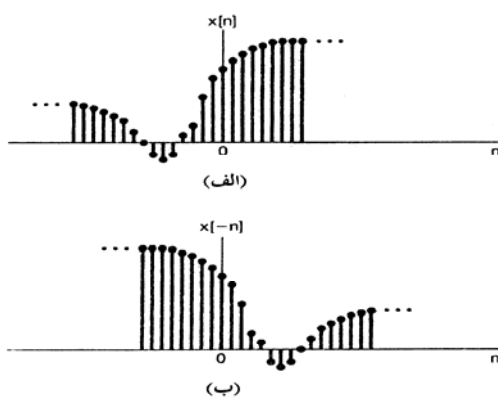


شکل ۱-۷: نمایش ترسیمی الف) سیگنال پیوسته در زمان؛ ب) سیگنال گسسته در زمان

یک تبدیل ساده و بسیار مهم تبدیل متغیر مستقل یک سیگنال، جابجایی زمانی است. شکل ۸-۱ جابجایی زمانی یک سیگنال گسسته در زمان رانشان می دهد، می بینیم که سیگنالهای $x[n]$ و $x[n - n_0]$ همریخت هستند، ولی نسبت به یکدیگر جابجایی دارند. جابجایی زمانی در سیگنالهای پیوسته در زمان هم وجود دارد، شکل ۹-۱ نشان می دهد که $x(t - t_0)$ گونه تأخیر یافته (به ازای $t_0 > 0$) یا جلو رفته (به ازای $t_0 < 0$) است. سیگنالی از این دست در کاربردهایی چون رادار، سونار، و پردازش سیگنالهای لرزه نگاری پیش می آیند، در این کاربردها گیرنده هایی واقع در محلهای مختلف سیگنال منتشر شده در محیط (هوا، آب، زمین) را دریافت می کنند. در این حالتها تفاوت زمان انتشار از مبدأ سیگنال تا محل گیرنده ها باعث می شود سیگنال دریافت شده توسط دو گیرنده نسبت به هم جابه جایی داشته باشند.



شکل ۸-۱: سیگنال های گسسته در زمان جابجا شده. در این شکل $x[n - n_0]$ پس $n_0 > 0$ تاخیر یافته $x[n]$ است؛ یعنی هر نقطه $x[n]$ در $x[n - n_0]$ با تاخیر رخ می دهد.



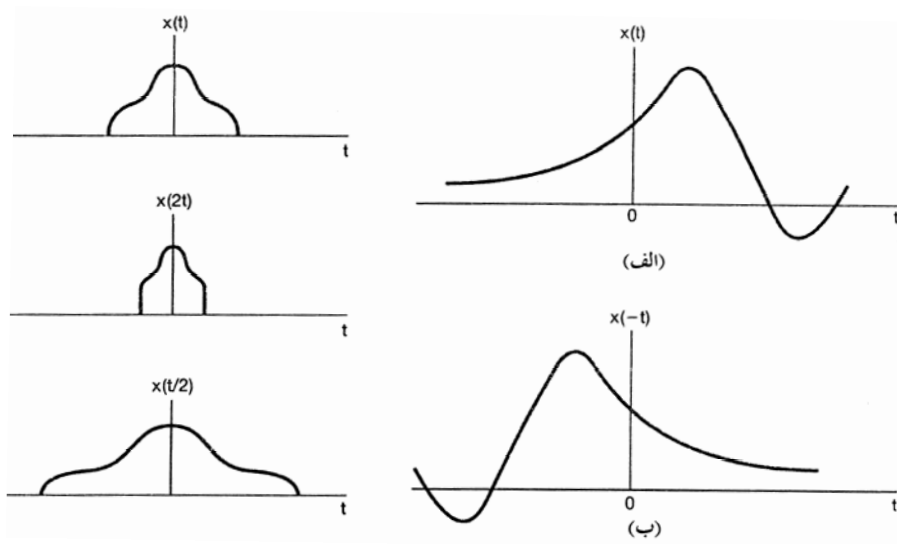
شکل ۹-۱: سیگنال های پیوسته در زمان دارای جابجایی زمانی. در این شکل $x(t - t_0)$ پس $t < 0$ گونه جلو رفته $x(t)$ است یعنی در $x(t - t_0)$ هر نقطه زودتر از نقطه متناظر $x(t)$ رخ می دهد.

(الف) انعکاس آن حول $n = 0$

شکل ۹-۱: سیگنال های پیوسته در زمان دارای جابجایی زمانی. در این شکل $x(t - t_0)$ پس $t < 0$ گونه جلو رفته $x(t)$ است یعنی در $x(t - t_0)$ هر نقطه زودتر از نقطه متناظر $x(t)$ رخ می دهد.

سیگنال $x(t)$ حول $t=0$ به دست آمده است (یعنی از وارونه شدن سیگنال). شکل ۱-۱۱ سیگنال $x(-t)$ به دست آمده از انعکاس $x(t)$ حول $t=0$ نشان می دهد. پس اگر سیگنال ضبط شده روی یک نوار باشد، همان نوار است که برعکس پخش شود. تبدیل دیگر تغییر مقیاس زمانی است. شکل ۱-۱۲ سیگنالهای $x(t)$ ، $x(t/\gamma)$ ، $x(\gamma t)$ ، را نشان می دهد که در آنها متغیر مستقل به طور خطی تغییر مقیاس یافته است. اگر بازم $x(t)$ را سیگنال ضبط شده روی نوار فرض کنیم، با پخش نوار با سرعت دو برابر و $x(t/2)$ با پخش نوار با نصف سرعت متناظر است.

غالباً تعیین اثر تبدیل متغیر مستقل سیگنال $x(t)$ به صورت $x(\alpha t + \beta)$ مورد توجه است (α و β اعدادی ثابت هستند). این تبدیل متغیر شکل سیگنال $x(t)$ را حفظ می کند، فقط به ازای $|\alpha| < 1$ سیگنال به طور خطی کش می آید و به ازای $|\alpha| > 1$ به طور خطی فشرده می شود، به ازای $\alpha < 0$ وارونه می شود و اگر β غیر صفر باشد، جابجا می شود. مثالهای زیر این تبدیلهای را نشان می دهند.



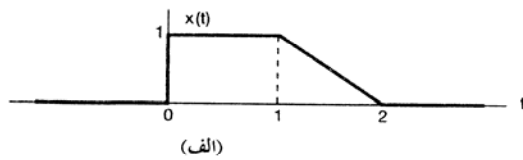
شکل ۱-۱۲: سیگنال های پیوسته در زمان که با

شکل ۱-۱۱: الف) سیگنال پیوسته در زمان $x(t)$

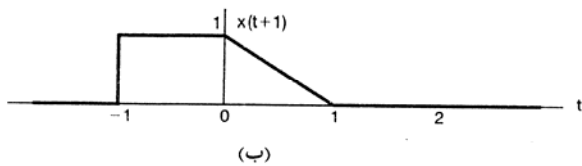
تغییر مقیاس به هم مرتبط می شوند.

ب) انعکاس آن حول $t=0$

سیگنال $x(t)$ شکل ۱-۱۳ (الف) داده شده است: سیگنال $x(t+1)$ با پیش بردن $x(t)$ (جابجایی به سمت چپ) به اندازه یک واحد محور زمان به دست می آید و در شکل ۱-۱۳ (ب) نشان داده شده است. توجه کنید که مقدار $x(t)$ در $t=t$ در سیگنال $x(t+1)$ در زمان $t=t-1$ رخ می دهد. برای مثال مقدار $x(t)$ در $t=1$ با مقدار $x(t+1)$ در $t=1-1=0$ معادل است. همچنین چون $x(t)$ در $t < 0$ صفرست، $x(t+1)$ در $t < -1$ صفرست. به نحوی مشابه چون $x(t)$ در $t > 2$ صفرست، $x(t+1)$ در $t > 1$ صفرست.

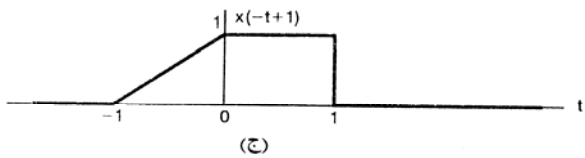


شکل ۱-۱۳: الف) سیگنال های پیوسته در زمان $x(t)$ مثال های ۱-۱ تا ۱-۳ که برای نشان دادن تبدیل متغیر سیگنال به کار رفته است.



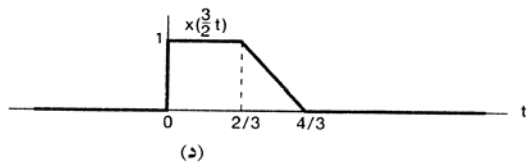
ب) سیگنال جابجا شده $x(t+1)$

ج) سیگنال $x(-t+1)$ که با جابجایی و وارون شدن به دست آمده است.

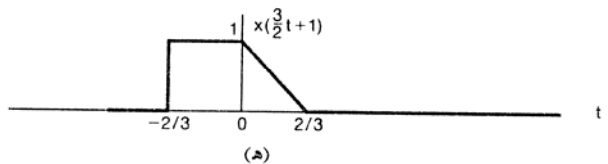


د) سیگنال تغییر مقیاس یافته زمانی

$$x\left(\frac{3}{2}t\right)$$



ه) سیگنال $x\left(\frac{3}{2}t+1\right)$ که با تغییر مقیاس و جابجایی به دست آمده است.



آید. پس $x(-t+1)$ گونه وارون شده $x(t+1)$ است. پس برای رسم $x(-t+1)$ باید $x(t+1)$ را به صورت شکل ۱۳-۱ (ج) نسبت به محور t منعکس کنیم.

مثال ۲-۱

با توجه به سیگنال $x(t)$ شکل ۱۳-۱ (الف)، سیگنال $x\left(\frac{t}{2}\right)$ با فشردن خطی $x(t)$ با ضریب $\frac{1}{2}$ ، به صورت نشان داده شده در شکل ۱۳-۱ (د) متناظرست. توجه کنید که مقدار $x(t)$ در $t=t$ با مقدار $x\left(\frac{t}{2}\right)$ در $t=2t$ متناظرست. مثلاً مقدار $x(t)$ در $t=1$ با مقدار $x\left(\frac{t}{2}\right)$ در $t=2$ برابرست. همچنین چون $x(t)$ در $t < 0$ صفرست، $x\left(\frac{t}{2}\right)$ نیز در $t < 0$ صفرست. به نحوی مشابه چون $x(t)$ در $t < 2$ صفرست، $x\left(\frac{t}{2}\right)$ در $t > 4$ صفرست.

مثال ۳-۱

فرض کنید می‌خواهیم اثر تبدیل متغیر مستقل سیگنال $x(t)$ را به صورت $x(at+\beta)$ را بیابیم، که در آن α و β اعداد معینی هستند. روش منظم انجام این کار این است که ابتدا $x(t)$ را با توجه به β تأخیر دهیم یا پیش آوریم. سپس تغییر مقیاس زمانی و یا وارونگی زمانی لازم را با توجه به مقدار α صورت دهیم. سیگنال جابه جا شده به ازای $|\alpha| < 1$ کش می‌آید و به ازای $|\alpha| > 1$ فشرده می‌شود، و به ازای $\alpha < 0$ وارونه می‌شود.

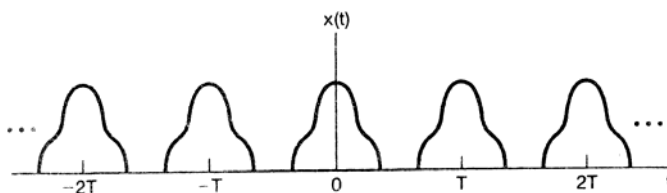
برای نشان دادن چگونگی انجام این کار $x\left(\frac{t}{2}\right)$ را $t+1$ را با توجه به شکل ۱۳-۱ (الف) به دست می‌آوریم. چون $\beta = 1$ ابتدا (xt) را یک واحد پیش می‌بریم (به سمت چپ جا به جا می‌کنیم)، تا شکل ۱۳-۱ (ب) به دست آید. سپس چون $|\alpha| = \frac{1}{2}$ سیگنال جا به جا شده شکل ۱۳-۱ (ب) را با ضریب $\frac{1}{2}$ فشرده می‌کنیم تا سیگنال شکل ۱۳-۱ (ه) حاصل شود. تبدیل متغیر مستقل علاوه بر کاربردهایی که در نمایش پدیده‌هایی فیزیکی چون جابجایی زمانی سیگنال سونار و پخش سریع یا وارونه سیگنال ضبط شده دارد، در تحلیل سیگنالها و سیستمها بسیار مفیدست. دربخش ۱-۶ و فصل ۲ تبدیل متغیر مستقل را برای معرفی و تحلیل خواص سیستمها به کار می‌بریم. این تبدیله‌ها در تعریف و بررسی بعضی ویژگیهای سیگنالها نیز مهم اند.



یکی از مهمترین دسته سیگنالهایی که در این کتاب با آنها بسیار روبرو می شویم سیگنالهای متناوب هستند. برای سیگنال متناوب پیوسته در زمان $x(t)$ یک T مثبت وجود دارد که به ازای آن

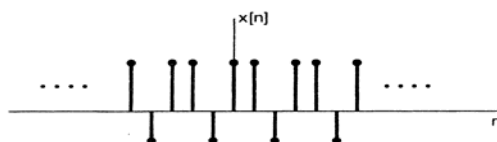
$$x(t) = x(t+T) \quad (11-1)$$

به عبارت دیگر سیگنال متناوب این ویژگی را دارد که در اثر جابجایی زمانی به اندازه T تغییر نمی کند. میگوییم $x(t)$ با دوره تناوب T متناوب است. با سیگنالهای متناوب پیوسته در زمان در زمینه های گوناگونی برخورد می کنیم. مثلاً چنانچه در مسأله ۲-۶۱ نشان خواهیم داد پاسخ طبیعی سیستمهایی که در آنها انرژی پایستارست، مثلاً مدارهای LC ایده آل که در آنها انرژی در مقاومت تلف نمی شود و سیستمهای مکانیکی ایده آل فاقد تلفات اصطکاکی، متناوب اند و در واقع از سیگنالهای متناوب پایه ای که در بخش ۱-۳ معرفی خواهند شد تشکیل می شوند.



شکل ۱-۱۴: یک سیگنال متناوب پیوسته در زمان

شکل ۱-۱۴ نمونه ای از سیگنالهای پیوسته در زمان متناوب است. این شکل و معادله (۱۱-۱) به سادگی نشان می دهند که اگر $x(t)$ با دوره تناوب T متناوب باشد، به ازای هر مقدار m داریم $x(t) = x(t+mT)$.



شکل ۱-۱۵: یک سیگنال گسسته در زمان متناوب با دوره تناوب پایه $N_0 = 3$

پس $x(t)$ با دوره تناوبهای $2T$ ، $3T$ ، $4T$ ، ... نیز متناوب است. زمان تناوب پایه T سیگنال $x(t)$ کوچکترین مقدار مثبت است که به ازای آن معادله (۱۱-۱) برقرارست. این تعریف تنها به ازای $x(t)$ ثابت قابل اعمال نیست. در این حالت زمان تناوب پایه تعریف نمی شود، زیرا $x(t)$ به ازای هر مقدار T متناوب است و بنابراین کوچکترین مقدار T وجود ندارد. سیگنال $x(t)$ غیرمتناوب را نا متناوب می نامند. سیگنالهای گسسته در زمان متناوب نیز به همین صورت تعریف می شوند. سیگنال گسسته در زمان $x[n]$ را با دوره تناوب N متناوب می نامیم، اگر به ازای تمام مقادیر n داشته باشیم

$$x[n] = x[n + N] \quad (12-1)$$

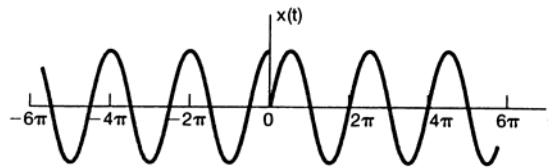
که N یک عدد صحیح مثبت است. اگر معادله (۱۲-۱) صادق باشد، $x[n]$ با دوره تناوب $2N$ ، $3N$ ، ... نیز متناوب است. دوره تناوب پایه N کوچکترین مقدار مثبتی است که معادله (۱۲-۱) را ارضا می کند.

شکل ۱-۱۵ نمونه ای از یک سیگنال متناوب گسسته در زمان، با تناوب پایه $N = 3$ را نشان می دهد.

می خواهیم نشان دهیم که برای تعیین متناوب بودن یا نبودن یک سیگنال با چه نوع مسأله ای روبرویم. سیگنالی که درصددیم این ویژگی را در موردش بررسی کنیم عبارت است از

$$x(t) = \begin{cases} \cos t, & t \leq 0 \\ \sin t, & t \geq 0 \end{cases}$$

از مثلثات می دانیم که $\cos(t + 2\pi) = \cos(t)$ و $\sin(t + 2\pi) = \sin(t)$. پس $t < 0$ و $t > 0$ را جداگانه در نظر می گیریم و می بینیم که $x(t)$ در فاصله هایی به طول 2π تکرار می شود. ولی چنانچه شکل ۱۶-۱ نشان می دهد $x(t)$ در مبدأ ناپیوستگی دارد و این ناپیوستگی در هیچ زمان دیگری رخ نمی دهد. پس چون تمام ویژگیهای شکل یک سیگنال متناوب باید تکرار شود، نتیجه می گیریم که سیگنال $x(t)$ متناوب نیست.



شکل ۱۶-۱: سیگنال $x(t)$ مثال ۴-۱

۳-۲-۱ سیگنالهای زوج و فرد

یک دسته دیگر از ویژگیهای مفید سیگنالها به تقارنشان در وارونه شدن زمانی مربوط می شود. سیگنال $x(t)$ یا $x[n]$ را زوج می نامند، اگر با انعکاس خود نسبت به مبدأ یکسان باشد. در حالت پیوسته در زمان سیگنال به شرطی زوج است که

$$x(-t) = x(t) \quad (۱۴-۱)$$

و در حالت گسسته در زمان به شرطی که

$$x[-n] = x[n] \quad (۱۵-۱)$$

سیگنال به شرطی فرد است که

$$x(-t) = -x(t) \quad (۱۶-۱)$$

$$x[-n] = -x[n] \quad (۱۷-۱)$$

توجه کنید که سیگنال فرد باید در $t=0$ یا $n=0$ صفر باشد، زیرا معادلات (۱۶-۱) و (۱۷-۱) مستلزم آن هستند که

$$x(0) = -x(0) \quad \text{و} \quad x[0] = -x[0]$$

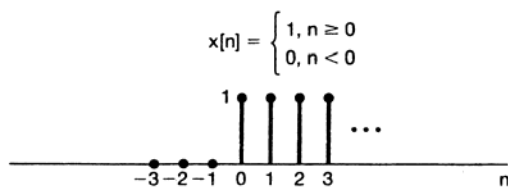
هر سیگنالی را می توان به صورت مجموع دو سیگنال، یکی فرد و یکی زوج تجزیه کرد. برای نشان دادن این مطلب

سیگنال زیر را در نظر بگیرید

$$\varepsilon_2\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \quad (۱۸-۱)$$

که بخش زوج $x(t)$ است. به طور مشابه بخش فرد $x(t)$ برابرست با

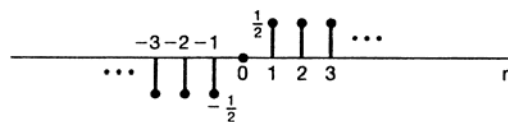
$$\vartheta_d\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] \quad (۱۹-۱)$$



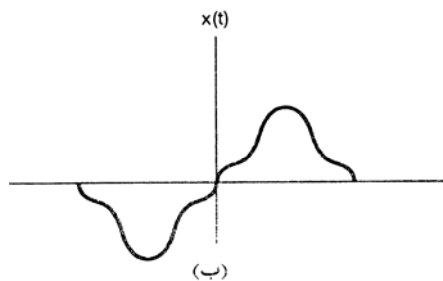
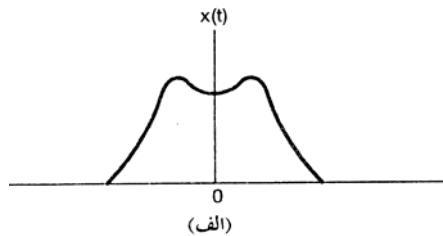
$$\mathcal{E}\nu\{x[n]\} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n < 0 \\ 1, & n = 0 \\ \frac{1}{2}, & n > 0 \end{cases}$$



$$\mathcal{O}\nu\{x[n]\} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & n < 0 \\ 0, & n = 0 \\ \frac{1}{2}, & n > 0 \end{cases}$$



شکل ۱-۱۸: نمونه ای از تجزیه زوج-فرد یک سیگنال گسسته در زمان.



شکل ۱-۱۷: الف) یک سیگنال پیوسته در زمان زوج

ب) یک سیگنال پیوسته در زمان فرد

به سادگی می توان نشان داد که بخش زوج واقعاً یک سیگنال زوج، و بخش فرد واقعاً یک سیگنال فرد، و مجموع آن دو سیگنال $x(t)$ است. برای حالت گسسته در زمان نیز تعریف مشابهی وجود دارد. شکل ۱-۱۸ نمونه ای از تجزیه یک سیگنال گسسته در زمان به بخشهای زوج و فرد را نشان می دهد.

۳-۱ سیگنالهای نمایی و سینوسی

در این بخش و بخش بعد چند سیگنال پیوسته در زمان و گسسته در زمان معرفی می کنیم. این سیگنالها علاوه بر این که در طبیعت یافت می شوند، واحهای سازنده ای نیز هستند که با ترکیب آنها می توانیم سیگنالهای دیگری بسازیم.

۱-۳-۱ سیگنالهای پیوسته در زمان سینوسی و نمایی مختلط

سیگنال نمایی مختلط پیوسته در زمان به صورت زیرست

$$x(t) = Ce^{at} \quad (۲۰-۱)$$

که C و a در حالت کلی اعدادی مختلط اند. بسته به مقدار این پارامترها، این نمایی مختلط می تواند مشخصه های متفاوتی داشته باشد.

مطابق شکل ۱-۱۹، اگر C و a حقیقی باشند [در این حالت $x(t)$ را نمایی حقیقی می نامند] دو رفتار ممکن است. به ازای a مثبت، $x(t)$ یک نمایی افزایشی است، سیگنالی که برای توصیف پدیده‌های فیزیکی متفاوتی چون واکنشهای زنجیری انفجارات اتمی یا واکنشهای شیمیایی پیچیده به کار می رود. به ازای a منفی، $x(t)$ نمایی کاهشی است، سیگنالی که برای توصیف تلاشی رادیواکتیو، پاسخهای مدارهای RC و سیستمهای مکانیکی میرا و بسیاری فرایندهای فیزیکی به کار می رود. چنانچه در مسائل ۲-۶۱ و ۲-۶۲ خواهیم دید، پاسخهای طبیعی مدار شکل ۱-۱ و خودروی شکل ۲-۱ نمایی میراست. همچنین توجه کنید که به ازای $a=0$ ، $x(t)$ ثابت است.

سیگنالهای متناوب نمایی مختلط و سینوسی

به ازای a موهومی خالص دسته مهم نمایی‌های مختلط به دست می آید. فرض کنید

$$x(t) = e^{j\omega t} \quad (21-1)$$

یک خاصیت مهم این سیگنال متناوب بودن آن است. برای اثبات این مطلب توجه کنید که معادله (۱۱-۱) می گوید $x(t)$ هنگامی با دوره تناوب T متناوب است که

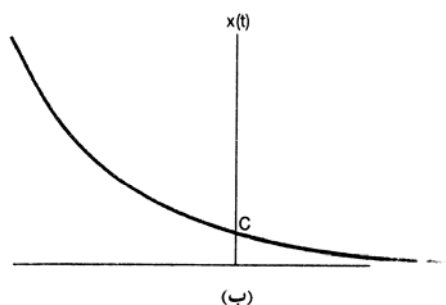
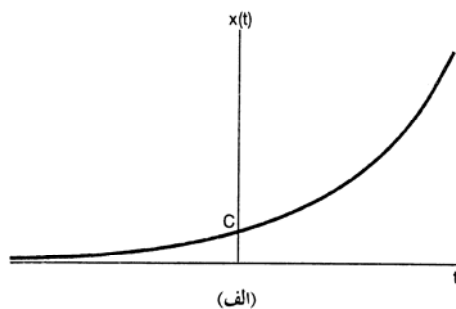
$$e^{j\omega t} = e^{j\omega(t+T)} \quad (22-1)$$

$$e^{j\omega(t+T)} = e^{j\omega t} e^{j\omega T}$$

چون داریم

برای متناوب بودن باید داشته باشیم

$$e^{j\omega T} = 1 \quad (23-1)$$



شکل ۱-۱۹: نمای حقیقی در زمان

$$x(t) = C e^{at}$$

$$a > 0 \quad \text{الف)}$$

$$a < 0 \quad \text{ب)}$$

مقدار مثبت T که در معادله (۲۳-۱) صدق می کند، از رابطه زیر به دست می آید

$$T = \frac{2\pi}{|\omega_0|} \quad (24-1)$$

بنابراین سیگنالهای $e^{j\omega_0 t}$ و $e^{-j\omega_0 t}$ دوره تناوب پایه یکسانی دارند.

یکی از سیگنالهایی که با نمایی مختلط ارتباط نزدیکی دارد، سیگنال سینوسی است

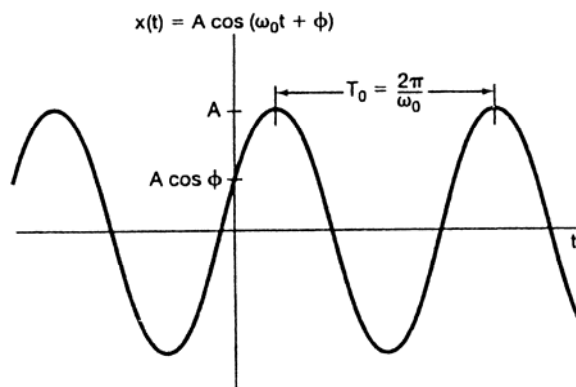
$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (25-1)$$

این سیگنال در شکل ۲۰-۱ نشان داده شده است. واحد t ثانیه و واحدهای ϕ و ω_0 به ترتیب رادیان و رادیانبر ثانیه است. معمولاً ω_0 را به صورت $\omega_0 = 2\pi f$ می نویسند که واحد f سیکل بر ثانیه یا هرتز (HZ) است. سیگنال سینوسی نیز مانند نمایی و نمایی مختلط متناوب است و دوره تناوب پایه آن، T ، از رابطه (۲۴-۱) به دست می آید. سیگنال نمایی مختلط و سینوسی نیز برای توصیف مشخصه‌های فرایندهای فیزیکی متعددی به کار می روند، مخصوصاً سیستمهای فیزیکی با انرژی پایستار.

برای مثال چنانچه در مسأله ۲-۶۱ خواهیم دید پاسخ طبیعی مدار LC سینوسی است، همچنین حرکت نوسانی ساده یک سیستم مکانیکی متشکل از جرمی که به فنر متصل به محلی ثابت وصل است. تغییرات فشار اکوستیکی متناظر با یک نت موسیقی نیز سینوسی است.

با استفاده از رابطه اوپلر می توان نمایی مختلط معادله (۲۱-۱) را بر حسب سیگنالهای سینوسی دارای همان دوره تناوب پایه نوشت:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t \quad (26-1)$$



شکل ۲۰-۱: سیگنال سینوسی پیوسته در زمان

به طور مشابه سیگنال سینوسی معادله (۲۵-۱) را می توان بر حسب نمایشهای مختلط متناوب دارای همان دوره تناوب پایه نوشت:

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 t} \quad (27-1)$$

سیگنال نمایی مختلط بیان کنیم

$$A \cos(\omega, t + \phi) = AR_e \{ e^{j(\omega, t + \phi)} \} \quad (28-1)$$

اگر c عددی مختلط باشد $R_e\{c\}$ بخش حقیقی آن است. همچنین برای نشان دادن قسمت موهومی c نماد $Im\{c\}$ را به کار می بریم. پس برای مثال

$$A \sin(\omega, t + \phi) = A Im \{ e^{j(\omega, t + \phi)} \} \quad (29-1)$$

با توجه به معادله (24-1) می بینیم که دوره تناوب پایه سیگنال سینوسی پیوسته در زمان یا نمایی مختلط متناوب، با عکس $|\omega|$ متناسب است. $|\omega|$ را فرکانس پایه می نامیم. در شکل ۱-۲۱ تعبیر ترسیمی این عبارت را می بینیم. اگر اندازه ω را کاهش دهیم، آهنگ نوسانات را کاهش داده ایم و در نتیجه دوره تناوب زیاد می شود. اگر اندازه ω را افزایش دهیم، دقیقاً اثر عکس رخ می دهد. حال مورد $\omega = 0$ را در نظر بگیرید. در این مورد، چنان که پیشتر گفتیم، $x(t)$ ثابت و به ازای هر T مثبت، با دوره تناوب T متناوب است. بنابراین دوره تناوب پایه سیگنال ثابت تعریف نشده است. ولی اگر فرکانس پایه سیگنال ثابت را صفر تعریف کنیم، ابهامی پیش نمی آید. یعنی آهنگ نوسان سیگنال ثابت صفرست.

سیگنالهای متناوب و مخصوصاً سیگنال نمایی مختلط معادله (۲۱-۱) و سیگنال سینوسی معادله (۲۵-۱) مثالهای مهمی از سیگنالهای با انرژی کل بینهایت و توان محدود هستند. برای مثال سیگنال نمایی متناوب معادله (۲۱-۱) را در نظر می گیریم، و انرژی کل و توان متوسط آن را روی یک دوره تناوب حساب می کنیم

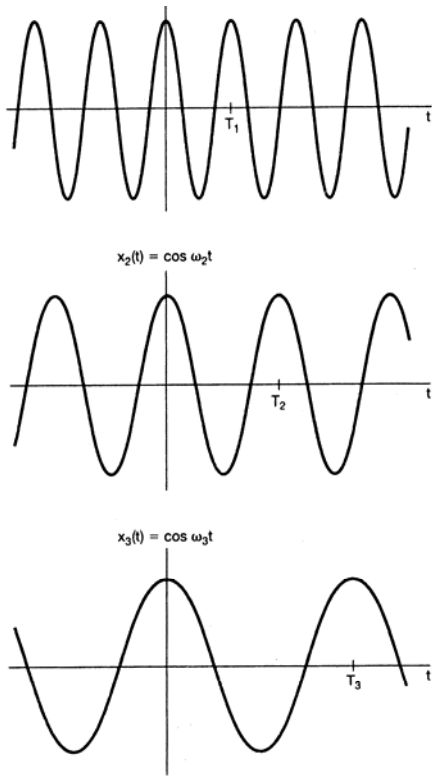
$$E_{\text{توان}} = \int_{t_1}^{t_2} |e^{j\omega, t}|^2 dt \quad (30-1)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} 1 dt = T$$

$$P_{\text{توان}} = \frac{1}{T} E_{\text{توان}} = 1 \quad (31-1)$$

چون در گستره $-\infty$ تا $+\infty$ بینهایت دوره تناوب وجود دارد، انرژی کل که با انتگرالگیری در فاصله $-\infty < t < \infty$ به دست می آید، بینهایت است ولی تمام دوره تناوبهای یکسان اند. بنابراین چون توان متوسط در هر دوره تناوب ۱ است، توان متوسط روی چند دوره تناوب نیز ۱ است. پس سیگنال نمایی متناوب توان متوسط محدودی دارد.

$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T |e^{j\omega, t}|^2 dt = 1 \quad (32-1)$$



شکل ۱-۲۱: رابطه بین فرکانس پایه و دوره تناوب سیگنال های سینوسی پیوسته در زمان. در این شکل ها $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$ که مستلزم $T_1 < T_2 < T_3$ است.

مسأله ۱۳ نمونه های دیگری از محاسبه انرژی و توان سیگنالهای متناوب و نامتناوب را نشان می دهد. سیگنالهای نمایی مختلط متناوب نقشی محوری در بررسی سیگنالها و سیستمها دارند. بخشی از این اهمیت به این خاطرست که این سیگنالها اجزا سازنده بسیار مفیدی برای سیگنالهای دیگر هستند. در موارد بسیاری در نظر گرفتن نمایی های مختلط مرتبط هارمونیکی مفید واقع می شود، منظورمان نمایی های مختلطی هستند که در یک دوره تناوب مشترک T دارند. شرط لازم برای این که نمایی مختلط $e^{j\omega t}$ با دوره تناوب T متناوب باشند این است که

در این شکلها $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$ که مستلزم $T_1 < T_2 < T_3$ است .

$$e^{j\omega T} = 1 \quad (۳۳-۱)$$

که نشان می دهد ωT باید مضربی از باشد ، یعنی

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \omega T = 2\pi k \quad (۳۴-۱)$$

پس با تعریف

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (۳۵-۱)$$

می بینیم که برای ارضای معادله (۳۴-۱)، ω باید مضرب صحیحی از $\frac{2\pi}{T}$ باشد. یعنی نمایی های مختلط مرتبط هارمونیکی مجموعه ای از نمایی های مختلط اند که فرکانس پایه شان مضربی از یک فرکانس مثبت $\frac{2\pi}{T}$ باشد :

$$\Phi_k(t) = e^{jk\omega t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (۳۶-۱)$$

پایه زیر متناوب است

$$\frac{2\pi}{k|\omega_s|} = \frac{T_s}{|k|} \quad (37-1)$$

هارمونیک k ام $\varphi_k(t)$ با دوره تناوب T نیز متناوب است، ولی طی فاصله زمانی T دقیقاً $|k|$ زمان تناوب پایه خود را طی می کند .

ما از اصطلاح هارمونیک مفهومی در نظر داریم که با مفهوم هارمونیک در موسیقی سازگارست، در موسیقی نواهای حاصل از تغییرات فشار اکوستیکی که فرکانسهایشان مضرب صحیحی از یک فرکانس پایه است، هارمونیک خوانده می شوند. برای مثال الگوی ارتعاشات یک تار سازی مثل ویولن را می توان به صورت مجموع وزنداری از نمایی های مختلط مرتبط هارمونیکی بیان کرد. در فصل ۳ خواهید دید که چگونه می توان دسته وسیعی از سیگنالها را با استفاده از سیگنالهای مرتبط هارمونیکی بیان شده با معادله (۳۶-۱) توصیف کرد .

مثال ۵-۱

گاهی اوقات مایلیم مجموع دو نمایی مختلط را به صورت حاصلضرب یک تابع نمایی و یک تابع سینوسی بیان کنیم . برای مثال فرض کنید می خواهیم اندازه سیگنال زیر را رسم کنیم

$$x(t) = e^{j\pi t} + e^{-j\pi t} \quad (38-1)$$

به این منظور ابتدا یک تابع نمایی مختلط از معادله (۳۸-۱) فاکتور می گیریم، فرکانس این تابع نمایی متوسط فرکانس دو تابع موجود در جمع است . با این کار به دست می آوریم

$$x(t) = e^{j\pi/2t} (e^{-j\pi/2t} + e^{j\pi/2t}) \quad (39-1)$$

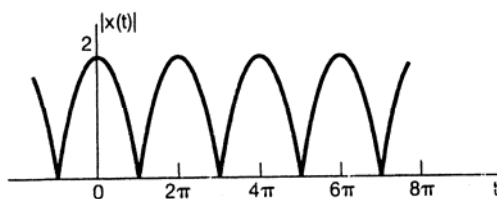
که با استفاده از رابطه اویلر می توان آن را به شکل زیر نوشت

$$x(t) = 2e^{j\pi/2t} \cos(0.5t) \quad (40-1)$$

با توجه به این عبارت می توان اندازه $x(t)$ را به دست آورد

$$|x(t)| = 2|\cos(0.5t)| \quad (41-1)$$

برای یافتن رابطه فوق از این موضوع استفاده کرده ایم که اندازه تابع نمایی مختلط $e^{j\pi/2t}$ همواره برابر یک است . $|x(t)|$ که معمولاً آن را سینوسی یکسو شده تمام موج می خوانند ، در شکل ۲۲-۱ رسم شده است .



شکل ۲۲-۱: سینوسی یکسو شده تمام موج مثال ۵-۱

می توانیم کلی ترین حالت یک نمائی مختلط را بر حسب دو حالتی که تاکنون دیده ایم، یعنی نمایی حقیقی و نمایی مختلط، بیان و تعبیر کنیم. نمائی مختلط Ce^{at} را در نظر بگیرید که در آن C به شکل قطبی و a به صورت قائم بیان

$$C = |C|e^{j\theta} \quad \text{شده باشد. یعنی}$$

$$a = r + j\omega,$$

و

بنابراین

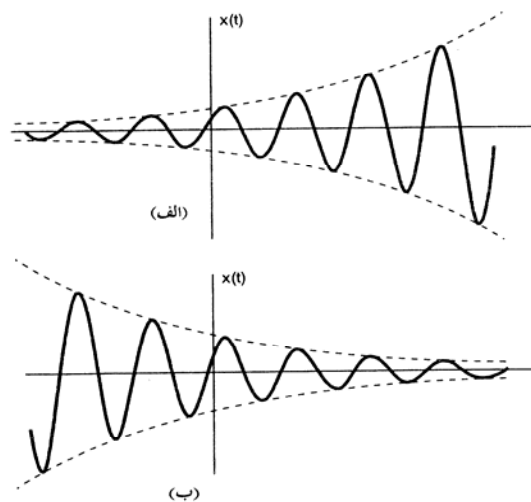
$$Ce^{at} = |C|e^{j\theta} e^{(r+j\omega)t} = |C|e^{rt} e^{j(\omega t + \theta)} \quad (42-1)$$

رابطه اخیر را به کمک رابطه اویلر بسط می دهیم

$$Ce^{at} = |C|e^{rt} \cos(\omega t + \theta) + j|C|e^{rt} \sin(\omega t + \theta) \quad (43-1)$$

$$= |C|e^{rt} \cos(\omega t + \theta) + j|C|e^{rt} \cos(\omega t + \theta - \frac{\pi}{2})$$

بنابراین به ازای $r=0$ بخشهای حقیقی و موهومی نمایی مختلط، سینوسی اند. به ازای $r>0$ این بخشها حاصل ضرب یک سیگنال سینوسی و یک نمایی افزایشی اند، و به ازای $r<0$ سیگنالهای سینوسی ای که در نمایی کاهشی ضرب شده باشند. این دو حالت در شکل ۱-۲۳ نشان داده شده است. قسمت خط چین شکل با توابع $\pm |C|e^{rt}$ متناظرند. معادله (۴۲-۱) نشان می دهد که $|C|e^{rt}$ اندازه نمایی مختلط است. بنابراین منحنیهای خط چین پوش منحنی نوسانی شکل را نشان می دهند که اوجهای نوسانات بین آنها قرار می گیرد. پوش راه مناسبی برای تصور چگونگی تغییر دامنه نوسانات است.



شکل ۱-۲۳:

الف) سیگنال های سینوسی افزایشی $x(t) = Ce^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta)$ ، $r > 0$

ب) سیگنال سینوسی میرا $x(t) = Ce^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta)$ ، $r < 0$

سیستمهای مکانیکی دارای نیروهای میرا کننده و بازگرداننده، نظیر سیستم تعلیق خودروها، باین سیگنالها روبرو می شویم. در این سیستمها مکانیسمی برای اتلاف انرژی وجود دارد (مقاومت و اصطکاک) و نوسانها میرا می شوند. در مسائل ۲-۶۱ و ۲-۶۲ با سیستمهایی که پاسخ طبیعی شان سینوسی میراست روبرو می شویم.

۲-۳-۱ سیگنالهای نمایی مختلط و سینوسی گسسته در زمان

همانند حالت پیوسته در زمان، سیگنال یارشته نمایی مختلط نیز سیگنال مهمی در حالت گسسته در زمان است و به صورت زیر تعریف می شود

$$x[n] = C\alpha^n \quad (44-1)$$

α و C در حالت کلی اعداد مختلط اند. این رابطه را می توان به صورت زیر هم بیان کرد

$$x[n] = Ce^{f\beta n} \quad (45-1)$$

که در آن

$$\alpha = e^{f\beta}$$

گرچه رشته نمایی مختلط گسسته در زمان بیان شده به صورت (۴۵-۱) به شکل نمایی مختلط پیوسته در زمان شبیه تر است، ولی بیان تابع نمایی مختلط گسسته در زمان به صورت معادله (۴۴-۱) مناسبتر است.

سیگنالهای نمایی حقیقی

به ازای C و α حقیقی می توانیم یکی از رفتارهای نمود شده در شکل ۱-۲۴ را مشاهده کنیم. به ازای $|\alpha| > 1$ ، سیگنال به طور نمایی افزایش می یابد، ولی به ازای $|\alpha| < 1$ یک نمایی کاهشی داریم. به علاوه اگر α مثبت باشد، تمام مقادیر $C\alpha^n$ هم علامت اند، اما اگر α منفی باشد، علامت $x[n]$ یک در میان تغییر می کند. توجه کنید که به ازای $\alpha = 1$ ، $x[n]$ مقدار ثابتی دارد، در حالی که به ازای $\alpha = -1$ ، مقدار $x[n]$ بین C و $-C$ تغییر می کند. نمایهای گسسته در زمان حقیقی معمولاً برای توصیف رشد جمعیت بر حسب تابعی از نسل و بازگشت سرمایه گذاری بر حسب تابعی از روز، ماه یا فصل به کار می رود.

سیگنالهای سینوسی

دیگر نمایی مختلط مهم، از معادله (۴۵-۱) و با موهومی فرض کردن β (یعنی $|\alpha| = 1$) به دست می آید. فرض کنید

$$x[n] = e^{j\omega n} \quad (46-2)$$

مانند حالت پیوسته در زمان، این سیگنال هم با سیگنال سینوسی زیر نزدیک است

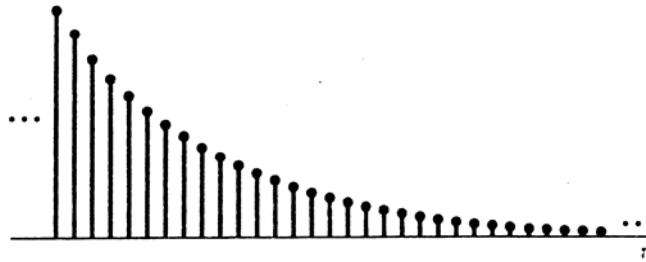
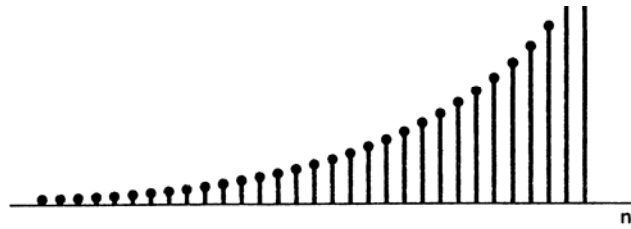
$$x[n] = A \cos(\omega n + \phi) \quad (47-2)$$

اگر n را بدون بعد فرض کنیم، یکای ω و ϕ باید رادیان باشد. شکل ۱-۲۵ سه نمونه رشته سینوسی را نشان می دهد. باز هم مثل قبل به کمک رابطه اوپلر نمایی مختلط و سینوسی را به هم مرتبط می کنیم.

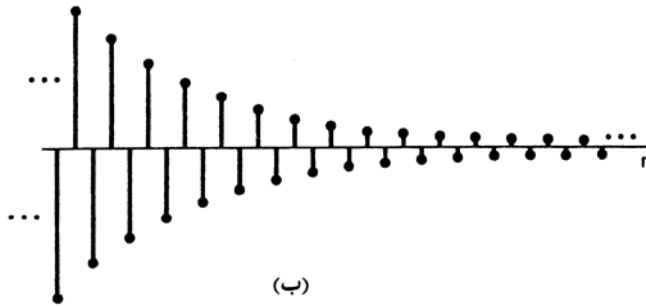
$$e^{j\omega n} = \cos \omega n + j \sin \omega n \quad (48-1)$$

و

$$A \cos(\omega n + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega n} \quad (49-1)$$



(الف)



(ب)

شکل ۱-۲۴: سیگنال نمایی حقیقی $x[n] = C\alpha^n$

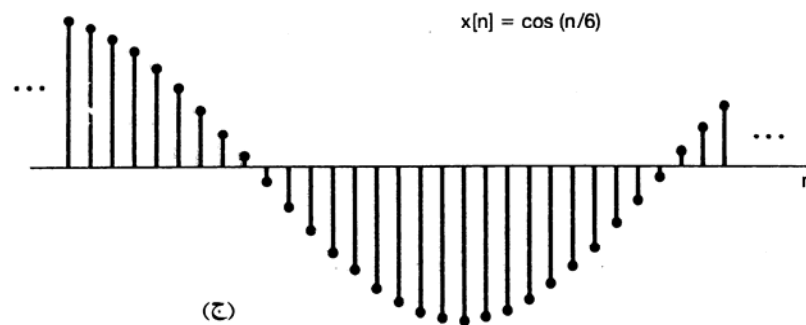
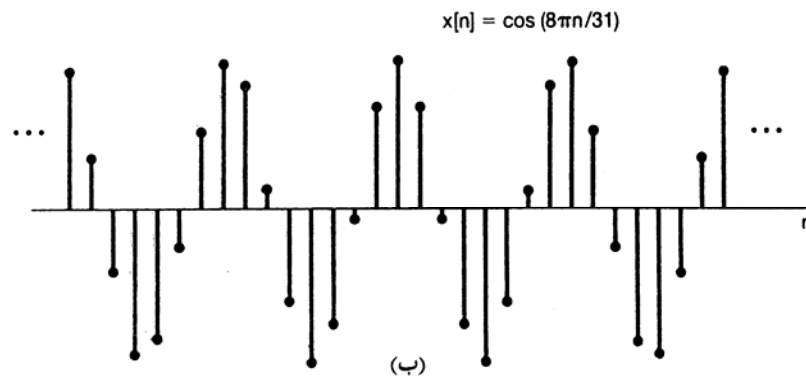
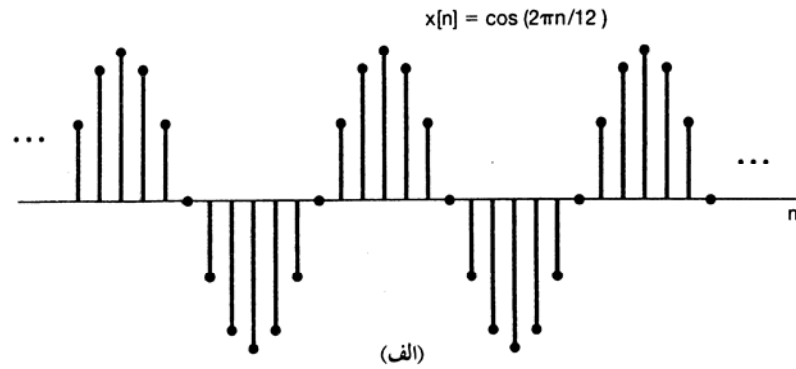
(ب) $0 < \alpha < 1$

(الف) $\alpha > 1$

(د) $\alpha < -1$

(ج) $-1 < \alpha < 0$

متوسط محدود هستند. برای مثال، چون $|e^{j\omega n}| = 1$ ، هر نمونه سیگنال معادله (۱-۴۶) یک واحد به انرژی سیگنال می افزاید. پس کل انرژی در $-\infty < n < \infty$ بی نهایت است، ولی واضح است که توان متوسط برابر ۱ است. در مسأله ۱-۳ با مثالهای دیگری از محاسبه انرژی و توان سیگنالهای گسسته در زمان برخورد می کنیم.



نمایی مختلط عمومی گسسته در زمان را می توان بر حسب سیگنالهای نمایی و سینوسی حقیقی نوشت و تعبیر کرد.

اگر C و α را به شکل قطبی بنویسیم، یعنی

$$C = |C|e^{j\theta}$$

و

$$\alpha = |\alpha|e^{j\omega}$$

داریم

$$C\alpha^n = |C||\alpha|^n \cos(\omega n + \theta) + j|C||\alpha|^n \sin(\omega n + \theta) \quad (50-1)$$

بنابراین به ازای $|\alpha| = 1$ ، بخش حقیقی و موهومی رشته نمایی، سینوسی است. به ازای $|\alpha| < 1$ این بخشها به

رشته های سینوسی ضرب شده در نمایی میرا و به ازای $|\alpha| > 1$ به رشته های سینوسی ضرب شده در نمایی

افزایشی مربوط اند. مثالهایی از این سیگنالها در شکل ۱-۲۶ نشان داده شده است.

۳-۳-۱ خاصیت تناوب نمایی های مختلط گسسته در زمان

گرچه بین سیگنالهای پیوسته در زمان و گسسته در زمان شباهتهایی وجود دارد، ولی تفاوتها مهمی نیز موجود است.

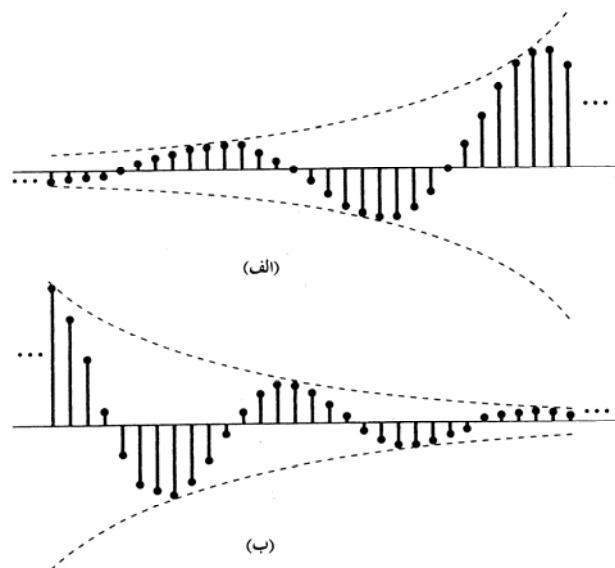
یکی از این تفاوتها به سیگنال نمایی گسسته در زمان $e^{j\omega n}$ مربوط می شود.

در بخش ۱-۳-۱ دو خاصیت همتای پیوسته در زمان آن، یعنی $e^{j\omega, t}$ را بیان کردیم: (۱) هر چه ω بزرگتر باشد،

سیگنال نوسانهای سریعتری دارد؛ (۲) به ازای هر مقدار ω ، $e^{j\omega, t}$ متناوب است. در این بخش گونه های گسسته

در زمان این ویژگیها را بیان می کنیم، و چنانچه خواهیم دید تفاوتهای بارزی بین این ویژگیها و ویژگیهای حالت

پیوسته در زمان وجود دارد.



شکل ۱-۲۶: الف) سیگنال سینوسی افزایشی گسسته در زمان

این نکته که شکل گسسته در زمان خاصیت اول با حالت پیوسته در زمان اختلاف دارد، نتیجه مستقیم تفاوت بسیار مهم نمایشهای مختلط پیوسته در زمان و گسسته در زمان است. نمایی مختلطی با فرکانس $(\omega + 2\pi)$ در نظر بگیرید

$$e^{j(\omega + 2\pi)n} = e^{j2\pi n} e^{j\omega n} = e^{j\omega n} \quad (51-1)$$

با توجه به معادله (51-1) در می یابیم که تابع نمایی با فرکانس $(\omega + 2\pi)$ همان تابع نمایی با فرکانس ω است. بنابراین وضعیت با مورد پیوسته در زمان، که سیگنالهای $e^{j\omega t}$ به ازای مقادیر متمایز ω متمایزند. بسیار فرق می کند. در حالت گسسته در زمان این سیگنالها متمایز نیستند، زیرا سیگنال با فرکانس ω ، با سیگنالهایی با فرکانس $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots, \pm 2\pi k$ یکسان است. بنابراین در بررسی نماییهای مختلط گسسته در زمان، تنها لازم است که فاصله ای به طول 2π را در ω انتخاب کنیم. البته طبق معادله (51-1) هر فاصله ای به طول 2π برای این کار مناسب است، ولی ما بیشتر در موارد فاصله $0 \leq \omega < 2\pi$ یا $-\pi \leq \omega < \pi$ را به کار می بریم.

به دلیل تناوبی که معادله (51-1) بیانگر آن است، با افزایش ω آهنگ نوسان سیگنال $e^{j\omega n}$ زیادتر نمی شود؛ بلکه مطابق شکل 1-27 در فاصله 0 تا π ، هر چه ω زیاد شود، آهنگ نوسان زیادتر می شود. ولی بعد از آن (در فاصله π تا 2π) با وجود افزایش ω آهنگ نوسان کاهش می یابد تا به $\omega = 2\pi$ برسیم، این فرکانس درست مانند $\omega = 0$ است. پس نمایشهای فرکانس پایین (یعنی با تغییرات کند) گسسته در زمان دارای ω نزدیک 0 و 2π و دیگر مضارب زوج π هستند، ولی نمایشهای فرکانس بالا (یعنی با تغییرات سریع) در نزدیکی $\omega = \pm\pi$ و دیگر مضارب فرد π قرار دارند. خصوصاً به ازای $\omega = \pi$ یا هر مضرب فرد π داریم

$$e^{j\pi n} = (e^{j\pi})^n = (-1)^n \quad (52-1)$$

پس این سیگنال نوسانی سریع دارد، و در هر نقطه تغییر علامت می دهد [شکل 1-27 (ب) را ببینید]. دومین خاصیتی که مایل به بررسی آن هستیم به تناوب نمایشهای مختلط گسسته در زمان مربوط می شود. برای این

که سیگنال $e^{j\omega n}$ با دوره تناوب $N > 0$ متناوب باشد باید داشته باشیم

$$e^{j\omega(n+N)} = e^{j\omega n} \quad (53-1)$$

یا

$$e^{j\omega N} = 1 \quad (54-1)$$

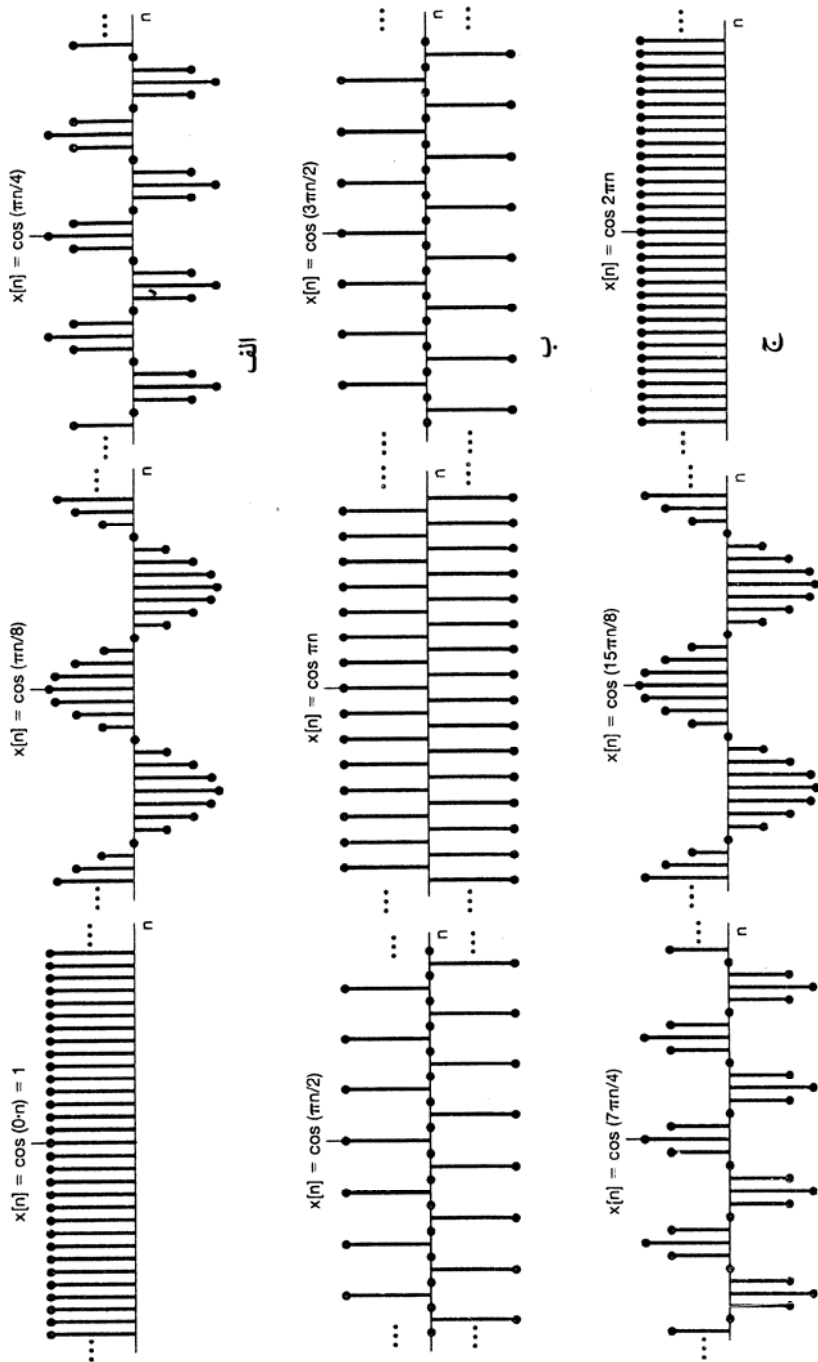
برای برآورده شدن معادله (54-1) باید ωN مضرب صحیحی از 2π باشد. یعنی باید یک m صحیح داشته باشیم که به ازای آن

$$\omega N = 2\pi m \quad (55-1)$$

یا

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{m}{N} \quad (56-1)$$

نامتناوب است. همین خاصیت در مورد سینوسیهای گسسته در زمان نیز وجود دارد. برای مثال سیگنالهای نشان داده شده در شکل ۲۵-۱ (الف) و (ب) متناوب اند، ولی سیگنالهای شکل ۲۵-۱ (ج) نه.



پیدا کنیم، فرکانس پایه سیگنال متناوب گسسته در زمان را به همان صورت پیوسته در زمان تعریف می کنیم. یعنی اگر $x[n]$ با دوره تناوب پایه N متناوب باشد، فرکانس پایه آن $2\pi/N$ است. حال نمایی مختلط متناوب $x[n] = e^{j\omega n}$ را با $\omega \neq 0$ در نظر بگیرید، دیدیم که ω باید معادله (۵۶-۱) را به ازای دو عدد صحیح m و N ، با $N > 0$ ارضا کند. در مسأله ۳۵-۱ نشان داده می شود که اگر $\omega \neq 0$ و N و m عامل مشترک نداشته باشند، آنگاه دوره تناوب پایه $x[n]$ برابر N است. با توجه به این مطلب و معادله (۵۶-۱) فرکانس پایه سیگنال متناوب $e^{j\omega n}$ عبارت است از

$$\frac{2\pi}{N} = \frac{\omega}{m} \quad (57-1)$$

توجه کنید که دوره تناوب پایه را می توان به صورت زیر نوشت

$$N = m \left(\frac{2\pi}{\omega} \right) \quad (58-1)$$

باز هم دو عبارت اخیر با عبارتهای همتای پیوسته در زمان خود تفاوت دارند. در جدول ۱-۱ بعضی تفاوتهای سیگنال پیوسته در زمان $e^{j\omega t}$ و سیگنال گسسته در زمان $e^{j\omega n}$ خلاصه شده است. توجه کنید که مانند حالت پیوسته در زمان، فرکانس پایه سیگنال گسسته در زمان ثابت ناشی از $\omega = 0$ دارای فرکانس پایه صفرست و برای آن دوره تناوب پایه تعریف نمی شود.

برای درک شهودی بیشتر نسبت به این خواص باز هم سیگنالهای نشان داده شده در شکل ۱-۲۵ را بررسی می کنیم. ابتداریشته $x[n] = \cos(\pi n / 12)$ شکل ۱-۲۵ (الف) را در نظر بگیرید، این سیگنال رامی توان نمونه هایی از سینوسی پیوسته در زمان $x(t) = \cos(\pi t / 12)$ دانست. در این حالت $x(t)$ با دوره تناوب پایه ۱۲ و $x[n]$ نیز با دوره تناوب پایه ۱۲ متناوب است. یعنی مقادیر $x[n]$ به ازای هر ۱۲ نقطه ای یکبار تکرار می شود، درست همانند $x(t)$.

حال سیگنال $x[n] = \cos(\pi n / 31)$ شکل ۱-۲۵ (ب) را در نظر بگیرید که می توان آن را نمونه هایی از سیگنال $x(t) = \cos(\pi t / 31)$ دانست. در این حالت $x(t)$ با تناوب پایه $31/4$ متناوب است، ولی زمان تناوب پایه $31x[n]$ است. دلیل این تفاوت این است که سیگنال گسسته در زمان تنها به ازای مقادیر صحیح متغیر مستقل تعریف شده است. یعنی در زمان $t = 31/4$ که یک تناوب $x(t)$ کامل شده است، نمونه ای وجود ندارد. همچنین در $t = 4 \times 31/4$ یا $t = 3 \times 31/4$ که $x(t)$ دو یا سه تناوب خود را طی کرده است. ولی در $t = 4 \times 31/4 = 31$ که $x(t)$ تناوب چهارمش را طی کرده، نمونه وجود دارد. شکل ۱-۲۵ (ب) نیز این مطلب را نشان می دهد، زیرا آشکارست که $x[n]$ در تناوب $x(t)$ الگوی یکسانی ندارد، ولی پس از چهار تناوب آن، یعنی ۳۱ نقطه، الگوی $x[n]$ تکرار می شود.

به نحوی مشابه $x[n] = \cos(\pi n / 6)$ رامی توان نمونه های سیگنال $x(t) = \cos(\pi t / 6)$ دانست. در این حالت مقادیر $x(t)$ در نمونه های صحیح تکرار نمی شود، زیرا این نمونه ها هرگز مضرب دقیقی از زمان تناوب $x(t)$ ، 12π را نمی پوشانند. پس $x[n]$ متناوب نیست، ولی چشم بادرونیابی نمونه ها به پوشش آنها توجه می کند، که متناوب است. در مسأله ۳۶-۱ در مورد کاربرد نمونه برداری برای درک تناوب رشته های سینوسی را بیشتر بررسی خواهیم کرد.

ω_0/m	ω_0/N
به ازای مقادیر متمایز ω_0 . سیگنالهای متمایزی اند	به ازای فرکانسهایی که اختلافشان 2π است سیگنالهای مشابهی اند.
به ازای تمام مقادیر ω_0 . متناب است	تنها هنگامی متناب است که به ازای مقادیر صحیح m و N بزرگتر از صفر $\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$
فرکانس پایه	فرکانس پایه*
	$\omega_0 \cdot \frac{\omega_0}{m}$
دوره تناوب پایه $\omega_0 = 0$: تعریف نشده $m \left(\frac{2\pi}{\omega_0} \right), \omega_0 \neq 0$	دوره تناوب پایه* $\omega_0 = 0$: تعریف نشده $\left(\frac{2\pi}{\omega_0} \right), \omega_0 \neq 0$
* فرض این است که m و N عامل مشترک ندارند	

مثال ۱-۶

فرض کنید می خواهیم زمان تناوب پایه سیگنال گسسته در زمان زیر را بیابیم

$$x[n] = e^{j(\pi/3)n} + e^{j(\pi/4)n} \quad (59-1)$$

نمایی اول سمت راست معادله (۵۹-۱) دارای تناوب پایه ۳ است. گرچه این مطلب با توجه به معادله (۵۸-۱) واضح است، ولی روش ساده تری برای یافتن جواب وجود دارد. توجه کنید که زاویه $(\pi/3)n$ جمله اول باید به مضربی از 2π برسد تا مقادیر نمایی تکرار شود. روشن است که اگر n سه واحد زیاد شود، زاویه به اندازه مضربی از 2π زیاد می شود. در مورد جمله دوم، افزایش زاویه $(\pi/4)n$ به اندازه 2π مستلزم افزایش n به میزان $8/3$ است، که ممکن نیست زیرا n باید عدد صحیح باشد. افزایش زاویه به اندازه 4π نیز ممکن نیست، زیرا افزایش n به اندازه $16/3$ را می طلبد. ولی برای افزایش زاویه به اندازه 6π باید n به مقدار ۸ اضافه شود، پس زمان تناوب پایه جمله دوم ۸ است.

حال برای تکرار کل سیگنال $x[n]$ ، هر جمله معادله (۵۹-۱) باید تعداد صحیحی از دوره تناوب پایه خود را بگذراند. کوچکترین افزایش n برای برآورده شدن این خواسته ۲۴ است. یعنی پس از گذشت ۲۴ نقطه جمله اول معادله (۵۹-۱) هشت دوره تناوب پایه و جمله دوم سه دوره تناوب پایه خود را طی کرده است، و سیگنال $x[n]$ دقیقاً تکرار می شود.

در حالت گسسته در زمان نیز مانند حالت پیوسته در زمان در نظر گرفتن مجموعه ای از نمایه های متناب مرتبط هارمونیکی در تحلیل سیگنال ها و سیستمها نقش ارزنده ای دارد، منظور از نمایه های هماهنگ تمام نمایه های متناب دارای تناوب پایه مشترک N است. با توجه به معادله (۵۶-۱) می دانیم که این سیگنالها سیگنالهایی اند که

فرکانسهای برابر با مضربهای $2\pi/N$ دارند، یعنی

در حالت پیوسته در زمان تمام نمایه‌های مختلط هم‌هنگ $k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (N/2 - 1)$ متمایزند. ولی معادله

(۵۱-۱) نشان می‌دهد که در حالت گسسته در زمان چنین نیست. داریم

$$\begin{aligned} \phi_{k+N}[n] &= e^{j(k+N)(\pi/N)n} \\ &= e^{jk\pi n} e^{jN\pi n} = \phi_k[n] \end{aligned} \quad (۶۱-۱)$$

یعنی تنها N نمایی متناوب متمایز در مجموعه (۶۰-۱) وجود دارد. مثلاً

(۶۲-۱)

$$\phi_0[n] = 1, \phi_1[n] = e^{j\pi n/N}, \phi_2[n] = e^{j2\pi n/N}, \dots, \phi_{N-1}[n] = e^{j\pi n(N-1)/N}$$

متمایزند و تمام $\phi_k[n]$ های دیگر با یکی از اینها یکسان اند (مثلاً $\phi_{-1}[n] = \phi_{N-1}[n], \phi_N[n] = \phi_0[n]$)

۴-۱ توابع ضربه واحد و پله واحد

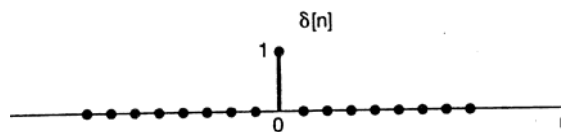
در این بخش چند سیگنال پایه ای دیگر را معرفی می‌کنیم که در تحلیل سیگنال و سیستم اهمیت به سزایی دارند، از مهمترین اینها توابع ضربه و پله واحد پیوسته و گسسته در زمان هستند. در فصل ۲ خواهیم دید که چگونه می‌توان سیگنالهای ضربه واحد را به عنوان واحدهای سازنده ای برای بازسازی و نمایش سیگنالهای دیگر در نظر گرفت. از حالت گسسته در زمان شروع می‌کنیم.

۱-۴-۱ رشته های گسسته در زمان ضربه و پله واحد

ضربه واحد (یا نمونه واحد) یکی از ساده ترین سیگنالهای گسسته در زمان است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (۶۳-۱)$$

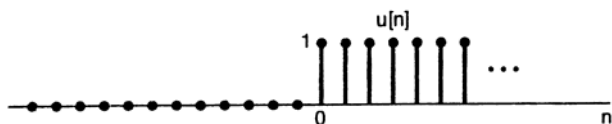
این سیگنال در شکل ۱-۲۸ نشان داده شده است. در این کتاب $\delta[n]$ را گاهی ضربه واحد و گاهی نمونه واحد می‌نامیم.



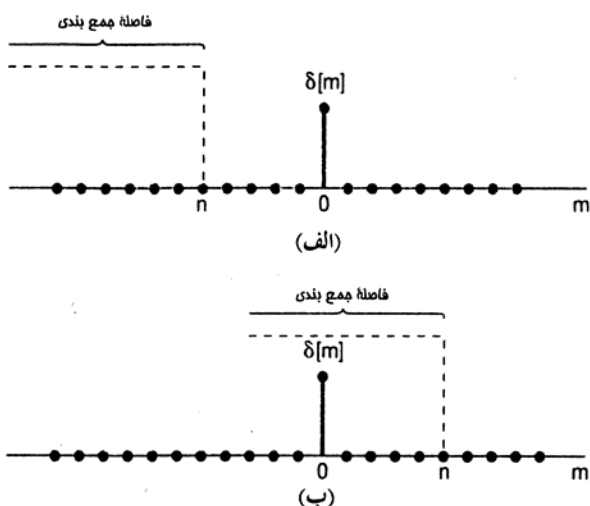
شکل ۱-۲۸: ضربه (نمونه) واحد گسسته در زمان

دومین سیگنال پایه ای گسسته در زمان پله واحد است که آن را با $u[n]$ نشان می‌دهیم و تعریف آن به صورت زیر است

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (۶۴-۱)$$



شکل ۱-۲۹: رشته پله واحد



شکل ۱-۳۰: جمع انباره ای معادله (۶۶-۱) الف) $n < 0$

ب) $n > 0$

بین ضربه واحد و پله واحد گسسته در زمان رابطه نزدیکی وجود دارد. ضربه واحد تفاضل اول پله واحد گسسته در زمان است

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \quad (۶۵-۱)$$

برعکس، پله واحد گسسته در زمان جمع انباره های نمونه واحدست. یعنی

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m] \quad (۶۶-۱)$$

شکل ۱-۳۰ نمایش ترسیمی معادله (۶۶-۱) است. چون تنها مقدار غیر صفر نمونه واحد در نقطه ای قرار دارد که آرگومان آن صفرست، با توجه به شکل و جمع انباره ای معادله (۶۶-۱) به ازای $n < 0$ برابر ۰ و به ازای $n \geq 0$ برابر ۱ است. همچنین می توان با تغییر جمع بندی معادله (۶۶-۱)، از m به $k=n-m$ می توانیم پله واحد گسسته در زمان را به صورت زیر بر حسب نمونه واحد بنویسیم

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[n-k]$$

یا به طور معادل

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k] \quad (۶۷-۱)$$

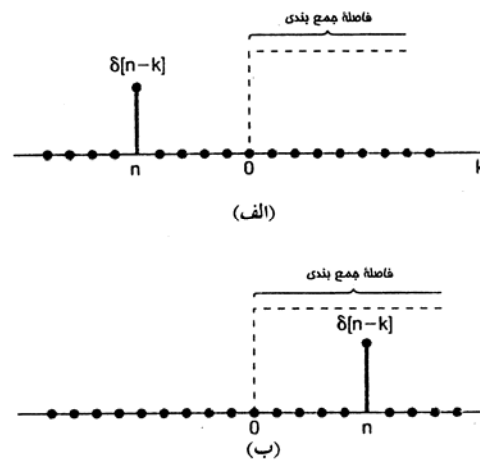
پس باز هم جمع معادله (۶۷-۱) به ازای $n < 0$ برابر ۰ و به ازای $n \geq 0$ برابر ۱ است .
 معادله (۶۷-۱) را می توان به عنوان بر هم نهش ضربه های تأخیر یافته تعبیر کرد ؛ یعنی می توانیم این معادله را به عنوان مجموع یک ضربه واحد $\delta[n]$ در $n=0$ ، یک ضربه واحد $\delta[n-1]$ در $n=1$ ، یک ضربه واحد $\delta[n-2]$ در $n=2$ و ... تصور کنیم . در فصل ۲ این تعبیر را به طور صریح به کار می بریم .
 رشته ضربه واحد را می توان برای نمونه برداری مقدار یک سیگنال در $n=0$ به کار برد . چون $\delta[n]$ تنها در $n=0$ غیر صفر (و برابر ۱) است ، پس

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n] \quad (۶۸-۱)$$

به طور کلی اگر ضربه واحد $\delta[n-n_0]$ را در نظر بگیریم ، داریم

$$x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0] \quad (۶۹-۱)$$

این ویژگی نمونه برداری ضربه واحد در فصلهای ۲ و ۷ نقش مهمی بازی می کند.



۱-۴-۲ توابع پیوسته در زمان پله واحد و ضربه واحد

تابع پله واحد $u(t)$ پیوسته در زمان مشابه همتای گسسته در زمان خود تعریف می شود

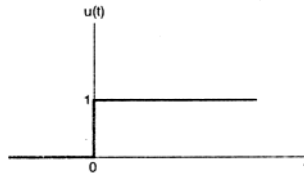
$$u[t] = \begin{cases} 0 & ; t \leq 0 \\ 1 & ; t > 0 \end{cases} \quad (۷۰-۱)$$

شکل ۱-۳۲ این تابع را نشان می دهد. توجه کنید که پله واحد در $t=0$ ناپیوسته است. تابع ضربه واحد $\delta(t)$ پیوسته در زمان به نحوی مشابه با حالت گسسته در زمان به پله واحد مربوط می شود. پله واحد گسسته در زمان انتگرال انباره ای ضربه واحد است .

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (۷۱-۱)$$

دهد که ضربه واحد پیوسته در زمان مشتق اول پله واحد پیوسته در زمان است

$$\delta(t) = \frac{d u(t)}{dt} \quad (72-1)$$

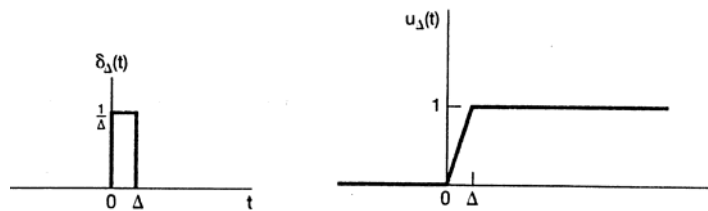


شکل ۱-۳۲: تابع پله واحد پیوسته در زمان

برخلاف حالت گسسته در زمان ، بیان تعریف تابع ضربه واحد با معادله (۷۲-۱) مشکل صوری دارد، زیرا $u(t)$ در $t=0$ ناپیوسته است، و در نتیجه مشتقپذیر نیست. ولی می توانیم معادله (۷۲-۱) را با در نظر گرفتن شکل ۱-۳۳ به عنوان تقریبی از پله واحد تعبیر کنیم، این تابع در فاصله زمانی کوتاه Δ از ۰ به ۱ می رسد. البته پله واحد به طور ناگهانی تغییر می کند، بنابراین می توان آن را حالت ایده ال $u_{\Delta}(t)$ ، به ازای Δ خیلی کوچک، در نظر گرفت. $u(t)$ حد $u_{\Delta}(t)$ به ازای $\Delta \rightarrow 0$ است. حال مشتق $u_{\Delta}(t)$ را در نظر می گیریم

$$\delta_{\Delta}(t) = \frac{d u_{\Delta}(t)}{dt} \quad (73-1)$$

که در شکل ۱-۳۴ نشان داده شده است .



شکل ۱-۳۳ (سمت راست) تقریب پیوسته پله واحد، $u_{\Delta}(t)$

شکل ۱-۳۴ (سمت چپ) مشتق $u_{\Delta}(t)$

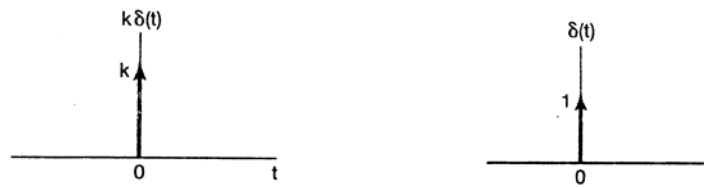
توجه کنید که $\delta_{\Delta}(t)$ پالس کوتاهی به مدت Δ است که به ازای هر مقدار دلخواه Δ مساحت زیر آن برابر یک است . شکل حدی

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t) = \delta(t) \quad (74-1)$$

را می توان حالت ایده ال پالس کوتاه $\delta_{\Delta}(t)$ هنگام ناچیز شدن Δ به حساب آورد . چون $\delta(t)$ در واقع طولی ندارد ولی مساحت زیر آن یک است ، نماد تصویری شکل ۱-۳۵ را برای نشان دادن آن به کار می بریم ، پیکان واقع در $t=0$ نشان می دهد که مساحت پالس در $t=0$ متمرکزست و ارتفاع پیکان و عدد "۱" کنار آن برای نشان دادن مساحت به کار رفته است. در حالت کلی ضربه تغییر مقیاس یافته $k\delta(t)$ دارای مساحت k است، پس

$$\int_{-\infty}^{\infty} k\delta(\tau) d\tau = ku(t)$$

همانند حالت گسسته در زمان می توان تعبیر ترسیمی ساده ای برای انتگرال معادله (۷۱-۱) ارائه کرد؛ شکل ۳۷-۱ این تعبیر را نشان می دهد. چون مساحت ضربه واحد پیوسته در زمان $\delta(t)$ در $t=0$ متمرکزست ، انتگرال به ازای $t < 0$ برابر ۰ و به ازای $t > 0$ برابر ۱ است . همچنین می توانیم رابطه معادله (۷۱-۱) بین پله و ضربه واحد پیوسته در زمان را به گونه ای دیگر بازنویسی کنیم ، همان کاری که در معادله (۶۷-۱) برای حالت گسسته در زمان انجام دادیم . به این منظور متغیر انتگرالگیری را از t به $t - \sigma = \tau$ تغییر می دهیم .



شکل ۳۵-۱ (سمت راست) ضربه واحد پیوسته در زمان

شکل ۳۶-۱ (سمت چپ) ضربه تغییر مقیاس یافته

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \delta(t - \sigma) (-d\sigma)$$

یا

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t - \sigma) (-d\sigma) \quad (۷۵-۱)$$

تعبیر این رابطه $u(t)$ و $\delta(t)$ در شکل ۳۸-۱ نشان داده شده است. چون در این حالت مساحت $\delta(t - \sigma)$ در نقطه $\sigma = t$ متمرکز است، باز هم انتگرال معادله (۷۵-۱) به ازای $t < 0$ برابر ۰ و به ازای $t > 0$ برابر ۱ است. این نوع تعبیر ترسیمی رفتار ضربه واحد در انتگرالگیری، در فصل ۲ بسیار به کار می آید.

ضربه پیوسته در زمان نیز مانند ضربه گسسته در زمان دارای خاصیت نمونه برداری است. به دلایلی چند، حاصلضرب ضربه و تابع خوشرفتار پیوسته در زمان $x(t)$ مهم است. این حاصلضرب را می توان با توجه به تعریف $\delta(t)$ مطابق معادله (۷۴-۱) به راحتی تعبیر کرد. تابع زیر را در نظر می گیریم

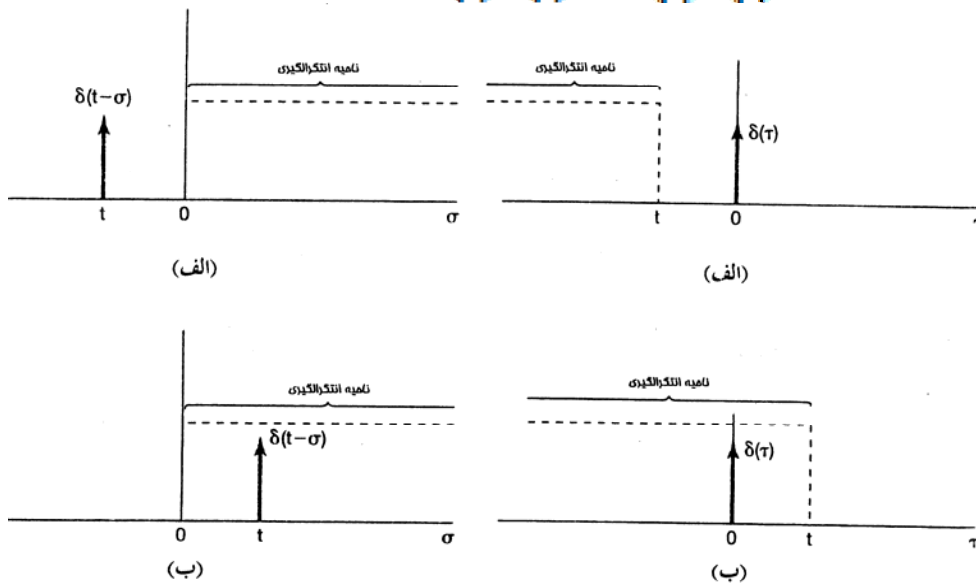
$$x_1(t) = x(t)\delta_\Delta(t)$$

شکل ۳۹-۱ (الف) دو تابع زمانی $x(t)$ و $\delta_\Delta(t)$ و شکل ۳۹-۱ (ب) نمای بزرگ شده بخش غیر صفر حاصل ضرب آنها را نشان می دهد. پس $x_1(t)$ در خارج فاصله $0 \leq t \leq \Delta$ صفرست. اگر Δ خیلی کوچک باشد ، به نحوی که بتوان $x(t)$ را در این فاصله تقریباً ثابت فرض کرد داریم

$$x(t)\delta_\Delta(t) \approx x(0)\delta_\Delta(t)$$

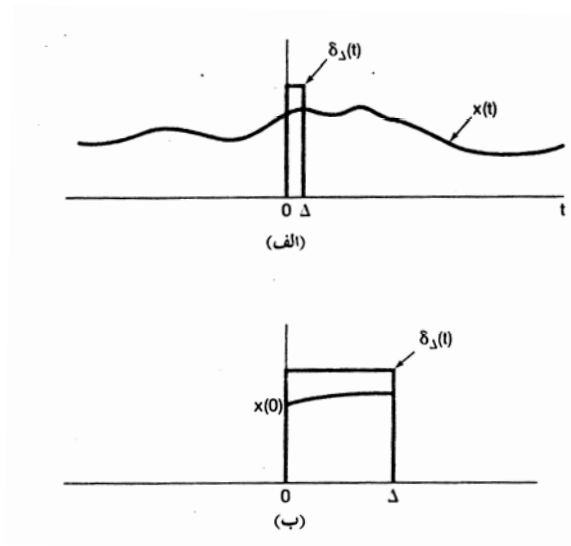
$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

(۷۶-۱)



شکل ۳۷-۱ (سمت راست) انتگرال معادله (۷۱-۱) الف) $t > 0$: ب) $t < 0$

شکل ۳۸-۱ (سمت چپ) رابطه معادله (۷۵-۱) الف) $t > 0$: ب) $t < 0$



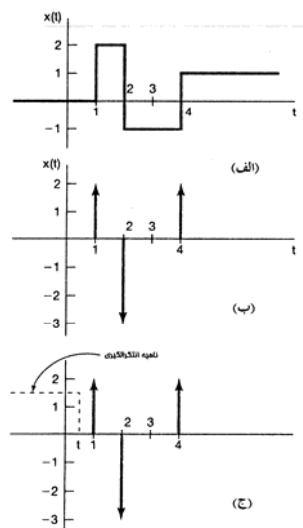
شکل ۳۹-۱: حاصلضرب $x(t)\delta_{\Delta}(t)$ (الف) نمودار دو تابع ب) نمای بزرگ شده بخش غیر صفر حاصلضرب دو تابع

به همین دلیل می توان عبارت مشابهی برای ضربه ای که در نقطه دلخواهی ، مثلاً t_0 ، قرار دارد نوشت ، یعنی

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

مفیدی در مورد این سیگنال به دست می دهند که برای مقاصد مورد نظر در این کتاب کافی است. همانطور که گفتیم ضربه واحد را باید نوعی ایده ال سازی به حساب آوریم. در بخش ۳-۵ به تفصیل خواهیم گفت که هر سیستم فیزیکی به نوعی اینرسی دارد و نمی تواند به طور آنی به ورودی پاسخ دهد. پس اگر پالسی باطول به حد کافی کوچک به چنین سیستمی اعمال شود، پاسخ سیستم از طول یا شکل پالس تأثیر زیادی نمی پذیرد؛ آنچه که در درجه اول اهمیت دارد اثر خالص انتگرالگیری شده آن، یا به عبارت دیگر مساحت آن است. برای سیستمهای دارای پاسخ سریع طول پالس باید خیلی کوتاه باشد تا شکل پالس بر پاسخ اثری نداشته باشد. به هر حال برای هر سیستم فیزیکی می توان پالسی یافت که "به حد کافی" کوتاه باشد. پس ضربه واحد ایده ال شده چنین پالسی است- پالسی که برای تمام سیستمها به حد کافی کوتاه است. در فصل ۲ خواهیم دید که پاسخ سیستمها به این پالس ایده ال نقشی حیاتی در تحلیل سیگنالها و سیستمها دارد و در فرایند بیان و فهم این نقش مطالب بیشتری راجع به این سیگنال خواهیم فهمید

مثال ۱-۷ سیگنال ناپیوسته $x(t)$ شکل ۱-۴۰ (الف) را در نظر بگیرید. به خاطر رابطه بین پله واحد و ضربه واحد پیوسته در زمان می توانیم به سادگی مشتق این سیگنال را محاسبه و رسم می کنیم. واضح است که مشتق $x(t)$ همه جا، بجز در ناپیوستگیها صفرست. در مورد پله واحد دیدیم [معادله (۱-۷۲)] که مشتقگیری ضربه واحدی در محل ناپیوستگی به دست می دهد. همچنین با ضرب دو طرف معادله (۱-۷۲) در k می بینیم که مشتق یک پله با ناپیوستگی دارای اندازه k به ضربه ای به مساحت k واقع در محل ناپیوستگی منجر می شود. این قاعده برای هر سیگنال دیگری با ناپیوستگی پرشی، مانند $x(t)$ شکل ۱-۴۰ (الف) نیز درست است. پس می توانیم مشتق $x(t)$ را به صورت شکل ۱-۴۰ (ب) رسم کنیم، که در هر ناپیوستگی $x(t)$ ضربه ای با مساحتی برابر اندازه ناپیوستگی دارد. مثلاً در $t=۲$ ، $x(t)$ یک ناپیوستگی با اندازه ۳- دارد، بنابراین سیگنال $x(t)$ در $t=۲$ ضربه ای با اندازه ۳- دارد.



شکل ۱-۴۰: الف) سیگنال ناپیوسته $x(t)$ (مثال ۱-۷؛ ب) مشتق $x(t)$ ؛ ج) تصویر بازسازی $x(t)$ با انتگرال گیری انباره ای از $x(t)$ که به ازای t بین ۰ و ۱ نشان داده شده است.

را در نظر بگیریم

$$x(t) = \int_1^t x(\tau) d\tau \quad (77-1)$$

چنانچه شکل ۴۰-۱ (ج) نشان می دهد، در $t < 1$ انتگرال سمت راست معادله (۷۷-۱) صفرست، زیرا هیچکدام از ضربه های تشکیل دهنده $\dot{x}(t)$ در این فاصله انتگرالگیری نیستند. در $1 < t < 2$ ضربه اول (واقع در $t=1$) تنها ضربه واقع در فاصله انتگرالگیری است، پس انتگرال معادله (۷۷-۱) برابر ۲، یعنی مساحت این ضربه است. در $2 < t < 4$ دو ضربه اول داخل فاصله انتگرالگیری اند، پس حاصل انتگرال جمع مساحتهای آنهاست، یعنی $-1 = 2 - 3$. در $t > 4$ هر سه ضربه در فاصله انتگرالگیری اند، پس حاصل انتگرال مجموع مساحتهای آنهاست، یعنی $1 = 2 - 3 + 2$. این دقیقاً سیگنال $x(t)$ شکل ۴۰-۱ (الف) است.

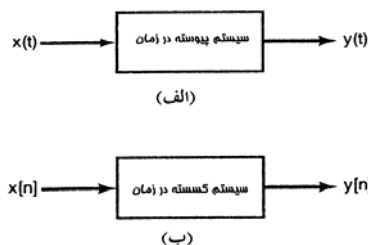
۱-۵ سیستمهای پیوسته در زمان و گسسته در زمان

سیستم فیزیکی در کلی ترین بیان اتصالی از اجزاء، وسائل، یا زیر سیستمهاست. در گستره هایی مختلف از پردازش سیگنال و مخابرات گرفته تا موتورهای الکترومکانیکی، خودروهای خودکار و کارخانه های شیمیایی، سیستم را می توان فرایندی دانست که در آن سیگنالهای ورودی توسط سیستم تبدیل می شوند یا سیستم را به پاسخی خاص وامی دارند، به نحوی که سیگنالهای دیگری به عنوان خروجی تولید شوند. مثلاً سیستمهای صوتی یک سیگنال ضبط شده را می گیرند و نسخه ای همانند آن تولید می کنند. اگر این سیستم کنترل نوا داشته باشد، با تنظیم آن می توان کیفیت سیگنال تولید شده را تغییر داد. به نحوی مشابه، مدار شکل ۱-۱ را می توان سیستمی با ورودی $v_s(t)$ و خروجی $v_c(t)$ دانست، و خودروی شکل ۲-۱ را سیستمی که نیروی $f(t)$ ورودی آن و سرعت $v(t)$ خروجی آن است. سیستم بهبود تصویر یک تصویر ورودی را گرفته، تصویری خروجی با مشخصات مطلوب، مثلاً کنتراست بهتر، به دست می دهد. سیستم پیوسته در زمان سیستمی است که در آن سیگنالهای ورودی پیوسته در زمان به سیگنالهای خروجی پیوسته در زمان تبدیل می شوند. چنین سیستمی را به صورت شکل ۴۱-۱ (الف) نشان می دهیم که در آن $x(t)$ ورودی و $y(t)$ خروجی است. همچنین می توان رابطه ورودی-خروجی سیستم پیوسته در زمان را با نماد زیر نشان داد

$$x(t) \rightarrow y(t) \quad (78-1)$$

به نحوی مشابه سیستم گسسته در زمان سیستمی است که ورودی گسسته در زمان را به خروجی گسسته در زمان تبدیل می کند. این سیستم به صورت شکل ۴۱-۱ (ب) نمایش داده می شود و نمایش نمادی آن چنین است

$$x[n] \rightarrow y[n] \quad (79-1)$$



شکل ۴۱-۱ (الف) سیستم پیوسته در زمان ؛ (ب) سیستم گسسته در زمان

۷ سیستمهای پیوسته در زمان و گسسته در زمان را به کمک مفهوم نمونه برداری کنار هم بررسی می کنیم و با این کار دیدی نسبت به کاربرد سیستمهای گسسته در زمان برای پردازش سیگنالهای پیوسته در زمان نمونه برداری شده به دست می آوریم .

۱-۵-۱ نمونه های ساده ای از سیستمها

یکی از انگیزه های مهم توسعه ابزارهای عمومی تحلیل و طراحی سیستمها این است که سیستمهایی با کاربردهای بسیار متفاوت توصیفهای ریاضی مشابهی دارند . برای نشان دادن این موضوع چند مثال ساده را بررسی می کنیم .

مثال ۱-۸

مدار RC شکل ۱-۱ را در نظر بگیرید . اگر $v_s(t)$ را سیگنال ورودی و $v_c(t)$ را سیگنال خروجی در نظر بگیریم ، با تحلیل مدار می توانیم رابطه بین ورودی و خروجی را بیابیم . با توجه به قانون اهم جریان $i(t)$ مقاومت با افت ولتاژ روی آن متناسب است ، یعنی

$$i(t) = \frac{v_s(t) - v_c(t)}{R} \quad (۸۰-۱)$$

به نحوی مشابه با توجه به رابطه خازن داریم

$$i(t) = \frac{dv_c(t)}{dt} \quad (۸۱-۱)$$

با برابر قرار دادن طرفهای راست معادلات (۸۰-۱) و (۸۱-۱) معادله دیفرانسیل توصیف کننده رابطه بین ورودی $v_s(t)$ و خروجی $v_c(t)$ را می یابیم

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_c(t) = \frac{1}{RC} v_s(t) \quad (۸۲-۱)$$

مثال ۱-۹

شکل ۱-۹ را در نظر گرفته ، نیروی $f(t)$ را ورودی و سرعت $v(t)$ را خروجی فرض کنید . اگر جرم خودرو را با m نشان دهیم و مقاومت ناشی از اصطکاک را با $m\rho v$ ، با برابر قرار دادن شتاب ، یعنی مشتق سرعت ، و نیروی خالص تقسیم بر جرم به دست می آوریم

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{m} [f(t) - \rho v(t)] \quad (۸۳-۱)$$

یا

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{\rho}{m} v(t) = \frac{1}{m} f(t) \quad (۸۴-۱)$$

بررسی و مقایسه معادلات (۸۲-۱) و (۸۴-۱) مثالهای بالا نشان می دهند که رابطه ورودی - خروجی این دو سیستم فیزیکی بسیار متفاوت اساساً یکسان اند . در واقع هر دو نمونه هایی از معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول زیرند

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t) \quad (۸۵-۱)$$

روشهای عمومی تحلیل سیستمهای بیان شده با معادله (۸۵-۱) می توانیم آن را در مورد کاربردهای متنوعی استفاده کنیم .

مثال ۱-۱۰

به عنوان مثال ساده ای از یک سیستم گسسته در زمان مدل ساده موازنه ماهیانه حساب بانکی را در نظر بگیرید. فرض

کنید $y[n]$ مانده در انتهای ماه n ام باشد و $y[n]$ مطابق معادله زیر حساب می شود

$$y[n] = 1/0.1y[n-1] + x[n] \quad (86-1)$$

یا به طور هم ارز

$$y[n] - 1/0.1y[n-1] = x[n] \quad (87-1)$$

که در آن $x[n]$ سپرده خالص (سپرده منهای دریافت) در ماه n ام است و جمله $y[n-1]$ بهره ۱ درصدی ماهیانه را نشان می دهد .

مثال ۱-۱۱

به عنوان دومین مثال شبیه سازی دیجیتال معادله دیفرانسیل (۸۴-۱) را در نظر بگیرید ، به این منظور زمان را به

فاصله های مجزایی به طول Δ تقسیم کرده ، $dv(t)/dt$ در $t = n\Delta$ را با تفاضل پسروی زیر تقریب می زنیم

$$\frac{v(n\Delta) - v((n-1)\Delta)}{\Delta}$$

به این ترتیب با جایگذاریهای $v[n] = v(n\Delta)$ و $f[n] = f(n\Delta)$ مدل گسسته زیر را برای ارتباط دادن

سیگنالهای نمونه برداری شده $f[n]$ و $v[n]$ به دست می آوریم

$$v[n] - \frac{\Delta}{(m+\Delta)} v[n-1] = \frac{\Delta}{(m+\Delta)} f[n] \quad (88-1)$$

مقایسه معادلات (۸۷-۱) و (۸۸-۱) نشان می دهد که هر دو اینها مثالهایی از معادله تفاضلی خطی مرتبه اول زیرند

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n] \quad (89-1)$$

چنانچه مثالهای قبل نشان می دهند ، توصیف ریاضی سیستمهای مربوط به کاربردهای متفاوت ، جنبه های مشابه

فراوانی دارند، و همین حقیقت انگیزه توسعه ابزارهای تحلیلی بسیار عام بوده است. کلید انجام موفقیت آمیز این کار

تشخیص دسته ای از سیستمها با این دو مشخصه مهم است: (۱) خواص و ساختار این سیستمها به نحوی است که می

توان با توجه به آنها بینش صحیحی نسبت به رفتارشان کسب کرد و ابزارهای موثری برای تحلیلشان ساخت؛ و (۲)

بسیاری از سیستمهای دارای اهمیت عملی رامی توان با دقت کافی به صورت این سیستمها مدل کرد. بخش اعظمی از

این کتاب به مشخصه اول اختصاص دارد ، زیرا به دنبال ابزارهایی برای تحلیل دسته ای از سیستمها موسوم به

سیستمهای خطی مستقل از زمان خواهیم بود . در بخش بعد ویژگیهای مشخص کننده این دسته ، وهمچنین دیگر

ویژگیهای مهم و پایه ای سیستمها را معرفی می کنیم .

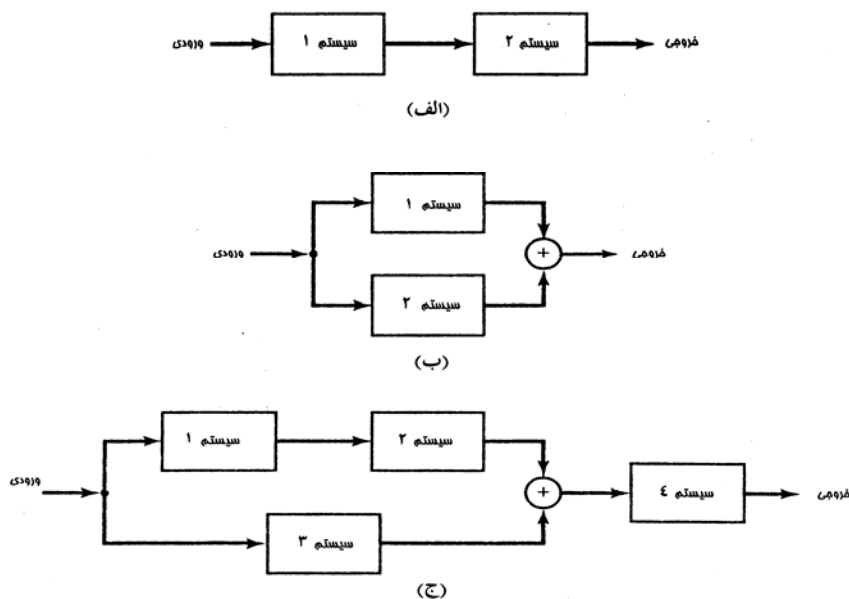
دومین مشخصه برشمرده شده در بالا اهمیت آشکاری برای ابزارهای تحلیلی دارد . کاملاً معلوم شده است که

سیستمهای مورد توجه در این کتاب مدل کرد. البته نکته بحرانی این است که هر مدلی برای توصیف یا تحلیل یک سیستم فیزیکی به کار رود، به نحوی دارای ایده ال سازی است، و در نتیجه تحلیل انجام شده دقت و فایده ای همانند دقت و فایده مدل دارد. برای مثال مدل ساده مقاومت خطی معادله (۸۰-۱) و خازن معادله (۸۱-۱) نوعی ایده ال سازی است. ولی این ایده الها برای بسیاری از کاربردها به حدکافی دقیق اند، به شرطی که ولتاژها و جریانها در محدوده اعتبار این مدلها قرار داشته باشند، به نحوی مشابه کاربرد نیروی بازدارنده خطی برای نمایش اثرهای اصطکاک در معادله (۸۳-۱) تقریبی است که حوزه اعتبار محدودی دارد. بنابراین به یاد داشتن این نکته مهم است که بخشی از کار مهندسی هنگام استفاده از روشهای بیان شده در این کتاب، تشخیص حوزه اعتبار فرضیهایی است که در ساختن مدل سیستم به کار رفته است و تضمین این که تحلیل و طراحی صورت گرفته براساس این مدل آن فرضها را نقض نمی کند؛ البته ما در این کتاب مستقیماً به این مباحث نمی پردازیم.

۱-۵-۲ اتصال سیستمها

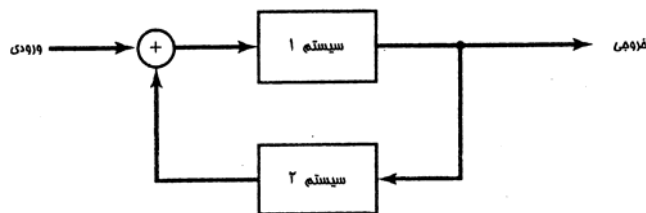
یکی از مفاهیم مهم به کار رفته در این کتاب مفهوم اتصال سیستمهاست. بسیاری از سیستمهای واقعی از اتصال چند زیر سیستم تشکیل می شوند. سیستم صوتی یک نمونه است که در آن گیرنده رادیویی، پخش، تقویت کننده و یک یا چند بلندگو به هم متصل شده اند. نمونه دیگر سیستم کنترل دیجیتال هواپیماست که از اتصال هواپیما، توصیف شده با معادلات حرکت و نیروهای آیرودینامیکی وارد بر آن؛ حس کننده ها، که متغیرهای مختلفی چون شتاب، آهنگ چرخش، و جهت را اندازه می گیرند؛ یک سیستم خلبان خودکار، که به متغیر اندازه گیری شده و دستورهای خلبان (مانند جهت، ارتفاع، و سرعت مطلوب) پاسخ می دهد؛ و عملگرها که ورودیهایش از سیستم خلبان خودکار گرفته می شود و با تغییر سطوح کنترلی مانند بالکها نیروهای آیرودینامیکی وارد بر هواپیما را تغییر می دهد، تشکیل شده است. با در نظر گرفتن چنین سیستمی به صورت اجزای آن، می توانیم برای تحلیل عملکرد و رفتار سیستم کل مشخصه های اجزاء و وضعیت اتصال آنها به یکدیگر را به کار ببریم. به علاوه با توصیف یک سیستم به صورت اتصالی از زیر سیستمهای ساده تر می توانیم راههای مناسبی برای طراحی یک سیستم پیچیده، براساس سیستمهای ساده تر به عنوان اجزاء سازنده، پیدا کنیم.

گرچه سیستمها را می توان به صورتهای مختلفی به هم متصل کرد، ولی چند اتصال اساسی وجود دارد. اتصال سری یا متوالی دو سیستم در شکل ۱-۴۲ (الف) تصویر شده است. این گونه نمودارها را نمودار جعبه ای (یا بلوکی) می نامیم. در اینجا خروجی سیستم ۱، ورودی سیستم ۲ است، و سیستم کل ورودی را ابتدا توسط سیستم ۱ و سیستم توسط سیستم ۲ پردازش می کند. گیرنده رادیویی و تقویت کننده صوتی نمونه ای از یک اتصال سری است. اتصال سه سیستم یا بیشتر نیز به نحوی مشابه تعریف می شود.



شکل ۱-۴۲: اتصال سیستم‌ها؛ (الف) اتصال سری (متوالی)؛ (ب) اتصال موازی؛ (ج) اتصال سری-موازی

شکل ۱-۴۲ (ب) اتصال موازی دو سیستم را نشان می‌دهد. در اینجا ورودی به هر دو سیستم ۱ و ۲ اعمال می‌شود. نماد \oplus عمل جمع را نشان می‌دهد، یعنی خروجی اتصال موازی مجموع خروجیهای دو سیستم است. یک سیستم صوتی که در آن چند میکروفون به یک تقویت کننده متصل اند، نمونه‌ای از اتصال موازی سیستمهاست. اتصال موازی بیش از دو سیستم را نیز می‌توان همانند اتصال موازی دو سیستم تعریف کرد. همچنین می‌توان با ترکیب اتصالاتی سری و موازی اتصالات پیچیده‌تری به دست آورد. شکل ۱-۴۲ (ج) نمونه‌ای از این اتصالات را نشان می‌دهد. یک اتصال مهم دیگر سیستمها، اتصال فیدبک دار است که شکل ۱-۴۳ نمونه‌ای از آن را نشان می‌دهد. در اینجا خروجی سیستم ۱ ورودی سیستم ۲ است، در حالی که خروجی سیستم ۲ فیدبک شده، با ورودی خارجی جمع می‌شود تا ورودی واقعی سیستم را تأمین کند. سیستمهای فیدبک دار کاربردهای متنوعی دارند. مثلاً تنظیم کننده سرعت خودرو، سرعت را حس می‌کند و میزان سوخت را به نحوی تنظیم می‌کند که سرعت در حد مطلوب بماند. سیستم کنترل دیجیتالی هواپیما نیز یک سیستم فیدبک دار است که در آن تفاضل سرعت واقعی و مطلوب، جهت واقعی و جهت مطلوب یا ارتفاع واقعی و ارتفاع مطلوب فیدبک دار است که در آن تفاضل سرعت واقعی و مطلوب، جهت واقعی و الکتریکی را نیز می‌توان به صورت فیدبک دار در نظر گرفت. به عنوان مثال مدار شکل ۱-۴۴ (الف) را در نظر بگیرید. همانطور که در شکل ۱-۴۴ (ب) نشان داده شده است، این سیستم را می‌توان به صورت اتصال فیدبک دار دو عنصر مداری در نظر گرفت.



شکل ۱-۴۳: اتصال فیدبک دار

۶-۱ خواص اساسی سیستمها

در این بخش برخی خواص اساسی سیستمهای پیوسته در زمان و گسسته در زمان را معرفی و بررسی می کنیم. این خواص تعبیر فیزیکی مهمی دارند ولی تعبیر ریاضی شان با استفاده از زبان سیگنالها و سیستمها، زبانی که در صد بنای آن هستیم، ساده ترست.

۱-۶-۱ سیستمهای حافظه دار و بدون حافظه

سیستمی بدون حافظه خوانده می شود که خروجی آن به ازای هر مقدار متغیر مستقل در هر زمان تنها به ورودی در همان زمان بستگی داشته باشد. مثلاً سیستم بیان شده با رابطه زیر بدون حافظه است

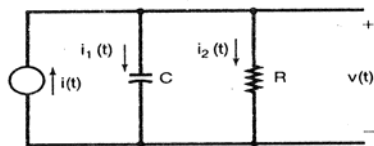
$$y[n] = (2x[n] - x'[n])' \quad (۹۰-۱)$$

زیرا مقدار $y[n]$ در هر زمان n تنها به مقدار $x[n]$ در همان زمان بستگی دارد. به طور مشابه، مقاومت یک سیستم بدون حافظه است؛ اگر ورودی $x(t)$ را جریان و خروجی $y(t)$ را ولتاژ بگیریم، رابطه ورودی-خروجی مقاومت چنین است

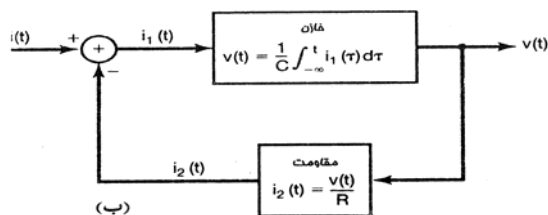
$$y(t) = Rx(t) \quad (۹۱-۱)$$

که R مقدار مقاومت است. یک مثال بسیار ساده سیستم بدون حافظه، سیستم همانی است که خروجی آن همان ورودی اش است، رابطه ورودی-خروجی سیستم همانی پیوسته در زمان به صورت زیر است

$$y(t) = x(t)$$



(الف)



(ب)

شکل ۱-۴۴: الف) مدار الکتریکی ساده؛ ب) نمودار جعبه ای که مدار فوق را به صورت اتصال فیدبک دار دو عنصر مداری نشان می دهد.

$$y[n] = x[n]$$

انباره یا جمع کننده انباره ای نمونه ای از سیستم های حافظه دار گسسته در زمان است

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \quad (92-1)$$

سیستم تأخیر دهنده نمونه دیگری از این سیستمهاست

$$y[n] = x[n - 1] \quad (93-1)$$

خازن مثالی از سیستمهای حافظه دار پیوسته در زمان است، زیرا اگر ورودی آن جریان و ولتاژ در نظر

گرفته شود داریم

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (94-1)$$

که در آن C ظرفیت خازن است .

مسامحتاً می توان گفت که سیستمی حافظه دار است که در آن مکانیسمی برای حفظ یا ذخیره اطلاعات مربوطه به

ورودیهای غیر از ورودی فعلی وجود داشته باشد. برای مثال سیستم تأخیر دهنده معادله (93-1) باید ورودی قبلی را

حفظ یا ذخیره کند . انباره معادله (92-1) باید اطلاعات ورودی های قبلی را به خاطر داشته باشد. در واقع انباره جمع

انباره ای تمام ورودیها تا زمان حاضر را حساب می کند، بنابراین در هر لحظه باید ورودی فعلی را به مقدار قبلی جمع

انباره ای بیفزاید. یعنی رابطه ورودی خروجی انباره را می توان به صورت زیر توصیف کرد

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] + x[n] \quad (95-1)$$

یا به طور معادل

$$y[n] = y[n - 1] + x[n] \quad (96-1)$$

براساس این رابطه اخیر انباره باید برای یافتن خروجی در زمان n جمع انباره ای ورودیهای قبلی را بداند که دقیقاً

خروجی قبلی انباره است .

در بسیاری از سیستمهای فیزیکی حافظه مستقیماً با ذخیره شدن انرژی مرتبط است . مثلاً خازن معادله (94-1) با

انباشتن بار الکتریکی انرژی ذخیره می کند ، و بار انتگرال جریان است . پس مدار RC ساده مثال 1-8 و شکل 1-1

حافظه ای دارند که در خازن متجلی است . حافظه خودروی شکل 1-2 انرژی ذخیره شده به صورت انرژی جنبشی

است . در سیستمهای گسسته در زمان ساخته شده با کامپیوتر یا میکروپروسور ، حافظه از ثباتهایی تشکیل می شوند

که در فاصله دو پالس ساعت مقادیری را در خود نگه می دارند .

گرچه مفهوم حافظه در یک سیستم معمولاً ذخیره شدن مقادیر قبلی ورودی یا خروجی را تداعی می کند، ولی در

تعریفی که از حافظه ارائه کردیم، سیستمهایی که مقدار فعلی خروجی شان به مقادیر بعدی ورودی یا خروجی بستگی

دارد نیز حافظه دار به حساب می آیند. گرچه اکنون سیستمی با بستگی به آینده غریب به نظر می رسد، ولی چنانچه

در بخش 1-6-3 خواهیم گفت ، اینها دسته مهمی از سیستمها را تشکیل می دهند .

سیستمی وارونپذیر خوانده می شود که به ازای ورودیهای متمایز خروجیهای متمایز بدهد. اگر سیستمی وارونپذیر باشد، چنانچه شکل ۴۵-۱(الف) برای حالت گسسته در زمان نشان می دهد، می توان یک سیستم وارون ساخت که اتصال سری آن با سیستم اصلی خروجی $w[n]$ برابر با ورودی $x[n]$ به دست دهد. یعنی رابطه ورودی-خروجی سیستم کلی اتصال سری شکل ۴۵-۱(الف)، همان رابطه سیستم همانی است.

سیستم زیر نمونه ای از یک سیستم پیوسته در زمان وارونپذیر است

$$y(t) = 2x(t) \quad (97-1)$$

سیستم وارون عبارت است از

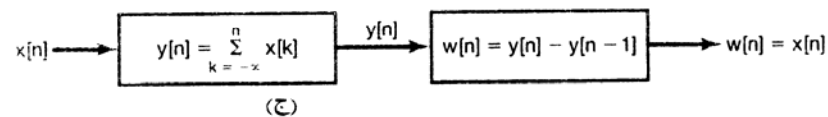
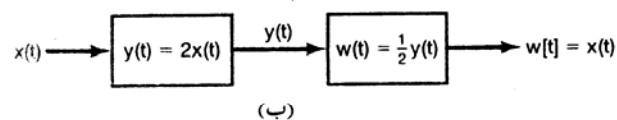
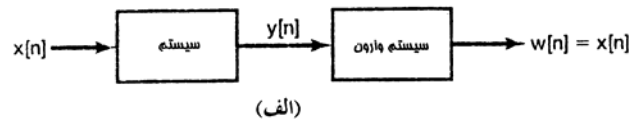
$$w(t) = \frac{1}{2}y(t) \quad (98-1)$$

این مثال در شکل ۴۵-۱(ب) نشان داده شده است. مثال دیگری از سیستم وارونپذیر، انباره معادله (۹۲-۱) است. برای این سیستم تفاضل دوم مقدار متوالی خروجی، برابر آخرین مقدار ورودی است. پس سیستم وارون عبارت است از

$$w[n] = y[n] - y[n-1] \quad (99-1)$$

شکل ۴۵-۱(ج) این سیستم وارون را نشان می دهد. سیستم زیر نمونه ای از سیستمهای وارون ناپذیر است

$$y[n] = \dots \quad (100-1)$$



شکل ۴۵-۱: مفهوم سیستم وارون برای: (الف) یک سیستم وارون پذیر کلی؛ (ب) سیستم وارونپذیر معادله (۹۷-۱)؛ (ج) سیستم وارون پذیر معادله (۹۲-۱)

خروجی سیستم به ازای هر ورودی دلخواهی، رشته صفرست. برای سیستم زیر

$$y(t) = x(t) \quad (101-1)$$

نیز نمی توان علامت ورودی را با داشتن خروجی تعیین کرد.

گوناگونی به کار می روند. در چنین سیستمی سیگنالی که باید ارسال شود ابتدا به سیستمی موسوم به کد کننده اعمال می شود. این کار دلایل متعددی دارد، از رمز کردن برای حفظ اطلاعات گرفته تا افزودن اطلاعات اضافی (مانند بیت‌های توازن) برای تشخیص و تصحیح خطاهایی که در مخابره پیش می آید. برای این که کد کردن منجر به از دست رفتن اطلاعات نشود، ورودی کد کننده را باید بتوان دقیقاً از خروجی آن بازسازی کرد؛ یعنی کد کننده باید وارونپذیر باشد

۱-۶-۳ علیّت

سیستمی علیّی است که خروجی آن در هر زمان تنها به مقادیر گذشته و حال ورودی بستگی داشته باشد. چنین سیستمی راعموماً بدون پیش بینی می نامند زیرا خروجی سیستم مقادیر بعدی ورودی را پیش بینی نمی کند. در نتیجه اگر دو ورودی یک سیستم علیّی تا زمان t_0 یا n_0 برابر باشند، خروجیهای متنظر آنها نیز تا آن زمان باید برابر باشند. مدار RC شکل ۱-۱ علیّی است، زیرا ولتاژ خازن تنها به مقادیر گذشته و فعلی ولتاژ منبع بستگی دارد. همچنین حرکت اتومبیل علیّی است زیرا کنشهای آتی راننده را پیش بینی نمی کند. سیستمهای توصیف شده با معادلات (۱-۹۲) تا (۱-۹۴) علیّی اند، اما سیستمهای زیر علیّی نیستند

$$y[n] = x[n] - x[n+1] \quad (1-102)$$

و

$$y(t) = x(t+1) \quad (1-103)$$

تمام سیستمهای بدون حافظه علیّی اند، زیرا تنها به مقدار فعلی ورودی پاسخ می دهند.

هرچند که سیستمهای علیّی اهمیت زیادی دارند، ولی به هیچ وجه تنها سیستمهای دارای اهمیت عملی به حساب نمی آیند. برای مثال در کاربردهایی که متغیر مستقل زمان نیست، مانند پردازش تصویر، علیّت یک محدودیت جدی به حساب نمی آید. همچنین در پردازش اطلاعات ثبت شده، مثل سیگنالهای صحبت، ژئوفیزیک، یا هواشناسی اصلاً مقید به کاربرد پردازشهای علیّی نیستیم. اینها تنها چند نمونه از مثالهای ممکن هستند. به عنوان مثال دیگر در بسیاری کاربردها، از جمله تحلیل بازار سهام و مطالعات مردم شناسی، امکان دارد بخواهیم در میان داده هایی که سریعاً تغییر می کنند، تغییرات آرام را بیابیم. یک روش ممکن برای این کار گرفتن میانگین داده ها در یک فاصله است، تا نوسانات هموار شود و تنها تغییرات آرام باقی بماند. سیستم میانگین گیر زیر یک سیستم غیر علیّی است

$$y[n] = \frac{1}{M+1} \sum_{k=-N}^{+M} x[n-k] \quad (1-104)$$

مثال ۱-۱۲

در بررسی علیّی بودن یک سیستم باید رابطه ورودی-خروجی به دقت بررسی شود. برای نشان دادن نکات مربوط به این کار علیّی بودن دو سیستم را مورد بررسی قرار می دهیم.

سیستم اول به صورت زیر تعریف می شود

$$y[n] = x[-n] \quad (1-105)$$

که منفی است و بنابراین قبل از n است. ممکن است نتیجه بگیریم که سیستم داده شده علی است. ولی باید رابطه ورودی-خروجی را برای تمام زمانها بررسی کنیم. در $n < 0$ ، مثلاً $n = -4$ می بینیم که $y[-4] = x[4]$ ، پس خروجی در این زمان به یک مقدار آینده سیگنال بستگی دارد. بنابراین سیستم علی نیست.

همچنین باید اثرهای ورودی را به دقت از اثرهای دیگر موجود در سیستم تفکیک کنیم. سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$y(t) = x(t) \cos(t + 1) \quad (106-1)$$

در این سیستم خروجی در زمان t با حاصلضرب ورودی در آن زمان و یک عدد متغیر با زمان بستگی دارد. معادله (106-1) را می توان به صورت زیر نوشت

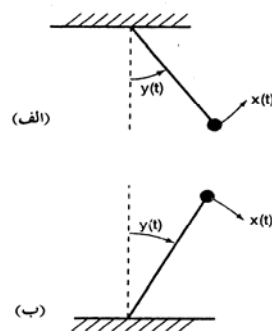
$$y(t) = x(t)g(t)$$

که در آن $g(t) = \cos(t + 1)$ تابعی متغیر با زمان است، یعنی $g(t) = \cos(t + 1)$. پس تنها مقدار فعلی ورودی $x(t)$ مقدار فعلی خروجی $y(t)$ را تعیین می کند، پس این سیستم علی (و در واقع بدون حافظه) است.

۴-۶-۱ پایداری

پایداری یکی دیگر از خاصیت‌های مهم سیستم‌هاست. سیستم پایدار سیستمی است که در آن ورودیهای کوچک پاسخهای واگرا ایجاد نکند. آونگ شکل ۴۶-۱ (الف) را در نظر بگیرید. در این جا ورودی نیروی اعمالی $x(t)$ و خروجی انحراف زاویه ای $y(t)$ از حالت قائم است. گرانش نیروی برگرداننده ای اعمال می کند که آونگ را به وضعیت قائم می برد، و نیروی بازدارنده اصطکاک در جهت کم کردن سرعت آونگ عمل می کند. پس اگر نیروی کوچک $x(t)$ اعمال شود، انحراف حاصل از وضعیت قائم کوچک خواهد بود. برعکس، در آونگ شکل ۴۶-۱ (ب) گرانش نیروی اعمالی می کند که در جهت افزایش انحراف از وضعیت قائم است. پس یک نیروی کوچک اعمالی به انحرافی بزرگ منجر می شود، و به رغم وجود نیروهای برگرداننده اصطکاک باعث افتادگی آونگ می شود.

مثالهای متعددی از سیستمهای پایدار وجود دارد. پایداری سیستمهای فیزیکی معمولاً از مکانیسمهای تلف کننده انرژی ناشی می شوند. برای مثال اگر مقدار عناصر مدار ساده RC مثال ۸-۱ مثبت باشند، مقاومت انرژی مصرف می کند و مدار یک سیستم پایدار است. سیستم مثال ۹-۱ نیز به خاطر مصرف انرژی توسط اصطکاک یک سیستم پایدار است.



شکل ۴۶-۱: (الف) آونگ پایدار؛ (ب) آونگ وارون ناپایدار

اگر اندازه آن بدون کران زیاد نشود، خروجی آن نیز باید کراندار باشد و بنابراین نمی تواند واگرا باشد. در تمام این کتاب این تعریف پایداری را به کار می بریم. مثلاً اعمال نیروی ثابت $f(t)=F$ به خودروی شکل ۱-۲ را در نظر بگیرید که در آن خودرو ابتدائاً ساکن است. در این صورت سرعت خودرو افزایش می یابد ولی نه به طور بیکران، زیرا نیروی بازدارنده اصطکاک نیز باافزایش سرعت زیاد می شود. در واقع سرعت خودرو تا آنجا اضافه می شود که نیروی اصطکاک دقیقاً نیروی اعمالی را خنثی کند. مطابق معادله (۱-۴۸) سرعت حدی V باید رابطه زیر را ارضا کند

$$\frac{\rho}{m} V = \frac{1}{m} F \quad (1-107)$$

یا

$$V = \frac{F}{\rho} \quad (1-108)$$

به عنوان مثالی دیگر، سیستم گسسته در زمان تعریف شده با معادله (۱-۱۰۴) را در نظر بگیرید، و فرض کنید ورودی $x[n]$ برای تمام مقادیر n دارای کران B است. در این صورت بزرگترین اندازه ممکن $y[n]$ نیز B است، زیرا $y[n]$ میانگین تعداد محدودی از مقادیر ورودی است. بنابراین $y[n]$ کراندار و سیستم پایدار است. حال سیستم انباره توصیف شده با معادله (۱-۹۲) را در نظر بگیرید. این سیستم برخلاف سیستم معادله (۱-۱۰۴) به جای تعداد محدودی مقدار، تمام مقادیر گذشته ورودی را جمع می کند و سیستم ناپایدار است، زیرا حتی اگر $x[n]$ کراندار باشد، این مجموع می تواند به طور پیوسته افزایش یابد. مثلاً فرض کنید ورودی پله واحد $u[n]$ باشد، که به وضوح یک ورودی کراندار است، در این صورت خروجی عبارت است از

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} u[k] = (n+1)u[n]$$

یعنی $y[0] = 1, y[1] = 2, y[2] = 3, \dots$ ، و $y[n]$ بدون کران زیاد می شود.

مثال ۱-۱۳

اگر نسبت به پایداری یک سیستم شک داشته باشیم، یک راهبرد مفید برای بررسی این وضعیت جستجوی ورودی کراندار خاصی است که یک خروجی بیکران ایجاد کند. در صورت یافتن چنین مثالی می توانیم نتیجه بگیریم که سیستم ناپایدار است. اگر چنین مثالی وجود نداشته باشد، یا یافتن آن سخت باشد می توانیم پایداری را به روشی که مستلزم یافتن سیگنال ورودی خاصی نیست بررسی کنیم. برای نشان دادن این روش پایداری دو سیستم را بررسی می کنیم:

$$S_1: y(t) = tx(t) \quad (1-109)$$

$$S_2: y(t) = e^{at}(t) \quad (1-110)$$

نظر بگیریم. برای سیستم S_1 معادله (۱-۱۰۹) ورودی ثابت $x(t)=1$ خروجی $y(t)=t$ را ایجاد می کند، که بیکران است. هر مقدار ثابتی برگزینیم، هر چند بزرگ، $|y(t)|$ در زمان معینی از آن بزرگتر می شود. پس سیستم S_1 ناپایدار است. برای سیستم S_2 ، که اتفاقاً پایدار است، نمی توان یک ورودی کراندار یافت که خروجی بیکران ایجاد کند. پس باید نشان دهیم هر ورودی کرانداری خروجی کراندار ایجاد می کند. B را عدد مثبت دلخواهی بگیریم، و $x(t)$ را سیگنال دلخواهی با کران B فرض کنید؛ یعنی هیچ فرضی برای $x(t)$ نمی کنیم، بجز این که در تمام زمانها

$$|x(t)| \leq B \quad (1-111)$$

یا

$$-B \leq x(t) \leq B \quad (1-112)$$

باتوجه به تعریف S_2 معادله (۱-۱۱۰) می بینیم که اگر $x(t)$ رابطه (۱-۱۱۱) را ارضا کند، $y(t)$ باید رابطه زیر را ارضا کند

$$e^{-B} \leq |y(t)| \leq e^B \quad (1-113)$$

پس اگر ورودی S_2 دارای کران B باشد، خروجی آن دارای کران e^B است. بنابراین S_2 پایدار است. خواص و مفاهیمی که تا اینجا این بخش بررسی کردیم اهمیت زیادی دارند و برخی از آنها را در این کتاب به تفصیل بررسی خواهیم کرد. اما دو خاصیت دیگر می ماند- تغییر پذیری با زمان و خطی بودن که در فصلهای بعدی کتاب نقش محوری دارند و باقیمانده این بخش به بررسی مقدماتی این دو مفهوم بسیار مهم اختصاص دارد.

۱-۶-۵ تغییرناپذیری با زمان

به لحاظ مفهومی سیستمی تغییرناپذیر با زمان است که رفتار و مشخصات آن با زمان تغییر نکند. برای مثال مدار RC شکل ۱-۱ تغییرناپذیر با زمان است، اگر مقادیر مقاومت و خازن با زمان تغییر نکند، در این صورت انتظار داریم آزمایشی که امروز با این مدار انجام می دهیم همان نتیجه ای را به بار آورد که آزمایش دیروز به دست داده بود. ولی اگر مقادیر R و C با زمان تغییر کنند، انتظار داریم که نتایج آزمایش به زمان آزمایش بستگی داشته باشد. به نحوی مشابه اگر ضرائب b و جرم m خودروی شکل ۱-۳ ثابت باشد، انتظار داریم پاسخ آن در زمانهای مختلف یکسان باشد. ولی اگر بار زیادی در خودرو بگذاریم جرم تغییر می کند و انتظار داریم رفتار آن با مواقعی که بار سنگینی ندارد متفاوت باشد. ویژگی تغییرناپذیری با زمان را می توان با زبان سیگنالها و سیستمها به راحتی بیان کرد. یک سیستم موقعی تغییرناپذیر با زمان است که جابجایی زمانی سیگنال ورودی به جابجایی زمانی مشابهی در سیگنال خروجی منجر شود. یعنی اگر $y[n]$ خروجی یک سیستم گسسته تغییرناپذیر با زمان به ورودی $x[n]$ باشد، آنگاه $y[n - n_0]$ خروجی به ازای $x[n - n_0]$ است. در حالت پیوسته با زمان اگر $y(t)$ خروجی متناظر با ورودی $x(t)$ باشد، خروجی این سیستم تغییرناپذیر با زمان به ورودی $x(t-t_0)$ برابر $y(t-t_0)$ است.

برای نشان دادن روش بررسی تغییرناپذیری سیستم با زمان و در عین حال به دست آوردن دیدی وسیعتر، مثالهای زیر را در نظر بگیرید:

سیستم پیوسته در زمان زیر را در نظر بگیرید

$$y(t) = \sin |x(t)| \quad (114-1)$$

برای بررسی تغییر ناپذیری با زمان ، نشان می دهیم که خاصیت تغییر ناپذیری به ازای هر ورودی و هر جابجایی صادق است. $x_1(t)$ را ورودی دلخواهی فرض کنید و $y_1(t)$ را خروجی متناظر با آن بگیرید

$$y_1(t) = \sin |x_1(t)| \quad (115-1)$$

حال ورودی ناشی از جابجایی زمانی $x_1(t)$ را در نظر بگیرید

$$x_2(t) = x_1(t - t_0) \quad (116-1)$$

خروجی متناظر با این ورودی عبارت است از

$$y_2(t) = \sin |x_2(t)| = \sin |x_1(t - t_0)| \quad (117-1)$$

با توجه به معادله (115-1) داریم

$$y_1(t - t_0) = \sin |x_1(t - t_0)| \quad (118-1)$$

مقایسه معادلات (117-1) و (118-1) نشان می دهد که $y_2(t) = y_1(t - t_0)$ پس این سیستم تغییر ناپذیر با زمان است .

مثال ۱-۱۵

به عنوان مثال دوم سیستم گسسته در زمان زیر را در نظر بگیرید

$$y[n] = nx[n] \quad (119-1)$$

این سیستم تغییر پذیر با زمان است. این مطلب را می توان با دنبال کردن روش به کار رفته در مثال بالا نشان داد (مسأله ۱-۲۸ را ببینید). ولی اگر به تغییر پذیر با زمان بودن یک سیستم مزنون هستیم بهترست به دنبال مثال نقض بگردیم، یعنی سیگنالی بیابیم که به ازای آن شرایط تغییر ناپذیری با زمان ارضا نشود. در واقع این سیستم دارای بهره متغیر با زمان است. اگر مقدار فعلی ورودی را بدانیم، نمی توانیم مقدار خروجی را تعیین کنیم مگر این که بدانیم در چه زمانی هستیم.

سیگنال ورودی $x_1[n] = \delta[n]$ را در نظر بگیرید ، که خروجی $y_1[n]$ متحد با صفررا به دست می

دهد (زیرا $n\delta[n] = 0$)، ولی سیگنال $x_2[n] = \delta[n - 1]$ خروجی

$y_2[n] = n\delta[n - 1] = \delta[n - 1]$ را به دست می دهد. پس گرچه $x_2[n]$ جابجاشده $x_1[n]$ است ، ولی

$y_2[n]$ جابجا شده $y_1[n]$ نیست.

گرچه مثال قبل بهره متغیر با زمان داشت و در نتیجه تغییر پذیر با زمان بود ، ولی سیستم معادله (۱-۹۷) بهره ثابتی

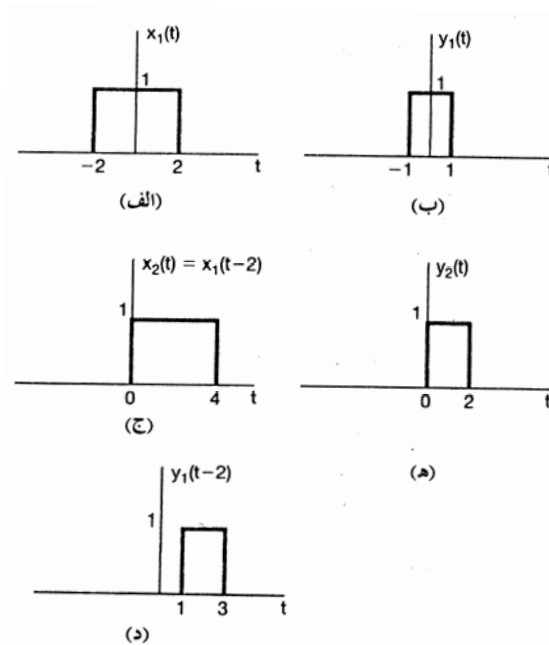
دارد و تغییر ناپذیر با زمان است. سیستم های معادلات (۱-۹۱) تا (۱-۱۰۴) نمونه های دیگری از سیستم های تغییر

ناپذیر با زمان هستند. مثال زیر نمونه دیگری از سیستم متغیر با زمان است.

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$y(t) = x(2t) \quad (۱-۱۲۰)$$

این سیستم نشان دهنده تغییر مقیاس زمانی است. یعنی $y(t)$ گونه فشرده شده $x(t)$ (با ضریب ۲) است. پس به طور شهودی در می یابیم که هر جابجایی زمانی نیز با ضریب ۲ فشرده می شود، بنابراین سیستم نمی تواند تغییر ناپذیر با زمان باشد. برای اثبات این مطلب با مثال نقض ورودی $x_1(t)$ شکل ۱-۴۷ (الف) را در نظر بگیرید که خروجی $y_1(t)$ شکل ۱-۴۷ (ب) را ایجاد میکند. اگر ورودی را به اندازه ۲ جابجا کنیم، یعنی $x_2(t) = x_1(t-2)$ شکل ۱-۴۷ (ج) را اعمال کنیم، خروجی $y_2(t) = x_2(2t)$ شکل ۱-۴۷ (د) به دست می آید. مقایسه شکل های ۱-۴۷ (د) و (ه) نشان می دهد که $y_2(t) \neq y_1(t-2)$ پس سیستم تغییر ناپذیر با زمان نیست. (در واقع $y_2(t) = y_1(t-1)$ پس جابجایی خروجی نصف جابجایی مورد انتظار از یک سیستم تغییر ناپذیر با زمان است.)



شکل ۱-۴۷ (الف) ورودی $x_1(t)$ سیستم مثال ۱-۱۶؛ (ب) خروجی $y_1(t)$ متنظر با $x_1(t)$ ؛ (ج) ورودی جابجا شده $x_2(t) = x_1(t-2)$ ؛ (د) خروجی $y_2(t)$ متنظر با ورودی $x_2(t)$ ؛ (ه) سیگنال جابجا شده $y_1(t-2)$. توجه کنید که $y_2(t) \neq y_1(t-2)$ ، پس سیستم تغییر ناپذیر با زمان نیست.

سیستم خطی، در حالت پیوسته یا گسسته در زمان، سیستمی است که ویژگی مهم جمع آثار (بر هم نهی) را دارد: اگر ورودی مجموع وزندار چند سیگنال باشد، خروجی جمع وزندار پاسخهای سیستم به هر یک از آن سیگنالهاست. دقیقتر این که اگر $y_1(t)$ پاسخ سیستم پیوسته در زمان به $x_1(t)$ و $y_2(t)$ پاسخ متناظر با ورودی $x_2(t)$ باشد، سیستم به شرطی خطی است که

پاسخ به $x_1(t) + x_2(t)$ برابر $y_1(t) + y_2(t)$ باشد.

پاسخ به $ax_1(t)$ (که a یک عدد مختلط دلخواه است) $ay_1(t)$ باشد.

اولین خاصیت را خاصیت جمعپذیری سیستم خطی، و خاصیت دوم خاصیت تغییر مقیاس یا همگنی نامیده می شود. هر چند این توصیف برای سیگنال های پیوسته در زمان نوشته شده است، ولی همین توصیف برای حالت گسسته در زمان هم صادق است. سیستمهای توصیف شده با معادلات (۹۱-۱) تا (۱۰۱-۱) و (۱۰۲-۱) تا (۱۰۴-۱) و (۱۱۹-۱) خطی اند، در حالی که سیستمهای توصیف شده با معادله های (۱۰۱-۱) و (۱۱۴-۱) غیر خطی اند. توجه کنید که سیستم می تواند خطی باشد ولی تغییر ناپذیر با زمان نباشد، مانند معادله (۱۱۹-۱) و می تواند تغییر ناپذیر با زمان باشد، ولی خطی نباشد مثل معادلات (۱۰۱-۱) و (۱۱۴-۱).

دو خاصیت تعریف کننده سیستم خطی را میتوان در یک گزاره گنجانند

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t) \quad (121-1)$$

پیوسته در زمان

$$ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow ay_1[n] + by_2[n] \quad (122-1)$$

گسسته در زمان

a, b ثابت های مختلط دلخواه اند. به علاوه استفاده از تعریف خطی بودن به سادگی می توان نشان داد که اگر

$k = 1, 2, 3, \dots, N$ مجموعه ای از ورودیهای یک سیستم خطی گسسته در زمان با خروجیهای متناظر

$k = 1, 2, 3, \dots, N$ باشد، آنگاه پاسخ به ترکیب خطی این ورودیها یعنی

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] + a_3 x_3[n] + \dots \quad (123-1)$$

عبارت است از

$$y[n] = \sum_k a_k y_k[n] = a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n] + a_3 y_3[n] + \dots \quad (124-1)$$

این ویژگی بسیار مهم خاصیت جمع آثار خوانده می شود که در هر دو حالت گسسته و پیوسته در زمان برای سیستمهای خطی صادق است.

یک نتیجه مستقیم خاصیت جمع آثار این است که برای سیستمهای خطی، ورودی صفر خروجی متحد با صفر، در

تمام زمانها، ایجاد می کند. برای مثال اگر $x[n] \rightarrow y[n]$ ، خاصیت همگنی می گوید که

$$c \cdot x[n] \rightarrow c \cdot y[n] \quad (125-1)$$

بررسی کرد.

مثال ۱-۱۷

سیستم S را در نظر بگیرید که ورودی و خروجی آن به صورت زیر به هم مرتبط اند

$$y(t) = tx(t)$$

برای نشان دادن خطی بودن S دو ورودی دلخواه $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را در نظر میگیریم

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = tx_1(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = tx_2(t)$$

x_3 را ترکیب خطی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در نظر بگیرید یعنی

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

که در آن a و b ثابت های دلخواه اند. اگر $x_3(t)$ ورودی S باشد، خروجی را میتوان به شکل زیر یافت

$$y_3(t) = tx_3(t) = t[ax_1(t) + bx_2(t)]$$

$$= atx_1(t) + btx_2(t)$$

$$= ay_1(t) + by_2(t)$$

پس نتیجه می گیریم که سیستم S خطی است.

مثال ۱-۱۸

روش بررسی خطی بودن به کار رفته در مثال قبل را برای سیستم S دارای رابطه ورودی - خروجی زیر اعمال می کنیم

$$y(t) = x^2(t)$$

$x_1(t)$ و $x_2(t)$ و $x_3(t)$ را مطابق مثال قبل تعریف کرده، بدست می آوریم

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1^2(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2^2(t)$$

9

$$x_3(t) \rightarrow y_3(t) = x_3^2(t)$$

$$= [ax_1(t) + bx_2(t)]^2$$

$$= a^2x_1^2(t) + b^2x_2^2(t) + 2abx_1(t)x_2(t)$$

$$= a^2y_1(t) + b^2y_2(t) + 2abx_1(t)x_2(t)$$

واضح است که می توان $x_1(t)$ ، $x_2(t)$ و a و b را به نحوی تعیین کرد که $y_3(t)$ با $a^2y_1(t) + b^2y_2(t) + 2abx_1(t)x_2(t)$

برابر نباشد. برای مثال به ازای $x_1(t) = 1$ ، $x_2(t) = 1$ ، $a = 2$ ، $b = 1$ ، داریم

$$y_3(t) = (2x_1(t) + x_2(t))^2 = 4$$

حال آن که $2y_1(t) + y_2(t) = 2$.

پس نتیجه می گیریم سیستم S

خطی نیست.

در بررسی خطی بودن یک سیستم باید هم خاصیت جمعپذیری و هم خاصیت همگنی سیگنال ها را بررسی کنیم، و به خاطر داشته باشیم که ثابتهای تغییر مقیاس می توانند مختلط باشند. برای نشان دادن اهمیت این نکات سیستم مشخص شده یه صورت زیر را در نظر می گیریم

$$y[n] = R_e\{x[n]\} \quad (126-1)$$

چنانچه در مسئله ۱-۲۹ نشان داده شده، این سیستم جمعپذیر است؛ ولی ویژگی همگنی را ، چنانچه نشان خواهیم داد ندارد. فرض کنید

$$x_1[n] = r[n] + js[n] \quad (127-1)$$

که یک ورودی مختلط دلخواه با بخش های حقیقی $r[n]$ و موهومی $s[n]$ است. خروجی متناظر با این ورودی عبارت است از

$$y_1[n] = r[n] \quad (128-1)$$

حال $x_2[n]$ را با عدد مختلطی ، مثلا $a = j$ ، تغییر مقیاس می دهیم و ورودی زیر را می یابیم

$$x_2[n] = jx_1[n] = j(r[n] + js[n]) \quad (129-1)$$

$$= -s[n] + jr[n]$$

خروجی متناظر با $x_2[n]$ عبارت است از

$$y_2[n] = R_e\{x_2[n]\} = -s[n] \quad (130-1)$$

که با گونه تغییر مقیاس یافته $y_1[n]$ ، یعنی

$$ay_1[n] = jr[n] \quad (131-1)$$

برابر نیست. پس این سیستم ویژگی همگنی را ندارد و خطی نیست.

مثال ۱-۲۰

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$y[n] = 2x[n] + 3 \quad (132-1)$$

این سیستم خطی نیست و به چند طریق می توان این مطلب را نشان داد. برای مثال این سیستم خاصیت جمعپذیری

را ندارد: به ازای $x_1[n] = 2$ و $x_2[n] = 3$ ، داریم

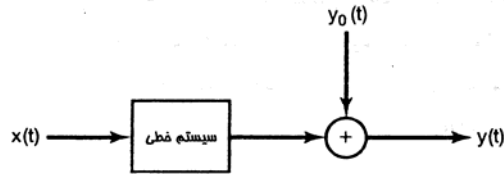
$$x_1[n] \rightarrow y_1[n] = 2x_1[n] + 3 = 7 \quad (133-1)$$

$$x_2[n] \rightarrow y_2[n] = 2x_2[n] + 3 = 9 \quad (134-1)$$

ولی پاسخ به $x_3[n] = x_1[n] + x_2[n]$ عبارت است از

$$y_3[n] = 2(x_1[n] + x_2[n]) + 3 = 13 \quad (135-1)$$

که با $y_1[n] + y_2[n] = 16$ برابر نیست. همچنین به ازای $x[n] = 1$ داریم $y[n] = 5$ ، پس این سیستم



شکل ۱-۴۸: ساختار سیستم نمودار خطی. در اینجا $y_0[n]$ پاسخ ورودی سیستم صفر است.

خطی نبودن سیستم بالا جای تعجب دارد، چرا که معادله (۱-۱۳۲) یک معادله خطی است. از طرفی مطابق شکل ۱-۴۸ خروجی این سیستم را می توان به صورت مجموع خروجی یک سیستم خطی و سیگنالی برابر پاسخ ورودی - صفر سیستم نشان داد. برای سیستم معادله (۱-۱۳۲) سیستم خطی عبارت است از

$$y[n] \rightarrow \alpha x[n]$$

و پاسخ ورودی - صفر عبارت است از

$$y[n] = \alpha$$

در واقع دسته بزرگی از سیستم ها ، هم سیستمهای پیوسته در زمان و هم گسسته در زمان، را می توان با ساختاری به صورت شکل ۱-۴۸ نشان داد که در آن خروجی سیستم کل مجموع پاسخ سیستم خطی و پاسخ ورودی - صفر است. چنانچه در مسئله ۱-۴۷ نشان داده خواهد شد این سیستمها از دسته سیستمهای نمودار خطی هستند ، یعنی سیستمهایی که (چه پیوسته در زمان و چه گسسته در زمان) به تغییرات ورودی به طور خطی پاسخ می دهند. به عبارت دیگر تفاضل پاسخهای سیستم به هر دو ورودی، تابعی خطی (یعنی جمعپذیر و همگن) از تفاضل دو ورودی است. برای مثال اگر $x_1[n]$ و $x_2[n]$ دو ورودی سیستم معادله (۱-۱۳۲) ، و $y_1[n]$ و $y_2[n]$ خروجیهای متناظر آنها باشد ، آنگاه

$$y_2[n] - y_1[n] = \alpha x_2[n] + \alpha - (\alpha x_1[n] + \alpha) = \alpha(x_2[n] - x_1[n]) \quad (۱-۱۳۶)$$

در این فصل چند مفهوم اساسی مربوط به سیگنالها و سیستمهای پیوسته در زمان را بیان کردیم. با چند مثال تصویری شهودی از مفاهیم سیگنالها و سیستمها ارائه دادیم، و نمایش ریاضی آنها را که در این کتاب به کار می بریم نیز معرفی کردیم. نمایش ترسیمی و ریاضی سیگنالها را بیان کردیم و این نمایشها را برای انجام تبدیل متغیر مستقل به کار بردیم. همچنین چند سیگنال اساسی را برای هر دو حالت پیوسته و گسسته در زمان معرفی کردیم، سیگنالهای نمایی مختلط، سینوسی و توابع ضربه و پله واحد از این جمله بودند. مفهوم تناوب را برای سیگنالهای پیوسته و گسسته در زمان معرفی کردیم.

در طرح بعضی مطالب مقدماتی مربوط به سیستمها، برای سادگی بحث درباره اتصال سیستمها، نمودارهای جعبه ای را معرفی کردیم و برخی خواص مهم سیستمها از جمله علیت، پایداری، تغییر ناپذیری با زمان، و خطی بودن را تعریف کردیم. بحث اصلی این کتاب به سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI)، در هر دو حالت پیوسته در زمان و گسسته در زمان مربوط می شود. این سیستمها نقش بسیار مهمی در تحلیل و طراحی سیستمها بازی می کند؛ یکی از دلایل این موضوع این است که بسیاری از سیستمهای موجود در طبیعت را می توان به سادگی با سیستمهای خطی و تغییر ناپذیر با زمان مدل کرد. همچنین، چنانچه در فصلهای بعدی خواهیم دید که خاصیتهای خطی و تغییر ناپذیر با زمان ما را قادر می کند که سیستمهای LTI را به تفصیل تحلیل کنیم.

توجه: در سیگنال فرد با توجه به این که منحنی از مبدا می گذرد، $x(0) = 0$ است.

هر سیگنال دلخواه $x(t)$ را می توان به صورت مجموع دو سیگنال زوج و فرد نوشت:

$$x(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} + \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

$$= x_e(t) + x_o(t)$$

مثال: بخش های زوج و فرد سیگنال پله واحد را رسم کنید.

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$E_v\{x[n]\} = \begin{cases} \frac{1}{2} & n < 0 \\ 1 & n = 0 \\ \frac{1}{2} & n > 0 \end{cases}$$

$$od\{x[n]\} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & n < 0 \\ 1 & n = 0 \\ \frac{1}{2} & n > 0 \end{cases}$$

سیگنال با تقارن نیم موج

سیگنالی که دارای دوره تناوب T می باشد را در نظر بگیرید. $x(t)$ به شرطی تقارن نیم موج دارد که:

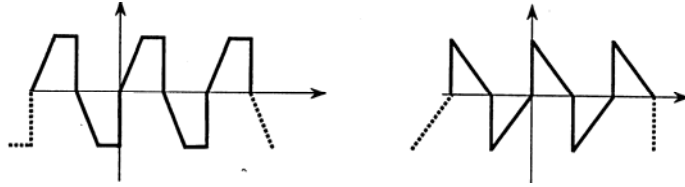
$$x(t) = -x\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

به بیان دیگر:

$$x(t) = -x\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

یعنی مقدار تابع در هر نیم تناوب مساوی مقدار تابع در نیم تناوب مجاور آن است. بر خلاف تقارن های فرد و زوج این تقارن

مستقل از مبدا $t = 0$ است. شکل موج های زیر نه زوج است و نه فرد ولی دارای تقارن نیم موج است.



شکل ۱-۴۹

توجه: همان طور که در شکل ها مشاهده می کنید، موج هایی که دارای تقارن نیم موج هستند، در هر نیم پریود پیک های مثبت و منفی شبیه به هم دارند.

در یک دسته بندی سیگنال ها به سه نوع (۱) انرژی (۲) توان و (۳) نه انرژی و نه توان تقسیم می گردند.

انرژی سیگنال

سیگنالی که دارای انرژی محدود و غیر صفر باشد ($E \neq 0, \infty$) را سیگنال از نوع انرژی گویند. انرژی سیگنال زمان پیوسته $x(t)$ در محدوده زمانی $t_1 < t < t_2$ برابر است با:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

انرژی سیگنال زمان گسسته $x[n]$ در فاصله $[N_1, N_2]$ برابر است با:

$$E = \sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2$$

انرژی کل سیگنال $x(t)$ یا $x[n]$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$E_{\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (\text{سیگنال زمان پیوسته})$$

$$E_{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \quad (\text{سیگنال زمان گسسته})$$

توان متوسط سیگنال

سیگنالی که دارای توان محدود و غیر صفر باشد ($P \neq 0, \infty$) را سیگنال از نوع توان گویند. توان متوسط سیگنال زمان پیوسته $x(t)$ در محدوده زمانی $t_1 < t < t_2$ برابر است با:

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

توان متوسط سیگنال زمان گسسته $x[n]$ در فاصله $[N_1, N_2]$ برابر است با:

$$P = \frac{1}{N_2 - N_1 + 1} \sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2$$

$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (\text{سیگنال زمان پیوسته})$$

$$P_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 \quad (\text{سیگنال زمان گسسته})$$

رابطه انرژی و توان سیگنال

$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{\infty}}{2T} \quad (\text{سیگنال زمان پیوسته})$$

$$P_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E_{\infty}}{2N+1} \quad (\text{سیگنال زمان گسسته})$$

چند نکته مفید

یک سیگنال نمی تواند هم سیگنال توان باشد و هم سیگنال انرژی زیرا:
 اگر سیگنال از نوع انرژی باشد، $P = 0$ خواهد داشت و لذا نوع سیگنال توان نخواهد بود و اگر سیگنال از نوع توان باشد،
 $E = \infty$ خواهد داشت و لذا نوع سیگنال انرژی نخواهد بود.
 اگر سیگنالی پریودیک و غیر صفر باشد آن گاه انرژی کل آن $E_{\infty} = \infty$ خواهد بود و توان کل P_{∞} آن در طول یک پریود به
 فرم زیر محاسبه می گردد:

$$P_{\infty} = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt \quad (\text{سیگنال زمان پیوسته})$$

$$P_{\infty} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle}^N |x[n]|^2 \quad (\text{سیگنال زمان گسسته})$$

به ازای $N = 2$ توان سیگنال زمان گسسته برابر است با:

$$P_{\infty} = \frac{1}{2} \{x^2[0] + x^2[1]\}$$

توان سیگنال $x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega_0 t + B_n \sin n\omega_0 t)$ برابر است با:

$$P_x = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2) \quad (a)$$

۴- توان لحظه ای سیگنال $x(t)$ برابر است با $|x(t)|^2$ که بیان کننده توان سیگنال در لحظه t است، در صورتی که سیگنال
 $x(t)$ حقیقی باشد، آن گاه:

$$|x(t)|^2 = x(t)x^*(t) = x^2(t)$$

یک سیگنال ممکن است نه سیگنال توان باشد و نه سیگنال انرژی، مثل حالتی که در آن $P = \infty$, $E = \infty$ باشد نظیر

خواص مهم تابع ضربه

خاصیت ۱: در صورتی که $x(t)$ در $t = 0$ پیوسته باشد،

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$$

خاصیت ۲: به ازای $a \neq 0$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

به ازای $a = -1$

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

که با تعریف تابع زوج مطابقت دارد.

خاصیت ۳: در صورتی که $x(t)$ در $t = t_0$ پیوسته باشد، خاصیت غربالی تابع ضربه بیان می دارد که:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0) \quad (*)$$

شکل دیگر انتگرال (*) به فرم کانولوشن (Convolution) به صورت زیر است:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\delta(t - \lambda)d\lambda = x(t)$$

انتگرال های با حدود معین را می توان به عنوان حالت های خاصی از انتگرال (*) دانست.

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t - t_0)dt = \begin{cases} x(t_0) & t_1 < t_0 < t_2 \\ 0 & o, w \end{cases}$$

خاصیت ۴: به شرط آن که $x(t)$ در $t = t_0$ پیوسته باشد:

$$\int x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta'(t - t_0)dt = -x'(t_0) \quad t_1 < t_0 < t_2$$

در حالت کلی:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta^{(n)}(t - t_0)dt = (-1)^{(n)} x^{(n)}(t_0) \quad t_1 < t_0 < t_2$$

خاصیت ۵:

$$\delta(h(t)) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{|h'(t_i)|} \delta(t - t_i)$$

t_i ریشه های حقیقی ساده به ازای $h(t) = 0$ هستند.

$$\delta(h(t)) = \frac{1}{|h'(t_1)|} \delta(t - t_1) + \frac{1}{|h'(t_2)|} \delta(t - t_2)$$

خواص مهم سیگنال $e^{j\omega_0 t}$

خاصیت ۱: سیگنال نمایی مختلط متناوب است.

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0(t+T)} \Rightarrow e^{j\omega_0 T} = 1$$

به ازای $\omega_0 = 0$ ، $x(t) = 1$ است که به ازای تمام مقادیر T متناوب می‌گردد. به ازای $\omega_0 \neq 0$ داریم:

$$T = \frac{2k\pi}{|\omega_0|} \quad (*)$$

دوره تناوب اصلی به ازای $k = 1$ به دست می‌آید یعنی $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$.

خاصیت ۲: با توجه به رابطه (*) هر چه اندازه ω_0 کاهش یابد، آهنگ نوسانات را کاهش داده ایم و در نتیجه دوره تناوب زیاد می‌گردد.

خاصیت ۳: سیگنال $e^{j\omega_0 t}$ ، سیگنال توان با انرژی کل بی‌نهایت و توان محدود $P_\infty = 1$ می‌باشد.

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{j\omega_0 t}|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1 dt = \infty$$

$$P_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |e^{j\omega_0 t}|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2T}{2T} = 1$$

خاصیت ۴: مولفه‌های فرکانسی (هارمونیک‌های) هر سیگنال را می‌توان بر حسب سیگنال $e^{j\omega_0 t}$ به صورت $\varphi_k(t)$ نمایش داد.

$$\varphi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

به ازای $k = 0$ ، $\varphi_k(t)$ یک سیگنال ثابت است، ولی به ازای هر k دیگری با فرکانس پایه $k|\omega_0|$ و زمان تناوب اصلی T_0 متناوب است.

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$$

سیگنال ضربه واحد

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

شیفت یافته ضربه واحد مثل $2\delta[n-2]$

هر دنباله دلخواهی را می توان به صورت ترکیب خطی از توابع ضربه واحد نوشت:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

مشاه زمانی پیوسته آن به صورت زیر است:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\delta(t-\alpha)d\alpha$$

برخی خواص دنباله ضربه

$$x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0]$$

$$\delta[an] = \delta[n] \quad a \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-n_0] = 1$$

$$\delta^k[n] = \delta[-n]$$

$$\delta^k[n] = \delta[n]$$

$$\delta[af(n)] = \delta[f(n)]$$

حالت کل سیگنال ضربه زمان گسسته:

$$\delta[f(n)] = \begin{cases} 1 & f[n] = 0 \\ 0 & f[n] \neq 0 \end{cases}$$

سیگنال پله واحد

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

رابطه دنباله پله واحد با ضربه واحد:

$$u[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} u[\ell]\delta[n-\ell] = \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta[n-\ell]$$

با تغییر متغیر $k = n - \ell$ داریم:

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k]$$

مشابه زمان پیوسته آن:

$$u(t) = \int_0^{\infty} \delta(t - \delta) d\alpha = \int_{-\infty}^1 \delta(t) dt$$

هر دنباله ضربه را می توان بر حسب دنباله های پله نوشت:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \quad (*)$$

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} \delta[n] = u[N_2] - u[N_1 - 1] \quad N_2 \geq N_1$$

سیگنال شیب واحد

$$r[n] = u_r[n] = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

یا به فرم ساده تر:

$$r[n] = nu[n]$$

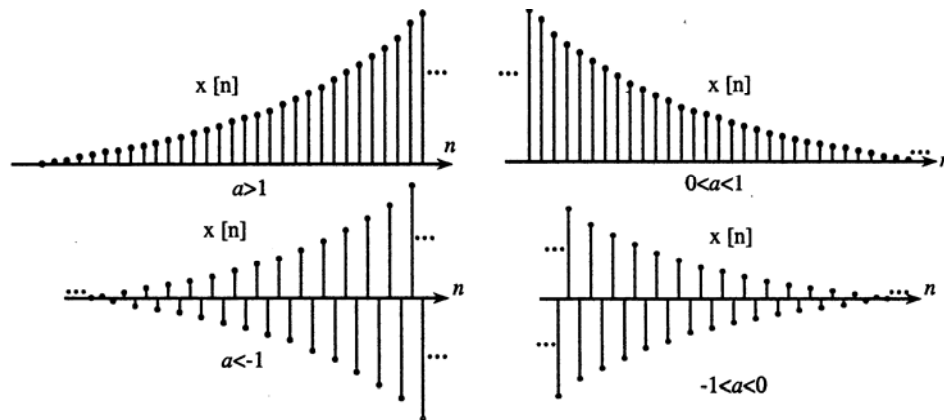
سیگنال های نمایی مختلط

دنباله های نمایی و سینوسی در تحلیل سیستم های زمان گسسته خطی تغییرناپذیر با زمان بی نهایت مهم اند. شکل عمومی یک دنباله نمایی به صورت زیر می باشد:

$$x[n] = a\alpha^n$$

سیگنال های نمایی حقیقی

اگر A و α اعداد حقیقی باشند، آن گاه دنباله حقیقی است. به ازای $A=1$ و مقادیر مختلف α سیگنال نمایی به حالت های زیر ظاهر می گردد:



شکل ۵۰-۱

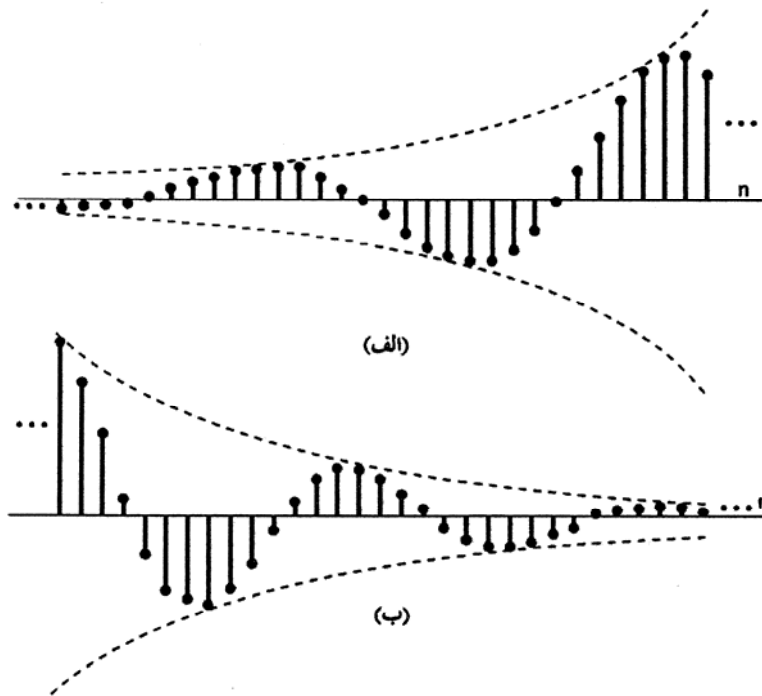
دنباله نمایی $A\alpha^n$ با α بخش های حقیقی و موهومی دارد به ازای $\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$ و $A = |A|e^{j\varphi}$ خواهیم داشت:

$$x[n] = A\alpha^n = |A|e^{j\varphi}|\alpha|^n e^{j\omega_0 n} = |A||\alpha|^n e^{j(\omega_0 n + \varphi)}$$

$$x[n] = |A||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \varphi) + j|A||\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \varphi)$$

مطابق شکل الف، به ازای $|\alpha| > 1$ دنباله با یک پوش به طور نمایی افزایشی، نوسان می کند.

مطابق شکل ب، به ازای $|\alpha| < 1$ پوش به صورت نمایی نزول می یابد.



شکل ۵۱-۱

به ازای $|\alpha| = 1$ خواهیم داشت:

$$x[n] = |A|e^{j(\omega_0 n + \varphi)} = |A|\cos(\omega_0 n + \varphi) + j|A|\sin(\omega_0 n + \varphi)$$

یعنی اجزای حقیقی و موهومی $e^{j\omega_0 n}$ به طور سینوسی با n تغییر می کنند.

توجه: سیگنال های ثابت $x(t) = k$ و $x[n] = C$ دارای فرکانس پایه صفر ($\omega_0 = 0$) هستند و برای آنها دوره تناوب پایه

تعریف نمی شود.

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= A \sin^{2n+1}(at+b) \\ x(t) &= A \cos^{2n+1}(at+b) \end{aligned} \right\} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|}$$

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= A \sin^{2n}(at+b) \\ x(t) &= A \cos^{2n}(at+b) \end{aligned} \right\} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|a|}$$

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= A \tan^n(at+b) \\ x(t) &= A \cot^n(at+b) \end{aligned} \right\} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|a|}$$

چند نکته مفید

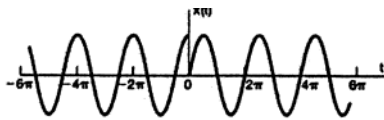
۱- سیگنال نمایی و سینوسی زمان گسسته که ضریب n آنها در π ضرب نشده است، متناوب نمی باشند، نظیر:

$$x[n] = 3e^{j\frac{3}{5}(n+\frac{1}{2})} \quad x[n] = \sin\left(\frac{1}{2}n^2\right)$$

$$x[n] = \cos\left(\frac{1}{6}n\right) \quad x[n] = \sin(n) + e^{j\pi n+1}$$

در همه موارد فوق، مقدار N به ازای هیچ مقداری از k عدد صحیح نمی گردد.

۲- ایجاد پرش در یک زمان خاص در سیگنال، باعث نامتناوب شدن آن می شود، نظیر:



$$x(t) = \begin{cases} \cos t & t < 0 \\ \sin t & t \geq 0 \end{cases}$$

شکل ۱-۵۲

$x(t)$ در مبدأ ناپیوستگی دارد و این ناپیوستگی در هیچ زمان دیگری رخ نمی دهد، همچنین:

$$x(t) = 2e^{j\left(t+\frac{\pi}{4}\right)} u(t-1)$$

$x(t)$ در لحظه $t=1$ ناپیوستگی دارد و این حالت در هیچ زمان دیگری تکرار نمی گردد.

۳- سیگنال $x(t)$ از تعدادی مولفه فرکانسی تشکیل شده است:

$$x(t) = \sum_n a_n e^{jn\omega_0 t}$$

$x(t)$ فقط و فقط وقتی متناوب خواهد بود که فرکانس های موجود همگی مضرب صحیحی از فرکانس اصلی ω_0 باشند.

در تمام موارد به جز در تغییر مقیاس زمانی مثل حالت زمان پیوسته است.

تغییر مقیاس زمانی

الف) L برابر کردن فاصله بین نمونه ها

در این حالت با قرار دادن $L - 1$ صفر بین اعداد دنباله انجام می گردد.

$$y[n] = x_{(L)}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{L}\right] & \frac{n}{L} \in Z \\ 0 & \frac{n}{L} \notin Z \end{cases}$$

ب) $\frac{1}{M}$ برابر کردن فاصله بین نمونه ها

در این حالت با نگه داشتن نمونه هایی که مضرب M هستند و حذف بقیه دنباله انجام می گردد.

$$y[n] = x[Mn]$$

ج) $\frac{L}{M}$ برابر کردن فاصله بین نمونه ها

در این حالت با نگه داشتن نمونه هایی که مضرب M نیستند فاصله نمونه ها $\frac{1}{M}$ برابر می گردند و سپس L برابر کردن فاصله

نمونه ها با قرار دادن $L - 1$ صفر برای نمونه های حذف شده:

$$y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{M}{L}n\right] & \frac{M}{L}n \in Z \\ 0 & \frac{M}{L}n \notin Z \end{cases}$$

نکته: در سیستم های بدون حافظه و تغییرناپذیر با زمان، در لحظاتی که سیگنال ورودی مقدار یکسانی دارد، سیگنال خروجی نیز می یابستی در همان لحظات مقدار یکسانی داشته باشد.

توجه: در سیستم های خطی و بدون حافظه رابطه ورودی- خروجی به صورت:

$$y[n] = f[n]x[n]$$

می باشد. اگر سیستم تغییرناپذیر با زمان نیز باشد، $f[n] = A$ (A ثابت) خواهد شد. به عبارتی در سیستم های LTI لحظه ای داریم:

$$y[n] = A x[n]$$

نکته: در اکثر سیستم هایی که رابطه ورودی- خروجی مشخص است، بررسی خاصیت همگنی جهت بررسی خاصیت خطی بودن کفایت می کند، نظیر:

$$y(t) = \begin{cases} x(t) + x(t-2) & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

$$\alpha x(t) \Rightarrow y(t) = \begin{cases} \alpha x(0) & \alpha x(t) < 0 \\ \alpha x(t) + \alpha x(t-2) & \alpha x(t) \geq 0 \end{cases}$$

سیستم غیر خطی است زیرا ضابطه تابع بستگی به α دارد. یعنی برای $x(t)$ بسته به α ضابطه عوض می شود. به طوری که:

$$x(t) > 0 \Rightarrow y(t) = x(t) + x(t-2)$$

$$\alpha < 0, \alpha x(t) \Rightarrow y(t) = \alpha x(0) \neq \alpha x(t) + \alpha x(t-2)$$

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \\ x[n+1] & n \leq -1 \end{cases}$$

$$\alpha x[n] \Rightarrow y[n] = \begin{cases} \alpha x[n] & n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \\ \alpha x[n+1] & n \leq -1 \end{cases} = \alpha \begin{cases} x[n] & n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \\ x[n+1] & n \leq -1 \end{cases}$$

لذا سیستم خطی است.

روش سریع تشخیص همگن بودن

۱- اگر در رابطه ورودی- خروجی سیستم جملاتی باشند که شامل x (ورودی) یا y (خروجی) نباشد، آن سیستم مطمئناً غیر همگن است.

۲- در صورتی که سیستم جز سیستم های مرحله الف نبود، تمامی n ها یا t ها را از رابطه حذف می کنیم. حال اگر رابطه باقی مانده رابطه یک خط راست گذرنده از مبدأ مختصات باشد، سیستم همگن بوده است:

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + nx[n+5] \Rightarrow \text{حذف } n \text{ ها} \Rightarrow y = x + x + x \Rightarrow y = 3x$$

که خطی گذرنده از مبدأ است و لذا سیستم همگن است.

۳- هر سیستمی که به نحوی مستقیم (یا غیر مستقیم) بر روی علامت یا مقدار ورودی بحث کند، سیستمی غیر همگن است نظیر:

$$y[n] = |x[n]| \Rightarrow y = |x|$$

یک رابطه غیر همگن بوده و لذا سیستم غیر خطی است.

$$y[n] = \begin{cases} 2x[n] & x[n] \geq 2 \\ -x[n] & x[n] < 2 \end{cases}$$

به ازای $x[n] = 1$ خروجی $y[n] = -1$ نی گردد و اگر $x[n] = 3$ شود، آن گاه هرگز خروجی ۳ برابر نمی شود بلکه

$y[n] = 6$ شده و لذا سیستم غیر همگن و در نتیجه غیر خطی است.

$$y[n] = \begin{cases} \overline{\overline{x[n-1]}} & x[n-1] \neq 0 \\ 0 & x[n-1] = 0 \end{cases}$$

$$\alpha x[n] \Rightarrow y[n] = \begin{cases} \frac{\alpha x[n] \cdot \alpha x[n-2]}{x[n-1]} & \alpha x[n-1] \neq 0 \\ 0 & \alpha x[n-1] = 0 \end{cases} = \alpha y[n], \alpha \neq 0$$

سیستم به ازای $\alpha \neq 0$ خاصیت همگنی دارد، ولی خاصیت جمع پذیری ندارد و لذا غیر خطی است.

راه های تشخیص سیستم های غیر خطی

۱- وجود عدد ثابت (مخالف صفر) یا یک سیگنال مشخص $f(t)$ جمع شونده با ورودی نظیر:

$$y(t) = A + \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha \quad (A \neq 0)$$

ثابت A باعث غیر خطی شدن سیستم می شود.

$$y(t) = \begin{cases} \text{Sint} & t < 0 \\ x(t) + x(t-2) & t \geq 0 \end{cases}$$

جمله $\text{Sin } t$ در ضابطه باعث غیر خطی شدن سیستم می گردد.

$$y[n] = 1 - \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

ثابت یک باعث غیر خطی شدن سیستم می گردد.

$$y[n] = n + x[2n+1]$$

ضریب n باعث غیر خطی شدن سیستم می گردد. البته دو سیستم زیر خطی اند:

$$y(t) = f(x)x(t), \quad y[n] = x[n^2] + x[0]$$

۲- اعمال یک تابع غیر خطی روی ورودی باعث غیر خطی شدن سیستم می گردد. نظیر:

$$y[n] = e^{x[n]}$$

اگر $x[n] = 0$ ، آن گاه $y \neq 0$ لذا سیستم غیر خطی است.

$$y[n] = \log_{10}(|x[n]|)$$

خاصیت همگنی ندارد. زیرا $x_2[n] = \alpha x_1[n] \Rightarrow y_2[n] \neq \alpha y_1[n]$. از دیگر ضوابط سیستم های غیر خطی می توان به

موارد زیر اشاره کرد:

$y(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{u(t)}{x(t)} \right]$	$y(t) = x^n(t) \quad n \neq 0$
$y(t) = x(0)x(t-1)$	$y(t) = \text{Cos}(x(t))$
$y[n] = x[n] $	$y(t) = x(x(t))$

البته اعمال تابع خطی بر روی متغیر مستقل باعث غیر خطی شدن سیستم نمی گردد. نظیر:

$$y(t) = x(\text{Sint})$$

$$y[n] = x[n^2] + x[1-n]$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\sqrt{|t|}} (|\lambda|) d\lambda$$

۳- در سیستم های چند ضابطه ای، اگر یکی از ضابطه ها غیر خطی باشد، سیستم غیر خطی است همچنین اگر شرط تابعی از ورودی باشند معمولاً سیستم غیر خطی خواهد شد اما اگر شروط تنها تابعی از زمان باشند، معمولاً سیستم خطی خواهد بود نظیر:

$y(t) = \begin{cases} x(t) & x(t) < x(t-1) \\ x(t-1) & x(t) \geq x(t-1) \end{cases}$	$y(t) = \begin{cases} x(t) + x(t-1) & x(-t) \leq 0 \\ x(t) - x(t-1) & x(-t) > 0 \end{cases}$
$y(t) = \begin{cases} 0 & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-1) & x(t) \geq 0 \end{cases}$	$y[n] = \begin{cases} x[n] + y[n-1] & y[n-1] \leq 0 \\ x[n] - y[n-1] & y[n-1] > 0 \end{cases}$

شروط کلیه مثال های بالا تابعی از ورودی (و خروجی) می باشد لذا با اعمال خاصیت همگنی بر روی ورودی به ازای مقادیر $\alpha < 0$ ضابطه عوض می گردد و لذا همگی سیستم های فوق غیر خطی خواهند بود.

$$y[n] = \text{Re} \{ x[n] \} \quad , \quad y[n] = \text{Im} \{ x[n] \}$$

با توجه به این که ضریب α در حالت کلی عدد مختلط است، دو سیستم فوق خاصیت همگنی ندارند و لذا غیر خطی اند.

۴- یک خاصیت مهم سیستم های خطی آن است که پاسخ آنها به ورودی صفر، صفر است. در حالت زمان پیوسته داریم:

$$\forall t \in R \quad , \quad x(t) = 0 \Rightarrow \forall t \in R \quad , \quad y(t) = 0$$

سیستم علی (Causal)

سیستمی علی است که خروجی آن در هر زمان تنها به مقادیر گذشته و حال ورودی بستگی داشته باشد.

$$y(t) = f(\{x(\alpha), \alpha \leq t\}, t)$$

$$y[n] = g(\{x[\cdot]\}_{\leq n}, n)$$

در رابطه فوق $\{x[\cdot]\}_{\leq n}$ یعنی اعداد رشته ورودی تا عدد n م. چنین سیستمی را معمولاً بدون پیش بینی می نامند زیرا خروجی سیستم مقادیر بعدی ورودی را پیش بینی نمی کند. در نتیجه اگر دو ورودی یک سیستم علی (و خطی) تا زمان n_0 یا

$$\forall t_0, x_1(t) = x_2(t) \quad t \leq t_0 \quad y_1(t) = y_2(t) \quad t \leq t_0$$

$$\forall n_0, x_1[n] = x_2[n] \quad n \leq n_0 \quad y_1[n] = y_2[n] \quad n \leq n_0$$

نکته: در سیستم خطی و علی داریم:

$$x(t) = 0 \quad t \leq t_0 \Rightarrow y(t) = 0 \quad t \leq t_0$$

نکته: یک سیستم بدون حافظه حتماً علی است.

نکته: یک سیستم غیر علی حتماً حافظه دار است.

توجه: در سیستم های چند ضابطه ای هم شرایط و هم ضوابط می توانند سیستم را غیر علی نمایند. نظیر:

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & n \geq 1 \\ x[n+1] & n < 1 \end{cases}$$

سیستم غیر علی است زیرا $y[0] = x[1]$ است.

$$y[n] = \begin{cases} 2x[n] & x[n+2] \leq 1 \\ x[n-2] & x[n+2] > 1 \end{cases}$$

سیستم غیر علی است زیرا شرط های سیستم غیر علی اند.

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & x[n-1] > 1 \\ 3x[n+1] & x[n-1] \leq 1 \end{cases}$$

سیستم غیر علی است زیرا ضابطه سیستم غیر علی است.

$$y[n] = \begin{cases} n & x[-n] > n \\ x[n-1] & x[-n] \leq n \end{cases}$$

سیستم غیر علی است زیرا شرط های سیستم به ازای $n < 0$ غیر علی اند.

$$y(t) = \begin{cases} x(2t) & t \leq 0 \\ x(-t) & t > 0 \end{cases}$$

سیستم علی است زیرا خروجی در هر زمان تنها به مقادیر گذشته و حال ورودی وابسته است.

$$y(t) = \begin{cases} x(t) + x(t-1) & x(-t) \leq 0 \\ x(t) - x(t-1) & x(-t) > 0 \end{cases}$$

سیستم غیر علی است زیرا شرط های سیستم به ازای $t < 0$ غیر علی اند.

$$y(t) = T\{x(t)\} = \begin{cases} tx(t) & t < |x(t)| \\ x(-t) & t \geq |x(t)| \end{cases}$$

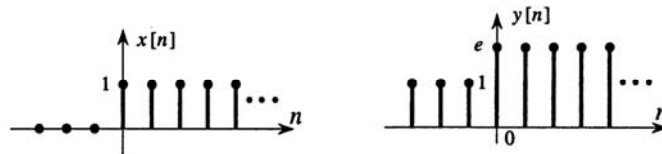
سیستم نمی گردد.

$$y(t) = x(x(t))$$

سیستم غیر علی است زیرا:

$$x(t) = e^{-t}, \quad t = 0 \Rightarrow y(0) = x(e^0) \Rightarrow y(0) = x(2.7)$$

توجه: سیستم $y[n] = e^{x[n]}$ را در نظر بگیرید. به ازای ورودی پله $x[n] = u[n]$ پاسخ $y[n]$ به شکل زیر به دست می آید:



شکل ۱-۵۳

اگرچه سیستم غیر علی است اما با این وجود خروجی قبل از این که ورودی از حالت صفر خارج شود، مقدار دارد لذا سیستم حتماً غیر خطی است.

توجه: در سیستم های چند ضابطه ای، اگر یکی از ضابطه ها تغییرپذیر با زمان باشد و با یکی از شروط تابعی از زمان باشند معمولاً سیستم تغییرپذیر با زمان است. نظیر:

$$y[n] = \begin{cases} x[n-1] & n \geq 0 \\ 2x[n+2] & n \leq -1 \end{cases}$$

سیستم فوق دارای ضابطه های TI است اما شروط آن با زمان تغییر می کند. لذا سیستم TV است.

$$y[n] = \begin{cases} x[n+1] & \text{if } n \text{ is even} \\ x[n-1] & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

شروط سیستم با زمان تغییر می کند. لذا سیستم TV است.

سیستم مقابل TV است؛ زیرا:

$$y(t) = x(0)x(t-2)$$

$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \Rightarrow y_2(t) = x_1(-t_0)x_1(t-t_0-2)$$

$$y_1(t-t_0) = x(0)x(t-t_0-2) \neq y_2(t)$$

سیستم مقابل TV است. زیرا:

$$y[n] = x[1] + \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

$$x_2[n] = x_1[n-n_0] \Rightarrow y_2[n] = x_1[1-n_0] + \sum_{k=-\infty}^n x_1[k-n_0]$$

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x_1[k] = \sum_{m=-\infty}^{n-1} x_1[m] = y_2[n]$$

جمله $x[1]$ باعث TV شدن سیستم می گردد. همچنین سیستم مقابل TV است زیرا:

$$y(t) = x(x(t))$$

$$x_2(t) = x_1(t - t_0) \Rightarrow y_2(t) = x_1(x_1(t - t_0) - t_0)$$

$$y_1(t - t_0) = x_1(x_1(t - t_0)) \neq y_2(t)$$

توجه: در سیستم های چند ضابطه ای اگر ضابطه ها TI و شرط ها تابعی از ورودی باشند، معمولاً سیستم TI خواهد بود. نظیر:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & x(t) < 0 \\ x(t) + x[t-2] & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

سیستم فوق TI است زیرا ضابطه ها TI و شروط تابعی از ورودی هستند اما سیستم های زیر همگی TV هستند.

$y(t) = \begin{cases} x(0) & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-2) & x(t) \geq x(t-1) \end{cases}$	$y(t) = \begin{cases} 0 & x(t) < 0 \\ x(t) - x(2t-1) & x(t) \geq 0 \end{cases}$
$y(t) = \begin{cases} 0 & x(-t) < 0 \\ x(t) + x(t-2) & x(-t) \geq 0 \end{cases}$	$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ x(t) + x(t-2) & t > 0 \end{cases}$

آیا سیستم مقابل TI است؟

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k] \delta[n-k] = x[0] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-k]$$

جمله $x[0]$ باعث TV شدن سیستم می گردد.

نکته: به طور کلی وجود جملات $x[n_0]$ یا $x(t_0)$ در ضابطه سیستم باعث TV شدن آن می گردد.

نکته: در معادله دیفرانسیل نمایش دهنده ورودی-خروجی، در صورتی که ضرایب تابعی از زمان باشند سیستم حتماً TV است.

نظیر:

$$\frac{dy}{dt} + 2ty = x(t)$$

$$n y[n] - a y[n-1] = b x[n]$$

نکته: در هنگام محاسبه وارون از توابع انتگرالی رابطه زیر مفید است.

$$\left(\int_{g(t)}^{f(t)} x(\alpha) d\alpha \right)' = f'(t)x(f(t)) - g'(t)x(g(t))$$

نکته: سیستم هایی که در ضابطه شان بخشی از اطلاعات مربوط به ورودی حذف می گردد، معکوس ناپذیرند، نظیر:

$$y[n] = n x[n]$$

$$y[n] = f[n]x[n]$$

به ازای ریشه های صحیح $f[n] = 0$ ، حذف اطلاعات ورودی خواهد داشت. سیستم مشتق گیر:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

باعث حذف اطلاعات DC سیگنال ورودی می گردد. سیستم با ضابطه:

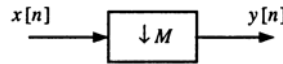
$$y[n] = \text{Re}\{x[n]\}$$

باعث حذف قسمت موهومی سیگنال ورودی می گردد. در ضابطه:

$$y[n] = \begin{cases} x[n+1] & n \geq 0 \\ x[n] & n \leq -1 \end{cases}$$

مقداری برای $x[0]$ در نظر نگرفته شده است. سیستم با ضابطه

$$y[n] = x[Mn]$$



شکل ۱-۵۴

با حذف اعدادی که شماره ترتیب آنها مضربی از M نیست فاصله نمونه ها را $\frac{1}{M}$ برابر می کند. در ضابطه

$$y(t) = (1-t^2)x(-t) + (1+t)x(t-1) = (t+1)[(1-t)x(-t) + x(t-1)]$$

در لحظه $t = -1$ سیستم حذف اطلاعات ورودی دارد. به طور مشابه همگی سیستم های زیر به علت حذف بخشی از اطلاعات سیگنال ورودی معکوس ناپذیرند.

$$y(t) = |x(t)|$$

$$y[n] = x[n]u[3-n]$$

$$y(t) = tx(t)$$

$$y[n] = x[n-2]\delta[n-2]$$

$$y(t) = x(|t|)$$

نکته: در سیستم های خطی (نه لزوماً تغییرناپذیر با زمان) شرط لازم و کافی وارون پذیری آن است که خروجی صفر فقط از ورودی صفر به دست می آید.

به طور مثال سیستم با ضابطه:

$$y(t) = 2x(t-1) - x(t) - x(t+1)$$

خطی است و شرط لازم و کافی برای معکوس پذیری آن است که تنها پاسخ ورودی صفر، صفر شود که این طور نیست چرا که پاسخ سیستم به ثابت $x(t) = k$ صفر می گردد.

سیستم خطی است پس:

$$y[n] = 0 \Rightarrow ax[n] + bx[n-1] = 0 \Rightarrow x[n] = \frac{-b}{a} x[n-1]$$

هر ورودی که از شرط فوق پیروی کند خروجی صفر نتیجه می دهد و عکس ناپذیر است.

نکته: اگر ضابطه سیستم تنها از $x(t)$ و $y(t)$ تشکیل شده باشد، برای تعیین معکوس پذیری به ترتیب زیر عمل می کنیم:

به جای $x(t)$ ، x و به جای $y(t)$ ، y قرار می دهیم.

نمودار را رسم می کنیم.

یک به یک بودن تابع $y = f(x)$ را بررسی می کنیم.

در صورت یک به یک بودن، برای تعیین ضابطه معکوس، کافی است متغیر مستقل x را بر حسب متغیر y به دست آوریم.

نکته: گاهی اوقات با سیستم هایی مواجه می شویم که دارای ضابطه کسری بوده و به ازای بعضی لحظات ورودی، مخرج و صورت

کسر به طور همزمان صفر می گردند، لذا به منظور بررسی پایداری ابتدا به روش های ریاضی نظیر قاعده هوییتال رفع ابهام نموده

و بعد به بررسی پایداری آن می پردازیم. نظیر:

سیستم با ضابطه مقابل پایدار است زیرا:

$$y(t) = \frac{6[x(t) - \sin(x(t))]}{x^3(t)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} = \frac{6(x - \sin x)}{x^3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6(1 - \cos x)}{3x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} = \frac{6 \sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{6x} = 1$$

سیستم با ضابطه مقابل ناپایدار است زیرا:

$$y(t) = \frac{2[1 - \cos(x(t-1))]}{x^2(t-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x)}{x^3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} = \frac{2 \sin x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x^2} = \infty$$

سیستم با ضابطه مقابل پایدار است زیرا:

$$y(t) = \frac{2\cos(2\pi x(t))}{4x(t) - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{2\cos(2\pi x)}{4x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{-4\pi \sin(2\pi x)}{4} = \frac{-4\pi}{4} = -\pi$$

$$y(t) = \begin{cases} \frac{\sin(x(t)) + 2x(t)}{x(t) + x^2(t)} & x(t) \neq 0 \\ 1 & x(t) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2x}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x(1+x)} = 3$$

سیستم با ضابطه مقابل ناپایدار است زیرا:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{\cos(x(t))}{x(t) + 2} & x(t) \neq -2 \\ 2 & x(t) = -2 \end{cases}$$

با توجه به ضابطه سیستم داریم:

$$x(t) \rightarrow -2 \Rightarrow y(t) \rightarrow \infty$$

توجه: یک سیستم ناپایدار ممکن است تعدادی ورودی کراندار داشته باشد که خروجی آنها نیز کراندار است، اما برای این که سیستم خاصیت پایداری داشته باشد، این خاصیت باید برای تمام ورودی های کراندار صحت داشته باشد، نظیر سیستم زیر که ناپایدار است:

$$y[n] = \log_{10}(|x[n]|)$$

چرا که برای هر مقداری از n که در آن $x[n] = 0$ باشد آن گاه:

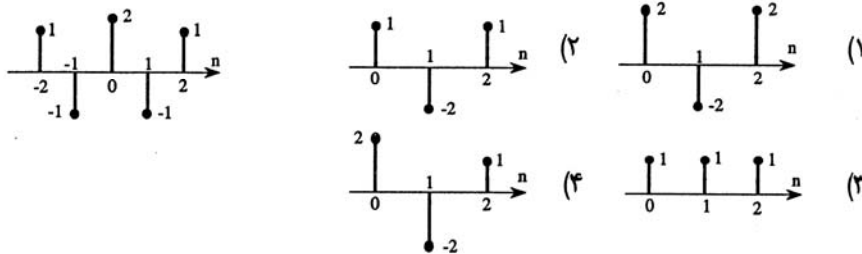
$$y[n] = \log_{10}(|x[n]|) = -\infty$$

است، حتی در صورتی که خروجی $y[n]$ برای هر ورودی غیر صفر کراندار باشد.

سوال ۱: سیستم گسسته در زمان $y[n] = T(x[n]) = e^{x[n]}$ مفروض است و خصوصیات این سیستم مطابق کدام یک از گزینه های زیر است؟

- (۱) خطی، غیر علی، پایدار و تغییرپذیر با زمان بوده و بدون حافظه می باشد.
- (۲) خطی، علی، ناپایدار و تغییرناپذیر با زمان بوده و با حافظه می باشد.
- (۳) غیر خطی، علی، پایدار و تغییرپذیر با زمان بوده و بدون حافظه می باشد.
- (۴) غیر خطی، علی، ناپایدار و تغییرپذیر با زمان بوده و با حافظه می باشد.

سوال ۲: $x_e[n]$ قسمت زوج تابع $x[n]$ در شکل زیر نشان داده شده است. اگر برای $n < 0$ داشته باشیم، $x[n] = 0$ ، کدام یک از شکل های زیر است؟



سوال ۳: رابطه ورودی و خروجی یک سیستم گسسته به صورت زیر است:

سیستم

$x[n] \longrightarrow \longrightarrow y[n]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kN] \delta[n - kN] \quad N \in \mathbb{Z}; N \geq 2$$

- (۱) سیستم خطی است.
- (۲) سیستم با حافظه است.
- (۳) سیستم معکوس ناپذیر است
- (۴) سیستم پایدار است.

سوال ۴: سیستم زمان گسسته ای با رابطه زیر تعریف می شود:

$$y[k] = \begin{cases} x[k] + c & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

- (۱) خطی، بدون حافظه، علی و متغیر با زمان
- (۲) خطی، حافظه دار، علی و متغیر با زمان
- (۳) غیر خطی، حافظه دار، علی و نامتغیر با زمان
- (۴) غیر خطی، بدون حافظه، علی و متغیر با زمان

سوال ۵: سیستم زمان پیوسته تعریف شده با رابطه $y(t) = x\left(\frac{t}{2}\right) + x(t-1)$ برای همه t دارای کدام خواص

زیر است؟

(۱) خطی، متغیر با زمان و غیر علی

(۲) غیر خطی، متغیر با زمان و غیر علی

(۳) خطی، تغییرناپذیر با زمان و غیر علی

(۴) غیر خطی، تغییرناپذیر با زمان و علی

سوال ۶: کدام یک از گزاره های زیر ناصحیح است؟

(۱) سیستم $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} e^{(t-\tau)} x(\tau) d\tau$ تغییرپذیر با زمان و پایدار است.

(۲) سیستم $y(t) = e^{jx(t)}$ علی و پایدار است.

(۳) سیستم $y[n] = nx[n]$ تغییرپذیر با زمان و ناپایدار است.

(۴) سیستم $y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n]$ وارون پذیر است.

سوال ۷: رابطه ورودی خروجی یک سیستم گسسته به صورت $[n] = x[n \bmod 27]$ می باشد. کدام گزینه در

مورد سیستم نادرست می باشد؟ (منظور از $n \bmod 27$ باقیمانده تقسیم n بر عدد صحیح ۲۷ است)

(۱) سیستم علی است.

(۲) سیستم خطی است.

(۳) سیستم معکوس ناپذیر است.

(۴) سیستم تغییرپذیر با زمان است.

سوال ۸: ضابطه ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ سیستم به صورت زیر است:

$$y(t) = \begin{cases} x(t-2) & t \geq 2 \\ x(t^2) & -2 \leq t < 2 \\ x(t+2) & t < -2 \end{cases}$$

این سیستم:

(۱) خطی و معکوس پذیر

(۲) غیر خطی و معکوس پذیر

(۳) خطی و معکوس ناپذیر

(۴) غیر خطی و معکوس ناپذیر

$$\frac{n}{r}, \frac{T}{r} - n \text{ عبارتند از: } f(rt - n), r > 0$$

$$\frac{2}{r}, \frac{T}{r} \text{ (۲)} \qquad \frac{n}{r}, \frac{T}{r} - n \text{ (۱)}$$

$$\frac{n+2}{r}, \frac{T}{r} \text{ (۴)} \qquad \frac{n-2}{r}, \frac{T}{r} + n \text{ (۳)}$$

سوال ۱۰: توان (P) و انرژی (E) سیگنال $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-|n-2m|}$ به ترتیب عبارتند از:

$$E = +\infty, P = 0 \text{ (۲)} \qquad E = +\infty, P = \frac{41}{18} \text{ (۱)}$$

$$E = \frac{64}{9}, P = 0 \text{ (۴)} \qquad E = +\infty, P = +\infty \text{ (۳)}$$

سوال ۱۱: ضابطه بین ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ در دو سیستم زمان گسسته به صورت زیر است:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \text{ : سیستم ۱} \qquad y[n] = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)x[n] \text{ : سیستم ۲}$$

کدام یک از این دو سیستم وارون پذیر هستند؟

- (۱) فقط سیستم ۱
 (۲) فقط سیستم ۲
 (۳) هر دو سیستم
 (۴) هیچ یک از دو سیستم

سوال ۱۲: سیستم های زیر را در نظر بگیرید:

$$y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & , n \text{ even} \\ 0 & , n \text{ odd} \end{cases} \text{ : سیستم شماره ۱}$$

$$y[n] = \sum_{k=n}^{n+6} x[k] \text{ : سیستم شماره ۲}$$

در این صورت ($x[n]$ و $y[n]$) به ترتیب مشخص کننده ورودی و خروجی سیستم می باشند.

- (۱) سیستم یک عکس ناپذیر و سیستم دو تغییرپذیر با زمان است.
 (۲) سیستم یک عکس ناپذیر و سیستم دو تغییرناپذیر با زمان است.
 (۳) سیستم یک عکس پذیر و سیستم دو تغییرپذیر با زمان است.
 (۴) سیستم یک عکس پذیر و سیستم دو تغییرناپذیر با زمان است.

(۲) علی و متغیر با زمان

(۱) غیر علی و نامتغیر با زمان

(۴) غیر علی و متغیر با زمان

(۳) علی و نامتغیر با زمان

سوال ۱۴: رابطه ورودی- خروجی سیستم نمونه بردار ایده آل:

$$y[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT)$$

می باشد. $x(t)$ ورودی و $y(t)$ خروجی است. کدام یک از عبارات زیر در مورد سیستم فوق صحیح است؟

(۱) سیستم خطی و مستقل از زمان است.

(۲) سیستم خطی و تابعی از زمان است.

(۳) سیستم غیر خطی و تابعی از زمان است.

(۴) سیستم غیر خطی و مستقل از زمان است.

سوال ۱۵: رابطه ورودی و خروجی سیستمی مطابق با رابطه $y[n] = \varepsilon_v \{ X[n] \}$ است که $y[n]$ خروجی و

$\varepsilon_v \{ \cdot \}$ به معنی بخش زوج سیگنال است. خواص این سیستم از نظر خطی و مستقل از زمان بودن عبارت است از:

(۲) خطی و نامستقل از زمان

(۱) غیر خطی و مستقل از زمان

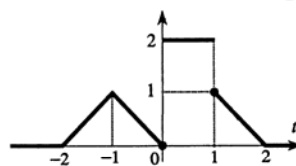
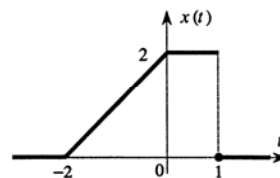
(۴) غیر خطی و نامستقل از زمان

(۳) خطی و مستقل از زمان

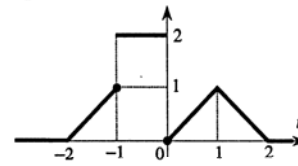
سوال ۱۶: ضابطه ورودی و خروجی یک سیستم زمان پیوسته به صورت:

$$y(t) = \begin{cases} x(t) - x(-t) & , \quad x(t) \geq x(-t) \\ x(-t) & , \quad x(t) < x(-t) \end{cases}$$

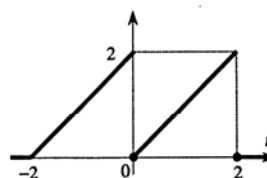
است. پاسخ این سیستم به ورودی نشان داده شده در شکل زیر کدام است؟



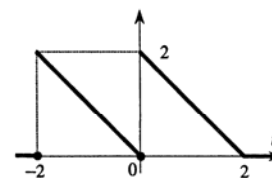
(۲)



(۱)

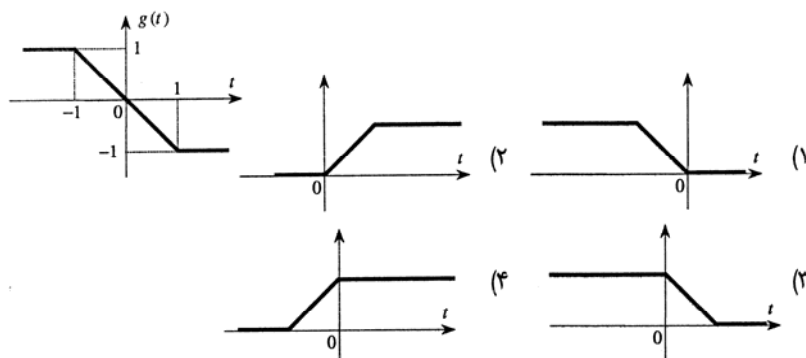


(۴)



(۳)

$h(t) = 1 - g(1-t)$ باشد؟



سوال ۱۸: می دانیم اگر $\delta[n]$ سیگنال ضربه واحد زمان گسسته باشد سیگنال پله واحد را می توان به صورت

$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$ و سیگنال شیب واحد را می توان به صورت $r[n] = \sum_{k=0}^n u[k]$ نمایش داد. کدام عبارت

معادل سیگنال زیر است؟

$$g[n] = r[u[n]] + r[\delta[n]] + \delta[u[n]]$$

$$1 + u[n] \quad (۲)$$

$$1 + \delta[n] \quad (۱)$$

$$3 + \delta[n] \quad (۴)$$

$$3 + u[n] \quad (۳)$$

سوال ۱۹: مقدار انتگرال:

$$\int_{t=0}^{\infty} (t^2 + 1)[\delta'(t - 3) + \delta(t^2 - 1)] dt$$

چقدر است؟ در این عبارت $\delta[n]$ تابع ضربه واحد و $\delta'(t)$ مشتق آن است.

۱ (۴)

۷ (۳)

-۵ (۲)

-۴ (۱)

سوال ۲۰: پاسخ یک سیستم زمان گسسته به سه ورودی مختلف به شرح زیر مفروض است:

$$x_1[n] = \delta[n] \Rightarrow y_1[n] = \delta[n-1] - \delta[n-2]$$

$$x_2[n] = \delta[n-2] \Rightarrow y_2[n] = \delta[n-2] - \delta[n-3]$$

$$x_3[n] = \delta[n+1] + \delta[n-2] \Rightarrow y_3[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-2]$$

کدام یک از گزاره های زیر لزوماً صحیح است؟

این سیستم تغییرناپذیر با زمان نیست.

این سیستم خطی نیست.

(۲) هم ۱ و هم ۲

(۱) فقط ۲

(۴) هیچ کدام

(۳) فقط ۱

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & x[0] \geq 0 \\ -x[n] & x[0] \leq 0 \end{cases}$$

این سیستم است.

(۲) غیر خطی و تغییرپذیر با زمان

(۱) غیر خطی و تغییر ناپذیر با زمان

(۴) خطی و تغییرناپذیر با زمان

(۳) خطی و تغییرپذیر با زمان

سوال ۲۲: ضابطه بین ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ سیستمی به صورت زیر است:

$$y(t) = x(-\sqrt{|t|})$$

این سیستم است.

(۲) خطی و غیر علی

(۱) غیر خطی و غیر علی

(۴) غیر خطی و علی

(۳) خطی و علی

سوال ۲۳: ضابطه بین ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ سیستمی به صورت زیر است:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\alpha) e^{\alpha} d\alpha$$

این سیستم است.

(۲) معکوس پذیر و تغییر ناپذیر با زمان

(۱) معکوس پذیر و تغییر پذیر با زمان

(۴) معکوس ناپذیر و تغییر پذیر با زمان.

(۳) معکوس ناپذیر و تغییر ناپذیر با زمان

(۳-۱)

سیستم غیر خطی است چون یک تابع غیر خطی بر روی ورودی اعمال گردیده است. از طرفی سیستم لحظه ای است پس علی و بدون حافظه خواهد بود.

(۱-۲)

(*)

$$\left. \begin{aligned} x[n] &= 0 & n < 0 \\ x_e[n] &= \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x[n] = 2x_e[n], \quad n > 0$$

(**)

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]), \quad n = 0 \Rightarrow x[0] = x_e[0]$$

دو ویژگی (*) و (***) تنها در شکل گزینه (۱) مشاهده می گردد.

(۲-۳)

به ازای قطار ضربه متناوب $P[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN]$ داریم:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kN] \delta[n - kN] = x[x]P[n] = x_p[n]$$

رشته $x_p[n]$ حاصل از فرآیند نمونه برداری به ازای مضارب صحیح تناوب نمونه برداری با $x[n]$ برابر است و چون $N \geq 2$ و $N \in \mathbb{Z}$ است. پس $y[n] = x[n]$ لذا سیستم بدون حافظه است.

(۲-۴)

سیستم فوق خطی است. زیرا ضابطه های خطی و شروط نیز فقط به زمان بستگی دارند. از طرفی نماد سیگما نشان دهنده حافظه دار بودن سیستم بوده و چون خروجی در هر لحظه تنها به مقادیر گذشته و حال بستگی دارد سیستم علی است. در نهایت به علت این که شروط رابطه ورودی خروجی سیستم با زمان (متغیر n) تغییر می کنند (و تابعی از ورودی نیستند) سیستم TV است.

(۱-۵)

سیستم خطی است زیرا دارای دو خاصیت جمع پذیری و همگنی است. از طرفی سیستم TV است زیرا:

$$x_2(t) = x_1(t - t_0) \Rightarrow y_2(t) = x_1\left(\frac{1}{2}t - t_0\right) + x_1(t - t_0 - 1)$$

$$y_1(t - t_0) = x_1\left[\frac{1}{2}(t - t_0)\right] + x_1(t - t_0 - 1) \neq y_2(t)$$

سیستم غیر علی است زیرا $y(-1) = x\left(\frac{-1}{2}\right) + x(-2)$

$$y(t) = e^t \int_{-\infty}^{2t} e^{-\tau} x(\tau) d\tau$$

در گزینه (۱) سیستم به علت حد بالای انتگرال $2t$ ، تغییرپذیر با زمان است. از طرفی سیستم ناپایدار است زیرا جمله e^t به ازای $t \rightarrow \infty$ سیستم را بی کران و ناپایدار می کند. برای توضیح بیشتر

در گزینه (۲) سیستم لحظه ای و در نتیجه علی بوده از طرفی سیستم پایدار است. زیرا

$$|x(t)| < x_{MAX} \Rightarrow |y(t)| = |e^{jx(t)}| = 1 < \infty$$

در گزینه (۳) ضریب n باعث ناپایداری و TV شدن سیستم می گردد.

در گزینه (۴) سیستم وارون پذیر زیرا ورودی در هر لحظه در تعیین خروجی تاثیر گذار می باشد.

$$x[n] = y[n] - \frac{1}{2} y[n-1]$$

(۱-۷)

سیستم غیر علی است زیرا به ازای $n < 0$ مقدار خروجی در یکی از لحظات صفر تا 26 ورودی قرار می گیرد. برای توضیح بیشتر سیستم خطی است زیرا بر روی سیگنال x اپراتور غیر خطی صورت نگرفته است. از طرفی سیستم معکوس ناپذیر است زیرا خروجی تنها در مقادیر مثبت 0 تا 26 قرار می گیرد و دیگر مقادیر در خروجی حذف شده اند. همچنین سیستم TV است زیرا بر روی متغیر مستقل n غیر از تبدیل $n - n_0$ صورت گرفته است.

(۱-۸)

سیستم خطی است زیرا ضابطه ها خطی و شروط تابعی از زمان هستند از طرفی در تعیین معکوس پذیری سیستم ضابطه های اول و سوم کافی است. سیستم وارون عبارت است از:

$$t \geq 2 \Rightarrow t - 2 > 0$$

$$x(t) \Rightarrow \begin{cases} y(t+2) & t \geq 0 \\ y(t-2) & t < 0 \end{cases}$$

$$t < 2 \Rightarrow t + 2 < 0$$

(۴-۹)

محل ماکزیمم برابر است با:

$$rt - n = 2 \Rightarrow t = \frac{n+2}{r}$$

عرض $f(rt - n)$ با $f(rt)$ یکی است و تنها تفاوت آنها شیفیت به مقدار $t = \frac{\pi}{r}$ است و لذا عرض $f(rt)$ برابر است با $\frac{T}{r}$.

(۱-۱۰)

$x[n]$ سیگنالی متناوب با دوره تناوب $N=2$ است. بنابراین سیگنال توان بوده و $E = +\infty$. برای تعیین توان سیگنال مجموع



$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{2} (x^2[0] + x^2[1])$$

$$x[0] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-|2m|} = \sum_{m=-\infty}^0 2^{2m} + \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-2m}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^0 4^m + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^m = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$x[1] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-|1-2m|} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} 2^{2(m-1)} = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^m = \frac{4}{3}$$

با توجه به مقادیر $x[0]$ ، $x[1]$ ، توان سیگنالی برابر است با:

$$P = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 \right] = \frac{41}{18}$$

(۳-۱۱)

سیستم (۱) وارون پذیر است

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = x[n] + \sum_{m=1}^{n-1} x[k] = x[n] + y[n-1]$$

بنابراین

$$x[n] = y[n] - y[n-1]$$

سیستم (۲) وارون پذیر است

$$y[n] = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) x[n]$$

$$\cos\frac{\pi}{3}n = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{3}n = (2k \pm 1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow n = \frac{3}{2}(2k \pm 1)$$

مقداری برای n به دست نمی آید پس $\cos\frac{\pi}{3}n \neq 0$ و سیستم معکوس برابر است با:

$$x[n] = \frac{y[n]}{\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)}$$

(۴-۱۲)

سیستم یک با ضابطه $y[n] = x\left[\frac{\pi}{2}\right]$ به ازای n های زوج عکس پذیر است. زیرا هیچ مقداری از ورودی در تعیین خروجی

حذف نشده است و سیستم معکوس به صورت زیر است:

سیستم دو با ضابطه زیر TI است.

$$y[n] = x[n] + x[n+1] + \dots + x[n+6]$$

زیرا بر روی متغیر مستقل n تنها تبدیل n به $n - n_0$ انجام شده است.

(۲-۱۳)

سیستم علی است زیرا خروجی در هر لحظه تنها به مقادیر گذشته ورودی بستگی دارد از طرفی سیستم تغییرپذیر با زمان است.

زیرا به طور کلی سیستم هایی با ضابطه ورودی خروجی $y(t) = f(t)x(t)$ خطی و تغییرپذیر با زمان هستند.

(۲-۱۴)

همان طور که بیان شد، سیستم ها با ضابطه $y(t) = f(t)x(t)$ ، خطی و TV هستند.

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-nT) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \Rightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

(۲-۱۵)

سیستم خطی ولی تغییرپذیر با زمان است زیرا:

$$y[n] = Ev\{x[n]\} = \frac{1}{2}\{x[n] + x[-n]\}$$

(۱-۱۶)

$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow y\left(\frac{1}{2}\right) = x\left(\frac{1}{2}\right) - x\left(\frac{-1}{2}\right) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{-1}{2} \Rightarrow y\left(\frac{-1}{2}\right) = x\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

هر دو ویژگی تنها در گزینه (۱) مشاهده می شود.

(۳-۱۷)

$$t = 0 \Rightarrow h(0) = 1 - g(1) = 2$$

$$t = \infty \Rightarrow h(\infty) = 1 - g(-\infty) = 0$$

هر دو ویژگی تنها در گزینه (۳) مشاهده می شود.

(۱-۱۸)

$$n = 0 \Rightarrow g[0] = r[1] + r[1] + \delta[1] = 1 + 1 + 0 = 2$$

$$n = 1 \Rightarrow g[1] = r[1] + r[0] + \delta[1] = 1 + 0 + 0 = 1$$

هر دو ویژگی تنها در گزینه (۱) مشاهده می شود.

$$h(t) = t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t = \pm 1, \quad h'(t) = 2t \Rightarrow |h'(\pm 1)| = 2$$

$$\delta(t^2 - 1) = \frac{1}{2}\delta(t+1) + \frac{1}{2}\delta(t-1)$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\infty (t^2 + 1)\delta'(t-3)dt = \int_0^\infty (t^2 + 1) \left[\frac{1}{2}\delta(t+1) + \frac{1}{2}\delta(t-1) \right] dt \\ &= -2(3) + 0 + \frac{1}{2} \times 2 = -5 \end{aligned}$$

(۳-۲۰)

سیستم تغییرپذیر با زمان است زیرا:

$$x_2[n] = x_1[n-2] \Rightarrow y_2[n] \neq y_1[n-2]$$

از طرفی اطلاعات کافی به منظور بررسی خواص همگنی و جمع پذیری موجود نمی باشد.

(۲-۲۱)

سیستم غیر خطی است زیرا با اعمال شرط همگنی به ازای $\alpha < 0$ ضابطه سیستم عوض می گردد از طرفی جمله $x[0]$ باعث TV شدن سیستم است.

(۲-۲۲)

سیستم خطی است زیرا اعمال تابع خطی بر روی متغیر مستقل t باعث غیر خطی شدن سیستم نمی گردد. از طرفی سیستم غیر علی است زیرا:

$$t = -4 \Rightarrow y(-4) = x(-2)$$

(۲-۲۳)

سیستم TV است زیرا:

$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \Rightarrow y_2(t) = \int_{-\infty}^t x(\alpha-t_0)e^\alpha d\alpha = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\beta-t_0)e^\beta d\beta$$

$$y_1(t-t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\alpha)e^\alpha d\alpha \neq y_2(t)$$

سیستم معکوس پذیر است زیرا با مشتق گیری از ضابطه داریم:

$$y'(t) = x(t)e^t \Rightarrow x(t) = e^{-t}y'(t)$$

فهرست مطالب

۸۴	فصل دوم
۸۴	سیستمهای خطی نغیرناپذیر با زمان
۸۵	۱-۲ سیستمهای LTI گسسته در زمان : جمع کانولوشن
۹۸	۲-۲ سیستمهای LTI پیوسته در زمان : انتگرال کانولوشن
۱۰۹	۳-۲ خواص سیستمهای خطی تغییر ناپذیر با زمان
۱۲۱	۴-۲ سیستمهای علی توصیف شده با معادلات دیفرانسیل و تفاضلی
۱۳۲	۵-۲- توابع تکین
۱۴۱	پیوست ۲
۱۴۷	سوالات طبقه بندی شده فصل دوم
۱۵۵	پاسخنامه سوالات فصل دوم

سیستمهای خطی تغییر ناپذیر با زمان

۲-۰ مقدمه

در بخش ۱-۶ بعضی از خواص اساسی سیستمها را مطرح و در موردشان صحبت کردیم. از میان آنها خاصیت خطی بودن و تغییر ناپذیری با زمان، در تحلیل سیگنال و سیستم به دو دلیل نقش اساسی دارند. اول اینکه فرآیندهای فیزیکی متعددی این خواص را دارند و بنابراین می توان آنها را به صورت سیستمهای خطی تغییر ناپذیر با زمان LTI مدل کرد. همچنین این سیستمها را می توان به تفصیل تحلیل کرد، و هم بینش شهودی نسبت به خواص آنها پیدا کرد و هم مجموعه ای از ابزارهای قدرتمند ایجاد کرد که هسته تحلیل سیگنال و سیستم را تشکیل می دهند.

یکی از اهداف اصلی این کتاب تفهیم این خواص و ابزارهاست، همچنین معرفی چند کاربرد بسیار مهم که این ابزارها در بررسی شان به کار می رود. در این فصل ابتدا یک نمایش پایه ای و بسیار مفید سیستمهای LTI را بررسی و یک دسته مهم این سیستمها را معرفی می کنیم.

یکی از دلایل اصلی قابلیت تحلیل سیستمهای LTI این است که تمام این سیستمها دارای خاصیت جمع آثار بیان شده در بخش ۱-۶ هستند. بنابراین اگر بتوان سیگنال ورودی را به صورت ترکیب خطی مجموعه ای از سیگنال های پایه ای نوشت، آنگاه می توان به کمک جمع آثار پاسخ سیستم را بر حسب پاسخ سیستم به این سیگنال های پایه ای نوشت.

چنانکه در بخش بعد خواهیم دید، یکی از مشخصات مهم ضربه واحد، در هر دو حوزه پیوسته در زمان و گسسته در زمان، این است که سیگنالهای بسیاری را می توان به صورت ترکیب خطی ضربه های تاخیر یافته نشان داد. با استفاده از این مطلب و خواص جمع آثار و تغییر ناپذیری با زمان، می توان هر سیستم LTI را با پاسخ آن به ضربه واحد به طور کامل مشخص کرد. این نمایش، که در حالت گسسته در زمان جمع کانولوشن و در حالت پیوسته در زمان انتگرال کانولوشن ناو دارد، کار تحلیل سیستمهای LTI را بسیار ساده می کند. پس از پی ریزی جمع کانولوشن و انتگرال کانولوشن، با استفاده از آنها برخی خواص دیگر سیستمهای LTI را بررسی می کنیم. سپس دسته ای از سیستمهای پیوسته در زمان را معرفی خواهیم کرد که می توان آنها را به کمک معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت توصیف کرد؛ و نیز همتای گسسته در زمان این سیستمها را که با معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت توصیف می شوند. سرانجام به تابع ضربه واحد پیوسته در زمان و چند سیگنال مرتبط با آن نگاهی دیگر می اندازیم تا بتوانیم نسبت به این سیگنالهای ایده ال، مخصوصا نسبت به کاربرد و تعبیرشان در زمینه تحلیل سیستمهای LTI درک عمیق تری کسب کنیم.

۱-۲-۱ نمایش سیگنالهای گسسته در زمان بر حسب ضربه

ایده اصلی نمایش سیگنالهای گسسته در زمان بر حسب ضربه واحد گسسته در زمان، تصور سیگنال به صورت مجموع یک رشته ضربه جابجا شده است. برای تبدیل این تصویر شهودی به نمایش ریاضی سیگنال $x[n]$ شکل ۱-۲ (الف) را در نظر بگیرید. در بخشهای دیگر این شکل پنج ضربه جابجا شده، با ضریبهای مختلف نشان داده شده است، ضریب هر ضربه، مقدار $x[n]$ در لحظه رخ دادن آن ضربه است.

برای مثال

$$x[-1]\delta[n+1] = \begin{cases} x[-1], & n = -1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases}$$

$$x[0]\delta[n] = \begin{cases} x[0], & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$x[1]\delta[n-1] = \begin{cases} x[1], & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

بنابراین در فاصله $-2 \leq n \leq 2$ ، $x[n]$ با مجموع پنج دنباله نشان داده شده در شکل برابر است. در حالت

کلی، با در نظر گرفتن ضربه های جابجا شده و تغییر مقیاس یافته، می توان نوشت

$$x[n] = \dots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \dots \quad (1-2)$$

به ازای هر n ، تنها یکی از جملات طرف راست معادله (۱-۲) مخالف صفر است، و ضریب آن جمله دقیقاً برابر

$x[n]$ است. معادله فوق را می توان به صورت فشرده تر زیر نوشت

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \quad (4-2)$$

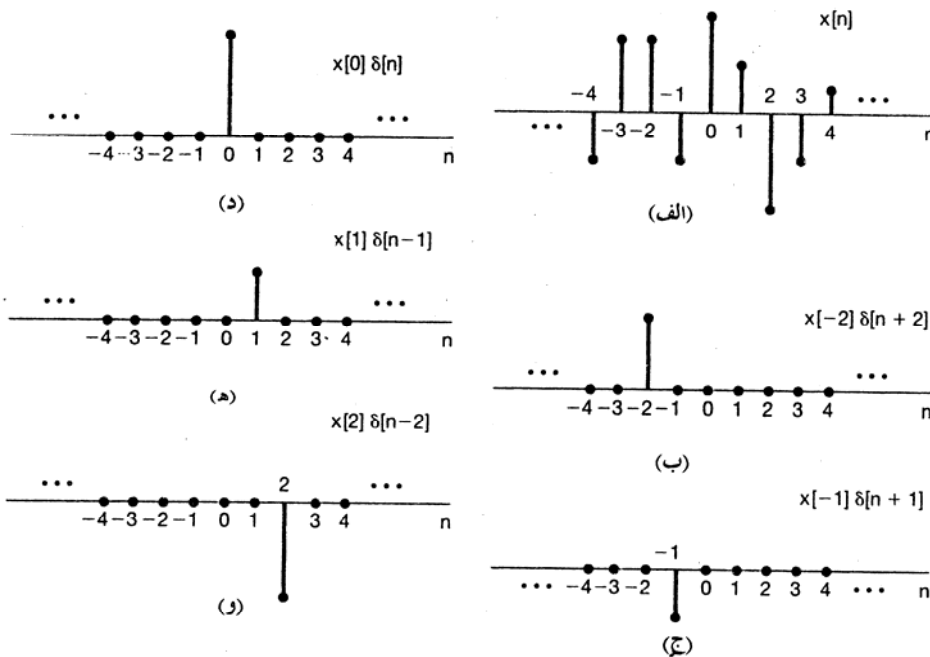
معادله فوق نمایش یک دنباله دلخواه به صورت ترکیب خطی ضربه های واحد جابجا شده در زمان یعنی

$\delta[n-k]$ را بیان می کند؛ ضرایب این ترکیب خطی $x[k]$ ها هستند. برای مثال $x[n] = u[n]$ یعنی

پله واحد را در نظر بگیرید. در این حالت چون به ازای $k \leq 0$ ، $x[k] = 0$ و به ازای $k \geq 1$ ، $x[k] = 1$ معادله

(۲-۲) به صورت زیر در می آید

$$u[n] = \sum_{k=1}^{\infty} \delta[n-k]$$



معادله (۲-۲) را خاصیت غربالی ضربه واحد گسسته در زمان می نامند. چون رشته $\delta[n-k]$ تنها به ازای $k = n$ غیر صفر است، جمع سمت راست معادله (۲-۲) رشته $x[n]$ را غربال می کند و تنها مقدار متناظر با $k = n$ را اجازه عبور می دهد. در زیر بخش بعد این نمایش سیگنالهای گسسته در زمان را برای نمایش جمع کانولوشن سیستمهای LTI گسسته در زمان به کار می بریم.

۲-۱-۲ پاسخ ضربه واحد گسسته در زمان و نمایش جمع کانولوشن

سیستمهای LTI گسسته در زمان

اهمیت خاصیت غربالی معادلات (۱-۲) و (۲-۲) در این حقیقت نهفته است که $x[n]$ را به صورت جمع گونه هایی از یک مجموعه تابع مقدماتی بسیار ساده، یعنی ضربه واحد جابجا شده $\delta[n-k]$ که هر کدام تنها در یک نقطه از زمان غیر صفرند، نمایش داد. پاسخ یک سیستم خطی به $x[n]$ مجموع پاسخهای سیستم به هر یک از این ضربه های جابجا شده است. خاصیت تغییر ناپذیری با زمان به ما می گوید که پاسخ یک سیستم LTI به ضربه های واحد جابجا شده گونه های جابجا شده هم هستند. نمایش جمع کانولوشن برای سیستمهای گسسته در زمانی که هم خطی اند و هم تغییر ناپذیر با زمان با کنار هم قرار دادن این دو ویژگی بنیادی نتیجه می شود.

دقیقتر بگوییم، پاسخ یک سیستم خطی (ولی نه لزوماً تغییر ناپذیر با زمان) به ورودی دلخواه $x[n]$ را در نظر بگیرید. می توانیم به کمک معادله (۲-۲) این ورودی را به صورت ترکیبی خطی از ضربه های واحد جابجا شده بنویسیم.

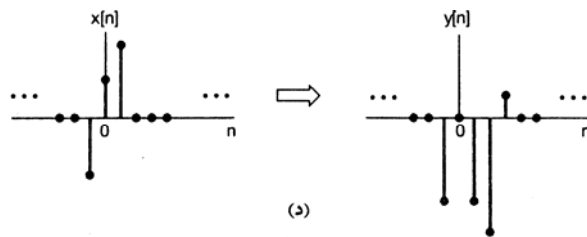
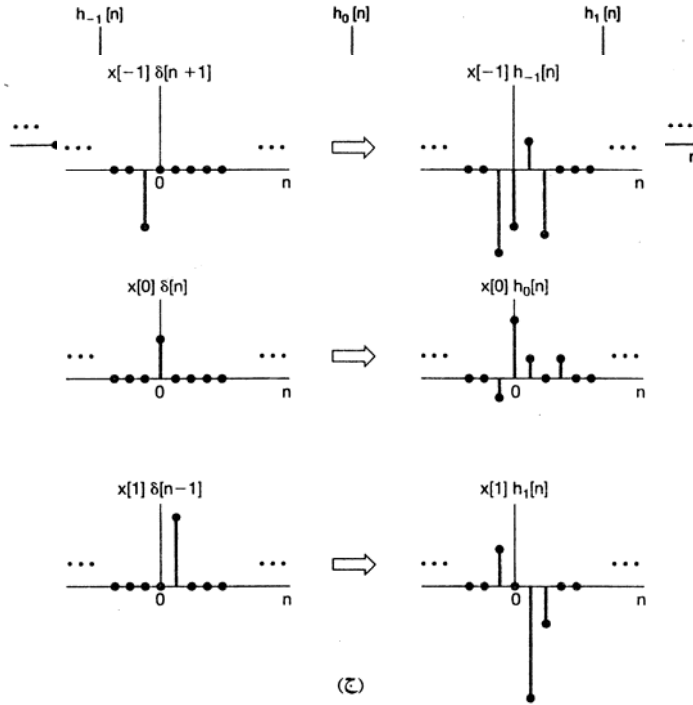
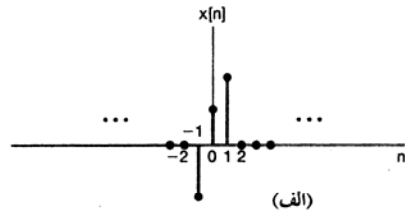
را $h_k[n]$ پاسخ سیستم خطی به ضربه واحد جابجا شده $\delta[n-k]$ فرض کنید. پس با توجه به خاصیت

۲) ترکیب خطی وزندار این پاسخهای پایه ای است. یعنی اگر ورودی $x[n]$ یک سیستم خطی به صورت معادله (۲-۲) بیان شده باشد، خروجی $y[n]$ را می توان به صورت زیر نوشت

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (۳-۲)$$

پس اگر سیستم خطی به مجموعه ای از ضربه های واحد جابجا شده معلوم باشد، می توان طبق معادله (۳-۲) پاسخ این سیستم به هر ورودی دلخواهی را یافت. شکل ۲-۲ تعبیر معادله (۳-۲) را نشان می دهد.

سیگنال $x[n]$ به عنوان ورودی به یک سیستم خطی اعمال شده است و پاسخ این سیستم به ورودیهای $\delta[n+1]$ ، $\delta[n]$ ، و $\delta[n-1]$ ، به ترتیب $h_+[n]$ ، $h[n]$ ، $h_-[n]$ نشان داده شده در شکل ۲-۲ (ب) است. چون $x[n]$ را می توان به صورت ترکیب خطی $\delta[n+1]$ ، $\delta[n]$ ، و $\delta[n-1]$ نوشت، اصل جمع آثار قادرمان می کند پاسخ سیستم به $x[n]$ را به صورت ترکیب خطی پاسخهای سیستم به ضربه های جابجا شده بنویسیم. ضربه های جابجا شده و تغییر مقیاس یافته در سمت چپ شکل ۲-۲ (ج) و پاسخهای سیستم به این ورودیها در سمت راست این شکل تصویر شده است. در شکل ۲-۲ (و) ورودی واقعی $x[n]$ ، که مجموع مولفه های سمت چپ شکل ۲-۲ (ج) است، و خروجی واقعی $y[n]$ که طبق اصل جمع آثار مجموع مولفه های سمت راست ۲-۲ (ج) است، نشان داده شده اند. پس پاسخ یک سیستم خطی در زمان n جمع پاسخهای سیستم به مولفه های ورودی در آن زمان است.



شکل ۲-۲: تغییر ترسیمی پاسخ سیستم خطی گسسته در زمان مطابق با معادله (۲-۳)

خطی تغییر ناپذیر با زمان باشد، پاسخ به ضربه های جابجا شده، همگی یک سیگنال جابجا شده نسبت به هم هستند. یعنی چون $\delta[n-k]$ گونه جابجا شده $\delta[n]$ است، پاسخ $h_k[n]$ نیز گونه جابجا شده $h[n]$ است،

پس

$$h_k[n] = h[n-k] \quad (4-2)$$

برای سهولت نمادگذاری، زیر نویس $h_k[n]$ را حذف و پاسخ ضربه (یا نمونه) واحد را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$h[n] = h_k[n] \quad (5-2)$$

(یعنی $h[n]$ خروجی سیستم LTI به ورودی $\delta[n]$ است). پس معادله (2-3) برای سیستمهای LTI به صورت

زیر در می آید

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (6-2)$$

نتیجه فوق جمع کانولوشن نامیده می شود. عمل طرف راست معادله (2-6) کانولوشن دنباله های $x[n]$ و $h[n]$ نام دارد و آن را با نماد زیر نشان می دهیم

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

توجه کنید که معادله (2-6) پاسخ سیستم LTI به یک ورودی دلخواه را برحسب پاسخ آن سیستم به ضربه واحد بیان می کند. پس می بینیم که یک سیستم LTI با پاسخش به یک سیگنال تنها، یعنی پاسخش به ضربه واحد، به طور کامل مشخص می شود.

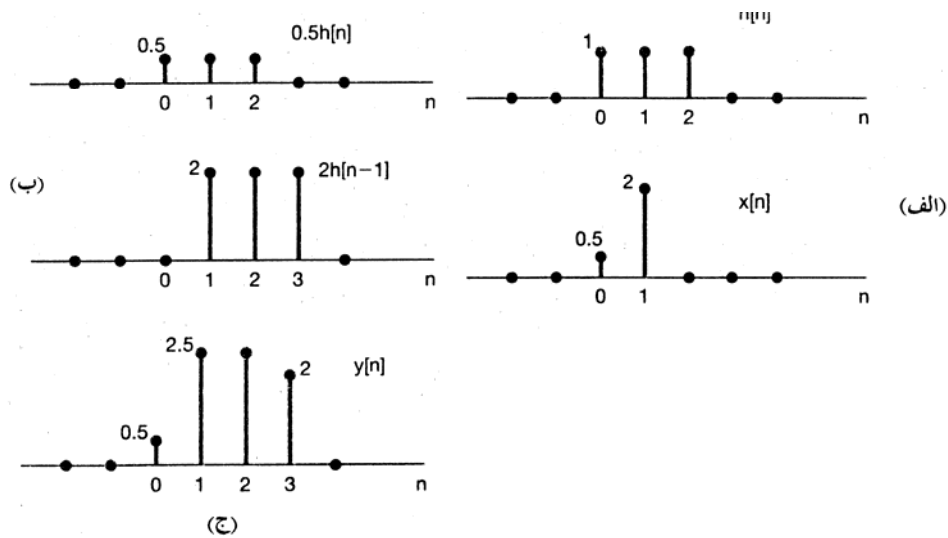
تعبیر معادله (2-6) با تعبیری که برای معادله (2-3) بیان کردیم مشابه است، ولی در مورد سیستم LTI پاسخ ناشی از ورودی $x[k]$ اعمال شده در زمان k برابر $x[k]h[n-k]$ است، که گونه تغییر مقیاس یافته و جابجا شده $h[n]$ می باشد. خروجی واقعی جمع تمام این گونه پاسخهاست.

مثال ۱-۲

یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ و ورودی $x[n]$ نشان داده شده در شکل 2-3 (الف) را در نظر بگیرید. در این مسأله چون تنها $x[0]$ و $x[1]$ مقداری غیر صفر دارند، معادله (2-6) به شکل زیر ساده می شود

$$y[n] = x[0]h[n-0] + x[1]h[n-1] = 1/h[n-0] + 2/h[n-1] \quad (8-2)$$

رشته های $1/h[n-0]$ و $2/h[n-1]$ طنینهایی هستند که برای ایجاد $y[n]$ لازم داریم. این طنینها در شکل 2-3 (ب) نشان داد شده اند. باجمع کردن این دو طنین به ازای مقادیر مختلف n ، شکل 2-3 (ج) رابه دست می آوریم.



شکل ۲-۳: الف) پاسخ ضربه $h[n]$ یک سیستم LTI و ورودی $x[n]$ سیستم؛ ب) پاسخها یا طنینهای $0.5h[n-1]$ و $0.5h[n]$ ، به مقادیر غیر صفر ورودی، یعنی $x[1]=2$ و $x[0]=0.5$ ، ج) پاسخ کل $y[n]$ که با جمع دو طنین (ب) به دست آمده است.

با در نظر گرفتن اثر جمع کانولوشن بر هر پاسخ نمونه، روش بسیار مفید دیگری برای محاسبه $y[n]$ به کمک جمع کانولوشن به دست می آید. محاسبه مقدار خروجی در زمان معین n را در نظر بگیرید. یک روش مناسب برای نمایش محاسبه ترسیمی دو سیگنال $x[n]$ و $h[n-k]$ را به صورت تابعی از k در نظر می گیریم. با ضرب این دو تابع رسته $g[k] = x[k]h[n-k]$ را به دست می آوریم، که به ازای هر مقدار k ، اثر $x[k]$ در به وجود آوردن خروجی در زمان n را نشان می دهد. پس با جمع کردن تمام نمونه های $g[k]$ مقدار خروجی در زمان n به دست می آید. پس برای محاسبه $y[n]$ به ازای تمام مقادیر n باید این فرایند را به ازای تمام مقادیر n تکرار کنیم. خوشبختانه تغییر مقدار n تعبیر ترسیمی ساده ای برای دو سیگنال $x[n]$ و $h[n-k]$ که تابعی از k فرض می شوند، دارد. مثالهای زیر کاربرد این دیدگاه و دیدگاه قبلی در محاسبه انتگرال کانولوشن را نشان می دهد.

مثال ۲-۲

اجازه دهید دوباره مسأله کانولوشن مثال ۲-۱ را در نظر بگیریم. شکل ۲-۴ الف) رسته $x[n]$ را نشان می دهد، و شکل ۲-۴ ب) رسته $h[n-k]$ را به ازای n ثابت و به عنوان تابعی از k ، به ازای چند مقدار متفاوت n نشان می دهد. در رسم این رسته ها این حقیقت رابه کار برده ایم که $h[n-k]$ (به عنوان تابعی از k و n ثابت) پاسخ ضربه $h[k]$ است که وارونه و جابجا شده باشد. با افزایش k آرگومان $n-k$ کم می شود، که نشان می دهد $h[k]$ باید وارونه شود. پس برای رسم سیگنال $h[n-k]$ تنها باید مقدار آن را به ازای یک مقدار معین k تعیین کنیم. مثلاً آرگومان $n-k$ به ازای $n=k$ برابر ۰ است. پس با رسم سیگنال $h[-k]$ می توانیم با جابجا کردن آن

شکل ۲-۴ (ب) این سیگنال را برای مثال فعلی به ازای $n=1, n=2, n=3, n>3$ نشان می دهد .

پس از رسم $x[k]$ و $h[n-k]$ برای مقادیر مشخص n ، دو سیگنال را در هم ضرب می کنیم و روی تمام مقادیر k جمع می بندیم. در مثال فعلی به ازای $n=1, 2, 3, 4$ نشان می دهد به ازای تمام مقادیر k ، $x[k]h[n-k]$ زیرا مقادیر غیر صفر $x[k]$ و $h[n-k]$ همپوشانی ندارند. پس در $n=1, 2, 3, 4$ ، $y[n]$ در $n=0$ ، چون حاصلضرب رشته های $x[k]$ و $h[n-k]$ تنها یک نمونه غیر صفر (با مقدار ۰/۵) دارد، نتیجه می گیریم

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0-k] = 0.5 \quad (9-2)$$

حاصلضرب $x[k]$ و $h[1-k]$ دو مقدار غیر صفر دارد، و با جمع کردن آنها به دست می آوریم

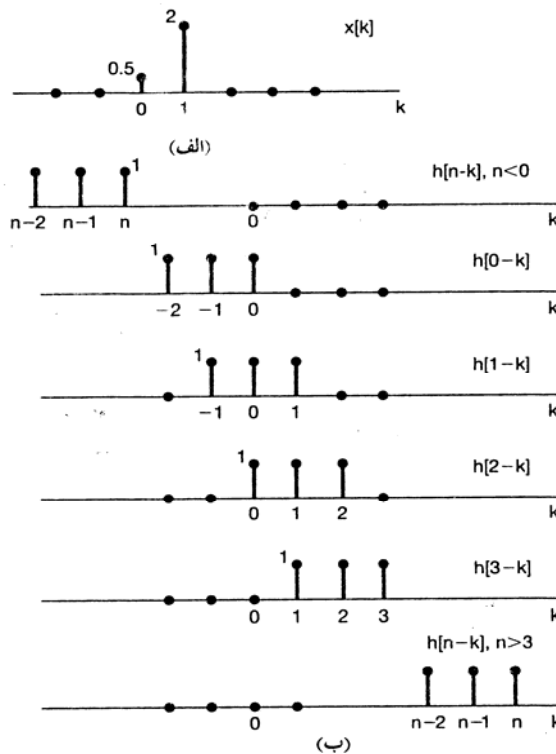
$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1-k] = 0.5 + 1.0 = 1.5 \quad (10-2)$$

به نحوی مشابه

$$y[2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[2-k] = 0.5 + 1.0 = 1.5 \quad (11-2)$$

و

$$y[3] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[3-k] = 1 \quad (12-2)$$



شکل ۲-۴: تعبیر معادله (۲-۶) برای سیگنالهای $x[n]$ و $h[n]$ شکل ۲-۳: (الف) سیگنال $x[n]$ ؛ (ب) سیگنال $h[n]$ (به صورت تابعی از k با n ثابت) به ازای $n=0, 1, 2, 3, n>3$ و این سیگنالها با وارونه و جابجا کردن پاسخ ضربه $h[k]$ به دست آمده اند. برای یافتن $y[n]$ به ازای هر مقدار n سیگنالهای $x[k]$ و $h[n-k]$ (الف) و (ب) را ضرب کرد، مقادیر به دست آمده را روی تمام مقادیر k جمع می بندیم. جزئیات محاسبات در مثال ۲-۲ بیان شده است

۳، $y[n] = \dots$. مقادیر خروجی به دست آمده با خروجی به دست آمده در مثال ۲-۱ یکسان است .

مثال ۲-۳

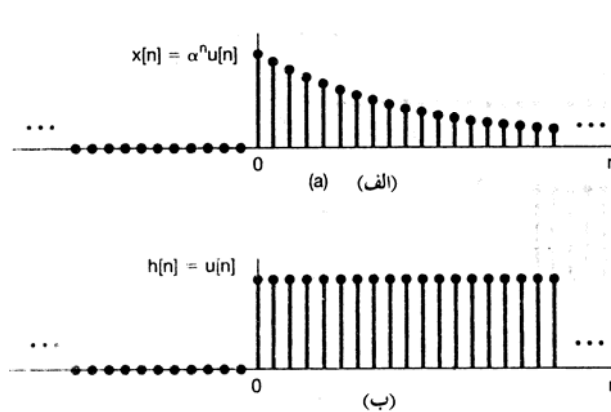
ورودی $x[n]$ و پاسخ ضربه واحد $h[n]$ زیر را در نظر بگیرید

$$x[n] = \alpha^n u[n]$$

$$h[n] = u[n]$$

که در آنها $0 < \alpha < 1$. شکل ۲-۵ این سیگنالها را نشان می دهد . همچنین برای ساده شدن تجسم و محاسبه کانولوشن سیگنالها ، در شکل ۲-۶ سیگنالهای $x[k]$ ، $x[-k]$ ، $h[n-k]$ ، $h[-n-k]$ (یعنی $h[n-k]$ به ازای $n=0$ ، $n=-1$ ، $n=1$) ، سرانجام $h[n-k]$ به ازای یک n مثبت دلخواه و یک n منفی دلخواه نشان داده شده است . با توجه به این شکل می بینیم که در $n \leq 0$ مقادیر غیر صفر $x[k]$ ، $h[n-k]$ روی هم نمی افتند . پس برای $n \leq 0$ ، به ازای تمام مقادیر k داریم $h[n-k] = 0$ و با توجه به معادله (۲-۶) در $n \leq 0$ ، $y[n] = 0$.

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^k , & 0 \leq k \leq n \\ 0 , & \text{else} \end{cases}$$

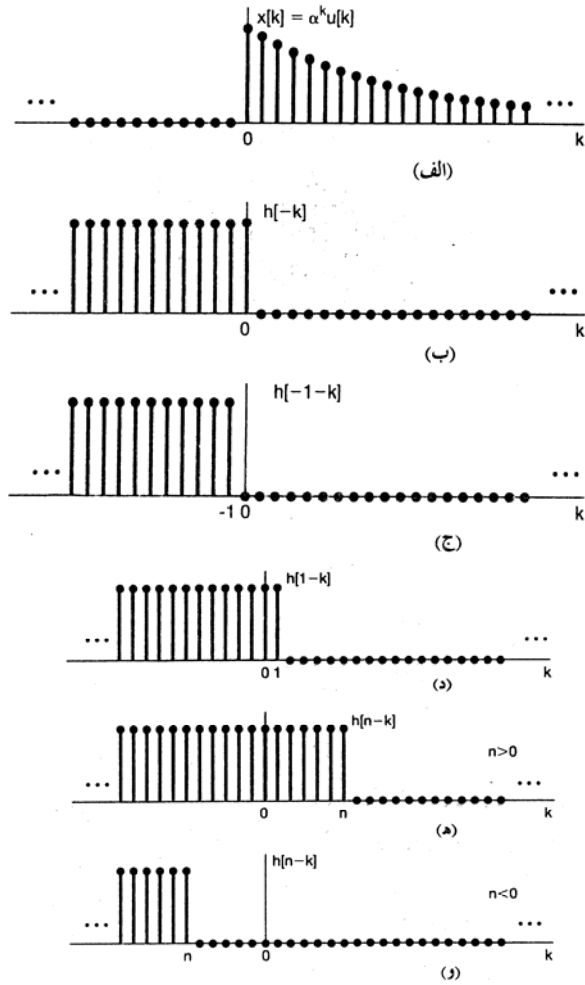


پس برای $n \geq 0$ داریم

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^k$$

به کمک نتیجه مسأله ۱-۵۴ می توان نوشت

$$n \geq 0 , y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} , n \geq 0 \quad (2-13)$$



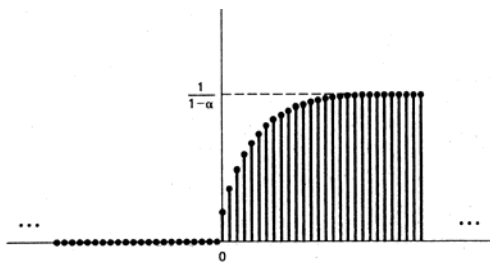
شکل ۶-۲ تعبیر ترسیمی محاسبه جمع کانولوشن مثال ۲-۳

پس $y[n]$ برای تمام مقادیر n به صورت زیر است

$$y[n] = \left(\frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \right) u[n]$$

که در شکل ۷-۲ نشان داده شده است .

$$y[n] = \left(\frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \right) u[n]$$



شکل ۷-۲: خروجی مثال ۲-۳

به ازای مقدار مشخصی چون $n = n_1$ حساب کرده ایم. یعنی سیگنال $h[n, -k]$ را در سیگنال $x[n]$ ضرب کرده، نتیجه را روی تمام مقادیر k جمع بسته ایم. برای محاسبه $y[n]$ به ازای مقدار بعدی n ، یعنی در $n = n_1 + 1$ ، باید $h[(n_1 + 1) - k]$ را رسم کنیم. به این منظور می توانیم سیگنال $h[n, -k]$ را یک واحد به سمت راست جابجا کنیم. به ازای مقادیر متوالی n باید این فرآیند جابجایی به سمت راست، ضرب در $x[k]$ و جمع بستن روی تمام مقادیر k را ادامه دهیم.

مثال ۲-۴

دو سیگنال زیر را به عنوان مثالی دیگر در نظر بگیرید

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

و

$$h[n] = \begin{cases} \alpha^n, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

این سیگنالها در شکل ۲-۸، به ازای $\alpha > 1$ نشان داده شده اند. در محاسبه کانولوشن این دو سیگنال بهترینست پنجم فاصله مجزا را بررسی کنیم. این کار در شکل ۲-۹ انجام شده است.

فاصله ۱. در $n \leq 0$ قسمتهای غیر صفر $x[k]$ و $h[n - k]$ همپوشانی ندارند، و در نتیجه $y[n] = 0$.

فاصله ۲. در فاصله $0 \leq n \leq 4$

$$x[n]h[n - k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

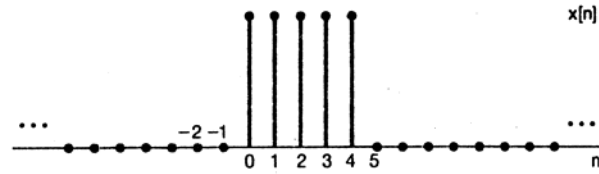
پس در این فاصله داریم

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^{n-k} \quad (2-14)$$

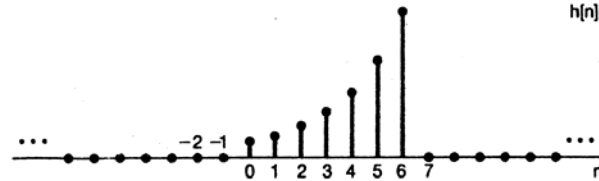
برای محاسبه این جمع می توانیم فرمول جمع محدود، معادله (۲-۱۳) را به کار ببریم. به این منظور متغیر جمع

معادله (۲-۱۴) را از k به $r = n - k$ تغییر داده، به دست می آوریم

$$y[n] = \sum_{r=0}^n \alpha^r = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

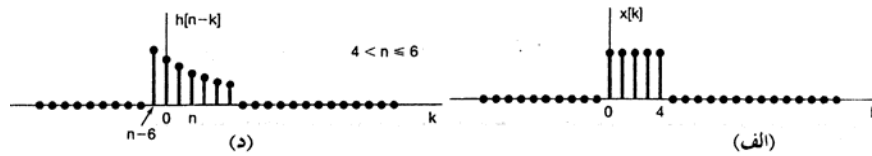


(الف)



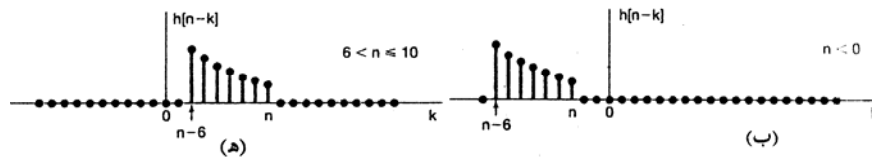
(ب)

شکل ۲-۸: سیگنال هایی که کانولوشن آنها در مثال ۲-۴ حساب شده است.



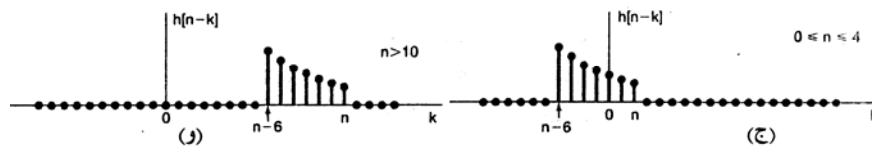
(د)

(الف)



(ه)

(ب)



(ج)

(د)

شکل ۲-۹: تغییر ترسیمی کانولوشن انجام شده در مثال ۲-۴

فاصله ۳. در $n > 4$ و $n - 6 \leq 0$ (یعنی $4 \leq n \leq 6$)

$$x[n]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 1 \leq k \leq 4 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

پس در این فاصله داریم

$$y[n] = \sum_{k=1}^4 \alpha^{n-k} \quad (15-2)$$

باز هم می توانیم فرمول جمع هندسی معادله (۲-۱۳) را برای محاسبه (۲-۱۵) به کار ببریم

با فاکتورگیری از α^{n-k} جمع معادله (۲-۱۵) به دست می آوریم

$$y[n] = \alpha^n \sum_{k=1}^4 (\alpha^{-1})^k = \alpha^n \frac{1-\alpha^{-4}}{1-\alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{n-3}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \quad (16-2)$$

$$x[n]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & n-p \leq k \leq p \\ , & \text{else} \end{cases}$$

پس

$$y[n] = \sum_{k=n-p}^p \alpha^{n-k} \quad (15-2)$$

باز می‌توانیم معادله (۱۳-۲) را برای محاسبه این جمع به کار ببریم. با تغییر متغیر $r = k - n + p$ به دست می‌آوریم

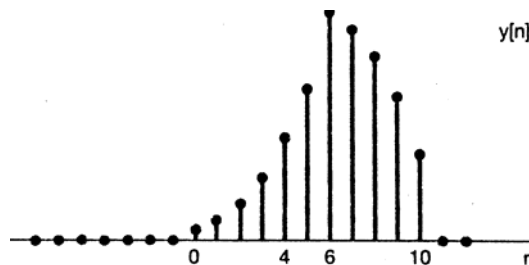
$$y[n] = \sum_{r=n}^{n-p} \alpha^{n-r} = \alpha^n \sum_{r=n}^{n-p} (\alpha^{-1})^r = \alpha^n \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{n-p} - \alpha^n}{1 - \alpha}$$

فاصله ۵. برای $n-p \gg p$ ، یا $n > 10$ ، قسمت‌های غیر صفر $x[n]$ و $h[n-k]$ روی هم نمی‌افتند، پس

خلاصه نتایج به دست آمده به شرح زیرست

$$y[n] = \begin{cases} , & n \ll -1 \\ \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}, & -1 \leq n \leq p \\ \frac{\alpha^{n-p} - \alpha^{n+1}}{\alpha^{n-p} - \alpha^{n+1}}, & p \leq n \leq p \\ \frac{1 - \alpha}{\alpha^{n-p} - \alpha^n}, & p \leq n \leq 10 \\ , & n \gg 10 \end{cases}$$

که در شکل ۱۰-۲ نشان داده شده است.



شکل ۱۰-۲: نتیجه محاسبه کانولوشن مثال ۴-۲.

مثال ۵-۲

یک سیستم LTI با ورودی $x[n]$ و پاسخ ضربه واحد $h[n]$ زیر را در نظر بگیرید:

$$x[n] = r^n u[n] \quad (17-2)$$

$$h[n] = u[n] \quad (18-2)$$

در شکل ۱۱-۲ (الف) رشته‌های $x[n]$ و $h[n-k]$ به صورت تابعی از k رسم شده‌اند. توجه کنید که $x[n]$ در $k \gg n$ صفر و $h[n-k]$ در $k \gg n$ صفرست. همچنین می‌بینیم که رشته $x[n]h[n-k]$ مستقل از مقدار n همواره نمونه‌های غیر صفری روی محور k دارند. به ازای $n \gg 1$ نمونه‌های غیر صفر

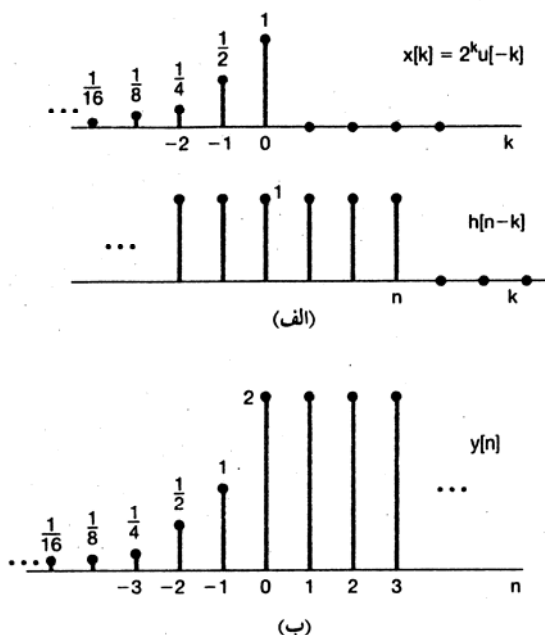
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^k \quad (19-2)$$

برای محاسبه جمع نامحدود معادله (۱۹-۲) می‌توانیم فرمول جمع نامحدود را به کار ببریم

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha} \quad 0 < |\alpha| < 1 \quad (20-2)$$

با تغییر متغیر معادله (۱۹-۲) از k به $r = k$ به دست می‌آوریم

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (r)^k = \frac{1}{1-(r)} = 2 \quad (21-2)$$



شکل ۱۱-۲ (الف) رشته‌های $x[n]$ و $h[n-k]$ برای محاسبه کانولوشن مثال ۲-۵؛ (ب) سیگنال $y[n]$ خروجی

پس $y[n]$ در $n \geq 0$ برابر مقدار ثابت ۲ است.

به ازای $n < 0$ نمونه‌های غیر صفر $x[n]h[n-k]$ در $k \leq n$ قرار دارند. پس در $n < 0$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n r^k \quad (22-2)$$

با تغییر متغیر $l = -k$ و قرار دادن $m = l + n$ می‌توانیم باز هم فرمول جمع نامحدود معادله (۲۰-۲) را

برای محاسبه معادله (۲۲-۲) به کار ببریم. نتیجه عبارت است از

$$y[n] = \sum_{l=-n}^{\infty} (r)^l = \sum_{m=-n}^{\infty} (r)^{m-n} = (r)^{-n} \sum_{m=-n}^{\infty} (r)^m = r^n \times 2 = 2^{n+1} \quad (23-2)$$

در شکل ۱۱-۲ (ب) رسم شده است.

این مثال‌های فایده‌رسم سیگنالها در محاسبه کانولوشن را نشان دادند. جمع کانولوشن علاوه بر این که راه خوبی برای محاسبه پاسخ سیستمهای LTI است، نمایش بسیار مفیدی برای سیستمهای LTI نیز به دست می‌دهد، نمایشی که ما

کرده ، خواصی را که در بخش قبل برای سیستمها معرفی کردیم مطالعه می کنیم تا ببینیم چگونه این خواص را می توان برای مشخص کردن سیستمهای LTI به کار برد .

۲-۲ سیستمهای LTI پیوسته در زمان : انتگرال کانولوشن

به قیاس نتایجی که در بخش قبل به دست آمد و مورد بحث قرار گرفت ، این بخش را به یافتن نمایش کامل یک سیستم LTI پیوسته در زمان بر حسب پاسخ ضربه واحد آن اختصاص داده ایم . در حالت گسسته در زمان کلید دستیابی به جمع کانولوشن خاصیت غربالی ضربه واحد گسسته در زمان، یعنی نمایش ریاضی یک سیگنال به عنوان جمع توابع ضربه واحد جابجا شده و ضریب دار، است. پس می توانیم چنین فرض کنیم که یک سیستم گسسته در زمان به یک ضربه واحد پاسخ می دهد. ولی در حالت پیوسته در زمان یک دسته ورودی مجزا نداریم . ولی چنانچه در بخش ۱-۴-۲ گفتیم ، اگر ضربه واحد را حالت ایده ال پالسی در نظر بگیریم که عمر کوتاهی دارد ، می توانیم سیگنالهای پیوسته در زمان را بر حسب این پالسهای ایده ال دارای طول بسیار کوتاه، یا به عبارت دیگر ضربه ها ، نمایش می دهیم . این نمایش را در زیر بخش بعد به دست می آوریم و به دنبال آن به شیوه ای بسیار شبیه بخش ۲-۱ عمل می کنیم تا نمایش انتگرال کانولوشن سیستمهای LTI پیوسته در زمان را بیابیم .

۲-۲-۱ نمایش سیگنالهای پیوسته در زمان بر حسب ضربه

برای یافتن همتهای پیوسته در زمان غربالی گسسته در زمان معادله (۲-۲) ، از تقریب پالسی یا "پلکانی" $x(t)$ سیگنال پیوسته در زمان $x(t)$ ، به صورت شکل ۲-۱۲ (الف) شروع می کنیم . به روشی مشابه آنچه در حالت گسسته در زمان به کار بردیم می توانیم این تقریب را مطابق شکلهای ۲-۱۲ (الف) تا (ه) به صورت ترکیب خطی پالسهای تأخیر یافته بیان کنیم . با تعریف

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & , 0 \leq t < \Delta \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (2-24)$$

چون اندازه $\delta_{\Delta}(t)$ یک است ، عبارت زیر را به دست می آوریم

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta \quad (2-25)$$

شکل ۲-۱۲ نشان می دهد که همانند حالت گسسته در زمان (معادله (۲-۲)) به ازای هر مقدار t ، دقیقاً تنها یک جمله حاصل جمع طرف راست معادله (۲-۲۵) غیر صفرست.

با میل Δ به صفر ، تقریب $x(t)$ بهتر و بهتر و در حد برابر $x(t)$ می شود . پس

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta \quad (2-26)$$

همچنین به ازای $\Delta \rightarrow 0$ ، جمع معادله (۲-۲۶) به انتگرال میل می کند . با در نظر گرفتن تعبیر ترسیمی این معادله به صورت نشان داده شده در شکل ۲-۱۳ ، می توان درستی این مطلب را مشاهده کرد . در این شکل سیگنالهای $x(t)$ و $\delta_{\Delta}(t - \tau)$ حاصل ضربشان نشان داده شده است . همچنین ناحیه ای سایه زده شده که مساحتش در

شکل ۲-۱۲: تقریب پلکانی یک سیگنال پیوسته در زمان

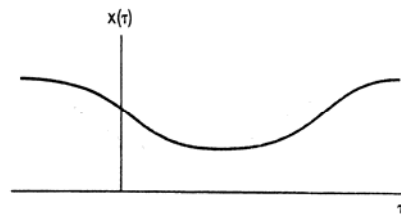
توجه کنید که سطح ناحیه سایه دار در فاصله $t - \Delta \leq m\Delta \leq t$ برابر $x(m\Delta)$ است. همچنین به ازای این t ، تنها جمله $k\Delta =$ جمع معادله (۲-۲۶) غیر صفرست، پس طرف راست معادله هم $x(m\Delta)$ است. با توجه به معادله (۲-۲۶) و بحث فوق نتیجه می گیریم که با میل Δ به صفر، $x(t)$ با مساحت زیر $x(\tau)\delta_\Delta(t-\tau)$ برابر می شود. همچنین با توجه به معادله (۱-۴۷) می دانیم که حد $\delta_\Delta(t)$ به ازای $\Delta \rightarrow 0$ تابع ضربه واحد $\delta(t)$ است. پس

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \quad (۲-۲۷)$$

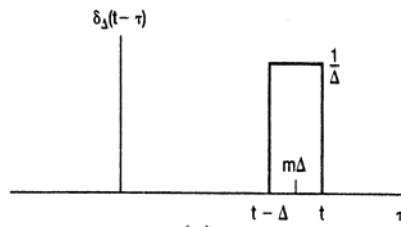
مانند حالت گسسته در زمان، معادله (۲-۲۷) را خاصیت غربالی ضربه پیوسته در زمان می نامیم. برای حالت

خاص $x(\tau) = u(\tau)$ معادله (۲-۲۷) به صورت زیر در می آید

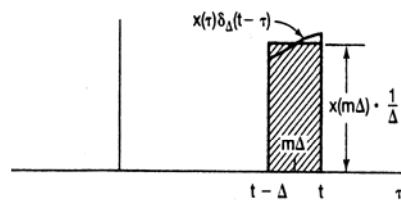
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_0^{+\infty} \delta(t-\tau)d\tau \quad (۲-۲۸)$$



(الف)



(ب)



(ج)

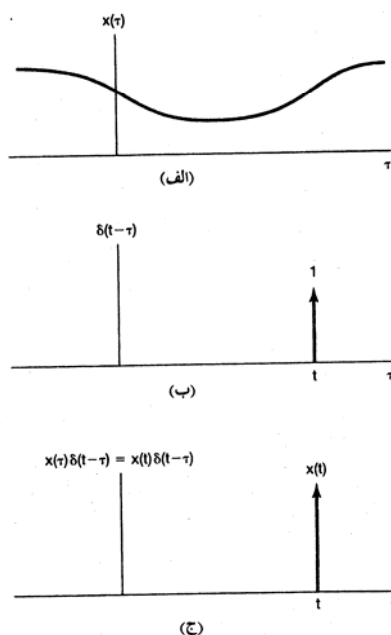
شکل ۲-۱۳: تغییر ترسیمی معادله (۲)-۲

آمده در بخش ۱-۴-۲ است .

باز هم معادله (۲-۲۷) را باید نوعی ایده ال سازی به حساب آورد ، از این حیث که به ازای Δ "به حد کافی کوچک" تقریب $x(t)$ به صورت معادله (۲-۲۵) اساساً برای تمام کاربردهای عملی دقیق است . بنابراین معادله (۲-۲۷) چیزی جز ایده ال کردن معادله (۲-۲۵) ، با میل Δ به صفر نیست . همچنین توجه کنید که معادله (۲-۲۷) را می توان مستقیماً و با استفاده از خواص ضربه واحد بیان شده در بخش ۱-۴-۲ به دست آورد . به این منظور توجه کنید که مطابق شکل ۲-۱۴ (ب) سیگنال $\delta(t - \tau)$ (به عنوان تابعی از t با τ ثابت) ضربه واحدی واقع در $t = \tau$ است. پس همانطور که در شکل ۲-۱۴ (ج) نشان داده شده است، سیگنال $x(\tau)\delta(t - \tau)$ (بازهم به عنوان تابعی از t) با $x(\tau)\delta(t - \tau)$ برابرست (یعنی ضربه ای در $t = \tau$ است که مساحتی برابر مقدار $x(\tau)$ دارد). پس انتگرال این سیگنال از $t = -\infty$ تا $t = +\infty$ با $x(t)$ برابرست ؛ یعنی

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau)d\tau = x(t)$$

گرچه این عبارت را می توان مستقیماً از مطالب بیان شده در بخش ۱-۴-۲ نتیجه گرفت ، ولی روش به کار رفته طی معادلات (۲-۲۴) تا (۲-۲۷) را نیز برای تأکید بر شباهتهای این حالت با حالت گسسته در زمان ، و مخصوصاً تأکید بر تعبیر معادله (۲-۲۷) به عنوان نمایش سیگنال $x(t)$ به صورت یک جمع وزندار ضربه های جابجا شده بیان کردیم .



شکل ۲-۱۴: الف) سیگنال دلخواه $x(t)$ ؛ ب) ضربه $\delta(t - \tau)$ به عنوان تابعی از t با τ ثابت؛

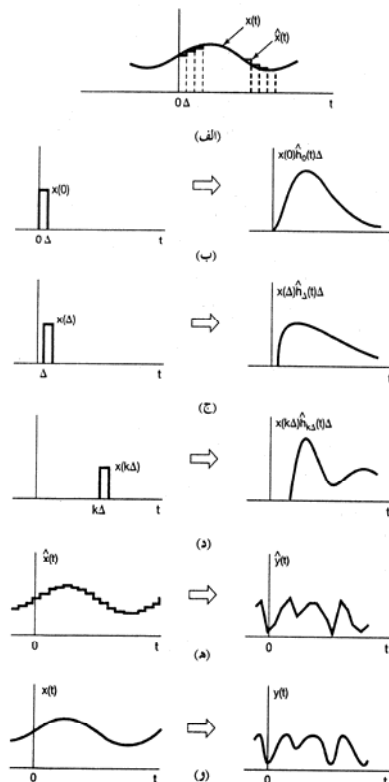
ج) حاصلضرب این دو سیگنال

سیستمهای LTI با انتگرال کانولوشن

نمایش به دست آمده در بخش پیش همانند حالت گسسته در زمان این امکان را به ما می دهد که یک سیگنال پیوسته در زمان دلخواه را به صورت جمع پالسهای جابجا شده ضریب دار در نظر بگیریم. تقریب بیان شده در معادله (۲-۲۵) سیگنال $x(t)$ را به صورت مجموعی از گونه های جابجا شده و ضریب دار سیگنال $\delta_{\Delta}(t)$ نمایش می دهد. پس پاسخ $y(t)$ یک سیستم خطی به این سیگنال جمع پاسخهای سیستم به این $\delta_{\Delta}(t)$ های جابجا شده ضریب دار است. فرض کنید $\hat{h}_{k\Delta}(t)$ پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $\delta_{\Delta}(t - k\Delta)$ است. پس با توجه به معادله (۲-۲۵) و خاصیت جمع آثار سیستمهای خطی تغییر ناپذیر با زمان داریم

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \hat{h}_{k\Delta}(t) \Delta \quad (2-29)$$

معادله (۲-۲۹) تعبیری مشابه معادله (۲-۳) در حالت گسسته در زمان دارد. شکل ۲-۱۵ را که همتای پیوسته در زمان شکل ۲-۲ است، در نظر بگیرید. در شکل ۲-۱۵ (الف) سیگنال ورودی $x(t)$ و تقریب $\hat{x}(t)$ آن، و در شکل های ۲-۱۵ (ب) تا (د) پاسخ سیستم به سه پالس ضریب دار تشکیل دهنده $\hat{x}(t)$ نشان داده شده است. پس خروجی $y(t)$ متناظر با $\hat{x}(t)$ ، چنانچه شکل ۲-۱۵ (ه) نشان می دهد، مجموع تمام این پاسخهاست.



شکل ۲-۱۵: تغییر ترسیمی پاسخ یک

سیستم پیوسته در زمان خطی که در معادلات (۲-۲۹) و (۲-۳۰) شده است.

$x(t)$ تقریب بهتر و بهتری از $x(t)$ می شود، و در $\Delta \rightarrow 0$ این دو یکی می شوند. پس پاسخ به $x(t)$ ، یعنی $y(t)$ معادله (۲-۲۹) نیز باید، چنانچه در شکل ۲-۱۵ (و) نشان داده شده است به $y(t)$ ، پاسخ سیستم به ورودی واقعی $x(t)$ همگرا می شود. به علاوه همانطور که گفتیم به ازای Δ "به حد کافی کوچک" طول پالس $\delta_{\Delta}(t - k\Delta)$ دیگر چندان مهم نیست، از این نظر که پاسخ سیستم به این پالس، اساساً با پاسخ سیستم به ضربه واحدی در همین زمان برابرست. یعنی چون پالس $\delta_{\Delta}(t - k\Delta)$ به ازای $\Delta \rightarrow 0$ با یک ضربه واحد جایجا شده متناظرست، پاسخ $\tilde{h}_{k\Delta}(t)$ به این پالس، در حد به پاسخ ضربه می گراید. پس اگر $h_T(t)$ پاسخ سیستم به ضربه $\delta(t - \tau)$ باشد، آنگاه

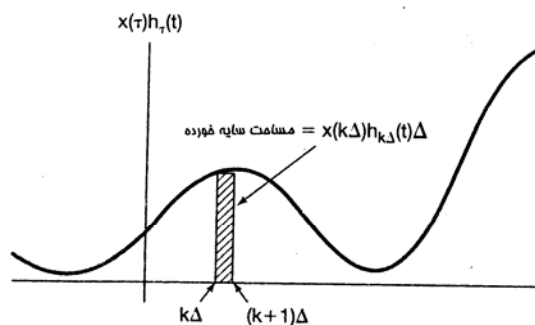
$$y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) h_{k\Delta}(t) \Delta \quad (۲-۳۰)$$

به ازای $\Delta \rightarrow 0$ ، چنانچه شکل ۲-۱۶ نشان می دهد جمع سمت راست به یک انتگرال تبدیل می شود. در شکل ۲-۱۶ مستطیل سایه دار یکی از جملات جمع سمت راست معادله (۲-۳۰) را نشان می دهد، و به ازای $\Delta \rightarrow 0$ این جمع به مساحت زیر $x(\tau) h_T(t)$ ، به عنوان تابعی از τ میل می کند. بنابراین

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h_T(t) d\tau \quad (۲-۳۱)$$

معادله (۲-۳۱) تعبیری همانند تعبیر معادله (۲-۲۹) دارد. چنانچه در بخش ۲-۲-۱ نشان داده شد، هر ورودی $x(t)$ را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$



شکل ۲-۱۶: تغییر ترمیمی معادلات (۲-۳۰) و (۲-۳۱)

معادله (۲-۳۱) با این تعبیر مجموع پاسخهای سیستم به این ورودیهاست، و طبق اصل خطی بودن وزن پاسخ $h_T(t)$ به ضربه جابجا شده $\delta(t - \tau)$ نیز باید $x(\tau) dt$ باشد.

معادله (۲-۳۱) شکل کلی پاسخ یک سیستم خطی پیوسته در زمان را نشان می دهد. اگر سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان هم باشد، داریم $h_T(t) = h_s(t - \tau)$ ، یعنی پاسخ سیستم LTI به ضربه واحد جابجا شده $\delta(t - \tau)$ ، که به اندازه T ثانیه نسبت به مبدا جابجا شده است، پاسخ سیستم به ضربه واحد $\delta(t)$ است.

که به همان اندازه جابجا شده باشد. باز هم برای سهولت زیرنویس h_s را حذف کرده، $h(t)$ را به عنوان پاسخ ضربه واحد تعریف می کنیم

$$h(t) = h_s(t) \cdot a \gg 0 \quad (۲-۳۲)$$

یعنی $h(t)$ پاسخ به $\delta(t)$ است. در این صورت معادله (۲-۳۱) به شکل زیر در می آید

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (۲-۳۳)$$

معادله (۲-۳۳) را انتگرال کانولوشن یا انتگرال جمع آثار می نامند و همتای پیوسته در زمان جمع کانولوشن معادله (۲-۶) است. این معادله یک سیستم LTI پیوسته در زمان را برحسب پاسخ آن به ضربه واحد نمایش می دهد.

کانولوشن سیگنالهای $x(t)$ و $h(t)$ با نماد زیر نشان داده می شود

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (۲-۳۴)$$

برای هر دو کانولوشن پیوسته و گسسته در زمان نماد* را به کار می بریم، ولی معمولاً قرائن کافی برای تفکیک این دو حالت موجودست.

باز هم مانند حالت گسسته در زمان می بینیم که یک سیستم LTI پیوسته در زمان توسط پاسخ ضربه اش به طور کامل مشخص می شود، یعنی در واقع با پاسخش به یک سیگنال ابتدایی به نام ضربه واحد $\delta(t)$ در بخش بعد تبعات این موضوع را بررسی می کنیم و به جستجوی خواص کانولوشن و سیستمهای LTI، در هر دو مورد پیوسته و گسسته در زمان می پردازیم.

روش محاسبه انتگرال کانولوشن بسیارشبه همتای گسسته در زمان آن یعنی جمع کانولوشن است. معادله (۲-۳۲)

نشان می دهد که به ازای هر مقدار t ، خروجی $y(t)$ انتگرال وزنداری از ورودی است، و وزن $x(\tau)$ عبارت است از

$h(t - \tau)$. برای محاسبه این انتگرال در یک مقدار معین t ابتدا $h(t - \tau)$ را (به عنوان تابعی از τ با t ثابت) از

$h(\tau)$ ، با انعکاس حول محور عمودی و جابجایی به اندازه $|t|$ (به سمت راست برای $t > 0$ و به سمت چپ برای

$t < 0$) به دست می آوریم. سپس سیگنالهای $x(t)$ و $h(t - \tau)$ را در هم ضرب می کنیم و با انتگرالگیری از

حاصل ضرب از $t = -\infty$ تا $t = +\infty$ مقدار $y(t)$ را می یابیم. برای نشان دادن چگونگی محاسبه انتگرال

کانولوشن چند مثال می زنیم.

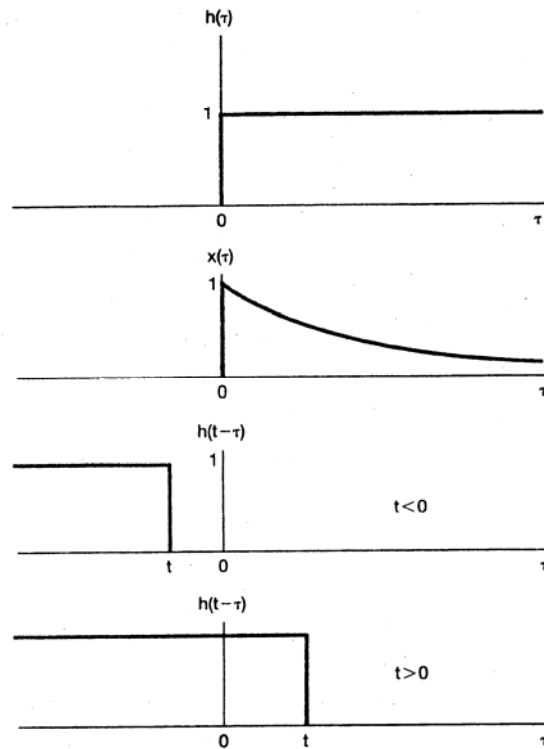
فرض کنید $x(t)$ ورودی یک سیستم LTI دارای پاسخ ضربه $h(t)$ است، و

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

$$h(t) = u(t)$$

در شکل ۱۷-۲ توابع $x(\tau)$ ، $h(\tau)$ ، و $h(t-\tau)$ به ازای یک مقدار منفی t و یک مقدار مثبت t رسم شده اند. با توجه به این شکل می بینیم که به ازای $t \leq 0$ حاصل ضرب، $x(\tau)h(t-\tau)$ و $x(t)$ صفر و در نتیجه $y(t)$ هم صفرست. به ازای $t > 0$

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-a\tau} & , \quad 0 \leq \tau \leq t \\ 0 & , \quad \text{else} \end{cases} \quad (۴۴-۵)$$



شکل ۱۷-۲ محاسبه انتگرال کانولوشن مثال ۲-۶.

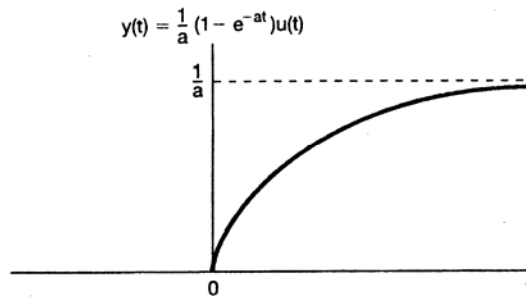
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} d\tau = -\frac{1}{a} e^{-at} \Big|_{-\infty}^t$$

$$= \frac{1}{a} (1 - e^{-at})$$

پس $y(t)$ به ازای تمام مقادیر t عبارت است از

$$y(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at}) u(t)$$

و در شکل ۱۸-۲ رسم شده است .



شکل ۱۸-۲: پاسخ سیستم های مثال ۶-۲ پاسخ ضربه $h(t) = u(t)$ ورودی $x(t) = e^{-at} u(t)$

مثال ۷-۲

کانولوشن دوسیگنال زیر را در نظر بگیرید

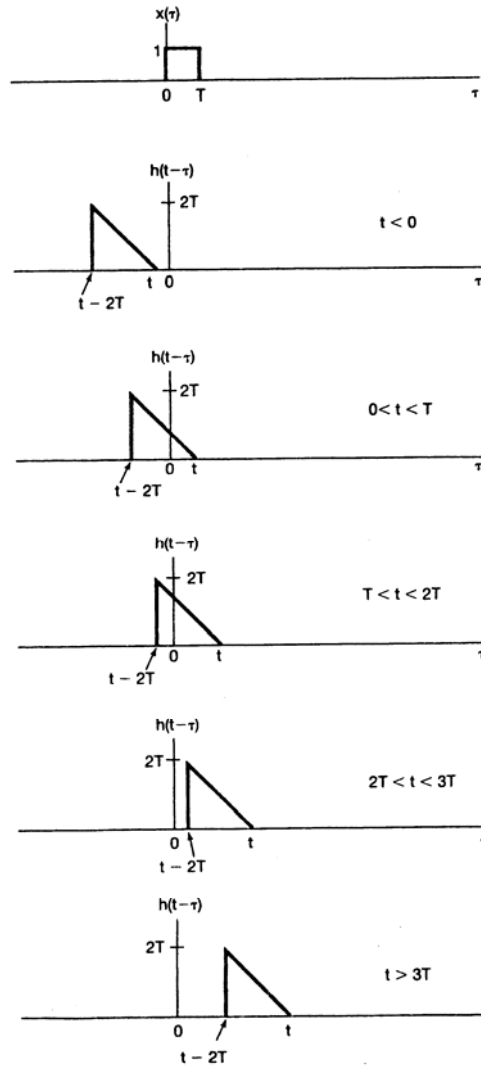
$$x(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \tau \leq T \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$h(\tau) = \begin{cases} \tau, & 0 \leq \tau \leq T \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

در اینجا هم مانند مثال ۴-۲ کانولوشن گسسته در زمان ، بهترست برای محاسبه $y(t)$ فاصله های مجزایی در نظر

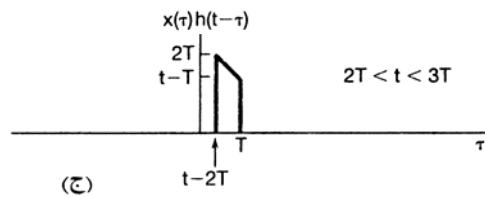
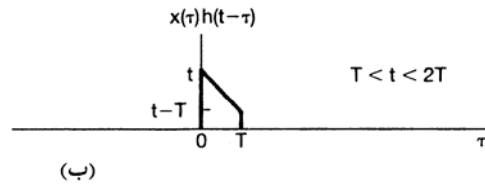
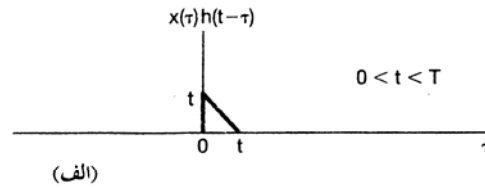
بگیریم . شکل ۱۹-۲ و $x(\tau)$ و $h(t - \tau)$ را در فاصله های مورد نظر نشان می دهد . در $t \leq 0$

و $t > T$ داریم



شکل ۲-۱۹: سیگنال $x(\tau)$ و سیگنال $h(t-\tau)$ مثال ۲-۷ به ازای چند مقدار مختلف t

در $t \leq 0$ و $t \geq 3T$ داریم $x(\tau)h(t-\tau) = 0$ ، و در نتیجه $y(t) = 0$. حاصلضرب $x(\tau)h(t-\tau)$ در فواصل دیگر مطابق شکل ۲-۲۰ است.

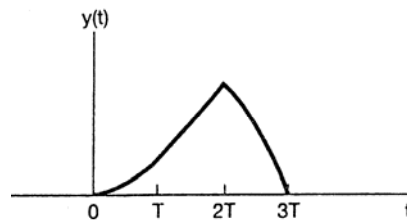


شکل ۲-۲۰: حاصلضرب $x(\tau)h(t-\tau)$ مثال ۲-۷ به ازای t واقع در سه گستره ای که در آنها این حاصلضرب متحد یا صفر نیست (شکل ۲-۱۹ را ببینید).

در سه فاصله مشخص شده می توان انتگرال را به صورت ترسیمی محاسبه کرد ، و نتیجه عبارت است از

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}t^2 & , 0 \leq t \leq T \\ Tt - \frac{1}{T}T^2 & , T \leq t \leq 2T \\ -\frac{1}{T}t^2 + Tt + \frac{1}{T}T^2 & , 2T \leq t \leq 3T \end{cases}$$

که در شکل ۲-۲۱ نشان داده شده است .



شکل ۲-۲۱: سیگنال $y(t) = x(t) * h(t)$ مثال ۲-۷

فرض کنید $y(t)$ کانولوشن دو سیگنال زیرست :

$$x(t) = e^{2t} u(-t) \quad (۳۵-۲)$$

$$y(t) = u(t-3) \quad (۳۶-۲)$$

شکل ۲۲-۲ (الف) سیگنالهای $x(t)$ و $h(t-\tau)$ را به عنوان تابعی از τ نشان می دهد. ابتدا توجه کنید که این دو سیگنال همیشه ناحیه همپوشانی غیر صفر دارند ، مستقل از این که t چه باشد . به ازای $t-3 \leq \tau$ ، حاصلضرب

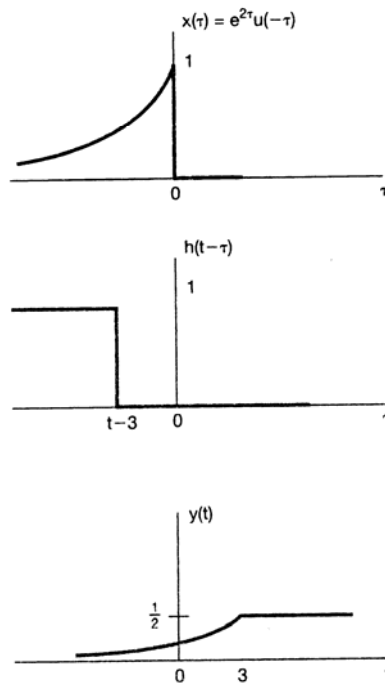
$$x(t) \text{ و } h(t-\tau) \text{ در فاصله } -\infty \leq \tau \leq t-3 \text{ غیر صفرست و انتگرال کانولوشن به شکل زیر در می آید}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-3} e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2} e^{2(t-3)} \quad (۳۷-۲)$$

در $t-3 \geq 0$ حاصلضرب $x(t)$ و $h(t-\tau)$ در $-\infty \leq \tau \leq 0$ غیر صفرست ، بنابراین انتگرال کانولوشن به دست می دهد

$$y(t) = \int_{-\infty}^0 e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2} \quad (۳۸-۲)$$

سیگنال $y(t)$ حاصل در شکل ۲۲-۲ (ب) نشان داده شده است .



شکل ۲۲-۲: مساله کانولوشن مثال ۸-۲

چنانچه این مثالها و مثالهای بخش ۲-۱ نشان دادند ، تعبیر ترسیمی کانولوشن پیوسته و گسسته در زمان ارزش زیادی در تجسم محاسبات مربوط به کانولوشن دارد .

در دو بخش پیش نمایشهای بسیار مهم سیستمهای LTI گسسته و پیوسته در زمان را ، برحسب پاسخ ضربه شان، پی ریختیم. در حالت گسسته این نمایش به صورت جمع کانولوشن و در حالت پیوسته به صورت انتگرال کانولوشن بود، در اینجا هر دو را برای سهولت مراجعه تکرار می کنیم

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n] \quad (39-2)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t) \quad (40-2)$$

همانطور که قبلاً اشاره کردیم ، یکی از نتایج این نمایشها این است که پاسخ ضربه یک سیستم LTI آن سیستم را به طور کامل مشخص می کند . تأکید بر این نکته مهم است که این خاصیت تنها برای سیستمهای LTI برقرارست. در واقع چنانچه در مثال زیر نشان می دهیم، پاسخ ضربه یک سیستم غیرخطی رفتار آن سیستم را به طور کامل مشخص نمی کند.

مثال ۲-۹

یک سیستم گسسته در زمان ، با پاسخ ضربه زیر در نظر بگیرید

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (41-2)$$

اگر سیستم LTI باشد ، معادله (۴۱-۲) رفتار ورودی - خروجی آن را به طور کامل مشخص می کند . در واقع با گذاشتن معادله (۱-۲) در جمع کانولوشن ، معادله (۳۹-۲) ، می توانیم معادله توصیف کننده رفتار ورودی - خروجی این سیستم LTI را به صورت صریح زیر بیابیم :

$$y[n] = x[n] + x[n-1] \quad (42-2)$$

ولی سیستمهای غیرخطی متعددی با همین پاسخ ، معادله (۴۱-۲) ، به ورودی $\delta[n]$ وجود دارند . برای مثال دو سیستم زیر این چنین هستند :

$$y[n] = (x[n] + x[n-1])^2$$

$$y[n] = \max(x[n], x[n-1])$$

پس اگر سیستم غیر خطی باشد پاسخ ضربه معادله (۴۱-۲) نمی تواند آن را به طور کامل مشخص کند . مثال بالا این حقیقت را آشکار می کند که سیستمهای LTI خواصی دارند که دیگر سیستمها فاقد آنها هستند، اولین این خصوصیات نمایش بسیار ویژه آنها برحسب انتگرال و جمع کانولوشن است . در بقیه این بخش بعضی از مهمترین پایه ای ترین این خواص را بررسی می کنیم .

۱-۳-۲ خاصیت جابجایی

یکی از خواص کانولوشن ، چه گسسته در زمان و چه پیوسته در زمان ، خاصیت جابجایی است . یعنی در حالت گسسته در زمان

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \quad (43-2)$$

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau) d\tau \quad (44-2)$$

این عبارتها را می توان با تغییر در معادلات (۲-۳۹) و (۲-۴۰) به راحتی ثابت کرد. برای مثال در حالت گسسته در

زمان اگر قرار دهیم $r = n - k$ ، یا به طور معادل $k = n - r$ ، معادله (۲-۳۹) به صورت زیر در می آید

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-r]h[r] = h[n] * x[n] \quad (45-2)$$

با این تغییر متغیر نقش $h[n]$ و $x[n]$ عوض می شود. طبق معادله (۲-۴۵) پاسخ یک سیستم LTI دارای پاسخ

ضربه $h[n]$ به ورودی $x[n]$ ، مشابه پاسخ یک سیستم LTI دارای پاسخ ضربه $x[n]$ به ورودی $h[n]$ است.

مثلاً برای محاسبه کانولوشن مثال ۲-۴ می توانیم $x[k]$ را وارونه و جابجا کنیم، سیگنالهای $x[n-k]$

و $h[k]$ را در هم ضرب کنیم و حاصلضرب را روی تمام مقادیر k جمع ببندیم.

به نحوی مشابه می توانیم (۲-۴۴) را با تغییر متغیر اثبات کنیم، تعبیر این نتیجه نیز مانند تعبیر حالت گسسته در

زمان است: پاسخ یک سیستم LTI دارای پاسخ ضربه $h(t)$ به ورودی $x(t)$ مشابه پاسخ یک سیستم دارای پاسخ

ضربه $x(t)$ به ورودی $h(t)$ است. پس می توانیم کانولوشن مثال ۲-۷ را با وارونه و جابجا کردن $x(t)$ ، ضرب

سیگنالهای $h(t)$ و $x(t-\tau)$ ، و انتگرالگیری از حاصلضرب در $-\infty < \tau < \infty$ بیابیم. در بعضی موارد یکی

از این دو صورت تجسم سیگنالها ساده ترست، ولی همیشه هر دو صورت جواب یکسانی به دست می دهند.

۲-۳-۲ خاصیت توزیع پذیری

یکی دیگر از خاصیت‌های پایه ای کانولوشن خاصیت توزیع پذیری آن است. در واقع کانولوشن روی جمع توزیع پذیر

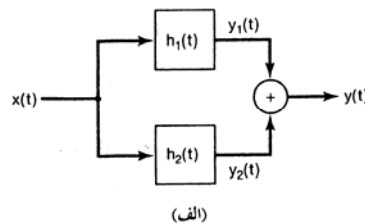
ست، یعنی در حالت گسسته در زمان

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] \quad (46-2)$$

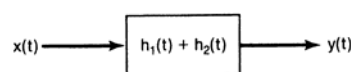
و در حالت پیوسته در زمان

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \quad (47-2)$$

اثبات این خاصیت کاری سر راست است.



(الف)



(ب)

شکل ۲-۲۳: تعبیر خاصیت توزیع پذیری کانولوشن برای سیستم های LTI موازی

مطابق شکل ۲-۲۳ (الف) موازی شده باشند. سیستمهای نشان داده شده به صورت جعبه، سیستمهای LTI هستند و پاسخ ضربه شان داخل جعبه مشخص شده است. این نمایش ترسیمی راه مناسبی برای مشخص کردن سیستمهای LTI در نمودارهای جعبه ای است، و بار دیگر تأکید می کند که پاسخ ضربه یک سیستم LTI به طور کامل رفتار آن سیستم را مشخص می کند.

دو سیستم دارای پاسخ ضربه های $h_1(t)$ و $h_2(t)$ ورودیهای یکسانی دارند، و خروجیهایشان باید با هم جمع شوند. چون

$$y_1(t) = x(t) * h_1(t)$$

و

$$y_2(t) = x(t) * h_2(t)$$

خروجی سیستم شکل ۲-۲۳ (الف) عبارت است از

$$y(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \quad (۴۸-۲)$$

که با طرف راست معادله (۲-۴۷) متناظرست. خروجی سیستم شکل ۲-۲۳ (ب) عبارت است از

$$y(t) = x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] \quad (۴۹-۲)$$

که با طرف چپ معادله (۲-۴۷) متناظرست. با اعمال معادله (۲-۴۷) به معادله (۲-۴۹) و مقایسه نتیجه با معادله (۲-۴۸) در می یابیم که سیستمهای شکلهای ۲-۲۳ (الف) و (ب) هم ارزند.

برای حالت گسسته در زمان نیز تعبیر مشابهی وجود دارد، در این حالت به جای سیگنالهای شکل ۲-۲۳ همتهای گسسته در زمانشان را می گذاریم (یعنی به جای $x(t)$ ، $h_1(t)$ ، $h_2(t)$ ، $y_1(t)$ ، $y_2(t)$ ، و $y(t)$ به ترتیب $x[n]$ ، $h_1[n]$ ، $h_2[n]$ ، $y_1[n]$ ، $y_2[n]$ ، و $y[n]$ را قرار می دهیم). پس به طور خلاصه، به خاطر توزیع پذیر بودن کانولوشن روی جمع می توان به جای ترکیب موازی دو سیستم LTI یک سیستم LTI قرارداد که پاسخ ضربه اش مجموع پاسخ ضربه های سیستمهای موازی شده باشد.

همچنین نتیجه دیگر خواص جابجایی و توزیع پذیری این است که

$$(x_1[n] + x_2[n]) * h[n] = x_1[n] * h[n] + x_2[n] * h[n] \quad (۵۰-۲)$$

و

$$[x_1(t) + x_2(t)] * h(t) = x_1(t) * h(t) + x_2(t) * h(t) \quad (۵۱-۲)$$

که می گوید پاسخ یک سیستم LTI به مجموع دو ورودی باید با مجموع پاسخ به تک تک ورودیها برابر باشد. چنانچه مثال زیر نشان می دهد، می توان با استفاده از توزیع پذیری کانولوشن، محاسبه یک کانولوشن پیچیده را به محاسبات کانولوشن های ساده تر تجزیه کرد.

$y[n]$ را کانولوشن دو رشته زیر در نظر بگیرید

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2^n u[-n] \quad (52-2)$$

$$h[n] = u[n] \quad (53-2)$$

توجه کنید که $x[n]$ در تمام محور زمان غیرصفرست. محاسبه مستقیم چنین کانولوشنی تا حدی طولانی است. ولی می توانیم به کمک خاصیت توزیع پذیری $y[n]$ رابه صورت مجموع دوکانولوشن ساده‌تر بیان کنیم. اگر فرض

$$\text{کنیم } x_1[n] = 2^n u[-n], x_2[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \text{ داریم}$$

$$y[n] = (x_1[n] + x_2[n]) * h[n] \quad (54-2)$$

با استفاده از خاصیت توزیع پذیری می توانیم معادله (54-2) را به صورت زیر در آوریم

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n] \quad (55-2)$$

که در آن

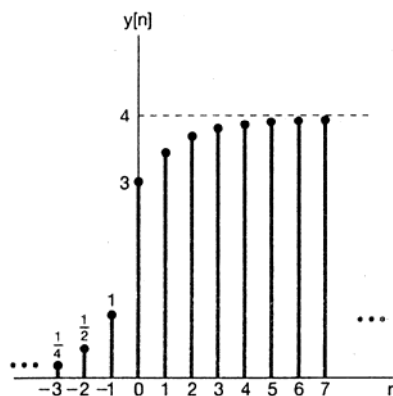
$$y_1[n] = x_1[n] * h[n] \quad (56-2)$$

و

$$y_2[n] = x_2[n] * h[n] \quad (57-2)$$

کانولوشن معادله (56-2) را به کمک مثال ۳-۲ (به ازای $a = \frac{1}{2}$) و $y_2[n]$ را به کمک مثال ۵-۲ به دست می

آوریم. جمع $y_1[n]$ و $y_2[n]$ در شکل ۲۴-۲ نشان داده شده است.



شکل ۲۴-۲: سیگنال $y[n] = x[n] * h[n]$ مثال ۱۰-۲

یک خاصیت مهم و مفید دیگر کانولوشن خاصیت شرکت پذیری است . یعنی در حالت گسسته در زمان

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] \quad (58-2)$$

و در حالت پیوسته در زمان

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) \quad (59-2)$$

با کار بر روی جمع ها و انتگرالهای مربوط به این عبارتها می توان آنها را به سادگی ثابت کرد . مثالهای تأیید کننده این عبارتها در مسأله ۲-۴۳ داده شده است .

به خاطر وجود خاصیت شرکت پذیری عبارتهای زیر خالی از ابهام اند

$$y[n] = x[n] * h_1[n] * h_2[n] \quad (60-2)$$

$$y(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t) \quad (61-2)$$

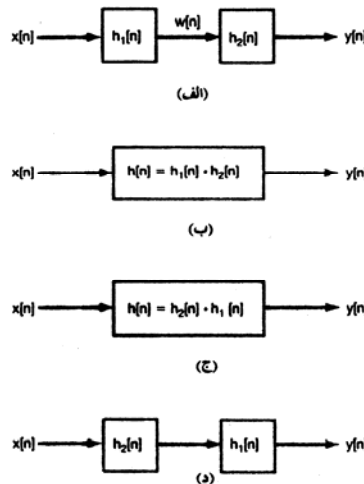
به عبارت دیگر ، طبق معادلات (۵۸-۲) و (۵۹-۲) فرقی نمی کند که کانولوشن این سیگنالها به چه ترتیبی انجام شود. شکلهای ۲-۲۵ (الف) و (ب) تعبیری از خاصیت شرکت پذیری را برای سیستمهای گسسته در زمان نشان می دهند . در شکل ۲-۲۵ (الف) داریم

$$\begin{aligned} y[n] &= w[n] * h_2[n] \\ &= (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] \end{aligned}$$

در شکل ۲-۲۵ (ب) داریم

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) \end{aligned}$$

اتصال سری دو سیستم شکل ۲-۲۵ (الف) ، طبق خاصیت شرکت پذیری ، معادل سیستم شکل ۲-۲۵ (ب) است . این امر را می توان به اتصال سری هر تعدادی سیستم LTI تعمیم داد ، و برای حالت پیوسته در زمان نیز تعبیر و نتیجه مشابهی برقرار است .



شکل ۲-۲۵: خاصیت شرکت پذیری کانولوشن و نتیجه خواص شرکت پذیری و جابجایی برای سیستم های LTI سری

آوریم . شکل‌های ۲-۲۵ (الف) و (ب) نشان می دهند که پاسخ ضربه دو سیستم سری ، با کانولوشن پاسخ ضربه آن دو سیستم برابر ست . چون کانولوشن خاصیت جابجایی دارد ، کانولوشن $h_1[n]$ و $h_2[n]$ را می توان به هر ترتیبی انجام داد . پس شکل‌های ۲-۲۵ (ب) و (ج) هم ارزند ، و طبق خاصیت شرکت پذیری این سیستمها با سیستم شکل ۲-۲۵ (و) نیز ، که همانند شکل ۲-۲۵ (الف) ترکیب سری دو سیستم است ، هم ارزند . پس پاسخ ضربه ترکیب متوالی دو سیستم LTI به ترتیب سیستمها بستگی ندارد . در واقع این امر برای هر تعداد سیستم متوالی شده ای درست است : تا وقتی به پاسخ ضربه سیستم کل علاقمندیم ترتیب اتصال سیستمها مهم نیست . این خاصیت برای حالت پیوسته در زمان نیز برقرارست .

تأکید بر این نکته مهم است که رفتار سیستمهای LTI سری شده ، و خصوصاً استقلال رفتار سیستم کل از ترتیب سیستمهای سری - منحصر به این سیستمهاست . بر عکس در حالت کلی نمی توان جای سیستمهای غیر خطی سری را عوض کرد ، زیرا چنین کاری باعث تغییر پاسخ سیستم کل می شود . برای مثال دو سیستم بی حافظه در نظر بگیرید که یکی ورودی را در ۲ ضرب می کند و دیگری ورودی را مربع می کند . اگر ابتدا ضرب و سپس مربع کنیم داریم

$$y[n] = x[n]^2$$

اگر عمل ضرب بعد از به توان رساندن صورت گیرد ، داریم

$$y[n] = 2x[n]^2$$

پس امکان جابجا کردن ترتیب سیستمهای سری ، منحصر به سیستمهای LTI است . در واقع چنان که در مسأله ۲-۵۱ نشان خواهیم داد ، برای برقراری خاصیت فوق در حالت کلی ، هم خطی بودن لازم است و هم تغییر ناپذیری با زمان .

۲-۳-۴ سیستمهای LTI حافظه دار و بدون حافظه

چنانچه در بخش ۱-۶-۱ گفتیم، سیستمی بدون حافظه است که خروجی اش در هر زمان تنها به مقدار ورودی در آن زمان بستگی داشته باشد . با توجه به معادله (۲-۳۹) تنها راه برقراری این خاصیت برای یک سیستم LTI گسسته در زمان این است که به ازای n داشته باشیم $h[n] = K\delta[n]$. در این صورت پاسخ ضربه به شکل زیرست

$$h[n] = K\delta[n] \quad (۲-۶۲)$$

که $h[0] = K$ مقداری ثابت است ، و جمع کانولوشن به شکل زیر ساده می شود

$$y[n] = Kx[n] \quad (۲-۶۳)$$

اگر پاسخ ضربه یک سیستم گسسته در زمان LTI به ازای n متحد با صفر نباشد ، سیستم حافظه دارد . سیستم بیان شده با معادله (۲-۴۲) نمونه ای از سیستمهای حافظه دارست . پاسخ ضربه این سیستم، که با معادله (۲-۴۱) بیان شده ، به ازای $n = 1$ صفر نیست .

با توجه به معادله (۲-۴۰) می توان خواص مشابهی برای سیستمهای LTI پیوسته در زمان با حافظه و بی حافظه به دست آورد . سیستم پیوسته در زمان LTI به شرطی بدون حافظه است که به ازای t داشته

$$y(t) = Kx(t) \quad (۶۴-۲)$$

که در آن K ثابت است. پاسخ ضربه این سیستم عبارت است از

$$h(t) = K\delta(t) \quad (۶۵-۲)$$

توجه کنید که در معادله های (۶۲-۲) و (۶۵-۲) به ازای $K = ۱$ سیستمهای همانی داریم، یعنی خروجی با ورودی برابر و پاسخ ضربه، ضربه واحدست. در این صورت جمع و انتگرال کانولوشن به صورت زیرند

$$x[n] = x[n] * h[n]$$

$$x(t) = x(t) * h(t)$$

که همان خاصیت غربالی ضربه واحد در حالتهای گسسته در زمان و پیوسته در زمان هستند

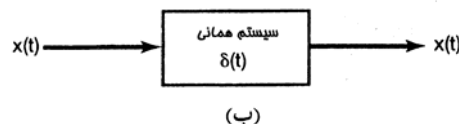
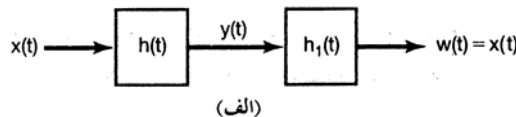
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

۵-۳-۲ وارونپذیری سیستمهای LTI

یک سیستم پیوسته در زمان LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ در نظر بگیرید. براساس مباحث بخش ۱-۶-۲ این سیستم تنها به شرطی وارونپذیرست که برای آن سیستم وارونی وجود داشته باشد که اگر با سیستم اصلی سری شود، خروجی آن با ورودی سیستم اول برابر باشد. به علاوه اگر یک سیستم LTI وارونپذیر باشد، یک سیستم وارون LTI دارد (مسئله ۲-۵۰ را ببینید). پس وضعیت نشان داده شده در شکل ۲-۲۶ را داریم. سیستمی با پاسخ ضربه $h(t)$ داده شده است. سیستم وارون با پاسخ ضربه $h_1(t)$ ، که به $w(t) = x(t)$ منجر می شود، به نحوی است که اتصال سری شکل ۲-۲۶ (الف) با سیستم همانی شکل ۲-۲۶ (ب) هم ارزست. چون پاسخ ضربه سیستم شکل ۲-۲۶ (الف) $h(t) * h_1(t)$ است، برای این که $h_1(t)$ پاسخ ضربه سیستم

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$



سیستم دارای پاسخ ضربه $h(t)$ است به شرطی که داشته باشیم $h(t) * h_1(t) = \delta(t)$ و ارون باشد باید شرط زیر ارضا شود

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t) \quad (۶۶-۲)$$

به طور مشابه ، در حالت گسسته در زمان پاسخ ضربه سیستم و ارون سیستم LTI دارای پاسخ ضربه $h[n]$ ، باید شرط زیر را ارضا کند

$$h[n] * h_1[n] = \delta[n] \quad (۶۷-۲)$$

دو مثال زیر وارونپذیری و یافتن سیستم و ارون را نشان می دهند .

مثال ۲-۱۱

سیستم LTI زیر را ، که یک جابجا کننده زمانی است ، در نظر بگیرید

$$y(t) = x(t - t_0) \quad (۶۸-۲)$$

به ازای $t_0 > 0$ سیستم را تأخیر دهنده و به ازای $t_0 < 0$ آن را جلو برنده می نامند . مثلاً به ازای $t_0 = 2$ ، خروجی در زمان t با مقدار ورودی در زمان $t - 2$ ، که قبل از زمان t است ، برابرست . سیستم معادله (۶۸-۲) به ازای $t_0 = 0$ یک سیستم همانی ، و در نتیجه بی حافظه است . به ازای مقادیر غیر صفر t_0 ، این سیستم حافظه دارد ، و به ورودی سیستم در زمانی غیر از زمان فعلی پاسخ می دهد .

پاسخ ضربه این سیستم را می توان با گذاشتن $\delta(t)$ به جای ورودی معادله (۶۸-۲) به دست آورد

$$h(t) = \delta(t - t_0) \quad (۶۹-۲)$$

بنابراین

$$x(t - t_0) = x(t) * \delta(t - t_0) \quad (۷۰-۲)$$

یعنی کانولوشن یک سیگنال با ضربه جابجا شده فقط سیگنال را جابجا می کند .

برای بازیابی ورودی از خروجی ، یعنی برای وارون کردن سیستم ، تنها باید خروجی را به جای اول برگردانیم . سیستم دارای این جابجایی جبران کننده ، و ارون سیستم اولی است . یعنی اگر داشته باشیم

$$h_1(t) = \delta(t + t_0)$$

آنگاه

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t - t_0) * \delta(t + t_0) = \delta(t)$$

به طور مشابه، پاسخ ضربه یک جابجاکننده زمانی گسسته در زمان به صورت $\delta[n - n_0]$ است. پس کانولوشن یک سیگنال با ضربه جابجا شده به جابجایی آن سیگنال منجر می شود. و ارون یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $\delta[n - n_0]$ ، یک سیستم LTI است که سیگنال را به همان اندازه در جهت عکس جابجا کند. پاسخ ضربه این سیستم $\delta[n + n_0]$ است .

یک سیستم LTI با پاسخ ضربه زیر را در نظر بگیرید

$$h[n] = u[n] \quad (71-2)$$

به کمک جمع کانولوشن می توانیم پاسخ این سیستم به هر ورودی دلخواهی را بیابیم

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]u[n-k] \quad (72-2)$$

چون $u[n-k] = 1$ به ازای $n-k \geq 0$ برابر صفر، و به ازای $n-k < 0$ برابر یک است، معادله (72-2) به این شکل در می آید

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (73-2)$$

این سیستم، که در بخش 1-6-1 برای اولین بار آن را دیدیم (معادله (92-1) را ببینید)، یک جمع کننده یا انباره است که تمام مقادیر ورودی تا لحظه فعلی را با هم جمع می کند. در بخش 2-6-1 دیدیم که این سیستم وارونپذیر است و وارون آن مطابق معادله (99-1) عبارت است از

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \quad (74-2)$$

که عمل تفاضل اول است. با انتخاب $x[n] = \delta[n]$ می توان پاسخ ضربه سیستم وارون را یافت

$$h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1] \quad (75-2)$$

برای امتحان این که $h[n]$ معادله (71-2) و $h_1[n]$ معادله (75-2) پاسخ ضربه های سیستمهای LTI وارون هستند، می توانیم معادله (67-2) را مستقیماً محاسبه کنیم

$$\begin{aligned} h[n] * h_1[n] &= u[n] * \{\delta[n] - \delta[n-1]\} \\ &= u[n] * \delta[n] - u[n] * \delta[n-1] \\ &= u[n] - u[n-1] = \delta[n] \end{aligned} \quad (76-2)$$

2-3-6 علی بودن سیستمهای LTI

خاصیت علی بودن را در بخش 3-6-1 معرفی کردیم: خروجی یک سیستم علی تنها به مقادیر فعلی و قبلی ورودی بستگی دارد. با استفاده از جمع و انتگرال کانولوشن می توانیم این خاصیت را به خاصیت متناظری از پاسخ ضربه سیستمهای LTI مربوط کنیم. برای اینکه یک سیستم LTI گسسته در زمان علی باشد، $y[n]$ نباید به مقادیر $x[k]$ با $k > n$ بستگی داشته باشد. با توجه به معادله (39-2) برای برقراری این شرط باید تمام ضرائب $h[n-k]$ که در $k > n$ ضرب می شوند صفر باشند. ارضای این شرط مستلزم آن است که پاسخ ضربه سیستم LTI علی گسسته در زمان زیر را ارضا کند

$$h[n] = 0 \quad n < 0 \quad (77-2)$$

معادله (77-2) می گوید پاسخ ضربه یک سیستم LTI علی باید قبل از وقوع ضربه صفر باشد، چیزی که با مفهوم

شرط سکون ابتدائی هم ارزست ؛ یعنی اگر ورودی یک سیستم علی تا یک زمان معین صفر باشد ، خروجی نیز باید تا آن زمان صفر باشد . تأکید براین نکته مهم است که استلزام علی بودن و سکون ابتدائی تنها برای سیستمهای خطی درست است . مثلاً چنانچه در بخش ۱-۶-۶ دیدیم ، سیستم

$$y[n] = 2x[n] + 3$$

خطی نیست . ولی این سیستم علی ، در واقع بدون حافظه است . ولی به ازای $x[n] = 0$ ، $y[n] = 3$ ، پس شرط سکون ابتدائی ارضا نمی شود .

برای یک سیستم LTI علی گسسته در زمان، شرط معادله (۲-۷۷) جمع کانولوشن معادله (۲-۳۹) را به صورت زیر در می آورد

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (2-78)$$

همچنین شکل دیگر جمع کانولوشن، یعنی معادله (۲-۴۳) به صورت زیر تبدیل می شود

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (2-79)$$

به نحوی مشابه ، یک سیستم LTI پیوسته در زمان به شرطی علی است که داشته باشیم

$$h(\tau) = 0, \quad \tau < 0 \quad \text{به ازای} \quad (2-80)$$

و در این صورت انتگرال کانولوشن به صورت زیر در می آید

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (2-81)$$

هم انباره $h[n] = u[n]$ و هم وارون آن $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ که در مثال ۲-۱۲ توصیف شدند ، معادله (۲-۷۷) را ارضا می کنند ، بنابراین علی اند . جابجا کننده زمانی ، با $h(\tau) = \delta(\tau - \tau_0)$ به ازای $\tau_0 \geq 0$ ، علی است و به ازای $\tau_0 < 0$ غیر علی (حالت اول با تأخیر و حالت دوم با جلو بردن متناظرست، یعنی حالت دوم با پیش بینی مقادیر آینده ورودی همراه است .)

گر چه علی بودن از خواص سیستمهاست ، ولی معمولاً سیگنالی را که در $n \leq 0$ یا $t \leq 0$ صفر باشد ، سیگنال علی می نامند . علت این نامگذاری با توجه به معادلات (۲-۷۷) و (۲-۸۰) معلوم می شود: یک سیستم LTI به شرطی علی است که پاسخ ضربه اش یک سیگنال علی باشد .

۲-۳-۷ پایداری سیستمهای LTI

از بخش ۱-۶-۴ به یاد دارید که یک سیستم به شرطی پایدارست که هر ورودی کراندار آن، خروجی کراندار ایجاد کند. برای تعیین شرایط پایداری سیستمهای LTI ورودی $x[n]$ را، که اندازه کراندار دارد، در نظر بگیرید

$$n |x[n]| \leq B \quad \text{به ازای تمام مقادیر} \quad (2-82)$$

این ورودی را به یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ اعمال می کنیم . با توجه به جمع کانولوشن عبارت زیر را برای اندازه خروجی به دست می آوریم

چون اندازه مجموع چند عدد کوچکتر یا مساوی مجموع اندازه آن اعداد است ، از معادله (۸۳-۲) نتیجه می گیریم که

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| |x[n-k]| \quad (۸۴-۲)$$

با توجه به معادله (۸۴-۲) ، به ازای تمام مقادیر n و k داریم $|x[n]| \leq B$. از این رابطه و معادله (۸۴-۲) نتیجه می گیریم

$$n|y[n]| \leq B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \quad \text{به ازای تمام مقادیر} \quad (۸۵-۲)$$

پس می توانیم از معادله (۸۵-۲) نتیجه بگیریم که اگر پاسخ ضربه مطلقاً جمع پذیر باشد ، یعنی

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad (۸۶-۲)$$

آنگاه اندازه $y[n]$ کراندار و در نتیجه سیستم پایدار است. پس معادله (۸۶-۲) یک شرط کافی برای تضمین پایداری سیستمهای LTI گسسته در زمان است . در حقیقت این شرط ، شرط لازم هم هست ، زیرا همانطور که در مسأله ۲-۴۹ نشان داده می شود در صورت ارضا نشدن معادله (۸۶-۲) ورودیهای کراندار ، خروجیهای بیکران ایجاد می کنند . پی پایداری یک سیستم LTI گسسته در زمان با معادله (۸۶-۲) کاملاً هم ارزست .

در حالت پیوسته در زمان هم برای پایداری شرط مشابهی بر حسب پاسخ ضربه سیستم LTI به دست می آوریم . یعنی اگر به ازای هر t ، داشته باشیم $|x(t)| \leq B$ ، به قیاس معادلات (۸۳-۲) تا (۸۵-۲) نتیجه می گیریم که

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| |x(t-\tau)| d\tau$$

$$\leq B \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau$$

پس سیستم به شرطی پایدارست که پاسخ ضربه آن مطلقاً انتگرالپذیر باشد ، یعنی اگر

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \quad (۸۷-۲)$$

مانند حالت گسسته در زمان ، اگر معادله (۸۷-۲) ارضا نشود ، ورودی کراندار می تواند خروجی بیکران تولید کند . پس پایداری یک سیستم LTI پیوسته در زمان با معادله (۸۷-۲) هم ارزست . دو مثال زیر کاربرد معادلات (۸۷-۲) و (۸۷-۲) برای بررسی پایداری را نشان می دهند .

سیستمهای جابجا کننده در حالت پیوسته و گسسته در زمان را در نظر بگیرید . برای حالت گسسته در زمان

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\delta[n - n_0]| = 1 \quad (۸۸-۲)$$

و برای حالت پیوسته در زمان

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(\tau - \tau_0)| d\tau = 1 \quad (۸۹-۲)$$

بنابراین نتیجه می گیریم که هر دو سیستم پایدارند . البته جای تعجب نیست چون اگر سیگنالی دامنه کراندار داشته باشد ، جابجا شده آن هم کراندار ست .

حال انباره مثال ۲-۱۲ را در نظر بگیرید. در بخش ۱-۶-۴ گفتیم که این سیستم ناپایدارست، زیرا با اعمال یک ورودی ثابت ، خروجی به طور بیکران افزایش می یابد . پایدار نبودن این سیستم را می توان با توجه به این که پاسخ ضربه آن $h[n]$ مطلقاً جمعپذیر نیست ، نشان داد

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |u[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] = \infty$$

به طور مشابه انتگرال گیر را که همتای پیوسته در زمان انباره است ، در نظر بگیرید

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (۹۰-۲)$$

این سیستم ناپایدارست ، دقیقاً به همان دلیل که انباره ناپایدارست ؛ یعنی به ازای ورودی ثابت خروجی به طور بیکران زیاد می شود . پاسخ ضربه این سیستم را می توان با قرار دادن $x(t) = \delta(t)$ پیدا کرد ، که نتیجه می دهد

$$h(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

و

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(\tau)| d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau = \infty$$

چون پاسخ ضربه مطلقاً انتگرالپذیر نیست ، این سیستم پایدار نیست .

۸-۳-۲ پاسخ پله واحد سیستم LTI

تا اینجا دیدیم که نمایش سیستمهای LTI بر حسب پاسخ ضربه آنها امکان می دهد که عبارتهای بسیار صریحی برای خواص سیستم به دست آوریم . مشخصاً به خاطر این که $h[n]$ یا $h(t)$ رفتار سیستم LTI را به طور کامل مشخص می کند ، توانستیم خواصی مثل پایداری و علی بودن را به ویژگیهای پاسخ ضربه مرتبط کنیم .

سیگنال دیگری هم وجود دارد که آن هم غالباً برای توصیف رفتار سیستمهای LTI به کار می رود : پاسخ پله واحد ، $s[n]$ یا $s(t)$ ، که پاسخ سیستم به ازای $u[n]$ یا $u(t)$ است . مراجعه به پاسخ پله در بعضی اوقات مفیدست ، بنابراین یافتن رابطه آن با پاسخ ضربه به زحمتش می ارزد . با توجه به نمایش جمع کانولوشن پاسخ پله یک سیستم

$$s[n] = u[n] * h[n]$$

ولی با توجه به خاصیت جابجایی کانولوشن داریم $s[n] = h[n] * u[n]$ ، بنابراین $s[n]$ را می توان پاسخ یک سیستم گسسته در زمان LTI با پاسخ ضربه $u[n]$ ، به ورودی $h[n]$ دانست . در مثال ۲-۱۲ دیدیم که $u[n]$ پاسخ ضربه انباره است . پس

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \quad (91-2)$$

از این معادله و مثال ۲-۱۲ چنین بر می آید که $h[n]$ را می توان با استفاده از رابطه زیر از $s[n]$ بازیابی کرد

$$h[n] = s[n-1] - s[n] \quad (92-2)$$

یعنی پاسخ پله سیستمهای LTI گسسته در زمان جمع انباره ای پاسخ ضربه آنهاست (معادله ۲-۹۱) . برعکس ، پاسخ ضربه سیستمهای LTI گسسته در زمان تفاضل اول پاسخ پله آنهاست (معادله ۲-۹۲) .

به نحوی مشابه، در حالت پیوسته در زمان پاسخ پله سیستمهای LTI دارای پاسخ ضربه $h(t)$ عبارت است از $s(t) = u(t) * h(t)$ ، که با پاسخ یک انتگرالگیر [که پاسخ ضربه اش $u(t)$ است] به ورودی $h(t)$ برابرست . یعنی پاسخ پله سیستمهای LTI پیوسته در زمان انتگرالگیر انباره ای پاسخ ضربه آنهاست ، یا

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) \tau d\tau \quad (93-2)$$

با توجه به معادله (۲-۹۳) ، پاسخ ضربه مشتق پاسخ پله^۱ است ، یا

$$h(t) = \frac{d s(t)}{dt} = \dot{s}(t) \quad (94-2)$$

پس در هر دو حالت پیوسته و گسسته در زمان ، پاسخ پله را نیز می توان برای مشخص کردن یک سیستم LTI به کار برد ، زیرا پاسخ ضربه را می توان از آن به دست آورد . در مسأله ۲-۴۵ عباراتی مشابه جمع و انتگرال کانولوشن ، برای نمایش سیستم LTI بر حسب پاسخ پله واحد به دست می آوریم .

۲-۴ سیستمهای علی توصیف شده با معادلات دیفرانسیل و تفاضلی

یک دسته بسیار مهم از سیستمهای پیوسته در زمان سیستمهایی اند که ورودی و خروجی شان توسط یک معادله دیفرانسیل خطی باضرائب ثابت به هم مربوط می شود. این معادلات در توصیف سیستمها و پدیده های فیزیکی بسیار متنوعی به کار می آیند . برای نمونه در فصل ۱ نشان دادیم که پاسخ مدار RC شکل ۱-۱ و حرکت خودرو در اثرورودیهای شتاب دهنده و نیروهای اصطکاکی نشان داده شده در شکل ۱-۲ را می توان با معادلات دیفرانسیل خطی دارای ضرائب ثابت توصیف کرد . در توصیف سیستمهای مکانیکی دارای نیروهای برگرداننده و میراساز ، واکنشهای شیمیایی و بسیاری زمینه های دیگر نیز با این نوع معادلات دیفرانسیل روبرو می شویم .

به نحوی مشابه ، دسته مهمی از سیستمهای گسسته در زمان هم سیستمهایی اند که ورودی و خروجی شان با معادلات تفاضلی خطی با ضرائب ثابت به هم مربوط می شوند . این گونه معادلات برای توصیف رفتار ترتیبی

معادله تفاضلی انجامید، و در مثال ۱-۱۱ چگونگی کاربرد معادلات تفاضلی در شبیه سازی دیجیتالی سیستمهای پیوسته در زمان توصیف شده با معادلات دیفرانسیل را دیدیم. معادلات تفاضلی در مشخص کردن سیستمهای گسسته در زمان طراحی شده برای انجام کارهای مشخص بر روی سیگنال ورودی نیز ظاهر می شوند. مثلاً سیستمی که تفاضل بین ورودیهای متوالی را حساب می کند ، معادله (۱-۹۹) ، و سیستم توصیف شده با معادله (۱-۱۰۴) که مقدار متوسط ورودی در یک فاصله را محاسبه می کند با معادلات تفاضلی توصیف می شوند .

در این کتاب در موارد متعددی سیستمهای توصیف شده با معادلات دیفرانسیل یا تفاضلی خطی با ضرائب ثابت را در نظر می گیریم و بررسی می کنیم. در این بخش ابتدا نگاهی به این سیستمها می اندازیم تا ایده های اصلی حل معادلات دیفرانسیل و تفاضلی را معرفی کرده، برخی خواص سیستمهای توصیف شده با این معادلات را آشکار و بررسی کنیم. در فصلهای بعد ابزارهای جدیدی برای تحلیل سیگنالها و سیستمها پی ریزی می کنیم؛ این ابزارها هم توانایی مان در تحلیل سیستم های توصیف شده با این معادلات را افزایش می دهند و هم درک بهتری از مشخصات و رفتارشان به دست می دهند.

۲-۴-۱ معادلات دیفرانسیل خطی با ضرائب ثابت

برای شروع معرفی مفاهیم مهم مربوط به سیستمهای توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرائب ثابت، معادله دیفرانسیل مرتبه اول (۱-۸۵) را در نظر می گیریم .

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \quad (2-95)$$

که در آن $y(t)$ خروجی و $x(t)$ ورودی سیستم است. مقایسه معادله (۲-۹۵) و معادله دیفرانسیل (۱-۸۴) مربوط به سرعت خودروی در معرض نیروهای اصطکاکی، نشان می دهد که اگر $y(t)$ را سرعت خودرو $v(t)$ بگیریم و $x(t)$ را نیروی اعمال شده به خودرو، و اگر پارامترهای معادله (۱-۸۴) به نحوی باشند که $1/m = 1, b/m = 2$ ، این معادله دقیقاً به آن سیستم مربوط می شود.

یک نکته بسیار مهم در مورد معادلات دیفرانسیلی چون معادله (۲-۹۵) این است که این معادلات سیستم را به طور ضمنی مشخص می کنند. یعنی رابطه بین خروجی و ورودی را بیان می کنند، نه این که خروجی سیستم را به طور صریح به صورت تابعی از ورودی به دست دهند. برای یافتن عبارت صریح باید معادله دیفرانسیل را حل کنیم. برای یافتن جواب اطلاعاتی بیش از آنچه معادله دیفرانسیل تنها در بردارد، نیاز داریم. مثلاً برای تعیین سرعت خودرو در انتهای یک فاصله ۱۰ ثانیه ای، هنگام قرار داشتن در معرض شتاب ثابت $1m/s^2$ به مدت ۱۰ ثانیه، باید بدانیم که سرعت خودرو در ابتدای این فاصله زمانی چه بوده است. به نحوی مشابه اگر بدانیم یک منبع ولتاژ ثابت ۱ ولتی به مدت ۱۰ ثانیه به مدار RC شکل ۱-۱ اعمال شده است، نمی توانیم ولتاژ خازن را در انتهای این فاصله بیابیم، مگر این که ولتاژ اولیه آن را بدانیم .

در حالت کلی برای حل یک معادله دیفرانسیل باید یک چند شرط کمکی مشخص کنیم، و در این صورت می توانیم،

(۹۵-۲) قیدی بر رابطه ورودی و خروجی یک سیستم تحمیل می کند، ولی برای مشخص کردن کامل سیستم باید چند شرط کمکی نیز تعیین کنیم. به ازای شرایط کمکی متفاوت، روابط متفاوتی بین ورودی و خروجی به دست می آید. در اکثر بخشهای این کتاب تاکیدمان بر معادلات دیفرانسیل توصیف کننده سیستمهای LTI علی است. برای روشن کردن این موضوع و پرده برداشتن از خواص اصلی جوابهای معادلات دیفرانسیل، معادله (۹۵-۲) را به ازای یک سیگنال ورودی خاص حل می کنیم .

مثال ۲-۱۴

حل معادله (۹۵-۲) را به ازای سیگنال ورودی زیر بیابید .

$$x(t)Ke^{3t}u(t) \quad (۹۶-۲)$$

K یک عدد حقیقی ثابت است.

جواب کامل معادله (۹۶-۲) مجموع یک جواب خصوصی $y_p(t)$ و یک جواب همگن $y_h(t)$ است؛ یعنی

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) \quad (۹۷-۲)$$

جواب خصوصی معادله (۹۵-۲) را ارضا می کند و $y_h(t)$ جواب معادله دیفرانسیل همگن زیرست

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0 \quad (۹۸-۲)$$

یک روش معمول برای یافتن جواب خصوصی به ازای سیگنال ورودی نمایی معادله (۹۶-۲) این است که به دنبال جواب واداشته بگردیم، یعنی سیگنالی به صورت سیگنال ورودی. باتوجه به معادله (۹۵-۲) چون در $x(t) = Ke^{3t}, t > 0$ جواب زیر را برای $t > 0$ پیشنهاد می کنیم .

$$y_p(t) = Ye^{3t} \quad (۹۹-۲)$$

که در آن Y عددی است که باید تعیین شود. گذاشتن معادله (۹۶-۲) و (۹۹-۲) در معادله (۹۵-۲) به دست می دهد .

$$3Ye^{3t} + 2Ye^{3t} = Ke^{3t} \quad (۱۰۰-۲)$$

با حذف عامل مشترک e^{3t} از دو طرف معادله (۱۰۰-۲) به دست می آوریم

$$3Y + 2Y = K \quad (۱۰۱-۲)$$

یا

$$Y = \frac{K}{5} \quad (۱۰۲-۲)$$

پس

$$y_p(t) = \frac{k}{5}e^{3t} \quad \text{در } t > 0 \quad (۱۰۳-۲)$$

برای تعیین $y_h(t)$ جوابی به شکل زیر پیشنهاد می کنیم

$$y_h(t) = Ae^{st} \quad (۱۰۴-۲)$$

$$Ase^{st} + 2Ae^{st} = Ae^{st}(s+2) = 0 \quad (105-2)$$

با توجه به این معادله باید داشته باشیم $s = -2$, Ae^{2t} به ازای هر مقدار A جواب معادله (۹۸-۲) است. با ترکیب معادلات (۱۰۳-۲) و (۹۷-۲)، جواب معادله دیفرانسیل در $t > 0$ به صورت زیرست

$$y(t) = Ae^{2t} + \frac{k}{5}e^{3t} \quad t > 0 \quad (106-2)$$

همانطور که قبلاً گفتیم معادله دیفرانسیل (۹۵-۲) به تنهایی پاسخ $y(t)$ به ورودی $x(t)$ معادله (۹۶-۲) را به طور یکتا مشخص نمی کند. در واقع ثابت A معادله (۱۰۶-۲) هنوز مجهول است. برای تعیین مقدار A باید علاوه بر معادله دیفرانسیل (۹۵-۲) یک شرط کمکی نیز داشته باشیم. چنانچه در مسئله ۳۴-۲ خواهیم دید به ازای شرایط کمکی مختلف جوابهای $y(t)$ متفاوت، و در نتیجه روابط ورودی-خروجی متفاوتی به دست می آید. همانطور که گفتیم در قسمت عمده ای از این کتاب تأکید بر معادلات دیفرانسیل و تفاضلی توصیف کننده سیستمهای LTI علی است، و در این حالت شرایط کمکی همان شرایط سکون ابتدایی هستند. یعنی همانطور که در مسئله ۴۴-۱ نشان داده شده برای سیستمهای LTI علی، اگر در $t < t_0$ داشته باشیم $x(t) = 0$ ، آنگاه $y(t)$ نیز باید در $t < t_0$ صفر باشد. با توجه به معادله (۹۶-۲) می بینیم که در این مثال $x(t) = 0$ در $t < 0$ صفرست، پس شرط سکون ابتدایی مستلزم آن است که در $t < 0$ داشته باشیم $y(t) = 0$ معادله (۱۰۶-۲) را در $t = 0$ حساب کرده، و با قرار دادن $y(0) = 0$ به دست می آوریم .

$$0 = A + \frac{K}{5}$$

یا

$$A = -\frac{K}{5}$$

پس در $t > 0$

$$y(t) = \frac{k}{5} \{e^{2t} - e^{3t}\} \quad (107-2)$$

و در $t < 0$ و $y(t) = 0$ توسط شرط سکون ابتدایی تعیین می شود. با ترکیب این دو نتیجه جواب کامل زیر را می یابیم .

$$y(t) = \frac{k}{5} \{e^{2t} - e^{3t}\}u(t) \quad (108-2)$$

مثال ۱۴-۲ چند نکته بسیار مهم در مورد معاملات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت، و سیستمهای نمایش داده شده با آنها را نشان می دهد. اول این که پاسخ به ورودی $x(t)$ در حالت کلی مجموع یک جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل و یک جواب همگن، یعنی جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل و یک جواب همگن، یعنی جواب معادله دیفرانسیل به ازای ورودی صفر، است. جواب همگن را غالباً پاسخ طبیعی سیستم می نامند. پاسخهای طبیعی مدارهای الکتریکی و سیستمهای مکانیکی ساده را طی مسائل ۶۱-۲ و ۶۲-۲ مورد بررسی قرار می دهیم .

در مثال ۱۴-۲ دیدیم که برای تعیین رابطه کامل بین ورودی و خروجی یک سیستم توصیف شده با معادله

مسئله ۲-۳۴ نشان داده می شود، انتخابهای مختلف شرایط کمکی به روابط متفاوتی بین ورودی و خروجی منجر می شود. در اکثر موارد شرایط سکون ابتدایی را برای سیستمهای توصیف شده با معادلات دیفرانسیل به کار می بریم. در این مثال چون در $t < 0$ ورودی صفر بود، شرایط سکون ابتدایی شرط اولیه $y(0) = 0$ را ایجاب می کرد. همانطور که گفتیم، و در مسئله ۲-۲۳ نشان می دهیم، با شرط سکون ابتدایی سیستم توصیف شده با معادله (۲-۹۵) LTI و علی است. برای مثال اگر ورودی معادله (۲-۹۶) را در ۲ ضرب کنیم، خروجی حاصل دو برابر خروجی معادله (۲-۱۰۸) خواهد بود.

تأکید بر این نکته مهم است که شرط سکون ابتدایی، یک شرط اولیه صفر در یک زمان معین نیست؛ بلکه این زمان طوری تنظیم می شود که پاسخ تا زمان غیر صفر شدن ورودی صفر بماند. پس اگر برای سیستم LTI علی توصیف شده با معادله (۲-۹۵) در $t \leq t_0$ داشته باشیم $y(t), x(t) = 0$ در $t \leq t_0$ صفرست و برای یافتن جواب در $t > t_0$ باید شرط اولیه $y(t_0) = 0$ را به کار برد. به عنوان مثال فیزیکی، باز هم مدار شکل ۱-۱ را، که در مثال ۱-۸ مورد بحث قرار گفت، در نظر بگیرید. سکون ابتدایی برای این مثال به این معنی است که تا وقتی منبع ولتاژ غیر صفری به این مدار اعمال نشود ولتاژ خازن صفرست. پس اگر ظاهر امروز مدار را به کارگیریم، ولتاژ خازن تا ظهر امروز صفرست. همچنین اگر شروع کار در ظهر فردا باشد، ولتاژ اولیه خازن در ظهر فردا صفر خواهد بود.

این مثال همچنین به ما می گوید که چرا شرط سکون ابتدایی یک سیستم توصیف شده با معادله دیفرانسیل خطی با ضرائب ثابت، باعث تغییر ناپذیری با زمان می شود. اگر بر روی این مدار با شروع از سکون آزمایشی صورت دهیم، به فرض ثابت بودن ضرائب C, R با زمان، انتظار داریم نتایج آزمایش به دوشنبه یا سه شنبه بودن روز آزمایش بستگی نداشته باشد. یعنی اگر آزمایش مشابهی را در دو روز مختلف انجام دهیم و هر دو روز آزمایش را از سکون ابتدایی و در ساعت ۱۲ شروع کنیم، جوابهایی یکسان به دست می آوریم، جوابهایی که نسبت به هم یک روز جابجایی دارند.

گرچه معادله دیفرانسیل مرتبه اول (۲-۹۵) را به عنوان محملی برای مباحث بالا به کار بردیم، ولی می توانیم نتایج را به معادلات دیفرانسیل مرتبه بالا تعمیم دهیم. معادله دیفرانسیل خطی با ضرائب ثابت مرتبه N به صورت زیرست .

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (۲-۱۰۹)$$

مرتبه معادله توسط بالاترین مشتق خروجی $y(t)$ موجود در معادله تعیین می شود. در حالت $N = 0$ معادله (۲-۱۰۹) به صورت زیر ساده می شود

$$y(t) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (۲-۱۱۰)$$

در این حالت $y(t)$ تابعی صریح از ورودی $x(t)$ و مشتقهای آن است. به ازای $N \geq 1$ معادله (۲-۱۰۹) خروجی را به طور ضمنی به ورودی مرتبط می کند. در این تحلیل معادله درست مانند بحث مربوط معادله مرتبه اول مثال ۲-۱۴ دنبال می شود. $y(t)$ دو بخش دارد-جواب خصوصی معادله (۲-۱۰۹) به اضافه یک جواب معادله دیفرانسیل همگن زیر

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} - v \quad (111-1)$$

جواب این معادله را پاسخ طبیعی سیستم می نامند .

مانند حالت مرتبه اول، معادله دیفرانسیل (۲-۱۰۹) خروجی را به طور کامل مشخص نمی کند، و برای این که رابطه ورودی-خروجی سیستم به طور کامل معین شود به شرایط کمکی نیاز داریم. باز هم شرایط کمکی مختلف به روابط ورودی-خروجی متفاوت منجر می شوند، ولی در اغلب بخشهای این کتاب هنگام با سیستمهای توصیف شده با معادلات دیفرانسیل شرایط سکون ابتدایی را به کار می بریم. یعنی اگر در $t \leq t_o$ داشته باشیم $x(t) = 0$ ، فرض می کنیم در $t \leq t_o$ داریم $y(t) = 0$. بنابراین پاسخ در $t > t_o$ به کمک معادله دیفرانسیل (۲-۱۰۹) و شرایط کمکی زیر تعیین می شود .

$$y(t_o) = \frac{dy(t_o)}{dt} = \dots = \frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}} = 0 \quad (112-2)$$

با شرط سکون ابتدایی سیستم توصیف شده با معادله (۲-۱۰۹) علی و Iti است. با داشتن شرایط اولیه بیان شده در معادله (۲-۱۱۲) می توان به لحاظ نظری خروجی $y(t)$ را با حل معادله دیفرانسیل، به صورت انجام شده در مثال ۲-۱۴، به دست آورد؛ چند مسئله آخر فصل این روش را روشنتر می کنند. در فصلهای ۹ و ۴ ابزارهایی برای تحلیل سیستمهای LTI پیوسته در زمان پی می ریزیم که حل معادلات دیفرانسیل را بسیار ساده می کنند، و مخصوصاً روشهای توانمندی برای تحلیل و مشخص کردن ویژگیهای سیستمهای توصیف شده با این معادلات در اختیارمان می گذارند .

۲-۴-۲ معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

همتای گسسته در زمان معادله (۲-۱۰۹)، معادله تفاضلی خطی مرتبه N با ضرایب ثابت زیرست

$$\sum_{k=0}^N a_k y\{n-k\} = \sum_{k=0}^m b_k x\{n-k\} \quad (113-2)$$

این چنین معادلاتی را می توان به روشی دقیقاً مشابه به روش به کار رفته برای معادلات دیفرانسیل، حل کرد (مسئله ۲-۳۲ را ببینید)

جواب این معادله همگن را غالباً پاسخ طبیعی سیستم توصیف شده با معادله (۲-۱۱۳) می نامند .

معادله (۲-۱۱۳)، نیز مانند حالت پیوسته در زمان، خروجی را به طور کامل مشخص نمی کند و برای این منظور چند شرط کمکی لازم است. گرچه شرایط کمکی را می توان به صورتهای مختلفی برگزید، و هر انتخاب به رابطه ورودی-خروجی متفاوتی می انجامد، ولی در اکثر موارد خود را به شرط سکون ابتدای مقید می کنیم؛ یعنی اگر در $n < n_o$ ، $x\{n\} = 0$ ، آنگاه در $n < n_o$ داریم $y\{n\} = 0$ به ازای شرط سکون ابتدایی، سیستم توصیف شده با معادله (۲-۱۱۳) و LTI خطی است.

گرچه این خواص را می توان با همان رهیافت به کار رفته برای معادلات دیفرانسیل ثابت کرد، ولی برای حالت گسسته در زمان یک راه جایگزین دیگر نیز وجود دارد. اساس این راه بازنویسی معادله (۲-۱۱۳) به صورت زیرست

$$y\{n\} = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{K=0}^n v_K x\{n-K\} - \sum_{K=1}^n a_K y\{n-K\} \right\} \quad (115-1)$$

معادله (115-2) خروجی در زمان n را بر حسب مقادیر قبلی ورودی و خروجی بیان می کند. این معادله به وضوح نیاز به شرایط کمکی را نشان می دهد. برای محاسبه $y\{n\}$ باید $y\{n-1\}, \dots, y\{n-N\}$ را بدانیم.

پس اگر ورودی به ازای تمام مقادیر n معلوم بوده، مجموعه ای از شرایط کمکی مثل $y\{-N+1\}, y\{-N\}, y\{-1\}, \dots$ موجود باشد، می توان معادله (115-2) را حل کرد و مقادیر $y\{n\}$ را یافت .

معادلاتی به شکل معادله (113-2) یا (115-2) معادله بازگشتی نام دارند، چون یک روند بازگشتی برای تعیین خروجی از ورودی و مقادیر قبلی خروجی به کار برند. در حالت خاص $N=0$ ، معادله (115-2) به صورت زیر در می آید

$$y[n] = \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{a_0} x[n-k] \quad (116-2)$$

این معادله همتای گسسته در زمان معادله (110-2) است. در این حالت $y\{n\}$ تابع صریحی از مقادیر فعلی و قبلی ورودی است. به همین خاطر معادله (116-2) معادله غیر بازگشتی نامیده می شود، چون برای محاسبه مقدار فعلی خروجی رجوع به مقادیر قبلی خروجی ضروری نیست. بنابراین، درست مثل سیستم توصیف شده با معادله (110-2)، برای تعیین $y\{n\}$ به شرایط کمکی نیاز نداریم. به علاوه معادله (116-2) یک سیستم LTI را توصیف می کند، و پاسخ ضربه آن به صورت زیر به دست می آید .

$$h\{n\} = \begin{cases} \frac{b_k}{a_0}, & 0 \leq n \leq m \\ 0 & \end{cases} \quad (117-2) \text{ در غیر اینصورت}$$

یعنی معادله (116-2) همان جمع کانولوشن است. به محدود بودن طول پاسخ ضربه این سیستم توجه کنید؛ یعنی پاسخ ضربه تنها در فاصله زمانی محدودی غیرصفرست. به این خاطر مشخص شده با معادله (116-2) غالباً سیستم با پاسخ ضربه محدود FIR نامیده می شود .

گرچه به ازای $N=0$ شرط کمکی لازم نیست ، ولی برای حالت‌های بازگشتی $N=1$ این شرایط لازم اند . برای نشان دادن جواب چنین معادله ای، ویافتن درکی نسبت به رفتار و خواص معادلات تفاضلی بازگشتی مثال ساده زیر را در نظر می گیریم

مثال 2-15

معادله تفاضلی زیر را در نظر بگیرید

$$y\{n\} - \frac{1}{2} y\{n-1\} = x\{n\} \quad (118-2)$$

معادله (118-2) را می توان به شکل زیر هم نوشت

$$y\{n\} = x\{n\} + \frac{1}{2} y\{n-1\} \quad (119-2)$$

که به خوبی نشان می دهد برای محاسبه خروجی $y\{n\}$ مقدار قبلی خروجی $y\{n-1\}$ را لازم داریم .

فرض کنید شرط سکون ابتدایی را تحمیل کرده، ورودی زیر را در نظر می گیریم .

$$x\{n\} = K\sigma\{n\} \quad (120-2)$$

در این حالت چون در $n \leq 1$ داریم $x\{n\} = 0$ ، شرط سکون ابتدایی مستلزم آن است که در $n \leq 1$ داشته باشیم $y\{n\} = 0$ ، به این ترتیب شرط اولیه $y\{-1\} = 0$ به دست می آید. با شروع از این مقدار اولیه می توانیم مقادیر متوالی $y\{n\}$ را در $n \leq 1$ به صورت زیر حساب کنیم .

$$y\{0\} = x\{0\} + \frac{1}{2}y\{-1\} = k \quad (121-2)$$

$$y\{1\} = x\{1\} + \frac{1}{2}y\{0\} = \frac{1}{2}k \quad (122-2)$$

$$y\{2\} = x\{2\} + \frac{1}{2}y\{1\} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 k \quad (123-2)$$

$$y\{n\} = x\{n\} + \frac{1}{2}y\{n-1\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n k \quad (124-2)$$

چون سیستم مشخص شده با معادله (2-118) و شرط اولیه سکون ابتدایی یک سیستم LTI است، رفتار ورودی-خروجی آن توسط پاسخ ضربه اش به طور کامل مشخص می شود . با قرار دادن $K = 1$ پاسخ ضربه این سیستم را به صورت زیر می یابیم .

$$h\{n\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n u\{n\} \quad (125-2)$$

توجه کنید که سیستم LTI علی مثال 2-15 پاسخ ضربه ای با طول بی نهایت دارد . در واقع اگر در معادله (2-113) داشته باشیم $n \geq 1$ ، معادله تفاضلی بازگشتی است و معمولاً سیستم LTI متناظر با این معادله و شرط سکون ابتدایی پاسخ ضربه ای با طول بی نهایت دارد . چنین سیستمهایی را معمولاً سیستم با پاسخ ضربه نامحدود IIR می نامند . همانطور که قبلاً گفتیم در اکثر مباحث مربوط به معادلات تفاضلی بازگشتی به توصیف و تحلیل سیستمهای خطی، تغییر ناپذیر با زمان، و علی می پردازیم، بنابراین معمولاً شرط سکون ابتدایی را فرض می کنیم. در فصلهای 5 و 10 ابزارهایی برای تحلیل سیستمهای گسسته در زمان پی می ریزیم که روشهای بسیار مفید و موثری برای حل معادلات تفاضلی خطی با ضرائب و تحلیل خواص سیستمهای LTI توصیف شده با آنها در اختیارمان قرار می دهند .

2-4-3 نمایش جعبه ای سیستمهای LTI مرتبه اول توصیف شده

بامعادلات دیفرانسیل و تفاضلی

یکی از خواص مهم سیستمهای توصیف شده با معادلات دیفرانسیل و تفاضلی خطی با ضرایب ثابت این است که می توان آنها را به شیوه ای بسیار ساده و طبیعی، به صورت نمودارهای جعبه ای حاصل از اتصال عملیات مقدماتی نشان داد. این مطلب به چند دلیل مهم است. یکی این که نمایش تصویری است که می تواند به درک ما از رفتار و خواص این سیستمها بیفزاید. دیگر این که چنین نمایشی برای شبیه سازی و ساختن سیستمها بسیار مفیدست. نمایش نمودار

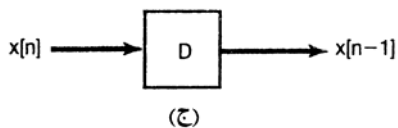
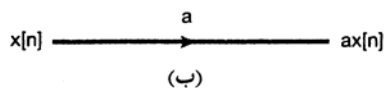
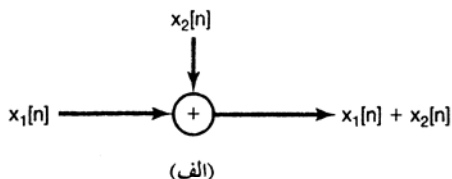
آنالوگ است. همچنین می توان آن را مستقیماً به یک برنامه، برای شبیه سازی کامپیوتر دیجیتال تبدیل کرد. به علاوه نمایش متناظر برای معادلات تفاضلی حالت گسسته در زمان راه ساده ساخت سیستم توصیف شده، به وسیله سخت افزارهای دیجیتالی را نشان می دهد. در این بخش ایده های اصلی نمایش جعبه ای را، با یافتن نمایش جعبه ای سیستمهای مرتبه اول علی معرفی شده در مثالهای ۱-۸ تا ۱-۱۱ معرفی می کنیم. در مسائل ۲-۵۷ تا ۲-۶۰ و فصلهای ۹ و ۱۰ نمودارهای بلوکی سیستمهای توصیف شده با معادلات تفاضلی و دیفرانسیل پیچیده تر را در نظر می گیریم.

از حالت گسسته در زمان و سیستم علی توصیف شده با معادله تفاضلی مرتبه اول زیر شروع می کنیم

$$y\{n\} + ay\{n-1\} = bx\{n\} \quad (۲-۱۲۶)$$

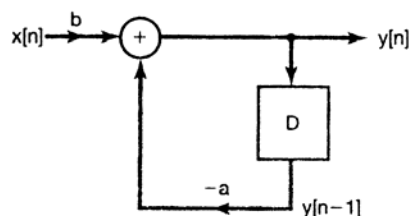
برای یافتن نمایش جعبه ای این سیستم توجه کنید که برای محاسبه معادله (۲-۱۲۶) سه عمل اصلی لازم است: جمع، ضرب در عدد ثابت، و تأخیر (برای دستیابی به رابطه بین $y\{n-1\}$ ، $y\{n\}$) پس سه عنصر پایه ای شکل ۲-۲۷ را تعریف می کنیم. برای این که ببینیم چگونه این سه عنصر می توانند برای نمایش سیستم علی توصیف شده با معادله (۲-۱۲۶) به کار روند، این معادله را به شکلی بازنویسی می کنیم که فرایند بازگشتی محاسبه مقادیر مختلف خروجی را مستقیماً نشان دهد:

$$y\{n\} = -ay\{n-1\} + bx\{n\} \quad (۲-۱۲۷)$$



شکل ۲-۲۷: عناصر اصلی نمایش جعبه ای سیستم علی توصیف شده با معادله ۲-۱۲۶؛ (الف) جمع کننده؛ (ب) ضرب کننده در عدد؛ (ج) تأخیر دهنده

خروجی بایک تأخیر و ضرب در عددی ثابت برگردانده و با $bx\{n\}$ جمع می شود . وجود فیدبک نتیجه مستقیم طبیعت بازگشتی معادله (۲-۱۲۷) است.



شکل ۲-۲۸: نمایش جعبه ای سیستم علی گسسته در زمان توصیف شده با معادله (۲-۱۲۶)

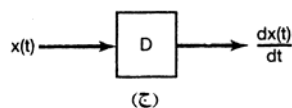
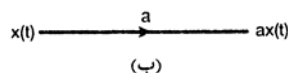
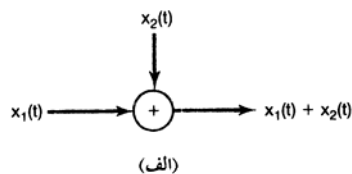
نمودار بلوکی شکل ۲-۲۸ لزوم به کار بردن حافظه در این سیستم را نشان می دهد، همینطور نیاز به شرایط اولیه را. تأخیر دهنده یک عنصر حافظه دارست، زیرا مقدار قبلی ورودی اش را حفظ می کند. پس مقدار اولیه این عنصر حافظه شرایط اولیه لازم برای محاسبات بازگشتی است که در شکل ۲-۲۸ به صورت تصویری و در معادله (۲-۱۲۷) به صورت ریاضی مشخص شده است. صدا البته، اگر سیستم توصیف شده با معادله (۲-۱۲۶) ابتدائاً ساکن باشد، مقدار اولیه ذخیره شده در حافظه صفرست .

حال سیستم علی پیوسته در زمان توصیف شده با معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را در نظر بگیرید .

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t) \quad (۲-۱۲۸)$$

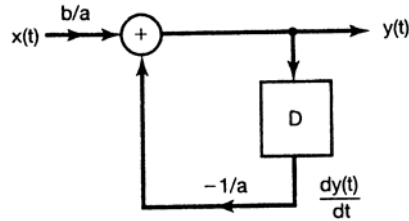
اولین کوشش خود برای یافتن نمایش جعبه ای این سیستم را با بازنویسی معادله بالا به صورت زیر شروع می کنیم

$$y(t) = -\frac{1}{a} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{b}{a} x(t) \quad (۲-۱۲۹)$$



شکل ۲-۲۹: یک مجموعه عنصر پایه برای یافتن نمایش جعبه ای سیستم پیوسته در زمان توصیف شده با معادله (۲-۱۲۸): (الف) جمع کننده؛ (ب) ضرب در عدد ثابت؛ (ج) مشتق گیر

ای شکل ۲-۲۹ را تعریف کنیم می توانیم سیستم معادله (۲-۱۲۹) را با اتصال این سه عنصر، به صورتی مشابه حالت گسسته در زمان، نمایش دهیم و نمودار جعبه ای شکل ۲-۳۰ را به دست آوریم.



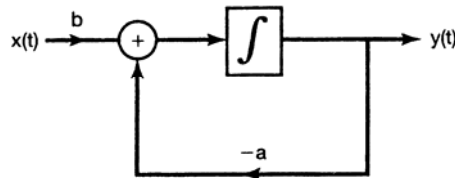
شکل ۲-۳۰: نمایش جعبه ای سیستم معادلات (۲-۱۲۸) و (۲-۱۲۹) با استفاده از جمع کننده، ضرب کننده در عدد و مشتق گیر گرچه این شکل نمایش معتبری برای سیستم علی توصیف شده با معادله (۲-۱۲۹) است، ولی نمایش متداولی نیست، ونمی توان آن را مستقیماً ساخت، زیرا ساخت مشتقگیر مشکل است و مشتقگیر به خطا و نویز بسیار حساس است. نمایش دیگری که بسیار متداولتر است، با بازنویسی معادله (۲-۱۲۸) به صورت زیر به دست می آید

$$\frac{dy(t)}{dt} = bx(t) - ay(t) \quad (۲-۱۳۰)$$

حال از این عبارت، از $t = -\infty$ تا t انتگرال می گیریم. اگر فرض کنیم سیستم توصیف شده با معادله (۲-۱۳۰) ابتدائاً ساکن است، انتگرال $y(t)/dt$ از $t = -\infty$ تا دقیقاً $y(t)$ را بدست می دهد (زیرا $y(-\infty)$ صفرست). بنابراین معادله زیر را به دست می آوریم

$$y(t) = \int_{-\infty}^t \{bx(\tau) - ay(\tau)\} d\tau \quad (۲-۱۳۱)$$

این توصیف سیستم را می توان به کمک جمع کننده و ضرب کننده در عدد ثابت شکل ۲-۲۹ و انتگرالگیر شکل ۲-۳۱ ساخت. شکل ۲-۳۲ نمایش جعبه ای این سیستم به کمک این سه عنصر را نشان می دهد. شکل ۲-۳۱: نمایش تصویری انتگرال گیر



شکل ۲-۳۲: نمایش جعبه ای سیستم معادلات (۲-۱۲۸) و (۲-۱۲۹) با استفاده از جمع کننده، ضرب کننده در عدد و انتگرال گیر

مستقیماً به صورت آنالوگ ساخت، و در واقع اساس کامپیوترهای آنالوگ اولیه و سیستمهای محاسباتی آنالوگ جدید نیز همین است. توجه کنید که در حالت پیوسته در زمان، این انتگرالگیرست که عنصرحافظه سیستم محسوب می شود. برای درک ساده تر این مطلب انتگرالگیری معادله (۲-۱۳۰) از نقطه غیر بی نهایت t_0 را در نظر بگیرید، که به معادله زیر منجر می شود .

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t \{bx(\tau) - ay(\tau)\}d\tau \quad (2-132)$$

معادله (۲-۱۳۲) به وضوح نشان می دهد که مشخص کردن $y(t)$ مستلزم تعیین یک شرط اولیه ، یعنی مقدار $y(t_0)$ است. این دقیقاً مقداری است که در t_0 در انتگرالگیر ذخیره شده است .

گرچه نمایش جعبه ای را برای ساده ترین معادلات دیفرانسیل و تفاضلی مرتبه اول نشان دادیم، ولی برای سیستمهای مرتبه بالاتر نیز می توان نمایش جعبه ای ساخت. این نمایش جعبه ای هم دیدی با ارزش نسبت به سیستم می دهد و هم یک روش ساخت سیستم را پیش پایمان می گذارد. مسائل ۲-۵۸ و ۲-۶۰ نمونه هایی از نمودارهای جعبه ای برای سیستمهای مرتبه بالاتر از را در بردارند .

۲-۵- توابع تکین

در این بخش نگاهی دیگر به تابع ضربه واحد پیوسته در زمانی می اندازیم تا بینشی افزون نسبت به این سیگنال ایده ال مهم کسب کنیم و سیگنالهای مرتبط با آن، موسوم به توابع تکین را معرفی نماییم. دربخش ۱-۴-۲ گفتیم که ضربه واحد پیوسته در زمان را می توان حالت ایده آل پالسی با عمر «به حد کافی کوچک» دانست، به نحوی که شکل و عمر آن دیگر اهمیت عملی نداشته باشند؛ یعنی تا وقتی به پاسخ یک سیستم LTI به این ورودی نظر داریم، بتوانیم تمام مساحت زیراین پالس را در یک نقطه متمرکز بدانیم. در این بخش ابتدا دوست داریم با یک مثال دقیقاً مشخص کنیم که منظورمان از این مطلب چیست، و با تعبیر مستتر در این مثال نشان دهیم که کلید استفاده از ضربه واحد و دیگر توابع تکین ، مشخص کردن این نکته است که سیستمهای LTI چگونه به آنها پاسخ می دهند؛ یعنی در واقع سیگنالها را براساس رفتارشان تحت کانولوشن با سیگنالهای دیگر تعریف می کنیم .

۲-۵- ضربه واحد به عنوان یک پالس کوتاه ایده آل

باتوجه به خاصیت غربالی ، معادله (۲-۲۷)، $\delta(t)$ پاسخ ضربه سیستم همانی است ، یعنی به ازای هر سیگنال $x(t)$ داریم

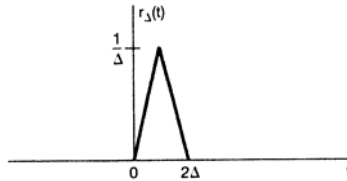
$$x(t) = x(t) * \delta(t) \quad (2-133)$$

به ازای $x(t) = \delta(t)$ داریم

$$\delta(t) = \delta(t) * \delta(t) \quad (2-134)$$

یک پالس ایده آل در بردارد. همانند بخش ۱-۴-۲ فرض کنید $\delta(t)$ را صورت حدی یک پالس مستطیلی در نظر گرفته ایم. مشخصاً $\delta_{\Delta}(t)$ را پالس مستطیلی تعریف شده در شکل ۱-۳۴ در نظر بگیرد، با تعریف

$$r_{\Delta}(t) = \delta_{\Delta}(t) * \delta_{\Delta}(t) \quad (۱۳۵-۲)$$



شکل ۲-۳۳: سیگنال $r_{\Delta}(t)$ تعریف شده در معادله (۱۳۵-۲)

می بینیم که $r_{\Delta}(t)$ مطابق شکل ۲-۳۳ است. اگر بخواهیم $\delta(t)$ را حد $\delta_{\Delta}(t)$ به ازای $\Delta \rightarrow 0$ تعبیر کنیم، آنگاه مطابق معادله (۲-۱۳۴) حد $r_{\Delta}(t)$ به ازای $\Delta \rightarrow 0$ هم باید ضربه واحد باشد. به همین ترتیب می توان گفت که حد $r_{\Delta}(t) * r_{\Delta}(t)$ یا $\delta_{\Delta}(t) * \delta_{\Delta}(t)$ نیز به ازای $\Delta \rightarrow 0$ باید ضربه واحد باشد. پس اگر ضربه واحد را صورت حدی یک سیگنال تعریف کنیم، تعداد بی شماری سیگنال، با شکلهای کاملاً متفاوت وجود دارند که همگی در حد مثل ضربه عمل می کنند. واژه کلیدی پاراگراف بالا «مثل ضربه عمل می کند» است. گفتیم که منظورمان از این عبارت این است که پاسخ یک سیستم LTI به تمامی این سیگنالها اساساً یکسان است، به شرطی که پالس «به حد کافی کوچک» باشد، یعنی Δ «به حد کافی کوچک باشد» مثال زیر این مفهوم را روشن می کند.

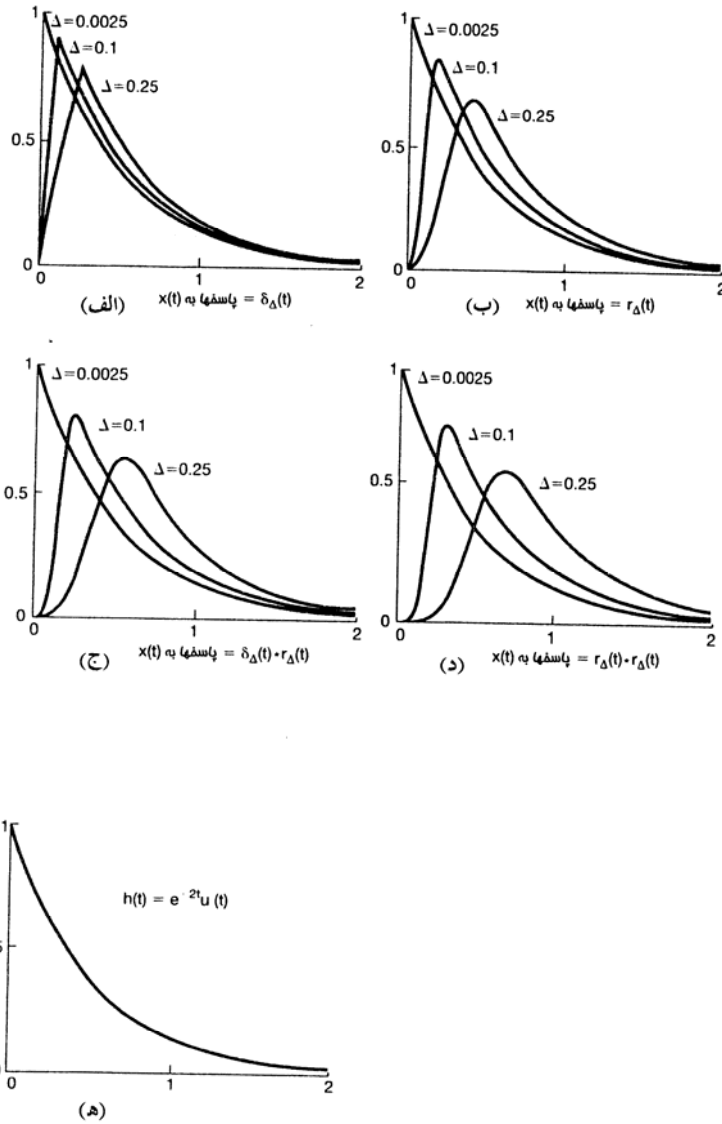
مثال ۲-۱۶

سیستم LTI توصیف شده با معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \quad (۱۳۶-۲)$$

شرط کمکی سکون ابتدایی است. شکل ۲-۳۴ پاسخ این سیستم به $r_{\Delta}(t) * \delta_{\Delta}(t)$ ، $r_{\Delta}(t)$ ، $\delta_{\Delta}(t)$ و $r_{\Delta}(t) * r_{\Delta}(t)$ را به ازای چند مقدار Δ نشان می دهد اگر Δ به حد کافی بزرگ باشد، پاسخ به این سیگنالها تفاوت قابل ملاحظه ای دارد. ولی به ازای Δ به حد کافی کوچک این پاسخها از یکدیگر قابل تمیز نیستند، یعنی تمام این سیگنالها به یک شکل رفتار می کنند. همچنین چنانچه از شکل برمی آید، شکل حدی تمام این پاسخها دقیقاً $e^{-2t}u(t)$ است. چون حد تمام این سیگنالها به ازای Δ ضربه واحدست، نتیجه می گیریم که $e^{-2t}u(t)$ پاسخ ضربه این سیستم است.

نکته مهم شایان ذکر این است که «به حد کافی کوچک بودن Δ نشان می دهد. چنانچه از شکل برمی آید در این حالت برای این که پاسخها از یکدیگر واز پاسخ ضربه $h(t) = e^{-20t}u(t)$ این سیستم غیر قابل تمیز باشند، به Δ کوچکتری نیاز داریم. پس گرچه « Δ به حد کافی کوچک» برای این دو سیستم معنی متفاوتی دارد، ولی می توان Δ را به نحوی یافت که برای هر دو سیستم به حد کافی کوچک باشد. ضربه واحد حالت ایده آل پالس کوتاهی است که عمر آن برای تمام سیستمها به حد کافی کوچک است.

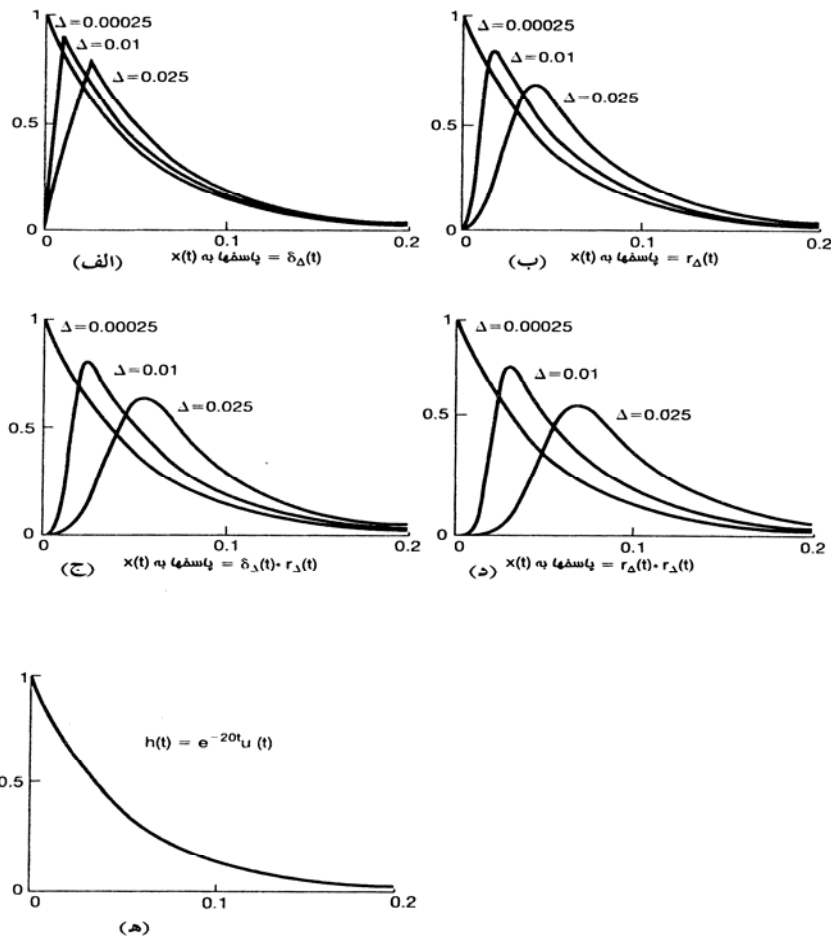


شکل ۲-۳۴: تغییر ضربه واحد به صورت پالس ایده آلی با عمر «به حد کافی کوچک» به نحوی که از لحاظ پاسخ سیستم LTI بتوان آن را لحظه ای در نظر گرفت: الف) پاسخ سیستم LTI علی معادله (۲-۱۳۶) به ورودی $\delta_{\Delta}(t)$ با $\Delta = 0.0025$ ، 0.1 و 0.25 ؛ ب) پاسخ همان سیستم به $r_{\Delta}(t)$ با همان مقادیر Δ ؛ ج) پاسخ به $\delta_{\Delta}(t) * r_{\Delta}(t)$ ؛ د) پاسخ به $r_{\Delta}(t) * r_{\Delta}(t)$ ؛ ه) پاسخ ضربه $h(t) = e^{-2t}u(t)$ سیستم. توجه کنید که به ازای $\Delta = 0.25$ تفاوت قابل ملاحظه ای بین پاسخ به این سیگنال ها وجود دارد، ولی با کوچک شدن Δ این تفاوت ناچیز شده، تمام پاسخ به پاسخ ضربه نشان داده شده در شکل (ه) همگرا می شوند.

چنانچه در مثال پیش دیدیم اگر Δ به حد کافی کوچک باشد ، سیگنالهای $\delta_{\Delta}(t) * r_{\Delta}(t), r_{\Delta}(t), \delta_{\Delta}(t), r_{\Delta}(t) * r_{\Delta}(t)$ همگی هنگام اعمال به یک سیستم LTI مانند ضربه واحد عمل می کنند. در واقع سیگنالهای متعدد دیگری نیز وجود دارند که همین مطلب در موردشان صادق است .

مفهوم این مطلب این است که می توانیم ضربه واحد را برحسب چگونگی پاسخ سیستمهای LTI به آن تعریف کرد . گرچه معمولاً برای تعریف یک تابع یا سیگنال مقادیر آن به ازای مقادیر مختلف متغیرمستقل را معین می کنند ، ولی اهمیت اصلی ضربه واحد در این نیست که به ازای هر مقدار t چه مقداری دارد ، بلکه در این است که تحت کانولوشن چگونه رفتار می کند . پس از دیدگاه تحلیل سیستمهای خطی می توانیم ضربه واحد را سیگنالی تعریف کنیم که وقتی به یک سیستم اعمال می شود ، پاسخ ضربه را به دست می دهد . یعنی $\delta(t)$ را سیگنالی تعریف می کنیم که به ازای هر $x(t)$ به دست می دهد

$$x(t) = x(t) * \delta(t) \quad (۲-۱۳۸)$$



شکل ۲-۳۵: یافتن Δ به حد کافی کوچک به سیستمی که به آن ورودی اعمال می کنیم بستگی دارد؛

پاسخ ها به $r_{\Delta}(t)$ (ج؛ پاسخ ها به $r_{\Delta}(t) * \delta_{\Delta}(t)$ ؛ د) پاسخ ها به $r_{\Delta}(t) * r_{\Delta}(t)$ (ه) پاسخ ضربه سیستم $h(t) = e^{-2t}u(t)$. مقایسه این پاسخ ها با پاسخ های شکل ۲-۳۴ نشان می دهد که برای مستقل شدن پاسخ از شکل پالس ورودی باید Δ کوچکتری برگزینیم.

از این لحاظ، تمام سیگنالهایی چون $r_{\Delta}(t)$ ، $\delta_{\Delta}(t)$ و غیره که به ازای $\Delta \rightarrow 0$ پالسهایی کوتاه هستند در حد شبیه ضربه واحد عمل می کنند، زیرا اگر این سیگنالها را به جای $\delta(t)$ بگذاریم، در حد معادله (۲-۱۳۸) ارضا می شود. تمام خواص مورد نیاز ضربه واحد را می توان از تعریف عملیاتی بیان شده در معادله (۲-۱۳۸) به دست آورد. برای مثال اگر به ازای تمام مقادیر t داشته باشیم $x(t) = 1$ ، آنگاه

$$1 = x(t) = x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)d\tau$$

پس سطح زیر ضربه واحد برابر یک است. گاهی بهترست یک تعریف عملیاتی هم ارز ولی کاملاً متفاوت را برای $\delta(t)$ به کار ببریم. برای یافتن این تعریف جدید سیگنال دلخواه $g(t)$ را می گیریم، آن را وارونه می کنیم تا $g(-t)$ به دست آید، و سپس کانولوشن آن را با $\delta(t)$ می یابیم. با استفاده از معادله (۲-۱۳۸) داریم

$$g(-t) = g(-t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau-t)\delta(\tau)d\tau$$

که به ازای $t = 0$ نتیجه می دهد

$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\delta(\tau)d\tau \quad (۲-۱۳۹)$$

پس تعریف عملیاتی $\delta(t)$ بیان شده با معادله (۲-۱۳۸)، معادله (۲-۱۳۹) را نتیجه می دهد. از طرف دیگر معادله (۲-۱۳۹) هم معادله (۲-۱۳۸) را نتیجه می دهد. برای پی بردن این مطلب $x(t)$ را یک سیگنال معین و t را یک زمان ثابت می گیریم و تعریف می کنیم.

$$g(\tau) = x(t-\tau)$$

سپس با استفاده از معادله (۲-۱۳۹) به دست می آوریم

$$x(t) = g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\delta(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\delta(\tau)d\tau$$

که همان معادله (۲-۱۳۸) است. پس معادله (۲-۱۳۹) هم تعریف عملیاتی معادلی برای ضربه واحد است. یعنی ضربه واحد سیگنالی است که اگر سیگنال $g(t)$ ضرب شود واز حاصلضرب در فاصله $-\infty$ تا $+\infty$ انتگرال گیری شود، مقدار $g(0)$ را به دست دهد.

چون عمدتاً با سیستمهای LTI، و در نتیجه با کانولوشن سروکار داریم، تعریف $\delta(t)$ به صورت معادله (۲-۱۳۸) بیشتر مورد مراجعه ماست. ولی معادله (۲-۱۳۹) برای تعیین بعضی از خواص دیگر ضربه واحد مفیدست. مثلاً سیگنال $f(t)\delta(t)$ را در نظر بگیرید، که در آن $f(t)$ یک سیگنال دلخواه است. طبق معادله (۲-۱۳۹) داریم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(\tau)\delta(\tau)d\tau = f(0)g(0) \quad (۲-۱۴۰)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(0)g(\tau)\delta(\tau)d\tau = f(0)g(0) \quad (۱۴۱-۲)$$

با مقایسه معادله های (۱۴۰-۲) و (۱۴۱-۲) در می یابیم که اگر دو سیگنال $f(0)\delta(t)$ ، $f(t)\delta(t)$ در $g(t)$ ضرب شوند واز حاصلضرب در فاصله $-\infty$ تا $+\infty$ انتگرالگیری شود، نتیجه یکسانی به بار می آورند . پس از این شکل تعریف عملیاتی سیگنالها نتیجه می گیریم که

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \quad (۱۴۲-۲)$$

این همان خاصیتی است که آن را در بخش ۱-۴-۲ به روشی دیگر به دست آوریم {معادله (۱-۷۶) را ببینید}

۲-۵-۳ دوبلت واحد و دیگر سیگنالهای تکین

ضربه واحد یکی از سیگنالهای موسوم به توابع تکین است، تمام این سیگنالها را می توان به صورت عملیاتی، برحسب رفتارشان در عمل کانولوشن تعریف کرد. یک سیستم LTI در نظر بگیرید که خروجی آن مشتق ورودی اش باشد، یعنی

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (۱۴۳-۲)$$

پاسخ ضربه این سیستم مشتق ضربه واحدست و دوبلت واحد $u_1(t)$ خوانده می شود. با توجه به نمایش کانولوشنی سیستمهای LTI به ازای هر سیگنال $X(t)$ داریم

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) * u_1(t) \quad (۱۴۴-۲)$$

درست مثل معادله (۲-۱۳۸) که تعریف عملیاتی $\delta(t)$ به حساب می آید، معادله (۲-۴۴) نیز تعریف عملیاتی $u_1(t)$ است. به طور مشابه می توانیم $u_2(t)$ ، مشتق دوم $\delta(t)$ ، را پاسخ ضربه یک سیستم LTI بدانیم که مشتق دوم ورودی را به دست می دهد ، یعنی

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = x(t) * u_2(t) \quad (۱۴۵-۲)$$

طبق معادله (۲-۱۴۴) داریم

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx(t)}{dt} \right) = x(t) * u_1(t) * u_1(t) * u_1(t) \quad (۱۴۶-۲)$$

بنابراین

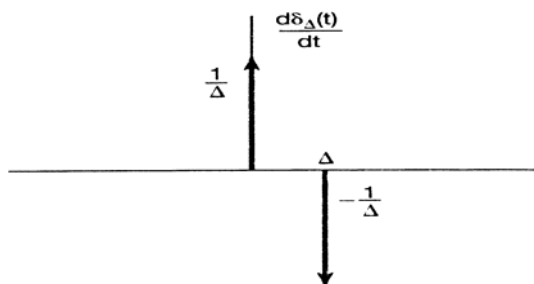
$$u_2(t) = u_1(t) * u_1(t) \quad (۱۴۷-۲)$$

به طور عمومی، $u_k(t)$ با $k > 0$ ، مشتق k ام $\delta(t)$ است ودر نتیجه پاسخ ضربه سیستمی است که مشتق k ام ورودی را به دست می دهد. چون این سیستم را می توان با سری کردن k مشتقگیر ساخت، داریم

$$u_k(t) = u_1(t) * \dots * u_1(t) \quad (۱۴۸-۲)$$

هریک از این توابع ویژه نیز مانند ضربه واحد خواصی دارند که، می توان آنها را از تعریف عملیاتی شان به دست آورد.

$$0 = \frac{dx(t)}{dt} = x(t) * u_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(\tau)d\tau$$



شکل ۲-۳۶: مشتق $d\delta_{\Delta}(t)/dt$ پالس مستطیلی کوتاه شکل $\delta_{\Delta}(t)$ شکل ۱-۳۴

یعنی مساحت زیر دو پلت واحد صفرست. همچنین اگر کانولوشن سیگنال $g(-t)$, $u_1(t)$ را حساب کنیم، به دست می آوریم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau-t)u_1(\tau)d\tau = g(-t) * u_1(t) = \frac{dg(-t)}{dt} = -g'(-t)$$

که به ازای $t=0$ به دست می دهد

$$-g'(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)u_1(\tau)d\tau \quad (۲-۱۴۹)$$

به نحوی مشابه می توانیم دیگر خواص $u_1(t)$ و توابع ویژه مرتبه بالاتر را به دست آوریم، در مسئله ۲-۶۹ بعضی از این خواص را در نظر می گرفته ایم.

این توابع تکین رانیز مانند ضربه واحد می توان برحسب پالسهای کوتاه تعریف کرد. برای مثال چون دوبلت واحد مستق ضربه واحدست، می توانیم آن را در حالت ایده آل مشتق پالس کوتاهی با مساحت یک در نظر بگیریم. مثلاً پالس کوتاه $\delta_{\Delta}(t)$ شکل ۱-۳۴ را در نظر بگیرید. این پالس به ازای $\Delta \rightarrow 0$ مانند ضربه عمل می کند. پس انتظار داریم مشتق آن را به ازای $\Delta \rightarrow 0$ به صورت دوبلت عمل کند. همانطور که در مسئله ۲-۷۲ نشان خواهیم داد، $d\delta_{\Delta}(t)/dt$ به صورت شکل ۲-۳۶ است: یعنی از ضربه واحدی در $t=0$ با مساحت $1/\Delta$ و ضربه واحدی در $t=\Delta$ با مساحت $-1/\Delta$ تشکیل شده است.

$$\frac{d\delta_{\Delta}(t)}{dt} = \frac{1}{\Delta} \{\delta(t) - \delta(t-\Delta)\} \quad (۲-۱۵۰)$$

پس باتوجه به این که $x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$ {معادله ۲-۷۰} درمی یابیم که

$$x(t) * \frac{d\delta_{\Delta}(t)}{dt} = \frac{x(t) - x(t-\Delta)}{\Delta} \approx \frac{dx(t)}{dt} \quad (۲-۱۵۱)$$

که تقریب به ازای $\Delta \rightarrow 0$ دقیق و دقیقتر می شود. مقایسه معادله (۲-۱۵۱) و معادله (۲-۱۴۴) نشان می دهد که $d\delta_{\Delta}(t)/dt$ به ازای $\Delta \rightarrow 0$ واقعاً به صورت دوبلت واحد عمل می کند.

علاوه بر توابع ویژه ای که مشتقهای ضربه واحدند، می توان توابعی تعریف کرد که انتگرالهای ضربه واحد باشند.

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

بنابراین

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (۱۵۲-۲)$$

و تعریف عملیاتی زیر برای $u(t)$ به دست می آید

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (۱۵۳-۲)$$

به نحوی مشابه می توان سیستمی تعریف کرد که ترکیب سری دو انتگرالگیر باشد. پاسخ ضربه این سیستم با $u_{-2}(t)$ نشان داده می شود، که کانولوشن پاسخ ضربه انتگرالگیر با خودش است

$$u_{-2}(t) = u(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau \quad (۱۵۴-۲)$$

چون $u(t)$ به ازای $t < 0$ برابر صفر و به ازای $t > 0$ برابر یک است. داریم

$$u_{-2}(t) = tu(t) \quad (۱۵۵-۲)$$

این سیگنال، که تابع شیب واحد نامیده می شود، در شکل ۲-۳۷ نشان داده است. همچنین می توانیم با استفاده از معادله های (۱۵۳-۲) و (۱۵۴-۲) یک تعریف عملیاتی برای رفتار $u_{-2}(t)$ تحت عمل کانولوشن به دست آوریم.

$$\begin{aligned} x(t) * u_{-2}(t) &= x(t) * u(t) * u(t) \\ &= \left(\int_{-\infty}^t x(\sigma) d\sigma \right) * u(t) = \int_{-\infty}^t \left(\int_{-\infty}^{\sigma} x(\sigma) d\sigma \right) d\tau \end{aligned} \quad (۱۵۶-۲)$$

همین قیاس می توانیم انتگرالهای مرتبه بالاتر $u(t)$ را به صورت پاسخ ضربه ترکیب سری چند انتگرالگیر تعریف کنیم.

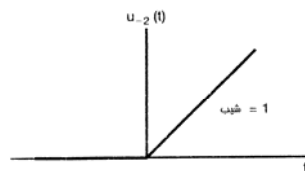
$$u_{-k}(t) = u(t) * \dots * u(t) = \int_{-\infty}^t u_{-(k-1)}(\tau) d\tau \quad (۱۵۷-۲)$$

نتیجه کانولوشن $x(t)$ با $u_{-3}(t), u_{-4}(t), \dots$ انتگرالهای مرتبه بالاتر $x(t)$ است. توجه کنید که انتگرال معادله (۱۵۷-۲) را می توان مستقیماً محاسبه کرد (مسئله ۲-۷۳) را ببینید. کاری که در معادله (۱۵۵-۲) انجام شد، و به دست داد.

$$u_{-k}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)} u(t) \quad (۱۵۸-۲)$$

پس انتگرالهای متوالی ضربه واحد، برخلاف مشتقهای آن، توابعی هستند که می توان آنها را هم به ازای مقادیرشان به ازای t های مختلف {معادله (۱۵۸-۲)} و هم با رفتار آنها تحت کانولوشن تعریف کرد.

گاهی بهتر است برای $\delta(t)$ و $u(t)$ نمادهای زیر را به کار برد.



شکل ۲-۳۷: تابع شیب واحد

$$u(t) = u_{-1}(t) \quad (۱۶۰-۲)$$

با استفاده از این نماد، $u_k(t)$ به ازای $k > 0$ پاسخ ضربه ترکیب سری k مشتقگیرست، $u_o(t)$ پاسخ ضربه سیستم همانی است، و $u_k(t)$ به ازای $k > 0$ پاسخ ضرب ترکیب متوالی k انتگرالگیر است. همچنین چون مشتقگیر، سیستم وارون انتگرالگیرست داریم

$$u(t) * u_1(t) = \delta(t)$$

و یا بانماد دیگر

$$u_{-1}(t) * u_1(t) = u_o(t) \quad (۱۶۱-۲)$$

در حالت کلی، با توجه به معادلات (۱۴۸-۲)، (۱۵۷-۲) و (۱۶۱-۲) می بینیم که به ازای هر مقدار صحیح k و r داریم

$$u_k(t) * u_r(t) = u_{k+r}(t) \quad (۱۶۲-۲)$$

اگر r, k هر دو مثبت باشند، معادله (۱۶۲-۲) بیانگر k مشتقگیر سری است که با r مشتقگیر دیگر سری شده است، و خروجی مشتق $(k+r)$ ام ورودی است. اگر r, k هر دو منفی باشند. $|k|$ انتگرالگیر سری داریم که با $|r|$ انتگرالگیر دیگر سری شده اند. همچنین اگر k منفی و r مثبت باشد، ترکیب سری $|k|$ انتگرالگیر داریم که به دنبال آن r مشتقگیر سری قرار دارد و سیستم کل به ازای $k+r < 0$ معادل $|k+r|$ انتگرالگیر سری و به ازای $k+r > 0$ معادل $k+r$ مشتقگیرست، و به ازای $k+r=0$ معادل سیستم همانی است. پس با تعریف توابع تیکن برحسب رفتارشان تحت عمل کانولوشن، می توانیم با آنها به سادگی کارو برحسب اثرشان در سیستمهای LTI تعبیرشان کنیم. چون در این کتاب غیر از اثر توابع تکین در سیستمهای LTI چیز دیگر نمی جوییم، تعریف عملیاتی این توابع، به صورت بیان شده در این بخش، برای تمام مقاصدمان کافی است.

توجه: در این روش برای دنباله های کوتاه و یا دنباله هایی که دارای رابطه ریاضی مشخصی نیستند مفید است.
توجه: این روش اگرچه از نظر محاسباتی مناسب است اما درک صحیحی از نحوه عملیات کانولوشن ارائه نمی کند.

جدول کانولوشن

عملیات کانولوشن به طور قابل ملاحظه ای با بهره گیری از جدول، ساده شده است. البته به کمک تبدیل لاپلاس به راحتی می توان اکثر آنها را اثبات نمود.

جدول انتگرال کانولوشن

شماره	$f_1(t)$	$f_2(t)$	$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$
۱	$f(t)$	$\delta(t-T)$	$f(t-T)$
۲	$e^{\lambda t} u(t)$	$u(t)$	$\frac{-1}{\lambda}(1-e^{\lambda t})u(t)$
۳	$u(t)$	$u(t)$	$tu(t)$
۴	$e^{\lambda_1 t} u(t)$	$e^{\lambda_2 t} u(t)$	$\frac{-1}{\lambda_1 - \lambda_2}(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})u(t), \lambda_1 \neq \lambda_2$
۵	$e^{\lambda t} u(t)$	$e^{\lambda t} u(t)$	$te^{\lambda t} u(t)$
۶	$te^{\lambda t} u(t)$	$e^{\lambda t} u(t)$	$\frac{1}{2}t^2 e^{\lambda t} u(t)$
۷	$t^n u(t)$	$e^{\lambda t} u(t)$	$\frac{n!}{\lambda^{n+1}} e^{\lambda t} u(t) - \sum_{k=0}^n \frac{n! t^{n-k}}{\lambda^{n+1} (n-k)!} u(t)$
۸	$t^m u(t)$	$t^n u(t)$	$\frac{m!n!}{(m+n+1)!} t^{m+n+1} u(t)$
۹	$e^{\lambda_1 t} u(t)$	$e^{\lambda_2 t} u(-t)$	$\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} [e^{\lambda_1 t} t(t) + e^{\lambda_2 t} t(-t)], \text{Re}\lambda_1 > \text{Re}\lambda_2$
۱۰	$e^{\lambda_1 t} u(-t)$	$e^{\lambda_2 t} u(-t)$	$\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})u(-t)$

جدول جمع کانولوشن

شماره	$f_1[n]$	$f_2[n]$	$f_1[n]*f_2[n]=f_2[n]*f_1[n]$
۱	$\delta(n-k)$	$f[n]$	$f(n-k)$
۲	$\alpha^n u[n]$	$u[n]$	$\left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right)u[n], \alpha \neq 1$
۳	$u[n]$	$u[n]$	$(n+1)u[n]$
۴	$\alpha^n u[n]$	$\beta^n u[n]$	$\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right)u[n] \quad \alpha \neq \beta$
۵	$\alpha^n u[n]$	$\beta^n u[-(n+1)]$	$\left(\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right)\alpha^n u[n] + \left(\frac{\beta}{\beta-\alpha}\right)\beta^n u[-(n+1)] \quad , \beta > \alpha $
۶	$n\alpha^n u[n]$	$\beta^n u[n]$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)^2}[\beta^n - \alpha^n + \left(\frac{\beta}{\beta-\alpha}\right)n\alpha^n]u[n] \quad , \alpha \neq \beta$
۷	$\alpha^n u[n]$	$nu[n]$	$\frac{1}{6}n(n-1)(n+1)u[n]$
۸	$\alpha^n u[n]$	$\alpha^n u[n]$	$(n+1)\alpha^n u[n]$
۹	$\alpha^n u[n]$	$nu[n]$	$\left(\frac{\alpha(\alpha^n-1)+n(1-\alpha)}{(1-\alpha)^2}\right)i[n], \alpha \neq 1$

توجه: سیگنال $x[n] = 2\delta[n+2] - 3\delta[n-1]$ دارای طول $T_x = 4$ می باشد، زیرا در خارج بازه $[-2, 1]$ سیگنال صفر می باشد.

توجه: در تعیین پاسخ با طول محدود به کمک کانولوشن مقادیر اول و آخر دنباله پاسخ $y[n]$ به راحتی به دست می آیند. در مثال فوق:

$$y[1] = x[1]h[0] = 1 \times 1 = 1 \quad , \quad y[10] = x[5]h[5] = 1 \times 1 = 1$$

چند رابطه مفید

$$u_0[n] = \delta[n] \quad , \quad u_{-1}(t) = u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\alpha) d\alpha \quad , \quad u_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

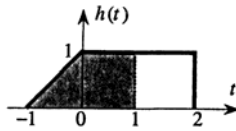
$$x[n]*u_1[n] = x[n] - x[n-1] \quad , \quad u_k[n] = \frac{(-1)^n k!}{n!(k-n)!} (u[n] - u[n-k-1])$$

$$u_k(t)*u_r(t) = u_{k+r}(t) \quad (k, r \in Z)$$

$$s(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} h(\alpha) d\alpha$$

شکل مقابل پاسخ ضربه سیستمی را نشان می دهد آن گاه $s(1)$ برابر است با:

$$s(1) = \frac{1 \times 1}{2} + 1 \times 1 = 1.5$$



شکل ۲-۳۸

به طور مشابه:

$$h(t) * u(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} h(\alpha) d\alpha$$

$$h[n] * u[n - n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} h[k]$$

نکته: اگر مجموع مقادیر سیگنال $x[n]$ برابر S_x و مجموع مقادیر سیگنال $h[n]$ برابر S_h باشد، مجموع مقادیر $y[n]$ برابر $S_x \times S_h$ خواهد بود.

نکته: اگر سطح زیر نمودار سیگنال $x(t)$ برابر S_x و سطح زیر نمودار سیگنال $h(t)$ برابر S_h باشد، سطح زیر نمودار $y(t)$ برابر $S_x \times S_h$ خواهد بود (منظور از سطح زیر نمودار، همان انتگرال $-\infty$ تا $+\infty$ است).

توجه: اگر مساحت زیر منحنی دو پالس به ترتیب A_1 و A_2 باشد آن گاه مساحت زیر منحنی پاسخ A برابر است با:

$$A = A_1 \times A_2$$

توجه: در مثال فوق در صورتی که طول $h(t)$ ، r گردد، آن گاه $y(t) = 1$ خواهد شد.

توجه: در یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$ که در آن T دوره تناوب است آن گاه پاسخ $y(t)$ در حالت سکون اولیه برابر است با:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[t - kT]$$

توجه: کانولوشن متنوب دو سیگنال $x(t)$ و $h(t)$ را با نماد زیر نشان می دهند:

$$y(t) = (x(t) * h(t))_T = \int_T x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

توجه: به کمک تبدیل z پایداری در مقال فوق را می توان به راحتی با بررسی ناحیه همگرایی به دست آورد.

توجه: سیستم های FIR همواره پایدار خواهند بود مادامی که هر کدام از مقادیر پاسخ ضربه $h(t)$ از نظر اندازه محدود باشد.

توجه: گاهی اوقات یک ورودی کراندار می تواند خروجی بی کران تولید کند نظیر:

$$x[n] = \begin{cases} \overline{h(-n)} & n[n] \neq 0 \\ 0 & h[n] = 0 \end{cases}$$

که در آن $h^*[n]$ خروجی مختلط $h[n]$ می باشد. همان طور که مشاهده می کنید، دنباله $x[n]$ دارای تغییرات محدود به یک است با این حال مقدار خروجی در $n = 0$ برابر است با:

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h[k]|^2}{|h[k]|} = s$$

اگر $s = \infty$ شود، یک دنباله ورودی کراندار، یک دنباله خروجی بی کران تولید کرده است.

توجه: در سیستم های علی، با توجه به رابطه $y[n] = x[n] * h[n]$ داریم:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

سیستم علی است پس به ازای $n < 0$ ، $h[n] = 0$:

$$y[0] = x[0]h[0]$$

$$y[1] = x[0]h[1] + x[1]h[0]$$

$$y[2] = x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0]$$

$$y[3] = x[0]h[3] + x[1]h[2] + x[2]h[1] + x[3]h[0]$$

توجه: معمولاً تعیین $h_i[n]$ به کمک معادله بالا با در دست داشتن $h[n]$ دشوار است. اما به کمک تبدیل z یک روش سرراست برای محاسبه سیستم معکوس مجیا است.

توجه ۱: خروجی برای یک ورودی داده شده به صورت یکتا مشخص نیست و شرایط کمکی مورد نیاز می باشد.

توجه ۲: به کمک N شرط کمکی متوالی خروجی، مقادیر بعدی با مرتب سازی معادله تفاضلی به صورت یک معادله بازگشتی پیش رونده با n و مقادیر قبلی با مرتب سازی معادله تفاضلی با رابطه بازگشتی پس رونده نسبت به n به دست می آیند.

توجه ۳: روش بازگشتی پاسخ کامل یک سیستم را می دهد یعنی هم پاسخ به ورودی و هم پاسخ به شرایط اولیه.

توجه: در حالت کلی در صورتی که معادله مشخصه سیستم به صورت زیر باشد:

$$P(z) = (z - z_1)^r (z - z_{r+1})(z - z_{r+2}) \dots (z - z_n)$$

آن گاه پاسخ ورودی صفر (همگن) سیستم به صورت زیر است:

$$y_h[n] = (a_1 + a_2 n + a_3 n^2 + \dots + a_r n^{r-1}) z_1^n + a_{r+1} z_{r+1}^n + a_{r+2} z_{r+2}^n + \dots + a_m z_m^n$$

توجه: در صورتی که $P(z)$ دارای دو ریشه مختلط باشد، آن گاه:

$$z_1 = z_2^* = |z| \angle \beta \Rightarrow y_h[n] = k |z|^n \cos(\beta n + \theta)$$

θ, k به کمک شرایط کمکی به دست می آیند.

توجه: در معادله (a) در صورتی که $N = 0$ باشد، در این حالت پاسخ $y[n]$ به صورت زیر است:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} x[n-k] = \frac{b_0}{a_0} x[n] + \frac{b_1}{a_0} x[n-1] + \dots + \frac{b_m}{a_0} x[n-M]$$

که یک معادله غیر بازگشتی نامیده می شود، پاسخ ضربه آن برابر است با:

$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0} & 0 \leq n \leq M \\ 0 & o, w \end{cases}$$

معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه N با ضرایب ثابت به صورت زیر است:

$$y[n] = \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (*)$$

پاسخ $y(t)$ دارای دو بخش است:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

که در آن $y_h(t)$ هر جواب معادله (*) به ازای $x(t) = 0$ است یعنی جواب معادله

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$$

جواب این معادله را پاسخ طبیعی (همگن) سیستم می نامند که به N شرط اولیه نیاز دارد همانند حالت زمان گسسته ریشه های

معادله مشخصه را پیدا می کنیم:

$$P(s) = \sum_{k=0}^N a_k s^k = 0 \Rightarrow y_h(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + \dots + k_n e^{s_n t}$$

ریشه های معادله مشخصه می توانند ساده، مکرر و مختلط باشند و همانند حالت زمان گسسته پاسخ همگن تغییر می کند.

$$y_h(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + k_3 e^{s_3 t} + \dots + k_N e^{s_N t}$$

ضرایب k_i ها به کمک شرایط اولیه تعیین می گردند.

نکته: اگر پاسخ سیستم خطی به ورودی $u(t - \alpha)$ ، $g(t, \alpha)$ گردد آن گاه پاسخ آن سیستم به تابع ضربه $\delta(t - \alpha)$ برابر

خواهد بود با:

$$\frac{-\partial}{\partial \alpha} g(t, \alpha)$$

نکته: از اتصال دو سیستم LTI همیشه یک سیستم LTI به دست می آید اما از اتصال دو سیستم غیر LTI ممکن است یک

سیستم LTI به دست آید.

نکته: یک سیستم خطی که پاسخ ضربه اش با $h_k[n]$ یا $h_\tau(t)$ نشان داده می شود اگر بتوان آن را به صورت $h[n-k]$ یا

$$S_1 : h_k[n] = (n - k + 5)u[n - k]$$

$$S_2 : h_k[n] = (3n - k)^2 u[n - k]$$

$$S_3 : h_k[n] = \begin{cases} \delta[n - k - 1] & k = \pm 1, \pm 3, \dots \\ 5u[n - k] & k = \pm 2, \pm 4, \dots \end{cases}$$

S_2, TV است زیرا $3n - k$ را نمی توان به صورت $n - k$ نوشت. به طور مشابه، S_3, TV است زیرا ضوابط تابعی از $n - k$ نمی باشند.

توجه: سیستم های زمان پیوسته هم به دو صورت روش مستقیم I و II قابل پیاده سازی اند.

چند نکته

کانولوشن دو سیگنال زوج، سیگنالی زوج است.

کانولوشن دو سیگنال فرد، سیگنالی زوج است.

کانولوشن یک سیگنال زوج با یک سیگنال فرد، سیگنالی فرد است.

و این که:

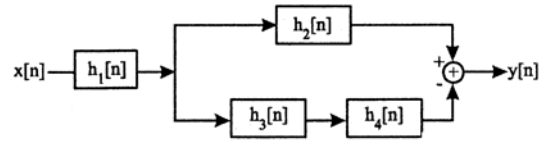
$$\int_{t-3}^{t-1} h(\alpha) d\alpha = h(t) * \Pi\left(\frac{t-2}{2}\right)$$

سوال ۱: اتصال سیستم های LTI شکل زیر را در نظر بگیرید. پاسخ ضربه $h[n]$ سیستم کل با فرض:

$$h_1[n] = \frac{1}{2}\delta[n+1] + \frac{1}{4}\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

$$h_2[n] = h_3[n] + (n+1)u[n]$$

$$h_4[n] = \delta[n-2]$$



باشد کدام است؟

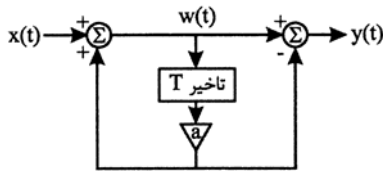
$$u[n] - \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + u[n-2] \quad (۱)$$

$$\delta[n] - \frac{1}{2}u[n] + \delta[n-2] + \frac{5}{2}u[n-3] \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2}\delta[n+1] + \frac{5}{4}\delta[n] + 2\delta[n-1] + \frac{5}{2}u[n-2] \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2}\delta[n+1] + \frac{1}{2}u[n-1] + \frac{1}{2}u[n-2] + \frac{5}{2}u[n-3] \quad (۴)$$

سوال ۲: در سیستم نشان داده شده اگر $x(t) = 3e^{-2t}u(t)$ باشد در آن صورت $y(t)$ با کدام گزینه برابر است؟



(۱)

$$3e^{-2t}u(t) \quad (۲)$$

$$3e^{-2(t-T)}u(t) \quad (۳)$$

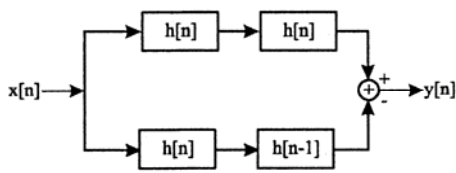
$$e^{-2t}u(t) + 2ae^{-2(t-T)}u[t-T] \quad (۴)$$

سوال ۳: ورودی یک سیستم علی به صورت $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ می باشد. اگر $y[0] = 1$ ، $y[1] = 2$ ،

$y[2] = 3$ و $y[3] = 4$ باشد، مقدار پاسخ ضربه در $n = ۳$ یعنی $h[3]$ کدام است؟

$$\frac{1}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{2} \quad (۳)$$



$$h_{tot}[n] = \frac{n+1}{2} u[n] \quad (1)$$

$$h_{tot}[n] = \frac{n+2}{2} u[n] \quad (2)$$

$$h_{tot}[n] = \frac{(n+1)(n+2)}{2} u[n] \quad (3)$$

$$h_{tot}[n] = \frac{n+1}{n+2} u[n] \quad (4)$$

سوال ۵: سطح زیر منحنی سیگنال $v(t)$ به صورت $A_v = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) dt$ تعریف می شود. اگر ورودی خروجی یک سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان $y(t) = x(t) * h(t)$ باشد که $x(t)$ ورودی، $y(t)$ خروجی و $h(t)$ پاسخ ضربه آن است، سطح زیر منحنی سیگنال خروجی یعنی A_v کدام است؟

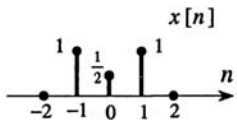
$$A_y = A_x \cdot A_h \quad (2)$$

$$A_y = A_x + A_h \quad (1)$$

رابطه مشخصی بین A_y, A_x, A_h وجود ندارد.

$$A_y = A_x * A_h \quad (3)$$

سوال ۶: برای سیگنال گسسته در زمان $x[n]$ مطابق شکل، حاصل عبارت $x_{(3)}[1-3n] * \delta[2n]$ کدام است؟



$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{k}\right] & n = \pm k, \pm 2k, \dots \\ 0 & o, w \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \delta[n] \quad (2)$$

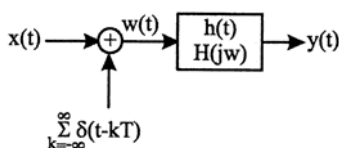
$$\frac{1}{4} \delta[n] \quad (1)$$

$$2\delta[n] \quad (4)$$

$$\delta[n] \quad (3)$$

سوال ۷: اگر در شکل زیر $x(nt) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$ باشد در آن صورت $y(t)$ برابر است با:

سوال ۷: اگر در شکل زیر $x(nt) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$ باشد در آن صورت $y(t)$ برابر است با:

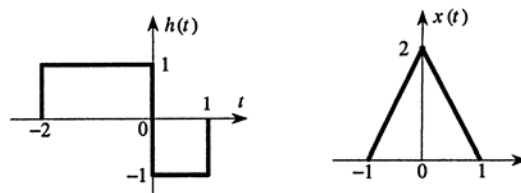


$$h(t) \quad (1)$$

$$x(t) \quad (2)$$

$$\delta(t) \quad (3)$$

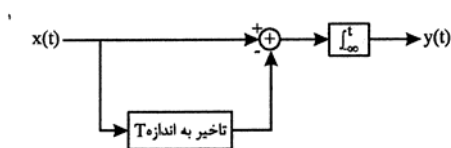
$$x(t) * h(t) \quad (4)$$



به ازای چه مقدار از t خروجی سیستم ماکزیمم مقدار را داراست و مقدار خروجی در $t=1$ چیست؟

- (۱) به ازای $t=1$ خروجی ماکزیمم مقدار را دارد و به ازای $t=1$ مقدار خروجی برابر است با ۲
- (۲) به ازای $t=-1$ خروجی ماکزیمم مقدار را دارد و به ازای $t=1$ مقدار خروجی برابر است با -۱
- (۳) به ازای $t=1$ خروجی ماکزیمم مقدار را دارد و به ازای $t=1$ مقدار خروجی برابر است با ۱
- (۴) به ازای $t=-1$ خروجی ماکزیمم مقدار را دارد و به ازای $t=1$ مقدار خروجی برابر است با ۰,۵

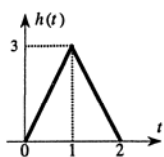
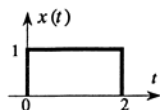
سوال ۱۳: سیستم داده شده در شکل مقابل:



- (۱) تغییرپذیر با زمان و پایدار است.
- (۲) تغییرپذیر با زمان و ناپایدار است.
- (۳) تغییرناپذیر با زمان و پایدار است.
- (۴) تغییرناپذیر با زمان و ناپایدار است.

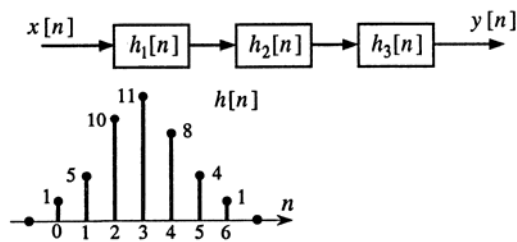
سوال ۱۴: فرض کنید ورودی $x(t)$ و پاسخ ضربه $h(t)$ یک سیستم LTI به صورت زیر باشند. در صورتی که

خروجی این سیستم را $y(t)$ بنامیم، کدام یک از گزینه های زیر صحیح است؟



- (۱) $\int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt = 5$
- (۲) $\int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt = 3$
- (۳) $\int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt = 2.5$
- (۴) $\int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt = 6$

$h_2[n] = u[n] - u[n-2]$ و پاسخ ضربه کلی سیستم به صورت شکل زیر است. مقدار $h_1[3]$ برابر است با:



(۱) $h_1[3] = 0$

(۲) $h_1[3] = 1$

(۳) $h_1[3] = 2$

(۴) $h_1[3] = 3$

سوال ۱۶: اگر به یک سیستم LTI زمان گسسته با پاسخ ضربه $h[n]$ ، ورودی

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-2n+1] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-3]$$

اعمال شود، پاسخ سیستم، $y[n]$ عبارت خواهد بود با:

(۱) $y[n] = h[n] + \frac{1}{2}h[n+1] + \frac{1}{4}h[n+2]$

(۲) $y[n] = h[n] + 2h[n+1] + 4h[n+2]$

(۳) $y[n] = h[n] + \frac{1}{2}h[n-1] + \frac{1}{4}h[n-2]$

(۴) $y[n] = h[n] + 2h[n-1] + 4h[n-2]$

سوال ۱۷: یک سیستم زمان گسسته LTI را با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ در نظر بگیرید. می دانیم پاسخ ضربه

سیستم $h[n]$ به ازای $n \geq N$ و $n \leq -1$ صفر است. برای تعیین $h[n]$ دانستن کدام دسته زوج ورودی خروجی

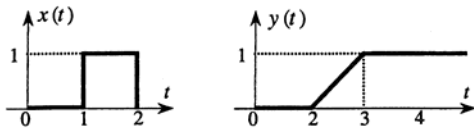
هم لازم و هم کافی است؟

(۲) $x[k]$ و $y[k]$ برای $2N$ مقدار متوالی k

(۱) $x[k]$ ، $y[k]$ برای N مقدار متوالی k

(۴) هیچ کدام

(۳) $x[k]$ و $y[k]$ برای $-\infty < k < \infty$



$$u(t-1) \quad (۱)$$

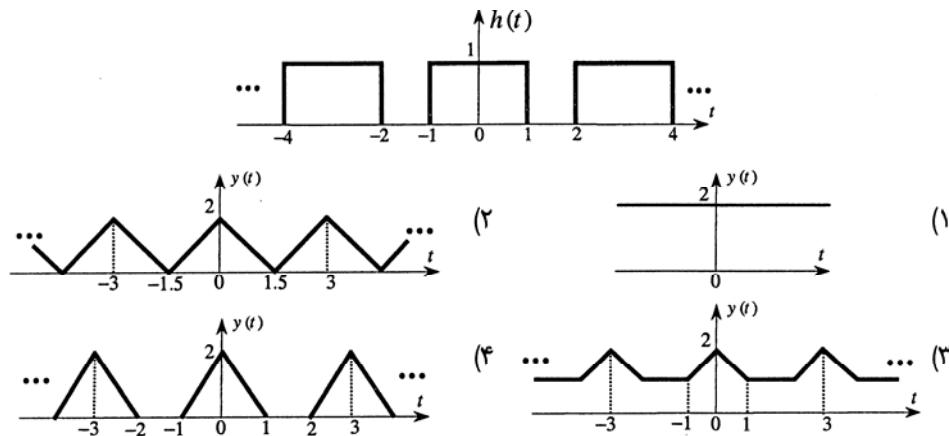
$$u(t-2) \quad (۲)$$

$$u(t-1) - u(t-2) \quad (۳)$$

$$\delta(t-1) - \delta(t-2) \quad (۴)$$

سوال ۱۹: فرض کنید پاسخ ضربه یک سیستم LTI یک سیگنال پریودی با پریود $T_0 = 3$ به صورت زیر باشد، اگر

سیگنال ورودی به سیستم برابر $x(t) = u(t+1) - u(t-1)$ باشد، خروجی سیستم کدام یک از موارد زیر است؟



سوال ۲۰: پاسخ یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان گسسته با پاسخ ضربه $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ به ورودی

$$x[n] = 2^n \quad \text{در } n=0 \text{ کدام مورد خواهد بود؟}$$

$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

(۳)

$$\frac{4}{3} \quad (۲)$$

(۱) نامحدود

سوال ۲۱: در یک سیستم LTI ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ به صورت زیر می باشد:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t \leq 0 \\ 1 & 0 < t \leq 1 \\ 0 & 1 < t < \infty \end{cases}, \quad y(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t \leq 0.5 \\ 2(t-0.5) & 0.5 < t \leq 1.5 \\ 2 & 1.5 < t < \infty \end{cases}$$

پاسخ ضربه این سیستم عبارت است از:

$$h(t) = 2u(t-1.5) \quad (۴)$$

$$h(t) = u(t-1.5) \quad (۱)$$

$$h(t) = 2u(t-0.5) \quad (۳)$$

$$h(t) = u(t) - u(t-0.5) \quad (۲)$$

می تواند باشد؟
 پاسخ این سیستم به ورودی $y_1[n] = 2\delta[n-1]$ $x_2[n] = \delta[n-1] - 2\delta[n-2]$ کدام یک از جواب های زیر

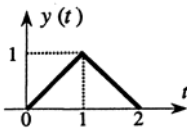
$$y_2[n] = \delta[n-1] \quad (۲)$$

$$y_1[n] = -\delta[n-1] \quad (۱)$$

$$y_2[n] = -2\delta[n-2] \quad (۴)$$

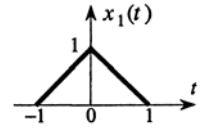
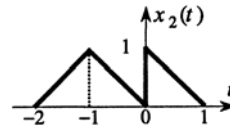
$$y_2[n] = 2\delta[n-2] \quad (۳)$$

سوال ۲۳: ضابطه ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ یک سیستم به همراه شکل خروجی $y(t)$ آن به صورت زیر است:



$$y(t) = \begin{cases} x(t-1) & t \geq 1 \\ x(-t+1) & t \leq 1 \end{cases}$$

ورودی سیستم به کدام یک از دو شکل زیر می تواند باشد؟



(۴) هیچ یک

(۳) هر دو

(۲) فقط $x_2(t)$

(۱) فقط $x_1(t)$

سوال ۲۴: S_1 و S_2 دو سیستم با پاسخ ضربه های به ترتیب $h_1(t) = e^{-t} u(t)$ و $h_2(t) = \frac{\sin Wt}{\pi t}$ می باشند.

در این صورت:

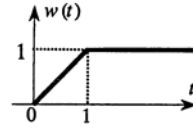
(۱) S_1 معکوس ناپذیر و S_2 معکوس پذیر است.

(۲) S_1 و S_2 هر دو معکوس پذیرند.

(۳) S_1 معکوس پذیر و S_2 معکوس ناپذیر است.

(۴) S_1 و S_2 هر دو معکوس ناپذیرند.

دست آورید که به ورودی تابع $5 \sin(2\pi t)u(t)$ اعمال شده باشد.



$$y(t) = \frac{5}{2\pi} [1 - \sin 2\pi t] \quad (\alpha)$$

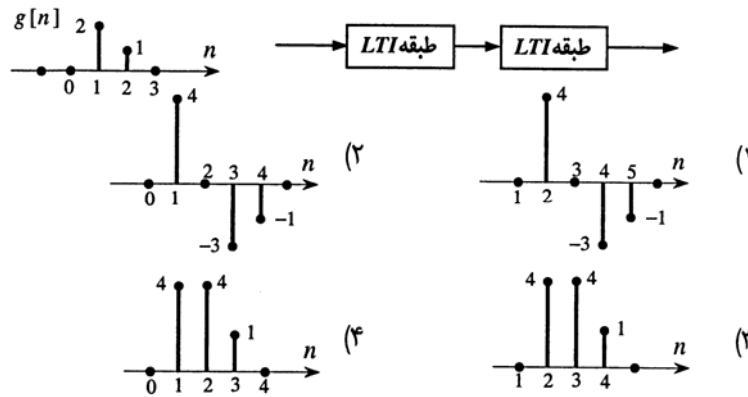
$$y(t) = \frac{5}{2\pi} [1 + \cos 2\pi t] \quad (\text{ا})$$

$$y(t) = \frac{5}{2\pi} [1 + \sin 2\pi t] \quad (\alpha)$$

$$y(t) = \frac{5}{2\pi} [1 - \cos 2\pi t] \quad (\alpha)$$

سوال ۲۶: سیستم زمان گسسته ای از دو طبقه LTI مطابق شکل زیر تشکیل شده است. اگر پاسخ پله هر طبقه به

صورت $g[n]$ مطابق شکل زیر باشد، پاسخ پله سیستم چه خواهد بود؟



سوال ۲۷: ضابطه بین ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ یک سیستم زمان گسسته به صورت

$$y[n] = x[n^2] - x[-n^2]$$

$$1 \quad (\alpha)$$

$$1 - \delta[n] \quad (\text{ا})$$

(۴) هر سه جواب غلط است.

$$u[n - u[-n]] \quad (\alpha)$$

(۳-۱)

$$\begin{aligned}
h[n] &= h_1[n] * (h_2[n] - h_2[n] * h_4[n]) \quad , \quad h_2[n] = h_3[n] \\
&= h_1[n] * \{(n+1)u[n] - (n-1)u[n-2]\} \quad , \quad h_4[n] = \delta[n-2] \\
&= \left(\frac{1}{2}\delta[n+1] + \frac{1}{4}\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] \right) * (\delta[n] + 2u[n-1]) \\
&= \frac{1}{2}\delta[n+1] + \frac{1}{4}\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + u[n] + \frac{1}{2}u[n-1] + u[n-2]
\end{aligned}$$

با جایگزینی ۳ جمله آخر $h[n]$ با $\delta[n] + \frac{3}{2}\delta[n-1] + \frac{5}{2}u[n-2]$ داریم:

$$h[n] = \frac{1}{2}\delta[n+1] + \frac{5}{4}\delta[n] + 2\delta[n-1] + \frac{5}{2}u[n-2]$$

با تغییر متغیر $n-1 \rightarrow n$ می توان گزینه (۳) را مناسب ترین گزینه دانست.

(۲-۲)

$$\left. \begin{aligned}
y(t) &= w(t) - aw(t-T) \\
w(t) &= aw(t-T) = x(t)
\end{aligned} \right\} \Rightarrow y(t) = x(t) = 3e^{-2t}u(t)$$

(۴-۳)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

سیستم علی است زیرا به ازای $n < 0$ ، $h[n] = 0$ است.

$$y[0] = x[0]h[0] \Rightarrow h[0] = 1$$

$$y[1] = x[0]h[1] + x[1]h[0] \Rightarrow h[1] = \frac{3}{2}$$

$$y[2] = x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0] \Rightarrow h[2] = 2$$

$$y[3] = x[0]h[3] + x[1]h[2] + x[2]h[1] + x[3]h[0] \Rightarrow h[3] = \frac{5}{2}$$

(۳-۴)

$$\begin{aligned}
h_1[n] &= h[n] * h[n] - h[n] * h[n-1] \\
&= h[n] * (h[n] - h[n-1]) = h[n] * \{(n+1)u[n] - nu[n] - nu[n-1]\} \\
&= h[n] * u[n] = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)u[n]
\end{aligned}$$

$$A_y = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) * h] dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) h(t - \alpha) d\alpha \right] dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [x(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \alpha) dt] d\alpha$$

با تغییر متغیر $k = t - \alpha$ خواهیم داشت:

$$A_y = \int_{-\infty}^{\infty} [x(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} h(k) dk] d\alpha = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) d\alpha \right\} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(k) dk \right\} = A_x \cdot A_h$$

(۳-۶)

$$x_{(3)} [1 - 3n] * \delta [2n] = \delta [n] * \delta [n] = \delta [n]$$

(۱-۷)

$$x(t) = \delta(t) , w(t) = \delta(t) , \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \delta(t)$$

$$y(t) w(t) * h(t) = \delta(t) * h(t) = h(t)$$

(۴-۸)

$$y_1(t) = h_1(t) * h_2(t) , y_2(t) = h_3(t) * h_4(t)$$

با توجه به کانولوشن دو پالس هم عرض داریم:

$$y(t) = [y_1(t) + y_2(t)] * x(t) = [y_1(t) + y_2(t)] * [\delta(t) + \delta(t + 2)]$$

$$y(t) = y_1(t) + y_1(t + 2) + y_2(t) + y_2(t + 2)$$

$$y(0) = y_1(0) + y_1(2) + y_2(0) + y_2(2) = 0 + 2 + 1 + 0 = 3$$

(۳-۹)

با توجه به جمع کانولوشن داریم:

$$y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] * 3u[n] = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} u[n] \Rightarrow y[\infty] = 4$$

در حالت دایمی ($n \rightarrow \infty$) مقدار پاسخ ۴ به دست می آید.

(۳-۱۰)

سیستم غیر علی است زیرا به ازای $n < 0$ ، $h[n] \neq 0$ است با حافظه هم هست.

(۱-۱۱)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \Rightarrow y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin \tau d\tau = \sqrt{2}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \Rightarrow y(1) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(1-\tau)d\tau = -1 \times 1 = -1$$

ضمناً ماکزیمم مقدار خروجی در بیشترین هم پوشانی صورت می پذیرد که با کمی دقت در شکل $t = -1$ برابر خواهد بود با

$$y_{\max} = 2 \times 2 = 4$$

(۳-۱۳)

سیستم تغییرناپذیر با زمان است.

$$y(t) = \int_{-\infty}^t [x(\alpha) - x(\alpha - T)]d\alpha$$

$$x_2(t) = x_1(t - t_0) \Rightarrow y_2(t) = \int_{-\infty}^t [x(\alpha - t_0) - x(\alpha - t_0 - T)]d\alpha$$

$$\int_{-\infty}^{t-t_0} [x(\alpha - t_0) - x(\alpha - t_0 - T)]d\alpha = y_2(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\alpha)d\alpha - \int_{-\infty}^t x(\alpha - T)d\alpha = \int_{-\infty}^t x(\alpha)d\alpha - \int_{-\infty}^{t-T} x(\alpha)d\alpha = \int_{t-T}^t x(\alpha)d\alpha < \infty$$

(۴-۱۴)

$$A_y = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)dt = A_x \times A_h = 2 \times 3 = 6$$

(۳-۱۵)

$$h_2 = \delta[n] + \delta[n-1]$$

$$h'_2[n] = h_2[n] * h_2[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

$$h[n] = h'_2[n] * h_1[n]$$

$$n = 0, \quad h[0] = h'_2[0] \cdot h_1[0] \Rightarrow h_1[0] = 1$$

$$n = 1, \quad h[1] = h'_2[0]h_1[0] + h'_2[1]h_1[0] \Rightarrow h_1[1] = 3$$

$$n = 2, \quad h[2] = h_1[2] + 2h_1[1] + h_1[0] \Rightarrow h_1[2] = 3$$

$$n = 3, \quad h[3] = h_1[3] + 2h_1[2] + h_1[1] + 0 \Rightarrow h_1[3] = 2$$

(۲-۱۶)

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \{u[-2n+1] - u[-n-3]\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \{u[-n] - u[-n-3]\}$$

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n+1] + 4\delta[n+2]$$

$$y[n] = h[n] + 2h[n+1] + 4h[n+2]$$

طول $h[n]$ برابر N است. پس نیاز به N معادله مستقیم داریم:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k]$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} h[k] = h[0] + h[1] + \dots + h[N-1]$$

از طرفی برای داشتن N مقدار $y[n]$ طبق معادله (*) نیازمند $2N-1$ مقدار $x[n]$ هستیم بنابراین هیچ کدام از گزینه ها صحیح نمی باشد.

(۱-۱۸)

با کمی دقت در منحنی های ورودی و خروجی در می یابیم:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\alpha - 1) d\alpha$$

به ازای $x(t) = \delta(t)$ داریم:

$$h(t) = \int_{-\infty}^t x(\alpha - 1) d\alpha = \int_{-\infty}^{t-1} \delta(u) du = u(t-1)$$

(۳-۱۹) روش اول حل:

کانولوشن یک پریود $h(t)$ را با $x(t)$ محاسبه می کنیم:

با بهره گیری از خواص سیستم های LTI و استفاده از قضیه جمع آثار پاسخ کل $y(t)$ را به دست می آوریم.

روش دوم حل: عرض پالس $x(t)$ ، $h(t)$ ، $y(t)$ می باشد. بنابراین عرض پالس $y(t)$ ۴ می گردد. و چون پریود $h(t)$ ، ۳ است، پالس های مثلثی خروجی با هم تداخل می کنند و لذا گزینه (۳) صحیح است.

(۲-۲۰)

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[0-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k u[k] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

(۴-۲۱)

$$y(t) = 2 \int_{-\infty}^t x(\alpha - 0.5) d\alpha$$

به ازای $x(t) = \delta(t)$ داریم:

$$h(t) = 2 \int_{-\infty}^t \delta(\alpha - 0.5) d\alpha = 2 \int_{-\infty}^{t-0.5} \delta(u) du = 2u(t-0.5)$$

(۱-۲۲)

سیستم خطی و بدون حافظه است پس $y[n] = f[n]x[n]$ و لذا:

$$f[0] = 0, \quad f[1] = -1$$

$$y_2[n] = f[n]x_2[n] = f[1]\delta[n-1] - 2f[2]\delta[n-2]$$

$f[2] = 0$ می تواند درست باشد.

(۳-۲۳)

ضابطه سیستم را بر روی $x_1(t)$ اعمال می کنیم.

ضابطه سیستم را بر روی $x_2(t)$ اعمال می کنیم.

(۳-۲۴)

شرط وارون پذیری سیستم بر حسب پاسخ ضربه آن است که:

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$

سیستم S_1 با پاسخ ضربه $h(t) = e^{-t}u(t)$ معکوس پذیر است زیرا

$$h(t) = e^{-t}u(t), \quad h_i(t) = \delta'(t) + \delta(t)$$

$$h(t) * h_i(t) = \{e^{-t}u(t)\} * \{\delta'(t) + \delta(t)\} = \delta(t)$$

سیستم S_2 معکوس ناپذیر است زیرا

$$h(t) = \frac{\sin Wt}{\pi t} = \frac{W}{\pi t} \text{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$$

تابع فوق در مضارب صحیحی از $\frac{\pi}{W}$ صفر می باشد که باعث معکوس ناپذیر شدن سیستم می گردد.

(۳-۲۵)

پاسخ ضربه برابر است با:

$$h(t) = \frac{dw(t)}{dt}$$

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_0^t x(t) dt, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$= 5 \int_0^t \sin 2\pi t dt = -\frac{5}{2\pi} (\cos 22\pi t \Big|_0^t) = \frac{5}{2\pi} [1 - \cos 2\pi t]$$

(۱-۲۶)

$$h[n] = g[n] - g[n-1]$$

پاسخ پله به کل سیستم:

$$g_t[n] = g[n] * h[n]$$

$$= g[n] * \{2\delta[n-1] - \delta[n-2] - \delta[n-3]\}$$

$$= 2g[n-1] - g[n-2] - g[n-3]$$

مطاب شکل با ترسیم $g_t[n]$ گزینه (۱) به دست می آید.

$$s[n] = u[n^2] - u[-n^2]$$

به ازای $n \neq 0$ همواره داریم:

(*)

$$u[-n^2] = 0 \Rightarrow s[n] = u[n^2] = 1$$

به ازای $n = 0$

(**)

$$n = 0 \Rightarrow s[0] = u[0] - u[0] = 1 - 1 = 0$$

با توجه به (*) و (**) و چک گزینه ها داریم:

$$s[n] = 1 - \delta[n]$$

فهرست مطالب

۱۶۲	فصل سوم
۱۶۲	نمایش سری فوریه سیگنالهای متناوب
۱۶۲	۱-۳ دورنمایی تاریخی
۱۶۶	۲-۳ پاسخ سیستمهای LTI پیوسته در زمان نمایی های مختلط
۱۷۰	۳-۳ نمایش سری فوریه سیگنالهای متناوب پیوسته در زمان
۱۷۸	۴-۳ همگرایی سری فوریه
۱۸۳	۵-۳ خواص سری فوریه پیوسته در زمان
۱۹۲	۶-۳ نمایش سری فوریه سیگنالهای متناوس گسسته در زمان
۲۰۲	۷-۳ خواص سری فوریه گسسته در زمان
۲۰۸	۸-۳ سری فوریه و سیستمهای LTI
۲۱۲	۹-۳ فیلتر کردن
۲۱۹	۱۰-۳ نمونه هایی از فیلترهای پیوسته در زمان توصیف شده با معادلات دیفرانسیل
۲۲۴	۱۱-۳ فیلترهای گسسته در زمان توصیف شده با معادلات تفاضلی
۲۳۰	پیوست ۳
۲۳۷	خواص تبدیل فوریه
۲۳۹	جدول خواص تبدیل فوریه
۲۴۰	جدول خواص تبدیل فوریه زمان پیوسته
۲۴۲	سوالات طبقه بندی شده فصل سوم
۲۵۲	پاسخنامه سوالات فصل سوم

نمایش سری فوریه سیگنالهای متناوب

۳- مقدمه

نمایش و تحلیل سیستمهای LTI به صورت جمع کانولوشن که در فصل ۲ صورت گرفت، برنمایش سیگنالها به صورت ترکیب خطی ضربه های جابه جا شده استوار بود. در این فصل و دو فصل بعد روشهای دیگری برای نمایش سیگنالها و سیستمهای LTI پی می ریزیم. همانند فصل ۲ نقطه شروع کار، نمایش سیگنالها به صورت ترکیب خطی یک مجموعه سیگنال پایه ای است. برای این نمایش جدید نمایی های مختلط را به کار می بریم. نمایش حاصل تبدیل فوریه پیوسته در زمان یا گسسته در زمان خوانده می شود. خواهیم دید که این نمایش را می توان برای سیگنالهای متعدد و مفیدی به کار برد.

سپس مانند فصل ۲ نقطه شروع کار، نمایش سیگنالها و سیستمهای LTI پی می ریزیم. همانند فصل ۲ نقطه شروع کار، نمایش سیگنالها به صورت ترکیب خطی سیگنال پایه ای است. برای این نمایش جدید نمایی های مختلط را به کار می بریم. نمایش حاصل تبدیل فوریه پیوسته در زمان یا گسسته در زمان خوانده می شود. خواهیم دید که این نمایش را می توان برای سیگنالهای متعدد و مفیدی به کار برد.

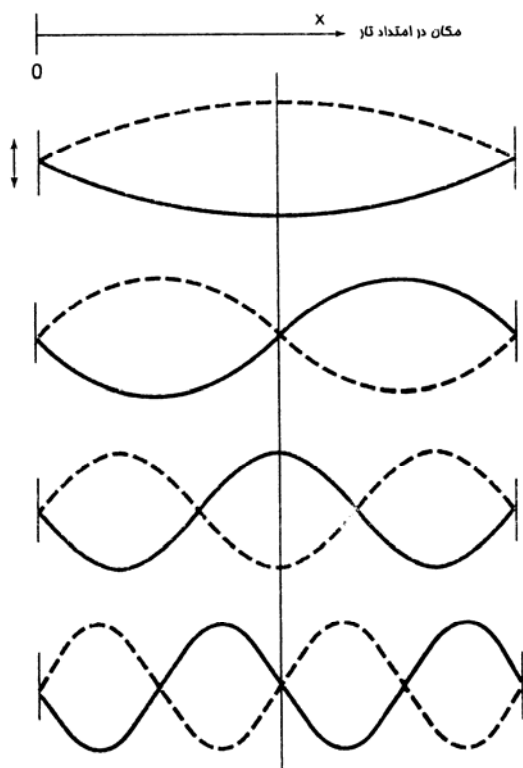
سپس مانند فصل ۲ عمل می کنیم. یعنی با توجه به خاصیت جمع آثار می توانیم پاسخ یک سیستم LTI به هر ورودی متشکل از ترکیب خطی سیگنالهای پایه، همان ترکیب پاسخهای سیستم به این سیگنالهای پایه ای است. در فصل ۲ این پاسخها نمونه های جابجا شده پاسخ ضربه بودند که به جمع یا انتگرال کانولوشن انجامید. چنانچه در این فصل خواهیم دید پاسخ یک سیستم LTI به ورودی نمایی مختلط شکل ساده ای دارد، بنابراین نمایش مناسب دیگر برای سیستمهای LTI به دست می آید و راه دیگری برای تحلیل این سیستمها و درک خواصشان پیش پایمان می گذارد. در این فصل توجه خود را به نمایش سیگنالهای پیوسته و گسسته در زمان متناوب، موسوم به سری فوریه، معطوف می کنیم. در فصلهای ۴ و ۵ این تحلیل را به نمایش تبدیل فوریه دسته وسیعتر سیگنالهای نامتناوب دارای انرژی محدود تعمیم می دهیم. این دو نمایش ابزارهای بسیار پر توان و مهمی برای تحلیل، طراحی، و درک سیگنالها و سیستمهای LTI در اختیارمان قرار می دهند، بنابراین در این فصل و فصلهای بعد وقت زیادی صرف بررسی کاربردهای روشهای فوریه خواهیم کرد. در بخش بعد دورنمای تاریخی مختصری را ارائه می کنیم تا دیدی نسبت به مفاهیم و موضوعاتی که در بخشهای آتی این فصل به تفصیل مورد بررسی قرار خواهیم داد کسب کنیم.

۳-۱ دورنمایی تاریخی

پیدایش تحلیل فوریه تاریخی طولانی دارد، و شخصیتهای مختلف و بررسی های فیزیکی بسیار متفاوتی در آن دخیل بوده اند. ایده استفاده از «جمعهای مثلثاتی»- یعنی مجموع سینوسی ها و کسینوسی ها یا نمایی های مختلط متناوب مرتبط با رمانیک- برای توصیف پدیده های متناوب به زمان بابلپها بر می گردد.

آنها برای پیش بینی رخدادهای نجومی این ایده ها را به کار می بردند. تاریخ نوین این موضوع از ۱۷۴۸ بالئونهارد اوپلر شروع می شود. او حرکت تارمرتعش را بررسی کرد. شکل ۳-۱ چند «وجه هنجار» اولیه این تار رانشان می دهد. اگر انحراف عمودی تار بر حسب زمان t و فاصله در امتداد تار x باشد، برای هر زمان وجه های هنجار توابع $f(t, x)$

طبیعی باشد، آرایش آن در تمام لحظات بعدی نیز به همین صورت است. به علاوه اوپلرنشان داد که ضرایب ترکیب خطی در هر زمان را می توان از روی ضرایب ترکیب خطی زمانهای قبل به دست آورد. او برای انجام این کار همان محاسباتی را انجام داد که ما در بخش بعد، برای به دست آوردن یکی از خواص جمعهای مثلثاتی، انجام می دهیم، همان خاصیتی که این جمعها را در تحلیلی سیستمهای LTI مفید ساخته است. به بیان روشنتر، خواهیم دید که اگر ورودی یک سیستم LTI به صورت ترکیب خطی توابع نمایی مختلط متناوب یا سینوسی بیان شود، خروجی را نیز می توان به همان شکل بیان کرد و ضرایب خروجی را به سروشی سراسر است برحسب ضرایب ورودی به دست آورد. خاصیتی که در بالا ذکر کردیم فایده چندانی نخواهد داشت، مگر این که بتوان توابع زیادی را به صورت ترکیب خطی توابع نمایی مختلط نشان داد. بحث برسر این نکته در اواسط قرن هیجدهم بسیار داغ بود. در ۱۷۵۳ دانیل برنولی بر مبنای شواهد فیزیکی استدلال کرد که تمام حرکات فیزیکی تا را می توان به صورت ترکیب خطی وجه های طبیعی بیان کرد، ولی او این کار را از نظر ریاضی دنبال نکرد و نظر او پذیرش عام نیافت. در واقع خود او پلر هم سربهای مثلثاتی را کنار گذاشت و در ۱۷۵۹ ژوزف لویی لاگرانژ کاربردهای سربهای مثلثاتی را در بررسی تار مرتعش شدیداً مورد انتقاد قرار داد. انتقاد او بر اعتقاد او دایر بر غیر ممکن بودن نمایش سیگنالهای گوشه دار (یعنی باشیب ناپیوسته) برحسب سربهای مثلثاتی استوار بود. اگر تار را بکشیم و سپس رها کنیم چنین حالتی پیش می آید. به همین دلیل لاگرانژ می گفت سربهای مثلثاتی کاربرد بسیار محدودی دارد.



شکل ۳-۱: وجه های هنجار تار مرتعش (خطوط پیوسته هر وجه را در یک لحظه ثابت زمانی نشان می دهد).

فوریه در ۲۱ مارس ۱۷۶۸، در اوسر فرانسه متولد شد و زمانی که در جدالهای مربوط به سریهای مثلثاتی وارد شد، یک زندگی تجربه را پشت سر داشت. در نظر گرفتن شرایط آن دوران کارهای فراوان او را مخصوصاً در مورد سری و تبدیل فوریه، برجسته تر می کند. کشفهای انقلابی او، گرچه در زمان حیاتش به اندازه کافی مورد تقدیر قرار نگرفت، ولی در پیشبرد ریاضیات اثر عمده ای داشت و در حوزه بسیار وسیعی از کارهای عملی و مهندسی اهمیت زیادی داشته و دارد.



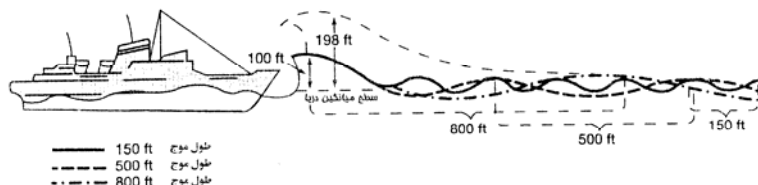
شکل ۳-۲: ژان باپتیست فوریه

فوریه علاوه بر کارهای ریاضی، زندگی سیاسی فعالی هم داشت. طی سالهای بعد از انقلاب فرانسه فعالیتهايش تقريباً او را به سقوط کشاند و دو مورد مختلف تا پای گیوتین هم پیش رفت. بعدها فوریه یکی از همراهان ناپلئون بناپارت، در سفر به مصر شد (در این سفر اطلاعاتی جمع آوری کرد که مبنای رساله مصر شناسی او شد) و در سال ۱۸۰۲ توسط ناپلئون به فرمانداری یک ناحیه فرانسه، واقع در گرنوبل، منصوب شد. در آنجا بود که ضمن انجام وظایف مربوط به فرمانداری، مطالب مربوط به سریهای مثلثاتی را پی ریزی کرد. محرک فوریه در این کار، پدیده انتشار و نفوذ حرارت بود. این کار به خودی خود قدم مهمی بود زیرا اکثر پژوهشهای قبلی فیزیکی ریاضی تنها به مکانیک سماوی و تعقلی مربوط می شد. فوریه در سال ۱۸۰۷ کار خود را کامل کرد، او دریافت که سریهای سینوسی مرتبط هارمونیک در نمایش توزیع دما در یک جسم مفیدست. او همچنین ادعا کرد که هر سیگنال متناوبی را می توان با این سریها نمایش داد. گرچه کار فوریه در این موضوع شایان توجه بود، ولی بسیاری از مطالب پشتیبان آن توسط دیگران کشف شده بود همچنین استدلالهای ریاضی فوریه دقیق نبوده، شرایطی دقیقی که تحت آن می توان یک سیگنال متناوب را با سری فوریه بیان کرد، در ۱۸۲۹ توسط پ.ل. دیریکله بیان شد.

بنابراین فوریه، واقعاً راجع به نظریه ریاضی سری فوریه کاری نکرده است. اما او این بینش روشن را داشت که توان بالقوه نمایش باین سریها را ببیند، کارها و ادعاهای او محرک بیشتر کارهای بعدی بر روی سری فوریه بود. علاوه بر اینها، فوریه در این نوع نمایش، گام بسیار بزرگی نسبت به پشتیبان خود برداشت، او سیگنالهای غیر متناوب را- نه به صورت حاصل جمع وزن دار سینوسیهای همانگ- بلکه با انتگرال وزن دار سینوسیهای غیر هماهنگ نمایش داد.

انتگرال یا تبدیل فوریه هم مثل سری فوریه یکی از قویترین ابزارهای تحلیل سیستمهای LTI است.

س.ف. لاکروا ، گ. مونز و لاپلاس موافق انتشار مقاله بودند، ولی چهارمین نفر ، ژل لاگرانژ ، در عقیده ۵۰ سال قبل خود ، راجع به رد سربهای مثلثاتی سرسخت ماند . به خاطر اعتراضات سخت لاگرانژ ، مقاله فوریه هرگز چاپ نشد . فوریه پس از چند بار تلاش برای قبولاندن مقاله به انستیتو دو فرانس ، ویراست دیگری از کار خود را به صورت کتاب نظریه تحلیلی گرما منتشر کرد . این کتاب در سال ۱۸۲۲ ، ۱۵ سال بعد از ارائه مقاله فوریه به انستیتو چاپ شد .



شکل ۳-۳: کشتی با جمع سه موج که هر یک تناوب مکانی متفاوتی دارند، روبرو شده است. در جایی که این سه موج همدیگر را تقویت می کنند موجبلندی تولید می شود. وقتی دریا طولفانی است ممکن است موج بسیار بلندی که با خط چین نشان داده شده است تولید شود. مکانی که موج ها هم را تقویت می کنند توسط فاز نسبی مولفه های جمع شونده تعیین می شود (از شکلی رسم شده توسط P. Mion در مقاله "Nightmare Are All Too Real to Deepwater Sailors" نوشته P. Britton در مجله

Smithsonian شماره ۶۴-۶۵، feb. ۱۹۷۸).

فوریه در اواخر عمر تاحدی به معروفیتی که شایسته آن بود دست یافت ، ولی مهمترین ستایش از او، استفاده از کارهایش در رشته های مختلف ریاضی، علوم ومهندسی است. نظریه انتگرالگیری، توپولوژی مجموعه های نقطه ای، و بسط به توابع ویژه تنها چند نمونه از مباحث ریاضی ریشه گرفته از کارهای فوریه هستند. همچنین غیر ارتعاش و پخش گرما، مسائل بیشماری در علوم ومهندسی هستند که سیگنالهای سینوسی ودر نتیجه سری وتبدیل فوریه، نقش عمده ای در آنها ایفا می کند . بریا مثال در توصیف رفتار متناوب آب وهوای زمین ، سیگنالهای سینوسی به طور طبیعی ظاهر می شوند . منابع AC ولتاژ وجریان سینوسی تولید می کنند ، وچنان که خواهیم دید تحلیل فوریه ابزاری برای بررسی پاسخ سیستمهای LTI ، مثل مدار ، به این ورودیها هستند . همچنین طبق شکل ۳-۳ امواج اقیانوس هم از ترکیب خطی امواج سینوسی با تناوب مکانی ، یا طول موج های مختلف تشکیل شده اند . سیگنالهایی که ایستگاههای رادیو وتلوویزیون پخش می کنند هم ماهیت سینوسی دارند . یک نگاه سریع به کتابهای مربوط به تحلیل فوریه ، گستره کاربردهای شامل سیگنالهای سینوسی وکاربردهایی را که تحلیل فوریه ابزار قوی آنها هستند، نشان می دهد .

گرچه بسیاری از کاربردهای بیان شده دربالا، همینطور کارهای خود فوریه ومعاصران او در مسائل فیزیک ریاضی به پدیده های پیوسته در زمان مربوط است ، ولی ابزارهای تحلیل فوریه برای سیگنالها وسیستمهای گسسته در زمان ریشه های تاریخی خود را دارد ودر مجموعه وسیعی از کاربردها استفاده می شود. روشهای گسسته در زمان مخصوصاً در حوزه تحلیل عددی اهمیت بنیادی دارند. فرمولهای پردازش مجموعه اطلاعات عددی برای یافتن تقریبهایی از انتگرال، مشتق وغیره به قرن هفدهم وخود نیوتن برمی گردد . همچنین پیش بینی حرکت کرات سماوی، باداشتن یک رشته مجزا از مشاهدات مربوط به آن کرات ، انگیزه تحقیق در مورد سربهای هارمونیکی در قرن ۱۸ و۱۹، توسط دانشمندان

سیستمهای گسسته در زمان انجام می شد .

در اواسط دهه ۱۹۶۰ الگوریتمی، که اکنون تبدیل فوریه سریع یا FFT خوانده می شود ، معرفی شد . این الگوریتم که توسط کولی و توکی ، به طور مستقل از هم ، کشف شد تاریخی غنی دارد و می توان ریشه آن را دفترچه گوس دنبال کرد . آنچه کشف نوین آن را با اهمیت کرد ، این بود که FFT برای پیاده سازی به صورت دیجیتال بسیار مناسب است و زمان لازم برای محاسبه تبدیلهای را چند مرتبه توانی کوچک می کند.

با این ابزار بسیاری از ایده های جالب، که قبلاً غیر عملی تلقی می شدند، به کمک سری و تبدیل فوریه گسسته در زمان عملی شدند و گسترش روشهای تحلیل سیگنال و سیستم گسسته در زمان شتاب گرفت .

ثمره این تاریخ طولانی ، چهارچوبی منسجم و قوی برای تحلیل سیگنالها و سیستمهای پیوسته و گسسته در زمان و فهرستی متنوع از کاربردهای بالفعل و بالقوه است . در این فصل و فصلهای بعد ابزارهای اساسی این چهارچوب را پی می ریزیم و چند کاربرد مهم آن را بررسی می کنیم .

۳-۲ پاسخ سیستمهای LTI پیوسته در زمان نمایی های مختلط

چنان که در بخش ۳-۰ گفتیم در بررسی سیستمهای LTI نمایش سیگنالها به صورت ترکیب خطی سیگنالهای پایه بسیار مفیدست . این سیگنالهای پایه باید دو خاصیت زیر را داشته باشند :

باید بتوان سیگنالهای مفید متعددی را براساس این سیگنالهای پایه ای ساخت .

پاسخ سیستم LTI به هر سیگنال پایه باید ساختاری آنچنان ساده داشته باشد که بتوان پاسخ سیستم را به هر سیگنال ساخته شده به صورت ترکیب خطی این سیگنالهای پایه به آسانی نمایش داد .

اساساً اهمیت تحلیل فوریه از این حقیقت سرچشمه می گیرد که سیگنالهای نمایی مختلط گسسته و پیوسته در زمان ، یعنی سیگنالهای به شکل e^{st} پیوسته در زمان و z^n گسسته در زمان به ازای z, s مختلط، این خصوصیات را دارند. در بخشهای بعدی این فصل و دو فصل بعد ، خاصیت اول را به تفصیل بررسی می کنیم. در این بخش خاصیت دوم را بررسی می کنیم تا انگیزه ای برای کاربرد سری و انتگرال فوریه در تحلیل سیستمهای LTI فراهم شود .

اهمیت توابع نمایی مختلط در مطالعه سیستمهای LTI در این حقیقت ریشه دارد که پاسخ سیستم به ورودی نمایی مختلط ، همان تابع نمایی مختلط تنها با یک تغییر دامنه است ، یعنی

$$e^{st} \rightarrow H(S)e^{st} \quad (۱-۳)$$

$$z^n \rightarrow H(Z)z^n \quad (۲-۳)$$

که در آن ضرب مختلط دامنه $H(S)$ یا $H(Z)$ در حالت کلی تابعی از متغیر مختلط S یا Z است. سیگنالی که پاسخ سیستم به آن، حاصل ضرب یک ثابت (احتمالاً مختلط) در ورودی است، تابع ویژه آن سیستم، و ضرب دامنه مقدار ویژه آن سیستم نامیده می شود .

برای این که نشان دهیم توابع نمایی مختلط واقعاً توابع ویژه سیستمهای LTI هستند، یک سیستم LTI پیوسته در زمان با پاسخ ضربه $h(t)$ در نظر می گیریم . خروجی سیستم به ازای ورودی $x(t)$ رامی توان با استفاده از انتگرال

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau \quad (3-3)$$

رابطه صورت $e^{st}e^{-s\tau}$ می نویسیم وباتوجه به این که e^{st} را می توان از انتگرال بیرون آورد ، به دست می آوریم

$$y(t) = e^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \quad (4-3)$$

بافرض این که انتگرال سمت راست معادله (3-4)همگراست، پاسخ به e^{st} به صورت زیرست

$$y(t) = H(S)e^{st} \quad (5-3)$$

که در آن $H(S)$ ثابت مختلطی وابسته به S است که رابطه آن با پاسخ ضربه سیستم عبارت است از

$$H(S) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \quad (6-3)$$

بنابراین نشان دادیم که تابع نمایی مختلط تابع ویژه سیستمهای LTI است. برای هر مقدار مشخص S ، ثابت $H(S)$ مقدار ویژه متناظر با تابع ویژه e^{st} است .

به شیوه ای کاملاً مشابه می توانیم نشان دهیم که رشته های نمایی مختلط توابع ویژه سیستمهای LTI گسسته در زمان هستند. یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h\{n\}$ و ورودی زیر در نظر بگیرد .

$$x\{n\} = z^n \quad (7-3)$$

که در آن z یک عدد مختلط است. پس خروجی سیستم را می توان به کمک جمع کانولوشن به صورت زیر تعیین کرد

$$\begin{aligned} y\{n\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h\{k\}x\{n-k\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h\{k\}z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h\{k\}z^{-k} \end{aligned} \quad (8-3)$$

این عبارت نشان می دهد که اگر ورودی $x\{n\}$ یک نمایی مختلط به صورت معادله (3-7)باشد، بافرض همگرا بودن جمع سمت راست معادله (3-8)، می توان خروجی را حاصلضرب همان نمایی مختلط در ثابتی دانست که به مقدار z بستگی دارد. یعنی

$$y\{n\} = H(z)z^n \quad (9-3)$$

که در آن

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h\{k\}z^{-k} \quad (10-3)$$

پس همانند حالت پیوسته در زمان، نمایی های مختلط توابع ویژه سیستمهای LTI گسسته در زمان هستند ثابت $H(Z)$ به ازای هر مقدار Z ، مقدار ویژه تابع Z^n است .

بایک مثال فایده تجزیه سیگنالهای عمومی برحسب توابع ویژه را در تحلیل سیستمهای LTI نشان می دهیم . فرض کنید $x(t)$ ترکیب خطی سه تابع نمایی مختلط باشد ؛ یعنی

باتوجه به خاصیت توابع ویژه پاسخ سیستم به هریک از این جمله چنین است

$$a_1 e^{s_1 t} \rightarrow a_1 H(S_1) e^{s_1 t}$$

$$a_2 e^{s_2 t} \rightarrow a_2 H(S_2) e^{s_2 t}$$

$$a_3 e^{s_3 t} \rightarrow a_3 H(S_3) e^{s_3 t}$$

طبق خاصیت جمع آثار پاسخ سیستم به حاصل جمع برابر حاصل جمع پاسخهاست ، یعنی

$$y(t) = a_1 H(S_1) e^{s_1 t} + a_2 H(S_2) e^{s_2 t} + a_3 H(S_3) e^{s_3 t} \quad (12-3)$$

به طور کلی، در حالت پیوسته در زمان، معادله (3-5) و خاصیت جمع آثار نشان می دهند که نمایش سیگنالها به صورت ترکیب خطی نمایی های مختلط به بیان مناسبی برای پاسخ یک سیستم LTI می انجامد .

در واقع اگر ورودی یک سیستم LTI پیوسته در زمان به صورت ترکیب خطی نمایی های مختلط بیان شده باشد، یعنی اگر

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \quad (13-3)$$

آنگاه خروجی عبارت است از

$$y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t} \quad (14-3)$$

به نحوی دقیقاً مشابه، اگر ورودی یک سیستم LTI گسسته در زمان به صورت ترکیب خطی نمایی های مختلط بیان شده باشد ، یعنی اگر

$$x\{n\} = \sum_k a_k z_k^n \quad (15-3)$$

به بیان دیگر، در هر دو حالت گسسته و پیوسته در زمان، اگر ورودی یک سیستم LTI به صورت ترکیب خطی نمایی های مختلط بیان شده باشد، خروجی را نیز می توان به صورت ترکیبی خطی از همان سیگنالهای نمایی مختلط بیان کرد. ضرایب این نمایش خروجی از ضرب ضریب متناظر a_k ورودی و مقدار ویژه سیستم، یعنی $H(S_k)$ یا $H(Z_k)$ متناظر باتوابع ویژه $e^{s k t}$ یا z_k^n به دست می آید. این دقیقاً همان چیزی است که اوایل برای ریسمان مرتعش کشف کرد، و فوریه و دیگران را به بررسی امکان نمایش سیگنالها به صورت ترکیب خطی نمایی های مختلط ترغیب کرد. در چند بخش بعد این مسئله را برای سیگنالهای متناوب، ابتدا در حالت پیوسته در زمان سپس در حالت گسسته در زمان بررسی می کنیم. در فصلهای 4 و 5 به تعمیم این نمایشها برای سیگنالهای غیر متناوب می پردازیم. گرچه تحلیل فوریه توجه ما را به شکلهای خاصی از این متغیرها جلب می کند. در حالت پیوسته در زمان به مقادیر موهومی خالص s ، یعنی $s = j\omega$ می پردازیم و بنابراین تنها نمایی های مختلطی به شکل $e^{j\omega t}$ رادر نظر می گیریم. به نحوی مشابه در حالت گسسته در زمان تنها به مقادیری از z علاقمندیم که اندازه ای برابر یک دارند، یعنی $z = e^{j\omega}$ پس تنها نمایی های مختلطی به شکل $e^{j\omega n}$ را مدنظر داریم .

به عنوان مثالی از کاربرد معادلات (۳-۵) و (۳-۶) یک سیستم LTI در نظر بگیرید که ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ آن باجابجایی زمانی زیر به هم مرتبط باشند .

$$y(t) = x(t-3) \quad (۳-۱۷)$$

اگر ورودی این سیستم سیگنال نمایی مختلط $x(t) = e^{j2t}$ باشد، باتوجه به معادله (۳-۱۷) داریم

$$y(t) = e^{j2(t-3)} = e^{-j6} e^{j2t} \quad (۳-۱۸)$$

معادله (۳-۱۸) به صورت معادله (۳-۵) است، و همچنین انتظار را هم داشتیم، زیرا e^{j2t} تابع ویژه است . مقدار ویژه متناظر $H(j2) = e^{-j6}$ است. محاسبه معادله (۳-۶) برای این سیستم کار ساده ای است. طبق معادله (۳-۱۷) پاسخ ضربه این سیستم $h(t) = \delta(t-3)$ است. با جایگذاری در معادله (۳-۶) به دست می آوریم .

$$H(S) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau-3) e^{-s\tau} d\tau = e^{-3s}$$

پس $H(j2) = e^{-3s}$

به عنوان مثالی دیگر از معادلات (۳-۱۱) و (۳-۱۲)، سیگنال ورودی $x(t) = \cos(4t) + \cos(7t)$ را در نظر بگیرید. صد البته، باتوجه به معادله (۳-۱۷) خروجی $y(t)$ عبارت است از

$$x(t) = \cos(4(t-3)) + \cos(7(t-3)) \quad (۳-۱۹)$$

برای این که نشان دهیم معادله (۳-۱۲) نیز همین جواب را به دست می دهد ، ابتدا $x(t)$ را به کمک رابطه اویلر بسط می دهیم :

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{j4t} + \frac{1}{2} e^{-j4t} + \frac{1}{2} e^{j7t} + \frac{1}{2} e^{-j7t} \quad (۳-۲۰)$$

از معادلات (۳-۱۱) و (۳-۱۲) به دست می آوریم

$$y(t) = \frac{1}{2} e^{-j12} e^{j4t} + \frac{1}{2} e^{j12} e^{-j4t} + \frac{1}{2} e^{-j21} e^{j7t} + \frac{1}{2} e^{j21} e^{-j7t}$$

یا

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2} e^{j4(t-3)} + \frac{1}{2} e^{-j4(t-3)} + \frac{1}{2} e^{j7(t-3)} + \frac{1}{2} e^{-j7(t-3)} \\ &= \cos(4(t-3)) + \cos(7(t-3)) \end{aligned}$$

در این مثال ساده ضرب هر مولفه نمایی متناوب $x(t)$ (مثلاً $\frac{1}{2} e^{j4t}$) در مقدار ویژه متناظرش (مثلاً e^{-j12}) باعث می شود ورودی ۳ واحد زمانی جابجا شود. واضح است که در این حالت می توانیم $y(t)$ معادله (۳-۱۹) را به صورت ذهنی بنویسیم تا لازم نباشد از معادلات (۳-۱۱) و (۳-۱۲) استفاده کنیم. ولی چنانچه خواهیم دید خاصیت عمومی در معادلات (۳-۱۱) و (۳-۱۲) هم محاسبه پاسخ سیستمهای LTI پیچیده تر را ممکن می کند و هم اساس نمایش و تحلیل سیستمهای LTI در حوزه فرکانس رافراهم می سازد .

۳-۲-۱ ترکیب خطی توابع نمایی مختلط مرتبط هارمونیکی

طبق تعریف ارائه شده در فصل ۱، سیگنالی متناوب است که به ازای یک مثبت غیر صفر T داشته باشیم

$$x(t) = x(t+T) \quad \text{به ازای تمام مقادیر } T \quad (۱۲-۳)$$

دوره تناوب پایه $x(t)$ کوچکترین مقدار غیر صفر T است که معادله (۳-۲۱) را ارضای کند، و مقدار $\omega_0 = 2\pi/T$ نیز فرکانس پایه نامیده می شود.

در فصل ۱ دو سیگنال متناوب هم تعریف کردیم، سیگنال سینوسی

$$x(t) = \cos \omega_0 t \quad (۲۲-۳)$$

ونمایی مختلط متناوب

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \quad (۲۳-۳)$$

هر دوی این سیگنالها با فرکانس پایه ω_0 و دوره تناوب پایه $q = 2\pi/\omega_0$ منسوب اند. متناظر با سیگنال معادله (۳-۲۲) یک مجموعه نمایی مختلط مرتبط هارمونیکی وجود دارد

$$p_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk(2\pi/T)t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (۲۴-۳)$$

فرکانس پایه هریک از این سیگنالها مضربی از ω_0 است. بنابراین همه آنها با دوره تناوب T متناوب اند. (البته به ازای $|k| \geq 2$ دوره تناوب پایه $\phi_k(t)$ کسری از T است) پس یک ترکیب خطی توابع نمایی مختلط هماهنگ به صورت زیر

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t} \quad (۲۵-۳)$$

نیز تابعی متناوب، با دوره تناوب T است. جمله $K = 0$ معادله (۳-۲۵) یک جمله ثابت است هر دو جمله متناظر با $k = -1, k = +1$ دارای فرکانس پایه ω_0 هستند و مولفه های پایه، یا مولفه های هماهنگ اول نامیده می شوند. دو جمله $k = -2, k = +2$ با نصف دوره تناوب مولفه پایه (پایه طور معادل با ۲ برابر فرکانس مولفه پایه) متناوب اند و مولفه های هماهنگ دوم نامیده می شوند. به طور کلی مولفه های $k = -N, k = +N$ هماهنگ $-N$ نام دارند. نمایش یک سیگنال متناوب، به صورت معادله (۳-۲۵)، نمایش سری فوریه خوانده می شود قبل از پرداختن به خصوص این نمایش، یک مثال می زنیم.

مثال ۳-۲

یک سیگنال متناوب $x(t)$ ، با فرکانس پایه 2π در نظر بگیرید که به صورت معادله (۳-۲۵) بیان شده باشد.

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk2\pi t} \quad (۲۶-۳)$$

و در آن

$$a_0 = 1 \quad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4}$$

$$a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2} \quad a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$$

با جمع کردن مولفه های هم فرکانس می توانیم معادله (۳-۲۶) را به شکل زیر درآوریم

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) + \frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}) \quad (۱۲-۱)$$

همچنین به کمک رابطه اویلر می توان $x(t)$ را به صورت زیر نوشت

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3} \cos 6\pi t \quad (۲۸-۳)$$

در شکل ۳-۴ نشان داده ایم که سیگنال $x(t)$ چگونه از ترکیب این مولفه ها ساخته می شود.

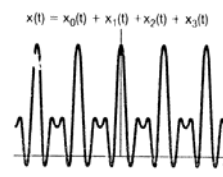
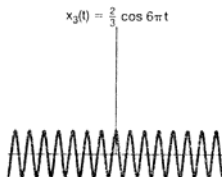
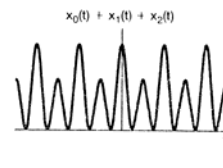
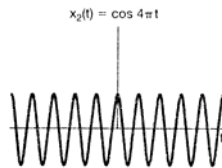
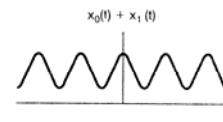
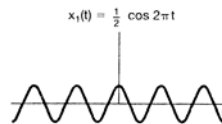
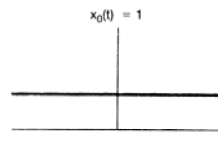
معادله (۲۸-۳) نمونه ای از شکل دیگر سری فوریه حقیقی متناوب است فرض کنید

$x(t)$ حقیقی است و می توان آن را به صورت معادله (۲۵-۳) نوشت. چون $x(t) = x^*(t)$ داریم

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t}$$

اگر در جمع به جای k قرار دهیم $-k$ به دست می آوریم

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$$



شکل ۳-۴: ساختن سیگنال $x(t)$ معادله (۲-۳) به صورت ترکیبی خطی از سیگنال های سینوسی مرتبط هارمونیک

مقایسه این معادله و معادله (۲۵-۳) نشان می دهد که $a_k = a_{-k}^*$ یا به طور معادل

$$a_k^* = a_{-k} \quad (۲۹-۳)$$

توجه کنید که در مثال ۲-۳ چنین وضعیتی داریم، در واقع a_k ها حقیقی اند و داریم $a_k^* = a_{-k}$

$$x(t) = a_o + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k e^{jk\omega_o t} + a_{-k} e^{-jk\omega_o t}\}$$

با گذاشتن a_k^* به جای a_{-k} ، برطبق معادله (۲۹-۳) به دست می آوریم

$$x(t) = a_o + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k e^{jk\omega_o t} + a_k^* e^{-jk\omega_o t}\}$$

چون دو جمله داخل کروشه مزدوج مختلط یکدیگرند می توان آنها را به شکل زیر بیان کرد

$$x(t) = a_o + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}\{a_k e^{jk\omega_o t}\} \quad (30-3)$$

اگر a_k ها را به شکل قطبی زیر بنویسیم

$$a_k = A_K e^{j\theta_k}$$

معادله (۳۰-۳) به صورت زیر درمی آید

$$x(t) = a_o + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}\{A_K e^{j(k\omega_o t + \theta_k)}\}$$

یعنی

$$x(t) = a_o + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_K \cos(k\omega_o t + \theta_k) \quad (31-3)$$

معادله (۳۱-۳) شکل متداول سری فوریه برای توابع متناوب حقیقی پیوسته در زمان است. با نوشتن a_k به صورت قائم زیر

$$a_k = B_K + jC_K$$

که در آن B_K, C_K حقیقی اند، می توان سری فوریه را به شکل دیگری نوشت. به ازای این a_k معادله (۳۰-۳) به صورت زیر در می آید.

$$x(t) = a_o + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \{B_K \cos k\omega_o t - C_K \sin k\omega_o t\} \quad (32-3)$$

در مثال ۲-۳ تمام a_k ها حقیقی اند، یعنی $a_k = A_K = B_K$ و بنابراین هر دو نمایش (۳۱-۳) و (۳۲-۳) به همان شکل معادله (۲۸-۳) درمی آیند.

پس بریا توابع متناوب حقیقی، سری فوریه برحسب توابع نمایی مختلط، به صورت معادله (۲۵-۳)، از نظر ریاضی با هریک ازدو شکل مثلثاتی بیان شده در معادله های (۳۱-۳) و (۳۲-۳) هم ارزست. گرچه دو معادله اخیر، شکل متداول سری فوریه اند، ولی شکل نمایی مختلط معادله برای مقاصد ما مناسبترست و تقریباً به طور انحصاری این شکل را به کار می بریم.

معادله (۲۹-۳) یکی از خواص متعدد سری فوریه را نشان می دهد. این خواص برایکسب بینش و همچنین برای محاسبه بسیار مفیدند و دربخش ۳-۸ به جمع آوری مهمترین آنها می پردازیم. اثبات بعضی از آنها به مسایل انتهایی

۳-۲-۳ یافتن نمایش سری فوریه سیگنالهای متناوب پیوسته در زمان

فرض این که بتوان سیگنال متناوب مفروضی را به سری به صورت سری فوریه (۳-۲۵) نمایش داد، باید روشی برای تعیین ضرایب a_k داشت. با ضرب دو طرف معادله (۳-۲۵) در $e^{-jn\omega_0 t}$ به دست می آوریم

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} \quad (۳-۳۳)$$

از دو طرف معادله در فاصله 0 تا $T = 2\pi/\omega_0$ انتگرال می گیریم

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt$$

T دوره تناوب پایه $x(t)$ است، بنابراین انتگرالگیری روی یک دوره تناوب انجام می شود. باعرض کردن جای جمع و انتگرال به دست می آوریم

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left\{ \int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt \right\} \quad (۳-۳۴)$$

محاسبه انتگرال داخل کروشه کاری سر راست است. این انتگرال را به کمک رابطه اویلر بازنویسی می کنیم

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \int_0^T \cos(k-n)\omega_0 t dt + j \int_0^T \sin(k-n)\omega_0 t dt \quad (۳-۳۵)$$

به ازای $k \neq n$ ، جمله های $\cos(k-n)\omega_0 t$ ، $\sin(k-n)\omega_0 t$ توابع سینوسی با دوره تناوب پایه $T/|k-n|$ هستند. بنابراین در معادله (۳-۳۵)، روی فاصله ای (به طول T) که مضرب صحیحی از دوره تناوب این سیگنالهاست انتگرال می گیریم. چون انتگرال را می توان با مساحت زیر منحنی این توابع در فاصله مورد نظر برابر دانست، هر دو انتگرال سمت راست معادله (۳-۳۵) به ازای $k \neq n$ صفرند. به ازای $k=n$ ، عبارت زیر انتگرال سمت چپ معادله (۳-۳۵) برابر یک است بنابراین حاصل انتگرال برابر T است

پس داریم

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

و در نتیجه، طرف راست معادله (۳-۳۴) برابر Ta_n است. سرانجام به دست می آوریم

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (۳-۳۶)$$

که معادله ای برای محاسبه ضرائب است. به علاوه توجه کنید که در محاسبه معادله (۳-۳۵) تنها نکته ای که در مورد فاصله انتگرالگیری گفتیم این بود که در فاصله ای به طول T انتگرال می گیریم؛ این فاصله مضرب صحیحی از دوره-تناوبهای $\cos(k-n)\omega_0 t$ ، $\sin(k-n)\omega_0 t$ است. بنابراین اگر انتگرالگیری روی هر فاصله به طول T را با F_T نشان

دهیم، داریم

$$J_T e^{ju} = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

و در نتیجه

$$a_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (37-3)$$

به طور خلاصه، اگر $x(t)$ نمایش سری فوریه داشته باشد (یعنی بتوان آن را به صورت ترکیب خطی توابع نمایی مختلط هماهنگ، مطابق معادله (3-25) نشان داد)، ضرایب سری باید مطابق معادله (3-37) باشد.

پس دو معادله ای که سری فوریه سیگنالهای پیوسته در زمان متناوب را تعریف می کنند عبارت اند از

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t} \quad (38-3)$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk(2\pi/T)t} dt \quad (39-3)$$

این عبارتها را هم برحسب فرکانس پایه ω_0 نوشته ایم و هم برحسب زمان تناوب پایه T . معادله (3-38) را معادله ترکیب و معادله (3-39) را معادله تجزیه می نامند. ضرایب $\{a_k\}$ ضرایب سری فوریه یا ضرایب طیفی $x(t)$ نامیده می شوند. این ضرایب مختلط سهم هر هماهنگ مولفه اصلی در طیف $x(t)$ را نشان می دهند.

ضریب a_0 مقدار dc یا مولفه ثابت $x(t)$ است و با گذاشتن $k=0$ در معادله (3-39) به دست می آید. یعنی

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt \quad (40-3)$$

که میانگین $x(t)$ در یک دوره تناوب است. هم اوایلر و هم لاگرانژ، در اواسط قرن هجدهم با معادلات (3-38) و (3-39) آشنا بودند. ولی بدون توجه به اینکه چه گستره وسیعی از توابع را می توان به این صورت نشان داد، موضوع را رها کردند. قبل از پرداختن به این مطلب چند مثال در مورد نمایش سری فوریه می زنیم.

مثال 3-3

سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$x(t) = \sin \omega_0 t$$

فرکانس پایه این سیگنال ω_0 است. یک راه تعیین ضرایب سری فوریه یان سیگنال به کار بردن معادله (3-39) است. ولی در مورد این سیگنال ساده بسط سیگنال سینوسی به صورت ترکیب خطی نمایی های مختلط و تشخیص نظری ضرایب سری فوریه ساده تر است. دقیقتر این که می توانیم $\sin \omega_0 t$ را به صورت زیر بیان کنیم

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2kj} e^{-j\omega_0 t}$$

$$a_1 = \frac{1}{2j}, a_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

$$a_k = 0 \quad k \neq \pm 1$$

مثال ۳-۴

فرض کنید

$$x(t) = 1 + \sin \omega_o t + 2 \cos \omega_o t + \cos \left(2\omega_o t + \frac{\pi}{4} \right)$$

که دارای فرکانس پایه ω_o است. بازهم مانند مثال ۳-۳ را برحسب نمایی های مختلط بسط می دهیم .

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2j} \{ e^{j\omega_o t} - e^{-j\omega_o t} \} + \{ e^{j\omega_o t} + e^{-j\omega_o t} \} + \frac{1}{2} \{ e^{j(2\omega_o t + \pi/4)} - e^{-j(2\omega_o t + \pi/4)} \}$$

با جمع جملات مشابه به دست می آوریم

$$x(t) = 1 + \left(1 + \frac{1}{2j}\right) e^{j\omega_o t} + \left(1 - \frac{1}{2j}\right) e^{-j\omega_o t} + \left(\frac{1}{2} e^{j(\pi/4)}\right) e^{j2\omega_o t} + \left(\frac{1}{2} e^{-j(\pi/4)}\right) e^{-j2\omega_o t}$$

بنابراین ضرایب سری فوریه این مثال عبارت اند از

$$a_o = 1$$

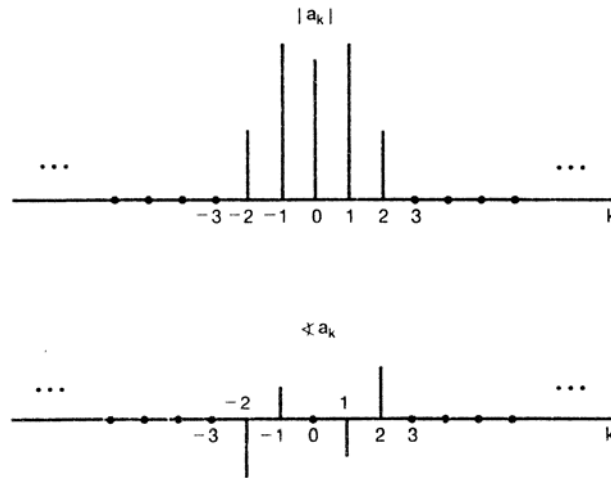
$$a_1 = \left(1 + \frac{1}{2j}\right) = 1 - \frac{1}{2}j$$

$$a_{-1} = \left(1 - \frac{1}{2j}\right) = 1 + \frac{1}{2}j$$

$$a_2 = \frac{1}{2} e^{j(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + j)$$

$$a_{-2} = \frac{1}{2} e^{-j(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - j)$$

$$a_k = 0, |k| > 2$$



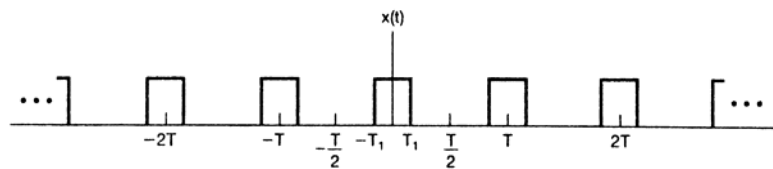
شکل ۳-۵: نمودار دامنه و فاز ضرایب فوریه سیگنال مثال ۳-۴

مثال ۳-۵

موج چهار گوش شکل ۳-۶، در یک دوره تناوب به صورت زیر تعریف می شود

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases} \quad (3-41)$$

در این کتاب با این سیگنال به کرات روبرو خواهیم شد. این سیگنال با دوره تناوب پایه T و فرکانس پایه $\omega_0 = 2\pi/T$ متناوب است.



شکل ۳-۶: موج چهارگوش متناوب

برای تعیین ضرایب سری فوریه $x(t)$ معادله (۳-۳۹) را به کار می بریم. به خاطر تقارن $x(t)$ حول $t=0$ بهترین فاصله انتگرالگیری را $-T/2 \leq t < T/2$ برگزینیم، البته هر فاصله ای به طول T نیز برای این کار مجازست و نتیجه ای واحدی به دست می دهد. با استفاده از این فاصله، و گذاشتن این حدود انتگرالگیری در معادله (۳-۴۱) ابتدا به ازای $K=0$ به دست می آوریم

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T} \quad (3-42)$$

قبلاً هم گفتیم که a_0 مقدار متوسط $x(t)$ است، که در این حالت برابرست با کسری از دوره تناوب که در آن $x(t)=1$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1}$$

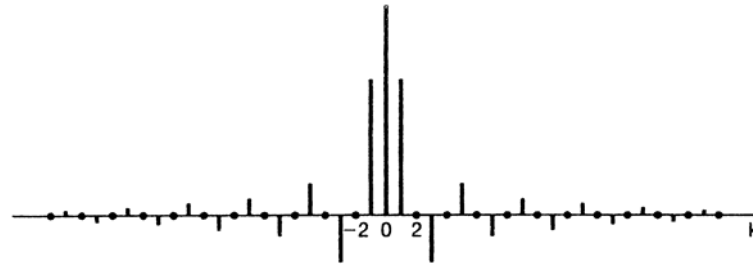
که می توان آن را به شکل زیر نوشت

$$a_k = \frac{2}{k\omega_0 T} \left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j} \right] \quad (۴۳-۳)$$

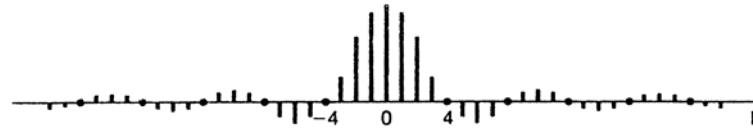
باتوجه به این که جمله داخل کروشه $\sin k\omega_0 T_1$ است ، ضرائب a_k را می توان به صورت زیر نوشت

$$a_k = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{K\omega_0 T} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{K\pi}, K \neq 0 \quad (۴۴-۳)$$

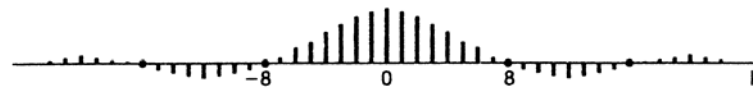
که در آن از $\omega_0 T = 2\pi$ استفاده کرده ایم .



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۳-۷: نمودارهای ضرائب T_{ak} سری فوریه موج چهارگوش متناوب به ازای ثابت و چند مقدار T : (الف) $T = 4T_1$ ؛ (ب) $T = 8T_1$ ؛ (ج) $T = 16T_1$. ضرائب نمونه های همفاصله پوش $(2\sin \omega T_1)/\omega$ هستند، فاصله بین نمونه ها $2\pi/T$ است که با افزایش T کم می شود.

شکل ۳-۷ نمودار میله ای ضرائب سری فوریه این مثال را نشان می دهد. در این شکل ضرائب به ازای یک مقدار T_1 معین و چند مقدار T رسم شده اند. برای این مثال خاص ضرائب فوریه حقیقی اند، بنابراین می توان آنها را روی یک نمودار ترسیم کرد. البته در حالت کلی ضرائب فوریه مختلط اند، بنابراین برای نشان داد نشان دو نمودار، برای بخشهای حقیق وموهومی، یادامنه وفاز لازم است. به ازای $T = 4T_1$ ، یک موج چهار گوش است که نصف تناوب (ونصف

$$a_k = \frac{\sin(\pi k / 2)}{k\pi}, k \neq 0 \quad (45-3)$$

همچنین

$$a_0 = \frac{1}{2} \quad (46-3)$$

معادله (45-3) نشان می دهد که به ازای k های زوج و غیر صفر $a_k = 0$ همچنین $\sin(\pi k / 2)$ به ازای مقادیر فرد k ، متناوباً $+1$ و -1 می شود . بنابراین

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{\pi}$$

$$a_3 = a_{-3} = -\frac{1}{3\pi}$$

$$a_5 = a_{-5} = \frac{1}{5\pi}$$

۳-۴ همگرایی سری فوریه

اوایلر و لاگرانژ به مثالهای ۳-۳ و ۳-۴ اعتراضی نداشتند ، ولی مثال ۳-۵ اعتراضشان را برمی انگیزد ، زیرا $x(t)$ ناپیوسته است ، ولی تمام مولفه های هارمونیک آن پیوسته اند . ولی فوریه همین مثال را در نظر گرفت و مدعی شد که نمایش سری فوریه آن معتبرست. در حقیقت فوریه ادعا کرد که هر سیگنال متناوبی را می توان با سری فوریه نمایش داد ، که موج چهار گوش و بقیه سیگنالهای مطرح در این کتاب و مهم از لحاظ عملی هم از آن جمله اند .

برای درک مثال موج چهار گوش و به طور کلی اعتبار نمایش سری فوریه ، ابتدا به مسئله تقریب سیگنال متناوب $x(t)$ با ترکیب خطی تعداد محدودی سیگنال نمایی مختلط هماهنگ ، یعنی سری محدودی به شکل زیر ، می پردازیم

$$x_N(t) = \sum_{K=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (47-3)$$

$e_N(t)$ را خطای تقریب بگیرد ، یعنی

$$e_N(t) = x(t) - x_N(t) = x(t) - \sum_{K=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (48-3)$$

برای تعیین میزان خوب بودن هر تقریب ، باید معیاری برای اندازه گیری خطای تقریب داشته باشیم . معیاری که ما به کار می بریم انرژی خطا در یک دوره تناوب است ، یعنی

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (49-3)$$

مقایسه معادله های (۳-۵۰) و (۳-۳۹) نشان می دهد که معادله (۳-۵۰) همان عبارتی است که برای تعیین ضرایب سری فوریه به کار می رود. بنابراین اگر $x(t)$ نمایش سری فوریه داشته باشد ، بهترین تقریب برای نمایش تابع با تعداد محدودی تابع نمایی مختلط ، سری فوریه ای است که جملات بعد از جمله N ام آن حذف شده باشد. با افزایش N ،

حد E_N به ازای $N \rightarrow \infty$ برابر صفر است.

حال به این مسئله می‌رسیم که چه موقعی سیگنال متناوب $x(t)$ نمایش سری فوریه دارد. البته می‌توانیم برای هر سیگنالی معادله (۳-۳۹) را به کار ببریم و مجموعه‌ای از ضرائب فوریه بیابیم. ولی در بعضی موارد انتگرال معادله (۳-۳۹) واگراست، یعنی مقدار بعضی a_k ها ممکن است بینهایت شود. ولی حتی اگر تمام ضرائب به دست آمده از معادله (۳-۳۹) محدود باشند، باز ممکن است با گذاشتن این ضرائب در معادله ترکیب (۳-۳۸) سری نامحدود حاصل به سیگنال $x(t)$ همگرا نشود.

خوشبختانه برای دسته‌های وسیعی از سیگنالهای متناوب مشکل همگرایی وجود ندارد. مثلاً تمام سیگنالهای متناوب پیوسته نمایش سری فوریه دارند، به نحوی که به ازای $N \rightarrow \infty$ انرژی E_N به صفر میل کند این مسئله در مورد بسیاری از سیگنالهای ناپیوسته هم صادق است. چون سیگنالهای ناپیوسته مثل سیگنال چهارگوش مثال قبل را در بخشهایمان بسیار به کار می‌بریم، بجاست که مسئله همگرایی را به تفصیل بررسی کنیم. برای تضمین داشتن نمایش سری فوریه، تابع متناوب می‌تواند دو دسته شرط نسبتاً مختلف را ارضا می‌کند. در بحث راجع به این شرایط نمی‌کوشیم استدالهای دقیق ریاضی ارائه کنیم؛ بررسیهای دقیقتر را می‌توان در اکثر کتابهای مربوط به تحلیل فوریه پیدا کرد. یک دسته از سیگنالهای متناوب که می‌توان آنها را با سری فوریه نمایش داد، سیگنالهایی اند که در یک تناوب انرژی محدودی دارند؛ یعنی سیگنالهایی که برایشان

$$\int_T |x(t)|^2 dt < \infty \quad (۳-۵۱)$$

بأبرآورده شدن این شرط، محدود بودن ضرائب a_k محاسبه شده از معادله (۳-۳۹) تضمین می‌شود.

همچنین فرض کنید که $x_N(t)$ تقریب $x(t)$ است که با استفاده از این ضرائب، با $|k| \leq N$ ، به دست آمده است:

$$x_N(t) = \sum_{K=-N}^N a_k e^{jk\omega t} \quad (۳-۵۲)$$

در این صورت تضمین می‌شود که انرژی E_N خطای تقریب، که به صورت معادله (۳-۴۹) تعریف می‌شود، به ازای $N \rightarrow \infty$ (یعنی با افزودن تعداد جملات بیشتر) به صفر می‌گراید. یعنی اگر توصیف کنیم

$$e(t) = x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega t} \quad (۳-۵۳)$$

آنگاه

$$\int_T |e(t)|^2 dt = 0 \quad (۳-۵۴)$$

همان طور که در یکی از مثالهای آخر این بخش خواهیم دید، از معادله (۳-۵۴) چنین بر نمی‌آید که سیگنال $x(t)$ و نمایش سری فوریه آن

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega t} \quad (۳-۵۵)$$

همگرایی تضمین شده برای $x(t)$ دارای انرژی محدود در یک دوره تناوب همگرایی مفیدی است. در این صورت معادله (۳-۵۴) می گوید انرژی تفاضل $x(t)$ و نمایش سری فوریه آن صفرست. چون سیستمهای فیزیکی به انرژی سیگنال پاسخ می دهند، از این دیدگاه $x(t)$ و نمایش سری فوریه اش غیر قابل تشخیص اند. چون اکثر سیگنالهای متناوبی که در نظر می گیریم، در یک دوره تناوب انرژی محدودی دارند، می توان آنها را به صورت سری فوریه نمایش داد. ولی شرایط دیگری توسط پ.ل. دیر یکله بیان شده و اساساً تمام سیگنالهایی که در نظر خواهیم گرفت این شرایط را برآورده می کنند. این شرایط تضمین می کنند که $x(t)$ و نمایش سری فوریه آن به ازای تمام مقادیر t برابرند، مگر در نقاط مجزایی که در آنها $x(t)$ ناپیوسته است. در این نقاط سری نامحدود معادله (۳-۵۵) به مقدار متوسط سیگنال دو طرف ناپیوستگی می گراید.

شرایط دیر یکله چنین اند:

شرط ۱. $x(t)$ روی هر دوره تناوب مطلقاً انتگرالپذیر باشد، یعنی

$$\int_T |x(t)| dt < \infty \quad (۳-۵۶)$$

این شرط نیز مثل شرط محدود بودن انرژی، محدود بودن a_k ها را تضمین می کند، زیرا

$$|a_k| \leq \frac{1}{T} \int_T |x(t) e^{-jk\omega t}| dt = \frac{1}{T} \int_T |x(t)| dt$$

پس اگر

$$\int_T |x(t)| dt < \infty$$

$$|a_k| < \infty$$

آنگاه

سیگنال زیر شرط اول دیریکله را نقض می کند

$$x(t) = \frac{1}{t} \quad 0 < t \leq 1$$

-این سیگنال با دوره تناوب ۱ متناوب است و در شکل ۳-۸(الف) داده شده است.

شرط ۲. تعداد تغییرات $x(t)$ باید در هر فاصله زمانی محدودی کراندار باشد؛ یعنی سیگنال باید در هر دوره تناوب تعداد محدودی ماکزیمم و می نیمم داشته باشد. تابع زیر نمونه ای از توابعی است که شرط ۱ را برآورده می کند ولی شرط دوم رانه

$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), 0 < t \leq 1 \quad (۳-۵۷)$$

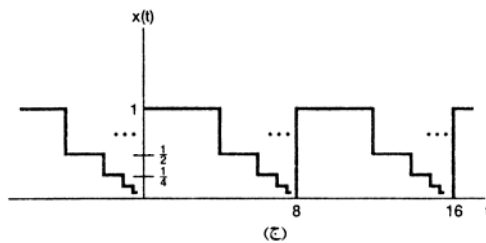
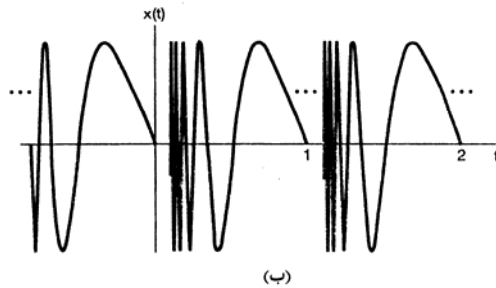
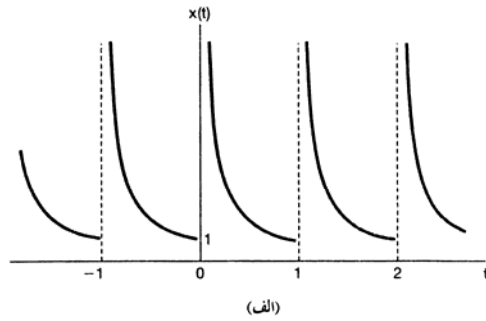
این تابع در شکل ۳-۸(ب) نشان داده شده است.

برای این تابع (که با دوره تناوب ۱ متناوب است) داریم

$$\int_0^1 |x(t)| dt < 1$$

ولی این تابع در هر دوره تناوب بینهایت ماکزیمم و می نیمم دارد.

باشد. یک نمونه از توابعی که شرط ۳ را نقض می کند در شکل ۳-۸ (ج) نشان داده شده است. این سیگنال با دوره تناوب $T=8$ از تعداد نامحدودی قطعه تشکیل شده است که هر کدام نصف طول و نصف ارتفاع قطعه قبلی را دارد. پس مساحت زیر یک تناوب تابع مطمئناً کمتر از ۸ است. ولی تعداد ناپیوستگیها در هر دوره تناوب بینهایت است و شرط ۳ نقض می شود.



شکل ۳-۸: سیگنال هایی که شرایط دیریکله را نقض می کنند: (الف) سیگنال $x(t)=1/t$ در $0 < t \leq 1$ با دوره تناوب ۱ (این سیگنال شرط اول دیریکله را نقض می کند)؛ (ب) سیگنال متناوب معادله (۳-۵۷) که شرط دوم دیریکله را نقض می کند؛ (ج) سیگنال متناوبی با دوره تناوب ۸ که شرط سوم دیریکله را نقض می کند در $0 < t \leq 8$ هر گاه فاصله t از ۸ نصف می شود، مقدار $x(t)$ هم نصف می شود؛ یعنی در $0 \leq t < 4$ ؛ $x(t)=1$ ، در $4 \leq t < 6$ ، $x(t)=\frac{1}{2}$ ، در $4 \leq t < 7.5$ ؛ $x(t)=\frac{1}{4}$ ، و به همین ترتیب).

همان طور که از مثالهای شکل ۳-۸ برمی آید سیگنالهایی که شرایط دیریکله را برآورده نمی کنند طبیعتاً ناخوش اند

سیگنالهای متناوب پیوسته، نمایش سری فوریه در هر مقدار T همگرا وبا سیگنال اصلی برابرست. برای سیگنالهای متناوب دارای تعداد محدودی ناپیوستگی، سری فوریه در تمام نقاط، جز نقاط مجزای ناپیوستگی، برابر سیگنال اصلی است، ودر نقاط ناپیوستگی به مقدار میانگین دو طرف ناپیوستگی میل می کند. در این حالت تفاوت سیگنال اصلی ونمایش سری فوریه آن انرژی ندارد ومی توان از لحاظ عملی دو سیگنال را معادل گرفت. در حقیقت چون سیگنال ونمایش آن تنها در نقاط ناپیوستگی باهم متفاوت اند، انتگرال هر دو سیگنال روی هر فاصله ای یکسان است. به همین خاطر سیگنال تحت کانولوشن یکسان عمل می کنند واز لحاظ تحلیل سیستمهای LTI یسکان اند. برای درک بیشتر چگونگی همگرایی سری فوریه یک سیگنال دارای ناپیوستگی، به مثال موج چهارگوش برمی گردیم.

درسال ۱۸۹۸آلبرت مایکلسون، فیزیکدان امریکایی یک تحلیگر هماهنگ ساخت؛ وسیله ای که برای هر سیگنال متناوب $x(t)$ ، تقریب سری فوریه معادله $(3-52)$ را تا $N=80$ حساب می کرد. مایکلسون دستگاه خود را با سیگنالهای بسیاری آزمایش کرد وچنان که انتظارمیرفت $x_N(t)$ بسیار شبیه $x(t)$ بود.

ولی وقتی او موج چهارگوش را امتحان کرد نتیجه مهم، ودرنظر او بسیار عجیبی، حاصل شد. مایکلسون به رفتاری که مشاهده کرده بود علاقمند شد و فکر کرد دستگاه اومعیوب است. او در این مورد به جوزیا گیبس نامه نوشت، گیبس مسئله را مورد تحقیق قرار داد وتفسیر خود را در ۱۸۹۹منتشر کرد.

مشاهده مایکلسون درشکل $(3-9)$ نشان داده شده است. در این شکل برای یک موج متقارن $x(t)$ و $x_N(t)$ (با $T = 4T_1$) به ازای چند مقدار N رسم شده است. در هر مورد حاصل جمع جزئی بر روی موج چهار گوش اصلی قرار گرفته است. چون موج چهار گوش شرایط دیریکله را برآورده می کند، به ازای $N \rightarrow \infty$ ، حد $x_N(t)$ باید برابر میانگین ناپیوستگی باشد. شکل نشان می دهد که واقعاً چنین است، زیرا به ازای هر مقدار N ، $x_N(t)$ دقیقاً از میانگین ناپیوستگی می گذرد. از این گذشته برای هر مقدار t مثلاً $t = t_1$ تضمین کرده ایم که

$$N \rightarrow \infty x_N(t_1) = x(t_1)$$

بنابراین سطح زیر مجذور خطای نمایش سری فوریه موج چهار گوش، چهارگوش معادلات $(3-53)$ و $(3-54)$ ، باید صفر باشد. در این مثال، اثر جالبی که مایکلسون دید این بود که حاصل جمع جزئی جملات سری در مجاورت ناپیوستگی تموج دارد، ودامنه این تموج ظاهراً باافزایش N کم نمی شود. گیبس نشان داد که مسئله واقعاً به همین صورت است. اگر ارتفاع ناپیوستگی یک باشد، صرف نظر از اینکه N چقدر بزرگ باشد، قله تموج به $1/0.9$ می رسد (یعنی فراجهبشی برابر 9% ارتفاع ناپیوستگی وجود دارد) در تعبیر این مسئله باید دقت کرد.

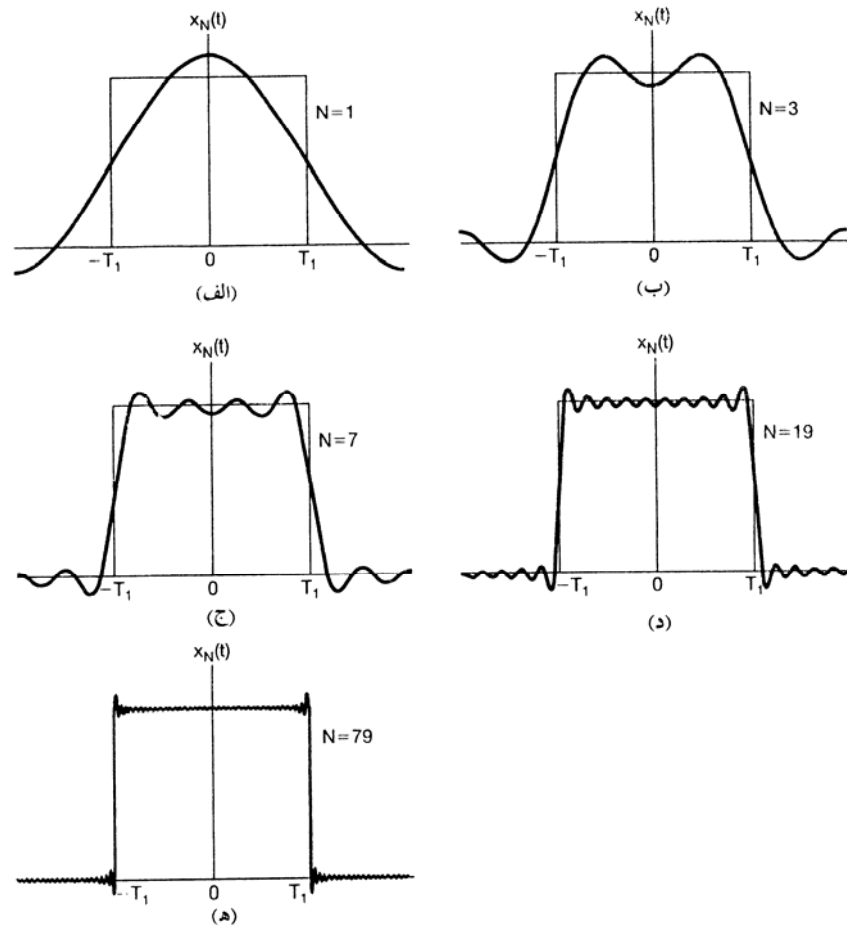
همان طور که قبلاً گفتیم برای هر مقدار ثابت t ، مثلاً $t = t_1$ حاصل جمع جزئی به مقدار واقعی سیگنال ودر ناپیوستگیها به میانگین دو طرف ناپیوستگی میل می کند و ولی هر چه t_1 به ناپیوستگی نزدیکتر باشد برای رساندن اختلاف به زیر یک حد معین، باید N را بزرگتر برگزید. بنابراین با افزایش N ، تموج حاصل جمع جزئی به سمت ناپیوستگی رانده می شود، ولی به ازای هر مقدار محدود N ، دامنه اوج تموج ثابت می ماند.

این اثر را پدیده گیبس می نامند. مفهوم ضمنی این پدیده این است که تقریب سری فوریه $x_N(t)$ سیگنالهای

بریم باید N آنقدر بزرگ باشد که انرژی کل این موج ناچیز باشد. البته در حد انرژی خطای تقریب صفرست و سری فوریه سیگنالهای ناپیوسته، مثل موج چهار گوش، همگرا هستند.

۳-۵- خواص سری فوریه پیوسته در زمان

چنانچه قبلاً گفتیم نمایش سری فوریه خواص مهمی دارد که برای دستیابی به بینش مفهومی نسبت به این نمایش مفیدند، و می توانند پیچیدگی های محاسباتی یافتن سری فوریه بسیاری از سیگنالها را کاهش دهند. این خواص در جدول ۳-۱ خلاصه شده اند، و بعضی از آنها در مسائل انتهای فصل مورد بررسی قرار گرفته اند و در فصل ۴، که در آن تبدیل فوریه را پی می ریزیم، خواهیم دید که اکثر این خواص را می توان از خواص متناظر تبدیل فوریه پیوسته در زمان استنتاج کرد. به همین خاطر در اینجا خود را به بحث در مورد چند خاصیت محدود می کنیم و چگونگی اثبات، تعبیر و کاربردشان را نشان می دهیم.



شکل ۳-۹: همگرایی سری فوریه موج مستطیلی: نمایشی از پدیده گیبس. در اینجا تقریب سری محدود

$$x(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega t}$$

طی بحث زیر در مورد خواص برگزیده ای از جدول ۳-۱، کاربرد یک نماد اختصاری برای نشان دادن رابطه بین سیگنال متناوب و ضرائب سری فوریه آن را مفید می یابیم. $x(t)$ را یک سیگنال متناوب با دوره تناوب T و فرکانس پایه $\omega = 2\pi/T$ فرض کنید. اگر ضرائب سری فوریه $x(t)$ را با a_k نشان دهیم، می توانیم نماد زیر را برای نشان دادن رابطه بین سیگنال و ضرائب سری فوریه به کار ببریم.

$$x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k$$

۳-۵-۱- خطی بودن

$x(t)$ و $y(t)$ را دو سیگنال متناوب با دوره تناوب T فرض کنید که ضرائب سری فوریه شان به ترتیب a_k و b_k باشد. یعنی

$$x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k$$

$$y(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} b_k$$

چون $x(t)$ و $y(t)$ زمان تناوب یکسانی دارند، به سادگی می توان نتیجه گرفت که هر ترکیب خطی این دو سیگنال نیز با دوره تناوب T متناوب است. به علاوه ضرائب سری فوریه c_k ترکیب خطی $x(t)$ و $y(t)$ ، $z(t) = Ax(t) + By(t)$ را می توان با همان ترکیب خطی ضرائب سری فوریه $x(t)$ و $y(t)$ به دست آورد، یعنی

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} c_k = Aa_k + Bb_k \quad (3-58)$$

اثبات این رابطه به سادگی و با توسل به معادله (۳-۳۹) صورت می گیرد. همچنین توجه کنید که خاصیت خطی بودن را می توان به ترکیب خطی هر تعداد سیگنال دارای دوره تناوب T تعمیم داد.

۳-۵-۲- جابجایی زمانی

وقتی یک سیگنال متناوب $x(t)$ جابجا می شود، زمان تناوب T آن تغییر نمی کند. ضرائب سری فوریه b_k سیگنال $y(t) = x(t - t_0)$ را می توان به صورت زیر یافت

$$b_k = \frac{1}{T} \int_T x(t - t_0) e^{-jk\omega t} dt \quad (3-59)$$

با تغییر متغیر $\tau = t - t_0$ و توجه به این که حدود انتگرال نسبت به متغیر جدید τ همان T است، به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_T x(\tau) e^{-jk\omega(t_0 + \tau)} d\tau &= e^{-jk\omega t_0} \frac{1}{T} \int_T x(\tau) e^{-jk\omega \tau} d\tau = \\ e^{-jk\omega t_0} a_k &= e^{-jk(\pi/T)t_0} a_k \end{aligned}$$

که در آن a_k ضریب k ام سری فوریه $x(t)$ است. یعنی اگر

آنگاه

$$x(t - t_0) \overset{FS}{\leftrightarrow} e^{-jk\omega_0 t} a_k = e^{-jk(\pi/T)t} a_k$$

یک نتیجه این خاصیت این است که اگر یک سیگنال متناوب جابجا شود، اندازه ضرائب سری فوریه آن تغییر نمی کنند. یعنی $|a_k| = |b_k|$.

۳-۵-۳- وارونگی زمانی

اگر سیگنال متناوب وارونگی زمانی پیدا کند، زمان تناوب آن تغییر نمی کند. برای تعیین ضرائب سری فوریه $y(t)=x(-t)$ اثر وارونگی زمانی بر معادله ترکیب (۳-۳۸) را بررسی می کنیم.

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk\omega_0 t} \quad (۳-۶۱)$$

$$y(t) = x(-t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{-m} e^{-jk\omega_0 t} \quad (۳-۶۲)$$

می بینیم که سمت راست این معادله همان شکل معادله ترکیب سری فوریه برای $x(-t)$ را دارد، که ضرائب سری فوریه آن عبارت اند از b_k

$$b_k = a_{-k} \quad (۳-۶۳)$$

یعنی اگر

$$x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k$$

آنگاه

$$x(-t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_{-k}$$

به عبارت دیگر وارونگی زمانی کی سگینال پیوسته در زمان به وارونگی رشته ضرائب سری فوریه آن منجر می شود. یکی از نتایج جالب خاصیت وارونگی زمانی این است که اگر $x(-t)=x(t)$ یعنی اگر $x(t)$ زوج باشد، ضرائب سری فوریه آن نیز زوج اند، یعنی $a_k=a_{-k}$. به نحوی مشابه اگر $x(t)$ فرد باشد. یعنی $x(-t)=-x(t)$ ضرائب سری فوریه آن نیز فردند، یعنی $a_{-k} = -a_k$.

۳-۵-۴- تغییر مقیاس زمانی

تغییر مقیاس زمانی عملی است که در حالت کلی زمان تناوب سیگنال را تغییر می دهد. اگر $x(t)$ با دوره تناوب T و فرکانس پایه $\omega_0 = 2\pi/T$ متناوب باشد، آنگاه $x(at)$ ، به ازای a حقیق مثبت، با دوره تناوب T/a و فرکانس پایه $a\omega_0$ متناوب است. چون عمل تغییر مقیاس زمانی روی تمام مولفه های هارمونیک $x(t)$ عمل می کند. به سادگی می توان نتیجه گرفت که ضرائب فوریه هارمونیکها تغییر نمی کنند. یعنی اگر $x(t)$ نمایش سری فوریه ای به شکل

معادله (۳-۳۸) داشته باشد، آنگاه نمایش سری فوریه $x(at)$ به صورت زیرست

$$x(\omega t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk(\omega t)} T$$

تاکید می کنیم که گرچه ضرائب سری فوریه تغییر نمی کنند، ولی به خاطر تغییر فرکانس پایه، نمایش سری فوریه تغییر می کند.

۳-۵-۵- ضرب

فرض کنید $x(t)$ و $y(t)$ با دوره تناوب T متناوب اند و

$$x(t) \stackrel{FS}{\leftrightarrow} a_k$$

$$y(t) \stackrel{FS}{\leftrightarrow} b_k$$

چون حاصل ضرب $y(t)x(t)$ نیز با دوره تناوب T متناوب است، می توانیم ضرائب سری فوریه h_k را بر حسب ضرائب سری فوریه $x(t)$ و $y(t)$ بیان کنیم نتیجه عبارت است از

$$x(t)y(-t) \stackrel{FS}{\leftrightarrow} h_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l} \quad (۳-۶۴)$$

یک راه یافتن این رابطه ضرب کردن ضرائب سری فوریه $x(t)$ و $y(t)$ به این نکته است که مولفه هارمونیک k مجموع جملاتی به صورت $a_l b_{k-l}$ است (مسئله ۳-۶۴ را ببینید) توجه کنید که جمع طرف راست معادله (۳-۶۴) را می توان به عنوان کانولوشن گسسته در زمان رشته های نشان دهنده ضرائب سری فوریه $x(t)$ و $y(t)$ تعبیر کرد.

۳-۵-۶- تقارن مزدوج

گرفتن مزدوج سیگنال متناوب $x(t)$ باعث می شود که ضرائب سری فوریه مزدوج و وارونه شوند یعنی اگر آنگاه

$$x(t) \xrightarrow{FS} ak$$

$$x^*(t) \xrightarrow{FS} a - k^* \quad (۳-۶۵)$$

این نتیجه را می توان به سادگی با گرفتن مزدوج مختلط دو طرف معادله (۳-۳۸) و گذاشتن $-k$ به جای k ثابت کرد. به ازای $x(t)$ حقیقی - یعنی $x(t) = x^*(t)$ - می توان نتیجه جالبی از این خاصیت گرفت. در این حالت طبق معادله (۳-۶۵) ضرائب سری فوریه تقارن مزدوج دارند، یعنی

$$a - k = ak^* \quad (۳-۶۶)$$

که همان معادله (۳-۲۹) است. این به نوبه خود تقارنهای مختلفی برای اندازه فاز، بخش حقیقی، و بخش موهومی ضرائب سری فوریه نتیجه می دهد (که همگی در جدول ۳-۱ درج شده اند) برای نمونه اگر $x(t)$ حقیقی باشد، a_0 حقیقی است و طبق معادله (۳-۶۶)

$$|a_k| = |a - k|$$

همچنین اگر $x(t)$ حقیقی و زوج باشد، طبق بخش ۳-۵-۳ داریم $a_k = a - k$ همچنین معادله (۳-۶۶) نشان می دهد

مشابه می توان نشان داد که اگر $x(t)$ حقیقی و فرد باشد، ضرائب سری فویه آن موهومی خالص و فردند پس اگر $x(t)$ حقیقی و فرد باشد، $a_0 = 0$ این خواص و دیگر خواص تقارن سری فوریه در مسئله ۳-۴۲ بیشتر شکافته شده اند.

۳-۵-۷ رابطه پارسوال برای سیگنال متناوب پیوسته در زمان

در مسئله ۳-۴۶ نشان داده شده است که برای سیگنالهای متناوب پیوسته در زمان رابطه پارسوال عبارت است از

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \quad (۳-۶۷)$$

که در آن a_k ضرائب سری فوریه $x(t)$ و T دوره تناوب سیگنال است.

توجه کنید که طرف چپ معادله (۳-۶۷) توان متوسط (یعنی انرژی بر واحد زمان) یک دوره تناوب سیگنال متناوب $x(t)$ است همچنین

$$\frac{1}{T} \int_T |a_k e^{jk\omega_0 t}|^2 dt = \frac{1}{T} \int_T |a_k|^2 dt = |a_k|^2 \quad (۳-۶۸)$$

پس $|a_k|^2$ توان متوسط مولفه هارمونیک k ام $x(t)$ است. پس رابطه پارسوال می گوید توان متوسط کار یک سیگنال متناوب با مجموع توان متوسط تمام هارمونیکهای آن برابرست.

۳-۵-۸ خلاصه سری فوریه پیوسته در زمان

خواص مهم سری فوریه پیوسته در زمان در جدول ۳-۱ خلاصه شده است.

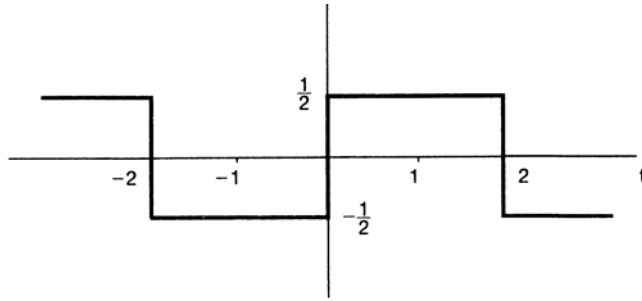
۳-۵-۹ مثالها

خواص سری فوریه، می توانند برای غلبه بر مشکلات جبری تعیین ضرائب سری فوریه سیگنالها به کار روند این امر را در سه مثال زیر روشن می کنیم مثال آخر نشان می دهد که چطور می توان خواص یک سیگنال را برای مشخص کردن جزییات سیگنال به کار برد.

مثال ۳-۶

سیگنال $g(t)$ شکل ۳-۱۰ با دوره تناوب ۴ را در نظر بگیرید می توانیم نمایش سری فوریه $g(t)$ را مستقیماً از معادله (۳-۳۹) به دست آوریم به جای این کار رابطه $g(t)$ با موجب چهار گوش متناوب متقارن $x(t)$ مثال ۳-۵ را به کار می بریم با توجه به آن مثال می بینیم که به ازای $T=4$ و $T_1=1$ داریم

$$g(t) = x(t-1) - \frac{1}{2} \quad (۳-۶۹)$$



شکل ۳-۱۰: سیگنال متناوب مثال ۳-۶

خاصیت جابجایی زمانی جدول ۳-۱ نشان می دهد که اگر ضرائب سری فوریه سیگنال $x(t)$ به صورت a_k باشد، ضرائب $x(t-1)$ به صورت زیرست.

$$b_k = a_k e^{-jk\pi/2} \quad (۷۰-۳)$$

ضرائب سری فوریه آفست dc سیگنال $g(t)$ یعنی جمله ??? طرف راست معادله (۳-۶۹) عبارت اند از

$$c_k = \begin{cases} 0 & , k \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & , k = 0 \end{cases} \quad (۷۱-۳)$$

یا اعمال خاصیت خطی بودن جدول ۳-۱ ضرائب سری فوریه $g(t)$ را به صورت زیر می باییم.

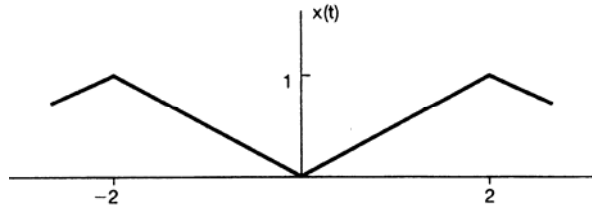
$$c_k = \begin{cases} a_k e^{-jk\pi/2} & , k \neq 0 \\ a_0 - \frac{1}{2} & , k = 0 \end{cases}$$

حال a_k را با توجه به معادلات (۳-۴۵) و (۳-۴۶) به دست می آوریم.

$$d_k = \begin{cases} \frac{\sin(\pi k / 2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2} & , k \neq 0 \\ 0 & , k = 0 \end{cases} \quad (۷۲-۳)$$

موج مثلثی $x(t)$ شکل ۱۱-۳ دارای دوره تناوب $T=4$ و فرکانس پایه $\omega_0 = \pi/2$ است مشتق این سیگنال $g(t)$ مثال ۶-۳ است ضرائب سری فوریه $g(t)$ را با d_k و $x(t)$ را با e_k نشان می دهیم و با توجه به خاصیت مشتقگیری مندرج در جدول ۱-۳ داریم.

$$d_k = jk(\pi/2)e_k \quad (۷۳-۳)$$



شکل ۱۱-۳: موج مثلثی مثال ۷-۳

به کمک این معادله می توانیم e_k را بر حسب d_k بیان کنیم بجز e_0 را معادله (۷۳-۳) نشان می دهد که

$$e_k = \frac{2d_k}{jk\pi} = \frac{2 \sin(\pi k / 2)}{j(k\pi)} e^{-jk\pi/2}, k \neq 0 \quad (۷۴-۳)$$

E_0 را می توان با یافتن مساحت زیر $x(t)$ در یک دوره تناوب و تقسیم نتیجه بر دوره تناوب به دست آورد.

$$e_0 = \frac{1}{2}$$

مثال ۸-۳

می خواهیم برخی خواص نمایش سری فوریه یک قطار ضربه متناوب را بررسی کنیم این سیگنال و نمایش آن برحسب نمایشهای مختلط نقش مهمی در مبحث نمونه برداری فصل ۷ باز می کند قطار ضربه دارای دوره تناوب T را می توان به صورت زیر بیان کرد.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \quad (۷۵-۳)$$

این سیگنال در شکل ۱۲-۳ (الف) نشان داده شده است برای تعیین ضرائب سری فوریه a_k معادله (۳۹-۳) را به کار می بریم و فاصله انتگرالگیری را $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ بر می گزینیم تا ضربه ها در دو مرز فاصله قرار نگیرند در این فاصله $x(t)$ برابر $\delta(t)$ است بنابراین،

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk2\pi/T} dt = \frac{1}{T} \quad (۷۶-۳)$$

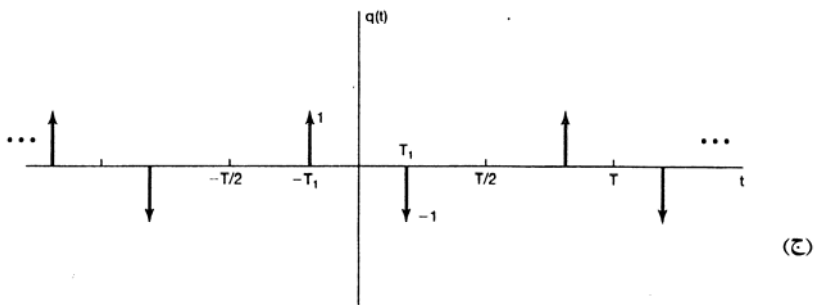
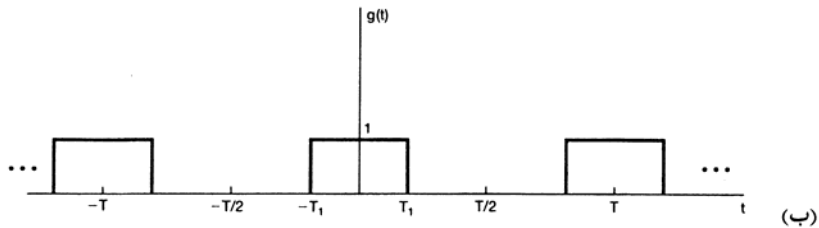
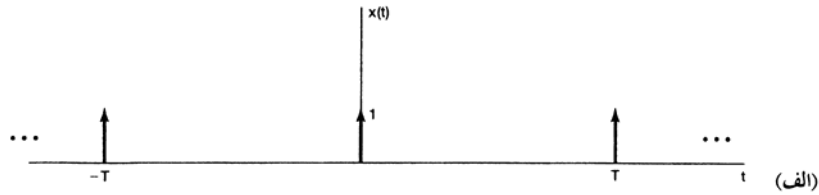
به عبارت دیگر تمام ضرائب سری فوریه قطار ضربه مشابهند ضرائب حقیقی و زوج اند (نسبت به k) همین انتظار را

داشته باشد.

قطار ضربه رابطه سر راستی نیز با موج چهار $g(t)$ شکل ۳-۶ دارد، این موج در شکل ۳-۱ (ب) نشان داده شده است.

شکل ۳-۱۲ (ج) مشتق $g(t)$ یعنی $q(t)$ را نشان می دهد می توانیم $q(t)$ را تفاضل دو قطار ضربه جابجا شده فرض کنیم یعنی

$$q(t) = x(t + T_1) - x(t - T_1) \quad (3-77)$$



شکل ۳-۱۲: (الف) قطار ضربه؛ (ب) موج چهارگوش متناوب؛ (ج) مشتق موج چهارگوش (ب)

حال با توجه به خواص سری فوریه می توانیم ضرائب سری فوریه $q(t)$ و $g(t)$ را بدون توسل به معادله تجزیه به دست آوریم ابتدا با توجه به خاصیت‌های جابجایی زمانی و خطی بودن ضرائب b_k سری فوریه $q(t)$ را برحسب ضرائب سری فوریه a_k سیگنال $x(t)$ می نویسیم یعنی

$$b_k = e^{jk\omega_0 T_1} a_k - e^{-jk\omega_0 T_1} a_k$$

$$b_k = \frac{1}{T} [e^{jk\omega_o T_1} - e^{-jk\omega_o T_1}] = \frac{2j \sin(jk\omega_o T_1)}{t}$$

سرانجام چون $q(t)$ مشتق $g(t)$ است می توانیم به کمک خاصیت مشتقگیری جدول ۳-۱ بنویسیم.

$$b_k = jk\omega_o T_k \quad (۷۸-۳)$$

که c_k ضرائب سری فوريه $G(t)$ هستند پس

$$c_k = \frac{b_k}{jk\omega_o} = \frac{2j \sin(k\omega_o T_1)}{jk\omega_o T} = \frac{\sin(k\omega_o T_1)}{k\pi}, k \neq 0 \quad (۷۹-۳)$$

که در آن از $\omega_o T = 2\pi$ استفاده کرده این توجه کنید که معادله (۷۹-۳) به ازای $k \neq 0$ معتبرست زیرا نمی توان به ازای $k=0$ را از معادله (۷۸-۳) به دست آورد. ولی چون c_0 مقدار متوسط $g(t)$ در یک دوره تناوب است می توانیم با نگاهی به شکل ۳-۱۲ (ب) بنویسیم :

$$c_0 = \frac{2T_1}{T} \quad (۸۰-۳)$$

معادلات (۸۰-۳) و (۷۹-۳) به ترتیب معادلات (۳-۴۲) و (۳-۴۴) هستند که در مثال ۳-۵ به عنوان ضرائب سری فوريه به دست آمدند.

مثال زیر برای نشان دادن کاربرد بسیاری از خواص مندرج در جدول ۳-۱ انتخاب شده است.

مثال ۳-۹

اطلاعات زیر در مورئ سیگنال $x(t)$ داده شده است.

$x(t)$ یک سیگنال حقیقی است.

$x(t)$ دوره تناوب $T=4$ متناوب، و ضرائب سری فوريه آن a_k است.

$$a_k = 0, |k| > 1$$

سیگنال دارای ضرائب فوريه $b_k = e^{-jk\pi/2} a_{-k}$ فرد است.

$$\frac{1}{4} \int_4 |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2}$$

نشان می دهیم که این اطلاعات برای تعیین سیگنال $x(t)$ بجز یک ضریب علامت ؟؟؟ کافی است، طبق اطلاع ۳، $x(t)$ حداکثر سه ضریب فوريه غیر صفر دارد a_0, a_1, a_{-1} چون فرکانس پایه $x(t)$ برابر $\omega_o = 2\pi/4 = \pi/2$ است، داریم :

$$x(t) = a_0 + a_1 e^{j\pi/2} + a_{-1} e^{-j\pi/2}$$

چون $x(t)$ حقیقی است (اطلاع ۱) می توانیم با توجه به خاصیت تقارن جدول ۳-۱ نتیجه بگیریم که a حقیقی است و

$$a_1 = a_{-1}^*$$

$$x(t) = a_0 + a_1 e^{j\pi/2} + (a_1 e^{j\pi/2})^* a_0 + 2R\{a_1 e^{j\pi/2}\} \quad (۸۱-۳)$$

۱ می بینیم که $a-k$ با سیگنال $x(-t)$ متناظرست. همچنین خاصیت جابجایی زمان نشان می دهد که ضرب ضریب k ام در $e^{j\pi/2} = e^{jk\omega_0}$ معادل جابجایی سیگنال به اندازه یک واحد زمانی به راست است (یعنی قرار گرفتن $t-1$ به جای t) پس ضرائب b_k به سیگنال $x((-t-1))=x(-t+1)$ تعلق دارند که طبق اطلاع ۴ باید فرد باشد چون $x(t)$ حقیقی است، $x(-t+1)$ نیز حقیقی است. مطابق جدول ۳-۱ ضرائب سری فوریه $x(-t+1)$ باید مرهومی خالص و فرد باشند. $b_1=0$ و $b_1=-$ چون جابجایی و وارونگی زمانی توان متوسط سیگنال را تغییر نمی دهد اطلاع ۵ برای $x(-t+1)$ نیز صادق است یعنی

$$\frac{1}{4} \int_{-4}^4 |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \quad (۸۲-۳)$$

اکنون می توانیم رابطه پار سوال را به کار برده نتیجه بگیریم که

$$|b_1|^2 + |b_{-1}|^2 = \frac{1}{2} \quad (۸۳-۳)$$

با گذاشتن $b_1 = -b_{-1}$ در این رابطه به دست می آوریم $|b_1| = \frac{1}{2}$ چون b_1 مرهومی خالص است. b_1 باید $J/2$ یا $-j/2$ باشد. حال این اطلاعات را می توان از b_1 و a_1 به a_1 انتقال داد اول این که چون $b_1 = 0$ طبق اطلاع ۴ $a_1 = 0$ این شرط به ازای $k=1$ چنین مینماید که $a_1 = b_{-1} e^{-j\pi/2} = -jb_{-1} = jb_1$ پس اگر فرض کنیم $b_1 = j/2$ ، آنگاه $a_1 = -\frac{1}{2}$ و بنابراین طبق معادله (۸۱-۳) داریم $x(t) = -\cos(\pi/2)$ اگر فرض کنیم $b_1 = -j/2$ ، آنگاه $a_1 = \frac{1}{2}$ و بنابراین $x(t) = -\cos(\pi/2)$.

۳-۶ نمایش سری فوریه سیگنالهای متناوب گسسته در زمان

در این بخش نمایش سری فوریه سیگنالهای متناوب گسسته در زمان را در نظر می گیریم گر چه این مباحث بسیار شبیه مباحث بخش ۳-۳ هستند ولی تفاوتهای مهمی نیز وجود دارد مخصوصاً این که نمایش سری فوریه سیگنال متناوب گسسته در زمان یک سری متناهی است حال آنکه نمایش سری فوریه سیگنال گسسته در زمان متناوب یک سری نامتناهی است بنابراین دیگر مباحث ریاضی مربوط به همگرایی مانند آنچه در بخش ۳-۴ عنوان شد در این حالت مورد ندارد.

۳-۶-۱ ترکیب خطی نمایه‌های مختلط هماهنگ

طبق تعریف فصل ۱ سیگنال گسسته در زمان $x[n]$ به شرطی با دوره متناوب N متناوب است که

$$x[n] = x[n+N] \quad (۸۴-۳)$$

زمان تناوب پایه کوچکترین عدد صحیح مثبت N است که معادله (۸۴-۳) را ارضا می کند، و $\omega_0 = 2\pi/N$ فرکانس پایه نامیده می شود برای مثال نمایه مختلط $e^{j(2\pi/N)n}$ با دوره تناوب N متناوب است به علاوه مجموعه تمام

$$\phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n} = e^{jk(2\pi/N)n}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (85-3)$$

فرکانس پایه تمام این سیگنالها مضربی $2\pi/N$ است بنابراین هماهنگ اند.

چنانچه در بخش ۱-۳-۳ گفتیم تنها N سیگنال متمایز در مجموعه بیان شده در معادله (۸۵-۳) وجود دارد این حقیقت از اینجا ناشی شده است که نمایه‌های گسسته در زمان مختلفی که فرکانسشان با مضربی از 2π تفاوت دارند یکسان هستند یعنی $\phi_1[n] = \phi_{N+1}[n], \phi_0[n] = \phi_N[n]$ و به طور کلی

$$\phi_k[n] = \phi_{k+rN}[n] \quad (86-3)$$

یعنی اگر به k مضرب صحیحی از N افزوده شود، دنباله مشابهی به وجود می آید در حالت پیوسته در زمان وضعیت متفاوتی داشتیم زیرا در این حالت سیگنالهای $\phi_k(t)$ تعریف شده در معادله (۲۴-۳) همگی متفاوت اند. حال می خواهیم دنباله های متناوب را به صورت ترکیب خطی دنباله های $\phi_k[n]$ معادله (۸۵-۳) نمایش دهیم این نمایش به شکل زیرست.

$$x[n] = \sum_k a_k \phi_k[n] = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_k a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (87-3)$$

چون دنباله های $\phi_k[n]$ تنها به ازای N مقدار متوالی k متمایزند جمع معادله (۸۷-۳) تنها باید روی N جمله محاسبه شود بنابراین در جمع بر روی k ، k تنها N عدد صحیح مختلف متوالی به خود می گیرد که می تواند از هر عدد شروع شود این مطلب را با نشان دادن حدود جمع به صورت $k \in \langle N \rangle$ نشان می دهیم یعنی

$$x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k \phi_k[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (88-3)$$

مثلاً k می تواند مقادیر $1, 0, -1, \dots, N-1$ یا $1, 0, 0, \dots, N+2$ را به خود بگیرد در هر حالت طبق معادله (۸۶-۳) در جمع سمت راست معادله (۸۸-۳) وجود دارد دقیقاً همان نمایی های مختلط ظاهر می شوند معادله (۸۸-۳) را سری فوریه گسسته در زمان و a_k را ضرایب سری فوریه می نامند.

۳-۶-۲ تعیین نمایش سری فوریه سیگنال متناوب

حاصل فرض کنید یک رشته متناوب $x[n]$ با دوره تناوب N داده شده است می خواهیم ببینیم آیا برای این رشته نمایشی به شکل معادله (۸۸-۳) وجود دارد یا نه و اگر وجود دارد مقدار ضرایب a_k آن چیستند این مسئله را می توان به صورت یافتن جوابهای یک مجموعه معادله خطی مطرح کرد در حقیقت اگر معادله (۸۸-۳) را به ازای N مقدار متوالی حساب کنیم به دست می آوریم

$$x[0] = \sum_k a_k \quad (89-3)$$

$$x[1] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{j2\pi k/N}$$

$$\sum_{k=\langle N \rangle}^{\wedge}$$

پس معادله (۸۹-۳) N معادله خطی بر حسب N مجهول (ضرایب a_k) را نشان می دهد توان نشان داد که این N معادله مستقل خطی اند بنابراین می توان آنها را حل کرد و ضرایب a_k را بر حسب مقادیر $x[n]$ یافت. در مسئله ۳-۳۲ مثالی را مطرح می کنیم که در آن ضرایب سری فوریه صریحاً با حل N معادله (۸۹-۳) به دست می آیند ولی با گامهایی مشابه حالت پیوسته در زمان می توان عبارت بسته ای برای ضرایب a_k بر حسب مقادیر رشته $x[n]$ به دست آورد. اساس این رابطه، معادله زیرست، که آن را در مسئله ۳-۵۴ اثبات خواهیم کرد.

$$\sum_{n=\langle N \rangle} e^{jk(2\pi/N)n} = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (90-3)$$

معادله (۹۰-۳) می گوید جمع مقادیر یک رشته نمایی مختلط روی یک دوره تناوب صفرست، مگر این که آن نمایی مختلط عددی ثابت باشد.

حال نمایش سری فوریه معادله (۸۸-۳) را در نظر بگیرید دو طرف را در $e^{-jr(2\pi/N)n}$ ضرب می کنیم و N مقدار متوالی آن را جمعه کرده به دست می آوریم.

$$\sum_{k=\langle N \rangle} x[n] e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{n=\langle N \rangle} \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(k-r)(2\pi/N)n} \quad (91-3)$$

با تعویض جای جمعهای طرف راست به دست می آوریم.

$$\sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \sum_{n=\langle N \rangle} e^{jk(k-r)(2\pi/N)n} \quad (92-3)$$

طبق اتحاد معادله (۹۰-۳) جمع داخلی طرف راست معادله (۹۲-۳) برابر صفرست مگر این که $k-r$ صفر یا مضرب صحیحی از N باشد پس اگر مقادیر $k-r$ جمعهای داخل و بیرون را روی یک فاصله انتخاب کنیم جمع معادله (۹۲-۳) به ازای $k=r$ برابر N و به ازای $k \neq r$ برابر صفر می شود پس طرف راست معادله (۹۲-۳) به صورت Na_r است و داریم

$$a_r \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} a[n] e^{-jr(2\pi/N)n} \quad (93-3)$$

به این ترتیب عبارت بسته ای برای یافتن ضرایب سری فوریه به دست می آوریم و زوج سری فوریه گسسته در زمان به صورت زیرست.

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (94-3)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \quad (95-3)$$

این معادلات برای سیگنالهای متناوب گسسته در زمان همان نقشی را دارند که معادلات (۲۸-۳) و (۲۹-۳) برای

ضرائب سری فوریه گسسته در زمان a_k را غالباً ضرایب طیفی $x[n]$ می نامند این ضرایب $x[n]$ را به مجموع N دنباله نمایی مختلط هماهنگ تجزیه می کنند.

با توجه به معادله (۳-۸۸) اگر K را از ۰ تا $N-1$ بگیریم داریم

$$x[n] = a_0 \phi_0[n] + a_1 \phi_1[n] + \dots + a_{N-1} \phi_{N-1}[n] \quad (۳-۹۶)$$

همچنین اگر k را از ۱ تا N بگیریم خواهیم داشت.

$$x[n] = a_1 \phi_1[n] + a_2 \phi_2[n] + \dots + a_N \phi_N[n] \quad (۳-۹۷)$$

طبق معادله (۳-۸۶) $\phi_0[n] = \phi_N[n]$ و مقایسه معادله های (۳-۹۶) و (۳-۹۷) نشان می دهند که $a_0 = a_N$ به نحوی مشابه اگر گستره k را روی N عدد صحیح متوالی دیگر بگیریم و معادله (۳-۸۶) را به کار ببریم، می توانیم نتیجه بگیریم که

$$a_k = a_{k+N} \quad (۳-۹۸)$$

یعنی اگر بیش از N مقدار متوالی برای k در نظر بگیریم مقادیر a_k با دوره تناوب N تکرار می شوند این مسئله را حتماً باید با دقت تعبیر کرد در حقیقت چون تنها N تابع نمایی مختلط متمایز دارای دوره تناوب N وجود دارد نمایش سری فوریه گسسته در زمان یک سری متناهی N جمله ای است پس اگر N مقدار متوالی k را برای تعریف سری فوریه به صورت معادله (۳-۹۴) معین کنیم از معادله (۳-۹۵) دقیقاً N ضریب فوریه به دست می آوریم. ولی گاهی اوقات بهتر است N مقدار متوالی k را شناور بگذاریم و معادله (۳-۹۴) را جمعی بر روی N مقدار متوالی دلخواه بگیریم. به همین خاطر بهتر است a_k را رشته ای در نظر بگیریم که به ازای تمایز مقادیر k تعریف شده است ولی برای نمایش سری فوریه تنها N عضو متوالی آن به کار می رود به علاوه چون با تغییر k ، a_k با دوره تناوب N تکرار می شود [معادله (۳-۸۶)] a_k [معادله (۳-۹۸)] نیز باید چنین باشد. این دیدگاه را در مثال زیر روشن می کنیم.

مثال ۳-۱۰

سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$x[n] = \sin \omega_0 n \quad (۳-۹۹)$$

که همتای گسسته در زمان سیگنال $x(t) = \sin \omega_0 t$ مثال ۳-۳ است. $x[n]$ تنها در صورتی متناوب است که $2\pi/\omega_0$ عدد صحیح با نسبت دو عدد صحیح باشد برای حالتی که $2\pi/\omega_0$ برابر عدد صحیح N است یعنی

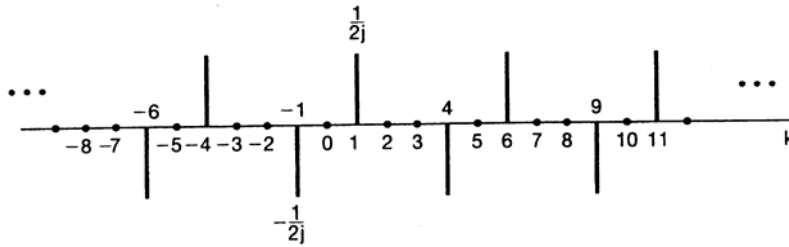
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$X[N]$ با دوره تناوب پایه N متناوب است و نتیجه ای کاملاً مشابه حالت پیوسته در زمان به دست می آید با بسط این سیگنال به صورت دو نمایی مختلط به دست می آوریم.

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{j(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j} e^{-j(2\pi/N)n} \quad (۳-۱۰۰)$$

$$a_1 = \frac{1}{2j}, a_{-1} = -\frac{1}{2j} \quad (101-3)$$

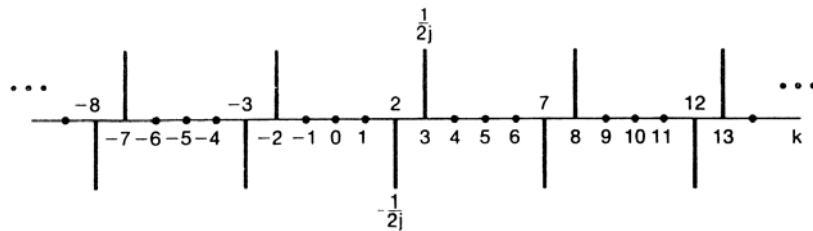
بقیه ضرایب در فاصله جمع‌بندی صفرند. همانطور که قبلاً گفتیم این ضرایب با دوره تناوب N تکرار می‌شوند پس a_{N+1} نیز برابر $1/2j$ ، a_{N-1} برابر $-1/2j$ است شکل ۳-۱۳ ضرایب سری فوریه این مثال را به ازای $N=5$ نشان می‌دهد تکرار ضرایب به صورت متناوب هم مشخص شده است البته در معادله ترکیب (۳-۹۴) تنها یک دوره تناوب به کار می‌رود.



شکل ۳-۱۳: ضرایب فوریه $x[n] = \text{Sin}(2\pi/5)n$

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که $2\pi/\omega_0$ نسبت به دو عدد صحیح است، یعنی

$$\omega_0 = \frac{2\pi M}{N}$$



شکل ۳-۱۴: ضرایب فوریه $x[n] = \text{Sin}3(2\pi/5)n$

اگر N, M عامل مشترک نداشته باشند، دوره تناوب پایه سیگنال $x[n]$ برابر N است بار دیگر $x[n]$ را به صورت مجموع دو نمایی مختلط بسط می‌دهیم.

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{jM(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j} e^{-jM(2\pi/N)n}$$

با تأمل در این عبارت می‌توان نتیجه گرفت که $a_M = (1/2j)$ ، $a_{-M} = (-1/2j)$ و بقیه ضرایب صفرند. شکل ۳-۱۴ ضرایب سری فوریه را به ازای $M=3$ ، $N=5$ نشان می‌دهد در این شکل متناوب بودن ضرایب هم نشان داده شده است. مثلاً به ازای $N=5$ ، $a_3 = a_{-3}$ که برابر $(-1/2j)$ است ولی دقت کنید که در هر تناوبی به طول ۵ تنها دو ضریب غیر صف وجود دارد بنابراین معادله ترکیب تنها از دو جمله تشکیل می‌شود.

سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$x[n] = 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{N}n\right)$$

این سیگنال با دوره تناوب N متناوب است و مثال ۳-۱۰ می توان آن را مستقیماً بر حسب توابع نمایی مختلط بسط داد و به دست آورد.

$$x[n] = 1 + \frac{1}{2j} [e^{j(2\pi/N)n} - e^{-j(2\pi/N)n}] + \frac{3}{2} [e^{j(2\pi/N)n} + e^{-j(2\pi/N)n}]$$

$$+ \frac{1}{2} [e^{j(4\pi/N)n} + e^{-j(4\pi/N)n}]$$

با جمع جملات مشابه به دست می آوریم.

$$x[n] = 1 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2j}\right) e^{j(2\pi/N)n} + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2j}\right) e^{-j(2\pi/N)n}$$

$$+ \left(\frac{1}{2} e^{j\pi/2}\right) e^{j2(2\pi/N)n} + \left(\frac{1}{2} e^{-j\pi/2}\right) e^{-j2(2\pi/N)n}$$

پس ضرایب سری فوریه این مثال عبارت اند از

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}j$$

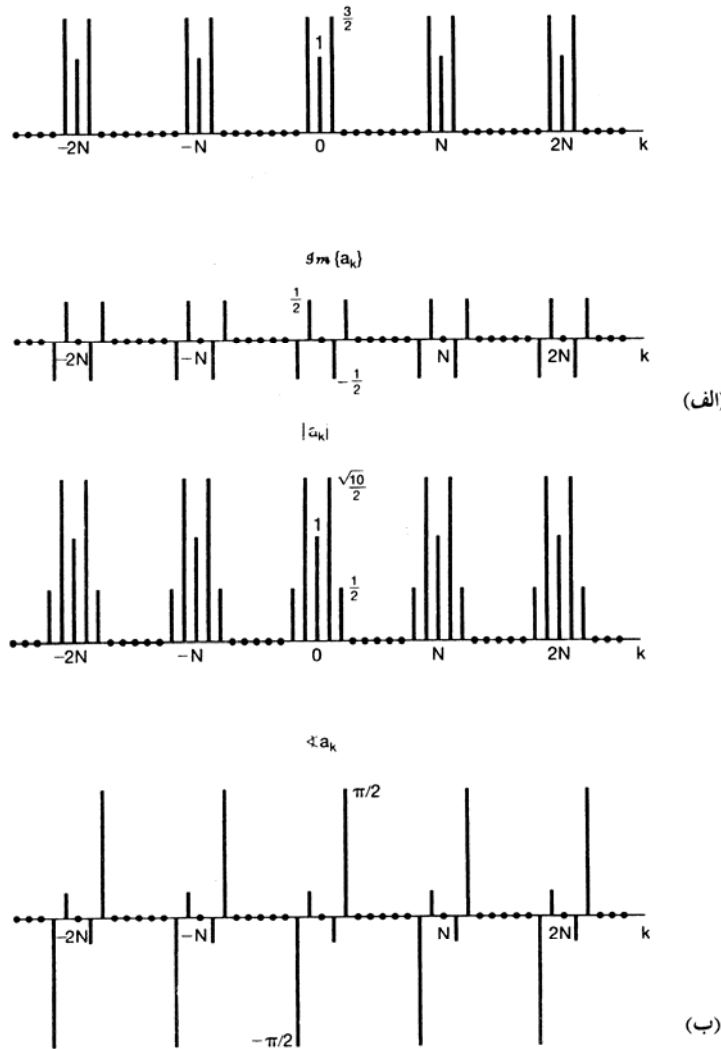
$$a_{-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}j$$

$$a_2 = \frac{1}{2}j$$

$$a_{-2} = -\frac{1}{2}j$$

به ازای بقیه مقادیر k واقع در فاصله جمع بندی معادله ترتیب (۳-۹۴) داریم $a_k = 0$ باز هم ضرایب سری فوریه

باتناوب N تکرار می شوند مثلاً $a_N = 1, a_{3N-1} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}j, a_{2-N} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}j$ شکل ۳-۱۵ (الف) بخشهای حقیقی و موهومی



شکل ۳-۱۵: الف) بخش های حقیقی و موهومی ضرایب سری فوریه مثال ۳-۱۱؛ ب) دامنه و فاز این ضرایب

توجه کنید که در مثال ۳-۱۱ به ازای تمام مقادیر k داریم $a_k^* = a - k$ این رابطه به ازای هر $x[n]$ حقیقی برقرار است این خاصیت شبیه خاصیتی است که در بخش ۳-۳ برای سیگنالهای پیوسته در زمان متناوب بیان شد و با همان نتیجه که مانند حالت پیوسته در زمان سری فوریه رشته های متناوب حقیقی دو شکل مختلف دارند این دو شکل همتای گسسته در زمان معادلات (۳۱-۳) و (۳۲-۳) هستند و در مسئله ۲-۵۲ مورد بررسی قرار می گیرند شکل نمایی سری فوریه به صورت بیان شده با معادلات (۳-۹۴) و (۳-۹۵) برای مقاصد ما مناسبترند و منحصراً این شکل را به کار می بریم.

مثال ۳-۱۲

در این مثال موج چهار گوش متناوب گسسته در زمان شکل ۳-۱۶ را در نظر می گیریم می توانیم سری فوریه این سیگنال را به کمک معادله (۳-۹۵) محاسبه کنیم چون در $-N_1 \leq n \leq N_1$ بهترست داریم $x[n]=1$ بهترست فاصله

را به صورت زیر می نویسیم.

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk(2\pi/N)n} \quad (102-3)$$

می بینیم که با تغییر متغیر $m=n+N_1$ معادله (102-3) به صورت زیر در می آید.

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk(2\pi/N)(m-N_1)} \quad (103-3)$$

$$= \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{jk(2\pi/N)m}$$

جمع معادله (103-3) مجموع $(2N_1+1)$ جمله اول یک سری هندسی است بنابراین می توان آن را به کمک نتیجه مسئله ۵۴-۱ حساب کرد با این کار به دست می آوریم .

(104-3)

$$a_k = \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \left(\frac{1 - e^{-jk2\pi(2N_1+1)/N}}{1 - e^{-jk(2\pi/N)}} \right)$$

$$= \frac{1}{N} \frac{e^{-jk(2\pi/2N)} [e^{jk2\pi(N_1+1/2)/N} + e^{-jk2\pi(N_1+1/2)/N}]}{e^{-jk(2\pi/2N)} [e^{jk(2\pi/2N)} - e^{-jk(2\pi/2N)}]}$$

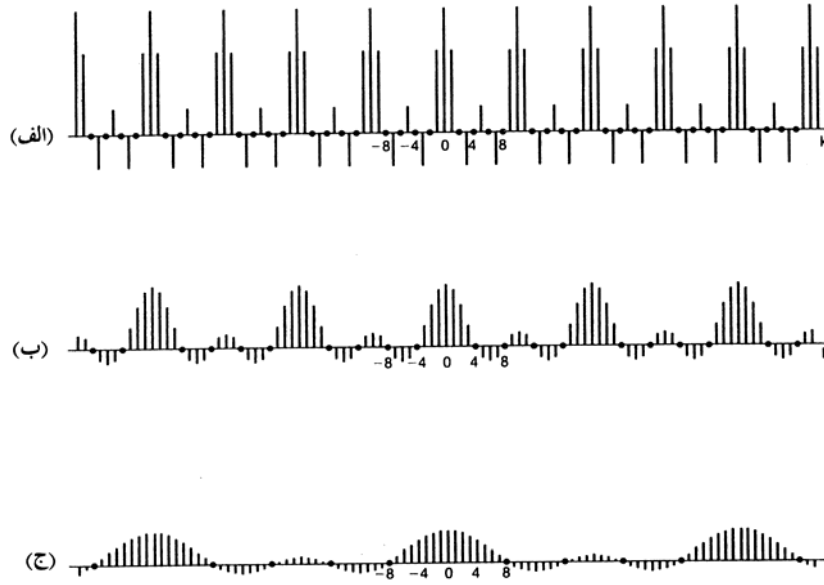
$$= \frac{1}{N} \frac{\sin[2\pi k(N_1 + 1/2)/N]}{\sin(\pi k/N)}, k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots$$

9

$$a_k = \frac{2N_1+1}{N}, k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \quad (105-3)$$



شکل‌های ۱۷-۳ (الف) (ب) و (ج) به ترتیب ضرایب a_k را به ازای $2N_1+1=5$ برای $N=10, 20, 40$ نشان می دهند.



شکل ۱۷-۳: ضرایب سری فوریه موج چهارگوش متناوب مثال ۳-۱۲؛ $N a_k$ به ازای $2N_1 + 1 = 5$ برای (الف) $N = 10$ ؛ (ب) $N = 20$ ؛ (ج) $N = 40$.

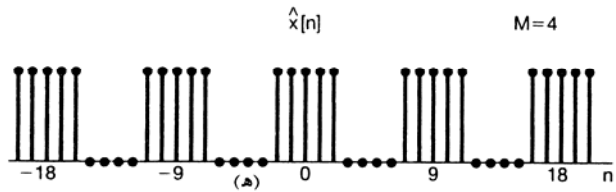
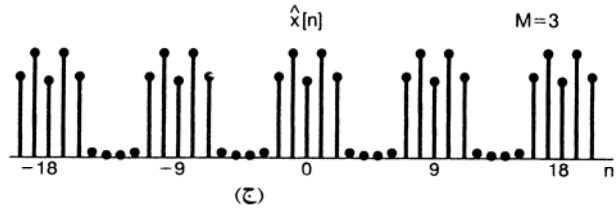
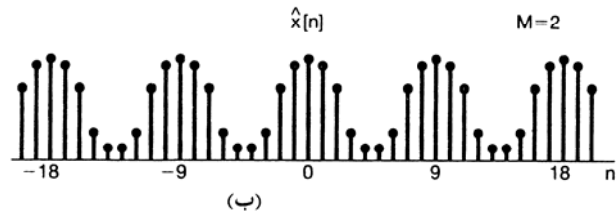
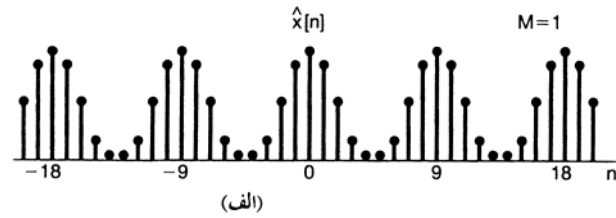
در بحث همگرایی سری فوریه پیوسته در زمان بخش ۳-۴ موج چهارگوش متناوب را در نظر گرفتیم و دیدیم که با میل تعداد جملات به بینهایت جمع متناهی معادله (۳-۵۲) چگونه به موج چهارگوش می گراید بخصوص در ناپیوستگیها پدیده گیس را مشاهده کردیم. هر چه تعداد جملات زیادتر میشود تموج حاصل جمع محدود (شکل ۳-۹) فشرده تر می شد ولی ماکزیمم دامنه تموج ثابت میماند در اینجا هم جمع جزئی موج چهار گوش گسسته در زمان را در نظر می گیریم برای سهولت دوره تناوب N را فرد فرض می کنیم شکل ۳-۱۸ سیگنال

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=-M}^M a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (۳-۱۰۶)$$

مثال ۳-۱۶ را به ازای $N=9$ و چند مقدار M نشان می دهد به ازای $M=4$ این جمع جزئی دقیقاً با $x[n]$ برابرست یعنی بر خلاف حالت پیوسته در زمان در اینجا نه مسئله همگرایی مطرح است و نه پدیده گیس دلیل این امر این است که هر دنباله متناوب $x[n]$ با تعداد محدودی پارامتر، یعنی مقادیر دنباله در یک دوره تناوب کاملاً مشخص می شود معادله تجزیه سری فوریه (۳-۹۵) تنها این N پارامتر را به N پارامتر معادل دیگر یعنی مقادیر N ضریب فوریه تبدیل می کند؛ و معادله ترکیب (۳-۹۴) به ما نشان می دهد که چگونه می توان مقادیر دنباله اصلی را به صورت یک سری متناهی نوشت پس اگر N فرد باشد و در معادله (۳-۱۰۶) قرار دهیم $M=(N-1)/2$ دقیقاً مجموع N جمله را داریم و با

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=-M+1}^M a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

(۱۰۷-۳)



شکل ۳-۱۸: جمع های جزئی معادلات (۳-۱۰۶) و (۳-۱۰۷) برای موج چهارگوش شکل ۳-۱۶ به ازای $N = 99$ و

$$2N_1 + 1 = 5 \quad (\text{الف}) : M = 1 \quad (\text{ب}) : M = 2 \quad (\text{ج}) : M = 3 \quad (\text{د}) : M = 4$$

بر عکس سیگنال متناوب پیوسته در زمان در هر دوره تناوب مقادیر پیوسته ای به خود می یگرد و برای نمایش آن بینهایت ضریب فوریه لازم است در نتیجه هیچکدام از جمعهای جزئی معادله (۳-۵۲) مقادیر دقیق $x(t)$ را نمی دهد و وقتی جمع را با میل تعداد جملات به بی نهایت حساب می کنیم مسائلی چون همگرایی مطرح شده در بخش ۳-۴ بروز می کند.

۳-۷ خواص سری فوریه گسسته در زمان

بین خواص سری فوریه گسسته در زمان و پیوسته در زمان شباهتهای زیادی وجود دارد این مطلب را به سادگی می توان با مقایسه جدول ۳-۲ که خواص سری فوریه گسسته در زمان در آن مندرج است، و جدول همتای پیوسته در زمان آن یعنی جدول ۳-۱ مشاهده کرد.

اشتقاق بسیاری از این خواص بسیار شبیه همتاهای پیوسته در زمان شان است، و بعضی از این اشتقاقها در مسائل انتهای فصل منظور شده است.

در مسائل انتهای فصل منظور شده است همچنین در فصل ۵ خواهیم دید که اکثر این خواص را می توان از خواص متناظر تبدیل فوریه پیوسته در زمان استنتاج کرد پس در این بخش تنها به کاربرد این خواص و بحث در مورد تفاوتی مهم نسبت به حالت پیوسته در زمان می پردازیم همچنین با مثالهایی نشان خواهیم داد که این خواص چگونه می توانند در اکتساب بینش عمیقتر یاریمان کنند و پیچیدگی های محاسباتی ضرائب سری فوریه بعضی رشته ها را کاهش دهند.

همانند حالت پیوسته در زمان غالباً به کار گیری یک نماد اختصاری برای نمایش رابطه یک سیگنال و ضرائب سری فوریه اش مناسب است اگر $x[n]$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب N ، ضرائب سری فوریه آن باشند می نویسیم.

$$x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k$$

۳-۷-۱ ضرب

خاصیت ضرب نمایش سری فوریه نمونه ای از خواصی است که تفاوت حالتیهای پیوسته و گسسته در زمان را آشکار می کند. با توجه به جدول ۳-۲ حاصل ضرب دو سیگنال پیوسته در زمان دارای تناوب T یک سیگنال متناوب با دوره تناوب T است که ضرائب سری فوریه اش از کانولوشن رشته ضرائب دو سیگنال ضرب شده در هم به دست می آید در حالت گسسته در زمان فرض کنید.

$$x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k$$

$$y[n] \xleftrightarrow{FS} b_k$$

دوره تناوب N متناوب است و ضرائب سری فوريه آن عبارت اند از

$$x[n]y[n] \xleftrightarrow{FS} d_k = \sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{k-l} \quad (108-3)$$

معادله (108-3) شبیه تعريف كانولوشن است ولی متغير جمعبندي تنها دو فاصله N نمونه متوالی تغییر می کند چنانچه در مسئله 3-57 نشان خواهیم داد جمع را می توان روی هر N مقدار متوالی l محاسبه کرد. ما این عمل را كانولوشن متناوب دو رشته متناوب ضرائب فوريه می نامیم شکل معمولی جمع كانولوشن (که در آن متغير جمع بندي از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می کند) برای تفاوت داشتن با این حالت كانولوشن نامتناوب خوانده می شود.

3-7-2 تفاضل اول

گونه گسسته در زمان خاصیت مشتقگیری سری فوريه پیوسته در زمان عمل تفاضل اول است که به صورت $x[n] - x[n-1]$ تعريف می شود اگر $x[n]$ با دوره تناوب N متناوب باشد $x[n] - x[n-1]$ نیز چنین است زیرا ترکیب خطی $x[n]$ و یک سیگنال متناوب دیگر دارای دوره تناوب N همیشه با دوره تناوب N متناوب است همچنین اگر

$$x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k$$

ضرائب سری فوريه تفاضل اول $x[n]$ را می توان به صورت زیر نوشت

$$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{FS} (1 - e^{-jk(2\pi/N)}) a_k \quad (109-3)$$

که به سادگی می توان آن را با اعمال خواص جابجایی زمانی و خطی بودن جدول 3-2 به دست آورد یک کاربرد معمول این خاصیت وضعیتهایی است که در آنها محاسبه سری فوريه تفاضل اول ساده تر از یافتن سری فوريه سیگنال اصلی است (مسئله 3-31 را ببینید)

3-7-3 رابطه پارسوال برای سیگنالهای متناوب گسسته در زمان

در مسئله 3-57 نشان خواهیم داد که رابطه پارسوال برای سیگنالهای متناوب گسسته در زمان عبارت است از

$$\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2 \quad (110-3)$$

که در آن a_k ضرائب سری فوريه سیگنال $x[n]$ دارای دوره تناوب N را نشان می دهد همانند حالت پیوسته در زمان، سمت چپ رابطه پارسوال توان متوسط یک دوره تناوب سیگنال متناوب $x[n]$ است $|a_k|^2$ توان متوسط مولفه هارمونیک k ام $x[n]$ است پس رابطه پارسوال می گوید توان متوسط یک سیگنال متناوب با مجموع توانهای متوسط موجود در تمام هارمونیکهای آن برابرست البته در حالت گسسته در زمان تنها N مولفه هارمونیکی مجزا وجود دارد و چون $x[n]$ با دوره تناوب N متناوب است جمع طرف راست معادله (110-3) را می توان روی هر N مقدار متوالی k حساب کرد.

در این زیر بخش با چند مثال نشان می دهیم که چگونه خواص سری فوریه گسسته در زمان را می توان برای مشخص کردن سیگنال و محاسبه ضرائب سری فوریه آن به کار برد. خواص ذکر شده در جدول ۲-۳ را می توان برای ساده کردن محاسبه سری فوریه سیگنالها به کار برد به این منظور باید ابتدا سیگنال داده شده را بر حسب سیگنالهایی بیان کرد که ضرائب سری فوریه شان را می دانیم یا محاسبه سری فوریه شان ساده تر است سپس به کمک جدول ۲-۳ ضرائب فوریه سیگنال داده شده را بر حسب ضرائب سری فوریه آن سیگنالها به دست می آوریم این کار در مثال ۱۳-۳ انجام شده است مثال ۱۴-۳ به تعیین یک سیگنال به کمک مشخصات داده شده آن اختصاص دارد در مثال ۱۵-۳ کاربرد خاصیت کانولوشن متناوب نشان داده می شود.

مثال ۱۳-۳

مسئله یافتن ضرائب a_k سری فوریه سیگنال $x[n]$ شکل ۱۹-۳ (الف) را در نظر می گیریم زمان تناوب پایه این سیگنال ۵ است می بینیم که $x[n]$ را می توان مجموع سیگنال چهارگوش $x_1[n]$ شکل ۱۹-۳ (ب) و رشته dc ثابت $x_2[n]$ شکل ۱۹-۳ (ج) فرض کرد اگر ضرائب سری فوریه $x_1[n]$ را با b_k و ضرائب سری فوریه $x_2[n]$ را با c_k نشان دهیم خاصیت خطی بودن جدول ۲-۳ به ما می گوید.

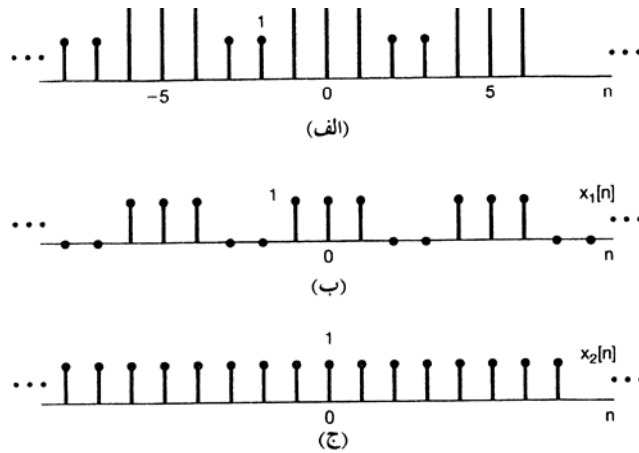
$$a_k = b_k + c_k \quad (۱۱۱-۳)$$

با توجه به مثال ۱۲-۳ (با $N_1=1$ و $N_2=5$) ضرائب b_k مربوط به $x_1[n]$ به صورت زیرست.

$$b_k = \begin{cases} \frac{1 \sin(3\pi k / 5)}{5 \sin(\pi / k 5)}, & k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ \frac{3}{5}, & k = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \end{cases} \quad (۱۱۲-۳)$$

رشته $x_2[n]$ تنها یک مقدار dc است و می توان آن را با ضریب صفرم سری فوریه اش نمایش داد

$$c_0 = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^4 x_2[n] = 1 \quad (۱۱۳-۳)$$



شکل ۳-۱۹: الف) رشته متناوب $x[n]$ مثال ۳-۱۳ و نمایش آن به صورت مجموع؛ ب) یک موج چهارگوش $x_1[n]$ و ج) یک رشته $x_2[n]dc$.

چون ضرائب سری فوریه گسسته در زمان متناوب اند به ازای مضارب صحیح ۵ داریم $c_k=1$ بقیه ضرائب $x_2[n]$ صفرند، زیرا $x_2[n]$ تنها مولفه dc دارد اکنون با گذاشتن b_k, c_k در معادله (۳-۱۱۱) به دست می آوریم.

$$b_k = \begin{cases} \frac{1 \sin(3\pi k / 5)}{5 \sin(\pi / k 5)}, & k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ \frac{8}{5}, & k = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \end{cases} \quad (۳-۱۱۴)$$

مثال ۳-۱۴

اطلاعات زیر در مورد رشته $x[n]$ داده شده است.

$x[n]$ با دوره تناوب ۶ متناوب است.

$$\sum_{n=0}^5 x[n] = 2$$

$$\sum_{n=2}^7 (-1)^n x[n] = 1$$

در میان تمام سیگنالهایی که سه شرط بالا را دارند $x[n]$ می نیمم انرژی را داراست.

حال به تعیین $x[n]$ می پردازیم ضرائب سری فوریه $x[n]$ را با a_k نشان می دهیم با توجه به اطلاع ۲ نتیجه می گیریم

چون $a_0 = \frac{1}{3}$ $(-1)^n = e^{-jm} = e^{-j(2\pi/6)3n}$ اطلاع ۳ نشان می دهد که $a_3 = \frac{1}{6}$ با توجه به رابطه پارسوال (جدول ۳-۳)

(۲) توان متوسط $x[n]$ عبارت است از

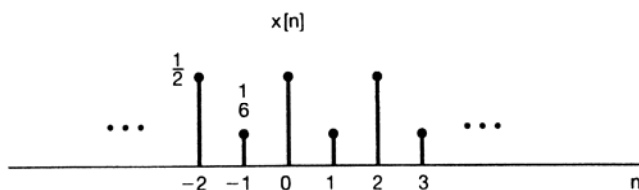
$$P = \sum_{k=0}^5 |a_k|^2 \quad (۳-۱۱۵)$$

چون هر a_k غیر صفر باعث افزایش P می شود و چون a_3 و a_0 معلوم اند برای می نیمم شدن P بر می گزینیم.

$$a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0$$

(۱۱۶-۳)

که در شکل ۳-۲۰ تصویر شده است.



شکل ۳-۲۰: رشته $x[n]$ سازگار با شرایط بیان شده در مثال ۳-۱۴

مثال ۳-۱۵

در بیان مثال یک رشته متناوب را که عبارت جبری ضرائب سری فوریه اش معلوم است تعیین و رسم می کنیم در این کار خاصیت کانولوشن متناوب سری فوریه گسسته در زمان (مندرج در جدول ۳-۲) را به کار می گیریم همانطور که در جدول مشخص شده و در مسئله ۳-۵۸ اثبات می شود، $x[n]$ ، $y[n]$ با دوره تناوب N متناوب باشند سیگنال

$$w[n] = \sum_{r \in \langle N \rangle} x[r]y[n-r]$$

نیز با دوره تناوب N متناوب است جمع را می توان به ازای هر N مقدار متوالی دلخواه r محاسبه کرد به علاوه ضرائب سری فوریه $w[n]$ عبارت اند از b_k ، a_k که b_k ، a_k به ترتیب ضرائب سری فوریه $x[n]$ ، $y[n]$ هستند. حال فرض کنید که می دانیم سیگنال $x[n]$ با دوره تناوب 7 دارای ضرائب سری فوریه زیر است.

$$c_k = \frac{\sin^2(3\pi k / 7)}{7 \sin^2(\pi k / 7)} \quad (۱۱۷-۳)$$

می بینیم که $c_k = 7d_k^2$ که d_k ضرائب سری فوریه موج چهارگوش $x[n]$ مثال ۳-۱۲ به ازای $N_1=1$ و $N=7$ است با توجه به خاصیت کانولوشن متناوب داریم.

$$w[n] = \sum_{r \in \langle 7 \rangle} x[r]x[n-r] = \sum_{r=-3}^3 x[r]x[n-r] \quad (۱۱۸-۳)$$

در تساوی آخر جمع را روی فاصله $-3 \leq r \leq 3$ بسته ایم روش ضرب و جمع برای محاسبه این کانولوشن نیز قابل اعمال است تنها باید جمع روی فاصله محدود انجام شود در واقع اگر سیگنال $\hat{x}[n]$ را به صورتی تعریف کنیم که در $-3 \leq r \leq 3$ برابر $x[r]$ و در بقیه جاها صفر باشد می توان معادله (۱۱۸-۳) را به صورت زیر تبدیل کرد.

$$w[n] = \sum_{r=-3}^3 \hat{x}[r]x[n-r] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[r]x[n-r]$$

شکل‌های ۳-۲۱ (الف) تا (ج) به ترتیب رشته‌های $x[n-r]$, $\hat{x}[r]$, $x[r]$ را نشان می‌دهند $w[n]$ را می‌توان با توجه به این شکل‌ها حساب کرد.

می‌بینیم که $w[-3] = w[3] = 0$, $w[-2] = w[2] = 1$, $w[-1] = w[1] = 2$; $w[0] = 3$ چون $w[t]$ با دوره تناوب ۷ متناوب است می‌توانیم آن را به صورت شکل ۳-۲۱ رسم کنیم.



(الف)

$\hat{x}[r]$

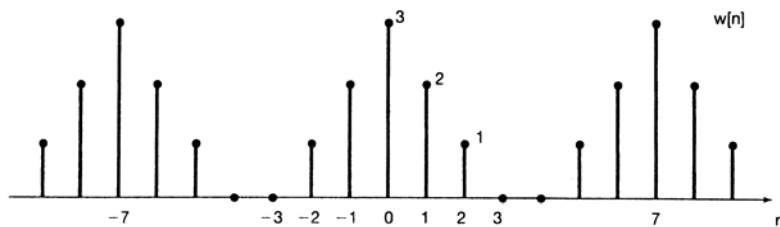


(ب)

$x[n-r]$



(ج)



(د)

$w[n]$

شکل ۳-۲۱: الف) موج چهارگوش $x[r]$ مثال ۳-۱۵؛ رشته $\hat{x}[r]$ که در $-3 \leq r \leq 3$ با $x[r]$ برابر و در بقیه جاها صفر است؛ ج) رشته $x[n-r]$ ؛ د) رشته $w[n]$ که با کانولوشن متناوب $x[n]$ و خودش با کانولوشن غیر متناوب $\hat{x}[n]$ و $x[n]$ برابر است.

طب چند بخش اخیر دیدیم که چگونه می توان نمایش سری فوریه هر سیگنال گسسته در زمان و تقریباً هر سیگنال پیوسته در زمان دارای اهمیت عملی را یافت همچنین در بخش ۳-۲ دیدیم که پاسخ سیستمهای LTI به ترکیب خطی نمایهای مختلط شکل نسبت ساده ای دارد در حالت پیوسته در زمان سیستمهای LTI به ازای ورودی $x(t) = e^{st}$ خروجی $y(t) = H(s)e^{st}$ را تولید می کنند و طبق معادله (۳-۶)

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} dt \quad (۳-۱۱۹)$$

که $h(t)$ پاسخ ضربه سیستم LTI است.

به نحوی مشابه سیستمهای LTI گسسته در زمان به ازای ورودی $x[n]=z^n$ خروجی $y[n]=H(z)z^n$ را تولید می کنند و طبق معادله (۳-۱۰)

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} \quad (۳-۱۲۰)$$

که پاسخ ضربه سیستم LTI است.

s و z در حالت کلی مختلط اند و $H(s)$ و $H(z)$ را تابع سیستم می نامند در این فصل و فصل بعد برای سیستمهای پیوسته در زمان حالت خاص $H(j\omega)$ را در نظر می گیریم یعنی $s = j\omega$ در نتیجه e^{st} به شکل $e^{j\omega t}$ است این ورودی یک نمایی مختلط با فرکانس ω است تابع سیستم دارای $s = j\omega$ یعنی $H(j\omega)$ به عنوان تابعی از ω پاسخ فرکانسی سیستم نامیده می شود و عبارت است از :

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad (۳-۱۲۱)$$

به نحوی مشابه برای سیگنالها و سیستمهای گسسته در زمان در این فصل و فصل ۵ حالت خاص $|z|=1$ را بررسی می کنیم در این حالت $z = e^{j\omega}$ و $z^n = e^{j\omega n}$ به شکل $e^{j\omega n}$ است تابع سیستم $H(z)$ به ازای $z = e^{j\omega n}$ پاسخ فرکانسی سیستم نامیده می شود و عبارت است از

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{j\omega n} \quad (۳-۱۲۲)$$

پاسخ LTI به سیگنال نمایی مختلط $e^{j\omega n}$ (در حالت پیوسته در زمان) یا (در حالت گسسته در زمان) را به سادگی می توان بر حسب پاسخ فرکانسی سیستم بیان کرد به علاوه به خاطر خاصیت جمع آثار سیستمهای LTI می توانیم پاسخ سیستم LTI به ترکیب خطی نمایی های مختلط را به سادگی بیابیم در فصلهای ۴ و ۵ خواهیم دید که چگونه می توانیم این ایده ها را به همراه تبدیل فوریه برای تحلیل پاسخ سیستمهای LTI به سیگنالهای نامتناوب به کار ببریم. بقیه این فصل ابتدا نگاهی به این مجموعه مهم مفاهیم می اندازیم و به تعبیر آنها در مقوله سیگنالهای متناوب می پردازیم. ابتدا حالت پیوسته در زمان را در نظر گرفته $x(t)$ را سیگنال متناوبی با نمایش سری فوریه زیر فرض کنید.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (۳-۱۲۳)$$

معادله (۳-۱۲۳) تابع ویژه ای از سیستم هستند با استفاده از معادله (۳-۱۳) به ازای $s_k = jk\omega_o$ خروجی زیر را به دست می آوریم.

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(e^{jk\omega_o}) e^{jk\omega_o t} \quad (۳-۱۲۴)$$

پس $y(t)$ با همان فرکانس پایه $x(t)$ متناوب است به علاوه اگر $\{a_k\}$ مجموعه ضرائب سری فوریه ورودی $x(t)$ باشد مجموعه ضرائب خروجی $y(t)$ به صورت $\{a_k H(jk\omega_o)\}$ است یعنی اثر سیستم LTI تغییر ضرائب سری فوریه با ضرب هر کدام در پاسخ فرکانسی متناظر با فرکانس هر مولفه است.

مثال ۳-۱۶

فرض کنید سیگنال متناوب $x(t)$ مثال ۳-۲ ورودی یک سیستم LTI با پاسخ ضربه زیر است.

$$h(t) = e^{-t} u(t)$$

برای محاسبه ضرائب سری فوریه خروجی $y(t)$ ابتدا پاسخ فرکانسی را به دست می آوریم.

(۳-۱۲۵)

$$H(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= -\frac{1}{1+j\omega} e^{-\tau} e^{-j\omega\tau} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{1+j\omega}$$

با استفاده از معادلات (۳-۱۲۴) و (۳-۱۲۵) و با توجه به این که در این مثال $\omega_o = 2\pi$ به دست می آوریم

$$y(t) = \sum_{k=-3}^3 b_k e^{jk2\pi t} \quad (۳-۱۲۶)$$

$$b_0=1$$

$$b_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+j2\pi} \right) \quad , \quad b_{-1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-j2\pi} \right)$$

$$b_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+j4\pi} \right) \quad , \quad b_{-2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-j4\pi} \right)$$

$$b_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+j6\pi} \right) \quad , \quad b_{-3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-j6\pi} \right)$$

(۱۲۷-۳)

توجه کنید که $y(t)$ باید یک سیگنال حقیقی باشد، زیرا کانولوشن دو سیگنال حقیقی $x(t)$ ، $h(t)$ است. بررسی معادلات (۱۲۷-۳) و مشاهده این که $b_k^* = b_{-k}$ تأییدی بر این مطلب است پس $y(t)$ را می توان به یکی از دو شکل (۳-۳۱) و

(۳-۳۲) نوشت یعنی

$$y(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^3 D_k \cos(2\pi kt + \theta_k) \quad (۱۲۸-۳)$$

یا

$$y(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^3 [E_k \cos 2\pi kt + F_k \sin 2\pi kt] \quad (۱۲۹-۳)$$

که در آن

$$b_k = D_k e^{j\theta_k} = E_k + jF_k \quad k = 1, 2, 3 \quad (۱۳۰-۳)$$

این ضرایب را می توان مستقیماً از معادله (۱۲۷-۳) به دست آورد برای مثال

$$D_1 |b_1| = \frac{1}{4\sqrt{1+4\pi^2}}, \theta_1 \angle b_1 = -\tan^{-1}(2\pi)$$

$$E_1 = R\{b_1\} = \frac{1}{4(1+4\pi^2)}, F_1 = Jm\{b_1\} = \frac{\pi}{2(1+4\pi^2)}$$

در حالت گسسته در زمان رابطه ای مشابه معادلات (۱۲۳-۳) و (۱۲۴-۳) بین ضرایب سری فوریه ورودی و خروجی سیستم LTI وجود دارد دقیقتر این که اگر $x[n]$ سیگنال متناوبی با نمایش سری فوریه زیر باشد.

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

$z_k = e^{jk(2\pi/N)}$ خروجی عبارت است از

$$y[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k H(e^{j2\pi k/N}) e^{jk(2\pi/N)n} \quad (131-3)$$

پس $y[n]$ نیز با همان دوره تناوب $x[n]$ متناوب است و ضریب k ام سری فوریه $y[n]$ حاصل ضرب ضریب k ام سری فوریه ورودی و پاسخ فرکانسی سیستم LTI در فرکانس مولفه مربوط یعنی $H(e^{j2\pi k/N})$ است.

مثال ۳-۱۷

یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n] = a^n u[n]$ و $1 < a < 1$ و ورودی زیر در نظر بگیرید.

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \quad (132-3)$$

طبق مثال ۳-۱۰ می توان $x[n]$ را به شکل سری فوریه زیر نوشت

$$x[n] = \frac{1}{2} e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} e^{-j(2\pi/N)n}$$

و طبق معادله (۳-۱۲۲)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\omega})^n \quad (133-3)$$

این سری هندسی را می توان به کمک نتیجه مسئله ۱-۵۴ حساب کرد نتیجه عبارت است از

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \quad (134-3)$$

حال به کمک معادله (۳-۱۳۱) سری فوریه خروجی را به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2} H(e^{j2\pi/N}) e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} H(e^{-j2\pi/N}) e^{-j(2\pi/N)n} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j2\pi/N}} \right) e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{j2\pi/N}} \right) e^{-j(2\pi/N)n} \end{aligned} \quad (135-3)$$

با نوشتن

$$\frac{1}{1 - \alpha e^{-j2\pi/N}} = e^{rj\theta}$$

معادله (۳-۱۳۵) به شکل زیر ساده می شود.

$$y[n] = r \cos\left(\frac{2\pi}{N}n + \theta\right) \quad (136-3)$$

مثلاً به ازای $N=4$

$$\frac{1 - \alpha e^{-j2\pi/4}}{1 + j\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} e^{-j\theta}$$

و در نتیجه

$$y[n] = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \cos\left(\frac{\pi n}{2} - \tan^{-1}(\alpha)\right)$$

تذکر می دهیم که برای معنی داشتن عبارتهایی مانند معادلات (۳-۱۲۴) و (۳-۱۳۱) پاسخهای فرکانسی $H(e^{j\omega})$, $H(j\omega)$ معادلات (۳-۱۲۱) و (۳-۱۲۲) باید خوش تعریف و متنهای باشند چنانچه در فصلهای ۴ و ۵ خواهیم دید برای سیستمهای پایدار چنین وضعیتی داریم مثلاً سیستم LTI مثال ۳-۱۶ با پاسخ ضربه $h(t) = e^{-t}u(t)$ پایدار است و پاسخ فرکانسی خوش تعریف معادله (۳-۱۲۵) را دارد. ولی یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t) = e^{-t}u(t)$ ناپایدار است. و به سادگی می توان دید که انتگرال معادله (۳-۱۲۱) به ازای تمام مقادیر ω واگراست. به نحوی مشابه سیستم LTI مثال ۳-۱۷ با پاسخ ضربه $h[n] = \alpha^n u[n]$ به ازای $|\alpha| < 1$ پایدار است و پاسخ ضربه بیان شده در معادله (۳-۱۳۴) را دارد ولی به ازای $|\alpha| > 1$ سیستم ناپایدار است و جمع معادله (۳-۱۳۳) واگراست.

۳-۹ فیلتر کردن

در کاربردهای گوناگون تمایل داریم دامنه نسبی مولفه های فرکانسی یک سیگنال را تغییر دهیم و حتی برخی از آنها را کاملاً حذف کنیم این فرایند فیلتر کردن نامیده می شود سیستمهای خطی تغییر ناپذیر با زمانی که شکل طیف را تغییر می دهند فیلترهای شکلهی فرکانسی نامیده می شوند سیستمهایی که برای عبور تقریباً بدن اعوجاج بعضی فرکانسها و تضعیف شدید یا حذف بعضی دیگر طراحی می شوند فیلترهای فرکانس گزین نام دارند چنانچه معادلات (۳-۱۲۴) و (۳-۱۳۱) نشان می دهند ضرائب سری فوریه خروجی یک سیستم LTI همان ضرائب سری فوریه ورودی هستند که در پاسخ فرکانسی سیستم ضرب شده اند پس عمل فیلتر کردن را می توان با استفاده از سیستم های LTI دارای پاسخ فرکانسی مورد نظر انجام داد و روشهای حوزه فرکانسی ابزارهای ایده ال بررسی این دسته کاربردهای بسیار مهم اند در این بخش و بخش بعد به کمک چند مثال مبحث فیلتر را از نظر می گذرانیم.

۳-۹-۱ فیلترهای شکلهی فرکانسی

یکی از کاربردهایی که در آنها از فیلترهای شکلهی فرکانسی استفاده می شود سیستمهای شنیداری است مثلاً در این سیستم ها معمولاً سیستمهای LTI تعبیه می شوند تا شنونده بتواند به کمک آنها مقدار نسبی انرژی فرکانس پایین (بم) و انرژی فرکانس بالا (زیر) را تغییر دهد این فیلترها سیستمهای ، هستند که پاسخ فرکانسی شان را می توان با دکمه تون کنترل کرد. همچنین در سیستمهای hi-fi معمولاً در پیش تقویت کننده فیلتر موسوم به متعادل کننده قرار داده می شود تا مشخصات پاسخ فرکانسی بلند گو جبران شود این فیلترهای متوالی شده روی هم رفته مدار متعادل کننده نامیده می شود شکل (۳-۲۲) سه طبقه مدارهای متعادل کننده یم دسته بلند گوی خاص را نشان می دهد در این شکل اندازه پاسخ فرکانسی هر طبقه روی نمودار لگاریتمی لگاریتمی رسم شده است اندازه با واحد

روی مقیاس لگاریتمی مدرج شده است چنانچه در بخش ۶-۲-۳ خواهیم گفت نمایش لگاریتمی اندازه پاسخ فرکانسی به این صورت کاملاً متداول و مفید است.

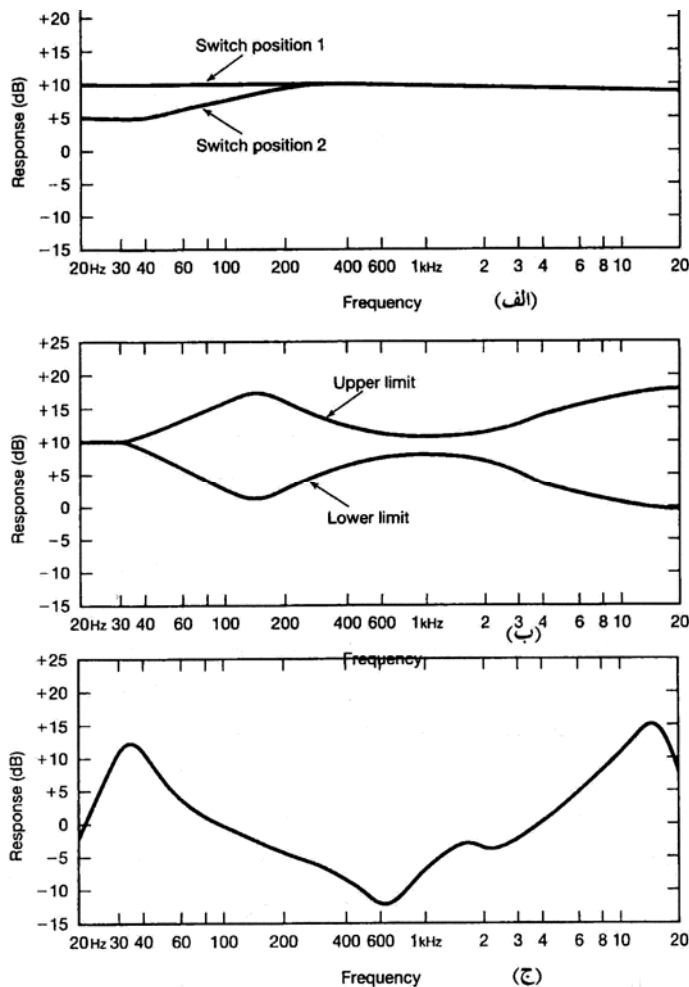
مدارهای متعادل کننده شکل ۳-۲۲ روی هم رفته برای جبران پاسخ فرکانسی بلندگو و اتاقی که در آن قرار دارند طراحی می شود تا شنونده بتواند پاسخ فرکانسی کل را تنظیم کند در واقع چون سه طبقه متوالی شده اند و چون هر سیستم یک ورودی نمایی مختلط $Ke^{j\omega t}$ را با ضرب در پاسخ فرکانسی خود تغییر می دهد پاسخ فرکانسی کل سه طبقه متوالی شده حاصل ضرب سه پاسخ فرکانسی است دو فیلتر اول نشان داده شده در شکل‌های ۳-۲۲ الف و ب با هم طبقه کنترل سیستم را تشکیل می دهند زیرا شنونده رفتار فرکانسی این دو فیلتر را می تواند تغییر دهد فیلتر سوم که در شکل ۳-۲۲ ح) نشان داده شده است طبقه متعادل کننده است و پاسخ فرکانسی ثابت مشخص شده در شکل را دارد فیلتر شکل ۳-۲۲ الف) یک فیلتر پایین گذر است که توسط یک کلید دو وضعیتی کنترل می شود تا یکی از دو پاسخ نشان داده شده را ایجاد کند فیلتر دوم طبقه کنترل دو کلید لغزان پیوسته دارد به نحوی که پاسخ فرکانسی بتواند به طور پیوسته در محدوده مشخص شده در شکل ۳-۲۲ ب) تغییر کند.

دسته دیگر فیلترهای شکلدهی فرکانسی پر کاربرد فیلترهایی هستند که خروجی شان تقریباً مشتق ورودی است یعنی $y(t) = dx(t)/dt$ اگر $x(t) = e^{j\omega t}$ باشد خروجی $y(t) = j\omega e^{j\omega t}$ است که نشان می دهد پاسخ فرکانسی عبارت است از

$$H(j\omega) = j\omega \quad (۳-۱۳۷)$$

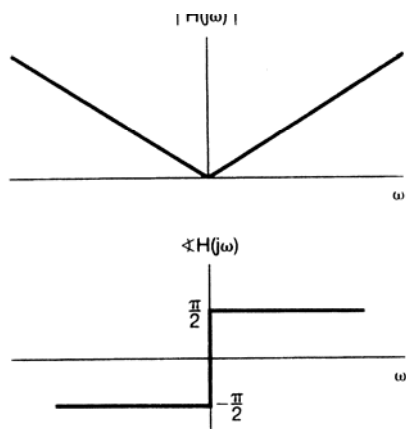
مشخصات پاسخ فرکانسی یک فیلتر مشتقگیر در شکل ۳-۲۳ نشان داده شده است. چون $H(j\omega)$ در حالت کلی مختلط است در این مثال خاص پاسخ فرکانسی را با دو منحنی $\angle H(j\omega), |H(j\omega)|$ نشان داده ایم شکل این پاسخ فرکانسی نشان می دهد که هرچه ω ورودی نمایی مختلط $e^{j\omega t}$ بزرگتر باشد بیشتر تقویت می شود پس فیلترهای مشتقگیر برای بهبود تغییرات سریع یا پرشهای سیگنال مفیدند.

یکی از کاربردهایی که در آنها فیلترهای مشتقگیر بسیار به کار می روند بهبود لبه ها در پردازش تصویر است یک عکس سیاه و سفید را می توان سیگنال دو بعدی پیوسته در زمان $x(t_1, t_2)$ دانست که در آن t_1, t_2 به ترتیب مختصات افقی و قائم هستند و $x(t_1, t_2)$ روشنی عکس در آن نقطه را نشان می دهد.

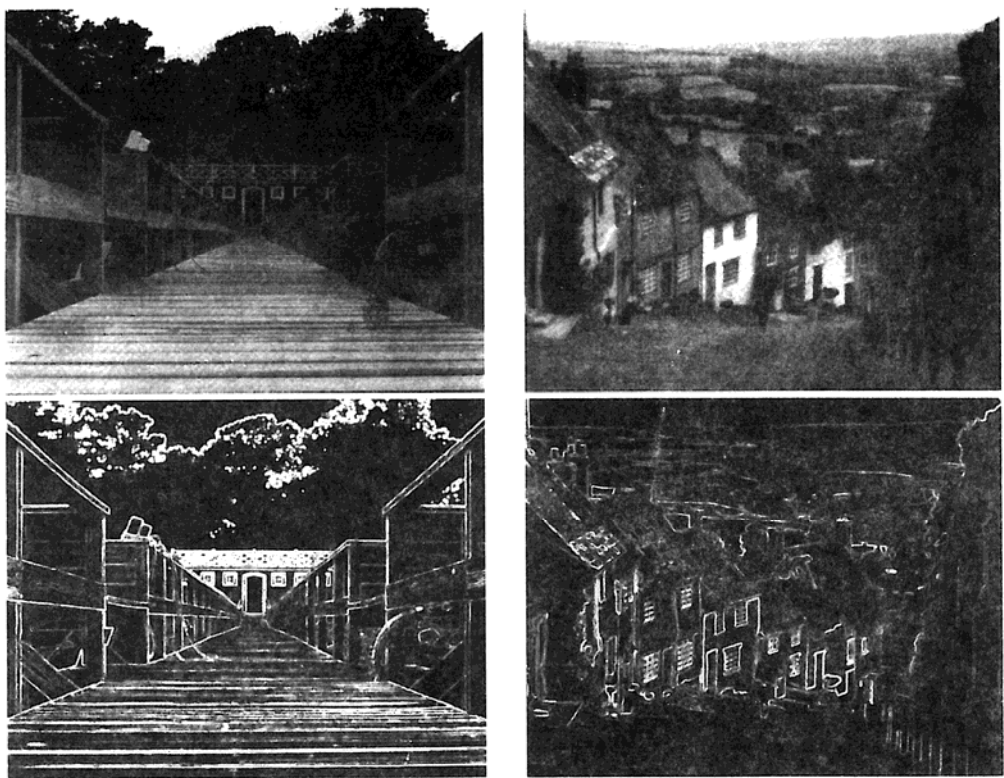


شکل ۳-۲۲: اندازه های پاسخ فرکانسی مدارهای متعادل کننده برای یک دسته بلندگوی خاص که با مقیاس $20 \log_{10} |H(j\omega)|$ نشان داده شده است. الف) فیلتر پایین گذر؛ ب) حدهای بالا و پایین پاسخ فرکانسی؛ ج) پاسخ فرکانسی ثابت طبقه متعادل کننده.

اگر تصویر را در جهت‌های افقی و قائم تکرار کنیم و می‌توانیم آن را با یکس ری فوریه دو بعدی (مسئله ۳-۷۰) نشان دهیم که مجموعی از حاصلضرب توابع نمایی مختلط $e^{j\omega_1 t_1}$, $e^{j\omega_2 t_2}$ است که با فرکانسهای احتمالاً مختلف در دوراستا نوسان می‌کنند تغییرات کند روشنایی در هر راستا نشاندهنده هارمونیکهای پایین در آن راستاست لبه ای قائم را در نظر بگیرید که نشان دهنده تغییر سریع روشنایی است چون روشنهایی در امتداد لبه ثابت است یا به تدریج تغییر می‌کند محتوای فرکانسی این لبه در امتداد قائم در فرکانسهای پایین قرار دارد بر عکس چون روشنایی در عرض لبه به شدت تغییر می‌کند محتوای فرکانسی آن در امتداد افقی در فرکانسهای بالا قرار دارد شکل ۳-۲۴ اثر یک فیلتر مشتقگیر دو بعدی بر عسویر را نشان می‌دهد شکل ۳-۲۴ الف) دو عکس اصلی و شکل ۳-۲۴ ب) نتیجه پردازش آن تصاویر را نشان می‌دهد چون مشتق در لبه های تصویر بزرگتر از نواحی دارای تغییر کند روشنایی است اثر این فیلتر نمایاندن لبه هاست.



شکل ۳-۲۳: مشخصات پاسخ فرکانسی که خروجی آن مشتق ورودی اش است.



شکل ۳-۲۴: اثر فیلتر بر مشتقگیر: الف) عکس های اصلی؛ ب) نتیجه پردازش عکس ها با فیلتر مشتق گیر

فیلتر LTI گسسته در زمان نیز کاربرد وسیعی یافته اند بسیاری از این فیلترها سستمهای گسسته در زمان ساخته شده با پردازشگر های دیجیتال همه منظوره یا خاص هستند که برای پردازش سیگنالهای پیوسته در زمان به کار می روند این مطلب را در فصل ۷ با تفصیل بیشتر دنبال می کنیم. تحلیل اطلاعات رشته ای مانند داده های آماری و اقتصادی مثل میانگین بازار سهام معمولاً با فیلترهای گسسته در زمان انجام می شود. معمولاً تغییرات بلند مدت (که فرکانس پایینی دارند) و تغییرات کوتاه مدت (که فرکانس بالایی دارند) پدیده هایی متمایزند و بهترست این مولفه ها جدا جدا

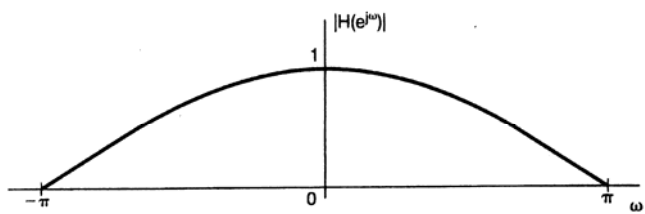
به عنوان نمونه ای ساده از فیلترهای گسسته در زمان یک سیستم LTI در نظر بگیرید که میانگین دو نقطه ای ورودی را حساب می کند.

$$y[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[n-1]) \quad (۱۳۸-۳)$$

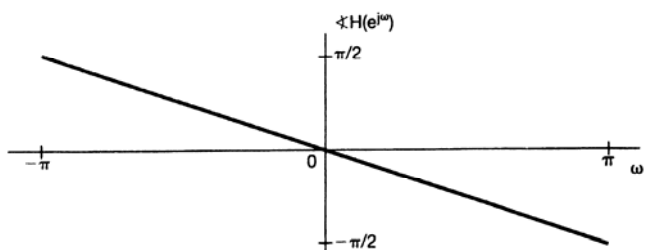
برای این سیستم $h[n] = \frac{1}{2}(\delta[n] + \delta[n-1])$ و با توجه به معادله (۱۳۲-۳) پاسخ فرکانسی به صورت زیر است.

$$h(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[1 + e^{-j\omega}] = e^{-j\omega/2} \cos(\omega/2) \quad (۱۳۹-۳)$$

شکل ۲۵-۳ (الف) اندازه $H(e^{j\omega})$ و شکل ۲۵-۳ (ب) $H(e^{j\omega})$ را نشان می دهد چنانچه در بخش ۱-۳-۳ گفتیم فرکانسهای پایین نمایه های مختلط گسسته در زمان در حوالی $\omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ و فرکانسهای بالای آنها در حوالی $\omega = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ قرار دارد علت این امر این است که $e^{j(\omega+2\pi)n} = e^{j\omega n}$ بنابراین در حالت گسسته در زمان ω تنها روی فاصله ای به طول 2π باید در نظر گرفته شود تا تمام فرکانسهای مجزا پوشیده شود بنابراین هر پاسخ فرکانسی گسسته در زمانی باید با دوره تناوب 2π متناوب باشد این امر را می توان با توجه به معادله (۱۲۲-۳) مستقیماً مشاهده کرد.



(الف)



(ب)

شکل ۲۵-۳ (الف) اندازه و (ب) فاز پاسخ فرکانسی سیستم LTI گسسته در زمان $y[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[n-1])$

فرکانسهای حول $\omega = 0$ بزرگ است و با رفتن $|\omega|$ به سمت π کوچک می شود، یعنی فرکانسهای بالاتر بیشتر از فرکانسهای پایین تضعیف می شوند مثلاً اگر ورودی این سیستم ثابت باشد یعنی یک نمایی مختلط با فرکانس صفر $x[n] = Ke^{j0 \times n} = K$ باشد خروجی عبارت است از

$$y[n] = H(e^{j0})Ke^{j0 \times n} = K = x[n]$$

ولی اگر ورودی سیگنال فرکانس بالای $x[n] = Ke^{j\pi} = K(-1)^n$ باشد، خروجی عبارت است از

$$y[n] = H(e^{j\pi})Ke^{j\pi n} = 0$$

پس این سیستم مقادیر ثابت سیگنال را از تغییرات فرکانس بالا جدا می کند و در نتیجه نمونه ای از فیلترهای فرکانسی گزین است، مبحثی که در زیر بخش بعد به آن می پردازیم.

۳-۹-۲ فیلترهای فرکانس گزین

فیلترهای فرکانس گزین دسته ای از فیلترها هستند که برا گزینش دقیق یا تقریبی چند باند فرکانسی و حذف باندهای دیگر به کار می روند این فیلترها کاربردهای زیادی دارند مثلاً اگر در ضبط صدا نویز در باندهای بالاتر از باند فرکانسی موسیقی یا صدای ضبط شده باشد می توان آن را با فیلترهای فرکانس گزین حذف کرد یکی دیگر از کاربردهای مهم این فیلترها در سیستمهای مخابراتی است در فصل ۸ به تفصیل خواهیم گفت که اساس سیستم مدولاسیون دامنه ای (AM) انتقال اطلاعات چند منبع به طور همزمان با قرار دادن اطلاعات هر منبع در یک باند فرکانسی مخصوص و مجزا و جداسازی باندهای مختلف در گیرنده به کمک فیلترهای فرکانس گزین می باشد. فیلترهای فرکانس گزین برای جدا کردن کانالها و فیلترهای شکلدهی فرکانسی (مانند متعادل کننده شکل ۳-۲۲) برای تنظیم کیفیت صدا از بخشهای عمده هر دستگاه رادیو و تلویزیون است.

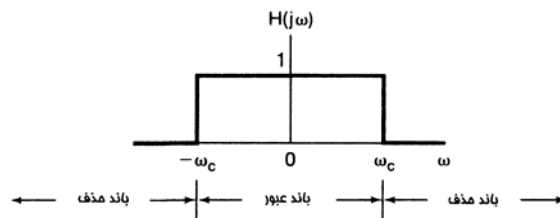
گرچه فرکانس گزینی تنها مسئله مهم کاربردی نیست ولی مباحث مربوط به آن اطلاعاتی را مطرح کرده که برای توصیف مشخصات فیلترهای فرکانس گزینی پذیرش عام یافته است مثلاً طبیعت فرکانسهایی که یک فیلتر فرکانس گزین باید عبور دهد بسته به کاربرد مورد نظر بسیار متفاوت است ولی تنها چند نوع فیلتر پر کاربرد دارای اسامی بازگو کننده کارشان وجود دارد مثلاً فیلتر پایین گذر فیلتری است که فرکانسهای پایین یعنی فرکانسهای حول $\omega = 0$ را می گذراند و فرکانسهای بالا را تضعیف یا حذف می کند فیلتر بالا گذر فیلتری است که فرکانسهای بالا را عبور می دهد و فرکانسهای پایین را تضعیف می کند. و فیلتر میانگذر فیلتری است که یک باند فرکانسی را گذارنده فرکانسهای بالاتر و پایین تر را تضعیف می کند و فیلتر میانگذر فیلتری است که یک باند فرکانسی را گذارنده فرکانسهای بالاتر و پایین تر آن باند را تضعیف می کند در هر مورد فرکانسهای قطع فرکانسهای مرز بین باندهای عبور و باندهای حذف هستند.

در تعریف و معیار کیفیت فیلترهای فرکانس گزین سوالهای زیادی وجود دارد فیلتر در عبور فرکانسهای باند عبور چقدر کار آمدست. در تضعیف فرکانسهای باند قطع چطور؟ گذر از باند عبور به باند قطع یعنی فرکانسهای عاری از اعوجاج به فرکانسهای دارای تضعیف شدید با چه شیبی صورت می گیرد؟ برای پاسخ به این سوالها باید مشخصات فیلتر واقعی را با فیلتر دارای رفتار ایده ال مقایسه کنیم. فیلتر فرکانس گزین ایده ال فیلتری است که نمایی های مختلط یک

پایین گذر ایده ال دارای فرکانس قطع ω_c یک سیستم LTI است که نمایی های مختلط $e^{j\omega t}$ با $-\omega_c \leq \omega \leq \omega_c$ را می گذارند و تمام فرکانسهای دیگر را حذف می کند یعنی پاسخ فرکانسی فیلتر پایین گذر ایده ال پیوسته در زمان عبارت است از

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & , \quad |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & , \quad |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (3-140)$$

که در شکل ۳-۲۶ نشان داده شده است.



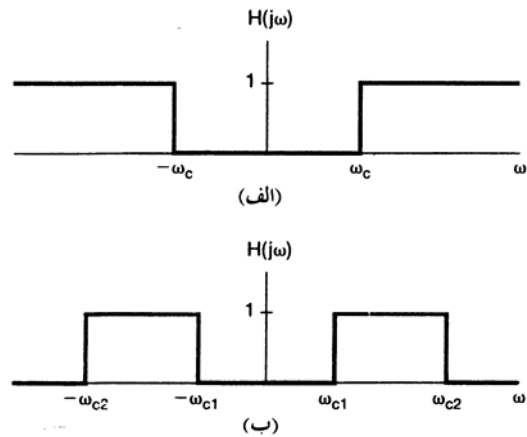
شکل ۳-۲۶: پاسخ فرکانسی یک فیلتر پایین گذر ایده آل

شکل ۳-۲۷ (الف) پاسخ فرکانسی یک فیلتر بالا گذر ایده ال پیوسته در زمان را نشان می دهد که فرکانس قطع آن ω_c است و شکل ۳-۲۷ (ب) فیلتر میانگذر ایده ال پیوسته در زمانی، با فرکانس قطع پایین ω_{c1} و فرکانس قطع بالای ω_{c2} را نشان می دهد توجه کنید که تمام این فیلترها نسبت به $\omega = 0$ متقارن اند بنابراین برای فیلترهای بالا گذر و میانگذر ظاهراً دو باند عبور وجود دارد این نتیجه استفاده از سیگنال نمایی مختلط $e^{j\omega t}$ به جای سیگنالهای سینوسی $\sin \omega t$ است $\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$ و $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$ و $e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$ که هر کدام از سیگنالهای سینوسی هم فرکانس تشکیل شده اند بنابراین فیلترهای ایده ال را مطابق شکل ۳-۲۶ و ۳-۲۷ به صورت متقارن تصویر می کنیم.

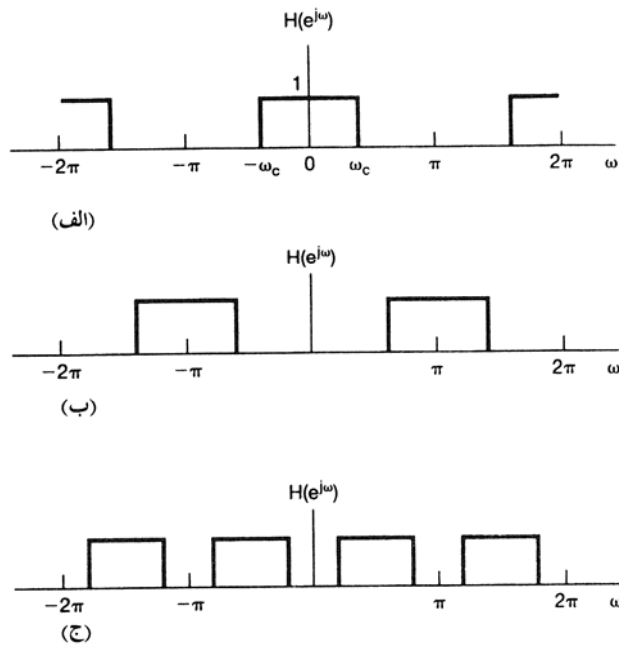
به نحوی مشابه می توانیم فیلترهای فرکانس گزین ایده ال گسسته در زمان را تعریف کنیم پاسخ فرکانسی این فیلترها در شکل ۳-۲۸ نشان داده شده است شکل ۳-۲۸ (الف) فیلتر پایین گذر ایده ال شکل ۳-۲۸ (ب) فیلتر بالا گذر ایده ال و شکل ۳-۲۸ (ج) فیلتر میانگذر ایده ال را نشان می دهند به این مطلب که در بخش پیش بیان کردیم توجه کنید که فیلترهای گسسته در زمان و پیوسته در زمان از این جهت متفاوت اند که پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ فیلترهای گسسته در زمان باید با دوره تناوب 2π متناوب باشد، و فرکانسهای پایین در حوالی مضارب زوج π و فرکانسهای بالا در حوالی مضارب فرد π قرار دارند.

در مورد متعددی فیلترهای ایده ال را برای توصیف آرایشهای ایده ال سیستمهای کاربردی مختلف مفید می یابیم البته این فیلترها قابل ساخت نیستند و بای تقریبی از آنها را ساخت، حتی اگر این فیلترهای ایده ال قابل ساخت باشند باز هم برای بعضی کاربردها ممکن است ویژگیهای نامطلوب داشته باشند به نحوی که فیلتر غیر ایده ال در واقع مرجح باشد.

طراحی شویم ولی در بقیه این فصل و فصلهای دیگر مثالهایی از فیلترهای پیوسته و گسسته در زمان خواهیم دید و در مورد مفاهیم و روشهای بنیادین این مقوله مهم مهندسی آشنا خواهیم شد.



شکل ۳-۲۷: الف) پاسخ فرکانسی یک فیلتر بالاگذر ایده آل؛ ب) پاسخ فرکانسی یک فیلتر میان گذر ایده آل



شکل ۳-۲۸: فیلترهای فرکانس گزین ایده آل گسسته در زمان: الف) پایین گذر؛ ب) بالا گذر؛ ج) میان گذر

۳-۱۰ نمونه هایی از فیلترهای پیوسته در زمان توصیف شده با معادلات دیفرانسیل

در بسیاری از کاربردها فرکانس گزینی با استفاده از سیستمهای LTI توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی دارای ضرائب ثابت صورت می پذیرد این امر دلایل متعددی دارد برای مثال بسیاری از سیستمهای فیزیکی که عملشان را می

خودرو را به عنوان نمونه خوبی از این سیستمها بررسی می کنیم این سیستم برای حذف تکانهای فرکانس بالای ناشی از حرکت بر جاده های ناهموار و کارهای دیگر طراحی می شود دلیل دوم استفاده از فیلترهای توصیف شده با معادلات دیفرانسیل و تفاضلی این است که می توان آنها را با استفاده از سخت افزارهای آنالوگ یا دیجیتال ساخت. به علاوه این سیستمها امکانهای وسیع و پر انعطافی برای طراحی در اختیارمان قرار می دهند، مثلاً امکان ساخت فیلترهای نزدیک به ایده ال یادارای مشخصات دلخواه دیگر را میسر می سازند در این بخش و بخش بعد چند مثال در نظر می گیریم که ساخت فیلترهای فرکانسی گزین پیوسته و گسسته در زمان با استفاده از معادلات دیفرانسیل و تفاضلی را نشان می دهند در فصلهای ۴ و ۶ مثالهای دیگری از این از این فیلرها خواهیم دید و درک بیشتری نسبت به ویژگیهای مفید آنها کسب می کنیم.

۳۲-۱۰-۱ یک فیلتر پایین گذر RC ساده

برای ساختن فیلترهای پیوسته در زمان از مدارهای الکتریکی بسیار استفاده می شود. یکی از ساده ترین این مدارها، مدار RC مرتبه اول شکل ۳-۲۹ است که منبع ولتاژ $v_s(t)$ ورودی آن به حساب می آید این مدار را می توان برای عمل فیلتر پایین گذر یا بالا گذر به کار برد، بسته به این که سیگنال خروجی را از کجا بگیریم. فرض کنید ولتاژ روی خازن $v_c(t)$ را به عنوان خروجی برگزینیم در این حالت ولتاژ خروجی و ولتاژ ورودی توسط معادله دیفرانسیل خطی ضرائب ثابت زیر به هم مربوط می شوند.

$$RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_s(t) \quad (۱۴۱-۳)$$

سیستم توصیف شده در معادله (۱۴۱-۳) به فرض سکون ابتدایی LTI است برای تعیین پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ توجه کنید که طبق تعریف اگر ورودی $v_s(t) = e^{j\omega t}$ باشد ولتاژ خروجی به صورت زیرست.

$$v_c(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$$

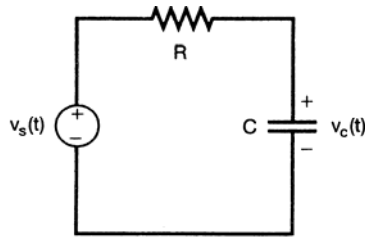
با گذاشتن این عبارتها در معادله (۱۴۱-۳) به دست می آوریم.

$$RC \frac{d}{dt} [H(j\omega)e^{j\omega t}] + H(j\omega)e^{j\omega t} = e^{j\omega t} \quad (۱۴۲-۳)$$

یا

$$RCj\omega H(j\omega)e^{j\omega t} + H(j\omega)e^{j\omega t} = e^{j\omega t} \quad (۱۴۳-۳)$$

که نتیجه می دهد.



شکل ۳-۲۹: فیلتر RC مرتبه اول

$$H(j\omega)e^{j\omega t} = \frac{1}{1+RCj\omega} e^{j\omega t} \quad (۱۴۴-۳)$$

یا

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+RCj\omega} \quad (۱۴۵-۳)$$

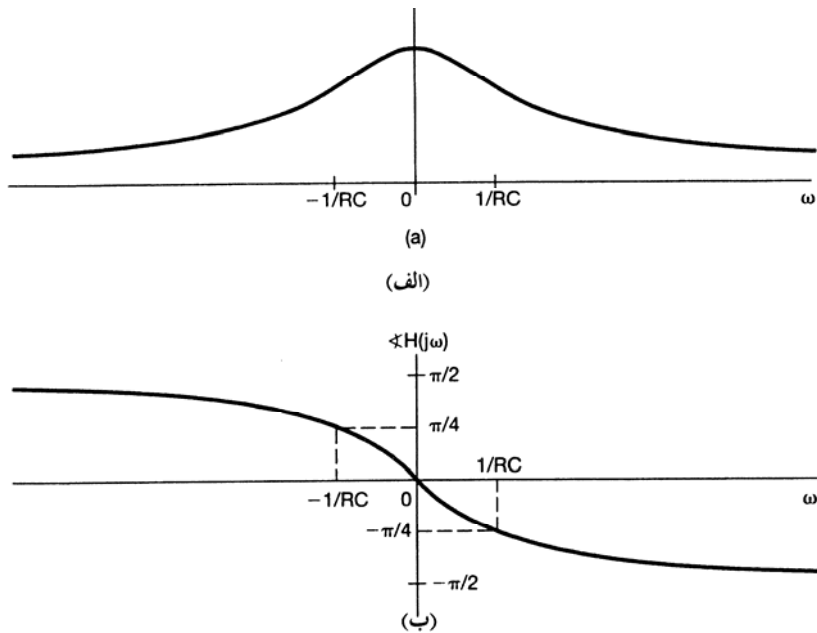
اندازه و فاز پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ این مثال در شکل ۳-۳۰ نشان داده شده است توجه کنید که برای فرکانسهای نزدیک $|H(j\omega)| \approx 1, \omega = 0$ و برای ω های بزرگ (منفی یا مثبت) $|H(j\omega)|$ بسیار کوچک می شود و در واقع با افزایش $|\omega|$ به طور پیوسته کاهش می یابد پس این فیلتر ساده RC (با خروجی $v_c(t)$) یک فیلتر پایین گذر غیر ایده ال است. برای از نظر گذراندن بده - بستانهای موجود در طراحی فیلتر به اختصار رفتار این مدار در حوزه زمان را بررسی می کنیم پاسخ ضربه سیستم توصیف شده با معادله (۳-۱۴۱) عبارت است از

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t) \quad (۱۴۶-۳)$$

و پاسخ پله عبارت است از

$$s(t) = [1 - e^{-t/RC}] u(t) \quad (۱۴۷-۳)$$

که هر دو شکل ۳-۳۱ (با $\tau = RC$) نشان داده شده اند مقایسه شکلهای ۳-۳۰ و ۳-۳۱ یک بده - بستان اساسی را نشان می دهد فرض کنید بخواهیم فیلترمان تنها فرکانسهای بسیار پایین را عبور دهد. شکل ۳-۳۰ (الف) نشان می دهد که به این منظور باید $1/RC$ کوچک یا به عبارتی RC بزرگ باشد، تا فرکانسهای بالاتر از فرکانسهای مورد نظر به حد کافی تضعیف شوند ولی شکل ۳-۳۱ (ب) نشان می دهد که در صورت بزرگ بودن RC پاسخ پله خیلی دیر به مقدار نهایی خود می رسد یعنی سیستم به ورودی پله ای کند پاسخ می دهد برعکس اگر بخواهیم پاسخ پله سریعتری داشته باشیم RC کوچک می خواهیم که به نوبه خود فرکانش قطع بالایی به دست می دهد این بده بستان بین رفتارهای حوزه فرکانس و حوزه زمان در طراحی تحلیل سیستمها و فیلترهای LTI زیاد پیش می آید و در فصل ۶ بیشتر به آن خواهیم پرداخت.



شکل ۳-۳۰: (الف) اندازه و (ب) فاز پاسخ فرکانسی مدار RC شکل ۳-۲۹

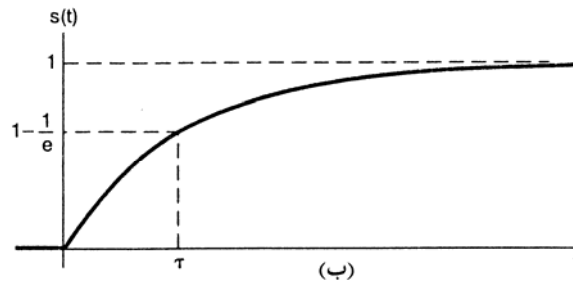
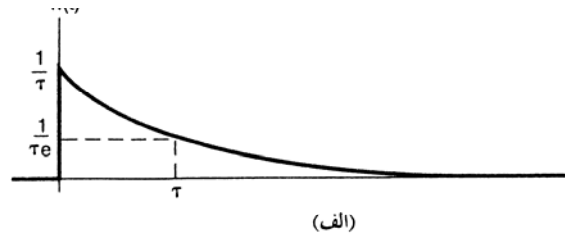
۳-۱۰-۲ یک فیلتر ساده بالا گذر TC ساده

به عنوان انتخابی دیگر ولتاژ روی مقاومت را به عنوان خروجی مدار RC در نظر می گیریم در این حالت معادله دیفرانسیل بیان کننده رابطه ورودی و خروجی عبارت است از:

$$RC \frac{dv_r(t)}{dt} + v_r(t) = RC \frac{dv_s(t)}{dt} \quad (۳-۱۴۸)$$

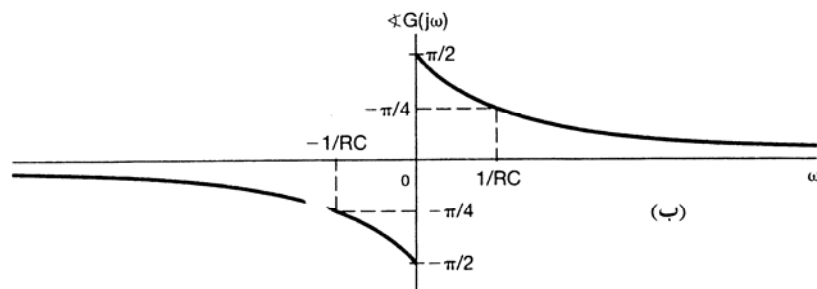
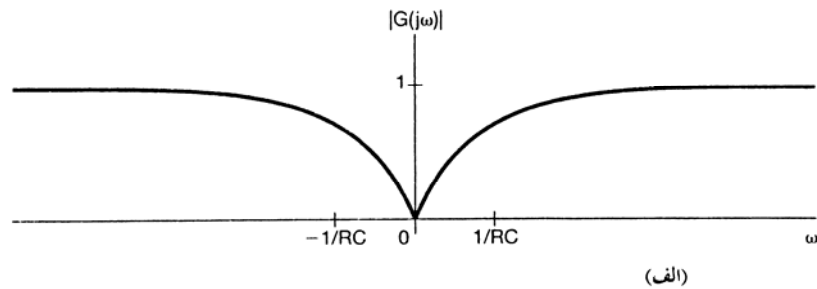
پاسخ فرکانسی $G(j\omega)$ این سیستم را می توان دقیقاً همانند حالت قبل به دست آوریم. به ازای $v_c(t) = e^{j\omega t}$ داریم $v_r(t)G(j\omega)e^{j\omega t}$ و با گذاشتن اینها در معادله (۳-۱۴۸) و کمی عملیات جبری به دست می آوریم.

$$G(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \quad (۳-۱۴۹)$$

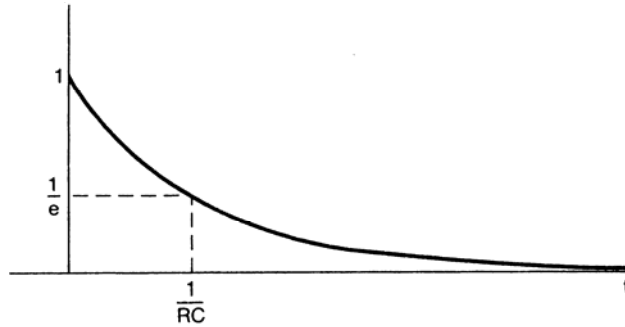


شکل ۳-۳۱: الف) پاسخ ضربه یک فیلتر پایین گذر RC مرتبه اول با $\tau = RC$ ؛ ب) پاسخ ضربه یک فیلتر پایین گذر RC با $\tau = RC$

اندازه و فاز این پاسخ فرکانسی در شکل ۳-۳۲ نشان داده شده است با توجه به این شکل می بینیم که این سیستم فرکانسهای پایین را تضعیف می کند و فرکانسهای بالاتر، یعنی فرکانسهای $|\omega| \gg 1/RC$ حداقل تضعیف می گذارند، پس این سیستم به صورت یک فیلتر بالا گذر عمل می کند.



شکل ۳-۳۲: الف) اندازه و ب) فاز پاسخ فرکانسی مدار RC شکل ۳-۲۹



شکل ۳-۳۳: پاسخ پله فیلتر بالا گذر مرتبه اول با $\tau = RC$

همانند فیلتر بالا گذر، پارامترهای این مدار هم پاسخ فرکانسی فیلتر بالا گذر و هم مشخصات پاسخ زمانی آن را کنترل می کند. برای مثال پاسخ پله این فیلتر را در نظر بگیرید. با توجه به شکل ۳-۲۹ می بینیم که $v_r(t) = v_s(t) - v_c(t)$ پس به ازای $v_c(t), v_s(t) = u(t)$ مطابق معادله (۳-۱۴۷) است در نتیجه پله فیلتر بالا گذر عبارت است از

$$v_r(t) = e^{-t/RC} u(t) \quad (۳-۱۵۰)$$

که در شکل ۳-۳۳ نشان داده شده است با افزایش RC پاسخ کندتر می شود یعنی پاسخ پله دیرتر به مقدار نهایی می رسد با توجه به شکل ۳-۳۲ می بینیم که افزایش RC (یا به عبارتی کاهش $1/RC$) بر پاسخ فرکانسی هم اثر می گذارد یعنی فرکانس قطع را کوچکتر می کند.

دو مثال این بخش نشان دادند که یک مقدار RC ساده می تواند بسته به انتخاب متغیر خروجی تقریبی از فیلتر بالا گذر یا پایین گذر باشد در مسئله ۳-۷۱ نیز خواهیم دید که یک سیستم مکانیکی ساده متشکل از جرم و ضربه گیر نیز می تواند یک فیلتر بالا گذر یا پایین گذر توصیف شده با معادله دیفرانسیل مرتبه اول باشد این نمونه های الکتریکی و مکانیکی به خاطر سادگیشان گذر سریعی از باند عبور به باند قطع ندارند. در واقع این فیلترها تنها یک پارامتر دارند (در مورد مدار الکتریکی پارامتر RC) که هم پاسخ فرکانسی و هم انرژی (خازن و القاگر در مدارهای الکتریکی و فنر و ضربه گیر در فیلترهای مکانیکی) فیلترهایی به دست می آیند که با معادلات دیفرانسیل مرتبه بالا توصیف می شوند این فیلترها از لحاظ مشخصات انعطاف پذیرترند و مثلاً گذر سریعتری از باند عبور به باند قطع دارند و بده - بستان بین پاسخهای زمانی و فرکانسی شان را بیشتر می توان کنترل کرد.

۳-۱۱ فیلترهای گسسته در زمان توصیف شده با معادلات تفاضلی

فیلترهای گسسته در زمان توصیف شده با معادلات تفاضلی نیز چون هماتاهای پیوسته در زمانشان اهمیت عملی فراوانی دارند این فیلترها به خاطر امکان ساختنشان با سخت افزارهای همه منظور یا خاص در عمل بسیار به کار می روند همانند همه مقولات تحلیل سیگنالها و سیستمها در بررسی فیلترهای گسسته در زمان توصیف شده با معادلات تفاضلی نیز شباهتها و تفاوتهای مهمی با حالت پیوسته در زمان مشاهده می کنیم. سیستمهای LTI گسسته در زمان توصیف شده با معادلات تفاضلی میتوانند بازگشتی و با پاسخ ضربه نامحدود (IIR) یا غیر بازگشتی و با پاسخ ضربه

ولی دومی نیز در سیستمهای دیجیتال اهمیت عملی به سزایی دارد این دو دسته مزایا و معایب خاصی از لحاظ سهولت ساخت مرتبه فیلتر یا پیچیدگی لازم برای دستیابی به مشخصات فیلتر دارند در این بخش خود را به چند مثال ساده از فیلترهای بازگشتی و غیر بازگشتی منحصر می کنیم ولی در فصلهای ۵ و ۶ ابزارهای بیشتری پی می ریزیم که تحلیل و درک خواص این سیستم را برایمان آسانتر می سازند.

۳-۱۱-۱ فیلترهای گسسته در زمان بازگشتی مرتبه اول

همتای گسسته در زمان فیلترهای مرتبه اول بخش ۳-۱۰ سیستم LTI توصیف شده با معادله تفاضلی زیر است .

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \quad (۱۵۱-۳)$$

با توجه به خاصیت تابع ویژه بودن سیگنالهای نمایی مختلط می دانیم که به ازای $x[n] = e^{j\omega n}$ داریم $y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ که پاسخ فرکانسی سیستم است با جایگذاری در معادله (۱۵۱-۳) به دست می آوریم.

$$H(e^{j\omega})e^{j\omega n} - aH(e^{j\omega})e^{j\omega(n-1)} = e^{j\omega n} \quad (۱۵۲-۳)$$

یا

$$[1 - ae^{j\omega}]H(e^{j\omega})e^{j\omega n} = e^{j\omega n} \quad (۱۵۳-۳)$$

بنابراین

$$(۱۵۴-۳)$$

اندازه و فاز $H(e^{j\omega})$ در شکل ۳-۳۴ (الف) به ازای $a=0.6$ و در شکل ۳-۳۴ (ب) به ازای $a=-0.6$ رسم شده اند می بینیم که به ازای مقادیر مثبت a معادله تفاضلی (۱۵۱-۳) همچون یک فیلتر پایین گذر عمل می کند که در فرکانسهای نزدیک $\omega=0$ تضعیفی کم دارد ولی با نزدیک شدن به $\omega=\pi$ تضعیف بیشتر و بیشتر می شود به ازای a منفی سیستم یک فیلتر بالا گذر است که فرکانسهای نزدیک $\omega=\pi$ را می گذارند و فرکانسهای پایین را تضعیف می کند. در واقع به ازای هر مقدار $0 < a < 1$ سیستم تقریبی از یک فیلتر پایین گذر و به ازای هر مقدار $-1 < a < 0$ تقریبی از یک فیلتر بالا گذر است و $|a|$ اندازه باند عبور را تعیین می کند؛ هر چه $|a|$ بزرگتر باشد باند عبور وسیعتر است.

مانند مثالهای پیوسته در زمان، بده - بستانی بین مشخصات حوزه فرکانسی و حوزه زمان وجود دارد پاسخ ضربه سیستم توصیف شده با معادله (۱۵۱-۳) عبارت است از

$$h[n] = a^n u[n] \quad (۱۵۵-۳)$$

پاسخ پله $s[n] = u[n] * h[n]$ عبارت است از

$$s[n] = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} u[n] \quad (۱۵۶-۳)$$

این دو عبارت نشان می دهند که $|a|$ سرعت رسیدن پاسخهای ضربه و پله به مقادیر نهایی شان را تعیین می کند، هر چه $|a|$ کوچکتر باشد پاسخ سریعترست و فیلتری یا باند عبور کوچکتر داریم درست مانند حالت پیوسته در زمان می توان با استفاده از معادلات تفاضلی مرتبه بالاتر فیلتری تیزتر به دست آورد و انعطاف بیشتری در توازن بین قیدهای

سرانجام توجه کنید که طبق معادله (۱۵۵-۳) سیستم توصیف شده اب معاده (۱۵۱-۳) به ازای $|a| \geq 1$ ناپایدارست، و به ورودیهای نمایی مختلط پاسخ کراندار نمی دهد چنانچه قبلاً گفتیم روشهای مبتنی بر تحلیل فوریه و تحلیل حوزه فرکانس به سیستمهایی منحصرند که به نمایی های مختلط پاسخ کراندار می دهند، پس در مثالهایی مانند معادله (۳-۱۵۱) خود را به سیستمهای پایدار منحصر می کنیم.

۳-۱۱-۲ فیلترهای گسسته در زمان غیر بازگشتی

شکل کلی معادله تفاضلی غیر بازگشتی FIR به صورت زیرست

$$y[n] = \sum_{k=-N}^M b_k x[n-k] \quad (۱۵۷-۳)$$

یعنی خروجی $y[n]$ متوسط وزندار $(N+M+1)$ مقدار $x[n]$ ، از $x[n-M]$ تا $x[n+N]$ است و ضرائب وزنی b_k هستند این گونه سیستمها را می توان برای انجام فیلترهای مختلف از جمله فرکانسهای گزینی به کاربرد.

شکل ۳-۳۴: پاسخ فرکانسی فیلتر گسسته در زمان بازگشتی مرتبه اول معادله (۱۵۱-۳): الف) $a = 0.6$ ؛ ب) $a = -0.6$ یک نمونه پر کاربرد از این فیلترها فیلتر متوسط گیر متحرک است که در آن خروجی $y[n]$ به ازای هر n مثلاً n_0 متوسط مقادیر ورودی $x[n]$ در حوالی n_0 است با این متوسط گیری موضعی مولفه های فرکانس بالای ورودی در متوسط گیری هموار می شوند ولی تغییرات کم فرکانس باقی می ماند در بخش ۳-۹ یک فیلتر متوسط گیر متحرک دو نقطه ای [معادله (۱۳۸-۳)] معرفی شد یک نمونه دیگر فیلتر متوسط گیر متحرک سه نقطه ای زیرست

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n-1] + x[n] + x[n+1]) \quad (۱۵۸-۳)$$

یعنی خروجی $y[n]$ متوسط سه مقدار متوالی ورودی است در این حالت

$$h[n] = \frac{1}{3}(\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1])$$

بنابراین طبق معادله (۱۲۲-۳) پاسخ فرکانسی عبارت است از :

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{3}[e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}] = \frac{1}{3}(1 + 2\cos\omega) \quad (۱۵۹-۳)$$

شکل ۳-۳۵ اندازه $H(e^{j\omega})$ را نشان می دهد می بینیم که این فیلتر مشخصه های کلی یک فیلتر پایین گذر را داراست. گرچه این فیلتر نیز مانند فیلتر بازگشتی مرتبه اول گذر سریعی از باند عبور به باند قطع ندارد. فیلتر متوسط گیر متحرک سه نقطه ای معادله (۱۵۸-۳) پارامتری ندارد که بتوان با تغییر آن فرکانس قطع موثر فیلتر را کنترل کرد به عنوان تعمیمی از این فیلتر متوسط گیر متحرک، متوسط گیری روی $N+M+1$ نقطه مجاور را در نظر می گیریم یعنی معادله تفاضلی زیر را به کار می بریم.

$$y[n] = \frac{1}{N+M+1} \sum_{k=-N}^M x[n-k] \quad (۱۶۰-۳)$$

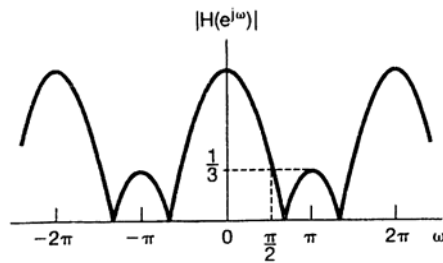
پاسخ ضربه یک پالس مستطیلی است $h[n] = 1/(N+M+1), N \leq n \leq M$ و در خارج این فاصله $h[n] = 0$ پاسخ فرکانس فیلتر عبارت است از

$$h(e^{j\omega}) = \frac{1}{N+M+1} \sum_{k=-N}^M e^{j\omega k} \quad (161-1)$$

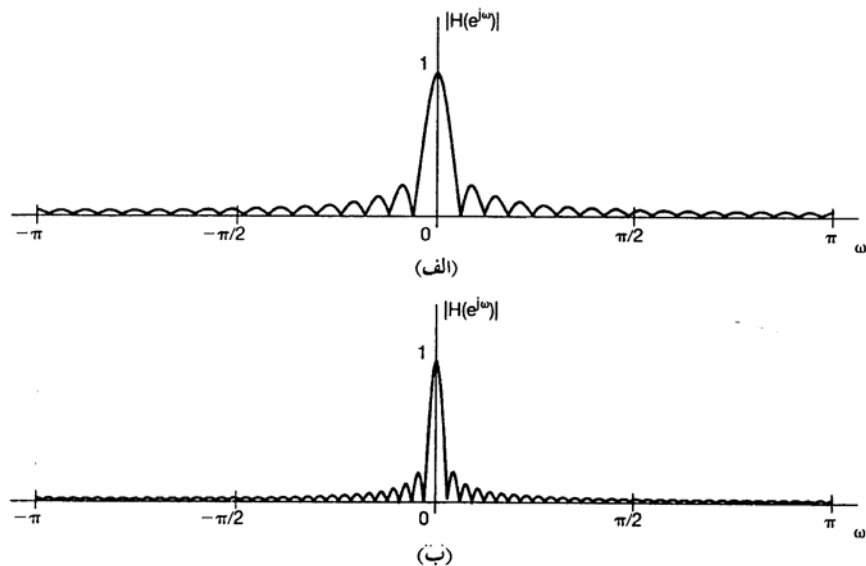
جمع معادله (۱۶۱-۳) را می توان با محاسباتی مشابه مثال ۳-۱۲ حساب کرد و به دست آورد.

$$h(e^{j\omega}) = \frac{1}{N+M+1} e^{j\omega[(N-M)/2]} \frac{\sin[\omega(M+N+1)/2]}{\sin(\omega/2)} \quad (162-3)$$

با تنظیم اندازه $N+M+1$ ، یعنی پنجره متوسط گیری می توانیم فرکانس قطع را تغییر دهیم، شکل ۳-۳۶ اندازه $H(e^{j\omega})$ را به ازای $N+M+1=33$ ، $N+M+1=65$ نشان می دهد.



شکل ۳-۳۵: اندازه پاسخ فرکانسی یک فیلتر متوسط گیر متحرک سه نقطه ای



شکل ۳-۳۶: اندازه پاسخ فرکانسی فیلتر پایین گذر متوسط گیر معادله (۱۶۲-۳): الف) $N=M=16$ ؛

ب) $N=M=32$

فیلترهای غیر بازگشتی بالا گذر نیز وجود دارند برای نشان دادن این موضوع باز هم با مثالی ساده معادله تفاضلی زیر را

$$y[n] = \frac{x[n] - x[n-1]}{2} \quad (۱۶۳-۳)$$

برای سیگنالهای ورودی تقریباً ثابت مقدار $y[n]$ نزدیک صفرست برای سیگنالهای دارای تغییرات شدید $y[n]$ احتمالاً مقدار بزرگی دارد پس سیستم توصیف شده با معادله (۱۶۳-۳) عمل یک فیلتر بالا گذر را انجام می دهد مولفه های کم تغییر فرکانس پایین تضعیف می کند و مولفه های فرکانس بالای دارای تغییرات سریع را با تضعیف کم عبور می دهد برای دیدن دقیقتر این مطلب باید پاسخ فرکانسی سیستم را بررسی کنیم برای این سیستم

$$h[n] = \frac{1}{2} \{ \sigma[n] - \sigma[n-1] \}$$

پس اعمال مستقیم معادله (۱۶۳-۳) نتیجه می دهد.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [1 - e^{-j\omega}] = je^{j\omega/2} \sin(\omega/2) \quad (۱۶۴-۳)$$

شکل ۳-۳۷ اندازه $H(e^{j\omega})$ را نشان می دهد و می بینیم که تقریب ساده ای از فیلتر بالا گذر، با گذری تدریجی از باند قطع به باند عبور وجود دارد با در نظر گرفتن فیلترهای غیر بازگشتی عمومی تر می توانیم فیلترهای پایین گذر بالا گذر، و فرکانس گزین دیگری با گذرهای تیزتر به دست آوریم.

توجه کنید که چون پاسخ ضربه تمام سیستمهای FIR طول محدودی دارند (یعنی با توجه به معادله (۱۵۷-۳) در $h[n] = b_n, -N \leq n \leq M$ در بقیه جاها $h[n] = 0$) به ازای هر مقدار b_n مطلقاً جمع پذیرست. پس تمام این فیلترها پایدارند همچنین اگر در معادله (۱۵۷-۳) داشته باشیم $N > 0$ سیستم غیر علی می شود زیرا $y[n]$ به مقادیر آینده $x[n]$ بستگی پیدا می کند در بعضی کاربردها مثلاً کاربردهایی که سیگنالهای ضبط شده پردازش می شوند علی بودن قید لازمی نیست و می توانیم فیلتری با $N > 0$ به کار بریم ولی در کاربردهایی که سیگنالها به طور همزمان پردازش می شوند علی بودن ضروری است و در آنها باید داشته باشیم $N \leq 0$

۳-۱۲ خلاصه

در این فصل نمایش سری فوریه سیگنالهای پیوسته و گسسته در زمان را پی ریختیم و این نمایش را برای بررسی مختصر یکی از مهمترین تحلیلهای سیگنال و سیستم، یعنی فیلتر کردن، بکار بردیم در بخش ۳-۲ انگیزه اصلی استفاده از سری فوریه را بیان کردیم این که سیگنالهای نمایی مختلط توابع ویژه سیستمهای LTI هستند همچنین در بخشهای ۳-۳ تا ۳-۷ دیدیم که هر سیگنال متناوب دارای اهمیت عملی را می توان با یک سری فوریه نمایش داد، یعنی با جمع وزندار نمایی های مختلط هماهنگ که دوره تناوبی همانند سیگنال اصلی دارند همچنین دیدیم که سری فوریه خواص مهمی دارد که نشان می دهد چگونه ویژگیهای سیگنال در ضرائب سری فوریه آن منعکس می شود. یکی از مهمترین خواص سری فوریه نتیجه مستقیم خاصیت تابع ویژه بودن نمایه های مختلط است مشخصاً این که اگر ورودی یک سیستم LTI متناوب باشد خروجی نیز با همان دوره تناوب متناوب است و هر ضریب سری فوریه خروجی از ضرب یک عدد مختلط در ضریب متناظر سری فوریه ورودی به دست می آید مقدار این ضریب تابعی از فرکانس مولفه متناظرست. این تابع فرکانس، مشخصه سیستم، است و پاسخ فرکانسی سیستم نامیده می شود با بررسی پاسخ

تای آنها را توصیف کردیم یک دسته مهم از کاربردها فیلترهای فرکانس گزین هستند سیستمهایی که باندهای فرکانسی مشخصی را می گذارند و باندهای دیگری را حذف یا به شدت تضعیف می کنند مفهوم فیلترهای فرکانس گزین ایده ال را معرفی کردیم و نمونه هایی از فیلترهای فرکانس گزین توصیف شده با معادلات دیفرانسیل و تفاضلی به دست دادیم.

هدف این فصل شروع پی ریزی ابزارهای تحلیل فوریه و نشان دادن کاربردهای عملی این ابزار بود در فصل های بعدی این برنامه را ادامه می دهیم و نمایش فوریه سیگنالهای متناوب پیوسته و گسسته در زمان را به دست می آوریم همچنین نگاهی عمیقتر به مبحث فیلتر می اندازیم و دیگر کاربردهای مهم روشهای فوریه را نیز بررسی می کنیم.

توجه: در انتگرال های فوق حدود انتگرال 0 تا T در نظر گرفته شده است که می تواند بین $[c, c + T]$ تغییر نماید.
 توجه: مقدار ثابت A_0 همان مقدار متوسط سیگنال $x(t)$ در یک دوره تناوب است به همین دلیل آن را مولفه dc سیگنال $x(t)$ می نامند.

چند رابطه مفید

$$\int_T \sin \omega_0 t \cos n \omega_0 t dt = 0$$

$$\int_T \sin m \omega_0 t \sin n \omega_0 t dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{T}{2} & m = n \end{cases}$$

$$\int_T \cos m \omega_0 t \cos n \omega_0 t dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{T}{2} & m = n \end{cases}$$

سیگنال با تقارن نیم موج (فرد هماهنگ)

سیگنال $x(t)$ با دوره تناوب T را در نظر بگیرید. به شرطی تقارن نیم موج دارد که به بیان دیگر:

$$x(t) = -x\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

$$x(t) = -x\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

یعنی مقدار سیگنال در هر نیم تناوب مساوی مقدار سیگنال در نیم تناوب مجاور آن است. سری فوریه سیگنال های دارای تقارن نیم موج تنها دارای هارمونیک های فرد است یعنی برای k های زوج داریم:

$$a_k = 0$$

سری فوریه مثلثاتی فشرده

معادله $x(t)$ می تواند به صورت زیر بیان شود:

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \theta_n) \quad , \quad \omega_k = \frac{2\pi}{T}$$

$$C_0 = A_0 \quad , \quad C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad , \quad \theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{-B_n}{A_n}\right)$$

در روابط فوق، C_n و θ_n به ترتیب دامنه و فاز هارمونیک n ام می باشند.

از آنجا که هر تابع سینوسی می تواند به صورت جملات نمایی بیان شود، سری فوریه مثلثاتی می تواند به صورت جملات نمایی بیان شود. به طور خلاصه، سیگنال متناوب با دوره تناوب T را می توان با سری فوریه نمایی به صورت زیر بیان نمود:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (1)$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (2)$$

ضرایب a_n عموماً مختلط هستند.

خلاصه روابط سری فوریه در جدول زیر آورده شده است:

سری فوریه	تعیین ضریب	تبدیل فرمول ها
$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\omega_0 t + B_n \sin n\omega_0 t$	$A_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt$ $A_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) \cos n\omega_0 t dt$ $B_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) \sin n\omega_0 t dt$	$A_0 = C_0 = a_0$ $A_n - jB_n = C_n d^{j\theta_n} = 2a_n$ $A_n + jB_n = C_n d^{-j\theta_n} = 2a_{-n}$
$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$	$C_0 = A_0$ $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ $\theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{-B_n}{A_n}\right)$	$C_0 = a_0$ $C_n = 2 a_n \quad n \geq 1$ $\theta_n \angle a_n$
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$	

توجه: با جابجایی زمانی سیگنال $x(t)$ مقدار dc آن (ضریب a_0) تغییر نمی کند.

توجه: اگر سیگنال متناوب $x(t)$ در یک سری فوریه نمایی به صورت زیر بیان شود:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

می توان نشان داد که سری فوریه نمایی برای $\hat{x}(t) = x(t - T)$ به صورت زیر می باشد.

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{a}_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$|\hat{a}_k| = |a_k|, \quad \angle \hat{a}_k = \angle a_k - k\omega_0 T$$

$$x(-t) = -x(t) \Rightarrow a_{-k} = -a_k$$

توجه: فرض کنید $x(t)$ سیگنالی با دوره تناوب T و ضرایب سری فوریه a_k باشد، اگر دوره تناوب $x(t)$ را mT در نظر بگیریم و ضرایب سری فوریه آن را در حالت b_k بنامیم آن گاه:

$$b_k = a_{k/m}$$

دو رابطه مفید

$$x(t) \cos M \omega_0 t \xleftrightarrow{FS} \frac{1}{2} (a_{k-M} + a_{k+M})$$

$$x(t) \sin M \omega_0 t \xleftrightarrow{FS} \frac{1}{2} (a_{k-M} - a_{k+M})$$

توجه: برای سیگنال $x(t)$ ضرایب سری فوریه a_k و تناوب ۲ در نظر بگیرید آن گاه ضرایب سری فوریه $y(t) = e^{j4t} x(t)$ را به دست آورید.

$$e^{jM \frac{2\pi}{T}} x(t) \xleftrightarrow{FS} a_{k-M}$$

$$M \frac{2\pi}{T} = 4, \quad T = 2 \Rightarrow M = \frac{4}{\pi}$$

توجه: $|a_k|^2$ توان متوسط مولفه هارمونیک k ام $x(t)$ است و رابطه پارسوال می گوید توان متوسط کل یک سیگنال متناوب با مجموع توان متوسط تمام هارمونیک های آن برابر است.

جدول خواص سری فوریه

با فرض این که دو سیگنال متناوب $x(t)$ و $y(t)$ دارای دوره تناوب T و $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ باشند، آن گاه خلاصه ای از خواص

سری فوریه برابر است با:

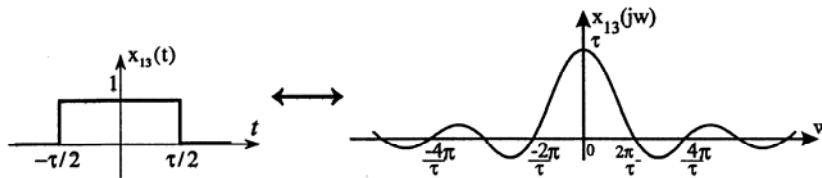
سیگنال متناوب	ضرایب سری فوریه	خاصیت
$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$	خطی بودن
$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$	جابجایی زمانی
$e^{jM\omega_0 t} x(t), M \in Z$	a_{k-M}	جابجایی فرکانسی
$x^*(t)$	a_{-k}^*	مزدوج گیری
$x(-t)$	a_{-k}	وارونگی زمانی
$x(at), a > 0, T/a$	a_k	تغییر مقیاس زمانی
$\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$Ta_k b_k$	کانولوشن متناوب
$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$	ضرب
$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k$	مشتق گیری
$\int_{-\infty}^t x(t)dt, a_0 = 0$	$(\frac{1}{jk\omega_0})a_k$	انتگرال گیری
$x(t) = x^*(t)$	$\begin{cases} a_k = a_{-k}^* \\ \text{Re}\{a_k\} = \text{Re}\{a_{-k}\} \\ \text{Im}\{a_k\} = -\text{Im}\{a_{-k}\} \\ a_k = a_{-k} , \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{cases}$	تقارن سیگنال حقیقی
$x(t) = x^*(t) = x(-t)$	$a_k^* = a_k = \text{Re}\{a_k\}$	تقارن سیگنال حقیقی و زوج
$x(t) = x^*(t) = -x(-t)$	$a_k^* = -a_k = j \text{Im}\{a_k\}$	تقارن سیگنال حقیقی و فرد
$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$	$a_k = \text{Re}\{a_k\} + j \text{Im}\{a_k\}$	تجزیه زوج و فرد سیگنال حقیقی
$P_x = \frac{1}{T} \int_T x(t) ^2 dt$	$P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k ^2$	توان سیگنال (رابطه پارسوال)

$$x_{13}(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{و غیره} \end{cases}$$

$$x_{13}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{-1}{j\omega} (e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{j\omega \frac{\tau}{2}}) = \frac{2 \operatorname{Sin}(\omega \tau / 2)}{\omega} = \tau \operatorname{Sin} c\left(\frac{\tau \omega}{2\pi}\right)$$

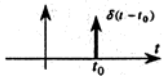
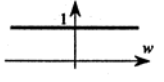
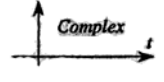
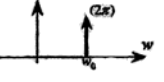

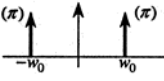
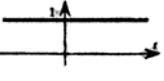
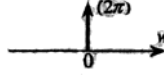
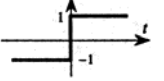
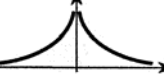


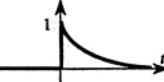
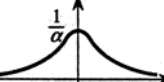
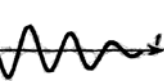
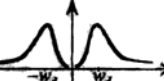
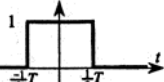
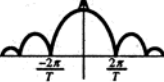
$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau \operatorname{Sin} c\left(\frac{\tau \omega}{2\pi}\right)$$



شکل ۳-۳۸

همان طور که در شکل مشاهده می گردد، به ازای $\frac{\tau \omega}{2\pi} = \pm n$ داریم:

$$\omega = \left(\frac{\tau \omega}{2\pi}\right) \pi, \quad n = 1, 2, \dots \Rightarrow \operatorname{Sin} c\left(\omega \frac{\tau}{2}\right) = 0$$

$x(t)$ منحنى	$x(t)$	$F\{x(t)\} = X(jw)$	$ X(jw) $ منحنى
	$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	
	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(w - w_0)$	
	$\text{Cos } w_0 t$	$\pi[\delta(w + w_0) + \delta(w - w_0)]$	
	1	$2\pi\delta$	
	$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{jw}$	
	$u(t)$	$\pi\delta(w) = \frac{1}{jw}$	
	$e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{\alpha + jw} \quad \alpha > 0$	
	$e^{-\alpha t} \text{Cos } w_d t u(t)$	$\frac{a + jw}{(a + jw)^2 + w_d^2}$	
	$\Pi(t/T)$	$T \frac{\text{Sin } \frac{wT}{2}}{\frac{wT}{2}}$	

	$x(t)$	$X(j\omega)$
1	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a+j\omega} \quad a > 0$
2	$e^{at}u(-t)$	$\frac{1}{a-j\omega} \quad a > 0$
3	$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2} \quad a > 0$
4	$t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n!}{(a+j\omega)^{n+1}} \quad a > 0$
5	$\delta(t)$	1
6	1	$2\pi\delta(\omega)$
7	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
8	$\cos \omega_0 t$	$\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$
9	$\sin \omega_0 t$	$j\pi\delta(\omega - \omega_0) - j\pi\delta(\omega + \omega_0)$
10	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
11	$\text{Sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
12	$\cos \omega_0 t u(t)$	$\frac{\pi}{2}\delta(\omega - \omega_0) + \frac{\pi}{2}\delta(\omega + \omega_0) + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
13	$\sin \omega_0 t u(t)$	$\frac{\pi}{j2}\delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{j2}\delta(\omega + \omega_0) + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
14	$e^{-at} \sin \omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2 + \omega_0^2}$
15	$e^{-at} \cos \omega_0 t u(t)$	$\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2 + \omega_0^2}$
16	$\text{rect}\left(\frac{t}{2\tau}\right) = \prod\left(\frac{t}{2\tau}\right)$	$2\frac{\text{Sin } \tau\omega}{\omega} = 2\tau \text{Sinc}\left(\frac{\tau\omega}{\pi}\right)$
17	$\frac{\text{Sin } \tau t}{\pi t} = \frac{\tau}{\pi} \text{Sinc}\left(\frac{\tau t}{\pi}\right)$	$\text{rect}\left(\frac{\omega}{2\tau}\right) = \prod\left(\frac{\omega}{2\tau}\right)$
18	$A\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau \text{Sinc}^2\left(\frac{\tau\omega}{\pi}\right)$
19	$\frac{\tau}{2\pi} \text{Sinc}^2\left(\frac{\tau t}{2\pi}\right)$	$A = \left(\frac{\omega}{\tau}\right)$
20	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\omega_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
21	$e^{-t^2/2\sigma^2}$	$\sigma\sqrt{2\pi} e^{-\sigma^2\omega^2/2}$

در صورتی که $x(t) \xrightarrow{F} X(j\omega)$ و $y(t) \xrightarrow{F} Y(j\omega)$ دو زوج تبدیل فوریه باشند، آن گاه برخی خواص تبدیل فوریه عبارتند از:

خطی بودن

$$Ax(t) + By(t) \xrightarrow{F} AX(j\omega) + BY(j\omega)$$

خاصیت دوگانی

این خاصیت بیان می کند که اگر $x(t) \xrightarrow{F} X(j\omega)$ باشد آن گاه:

$$X(t) \xrightarrow{F} 2\pi x(-j\omega)$$

اصل دوگانی نتایج گسترده ای در بردارد و دید بسیار ارزشمندی را در تجزیه و تحلیل سیگنال ها به ما می دهد.

مثال: با استفاده از خاصیت دوگانی نشان دهید که:

$$\tau \text{Sinc}\left(\frac{\tau t}{2\pi}\right) \xrightarrow{F} 2\pi \Pi\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$$

$$\frac{1}{a + jt} \xrightarrow{F} 2\pi e^{a\omega} u(-\omega)$$

$$\frac{2a}{t^2 + a^2} \xrightarrow{F} 2\pi e^{-a|\omega|}$$

حل حالت اول: می دانیم:

$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \xrightarrow{F} \tau \text{Sinc}\left(\frac{\tau\omega}{2\pi}\right)$$

$$X(j\omega) = \tau \text{Sinc}\left(\frac{\tau\omega}{2\pi}\right), \quad x(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

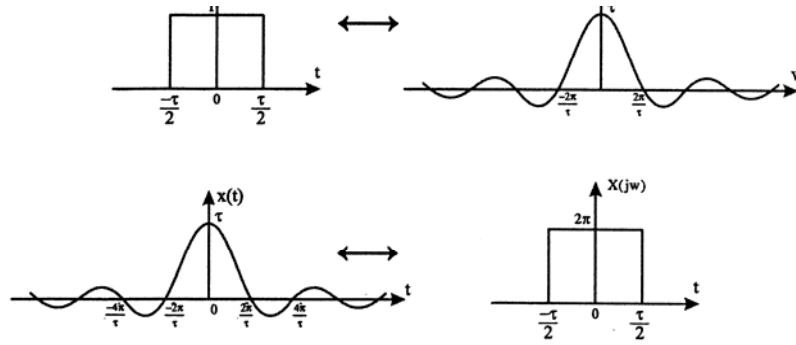
خاصیت دوگانی بیان می دارد که:

$$x(t) = \tau \text{Sinc}\left(\frac{\tau\omega}{2\pi}\right), \quad x(-j\omega) = \Pi\left(\frac{-\omega}{\tau}\right) = \Pi\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$$

بنابراین با تغییری ناچیز در اثر ضرب 2π داریم:

$$\tau \text{Sinc}\left(\frac{\tau t}{2\pi}\right) \xrightarrow{F} = 2\pi \Pi\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$$

خاصیت دوگانی (تقارن) زوج فوریه در شکل زیر آمده است:



شکل ۳-۳۹

حالت دوم: می دانیم:

$$e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a + j\omega}$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}, \quad x(t) = e^{-at} u(t)$$

با اعمال خاصیت دوگانگی:

$$X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}, \quad x(-j\omega) = e^{-a\omega} u(-\omega)$$

$$\frac{1}{a + jt} \xleftrightarrow{F} 2\pi e^{a\omega} u(-\omega)$$

حالت سوم: می دانیم:

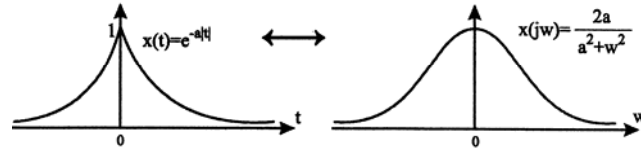
$$e^{-a|t|} \xleftrightarrow{F} \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

$$X(j\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \quad x(t) = e^{-a|t|}$$

$$X(t) = \frac{2a}{a^2 + t^2}, \quad x(j\omega) = e^{-a|\omega|}$$

بنابراین:

$$\frac{2a}{a^2 + t^2} \xleftrightarrow{F} 2\pi e^{-a|\omega|}$$



شکل ۴۰-۳

به طور مشابه می توان نشان داد:

$$\frac{1}{2} \left[\delta(t) + \frac{j}{\pi t} \right] \xleftrightarrow{F} u(\omega)$$

$$\frac{1}{t} \xleftrightarrow{F} -j\pi \operatorname{Sgn}(\omega)$$

یادآوری چند رابطه

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

$$x(t) * u(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t + \tau) d\tau = \int_{-t}^{\infty} x(\tau) d\tau$$

$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) * \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \tau \Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

توجه: برای توابعی که از خطوط مستقیم تشکیل شده اند، استفاده از این روش یافتن تبدیل فوریه مفید است.

جدول خواص تبدیل فوریه

با فرض اینکه دو سیگنال $x(t)$ و $y(t)$ دارای دوره تبدیل فوریه $X(j\omega)$ و $Y(j\omega)$ باشند. آن گاه خلاصه ای از تبدیل

فوریه برابر است با:

سیگنال متناوب	ضرایب سری فوریه	خاصیت
$Ax(t) + By(t)$	$AX(j\omega) + BY(j\omega)$	خطی بودن
$X(t)$	$2\pi x(-j\omega)$	دوگانی
$x(at)$	$\frac{1}{ a } X(j\frac{\omega}{a})$, $a \neq 0$	تغییر مقیاس زمانی
$x(-t)$	$X(-j\omega)$	وارونگی زمانی
$x(t \pm t_0)$	$X(j\omega)e^{\pm j\omega t_0}$	جابجایی زمانی
$x(t)e^{\pm j\omega_0 t}$	$X(j(\omega \mp \omega_0))$	جابجایی فرکانسی
$x(t) * y(t)$	$X(j\omega)Y(j\omega)$	کانولوشن زمانی
$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$	ضرب
$\frac{d^n x}{dt^n}$	$(j\omega)^n X(j\omega)$	مشتق گیری زمانی
$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$	انتگرال گیری زمانی
$t x(t)$	$j \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$	مشتق گیری فرکانسی
$\frac{-x(t)}{ju} + \pi x(0)\delta(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) d\alpha$	انتگرال گیری فرکانسی
$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$	مزدوج گیری
$x(t) = x^*(t)$	$\begin{cases} \text{Re}\{X(j\omega)\} = \text{Re}\{X(-j\omega)\} \\ \text{Im}\{X(j\omega)\} = -\text{Im}\{X(-j\omega)\} \\ X(-j\omega) = X(j\omega) \\ \angle X(-j\omega) = -\angle X(j\omega) \end{cases}$	تقارن سیگنال حقیقی
$x(t) = x_e(t) = x_o(t)$	$X(j\omega) = \text{Re}\{X(j\omega)\} + j \text{Im}\{X(j\omega)\}$	تجزیه سیگنال حقیقی
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	سیگنال متناوب
$x(t) * \frac{1}{\pi t}$	$-j Sgn(\omega) X(j\omega)$	تبدیل هیلبرت
$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$	$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega) ^2 d\omega$	انرژی سیگنال (رابطه پارسوال)

توجه: به علت ورودی غیر علی و این که ورودی سیستم دارای تبدیل فوریه است، استفاده از تبدیل فوریه در تعیین پاسخ روشی مناسب است.

توجه: ترکیب سری یک فیلتر پایین گذر با یک فیلتر بالاگذر، یک فیلتر میان گذر را نتیجه می دهد.

توجه: ترکیب موازی یک فیلتر پایین گذر با یک فیلتر بالاگذر، یک فیلتر میان نگذر را نتیجه می دهد.

سوال ۱: اگر سیگنال $x(t)$ مطابق شکل زیر باشد و $X(\omega)$ تبدیل فوریه آن باشد، مقادیر $\angle X(\omega)$ و

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{-j\omega} d\omega \text{ به ترتیب چقدر است؟}$$

(۱) $2\pi, \omega$

(۲) $0, +2\omega$

(۳) $2\pi, -\omega$

(۴) $0, -2\omega$

سوال ۲: سیستمی از سه طبقه متوالی مطابق شکل زیر تشکیل شده است. در این شکل $H(f)$ تابع تبدیل طبقه

وسط می باشد. کدام گزینه در مورد این سیستم درست می باشد؟

(۱) LTI نیست. $H(2f)$ است با تبدیل LTI (۲)

(۳) LTI است با تبدیل $H\left(\frac{f}{2}\right)$ است با تابع تبدیل LTI (۴)

سوال ۳: سیگنال $x(t)$ با دوره تناوب $T_0 = 1S$ دارای ضرایب سری فوریه $a_k = \left(\text{Sinc} \frac{k}{2}\right)^2$ می باشد. $x(t)$

کدام است؟

(۱) (۲)

(۳) (۴)

سوال ۴: پاسخ فرکانسی یک سیستم زمان پیوسته در شکل زیر داده شده است. پاسخ پله فیلتر کدام است؟

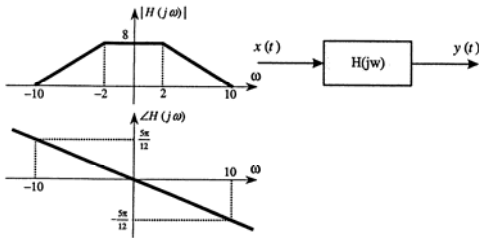
(۲) $x(t) = \frac{2}{\pi} \text{Sinc}\left(\frac{3t}{2}\right)$

(۱) $x(t) = \frac{2}{\pi} \text{Sinc}\left(\frac{3t}{\pi}\right)$

(۴) $x(t) = \frac{2}{\pi} \text{Sinc}(3t)$

(۳) $x(t) = \frac{2}{3\pi} \text{Sinc}(3t)$

اگر $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - k\frac{\pi}{4}\right)$ آن گاه خروجی $y(t)$ کدام است؟



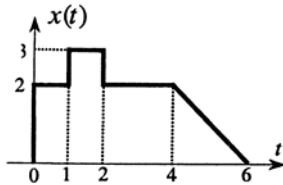
$$\frac{32}{\pi} + \frac{8}{\pi} \cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right) \quad (1)$$

$$\frac{32}{\pi} + \frac{8}{\pi} \cos\left(8t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (2)$$

$$\frac{16}{\pi} \cos\left(8t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{8}{\pi} \cos\left(16t - \frac{\pi}{3}\right) \quad (3)$$

$$\frac{32}{\pi} + \frac{16}{\pi} \cos\left(8t - \frac{\pi}{3}\right) \quad (4)$$

سوال ۶: اگر سیگنال $x(t)$ مطابق شکل باشد و $X(\omega)$ تبدیل فوریه آن باشد، در آن صورت



$X(0) = X(\omega)|_{\omega=0}$ چقدر است؟

$$11 \quad (2) \qquad 10 \quad (1)$$

$$13 \quad (4) \qquad 12 \quad (3)$$

سوال ۷: سیستم LTI را با پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ در نظر بگیرید:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{\sin 4\omega}{\omega}$$

اگر ورودی این سیستم سیگنال متناوب $x(t)$ با پریود $T=8$ به صورت زیر باشد، ضرایب سری فوریه خروجی (y_k)

کدام خواهد بود؟

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 4 \\ -1 & 4 \leq t < 8 \end{cases}$$

$$y_k = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \frac{16}{\pi j k} & k \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$y_k = 0, \quad \forall k \quad (1)$$

$$y_k = \begin{cases} \frac{16}{\pi j k} & k \text{ is even} \\ 0 & k \text{ is odd} \end{cases} \quad (4)$$

$$y_k = \begin{cases} 0 & k \text{ is even} \\ \frac{16}{\pi j k} & k \text{ is odd} \end{cases} \quad (3)$$

آن صورت سیستم جزو کدام دسته است؟

$$Y(j\omega) = e^{j2\omega} X(j\omega) + j \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

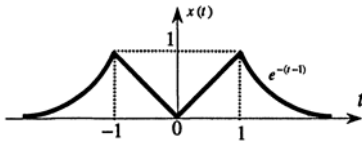
(۲) خطی، تغییرناپذیر با زمان، علی

(۱) خطی، تغییرناپذیر با زمان، غیر علی

(۴) غیرخطی، تغییرناپذیر با زمان، علی

(۳) خطی، تغییرپذیر با زمان، غیر علی

سوال ۹: برای سیگنال $x(t)$ نشان داده شده در شکل زیر، مقدار عبارت $a = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \frac{2\sin\omega}{2\pi\omega} e^{j2\omega} d\omega$



برابر است با:

(۲) ۰,۳۶۴۷

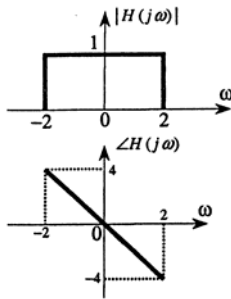
(۱) ۱,۳۶۴۸

(۴) ۰,۱۶۴۷

(۳) ∞

سوال ۱۰: سیگنال $x(t) = 2\pi\delta(t)$ وارد سیستم LTI با مشخصات فرکانسی شکل زیر می شود. در این صورت

مقدار خروجی در لحظه $t=2$ برابر است با:



(۱) 4π

(۲) $\frac{4}{\pi}$

(۳) ۴

(۴) $\frac{2}{\pi}$

سوال ۱۱: برای سیگنال $x(t)$ با تبدیل فوریه $X(j\omega)$ ، خاصیت $\int_{-\infty}^{\infty} \omega X(j\omega) e^{j\omega} d\omega = 0$ است. کدام یک از

سیگنال های داده شده میتواند جزو این دسته از سیگنال ها باشد؟

(۴) $(t-1)e^{-\frac{(t-1)^2}{2}}$

(۳) $te^{-\frac{t^2}{2}}$

(۲) $e^{-\frac{(t-1)^2}{2}}$

(۱) $e^{-\frac{(t+1)^2}{2}}$

سوال ۱۲: یک سیستم LTI را با پاسخ ضربه $h(t) = \frac{\sin 1.5\pi t}{\pi t}$ در نظر بگیرید. چنانچه ورودی این سیستم یک

سیگنال متناوب با دوره تناوب ۲ ثانیه باشد و به صورت:

$$x(t) = \begin{cases} 1-t + \sin \pi t & 0 < t < 1 \\ 1 + \sin \pi t & 1 < t < 2 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{3}{4}, a_{\pm 1} = \frac{1}{\pi^2} \mp \frac{1}{j2\pi} \quad (1)$$

و بقیه ضرایب صفرند.

$$a_0 = \frac{1}{2}, a_{\pm 1} = \frac{1}{\pi^2} \mp \frac{1}{j2\pi} \quad (2)$$

و بقیه ضرایب صفرند.

$$a_0 = \frac{3}{4}, a_{\pm 1} = \frac{1}{\pi^2} \mp \frac{1}{j2\pi} \pm \frac{1}{j2} \quad (3)$$

و بقیه ضرایب صفرند.

$$a_0 = \frac{1}{2}, a_{\pm k} = \frac{1}{k^2 \pi^2} \mp \frac{(-1)^k}{j2k\pi} \quad (4)$$

سوال ۱۳: فرض کنید تبدیل فوریه $x(t)$ را با $X(j\omega)$ و تبدیل فوریه $g(t)$ با تبدیل فوریه $G(j\omega)$ نمایش دهیم. چنانچه رابطه بین $x(t)$ و $g(t)$ به صورت $x(t) = \int_{t-3}^{t-1} g(\tau) d\tau$ باشد، کدام یک از گزینه های زیر درست است؟ (* اپراتور کانولوشن است).

$$X(j\omega) = \left[\frac{1}{j\omega} G(j\omega) + \pi G(0) \delta(\omega) \right] * \frac{2\text{Sin}\omega}{\omega} e^{j2\omega} \quad (1)$$

$$X(j\omega) = G(j\omega) \frac{2\text{Sin}\omega}{\omega} e^{-j2\omega} \quad (2)$$

$$X(j\omega) = \left[\frac{1}{j\omega} G(j\omega) + \pi G(0) \delta(\omega) \right] * \frac{2\text{Sin}\omega}{\omega} e^{-j2\omega} \quad (3)$$

$$X(j\omega) = G(j\omega) \frac{2\text{Sin}\omega}{\omega} e^{j2\omega} \quad (4)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 3y = \frac{dx}{dt} + 2x$$

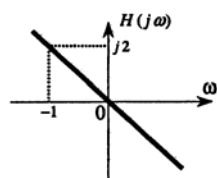
پاسخ این سیستم به ورودی $x(t) = e^{-t}u(t)$ عبارتند از:

$$y(t) = \left[\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \right] u(t) \quad (1)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}e^{-t} + te^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \right] u(t) \quad (2)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}e^{-t} + te^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \right] u(t) \quad (3)$$

$$y(t) = \left[\frac{1}{2}e^{-t} + te^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \right] u(t) \quad (4)$$



سوال ۱۵: فرض کنید پاسخ فرکانسی یک سیستم LTI و علی به صورت مقابل باشد:

$$X(j\omega) = \frac{1}{2 + j\omega}$$

در صورتی که تبدیل فوریه ورودی این سیستم

باشد و خروجی سیستم را $y(t)$ بنامیم، کدام یک از گزینه های زیر نادرست است؟

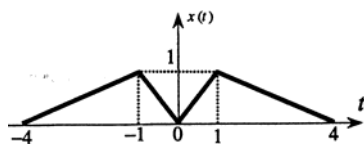
$$y(0^*) = 4 \quad (2)$$

$$y(t) = 4e^{-2t}u(t) \quad (1)$$

$$y(t) = 4e^{-2t}u(t) - 2\delta(t) \quad (4)$$

$$y(\infty) = 0 \quad (3)$$

سوال ۱۶: در صورتی که $x(t)$ به صورت شکل نشان داده شده در زیر باشد، مقدار تبدیل فوریه آن در $\omega = 0$



چقدر است؟

$$0,5 \quad (2)$$

$$0 \quad (1)$$

$$8 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

سوال ۱۷: فرض کنید $y(t) = x(t)\cos t$ و تبدیل فوریه $y(t)$ به صورت $Y(j\omega) = u(\omega + 2) - u(\omega - 2)$

چگونه باید باشد؟

$$x(t) = \frac{2\sin t}{\pi t} \quad (2)$$

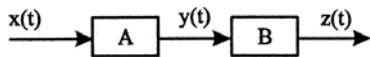
$$x(t) = \frac{\sin t}{\pi t} \quad (1)$$

$$x(t) = \frac{2\sin 2t}{\pi t} \quad (4)$$

$$x(t) = \frac{\sin 2t}{\pi t} \quad (3)$$

سیستم سیگنال $x(t) = \text{Sinc}(t)$ را اعمال می کنیم. $y(t) = \text{Sinc}(2t)$ و $z(t) = \text{Sinc}(t)$ می شود. کدام

یک از دو سیستم A و B می توانند LTI باشند؟



(۴) هیچکدام

(۳) هر دو

(۲) فقط B

(۱) فقط A

سوال ۱۹: چنانچه خروجی یک سیستم LTI به صورت $y(t) = \int_{t-5}^{t+5} x(\tau) d\tau$ باشد، تبدیل فوریه آن برابر است با:

$$Y(j\omega) = 10X(j\omega)e^{-j5\omega} \text{Sinc}\left(\frac{5\omega}{\pi}\right) \quad (۱)$$

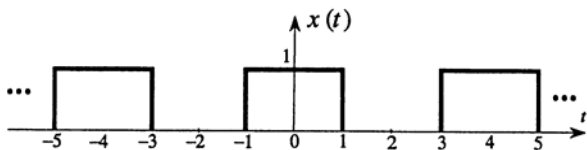
$$Y(j\omega) = \frac{1}{5}X(j\omega) \text{Sinc}\left(\frac{\omega}{10\pi}\right) \quad (۲)$$

$$Y(j\omega) = 10X(j\omega) \text{Sinc}\left(\frac{5\omega}{\pi}\right) \quad (۳)$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{5}X(j\omega)e^{-j5\omega} \text{Sinc}\left(\frac{\omega}{10\pi}\right) \quad (۴)$$

سوال ۲۰: یک سیستم LTI را با پاسخ ضربه $h(t) = \frac{\text{Sin} \frac{3\pi}{4} t}{\pi t}$ در نظر بگیرید. ورودی این سیستم پنجره

مستطیلی متناوب زیر است. خروجی $y(t)$ چگونه خواهد بود؟



$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \text{Cos} \frac{3\pi}{4} t \quad (۱)$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\text{Sin} \frac{3\pi}{4} k}{k\pi} e^{jk \frac{3\pi}{4} t} \quad (۲)$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\text{Sin} \frac{\pi}{2} k}{k\pi} e^{jk \frac{\pi}{2} t} \quad (۳)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \text{Cos} \frac{\pi}{2} t \quad (۴)$$

باشد. کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟

$$(۱) \int_{-\infty}^{\infty} |X(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \text{ و } x(t) \text{ حقیقی بوده}$$

$$(۲) \int_{-\infty}^{\infty} |X(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \text{ و } x(t) \text{ زوج بوده}$$

$$(۳) \int_{-\infty}^{\infty} |X(t)|^2 dt = \infty \text{ و } x(t) \text{ زوج بوده}$$

$$(۴) \int_{-\infty}^{\infty} |X(t)|^2 dt = \infty \text{ و } x(t) \text{ حقیقی بوده}$$

سوال ۲۲: فرض کنید $x(t)$ ورودی و $y(t)$ خروجی سیستم بوده و $X(j\omega)$ تبدیل فوریه ورودی سیستم است.

کدام یک از دو سیستم زیر تغییرناپذیر با زمان می باشند؟

$$\text{سیستم ۱: } y(t) = x(0) + X(t-3)$$

$$\text{سیستم ۲: } y(t) = X(0) + x(t-3)$$

(۲) فقط سیستم ۲

(۱) فقط سیستم ۱

(۴) هیچ از دو سیستم

(۳) هر دو سیستم

سوال ۲۳: اگر $x(t)$ و $y(t)$ هر دو توابعی حقیقی و غیر منفی (یعنی $x(t) \geq 0$ و $y(t) \geq 0$) و از نوع انرژی

باشند در این صورت کدام یک از دو نامساوی زیر لزوماً صحیح خواهد بود؟ در این نامساوی ها $X(f)$ و $Y(f)$

تبدیل فوریه های $x(t)$ و $y(t)$ هستند.

$$(۱) \int_{-\infty}^{\infty} |X(f) + Y(f)|^2 df \geq \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

$$(۲) \int_{-\infty}^{\infty} |X(f) + Y(f)|^2 df \geq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df$$

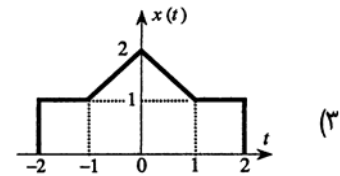
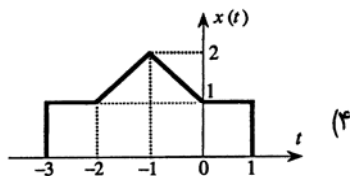
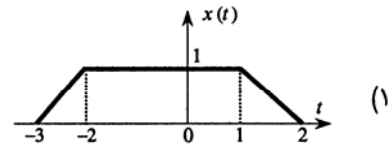
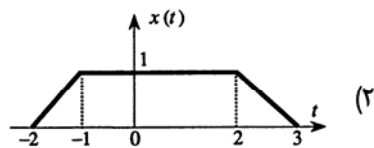
(۲) فقط (۲)

(۱) فقط (۱)

(۴) هیچ کدام

(۳) هر دو

سوال ۲۵: S_1 و S_2 در سری فوريه سيگنال متناوب $x(t)$ نشان داده شده در شکل زیر چقدر است؟
 $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega = 2\pi$ ، $X(\omega) \Big|_{\omega=0} = 4$ کدام گزینه برای $x(t)$ مناسب است؟



سوال ۲۶: مطلوب است تعیین تابع سیستمی که دارای پاسخ ایمپالس $h(t) = \delta(t) - e^{-2t}u(t)$ باشد؟

$$a_3 = \frac{2}{(3\pi)^2}, a_0 = \frac{5}{2} \quad (2)$$

$$a_3 = \frac{1}{(3\pi)^2}, a_0 = \frac{5}{2} \quad (1)$$

$$a_3 = \frac{2}{(3\pi)^2}, a_0 = \frac{5}{4} \quad (4)$$

$$a_3 = \frac{1}{(3\pi)^2}, a_0 = \frac{5}{4} \quad (3)$$

سوال ۲۷: یک تابع زمانی ولتاژ دارای تابع فوريه به فرم $F(j\omega) = \frac{8}{4 + j\omega}$ می باشد، انرژی شامل این شکل موج

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{j\omega + 1} \quad (2)$$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{j\omega + 2} \quad (1)$$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 4}{j\omega + 2} \quad (4)$$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{j\omega + 4} \quad (3)$$

ولتاژ، اعمال شده به مقاومت یک اهمی را به دست آورید؟

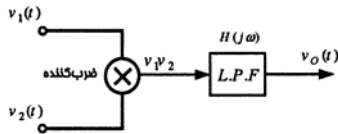
(4) ۱۶ ژول

(3) ۸ ژول

(2) ۱۲ ژول

(1) ۴ ژول

می باشد. اگر: $v_2(t) = 10 \cos(2\pi \times 10^6 t)$, $-\infty < t < \infty$ و $v_1(t) = u(t)e^{-0.01t} \cos(2\pi \times 10^6 t)$ باشد، تبدیل فوریه ولتاژ خروجی را بیابید؟



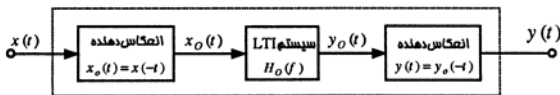
$$V_0(j\omega) = \frac{5}{j\omega + 0.02} \quad (1)$$

$$V_0(j\omega) = \frac{5}{j\omega + 0.01} \quad (2)$$

$$V_0(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 0.01} \quad (3)$$

$$V_0(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 0.02} \quad (4)$$

سوال ۲۹: یک سیستم متشکل از سه طبقه مطابق شکل زیر را در نظر بگیرید. در این شکل $H_0(f)$ پاسخ فرکانسی طبقه وسط می باشد. در مورد پاسخ فرکانسی سیستم کل $H(f)$ کدام گزینه صحیح است؟



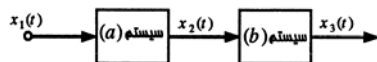
(۱) سیستم کل غیر خطی است و لذا برای آن پاسخ فرکانسی تعریف نمی گردد.

$$H(f) = H_0^*(-f) \quad (2)$$

(۳) سیستم کل تغییرپذیر با زمان است و لذا برای آن پاسخ فرکانسی تعریف نمی گردد.

$$H(f) = H_0(-f) \quad (4)$$

سوال ۳۰: فرض کنید که در شکل زیر سیگنال ها به صورت $x_1(t) = x_3(t) = \sin^2(t)$ و $x_2(t) = \frac{\sin(\pi t)}{(\pi t)}$ می باشند. کدام یک از این دو سیستم (a) و (b) می تواند در یک سیستم LTI باشد؟



(۲) هر دو سیستم

(۱) فقط سیستم (b)

(۴) هیچ کدام

(۳) فقط سیستم (a)

چه خواهد بود؟

$$X^*(f) \quad (۲)$$

$$X(f) \quad (۱)$$

$$X^*(-f) \quad (۴)$$

$$X(-f) \quad (۳)$$

(۴-۱)

سیگنال حقیقی فوق حول $t = ۲$ تقارن زوج دارد.

$$x(t) = x_1(t)$$

$$X(j\omega) = e^{-2\omega} X_1(j\omega) \Rightarrow \angle X(j\omega) = -2\omega + 0 = -2\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow 2\pi x(-1) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{-j\omega} d\omega \Rightarrow 2\pi(0) = 0$$

(۳-۲)

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \frac{1}{2} Y_2\left(\frac{j\omega}{2}\right) = \frac{1}{2} H\left(\frac{j\omega}{2}\right) Y_1\left(\frac{j\omega}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} H\left(\frac{j\omega}{2}\right) [2X(j\omega)] = H\left(\frac{j\omega}{2}\right) X(j\omega) \end{aligned}$$

(۱-۳)

سیگنال $x(t)$ با طول محدود را به سیگنال متناوب $\hat{x}(t)$ با دوره تناوب $T_0 = 1$ و فرکانس اصلی $\omega_0 = 2\pi$ تبدیل می نماییم.

$$\hat{x}(t) \xleftrightarrow{FS} a_k, \quad T_0 = 1, \quad \omega_0 = 2\pi$$

با بهره گیری از تبدیل فوریه سیگنال متناوب داریم:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k2\pi) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) \delta(\omega - 2k\pi) \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sinc}^2\left(\frac{\omega}{4\pi}\right) \delta(\omega - k2\pi) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\hat{X}(j\omega) = \text{Sinc}^2\left(\frac{\omega}{4\pi}\right)$$

با توجه به جدول تبدیل فوریه سیگنال ها داریم:

$$F^{-1}\left\{\text{Sinc}^2\left(\frac{\omega}{4\pi}\right)\right\} = 2\Lambda(2t)$$

$$x(t) = u(t) \Rightarrow X(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}, \quad H(j\omega) = \begin{cases} j\frac{2}{3\pi}|\omega| & |\omega| < 3\pi \\ 0 & \text{و, } \omega \end{cases}$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = j\frac{2}{3\pi}|\omega| \cdot \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] = \frac{2}{3\pi} \frac{|\omega|}{\omega}, \quad |\omega| < 3\pi$$

با توجه به شکل تبدیل فوریه خروجی:

$$Y(j\omega) = \frac{2}{3\pi} \left[\Pi\left(\frac{\omega - \frac{3\pi}{2}}{3\pi}\right) - \Pi\left(\frac{\omega + \frac{3\pi}{2}}{3\pi}\right) \right]$$

$$y(t) = \frac{2}{3\pi} \cdot \left(e^{j\frac{3\pi}{2}t} - e^{-j\frac{3\pi}{2}t} \right) F^{-1} \left\{ \Pi\left(\frac{\omega}{3\pi}\right) \right\}$$

پس از ساده سازی خواهیم داشت:

$$y(t) = \frac{j4}{3\pi} \frac{\text{Sin}^2 \frac{3\pi}{2}t}{\pi t}$$

(۴-۵)

تبدیل فوریه سیگنال متناوب $x(t)$ را به دست می آوریم:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - k\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow T = \frac{\pi}{4}, \quad \omega_0 = 8$$

$$X(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega_0 - k\omega_0) \Rightarrow X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 8k)$$

در محدوده فیلتر $|H(j\omega)|$ مولفه های $\omega = 0, \pm 8$ عبور می نمایند.

$$\omega = 0 \Rightarrow |H(0)| = 8, \quad \angle H(0) = 0$$

$$\omega = \pm 8 \Rightarrow |H(j8)| = 2, \quad \angle H(j8) = \mp \frac{\pi}{3}$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = 64\delta(\omega) + 16e^{j\frac{\pi}{3}}\delta(\omega + 8) + 16e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta(\omega - 8)$$

بنابراین پاسخ برابر است با:

$$y(t) = \frac{32}{\pi} + \frac{8}{\pi} e^{j\frac{\pi}{3}} e^{-j8t} + \frac{8}{\pi} e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{j8t}$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \cos\left(\delta t - \frac{\pi}{3}\right)$$

(۲-۶)

مقدار $X(j\omega)$ همان سطح زیر منحنی $x(t)$ می باشد:

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 11$$

(۱-۷)

با توجه به سیگنال متناوب ورودی در می یابیم

$$T = 8 \Rightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{4}$$

لذا ضرایب سری فوریه ورودی در مضرب صحیح $\frac{\pi}{4}$ قرار می گیرند. از طرفی برای $k \neq 0$ ، $\sin k\pi = 0$ می باشد پس

$$H(j\omega) = \frac{\sin 4\omega}{\omega} \Rightarrow \left| H\left(jk \frac{\pi}{4}\right) \right| = 0, \quad \forall k$$

البته $\left| H\left(jk \frac{\pi}{4}\right) \right|_{k=0} = 4$ و در نتیجه ضرایب سری فوریه $y(t)$ به دست می آید.

$$b_k = H(jk\omega_0)a_k$$

$$b_k = H(0)a_0 + H\left(jk \frac{\pi}{4}\right)a_k = H(0) \times 0 + 0 \times ak = 0 \quad \forall k$$

(۳-۸)

$$Y(j\omega) = e^{j2\omega} X(j\omega) + j \frac{dX(j\omega)}{d\omega} \Rightarrow y(t) = x(t+2) + t x(t)$$

جمله $x(t+2)$ باعث می گردد سیستم غیر علی و ضریب t سیستم را تغییرپذیر با زمان می کند.

(۴-۹)

$$Y(j\omega) = \frac{2\sin \omega}{\omega} e^{j2\omega} \Rightarrow y(t) = \Pi\left(\frac{t+2}{2}\right)$$

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \frac{2\sin \omega}{2\pi\omega} e^{j2\omega} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) Y(j\omega) d\omega = \{x(t) * y(t)\}|_{t=0}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(0-\tau) d\tau = (1 - e^{-2}) \times 1 = 0.86$$

در سیستم فوق پاسخ برابر است با:

$$y(t) = 2\pi h(t)$$

پاسخ فرکانسی سیستم:

$$H(j\omega) = e^{-j2\omega}, \quad |\omega| < 2$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 e^{-j2\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

پاسخ ضربه در لحظه $t = 2$

$$h(2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 d\omega = \frac{2}{\pi}$$

بنابراین پاسخ سیستم به ضربه $x(t) = 2\pi\delta(t)$ برابر است با:

$$y(2) = 2\pi \left(\frac{2}{\pi}\right) = 4$$

(۹-۱۱)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

با مشتق گیری از انتگرال فوق نسبت به t و مرتب کردن آن داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = -2\pi j \frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=1}$$

گزینه های (۲) و (۳) هر دو در شرط $x'(1) = 0$ صدق می کنند.

(۳-۱۲)

$$T = 2 \Rightarrow \omega_0 = \pi$$

تعیین ضرایب سری فوریه $x(t)$

$$x(t) = 1 + \text{Sin } \pi t + \begin{cases} -t & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases}$$

ضرایب سری فوریه بخش ضابطه سیگنال $x(t)$

$$b_k = \frac{1}{2} \int_0^1 -t e^{-jk\pi t} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-jk\pi t}}{jk\pi} \left(t + \frac{1}{jk\pi} \right) \right]_0^1 = \frac{1}{k^2 \pi^2} + \frac{1}{2k\pi} \quad \text{فرد } k$$

$$b_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 -t dt = \frac{-1}{4}$$

$$\sin \pi t = \frac{e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}}{j2} \Rightarrow C_{-1} = \frac{1}{j2}, C_1 = \frac{-1}{j2}$$

ضرایب سری فوریه $x(t)$ با بهره گیری از خاصیت خطی بودن سری فوریه

$$d_0 = 1 + 0 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$d_k = b_k + C_{\pm 1} = \frac{1}{k^2 \pi^2} + \frac{j}{2k\pi} \pm \frac{1}{j2}$$

پاسخ فرکانسی سیستم

$$h(t) \xrightarrow{F} H(j\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{3\pi}\right)$$

توجه: در بین گزینه ها تنها گزینه (۳) دارای ضرایب $\frac{\pm 1}{j2}$ که ناشی از جمله سینوسی ورودی است می باشد.

(۲-۱۳)

$$x(t) = \int_{t-3}^{t-1} g(\tau) d\tau = g(t) * \Pi\left(\frac{t-2}{2}\right)$$

$$X(j\omega) = G(j\omega) \frac{2 \sin \omega}{\omega} e^{-j2\omega}$$

(۲-۱۴)

$$x(t) = e^{-t} u(t) \xrightarrow{F} X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

از طرفین معادله تبدیل فوریه می گیریم:

$$[(j\omega)^2 + 4j\omega + 3]Y(j\omega) = [j\omega + 2]X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{j\omega + 2}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 3} = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 3)(j\omega + 1)}$$

پاسخ دائمی به ورودی

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{j\omega + 2}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 3} = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 3)(j\omega + 1)}$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 3)(j\omega + 1)} = \frac{1}{j\omega + 1} + \frac{1}{(j\omega + 1)^2} + \frac{-1}{j\omega + 3}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{t-1} + t e^{t-1} - \frac{1}{2} e^{-t-1} \right] u(t)$$

(۱-۱۵)

$$H(j\omega) = -j2\omega, \quad X(j\omega) = \frac{1}{2+j\omega}$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = \frac{-2j\omega}{2+j\omega} = -2 + \frac{4}{2+j\omega}$$

بنابراین پاسخ برابر است با

$$y(t) = 4e^{-2t}u(t) - 2\delta(t)$$

(۳-۱۶)

مقدار تبدیل فوریه در فرکانس $\omega = 0$ همان سطح زیر منحنی سیگنال $x(t)$ می باشد.

$$X(j0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 4$$

(۲-۱۷)

(*)

$$Y(j\omega) = u(\omega+2) - u(\omega-2) = \Pi\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

(***)

$$y(t) = x(t)\cos t \Rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{2} \{X(j(\omega-1)) + X(j(\omega+1))\}$$

از معادلات (*) و (***) مشخص می گردد که

$$X(j\omega) = 2\Pi\left(\frac{\omega}{2}\right) \Rightarrow x(t) = \frac{2\text{Sint}}{\pi t}$$

(۲-۱۸)

در حوزه فرکانس ورودی به ازای $|\omega| > \pi$ صفر است. حال آن که سیستم A به اطلاعات فرکانسی $Y(j\omega)$ افزوده است. بنابراین سیستم A، LTI نیست.

$$Y(j\omega) = H_A(j\omega)X(j\omega)$$

از طرفی همواره می توان با فیلتر مناسب اطلاعات فرکانسی سیگنال را کم کرد پس سیستم B، LTI است.

(۳-۱۹)

$$y(t) = \int_{t-5}^{t+5} x(\tau) d\tau = x(t) * \Pi\left(\frac{t}{10}\right)$$

$$x(j\omega) = \text{Sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

(۴-۲۰)

$$h(t) = \frac{\text{Sin}\frac{3\pi}{4}t}{\pi t} \xleftrightarrow{F} H(j\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{\frac{3\pi}{2}}\right)$$

دوره تناوب سیگنال $x(t)$ برابر است با:

$$T = 4 \quad \omega_0 = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین ضریبی از $k\omega_0$ از فیلتر عبور کرده و مولفه های خروجی را تشکیل می دهند از طرفی با توجه به تابع شبکه $H(j\omega)$

تنها ۳ مولفه $\omega_0 = 0, \pm \frac{\pi}{2}$ از فیلتر عبور می نماید. با بررسی گزینه ها تنها گزینه (۴) دارای این ویژگی است.

(۳-۲۱)

$x(t)$ سیگنال حقیقی نیست زیرا شرط $\angle X(-j\omega) = \angle X(j\omega)$ برقرار نیست به عبارتی دیگر در سیگنال های

حقیقی دامنه تقارن زوج و فاز تقارن فرد دارد در صورتی که در سیگنال فوق شرط تقارن فرد برای منحنی فاز رعایت نشده و لذا سیگنال حقیقی نیست.

از طرفی در تبدیل فوریه $x(t)$ تابع ضربه داریم که عکس آن در حوزه زمان به صورت تابع نمایی است. واضح است که انرژی $e^{j\omega t}$ بی نهایت است.

$$e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

(۲-۲۲)

سیستم ۱ تغییر پذیر با زمان است زیرا

$$y(t) = x(0) + F \left\{ e^{j3t} x(t) \right\} \Big|_{\omega=t}$$

$$x_2(t) = x_1(t - t_0) \Rightarrow y_2(t) = x(-t_0) + F \left\{ e^{j3t} x(t - t_0) \right\} \Big|_{\omega=t}$$

$$y_1(t - t_0) = x(0) + F \left\{ e^{j3(t-t_0)} x(t - t_0) \right\} \Big|_{\omega=t-t_0}$$

سیستم ۲ تغییرناپذیر با زمان است زیرا:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt + x(t - 3)$$

$$x_2(t) = x_1(t - t_0) \Rightarrow y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) dt + x(t - t_0 - 3) = y_1(t - t_0)$$

(۳-۲۳)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(f) + Y(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} [X(f) + Y(f)][X(f) + Y(f)]^* df$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 + 2|X(f) + Y(f)| + |Y(f)|^2 df$$

توابع $x(t)$ و $y(t)$ حقیقی و غیر منفی و از نوع انرژی هستند لذا با توجه به رابطه به دست آمده نامساوی های فوق صحیح می باشند.

(۲۴-۹)

گزینه ۳ غلط است زیرا

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega = 2\pi x(0) = 2\pi \Rightarrow x(0) = 1$$

گزینه ۳ و ۴ غلط اند زیرا سطح زیر منحنی $x(t)$ آنها مقدار ۴ نمی شود.

$$X(j0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 4$$

با بررسی فاز $X(\omega)$ گزینه ها، گزینه (۱) دارای $\angle X(\omega) = \frac{-\omega}{2}$ و گزینه (۲) دارای $\angle X(\omega) = \frac{\omega}{2}$ است البته گزینه ۴ دارای فاز $\angle X(\omega) = \omega$ است.

$$x(t) = x_1(t+1) \Rightarrow x(\omega) = e^{j\omega} X_1(\omega)$$

$$\angle X(\omega) = \omega + 0 = \omega$$

بنابراین هیچ کدام از گزینه ها تواما شرایط ذکر شده را برآورده نمی کنند.

(۲۵-۳)

پاسخ فرکانسی $H_1(j\omega)$ به ازای کلیه مقادیر ω مخالف صفر است $H_1(j\omega) \neq 0$ بنابراین سیستم S_1 معکوس پذیر است. اما پاسخ فرکانسی $H_2(j\omega)$ به ازای $|\omega| > w$ صفر است. لذا سیستم S_2 معکوس ناپذیر است.

$$H_2(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < w \\ 0 & |\omega| > w \end{cases}$$

(۲۶-۱)

$$h(t) = \delta(t) - e^{-2t} u(t) \Leftrightarrow H(j\omega) = 1 - \frac{1}{j\omega + 2} + \frac{j\omega + 1}{j\omega + 2}$$

(۲۷-۳)

$$f(t) = 8e^{-4t} u(t)$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = 64 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-8t} dt = \frac{-64}{8} e^{-8t} \Big|_0^{\infty} = 8j$$

(۲۸-۲)

$$v(t) = v_1(t) \cdot v_2(t) = 10e^{-0.01t} \cos^2 \omega_0 t u(t) \quad , \quad \omega_0 = 2\pi \times 10^6$$

فرکانس $2\omega_0$ توسط فیلتر پایین گذر حذف می گردد. بنابراین

$$v_0(t) = 5e^{-\frac{1}{100}t}u(t) \Rightarrow V_0(j\omega) = \frac{5}{j\omega + 0.01}$$

(۴-۲۹)

$$Y(f) = Y_0(-f) = H_0(-f)X_0(-f) = H_0(-f)X(f)$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = H_0(-f)$$

(۳-۳۰)

$$x_1(t) = \text{Sin} c^2(t) \Rightarrow X_1(j\omega) = \Lambda\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$x_2(t) = \text{Sin} c(t) \Rightarrow X_2(j\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$x_3(t) = x_1(t) \Rightarrow X_3(j\omega) = \Lambda\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

سیستم a می تواند LTI باشد زیرا با توجه به روابط $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$ برای سیستم a می توان پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ را به کمک خواص مشتق گیری، انتقال و فیلترینگ بر روی $X_1(j\omega)$ در نظر گرفت. از طرفی سیستم b نمی تواند LTI باشد زیرا اگر LTI بود می بایستی می داشتیم:

$$X_3(j\omega) = |\omega| > \pi$$

(۴-۳۱)

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$$

خاصیت دوگانی

$$X(t) \xleftrightarrow{F} x(-f)$$

خاصیت مزدوج گیری

$$X^*(t) \xleftrightarrow{F} x^*(f)$$

خاصیت وارونگی زمانی

$$X^*(-t) \xleftrightarrow{F} x^*(-f)$$

۲۶۲	فصل چهارم
۲۶۲	تبدیل فوریه پیوسته در زمان
۲۶۲	۱-۴ نمایش سیگنال های نامتناوب:
۲۷۳	۲-۴ تبدیل فوریه سیگنال های متناوب
۲۷۶	۳-۴ خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان
۲۸۹	۴-۴ خاصیت کانولوشن
۲۹۷	۵-۴ خاصیت ضرب
۳۰۴	۶-۴ جدول های خواص فوریه و زوج های تبدیل فوریه
۳۰۴	۷-۴ سیستم های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرائب ثابت
۳۰۹	تبدیل فوریه گسسته در زمان
۳۱۷	۲-۴ تبدیل فوریه سیگنال های متناوب
۳۲۱	۳-۵ خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان
۳۳۰	۴-۴ خاصیت کانولوشن
۳۳۶	۵-۴ خاصیت ضرب
۳۳۸	۶-۴ جدول های خواص تبدیل فوریه و زوج های تبدیل فوریه
۳۴۳	۸-۴ سیستم های توصیف شده با معادلات تفاضلی با ضرائب ثابت
۳۴۷	پیوست ۴
۳۴۹	نمونه سوالات طبقه بندی شده فصل چهارم
۳۵۶	پاسخنامه سوالات فصل چهارم

تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۴-۰ مقدمه

در فصل ۳ نمایش سیگنال های متناوب به صورت ترکیب خطی نمایی های مختلط را پی ریختیم. همچنین دیدیم که چگونه این نمایش می تواند برای توصیف اثر سیستم های LTI بر سیگنال ها به کار رود. در این فصل و فصل بعد این مفاهیم را به نحوی تعمیم می دهیم که به سیگنال های نامتناوب قابل اعمال باشند. همانطور که خواهیم دید دسته بزرگی از سیگنال ها، شامل تمام سیگنال های دارای انرژی محدود را می توان به صورت یک ترکیب خطی از نمایی های مختلط نمایش داد. در سیگنال های متناوب نمایی های مختلطی که به عنوان پایه نمایش به کار می رفتند هماهنگ بودند؛ برای سیگنال های نامتناوب بی نهایت فرکانس بی نهایت نزدیک هم وجود دارد و نمایش ترکیب خطی براساس این نمایی ها شکل انتگرال به خود می گیرد. طیف ضرایب این نمایش را تبدیل فوریه می نامند، و انتگرال سازنده سیگنال به صورت ترکیب خطی نمایی های مختلط عکس تبدیل فوریه نامیده می شود. پی ریزی این نمایش برای سیگنال های نامتناوب پیوسته در زمان یکی از مهم ترین آثار فوریه است، و روش کار ما برای دستیابی به تبدیل فوریه بسیار شبیه روش اوست. فوریه چنین استدلال کرد که می توان سیگنال نامتناوب را سیگنال متناوبی با دوره تناوب بی نهایت فرض کرد. دقیق تر این که در نمایش سرس فوریه یک سیگنال متناوب، هرچه دوره تناوب بزرگتر شود، فرکانس پایه کوچک تر می شود و مؤلفه های هارمونیکی از لحاظ فرکانسی به هم نزدیک تر می شوند. با بی نهایت شدن دور تناوب مؤلفه های فرکانسی حالت پیوسته به خود می گیرند و جمع سری فوریه به انتگرال تبدیل می شود.

در بخش بعد نمایش تبدیل فوریه سیگنال های پیوسته در زمان نامتناوب را پی می ریزیم و در بخش های پس از آن بر این پایه خواص مهم تبدیل فوریه را بررسی کرده، بنای روش های حوزه فرکانس را برای سیگنال ها و سیستم های پیوسته در زمان استوار می کنیم. در فصل ۵ همین روند را برای سیگنال های گسسته در زمان دنبال می کنیم.

۴-۱ نمایش سیگنال های نامتناوب:

تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۴-۱-۱ پی ریزی نمایش تبدیل فوریه برای سیگنال های پیوسته در زمان

برای کسب بینش نسبت به طبیعت نمایش تبدیل فوریه، کار را با بررسی نمایش سری فوریه موج چهار گوش متناوب پیوسته در زمان مثال ۳-۵ می آغازیم. در یک دوره تناوب

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T_1 \\ 0, & T_1 \leq |t| \leq T/2 \end{cases}$$

که مطابق شکل ۴-۱ با دوره تناوب T تکرار می شود.

همانطور که در مثال ۳-۵ دیدیم ضرایب سری فوریه a_k این موج چهار گوش عبارتند از

$$a_k = \frac{\sin(K\omega_c T_1)}{K\omega_c T} \quad (1-4)$$

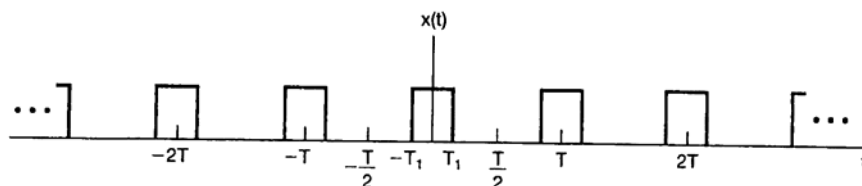
[معادله (۳-۴۴)]

می دهد.

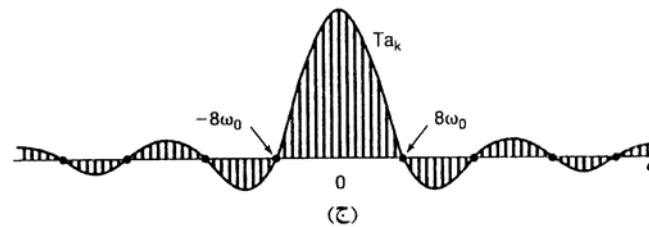
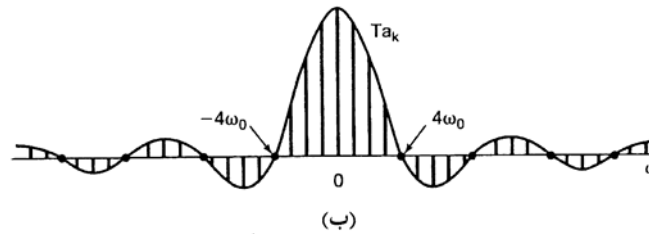
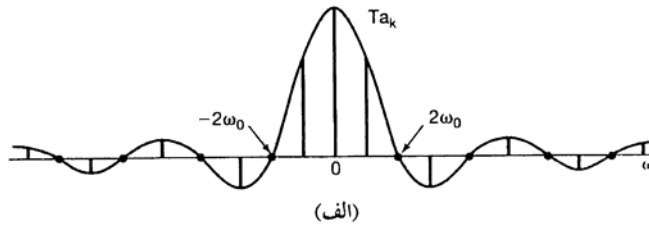
راه دیگر بیان معادله (۱-۴) آن است که نمونه های تابع پوش را در نظر بگیریم، یعنی

$$T a_k = \frac{\gamma \sin \omega T_1}{\omega} \Big|_{\omega = k\omega_0} \quad (۲-۴)$$

بنابراین اگر ω را یک متغیر پیوسته فرض کنیم، تابع $(\gamma \sin \omega T_1)$ پوش $T a_k$ را نشان می دهد، و ضرایب سری فوریه نمونه های متساوی الفاصله این پوش هستند. همچنین به ازای T_1 ثابت، پوش $T a_k$ مستقل از T است. ضرائب سری فوریه موج چهارگوش متناوب را مجدداً در شکل ۲-۴ نشان داده ایم. ولی این بار مطابق معادله (۲-۴) به صورت نمونه های پوش $T a_k$. با توجه به این شکل می بینیم که با افزایش دوره تناوب، یا به طور معادل کاهش فرکانس پایه $\omega_0 = 2\pi/T$ ، فاصله نمونه ها کمتر و کمتر می شود. اگر T به اندازه کافی بزرگ شود، موج چهارگوش متناوب به یک پالس مستطیلی می گراید (آنچه در حوزه زمان باقی می ماند سیگنال نامتناوبی، متناظر با یک دوره تناوب موج مستطیلی است). ضرایب سری فوریه، ضرب شده در T ، نمونه های بسیار کم فاصله ای از پوش می شوند و (همان طور که به زودی خواهیم دید) مجموعه ضرایب سری فوریه به ازای $T \rightarrow \infty$ به تابع پوش می گراید.



شکل ۱-۴: موج چهار شکل متناوب پیوسته در زمان.



شکل ۴-۲: ضرایب سری فوریه چهارگوش متناوب در شکل ۴-۱ و پوش آنها با T_1 ثابت و چند T مختلف: (الف) $T = 4T_1$ ؛ (ب) $T = 8T_1$ ؛ (ج) $T = 16T_1$.

این مثال ایده اصلی پشتیبان نمایش فوریه سیگنال های نامتناوب را نشان می دهد. در حقیقت سیگنال نامتناوب را حد یک سیگنال متناوب می گیریم که زمان تناوب آن به دلخواه زیاد می شود، و سپس رفتار حدی نمایش سری فوریه این سیگنال را بررسی می کنیم. سیگنال نامتناوب $x(t)$ دارای عمر محدود را نظر بگیرید. یعنی به ازای عددی مثل T_1 ، $|t| \geq T_1$ ، داریم $x(t) = 0$. شکل ۴-۳ (الف) چنین سیگنالی را نشان می دهد. از روی این سیگنال نامتناوب می توان سیگنال متناوب $\tilde{x}(t)$ را مطابق شکل ۴-۳ (ب) ساخت، که دوره تناوب آن T است. هر چه T را بزرگتر بگیریم، روی فاصله بزرگتری شبیه $x(t)$ می شود، و به ازای $T \rightarrow \infty$ ، $\tilde{x}(t)$ به ازای هر مقدار محدود t با $x(t)$ برابرست.

شکل ۴-۳: (الف) سیگنال نامتناوب $x(t)$ ؛ (ب) سیگنال متناوب $\tilde{x}(t)$ که بر اساس $\tilde{x}(t)$ ساخته شده و در یک دوره تناوب با آن برابر است.

حال اثر این کار بر نمایش سری فوریه $\tilde{x}(t)$ را بررسی می کنیم. با بازنویسی معادلات (۳-۳۸) و (۳-۳۹) برای آسانی مراجعه، و انتخاب فاصله $-T/2 \leq t \leq T/2$ برای انتگرال (۳-۳۹) داریم

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (4-4)$$

که در آن $\omega_0 = 2\pi/T$. چون در $|t| < T/2$ داریم $\tilde{x}(t) = x(t)$ ، و همچنین چون در خارج این فاصله $x(t) = 0$ ، معادله (4-4) را می توان به صورت زیر نوشت

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

پوش Ta_k را به شکل زیر تعریف می کنیم

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5-4)$$

پس برای ضرایب a_k داریم

$$a_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0) \quad (6-4)$$

با ترکیب معادلات (6-4) و (3-4) $\tilde{x}(t)$ را می توان برحسب $X(j\omega)$ بیان کرد

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

و یا چون $\omega_0 = 2\pi/T$

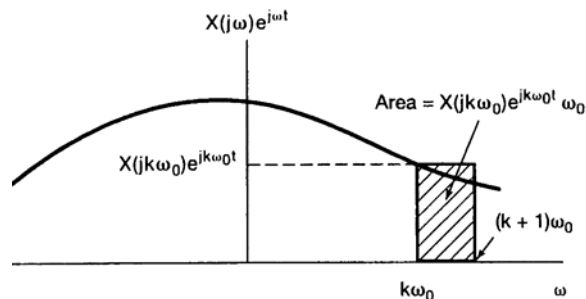
$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \quad (7-4)$$

به ازای $T \rightarrow \infty$ ، $\tilde{x}(t)$ می گراید و معادله (7-4) در حد نمایی از $x(t)$ می شود. از این گذشته به ازای $T \rightarrow \infty$ داریم $\omega_0 \rightarrow 0$ ، و طرف راست معادله (7-4) به انتگرال تبدیل می شود. با در نظر گرفتن تعبیر ترسیمی معادله (7-4) به صورت شکل 4-4 می توان درستی این مسئله را نشان داد. هر جمله جمع سمت راست معادله، سطح مستطیلی به ارتفاع $X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$ و عرض ω_0 است (t ثابت فرض می شود). به ازای $\omega_0 \rightarrow 0$ ، این مقدار با انتگرال $X(j\omega) e^{j\omega t}$ برابر است. بنابراین با توجه به اینکه به ازای $T \rightarrow \infty$ داریم $\tilde{x}(t) \rightarrow x(t)$ ، معادلات (7-4) و (5-4) به این شکل در می آیند

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (8-4)$$

و

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (9-4)$$



شکل ۴-۴: تعبیر ترسیمی معادله (۷-۴)

دو معادله (۸-۴) و (۹-۴) زوج تبدیل فوریه نام دارند، تابع $X(j\omega)$ را تبدیل فوریه یا انتگرال فوریه $x(t)$ و معادله (۸-۴) را معادله عکس تبدیل فوریه می نامند. معادله ترکیب (۸-۴) برای سیگنال های نامتناوب، همان نقش معادله (۳-۳۸) برای سیگنال های متناوب را دارد، زیرا هر دو یک سیگنال را به صورت ترکیب خطی توابع نمایی مختلط نمایش می دهند. در مورد سیگنال های متناوب دامنه این توابع نمایی $\{a_k\}$ است که از معادله (۳-۳۹) به دست می آید و در مجموعه گسسته فرکانس های هماهنگ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, k \omega_0$ قرار دارند. برای سیگنال های نامتناوب این نمایی های مختلط در گستره فرکانسی پیوسته ای قرار دارند و «دامنه» آن ها، طبق معادله ترکیب (۸-۴) برابر $X(j\omega)(d\omega/2\pi)$ است. به قیاس اصطلاحات به کار برده شده در مورد ضرائب سری فوریه سیگنال متناوب، تبدیل $X(j\omega)$ سیگنال نامتناوب $x(t)$ را طیف $x(t)$ می نامند، زیرا اطلاعات لازم برای توصیف به عنوان ترکیبی خطی (در واقع انتگرال) از سیگنال های سینوسی دارای فرکانس های مختلف را در اختیارمان می گذارد.

بنا به روش اشتقاق فوق، یا مقایسه معادله (۹-۴) با معادله (۳-۳۹۹)، می بینیم که ضرائب a_k سیگنال متناوب $\tilde{x}(t)$ را می توان بر حسی نمونه های هم فاصله تبدیل فوریه یک تناوب $x(t)$ بیان کرد. فرض کنید سیگنال متناوبی با دوره تناوب T و ضرائب سری فوریه a_k است. $x(t)$ را سیگنال دارای عمر محدودی فرض کنید که $\tilde{x}(t)$ در یک دوره تناوب با آن برابر است - مثلاً در $s \leq t \leq s + T$ با s دلخواه - و در بقیه جاها صفرست. چون برای محاسبه ضرائب فوریه $\tilde{x}(t)$ ، انتگرال معادله (۳-۳۹) را تنها روی یک تناوب دلخواه محاسبه می کنیم، می توانیم بنویسیم

$$a_k = \frac{1}{T} \int_s^{s+T} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_s^{s+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

چون $x(t)$ در خارج گستره $s \leq t \leq s + T$ صفرست، می توان نوشت

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$a_k = \frac{1}{T} X(j\omega) |_{\omega = k\omega_0} \quad (10-4)$$

که $X(j\omega)$ تبدیل فوریه $x(t)$ است. معادله (10-4) می گوید که ضرائب فوریه $\tilde{x}(t)$ با نمونه های تبدیل فوریه یک تناوب $\tilde{x}(t)$ متنای اند. این خاصیت را، که در عمل زیاد به کار می رود، در مسئله 4-37 بیشتر بررسی می کنیم.

4-1-2 همگرایی تبدیل فوریه

گرچه در مبحث مربوط به یافتن تبدیل فوریه فرض کردیم $x(t)$ عمری دلخواه، اما محدود دارد، ولی معادلات (4-8) و (4-9) برای دسته بسیار وسیعی از سیگنال های با عمر نامحدود هم معتبرند. از روشی که در به دست آوردن تبدیل فوریه به کار بردیم چنین برمی آید که برای همگرایی تبدیل فوریه باید شرایطی مشابه شرایط همگرایی سری فوریه برقرار باشد؛ می توان نشان داد که واقعیت همین است. فرض کنید $X(j\omega)$ از معادله (4-9) به دست آمده و $\tilde{x}(t)$ سیگنالی است که با گذاشتن $X(j\omega)$ در طرف راست معادله (4-8) به دست می آید. یعنی

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

می خواهیم بدانیم معادله (4-8) تحت چه شرایطی معتبرست [یعنی چه موقع $\tilde{x}(t)$ نمایش معتبری از $x(t)$ است]. اگر انرژی $x(t)$ محدود باشد، داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (11-4)$$

به این ترتیب کراندار بودن $X(j\omega)$ تضمین می شود [یعنی معادله (4-9) همگراست]، و برای $\theta(t)$ که خطای بین $\tilde{x}(t)$ و $x(t)$ است [یعنی $\theta(t) = \tilde{x}(t) - x(t)$] داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\theta(t)|^2 dt = \epsilon \quad (12-4)$$

معادلات (4-11) و (4-12) همتهای نامتناوب معادلات (3-51) و (3-54) سیگنال های متناوب هستند. بنابراین مثل سیگنال های متناوب، اگر انرژی محدودی داشته باشد، $x(t)$ و نمایش فوریه آن، یعنی $\tilde{x}(t)$ ، می توانند در بعضی از نقاط با هم تفاوت داشته باشند، ولی تفاضل آن ها انرژی ندارد.

درست همانند سیگنال های متناوب، شرایط دیگری وجود دارند که مساوی بودن $\tilde{x}(t)$ و $x(t)$ را برای تمام t ها، جز نقاط ناپیوستگی، تضمین می کنند، در نقاط ناپیوستگی $\tilde{x}(t)$ برابر مقدار متوسط $x(t)$ دو طرف ناپیوستگی است. این شرایط، که باز هم شرایط دیریکله نامیده می شوند، چنین اند:

$x(t)$ باید مطلقاً انتگرال پذیر باشد؛ یعنی

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (13-4)$$

در هر فاصله محدود باید تعداد ماکزیمم و مینیمم های $x(t)$ محدود باشد.

بنابراین سیگنال های مطلقاً انتگرال پذیری که پیوسته اند یا تعداد ناپیوستگی هایشان محدودست، تبدیل فوریه دارند. گرچه دو مجموعه شرط داده شده برای تبدیل فوریه داشتن سیگنال کافی است، ولی در بخش بعد خواهیم دید که سیگنال های متناوب هم، که در فاصله نامحدود، نه مجذورشان انتگرال پذیرست و نه مطلقاً انتگرال پذیرند، تبدیل فوریه دارند، البته به شرطی که در تبدیل فوریه تابع ضربه را مجاز بدانیم. مزیت این کار این است که می توان سری فوریه و تبدیل فوریه را در یک چارچوب ادغام کرد، و در فصل های آتی خواهیم دید که این چه مناسبی است. قبل از این که در بخش ۴-۲ به بررسی این مطلب بپردازیم، چند مثال از تبدیل فوریه را بررسی می کنیم.

۳-۱-۴ مثال هایی از تبدیل فوریه پیوسته در زمان

مثال ۱-۴

سیگنال زیر را در نظر بگیرید

$$x(t) = e^{-at} u(t), a > 0$$

با توجه به معادله (۴-۹)

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

یعنی

$$X(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega}, a > 0$$

چون این تبدیل فوریه خاص مختلط است، برای رسم آن برحسب ω ، اندازه و فازش را به دست می آوریم

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \quad \angle X(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

دامنه و فاز در شکل ۴-۵ رسم شده اند.

توجه کنید که اگر a مختلط باشد، $x(t)$ به شرطی مطلقاً انتگرال پذیرست که $\Re\{a\} > 0$ ، در این صورت

$X(j\omega)$ همان شکل بالا را دارد، یعنی

$$X(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega}, \Re\{a\} > 0$$

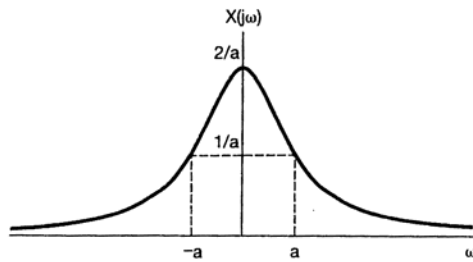
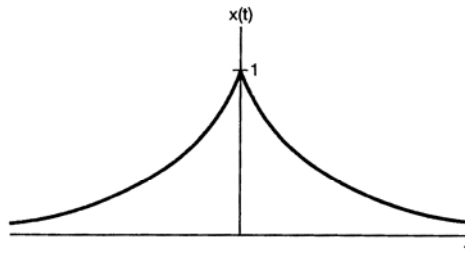
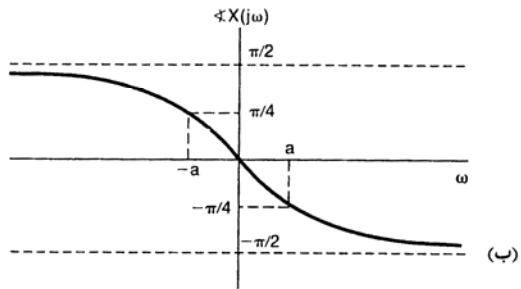
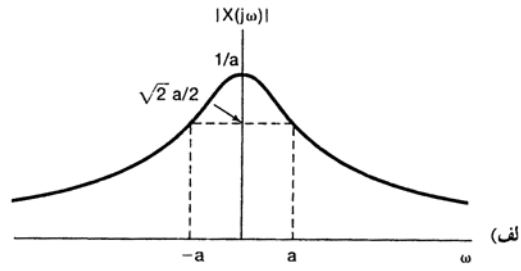
مثال ۲-۴

سیگنال زیر را در نظر بگیرید

$$x(t) = e^{-a|t|}, a > 0$$

این سیگنال در شکل ۴-۶ رسم شده است. تبدیل فوریه سیگنال عبارت است از

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$



شکل ۴-۵: تبدیل فوریه سیگنال $x(t) = e^{-at} u(t)$, $a > 0$ مثال ۴-۱

شکل ۴-۶: سیگنال $x(t) = e^{-a|t|}$ مثال ۴-۲

شکل ۴-۷: تبدیل فوریه سیگنال مثال ۴-۲ که در شکل ۴-۶ رسم شده است.

حال بیا باید تبدیل فوریه ضربه واحد را به دست آوریم

$$x(t) = \delta(t) \quad (14-4)$$

جایگزینی در معادله (۹-۴) به دست می دهد

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \quad (15-4)$$

یعنی تبدیل فوریه ضربه واحد از مؤلفه هایی هم اندازه در تمام فرکانس ها تشکیل شده است.

مثال ۴-۴

سیگنال پالس مستطیلی زیر را در نظر بگیرید

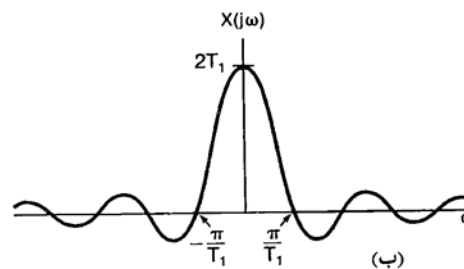
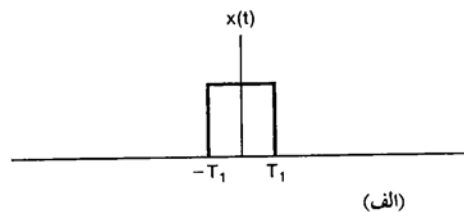
$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \quad (16-4)$$

که در شکل ۸-۴ الف) نشان داده شده است. با اعمال معادله (۹-۴) می توانیم تبدیل فوریه این سیگنال را به دست آوریم

$$X(j\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = 2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega} \quad (17-4)$$

این تبدیل در شکل ۸-۴ ب) نشان داده شده است.

همانطور که در ابتدای این بخش گفتیم، سیگنال معادله (۱۶-۴) را می توان شکل حدی موج چهارگوش متناوب، با دوره تناوب خیلی بزرگ، دانست. بنابراین باید انتظار می داشتیم که رفتار معادله ترکیب این سیگنال مانند رفتار مشاهده شده در مثال ۳-۵ (برای موج چهارگوش متناوب) باشد. عکس تبدیل فوریه طیف سیگنال پالس مستطیلی را در نظر بگیرید



شکل ۸-۴: الف) سیگنال پالس مستطیلی مثال ۴-۴ و ب) تبدیل فوریه اش

چون مربع $x(t)$ انتگرال پذیرست، داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - \hat{x}(t)|^2 dt = 0$$

همچنین چون $x(t)$ شرایط دیریکله را ارضا می کند، می دانیم که $\hat{x}(t) = x(t)$ ، البته به جز در نقاط ناپیوستگی $t = \pm T_1$ ، که در آن ها $\hat{x}(t)$ به $\frac{1}{2}$ ، میانگین $x(t)$ در دو طرف ناپیوستگی، می گراید. همگرایی $\hat{x}(t)$ به $x(t)$ با پدیده گیبس همراه است، درست به همان صورتی که در شکل ۳-۹ برای موج مستطیلی متناوب نشان داده شد. به قیاس تقریب سری فوریه متناهی معادله (۳-۴۷)، انتگرال زیر را در فاصله فرکانسی محدودی در نظر بگیرید

$$\frac{1}{\pi t} \int_{-W}^W \frac{\sin \omega T_1}{\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

به ازای $W \rightarrow \infty$ سیگنال فوق در تمام نقاط، به جز ناپیوستگی ها، به $x(t)$ می گراید. به علاوه این سیگنال نزدیک ناپیوستگی ها موج دارد و موج آن با افزایش W کم نمی شود، بلکه به سمت ناپیوستگی فشرده شده، انرژی آن به سمت صفر می رود.

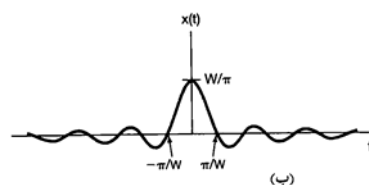
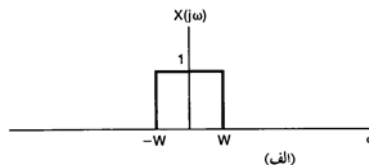
مثال ۴-۵

فرض کنید تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ به صورت زیر است

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases} \quad (4-18)$$

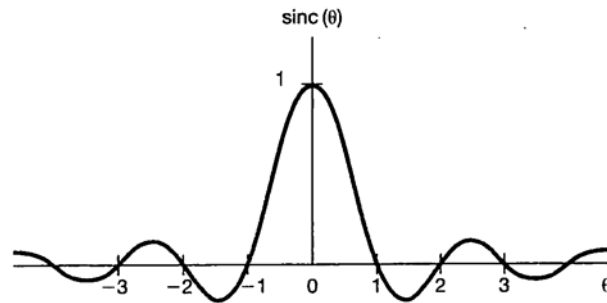
این تبدیل در شکل ۴-۹ (الف) نشان داده شده است. $x(t)$ را می توان به کمک معادله ترکیب (۴-۸) به دست آورد

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin Wt}{\pi t} \quad (4-19)$$



این سیگنال در شکل ۴-۹ (ب) رسم شده است.

مقایسه شکل های ۸-۴ و ۹-۴، یا معادلات (۱۶-۴) و (۱۷-۴) با معادلات (۱۸-۴) و (۱۹-۴) رابطه جالبی را آشکار می کند. در هر دو حالت زوج تبدیل فوریه، از تابعی به شکل $(\sin a \theta) / b \theta$ و یک پالس مستطیلی تشکیل می شود. در مثال ۴-۴ سیگنال $x(t)$ پالس است، ولی در مثال ۵-۴ $X(j\omega)$ یک پالس است. رابطه خاصی که در اینجا دیدیم نتیجه مستقیم خاصیت همزادی تبدیل فوریه است، که در بخش ۴-۳-۶ به تفصیل در موردش صحبت خواهیم کرد.



شکل ۴-۱۰: تابع سینک

توابعی که در معادلات (۱۷-۴) و (۱۹-۴) ظاهر شده اند، در تحلیل فوریه و بررسی سیستم های LIT نقش بسیار مهمی دارند و به نام تابع سینک معروف اند. یک شکل پر کاربرد این تابع به صورت زیر است:

$$\text{sinc}(\theta) = \frac{\sin \pi \theta}{\pi \theta} \quad (۲۰-۴)$$

که در شکل ۴-۱۰ رسم شده است. هر دو سیگنال معادلات (۱۷-۴) و (۱۹-۴) را می توان بر حسب تابع سینک بیان کرد

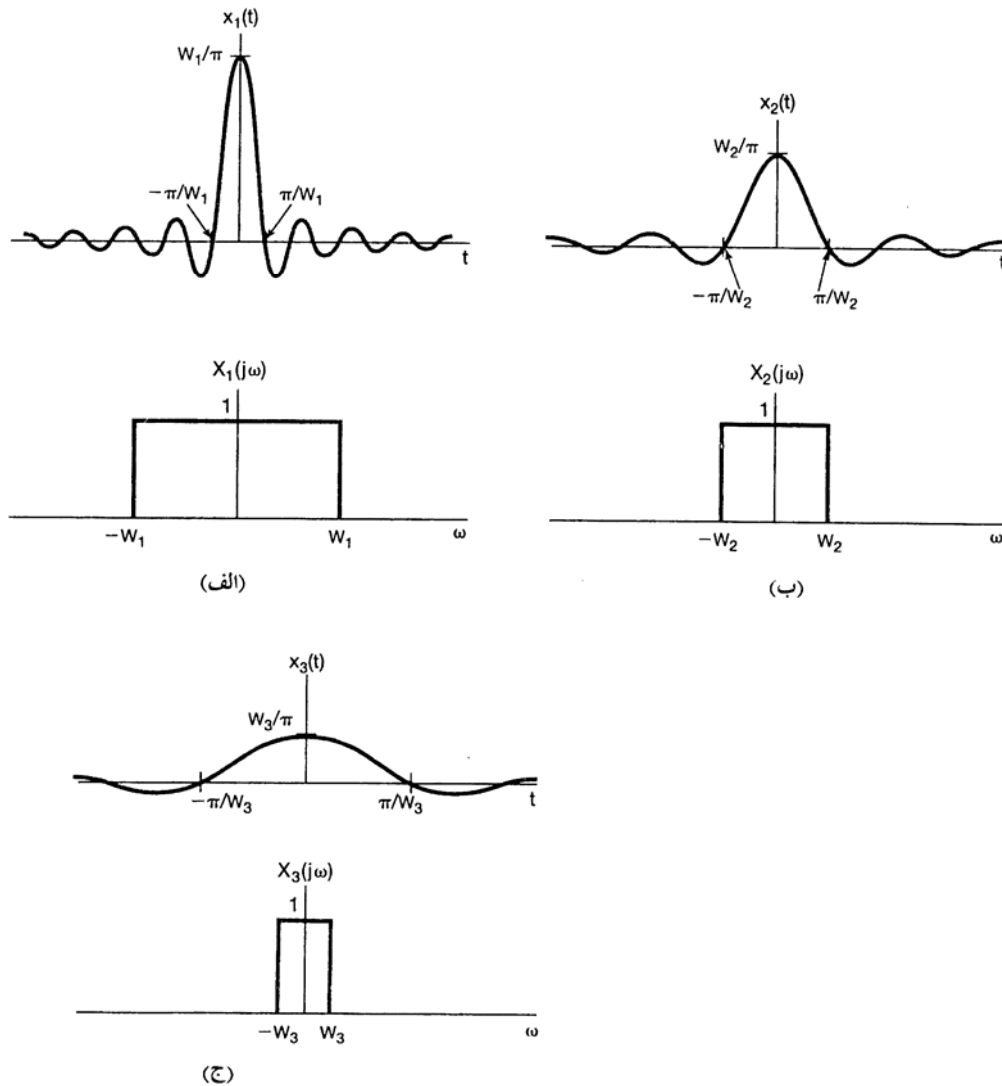
$$\frac{\gamma \sin \omega T_1}{\omega} = \gamma T_1 \text{sinc} \left(\frac{\omega T_1}{\pi} \right)$$

$$\frac{\sin Wt}{\pi t} = \frac{W}{\pi} \text{sinc} \left(\frac{Wt}{\pi} \right)$$

به عنوان آخرین نکته با بررسی شکل ۴-۹ می توانیم نسبت به یکی دیگر از خواص تبدیل فوریه دیدی به دست آوریم. در شکل ۴-۱۱ بار دیگر این شکل را به ازای چند مقدار مختلف W ترسیم کرده ایم. با توجه به این شکل می بینیم که با افزایش W ، $X(j\omega)$ پهن تر می شود، حال آنکه قله اصلی $x(t)$ ، در $t = 0$ ، بلندتر شده و پهنای برگه اصلی آن (یعنی بخش واقع در $|t| \leq \pi/W$ سیگنال) کمتر می شود. در حد، به ازای $W \rightarrow \infty$ ، $X(j\omega) = 1$ ، و با توجه به مثال ۴-۳، معادله (۱۹-۴)، به ازای $W \rightarrow \infty$ به ضربه واحد می گراید. رفتار نشان داده شده در شکل ۴-۱۱ مثالی از رابطه معکوس حوزه های زمان و فرکانس است، که در شکل ۴-۸ هم می توان نمونه ای از آن را دید. هرچه T_1 بزرگتر و $x(t)$ پهن تر شود، $X(j\omega)$ پهن تر شود، $X(j\omega)$ باریک

۴-۲ تبدیل فوریه سیگنال های متناوب

در بخش قبل نمایش تبدیل فوریه را معرفی کردیم و چند مثال زدیم. در آن بخش توجهمان به سیگنال های نامتناوب بود، ولی برای سیگنال های متناوب نیز می توان نمایش تبدیل فوریه به دست آورد، به این ترتیب سیگنال های نامتناوب و متناوب را می توان در مقوله ای واحد در نظر گرفت. در واقع چنانچه خواهیم دید می توانیم تبدیل فوریه یک سیگنال متناوب را مستقیماً از نمایش سری فوریه آن به دست آوریم. تبدیل حاصل یک قطار ضربه در حوزه فرکانس است، و مساحت ضربه ها با ضرائب سری فوریه متناسب است. این نمایش را بسیار مفید خواهیم یافت.



شکل ۴-۱۱: زوج تبدیل فوریه شکل ۴-۹ به ازای چند مقدار مختلف W

کار بردن ضربه به جای نمودار میله ای تفاوت دارند.

مثال ۴-۷

سیگنال زیر را در نظر بگیرید

$$x(t) = \sin \omega_0 t$$

ضرایب سری فوریه این سیگنال عبارت اند از

$$a_{-1} = -\frac{1}{2j}, \quad a_1 = \frac{1}{2j}$$

$$a_k = 0 \quad \text{بقیه مقادیر } k$$

پس تبدیل فوریه این سیگنال مطابق شکل ۴-۱۳ (الف) است. به نحوی مشابه برای

$$x(t) = \cos \omega_0 t$$

ضرایب سری فوریه عبارت اند از

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$a_k = 0 \quad \text{بقیه مقادیر } k$$

که تبدیل فوریه آن مطابق شکل ۴-۱۳ (ب) است. این دو تبدیل در تحلیل سیستم های مدولاسیون سینوسی (فصل ۸) اهمیت بسیاری دارند.

شکل ۴-۱۳: تبدیل فوریه الف) $x(t) = \sin \omega_0 t$ ؛ ب) $x(t) = \cos \omega_0 t$

مثال ۴-۸

قطار ضربه سیگنالی است که در تحلیل سیستم های نمونه برداری (فصل ۷) بسیار به کار می آید

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

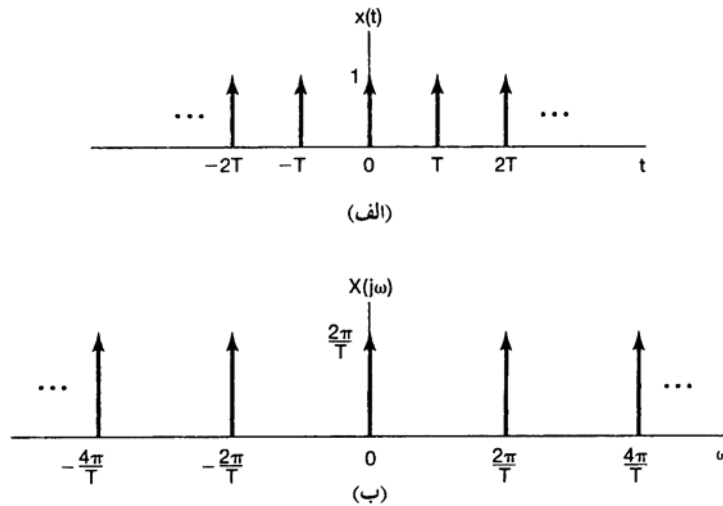
که با دوره تناوب T متناوب، و در شکل ۴-۱۴ (الف) رسم شده است. ضرائب سری فوریه این سیگنال را در مثال ۳-۸ حساب کردیم و به دست آوردیم

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

یعنی تمام ضرائب سری فوریه قطار ضربه مقدار ثابت $1/T$ هستند. با گذاشتن این مقدار به جای a_k معادله (۴-۲۲) را به دست می آوریم

$$X(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

است، که در شکل ۴-۱۴ (ب) نشان داده شده است. در اینجا نیز باز رابطه حوزه زمان و حوزه فرکانس را می توان دید. هرچه فاصله ضربه ها در زمان (یعنی دوره تناوب) بیشتر باشد، فاصله بین ضربه ها در حوزه فرکانس (فرکانس پایه) کوچکتر می شود.



شکل ۴-۱۴: (الف) ضربه متناوب، (ب) تبدیل فوریه آن

۴-۳ خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

در این بخش و دو بخش بعد تعدادی از خواص تبدیل فوریه را بیان می کنیم. فهرست کامل این خواص در جدول ۴-۱ بخش ۴-۶ درج شده است. این خواص همانند خواص نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب، بینش زیادی نسبت به تبدیل فوریه و رابطه بین توصیف های حوزه زمان و حوزه فرکانس سیگنال به ما می دهد. علاوه بر آن، به کمک بسیاری از این خواص می توان پیچیدگی محاسبه تبدیل فوریه و عکس تبدیل را کاهش داد. از این گذشته چنان که در بخش قبل گفتیم بین تبدیل فوریه و سریه فوریه سیگنال های متناوب رابطه نزدیکی وجود دارد و به کمک این رابطه می توانیم خواصی را که برای تبدیل فوریه پی می ریزیم، به خواص متناظری که در فصل ۳ برای سری فوریه به دست آوردیم پیوند بزنیم. (بخش ۳-۵ و جدول ۳-۱ را ببینید.)

طی این بحث، غالباً از توابع زمانی و تبدیل فوریل آن ها صحبت به میان می آوریم، بنابراین بهتر است برای بیان رابطه بین یک سیگنال و تبدیل فوریه آن یک نماد ساده به کار ببریم. به یاد دارید که $x(t)$ و تبدیل فوریه آن $X(j\omega)$ با دو معادله ترکیب و تجزیه زیر به هم مربوط می شوند

$$x(t) = \frac{1}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (۴-۲۴) \quad \text{[معادله (۴-۸)]}$$

و

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (۴-۹) \quad \text{[معادله (۴-۹)]}$$

فورييه $x(t)$ و $X(j\omega)$ را با علامت زیر نشان می دهیم

$$x(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega)$$

پس با توجه به مثال ۱-۴ داریم

$$\frac{1}{a+j\omega} = \mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\}$$

و

$$e^{-at}u(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{a+j\omega}\right\}$$

و

$$e^{-at}u(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{a+j\omega}$$

۱-۳-۴ خطی بودن

اگر

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$

و

$$y(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} Y(j\omega)$$

آنگاه

$$ax(t) + by(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} aX(j\omega) + bY(j\omega) \quad (۲۶-۴)$$

اثبات معادله (۲۶-۴) مستقیماً با اعمال معادله (۲۵-۴) به $ax(t) + bx(t)$ صورت می گیرد. خاصیت خطی

بودن را می توان به راحتی به ترکیب خطی تعداد دلخواهی تابع تعمیم داد.

۲-۳-۴ جابه جایی زمانی

اگر

$$x(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega)$$

آنگاه

$$x(t - t_0) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} e^{-j\omega t_0} X(j\omega) \quad (۲۷-۴)$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

با گذاشتن $t - t_0$ به جای t این معادله به دست می آوریم

$$\begin{aligned} x(t - t_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-j\omega t_0} X(j\omega)) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

با توجه به این که این همان معادله ترکیب $x(t - t_0)$ است، نتیجه می گیریم

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

یکی از نتایج خاصیت جابجایی زمانی این است که با جابجا شدن سیگنال، دامنه تبدیل فوریه آن تغییر نمی کند؛ با بیان $X(j\omega)$ به صورت قطبی داریم

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\phi X(j\omega)}$$

پس

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\phi X(j\omega) - \omega t_0}$$

بنابراین اثر جابجایی زمانی یک سیگنال بر تبدیل فوریه آن، یک جابجایی فازست؛ این جابجایی فاز، $-\omega t_0$ ، تابعی خطی از ω است.

مثال ۹-۴

برای نشان دادن فایده خواص خطی بودن و جابجایی زمانی تبدیل فوریه، محاسبه تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ شکل ۱۵-۴ (الف) را در نظر می گیریم.

ابتدا $x(t)$ را به صورت ترکیب خطی زیر بیان می کنیم

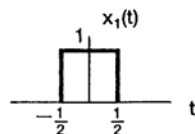
$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1(t - \tau/\omega) + x_2(t - \tau/\omega)$$

سیگنال های $x_1(t)$ و $x_2(t)$ پالس های مستطیلی نشان داده شده در شکل های ۱۵-۴ (ب) و (ج) هستند. حال با استفاده از نتیجه مثال ۴-۴ به دست می آوریم

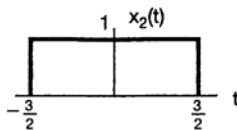
$$X_1(j\omega) = \frac{\tau \sin(\omega/\tau)}{\omega}, X_2(j\omega) = \frac{\tau \sin(\tau\omega/\tau)}{\omega}$$

سرانجام کاربرد خواص خطی بودن و جابجایی زمانی به دست می دهند

$$X(j\omega) = e^{-j\tau\omega/\tau} \left\{ \frac{\sin(\omega/\tau) + \sin(\tau\omega/\tau)}{\omega} \right\}$$



(ب)



(ج)

شکل ۴-۱۵: تجزیه یک سیگنال به ترکیب خطی دو سیگنال مشابه: الف) سیگنال $x(t)$ مثال ۴-۹: ب) و ج) دو سیگنال به کار رفته برای نمایش $x(t)$

۴-۳-۳ مزدوج گیری و تقارن مزدوج

خاصیت تقارن می گوید که اگر

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$$

آنگاه

$$x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(-j\omega) \quad (۴-۲۸)$$

این خاصیت از محاسبه مزدوج مختلط معادله (۴-۲۵) نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} X^*(j\omega) &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right]^* \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{j\omega t} dt \end{aligned}$$

با گذاشتن ω به جای $-\omega$ به دست می آوریم

$$X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt = X(j\omega) \quad (۴-۲۹)$$

و معادله (۴-۳۰) با گذاشتن $-\omega$ به جای ω به دست می آید.

با توجه به مثال ۴-۱، برای $x(t) = e^{-at}u(t)$ داریم

$$X(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$$

$$X(-j\omega) = \frac{1}{a-j\omega} = X^*(j\omega) \quad \text{و}$$

به عنوان یکی از نتایج معادله (۴-۳۰)، اگر $X(j\omega)$ را به شکل قائم زیر بنویسیم

$$X(j\omega) = \Re\{X(j\omega)\} + j \Im\{X(j\omega)\}$$

$$\Re\{X(j\omega)\} = \Re\{X(-j\omega)\}$$

$$\Im\{X(j\omega)\} = -\Im\{X(-j\omega)\}$$

یعنی بخش حقیقی تبدیل فوریه تابع زوجی از فرکانس و بخش موهومی آن تابع فردی از فرکانس است. همچنین اگر $X(j\omega)$ را به شکل قطبی زیر بنویسیم

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{i\phi_X(j\omega)}$$

از معادله (۴-۳۰) نتیجه می شود که $|X(j\omega)|$ تابع زوجی از ω و $\phi_X(j\omega)$ تابع فردی از ω است. بنابراین هنگام محاسبه یا نمایش تبدیل فوریه یک تابع زمانی حقیقی، تنها کافی است قسمت های حقیقی و موهومی یا دامنه و فاز آن، به ازای فرکانس های مثبت محاسبه یا نمایش داده شود، زیرا با استفاده از روابط بالا می توان مقادیر مربوط به فرکانس های منفی را مستقیماً به دست آورد.

نتیجه دیگر معادله (۴-۳۰) این است که اگر $x(t)$ حقیقی و زوج باشد، آنگاه $X(j\omega)$ نیز هم حقیقی و هم زوج است. برای پی بردن به این مطلب می نویسیم

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt$$

و با تغییر متغیر $\tau = -t$ به دست می آوریم

$$X(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

چون $x(-\tau) = x(\tau)$ ، داریم

$$\begin{aligned} X(-j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= X(j\omega) \end{aligned}$$

پس $X(j\omega)$ تابعی زوج است. ترکیب این نتیجه و معادله (۴-۳۰) نشان می دهد که $X^*(j\omega) = X(j\omega)$ ؛ یعنی $X(j\omega)$ حقیقی است. مثال ۴-۲ این خاصیت را برای سیگنال حقیقی و زوج $e^{-a|t|}$ نشان می دهد. با روشی مشابه می توان نشان داد که اگر $x(t)$ حقیقی و فرد باشد، یعنی $x(t) = -x(-t)$ ، $X(j\omega)$ موهومی خالص و فرد است.

در فصل ۱ گفتیم که هر تابع حقیقی $x(t)$ را می توان به صورت مجموع تابع زوج $x_g(t) = \mathcal{E}\{x(t)\}$ و تابع فرد $x_f(t) = \mathcal{O}\{x(t)\}$ نوشت، یعنی

$$x(t) = x_g(t) + x_f(t)$$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{x_e(t)\} + \mathcal{F}\{x_o(t)\}$$

با توجه به بحث فوق $\mathcal{F}\{x_o(t)\}$ حقیقی خالص و $\mathcal{F}\{x_e(t)\}$ موهومی خالص است. پس اگر $x(t)$ حقیقی باشد، نتیجه می گیریم

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$$

$$\mathcal{E}\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Re\{X(j\omega)\}$$

$$\mathcal{O}\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j \Im\{X(j\omega)\}$$

مثال زیر یکی از کاربردهای این خواص تقارن را نشان می دهد.

مثال ۴-۱۰

باز هم محاسبه تبدیل فوریه سیگنال $x(t) = e^{-a|t|}$ به ازای $a > 0$ را، که در مثال ۴-۲ انجام دادیم. در نظر می گیریم. این بار برای ساده شدن محاسبه از خواص تقارن تبدیل فوریه استفاده می کنیم. با توجه به مثال ۴-۱۰ داریم

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a+j\omega}$$

توجه کنید که در $t > 0$ داریم $x(t) = e^{-at}u(t)$ و در $t < 0$ ، تصویر آینه ای این مقادیر را دارد. یعنی

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) \\ &= \mathcal{E}\left\{ \frac{e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)}{2} \right\} \\ &= \mathcal{E}\{e^{-at}u(t)\} \end{aligned}$$

چون $e^{-at}u(t)$ حقیقی است، با توجه به خواص تقارن تبدیل فوریه به دست می آوریم

$$\mathcal{E}\{e^{-at}u(t)\} \leftrightarrow \Re\left\{ \frac{1}{a+j\omega} \right\}$$

$$X(j\omega) = \mathcal{E}\left\{ \frac{1}{a+j\omega} \right\} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

که همان جواب به دست آمده در مثال ۴-۲ است.

فرض کنید $x(t)$ سیگنالی با تبدیل فوریه $X(j\omega)$ است. با مشتق گیری از دو طرف معادله ترکیب تبدیل فوریه (۴-۲۴)، به دست می آوریم

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{j\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

بنابراین

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(j\omega) \quad (۴-۳۱)$$

این خاصیت مهمی است، زیرا عمل مشتق گیری در حوزه زمان را در حوزه فرکانس به ضرب در $j\omega$ تبدیل می کند. در بخش ۴-۷، در بحث کاربرد تبدیل فوریه در تحلیل سیستم های *LTI* توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خواهیم دید که این خاصیت بسیار مفید است.

چون مشتق گیری در حوزه زمان معادل ضرب در $j\omega$ در حوزه فرکانس است، شاید فکر شود که انتگرال گیری زمانی در حوزه فرکانس تقسیم بر $j\omega$ است. درست است، ولی این تنها یک روی سکه است. رابطه دقیق چنین است

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega) \quad (۴-۳۲)$$

جمله ضربی سمت راست معادله (۴-۳۲) بازتاب مقدار میانگین یا *dc* حاصل از انتگرال گیری است.

کاربرد معادلات (۴-۳۱) و (۴-۳۲) را طی دو مثال زیر نشان می دهیم.

مثال ۴-۱۱

می خواهیم تبدیل فوریه $X(j\omega)$ پله واحد $x(t) = u(t)$ را بیابیم، به این منظور از معادله (۴-۳۲) و رابطه زیر استفاده می کنیم

$$g(t) = \delta(t) \leftrightarrow G(j\omega) = 1$$

توجه کنید که

$$x(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) \delta\tau$$

با گرفتن تبدیل فوریه دو طرف به دست می آوریم

$$X(j\omega) = \frac{2(j\omega)}{j\omega} + \pi G(0) \delta(\omega)$$

که در آن خاصیت انتگرال گیری مندرج در جدول ۴-۱ به کار برده شده است. چون $G(j\omega) = 1$ ، نتیجه می گیریم که

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \quad (۴-۳۳)$$

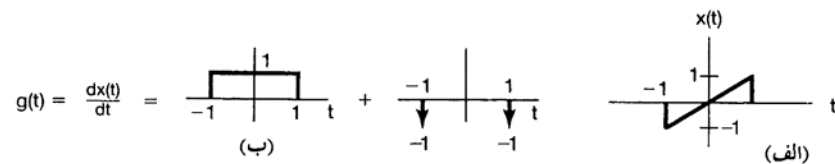
$$\delta(t) = \frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] = 1$$

در رابطه آخر از این حقیقت سود جسته ایم که $\omega \delta(\omega) = 0$

مثال ۴-۱۲

فرض کنید می خواهیم تبدیل فوریه $X(j\omega)$ سیگنال $x(t)$ شکل ۴-۱۶ (الف) را بیابیم. به جای اعمال مستقیم انتگرال فوریه به $x(t)$ سیگنال زیر را در نظر می گیریم

$$g(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$



شکل ۴-۱۶: الف) سیگنال $x(t)$ که تبدیل فوریه آن باید محاسبه شود؛ ب) نمایش مشتق $x(t)$ به صورت مجموع دو مولفه

همانطور که شکل ۴-۱۶ (ب) نشان می دهد $x(t)$ مجموع دو ضربه و یک پالس مستطیلی است. تبدیل فوریه هر یک از این سیگنال ها را می توان از جدول ۴-۲ به دست آورد

$$G(j\omega) = \left(\frac{\gamma \sin \omega}{\omega} \right) - e^{j\omega} - e^{-j\omega}$$

توجه کنید که $G(0) = 0$. به کمک خاصیت انتگرال گیری به دست می آوریم

$$X(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{j\omega} + \pi G(0)\delta(\omega)$$

عبارت $X(j\omega)$ موهومی خالص و فردست، که با حقیقی و فرد بودن $x(t)$ سازگارست.

۴-۳-۵ تغییر مقیاس زمانی و فرکانسی

اگر

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$$

آنگاه

$$x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right) \quad (4-34)$$

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt$$

با تغییر متغیر $\tau = at$ به دست می آوریم

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau & , a > 0 \\ -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau & , a < 0 \end{cases}$$

که با معادله (۴-۳۴) متناظرست. بنابراین، صرف نظر از ضریب $1/|a|$ ، تغییر مقیاس زمانی خطی با ضریب a ، به یک تغییر مقیاس فرکانسی خطی با ضریب $1/a$ می انجامد، و برعکس. همچنین با قراردادن $a = -1$ در معادله (۴-۳۴) به دست می آوریم

$$x(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(-j\omega) \quad (۴-۳۵)$$

یعنی وارونه شدن زمانی یک سیگنال به وارونه شدن تبدیل فوریه آن می انجامد. یک مثال متداول معادله (۴-۳۴) اثر پخش سریع صدای ضبط شده بر محتوای فرکانسی آن است. اگر سرعت پخش بیشتر از سرعت ضبط باشد، که متناظر با فشرده شدن در حوزه زمان است (یعنی $a > 1$) طیف فرکانسی بازتر می شود (اثر حسی این کار بالا بودن فرکانس های پخش شده است). برعکس، اگر سرعت ضبط بیشتر از سرعت پخش باشد ($0 < a < 1$) صدای پخش شده فرکانس های پایین تری دارد. مثلاً اگر صدای ضبط شده یک زنگ کوچک با سرعت آهسته پخش شود، صدای پر طنین یک ناقوس شنیده می شود. خاصیت تغییر مقیاس نمونه دیگری از رابطه معکوس زمان فرکانس است که تا به حال چند بار به آن برخوردیم. مثلاً دیدیم افزایش دوره تناوب سیگنال سینوسی، با کاهش فرکانس آن همراه است. همچنین در مثال ۴-۵ (شکل ۴-۱۱) دیدیم که اگر تبدیل زیر را در نظر بگیریم

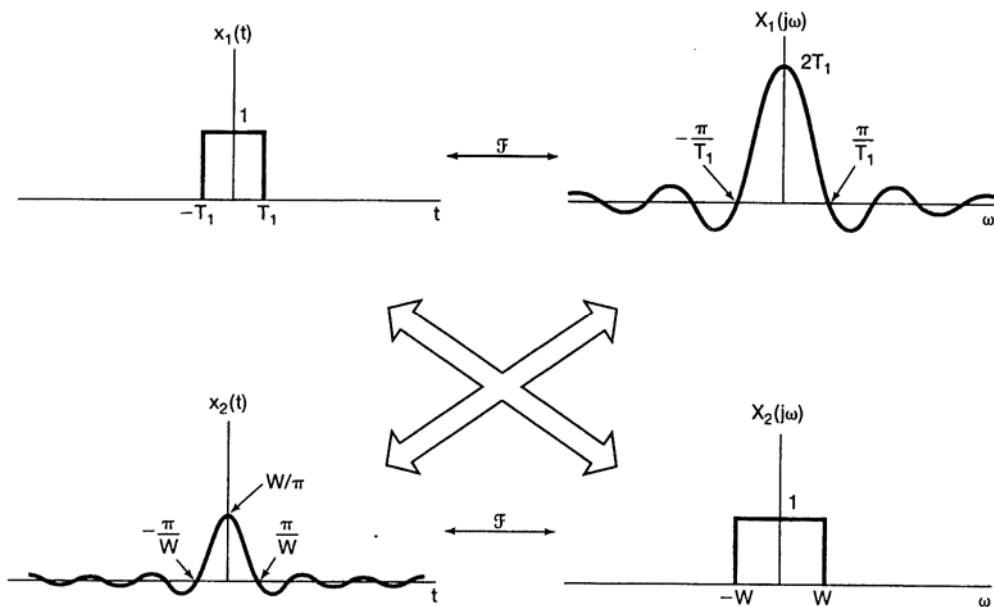
$$X(j\omega) = \begin{cases} 1 & , & |\omega| \leq W \\ 0 & , & |\omega| > W \end{cases}$$

با افزایش W ، عکس تبدیل $X(j\omega)$ باریک تر و بلندتر می شود و در حد $W \rightarrow \infty$ به یک ضربه میل می کند. در مثال ۴-۸ هم دیدیم که فاصله فرکانسی بین ضربه های تبدیل فوریه یک رشته ضربه متناوب، با فاصله زمانی بین ضربه ها نسبت عکس دارد.

رابطه معکوس حوزه زمان و حوزه فرکانس در مقوله های مختلف سیگنال ها و سیستم ها اهمیت فراوانی دارد، فیلتر و طراحی فیلتر از این مقولات است، و در بقیه این کتاب نیز با موارد متعددی از نتایج این رابطه روبرو می شویم. شما ممکن است در مطالعه موضوعات علمی و مهندسی متفاوتی به نتایج ضمنی این خاصیت برخورد کنید. اصل عدم قطعیت نمونه ای از این مواردست؛ در مسئله ۴-۴۹ مثال دیگری را خواهیم دید.

با مقایسه روابط تبدیل و عکس تبدیل فوریه معادلات (۴-۲۴) و (۴-۲۵) می توان نوعی تقارن مشاهده کرد، معادلات شبیه اند، ولی کاملاً یکسان نیستند. این تقارن، به خاصیتی از تبدیل فوریه موسوم به همزهادی منجر می شود. در مثال ۴-۵ هنگامی که رابطه بین زوج تبدیل فوریه مثال های ۴-۴ و ۴-۵ را دیدیم، به این خاصیت اشاره کردیم. در مثال اول زوج تبدیل فوریه زیر را به دست آوردیم

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad X_1(j\omega) = \frac{\pi \sin \omega T_1}{\omega} \quad (۴-۳۶)$$



شکل ۴-۱۷: رابطه بین زوج های تبدیل فوریه معادلات (۴-۳۶) و (۴-۳۷)

و در مثال دوم زوج زیر را

$$x_2(t) = \frac{\sin Wt}{\pi t} \quad \Leftrightarrow \quad X_2(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases} \quad (۴-۳۷)$$

این دو زوج تبدیل فوریه و رابطه بینشان در شکل ۴-۱۷ تصویر شده است.

تقارن موجود بین این دو مثال را می توان به هر تبدیل فوریه ای تعمیم داد. در واقع به خاطر تقارن بین معادلات (۴-۲۴) و (۴-۲۵) برای هر زوج تبدیلی یک زوج همزاد وجود دارد که در آن جای متغیرهای زمان و فرکانس عوض شده اند. بهترین راه نشان دادن این رابطه استفاده از مثال است.

کاربرد همزادی در یافتن تبدیل فوریه $G(j\omega)$ سیگنال زیر را در نظر بگیرید

$$g(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

در مثال ۲-۴ یک زوج تبدیل فوریه به دست آوردیم، که در آن تبدیل فوریه، به عنوان تابعی از ω شکلی مانند سیگنال $x(t)$ داشت. یک سیگنال $x(t)$ با تبدیل فوریه زیر فرض می کنیم

$$X(j\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$$

و با توجه به مثال ۲-۴

$$x(t) = e^{-\gamma|t|} u(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$$

معادله ترکیب این زوج تبدیل فوریه عبارت است از

$$e^{-\gamma|t|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\omega^2} \right) e^{j\omega t} d\omega$$

با ضرب این معادله در $\gamma\pi$ و گذاشتن t به جای t به دست می آوریم

$$\gamma\pi e^{-\gamma|t|} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{1+\omega^2} \right) e^{-j\omega t} d\omega$$

حال با تعویض نام متغیرهای t و ω می بینیم که

$$\gamma\pi e^{-\gamma|\omega|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{1+t^2} \right) e^{-j\omega t} dt \quad (38-4)$$

سمت راست معادله (۳۸-۴) معادله تجزیه تبدیل فوریه $\gamma/(1+t^2)$ است، پس نتیجه می گیریم که

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\gamma}{1+t^2} \right\} = \gamma\pi e^{-\gamma|\omega|}$$

خاصیت همزادی را می توان برای تعیین خواص دیگری برای تبدیل فوریه به کار برد. اگر مشخصات حوزه زمان یک تابع با خاصیتی در حوزه فرکانس متناظر باشد، وجود همین مشخصه در یک تابع فرکانسی با خاصیت همزاد حوزه زمان متناظرست. برای مثال در بخش ۴-۳-۴ دیدیم که مشتق گیری زمانی در حوزه فرکانس با ضرب در $j\omega$ متناظرست. با توجه به بحث فوق می توان انتظار داشت که ضرب در $j\omega$ در حوزه زمان به نحوی با مشتق گیری در حوزه فرکانس متناظر باشد. برای تعیین شکل دقیق این خاصیت همزاد می توان دقیقاً راه به کار رفته در بخش ۴-۳-۴ را پیمود. اگر از معادله تجزیه (۲۵-۴) نسبت ω مشتق بگیریم به دست می آوریم

$$\frac{dX(j\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} -jt x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (39-4)$$

$$-j\tau x(\tau) \leftrightarrow \frac{dX(j\omega)}{d\omega} \quad (4-40)$$

به همین ترتیب می توان خواص همزاد معادلات (4-27) و (4-32) را به شکل زیر به دست آورد

$$e^{j\omega_0\tau} x(\tau) \leftrightarrow X(j(\omega - \omega_0)) \quad (4-41)$$

و

$$-\frac{1}{j\tau} x(\tau) + \pi x(\cdot)\delta(\tau) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} X(j\eta) d\eta \quad (4-42)$$

4-3-7 رابطه پارسوال

اگر $x(\tau)$ و $X(j\omega)$ یک زوج تبدیل فوریه باشند، آنگاه

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau = \frac{1}{j\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \quad (4-34)$$

این عبارت، که رابطه پارسوال خوانده می شود، از کاربرد مستقیم تبدیل فوریه نتیجه می شود. دقیق تر این که

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x^*(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\frac{1}{j\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega \right] d\tau \end{aligned}$$

با عوض کردن جای انتگرال ها داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau = \frac{1}{j\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] d\omega$$

جمله داخل کروشه، تبدیل فوریه $x(\tau)$ است؛ پس

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau = \frac{1}{j\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

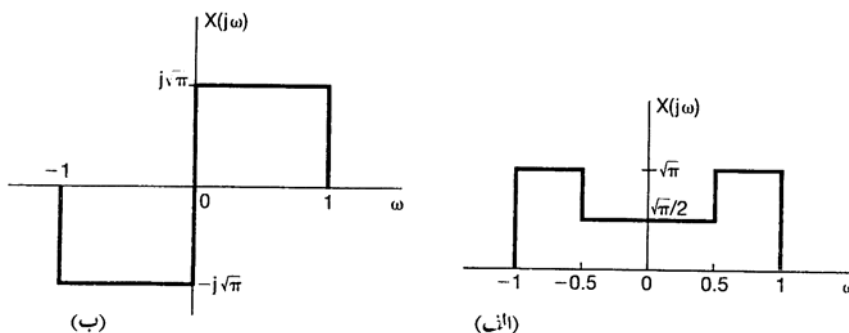
کمیت سمت چپ معادله (4-34) انرژی کل سیگنال $x(\tau)$ است. بنا به رابطه پارسوال این انرژی کل را می توان هم با محاسبه انرژی در واحد زمان $(|x(\tau)|^2)$ و انتگرال گیری روی کل فاصله زمانی، و هم با محاسبه انرژی در واحد فرکانس $(|X(j\omega)|^2 / 2\pi)$ و انتگرال گیری روی کل فاصله فرکانسی، به دست آورد. به همین خاطر $|X(j\omega)|^2$ را غالباً طیف چگالی انرژی می نامند. (مسئله 4-45) را ببینید) توجه کنید که رابطه پارسوال برای سیگنال های دارای انرژی محدود همتای رابطه پارسوال برای سیگنال های متناوب (معادله 3-67) است، که می گوید توان متوسط هر مؤلفه نیز مربع دامنه آن هارمونیک است.

رابطه پارسوال و دیگر خواص تبدیل فوریه را می توان برای استنتاج مشخصات حوزه زمان یک سیگنال از تبدیل فوریه آن به کار برد. مثال زیر نمونه ای ساده را نشان می دهد.

می خواهیم برای هر یک از تبدیل فوریه های شکل ۱۸-۴ عبارت های حوزه زمان زیر را حساب کنیم:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$D = \frac{d}{dt} x(t) \Big|_{t=0}$$



شکل ۱۸-۴: تبدیل فوریه مثال ۱۴-۴

برای محاسبه E در حوزه فرکانس می توانیم رابطه پارسوال را به کار ببریم. یعنی

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \quad (44-4)$$

که برای شکل ۱۸-۴ (الف) برای $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ و برای شکل (ب) برابر ۱ است.

برای محاسبه D در حوزه فرکانس ابتدا خاصیت مشتق گیری را به کار برده، به دست می آوریم

$$g(t) = \frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(j\omega) = G(j\omega)$$

توجه کنید که

$$D = g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) d\omega \quad (45-4)$$

پس نتیجه می گیریم:

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(j\omega) d\omega \quad (46-4)$$

که برای شکل ۱۸-۴ (الف) صفر و برای شکل ۱۸-۴ (ب) برابر $\sqrt{1-\pi}$ است.

تبدیل فوریه علاوه بر خواص ذکر شده، خواص متعدد دیگری نیز دارد. در دو بخش بعد دو خاصیت را در نظر می گیریم که در مطالعه سیستم های **LIT** نقش محوری دارند. اولین خاصیت، که در بخش ۴-۴ مورد بحث قرار می گیرد، خاصیت کانولوشن نام دارد که در کاربردهای متعددی از سیگنال ها و سیستم ها از جمله فیلتر کردن خاصیتی اساسی است. خاصیت دوم که موضوع بخش ۴-۵ است، خاصیت ضرب نام دارد، و اساس مباحث نمونه برداری فصل ۷

۴-۴ خاصیت کانولوشن

در فصل ۳ دیدیم که اگر یک سیگنال متناوب را به صورت سری فوریه بیان کنیم- یعنی به صورت ترکیب خطی نمایی های مختلط هماهنگ به صورت معادله (۳-۳۸) - پاسخ یک سیستم **LIT** به این ورودی را نیز می توان به صورت سری فوریه بیان کرد. چون نمایی های مختلط توابع ویژه سیستم های **LIT** هستند، ضرائب سری فوریه خروجی را می توان به صورت حاصلضرب ضرائب ورودی در پاسخ فرکانسی سیستم، محاسبه شده در فرکانس متناظر با هر مؤلفه، به دست آورد.

در این بخش این نتیجه را به سیگنال های نامتناوب تعمیم می دهیم. ابتدا این خاصیت را به روشی نسبتاً غیر ریاضی و براساس بینش شهودی کسب شده در فصل ۳ به دست می آوریم، سپس اثبات دقیق را با شروع از انتگرال کانولوشن، به اختصار ارائه می کنیم.

تعبیر معادله ترکیب تبدیل فوریه، به عنوان $x(t)$ به صورت ترکیب خطی نمایی های مختلط را به خاطر آورید. با رجوع به معادله (۴-۷)، $x(t)$ را به صورت حد یک جمع بیان می کنیم، یعنی

$$x(t) = \frac{1}{j\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \omega_1 \rightarrow \frac{1}{j\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t} \quad (4-47)$$

چنانچه در بخش های ۳-۲ و ۳-۸ بیان شد، پاسخ یک سیستم خطی با پاسخ ضربه $h(t)$ ، به تابع نمایی مختلط $e^{jk\omega_1 t}$ برابر $H(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t}$ است، که در آن

$$H(jk\omega_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-jk\omega_1 t} dt \quad (4-48)$$

پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ تعریف شده در معادله (۳-۱۲۱) را به عنوان تبدیل فوریه پاسخ ضربه سیستم تشخیص می دهیم. به عبارت دیگر تبدیل فوریه پاسخ ضربه (در $\omega = k\omega_1$) ضریب مختلط متناظر با تابع ویژه $e^{-jk\omega_1 t}$ است. با توجه به اصل جمع آثار [معادله (۳-۱۲۴)] داریم

$$\frac{1}{j\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t} \rightarrow \frac{1}{j\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(jk\omega_1) X(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t}$$

پس طبق معادله (۴-۴۷)، پاسخ سیستم خطی به $x(t)$ عبارت است از

$$y(t) = \omega_1 \rightarrow \frac{1}{j\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(jk\omega_1) X(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t} \quad (4-49)$$

$$= \frac{1}{j\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

چون $y(t)$ و تبدیل فوریه اش $Y(j\omega)$ به صورت زیر به هم مربوط می شوند

$$y(t) = \frac{1}{j\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4-50)$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) \quad (51-4)$$

به عنوان اثبات دقیق تر، رابطه کانولوشن را در نظر بگیرید

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (52-4)$$

می خواهیم $Y(j\omega)$ را پیدا کنیم که عبارت است از

$$Y(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \quad (53-4)$$

با عوض کردن جای انتگرال ها و با توجه به اینکه $x(\tau)$ به t بستگی ندارد، به دست می آوریم

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \quad (54-4)$$

طبق خاصیت جابه جایی زمانی معادله (۲۷-۴) جمله داخلی گروه برابر $e^{-j\omega \tau} H(j\omega)$ است. گذاشتن این مقدار

در معادله (۵۴-۴) به دست می دهد

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega \tau} H(j\omega) d\tau = H(j\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \quad (55-4)$$

مقدار انتگرال برابر $X(j\omega)$ است، پس

$$Y(j\omega) = X(j\omega) H(j\omega)$$

یعنی

$$y(t) = x(t) * h(t) \leftrightarrow Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) \quad (56-4)$$

معادله (۵۶-۴) اهمیت حیاتی در تحلیل سیگنال و سیستم دارد. این معادله می گوید تبدیل فوریه کانولوشن دو

سیگنال را به حاصلضرب تبدیل فوریه آن ها تبدیل می کند. $H(j\omega)$ ، تبدیل فوریه پاسخ ضربه، همان پاسخ

فرکانسی تعریف شده در معادله (۳-۱۲۱) است و تغییر دامنه مختلط تبدیل فوریل ورودی در هر فرکانس ω را دربر

دارد. مثلاً در فیلترهای فرکانس گزین می خواهیم در یک گستره فرکانسی داشته باشیم $H(j\omega) \approx 1$ ، تا مؤلفه

های فرکانسی موجود در این باند با تغییری اندک یا بدون تضعیف از سیستم بگذرد؛ و در گستره های فرکانسی دیگر

داشته باشیم $H(j\omega) \approx 0$ تا مؤلفه های فرکانسی این گستره حذف یا به شدت تضعیف شوند.

پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ نقش مهمی در تحلیل سیستم های LIT بازی می کند، همانطور که عکس تبدیل فوریه

آن، یعنی پاسخ ضربه، نقش مهم دارد. اول این که چون $h(t)$ یک سیستم LIT را به طور کامل مشخص می کند،

$H(j\omega)$ نیز باید همینطور باشد. به علاوه بسیاری از خواص سیستم های LIT را می توان بر حسب $H(j\omega)$

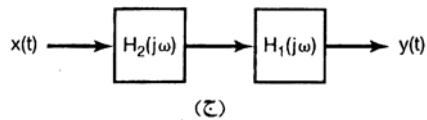
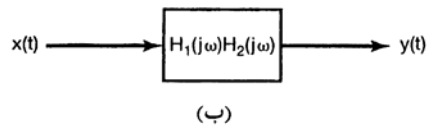
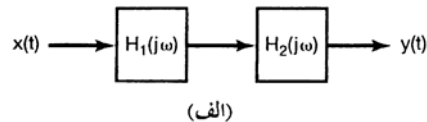
تعبیر کرد. مثلاً در بخش ۲-۳ دیدیم که پاسخ ضربه اتصال سری دو سیستم LIT کانولوشن پاسخ ضربه دو سیستم

است، و پاسخ ضربه کامل به ترتیب اتصال سیستم ها بستگی ندارد. به کمک معادله (۵۶-۴) می توان این خاصیت را بر

حسب پاسخ فرکانسی بیان کرد. شکل ۴-۱۹ نشان می دهد که چون پاسخ ضربه دو سیستم LIT سری کانولوشن

توجه به این مطلب واضح است که پاسخ فرکانسی کل به ترتیب اتصال سیستم‌ها بستگی ندارد. چنانچه در بخش ۴-۱-۲ گفتیم همگرایی تبدیل فوریه تنها در شرایط خاصی تضمین می‌شود، و در نتیجه پاسخ فرکانسی را نمی‌توان برای تمام سیستم‌های **LTI** تعریف کرد. ولی اگر یک سیستم پایدار باشد، همانطور که در بخش ۲-۳-۷ و مسئله ۲-۴۹ دیدیم، پاسخ ضربه آن مطلقاً انتگرال پذیرست؛ یعنی

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (۵۷-۴)$$



شکل ۴-۱۹: سه سیستم **LTI** هم‌ارز. هر جعبه یک سیستم **LTI** را نشان می‌دهد که با پاسخ فرکانسی اش مشخص شده است.

معادله (۵۷-۴) یکی از سه شرط دیریکله است، که برآورده شدن آن‌ها وجود تبدیل فوریه $h(t)$ را تضمین می‌کند. بنابراین با فرض اینکه $h(t)$ دو شرط دیگر را برآورده می‌کند، چنان‌که تمام سیسگنال‌های دارای اهمیت واقعی و عملی چنین‌اند، می‌بینیم که هر سیستم **LTI** پایدار پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ دارد.

هنگام به کار بردن تحلیل فوریه در بررسی سیستم‌های **LTI**، خود را به سیستم‌هایی محدود می‌کنیم که پاسخ ضربه آن‌ها تبدیل فوریه دارد. برای استفاده از تکنیک‌های تبدیل در بررسی سیستم‌های ناپایداری که پاسخ فرکانسی محدود ندارند، تعمیم تبدیل فوریه پیوسته در زمان، به صورت تبدیل لاپلاس را در نظر خواهیم گرفت. این بحث را تا فصل ۹ به تأخیر می‌اندازیم و تا آن موقع مسائل و کاربردهای عملی زیادی را که با تبدیل فوریه قابل تحلیل‌اند، بیان می‌کنیم.

۴-۴-۱ چند مثال

برای نشان دادن خاصیت کانولوشن و کاربردهای آن چند مثال در نظر می‌گیریم.

مثال ۴-۱۵

سیستمی **LTI** و پیوسته در زمان با پاسخ ضربه زیر در نظر بگیرید

$$h(t) = \delta(t - t_0) \quad (۵۸-۴)$$

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0} \quad (59-4)$$

بنابراین به ازای هر ورودی $x(t)$ با تبدیل فوریه $X(j\omega)$ تبدیل فوریه خروجی این سیستم به صورت زیر است

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = X(j\omega)e^{-j\omega t_0} \quad (60-4)$$

این نتیجه با خاصیت جابه جایی زمانی بخش ۴-۳-۲ نیز سازگارست. در واقع سیستمی که پاسخ ضربه آن $\delta(t - t_0)$ است ورودی را به اندازه t_0 تأخیر می دهد، یعنی

$$y(t) = x(t - t_0)$$

خاصیت جابه جایی زمانی معادله (۲۷-۴) نیز معادله (۶۰-۴) را نتیجه می دهد. هم از بحث بخش ۴-۳-۲ و هم به طور مستقیم از معادله (۵۹-۴) چنین برمی آید که پاسخ فرکانسی سیستمی که تنها تأخیر زمانی دارد. دامنه اش در تمام فرکانس ها یک است $(|e^{-j\omega t_0}| = 1)$ و مشخصه فازش، $-\omega t_0$ تابعی خطی از ω است.

مثال ۴-۱۶

به عنوان دومین مثال یک مشتق گیر را در نظر بگیرید، یعنی یک سیستم *LIT* که خروجی $y(t)$ و ورودی اش $x(t)$ به صورت زیر به هم مرتبط باشند

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

طبق خاصیت مشتق گیری بخش ۴-۳-۴ داریم

$$Y(j\omega) = j\omega X(j\omega) \quad (61-4)$$

بنابراین از معادله (۵۶-۴) می توان نتیجه گرفت که پاسخ فرکانسی مشتق گیر به صورت زیرست

$$H(j\omega) = j\omega \quad (62-4)$$

مثال ۴-۱۷

حال یک انتگرال گیر را در نظر بگیرید، یعنی یک سیستم *LIT* که از معادله زیر تبعیت کند

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

پاسخ ضربه این سیستم پله واحد $u(t)$ است، بنابراین با توجه به مثال ۴-۱۱ و معادله (۳۳-۴) پاسخ فرکانسی این سیستم به صورت زیرست

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

پس با استفاده از معادله (۵۶-۴) داریم

$$Y(j\omega) = X(j\omega) H(j\omega)$$

$$= \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

که با خاصیت انتگرال گیری معادله (۴-۳۲) سازگارست.

مثال ۴-۱۸

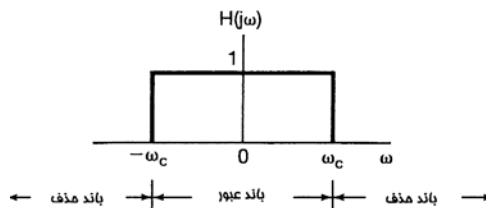
همانطور که در بخش ۳-۹-۲ گفتیم فیلتر فرکانس گزین یک سیستم **LTI** است که یک گستره فرکانسی مطلوب را می گذارند و فرکانس های خارج آن گستره را به شدت تضعیف می کند. برای مثال فیلتر پایین گذر ایده آل بخش ۳-۹-۲ را در نظر بگیرید، پاسخ فرکانسی این فیلتر در شکل ۴-۲۰ نشان داده شده و عبارت است از

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (۴-۶۳)$$

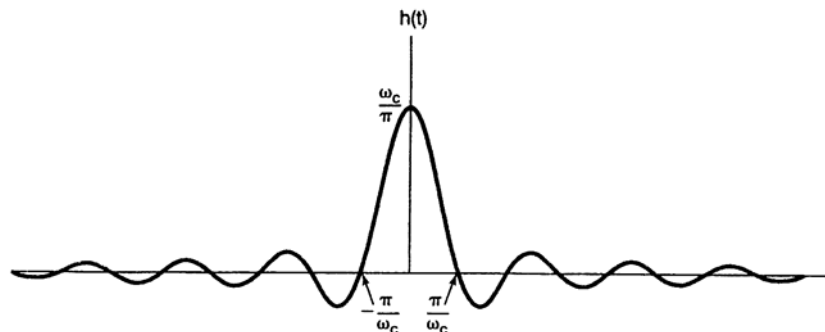
اکنون که نمایش تبدیل فوریه را در اختیار داریم می دانیم که پاسخ ضربه این فیلتر ایده آل عکس تبدیل فوریه معادله (۴-۶۳) است. با استفاده از نتیجه مثال ۴-۵ داریم

$$H(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} \quad (۴-۶۴)$$

که در شکل ۴-۲۱ نشان داده شده است.



شکل ۴-۲۰: پاسخ فرکانسی فیلتر پایین گذر ایده آل



شکل ۴-۲۱: پاسخ ضربه فیلتر پایین گذر ایده آل

شروع کرد. گرچه فیلتر پایین گذر ایده آل از لحاظ فرکانس گزینی بی نقص عمل می کند، ولی پاسخ ضربه اش مشخصات نامطلوبی دارد. اول این که $h(t)$ در $t < 0$ صفر نیست. بنابراین فیلتر پایین گذر ایده آل علی نیست، بنابراین در کاربردهایی که سیستم ها باید علی باشند، قابل استفاده نیست. به علاوه، چنانچه در فصل ۶ خواهیم دید، حتی در مواردی که قید علی بودن وجود ندارد، ساختن تقریب دقیقی از آن مشکل است، و فیلترهای غیر ایده آلی که ساختنشان ساده ترست ترجیح داده می شوند. همچنین در بعضی کاربردها (مانند سیستم تعلیق خودروی بخش ۶-۷-۱) رفتار نوسانی پاسخ ضربه فیلتر پایین گذر می تواند نامطلوب باشد. در چنین کاربردهایی مشخصات حوزه زمان فیلتر پایین گذر ایده آل، می تواند غیرقابل قبول باشد. پس باید بده-بستانی بین مشخصات حوزل فرکانس مانند فرکانس گزینی ایده آل، و مشخصات حوزه زمان مراعات شود.

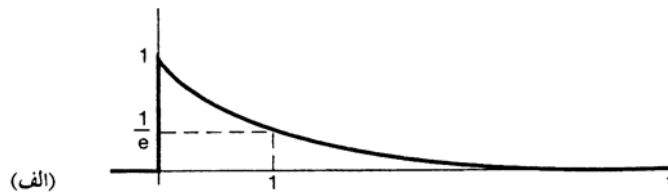
مثلاً سیستم **LIT** دارای پاسخ ضربه زیر را در نظر بگیرید

$$h(t) = e^{-t} u(t) \quad (۴-۶۵)$$

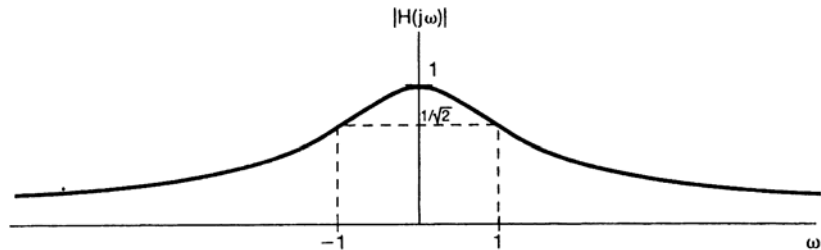
پاسخ فرکانسی این سیستم عبارت است از

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1} \quad (۴-۶۶)$$

مقایسه معادلات (۴-۱۴۵) و (۴-۶۶) نشان می دهد که این سیستم را می توان به صورت مدار **RC** ساده بخش ۳-۱۰ ساخت. پاسخ ضربه و اندازه پاسخ فرکانسی این سیستم در شکل ۴-۲۲ نشان داده شده است. گرچه این سیستم قدرت فرکانس گزینی فیلتر پایین گذر را ندارد، ولی علی است و پاسخ ضربه آن به طور یکنوا، یعنی بدون نوسان، میرا می شود. این فیلتر و فیلترهای پیچیده تر متناظر با معادلات دیفرانسیل مرتبه بالاتر معمولاً به خاطر علی بودن، سهولت ساخت و انعطاف پذیری شان در بده بستان های بین ملاحظاتی چون فرکانس گزینی و رفتار نوسانی حوزه زمان، بر فیلترهای ایده آل ترجیح داده می شوند. بسیاری از این مطالب را در فصل ۶ به تفصیل بررسی می کنیم. خاصیت کانولوشن در محاسبه انتگرال کانولوشن، یعنی محاسبه پاسخ سیستم های **LIT**، بسیار به کار می آید. این مطلب در مثال زیر نشان داده شده است.



(الف)



(ب)

شکل ۴-۲۲: الف) پاسخ ضربه سیستم LTI معادله (۴-۶۵)؛ ب) اندازه پاسخ فرکانسی سیستم

مثال ۴-۱۹

پاسخ سیستم **LTI** با پاسخ ضربه زیر

$$h(t) = e^{-at} u(t) \quad , a > 0$$

به ورودی زیر را بیابید

$$x(t) = e^{-bt} u(t) \quad , b > 0$$

به جای محاسبه $y(t) = x(t) * h(t)$ مسئله را به حوزه فرکانس می بریم، با توجه به مثال ۴-۱ تبدیل فوریه

$x(t)$ و $h(t)$ عبارت اند از

$$X(j\omega) = \frac{1}{b + j\omega}$$

و

$$H(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

پس

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)(b + j\omega)}$$

(۴-۶۷)

برای یافتن خروجی $y(t)$ باید عکس تبدیل $Y(j\omega)$ را بیابیم. ساده ترین روش این کار این است که $Y(j\omega)$ را

به صورت کسرهای جزئی بسط دهیم. چنان که خواهیم دید این بسط در محاسبه عکس تبدیل فوریه بسیار مفیدست

و روش کلی انجام آن در پیوست تشریح شده است. برای این مثال، با فرض $b \neq a$ ، بسط $Y(j\omega)$ به کسرهای

$$Y(j\omega) = \frac{A}{a + j\omega} + \frac{B}{b + j\omega} \quad (68-4)$$

A و B ثابت هایی اند که باید تعیین شوند. یک روش یافتن A و B برابر قرار دادن طرف های راست معادلات (۴-۶۷) و (۴-۶۸) ، ضرب دو طرف در $(a + j\omega)(b + j\omega)$ و حل معادلات حاصل است. در پیوست روش عمومی تر و مؤثرتری برای محاسبه ضرائب بسط به کسرهای جزیی بیان شده است. از هر روشی استفاده کنیم به دست می آوریم

$$A = \frac{1}{b-a} = -B$$

بنابراین

$$Y(j\omega) = \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{a+j\omega} - \frac{1}{b+j\omega} \right] \quad (69-4)$$

عکس تبدیل فوریه هریک از دو جمله معادله (۴-۶۹) را می توان با کمی تأمل یافت. با استفاده از خاصیت خطی بودن بخش ۴-۳-۱ داریم

$$y(t) = \frac{1}{b-a} [e^{-at}u(t) - e^{bt}u(t)]$$

بسط معادله (۴-۶۹) به ازای $b = a$ درست نیست. در این حالت معادله (۴-۶۷) به شکل زیر درمی آید

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)^2}$$

با توجه به این که

$$\frac{1}{(a+j\omega)^2} = j \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{a+j\omega} \right]$$

می توان از همزاد خاصیت مشتق گیری، معادله (۴-۴۰) استفاده کرد. پس

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}$$

$$te^{-at}u(t) \leftrightarrow j \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{a+j\omega} \right] = \frac{1}{(a+j\omega)^2}$$

و در نتیجه

$$y(t) = te^{-at}u(t)$$

مثال ۴-۲۰

به عنوان مثالی دیگر از کاربرد خاصیت کانولوشن مسئله تعیین پاسخ یک فیلتر پایین گذر به سیگنال ورودی سینک را در نظر بگیرید. داریم

$$x(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$$

$$h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$$

پس خروجی فیلتر کانولوشن دو تابع سینک است، و ناشن خواهیم داد که آن هم یک تابع سینک است. روش مناسب دستیابی به این نتیجه توجه به این نکته است که

$$Y(j\omega) = X(j\omega) H(j\omega)$$

که در آن

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_1 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

پس

$$Y(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ω_c با عدد کوچک تر ω_1 و ω_c برابرست. عکس تبدیل فوریه $Y(j\omega)$ عبارت است از

$$y(t) = \begin{cases} \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}, & \text{اگر } \omega_c \leq \omega_1 \\ \frac{\sin \omega_1 t}{\pi t}, & \text{اگر } \omega_1 \leq \omega_c \end{cases}$$

یعنی بسته به این که ω_c کوچک تر باشد یا ω_1 ، خروجی با $x(t)$ یا $h(t)$ برابرست.

۴-۵ خاصیت ضرب

طبق خاصیت کانولوشن، کانولوشن در حوزه زمان با ضرب در حوزه فرکانس متناظرست. به خاطر همزادی حوزه های زمان و فرکانس باید انتظار داشت، خاصیت همزاد نیز صادق باشد (یعنی ضرب در حوزه زمان با کانولوشن در حوزه فرکانس باشد). دقیق تر این که باید داشته باشیم

$$r(t) = s(t)p(t) \leftrightarrow R(j\omega) = \frac{1}{j\omega} [S(j\omega) * P(j\omega)] \quad (4-70)$$

این مطلب را می توان با استفاده از رابطه همزادی بیان شده در بخش ۴-۳-۶ و خاصیت کانولوشن، یا با استفاده مستقیم از رابطه تبدیل فوریه، به شیوه ای مشابه اثبات خاصیت کانولوشن اثبات کرد.

ضرب یک سیگنال در سیگنالی دیگر را می توان استفاده از یکی برای تغییر مقیاس یا مدوله کردن دامنه دیگری به کار

خاصیت مدولاسیون می نامند. در فصل های ۷ و ۸ خواهیم دید که این خاصیت چند کاربرد بسیار مهم دارد. برای روشن تر کردن معادله (۴-۷۰) و معرفی کاربردهای مورد بحث در فصل های بعد، چند مثال در نظر می گیریم.

مثال ۴-۲۱

فرض کنید $s(t)$ سیگنالی با طیف $S(j\omega)$ شکل ۴-۲۳ (الف) است. همچنین سیگنال زیر را در نظر بگیرید

$$p(t) = \cos \omega_1 t$$

بنابراین

$$P(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_1) + \pi\delta(\omega + \omega_1)$$

طیف $R(j\omega)$ در شکل ۴-۲۳ (ب) نشان داده شده است. طیف $r(t) = s(t)p(t)$ با استفاده از معادله (۴-۷۰)

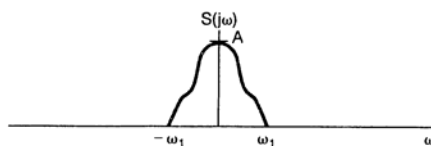
به شکل زیرست

$$R(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S(j\omega) * P(j\omega)$$

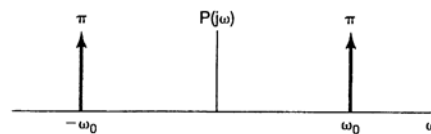
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S(j(\omega - \omega_1)) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S(j(\omega + \omega_1)) \quad (۴-۷۱)$$

که طیف آن در شکل ۴-۲۳ (ج) رسم شده است. در این شکل فرض کرده ایم، $\omega_1 \gg \omega_0$ تا دو قسمت غیر صفر

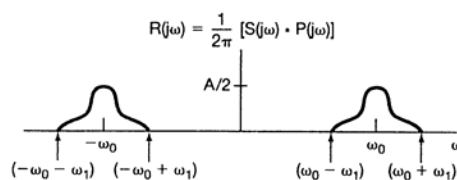
روی هم نیفتند. پس طیف $r(t)$ از مجموع دو گونه جابجا شده و تغییر مقیاس یافته $S(j\omega)$ است.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۴-۲۳: استفاده از خاصیت ضرب در مثال ۴-۲۱ (الف) تبدیل فوریه سیگنال $S(t)$ ؛ (ب) تبدیل فوریه $p(t) = \cos \omega_0 t$ ؛

(ج) تبدیل فوریه $r(t) = s(t)p(t)$

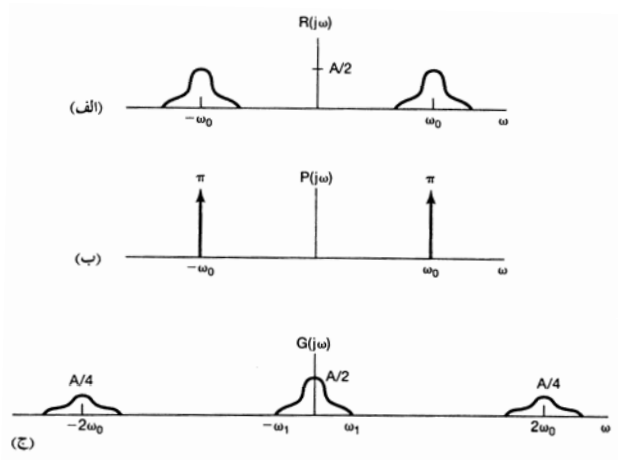
سیگنال سینوسی از بین نمی رود. بلکه تنها به فرکانس بالاتری منتقل می شود. این مسئله اساس سیستم های مدولاسیون دامنه سینوسی را نشان می دهد. در مثال بعد روش بازیابی سیگنال $s(t)$ از سیگنال مدوله شده $r(t)$ را به اختصار بررسی می کنیم.

مثال ۴-۲۲

$r(t)$ به دست آمده در مثال ۴-۲۱ را در نظر گرفته، فرض کنید

$$g(t) = r(t)p(t)$$

که باز هم $G(j\omega), P(j\omega), R(j\omega), p(t) = \cos \omega_c t$ در شکل ۴-۲۴ رسم شده اند. با توجه به شکل ۴-۲۴ (ج) و خطی بودن تبدیل فوریه، می توان دید که $g(t)$ مجموع $s(t)$ و سیگنال دیگری است که طیف آن در فرکانس های بالا (حول $\pm 2\omega_c$) غیر صفرست. حال سیگنال $g(t)$ را به عنوان ورودی به یک سیستم LIT اعمال می کنیم که پاسخ فرکانسی آن $H(j\omega)$ ، در فرکانس های پایین (به عنوان مثال $|\omega| \ll \omega_c$ ثابت و در فرکانس های بالا $|\omega| \gg \omega_c$ صفرست. طیف خروجی این سیستم $H(j\omega)G(j\omega)$ است، که به دلیل این انتخاب خاص $H(j\omega)$ ، مشابه تغییر مقیاس یافته $s(j\omega)$ است. پس خروجی صورت تغییر مقیاس یافته $s(t)$ است. در فصل ۷، در بررسی مبانی مدولاسیون دامنه این ایده ها را تعمیم می دهیم.



شکل ۴-۲۴: طیف سیگنال های مثال ۴-۲۲: (الف) $R(j\omega)$ (ب) $P(j\omega)$ (ج) $G(j\omega)$

یک مثال دیگر از کاربرد خاصیت ضرب تبدیل فوریه، در یافتن تبدیل فوریه سیگنال زیر بروز می کند

$$x(t) = \frac{\sin(\tau) \sin(\tau/\gamma)}{\pi \tau^2}$$

کلید کار تشخیص این نکته است که $x(t)$ حاصل ضرب دو تابع سینک است

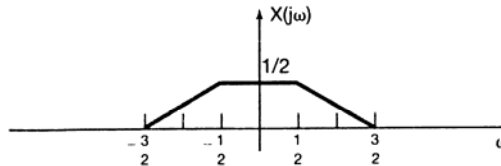
$$x(t) = \pi \left(\frac{\sin(\tau)}{\pi \tau} \right) \left(\frac{\sin(\tau/\gamma)}{\pi \tau} \right)$$

با اعمال خاصیت ضرب تبدیل فوریه به دست می آوریم

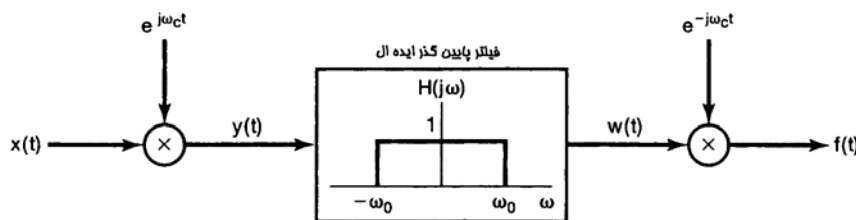
$$X(j\omega) = \frac{1}{\gamma} \mathcal{F} \left\{ \frac{\sin(\tau)}{\pi \tau} \right\} * \mathcal{F} \left\{ \frac{\sin(\tau/\gamma)}{\pi \tau} \right\}$$

با توجه به این که تبدیل فوریه هر تابع سینک یک پالس مستطیلی است، می توانیم با کانولوشن دو پالس تابع

$X(j\omega)$ شکل ۴-۲۵ را بیابیم.



شکل ۴-۲۵: تبدیل فوریه $x(t)$ مثال ۴-۲۳



شکل ۴-۲۶: تحقق فیلتر میان گذر با استفاده از مدولاسیون دامنه با حامل نمایی مختلط

۴-۵-۱ فیلتر فرکانس گزین با فرکانس مرکزی متغیر

چنانچه از مثال های ۴-۲۱ و ۴-۲۲ برمی آید، و در فصل ۸ به تفصیل بررسی خواهد شد، یکی از مهمترین کاربردهای خاصیت ضرب مدولاسیون دامنه در سیستم های مخابراتی است. کاربرد مهم دیگر ساختن فیلتر میانگذر فرکانس گزین با فرکانس مرکزی تنظیم پذیری است که بتوان آن را با یک دکمه چرخان ساده تنظیم کرد. در فیلترهای میانگذر ساخته شده با عناصری چون مقاومت، آب امپ، و خازن، فرکانس مرکزی به مقدار چند عنصر بستگی دارد و برای تغییر آن باید همه آن ها را به طور همزمان و به نحو مناسب تغییر داد. این کار از ساختن فیلتری با مشخصه ثابت

مناسب طیف سیگنال، با استفاده از اصول مدولاسیون دامنه سینوسی است.

برای مثال سیستم شکل ۲۶- را در نظر بگیرید. در اینجا سیگنال ورودی $x(t)$ در سیگنال نمایی مختلط $e^{j\omega_c t}$ ضرب می شود. شکل ۲۷-۴ طیف سیگنال های $f(t), w(t), y(t), x(t)$ را نشان می دهد. از خاصیت ضرب یا جابه جایی فرکانسی نتیجه می گیریم که تبدیل فوریه $y(t) = e^{j\omega_c t} x(t)$ عبارت است از

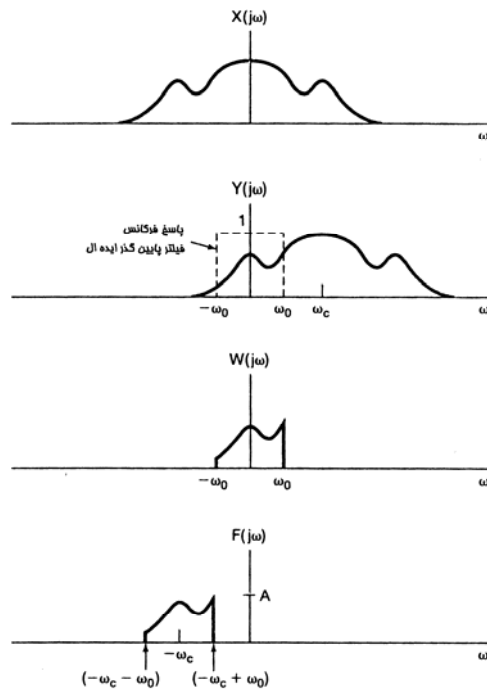
$$Y(j\omega) = \delta(\omega - \omega_c) * X(j\omega) = X(j(\omega - \omega_c))$$

پس $Y(j\omega)$ یا $X(j\omega)$ جابجا شده به سمت راست (به اندازه ω_c) برابرست و فرکانس های حول $\omega = \omega_c$ طیف $X(j\omega)$ به باند عبور فیلتر پایین گذر منتقل می شود. همچنین تبدیل فوریه $f(t) = e^{-j\omega_c t} w(t)$ عبارت است از

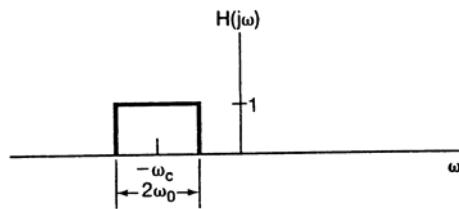
$$F(j\omega) = W(j(\omega + \omega_c))$$

پس تبدیل فوریه $F(j\omega)$ همان $W(j\omega)$ است که به اندازه ω_c به سمت چپ جابجا شده باشد. شکل ۲۷-۴ نشان می دهد که سیستم شکل ۲۶-۴ معادل یک فیلتر میانگذر ایده آل با فرکانس مرکزی $-\omega_c$ و پهنای باند $2\omega_c$ (فیلتر شکل ۲۸-۴) می باشد. با تغییر فرکانس ω_c نوسان ساز نمایی، فرکانس مرکزی فیلتر میانگذر تغییر می کند.

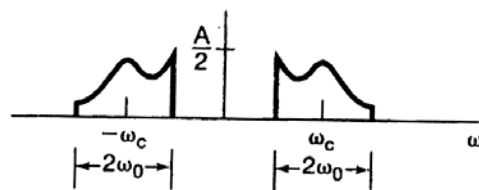
در سیستم شکل ۲۶-۴ اگر $x(t)$ حقیقی باشد، سیگنال های $f(t), w(t), y(t)$ همگی مختلط اند. اگر تنها قسمت حقیقی $f(t)$ را نگه داریم، طیف حاصل مطابق شکل ۲۹-۴ بوده، فیلتر میانگذر معادل شکل ۳۰-۴ باندهای فرکانسی حول ω_c و $-\omega_c$ را می گذراند. تحت شرایط خاصی برای تحقق این سیستم می توان به جای مدولاسیون با سیگنال نمایی مختلط از مدولاسیون سینوسی استفاده کرد. مسئله ۴-۴۶ به این بررسی اختصاص دارد.



شکل ۴-۲۷: طیف سیگنال های سیستم شکل ۴-۲۶



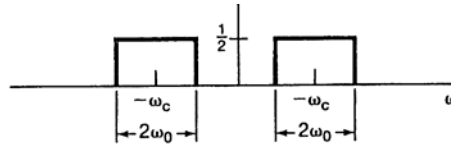
شکل ۴-۲۸: فیلتر میان گذر معادل سیستم شکل ۴-۲۶



شکل ۴-۲۹: طیف $\Re\{f(t)\}$ مربوط به شکل ۲-۲۶

جدول ۴-۱ خواص تبدیل فوریه

بخش	خاصیت	سیگنال نامتناوب	تبدیل فوریه
		$x(t)$	$X(j\omega)$
		$y(t)$	$Y(j\omega)$
۱-۳-۴	خطی بودن	$ax(t) + by(t)$	$aX(j\omega) + bY(j\omega)$
۲-۳-۴	جابجایی زمانی	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$
۶-۳-۴	جابجایی فرکانسی	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(j(\omega - \omega_0))$
۵-۳-۴	مزدوج گیری	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
۵-۳-۴	وارونی زمان	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
۵-۳-۴	تغییر مقیاس زمانی و فرکانسی	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
۴-۴	کانولوشن	$x(t) * y(t)$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
۵-۴	ضرب	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{j\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$
۴-۳-۴	مشتق گیری زمانی	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(j\omega)$
۴-۳-۴	انتگرال گیری	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(\cdot)\delta(\omega)$
۶-۳-۴	مشتق گیری فرکانسی	$tx(t)$	$j \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$
۳-۳-۴	تقارن مزدوج سیگنال های حقیقی	$x(t)$ حقیقی	$X(j\omega) = X^*(-j\omega)$ $\Re\{X(j\omega)\} = \Re\{X(-j\omega)\}$
۳-۳-۴	تقارن سیگنال های زوج	$x(t)$ حقیقی و زوج	$X(j\omega)$ حقیقی و زوج
۳-۳-۴	تقارن سیگنال های فرد	$x(t)$ حقیقی و فرد	$X(j\omega)$ موهومی خالص و فرد
۳-۳-۴	تجزیه زوج فرد	$x(t)$ حقیقی، $x_e(t) = \Re\{x(t)\}$	$\Re\{X(j\omega)\}$
	سیگنال های حقیقی	$x(t)$ حقیقی، $x_o(t) = \Im\{x(t)\}$	$\Im\{X(j\omega)\}$
۷-۳-۴	رابطهٔ پارسوال برای سیگنال های نامتناوب		
$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) ^2 dt = \frac{1}{j\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) ^2 d\omega$			



شکل ۴-۳: فیلتر میان گذر معادل برای $\Re\{f(t)\}$ شکل ۴-۲۹

۴-۶ جدول های خواص فوریه و زوج های تبدیل فوریه

در بخش های قبل و بعضی خواص مهم تبدیل فوریه را در نظر گرفتیم، و بعضی دیگر را در مسائل آخر فصل در نظر خواهیم گرفت. این خواص در جدول ۴-۱ خلاصه شده اند. در این جدول بخشی که هر خاصیت در آن مورد بحث قرار گرفته نیز درج شده است.

در جدول ۴-۲ فهرستی از زوج های تبدیل فوریه مهم تدارک دیده ایم. هنگام به کار بردن تحلیل فوریه در مطالعه سیگنال ها و سیستم ها مکرراً با این زوج ها مواجه خواهیم شد. تمام زوج های تبدیل فوریه جدول، به جز آخری، در مثال های بخش های پیش مورد استفاده قرار گرفته اند، زوج آخری در مسئله ۴-۴۰ در نظر گرفته شده است. بعضی از سیگنال های جدول ۴-۲ متناوب اند، و ضرائب سری فوریه آن ها نیز در جدول داده شده است.

۴-۷ سیستم های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرائب ثابت

همانطور که در چند جا گفته ایم یک دسته مهم از سیستم های **LIT** آن هایی هستند که ورودی و خروجی شان معادله دیفرانسیلی به شکل زیر را ارضا می کنند

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (۷۲-۴)$$

در این بخش مسئله یافتن پاسخ فرکانسی این سیستم های **LIT** را بررسی می کنیم. در این بحث فرض می کنیم سیستم پایدارست، بنابراین پاسخ فرکانسی آن وجود دارد.

برای یافتن پاسخ فرکانسی یک سیستم توصیف شده با معادله دیفرانسیلی شبیه معادله (۷۲-۴) دو روش نزدیک به هم وجود دارد. روش اول بر این اساس است که سیگنال های نمایی مختلط توابع ویژه سیستم های **LIT** هستند، این

روش را در بخش ۳-۱۰ برای تحلیل چند فیلتر ساده غیر ایده آل به کار بستیم. مشخصاً دیدیم که به ازای ورودی $x(t) = e^{j\omega t}$ ، خروجی به صورت $y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$ است. با گذاشتن این ها در معادله دیفرانسیل

(۷۲-۴) و انجام عملیات جبری لازم می توانیم $H(j\omega)$ را بیابیم. در این بخش روش دیگری برای رسیدن به این

جواب را دنبال می کنیم، در این روش از خاصیت مشتق گیری تبدیل فوریه، معادله (۴-۳۱)، استفاده می کنیم.

یک سیستم **LIT** در نظر بگیرید که با معادله (۷۲-۴) توصیف شده باشد. از خاصیت کانولوشن می دانیم که

ضرایب سری فوریه (در صورت متناوب بودن)	تبدیل فوریه	سیگنال
a_k	$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ $k \neq 0, a_k = 1$	$\frac{1}{T} \delta(\omega - \omega_0)$	$e^{j\omega_0 t}$
$\omega_0 = \omega_1 - \omega_2 = \frac{2\pi}{T}$ $k \neq -1, k \neq 1, a_k = 1$	$\frac{1}{T} [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_2)]$	$\cos \omega_1 t$
$\omega_0 = \omega_1 - \omega_2 = \frac{2\pi}{T}$ $k \neq -1, k \neq 1, a_k = 1$	$\frac{1}{T} [\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega + \omega_2)]$	$\sin \omega_1 t$
$k \neq 0, a_k = 1, \omega_0 = 1$ این نمایش سری فوریه به ازای هر T دلخواهی صادق است	$\frac{1}{T} \delta(\omega)$	$x(t) = 1$
$\frac{\omega_0 T}{\pi} \operatorname{sinc} \left(\frac{k\omega_0 T}{\pi} \right) = \frac{\sin k\omega_0 T}{k\pi}$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin k\omega_0 T}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$	موج مربعی متناوب $x(t) = \begin{cases} 1, & t < T_1 \\ 0, & T_1 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$ و $x(t) = x(t + T)$
$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$	$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T})$	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$
—	$\frac{\sin \omega T_1}{\omega}$	$x(t) = \begin{cases} 1, & t < T_1 \\ 0, & t \geq T_1 \end{cases}$
—	$x(j\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \leq W \\ 0, & \omega > W \end{cases}$	$\frac{\sin Wt}{\pi t}$
	1	$\delta(t)$
	$\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$	$u(t)$
	$e^{-j\omega t_0}$	$\delta(t - t_0)$
	$\frac{1}{(a + j\omega)^1}$	$\Re\{a\} > 0, e^{-at} u(t)$
	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t)$ $\Re\{a\} > 0$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \quad (73-4)$$

در معادله فوق $X(j\omega)$ ، $Y(j\omega)$ و $H(j\omega)$ به ترتیب تبدیل فوریه ورودی $x(t)$ ، خروجی $y(t)$ و پاسخ ضریب $h(t)$ هستند. حال از دو طرف معادله (72-4) تبدیل فوریه می گیریم

$$\mathcal{F} \left\{ \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right\} = \mathcal{F} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right\} \quad (74-4)$$

با توجه به خصیت خطی بودن، معادله (74-4) داریم

$$\sum_{k=0}^N a_k \mathcal{F} \left\{ \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right\} = \sum_{k=0}^M b_k \mathcal{F} \left\{ \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right\} \quad (75-4)$$

و با توجه به خاصیت مشتق گیری، معادله (75-4)

$$\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

یا

$$Y(j\omega) [\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k] = X(j\omega) [\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k]$$

بنابراین طبق معادله (73-4) داریم

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k} \quad (76-4)$$

این معادله نشان می دهد که $H(j\omega)$ یک تابع گویاست، یعنی نسبت دو چند جمله ای بر حسب $(j\omega)$ است. ضرایب چند جمله ای صورت همان ضرایب طرف راست معادله (72-4)، و ضرایب چند جمله ای مخرج همان ضرایب طرف چپ معادله (72-4) هستند. بنابراین پاسخ فرکانسی سیستم *LIT* توصیف شده با معادله (72-4) را می توان با تأمل در معادله (72-4) به دست آورد.

مثال ۲۴-۴

سیستم *LIT* پایداری با معادله دیفرانسیل زیر توصیف شده است

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t) \quad (77-4)$$

که در آن $a > 0$ با توجه به معادله (76-4) پاسخ فرکانسی عبارت است از

$$H(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega} \quad (78-4)$$

در مقایسه این نتیجه با نتیجه مثال ۴-۱ می بینیم که معادله (78-4) تبدیل فوریه $e^{-at} u(t)$ است. پس پاسخ ضریب سیستم عبارت است از

$$h(t) = e^{-at} u(t)$$

سیستم LIT پایدار مشخص شده با معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

با توجه به معادله (۴-۷۶)، پاسخ فرکانسی این سیستم عبارت است از

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega) + 2}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 4} \quad (۴-۷۹)$$

برای به دست آوردن پاسخ ضربه این سیستم باید از $H(j\omega)$ عکس تبدیل فوریه بگیریم. برای این منظور می توان $H(j\omega)$ را به کسرهای جزئی بسط داد. این روش در مثال ۴-۱۹ به کار برده شد و در پیوست الف به تفصیل بررسی شده است (مثال الف-۱ را ببینید. در این مثال محاسبات بسط به کسرهای جزئی معادله (۴-۷۹) با تمام جزئیات بیان شده است). به عنوان گام اول مخرج طرف راست معادله (۴-۷۹) را به حاصلضرب جملاتی با مرتبه کمتر تجزیه می کنیم

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega + 2)}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)} \quad (۴-۸۰)$$

سپس روش بسط به کسرهای جزئی را به کار برده، به دست می آوریم

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{(j\omega + 1)} + \frac{\frac{1}{2}}{(j\omega + 2)}$$

عکس تبدیل فوریه هر جمله را می توان با توجه به مثال ۴-۲۴ یافت، نتیجه به صورت زیرست

$$h(t) = \frac{1}{2} e^{-t} u(t) + \frac{1}{2} e^{-2t} u(t)$$

روشی که در مثال ۴-۲۵ برای یافتن عکس تبدیل فوریه به کار رفت، به طور کلی عباراتی مفیدست که نسبت چند جمله هایی بر حسب $(j\omega)$ باشند. ابتدا از معادله (۴-۷۶) پاسخ فرکانسی سیستم توصیف شده با معادله دیفرانسیل خطی با ضرائب ثابت را می یابیم، سپس با بسط به کسرهای جزئی پایه فرکانسی را به مجموع جملاتی تبدیل می کنیم که عکس تبدیل فوریه هر یک را می توانیم با کمی تأمل به دست آوریم. به علاوه اگر $X(j\omega)$ ، یعنی تبدیل فوریه ورودی چنین سیستمی هم نسبت چند جمله ای هایی بر حسب $j\omega$ باشد، $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$ نیز همین طورست. در این صورت با همین روش می توان معادله دیفرانسیل را حل کردف یعنی پاسخ $y(t)$ را پیدا کرد. در مثال بعد این نکته را نشان می دهیم.

مثال ۴-۲۶

سیستم مثال ۴-۲۵ را با ورودی زیر در نظر بگیرید

$$x(t) = e^{-t} u(t)$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = \left[\frac{(j\omega + 2)}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)} \right] \left[\frac{1}{(j\omega + 1)} \right] \quad (۸۱-۴)$$

$$= \frac{(j\omega + 2)}{(j\omega + 1)^2(j\omega + 3)}$$

چنان که در پیوست گفته شده، در این حالت بسط به کسرهای جزیی شکل زیر را به خود می گیرد

$$Y(j\omega) = \frac{A_{11}}{j\omega + 1} + \frac{A_{12}}{(j\omega + 1)^2} + \frac{A_{13}}{j\omega + 3} \quad (۸۲-۴)$$

A_{11} ، A_{12} و A_{13} ثابت هایی هستند که باید تعیین شوند. در مثال الف ۲ پیوست، این $Y(j\omega)$ بسط داده شده است. مقادیر به دست آمده عبارت اند از

$$A_{11} = -\frac{1}{2}, A_{12} = \frac{1}{2}, A_{13} = \frac{1}{2}$$

پس

$$Y(j\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{j\omega + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{(j\omega + 1)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{j\omega + 3} \quad (۸۳-۴)$$

در اینجا هم عکس تبدیل فوریه هر جمله معادله (۸۳-۴) را می توان با کمی تأمل نوشت. جملات اول و سوم شبیه جملات به کار رفته در دو مثال قبل هستند، ولی عکس تبدیل جمله دوم را می توان از جدول ۴-۲، یا شبیه مثال ۴-۱۹ با به کرا بردن همزاد خاصیت مشتق گیری، معادله (۴۰-۴)، $1/(j\omega + 1)$ به دست آورد. عکس تبدیل فوریه معادله (۸۳-۴) به صورت زیرست

$$y(t) = \left[\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \right] u(t)$$

مثال های بالا نشان می دهند که چگونه روش های تحلیل فوریه مسائل مربوط به سیستم های LIT توصیف شده با معادلات دیفرانسیل را به معادلات جبری سر راستی تبدیل می کنند. این نکته مهم در چند مسئله انتهای فصل دنبال خواهد شد. همچنین (در فصل ۶) ساختار جبری تبدیل های گویایی را که در بررسی سیستم های LIT توصیف شده با معادلات دیفرانسیل با آن ها روبرو می شویم، کار تحلیل خواص حوزه زمان را ساده می کنند و به کمک آن ها می توان نسبت به مشخصات حوزه زمان و حوزه فرکانس این دسته مهم سیستم ها بینش گسترده ای کسب کرد.

۴-۸ خلاصه

در این فصل نمایش تبدیل فوریه سیگنال های پیوسته در زمان را پی ریختیم و بسیاری از خواص آن را که باعث ثمربخشی این تبدیل شده است بررسی کردیم. در حقیقت با نظر به سیگنال های نامتناوب به عنوان حد سیگنال متناوبی که دوره تناوبش به طور بیکران زیاد می شود، نمایش تبدیل فوریه سیگنال های نامتناوب را از نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب به دست آوردیم. سیگنال های متناوب را نیز با ضربه های واقع در فرکانس هارمونیکی آن سیگنال با تبدیل فوریه نمایش دادیم، مساحت هر ضربه با ضریب سری فوریه متناظرش برابر بود.

دهندف در این فصل بسیاری از این خواص را بررسی و اثبات کردیم. از میان آن ها دو خاصیت در مطالعه سیگنال ها و سیستم ها اهمیتی ویژه دارند. اولی خاصیت کانولوشن است که نتیجه مستقیم خاصیت تابع ویژه بودن نمایی های مختلط می باشد و به توصیف سیستم **LIT** با پاسخ فرکانسی می انجامد. این توصیف نقشی بنیادی در رهیافت پاسخ فرکانسی تحلیل سیستم های **LIT** دارد، رهیافتی که آن را در فصل های آتی پی خواهیم گرفت. خاصیت دوم تبدیل فوریه که از لحاظ کاربردی بسیار مهم است، خاصیت ضرب است که اساس تحلیل حوزه فرکانس سیستم های نمونه برداری و مدولاسیون را تشکیل می دهد. این سیستم ها را در فصل های ۷ و ۸ بررسی خواهیم کرد. همچنین دیدیم که ابزارهای تحلیل فوریه مخصوصاً برای بررسی سیستم های **LIT** توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرائب ثابت مناسب اند. دیدیم که پاسخ فرکانسی چنین سیستم هایی را می توان به طور نظر یافت و با روش بسط به کسرهای جزیی پاسخ ضربه آن ها را حساب کرد. در فصل های بعد خواهیم دید که ساختار جبری مناسب پاسخ فرکانسی این سیستم ها به ما بینش وسیعی در مورد مشخصات حوزه زمان و حوزه فرکانس این سیستم ها می دهد.

تبدیل فوریه گسسته در زمان

۴-۰ مقدمه

در فصل ۴ تبدیل فوریه پیوسته در زمان را معرفی کردیم و خواص متعددی برای آن برشمردیم که آن را به ابزاری ارزشمند در تحلیل و تفهیم خصوصیات سیگنال و سیستم مبدل می کرد. در این فصل کار پی ریزی ابزارهای تحلیل فوریه را با معرفی و بررسی تبدیل فوریه گسسته در زمان دنبال می کنیم. در بحث سری فوریه فصل ۳ باهت ها و خطوط یکسان تحلیل سیگنال های پیوسته و گسسته در زمان را دیدیم. البته تفاوت های مهمی نیز وجود داشت. مثلاً در بخش ۳-۶ دیدیم که نمایش سری فوریه یک سیگنال متناوب گسسته در زمان یک سری متناهی است. حال آنکه برای نمایش سیگنال متناوب پیوسته در زمان سری های نامتناهی به کار می آیند. در این فصل خواهیم دید که بین تبدیل فوریه گسسته در زمان و پیوسته در زمان نیز تفاوت هایی این چنین وجود دارد.

در این فصل از شباهت های تحلیل فوریه پیوسته در زمان و گسسته در زمان بهره می گیریم و راهبردی شبیه فصل ۴ را به کار می بریم. دقیق تر این که با تعمیم نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب شروع کرده ایم تبدیل فوریه سیگنال های نامتناوب را به دست می آوریم، سپس خواص و مشخصات تبدیل فوریه گسسته در زمان را به روشی موازی روش فصل ۴ بیان می کنیم. با این کار هم درکمان از مفاهیم اساسی تحلیل فوریه را تقویت می کنیم و هم تفاوت ها را به نحوی بارزتر آشکار می سازیم تا تمایز مشاخصات را عمیق تر بفهمیم.

۴-۱ نمایش سیگنال های نامتناوب: تبدیل فوریه گسسته در زمان

۴-۱-۱ پی ریزی تبدیل فوریه گسسته در زمان

دهای یک تابع پوش تصور کرد؛ با افزایش دوره تناوب، این فاصله نمونه ها کمتر می شود. این مسئله راهی برای نمایش سیگنال نامتناوب $x(t)$ پیش پایمان گذاشت. ابتدا سیگنال متناوب $\tilde{x}(t)$ را ساختیم که در یک دوره تناوب $x(t)$ برابر بود. با میل این دوره تناوب به بی نهایت، $\tilde{x}(t)$ در فاصله بزرگتری شبیه $x(t)$ می شد و نمایش سری فوریه $\tilde{x}(t)$ تبدیل فوریه $x(t)$ میل می کرد، در این بخش برای پی ریزی نمایش فوریه سیگنال های نامتناوب گسسته در زمان، روش مشابهی را دنبال می کنیم.

سیگنال نامتناوب دارای عمر محدود $x[n]$ را در نظر بگیرید. یعنی می توان دو عدد صحیح N_1 و N_2 یافت که در خارج فاصله $-N_1 \leq n \leq N_2$ داشته باشیم $x[n] = 0$ (الف) چنین سیگنالی را نشان می دهد. از این سیگنال نامتناوب می توان سیگنال متناوب $\tilde{x}[n]$ را به نحوی ساخت که مطابق شکل ۱-۴ (ب) در یک دوره تناوب برابر $x[n]$ باشد. هرچه دوره تناوب N را بزرگتر انتخاب کنیم، $\tilde{x}[n]$ در فاصله بزرگتری مانند $x[n]$ می شود. در حد $N \rightarrow \infty$ ، به ازای هر n محدود داریم $\tilde{x}[n] = x[n]$.

حال نمایش سری فوریه $\tilde{x}[n]$ را در نظر می گیریم. با توجه به معادلات (۳-۳) و (۳-۴) داریم

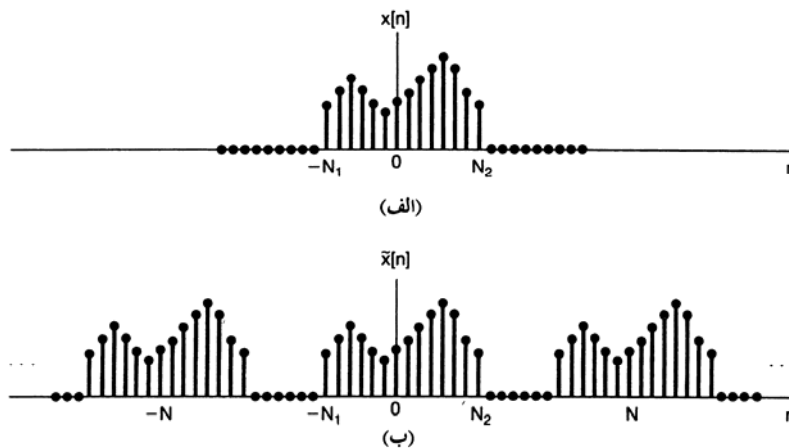
$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jK(\pi/N)n} \quad (1-4)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{x}[n] e^{-jK(\pi/N)n} \quad (2-4)$$

چون در تناوب مشتمل بر فاصله $-N_1 \leq n \leq N_2$ داریم $\tilde{x}[n] = x[n]$ ، بهترین فاصله جمع بندی معادله (۲-۴) را این دوره تناوب بگیریم. در این صورت می توانیم در جمع $x[n]$ را به جای $\tilde{x}[n]$ بگذاریم.

بنابراین

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} x[n] e^{-jK(\pi/N)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jK(\pi/N)n} \quad (3-4)$$



شکل ۱-۴: الف) سیگنال با عمر محدود $x[n]$ ؛ ب) سیگنال متناوب $\tilde{x}[n]$ که در یک تناوب با $x[n]$ برابر است.

صفرست. تابع زیر را تعریف می کنیم

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (4-4)$$

می بینیم که ضرائب a_k با نمونه های $X(e^{j\omega})$ متناسب اند، یعنی

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) \quad (5-4)$$

که در آن $\omega_0 = 2\pi/N$ فاصله نمونه های فرکانسی را نشان می دهد. ترکیب معادلات (4-1) و (4-2) نتیجه می دهد

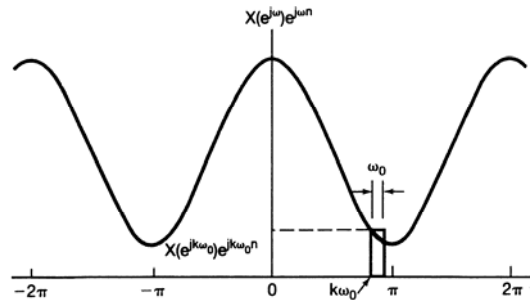
$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \quad (6-4)$$

چون $\omega_0 = 2\pi/N$ ، یا به طور معادل $1/N = \omega_0/2\pi$ ، معادله (6-4) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0 \quad (7-4)$$

مانند معادله (7-4)، با افزایش مقدار N مقدار ω_0 کم می شود و در $N \rightarrow \infty$ معادله (7-4) به انتگرال تبدیل می شود. برای روشن تر شدن مطلب $X(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$ شکل 4-2 را در نظر بگیرید. با توجه به معادله (4-4) $X(e^{j\omega})$ با دوره تناوب 2π متناوب و است و $e^{j\omega n}$ نیز همین طور. بنابراین حاصل ضرب $X(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$ هم متناوب است. مطابق شکل هر جمله معادله (7-4)، مساحت مستطیلی با عرض ω_0 و ارتفاع $X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}$ است. پس به ازای $\omega_0 \rightarrow 0$ جمع فوق به انتگرال تبدیل می شود. همچنین چون جمع روی N فاصله متوالی به عرض $\omega_0 = 2\pi/N$ بسته می شود، کل فاصله انتگرال گیری همیشه 2π است. بنابراین در $N \rightarrow \infty$ داریم $\tilde{x}[n] = x[n]$ و معادله (7-4) به صورت زیر در می آید

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$



شکل 4-2: تعبیر ترسیمی معادله (7-5)

طول 2π برگزید. اکنون زوج معادله زیر را داریم

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (8-4)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (9-4)$$

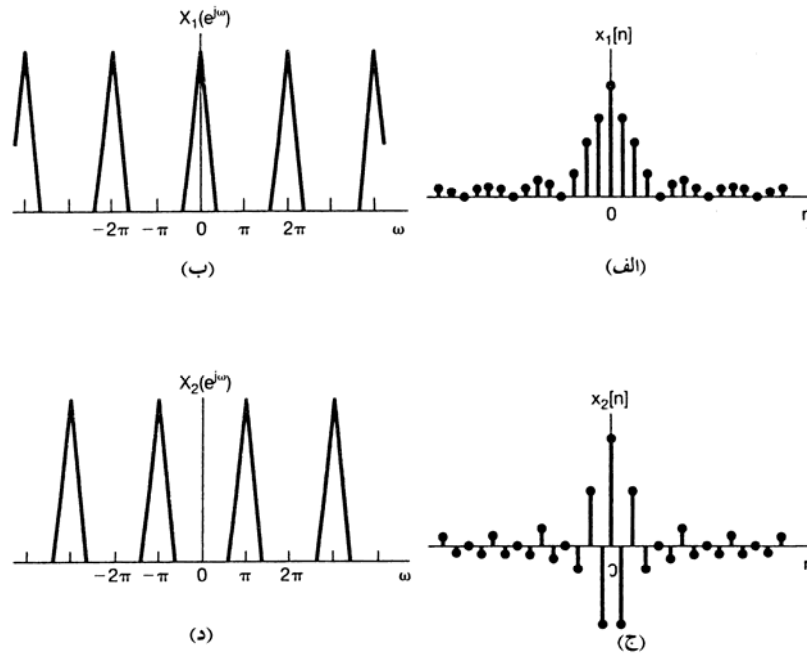
معادلات (8-4) و (9-4) همتهای گسسته در زمان معادلات (8-4) و (9-4) هستند. تابع $X(e^{j\omega})$ تبدیل فوریته گسسته در زمان و دو معادله فوق زوج تبدیل فوریته نام دارند. معادله (8-4) معادله ترکیب و معادله (9-4) معادله تجزیه است. روش به دست آوردن این معادلات نشان می دهد که چگونه می توان یک دنباله نامتناوب را ترکیب خطی دنباله های نمایی مختلط دانست. در حقیقت معادله ترکیب، $x[n]$ را به صورت ترکیب خطی دنباله های نمایی مختلط نشان می دهد. فاصله فرکانس هایشان بی نهایت کوچک و دامنه هایشان برابر $X(e^{j\omega}) (d\omega/2\pi)$ است. به همین دلیل $X(e^{j\omega})$ را مانند حالت پیوسته در زمان طیف $x[n]$ می نامند، زیرا اطلاعات مربوط به چگونگی ترکیب $x[n]$ از نمایی های مختلط با فرکانس های مختلف را دربر دارد.

همچنین توجه کنید که رهیافت بالا همانند حالت پیوسته در زمان رابطه مهمی را بین سری و تبدیل فوریته گسسته در زمان نشان می دهد. این رابطه این است که ضرائب a_n سیگنال متناوب $x[n]$ را می توان نمونه های هم فاصله تبدیل فوریته سیگنال نامتناوب $x[n]$ دانست، سیگنالی که در یک تناوب با $x[n]$ برابرست و در بقیه جاها صفرست. این مطلب در پردازش های واقعی سیگنال ها و تحلیل فوریته بسیار مهم است و در مسئله 4-41 بیشتر به آن خواهیم پرداخت.

همانطور که اشتقاق بالا نشان می دهد تبدیل فوریته گسسته در زمان شباهت های بسیاری با تبدیل فوریته پیوسته در زمان دارد. تفاوت های عمده این دو تبدیل متناوب بودن تبدیل گسسته در زمان $X(e^{j\omega})$ و محدود بودن فاصله انتگرال گیری در معادله ترکیب است. این دو تفاوت ناشی از واقعیتی است که تاکنون چندین بار آن را بیان کرده ایم: سیگنال های نمایی مختلط گسسته در زمانی که تفاوت فرکانس هایشان مضرب صحیحی از 2π است، با هم یکسان اند. در بخش 3-6 دیدیم که نتیجه این گزاره برای سیگنال های گسسته در زمان متناوب، متناوب بودن ضرایب فوریته و متناهی بودن نمایش سری فوریته است. نتیجه مشابه برای سیگنال های نامتناوب، متناوب بودن $X(e^{j\omega})$ (با دوره تناوب 2π). در بخش 3-3-1 یک نتیجه دیگر متناوب بودن $e^{j\omega n}$ به عنوان تابعی از ω را نیز دیدیم: $\omega = \omega + 2\pi$ و سیگنال یکسانی به دست می دهند. پس سیگنال های دارای فرکانس های نزدیک به این مقادیر، و دیگر مضارب زوج 2π ، سیگنال های فرکانس پایین محسوب می شوند. به نحوی مشابه، فرکانس های بالا در حالت گسسته در زمان، فرکانس های نزدیک به مضارب فرد 2π هستند. بنابراین سیگنال $x_1[n]$ شکل 3-4 (الف)، با تبدیل فوریته نشان داده شده در شکل 3-4 (ب) خیلی کندتر از سیگنال $x_2[n]$ شکل 3-4 (ج)، با تبدیل فوریته نشان داده شده

۴-۱-۲ مثال هایی از تبدیل فوریه گسسته در زمان

برای روشن تر کردن تبدیل فوریه گسسته در زمان چند مثال در نظر می گیریم.



شکل ۴-۳: الف) سیگنال گسسته در زمان $x_1[n]$ ؛ ب) تبدیل فوریه $x_1[n]$ ، توجه کنید که $X_1(e^{j\omega})$ در حوالی $\omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ متمرکز است؛ ج) سیگنال گسسته در زمان $x_2[n]$ ، توجه کنید که $X_2(e^{j\omega})$ در حوالی $\omega = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ متمرکز است

مثال ۴-۱

سیگنال زیر را در نظر بگیرید

$$x[n] = a^n u[n], |a| < 1$$

در این حالت

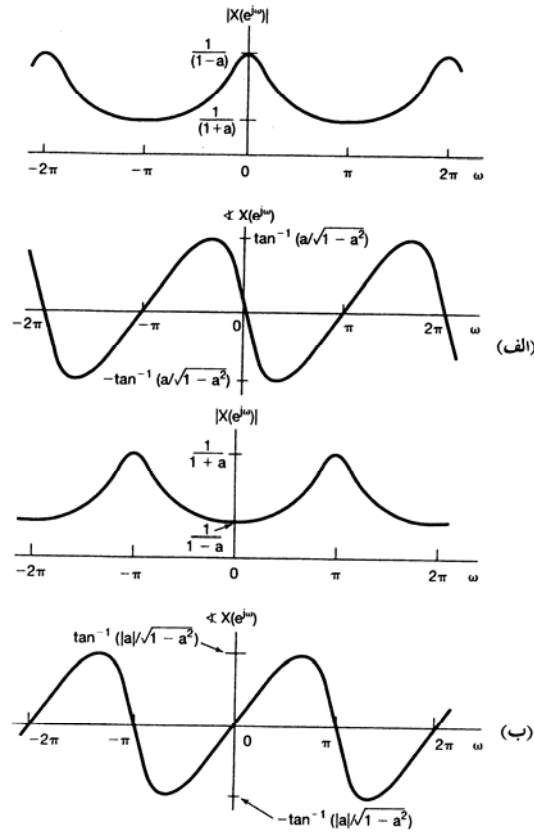
$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}} \end{aligned}$$

دامنه و فاز $X(e^{j\omega})$ به ازای $|a| > 0$ در شکل ۴-۵ الف) و به ازای $|a| < 0$ در شکل ۴-۵ ب) رسم شده است.

دقت کنید که همه این توابع با دوره تناوب 2π متناوب اند.

فرض کنید

$$x[n] = a^{|n|} u[n], |a| < 1$$



شکل ۴-۴: اندازه و فاز تبدیل فوریه مثال ۴-۱: الف) برای $a > 0$ و ب) برای $a < 0$

این سیگنال به ازای $|a| < 1$ در شکل ۴-۵ (الف) رسم شده است. تبیل فوریه آن را می توان به کمک معادله (۴-۹) به صورت زیر به دست آورد

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|} e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} + \sum_{n=-1}^{-\infty} a^{-n} e^{j\omega n} \end{aligned}$$

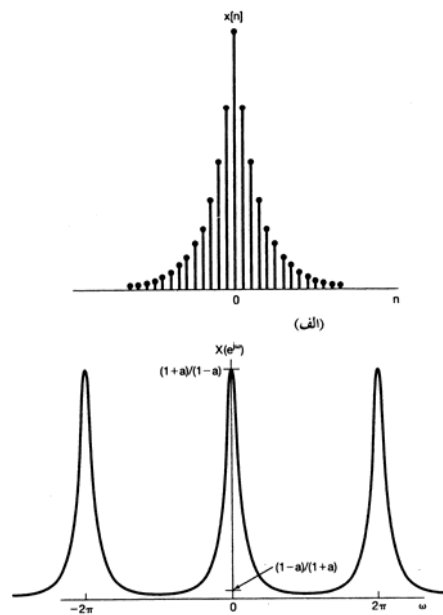
در جمع دوم، با تغییر متغیر $m = -n$ به دست می آوریم

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} (a e^{-j\omega})^n + \sum_{m=1}^{\infty} (a e^{j\omega})^m$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-a e^{-j\omega}} + \frac{a e^{j\omega}}{1-a e^{j\omega}}$$

$$= \frac{1-a^2}{1-\gamma a \cos \omega + a^2}$$

در این حالت $X(e^{j\omega})$ حقیقی است، و در شکل ۵-۵ (ب)، باز هم به ازای $1 > a > 0$ ، نشان داده شده است.



شکل ۵-۴: الف) سیگنال $x[n] = a^{|n|}$ مثال ۲-۴ و ب) تبدیل فوریه آن ($0 < a < 1$).

مثال ۳-۴

پالس مستطیلی زیر را در نظر بگیرید

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases} \quad (10-4)$$

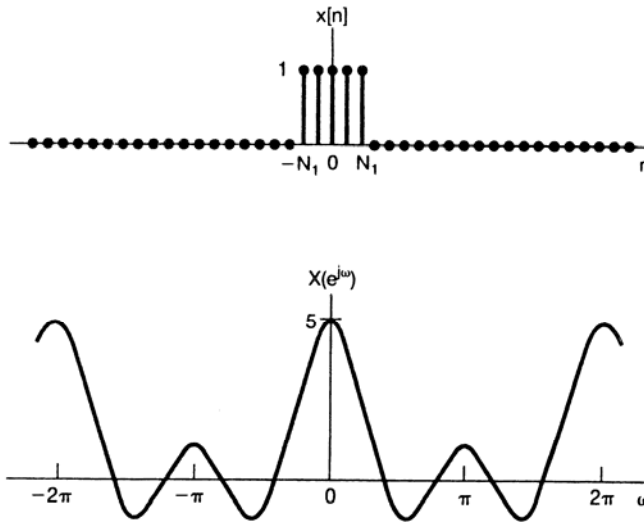
که در شکل ۶-۴ (الف) به ازای $N_1 = 2$ نشان داده شده است. در این حالت داریم

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} \quad (11-4)$$

با محاسباتی شبیه آنچه در یافتن معادله (۳-۱۰۴) مثال ۳-۱۲ به کار رفت، می توان نوشت

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\sin \omega(N_1 + \frac{1}{2})}{\sin(\omega/2)} \quad (12-4)$$

تابع سینک است که در تبدیل فوریه پالس مستطیلی پیوسته در زمان ظاهر شد (مثال ۴-۴ را ببینید). مهم ترین تفاوت این دو تابع این است که تابع (۴-۱۲) مثل تمام تبدیل های فوریه گسسته در زمان، با دوره تناوب 2π متناوب است.



شکل ۴-۶: الف) پالس مستطیلی مثال ۴-۳ به ازای $N_1 = 2$ و ب) تبدیل فوریه آن

۴-۱-۳ مسائل همگرایی تبدیل فوریه گسسته در زمان

گرچه استدلال ما در به دست آوردن تبدیل فوریه گسسته در زمان براساس $x[n]$ دلخواه، ولی با طول محدود بود، ولی معادلات (۴-۸) و (۴-۹) برای دسته وسیعی از سیگنال های دارای طول نامحدود نیز معتبرند (مانند سیگنال های مثال های ۴-۱ و ۴-۲). ولی در این حالت باید باز مسئله همگرایی جمع نامتناهی معادله (۴-۹) را در نظر بگیریم. شرایطی که $x[n]$ باید داشته باشد تا همگرایی این جمع تضمین شود، همتهای شرایط همگرایی تبدیل فوریه

پیوسته در زمان است. جمع معادله (۴-۹) همگراست اگر $x[n]$ مطلقاً جمع پذیر باشد، یعنی

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \quad (۴-۱۳)$$

یا انرژی سیگنال محدود باشد، یعنی

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty \quad (۴-۱۴)$$

در مورد معادله ترکیب (۴-۸) مسئله همگرایی وجود ندارد، زیرا انتگرال این معادله روی فاصله ای محدود محاسبه می شود. این وضعیت بسیار شبیه معادله ترکیب سری فوریه گسسته در زمان (۳-۹۴) است که جمعی متناهی است. اگر

سیگنال نامتناوب $x[n]$ را با انتگرالی از نمایی های مختلط، با فرکانس های واقع در فاصله $W \leq |\omega|$ تقریب

بزنیم، یعنی

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

به ازای $W = \pi$ خواهیم داشت $X[n] = x[n]$. یعنی همانطور که شکل ۳-۱۸ نشان می دهد، انتظار نداریم در محاسبات معادله ترکیب تبدیل فوریه گسسته در زمان پدیده گیبس را مشاهده کنیم. مثال زیر گویای این مطلب است.

مثال ۴-۴

فرض کنید $x[n]$ یک ضربه واحدست، یعنی

$$x[n] = \delta[n]$$

در این صورت می توان معادله تجزیه (۴-۹) را به راحتی حساب کرد، و به دست آورد

$$X(e^{j\omega}) = 1$$

به بیانی دیگر، درست مثال حالت پیوسته در زمان، تبدیل فویه ضربه واحد نمایشی دارد که تمام فرکانس ها در آن سهمی یکسان دارند. با به کار بردن معادله (۴-۱۵) برای این مثال به دست می آوریم

$$X[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin Wn}{\pi n} \quad (۴-۱۶)$$

در شکل ۴-۷ $X[n]$ به ازای چند مقدار W رسم شده است. می توان دید که با افزایش W فرکانس نوسانات تقریب نیز زیاد می شود، که مشابه حالت پیوسته در زمان است. ولی برخلاف حالت پیوسته در زمان، با افزایش W دامنه این نوسانات نسبت به $X[0]$ کم می شود و در حالت $W = \pi$ کاملاً از بین می روند.

۴-۲ تبدیل فوریه سیگنال های متناوب

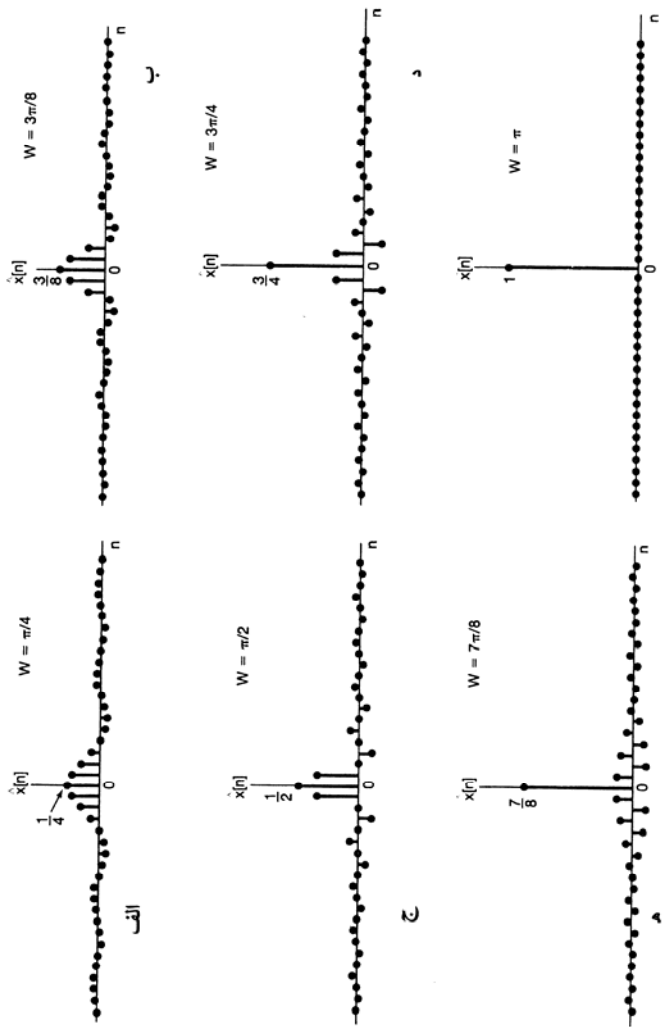
مثل حالت پیوسته در زمان می توان سیگنال های متناوب گسسته در زمان را در چارچوب تبدیل فوریه گسسته در زمان گنجانده، به این منظور باید تبدیل فوریه سیگنال های متناوب را قطار ضربه ای در حوزه فرکانس در نظر گرفت. برای به دست آوردن این نمایش سیگنال زیر را در نظر بگیرید

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}$$

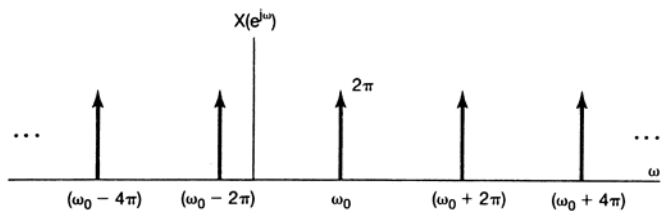
در حالت پیوسته در زمان دیدیم که تبدیل فوریه $e^{j\omega_0 n}$ یک ضربه در $\omega = \omega_0$ است. بنابراین احتمالاً در حالت گسسته در زمان هم باید برای سیگنال معادله (۴-۱۷) چنین انتظاری داشت. ولی تبدیل فوریه گسسته در زمان تابعی متناوب از ω ، با دوره تناوب 2π است. بنابراین تبدیل فوریه $x[n]$ معادله (۴-۱۷) باید ضربه هایی در $\omega_0 + 2\pi l$ و غیره باشد. در واقع تبدیل فوریه $x[n]$ قطار ضربه زیرست

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) \quad (۴-۱۸)$$

که در شکل ۴-۸ نشان داده شده است. برای امتحان درستی این عبارت، عکس تبدیل فوریه را به دست می آوریم. با گذاشتن معادله (۴-۱۸) در معادله ترکیب (۴-۸) به دست می آوریم



شکل ۴-۷: تقریب ضربه واحد به دست آمده در معادله ۴-۱۶ با استفاده از نمایی های مختلط واقع در فاصله فرکانسی $|\omega| \leq W$ (الف)؛ $W = \pi/4$ (ب)؛ $W = 3\pi/8$ (ج)؛ $W = \pi/2$ (د)؛ $W = 3\pi/4$ (هـ)؛ $W = 7\pi/8$ (و)؛ $W = \pi$ (ز). توجه کنید که به ازای $\hat{x}[n] = \delta[n]$ ، $W = \pi$.



شکل ۴-۸: تبدیل فوریه $x[n] = e^{j\omega_0 n}$

که ضربه واقع در $\omega_c + \gamma\pi T$ را شامل شود، خواهیم داشت

$$\frac{1}{\gamma\pi} \int \gamma\pi X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = e^{j(\omega_c + \gamma\pi T)n} = e^{j\omega_c n}$$

حال سیگنال متناوب $x[n]$ با دوره تناوب N و سری فوریه زیر را در نظر بگیرید

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\gamma\pi/N)n} \quad (19-4)$$

در این حالت تبدیل فوریه عبارت است از

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{\gamma\pi k}{N}\right) \quad (20-4)$$

پس تبدیل فوریه یک سیگنال متناوب را می توان مستقیماً از روی ضرائب فوریه اش به دست آورد.

برای نشان دادن درستی معادله (20-4) توجه کنید که $x[n]$ معادله (19-4) ترکیبی خطی از سیگنال هایی به

صورت معادله (17-4) هستند، پس تبدیل فوریه $x[n]$ باید ترکیبی خطی از تبدیل هایی به صورت معادله (18-5)

باشد. فرض کنید فاصله جمع معادله (19-4) را $k = 0, 1, \dots, N-1$ برمی گزینیم، پس

$$x[n] = a_0 + a_1 e^{j(\gamma\pi/N)n} + a_2 e^{j2(\gamma\pi/N)n} + \dots + a_{N-1} e^{j(N-1)(\gamma\pi/N)n} \quad (21-4)$$

پس $x[n]$ ترکیب خطی سیگنال هایی مانند سیگنال معادله (18-4)، با فرکانس های

$\omega_k = 0, \gamma\pi/N, 2\gamma\pi/N, \dots, (N-1)\gamma\pi/N$ است. تبدیل فوریه حاصل در شکل 9-4 تصویر شده

است. سیگنال ثابت $a_0 = a_0 e^{j0n}$ یک قطار ضربه متناوب، به صورت معادله (18-4) است، قطاری با $\omega_0 = 0$

و متشکل از ضربه هایی با اندازه $\gamma\pi a_0$. از فصل 4 به یاد داریم که ضرائب سری فوریه a_k با دوره تناوب N

متناوب اند، پس $\gamma\pi a_0 = \gamma\pi a_N = \gamma\pi a_{-N}$. شکل 9-5 (ب) تبدیل فوریه جمله دوم معادله (21-4) را

نشان می دهد، که در آن باز معادله (18-5) را به کرا برده ایم، ولی این بار برای $a_1 e^{j(\gamma\pi/N)n}$ ، و با توجه به این

که $\gamma\pi a_1 = \gamma\pi a_{N+1} = \gamma\pi a_{-N+1}$. به نحوی مشابه، شکل 9-4 (ج) جمله آخر را نشان می دهد. توجه

کنید که به خاطر متناوب بودن a_k می توان $X(e^{j\omega})$ را قطار ضربه ای تعبیر کرد که در مضارب صحیح فرکانس

پایه $\gamma\pi/N$ قرار دارد، و مساحت هر ضربه واحد در $\omega = \gamma\pi k/N$ برابر $\gamma\pi a_k$ است؛ معادله (20-4) نیز

دقیقاً همین را می گوید.

مثال 4-5

سیگنال متناوب زیر را در نظر بگیرید

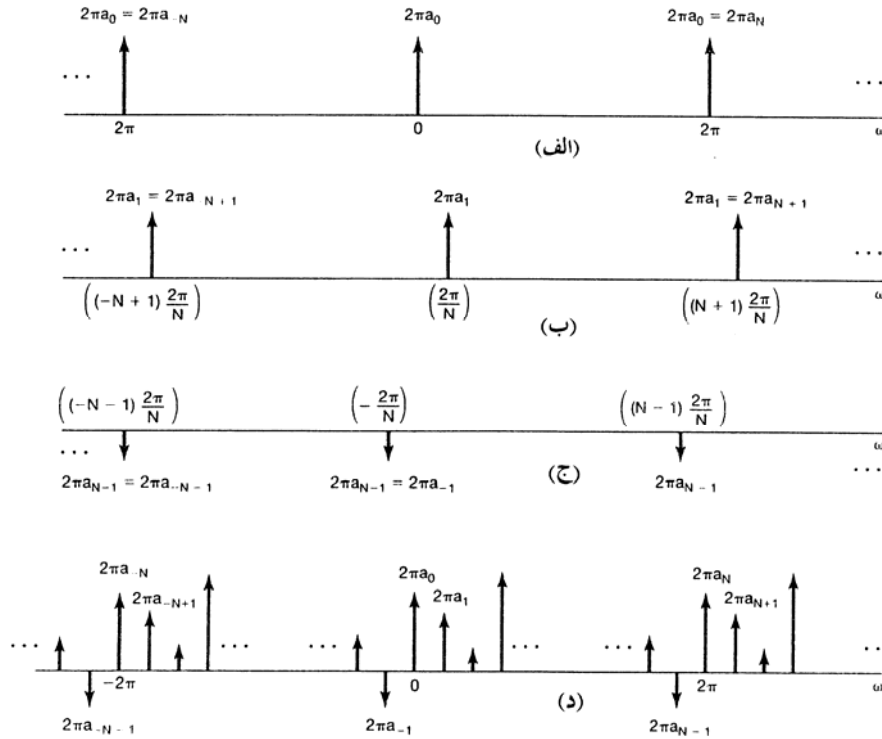
$$x[n] = \cos \omega_c n = \frac{1}{2} e^{j\omega_c n} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_c n}, \quad \omega_c = \frac{\gamma\pi}{2} \quad (22-4)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi \delta \left(\omega - \frac{2\pi k}{N} - 2\pi l \right) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi \delta \left(\omega + \frac{2\pi k}{N} - 2\pi l \right) \quad (۲۳-۴)$$

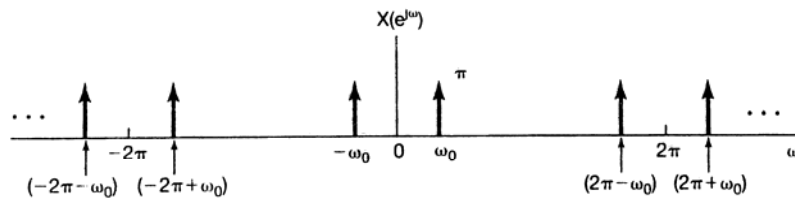
یعنی

$$X(e^{j\omega}) = \pi \delta \left(\omega - \frac{2\pi}{N} \right) + \pi \delta \left(\omega + \frac{2\pi}{N} \right), \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (۲۴-۴)$$

$X(e^{j\omega})$ مطابق شکل ۱۰-۴ با دوره تناوب 2π تکرار می شود.



شکل ۹-۴: تبدیل فوریه یک سیگنال متناوب گسسته در زمان: (الف) تبدیل فوریه جمله اول سمت راست معادله (۱۲-۴); (ب) تبدیل فوریه جمله دوم معادله (۲۱-۴); (ج) تبدیل فوریه جمله آخر معادله (۲۱-۴); (و) تبدیل فوریه $x[n]$ معادله (۲۱-۴).



شکل ۱۰-۴: تبدیل فوریه گسسته در زمان $x[n] = \cos \omega_0 n$

همتای گسسته در زمان قطار ضربه مثال ۴-۸، رشته زیرست

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN] \quad (25-4)$$

که در شکل ۴-۱۱ (الف) نشان داده شده است. ضرائب سری فوریه این سیگنال را می توان از معادله (۳-۹۵) به دست آورد

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi k n / N}$$

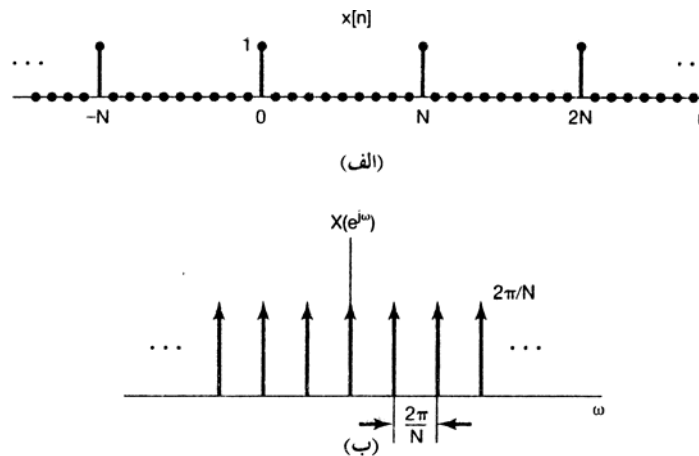
با انتخاب فاصله $0 \leq n \leq N-1$ برای جمع به دست می آوریم

$$a_k = \frac{1}{N} \quad (26-4)$$

به کمک معادلات (۴-۲۶) و (۴-۲۰) می توانیم تبدیل فوریه $x[n]$ را به صورت زیر بنویسیم

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \quad (27-4)$$

که در شکل ۴-۱۱ (ب) نشان داده شده است.



شکل ۴-۱۱: (الف) قطار ضربه گسسته در زمان؛ (ب) تبدیل فوریه آن

۳-۵ خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان

تبدیل فوریه گسسته در زمان هم مثال تبدیل فوریه پیوسته در زمان خواصی دارد که دانستن شان بینش ما نسبت به تبدیل را بیشتر می کند و غالباً در کاستن پیچیدگی های محاسبه تبدیل و عکس آن مفیدست. در این بخش و دو بخش بعد این خواص را بررسی کرده، در جدول ۴-۱ خلاصه فشرده ای از آن ها را ارائه می کنیم. با مقایسه این جدول و جدول ۴-۱ تصویر روشنی از شباهت ها و تفاوت های بین خواص تبدیل فوریه پیوسته و گسسته در زمان به دست می آوریم. اگر روش به دست آوردن خاصیت و تعبیر آن مانند حالت پیوسته در زمان باشد، تنها به بیان خاصیت اکتفا می کنیم. مانند بخش ۴-۶، عمده توجه خود را به تبدیل فوریه معطوف می کنیم. همچنین به خاطر رابطه نزدیک

۲ خلاصه کردیم و در بخش ۳-۷ به اختصار مورد بحث قرار دادیم. در مباحث زیر بهترست برای نشان دادن زوج سیگنال و تبدیل فوریه نمادهایی مشابه بخش ۴-۳ به کار ببریم. یعنی

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$$

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\}$$

$$x[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

۴-۳-۱ متناوب بودن تبدیل فوریه گسسته در زمان

همانطور که در بخش ۴-۱ گفتیم، تبدیل فوریه همیشه تابعی متناوب از ω با دوره تناوب 2π است. یعنی

$$X(e^{j(\omega + 2\pi)}) = X(e^{j\omega}) \quad (28-4)$$

تبدیل فوریه پیوسته در زمان چنین خاصیتی ندارد و در حالت کلی متناوب نیست.

۴-۳-۲ خطی بودن تبدیل فوریه

اگر

$$x_1[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_1(e^{j\omega})$$

$$x_2[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_2(e^{j\omega})$$

آنگاه

$$ax_1[n] + bx_2[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}) \quad (29-4)$$

۴-۳-۳ جابجایی زمانی و فرکانسی

اگر

$$x[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

آنگاه

$$x[n - n_0] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega}) \quad (30-4)$$

و

$$e^{j\omega n_0} x[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(e^{j(\omega - \omega_0)}) \quad (31-4)$$

معادله (۳۰-۴) را می توان با گذاشتن $x[n - n_0]$ در معادله تجزیه (۴-۹) به دست آورد؛ برای به دست آوردن

مطالعه (۳۱-۴) $(e^{j(\omega - \omega_0)})$ را در معادله ترکیب (۴-۸) قرار می دهیم.

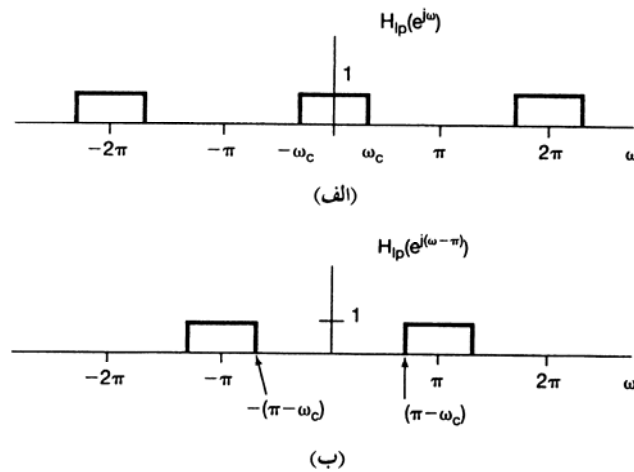
بالاگذر گسسته در زمان به دست می دهد. این مطلب در مثال زیر تشریح شده است.

مثال ۷-۴

شکل ۱۲-۴ (الف) پاسخ فرکانسی $H_{lp}(e^{j\omega})$ یک فیلتر پایین گذر با فرکانس قطع ω_c را نشان می دهد. شکل ۱۲-۴ (ب) $H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})$ را نشان می دهد که پاسخ فرکانسی $H_{lp}(e^{j\omega})$ جابجا شده به اندازه π است. چون فرکانس های بالای گسسته در زمان نزدیک π (و مضارب فرد π) قرار دارند، فیلتر شکل ۱۲-۴ (ب) یک فیلتر بالا گذر با فرکانس قطع $\pi - \omega_c$ است. یعنی

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) \quad (۳۲-۴)$$

چنانچه معادله (۱۲۲-۳) نشان می دهد، و در بخش ۴-۴ بیان خواهیم کرد، پاسخ فرکانسی یک سیستم LIT تبدیل فوریه پاسخ ضربه آن سیستم است.



شکل ۱۲-۴: (الف) پاسخ فرکانسی یک فیلتر پایین گذر؛ (ب) پاسخ فرکانسی یک فیلتر بالاگذر که با جابجایی فرکانسی پاسخ فرکانسی الف) به اندازه π به دست آمده است.

پس اگر $h_{lp}[n]$ ، $h_{hp}[n]$ به ترتیب پاسخ ضربه های فیلترهای پایین گذر و بالا گذر شکل ۱۲-۴ باشند، معادله (۳۲-۵) و خاصیت جابجایی فرکانسی نشان می دهند که

$$h_{hp}[n] = e^{j\pi n} h_{lp}[n] \quad (۳۳-۴)$$

$$= (-1)^n h_{lp}[n] \quad (۳۴-۴)$$

اگر

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$$

آنگاه

$$x^*[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(e^{j\omega}) \quad (35-4)$$

همچنین اگر $x[n]$ حقیقی باشد، تبدیل فوریه آن تقارن مزدوج دارد، یعنی

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \quad (x[n] \text{ حقیقی}) \quad (36-4)$$

که از آن نتیجه می گیریم $\Re\{X(e^{j\omega})\}$ تابعی زوج از ω و $\Im\{X(e^{j\omega})\}$ تابعی فرد از ω است. به نحوی مشابه اندازه $X(e^{j\omega})$ تابعی زوج و زاویه فاز آن تابعی فردست. همچنین

$$\mathcal{E}\{x[n]\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Re\{X(e^{j\omega})\}$$

و

$$\mathcal{O}\{x[n]\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Im\{X(e^{j\omega})\}$$

که در آن \mathcal{E} و \mathcal{O} به ترتیب بخش های زوج و فرد $x[n]$ حقیقی و زوج باشد، تبدیل فوریه آن هم زوج و حقیقی است. در مثال ۲-۴ این تقارن برای $x[n] = a^n$ نشان داده شد.

۴-۳-۵ تفاضل گیری و جمع انباره ای

در این زیر بخش همتای گسسته در زمان انتگرال گیری جمع انباره ای- و مشتق گیری- تفاضل اول- را بررسی می کنیم و $x[n]$ را سیگنالی با تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$ فرض کنید. با توجه به خواص خطی بودن و جابجایی زمانی، تبدیل فوریه تفاضل اول $x[n] - x[n-1]$ عبارت است از

$$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega}) \quad (37-4)$$

حال سیگنال زیر را در نظر بگیرید

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m]$$

چون $y[n] - y[n-1] = x[n]$ ، ممکن است نتیجه بگیرید که تبدیل $y[n]$ از تقسیم $X(e^{j\omega})$ بر $(1 - e^{-j\omega})$ به دست می آید. این مطلب تا حدی درست است، ولی مثل خاصیت انتگرال گیری پیوسته در

زمان، یعنی معادله (۴-۳۲)، به این سادگی هم نیست. رابطه دقیق عبارت است از

$$\sum_{m=-\infty}^n x[m] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \pi k) \quad (39-4)$$

مثال ۴-۸

بیا باید تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$ پله واحد $x[n] = u[n]$ را با استفاده از خاصیت جمع انباره ای و رابطه زیر به دست آوریم

$$g[n] = \delta[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(e^{j\omega}) = 1$$

از بخش ۱-۴-۱ به یاد داریم که پله واحد جمع انباره ای ضربه واحدست. یعنی

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g[m]$$

با گرفتن تبدیل فوریه دو طرف و استفاده از خاصیت جمع انباره ای به دست می آوریم

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} G(e^{j\omega}) + \pi G(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \\ &= \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \end{aligned}$$

۴-۳-۶ وارونگی زمانی

$x[n]$ را سیگنالی با طیف $X(e^{j\omega})$ فرض کرده، تبدیل $y[n] = x[-n]$ را در نظر بگیرید. با توجه به

معادله (۴-۹) داریم

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] e^{-j\omega n} \quad (4-40)$$

با گذاشتن $m = -n$ در معادله (۴-۵) به دست می آوریم

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j\omega m} X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) \quad (4-41)$$

یعنی

$$x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{-j\omega}) \quad (4-42)$$

۴-۳-۷ انبساط زمانی

تغییر مقیاس زمانی و فرکانسی به علت ماهیت ناپیوسته شاخص زمان در سیگنال های گسسته با همتهای پیوسته در زمان خود تفاوت دارند. در بخش ۴-۳-۵ خاصیت زیر را برای حالت پیوسته در زمان به دست آوردیم

$$x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right) \quad (4-43)$$

ولی در تعریف $x[an]$ به ازای a غیر صحیح دچار اشکال می شویم. پس نمی توانیم با انتخاب $a \ll 1$ سیگنال را کند کنیم، از طرفی اگر a را عدد صحیحی غیر از ± 1 برگزینیم، مثلاً $x[2n]$ را در نظر بگیریم، سیگنال تنها سریع نمی شود. چون n تنها مقادیر صحیح را به خود می گیرد، سیگنال $x[2n]$ تنها نمونه های زوج $x[n]$ را در بردارد.

البته می توان نتیجه ای به دست آورد که با معادله (۴-۴۳) شباهت داشته باشد. k را عددی صحیح فرض کرده،

سیگنال زیر را تعریف کنید

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n] & \text{اگر مضارب } k \text{ باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (4-44)$$

در شکل ۴-۱۳ $x_{(k)}[n]$ را به ازای $k = 3$ از $x[n]$ به دست آورده ایم؛ به این منظور بین مقادیر متوالی سیگنال اصلی $k - 1$ صفر گذاشته ایم. می توانیم $x_{(k)}[n]$ را صورت کند شده $x[n]$ فرض کنیم. چون $x_{(k)}[n]$ تنها به ازای مضارب k ، یعنی $n = rk$ ، غیر صفرست، تبدیل فوریه $x_{(k)}[n]$ عبارت است از

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[n] e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[rk] e^{-j\omega rk}$$

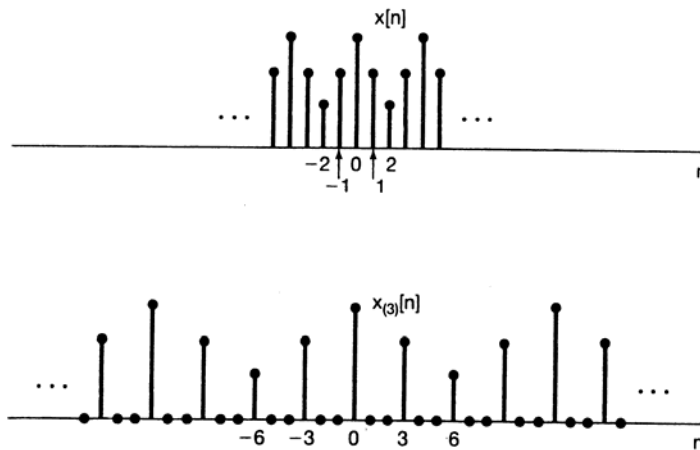
همچنین چون $x_{(k)}[rk] = x[r]$ به دست می آوریم

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[r] e^{-j(k\omega)r} = X(e^{jk\omega})$$

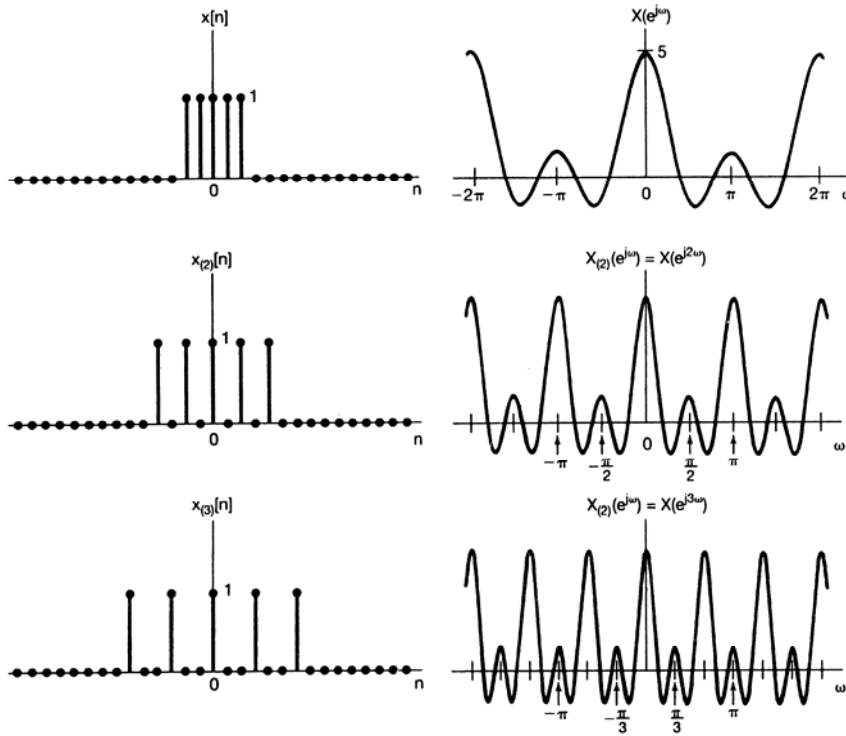
یعنی

$$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{jk\omega}) \quad (4-45)$$

توجه کنید که با گسترش و کند شدن سیگنال در حوزه زمان، به ازای $k \gg 1$ ، تبدیل فوریه آن فشرده می شود. برای مثال اگر $X(e^{j\omega})$ با دوره تناوب 2π تکرار شود، $X(k e^{j\omega})$ با دوره تناوب $2\pi/k$ تکرار خواهد شد. این خاصیت در شکل ۴-۱۴ در مورد یک پالس چهارگوش نشان داده شده است.



شکل ۴-۱۳: سیگنال $x_{(3)}[n]$ را از روی $x[n]$ به دست آورده ایم؛ به این منظور کار بین هر دو مقدار متوالی سیگنال اصلی دو صفر گذاشته ایم.



شکل ۴-۱۴: رابطه معکوس حوزه های زمان و فرکانس: با افزایش k ، $x_k[n]$ گسترده و تبدیل فوریه آن فشرده می شود.

مثال ۵-۹

به عنوان مثالی از فایده خاصیت انبساط زمانی در تعیین تبدیل فوریه، سیگنال $x[n]$ شکل ۴-۱۵ (الف) را در نظر بگیرید. این سیگنال را می توان به سیگنال ساده تر $y[n]$ شکل ۴-۱۵ (ب) ربط داد. داریم

$$x[n] = y_{(2)}[n] + y_{(2)}[n - 1]$$

که در آن

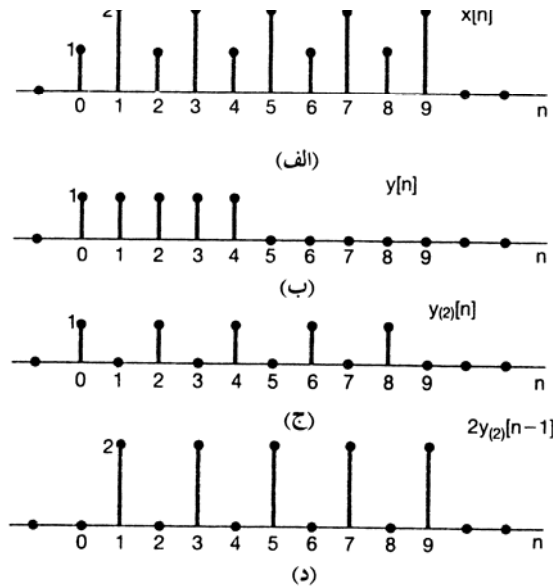
$$y_{(2)}[n] = \begin{cases} y[n/2] & \text{به ازای } n \text{ زوج} \\ 0 & \text{به ازای } n \text{ فرد} \end{cases}$$

جابجا شده $y_{(2)}[n]$ به سمت راست است. سیگنال های $y_{(2)}[n]$ و $y_{(2)}[n - 1]$ به ترتیب در شکل های ۴-۱۵ (ج) و (د) نشان داده شده اند.

حال توجه کنید که $y[n] = g[n - 2]$ که در آن $g[n]$ پالس مستطیلی مثال (به ازای $N_1 = 2$) است.

(شکل ۴-۱۶ (الف) را ببینید). پس با توجه به مثال ۴-۳ و خاصیت جابجایی زمانی داریم

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega} \frac{\sin(\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$



شکل ۴-۱۵: الف) سیگنال $x[n]$ مثال ۵-۹؛ ب) سیگنال $y[n]$ ؛ ج) سیگنال $y_{(2)}[n]$ که با گذاشتن صفر بین مقادیر متوالی $y[n]$ به دست آمده و د) سیگنال $2y_{(2)}[n-1]$.

با استفاده از خاصیت انبساط زمانی به دست می آوریم

$$y_{(2)}[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} e^{-j\omega} \frac{\sin(\omega)}{\sin(\omega)}$$

حال از خواص خطی بودن و جابجایی زمانی استفاده می کنیم

$$2y_{(2)}[n-1] \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 2e^{-j\omega} \frac{\sin(\omega)}{\sin(\omega)}$$

و با ترکیب نتایج بالا به دست می آوریم

$$X(e^{j\omega})[n] = e^{-j\omega} (1 + 2e^{-j\omega}) \frac{\sin(\omega)}{\sin(\omega)}$$

۴-۳-۸ مشتق گیری فرکانسی

باز فرض کنید

$$x[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

با استفاده از تعریف $X(e^{j\omega})$ در معادله تجزیه (۴-۹) و مشتق گیری از دو طرف آن به دست می آوریم

$$\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -jnx[n] e^{-j\omega n}$$

طرف راست این معادله همان تبدیل فوریه $-jnx[n]$ است: با ضرب دو طرف در j به دست می آوریم

(۲۶-۳)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

کاربرد این خاصیت را در مثال ۴-۱۳ بخش ۴-۴ خواهیم دید.

۴-۳-۹ رابطه پارسوال

اگر $x[n]$ و $X(e^{j\omega})$ یک زوج تبدیل فوری باشند، آنگاه

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (۴۷-۴)$$

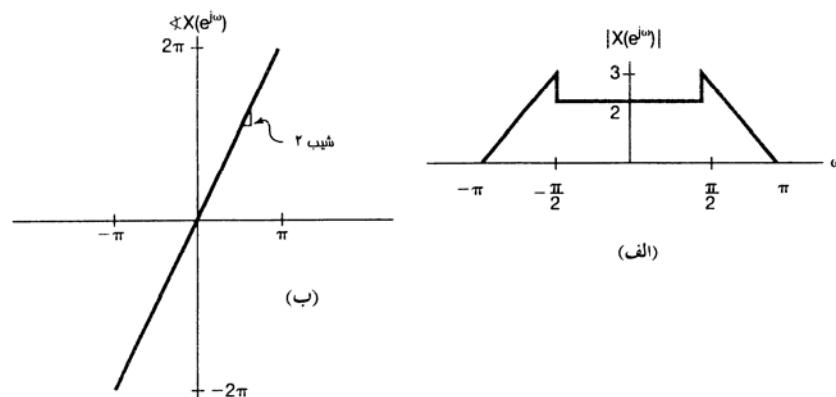
این معادله شبیه معادله (۴۳-۴) است و روش به دست آوردن آن نیز به همان صورت است. کمیت طرف چپ معادله (۴۷-۴) انرژی $x[n]$ است و رابطه پارسوال می گوید می توان این انرژی را با انتگرال گیری از انرژی بر واحد فرکانس، $|X(e^{j\omega})|^2 / 2\pi$ روی فاصله فرکانسی دارای طول 2π به دست آورد. به قیاس حالت پیوسته در زمان $|X(e^{j\omega})|^2$ را طیف چگالی انرژی می نامند. همچنین توجه کنید که معادله (۴۷-۴) همتای نامتناوب رابطه پارسوال معادله (۳-۱۱۰) است، که توان متوسط یک سیگنال متناوب را بر حسب توان متوسط مؤلفه های هارمونیکی آن بیان می کند.

با داشتن تبدیل فوری یک سیگنال می توان خواص تبدیل فوری را به کار برد و مشخصاتی از سیگنال را به دست آورد. مثال زیر را به عنوان یک نمونه در نظر بگیرید.

مثال ۴-۱۰

سیگنال $x[n]$ را با تبدیل فوری $X(e^{j\omega})$ نشان داده شده در شکل ۴-۱۶ در نظر بگیرید. می خواهیم تعیین

کنیم که سیگنال $x[n]$ متناوب، حقیقی، و زوج است و انرژی محدودی دارد یا نه.



شکل ۴-۱۶: اندازه و فاز تبدیل فوری مثال ۴-۱۰

$X(e^{j\omega})$ چنین نیست. پس نتیجه می گیریم $x[n]$ متناوب نیست.

با توجه به خاصیت تقارن تبدیل فوریه می دانیم که تبدیل فوریه یک سیگنال حقیقی باید اندازه زوج و فرد داشته باشد. $|X(e^{j\omega})|$ و $X(e^{j\omega})$ این چنین هستند. پس $x[n]$ حقیقی است.

سوم این که اگر $x[n]$ زوج باشد، طبق خاصیت تقارن سیگنال های حقیقی، $X(e^{j\omega})$ باید حقیقی و فرد باشد. ولی چون $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{-j\omega}$ تابعی حقیقی و زوج نیست. پس $x[n]$ زوج نیست. سرانجام برای بررسی انرژی رابطه پارسوال را به کار می بریم

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

شکل ۴-۱۶ به وضوح نشان می دهد که انتگرال $|X(e^{j\omega})|^2$ از $-\pi$ تا π مقداری محدودست. پس $x[n]$ انرژی محدودی دارد.

در چند بخش بعد، خواص دیگری را بررسی خواهیم کرد. دو خاصیت اول، خواص کانولوشن و ضرب، شبیه خواص بررسی شده در بخش های ۴-۴ و ۵-۴ هستند. سومین خاصیت، خاصیت همزادی است که آن را در بخش ۴-۷ بررسی خواهیم کرد. در آن بخش علاوه بر همزادی زوج های فوریه گسسته در زمان، همزادی بین حوزه های گسسته و پیوسته در زمان را نیز در نظر خواهیم گرفت.

۴-۴ خاصیت کانولوشن

در بخش ۴-۴ اهمیت تبدیل فوریه پیوسته در زمان از نظر تأثیر آن بر کانولوشن و فایده آن در کار با سیستم های **LIT** را بیان کردیم. در حالت گسسته در زمان هم رابطه مشابهی وجود دارد و این یکی از دلایل عمده اهمیت تبدیل فوریل گسسته در زمان در بررسی سیستم های **LIT** گسسته در زمان است. اگر $x[n]$ ، $h[n]$ و $y[n]$ به ترتیب ورودی، پاسخ ضربه، و خروجی یک سیستم **LIT** باشند، یعنی

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

آنگاه

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) \quad (4-48)$$

که در آن $X(e^{j\omega})$ ، $H(e^{j\omega})$ و $Y(e^{j\omega})$ به ترتیب تبدیل فوریه $x[n]$ ، $h[n]$ و $y[n]$ هستند. همچنین مقایسه معادلات (۳-۱۲۲) و (۴-۹) نشان می دهد که پاسخ فرکانسی یک سیستم **LIT** گسسته در زمان، که در بخش ۳-۸ تعریف شد، تبدیل فوریه پاسخ ضربه آن سیستم است.

اثبات معادله (۴-۴۸) دقیقاً به صورت انجام شده در بخش ۴-۴ صورت می گیرد. مثل حالت پیوسته در زمان معادله ترکیب (۴-۸) را می توان به عنوان تجزیه $x[n]$ به ترکیب خطی توابع نمایی مختلط، تعبیر کرد. هر یک از این نمایی

پاسخ یک سیستم LIT به یک ورودی متناوب حاصلضرب ضرائب سری فوریۀ ورودی در پاسخ فرکانسی سیستم، محاسبه شده در فرکانس های مؤلفه های هارمونیک، می باشد. خاصیت کانولوشن معادلۀ (۴-۴۸) تعمیم این نتیجه به ورودی ها و خروجی های نامتناوب، با استفاده از تبدیل فوریه به جای سری فوریه، است.

معادلۀ (۴-۴۸) مانند حالت پیوسته در زمان، کانولوشن دو سیگنال را به رابطه ای جبری بین تبدیل فوریۀ سیگنال ها می نگارد، این امر هم کار تحلیل سیگنال ها و سیستم ها را ساده می کند و هم دید بسیار خوبی نسبت به چگونگی پاسخ سیستم های LIT به ورودی ها به دست می دهد. در واقع معادلۀ (۴-۴۸) نشان می دهد که پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ چگونگی تغییر دامنه تبدیل فوریۀ ورودی در فرکانس ω را بیان می کند. پس مثلاً در فیلترهای فرکانس گزین می خواهیم در گسترۀ فرکانسی مربوط به باند عبور داشته باشیم $H(e^{j\omega}) \approx 1$ ، ولی در فرکانس های مربوط به باند حذف $H(e^{j\omega}) \approx 0$ مطلوب است.

۴-۴-۱ چند مثال

برای نشان دادن چگونگی کاربرد خاصیت کانولوشن و خواص دیگر، در این بخش چند مثال ارائه می کنیم.

مثال ۴-۱۱

یک سیستم LIT با پاسخ ضربۀ زیر در نظر بگیرید

$$h[n] = \delta [n - n_0]$$

پاسخ فرکانسی این سیستم عبارت است از

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta [n - n_0] e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_0}$$

بنابراین به ازای هر ورودی $x[n]$ ، با تبدیل $X(e^{j\omega})$ تبدیل فوریۀ خروجی عبارت است از

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega}) \quad (۴-۴۹)$$

توجه کنید که در این مثال $y[n] = x[n - n_0]$ و معادلۀ (۴-۴۹) با خاصیت جابجایی زمانی سازگارست.

همچنین توجه کنید که پاسخ فرکانسی یک جابجایی تنها یعنی $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}$ در تمام فرکانس ها اندازه ای برابر یک دارد، و فاز $-\omega n_0$ آن نشان دهنده یک تغییر فاز خطی با فرکانس است.

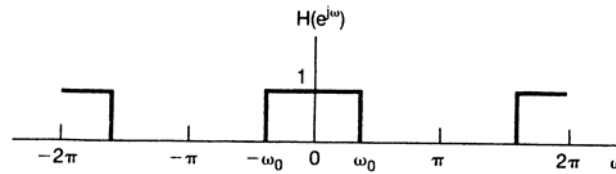
مثال ۴-۱۲

فیلتر پایین گذر ایده آل گسسته در زمان معرفی شده در بخش ۳-۹-۲ را در نظر بگیرید. پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$

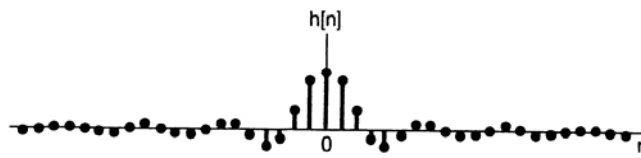
این سیستم در شکل ۵-۱۷ (الف) نشان داده شده است. چون پاسخ ضربه و پاسخ فرکانسی یک سیستم LIT یک زوج تبدیل فوریه هستند می توانیم پاسخ ضربۀ این فیلتر را از پاسخ فرکانسی آن، به کمک معادلۀ (۴-۸) به دست

آوردیم. با استفاده از $\omega_0 \leq \omega \leq -\omega_0$ به عنوان فاصلۀ انتگرال گیری و توجه به شکل ۴-۱۷ (الف) به دست می آوریم

که در شکل ۴-۱۷ (ب) نشان داده شده است.



(الف)



(ب)

شکل ۴-۱۷: الف) پاسخ فرکانسی یک فیلتر پایین گذر ایده آل گسسته در زمان؛ ب) پاسخ ضربه فیلتر ایده آل پایین گذر

شکل ۴-۱۷ بسیار یاز مفاهیم بیان شده در مورد فیلتر پایین گذر ایده آل پیوسته در زمان مثال ۴-۱۸ را نشان می دهد اول این که چون $h[n]$ در $n < 0$ صفر نیست، فیلتر پایین گذر ایده آل علی نیست. دوم این که حتی اگر علی نبودن مهم نباشد، باز به دلائل دیگری چون سهولت ساخت و مشخصات مناسب در حوزه زمان، معمولاً فیلترهای غیر ایده آل برای فرکانس گزینی ترجیح داده می شوند. پاسخ ضربه فیلتر پایین گذر ایده آل شکل ۴-۱۷ (ب) نوسانی است، و این مشخصه ممکن است در بعضی کاربردها مطلوب نباشد. در این موارد باید بین اهداف حوزه فرکانس مثل فرکانس گزینی، و خصوصیات حوزه زمان مثل رفتار نوسانی مصالحه ای صورت گیرد. در فصل ۶ در این مورد و مسائل مرتبط با آن به تفصیل صحبت می کنیم.

چنانچه مثال زیر نشان می دهد، خاصیت کانولوشن برای ساده کردن محاسبات مربوط به کانولوشن نیز ارزشمندست.

مثال ۴-۱۳

یک سیستم با پاسخ ضربه زیر در نظر بگیرید

$$h[n] = a^n u[n]$$

که در آن $|a| < 1$. ورودی این سیستم را به شکل زیر فرض کنید

$$x[n] = \beta^n u[n]$$

که در آن $|\beta| < 1$. با محاسبه تبدیل فوریه $h[n]$ و $x[n]$ به دست می آوریم

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$

مثال ۴-۱۹

و

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \beta e^{-j\omega}} \quad (52-4)$$

پس

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\omega})(1 - \beta e^{-j\omega})} \quad (53-4)$$

اینجا هم مثل مثال ۴-۱۹ ساده ترین راه یافتن عکس تبدیل فوریه $Y(e^{j\omega})$ ، بسط آن به کسرهای جزئی است. $Y(e^{j\omega})$ نسبت دو چند جمله ای از توان های $e^{-j\omega}$ است و می خواهیم آن را به صورت مجموع جملات ساده تری بنویسیم تا بتوانیم عکس تبدیل فوریه هر کدام را با تأمل در آن ها بنویسیم (و در صورت لزوم از خاصیت مشتق گیری فرکانسی بخش ۴-۳-۸ نیز استفاده کنیم). روش جبری تبدیل های گویا در پیوست شرح داده شده است. در این مثال به ازای $\alpha \neq \beta$ ، بسط به کسرهای جزئی $Y(e^{j\omega})$ به صورت زیرست:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1 - \alpha e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \beta e^{-j\omega}} \quad (54-4)$$

با برابر قرار دادن طرف های راست معادلات (۵۳-۴) و (۵۴-۴) به دست می آوریم

$$A = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}, \quad B = \frac{\beta}{\alpha - \beta}$$

پس با توجه به مثال ۴-۱ و خاصیت خطی بودن، عکس تبدیل معادله (۵۴-۴) را به صورت زیر می یابیم:

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \alpha^n u[n] - \frac{\beta}{\alpha - \beta} \beta^n u[n] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha^{n+1} u[n] - \beta^{n+1} u[n]] \end{aligned} \quad (55-4)$$

به ازای $\alpha = \beta$ ، بسط به کسرهای جزئی معادله (۵۴-۴) معتبر نیست. در این حالت داریم

$$Y(e^{j\omega}) = \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \right)^2$$

که می توان آن را به صورت زیر درآورد

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{\alpha} e^{j\omega} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \right) \quad (56-4)$$

مانند مثال ۴-۱۹، اینجا هم از خاصیت مشتق گیری فرکانسی، معادله (۴۷-۴)، و زوج تبدیل فوریه زیر استفاده می کنیم

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$

$$na^n u[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \right)$$

برای در نظر گرفتن اثر $e^{j\omega}$ ، از خاصیت جابجایی زمانی استفاده می کنیم و به دست می آوریم

$$(n+1)a^{n+1} u[n+1] \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j e^{j\omega} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \right)$$

سرانجام با در نظر گرفتن ضریب $1/a$ معادله (۴-۵۶) خواهیم یافت

$$y[n] = (n+1) a^n u[n+1] \quad (۴-۵۷)$$

شایان ذکرست که هر چند طرف چپ فوق در یک پله شروع شده از $n = -1$ ضرب شده است، ولی سیگنال $(n+1) a^n u[n+1]$ در $n \ll 0$ صفرست، چون در $n = -1$ ، عامل $n+1$ صفرست. پس $y[n]$ را می توان به این صورت هم نوشت

$$y[n] = (n+1) a^n u[n] \quad (۴-۵۸)$$

همانطور که در مثال زیر نشان داده شده است، خاصیت کانولوشن و دیگر خواص تبدیل فوریه در تحلیل اتصال سیستم ها به کار می آیند.

مثال ۴-۱۴

سیستم شکل ۵-۱۸ (الف) را با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ در نظر بگیرید. سیستم های با پاسخ فرکانسی $H_{lp}(e^{j\omega})$ فیلترهای پایین گذر ایده آل با فرکانس قطع $\pi/4$ و بهره یک در باند عبور هستند.

ابتدا مسیر بالایی شکل ۵-۱۸ (الف) را در نظر می گیریم. تبدیل فوریل سیگنال $w_1[n]$ را می توان با توجه به این که $(-1)^n = e^{j\pi n}$ و در نتیجه $w_1[n] = e^{j\pi n} x[n]$ یافت. با استفاده از خاصیت جابجایی فرکانسی به دست می آوریم

$$W_1(e^{j\pi n}) = H_{lp}(e^{j\omega}) X(e^{j(\omega-\pi)})$$

چون $w_2[n] = e^{j\pi n} w_1[n]$ با اعمال مجدد خاصیت جابجایی فرکانسی به دست می آوریم

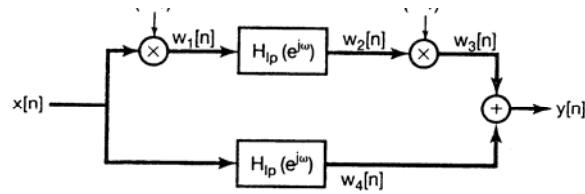
$$\begin{aligned} W_2(e^{j\omega}) &= W_1(e^{j(\omega-\pi)}) \\ &= H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) X(e^{j(\omega-\pi)}) \end{aligned}$$

چون تبدیل فوریه گسسته در زمان همیشه دارای دوره تناوب 2π است

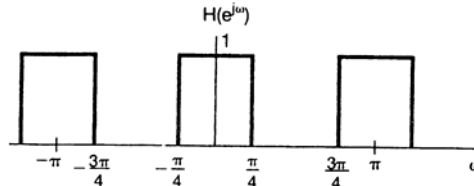
$$W_2(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) X(e^{j\omega})$$

با اعمال خاصیت کانولوشن به مسیر پایین به دست می آوریم

$$W_3(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$$



(الف)



(ب)

شکل ۴-۱۸: الف) اتصال سیستم‌ها برای مثال ۴-۱۴؛ ب) پاسخ فرکانسی کل سیستم

با توجه به خاصیت خطی بودن تبدیل فوریه به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= W_1(e^{j\omega}) + W_2(e^{j\omega}) \\ &= [H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) + H_{lp}(e^{j\omega})] X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

پس پاسخ فرکانسی کل سیستم شکل ۴-۱۸ الف) عبارت است از

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = [H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) + H_{lp}(e^{j\omega})]$$

که در شکل ۴-۱۸ ب) نشان داده شده است.

همانطور که در مثال دیدیم $H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})$ پاسخ فرکانسی یک فیلتر ایده آل بالا گذرست. پس سیستم کل هم فرکانس‌های پایین را می‌گذارد و هم فرکانس‌های بالا را، و فرکانس‌های میان این دو باند عبور را حذف می‌کند. به همین دلیل این فیلتر را فیلتر میان‌گذر می‌نامند، باند حذف فیلتر این مثال عبارت است از $\frac{\pi}{4} \leq |\omega| \leq \frac{3\pi}{4}$ توجه کنید که همانند حالت پیوسته در زمان، هر سیستم LIT گسسته در زمانی پاسخ فرکانسی ندارد. مثلاً سیستم LIT با پاسخ ضربه $h[n] = \gamma^n u[n]$ به ورودی‌های سینوسی پاسخ کرائدار نمی‌دهد بنابراین معادله تجزیه تبدیل فوریه $h[n]$ و اگر است. البته اگر سیستم LIT پایدار باشد، از بخش ۲-۳-۷ می‌دانیم که پاسخ ضربه آن مطلقاً جمع پذیرست، یعنی

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty \quad (۴-۵۹)$$

بنابراین برای سیستم‌های پایدار پاسخ فرکانسی همیشه همگراست. در استفاده از روش‌های فوریه خود را به سیستم‌های با پاسخ ضربه دارای تبدیل فوریه تعریف شده محدود می‌کنیم. در فصل ۱۰ تبدیل فوریه را به تبدیلی موسوم به تبدیل Z تعمیم می‌دهیم. تبدیل Z این امکان را می‌دهد که روش‌های تبدیل را به سیستم‌های LIT دارای پاسخ فرکانسی و اگر اعمال کنیم.

در بخش ۴-۵ خاصیت ضرب را برای سیگنال های پیوسته در زمان معرفی کردیم و بعضی کاربردهای آن را طی چند مثال نشان دادیم. برای سیگنال های گسسته در زمان هم خاصیت مشابهی وجود دارد که در کاربردها همان نقش را بازی می کند. در این بخش این خاصیت را مستقیماً به دست می آوریم و یک مثال از کاربردهای آن را نشان می دهیم. در فصل های ۷ و ۸ خاصیت ضرب را طی مباحث نمونه برداری و سیستم های مخابراتی به کار می بریم.

فرض کنید $y[n]$ حاصل ضرب $x_1[n], x_2[n]$ است و $Y(e^{j\omega}), X_1(e^{j\omega}), X_2(e^{j\omega})$ به ترتیب تبدیل فوریه این سیگنال ها هستند. پس

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] x_2[n] e^{-j\omega n}$$

چون

$$x_1[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X_1(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta \quad (4-60)$$

نتیجه می گیریم

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X_2(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta \right\} e^{-j\omega n} \quad (4-61)$$

با تعویض جای جمع و انتگرال به دست می آوریم

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X_2(e^{j\theta}) \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] e^{-j(\omega-\theta)n} \right] d\theta \quad (4-62)$$

جمع داخل کروشه برابر $X_1(e^{j(\omega-\theta)n})$ است. پس معادله (۴-۶۲) به صورت زیر درمی آید

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)n}) d\theta \quad (4-63)$$

معادله (۴-۶۳) کانولوشن متناوب $X_1(e^{j\omega})$ و $X_2(e^{j\omega})$ است و انتگرال آن را می توان روی هر فاصله ای به طول 2π حساب کرد. شکل معمولی کانولوشن را (که در آن انتگرال از $-\infty$ تا $+\infty$ حساب می شود) کانولوشن نامتناوب می خوانند تا با کانولوشن متناوب اشتباه نشود. روش محاسبه کانولوشن متناوب را طی یک مثال نشان می دهیم.

مثال ۴-۱۵

مسئله یافتن تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$ سیگنال $x[n]$ را، که حاصل ضرب دو سیگنال دیگرست، در نظر بگیرید؛

یعنی

$$x[n] = x_1[n] x_2[n]$$

که در آن

$$x_1[n] = \frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}$$

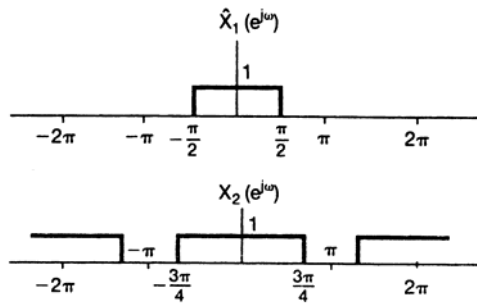
$$x_2[n] = \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}$$

است، انتگرال معادله (۴-۶۳) را می توان روی هر فاصله ای به طول 2π حساب کرد. با انتخاب فاصله $-\pi \leq \theta \leq \pi$ به دست می آوریم

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)n}) d\theta \quad (۴-۶۴)$$

معادله (۴-۶۴)، کانولوشن نامتناوب را می ماند، به جز این که فاصله انتگرال گیری $-\pi \leq \theta \leq \pi$ است. ولی با تعریف زیر

$$\hat{X}_1(e^{j\theta}) = \begin{cases} X_1(e^{j\theta}) & , \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \\ \cdot & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

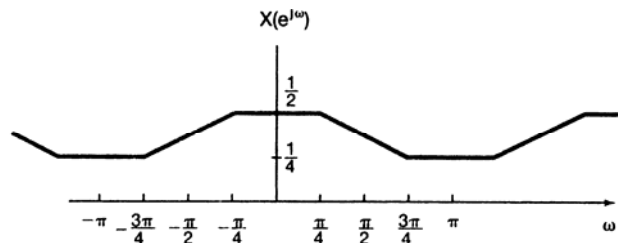


شکل ۴-۱۹: $\hat{X}_1(e^{j\omega})$ که در یک تناوب با $X_1(e^{j\omega})$ برابر است و $X_2(e^{j\omega})$. کانولوشن خطی $\hat{X}_1(e^{j\omega})$ و $X_2(e^{j\omega})$ با کانولوشن $X_1(e^{j\omega})$ و $X_2(e^{j\omega})$ برابر است.

می توانیم معادله (۴-۶۴) را به یک کانولوشن معمولی تبدیل کنیم. با گذاشتن $\hat{X}_1(e^{j\theta})$ به جای $X_1(e^{j\theta})$ معادله (۴-۶۴) و توجه به این که $\hat{X}_1(e^{j\theta})$ در $|\theta| > \pi$ صفرست، می بینیم که در شکل ۴-۲۰ نشان داده شده است.

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \hat{X}_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)n}) d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{X}_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)n}) d\theta$$



شکل ۴-۲۰: نتیجه کانولوشن متناوب مثال ۵-۱۵

تعدادی از خواص مهم تبدیل فوریه گسسته در زمان را در جدول ۴-۱، و بخش هایی را که هر خاصیت در آن مورد بحث قرار گرفته است، نیز درج کرده ایم. در جدول ۴-۲ فهرستی از اکثر زوج های تبدیل فوریه مهم و اساسی گسسته در زمان را درج کرده ایم، اکثر این زوج ها را در مثال های این فصل به دست آورده ایم.

۴-۷ همزادی

هنگام بررسی تبدیل فرویه پیوسته در زمان، بین معادله تجزیه (۴-۹) و معادله (۴-۸) نوعی تقارن یا همزادی مشاهده کردیم. برای تبدیل فوریه گسسته در زمان این همزادی بین معادله تجزیه (۴-۹) و معادله ترکیب (۴-۸) وجود ندارد. ولی در معادلات (۳-۹۴) و (۳-۹۵) سری فوریه گسسته در زمان نوعی همزادی وجود دارد که در بخش ۴-۷-۱ به آن خواهیم پرداخت. یک همزادی نیز بین تبدیل فوریه گسسته در زمان و سری فوریه پیوسته در زمان وجود دارد. رابطله را در بخش ۴-۷-۲ بررسی خواهیم کرد.

۴-۷-۱ همزادی در سری فوریه گسسته در زمان

چون ضرائب a_k سری فوریه سیگنال متناوب $x[n]$ ، خود یک رشته متناوب هستند، می توانیم برای رشته a_k نیز یک سری فوریه به دست آوریم. خاصیت همزادی سری فوریه گسسته در زمان می گوید ضرائب سری فوریه رشته متناوب a_k عبارت اند از $(1/N)x[-n]$ (یعنی با مقادیر سیگنال وارونه شده زمانی متناسب اند). برای دیدن جزئیات این رابطه دو رشته متناوب با دوره تناوب N در نظر بگیرید که دارای

بخش	خاصیت	سیگنال نامتناوب	تبدیل فوریه
		$x[n]$ $y[n]$	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) \\ Y(e^{j\omega}) \end{cases}$
۲-۳-۴	خطی بودن	$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
۳-۳-۴	جابجایی زمانی	$x[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
۳-۳-۴	جابجایی فرکانسی	$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
۴-۳-۴	مزدوج گیری	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
۶-۳-۴	وارونی زمانی	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
۷-۳-۴	انبساط زمانی	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & k \text{ مضرب } n \\ \cdot, & k \text{ مضرب } \neq n \end{cases}$	$X(e^{jk\omega})$
۴-۴	کانولوشن	$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
۵-۴	ضرب	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$
۵-۳-۴	تفاضلگیری زمانی	$x[n]x[n-1]$	$(1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$
۵-۳-۴	جمع انباره ای	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{(1 - e^{-j\omega})} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^n \delta(\omega - \pi k)$
۸-۳-۴	مشتقگیری فرکانسی	$nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
۴-۳-۴	تقارن سیگنال های حقیقی	$x[n]$ حقیقی	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \\ \text{Re}\{X(e^{j\omega})\} = \text{Re}\{X(e^{-j\omega})\} \end{cases}$
۴-۳-۴	تقارن سیگنال های حقیقی و زوج	$x[n]$ حقیقی و زوج	$X(e^{j\omega})$ حقیقی و زوج
۴-۳-۴	تقارن سیگنال های حقیقی و فرد	$x[n]$ حقیقی و فرد	$X(e^{j\omega})$ موهومی خالص و فرد
۴-۳-۴	تجزیه زوج فرد	$x_c[n] = \mathcal{O}(x[n])$ ، حقیقی، $x_c[n]$	$\text{Re}\{X(e^{j\omega})\}$
۴-۳-۴	سیگنال های حقیقی	$x_c[n] = \mathcal{O}(x[n])$ ، حقیقی، $x_c[n]$	$\text{Im}\{X(e^{j\omega})\}$
۹-۳-۴	رابطهٔ پرسوال برای سیگنال های نامتناوب		
			$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$

$$f[m] = \frac{1}{N} \sum_{r \in \langle N \rangle} g[r] e^{-j r (\pi/N) m} \quad (65-4)$$

اگر در این معادله قرار دهیم $m = k$ و $r = n$ ، به دست می آوریم

$$f[k] = \frac{1}{N} \sum_{r \in \langle N \rangle} g[n] e^{-j r (\pi/N) n}$$

از مقایسه این معادله و معادله (3-95) چنین برمی آید که $f[k]$ ضرایب سری فوریۀ سیگنال $g[n]$ است. با به کار بردن نماد زیر

$$x[n] \stackrel{\mathcal{F}^S}{\leftrightarrow} f[k]$$

که در فصل 3 برای سیگنال متناوب گسسته در زمان مجموعه و ضرایب سری فوریۀ اش معرفی شد، برای دو دنبال متناوب معادله (4-65) داریم

$$g[n] \stackrel{\mathcal{F}^S}{\leftrightarrow} f[k] \quad (66-4)$$

همچنین اگر در معادله (4-65) قرار دهیم $m = n$ و $r = k$ ، به دست می آوریم

$$f[n] = \sum_{r \in \langle N \rangle} \frac{1}{N} g[-k] e^{j r (\pi/N) n}$$

مقایسه این معادله و معادله (3-94) نشان می دهد که $(1/N)g[-k]$ با ضرایب سری فوریۀ $f[n]$ متناظرست. یعنی

$$f[n] \stackrel{\mathcal{F}^S}{\leftrightarrow} \frac{1}{N} g[-k] \quad (67-4)$$

اینجا هم مثل حالت پیوسته در زمان، نتیجه خاصیت همزادی این است که هریک از خواص سری فوریۀ یک همزاد دارد. مثلاً از جدول 3-2 دو خاصیت زیر را برمی گزینیم که همزادند

$$x[n - n_0] \stackrel{\mathcal{F}^S}{\leftrightarrow} a_{k_0} e^{-j r (\pi/N) n_0} \quad (68-4)$$

و

$$e^{j m (\pi/N) n} x[n] \stackrel{\mathcal{F}^S}{\leftrightarrow} a_{k-m} \quad (69-4)$$

از این جدول می توانیم دو خاصیت همزاد زیر را نیز به دست آوریم

$$\sum_{r \in \langle N \rangle} x[r] y[n - r] \stackrel{\mathcal{F}^S}{\leftrightarrow} N a_k b_k \quad (70-4)$$

و

$$x[n] y[n] \stackrel{\mathcal{F}^S}{\leftrightarrow} \sum_{l \in \langle N \rangle} a_l b_{k-l} \quad (71-4)$$

همزادی علاوه بر بیان خاصیت های همزاد سری فوریۀ، در کاهش پیچیدگی محاسبات مربوط به نمایش سری فوریۀ هم به کار می آید. این مطلب در مثال زیر تشریح شده است.

سیگنال متناوب زیر با تناوب $N = 9$ را در نظر بگیرید

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{9} \frac{\sin(\pi n/9)}{\sin(\pi n/9)}, & 9 \text{ مضرب } \neq n \\ \frac{1}{9}, & 9 \text{ مضرب } = n \end{cases} \quad (72-5)$$

در فصل ۳ دیدیم که موج چهارگوش ضرائب سری فوریه اش به شکل معادله (۷۲-۴) دارد. خاصیت همزادی چنین تداعی می کند که ضرائب $x[n]$ باید به صورت موج چهارگوش باشد. برای بررسی دقیق $g[n]$ را موجی چهارگوش با تناوب $N = 9$ فرض کنید، به نحوی که

$$g(n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq 2 \\ 0, & 2 < |n| \leq 4 \end{cases}$$

ضرائب فوریه $g(n)$ را می توان با توجه به مثال ۳-۱۲ به صورت زیر یافت

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{9} \frac{\sin(\pi n/9)}{\sin(\pi n/9)}, & 9 \text{ مضرب } \neq n \\ \frac{1}{9}, & 9 \text{ مضرب } = n \end{cases} \quad (72-4)$$

اکنون می توان معادله تجزیه سری فوریه $g(n)$ را به شکل زیر نوشت

$$b_k = \frac{1}{9} \sum_{l=-2}^2 g(l) e^{-j\pi k l/9}$$

با تغییر نام متغیرهای k و n و توجه به این که $x[n] = b_n$ ، به دست می آوریم

$$x[n] = \frac{1}{9} \sum_{l=-2}^2 g(l) e^{j\pi n l/9}$$

سرانجام با بردن ضریب $\frac{1}{9}$ به داخل جمع در می یابیم که طرف راست این معادله همان شکل معادله ترکیب (۳-۹۴)

برای $x[n]$ را دارد. پس نتیجه می گیریم که ضرائب سری فوریه $x[n]$ عبارت اند از

$$a_k = \begin{cases} 1, & |k| \leq 2 \\ 0, & 2 < |k| \leq 4 \end{cases}$$

که البته با دوره تناوب ۹ متناوب است.

۴-۷-۲ همزادی تبدیل فوریه گسسته در زمان و سری فوریه پیوسته در زمان

علاوه بر همزادی سری فوریه گسسته در زمان، تبدیل فوریه گسسته در زمان و سری فوریه پیوسته در زمان نیز همزاد یکدیگرند. معادلات سری فوریه پیوسته در زمان (۳-۳۸) و (۳-۳۹) را با معادلات تبدیل فوریه گسسته در زمان، (۴-۸)

و (۴-۹) مقایسه می کنیم. براس سهولت مراجعه این معادلات را تکرار می کنیم

$$[\text{معادله (۴-۹)}] \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (۷۴-۴)$$

$$[\text{معادله (۳-۳۸)}] \quad x[t] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_c t} \quad (۷۵-۴)$$

$$[\text{معادله (۳-۳۹)}] \quad a_k = \frac{1}{T} \int^T x(t) e^{-jk\omega_c t} dt \quad (۷۶-۴)$$

توجه کنید که معادلات (۴-۷۳) و (۴-۷۶) بسیار شبیه اند، همین طور معادلات (۴-۷۴) و (۴-۷۵). در حقیقت می توانیم معادلات (۴-۷۳) و (۴-۷۴) را نمایش سری فوریه پاسخ فرکانسی $X(e^{j\omega})$ بدانیم. در واقع چون $X(e^{j\omega})$ نسبت به ω با تناوب 2π متناوب است، می توان آن را به صورت مجموع وزنداری از توابع نمایی مختلفی که نسبت به ω با دوره تناوب مشترک 2π متناوب اند نمایش داد. یعنی نمایش سری فوریه $X(e^{j\omega})$ جمع وزندار سیگنال های $e^{j\omega n}$ ، \dots ، ± 2 ، ± 1 ، 0 ، \dots است. معادله (۴-۷۴) نشان می دهد که n امین ضریب سری فوریه این بسط (ضریب $e^{j\omega n}$) $x[-n]$ است. به علاوه چون دوره تناوب $X(e^{j\omega})$ ، 2π است، معادله (۴-۷۳) را می توان معادله تجزیه سری فوریه $x[n]$ به حساب آورد؛ یعنی ضرائب $e^{-j\omega n}$ در عبارت (۴-۷۴). بهترین روش تشریح کاربرد این همزادی استفاده از یک مثال است.

مثال ۴-۱۷

برای یافتن تبدیل فوریه گسسته در زمان سیگنال زیر می توان از همزادی بین تبدیل فوریه گسسته در زمان و سری فوریه پیوسته در زمان استفاده کرد

$$x[n] = \frac{\sin(\pi n / \gamma)}{\pi n}$$

برای پی بردن به همزادی ابتدا یک سیگنال پیوسته در زمان $g(t)$ با دوره تناوب $T = 2\pi$ و ضرائب سری فوریه $a_k = x[n]$ پیدا می کنیم. مثال ۳-۵ نشان می دهد که $g(t)$ یک موج چهار گوش با تناوب 2π (یا فرکانس پایه $\omega = 1$) است که برای آن

$$g(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T_1 \\ 0, & T_1 < |t| \leq \pi \end{cases}$$

ضرائب سری فوریه $g(t)$ عبارت اند از

$$a_k = \frac{\sin(k T_1)}{k\pi}$$

پس به ازای $T = \pi/\gamma$ داریم $a_k = x[k]$. معادله تجزیه سری فوریه $g(t)$ عبارت است از

$$\frac{\sin(\pi k / \gamma)}{\pi k} = \frac{1}{\gamma\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-jkt} dt = \frac{1}{\gamma\pi} \int_{-\pi/\gamma}^{\pi/\gamma} (1) e^{-jkt} dt$$

با جایگذاری $k = n$ و $t = \omega$ به دست می آوریم

$$\frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{jn\omega} d\omega \quad (77-1)$$

در هر دو طرف معادله (۷۷-۴) به جای n قرار می دهیم $-n$ ، و با توجه به زوج بودن تابع سینک به دست می آوریم

$$\frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{jn\omega} d\omega$$

طرف راست این معادله همان شکل معادله ترکیب تبدیل فوریل $x[n]$ را دارد، که در آن

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

در جدول ۳-۴ فشرده ای از عبارت های سری فوریه و تبدیل فوریه پیوسته و گسسته در زمان را درج کرده، روابط همزادی موجود را مشخص کرده ایم.

۴-۸ سیستم های توصیف شده با معادلات تفاضلی با ضرایب ثابت

معادله تفاضلی خطی دارای ضرایب ثابتی که سیستم LIT با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ را توصیف می کند در حالت کلی به صورت زیرست

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (78-4)$$

سیستم هایی که با این معادلات تفاضلی توصیف می شوند دسته بسیار مهم و مفیدی از سیستم ها را تشکیل می دهند. در این بخش با بهره گیری از خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان، پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ سیستم توصیف شده با چنین معادله ای را می یابیم. این روش موازی روشی است که در بخش ۴-۷ برای سیستم های پیوسته در زمان LIT توصیف شده با معادلات دیفرانسیل با ضرایب خطی به کار بردیم.

برای تعیین $H(e^{j\omega})$ دو روش مرتبط به هم وجود دارد. اولی که در بخش ۳-۱۱ در چند مورد به کار برده شد، به طور صریح از این مطلب استفاده می کند که نمایی های مختلط توابع ویژه سیستم های LIT هستند. در واقع اگر ورودی یک سیستم LIT باشد، خروجی باید به صورت $x[n] = e^{j\omega n}$ باشد. با گذاشتن

این عبارت ها در معادله (۷۸-۵) و انجام عملیات جبری لازم می توانیم $H(e^{j\omega})$ را بیابیم. در این بخش روش دوم را به کار می بریم و از خواص کانولوشن، خطی بودن، و جابجایی زمانی تبدیل فوریه سود می جوئیم. $X(e^{j\omega})$ ، $Y(e^{j\omega})$ و $H(e^{j\omega})$ را به ترتیب تبدیل فوریه های ورودی $x[n]$ ، خروجی $y[n]$ و پاسخ ضربه $h[n]$ بگیرد. طبق خاصیت کانولوشن تبدیل فوریه گسسته در زمان، معادله (۴۸-۴)، داریم

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \quad (79-4)$$

از دو طرف معادله (۷۸-۴) تبدیل فوریه می گیریم و با استفاده از خواص خطی بودن و جابجایی زمانی به دست می آوریم

یا

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega}} \quad (۸۰-۴)$$

از مقایسه معادله (۸۰-۴) با معادله (۷۶-۴) می بینیم که مثل حالت پیوسته در زمان، $H(e^{j\omega})$ نسبت دو چند جمله ای است، ولی در حالت گسسته در زمان متغیر چند جمله ای ها $e^{j\omega}$ است. ضرایب چند جمله ای صورت برابر ضرایب سمت راست معادله (۷۸-۴) و ضرایب چند جمله ای مخرج برابر ضرایب سمت چپ معادله (۷۸-۴) هستند. پس پاسخ فرکانسی سیستم مشخص شده با معادله (۷۸-۴) را می توان با تأمل در معادله تفاضلی به دست آورد. معادل تفاضلی (۷۸-۴) را معمولاً معادله تفاضلی مرتبه N می نامند زیرا N گام تأخیر خروجی $y[n]$ در آن وجود دارد. مخرج عبارت $H(e^{j\omega})$ معادله (۸۰-۴) نیز یک چند جمله ای مرتب N از $e^{-j\omega}$ است.

مثال ۱۸-۴

سیستم LIT علی توصیف شده با معادله تفاضلی زیر را در نظر بگیرید

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \quad (۸۱-۴)$$

که در آن $|a| < 1$. طبق معادله (۸۰-۴) پاسخ فرکانسی این سیستم عبارت است از

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (۸۲-۴)$$

مقایسه این معادله با مثال ۱-۵ نشان می دهد که این معادله تبدیل فوریه $a^n u[n]$ است. بنابراین پاسخ ضربه سیستم برابرست با

$$h[n] = a^n u[n] \quad (۸۳-۴)$$

مثال ۱۹-۴

یک سیستم LIT علی با معادله زیر توصیف شده است

$$y[n] - \frac{7}{8}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n] \quad (۸۴-۴)$$

پاسخ فرکانسی این سیستم طبق معادله (۸۰-۴) عبارت است از

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{7}{8}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}} \quad (۸۵-۴)$$

به عنوان اولین گام یافتن پاسخ ضربه، مخرج معادله (۸۵-۴) را تجزیه می کنیم:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{8}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{7}{8}e^{-j\omega}\right)} \quad (۸۶-۴)$$

شده است. نتیجه عبارت است از

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\omega})} - \frac{1}{(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\omega})} \quad (87-4)$$

عکس تبدیل فوریه هریک از جملات معادله فوق را می توان به طور نظری نوشت و به دست آورد

$$h[n] = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n u[n] - \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n u[n] \quad (88-4)$$

روشی که در مثال ۴-۱۹ به کار بردیم، شیوه ای مشابه با حالت پیوسته در زمان داشت. پس از بسط $H(e^{j\omega})$ به کسرهای جزئی، عکس تبدیل فوریه هر جمله را می توان به طور نظری نوشت. این روش را می توان در مورد پاسخ فرکانسی تمام سیستم های LIT توصیف شده با معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت هم به کار برد. همچنین در مثال بعد خواهیم دید که اگر تبدیل فوریه ورودی $X(e^{j\omega})$ چنین سیستمی هم نسبت دو چند جمله ای از $e^{-j\omega}$ باشد، $Y(e^{j\omega})$ هم همین طور است. در این صورت می توان همین روش را برای یافتن پاسخ $y[n]$ به ورودی $x[n]$ به کار برد.

مثال ۴-۲۰

سیستم LIT مثال ۵-۱۹ را با ورودی زیر در نظر بگیرید

$$x[n] = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n u[n] \quad (89-4)$$

با توجه به معادله (۵-۸۰) و مثال ۴-۱ یا ۴-۱۸ به دست می آوریم

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\omega})} \quad (89-4)$$

$$= \frac{1}{(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\omega})^2}$$

چنان که در پیوست گفته شد، بسط معادله فوق به کسرهای جزئی عبارت است از

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{B_{11}}{(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\omega})} + \frac{B_{12}}{(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\omega})} + \frac{B_{13}}{(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\omega})} \quad (90-4)$$

که در آن ثابت های B_{11} و B_{12} و B_{13} با روش های تشریح شده در پیوست محاسبه می شوند. این عبارت خاص در مثال الف-۴ به تفصیل حل شده و این نتایج حاصل شده است

$$B_{11} = 8 \quad , \quad B_{12} = -2 \quad , \quad B_{13} = -\sqrt{2}$$

پس

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{8}{(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\omega})} + \frac{-2}{(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\omega})} + \frac{-\sqrt{2}}{(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\omega})} \quad (91-4)$$

توجه به این مقال ها، یا به کمک جدول ۴-۲، می توانیم عکس تبدیل جملات معادله (۴-۹۱) را یافته، بنویسیم

$$y[n] = \left\{ -2 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n + 8 \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} u[n] \quad (4-92)$$

۴-۹ خلاصه

در این فصل، با دنبال کردن روشی موازی روش فصل ۴، تبدیل فوریه سیستم های گسسته در زمان را پی ریختیم و بسیاری از خواص مهم آن را بررسی کردیم. در این فصل تشابهات بسیار فراوان تحلیل فوریه پیوسته و گسسته در زمان و همین طور اختلاف های مهم بین آن ها را مشاهده کردیم. برای مثال رابطی بین سری فوریه و تبدیل فوریه، در حالت گسسته در زمان دقیقاً مشابه حالت پیوسته در زمان است. مخصوصاً روش به دست آوردن تبدیل فوریه سیگنال های نامتناوب از نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب دقیقاً همانند حالت پیوسته در زمان بود. همچنین بسیاری از خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان همتهای دقیقی در حالت گسسته در زمان دارند. ولی برخلاف حالت پیوسته در زمان، تبدیل فوریه سیگنال های گسسته در زمان نامتناوب همیشه با دوره تناوب 2π متناوب اند. علاوه بر این شباهت ها و تفاوت ها روابط همزادی نمایش فوریه سیگنال های پیوسته و گسسته در زمان را نیز توصیف کردیم. مهمترین شباهت تحلیل فوریه پیوسته و گسسته در زمان، کاربرد آن ها در بررسی سیگنال ها و سیستم های **LIT** است. مشخص تر این که خاصیت کانولوشن اساس تحلیل حوزه فرکانس سیستم های **LIT** است. بعضی کاربردهای این رهیافت را در بحث راجع به فیلترها، طی فصول ۳ تا ۵، و بررسی سیستم های مربوط به زمان-فرکانس به ارزش این روش بیشتر پی خواهیم برد. همچنین خواص ضرب پیوسته و گسسته در زمان اساس بررسی نمونه برداری در فصل ۷ و سیستم های مخابراتی در فصل ۸ را تشکیل می دهند.



$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 x[n] = \left. \frac{-d^2 X(e^{j\omega})}{d\omega} \right|_{\omega=0}$$

توجه مهم: با بهره گیری از خاصیت دوگانگی می توانیم معکوس تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$ را محاسبه نمود. برای این منظور ابتدا باید ضرایب سری فوریه آن را پیدا کرده و سپس سیگنال $x[n] = a_{-n}$ به دست می آید. توجه: تنها زمانی $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$ برابر صفر می شود که داشته باشیم: $x[0] = 0$.

$$\begin{aligned} X(e^{j\pi}) &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] (e^{-j\pi})^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |x[n]|^2 = 2\pi \times \frac{4}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

$$F\left\{\frac{n}{j}x[n]\right\} = \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{X(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{n}{j}x[n] \right|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |nx[n]|^2 \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \right|^2 = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{4}\right)^n = 2\pi \times \frac{20}{27} = \frac{40\pi}{27} \end{aligned}$$

در مثال فوق از رابطه زیر استفاده شده است:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a^n = \frac{(1+a)a}{(1-a)^3}, \quad |a| < 1$$

توجه: تبدیل هیلبرت در ایجاد یک سیگنال تک باند کناری (Single – Side band) کاربرد دارد. توجه: مفهوم پاسخ فرکانسی برای سیستم های زمان پیوسته و زمان گسسته یکسان است. اما یک تمایز مهم پاسخ فرکانسی زمان گسسته این است که دارای تناوب 2π می باشند. یعنی:

$$H(e^{j(\omega+2\pi r)}) = H(e^{j\omega}), \quad r \in Z$$

این بدین مفهوم است که برای تعیین پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ تنها بازه ای به طول 2π نیاز است. مثل:

$$-\pi \leq \omega \leq \pi \quad \text{یا} \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi$$

دایم می باشد و پاسخ گذرای سیستم نمی باشد.

توجه: پاسخ فرکانسی کلیه فیلترها متناوب با دوره تناوب 2π می باشد.

توجه: در حالت ایده آل منحنی فاز کلیه فیلترها تابعی خطی از فرکانس است یعنی:

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\omega k$$

در رابطه فوق، k تاخیر زمانی می باشد.

توجه: رابطه بین ورودی خروجی فیلترهای ایده آل فوق در حوزه زمان به صورت زیر می باشد:

$$y[n] = Cx[n - k]$$

به طور مثال برای فیلتر میان گذر داریم:

$$X(e^{j\omega}) = 0 \quad \omega > \omega_2, \omega < \omega_1$$

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} Ce^{-j\omega k} & \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \\ 0 & \text{و.ا} \end{cases}$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = CX(e^{j\omega})e^{-j\omega k}, \quad \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$$

با بهره گیری از جابجایی زمانی:

$$y[n] = Cx[n - k]$$

توجه: معادله تفاضلی خط با ضرایب ثابت زیر را در نظر بگیرید:

$$y[n] + ay[n - 1] = bx[n]$$

پاسخ فرکانسی آن عبارت است از:

$$H(j\Omega) = \frac{b}{1 + ae^{-j\Omega}}$$

به ازای $0 < a < 1$ رفتار سیستم همانند فیلتر بالاگذر و به ازای $-1 < a < 0$ همانند فیلتر پایین گذر است.

توجه: فیلتر پایین گذر ایده آل معکوس ندارد. زیرا طریقه ای که بتوان مولفه های فرکانسی بالای فرکانس قطع را که توسط چنین

فیلتری به صفر تنظیم شده اند باز یابی نمود، وجود ندارد.

سوال ۱: $x[n]$ را در یک سیگنال با پریود اصلی N و ضرایب سری فوریه $a[k]$ در نظر می گیریم. $a[n]$ نیز سیگنالی متناوب است. ضرایب سری فوریه آن کدام است؟

$$x[k] \quad (۱)$$

$$x[-k] \quad (۲)$$

$$\frac{1}{N} x[k] \quad (۳)$$

$$\frac{1}{N} x[-k] \quad (۴)$$

سوال ۲: اگر بین سیگنال های زمان گسسته $x[n]$ و $y[n]$ رابطه زیر برقرار باشد، آن گاه چه رابطه ای بین تبدیل فوریه آنها یعنی $X(\omega)$ و $Y(\omega)$ برقرار است؟

$$y[n] = \begin{cases} x[-n] & n = \text{even} \\ -x[-n] & n = \text{odd} \end{cases}$$

$$Y(\omega) = X(\omega - \pi) \quad (۲)$$

$$Y(\omega) = X(\pi - \omega) \quad (۱)$$

$$Y(\omega) = X^*(\pi - \omega) \quad (۴)$$

$$Y(\omega) = X^*(\omega - \pi) \quad (۳)$$

سوال ۳: سیگنال گسسته $x[n]$ در شکل زیر نشان داده شده است، اگر $X(e^{j\omega})$ تبدیل فوریه باشد، مقادیر زیر کدام است؟

$$a = X(e^{j\pi}), b = \int_{-\pi}^{\pi} (e^{j\omega}) d\omega, c = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega$$

$$a = 5, b = 4\pi, c = 716\pi \quad (۱)$$

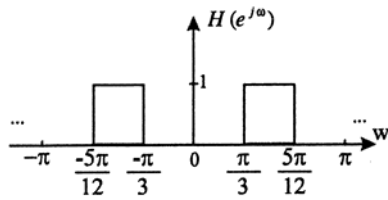
$$a = 5, b = 4\pi, c = 540\pi \quad (۲)$$

$$a = 9, b = 4\pi, c = 716\pi \quad (۳)$$

$$a = 9, b = 4\pi, c = 540\pi \quad (۴)$$

سوال ۷: اگر $x[n]$ سیگنال متناوب $1 + \sin\left(\frac{3\pi}{8}n + \frac{\pi}{4}\right)$ باشد، فیلتر شده $x[n]$ با فیلتر $H(e^{j\omega})$ به شکل

زیر کدام است؟



$1 + \sin\left(\frac{3\pi}{8}n + \frac{\pi}{4}\right)$ (۱)

صفر (۲)

$\sin\left(\frac{3\pi}{8}n + \frac{\pi}{4}\right)$ (۳)

$1 + \cos\left(\frac{3\pi}{8}n + \frac{\pi}{4}\right)$ (۴)

سوال ۸: اگر $X(e^{j\omega})$ تبدیل فوریه $x[n]$ باشد، تبدیل فوریه سیگنال گسسته در زمان

$x[1-n] + x[-1-n]$ کدام گزینه است؟

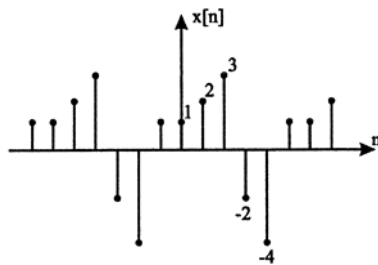
$2\cos(\omega)X(e^{j\omega})$ (۲)

$\cos(\omega)X(e^{j\omega})$ (۱)

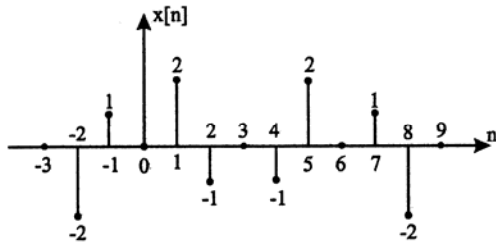
$4\cos(\omega)X(e^{j\omega})$ (۴)

$2\cos(\omega)X(e^{-j\omega})$ (۳)

سوال ۹: برای سیگنال گسسته و متناوب $x[n]$ در شکل زیر با ضرایب سری فوریه a_k ، مقدار $\sum_{k=-3}^3 a_k$ کدام است؟



باشد، در این صورت مقدار $X(0)$ و فاز $X(j\Omega)$ به ترتیب برابر است با:



(۱) $-2\Omega, 0$

(۲) $-3\Omega, 0$

(۴) 0.6

(۵) $-2\Omega, 6$

سوال ۱۱: رابطه بین ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ در یک سیستم گسسته در زمان LTI توسط معادله زیر توصیف شده است:

$$y[n] = -0.75y[n-1] + 1.5x[n]$$

کدام گزینه از گزینه های زیر در مورد این سیستم صدق می کند؟

- (۱) سیستم یک فیلتر بالاگذران از نوع FIR است.
- (۲) سیستم یک فیلتر بالاگذران از نوع IIR است.
- (۳) سیستم یک فیلتر پایین گذران از نوع FIR است.
- (۴) سیستم یک فیلتر پایین گذران از نوع IIR است.

سوال ۱۲: رابطه ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ برای سیستمی LTI زمان گسسته با معادله تفاضلی:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-2] + \frac{1}{16}y[n-4] = x[n] + x[n-1]$$

داده شده است. خروجی سیستم در حالت دایمی به ورودی $x[n] = \sin\frac{\pi}{2}n + 3\cos\pi n$ برابر است با:

(۱) $\frac{16\sqrt{2}}{25} \sin\frac{\pi}{2}(n - \frac{1}{2}) + \frac{9}{8} \cos\pi n$

(۴) $\frac{16\sqrt{2}}{25} \sin\frac{\pi}{2}(n - \frac{1}{2}) + \frac{9}{8} \cos\pi n$ (۳) $\frac{32}{23} \sin\frac{\pi}{2}(n - \frac{1}{2})$

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = -6x[n] + x[n-1]$$

در صورتی که ورودی به صورت $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ باشد، کدام یک از گزینه های زیر در مورد این سیستم نادرست است؟

$$y[n] = \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n \right) u[n] \quad (۱)$$

$$y[n] = -2(n+3)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad (۲)$$

$$y[n] = -6(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n] \quad (۳)$$

$$y[n] = -6(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1] \quad (۴)$$

سوال ۱۴: رابطه بین ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ در یک سیستم زمان گسسته LTI توسط معادله زیر توصیف شده است:

$$y[n] = -0.8y[n-1] + 1.2x[n]$$

کدام گزینه از گزینه های زیر در مورد این سیستم صدق می کند؟

(۱) سیستم یک فیلتر بالاگذران از نوع FIR است.

(۲) سیستم یک فیلتر پایین گذران از نوع IIR است.

(۳) سیستم یک فیلتر پایین گذران از نوع FIR است.

(۴) سیستم یک فیلتر بالاگذران از نوع IIR است.

سوال ۱۵: $x(t)$ سیگنال متناوب با پریود T و ضرایب سری فوریه a_k است. اگر $y[n]$ دنباله زمان گسسته با

تبدیل فوریه $Y(\omega)$ باشد و داشته باشیم $a_k = y[-k], \forall k$ ، در آن صورت کدام گزینه کامل تر است؟

$$x(\omega) = Y(\omega) \quad (۱)$$

$$x(\omega) = Y(a\omega) \quad (۲)$$

$$x(\omega) = Y(\omega) \quad (۳)$$

$$x(\omega) = Y\left(\frac{2\pi}{T}\omega\right) \quad (۴)$$

$X(t)$ عبارتند از:

$$\frac{1}{2\pi} x[-k] \quad (\text{ع}) \quad \frac{1}{2\pi} x[k] \quad (\text{ع}) \quad x[-k] \quad (\text{ع}) \quad x[k] \quad (\text{ع})$$

سوال ۱۷: یک سیگنال گسسته زمان با دوره تناوب اساسی $N = ۴$ و ضرایب سری فوریه a_k است. اگر یک دوره تناوب $x[n]$ به صورت زیر باشد، کدام یک از گزینه ها صحیح خواهد بود؟

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -1 & n = 2 \\ 0 & n = 1, 3 \end{cases}$$

$$a_{-101} = 0, a_{100} = \frac{1}{2}, a_{98} = 0 \quad (\text{ع})$$

$$a_{-101} = \frac{1}{2}, a_{100} = 0, a_{98} = 0 \quad (\text{ع})$$

$$a_{-101} = 0, a_{100} = 0, a_{98} = \frac{1}{2} \quad (\text{ع})$$

$$a_{-101} = 0, a_{100} = \frac{1}{2}, a_{98} = \frac{1}{2} \quad (\text{ع})$$

سوال ۱۸: یک سیستم گسسته خطی و تغییرناپذیر با زمان را در نظر بگیرید که دارای پاسخ ضربه

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad \text{باشد} \quad u[n] \text{ مشخص کننده دنباله پله واحد می باشد} \quad \text{خروجی این سیستم } y[n] \text{ را وقتی}$$

تبدیل فوریه ورودی $X(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega}}$ باشد، برابر کدام گزینه است؟

$$\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3\left(\frac{3}{4}\right)^n \right] u[n] \quad (\text{ع})$$

$$\left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3\left(\frac{3}{4}\right)^n \right] u[n] \quad (\text{ع})$$

$$\left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{3}{4}\right)^n \right] u[n] \quad (\text{ع})$$

$$\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{3}{4}\right)^n \right] u[n] \quad (\text{ع})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 + 2\sin^2(\omega) - \cos(\omega)}{2 + \sin^2(\omega)}$$

است، پاسخ سیستم به ورودی $x[n]$ چیست؟

$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{is } n \text{ even} \\ -1 & \text{is } n \text{ odd} \end{cases} \quad (۲)$$

$$x[n] = \begin{cases} -1 & \text{is } n \text{ even} \\ +1 & \text{is } n \text{ odd} \end{cases} \quad (۱)$$

$$x[n] = \begin{cases} -1 & \text{is } n \text{ even} \\ 3 & \text{is } n \text{ odd} \end{cases} \quad (۴)$$

$$x[n] = \begin{cases} 3 & \text{is } n \text{ even} \\ -1 & \text{is } n \text{ odd} \end{cases} \quad (۳)$$

سوال ۲۰: اگر تبدیل فوریه سیگنال زمان گسسته حقیقی $x[n]$ با رابطه زیر بیان شود، مقدار

$$A = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k x[2k]$$

برابر با کدام یک از گزینه ها خواهد بود؟

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2 + e^{j\omega}}{(1 + 2e^{j2\omega})(1 + 3e^{j2\omega})}$$

$$\frac{1}{12} \quad (۴)$$

(۳) ۱

$$\frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۱)$$

(۴-۱)

با توجه به خاصیت دوگانگی و در صورتی که a_k دارای دوره تناوب N باشد داریم:

$$x[n] \xleftrightarrow{DFS} a_k = X[k]$$

$$X[n] \xleftrightarrow{DFS} a_k = \frac{1}{N} x[-k]$$

(۱-۲)

$$x[-n] \xleftrightarrow{F} X(e^{-j\omega})$$

$$x[n] = (-1)^n x[-n] = e^{-j\omega} x[-n]$$

با بهره گیری از خاصیت جابجایی فرکانسی

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{-j(\omega-\pi)}) = X(e^{j(\pi-\omega)})$$

(۱-۳)

$$a = X(e^{j\pi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x[n] = 2 - 1 + 2 - 3 + 1 + 2 + 2 = 5$$

$$b = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega = 2\pi x[0] = 4\pi$$

که البته مقدار b در چهار گزینه یکسان است.

$$C = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{X(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n x[n]|^2$$

$$= 2\pi(0 + 16 + 81 + 16 + 100 + 144) = 716\pi$$

(۳-۴)

$$a_k = \frac{1}{5} \sum_{n=-2}^2 x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{5} n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{5}$$

$$a_k = \frac{1}{5} [2 + e^{jk \frac{4\pi}{5}} + e^{-jk \frac{4\pi}{5}} + 2e^{jk \frac{2\pi}{5}} + 2e^{-jk \frac{2\pi}{5}}]$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{4}{5} \cos \frac{2\pi}{5} k + \frac{2}{5} \cos \frac{4\pi}{5} k$$

از فیلتر فوق تنها سه مولفه $\omega = 0$ و $\frac{2\pi}{5}$ عبور می نماید و لذا پاسخ برابر است با:

$$y[n] = a_0 + 2a_1 \cos \left(\frac{2\pi}{5} n \right) = \frac{8}{5} + 0.64 \cos \left(\frac{2\pi}{5} n \right)$$

ظاهراً گزینه (۳) مد نظر طراح بوده است.

$$x[n] = \sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) = \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{7\pi n}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{6}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{j4} (e^{j\frac{7\pi}{6}n} - e^{-j\frac{7\pi}{6}n} + e^{j\frac{\pi}{6}n} - e^{-j\frac{\pi}{6}n}) \quad , \quad N=12$$

(۴-۶)

شیفت یافته سیگنال فرد $x_1[n]$ به اندازه ۴ واحد به جلو است.

$$x[n] = x_1[n-4]$$

از طرفی تبدیل فوریه سیگنال فرد موهومی خالص و فرد خواهد بود یعنی دارای فاز $\pm \frac{\pi}{2}$

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j4\omega} X_1(e^{j\omega}) \Rightarrow \angle X(e^{j\omega}) = -4\omega \pm \frac{\pi}{2}$$

(۳-۷)

سیگنال ورودی دارای فرکانس های $\frac{3\pi}{8}$ و $\omega = 0$ می باشد که فرکانس $\omega = 0$ از سیستم عبور نمی کند برای

$$\omega = \frac{3\pi}{8} \text{ داریم:}$$

$$H(e^{j\frac{3\pi}{8}}) = 1 \Rightarrow y[n] = 1 \times \sin\left(\frac{3\pi n}{8} + \frac{\pi}{4}\right)$$

(۳-۸)

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{-j\omega})$$

$$x[n-1] + x[n+1] \xleftrightarrow{F} 2\cos\omega X(e^{j\omega})$$

$$x[-n-1] + x[-n+1] \xleftrightarrow{F} 2\cos\omega X(e^{-j\omega})$$

(۴-۹)

$$\sum_{k=-3}^3 a_k = \sum_{k=-3}^3 a_k + a_3 = x[0] + \frac{1}{N} \sum_{n=\langle 6 \rangle}^3 x[n] e^{-j3\frac{2\pi}{6}n}$$

$$= 1 + \frac{1}{6} \sum_{n=\langle 6 \rangle}^3 (-1)^n x[n] = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

(۲-۱۰)

$$X(j0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = 0$$

سیگنال فوق حول نقطه $n=3$ تقارن زوج دارد.

$$\angle X(j\Omega) = \angle e^{-j3\Omega} X_1(j\Omega) = -3\Omega + 0 = -3\Omega$$

(۲-۱۱)

معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت به صورت بازگشتی نمایش داده شده است بنابراین سیستم IIR است.

$$Y(j\Omega) = -0.754 e^{-j\Omega} Y(j\Omega) + 1.5 X(j\Omega)$$

$$H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = \frac{1.5}{1 + 0.75e^{-j\Omega}}$$

با مقایسه پاسخ فرکانسی با

$$H(j\Omega) = \frac{b}{1 + ae^{-j\Omega}}$$

اشاره شده در داخل متن $0 < a < 1$ بوده و لذا رفتار سیستم همانند یک سیستم بالاگذر است.

(۲-۱۲)

$$\left[1 - \frac{1}{2}e^{-j2\omega} + \frac{1}{16}e^{-j4\omega}\right]Y(e^{j\omega}) = \left[1 + e^{-j\omega}\right]X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 + e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{16}e^{-j4\omega}}$$

سیگنال ورودی شامل ترکیبی از فرکانس های π , $\frac{\pi}{2}$ است.

$$\omega = \pi \Rightarrow |H(e^{j\pi})| = 0$$

$$\omega = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left|H(e^{j\frac{\pi}{2}})\right| = \frac{1+j}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}} = \frac{16}{25}(1+j) = \frac{16\sqrt{2}}{25} \angle \frac{\pi}{4}$$

بنابراین پاسخ برابر است با:

$$y[n] = \left|H(e^{j\frac{\pi}{2}})\right| \left| \sin\left[\frac{\pi}{2}n + \angle H(e^{j\frac{\pi}{2}})\right] \right| \Rightarrow y[n] = \frac{16\sqrt{2}}{25} \sin\frac{\pi}{2}\left(n - \frac{1}{2}\right)$$

(۱-۱۳)

$$\left[1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right]Y(e^{-j\omega}) = \left[-6 + e^{-j\omega}\right]X(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \frac{-6 + e^{-j\omega}}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2} + \frac{e^{-j\omega}}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2}$$

$$y[n] = -6(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1]$$

$$= -6(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1] = -2(n+3)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

حل تستی: به ازای $n = 0$ داریم:

$$n=0 \quad y[0] = -6$$

گزینه های ۲، ۳ و ۴ دارای مقادیر ۶- هستند و گزینه ۱ دارای مقدار ۱- است.

(۴-۱۴)

خروجی در هر لحظه علاوه بر ورودی به لحظات قبل خروجی بستگی دارد. لذا سیستم یک فیلتر IIR است.

(*)

$$H(j\Omega) = \frac{1.2}{1 + 0.8e^{-j\Omega}}$$

با مقایسه پاسخ فرکانسی با

$$H(j\Omega) = \frac{b}{1 + ae^{-j\Omega}}$$

(**)

$$(*) \text{ و } (**) \Rightarrow 0 < a < 1$$

لذا سیستم همانند یک فیلتر بالاگذر عمل می کند.

(۴-۱۵)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

تبدیل فوریه گسسته $y[n]$

$$Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[n] e^{-j\omega n}$$

با تغییر متغیر t به ω در بسط سری فوریه $x(t)$

$$x(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}\omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[-k] e^{jk\frac{2\pi}{T}\omega}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k] e^{jk\frac{2\pi}{T}\omega} = Y\left(\frac{2\pi}{T}\omega\right)$$

قضیه دوگانی

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(\omega)$$

$$x(t) \xleftrightarrow{F} x[-k]$$

(۱-۱۷)

$$x[n] = \delta[n] - \delta[n-2], \quad N = 4$$

تعیین ضرایب سری فوریه

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=\langle N \rangle} \{\delta[n] - \delta[n-2]\} e^{-jk\frac{\pi}{2}n} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{-jk\pi} \end{aligned}$$

$$a_0 = a_2 = 0, \quad a_1 = a_3 = \frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$a_k = a_{k+rN}, \quad r \in Z$$

$$a_0 = a_{0+25 \times 4} = a_{100} = 0$$

$$a_2 = a_{2+24 \times 4} = a_{98} = 0$$

$$a_3 = a_{3-26 \times 4} = a_{-101} = \frac{1}{2}$$

(۴-۱۸)

$$\begin{aligned} Y(j\Omega) &= H(j\Omega)X(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \times \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega}} \\ &= \frac{-2}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{3}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega}} \end{aligned}$$

بنابراین پاسخ برابر است با:

$$y[n] = \left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]u[n]$$

ورودی $x[n]$ دارای پریود $N = 2$ است.

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega_0 = \pi}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \pi$$
$$= \frac{1 + 2 \sin^2 \pi - \cos \pi}{2 + \sin^2 \pi} X(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})$$

(۳-۲۰)

$$A = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k v[k] = V(e^{j\pi}), \quad v[n] = x[2n]$$

سیگنال $x[n]$ با ضریب ۲ منقبض شده است.

$$V(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \left\{ X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + X(e^{j(\frac{\omega-2\pi}{2})}) \right\}$$

به ازای $\omega = \pi$ داریم:

$$V(e^{j\pi}) = \frac{1}{2} \left\{ X(e^{j\frac{\pi}{2}}) + X(e^{-j\frac{\pi}{2}}) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2+j}{2} + \frac{2-j}{2} \right\} = 1$$

فهرست مطالب

۳۶۳.....	فصل پنجم.....
۳۶۳.....	نمونه برداری.....
۳۶۳.....	۱-۵ نمایش سیگنال پیوسته در زمان توسط نمونه ها آن:.....
۳۶۸.....	قضیه نمونه برداری.....
۳۷۵.....	۳-۵ اثر نمونه برداری کند؛ اختلاط فرکانسی.....
۳۸۱.....	۴-۵ پردازش گسسته در زمان سیگنال های پیوسته در زمان.....
۳۹۲.....	۵-۵ نمونه برداری از سیگنال های گسسته در زمان.....
۴۰۳.....	سیستم های مخابراتی.....
۴۰۴.....	۱-۵ مدولاسیون دامنه‌ی نمایی مختلط و سینوسی.....
۴۰۸.....	۲-۵ مدولاسیون AM سینوسی.....
۴۱۴.....	۳-۵ مالتی پلکس فرکانسی.....
۴۱۶.....	۲-۵ مدولاسیون دامنه تک کنار بانندی.....
۴۲۰.....	۵-۵ مدولاسیون دامنه با حامل قطار پالس.....
۴۲۴.....	۶-۵ مدولاسیون دامنه پالس.....
۴۲۹.....	۷-۵ مدولاسیون فرکانس سینوسی.....
۴۳۷.....	۸-۵ مدولاسیون گسسته در زمان.....
۴۴۴.....	سوالات طبقه بندی شده فصل پنجم.....
۴۴۶.....	پاسخنامه سوالات طبقه بندی شده فصل پنجم.....

نمونه برداری

۵-۰ مقدمه

در شرایط معینی با دانستن مقادیر لحظه ای یا نمونه های گرفته شده در زمان های متساوی الفاصله از یک سیگنال پیوسته در زمان، می توان آن سیگنال را به طور کامل نمایش داد یا بازسازی کرد. این خاصیت نسبتاً عجیب از یک اصل اساسی به نام قضیه نمونه برداری نتیجه گرفته می شود. این قضیه بسیار مهم و مفیدست. برای مثال از این قضیه در تصویرهای متحرک استفاده می شود، که از یک رشته فریم تشکیل شده اند و هر کدام نمایی لحظه ای (یعنی نمونه برداری زمانی) از رخدادی هستند که پیوسته تغییر می کند. اگر این نمونه ها را پشت سر هم و با سرعت کافی مشاهده کنیم، نمایش دقیقی از رخداد اصلی را درک می کنیم. مثال دیگر عکس است که از شبکه ظریفی از نقاط تشکیل شده و هر نقطه با نمونه ای از یک تصویر پیوسته در مکان متناظرست. اگر این نمونه ها به اندازه کافی به هم نزدیک باشند، عکس پیوسته به نظر می رسد، هر چند زیر ذره بین وجود نقطه های منفصل آشکار می شود.

بیشتر اهمیت قضیه نمونه برداری در نقش واسطه ای آن بین سیگنال های پیوسته در زمان و سیگنال های گسسته در زمان است. در این فصل خواهیم دید که امکان نمایش کامل یک سیگنال پیوسته در زمان به وسیله نمونه های آن در شرایط معین، مکانیسمی برای نمایش سیگنال های پیوسته در زمان با انعطاف بیشتری انجام می شود و غالباً به پردازش سیگنال های پیوسته در زمان ترجیح داده می شود. این امر تا حد زیادی از گسترش چشمگیر تکنولوژی دیجیتال در چند دهه اخیر ناشی شده است، این تکنولوژی سیستم های ارزان، سبک، برنامه پذیر، و قابل بازسازی را به همراه داشته است. بنابراین مفهوم نمونه برداری راه بسیار جالب و پر استفاده ای برای استفاده از تکنولوژی گسسته در زمان برای ساختن سیستم های پردازش سیگنال های پیوسته در زمان در پیش پایمان می گذارد: با نمونه برداری سیگنال پیوسته در زمان را به یک سیگنال گسسته در زمان تبدیل می کنیم، سیگنال گسسته در زمان را با یک سیستم گسسته در زمان پردازش می کنیم و سپس آن را دوباره به صورت پیوسته در زمان در می آوریم.

در بحث زیر مفهوم نمونه برداری و فرایند بازسازی سیگنال پیوسته در زمان از روی نمونه های آن را معرفی می کنیم. در این بحث هم شرایط لازم برای امکان بازسازی یک سیگنال از نمونه هایش را تشخیص می دهیم و هم می بینیم که در صورت ارضا نشدن این شرایط چه پیش می آید. سپس پردازش سیگنال های پیوسته در زمانی را که با نمونه گیری به سیگنال های گسسته در زمان تبدیل شده اند در نظر می گیریم. سرانجام نمونه برداری از سیگنال های گسسته در زمان و مفاهیم تخمین و درون یابی را مورد بررسی قرار می دهیم.

۵-۱ نمایش سیگنال پیوسته در زمان توسط نمونه ها آن:

قضیه نمونه برداری

در حالت کلی انتظار نداریم که بدون وجود شرایط یا اطلاعات اضافی، سیگنالی به طور یکتا توسط رشته ای از نمونه های متساوی الفاصله اش مشخص شود. برای مثال شکل ۷-۱ سه سیگنال پیوسته در زمان متفاوت را نشان می دهد

که مقادیرشان در مضارب صحیح T یکسان است؛ یعنی

$$x_1(kT) = x_2(kT) = x_3(kT)$$

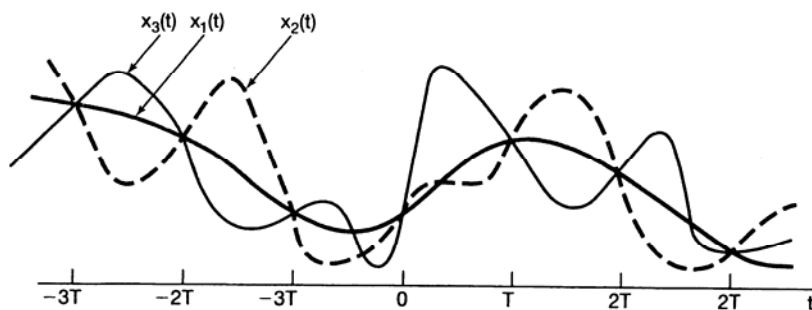
واضح است که تعداد سیگنال هایی که نمونه های مشابهی تولید می کنند بی نهایت است. ولی خواهیم دید که اگر باند

کافی به هم نزدیک باشند، آنگاه نمونه‌ها به طور یکتا سیگنال را مشخص می‌کنند، و می‌توان سیگنال را به طور کامل بازسازی کرد. نزدیکی نمونه‌ها با بزرگترین فرکانس موجود در سیگنال ارتباط دارد. این گزاره را قضیه نمونه برداری می‌نامند و در کاربردهای عملی روش‌های تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها اهمیت‌شان دارد.

۵-۱-۱ نمونه برداری با قطار ضربه

برای بیان قضیه نمونه برداری به راه مناسبی برای بیان نمونه‌های یک سیگنال پیوسته در زمان در فاصله‌ای مساوی نیاز داریم. یک راه مناسب برای انجام این کار استفاده از حاصلضرب یک قطار ضربه متناوب و سیگنال پیوسته در زمان $x(t)$ است. $x(t)$ سیگنالی است که قصد نمونه برداری از آن را داریم. این فرایند، که نمونه برداری با قطار ضربه نام دارد. در شکل ۲-۵ تصویر شده است. قطار ضربه متناوب $p(t)$ را تابع نمونه برداری، دوره تناوب T را تناوب نمونه برداری، و فرکانس پایه $\omega_p = 2\pi/T, p(t)$ را فرکانس نمونه برداری می‌نامند. در حوزه زمان

$$x_p(t) = x(t)p(t) \quad (1-5)$$



شکل ۱-۵: سه سیگنال پیوسته در زمان که در مضارب صحیح T مقادیر یکسان دارند.

که در آن

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad (2-5)$$

با توجه به خاصیت نمونه برداری ضربه واحد که در بخش ۱-۴-۲ بیان شد، می‌انیم که ضرب $x(t)$ در یک ضربه واحد نمونه‌ای از سیگنال در محل قرار گرفتن ضربه را به دست می‌دهد، یعنی $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$. با استفاده از این خاصیت در معادله (۱-۵) می‌بینیم که $x_p(t)$ مطابق شکل ۲-۵ یک قطار ضربه است که اندازه ضربه‌های آن نمونه‌های $x(t)$ در فواصل مساوی T

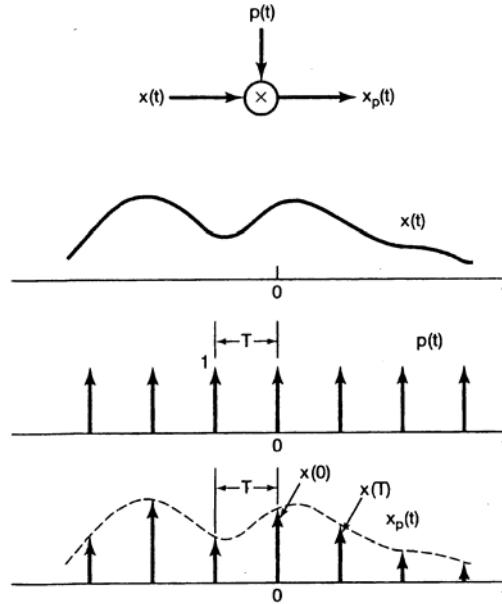
است، یعنی

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT) \quad (3-5)$$

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{T}} [X(j\omega) * P(j\omega)] \quad (4-5)$$

و با توجه به مثال ۴-۸

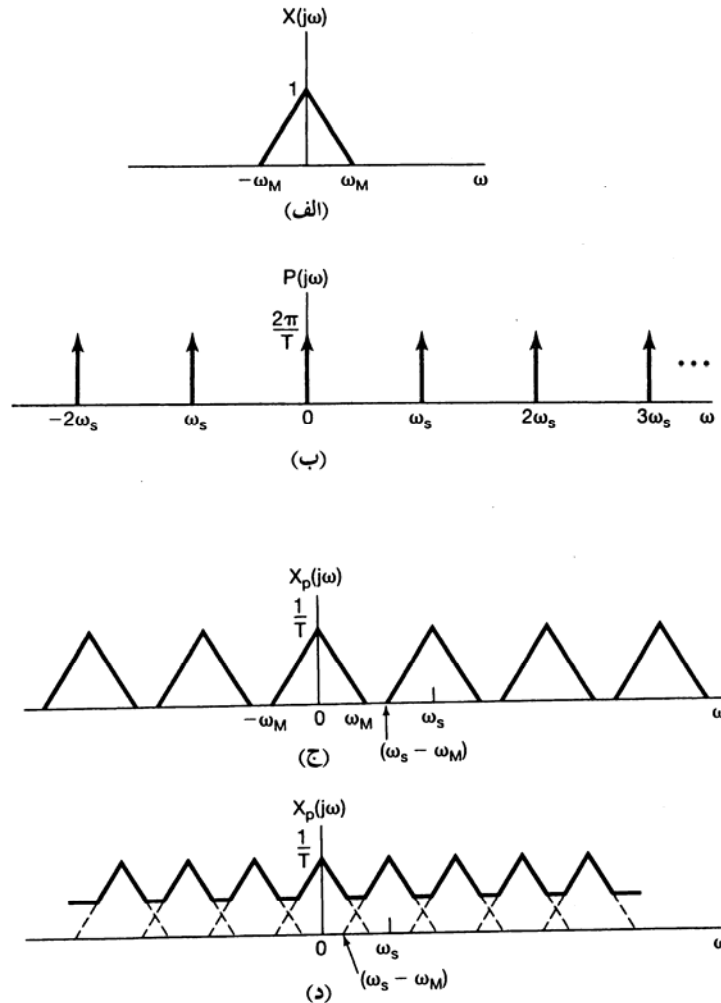
$$P(j\omega) = \frac{\sqrt{T}}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \quad (5-5)$$



شکل ۵-۲: نمونه برداری با قطار ضربه

نتیجه می گیریم $X(j\omega) * \delta(\omega - \omega_s) = X(j(\omega - \omega_s))$

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) \quad (6-5)$$

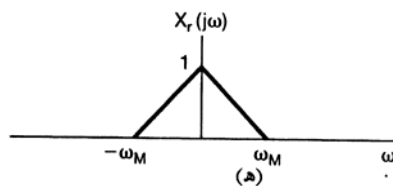
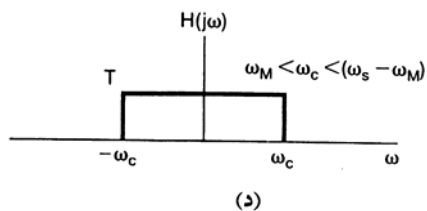
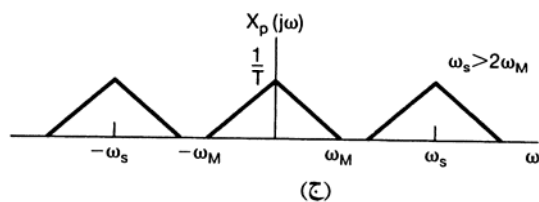
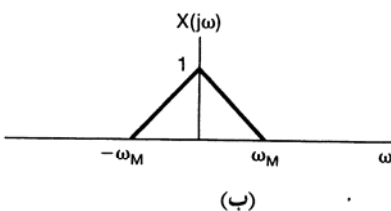
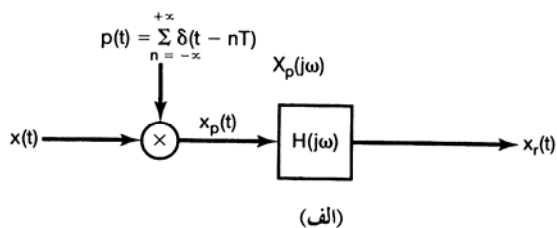


شکل ۳-۵: اثر نمونه برداری در حوزه زمان در حوزه فرکانس: (الف) طیف سیگنال اصلی؛ (ب) طیف تابع نمونه برداری؛ (ج) طیف سیگنال نمونه برداری شده با فرض $\omega_s > 2\omega_M$ ؛ (د) طیف سیگنال نمونه برداری شده با فرض $\omega_s < 2\omega_M$.

یعنی مطابق شکل ۳-۵ $X_p(j\omega)$ تابع متناوبی از ω ، متشکل از مجموع $X(j\omega)$ های انتقال یافته است که با ضرب $\frac{1}{T}$ تغییر مقیاس یافته اند. در شکل ۳-۵ (ج) $\omega_s > 2\omega_M$ و بنابراین

$X(\omega)$ های انتقال یافته همپوشانی ندارند؛ ولی در شکل ۳-۵ (د)، با $\omega_s < 2\omega_M$ همپوشانی وجود دارد. برای حالت شکل ۳-۵ (ج) $X(j\omega)$ در مضارب صحیح فرکانسی نمونه برداری بدون تغییر تکرار شده است. پس اگر $\omega_s > 2\omega_M$ می توان $x(t)$ را از $x_p(t)$ ، به کمک یک فیلتر پایین گذر با بهره T و فرکانس قطع بزرگتر از

قضیله نمونه برداری می نامند و می توان آن را به شکل زیر بیان کرد:



شکل ۴-۵: بازیابی دقیق یک سیگنال پیوسته در زمان از نمونه هایش توسط فیلتر پایین گذر: الف) سیستم نمونه برداری و بازسازی؛ ب) طیف نوعی $x(t)$ ؛ ج) طیف $x_p(t)$ متناظر با ب؛ د) فیلتر پایین گذر ایده آل برای جداسازی $x_r(t)$ از $X_p(j\omega)$ ، ه) طیف $x_r(t)$

فرض کنید سیگنالی با باند محدودست، یعنی در $|\omega| \leq \omega_M$ ، $X(\omega)$ در این صورت $x(t)$ ب صورت یکتا به وسیله نمونه های $x(nT)$ ، $n = \dots, \pm 1, \pm 2, \dots$ تعیین می شود، اگر

$$\omega_s \geq 2\omega_M$$

که در آن

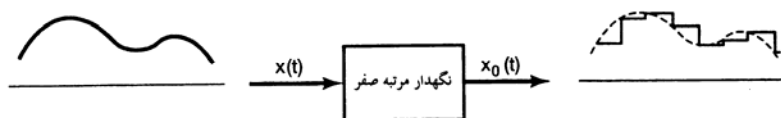
$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

با داشتن این نمونه ها می توانیم با ایجاد یک قطار ضربه متناوب که اندازه هایشان با مقادیر متوالی نمونه ها برابر باشد، $x(t)$ را بازسازی کنیم. این طقرا ضربه باید از یک فیلتر پایین گذر با بهره T و فرکانس قطع بزرگتر از ω_M و کمتر از $-\omega_M$ گذرانده شود. سیگنال خروجی این فیلتر دقیقاً برابر $x(t)$ است.

فرکانس $2\omega_M$ که طبق قضیه نمونه برداری بادی از آن بزرگتر باشد، آهنگ نایکویست خوانده می شود.

همانطور که در فصل ۶ گفتیم در عمل به دلایل مختلف از فیلتر ایده آل استفاده نمی شود. در بسیاری از کاربردها به جای فیلتر ایده آل شکل ۴-۵ فیلتر غیر ایده آل $H(\omega)$ به کار می رود که تقریبی از مشخصات فرکانسی دلخواه را دارد (یعنی در $|\omega| \ll \omega_M$ ، $H(\omega) \approx 1$ و در $|\omega| \geq \omega_s - \omega_M$ ، $H(\omega) \approx 0$). واضح است که هر تقریبی در طبقه فیلتر پایین گذر به تفاوت $x_T(t)$ و $x(t)$ شکل ۴-۵ می انجامد، که از تفاوت $X_T(\omega)$ و $X(\omega)$ ناشی می شود. پس فیلتر غیر ایده آل باید با توجه به اعوجاج قابل قبول در کاربرد مورد نظر برگزیده شود. در این فصل و فصل بعد برای سادگی و تاکید بر اصول پایه ای قضیه نمونه برداری فرض می کنیم فیلتر ایده آل موجودست و آن را به کار می بریم؛ ولی همواره به خاطر داریم که در عمل باید به جای چنین فیلتری یک فیلتر غیر ایده آل به کار رود که تفاوت قابل تحمل مشخصاتش با فیلتر ایده آل، توسط مسئله مورد نظر تعیین می شود.

قضیه نمونه برداری که ساده ترین بیان آن بر حسب نمونه برداری با قطار ضربه است، می گوید که سیگنال دارای باند محدود به صورتی یکتا با نمونه هایش مشخص می شود. در عمل تولید و انتقال پالس های باریک با دامنه زیاد که تقریبی از ضربه باشند، نسبتاً مشکلا است و غالباً ساده تر است که سیگنال نمونه برداری شده را به شکلی که نگهدار مرتبه صفر نامیده می شود تولید کرد. چنین سیستمی به صورت شکل ۵-۵ از $x(t)$ در یک لحظه نمونه برداری می کند و مقدار آن را تا لحظه نمونه برداری بعدی نگه می دارد. باز هم با فیلتر پایین گذر می توان $x(t)$ را از خروجی نگهدار مرتبه صفر بازیابی کرد. اما در این مورد فیلتر دیگر نباید در باند عبور بهره ثابت داشته باشد. برای یافتن مشخصه فیلتر لازم، ابتدا توجه کنید که می توان مطابق شکل ۵-۶ با گذاشتن یک سیستم LIT با پاسخ ضربه مستطیلی به دنبال سیستم نمونه برداری ضربه ای، $x_s(t)$ خروجی نگهدار مرتبه صفر را تولید کرد.



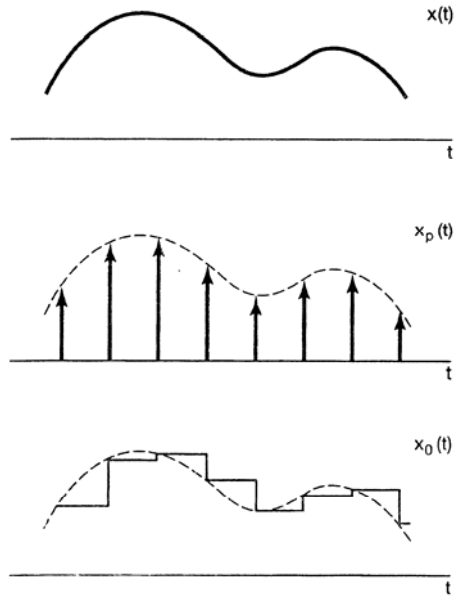
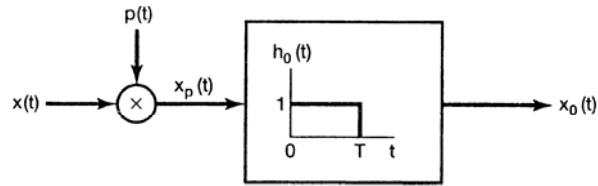
شکل ۵-۵: نمونه برداری با استفاده از نگهدار مرتبه صفر

برای بازسازی $x(t)$ از $x_s(t)$ ، $x(t)$ را با سیستم LIT دارای پاسخ ضربه $h_r(t)$ و پاسخ فرکانسی $H_r(j\omega)$ پردازش می کنیم. شکل ۷-۵ اتصال سری این سیستم با سیستم شکل ۵-۶ را نشان می دهد، می خواهیم $H_r(j\omega)$ را به نحوی تعیین کنیم که داشته باشیم $r(t) = x(t)$. مقایسه سیستم شکل ۴-۵ نشان می دهد که اگر ترکیب سری $h_r(t)$ و $h_s(t)$ فیلتر ایده آل پایین گذر $H(j\omega)$ شکل ۴-۵ باشد، آنگاه $r(t) = x(t)$. با توجه به مثال ۴-۴ و خاصیت جابجایی زمانی بخش ۴-۳-۲ داریم

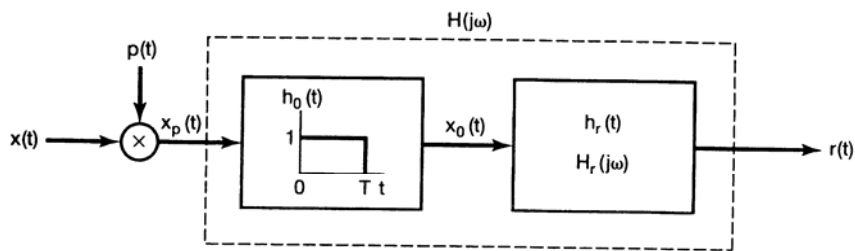
$$H_s(j\omega) = e^{j\omega T/2} \left[\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega} \right] \quad (7-5)$$

پس داشته باشیم

$$H_r(j\omega) = \frac{e^{j\omega T/2} H(j\omega)}{\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega}} \quad (8-5)$$

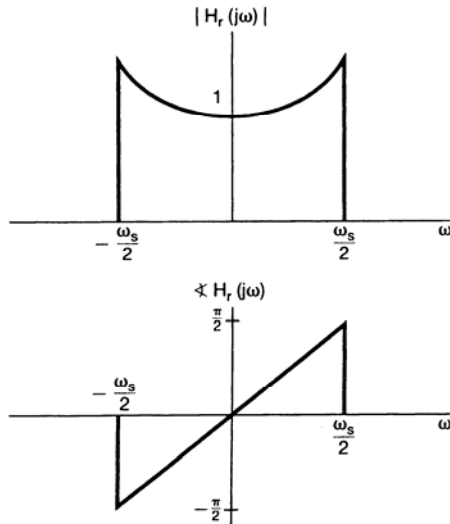


شکل ۵-۶: نگهدار مرتبه صفر به عنوان نمونه برداری با قطار ضربه که به دنبال آن یک سیستم LTI با پاسخ ضربه مستطیلی قرار دارد.

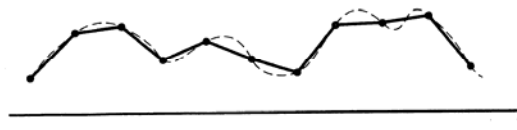


شکل ۵-۷: سری کردن نگهدار مرتبه صفر (شکل ۶-۷) و یک فیلتر بازسازی

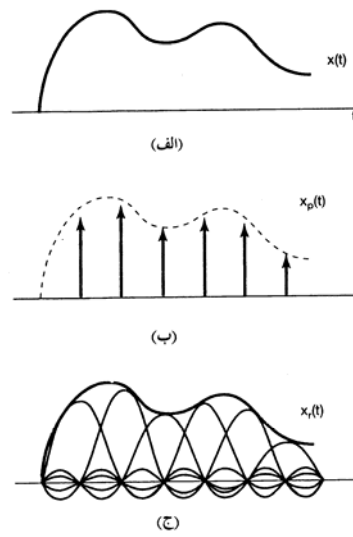
باز هم در عمل نمی توان فرکانسی معادله (۵-۸) را دقیقاً ساخت، بنابراین باید تقریب مناسبی از آن را طراحی کرد. در واقع در بسیاری از موارد فرض می شود که خروجی نگهدار مرتبه صفر بدون فیلتر پایین گذر اضافی، تقریب خوبی از سیگنال اصلی به دست می دهد، و اساساً یک درون یابی ممکن، هرچند نادقیق، از مقادیر نمونه هاست. ولی در بعضی کاربردها ممکن است درون یابی صافتری از نمونه ها مورد نیاز باشد. در بخش بعد مفهوم کلی تعبیر بازسازی سیگنال از روی نمونه ها به عنوان یک عمل درون یابی را با جزئیات بیشتر بررسی می کنیم.



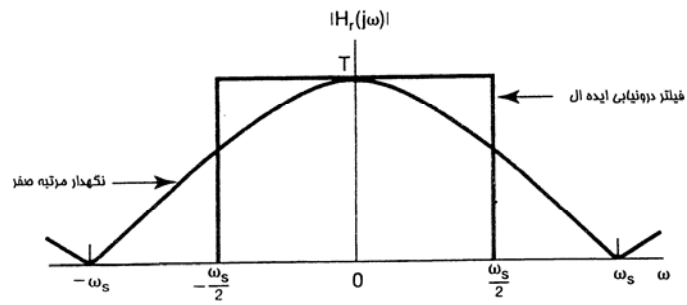
شکل ۵-۸: اندازه و فاز فیلتر بازسازی برای نگهدارنده مرتبه صفر



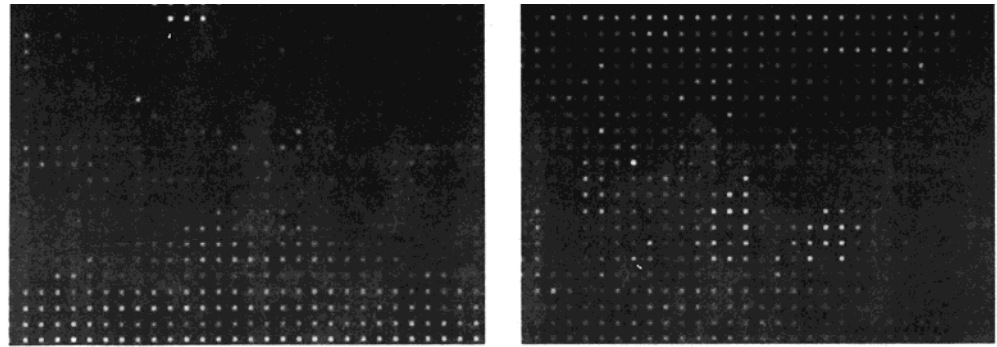
شکل ۵-۹: درونیابی خطی بین نمونه ها. منحنی خط چین سیگنال اصلی و خط توپر درونیابی خطی را نشان می دهد.



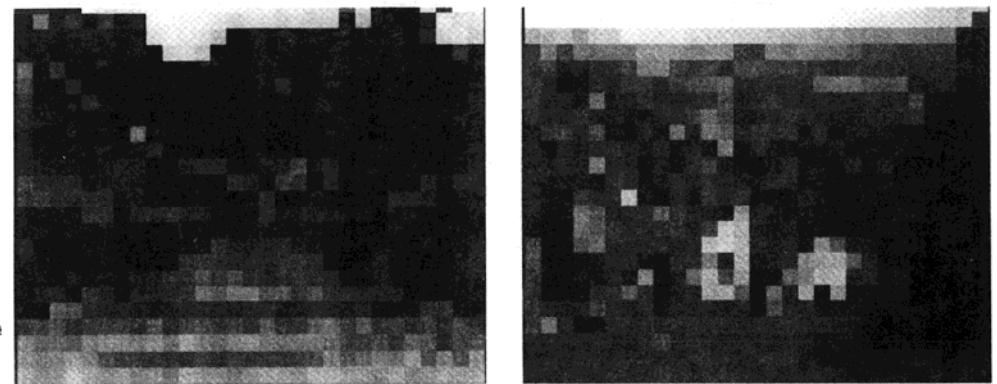
شکل ۵-۱۰: درونیابی ایده آل محدود-باند به کمک تابع سینک. الف) سیگنال محدود باند $x(t)$ ؛ ب) قطار ضربه های نمونه $x_p(t)$ ؛ ج) درونیابی محدود باند ایده آل که در آن به جای قطار ضربه بر هم نهشی از توابع سینک وجود دارد (معادله ۷-۱۱).



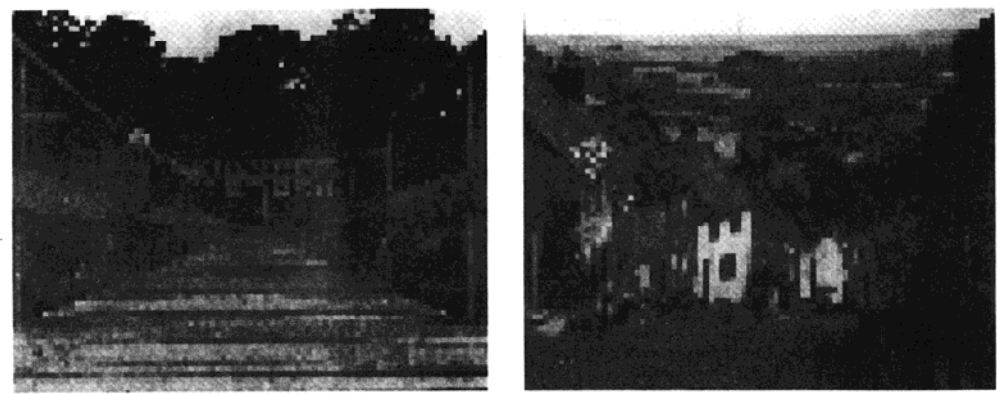
شکل ۵-۱۱: تابع تبدیل نگهدار مرتبه صفر و فیلتر درونیابی ایده آل



(a)



(b)

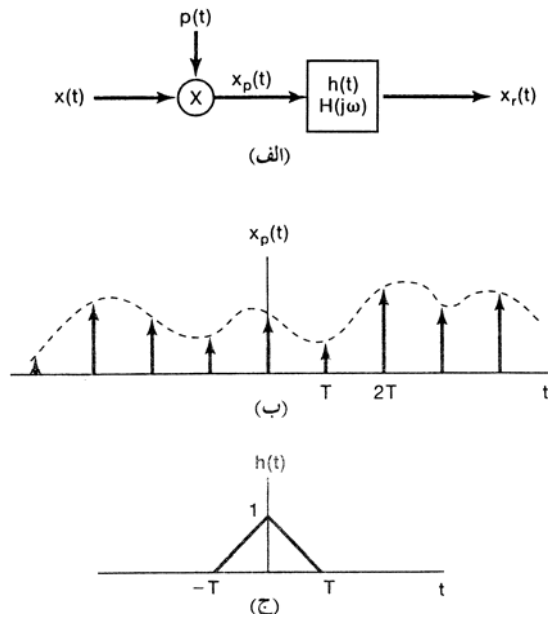


شکل ۵-۱۲: الف) تصاویر شکل های ۶-۲ (الف) و (ز) با نمونه برداری ضربه ای؛ ب) نتیجه اعمال نگهدار رتبه صفر به تصاویر (الف). سیستم بینایی به طور طبیعی فیلتر پایین گذری است که فرکانس قطع آن با زیاد شدن فاصله کم می شود. بنابراین وقتی تصویر از فاصله دور مشاهده می شود ناپیوستگی های شکل ۵-۱۲ (ب) هموار می شود؛ ج) اثر اعمال نگهدار رتبه صفر بعد از نمونه برداری با یک سوم فاصله نمونه برداری حالت (الف) در جهت های افقی و قائم. انسان خود عمل فیلتر پایین گذر را انجام می دهد و هنگام نگرش از دور اثر موزاییکی کم کم از بین می رود. برای مثال شکل ۷-۱۲ (ج) باز تصویری را نشان می دهد که به کمک نگهدار مرتبه صفر ساخته شده، ولی در اینجا فاصله نمونه ها در هر جهت یک چهارم فاصله نمونه های شکل ۵-۱۲ (الف) است. با نگرش معمولی سیستم بینایی اثر پایین گذر زیادی می گذارد ولی باز هم اثر موزاییکی مشهودست.

این روش ها نگهدارای مرتبه بالا خوانده می شوند. نگهدار مرتبه صفر سیگنالی به وجود می آورد که مطابق شکل ۵-۵ ناپیوسته است. ولی درون یابی خطی مطابق شکل ۵-۹ سیگنال بازسازی شده پیوسته ای به دست می دهد، ولی مشتق سیگنال خروجی به خاطر تغییر شیب در نقاط نمونه برداری ناپیوسته است. درون یابی خطی را که گاهی نگهدار رتبه یک می خوانند می توان به شکل ۵-۴ و معادله (۵-۹) نیز تعبیر کرد، که در آن تابع مثلثی نشان داده شده در شکل ۵-۱۳ است. تابع تبدیل نیز در شکل نشان داده شده است و عبارت است از

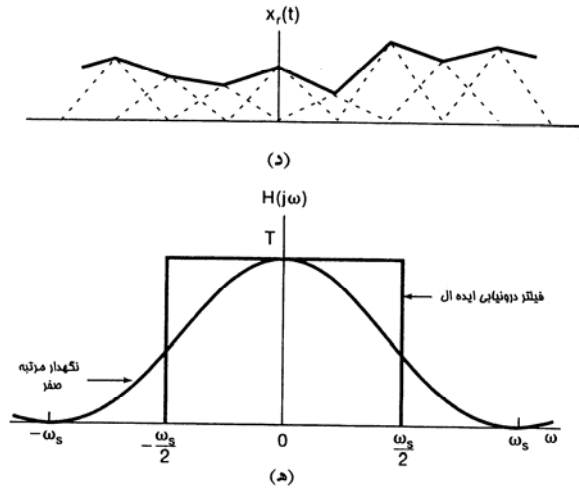
$$H(j) = \frac{1}{T} \left[\frac{\sin(\omega T / 2)}{\omega / 2} \right]^2 \quad (5-13)$$

در شکل ۵-۱۳ (ه) تابع تبدیلهنگهدار رتبه یک بر روی تابع تبدیل فیلتر درون یابی ایده ال نشان داده شده است. شکل ۵-۱۴ نتیجه اعمال نگهدار رتبه یک به تصویرهای شکل ۵-۱۲ (ج) را نشان می دهد، به نحوی مشابه می توان نگهدار مرتبه دو یا بالاتر نیز تعریف کرد که بازسازی هموارتری به دست می دهد. برای مثال خروجی نگهدار رتبه دو پیوسته است و مشتق اول آن نیز پیوسته است، ولی مشتق مرتبه دوم ناپیوسته ای دارد.



شکل ۵-۱۳: درونیابی خطی (نگهداری رتبه یک) به صورت نمونه برداری ضربه ای کانالو شده با پاسخ ضربه مثلثی: الف)

سیستم نمونه برداری و بازسازی: ب) قطار ضربه های نمونه.



شکل ۵-۱۳ (ادامه): (ج) پاسخ ضربه نگهدارنده مرتبه یک؛ (د) نتیجه اعمال نگهدار مرتبه یک به سیگنال نمونه برداری شده؛ (ه) مقایسه تابع تبدیل فیلتر درونیایی ایده آل و نگهدار مرتبه یک.

۵-۱۳ اثر نمونه برداری کند؛ اختلاط فرکانسی

در بخش های قبلی این فصل فرض شد که فرکانس نمونه برداری آنقدر بزرگ هست که شرایط قضیه نمونه برداری ارضا شود. چنانچه شکل ۵-۱۳ نشان می دهد به ازای $\omega_s > 2\omega_M$ طیف سیگنال نمونه برداری شده از بدل های جابجا شده طیف $x(t)$ تشکیل می شود، و این اساس قضیل نمونه برداری است. به ازای $\omega_s < 2\omega_M$ دیگر $X_p(j\omega)$ تکرارهای $X(j\omega)$ نیست و نمی توان با فیلتر پایین گذر آن را بازیافت. این پدیده که باعث می شود جملات معادله (۵-۶) همپوشانی داشته باشند، اختلاط فرکانسی نامیه می شود و در این بخش اثر و نتایج آن را بررسی می کنیم.



شکل ۵-۱۴: نتیجه اعمال نگهدار مرتبه یک به جای نگهدار رتبه صفر در تصویر شکل ۵-۱۲ (ج)

$x_T(t)$ دیگر برابر $x(t)$ نیست. اما در مسئله ۵-۲۵ خواهیم دید که سیگنال اصلی و سیگنال $x_T(t)$ بازسازی

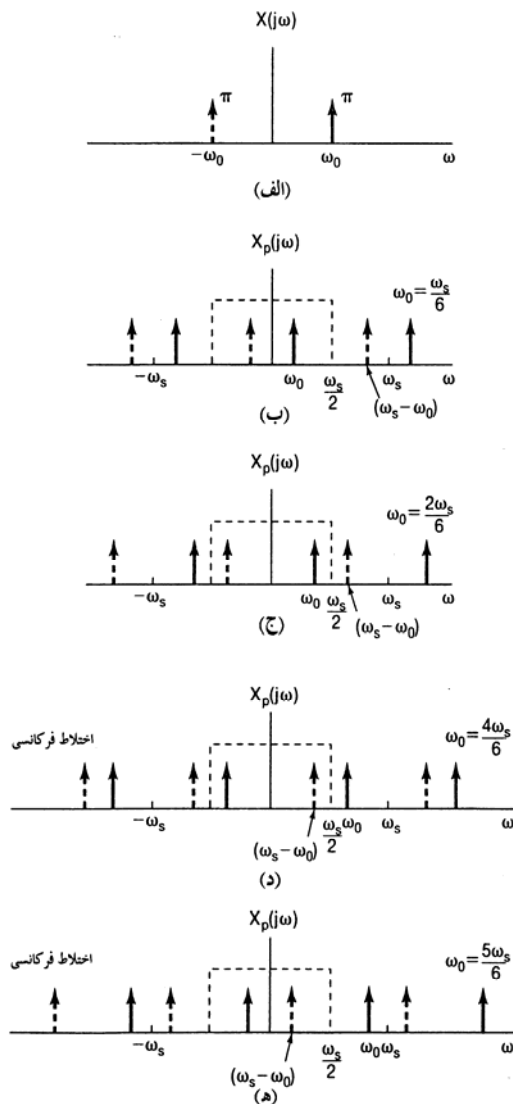
شده با درون یابی محدود باند در لحظات نمونه برداری برابرند؛ یعنی به ازای هر مقدار ω_s داریم

$$x_T(nT) = x(nT) \quad n = \dots, \pm 1, \pm 2 \quad (13-5)$$

با بررسی دقیق حالت نسبتاً ساده سیگنال سینوسی، می توان دیدی شهودی نسبت به رابطه $x_T(t)$ و $x(t)$ به

ازای $\omega_s \ll 2\omega_M$ به دست آورد. پس فرض کنید

$$x(t) = \cos \omega_c t \quad (14-7)$$



شکل ۵-۱۵: اثر نمونه برداری تند و نمونه برداری کند در حوزه فرکانس: الف) طیف سیگنال سینوسی اصلی؛ ب) ، ج) طیف سیگنال نمونه برداری شده به ازای $\omega_s > 2\omega_0$ ؛ د) ، ه) طیف سیگنال نمونه برداری شده به ازای $\omega_s < 2\omega_0$. با افزایش ω_s از (ب) تا (د) ضربه های توپر به سمت راست و ضربه های خط چین به سمت چپ می روند. در (د) و (ه) این ضربه ها آنقدر جابجا شده اند که به نحوی نادرست در باند عبور فیلتر پایین گذر قرار گرفته اند.

متفاوت از ضربه واقع در ω_c نشان داده ایم. به اثر تغییر فرکانسی ω_c ثابت در طیف $X(j\omega)$ توجه می کنیم. در شکل های ۷-۱۵ (ب) تا (ه)، $X_F(j\omega)$ به ازای چند مقدار ω_c نشان داده شده است. توجه کنید که در حالت (ب) یا (ج) اختلاط فرکانسی رخ نمی دهد زیرا $\omega_c \ll \omega_F/2$ ولی در حالت های (د) و (ه) اختلاط رخ می دهد.

خروجی فیلتر پایین گذر، $x_T(t)$ در هر حالت به صورت زیرست:

$$x_T(t) = \cos \omega_c t = x(t) \quad \omega_c = \frac{\omega_F}{9} \quad \text{(الف)}$$

$$x_T(t) = \cos \omega_c t = x(t) \quad \omega_c = \frac{2\omega_F}{9} \quad \text{(ب)}$$

$$x_T(t) = \cos(\omega_F - \omega_c) t \neq x(t) \quad \omega_c = \frac{4\omega_F}{9} \quad \text{(ج)}$$

$$x_T(t) = \cos(\omega_F - \omega_c) t \neq x(t) \quad \omega_c = \frac{5\omega_F}{9} \quad \text{(د)}$$

وقتی اختلاط رخ می دهد فرکانس اصلی ω_c به فرکانس کوچکتر $\omega_F - \omega_c$ تبدیل می شود. به ازای $\omega_c \ll \omega_F/2$ ، هرچه ω_c نسبت به ω_F بزرگتر شود، فرکانس خروجی $\omega_F - \omega_c$ کوچک می شود. مثلاً به ازای $\omega_c = \omega_F$ سیگنال بازسازی شده ثابت است. عجیب نیست زیرا اگر در هر تناوب یک نمونه گرفته شود تمام نمونه ها برابرند، گویی از یک سیگنال ثابت ($\omega_c = 0$) نمونه برداری شده است. در شکل ۷-۱۶ سیگنال $x(t)$ ، نمونه هایش و سیگنال بازسازی شده $x_T(t)$ را به ازای چهار حالت شکل ۷-۱۵ نشان داده ایم. این شکل نشان می دهد که فیلتر پایین گذر همیشه یک سیگنال سینوسی از نمونه های $x(t)$ می گذراند که فرکانس آن از $\omega_F/2$ کوچکترست.

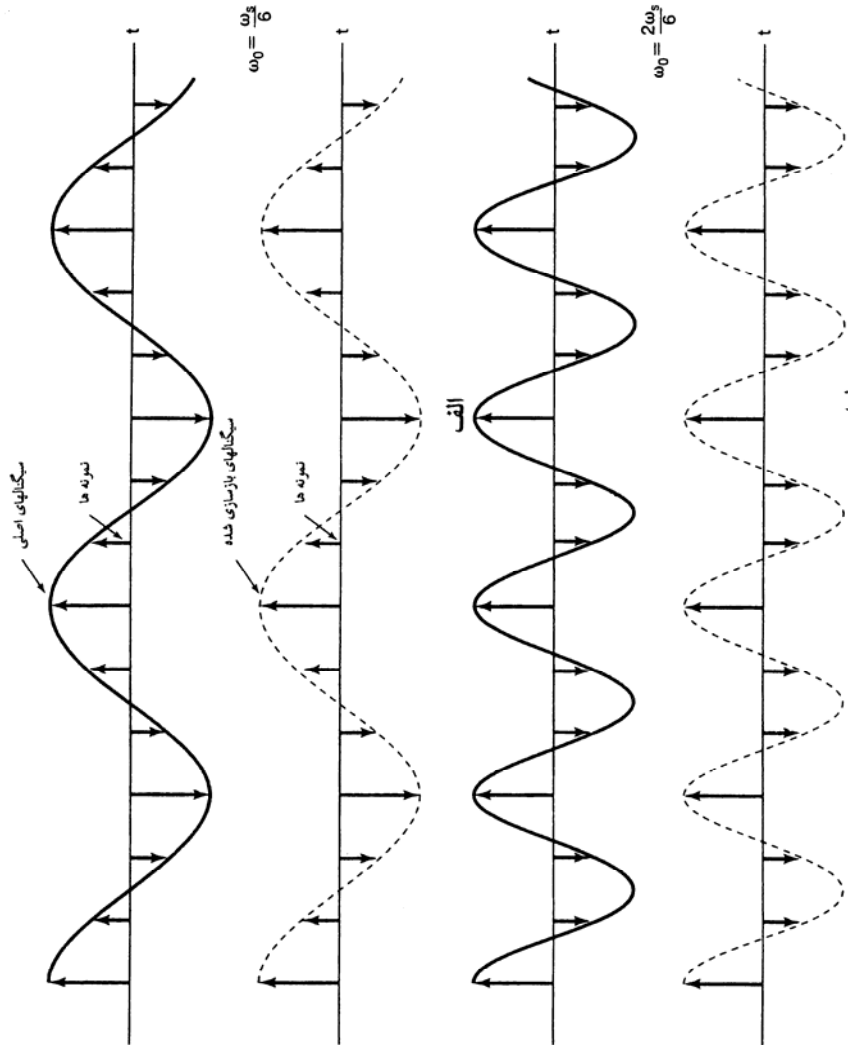
به عنوان گونه ای خاص از مثال های بالا سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$x(t) = \cos(\omega_c t + \phi) \quad (15-7)$$

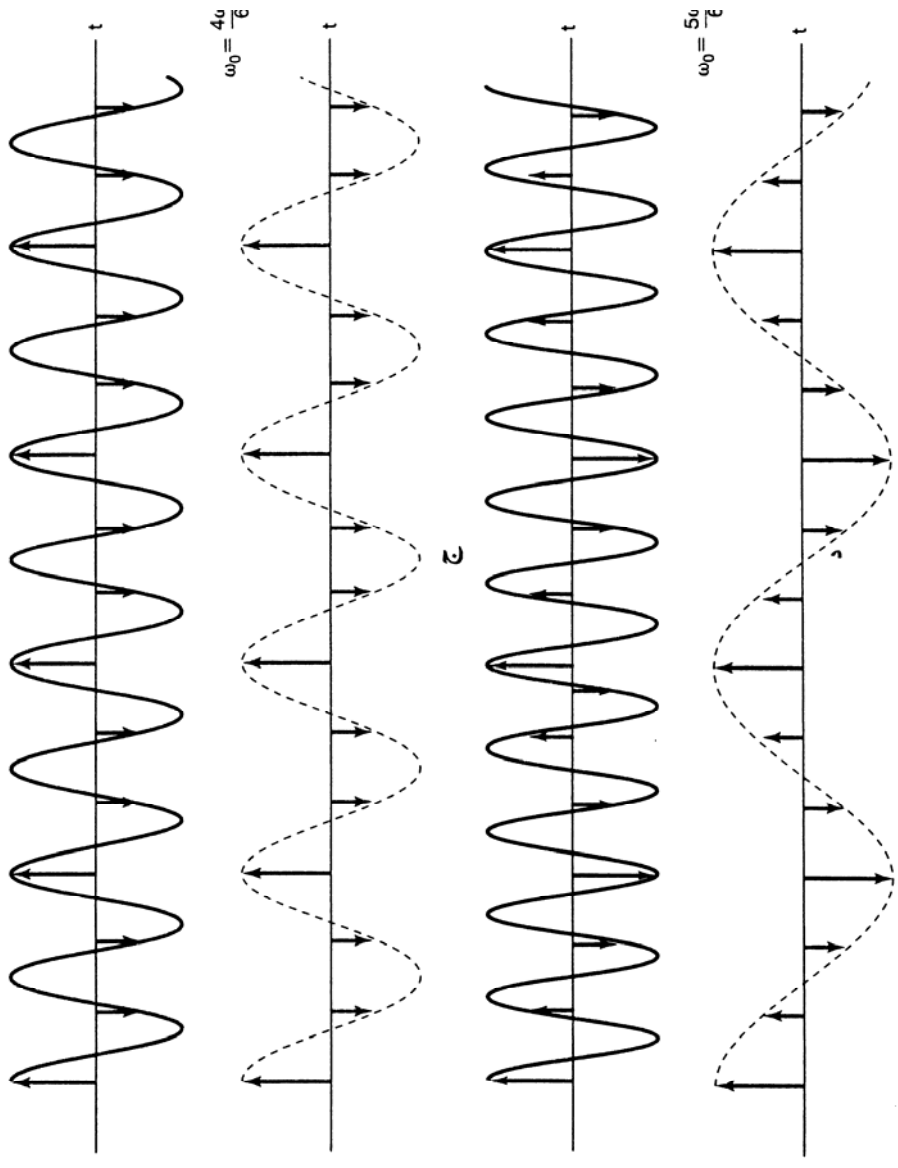
در این حالت تبدیل فوریه $x(t)$ اساساً همان چیزی است که در شکل ۷-۱۵ (الف) نشان داده شده، ولی این بار ضربه توپر دامنه اش $\pi\delta^{\phi}$ است و ضربه خط چین دامنه ای با فاز مخالف دارد، یعنی $\pi\delta^{-\phi}$. اگر همان ω_c های شکل ۷-۱۵ را در نظر بگیریم، همان طیف ها را برای نمونه های $\cos(\omega_c t + \phi)$ به دست می آوریم، ولی این بار تمام ضربه های توپر دامنه ای برابر $\pi\delta^{\phi}$ و تمام ضربه های خط چین دامنه ای برابر $\pi\delta^{-\phi}$ دارند. باز هم مثل قبل در موارد (ب) و (ج) شرط قضیه نمونه برداری برآورده می شود، پس $x_T(t) = \cos(\omega_c t + \phi) = x(t)$ ، و در مواردی (د) و (ه) اختلاط داریم. ولی اکنون ضربه های توپر و

یعنی فاز ϕ تغییر علامت می دهد. $x(t) = \cos[(\omega_s - \omega_s)t - \phi]$

این نکته مهم است که قضیه نمونه برداری صریحاً می گوید فرکانس نمونه برداری باید از دو برابر بالاترین فرکانس سیگنال بزرگتر باشد نه بزرگتر یا مساوی. مثال زیر نشان می دهد که نمونه برداری از یک سیگنال سینوسی با فرکانسی دقیقاً دو برابر فرکانس سیگنال (یعنی دو نمونه در هر تناوب) کافی نیست.



شکل ۵-۱۶: اثر اختلاط فرکانسی بر سیگنال سینوسی. سیگنال سینوسی اصلی (منحنی توپر)، نمونه هایش و سیگنال بازسازی شده (منحنی خط چین) به ازای چهار مقدار ω_0 : الف) $\omega_0 = \omega_s / 6$ ؛ ب) $\omega_0 = 2\omega_s / 6$ ؛ ج) $\omega_0 = 4\omega_s / 6$ ؛ د) $\omega_0 = 5\omega_s / 6$. تنها در (ج) و (د) اختلاط فرکانسی پیش می آید.



شکل ۵-۱۶: (ادامه)

سیگنال سینوسی زیر را در نظر بگیرید

$$x(t) = \cos\left(\frac{\omega_s}{\gamma}t + \phi\right)$$

و فرض کنید که با دو برابر فرکانس آن، یعنی ω_s از آن نمونه برداری ضربه ای می کنیم. در مسئله ۵-۳۹ نشان خواهیم داد که اگر این سیگنال نمونه برداری شده به یک فیلتر پایین گذر ایده آل با فرکانس $\omega_s/2$ اعمال شود، خروجی زیر حاصل می شود

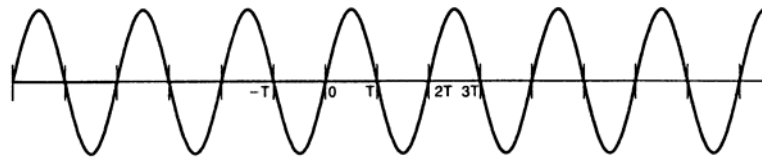
$$x_T(t) = (\cos \phi) \cos\left(\frac{\omega_s}{\gamma}t\right)$$

پس بازسازی دقیق $x(t)$ تنها در صورتی ممکن است که ϕ صفر (با مضرب صحیحی از 2π) باشد. در غیر این صورت سیگنال $x_T(t)$ با $x(t)$ برابر نیست.

به عنوان یک مثال حدی $\phi = -\frac{\pi}{\gamma}$ را در نظر بگیرید، یعنی

$$x(t) = \sin\left(\frac{\omega_s}{\gamma}t\right)$$

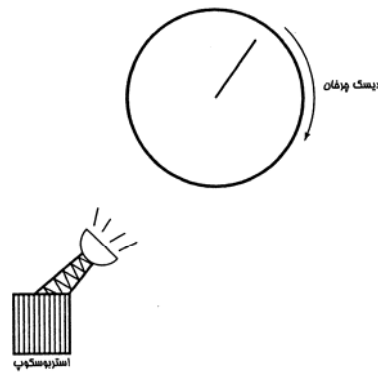
این سیگنال در شکل ۵-۱۷ نشان داده شده است. می بینیم که مقدار سیگنال در مضارب صحیح زمان تناوب نمونه برداری $2\pi/\omega_s$ صفرست. پس نمونه برداری با این آهنگ سیگنالی متحد با صفر ایجاد می کند، و اگر این ورودی صفر به فیلتر پایین گذر ایده آلی اعمال شود، خروجی $x_T(t)$ حاصل نیز متحد صفرست.



شکل ۵-۱۷: سیگنال سینوسی مثال ۵-۱

اثر نمونه برداری کند، که در اثر آن فرکانس های بالا به فرکانس های پایین تر منتقل می شوند، اساس اثر استروویوسکوپ است. برای مثال وضعیت شکل ۵-۱۸ را در نظر بگیرید که در آن قرص چرخانی با تندی ثابت می چرخد و یک خط شعاعی روی قرص وجود دارد. فلاش های استروب نقش سیستم نمونه برداری را انجام می دهد، زیرا قرص را در فواصل زمانی بسیار کوتاهی روشن می کند. اگر فرکانس استروب از تندی دورانی قرص خیلی بزرگتر باشد، تندی چرخش قرص به درستی مشاهده می شود. اگر فرکانس استروب از دو برابر تندی چرخش قرص کمتر شود، سرعت چرخش کمتر از آنچه هست به نظر می رسد. به علاوه، به خاطر اثر وارونگی فاز به نظر می رسد که قرص برعکس می چرخد! به بیان ساده اگر مکان یک خط ثابت قرص را در نمونه های متوالی دنبال کنیم، به ازای

قرص را در محل هایی نشان می دهند که کمی در جهت پادساعتگرد جابجا شده اند، که خلاف جهت چرخش قرص است. به ازای یک فلاش در هر دور، متناظر با $\omega_p = \omega_s$ ، خط شعاعی ثابت به نظر می رسد (یعنی فرکانس چرخش و هارمونیکی های آن به فرکانس صفر منتقل شده اند). در فیلم های وسترن نیز اثر مشابهی دیده می شود، چرخ دلیجان ها کندتر از آنچه حرکت خود دلیجان تداعی می کند می چرخند، و حتی گاهی در جهت مخالف می چرخند. در اینجا اثر نمونه برداری به این خاطرست که فیلم از فریم های مجزا (معمولاً ۱۸ تا ۲۴ فریم در ثانیه) تشکیل می شود.

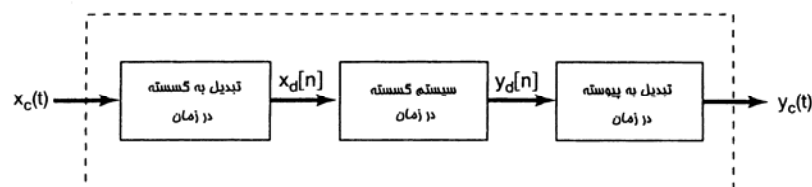


شکل ۵-۱۸: اثر استروپوسکپی

بحث بالا نشان می دهد که اثر استروپوسکپی می تواند کاربرد مفیدی از اختلاط ناشی از نمونه برداری کند باشد. یکی دیگر از کاربردهای عملی اختلاط اسیلوسکوپ های نمونه بردار هستند. این ابزارها برای مشاهده شکل موج های فرکانس بالا به کار می روند و در آن ها از اصول نمونه برداری برای انتقال این فرکانس های به فرکانس های پایین تری که نمایششان ساده ترست استفاده می شود. اسیلوسکوپ نمونه برداری در مسئله ۵-۳۸ با تفصیل بیشتر بررسی خواهد شد.

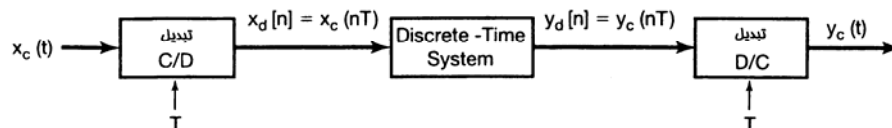
۵-۴ پردازش گسسته در زمان سیگنال های پیوسته در زمان

در بسیاری از کاربردها پردازش سیگنال پیوسته در زمان با تبدیل آن به سیگنال گسسته در زمان، پردازش آن، و تبدیل دوباره آن به سیگنال پیوسته در زمان مزایای زیادی دارد. پردازش سیگنال گسسته در زمان را می توان با کامپیوتر همه منظوره یا تک منظوره، ریزپردازنده، با هریک از انواع وسایلی که برای پردازش سیگنال گسسته در زمان به کار می روند، انجام داد.



شکل ۵-۱۹: پردازش گسسته در زمان سیگنال های پیوسته در زمان

در شکل ۵-۱۹ دانست، که در آن سیگنال های پیوسته در زمان و $x_d[n], y_d[n]$ سیگنال های گسسته در زمان متناظر با $x_c(t), y_c(t)$ هستند. البته کل سیستم شکل ۵-۱۹ یک سیستم پیوسته در زمان است زیرا ورودی و خروجی سیستم هر دو سیگنال پیوسته در زمان اند. مبنای نظری تبدیل سیگنال پیوسته در زمان به سیگنال گسسته در زمان و بازسازی سیگنال پیوسته در زمان از روی نمایش گسسته در زمان آن، قضیه نمونه برداری است که در بخش ۵-۱ بررسی شد. با نمونه برداری متناوب با فرکانسی که شرط قضیه نمونه برداری را برآورده کند، سیگنال $x_c(t)$ را می توان دقیقاً با رشته ای از مقادیر نمونه های لحظه ای $x_c(nT)$ نمایش داد؛ یعنی رشته گسسته در زمان $x_d[n]$ به صورت زیر از $x_c(t)$ به دست می آید.



شکل ۵-۲۰: نمادهای متداول برای تبدیل پیوسته در زمان به گسسته در زمان و تبدیل گسسته در زمان به پیوسته در زمان. T تناوب نمونه برداری است.

$$x_d[n] = x_c(nT) \quad (۵-۱۶)$$

تبدیل $x_c(t)$ به $x_d[n]$ توسط سیستم اول شکل ۵-۱۹ انجام می شود و تبدیل پیوسته در زمان به گسسته در زمان، با نام اختصاری **C/D** خوانده می شود. تبدیل معکوس توسط سیستم سوم شکل ۵-۱۹ انجام می شود و تبدیل گسسته در زمان به پیوسته در زمان، با نام اختصاری **D/C**، خوانده می شود. عمل درون یابی نمونه های ورودی را انجام می دهد. یعنی سیستم **D/C** یک سیگنال پیوسته در زمان $y_c(t)$ را ایجاد می کند که با سیگنال گسسته در زمان $y_d[n]$ به صورت زیر مرتبط می شود.

$$y_d[n] = y_c(nT)$$

این نمادگذاری در شکل ۵-۲۰ به طور صریح نشان داده شده است. در سیستم هایی چون کامپیوترهای دیجیتال و سیستم های دیگری که در آن ها سیگنال گسسته در زمان به صورت دیجیتالی پردازش می شود، وسیله انجام دهنده تبدیل **D/C** را معمولاً مبدل دیجیتال به آنالوگ (**D/A**) می نامند.

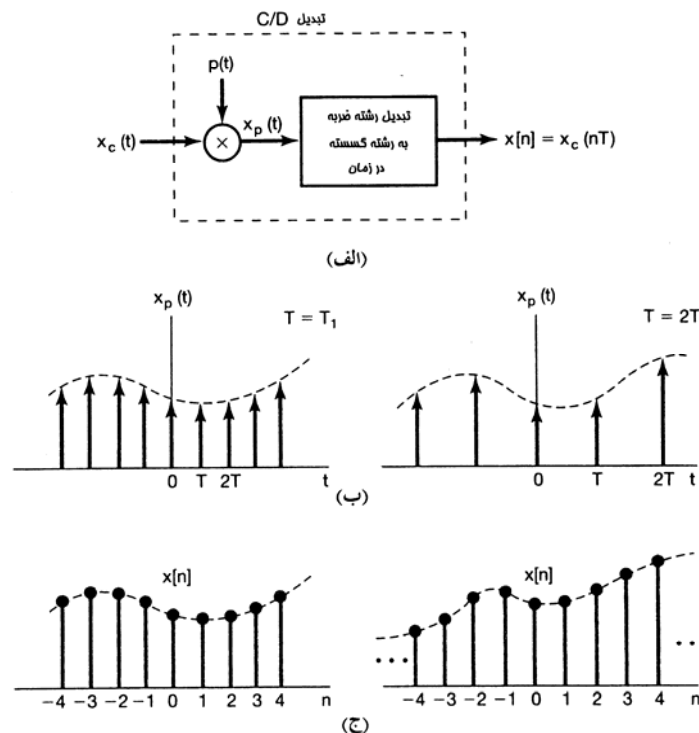
برای درک بهتر رابطه بین سیگنال پیوسته در زمان $x_c(t)$ و نمایش گسسته در زمان $x_d[n]$ می توان **C/D** را ترکیب متوالی نمونه برداری و نگاشت قطار ضربه حاصل به یک رشته عددی در نظر گرفت. این دو گام در شکل ۵-۲۱ نشان داده شده است. در گام اول، نمونه برداری، قطار ضربه $x_p(t)$ یک رشته ضربه است که دامنه هر ضربه با نمونه ای از $x_c(t)$ متناظرست و فاصله زمانی بین ضربه ها با دوره تناوب نمونه برداری T برابرست. تبدیل قطار ضربه به

نمونه ها، بر حسب متغیر مستقل جدید n برابر یک است. پس در واقع تبدیل قطار ضربه نمونه ها به رشته نمونه های گسسته در زمان را می توان یک هنجار سازی زمانی دانست. این هنجار سازی در تبدیل $x_p(t)$ به $x_d[n]$ در شکل های ۷-۲۱ (ب) و (ج) مشهودست، در این شکل ها $x_d[n]$ و $x_p(t)$ به ازای زمان های نمونه برداری $T = T_1$ و $T = 2T_1$ نشان داده شده اند.

بررسی طبقات شکل ۵-۱۹ در حوزه فرکانس نیز آموزنده است. چون هم با تبدیل فوریه پیوسته در زمان سر و کرا داریم و هم با تبدیل فوریه گسسته در زمان، متغیر فرکانس را در حالت پیوسته در زمان با ω و در حالت گسسته در زمان با Ω نشان می دهیم تا آن ها را از هم متمایز کنیم. برای مثال تبدیل فوریه های پیوسته در زمان $x_c(t)$ و $y_c(t)$ را به ترتیب $X_c(j\omega)$ ، $Y_c(j\omega)$ نشان می دهیم و تبدیل فوریه های گسسته در زمان $x_d[n]$ ، $y_d[n]$ را با $X_d(e^{j\Omega})$ ، $Y_d(e^{j\Omega})$.

برای شروع با اعمال تبدیل فوریه به معادله (۵-۳)، $X_p(j\omega)$ [یعنی تبدیل فوریه پیوسته در زمان $X_p(t)$] را بر حسب نمونه های $x_c(t)$ بیان می کنیم. چون

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t - nT) \quad (۵-۱۷)$$



شکل ۵-۲۱: نمونه برداری با قطار ضربه متناوب و تبدیل به رشته گسسته در زمان: (الف) کل سیستم؛ (ب) $x_p(t)$ به ازای دو

و چون تبدیل $\delta(t - nT)$ برابر $e^{-j\omega nT}$ است، به دست می آوریم

$$X_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) e^{-j\omega nT} \quad (18-5)$$

حال تبدیل فوریه گسسته در زمان $x_d[n]$ در نظر بگیرید

$$X_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_d[n] e^{-j\Omega n} \quad (19-5)$$

یا با استفاده از معادله (16-5)

$$X_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) e^{-j\Omega n} \quad (20-5)$$

مقایسه معادله های (18-5) و (20-5) نشان می دهد که $X_d(e^{j\Omega})$ ، $X_c(j\omega)$ به صورت زیر به هم مرتبط اند

$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\Omega/T) \quad (21-5)$$

همچنین به خاطر دارید که طبق معادله (6-5) و آنچه در شکل 3-5 نشان داده شده است

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j(\omega - k\omega_s)) \quad (22-5)$$

پس

$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j(\Omega - 2\pi k)/T) \quad (23-5)$$

رابطه بین $X_d(e^{j\Omega})$ ، $X_p(j\Omega)$ و $X_c(j\omega)$ در شکل 22-5 به ازای دو زمان نمونه برداری مختلف نشان داده

شده است. $X_d(e^{j\Omega})$ گونه تغییر مقیاس فرکانسی یافته $X_p(j\omega)$ است. همچنین $X_d(e^{j\Omega})$ اکنون با دوره

تناوب 2π متناوب است. متناوب بودن $X_d(e^{j\Omega})$ خاصیت هر تبدیل فوریه گسسته در زمانی است. طیف $x_d[n]$

با تکرار تناوبی طیف $x_c(t)$ ، مطابق معادله (22-5) و یک تغییر مقیاس فرکانسی، مطابق معادله (21-5) به دست

می آید. تکرار تناوبی نتیجه گام اول فرایند تبدیل شکل 21-5، یعنی نمونه برداری با قطار ضربه است. تغییر مقیاس

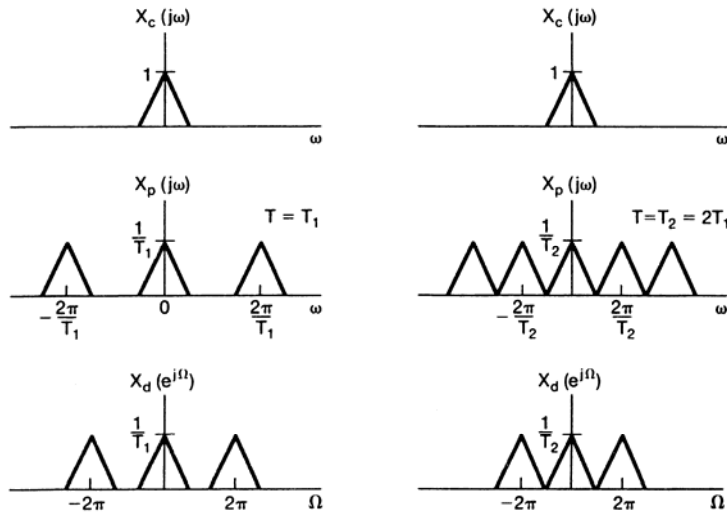
خطی فرکانس را می توان نتیجه هنجارسازی زمانی ناشی از تبدیل قطار ضربه $x_p(t)$ به رشته گسسته در زمان

$x_d[n]$ پنداشت. با توجه به خاصیت تغییر مقیاس زمانی تبدیل فوریه بخش 4-3-5، تغییر مقیاس محور زمان با

ضرب $1/T$ به تغییر مقیاس فرکانس با ضرب T می انجامد. پس رابطه $\Omega = \omega T$ با این مفهوم که در تبدیل

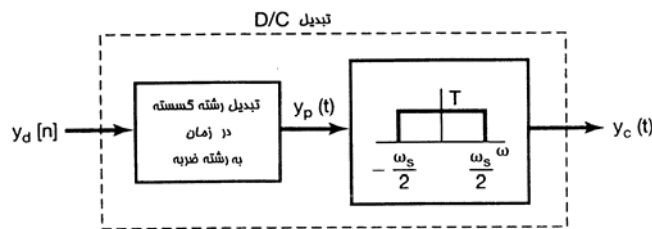
$x_p(t)$ به $x_d[n]$ با این مفهوم که در تبدیل $x_p(t)$ به $x_d[n]$ محور زمان با ضرب $1/T$ تغییر مقیاس

یافته، سازگارست.



شکل ۵-۲۲: رابطه بین $X_c(j\omega)$ ، $X_p(j\omega)$ و $X_d(e^{j\Omega})$ به ازای دو زمان نمونه برداری مختلف.

این که باید از رشته $y_d[n]$ قطار ضربه $y_p(t)$ را ساخت. بازسازی سیگنال پیوسته در زمان $y_c(t)$ از این قطار ضربه، مطابق شکل ۵-۲۳ با فیلتر پایین گذر صورت می گیرد.



شکل ۵-۲۳: تبدیل رشته گسسته در زمان به سیگنال پیوسته در زمان

حال کل سیستم شکل ۵-۱۹ را به صورت نشان داده شده در شکل ۵-۲۴ در نظر می گیریم. روشن است که اگر سیستم گسسته در زمان یک سیستم همانی باشد (یعنی $x_d[n] = y_d[n]$)، آنگاه با فرض ارضای شرایط قضیه نمونه برداری، کل سیستم یک سیستم همانی است. بهترین راه درک مشخصه کل سیستم به ازای پاسخ فرکانسی کلی $H_d(e^{j\Omega})$ بررسی مثال شکل ۵-۲۵ است. در طرف چپ این شکل طیف های $X_c(j\omega)$ ، $X_p(j\omega)$ و $X_d(e^{j\Omega})$ نشان داده شده است، و فرض کرده ایم $\omega_M \ll \omega_s/2$ تا اختلاط فرکانسی پیش نیاید. طیف

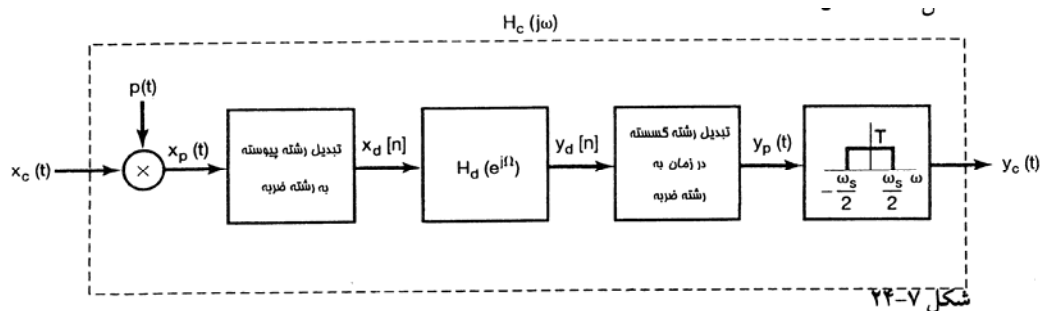
(د) با روی هم قرار دادن $H_d(e^{j\Omega})$ و $X_d(e^{j\Omega})$ به دست آمده است. تبدیل به $Y_c(j\omega)$ با تغییر مقیاس فرکانسی و عبور از فیلتر پایین گذر صورت می گیرد، و طیف های نشان داده شده در شکل های ۷-۲۵ (ه) و (و) به دست می آید. چون $Y_d(e^{j\Omega})$ حاصل ضرب دو طیف بر هم نهاده شده شکل ۷-۲۵ (د) است، تغییر مقیاس فرکانسی و فیلتر پایین گذر روی هر دو عمل می کند. مقایسه شکل های ۷-۲۵ (الف) و (و) نتیجه می دهد.

$$Y_c(j\omega) = X_c(j\omega) H_d(e^{j\Omega}) \quad (۲۴-۷)$$

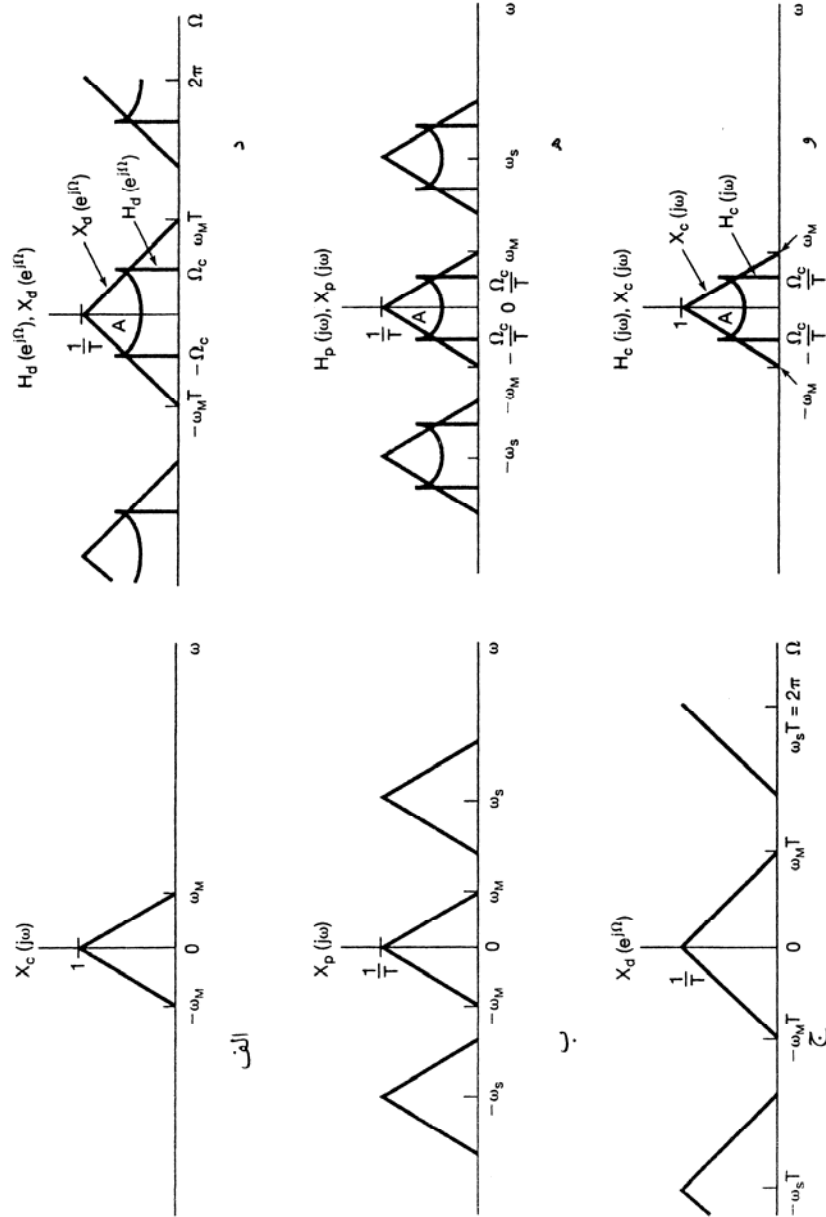
پس اگر ورودی محدود باند باشد، به نحوی که شرط قضیه نمونه برداری ارضا شود، سیستم شکل ۵-۲۴ معادل یک سیستم LIT پیوسته در زمان با پاسخ فرکانسی $H_c(j\omega)$ است، این پاسخ فرکانسی با پاسخ فرکانسی گسسته در زمان $H_d(e^{j\omega})$ به صورت زیر مرتبط است

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\omega}) & , \quad |\omega| \leq \omega_s/2 \\ 0 & , \quad |\omega| > \omega_s/2 \end{cases}$$

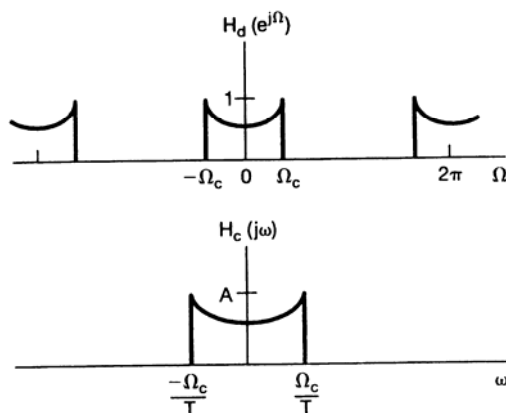
پاسخ فرکانسی فیلتر پیوسته در زمان معادل، یک دوره تناوب پاسخ فرکانسی فیلتر گسسته در زمان، با تغییر مقیاس فرکانسی خطی است. این رابطه بین پاسخ فرکانسی گسسته در زمان و پاسخ فرکانسی پیوسته در زمان در شکل ۵-۲۶ نشان داده شده است.



شکل ۵-۲۴: سیستم لازم برای فیلتر کردن سیگنال پیوسته در زمان به کمک فیلتر گسسته در زمان



شکل ۵-۲۵: نمایش حوزه فرکانس سیستم شکل ۵-۲۴: الف) طیف پیوسته در زمان $X_c(j\omega)$ ، ب) همان طیف پس از نمونه برداری ضربه ای؛ ج) طیف رشته گسسته در زمان $X_d[n]$ ؛ د) $H_d(e^{j\Omega})$ و $X_d(e^{j\Omega})$ که حاصل ضرب $Y_d(e^{j\Omega})$ را می دهد؛ ه) طیف هایی که $Y_d(j\omega)$ از ضربشان به دست می آید؛ و) طیف هایی که $Y_c(j\omega)$ از ضربشان به دست می آید.



شکل ۵-۲۶: پاسخ فرکانسی گسسته در زمان و پاسخ فرکانسی پیوسته در زمان معادل آن برای سیستم شکل ۵-۲۴.

هم ارزی سیستم شکل ۵-۲۴ با یک سیستم **LIT** تا حدی عجیب است، زیرا ضرب در یک قطار ضربه تغییر ناپذیر با زمان نیست. در واقع سیستم شکل ۵-۲۴ به ازای هر ورودی دلخواهی، تغییر ناپذیر با زمان نیست. مثلاً اگر $x_c(t)$ پالس مستطیلی باریکی با عمر کوتاه از T باشد، جابجایی $x_c(t)$ می تواند باعث شود رشته $x[n]$ یا متحد با صفر باشد، یا تنها یک مقدار غیر صفر داشته باشد. این دو حالت به وضعیت نسبی پالس مستطیلی و قطار ضربه نمونه برداری بستگی دارد. ولی همانطور که طیف های شکل ۵-۲۵ نشان می دهند، به ازای سیگنال های ورودی محدود باند و فرکانس نمونه برداری به حد کافی بزرگ (به نحوی که اختلاط فرکانسی پیش نیاید) سیستم شکل ۵-۲۴ معادل یک سیستم **LIT** پیوسته در زمان است. برای چنین ورودی های شکل ۵-۲۴ و معادله (۵-۲۵) اساس مفهومی مبنای پردازش پیوسته در زمان به کمک فیلترهای گسسته در زمان را نشان می دهد. این مفاهیم را در خلال چند مثال بیشتر می شکافیم.

۵-۴-۱ مشتقگیر دیجیتال

تحقق گسسته در زمان یک فیلتر مشتقگیر پیوسته در زمان محدود باند را در نظر بگیرید. همانطور که در بخش ۳-۹-۱ گفتیم، پاسخ فرکانسی یک فیلتر مشتقگیر پیوسته در زمان عبارت است از

$$H_c(j\omega) = j\omega \quad (۲۶-۵)$$

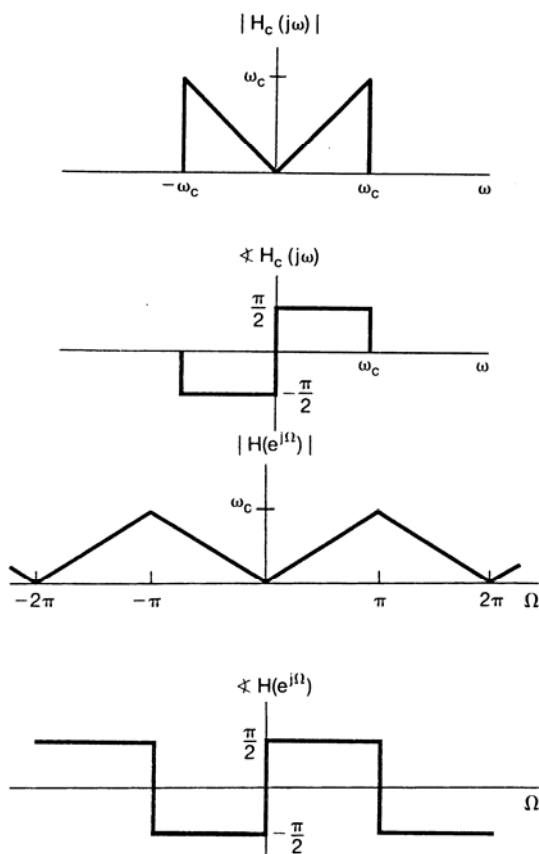
و پاسخ فرکانسی مشتقگیر محدود بانندی با فرکانس قطع ω_c به صورت زیرست

$$H_g(\omega) = \begin{cases} j\omega & , \quad |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & , \quad |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (۲۷-۵)$$

که در آن ۲۷-۵ نشان داده شده است. با استفاده از معادله (۵-۲۵) با فرکانس نمونه برداری $\omega_s = 2\omega_c$ ، تابع تبدیل گسسته در زمان متناظر را به صورت زیر می یابیم

$$H_d(e^{j\Omega}) = j \left(\frac{\Omega}{T} \right) \quad , \quad |\Omega| \leq \pi \quad (۲۸-۵)$$

اختلاط فرکانسی ندارد، $y_0(t)$ شکل ۵-۲۴ مشتق $x_0(t)$ است.



شکل ۵-۲۷: پاسخ فرکانسی مشتق گیر ایده آل پیوسته در زمان محدود باند
 $H_c(j\omega) = j\omega, |\omega| < \omega_c$

شکل ۵-۲۸: پاسخ فرکانسی فیلتر گسسته در زمانی که برای تحقق مشتق گیر محدود باند پیوسته در زمان به کار رفته است.

مثال ۵-۲

با در نظر گرفتن خروجی مشتقگیر دیجیتال به ازای ورودی پیوسته در زمان سینک می توانیم پاسخ ضربه $h_d[n]$ فیلتر گسسته در زمان لازم برای ساختن مشتقگیر دیجیتال را بیابیم. با توجه به شکل ۷-۲۴ فرض کنید

$$x_0(t) = \frac{\sin(\pi/T)t}{\pi t} \quad (۲۹-۵)$$

که در آن T زمان نمونه برداری است پس

$$X_0(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi/T \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

این سیگنال آنقدر محدود باند هست که نمونه برداری $x_0(t)$ با فرکانس $\omega_0 = 2\pi/T$ اختلاط فرکانسی ایجاد نکند. پس خروجی مشتقگیر دیجیتال عبارت است از

$$y_0(t) = \frac{d}{dt} x_0(t) = \frac{\cos(\pi/T)t}{Tt} - \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t^2} \quad (۳۰-۵)$$

$$x_d[n] = x_c(nT) = \frac{1}{T} \delta[n] \quad (31-5)$$

یعنی به ازای $x_c(nT) = 1$ ، $n = 0$ ، حال آنکه

$$x_d[0] = x_c(0) = \frac{1}{T}$$

که می توان درستی اش را به کمک قاعده لویپیتال نشان داد. همچنین می توانیم $y_d[n]$ متناظر با $y_c(t)$ معادله (30-5) را محاسبه کنیم. داریم

$$y_d[n] = y_c(nT) = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{nT^2} , & n \neq 0 \\ 1 , & n = 0 \end{cases} \quad (32-5)$$

این رابطه به ازای $n \neq 0$ با جایگذاری مستقیم در معادله (30-5) و به ازای $n = 0$ به کمک قاعده لویپیتال به دست آمده است.

پس اگر ورودی فیلتر گسسته در زمان معادله (28-5) ضربه واحد تغییر مقیاس یافته معادله (31-5) باشد، خروجی آن مطابق معادله (32-5) است. پس پاسخ ضربه این فیلتر عبارت است از

$$h[n] = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{nT^2} , & n \neq 0 \\ 1 , & n = 0 \end{cases}$$

5-4-2 تأخیر نیم نمونه

در این بخش تحقق یک سیستم تأخیر دهنده پیوسته در زمان را به صورت آرایش شکل 5-19 در نظر می گیریم. می خواهیم رابطه خروجی- ورودی سیستم کل به صورت زیر باشد

$$y_c(t) = x_c(t - \Delta) \quad (33-5)$$

$x_c(t)$ محدود باندست و آهنگ نمونه برداری آنقدر بزرگ هست که اختلاط فرکانسی پیش نیاید؛ Δ مقدار تأخیر زمانی را نشان می دهد. با توجه به خاصیت جابجایی زمانی بیان شده در بخش 4-3-2

$$Y_c(j\omega) = e^{-j\omega\Delta} X_c(j\omega)$$

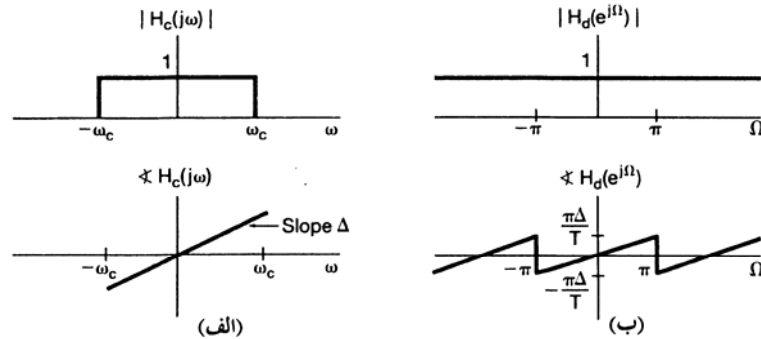
طبق معادله (25-5) سیستم پیوسته در زمان باید محدود باند باشد. پس فرض می کنیم

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega\Delta} , & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 , & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (34-5)$$

که در آن ω_c فرکانسی قطع فیلتر پیوسته در زمان است. یعنی $H_c(j\omega)$ برای سیگنال های محدود باند مانند تأخیر دهنده معادله (33-5) عمل می کند و تمام فرکانس های بالاتر از ω_c توسط آن حذف می شوند. اندازه و فاز پاسخ فرکانسی در شکل 5-29 (الف) نشان داده شده است. اگر فرکانس نمونه برداری را ω_s (با $\omega_s = 2\omega_c$)

$$H_d(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega\Delta/T}, \quad |\Omega| \leq \pi \quad (35-5)$$

که در شکل ۲۹-۵ (ب) نشان داده شده است.

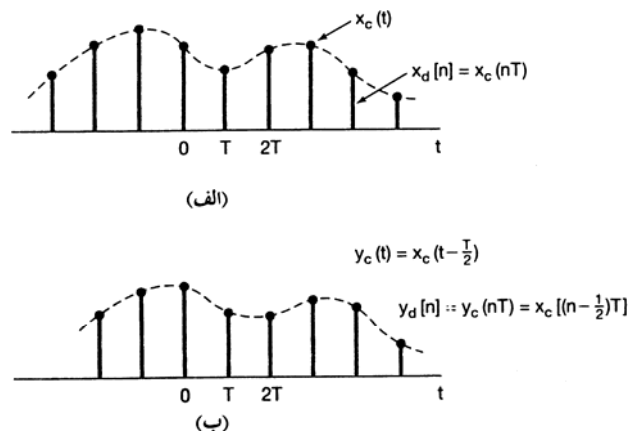


شکل ۲۹-۵: اندازه و فاز پاسخ فرکانسی یک تأخیر دهنده پیوسته در زمان؛ (ب) اندازه و فاز پاسخ فرکانسی سیستم گسسته در زمان متناظر

به ازای ورودی های محدود باند مناسب، خروجی سیستم شکل ۲۴-۵ با $H_d(e^{j\Omega})$ معادله (۳۵-۵) نمونه تأخیر یافته ورودی است. به ازای Δ/T صحیح، رشته $y_d[n]$ نمونه تأخیر یافته $x_d[n]$ است؛ یعنی

$$y_d[n] = x_d\left[n - \frac{\Delta}{T}\right] \quad (36-5)$$

اگر Δ/T عدد صحیح نباشد، معادله (۳۶-۵) معنا ندارد، زیرا رشته ها تنها به ازای مقادیر صحیح متغیر n تعریف می شوند. اما در این حالت می توانیم رابطه $x_d[n]$ و $y_d[n]$ را بر حسب رون یابی محدود باند تفسیر کنیم. سیگنال های $x_c(t)$ و $x_d[n]$ توسط نمونه برداری و درون یابی محدود باند به هم مربوط اند، و همین طورند $y_c(t)$ و $y_d[n]$ به ازای $H_d(e^{j\Omega})$ معادله (۳۵-۵)، $y_d[n]$ نمونه های یک سیگنال تأخیر یافته است، سیگنالی که از درون یابی محدود باند $x_d[n]$ ساخته شده است. شکل ۳۰-۵ این وضعیت را به ازای $\Delta/T = \frac{1}{2}$ که گاهی تأخیر نیم نمونه نامیده می شود، نشان می دهد.



شکل ۳۰-۵: رشته نمونه های سیگنال پیوسته در زمان $x_c(t)$ ؛ (ب) رشته الف) با نیم نمونه تأخیر

برای تعیین پاسخ ضربه $h_d[n]$ فیلتر گسسته در زمان سیستم تاخیر نیم نمونه می توان روش مثال ۲-۵ را به کار برد. با توجه به شکل ۲۴-۵ قرار می دهیم:

$$x_c(t) = \frac{\sin(\pi t / T)}{\pi t} \quad (۳۷-۵)$$

و با توجه به مثال ۲-۵ نتیجه می گیریم که

$$y_d[n] = x_c(nT) = \frac{1}{T} \delta[n]$$

همچنین چون برای ورودی محدود باند معادله (۳۷-۵) اختلاط فرکانسی رخ نمی دهد، خروجی سیستم تأخیر نیم نمونه عبارت است از

$$y_c(t) = x_c(t - T/2) = \frac{\sin(\pi(t - T/2)/T)}{\pi(t - T/2)}$$

و رشته $y_d[n]$ شکل ۲۴-۵ عبارت است از

$$y_d[n] = y_c(nT) = \frac{\sin(\pi(n - \frac{1}{2}))}{\pi(n - \frac{1}{2})}$$

پس نتیجه می گیریم

$$h[n] = \frac{\sin(\pi(n - \frac{1}{2}))}{\pi(n - \frac{1}{2})}$$

۵-۵ نمونه برداری از سیگنال های گسسته در زمان

تا اینجا فصل نمونه برداری از سیگنال های پیوسته در زمان را در نظر گرفته ایم، و علاوه بر بیان تحلیل لازم برای درک نمونه برداری پیوسته در زمان، تعدادی از کاربردهای آن را معرفی کردیم. چنان که در این بخش می بینیم در مورد نمونه برداری از سیگنال های گسسته در زمان نیز مجموعه ای خواص و نتایج بسیار مشابهی وجود دارد، و این نمونه برداری نیز چند کاربرد مهم دارد.

۵-۵-۱ نمونه برداری با قطار ضربه

به قیاس نمونه برداری پیوسته در زمان تصویر شده با سیستم شکل ۲-۵، می توان نمونه برداری از سیگنال گسسته در زمان را به صورت شکل ۳۱-۵ نشان داد و در اینجا رشته جدید $x_p[n]$ حاصل از فرایند نمونه برداری به ازای مضارب صحیح تناوب نمونه برداری با $x[n]$ برابرست، و نمونه های میانی صفرند؛ یعنی

$$x_p[n] = \begin{cases} x[n], & \text{اگر } n \text{ مضرب صحیحی از } N \text{ باشد} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

توجه به خاصیت ضرب بیان شده در بخش ۵-۵ دریافت. پس به ازای

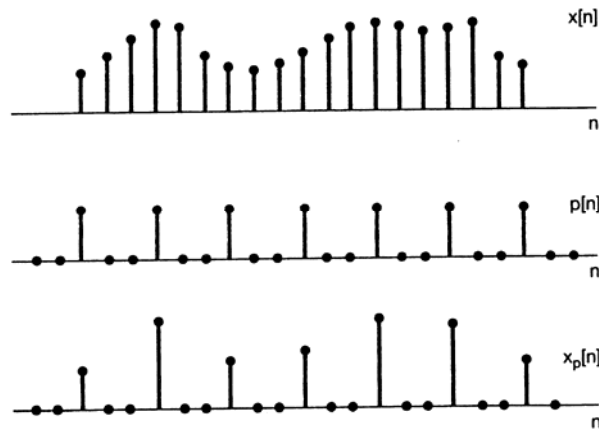
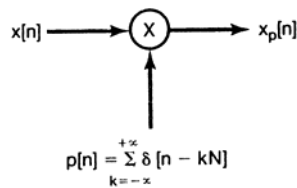
$$x_p[n] = x[n]p[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN] \delta[n - kN] \quad (۳۹-۵)$$

در حوزه فرکانس داریم

$$X_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \int_{-\pi}^{\pi} P(e^{j\theta}) X(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (۴۰-۵)$$

طبق مثال ۵-۶، تبدیل فوریه رشته نمونه برداری $p[n]$ برابرست با

$$P(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_p) \quad (۴۱-۵)$$



شکل ۵-۳۱: نمونه برداری گسسته در زمان

که ω_p فرکانس نمونه برداری برابر $\frac{2\pi}{N}$ است. با ترکیب معادله های (۴۴-۵) و (۴۵-۵) داریم

$$X_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j(\omega - k\omega_p)}) \quad (۴۶-۷)$$

معادله (۴۶-۷) همتای گسسته در زمان معادله (۶-۷) نمونه برداری پیوسته در زمان است، و در شکل ۷-۳۲ تصویر

شده است. در شکل ۵-۳۲(ج) با شرط $(\omega_p - \omega_M) \gg \omega_M$ ، یا به طور معادل $\omega_p \gg 2\omega_M$ ، اختلاط

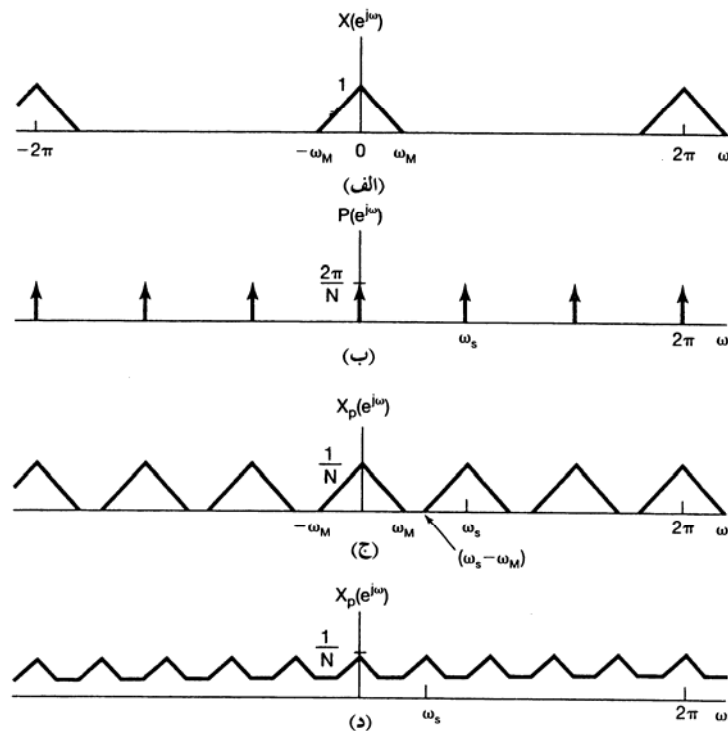
فرکانسی وجود ندارد [یعنی بخش های غیر صفر تکرارهای $X(e^{j\omega})$ همپوشانی ندارند]، حال آنکه به ازای

مطابق شکل ۵-۳۲(د) $\omega_p \ll 2\omega_M$ اختلاط رخ می دهد. اگر اختلاط فرکانسی رخ دهد، $X(e^{j\omega})$ حول

و فرکانس قطع بزرگتر از ω_M و کوچکتر از $\omega_s - \omega_M$ ، سیگنال $x[n]$ را از $x_p[n]$ بازیافت، در این شکل فرکانس قطع فیلتر پایین گذر را $\omega_s/2$ گرفته ایم. اگرکل سیستم ۵-۳۳ (الف) به رشته ای با $\omega_s \leq 2\omega_M$ اعمال شود اختلاط فرکانسی پیش می آید، و دیگر $x_p[n]$ با $x[n]$ برابر نیست. ولی با این وجود مانند نمونه برداری پیوسته در زمان، دو رشته در مضارب صحیح تناوب نمونه برداری برابرند؛ یعنی متناظر با معادله (۵-۱۳) داریم

$$x_p[kN] = x[kN] \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (۵-۴۳)$$

چه اختلاط فرکانسی رخ دهد و چه ندهد. (مسئله ۵-۴۶) را ببینید).



شکل ۵-۳۲: اثر نمونه برداری ضربه ای از سیگنال گسسته در حوزه فرکانس: (الف) طیف سیگنال اصلی؛ (ب) طیف رشته نمونه برداری؛ (ج) طیف سیگنال نمونه برداری شده به ازای $\omega_s > 2\omega_M$ ، (د) طیف سیگنال نمونه برداری شده به ازای $\omega_s < 2\omega_M$. توجه کنید که اختلاط فرکانسی داریم.

مثال ۵-۴

رشته $x[n]$ با تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$ دارای خاصیت زیر را در نظر بگیرید

$$X(e^{j\omega}) = 0 \quad , \quad \pi/9 \leq |\omega| \leq \pi \quad \text{به ازای}$$

$$\frac{\gamma\pi}{N} \geq \gamma \left(\frac{\gamma\pi}{\gamma} \right) \rightarrow N \leq \frac{\gamma}{\gamma}$$

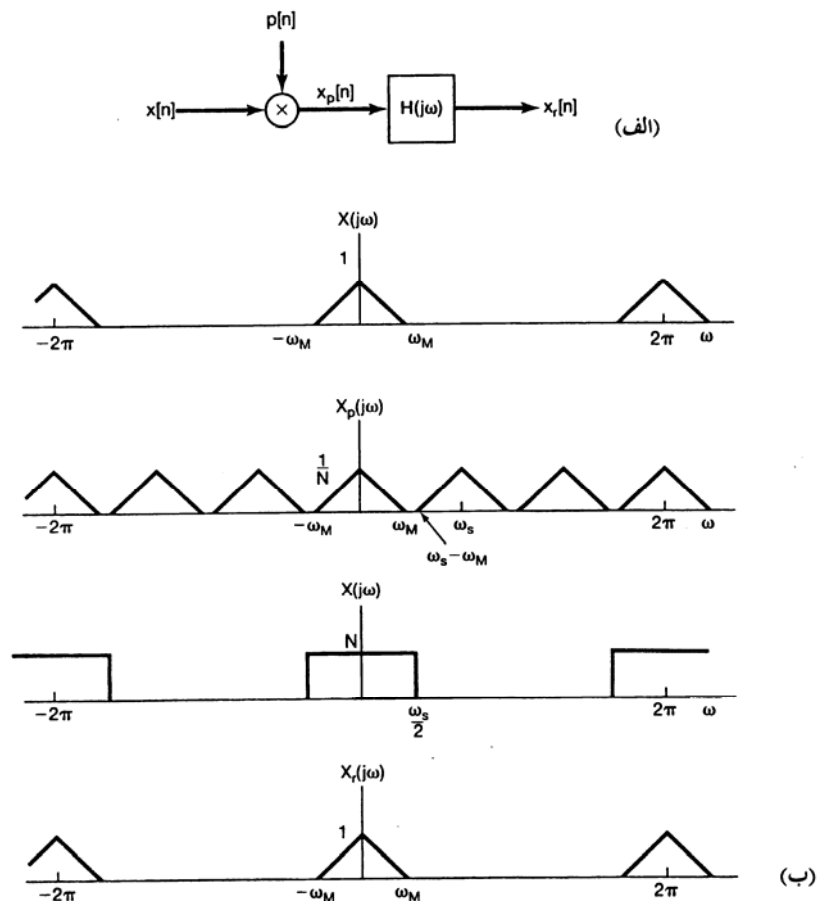
پس $N_{max} = \gamma$ و فرکانس نمونه برداری $\gamma\pi/\gamma = \pi/\gamma$ است.

بازیابی $x[n]$ با اعمال فیلتر پایین گذر ایده آل به $x_p[n]$ را می توان در حوزه زمان به عنوان یک فرمول درون یابی، مشابه معادله (۵-۱۱) تعبیر کرد. اگر $h[n]$ پاسخ ضربه فیلتر پایین گذر باشد، داریم

$$h[n] = \frac{N\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n} \quad (۴۴-۵)$$

رشته بازسازی شده $x_r[n]$ عبارت است از

$$x_r[n] = x_p[n] * h[n] \quad (۴۵-۵)$$



شکل ۵-۳۳: بازیابی دقیق سیگنال گسسته در زمان از نمونه هایش به کمک فیلتر پایین گذر ایده آل: الف) نمودار جعبه ای نمونه برداری و بازیابی سیگنال محدود باند از روی نمونه هایش؛ ب) طیف سیگنال $x[n]$ ؛ ج) طیف سیگنال $x_p[n]$ ؛ د) پاسخ فرکانسی فیلتر پایین گذر ایده آل با فرکانس $\omega_s/2$ ؛ ه) طیف سیگنال بازیابی شده $x_r[n]$. در این مثال $\omega_s > 2\omega_M$ یعنی اختلاط فرکانسی پیش نمی آید و $x_p[n] = x[n]$.

$$x_r[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN] \frac{N\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c(n-kN)}{\omega_c(n-kN)} \quad (46-5)$$

معادله (46-5) درون یابی محدود باند ایده آل را نشان می دهد و مستلزم یک فیلتر پایین گذر ایده آل است. در کاربردهای نوعی تقریب مناسبی از فیلتر پایین گذر شکل 5-33 به کار می رود، و در این صورت فرمول درون یابی معادل به شکل زیر درمی آید

$$x_r[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN] h_r[n - kN] \quad (47-5)$$

که در آن $h_r[n]$ پاسخ ضربه فیلتر درون یابی است. در مسئله 5-50 چند مثال از همتهای گسسته در زمان نگهدار رتبه صفر و نگهدار رتبه یک، که در بخش 5-2 برای درون یابی پیوسته در زمان عنوان شدند، مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

5-5-2 استخراج و درون یابی گسسته در زمان

اصول نمونه برداری گسسته در زمان کاربردهای مهم متنوعی از جمله طراحی و ساخت فیلتر و کاربردهای مخابراتی دارد. در بسیاری از این کاربردها نمایشف انتقال یا ذخیره سازی نمونه ها $x_p[n]$ به صورت نشان داده شده در شکل 5-1 روش کارآمدی نیست، زیرا در فواصل بین نمونه ها $x_p[n]$ مقدار معلوم صفر را دارد. به همین خاطر به جای رشته نمونه برداری شده رشته جدید $x_b[n]$ به کار می رود که عبارت است از

$$x_b[n] = x_p[nN] \quad (48-5)$$

یا به طور هم ارز

$$x_b[n] = x[nN] \quad (49-5)$$

زیرا $x_p[n]$ و $x[n]$ در مضارب صحیح N برابرند. این عمل استخراج نمونه های N ام نامیده می شود. در شکل 5-34 رابطه $x_b[n]$ و $x[n]$ نشان داده شده است.

برای دیدن اثر استخراج نمونه در حوزه فرکانس باید رابطه $-X_b(e^{j\omega})$ تبدیل فوریه $-x_b[n]$ و $X(e^{j\omega})$ را تعیین کنیم. به این منظور می نویسیم

$$X_b(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_b[k] e^{-j\omega k} \quad (50-5)$$

و به کمک معادله (48-5)

$$X_b(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_p[kN] e^{-j\omega k} \quad (51-5)$$

با گذاشتن $n = kN$ ، یا $k = n/N$ می توان نوشت

$$X_b(e^{j\omega}) = \sum_{k=-N}^{+N} x_p[n] e^{-j\omega n/N}$$

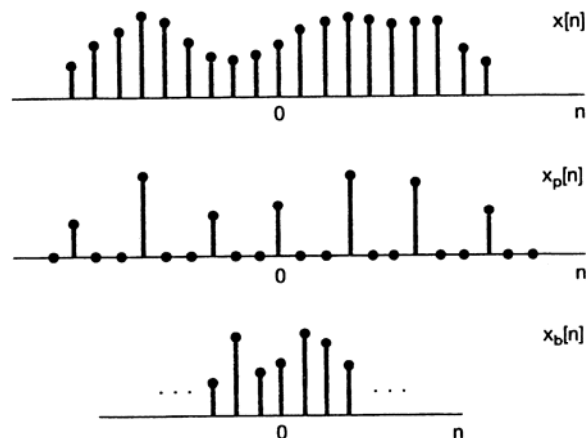
$$X_b(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_p[n] e^{-j\omega n/N} \quad (52-5)$$

همچنین می بینیم که طرف راست معادله (52-5) تبدیل فوریه $x_p[n]$ است؛ یعنی

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_p[n] e^{-j\omega n/N} = X_p(e^{j\omega/N}) \quad (53-5)$$

پس از معادلات (52-5) و (53-5) نتیجه می گیریم

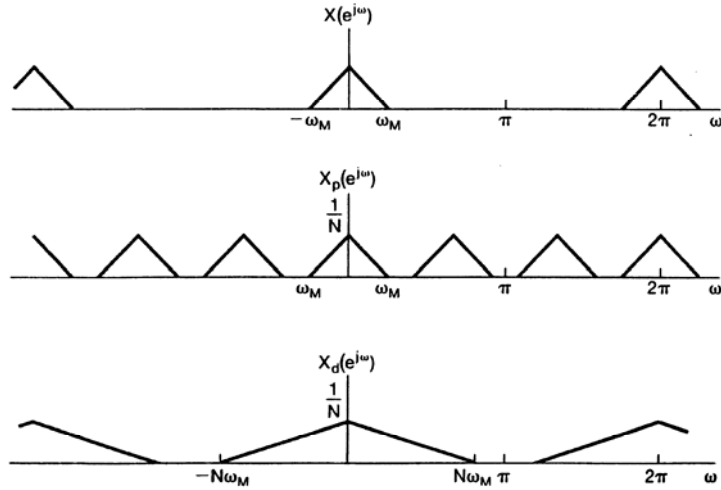
$$X_b(e^{j\omega}) = X_p(e^{j\omega/N}) \quad (54-5)$$



شکل 5-34: رابطه بین $x_p[n]$ حاصل از نمونه برداری و $x_b[n]$ حاصل از استخراج نمونه

این رابطه در شکل 5-35 نشان داده شده است و با توجه به آن می بینیم که طیف های رشته حاصل از نمونه برداری و رشته حاصل از استخراج نمونه تنها از لحاظ مقیاس فرکانسی متفاوت اند. اگر طیف اصلی $X(e^{j\omega})$ محدود باند باشد، طوری که در $X_p(e^{j\omega})$ اختلاط فرکانسی رخ ندهد، چنانچه شکل نشان می دهد اثر استخراج نمونه گسترش طیف رشته اصلی روی بخش بزرگتری از باند فرکانسی است.

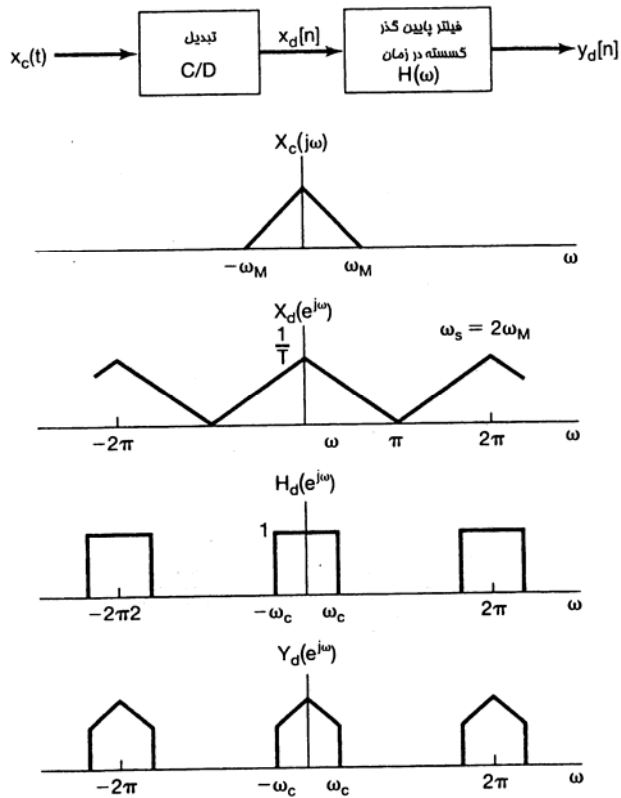
اگر رشته اصلی $x[n]$ از نمونه برداری یک سیگنال پیوسته در زمان به دست آمده باشد، فرایند استخراج را می توان به صورت کاهش آهنگ نمونه برداری با ضریب N تعبیر کرد. برای پرهیز از اختلاط فرکانسی $X(e^{j\omega})$ نباید تمام باند فرکانسی را اشغال کرده باشد. به عبارت دیگر اگر بتوان از سیگنال نمونه برداری شده بدون ایجاد اختلاط سیگنالی استخراج کرد، نمونه برداری از سیگنال پیوسته در زمان تند بوده است، یعنی می توان آهنگ نمونه برداری را بدون ایجاد اختلاط کند کرد. با توجه به تعبیر رشته $x[n]$ به عنوان نمونه های یک سیگنال پیوسته در زمان، استخراج را گاهی کند کردن نمونه برداری یا نمونه برداری کاهشی می نامند.



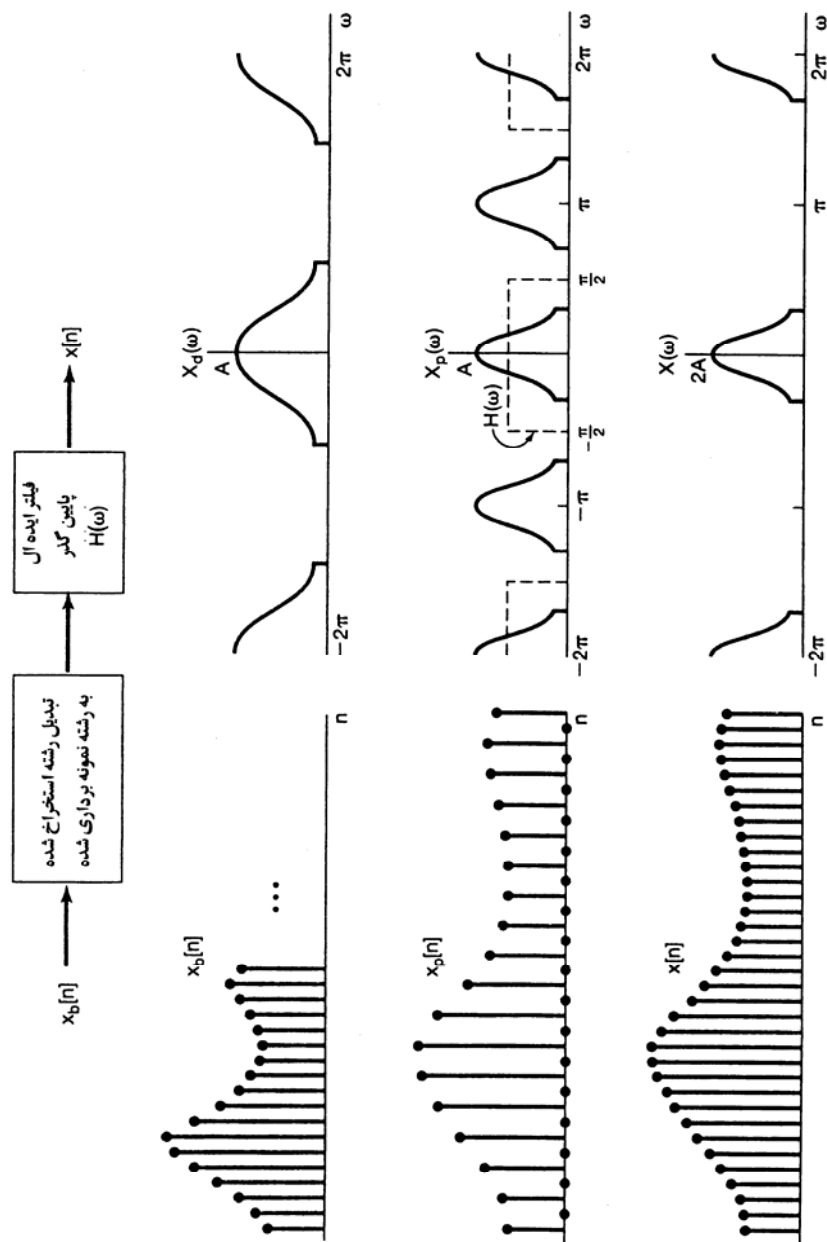
شکل ۵-۳۵: نمایش حوزه فرکانس رابطه بین استخراج نمونه و نمونه برداری

در بعضی کاربردها که رشته از نمونه برداری سیگنالی پیوسته در زمان به دست آمده است، ممکن است فرکانس نمونه برداری مینیمم فرکانس ممکن برای پرهیز از اختلاط فرکانسی باشد، ولی پس از پردازش ها و فیلتر کردن های بعدی پهنای باند رشته کوچکتر شود. شکل ۵-۳۶ نمونه ای را نشان می دهد. چون خروجی فیلتر گسسته در زمان محدود باندست می توان روی آن نمونه برداری کاهشی یا استخراجی صورت داد.

درست مانند کاربردهایی که نمونه برداری کاهشی شان امری مفیدست، کاربردهایی نیز وجود دارد که در آن ها تبدیل رشته به رشته ای با آهنگ نمونه برداری بزرگتر مفیدست، این کار نمونه برداری افزایشی یا درون یابی نامیده می شود. نمونه برداری افزایشی اساساً عکس استخراج یا نمونه برداری کاهشی است. در استخراج مطابق شکل های ۷-۳۴ و ۷-۳۵ ابتدا نمونه برداری می کنیم و سپس تنها مقادیر نمونه ها را نگه می داریم. در نمونه برداری افزایشی عکس این کار را می کنیم. مثلاً در شکل ۵-۳۴ می توانیم با نمونه برداری افزایشی $x[n]$ را از $x_d[n]$ به دست آوریم. برای به دست آوردن $x_p[n]$ از $x_p[n]$ ، $N - 1$ نقطه با دامنه صفر بین هر دو مقدار $x_p[n]$ قرار می دهیم. رشته درون یابی شده $x[n]$ با عبور دادن $x_p[n]$ از فیلتر پایین گذر به دست می آید. این فرایند در شکل ۵-۳۷ نشان داده شده است.



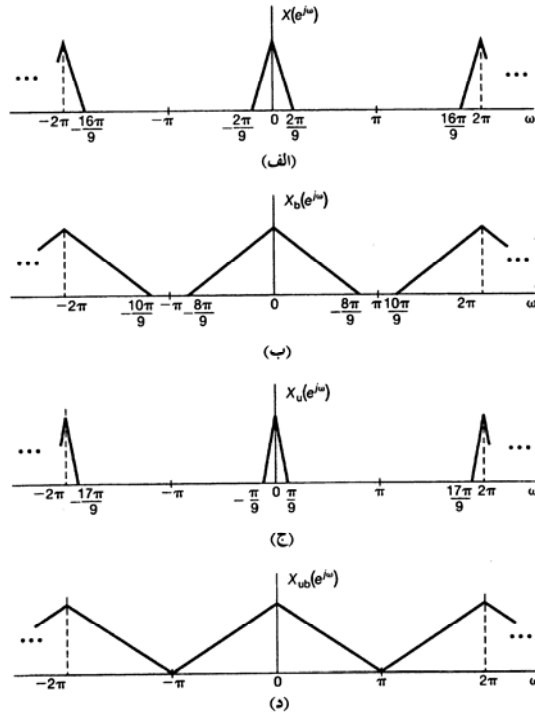
شکل ۵-۳۶: سیگنال پیوسته در زمانی که ابتدا با یک آهنگ نایکویبیست نمونه برداری شده است. پس از عبور از فیلتر گسسته در زمان می توان از رشته حاصل نمونه برداری کرد. $X_c(j\omega)$ تبدیل فوریه پیوسته در زمان $x_c(t)$ و $X_d(e^{j\omega})$ و $Y_d(e^{j\omega})$ به ترتیب تبدیل فوریه گسسته در زمان $x_d[n]$ و $y_d[n]$ هستند. پاسخ فرکانسی فیلتر پایین گذر نشان داده شده در نمودار جعبه ای است.



شکل ۵-۳۷: نمونه برداری افزایشی: الف) کل سیستم؛ ب) رشته‌های حاصل و طیف‌هایشان در نمونه برداری افزایشی با ضریب ۲

در این مثال نشان می دهیم که چگونه می توان با ترکیب درون یابی و استخراج رشته ای را نمونه برداری کاهش کرد بدون این که اختلاط فرکانسی پیش آید. بادی تذکر دهیم که حداکثر کاهش وقتی حاصل می شود که بخش غیر صفر یک تناوب طیف گسسته در زمان کل باند $-\pi$ تا π را بپوشاند.

رشته $x[n]$ را با تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$ شکل ۵-۳۸ (الف) در نظر بگیرید. چنانچه در مثال ۵-۴ گفتیم پایین ترین آهنگ نمونه برداری از این رشته که اختلاط فرکانسی ایجاد نمی کند، $\frac{2\pi}{4}$ است. یعنی باید از هر چهار نمونه یک نمونه را برگرفت. با استخراج از رشته حاصل، با ضرب ۴، رشته $x_d[n]$ با طیف شکل ۵-۳۸ (ب) حاصل می شود واضح است که هنوز اختلاط فرکانسی وجود ندارد. ولی این طیف در $|\omega| \leq \frac{8\pi}{9}$ خالی است، یعنی هنوز جا برای نمونه برداری کاهش وجود دارد.



شکل ۵-۳۸: طیف های مربوط به مثال ۵-۵: (الف) طیف $x[n]$; (ب) طیف پس از نمونه برداری کاهش. با ضرب ۴: (ج) طیف پس از نمونه برداری افزایشی از $x[n]$ با ضرب ۲: (د) طیف پس از نمونه برداری افزایشی با ضرب ۲ و نمونه برداری کاهش با ضرب ۹

دقیق تر این که با بررسی شکل ۵-۳۸ (الف) می بینیم که تغییر مقیاس فرکانسی با ضرب $\frac{9}{4}$ باعث می شود طیف تمام فاصله $-\pi$ تا π را بپوشاند. ولی چون $\frac{9}{4}$ عدد صحیحی نیست نمی توانیم با نمونه برداری کاهش به هدف برسیم. باید ابتدا $x[n]$ را با ضرب ۲ درون یابی کنیم و سپس با ضرب ۹ نمونه برداری کاهش صورت دهیم. شکل ۷-۳۸ (ج)

سیگنال $x_{up}[n]$ با طیف شکل ۵-۳۸ (د) را نمونه های بدون اختلاط سیگنال پیوسته در زمان $x_c(t)$ فرض کنیم. رشته درون یابی و استخراج شده با ماکزیمم نمونه برداری کاهش (عاری از اختلاط) $x_c(t)$ متناظرست.

۵-۶ خلاصه

در این فصل مفهوم نمونه برداری را پی ریختیم، در نمونه برداری یک سیگنال پیوسته در زمان یا گسسته در زمان با نمونه های متساوی الفاصله اش نمایش داده می شود. شرایطی که بازبایی کامل سیگنال از نمونه ها را تضمین می کند در قضیه نمونه برداری بیان شده است. این قضیه می گوید برای بازبایی دقیق باید سیگنال نمونه برداری شده محدود باند بوده. فرکانس نمونه برداری از دو برابر بزرگترین فرکانس موجود در سیگنال بزرگتر باشد. تحت این شرایط می توان سیگنال اصلی را با فیلتر پایین گذر ایده آل بازبایی کرد. تعبیر حوزه زمان این روند بازسازی ایده آل را درون یابی ایده آل محدود باند می نامند. در عمل تقریبی از فیلتر پایین گذر به کار می رود و دیگر درون یابی حوزه زمان دقیق نیست. در بعضی موارد روش های درون یابی ساده ای چون نگهدار رتبه صفر یا دیگر درون یابی خطی (نگهدار رتبه یک) کافی است.

اگر نمونه برداری کند باشد (یعنی فرکانس نمونه برداری کمتر از آنچه قضیه نمونه برداری می گوید باشد)، سیگنال بازبایی شده توسط درون یابی ایده آل محدود باند نوعی اعوجاج موسوم به اختلاط فرکانسی دارد. در بسیاری از موارد باید آهنگ نمونه برداری آنقدر بزرگ باشد که اختلاط فرکانسی پیش نیاید. ولی مثال های مختلفی نیز وجود دارد که در آن ها از اختلاط فرکانسی استفاده می شود، مثل استروپوسکپی.

نمونه برداری کاربردهای مهمی دارد. یک دسته مهم از کاربردها آن هایی هستند که برای پردازش سیگنال های پیوسته در زمان به کمک سیستم های گسسته در زمان از نمونه برداری استفاده می کنند.

نظریه اساسی نمونه برداری برای سیگنال های پیوسته در زمان و گسسته در زمان یکی است. در حالت گسسته در زمان مفهومی به نام استخراج وجود دارد که در آن مقادیر متساوی الفاصله سیگنال اصلی استخراج می شود. تفاوت نمونه برداری و استخراج این است که در نمونه برداری مقادیر بین نمونه ها صفرست، ولی در استخراج این مقادیر میانی به کلی حذف می شوند، یعنی نوعی فشردگی زمانی حاصل می شود. مفاهیم استخراج و درون یابی در کاربردهای مهمی از سیگنال ها و سیستم ها، از جمله سیستم های مخابراتی، ضبط صدا به صورت دیجیتال، تلویزیون با تصویر عالی، و غیره مورد استفاده قرار می گیرد.

سیستم های مخابراتی در دنیای جدید نقشی کلیدی در انتقال اطلاعات بین افراد، سیستم ها، و کامپیوترها بازی می کند. به طور کلی در تمام سیستم های مخابراتی اطلاعات ابتدا توسط فرستنده یا مدولاتور پردازش شده، به صورتی مناسب برای ارسال بر روی کانال مخابراتی درمی آید. سپس در گیرنده سیگنال با پردازش مناسبی بازیابی می شود. این پردازش به دلایلی چند لازم است. اول این که در بسیاری از موارد برای کانال مخابراتی گستره فرکانسی خاصی وجود دارد که انتقال سیگنال در آن به خوبی صورت می گیرد، و در خارج آن گستره انتقال ناممکن است یا باعث افت شدید کیفیت مخابره می شود. مثلاً سیگنال های گیتره شینداری ($20\text{kHz} \text{ to } 1\text{Hz}$) در جو به سرعت تضعیف می شوند. ولی سیگنال های گستره های فرکانسی بالاتر تا مسافت های بسیار طولانی منتشر می شوند. پس در انتقال سیگنال های شینداری چون گفتار و موسیقی در کانالی که انتقال در آن اساساً به صورت انتشار در جو صورت می گیرد، فرستنده ابتدا سیگنال را با پردازش مناسب به سیگنالی با فرکانس بالاتر تبدیل می کند.

بسیاری از مفاهیم و روش های پی ریزی شده در فصول اولیه این کتاب نقش محوری در تحلیل و طراحی سیستم های مخابراتی دارند. مانند هر مفهوم دیگری که کاربردهای گسترده و مهمی دارد، مسائل جزئی فراوانی نیز وجود دارد که در موردشان کتاب های بسیار خوبی نوشته شده است و ما تعدادی از آن ها را در کتابنامه آخر کتاب درج کرده ایم. گرچه تحلیل کامل و مفصل سیستم های مخابراتی فراتر از حد این کتاب است، ولی با اطلاعات پایه ای کسب شده در فصول قبلی آماده ایم که اصول پایه ای و مباحث اصلی طراحی و تحلیل این سیستم ها آشنا شدیم.

به طور کلی فرایند گنجاندن سیگنال حاوی اطلاعات در سیگنالی دیگر را مدولاسیون می نامند. اخذ سیگنال حاوی اطلاعات مدولاسیون نام دارد. چنانچه خواهیم دید روش های مدولاسیون علاوه بر آن که امکان گنجاندن اطلاعات را بر روی سیگنالی که انتشار مؤثرتری دارد فراهم می کند، این امکان را نیز می دهد که چند سیگنال دارای طیف همپوشان از طریق یک کانال انتقال یابند، این مفهوم را مالتی پلکس می نامند.

روش های مختلفی برای مدولاسیون وجود دارد و به کار می رود، و در این فصل چند روش مهمتر را بررسی می کنیم. یک دسته بزرگ از روش های مدولاسیون دامنه یا **AM** پایه گذاری شده اند، در این نوع مدولاسیون سیگنالی که قصد انتقالش را داریم دامنه سیگنال دیگری را تغییر می دهد. یک شکل بسیار متداول مدولاسیون دامنه مدولاسیون دامنه سینوسی است که آن را در بخش های ۵-۱ تا ۵-۴، به همراه مفهوم مرتبط مالتی پلکس فرکانس به تفصیل بررسی می کنیم. دیگر دسته مهم سیستم های **AM** با مدولاسیون دامنه سیگنال پالسی سر و کار دارند، در بخش های ۵-۵ و ۵-۶ این شکل مدولاسیون را به همراه مفهوم مالتی پلکس زمانی بررسی می کنیم. در بخش ۵-۷ مدولاسیون متفاوتی موسوم به مدولاسیون فرکانس سینوسی را بررسی می کنیم که در آن سیگنال حاوی اطلاعات برای تغییر فرکانس یک سیگنال سینوسی به کار می رود.

تا بخش ۵-۷ تمام تاکید بر سیگنال های پیوسته در زمان است، زیرا اکثر محیط های انتقال را بهترست سیستم های

و در نظر گرفتن مفاهیم مدولاسیون چنین سیگنال هایی اهمیت عملی فراوانی دارد. در بخش ۵-۸ برخی ایده های مربوط به مخابرات سیگنال های گسسته در زمان را در نظر خواهیم گرفت.

۱-۵ مدولاسیون دامنه نمایی مختلط و سینوسی

مفهوم مدولاسیون دامنه سینوسی اساس بسیاری از سیستم های مخابراتی است. در این مدولاسیون دامنه یک سیگنال نمایی مختلط با یک سیگنال سینوسی، $c(t)$ در سیگنال حاوی اطلاعات $x(t)$ ضرب (مدوله) می شود. سیگنال $x(t)$ را سیگنال مدوله کننده و سیگنال $c(t)$ را سیگنال حامل می نامند. پس سیگنال مدوله شده $y(t)$ حاصل ضرب دو سیگنال است.

$$y(t) = x(t)c(t)$$

همانطور که در بخش ۵-۰ گفتیم هدف اصلی در مدولاسیون ایجاد سیگنالی است که گستره فرکانسی اش برای مخابره بر روی کانال مورد استفاده مناسب باشد. مثلاً در سیستم های تلفن انتقال راه دور توسط امواج میکروویو یا ماهواره ای صورت می گیرد. گستره فرکانسی صدای افراد 2000 Hz تا 4 kHz است، ولی دستگاه های میکروویو سیگنال هایی در گستره 300 MHz تا 3 GHz را منتقل می کنند، و ماهواره ها در گستره فرکانسی چند صد مگاهرتز تا 4 GHz کار می کنند. پس برای انتقال روی این کانال ها اطلاعات سیگنال گفتار باید به این فرکانس های بالا منتقل شود. همانطور که در این بخش می بینیم مدولاسیون دامنه سینوسی ایت انتقال فرکانسی را به روشی بسیار ساده صورت می دهد.

۱-۵-۱ مدولاسیون دامنه با حل نمایی مختلط

مدولاسیون دامنه سینوسی دو شکل متداول دارد، در یکی سیگنال حامل نمایی مختلطی به شکل زیرست

$$c(t) = e^{j(\omega_c t + \theta_c)} \quad (1-5)$$

و در دیگری سیگنال حامل سینوسی و به صورت زیرست

$$c(t) = \cos(\omega_c t + \theta_c) \quad (2-7)$$

در هر صورت فرکانس ω_c را فرکانس حامل می نامند ابتدا شکل اول را در نظر می گیریم و برای سهولت فرض می کنیم $\theta_c = 0$ تا سیگنال مدوله شده $y(t)$ به صورت زیر باشد.

$$y(t) = x(t)e^{j\omega_c t} \quad (3-7)$$

طبق خاصیت ضرب (بخش ۴-۵) و با نشان دادن تبدیل فوریه $c(t), y(t), x(t)$ با $C(j\omega), Y(j\omega), X(j\omega)$ داریم .

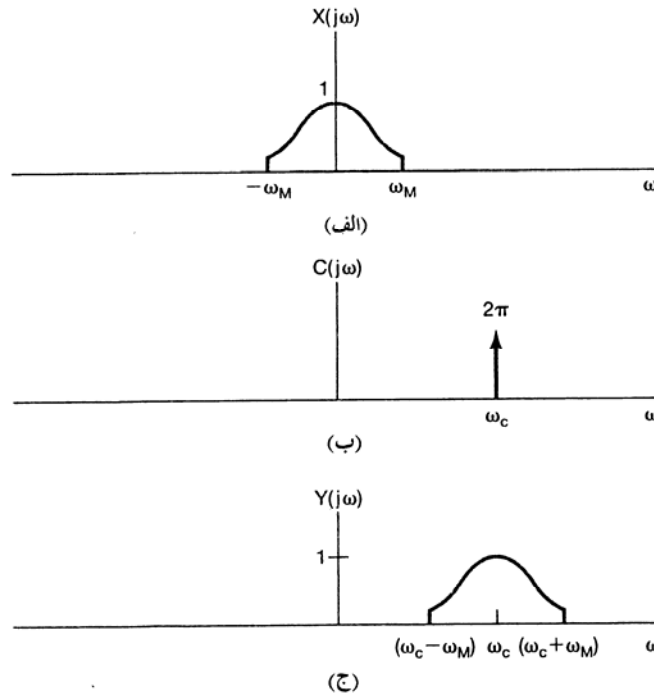
$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * C(j\omega) \quad (4-7)$$

اگر $c(t)$ سیگنال نمایی مختلط معادله (۱-۵) باشد آنگاه

$$C(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_c) \quad (5-7)$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega - j\omega_c) \quad (6-7)$$

بنابراین طیف خروجی مدوله شده $y(t)$ همان طیف ورودی است که به اندازه فرکانس حامل ω_c انتقال جابجا شده است مثلاً اگر مطابق شکل ۵-۱ (الف) $X(j\omega)$ محدود باند و بالاترین فرکانس آن ω_M باشد (یعنی پهنای باند آن $2\omega_M$ طیف خروجی $Y(j\omega)$ به صورت شکل ۸-۱ (ج) است.



شکل ۵-۱: اثر مدولاسیون دامنه با حامل نمایی مختلط در حوزه فرکانس:

(الف) طیف سیگنال مدوله کننده $x(t)$ ؛ (ب) طیف حامل $c(t) = e^{j\omega_c t}$ ؛ (ج) طیف سیگنال مدوله شده $y(t) = x(t) = e^{j\omega_c t}$

شکل ۵-۲: تحقق مدولاسیون دامنه با حامل نمایی مختلط $c(t) = e^{j(\omega_c t + \theta_c)}$

از معادله (۵-۳) پیداست که می تواند $x(t)$ را با ضرب $y(t)$ در نمایی مختلط $e^{-j\omega_c t}$ از سیگنال مدوله شده بازیابی کرد یعنی

$$x(t) = y(t)e^{-j\omega_c t} \quad (7-5)$$

این کار در حوزه فرکانس معادله انتقال طیف سیگنال مدوله شده به عقب و در محل اولیه خودش است فرآیند بازیابی سیگنال اصلی از سیگنال مدوله شده را دمدولاسیون می نامند این موضوع را در بخش ۵-۲ دنبال خواهیم کرد.

چون $e^{j\omega_c t}$ سیگنال مختلطی است معادله (۸-۳) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$y(t) = x(t)\cos\omega_c t + jx(t)\sin\omega_c t \quad (8-5)$$

سیس معادله (۱-۵) یا (۲-۵) یا (۳-۵) سیسی دو ضرب شده و دو سینس سس سینوسی با استر ۲ به ارای

(t) معادله (۱-۵) نشان داده شده است در بخش ۴-۵ کاربرد نمونه ای را معرفی می کنیم که در آن به کار بردن

سیستمی مانند شکل ۲-۵ با دو حامل سینوسی دارای اختلاف فاز $\frac{\pi}{2}$ مزایایی به همراه دارد.

۲-۱-۵ مدولاسیون دامنه با حامل سینوسی

در وضعیتهای بسیاری استفاده از حامل سینوسی به صورت معادله (۲-۵) ساده تر و به همان کار آمدی حامل نمایی

مختلط است در واقع استفاده از حامل سینوسی معادل این است که در شکل ۲-۵ تنها یکی از بخشهای حقیقی یا

موهومی خروجی را نگه داریم. شکل ۳-۵ سیستمی با حامل سینوسی را نشان می دهد.

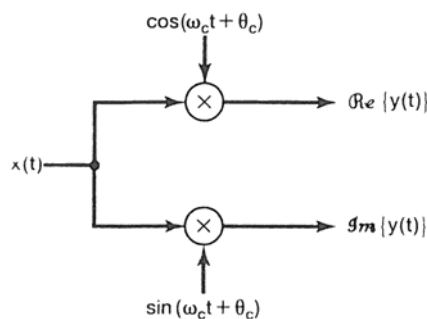
اثر مدولاسیون دامنه با حامل سینوسی به صورت معادله (۲-۵) را می توان با روشی مشابه روش بالا تحلیل کرد بار

دیگر برای سهولت فرض می کنیم $\theta_c = 0$ در این صورت طیف سیگنال حامل عبارت است از

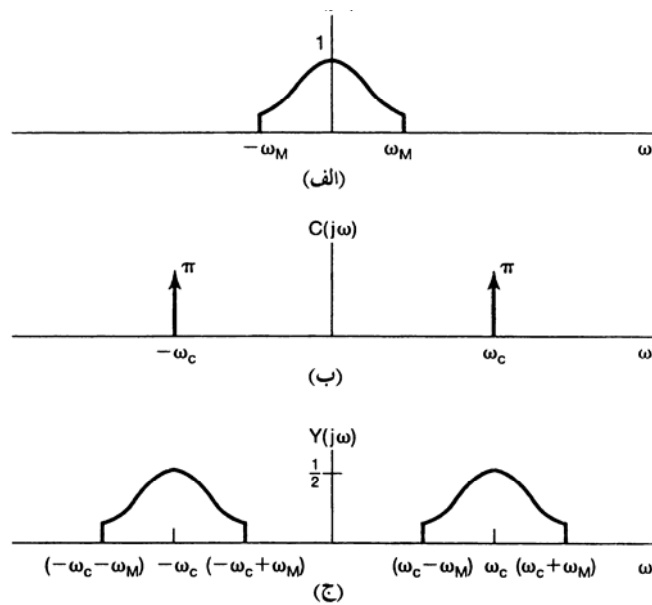
$$C(j\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \quad (۹-۵)$$

و بنابراین طبق معادله (۴-۷) داریم

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2}[X(j\omega - j\omega_c) + X(j\omega + j\omega_c)] \quad (۱۰-۵)$$

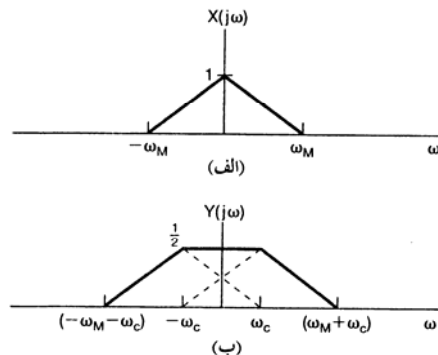


شکل ۳-۵: مدولاسیون دامنه با حامل سینوسی



شکل ۴-۵: اثر مدولاسیون دامنه با حامل سینوسی در حوزه فرکانس: الف) طیف فرکانس مدوله کننده $x(t)$ ؛ ب) طیف حامل $c(t) = \cos \omega_c t$ ؛ ج) طیف سیگنال مدوله شده

به ازای $X(j\omega)$ شکل (۴-۵) الف) $y(t)$ به صورت شکل ۴-۵ ج) است توجه کنید که در این حالت هم حول $\omega_c +$ و هم چون $\omega_c -$ گونه ای از طیف سیگنال اصلی وجود دارد پس تنها به شرطی می توان $x(t)$ را از $y(t)$ بازیابی کرد که $\omega_M > \omega_c$ زیرا در غیر اینصورت دو طیف روی هم می افتند در مورد حامل نمایی مختلط که تنها یک نمونه طیف حول ω_c قرار می گیرد چنین نیست در واقع چنانچه در بخش ۵-۱-۱ دیدیم در مدولاسیون دامنه با حامل نمایی مختلط همیشه می توان $x(t)$ را از $y(t)$ به ازای هر مقدار ω_c بازیافت به این منظور باید طیف را با ضرب در $e^{-j\omega_c t}$ مطابق معادله (۷-۵) به محل اصلی اش بر گرداند ولی برای حامل سینوسی چنانچه شکل ۴-۵ نشان می دهد به ازای $\omega_c < \omega_M$ دو نمونه طیف $X(j\omega)$ روی هم می افتند شکل ۵-۵ $Y(j\omega)$ را به ازای $\omega_c = \omega_M / 2$ نشان می دهد واضح است که تکرار طیف $x(t)$ در $Y(j\omega)$ مشاهده نمی شود بنابراین نمی توان $x(t)$ را از $y(t)$ به دست آورد.



شکل ۵-۵: مدولاسیون دامنه سینوسی با حامل $\cos \omega_c t$ به ازای $\omega_c = \omega_M / 2$ ؛ ب) طیف سیگنال مدوله شده

در گیرنده سیگنال حاوی اطلاعات $x(t)$ توسط فرآیند دمدولاسیون بازیابی می شود در این بخش فرآیند دمدولاسیون را برای دمدولاسیون دامنه سینوسی معرفی شده در بخش پیش بررسی می کنیم برای دمدولاسیون دو روش متداول وجود دارد که هر کدام مزایا و معایب خودشان را دارند روش اول را در بخش ۵-۲-۱ مورد بحث قرار می دهیم این فرآیند را دمدولاسیون همزمان می نامند و در آن فرستنده و گیرنده از لحاظ فاز همزمان می شوند در بخش ۵-۲-۲- روش دیگری مرسوم به دمدولاسیون ناهمزمان را معرفی می کنیم.

۵-۲-۱ دمدولاسیون همزمان

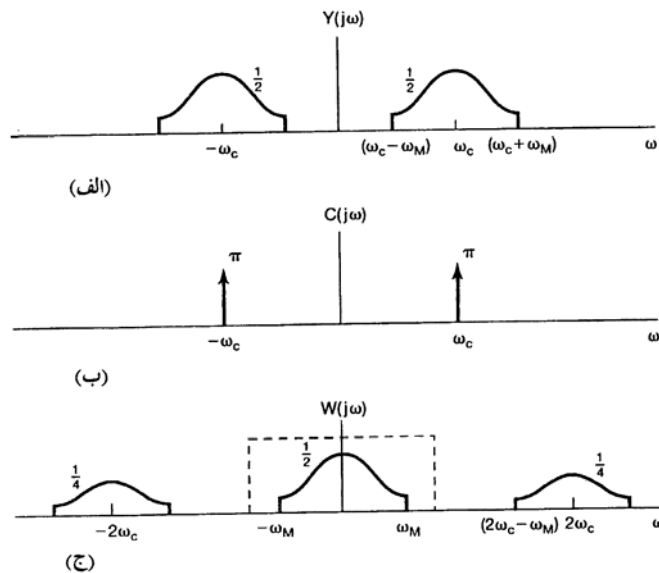
دمدولاسیون سیگنتلی که با حاصل سینوسی مدوله شده است به ازای $\omega_c < \omega_M$ به روشی سر راست صورت می یگیرد سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$y(x) = x(t) \cos \omega_c t \quad (11-5)$$

چنان که از مثال ۴-۲۳ بر می آید با دمدولاسیون $y(t)$ با همان حاصل سینوسی و گذراندن سیگنال حاصل از فیلتر پایین گذر می توان سیگنال اصلی را به دست آورد برای پی بردن به این مطلب فرض کنید.

$$w(t) = y(t) \cos \omega_c t \quad (12-5)$$

شکل ۸-۶ طیف $y(t)$, $w(t)$ را نشان می دهد و می بینیم که با بکار بردن یک فیلتر پایین گذر ایده آل با بهره ۲ و فرکانس قطع بزرگتر از ω_M و کوچکتر از $2\omega_c - \omega_M$ می توان $x(t)$ را از $w(t)$ بازیافت پاسخ فرکانسی فیلتر پایین گذر در شکل ۵-۶ (ج) با خط چین نشان داده شده است.



شکل ۵-۶: دمدولاسیون سیگنال مدوله شده با دامنه با حامل سینوسی: (الف) طیف سیگنال مدوله شده؛ (ب) طیف سیگنال حامل؛ (ج) طیف حاصل ضرب سیگنال مدوله شده و حامل خط چین ژاسخ فرکانسی فیلتر ژابین گذر به کار رفته برای استخراج سیگنال اصلی را نشان می دهد.

معادله (۱۱-۵) و (۱۲-۵) نتیجه می شود که

$$w(t) = x(t) \cos^2 \omega_c' t$$

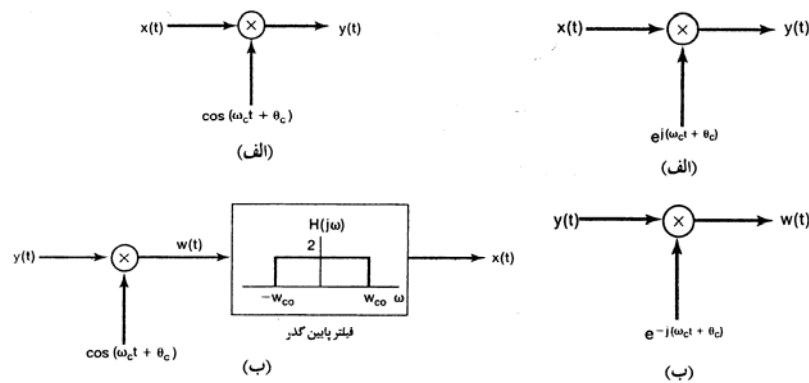
با استفاده از اتحاد مثلثاتی زیر

$$\cos^2 \omega_c' t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega_c' t$$

می توان $w(t)$ را به این صورت نوشت

$$w(t) = \frac{1}{2} x(t) + \frac{1}{2} x(t) \cos 2\omega_c' t \quad (۱۳-۵)$$

بنابراین $w(t)$ مجموع دو جمله است یکی نصف سیگنال اصلی و دیگری هم نصف سیگنال اصلی که توسط حاملی با فرکانس $2\omega_c'$ مدوله شده باشد هر دو جمله در طیف شکل ۵-۶ (ج) مشخص شده اند به کار بردن فیلتر پایین گذر برای $w(t)$ با نگه داشتن جمله اول سمت راست معادله (۱۳-۵) و حذف جمله دوم آن متناظر است.



شکل ۵-۷: سیستمی برای دمدولاسیون با استفاده از حامل نمایی مختلط: الف) مدولاسیون؛ ب) دمدولاسیون (راست)

شکل ۵-۸: مدولاسیون و دمدولاسیون دامنه با حامل سینوسی: الف) سیستم مدولاسیون؛ ب) سیستم دمدولاسیون فرکانس قطع فیلتر w_{CD} از ω_M بزرگتر از $2\omega_c - \omega_M$ کوچکتر است. (چپ)

شکل ۵-۷ سیستم دمدولاسیون و دمدولاسیون دامنه با حامل نمایی مختلط و شکل ۵-۸ سیستم دمدولاسیون و دمدولاسیون فرکانس با حامل سینوسی را نشان می دهد در این شکلها حالت کلی تری را نشان داده این که در آن هر حامل نمایی مختلط و سینوسی دارای فاز θ_c هستند اصلاح تحلیل پیش برای منظور کردن θ_c سراسر است و در مسئله ۵-۲۱ بررسی می شود. در سیستمهای شکلهای ۵-۷ و ۵-۸ فرض شده است که سیگنال دمدولاسیون از لحاظ فاز با سیگنال مدوله کننده همزمان است به همین دلیل این فرآیند را دمدولاسیون همزمان می نامند ولی اکنون فرض کنید مدولاتور و دمدولاتور همزمان نیستند برای حامل نمایی مختلط اگر فاز حامل مدوله کننده θ_c و فاز حامل دمدوله کننده θ_c باشد داریم.

$$y(t) = e^{j(\omega_c' t + \theta_c)} x(t) \quad (۱۴-۵)$$

$$w(t) = e^{j(\omega_c' t + \phi_c)} y(t) \quad (۱۵-۵)$$

و در نتیجه

$$w(t) = e^{j(\theta_c - \phi_c)} x(t) \quad (۱۶-۵)$$

$x(t)$ را می توان با گرفتن اندازه سیگنال دمدوله شده به دست آورد.

برای حامل سینوسی فاز حاملهای مدوله کننده و مدوله کننده را مطابق شکل ۵-۹ به ترتیب با θ_c, ϕ_c نشان می دهیم اکنون ورودی فیلتر پایین گذر عبارت است از

$$w(t) = x(t) \cos(\omega_c' t + \theta_c) \cos(\omega_c' t + \phi_c) \quad (17-5)$$

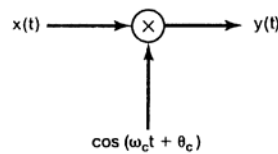
و با استفاده از اتحاد مثلثاتی

$$\cos(\omega_c' t + \theta_c) \cos(\omega_c' t + \phi_c) = \frac{1}{2} \cos(\theta_c - \phi_c) + \frac{1}{2} \cos(2\omega_c' t + \theta_c + \phi_c) \quad (18-5)$$

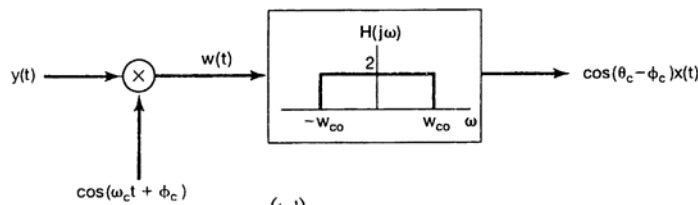
به دست می آوریم

$$w(t) = \frac{1}{2} \cos(\theta_c - \phi_c) x(t) + \frac{1}{2} x(t) \cos(2\omega_c' t + \theta_c + \phi_c) \quad (19-5)$$

ودراین صورت خروجی فیلتر پایین گذر حاصل ضرب $X(t)$ و ضریب دامنه $\cos(\theta_c - \phi_c)$ است اگر نوسانسازهای مدوله کننده و دمدوله کننده همفاز باشند $\theta_c = \phi_c$ و خروجی فیلتر پایین گذر است $x(t)$ است بر عکس اگر اختلاف فاز نوسانسازها $\pi/2$ باشد خروجی صفر است به طور کلی برای ماکزیمم بودن سیگنال خروجی نوسانسازها باید همفاز باشند مهمتر این است که رابطه فاز دو نوسانساز باید ثابت بماند تا ضریب دامنه $\cos(\theta_c - \phi_c)$ تغییر نکند این امر مستلزم همزمانی دقیق نوسانسازهای مدوله کننده و دمدوله کننده است امری که در عمل مخصوصاً هنگامی که سیستمهای مدوله کننده و دمدوله کننده دور از هم قرار دارند کاری مشکل است اثرهای این همزمانی و نیاز به همزمانی فرکانسی مدولاتور و دمدولاتور علاوه بر همزمانی فاز در مسئله ۵-۲۳ به تفصیل بررسی خواهد شد.

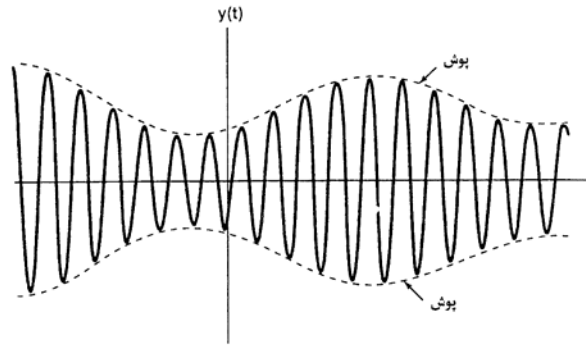


(الف)



(ب)

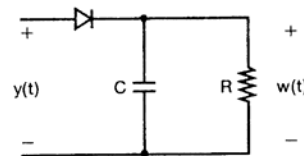
شکل ۵-۹: مدولاسیون و دمدولاسیون دامنه سینوسی که در آن سیگنال های حامل مدوله کننده و دمدوله کننده همزمان نیستند؛ (الف) مدوله کننده؛ (ب) دمدوله کننده



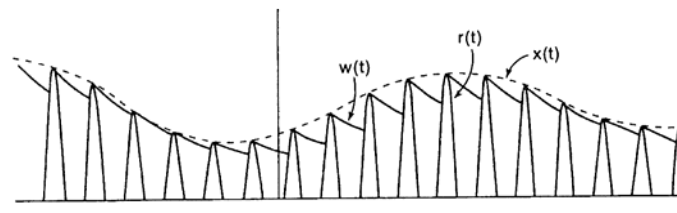
شکل ۵-۱۰: یک سیگنال مدوله شده دامنه که سیگنال مدوله کننده آن مثبت است و منحنی خط چین سیگنال مدوله شده را نشان می دهند.

۲-۲-۵ دمدولاسیون ناهمزمان

در بسیاری از سیستمهای دمدولاسیون دامنه سینوسی روند دمدولاسیون دیگری موسوم به دمدولاسیون ناهمزمان به کار می رود که در آن همزمانی مدوله کننده و دمدوله کننده لازم نیست فرض کنید که $x(t)$ همیشه مثبت و فرکانس حامل ω_c از ω_M (یعنی بزرگترین فرکانس سیگنال مدوله کننده) خیلی بزرگترست در این قله های $y(t)$ را به هم وصل می کند تقریب قابل قبولی از $x(t)$ است بنابراین با استفاده از سیستمی که برای استخراج پوش این قله ها را دنبال کند می توان $x(t)$ را تقریباً بازیابی کرد چنین سیستمی را آشکار ساز پوش می نامند در شکل ۵-۱۱ (الف) یک مدار ساده نشان داده شده است که به صورت آشکارساز پوش عمل می کند معمولاً بعد از این مدار یک فیلتر پایین گذر گذاشته می شود تا تموجهایی که مطابق شکل ۵-۱۱ (ب) در خروجی آشکارساز پوش وجود دارد حذف شود.

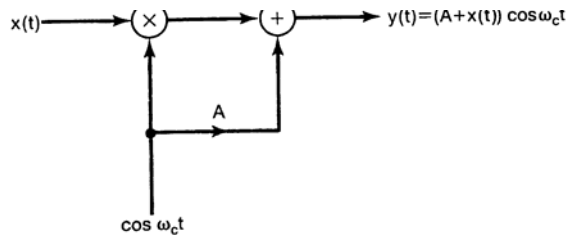


(الف)



(ب)

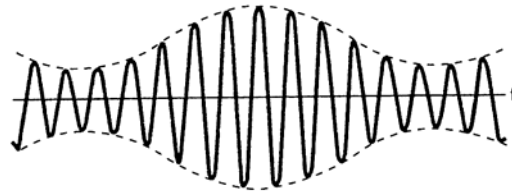
شکل ۵-۱۱: دمدولاسیون با آشکارساز پوش: (الف) مداری برای آشکارسازی پوش با استفاده از یکسوساز نسیم موج؛ (ب) شکل موج های مربوط به آشکارساز پوش: (الف): $r(t)$ سیگنال یکسوساز شده نیم موج، $x(t)$ پوش واقعی و $w(t)$ پوش به ست آمده از مدار الف است. در این شکل رابطه $x(t)$ و $w(t)$ با اغراق رسم شده تا اختلافشان نمایانتر باشد. در سیستم های دمدولاسیون ناهمزمان واقعی معمولاً $w(t)$ از آنچه در این شکل نشان داده شده است بسیار بهترست.



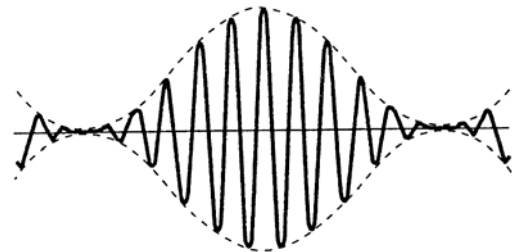
شکل ۵-۱۲: مدوله کننده برای یک سیستم مدولاسیون / دمدولاسیون ناهمزمان

دو فرض اساسی لازم برای دمدولاسیون ناهمزمان این است که $x(t)$ مثبت باشد و در مقایسه با ω_c آهسته تغییر کند تا بتوان پوش را به آسانی دنبال کرد مثلاً درانتقال سیگنالهای شنیداری در کانال فرکانس رادیویی (RF) که بزرگترین فرکانس موجود در $x(t)$ ، نوعاً 15kHz تا 20kHz ، و $\omega_c/2\pi$ در گستره 500kHz تا 2MHz است شرط دوم برآورده می شود شرط اول یعنی مثبت بودن $x(t)$ را می توان با افزودن مقدار ثابت مناسبی به $x(t)$ یا تغییر ساده مدوله کننده به صورت شکل ۵-۱۲ برآورده کرد در این صورت خروجی آشکار ساز پوش تقریبی از $x(t)+A$ است و $x(t)$ را به آسانی می توان از آن به دست آورد.

در استفاده از آشکار سازپوش برای دمدولاسیون باید A آنقدر بزرگ باشد که $x(t)+A$ همیشه مثبت باشد فرض کنید K ماکزیمم دامنه $x(t)$ است یعنی $|x(t)| \leq K$ برای مثبت بودن $x(t)+A$ باید داشته باشیم $A > K$ را شاخص مدولاسیون m می نامند بیان این نسبت بر حسب درصد درصد مدولاسیون نام دارد در شکل ۵-۱۳ خروجی مدوله کننده شکل ۵-۱۲ به ازای $x(t)$ سینوسی و $m=0.5$ (مدولاسیون ۵۰٪) و $m=1$ (مدولاسیون ۱۰۰٪) نشان داده شده است.



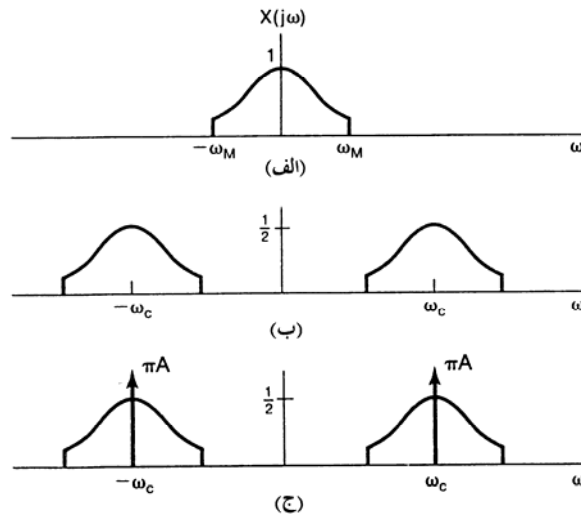
(الف)



(ب)

شکل ۵-۱۳: خروجی سیستم مدولاسیون دامنه شکل ۵-۱۲ به ازای الف) شاخص مدولاسیون $m = 0.5$ ؛ ب) شاخص مدولاسیون $m = 1$

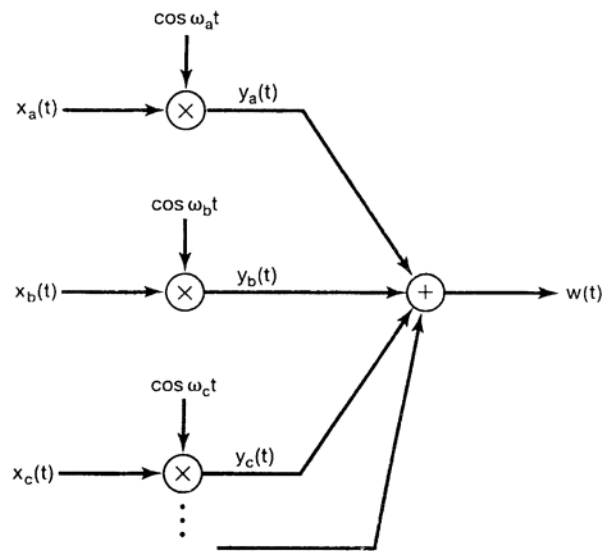
مقایسه شده اند مخصوصاً توجه کنید که خروجی مدوله کننده ناهمزمان شکل ۵-۱۲ یک مولفه اضافی $A \cos \omega_c t$ دارد که در سیستم همزمان نه وجود دارد و نه وجودش لازم است این مولفه در طیف شکل ۵-۱۴ (ج) به صورت ضربه هایی در $\omega_c + \omega_c -$ نشان داده شده است. اگر ماکزیمم دامنه سیگنال مدوله کننده K با کاهش A شاخص مدولاسیون افزایش و مقدار نسبی حامل موجود در خروجی مدوله شده کاهش می یابد چون مولفه حامل موجود در خروجی حاوی اطلاعات نیست حضور آن کاهش بازده (مثلاً از لحاظ توان لازم برای انتقال سیگنال مدوله شده) را نشان می دهد و در نتیجه بهترست تا می توانیم شاخص مدولاسیون را بزرگ کنیم از طرف دیگر هر چه شاخص مدولاسیون کوچکتر شود توانایی آشکار سازپوش ساده ای مثل آشکار ساز شکل ۵-۱۱ در دنبال کردن پوش و بیرون کشیدن $x(t)$ بهتر می شود بنابراین بین بازده سیستم از لحاظ توان خروجی مدولاتور و کیفیت سیگنال دمدوله شده باید مصالحه ای صورت گیرد. سیستم مدولاسیون - دمدولاسیون ناهمزمان شکل های ۵-۱۱ و ۵-۱۲ در مقایسه با سیستم همزمان شکل ۵-۸ مزایا و معایبی دارد سیستم همزمان دمدولاتور پیچیده تری نیاز دارد زیرا نوسانساز آن باید از لحاظ فرکانس و فاز با نوسانساز مدولاتور همزمان باشد از طرف دیگر مدولاتور ناهمزمان برای ارسال توان بیشتری می خواهد زیرا برای درست کار کردن آشکار ساز پوش ، پوش باید مثبت باشد، یا به عبارت دیگر در سیگنال ارسالی باید مولفه حامل نیز وجود داشته باشد این روش غالباً در مواردی چون بخش رادیو ترجیح داده می شود زیرا گیرنده ها (دمدولاتورها) متعدّدند و باید هزینه ساختشان کم باشد هزینه اضافی ناشی از توان اضافی با صرفه جویی صورت گرفته در گیرنده ها جبران می شود ولی در مواردی که توان ارسالی در درجه اول اهمیت قرار دارد مثل مخابرات ماهواره ای هزینه ساخت گیرنده های همزمان پیچیده تر توجیه پذیرست.



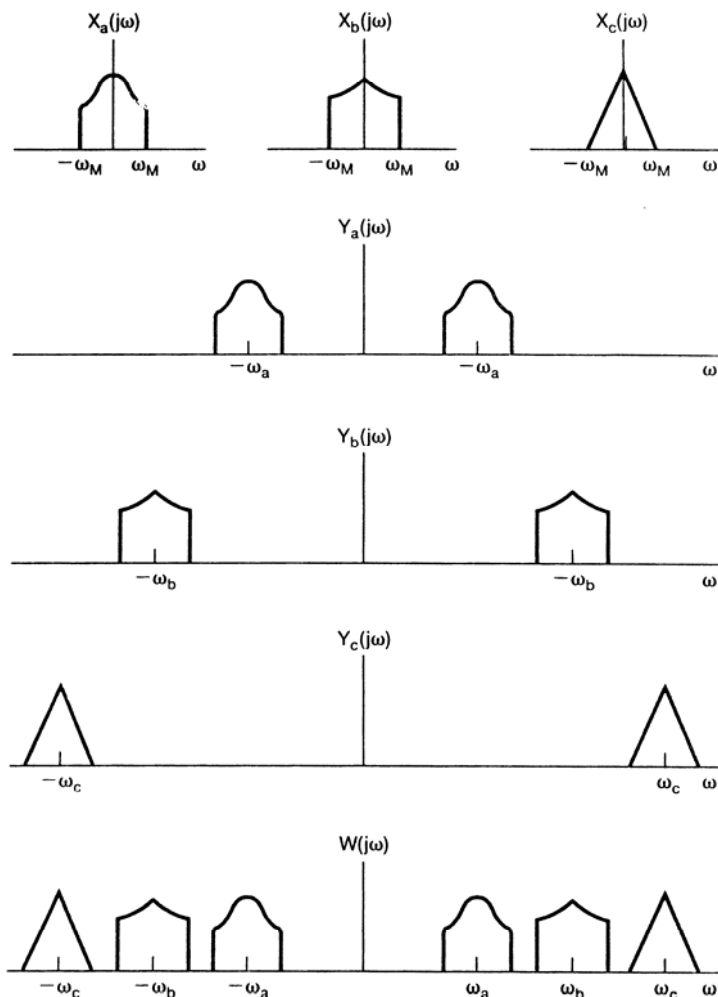
شکل ۵-۱۴: مقایسه طیف های سیستم های مدولاسیون دامنه سینوسی همزمان و ناهمزمان: (الف) طیف سیگنال مدوله کننده؛ (ب) طیف $x(t) = \cos \omega_c t$ که سیگنال مدوله شده سیستم همزمان را نشان می دهد؛ (ج) طیف $[x(t) + A] \cos \omega_c t$ که سیگنال مدوله شده سیستم ناهمزمان را نشان می دهد.

بسیاری از سیستمهایی که برای انتقال سیگنال به کار می روند پهنای باندشان از پهنای باند لازم برای انتقال یک سیگنال بزرگترست برای مثال پهنای باند یک رابط میکروویو چند گیگاهرتزست این پهنای باند از مقدار لازم برای انتقال یک کانال صدا بسیار بزرگترست اگر با مدولاسیون دامنه سینوسی سیگنالهای صدا که طیفشان همپوشانی دارد به فرکانسهای بالاتر منتقل شوند به نحوی که طیف سیگنالهای مدوله شده همپوشانی نداشته باشند می توان آنها را به طور همزمان روی یک کانال مخابره کرد این مفهوم را مالتی پلکس فرکانسی (FDM) می نامند شکل ۵-۱۵ چگونگی مالتی پلکس با حامل سینوسی را نشان می دهد.

سیگنالهای مدوله شده با هم جمع شده به طور همزمان روی یک کانال ارسال می شود شکل ۵-۱۶ طیف کانالها و سیگنال مالتی پلکس شده مرکب را نشان می دهد در این فرآیند سپس هر سیگنال ورودی به بخش فرکانسی مجزایی منتقل می شود برای بازیابی هر سیگنال در فرآیند دی مالتی پلکس دو گام اساسی برای لازم است عبور از فیلتر میانگذر برای استخراج سیگنال مدوله شده کانال مورد نظر، و دمدولاسیون برای بازیابی سیگنال اصلی این فرآیند در شکل ۵-۱۷ برای بازیابی کانال a نشان داده شده است مدولاسیون همزمان فرض شده است.



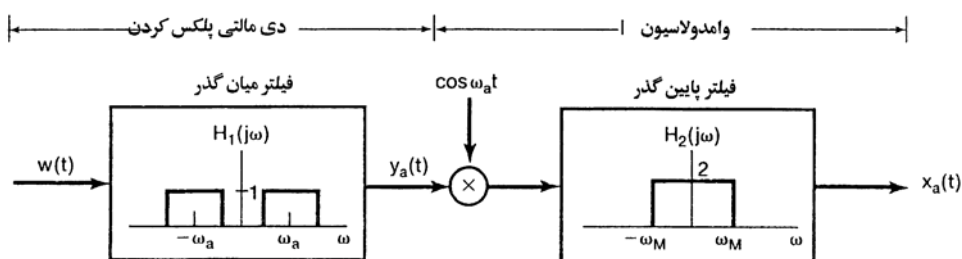
شکل ۵-۱۵: مالتی پلکس فرکانسی با استفاده از مدولاسیون دامنه سینوسی



شکل ۵-۱۶: طیف های متناظر با سیستم مالتی پلکس فرکانسی شکل ۵-۱۵

مخابرات تلفنی یکی از کاربردهای مهم مالتی پلکس فرکانسی است ارسال سیگنال از طریق جو در باند فرکانس رادیویی (RF) یک نمونه دیگرست، در ایالات متحده استفاده از فرکانسهای رادیویی برای ارسال سیگنال در گستره ۱۰kHz تا ۲۷۵GHz توسط کمیسیون مخابرات فدرال کنترل می شود و بخشهای مختلف این گستره فرکانسی به منظورهای مختلف اختصاص یافته است شکل ۵-۱۸ تقسیم بندی فعلی را نشان می دهد مطابق این گستره فرکانسی حول ۱MHz به پخش AM اختصاص یافته است منظور از AM مدولاسیون دامنه سینوسی است به هر یک از ایستگاههای رادیویی فرکانسهای خاصی از باند AM اختصاص داده شده است و بنابراین چندین ایستگاه می توانند به خاطر این مالتی پلکس فرکانسی به طور همزمان برنامه پخش کنند در گیرنده می توان به صورت نشان داده شده در شکل ۵-۱۷ با دی مالتی پلکس و دمودولاسیون هر یک از ایستگاههای رادیویی را برگزید پیچ تنظیم گیرنده هم فرکانس میانی فیلتر میان گذر و هم فرکانس نوساز دمودولاتور را کنترل می کند در واقع در پخش رادیویی از

۱۷ به یک فیلتر میان گذر تیز با فرکانس میانی تغییر نیاز دارد ساخت فیلترهای فرکانس گزین متغیر مشکل است و به همین دلیل یک فیلتر ثابت و یک طبقه میانی متشکل از یک سیستم مدولاسیون و یک فیلتر به کار می رود [که در گیرنده رادیو آن را طبقه فرکانس میانی (IF) می نامند] کاربرد مدولاسیون برای لغزاندن طیف در مقابل یک فیلتر میانگذر ثابت که به جای فیلتر میانگذر متغیر به کار می رود، شبیه روشی است که در بخش ۴-۵-۱ مورد بحث قرار گرفت این کار در رادیوهای خانگی انجام می شود برخی جزئیات مربوط به این روش در مسئه ۸-۳۶ در نظر گرفته شده است.



شکل ۵-۱۷: دی مالتی پلکس و دمدولاسیون سیگنال مالتی پلکس شده فرکانسی.

چنان که شکل ۵-۱۶ نشان می دهد، در سیستم ملتی پلکس فرکانسی شکل ۵-۱۵ طیف هر سیگنال هم در فرکانسهای منفی و هم در فرکانسهای مثبت تکرار می شود بنابراین سیگنال مدوله شده دو برابر پهنای باند سیگنال اصلی را اشغال می کند پس پهنای باند به طور موثر مورد استفاده قرار نمی گیرد در بخش بعد شکل دیگری از مدولاسیون دامنه را در نظر می گیریم که در آن به قیمت سیستم مدولاسیون پیچیده تر از پهنای باند به نحو موثرتری استفاده می شود.

۵-۲ مدولاسیون دامنه تک کنار باندی

در سیستم های مدولاسیون دامنه مورد بحث در بخش ۵-۱ پهنای باند کلی سیگنال $x(t)$ با در نظر گرفتن فرکانسهای مثبت و منفی $2\omega_M$ است حال آنکه بالاترین فرکانس موجود در $x(t)$ ، ω_M است با استفاده از حامل نمایی مختلط این طیف به حول ω ، منتقل می شود و پهنای باندی که در آن انرژی وجود دارد همچنان $2\omega_M$ است البته سیگنال مدوله شده مختلط است ولی با حامل سینوسی طیف سیگنال هم به ω و هم به $-\omega$ منتقل و در نتیجه پهنای باند دو برابر می شود پس در سیگنال مدوله شده با حامل سینوسی اطلاعات زائد وجود دارد با استفاده از روشی موسوم به مدولاسیون تک کنار باندی می توان این اطلاعات زائد را حذف کرد.

طیف $x(t)$ در شکل ۵-۱۹ (الف) نشان داده شده و آن مولفه های فرکانسی مثبت و منفی به نحو متفاوتی هاشور زده شده تا از هم متمایز شوند. شکل ۵-۱۹ (ب) طیف حاصل از مدولاسیون با حامل سینوسی است و می بینیم که بخشهای حول ω و $-\omega$ یک کنار باند بالا و یک کنار باند پایین دارند مقایسه شکل های ۵-۱۹ (الف) و (ب) نشان می دهد که اگر تنها باندهای بالا (یا تنها کنار باندهای پایین) را نگه داریم، هم می توانیم $X(\omega)$ را به دست آوریم اگر

شکل ۱۹-۵ (د) به دست می آید تبدیل $x(t)$ به صورتی که طیف آن متناظر با شکل ۱۹-۵ (ج) یا (د) به دست آید مدولاسیون تک کنار باندی (SSB) نامیده می شود در مقابل طیف شکل ۱۹-۵ (ب) که در آن هر دو کنار باند حفظ شده است و مدولاسیون دو کنار باندی (DSB) نامیده می شود.

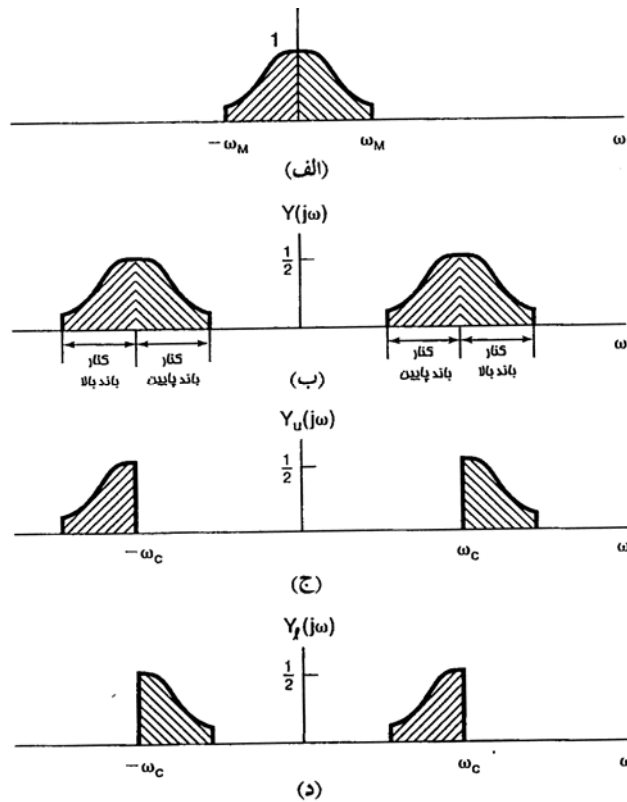
برای به دست آوردن سیگنال تک کنار باندی روشهای متعددی وجود دارد یک روش که در شکل ۲۰-۵ نشان داده شده اعمال فیلتر تیز بالا گذر یا میان گذر به سیگنال دو کنار باندی شکل ۱۹-۵ (ب) است تا کنار باند ناخواسته حذف شود در روش دوم از تغییر دهنده فاز استفاده می شود شکل ۲۱-۵ سیستمی را نشان می دهد که برای حفظ کنار باندهای پایین طراحی شده است سیستم $H(j\omega)$ یک شبکه تغییر فاز 90° درجه است که پاسخ فرکانسی آن عبارت است از

$$H(j\omega) = \begin{cases} -j & , \quad \omega > 0 \\ j & , \quad \omega < 0 \end{cases} \quad (20-5)$$

طیفهای $y_1(t), y_2(t) = x_p(t) \sin \omega_c t, y_1(t) = x(t) \cos \omega_c t; x(t)$ در شکل ۲۲-۵ نشان داده شده است در مسئله ۵-۲۸ خواهیم دید که برای نگه داشتن کنار باندهای بالا باید مشخصه فاز $H(j\omega)$ بر عکس شود.

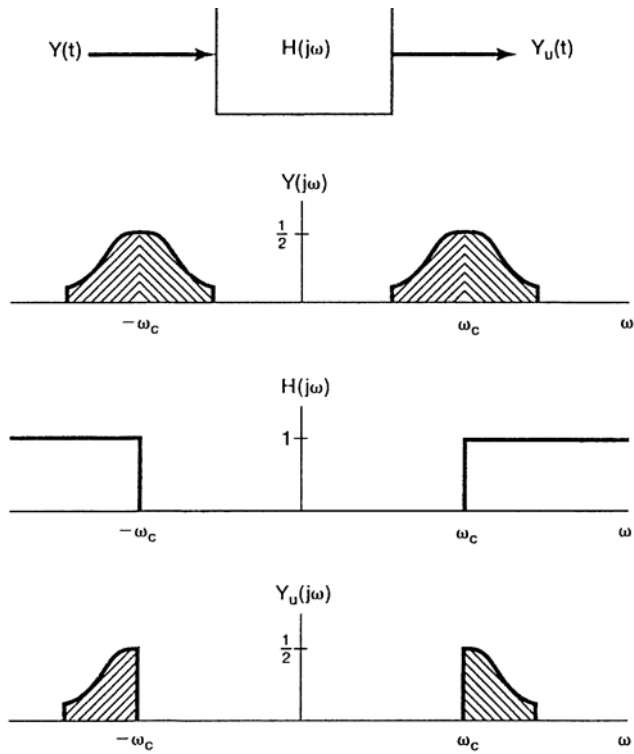
$$H(j\omega) = \begin{cases} j & , \quad \omega > 0 \\ -j & , \quad \omega < 0 \end{cases} \quad (21-5)$$

در مسئله ۲۹-۵ خواهیم دید که مدولاسیون همزمان سیستم های تک کنار باندی مانند مدولاسیون همزمان سیستم دو کنار باندی انجام می شود بهای این افزایش کارایی سیستمهای تک کنار باندی پیچیدگی بیشتر مدوله کننده است.

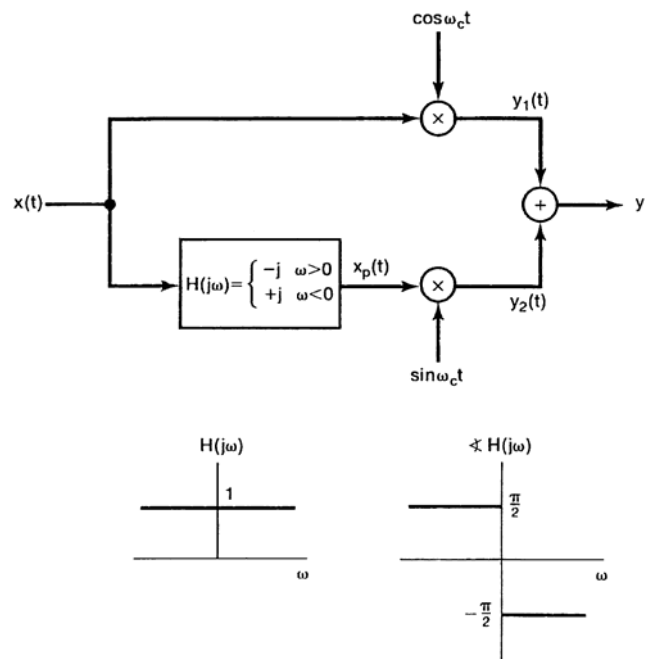


شکل ۵-۱۹: مدولاسیون تک کنار باندی و دو کنار باندی: الف) سیگنال مدوله کننده؛ ب) طیف حامل از مدولاسیون با حامل سینوسی؛ ج) کنار باندهای بالا؛ د) کنار باندهای پایین

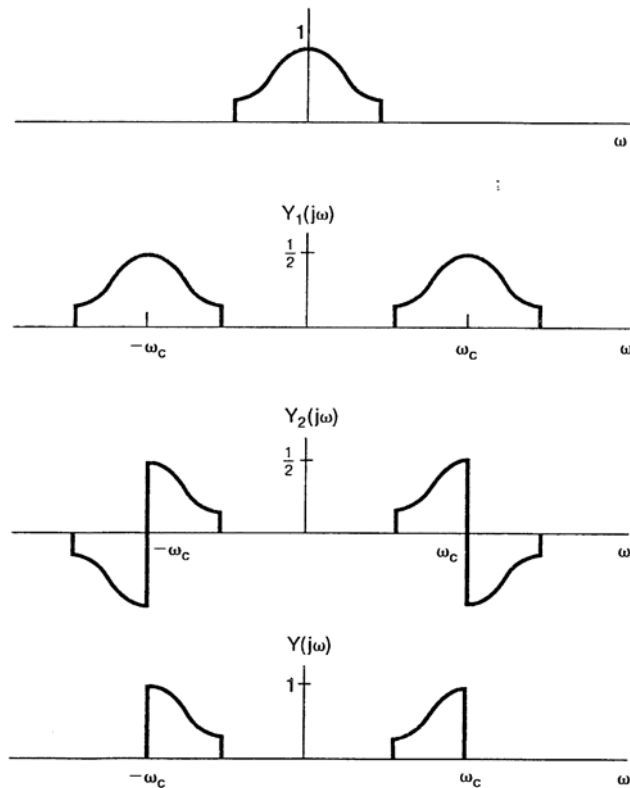
به طور خلاصه در بخشهای ۵-۱ تا ۵-۴ چند نوع مدولاسیون دامنه نمایی مختلط و سینوسی بررسی کردیم. در مدولاسیون ناهمزمان مورد بحث در بخش ۵-۲-۲ باید مقدار ثابتی با سیگنال مدثله کننده اضافه شود تا سیگنال حاصل همیشه مثبت باشد این امر باعث می شود سیگنال حامل به عنوان مولفه ای در خروجی مدوله شده ظاهر شود بنابراین برای ارسال آن توان بیشتری لازم است ولی در عوض دمدولاتور ساده تر از سیستم همزمان می طلبد همچنین می توان تنها کنار باندهای بالا یا پایین خروجی مدوله شده را نگه داشت تا از پهنای باند و توان بهتر استفاده شود ولی این کار مدولاتوری پیچیده تر می خواهد مدولاسیون دامنه سینوسی دو کنار باندی را به اختصار AM-DSB/WC (مدولاسیون دامنه دوکنار باندی-حامل محذوف) می نامند سیستمهای متناظر تک کنار باندی به اختصار AM-SSB/WS, AM-SSB/SC, AM=SSB/SC نامیده می شوند. هدف بخشهای ۵-۱ تا ۵-۴ معرفی مفاهیم اساسی مدولاسیون دامنه بود. جزییات سیستم و روشهای ساخت تنوع زیادی دارند و خواننده را به کتابهای عالی بسیاری که این موضوع را بیشتر می شکافند و در کتابنامه نامبرده شده اند رجوع می دهیم.



شکل ۵-۲۰: سیستمی برای حفظ کنابندهای بالا به کمک فیلتر بالاگذر ایده آل



شکل ۵-۲۱: سیستم مدولاسیون دامنه تک کنار بانندی با استفاده از مدار تغییر فاز ۹۰ درجه، که در آن کنار باندهای پایین حفظ می شوند.



شکل ۵-۲۲: طیف های سیستم تک کنار باندی شکل ۵-۲۱

۵-۵ مدولاسیون دامنه با حامل قطار پالس

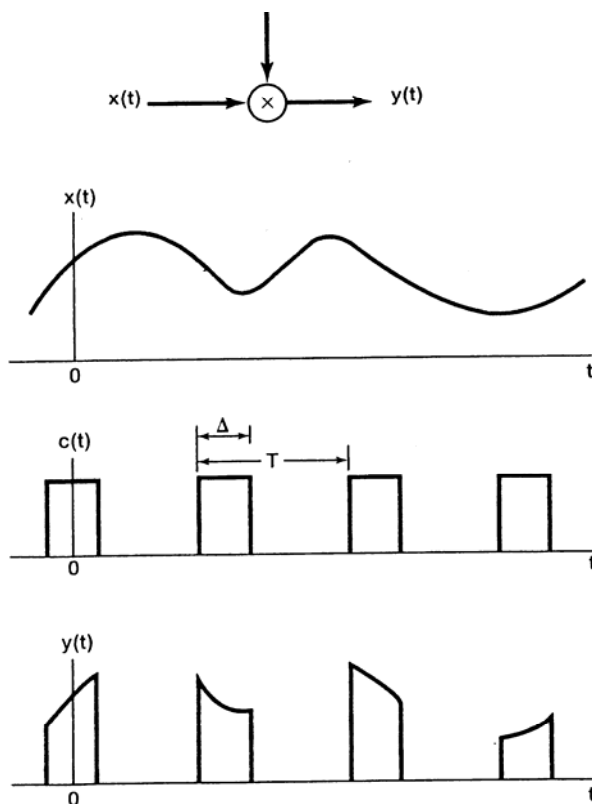
۵-۵-۱ مدولاسیون حامل قطار پالس

در بخشهای قبل مدولاسیون دامنه حامل سینوسی را بررسی کردیم در یک دسته مهم روشهای مدولاسیون دامنه از قطار پالس به عنوان حامل استفاده می شود شکل ۵-۲۳ چگونگی کار را نشان می دهد این نوع مدولاسیون دامنه چیزی جز ارسال قطعه های هم فاصله ای از $x(t)$ نیست در حالت کلی نباید انتظار داشته باشیم که بتوان سیگنال دلخواهی را از این قطعات بازیابی کرد ولی مفهوم نمونه برداری فصل ۷ چنین می نماید که اگر $x(t)$ محدود باند و فرکانس تکرار پالس به حد کافی بزرگ باشد شاید بتوان این کار را کرد. با توجه به شکل ۵-۲۳

$$y(t) = x(t) c(t) \quad (۲۲-۵)$$

یعنی سیگنال مدوله شده $y(t)$ حاصل ضرب $x(t)$ و حاصل $c(t)$ است. اگر $Y(j\omega), X(j\omega), C(j\omega)$ تبدیل فوریه این سیگنالها باشد با توجه به خاصیت ضرب می توان نوشت :

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * C(j\omega) \quad (۲۳-۵)$$



شکل ۵-۲۳: مدولاسیون دامنه قطار پالس

چون $c(t)$ با دوره تناوب T متناوب است $C(j\omega)$ از ضربه های با فاصله یکسان $2\pi/T$ تشکیل شده است یعنی

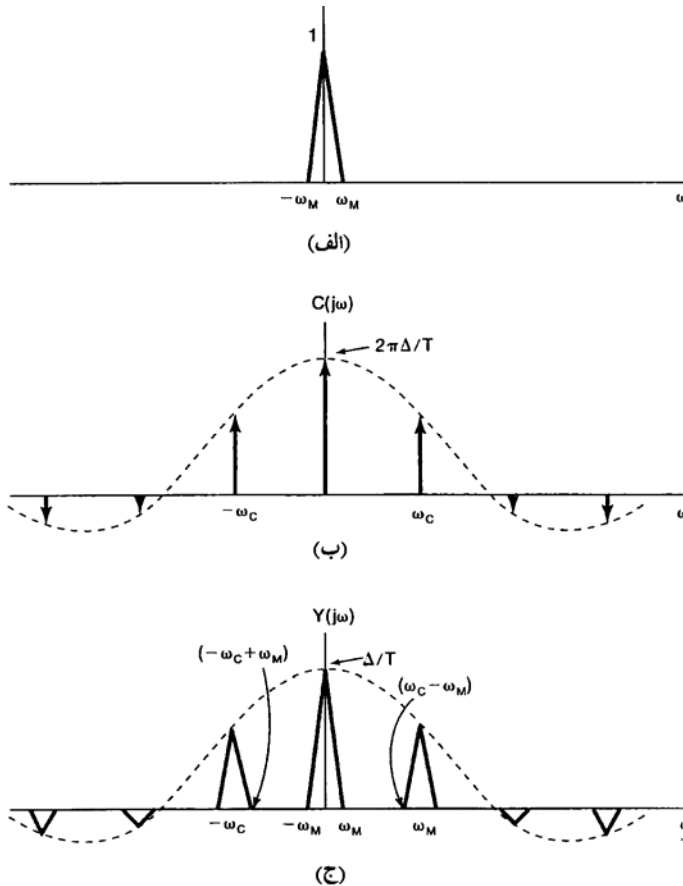
$$C(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_c), \quad (24-5)$$

که در آن $\omega_c = 2\pi/T$ و a_k ها ضرایب سری فوریه $c(t)$ هستند که با توجه به مثال ۳-۵ عبارت اند از

$$a_k = \frac{\sin(k\omega_c \Delta / 2)}{\pi k} \quad (25-5)$$

طیف $c(t)$ در شکل ۴۸-۲ (ب) نشان داده شده است اگر طیف $x(t)$ مطابق شکل ۲۴-۵ (الف) باشد طیف سیگنال مدوله شده حاصل $y(t)$ مطابق شکل ۲۴-۵ (ج) است با توجه به معادلات (۲۳-۵) و (۲۴-۵) $Y(j\omega)$ باید جمع وزندار و جابجا شده $X(j\omega)$ باشد:

$$y(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k X(j(\omega - k\omega_c)) \quad (24-5)$$



شکل ۵-۲۴: طیف های مربوط به مدولاسیون دامنه قطار پالس: الف) طیف سیگنال محدود باند $x(t)$; ب) طیف حامل پالس $c(t)$ (شکل ۸-۲۳؛ ج) طیف قطار پالس مدوله شده $y(t)$

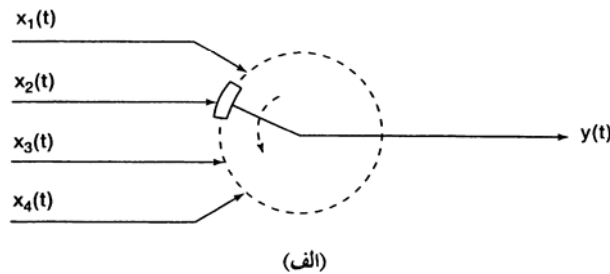
مقایسه معادله (۵-۲۶) با معادله (۷-۶) و شکل (۷-۲۴) با شکل (۷-۳) نشان می دهد که طیف $y(t)$ بسیار شبیه طیف حاصل از نمونه برداری با قطار ضربه است تنها تفاوت این دو ضرائب فوریه قطار پالس و قطار ضربه است برای قطار ضربه ای که در فصل ۷ به کار بردیم تمام ضرائب فوریه برابر $1/T$ هستند، ولی برای قطار پالس $c(t)$ شکل ۵-۲۳ ضرائب سری فوریه از معادله (۵-۲۵) به دست می آیند به ازای $\omega_c > 2\omega_M$ تکرارهای $X(j\omega)$ روی هم نمی افتند و این همان شرط نایکویست است در صورت ارضای این شرط درست مانند نمونه برداری با قطار ضربه $x(t)$ را می توان به کمک فیلتر پایین گذر از $y(t)$ بازیابی کرد.

توجه کنید برای بسیاری از شکل موجهای پالسی دیگر نیز همین نتایج صدق اند: اگر $c(t)$ سیگنال متناوب دلخواهی با تبدیل فوریه ای شبیه معادله (۵-۲۴) با ضرائب فوریه a_k باشد. $Y(j\omega)$ به صورت معادله (۵-۲۶) است پس اگر $\omega_c = 2\pi/T > 2\omega_M$ تکرارهای $X(j\omega)$ روی هم نمی افتند و می توانیم $x(t)$ را به کمک فیلتر پایین گذر به دست آوریم به شرطی که ضریب فوریه a_0, dc غیر صفر باشد در مسئله ۵-۱۱ خواهیم دید که اگر a_0 صفر یا خیلی کوچک باشد می توان با فیلتر میانگذر یکی از $X(j\omega)$ های جابجا شده متناظر با a_k بزرگ را برگزید و یک سیگنال AM

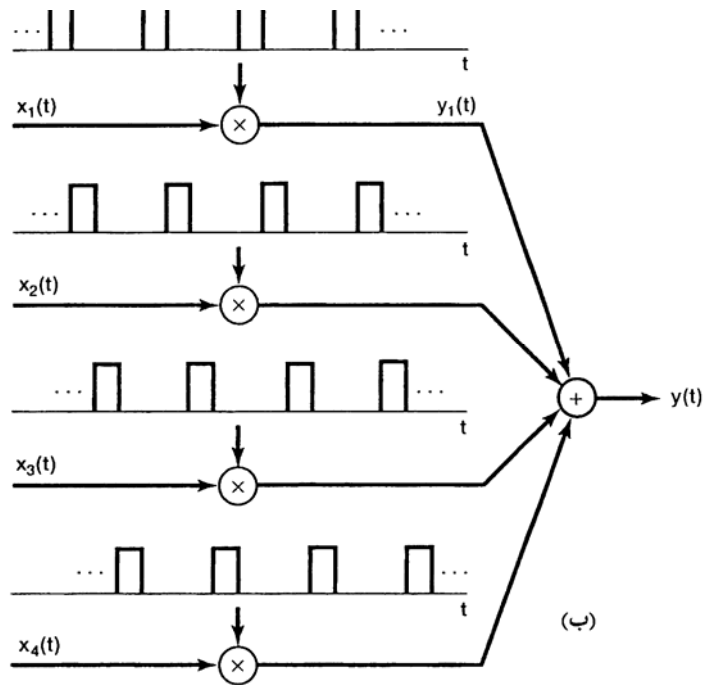
دمدولاسیون توصیف شده در بخش ۲-۵ را به کار برد.

۲-۵-۵ مالتی پلکس حوزه زمان

مدولاسیون دامنه با حامل قطار پالس غالباً برای ارسال همزمان چند سیگنال بر روی یک کانال به کار می رود. چنانچه شکل ۲۳-۵ نشان می دهد خروجی مدوله شده $y(t)$ تنها مواقعی مقدار دارد که سیگنال حامل $c(t)$ غیر صفرست در زمانهای صفر بودن $c(t)$ می توان سیگنالهای دیگری را که به همین صورت مدوله شده اند ارسال کرد شکل ۲۵-۵ دو نمایش هم ارز این فرایند را نشان می دهد در این روش به هر سیگنال در هر T ثانیه یک شکاف زمانی به اندازه Δ اختصاص می یابد هر چه نسبت Δ/T کوچکتر باشد تعداد سیگنال بیشتری را می توان روی کانال ارسال کرد این روش را مالتی پلکس زمانی (TDM) می نامند در مالتی پلکس فرکانسی بخش ۳-۵ به هر سیگنال فاصله فرکانسی مختلفی اختصاص می یابد ولی در مالتی پلکس زمانی هر سیگنال فواصل زمانی خاص خود را داراست. برای دی مالتی پلکس سیگنال مرکب شکل ۲۴-۵ از دروازه های زمانی استفاده می شود در این کار سیگنال مرکب در زمانهای اختصاص یافته به هر سیگنال به خط مربوط به آن سیگنال وصل می شود.



شکل ۲۵-۵: مالتی پلکس زمانی



شکل ۵-۲۵: (ادامه)

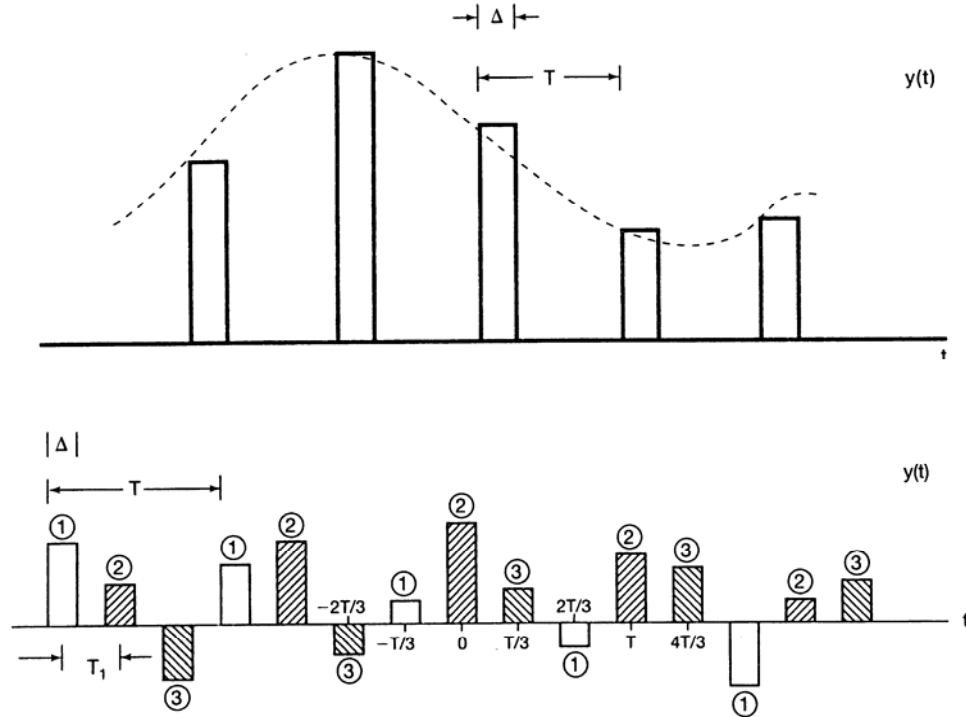
۵-۶ مدولاسیون دامنه پالس

۵-۶۱ سیگنال مدوله شده دامنه پالس

در بخش ۵-۵ یک سیستم مدولاسیون توصیف کردیم که در آن سیگنال پیوسته در زمان $x(t)$ یک قطار پالس متناوب را مدوله می‌کرد، و معادل این بود که در هر T ثانیه یک شکاف Δ ثانیه ای به $x(t)$ اختصاص یابد در آن مباحث و در مبحث نمونه برداری فصل ۷ دیدیم که امکان بازیابی $x(t)$ از این شکاف های زمانی به اندازه شکافهای Δ بستگی ندارد بلکه به فرکانس $2\pi/T$ آنها بستگی دارد که باید از آهنگ نایکویست بیشتر باشد تا بتوان $x(t)$ بدون اختلاطی را بازیابی کرد یعنی در واقع تنها ارسال نمونه های $x(nT)$ سیگنال $x(t)$ لازم است.

در واقع در سیستمهای نوین مخابراتی نمونه های سیگنال حاوی اطلاعات $x(t)$ ارسال می شود نه برشهای آن دلایل عملی ماکزیمم دامنه ای که می توان در یک کانال مخابراتی ارسال کرد محدودست بنابراین ارسال نمونه های ضربه ای $x(t)$ عملی نیست. به جای این کار نمونه های $x(nT)$ برای مدوله کردن دامنه یک رشته پالس به کار می رود سیستم حاصل را سیستم مدولاسیون دامنه پالس (PAM) می نامند کاربرد پالسهای مستطیلی با راهبرد نمونه بردار - نگهدار متناظرست که در آن پالسهایی با عمر Δ و دامنه ای که با مقدار $x(t)$ در لحظه نمونه برداری برابرست تولید می شود شکل ۵-۲۶ شکل موج یک کانال PAM را نشان می دهد در این شکل منحنی خط چین سیگنال $x(t)$ را نشان می دهد سیگنالهای PAM را نیز می توان مانند سیگنالهای مدوله شده به روش بخش ۵-۵ مالتی پلکس زمانی کرد این کار در شکل ۵-۲۷ تصویر شده است که مالتی پلکس زمانی سه شکل موج را نشان می دهد برای مشخص

پالس کوچکتر باشد کانالهای بیشتری را می توان مالتی پلکس کرد ولی هر چه عرض پالس کمتر شود باید ارتفاع پالسها را زیادتیر کرد تا پالس ارسالی انرژی کافی داشته باشد.



شکل ۵-۲۶: شکل موج ارسالی یک کانال PAM، منحنی خط چین سیگنال $x(t)$ را نشان می دهد. (بالا)

شکل ۵-۲۷: شکل موج ارسالی سه کانال PAM مالتی پلکس شده. پالس های متناظر با هر کانال هم با هاشور و هم با شماره مشخص شده است. فاصله بین نمادها $T_1 = T/3$ است. (پایین)

در طراحی سیگنالهای PAM علاوه بر انرژی ملاحظات دیگری نیز باید در مد نظر باشد می دانیم که اگر فرکانس نمونه برداری از آهنگ نایکویست بیشتر باشد $x(t)$ را می توان از روی نمونه هایش بازیابی کرد و بنابراین می توان این نمونه ها را برای مدوله کردن دامنه یک رشته پالسی متناوب با شکل دلخواه به کار برد. گزینش شکل پالس توسط مسائلی چون فرکانس گزینی محیط انتقال و تداخل بین نمادها که موضوع بخش بعدی است تعیین میشود.

۵-۶-۲ تداخل بین نمادها در سیستم های PAM

در سیستمهای مدولاسیون دامنه پلاس TDM توصیف شده در بالا برای جدا کردن کانالها می توان از شکل موج مالتی پلکس شده در زمانهای مناسب نمونه برداری کرد سیگنال مالتی پلکس زمانی شکل ۵-۷ را در نظر بگیرید که از PAM سه سیگنال $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ و مالتی پلکس آنها تشکیل شده است اگر در زمانهای مناسب مثلاً وسط هر پالس از

$$y(t) = Ax_1(t) \quad t = 0 \pm 3T_1, \pm 6T_1, \dots$$

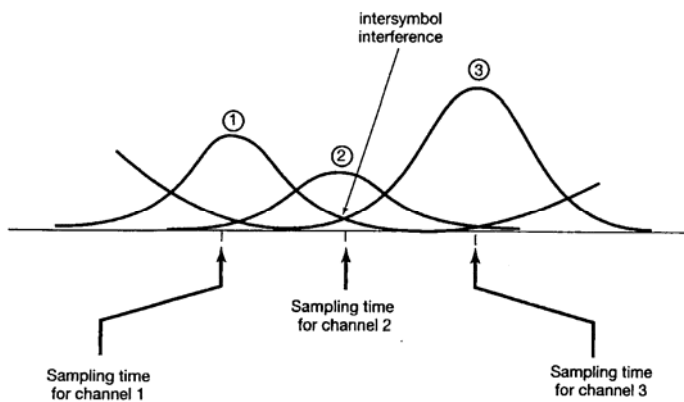
$$y(t) = Ax_2(t) \quad t = T_1, T_1 \pm 3T_1, T_1 \pm 6T_1, \dots$$

$$y(t) = Ax_3(t) \quad t = 2T_1, 2T_1 \pm 3T_1, T_1 \pm 6T_1, \dots$$

که در آن T_1 فاصله بین نمادها و در اینجا برابر $T/3$ است A یک ضریب ثابت است به بیان دیگر با نمونه برداری مناسب از سیگنال PAM مالتی پلکس زمانی دریافت شده می توان نمونه های $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را به دست آورد.

راهبرد بیان شده در بالا با این فرض کارایی دارد که پالسهای ارسالی در حین انتقال از کانال مخابراتی متمایز بمانند ولی در انتقال از هر محیط واقعی پالسها به خاطر اثرهای فیلتری و نویز اعوجاج می یابند صد البته نویز اضافه شده در کانال، در دامنه نمونه ها خطا وارد می کند اثر فیلتر کردن ناشی از غیر ایده آل بودن پاسخ فرکانسی کانال باعث در هم روی پالسها می شود به نحوی که پالسها در زمان روی هم می افتند این تداخل شکل ۸-۲۸ نشان داده شده است و تداخل بین نمادها نامیده می شود.

درهم روی زمانی پالسهای ایده آل شکل ۵-۲۷ می تواند از محدودیت پهنای باند یا پخش فاز ناشی از تأخیر گروه نابرابر که در بخش ۶-۲-۲ مورد بحث قرار گرفت ناشی شود. (به خصوص مثال ۶-۱ را ببینید) اگر تداخل بین نمادها تنها از محدودیت پهنای باند کانال ناشی شده باشد بهترست از پالس محدود باند استفاده کرد که پهنای باند محدود بر آن اثری نگذارد (یا اثرش اندک باشد) در واقع اگر پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ کانال در یک گستره فرکانسی عاری از اعوجاج باشد (مثلاً اگر در $|\omega| < w$ $H(j\omega) = 1$) اگر از پالسی با باند محدود (یعنی پالس با $P(j\omega) = 0$ در $|\omega| \geq w$) استفاده کنیم سیگنالهای PAM بدون اعوجاج دریافت می شوند ولی در این صورت دیگر پالسهای ناهمپوشانی چون پالسهای شکل ۵-۲۷ نخواهیم داشت ولی اگر شکل پالسهای محدود باند به نحوی باشند که عبور از صفرشان در زمانهای پالسهای بعدی رخ دهد [یعنی معادله (۵-۲۷) همچنان ارضا شود] تداخل بین نمادها پیش نمی آید به عنوان نمونه پالس سینک زیر را در نظر بگیرید.



شکل ۵-۲۸: تداخل بین نمادها

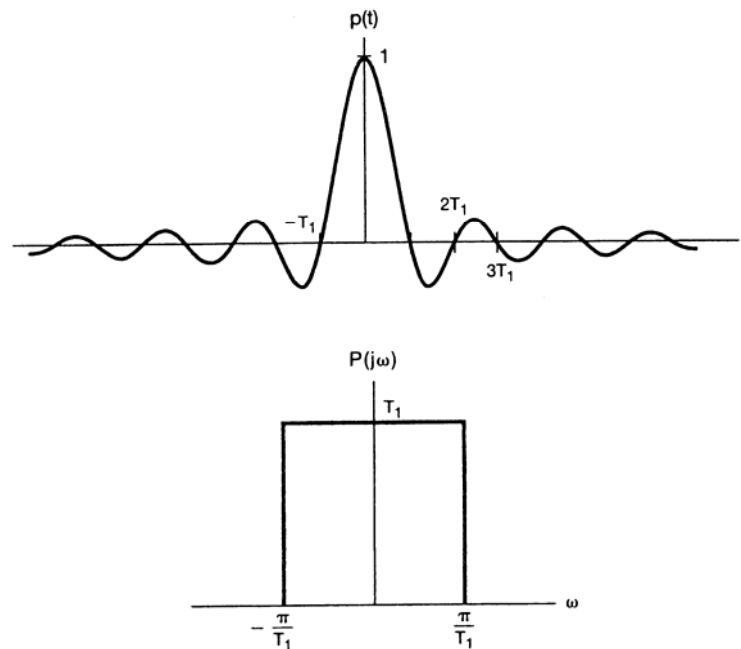
$$p(t) = \frac{1}{\pi t}$$

جا افتاده

$P_1(j\omega)$ حول π/T_1 تقارن فرد داشته باشد، به نحوی که

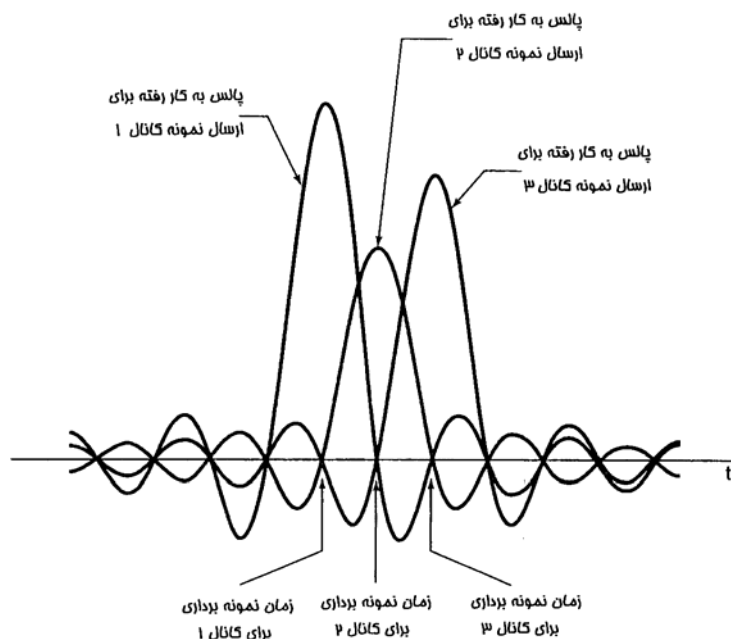
$$P_1\left(-j\omega + j\frac{\pi}{T_1}\right) = -P_1\left(j\omega + j\frac{\pi}{T_1}\right) \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_1} \quad (29-5)$$

شکل ۳۱-۵ چنین طیفی را نشان می دهد به ازای $p(t), P_1(j\omega) = 0$ همان تابع سینک است. در مسئله ۴۲-۵ نشان می دهیم که به ازای هر $P_1(j\omega)$ ارضا کننده شرایط (۲۸-۵) و (۲۹-۵) در $p(t)$ ، $\dots, \pm T_2, \pm T_1$ صفر می شود.

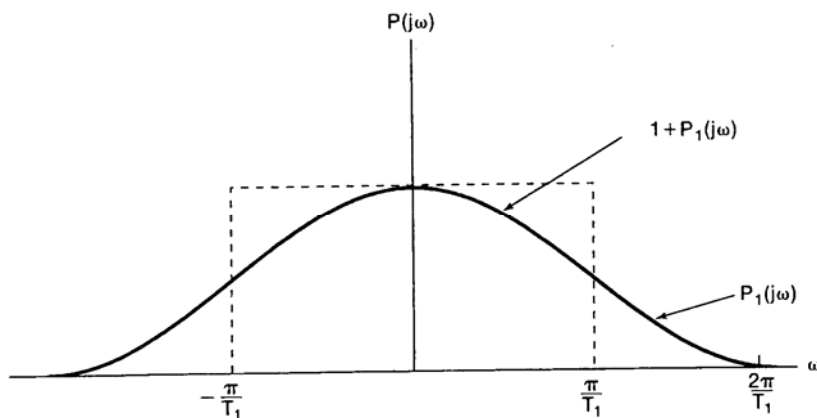


شکل ۲۹-۵: یک پالس سینک و طیف آن

گرچه سیگنالهای ارضا کننده معادلات (۲۸-۵) و (۲۹-۵) امکان غلبه بر مشکل محدودیت پهنای باند کانال را فراهم می کند، ولی اعوجاجهای دیگری نیز ممکن است بروز کند که گزیشن پالسی با شکل متفاوت یا پردازش اضافی سیگنال دریافتی قبل از جدا کردن سیگنالهای TDM را طلب کند. در واقع اگر $|H(j\omega)|$ در باند عبور ثابت نباشد ممکن است لازم شود عمل متعادل سازی کانال صورت گیرد، یعنی فیلتری به کار رود که بهره غیر ثابت کانال را تصحیح کند. همچنین اگر فاز کانال خطی نباشد. ممکن است اعوجاج منجر به تداخل بین نماد پیش بیاید مگر این که پردازشهای جبران کننده ای صورت گیرد. این اثرها در مسائل ۴۳-۵ و ۴۴-۵ نموده شده اند.



شکل ۵-۳۰: پرهیز از تداخل بین نمادها با استفاده از پالس سینک و نمونه برداری دقیق در زمان های عبور از صفر



شکل ۵-۳۱: تقارن فرد حول π/T به صورت تعریف شده در معادله (۸-۲۹)

۵-۶-۳ مدولاسیون دامنه پالس دیجیتال و کد پالسی

در سیستم PAM توصیف شده در بخش بالا نمونه های گسسته سیگنال برای مدوله کردن دامنه یک رشته پالس به کار برده شد این نمونه ها را می توان سیگنال گسسته در زمان $x[n]$ فرض کرد، و در بسیاری از کاربردها $x[n]$ در واقع توسط یک سیستم دیجیتال ذخیره یا تولید می شود در این صورت طول محدود اعداد در سیستم دیجیتال نشان می دهد که $x[n]$ تنها می تواند مقدارهای محدود و کوانتیده ای به خود بگیرد، یعنی پالسهای مدوله شده تنها دامنه های مشخص و محدودی به خود می گیرند.

تبدیل می شود اگر هر نمونه $x[n]$ به صورت عددی دو دویی (یعنی یک رشته ۰ و ۱) بیان شده باشد، پالسی با دو مقدار ممکن (یکی برای ۰ و یکی برای ۱) بیت‌های یک رشته را به وجود می آورد. در حالت کلی برای محافظت در برابر خطاهای انتقال و همچنین رمزگذاری رشته دودویی نشان دهنده $x[n]$ قبل از ارسال به رشته دیگری از ۰ ها و ۱ ها تبدیل می شود برای مثال یک روش بسیار ساده برای تشخیص خطا این است که به ازای هر نمونه $x[n]$ یک بیت توازن نیز ارسال شود این بیت اضافی ۱ است اگر تعداد ۱ های نشان دهنده نمونه فرد باشد در صورت زوج بودن تعداد ۱ ها این بیت ۰ است در گیرنده می توان بیت توازن را بررسی کرد و در صورت سازگار نبودن آن وجود خطا را تشخیص داد مسلماً می توان رشوهای کد گذاری و اصلاح خطای پیچیده تری به کار برد و طراحی کدهای دارای خواص مطلوب از مسائل بسیار مهم سیستمهای مخابراتی است سیستم PAM کد شده به صورت رشته ها ۰ و ۱، سیستم مدولاسیون کد پالسی (PCM) نامیده می شود و وجه تسمیه نیز کاملاً واضح است.

۷-۵ مدولاسیون فرکانس سینوسی

در بخشهای پیش چند سیستم مدولاسیون دامنه را بررسی کردیم که در آنها سیگنال مدوله کننده برای تغییر دامنه حامل سینوسی یا پالسی به کار می رفت دیدیم که می توان با استفاده از روشهای حوزه فرکانس پی ریزی شده در فصلهای قبل این سیستم را به دقت تحلیل کرد در یک دسته روش مدولاسیون مهم دیگر موسوم به مدولاسیون فرکانس (FM) سیگنال مدوله کننده برای کنترل فرکانس حامل سینوسی به کار می رود.

این نوع مدولاسیون نسبت به مدولاسیون دامنه مزایایی دارد چنانچه شکل ۸-۱۰ نشان می دهد در مدولاسیون دامنه سینوسی دامنه حامل با اندازه سیگنال مدوله کننده نسبت مستقیم دارد و اندازه این سیگنال می تواند در گستره وسیعی تغییر کند در مدولاسیون فرکانس پوش حامل همیشه ثابت است بنابراین فرستند FM می تواند همیشه با ماکزیمم توان کار کند. به علاوه در سیستمهای FM می توان تغییرات دامنه در پخش عمومی و کاربردهای متعدد دیگری کیفیت دریافت (FM) بهتر از AM است ولی چنان که خواهیم دید پهنای باند لازم برای مدولاسیون فرکانس عموماً از پهنای باند لازم برای مدولاسیون دامنه بیشتر است.

سیستمهای مدولاسیون زاویه به شدت غیر خطی اند و در نتیجه تحلیل آنها به سر راستی تحلیل سیستمهای مدولاسیون دامنه مورد بحث در بخشهای پیش نیست ولی روشهایی که در فصلهای پیش آموختیم این امکان را می دهد که نسبت به طبیعت و طرز کار این سیستمها درک خوبی پیدا کنیم.

از مفهوم عمومی مدولاسیون زاویه شروع می کنیم یک حامل سینوسی بیان شده به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$c(t) = A \cos(\omega_c' t + \theta_c) = A \cos \theta(t) \quad (30-5)$$

که در آن $\theta(t) = \omega_c' t + \theta_c$ و فرکانس و θ_c فاز حامل است مفهوم کلی مدولاسیون زاویه کاربرد سیگنال مدوله کننده برای تغییر زاویه θ_c است یک شکل انجام این کار که گاهی به کار می رود استفاده از سیگنال مدوله کننده $x(t)$ برای تغییر فاز θ_c است به نحوی که سیگنال مدوله شده به صورت زیر در آید

$$y(t) = A \cos[\omega_c' t + \theta_c(t)] \quad (31-5)$$

$$\theta_c(t) = \theta_o + k_p x(t) \quad (32-5)$$

مثلاً اگر $x(t)$ ثابت باشد، فاز $y(t)$ ثابت و با دامنه $x(t)$ متناسب است مدولاسیون زاویه معادله ۳۱-۵ را مدولاسیون فاز می نامند شکل دیگر مدولاسیون زاویه تغییر خطی مشتق زاویه با سیگنال مدوله کننده است؛ یعنی

$$y(t) = A \cos \theta(t) \quad (33-5)$$

که در آن

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_c + k_f x(t) \quad (34-5)$$

به ازای $x(t)$ ثابت $y(t)$ یک سینوسی است که فرکانس آن با اندازه ای متناسب با دامنه $x(t)$ با فرکانس ω_c حامل تفاوت دارد به همین خاطر این نوع مدولاسیون زاویه را معمولاً مدولاسیون فرکانس می نامند.

گرچه مدولاسیون فاز و مدولاسیون فرکانس صورتهای مختلفی از مدولاسیون زاویه اند، ولی رابطه ساده ای با هم دارند با توجه به معادله های (۳۱-۵) و (۳۲-۵) برای مدولاسیون فاز

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_c + k_p \frac{dx(t)}{dt} \quad (35-5)$$

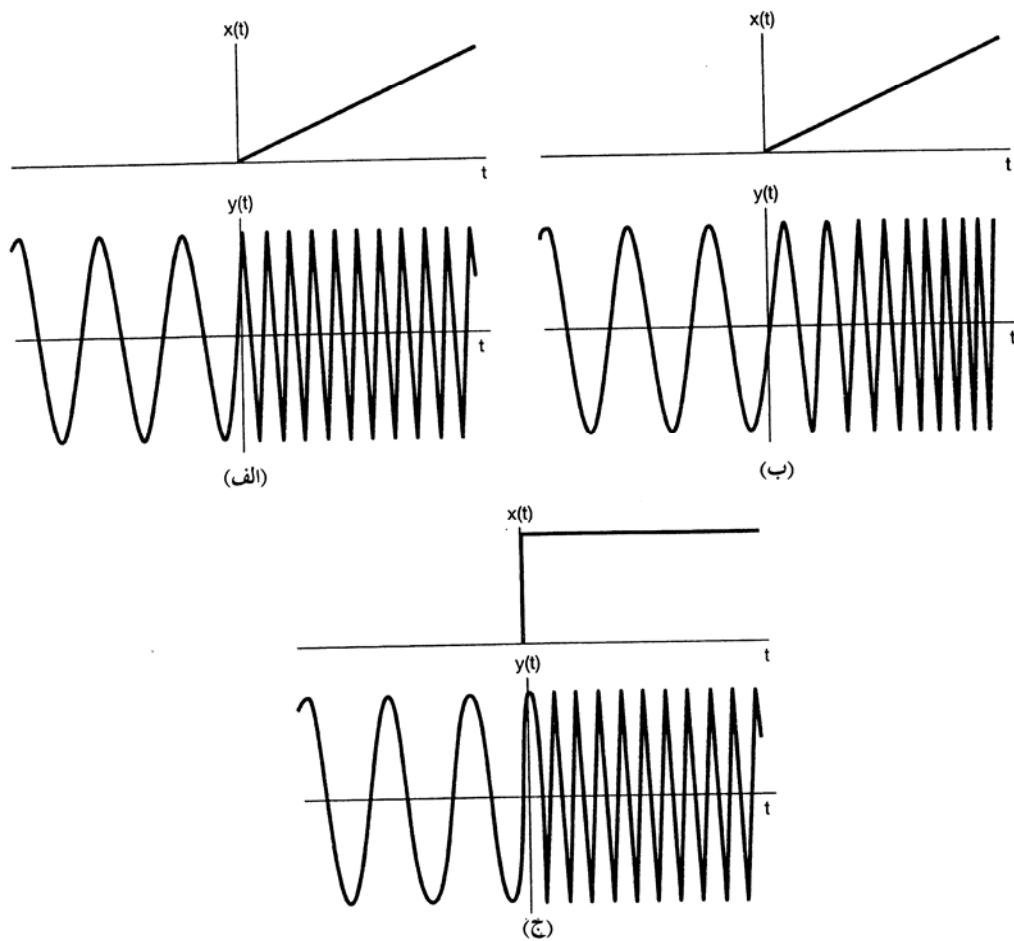
بنابراین مقایسه معادلهای (۳۴-۵) و (۳۵-۵) نشان می دهد که مدولاسیون فاز با $x(t)$ مشابه مدولاسیون فرکانس با مشتق $x(t)$ است به نحو مشابه مدولاسیون فرکانس با $x(t)$ مشابه مدولاسیون زاویه با انتگرال $x(t)$ است شکلهای ۳۲-۵ (الف) و (ب) نمونه هایی از مدولاسیون فاز و فرکانس را نشان می دهند در هر دو شکل سیگنال مدوله کننده $x(t)$ (ج) = $tu(t)$ مدولاسیون فرکانس با سیگنال مدوله کننده پله (مشتق شیب) نشان داده شده است [یعنی $x(t) - v(t)$] تناظر بین شکلهای ۳۲-۵ (الف) و (ج) کاملاً واضح است.

مدولاسیون فرکانس با سیگنال پله با تغییر ناگهانی فرکانس حامل سینوسی از یک مقدار به مقدار دیگر در لحظه $t=0$ (که پله تغییر مقدار می دهد) همراه است درست شبیه تغییر فرکانس یک نوسانساز سینوسی که دکمه انتخاب آن دفعتهاً عوض می شود اگر سیگنال مدوله کننده در مدولاسیون فرکانس شیب باشد، مانند شکل ۳۲-۵ (ب) فرکانس به طور خطی با زمان تغییر می کند فرکانس متغیر با زمان بر حسب مفهوم فرکانس لحظه ای بهتر بیان می شود فرکانس لحظه ای برای سینوسی

$$y(t) = A \cos \theta(t) \quad (36-5)$$

به صورت زیر تعریف می شود

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (37-5)$$



شکل ۵-۳۲: مدولاسیون فاز، مدولاسیون فرکانس و رابطه آنها؛ (الف) مدولاسیون فاز با سیگنال مدوله کننده شیب؛ (ب) مدولاسیون فرکانس با سیگنال مدوله کننده پله (که مشتق شیب است).

بنابراین اگر $y(t)$ واقعاً سینوسی باشد [یعنی $\theta(t) = (\omega_c^t + \theta_o)$] فرکانس لحظه ای ω_c است برای مدولاسیون فاز بیان شده در معادله های (۵-۳۱) و (۵-۳۲) فرکانس لحظه ای $\omega_c + k_p(dx(t)/dt)$ و برای مدولاسیون فرکانس بیان شده در معادله های (۵-۳۲) و (۵-۳۴) فرکانس لحظه ای $\omega_c + k_f x(t)$ است.

چون مدولاسیون فرکانس و مدولاسیون فاز به آسانی به هم مربوط می شوند بقیه مباحث را تنها بر حسب مدولاسیون فرکانس بیان می کنیم برای کسب بینش نسبت به چگونگی تأثیر سیگنال مدوله کننده $x(t)$ بر طیف سیگنال فرکانسی مدوله شده بهترست دو حالت را با سیگنالهای مدوله کننده ساده در نظر بگیریم آنقدر ساده که بتوانیم خواص اساسی مدولاسیون فرکانس را نمایان کنیم.

مدولاسیون فرکانس با سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$x(t) = A \cos \omega_m^t \quad (38-5)$$

تجه به معادلات (34-5) و (37-5) فرکانس لحظه ای برابرست با

$$\omega_i(t) = \omega_c + k_f A \cos \omega_m^t \quad (39-5)$$

که به صورت سینوسی بین مقادیر $\omega_c - k_f A$ ، $\omega_c + k_f A$ تغییر می کند با تعریف

$$\Delta \omega = k_f A \quad \text{داریم}$$

$$\omega_i(t) = \omega_c + \Delta \omega \cos \omega_m^t \quad \text{و}$$

$$y(t) = \cos \left[\omega_c^t + \int x(t) dt \right] \quad (40-5)$$

$$= \cos \left(\omega_m^t + \frac{\Delta \omega}{\omega_m} \sin \omega_m^t + \theta_o \right)$$

که در آن θ_o ثابت انتگرالگیری استب رای سهولت فرض می کنیم $\theta_o = 0$ پس

$$y(t) = \cos \left[\omega_c^t + \frac{\Delta \omega}{\omega_m} \sin \omega_m^t \right] \quad (41-5)$$

عامل $\Delta \omega / \omega_m$ که آن را با m نشان می دهیم شاخص مدولاسیون فرکانس تعریف می شود سیستمهای FM بسته به کوچک یا بزرگ بودن شاخص مدولاسیون m ویژگیهای متفاوتی دارند. حالتی را که m کوچک است ، FM باریک بانده می نامند به طور کلی می توان معادله (41-5) را به صورت زیر نوشت

$$y(t) = \cos(\omega_c^t + m \sin \omega_m^t) \quad (42-5)$$

یا

$$y(t) = \cos \omega_c^t \cos(m \sin \omega_m^t) - \sin \omega_c^t \sin(m \sin \omega_m^t) \quad (43-5)$$

اگر m به قدر کافی کوچک باشد (خیلی کوچکتر از $\pi/2$) می توان تقریبهای زیر را صورت داد.

$$\cos(m \sin \omega_m^t) \approx 1 \quad (44-5)$$

$$\sin(m \sin \omega_m^t) \approx m \sin \omega_m^t \quad (45-5)$$

بنابراین معادله (42-5) چنین می شود.

$$y(t) \approx \cos \omega_c^t - m (\sin \omega_c^t) (\sin \omega_m^t) \quad (46-5)$$

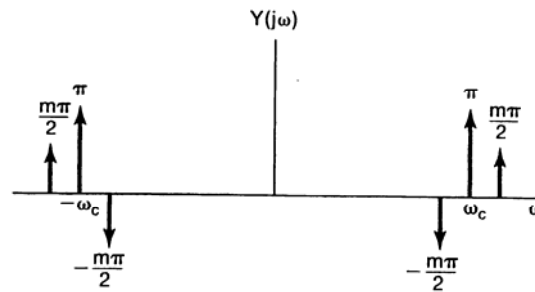
طیف $y(t)$ بر مبنای این تقریب در شکل 5-33 نشان داده شده است توجه می دهیم که این طیف با AM-DSB/WC شباهتهایی دارد از این لحاظ که فرکانس حامل در طیف موجود است و کنار باندهایی وجود دارد که طیف سیگنال مدوله کننده معادله (38-5) را نشان می دهند ولی در AM-DSB/WC حامل اضافی ایجاد شده با حامل مدوله شده

اختلاف فاز دارد شکل موجهای مربوط به AM-DSB/WC و FM نیز خیلی با هم فرق دارند شکل ۳۴-۵ (الف) شکل

موج FM باریک باند معادله (۴۶-۵) را نشان می دهد شکل ۳۴-۵ (ب) سیگنال AM-DSB/WC زیر

$$y_2(t) = \cos \omega_c t + m(\cos \omega_m t)(\cos \omega_c t) \quad (۴۷-۵)$$

را برای مقایسه نشان می دهد



شکل ۳۳-۵: طیف تقریبی FN باند باریک.

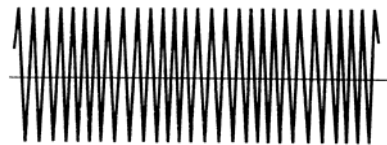
برای سیگنال FM باند باریک معادله (۴۶-۵) پهنای باند کنار باندها با پهنای باند سیگنال مدوله کننده برابرست و هر چند که اساس تقریب این معادله فرض $m \ll \pi/2$ است ولی در صورت عدم ارضای آن پهنای باند کنار باندها مستقل از شاخص مدولاسیون m است (یعنی تنها به پهنای باند سیگنال مدوله کننده بستگی دارد نه به دامنه آن) برای FM باند باریک با سیگنال مدوله کننده کلی نیز گزاره مشابهی صادق است.

۵-۷-۲ مدولاسیون فرکانس پهن باند

اگر m بزرگ باشد تقریب منجر به معادله (۴۶-۵) دیگر معتبر نیست و طیف $y(t)$ هم به دامنه و هم به طیف سیگنال مدوله کننده $x(t)$ بستگی دارد اگر $y(t)$ به صورت معادله (۴۳-۵) بیان شود جمله های

$$\sin[m \sin \omega_m t] \text{ و } \cos[m \sin \omega_m t]$$

سیگنالهایی متناوب با فرکانس پایه ω_m هستند



(الف)



(ب)

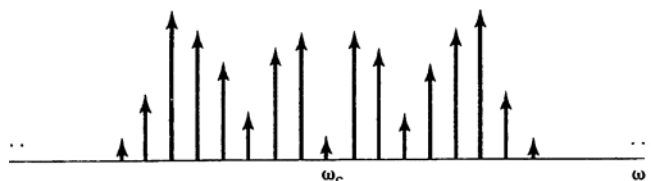
شکل ۳۴-۵: مقایسه FM باند باریک و AM-DSB/WC (الف) FM با باند باریک؛ (ب) AM-DSB/WC

متناسب با ضرایب سری فوریه آنهاست ضرایب سری فوریه این دو سیگنال متناوب با توابع موسوم به توابع بسمل نوع اول بیان می شوند اولین جمله معادله (۸-۴۳) یک حامل سینوسی به صورت $\cos \omega_m^t$ است که با سیگنال متناوب $\cos[m \sin \omega_m^t]$ مدوله دامنه ای شده و جمله دوم یک حامل سینوسی $\sin \omega_m^t$ است که با سیگنال متناوب $\sin[m \sin \omega_m^t]$ مدوله دامنه ای شده است اثر ضرب در حوزه زمان معادل انتقال طیف معادله (۵-۴۳) به فرکانس حامل و قرار گرفتن در اطراف فرکانسهای $\pm \omega_c$ است طیفهای هر یک از جملات معادله (۵-۴۳) از ضربه هایی در فرکانسهای $\pm \omega + n\omega_m$ با $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ تشکیل شده است و طیف محدود بانندی حول $\pm \omega_c$ نیست ولی رفتار ضرایب سری فوریه $\cos[m \sin \omega_m^t]$ $\sin[m \sin \omega_m^t]$ به نحوی است که دامنه هماهنگ n ام به ازای $|n| > m$ را می توان ناچیز فرض کرد و بنابراین پهنای باند موثر کل B هر کنار باند واقع در حول $\omega_c + \omega_c -$ برابر $2n\omega_m$ است یعنی

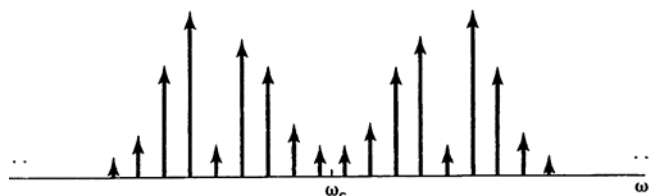
$$B \approx 2m\omega_m \quad (۵-۴۸)$$

$$m = k_f A / \omega_m = \Delta\omega / \omega_m \quad \text{یا چون}$$

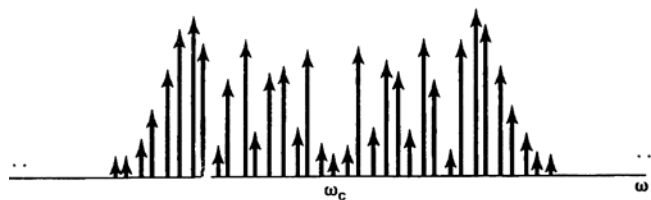
$$B \approx 2k_f A = 2\Delta\omega \quad (۵-۴۹)$$



(الف)



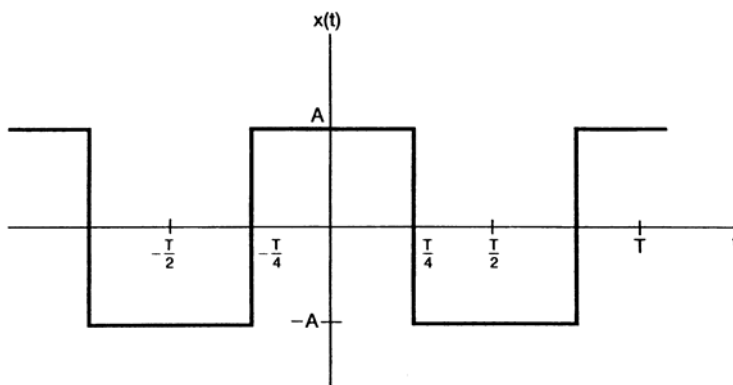
(ب)



(ج)

شکل ۵-۳۵: اندازه طیف مدولاسیون فرکانس پهن باند با $m = 12$ ؛ الف) اندازه طیف $\cos \omega_c t \cos[m \sin \omega_m t]$ ؛ ب) اندازه طیف $\cos[\omega_c t + m \sin \omega_m t]$ ؛ ج) اندازه طیف مرکب $\cos[\omega_c t + m \sin \omega_m t]$ ، $\sin \omega_c t \sin[m \sin \omega_m t]$

ای حول فرکانس حامل برابرست بنابراین برای FM پهن باند چون m بزرگ فرض می شود پهنای باند سیگنال مدوله شده از پهنای باند سیگنال مدوله کننده بسیار بزرگترست و برخلاف حالت باند باریک، پهنای باند سیگنال ارسال شده با دامنه سیگنال ارسال شده و ضریب بهره k_f نسبت مستقیم دارد.



شکل ۵-۳۶: موج مربعی متناوب متقارن

۵-۷-۳ سیگنال مدوله کننده مربعی متناوب

مثال دیگری که به درک ویژگیهای مدولاسیون فرکانس کمک می کند سیگنال مدوله کننده موج مربعی متناوب است در معادله (۵-۳۹) قرار دهید $k_f=1$ پس $\Delta\omega = A x(t)$ را مطابق شکل ۵-۳۶ فرض کنید سیگنال مدوله شده $y(t)$ در شکل ۵-۳۷ نشان داده شده است به ازای $x(t)$ مثبت فرکانس لحظه ای $\omega_c + \Delta\omega$ و به ازای $x(t)$ منفی $\omega_c - \Delta\omega$ است بنابراین $y(t)$ را می توان به صورت زیر نوشت

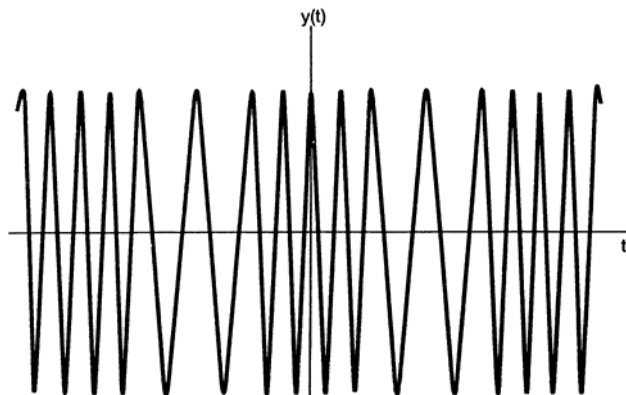
$$y(t) = r(t) \cos[(\omega_c + \Delta\omega)t] + r\left(r - \frac{T}{2}\right) \cos[(\omega_c - \Delta\omega)t] \quad (5-50)$$

که در آن موج مربعی متقارن شکل ۵-۳۸ است بنابراین برای این سیگنال مدوله کننده خاص مسئله تعیین طیف FM سیگنال $y(t)$ و معادل تعیین طیف مجموع دو سیگنال AM معادله (۵-۵۰) است دقیقتر این که

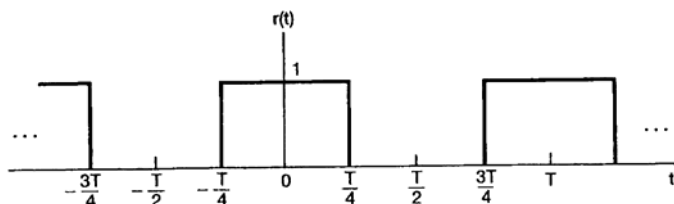
$$Y(j\omega) = \frac{1}{2} R[(j\omega + j\omega_c + j\Delta\omega) + R(j\omega - j\omega_c - j\Delta\omega)] \quad (5-51)$$

$$+ \frac{1}{2} R_T[(j\omega + j\omega_c + j\Delta\omega) + R_T(j\omega - j\omega_c - j\Delta\omega)]$$





شکل ۵-۳۷: مدولاسیون فرکانس با سیگنال مدوله کننده موج مربعی متناوب



شکل ۵-۳۸: موج مربعی متقارن $r(t)$ معادله ۵-۵۰

که $\omega R(j)$ (تبدیل فوریه موج مربعی متناوب $r(t)$ شکل ۵-۳۸ و $\omega R(j)$ (تبدیل فوریه $r(t-T/2)$ است با توجه به مثال ۴-۶ به ازای $T=4T_1$ داریم .

$$R(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{2k+1} (-1)^k \delta \left[\omega - \frac{2\pi(2k+1)}{T} \right] + \pi \delta(\omega) \quad (52-5)$$

و

$$R_T(j\omega) = R(j\omega)_e^{-j\omega T/2} \quad (53-5)$$

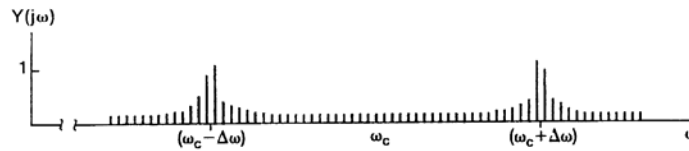
اندازه طیف $Y(j\omega)$ در شکل ۵-۳۹ نشان داده شده است این طیف همانند FM پهن باند دو کنار باند حول $\omega_c \pm \Delta\omega$ دارد که در $\omega > \omega_c + \Delta\omega, \omega < \omega_c - \Delta\omega$ میرا می شوند.

سیستمهای دمدولاسیون سیگنالهای FM دو نوع اساسی اند در یک نوع ابتدا سیگنال FM با مشتگیری به یک سیگنال AM تبدیل می شود و در نوع دوم مستقیماً فاز با فرکانس سیگنال مدوله شده دنبال می شود. بحث بالا تنها معرفی مختصری از ویژگیهای دمدولاسیون فرکانس است و بار دیگر چگونگی کاربرد روشهای پی ریزی شده در فصل قبل برای تحلیل و کسب بینش نسبت به یک دسته مهم از سیستمها را نشان می دهد.

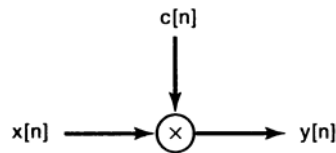
۵-۸-۱ مدولاسیون دامنه سینوسی گسسته در زمان

شکل ۵-۴۰ یک سیستم مدولاسیون دامنه گسسته در زمان را نشان می دهد که در آن $c[n]$ سیگنال حامل و $x[n]$ سیگنال مدوله کننده است اساس تحلیل مدولاسیون دامنه پیوسته در زمان، خاصیت ضرب تبدیل فوریه بود مشخصاً این که ضرب در حوزه زمان به کانولوشن در حوزه فرکانس منجر می شود چنان که در بخش ۵-۵ گفته شد خاصیت متناظری برای سیگنالهای گسسته در زمان وجود دارد که می توان آن را برای تحلیل مدولاسیون دامنه گسسته در زمان به کار برد فرض کنید.

$$Y[n] = x[n] c[n]$$



شکل ۵-۳۹: اندازه طیف مدولاسیون فرکانس با سیگنال مدوله کننده موج مربعی، در $\omega > 0$ هر یک از خطوط عمودی شکل ضربه ای است که مساحت آن با ارتفاع آن خط متناسب است.



شکل ۵-۴۰: مدولاسیون دامنه گسسته در زمان

و $X(e^{j\omega})$, $Y(e^{j\omega})$, $C(e^{j\omega})$ به ترتیب تبدیل فوریه $x[n]$, $y[n]$, $c[n]$ هستند با کانولوشن متناوب $C(e^{j\omega})$, $X(e^{j\omega})$ متناسب است یعنی

$$Y(e^{j\omega}) = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) C(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (54-5)$$

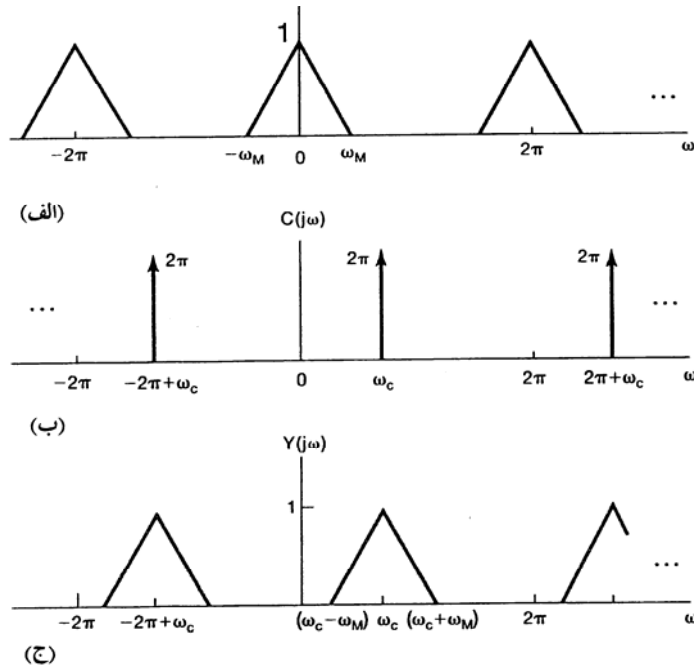
چون $C(e^{j\omega})$, $X(e^{j\omega})$ با دوره تناوب 2π متناوب اند می توان انتگرالگیری را در هر فاصله فرکانسی به طول 2π انجام داد.

ابتدا مدولاسیون دامنه با حامل نمایی مختلط را در نظر می گیریم.

$$C[n] = e^{j\omega_c n} \quad (55-5)$$

چنان که در بخش ۵-۲ دیدیم، تبدیل فوریه $c[n]$ یک قطار ضربه متناوب است؛ یعنی

$$C(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_c + k2\pi) \quad (56-5)$$

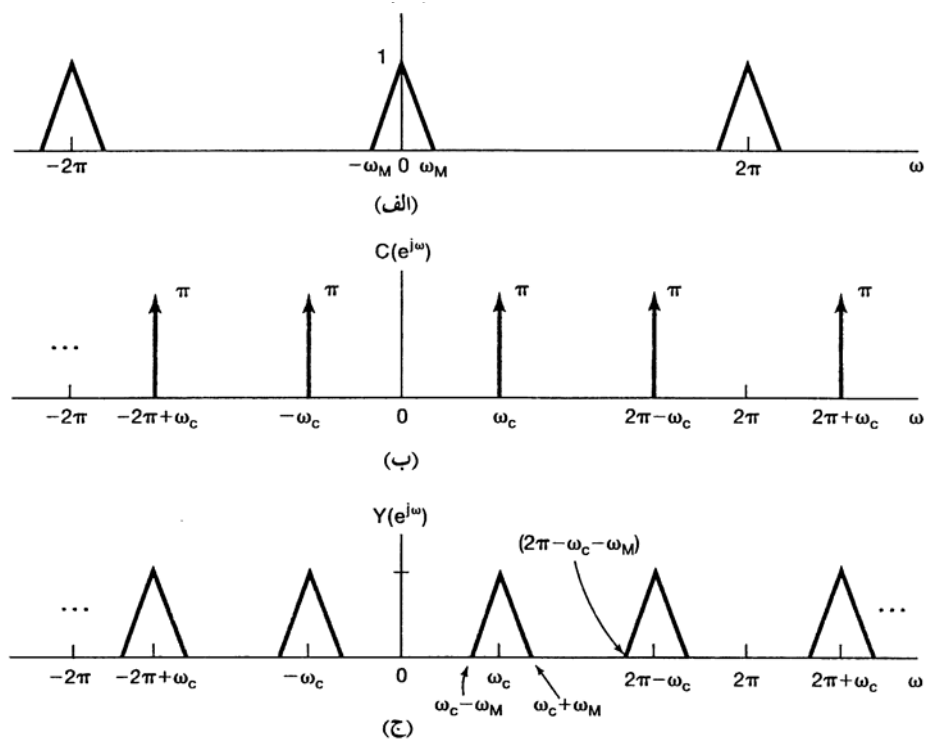


شکل ۴۱-۵: الف) طیف $x[n]$ ؛ ب) طیف $c[n] = e^{j\omega_c n}$ ؛ ج) $y[n] = x[n]c[n]$

که در شکل ۴۱-۵ (ب) نشان داده شده است به ازای $X(e^{j\omega})$ نشان داده شده در شکل ۴۱-۵ (الف) طیف سیگنال مدوله شده مطابق شکل ۴۱-۵ (ج) است خصوصاً توجه کنید که $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\omega_c)})$ این همتای گسسته در زمان شکل ۱-۵ است و باز هم به ازای $x[n]$ حقیقی سیگنال مدوله شده مختلط است. دمدولاسیون با ضرب در $e^{-j\omega_c n}$ برای برگرداندن طیف به محل اصلی اش در محور فرکانس انجام می شود به نحوی که

$$x[n] = y[n]e^{-j\omega_c n} \quad (۵۷-۵)$$

در مسئله ۴۳-۵ خواهیم دید که به ازای $\omega_c = n$ یعنی $c[n] = (-1)^n$ تعبیر دمدولاسیون در حوزه زمان تغییر علامت جبری $x[n]$ به ازای مقادیر فرد n است و در حوزه فرکانس تغییر فرکانسهای پایین و بالا در مسئله ۴۴-۵ کاربرد این نوع دمدولاسیون در تبدیل فیلتر پایین گذر به فیلتر بالا گذر و بر عکس را در نظر می گیریم.



شکل ۵-۴۲: طیف های مربوط به مدولاسیون گسسته در زمان با حامل سینوسی: (الف) طیف سیگنال محدوده باند $x[n]$; (ب) طیف حامل سینوسی $c[n] = \cos \omega_c n$; (ج) طیف سیگنال مدوله شده $y[n] = x[n]c[n]$

به عنوان جایگزین حامل نمایی مختلط می توانیم از حامل سینوسی استفاده کنیم که در این صورت اگر $x[n]$ حقیقی باشد سیگنال مدوله شده $y[n]$ نیز حقیقی است به ازای $c[n] = \cos \omega_c^n$ مطابق شکل ۵-۴۲ (ب) یک زوج ضربه در $\omega = \pm \omega_c + 2k\pi$ است که متناوباً تکرار می شود اگر $X(e^{j\omega})$ مطابق شکل ۵-۴۲ (الف) باشد طیف سیگنال مدوله شده مطابق شکل ۵-۴۲ (ج) است یعنی تکرار $X(e^{j\omega})$ حول فرکانسهای $\omega = \pm \omega_c + 2k\pi$ برای اینکه تکرارهای $X(e^{j\omega})$ همپوشانی نداشته باشند باید داشته باشیم.

$$\omega_c > \omega_m \quad (58-5)$$

$$2\pi - \omega_c - \omega_m > \omega_c + \omega_m \quad \text{و}$$

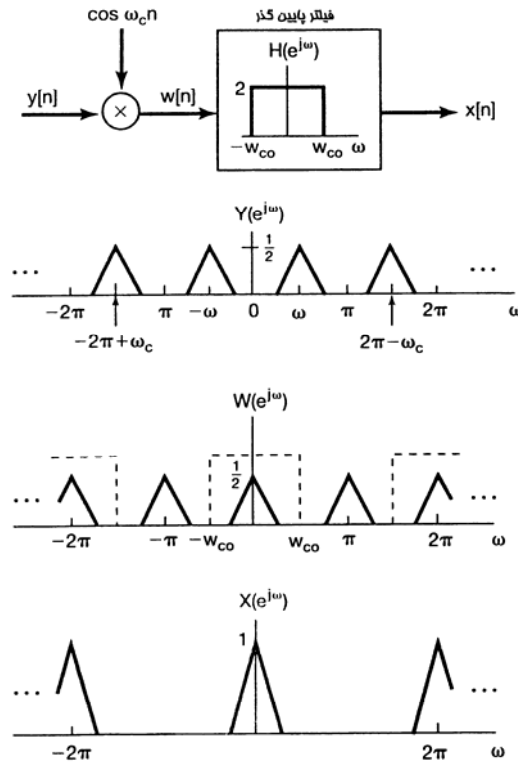
یا

$$\omega_c < (\pi - \omega_m) \quad (59-5)$$

شرط اول مشابه شرط بخش ۵-۱ برای مدولاسیون دامنه سینوسی پیوسته در زمان است در حالی که شرط دوم از تناوب ذاتی طیفهای گسسته در زمان ناشی می شود با ترکیب معادله های (۵۸-۵) و (۵۹-۵) می بینیم که در مدولاسیون دامنه با حامل سینوسی، ω_c باید به صورت زیر مقید شود.

$$\omega_M < \omega_c < (\pi - \omega_M) \quad (60-5)$$

کننده مطابق شکل ۴۳-۵ موجب می شود که تکرارهایی از طیف سیگنال اصلی ایجاد شود که یکی از آنها حول $\omega = 0$ است با گذراندن سیگنال از فیلتر پایین گذر و حذف تکرار های ناخواسته $X(e^{j\omega})$ می توان یگنال مدوله کننده را به دست آورد.



شکل ۴۳-۵: سیستم و طیف های دمدولاسیون همزمان گسسته در زمان

چنان که از بحث پیش پیداست تحلیل مدولاسیون دامنه گسسته در زمان با تفاوتی اندک بسیار شبیه تحلیل مدولاسیون دامنه پیوسته در زمان است مثلاً در مسئله ۴۷-۵ خواهیم دید که در مدولاسیون همزمان دمدوله کننده برای هر دو حالت پیوسته در زمان و گسسته در زمان یکسان است به علاوه همانند حالت پیوسته در زمان AM سینوسی گسسته در زمان نیز می تواند اساس مالتی پلکس زمانی گسسته در زمان قرار گیرد همچنین در مسئله ۵-۴۸ خواهیم دید که می توان سیگنال گسسته در زمان را برای مدوله کردن یک قطار پالس به کار برد که به مالتی پلکس زمانی گسسته در زمان منجر می شود.

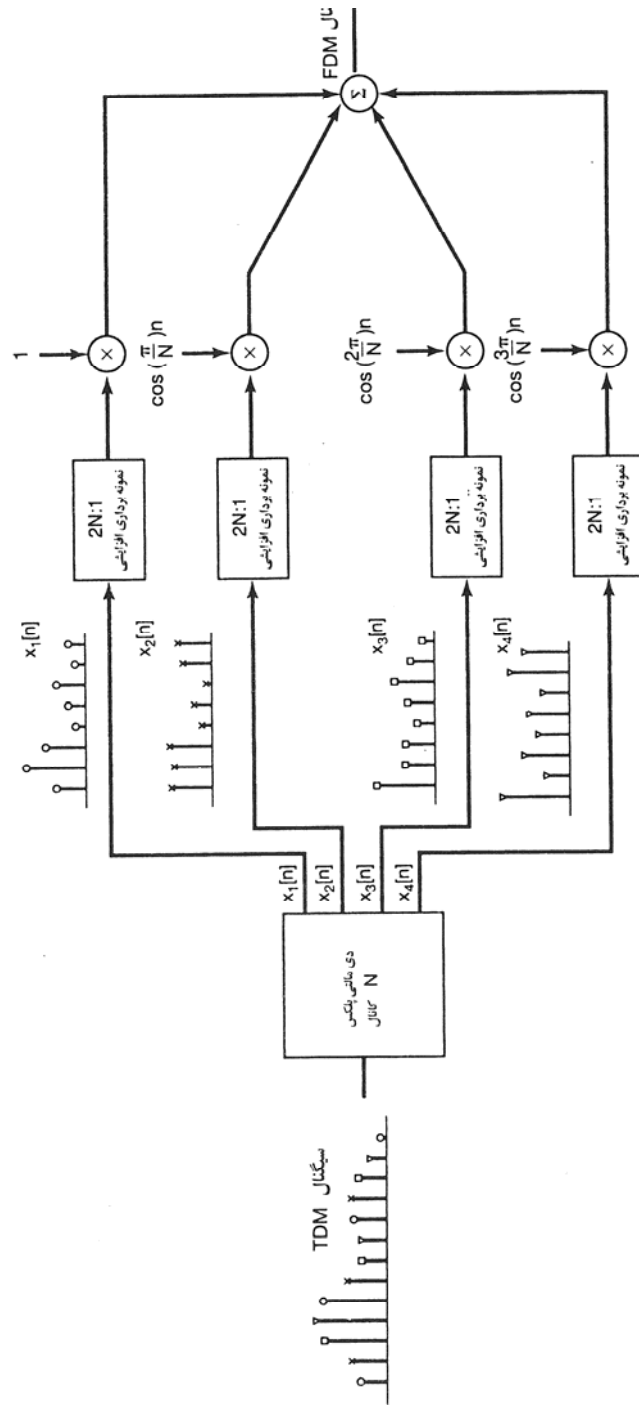
ساخت سیستمهای مالتی پلکس گسسته در زمان مثال خوبی از انعطاف پذیری پردازش گسسته در زمان در حالت کلی و اهمیت نمونه برداری افزایشی (بخش ۷-۵-۲) است یک سیستم FDM گسسته در زمان با M سیگنال در نظر بگیرید برای داشتن M کانال باید هر سیگنال $x_i[n]$ محدود باند باشد یعنی

$$\Delta_i(w) = \nu \quad \overline{M} < |\omega| < \mu$$

اگر سیگنالهای اولیه تمام باند فرکانسی را اشغال کرده باشند و مثلاً از نمونه برداری سیگنالهای پیوسته در زمان با آهنگ نایکوییست به دست آمده باشند باید قبل از مالتی پلکس فرکانسی از آنها نمونه برداری افزایشی کرد این مطلب را در مسئله ۵-۳۳ بیشتر بررسی خواهیم کرد.

۵-۸-۲ ترانس مدولاسیون گسسته در زمان

یکی از زمینه هایی که در آن مدولاسیون گسسته در زمان، به همراه استخراج نمونه برداری افزایشی و درونیایی بیان شده در فصل ۷ بسیار به کار می رود سیستمهای مخابرات دیجیتال است در این سیستمها معمولاً سیگنالهای پیوسته در زمان به صورت سیگنالهای گسسته در زمان به دست آمده از نمونه برداری به کار می روند سیگنال پیوسته در زمان غالباً به شکل مالتی پلکس زمانی (TDM) یا مالتی پلکس فرکانسی (FDM) هستند این سیگنالها به رشته های گسسته در زمانی تبدیل می شوند که مقادیرشان برای ذخیره سازی یا مخابره به صورت دیجیتالی در می آید در بعضی سیستمها به خاطر قیود یا استلزامهای مختلف فرستند و گیرنده یا به خاطر این که دسته سیگنالهای مالتی پلکس شده به روشهای مختلف دوباره باهم مالتی پلکس می شوند لازم است یک سیگنال TDM به سیگنالی FDM یا بر عکس تبدیل شود این تبدیل از یک دمدولاسیون یا مالتی پلکس به مدولاسیون یا مالتی پلکس دیگر ترانس مدولاسیون یا ترانس مالتی پلکس نامیده می شود در حوزه مخابرات دیجیتال یک روش واضح ترانس مالتی پلکس برگشت به حالت پیوسته در زمان دمدولاسیون و دی مالتی پلکس کردن سیگنال و مدوله و مالتی پلکس کردن به شیوه دلخواه است ولی اگر بخواهیم سیگنال جدید را دوباره به سیگنالی گسسته در زمان تبدیل کنیم بهترست تمام کار در حوزه گسسته در زمان صورت گیرد شکل ۵-۴۴ گامهای لازم برای تبدیل سیگنال TDM گسسته در زمان به سیگنال FDM گسسته در زمان به صورت جعبه ای نشان داده شده است توجه کنید که پس از دی مالتی پلکس کردن سیگنال TDM قبل از پلکس فرکانسی باید هر کانال نمونه برداری افزایشی شود.



شکل ۴۴-۵: نمودار جعبه ای ترانس مالتی پلکس TDM به FDM

در این فصل چند مفهوم پایه ای سیستمهای مخابراتی را بررسی کردیم مفهوم مدولاسیون را یعنی به کار بردن سیگنال که باید مخابره شود برای مدوله کردن سیگنالی موسوم به حامل آزمودیم و نگاهی دقیق به مدولاسیون دامنه انداختیم ساده ترین راه بررسی ویژگیهای مدولاسیون دامنه کار در حوزه فرکانس و استفاده از خاصیت ضرب تبدیل فوریه است مدولاسیون دامنه با حامل نمایی مختلط یا سینوسی برای انتقال طیف به یک گستره فرکانسی دیگر به کار می رود و در سیستمهای مخابراتی برای قرار دادن طیف سیگنال در گستره فرکانسی مناسب برای انتقال و انجام مالی پلکس فرکانسی به کار می رود گونه های دیگر مدولاسیون دامنه سینوسی مثلاً افزودن حامل همزمان و سیستمهای تک کنار بانندی و دو کنار بانندی مورد بررسی قرار گرفت.

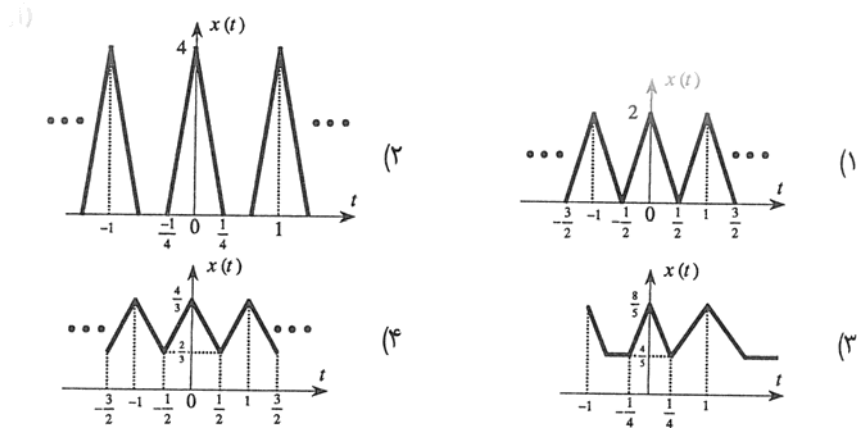
همچنین چند شکل دیگر مخابره بر اساس مدولاسیون را مطالعه کردیم مفاهیم مدولاسیون فرکانس و زاویه را به اختصار معرفی کردیم گر چه تحلیل دقیق این نوع مدولاسیون مشکلترست ولی با کار در حوزه فرکانس می توان بینش فراوانی نسبت به ویژگیهای آنها کسب کرد.

همچنین به جزییات مدولاسیون دامنه سیگنال پالسی پرداختیم و به مفاهیم مالتی پلکس زمانی و مدولاسیون دامنه پالس رسیدیم در مدولاسیون دامنه پالس نمونه های یک سیگنال یا یک سیگنال گسسته در زمان برای مدوله کردن دامنه یک قطار پالس به کار می رود این بررسی ما را به بررسی مدولاسیون گسسته در زمان و مخابرات دیجیتال سوق داد در اینجا انعطاف پردازشهای گسسته در زمان طراحی و ساخت سیستمهای مخابراتی پیچیده تیری را ممکن می کند مفاهیم و مدولاسیون کد پالسی و ترانس مدولاسیون را طی همین مباحث معرفی کردیم.

سوال ۱: اگر $h_1[n]$ پاسخ ضربه یک فیلتر پایین گذر ایده آل با فرکانس قطع $\omega = \frac{\pi}{2}$ باشد، آن گاه فیلتری با پاسخ

$$h_2[n] = \begin{cases} h_1[\frac{n}{2}] & n \text{ is even} \\ 0 & n \text{ is odd} \end{cases}$$

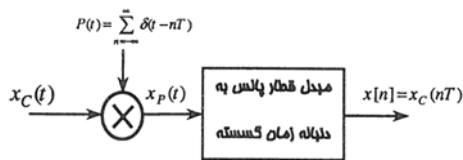
ضربه زیر دارای کدام مشخصه است؟



سوال ۲: سیگنال $x_c(t)$ که از نظر پهنای باند محدود است با نرخ بیش از نرخ نایکوئیست نمونه برداری می شود.

نمونه ها که به فاصله T ثانیه از یک دیگر قرار دارند به یک دنباله $x[n]$ مطابق شکل زیر تبدیل می شوند. رابطه بین

انرژی دنباله E_d و انرژی سیگنال اصلی E_c و بازه T به کدام صورت زیر است؟



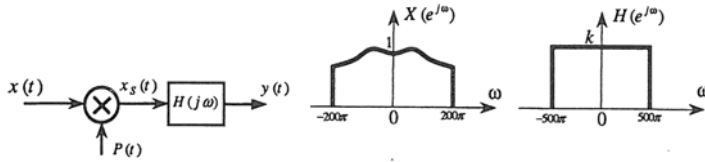
$$E_c = \frac{E_d}{T^2} \quad (۴)$$

$$E_c = T^2 E_d \quad (۵)$$

$$E_c = T E_d \quad (۶)$$

$$E_c = \frac{E_d}{T} \quad (۱)$$

بررداری شده از یک فیلتر پایین گذر با پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ به شکل زیر عبور داده می شود. مقدار k و حداکثر T_s را طوری تعیین کنید که $y(t) = x(t)$. (طیف سیگنال ورودی داده شده است).



$$T_s < \frac{1}{150} \text{ Sec}, k = T_s \quad (2)$$

$$T_s < \frac{1}{100} \text{ Sec}, k = T_s \quad (1)$$

$$T_s < \frac{1}{250} \text{ Sec}, k = T_s \quad (4)$$

$$T_s < \frac{1}{350} \text{ Sec}, k = T_s \quad (3)$$

سوال ۴: $x(t)$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی T_m و فرکانس اصلی $\omega_m = \frac{2\pi}{T_m}$ می باشد. نرخ

نایکوئیست این سیگنال با کدام گزینه برابر است؟

$$2\omega_m \quad (2)$$

$$\omega_m \quad (1)$$

(۴) به شکل موج $x(t)$ بستگی دارد.

(۳) مضربی محدود و صحیح از ω_m

سوال ۵: نرخ نایکوئیست سیگنال $x(t)$ به شکل زیر کدام است؟

$$x(t) = \left(\frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t} \right)^2$$

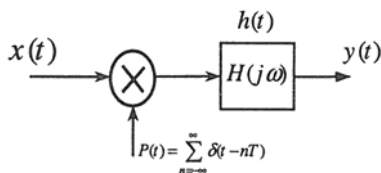
$$16000 \text{ Hz} \quad (2)$$

$$8000 \text{ Hz} \quad (1)$$

$$32000 \text{ Hz} \quad (4)$$

$$4000 \text{ Hz} \quad (3)$$

سوال ۶: اگر در شکل زیر $x(nt) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$ باشد در آن صورت $y(t)$ برابر است با:



$$h(t) \quad (1)$$

$$x(t) \quad (2)$$

$$\delta(t) \quad (3)$$

$$x(t) * h(t) \quad (4)$$

(۴-۱)

$$H_2(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})$$

(۳-۲)

با بهره گیری از نتایج پردازش سیگنال

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left[j\left(\omega - 2\pi \frac{k}{T}\right) \right]$$

با توجه به خاصیت متناوب بودن $X(e^{j\omega})$ با دوره تناوب 2π لذا به ازای $k=0$ در طول یک پریود

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} X_c(e^{j\omega}) \Rightarrow E_d = \frac{1}{T^2} E_c$$

(۳-۳)

$$\omega_s \geq 2\omega_M \Rightarrow \frac{2\pi}{T_s} \geq 400 \Rightarrow T_s \leq \frac{1}{200} \text{ Sec}$$

فرکانس قطع فیلتر

$$\omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M$$

$$200\pi < \omega_c < \frac{2\pi}{T_s} - 200\pi \Rightarrow T_s < \frac{1}{350} \text{ Sec}$$

جهت بازسازی کامل باید $k = T_s$ باشد.

(۴-۴)

با توجه به این که عرض باند محدوده مشخصی نیست نمی توان نرخ نایکوئیست را تعیین کرد.

(۱-۵)

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= F \left\{ \frac{\text{Sin}(4000\pi t)}{\pi t} \right\} * F \left\{ \frac{\text{Sin}(4000\pi t)}{\pi t} \right\} \\ &= \Pi \left(\frac{\omega}{8000\pi} \right) * \Pi \left(\frac{\omega}{8000\pi} \right) = 8000\pi \Lambda \Pi \left(\frac{\omega}{8000\pi} \right) \end{aligned}$$

بنابراین نرخ نایکوئیست برابر است با:

$$\omega_s = 2\omega_M = 16000\pi \Rightarrow f_s = 8000 \text{ Hz}$$

(۱-۶)

$$x(nt) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

$$x_p(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) = \delta(t)$$

$$y(t) = x_p(t) * h(t) = \delta(t) * h(t) = h(t)$$

فهرست مطالب

۴۴۸ فصل ششم
۴۴۸ تبدیل لاپلاس در تحلیل سیگنال های زمان پیوسته
۴۴۹ ناحیه همگرایی (ROC) تبدیل لاپلاس
۴۵۱ خواص ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس دو طرفه
۴۵۳ تعریف صفر، قطب و دیاگرام صفر و قطب
۴۵۷ خواص تبدیل لاپلاس
۴۷۲ تحلیل سیستم های LTI به کمک تبدیل لاپلاس
۴۸۳ نمایش بلوک دیاگرامی سیستم
۴۸۶ مکان هندسی فیلترهای ایده آل
۴۸۹ سوالات طبقه بندی شده فصل ششم
۴۹۵ پاسخنامه سوالات فصل ششم

تبدیل لاپلاس در تحلیل سیگنال های زمان پیوسته

سیگنال های مورد توجه زیادی هستند که در مسایل تحلیل سیستم ها پیش می آیند و برای آنها تبدیل فوریه وجود ندارد و ما در جست و جوی تبدیلی هستیم که بر روی رده وسیع تری از سیگنال های پیوسته از آنچه تبدیل فوریه قابل اعمال است، به کار می رود. تعریف تبدیل لاپلاس

این خواسته را می توان با ضرب سیگنال در یک ضرب همگرایی نمای $e^{-\sigma t}$ و تبدیل فوریه گرفتن از حاصل ضرب، انجام داد.

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

با تغییر متغیر $s = \sigma + j\omega$ خواهیم داشت:

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (2)$$

در رابطه (2)، $X(s)$ تبدیل لاپلاس دو طرفه سیگنال $x(t)$ و s فرکانس مختلط می نامند. با بهره گیری از همگرایی تبدیل فوریه، انتگرال (2) به طور مطلق همگراست اگر:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) e^{-st}| dt < \infty$$

از طرف می دانیم:

$$|x(t) e^{-st}| = |x(t)| e^{-\sigma t}$$

بنابراین انتگرال تبدیل لاپلاس دوطرفه به طور مطلق همگراست اگر:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty \quad (3)$$

انتگرال فوق شرط کافی برای وجود تبدیل $X(s)$ در $s = \sigma + j\omega$ را نشان می دهد.

عمل عکسی که $X(s)$ را به $x(t)$ تبدیل می کند تبدیل لاپلاس معکوس گفته و با $\mathcal{L}^{-1}[X(s)]$ نشان داده می شود.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds \quad (4)$$

زوج روابط (2) و (4) به نام زوج تبدیل لاپلاس دوطرفه معروف هستند. با توجه به رابطه (1):

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} e^{-\sigma t} dt = F\{x(t) e^{-\sigma t}\}$$

به عبارتی، تبدیل لاپلاس $x(t)$ معادل تبدیل فوریه گرفتن از $x(t) e^{-\sigma t}$ می باشد.

مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t) = u(t)$ را به دست آورید.

حل:

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \left. \frac{-e^{-st}}{s} \right|_0^{\infty} = \left. \frac{-e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}}{s} \right|_0^{\infty} = \frac{-e^{-\sigma t}}{s} (\cos \omega t - j \sin \omega t) \Big|_0^{\infty} \end{aligned}$$

$$\text{Re}\{s\} = \sigma > 0$$

با رعایت شرط فوق داریم:

$$x(t) = u(t) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s}, \quad \sigma > 0$$

وجود یا عدم وجود تبدیل لاپلاس یک سیگنال به ازای برخی از مقادیر ثابت حقیقی و مثبت σ به تعریف ناحیه همگرایی منجر می شود.

ناحیه همگرایی (ROC) تبدیل لاپلاس

ناحیه همگرایی $X(s)$ ، محدوده ای از صفحه مختلط $s = \sigma + j\omega$ است که به ازای آن تبدیل لاپلاس $X(s)$ به یک مقدار ثابت همگرا شود یعنی:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} < \infty$$

مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال های زیر را به همراه ناحیه همگرایی آنها تعیین کنید.

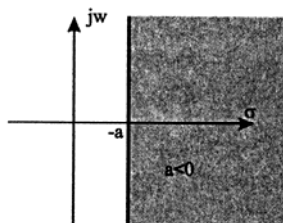
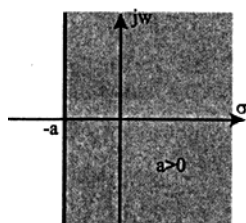
$$x_1(t) = e^{-at} u(t), \quad x_2(t) = -e^{-at} u(-t)$$

حل:

$$X_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} x_1(t) e^{-(s+a)t} dt = \frac{-e^{-(s+a)t}}{s+a} \Big|_0^{\infty} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s+a)t} = \begin{cases} 0 & \text{Re}\{s+a\} > 0 \\ \infty & \text{Re}\{s+a\} < 0 \end{cases}$$

برای آن که تبدیل لاپلاس فوق همگرا باشد باید $\text{Re}\{s\} > -a$ و لذا:

$$X_1(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

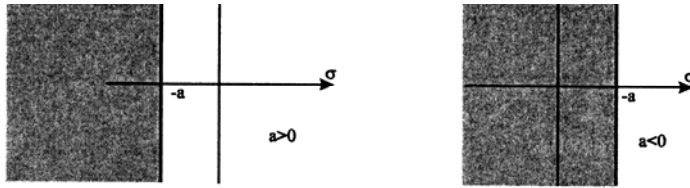


شکل ۱-۶

$$X_2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-st} dt = -\int_{-\infty}^0 x_1(t) e^{-(a+s)t} dt = \frac{-e^{-(s+a)t}}{s+a} \Big|_{-\infty}^0$$

برای آن که تبدیل لاپلاس فوق همگرا باشد باید $\text{Re}\{s\} < -a$ و لذا:

$$X_2(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} < -a$$



شکل ۲-۶

توجه: سیگنال $x_1(t) = e^{-at}u(t)$ به ازای $a < 0$ و سیگنال $x_2(t) = -e^{-at}u(-t)$ به ازای $a > 0$ فاقد تبدیل فوریه می باشند چرا که محور $j\omega$ در ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس قرار نمی گیرد.

توجه: بر خلاف تبدیل لاپلاس یک طرفه، در تبدیل لاپلاس دوطرفه برای یکتا مشخص کردن معکوس متناظر، ناحیه همگرایی باید مشخص باشد. در مثال فوق هر دو سیگنال تبدیل لاپلاس دو طرفه یکسان دارند ولی نواحی همگرایی آنها متفاوت است.

$$X_1(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} < -a$$

به بیان ساده برای به دست آوردن $x(t)$ دانستن $X(s)$ تنها کافی نیست، بلکه ناحیه همگرایی $X(s)$ نیز باید مشخص شود.

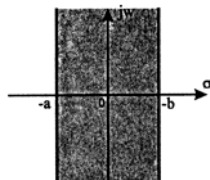
توجه: سیگنال $x_1(t) = e^{-at}u(t)$ یک سیگنال دست راستی (راست رو) است چرا که به ازای $t < 0$ و سیگنال $x_2(t) = -e^{-at}u(-t)$ یک سیگنال دست چپ (چپ رو) است. زیرا به ازای $t > 0$ صفر است.

مثال: تبدیل لاپلاس $x(t) = e^{-at}u(t) - e^{-bt}u(-t)$ را به همراه ROC آن تعیین کنید.

حل:

با توجه به نتایج مثال قبلی

$$X(s) = \frac{1}{s+a} + \frac{1}{s+b}$$



شکل ۳-۶

مطابق شکل مقابل، ناحیه همگرایی $X(s)$ اشتراک ناحیه همگرایی دو سیگنال است.

$$ROC_x = ROC_1 \cap ROC_2$$

توجه: در صورتی که $a < b$ باشد، $x(t)$ تبدیل لاپلاس دوطرفه نخواهد داشت. همچنین قطب $s = -a$ سمت چپ ناحیه همگرایی قرار دارد و متناظر با یک سیگنال علی است و قطب $s = -b$ در سمت راست ناحیه همگرایی قرار دارد و متناظر با یک سیگنال غیرعلی است.

∞ می باشد.

توجه: در صورتی که در مثال فوق سیگنال $y(t)$ به صورت $y(t) = x(t)u(t)$ تعریف شود:

$$y(t) = x(t)u(t) = [e^{-at}u(t) - e^{-bt}u(t)]u(t) = e^{-at}u(t)$$

آن گاه ROC آن برابر است با:

$$ROC_y : \text{Re}\{s\} > -a$$

بنابراین در صورتی که سیگنال دو طرفه را مجموعه ای از است راستی و چپی تجزیه کنیم آن گاه:

$$x(t) = x_R(t) + x_L(t) \Rightarrow ROC : \sigma_1 < \text{Re}\{s\} < \sigma_2$$

$$x(t)u(t) = x_R(t) \Rightarrow ROC : \text{Re}\{s\} > \sigma_1$$

$$x(t)u(-t) = x_L(t) \Rightarrow ROC : < \text{Re}\{s\} < \sigma_2$$

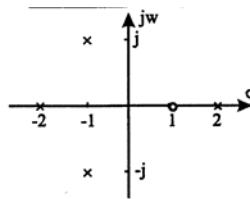
خواص ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس دو طرفه

در این بخش برخی خواص ROC را به کمک شکل $x(t)$ و بدون محاسبه تبدیل لاپلاس آن مورد بررسی قرار داده ایم:

ناحیه همگرایی برای تبدیل لاپلاس $x(t)$ شامل نوارهایی موازی با محور $j\omega$ است.

ناحیه همگرایی برای تبدیل $X(s)$ کسری گویا، هیچ قطبی از $X(s)$ را شامل نمی شود.

مثال: نمودار صفر و قطب یک سیستم LTI پیوسته به صورت مقابل است. حالت های ROC سیستم فوق را نمایش دهید.

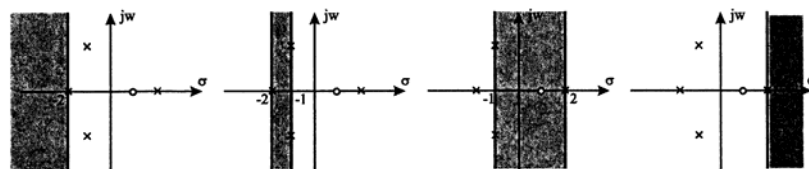


شکل ۴-۶

حل:

با توجه به نمودار صفر و قطب، ۴ حالت ROC ممکن رسم شده است. همان طور که مشاهده می کنید صفر واقع در $s = 1$

تاثیری بر ROC ندارد.



شکل ۵-۶

دست راستی است. یعنی ناحیه همگرایی آن با قسمت حقیقی قطب واقع در دورترین نقطه سمت راست صفحه s تا $+\infty$ متناظر است. به طور مثال در صورت دست راستی بودن $F(s)$ داریم:

$$F(s) = \frac{k(s+3)}{(s+1)(s+2)} \Rightarrow ROC : \operatorname{Re}\{s\} > -1$$

۴- اگر $x(t)$ یک سیگنال دست چپی باشد و تبدیل لاپلاس دو طرفه آن موجود باشد آن گاه ناحیه همگرایی $X(s)$ نیز دست چپی است. یعنی ناحیه همگرایی آن با قسمت حقیقی قطب واقع در دورترین نقطه سمت راست صفحه s تا $-\infty$ متناظر است.

۵- اگر $x(t)$ یک سیگنال دست دوطرفه باشد و تبدیل لاپلاس دو طرفه آن موجود باشد آن گاه ناحیه همگرایی $X(s)$ ناحیه ای میان دو قطب متوالی (دو قطبی که قسمت های حقیقی آن متوالی است) می باشد.

۶- اگر $x(t)$ سیگنالی با طول محدود باشد و تبدیل دو طرفه آن موجود باشد آن گاه ناحیه همگرایی $X(s)$ تمامی صفحه مختلط s باشد نظیر:

$$x_1(t) = \frac{d^n \delta(t)}{dt^n} \Rightarrow X_1(s) = s^n \quad \Rightarrow ROC_1 : \text{All } s$$

$$x_2(t) = \Pi\left(\frac{t}{2}\right) \Rightarrow X_2(s) = \frac{e^s - e^{-s}}{s} \quad \Rightarrow ROC_2 : \text{All } s$$

توجه: با توجه به این که فیلترهای FIR دارای پاسخ ضربه با طول محدود می باشند لذا ROC مربوطه کل صفحه s را پوشش می دهند. از طرفی محور $j\omega$ در ناحیه همگرایی قرار می گیرد و لذا فیلترهای FIR همیشه پایدار است.

۷- خط $\sigma = \sigma_0$ داخل ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس $x(t)$ خواهد بود و تنها اگر $x(t)e^{-\sigma_0 t}$ مطلقاً انتگرال پذیر باشد.

مثال: سیگنال مطلقاً انتگرال پذیر $x(t)$ قطبی $s = -2$ دارد.

الف) آیا $x(t)$ می تواند عمر محدود (Finite - Duration) داشته باشد؟

ب) آیا $x(t)$ می تواند دست چپی (Left - Sided) باشد؟

ج) آیا $x(t)$ می تواند دست راستی (Right - Sided) باشد؟

د) آیا $x(t)$ می تواند دو طرفه (Two - Sided) باشد؟

حل:

الف) خیر، اگر $x(t)$ عمر محدودی باشد، ROC تبدیل لاپلاس آن باید تمام صفحه s باشد ولی چنین نیست زیرا $X(s)$ در $s = -2$ قطب دارد.

ب) خیر، اگر $x(t)$ دست چپی باشد، ROC تبدیل لاپلاس آن در طرف چپ قطب $s = -2$ بوده و نمی تواند شامل محور $j\omega$ باشد، لذا امکان این که $x(t)$ مطلقاً انتگرال پذیر باشد وجود نخواهد داشت.

ج) بله، اگر $x(t)$ دست راستی باشد، ROC تبدیل لاپلاس آن در طرف راست قطب $s = -2$ بوده و می تواند شامل محور $j\omega$ باشد، بنابراین شرط مطلقاً انتگرال پذیری سیگنال $x(t)$ نیز برقرار خواهد بود.

انتگرال پذیری $x(t)$ برقرار خواهد بوده و لذا $x(t)$ می تواند دو طرفه باشد.

تعریف صفر، قطب و دیاگرام صفر و قطب

در اغلب مسایل تجزیه و تحلیل، تبدیل لاپلاس سیگنال $h(t)$ به یک کسر گویا از s به صورت:

$$H(s) = \frac{F(s)}{G(s)} = \frac{k(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} \quad (5)$$

منجر می گردد که $F(s)$ و $G(s)$ چند جمله هایی بر حسب s هستند. مقادیری از s که به ازای آن $F(s) = 0$ گردد،

صفرهای $H(s)$ و مقادیری از s که به ازای آن $G(s) = 0$ گردد، قطب های $H(s)$ خوانده می شوند.

صفرهای $H(s)$

$$H(s) = 0 \Rightarrow F(s) = 0 \Rightarrow s = -z_1, -z_2, \dots, -z_m$$

قطب های $H(s)$

$$H(s) = \infty \Rightarrow G(s) = 0 \Rightarrow s = -p_1, -p_2, \dots, -p_n$$

در رابطه (5)، p_1, p_2, \dots, p_n و z_1, z_2, \dots, z_m مقادیری حقیقی و یا مختلط می باشند و با توجه به حقیقی بودن $h(t)$

به ازای هر p یا z مختلط مزدوج آنها نیز وجود دارد.

در دیاگرام صفر و قطب مقابل $s = -p_1$ قطب ساده،

$s = p_2$ قطب مکرر، $s = \sigma_0 \pm j\omega_0$ قطب مختلط،

$s = z_1 = 0$ صفر ساده و $s = -z_2$ صفر مکرر می باشد. همچنین تبدیل لاپلاس $h(t)$ برابر است با:

$$H(s) = \frac{k(s+z_2)^2}{(s+p_1)(s-p_2)^2[(s+\sigma_0)^2 + \omega_0^2]}$$

در رابطه فوق، k بهره ثابت $H(s)$ است.

توجه: وجود ضربه $\delta(t)$ در سیگنال $h(t)$ به منزله برابری صفر و قطب های محدود $H(s)$ می باشد. به عبارت دیگر مرتبه

چند جمله ای صورت $F(s)$ با مرتبه چند جمله ای $G(s)$ مساوی است.

توجه: همواره تعداد صفر و قطب های تابع $H(s)$ برابر می باشند، به طور مثال:

$$H_1(s) = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+3)}$$

$H_1(s)$ شامل دو قطب محدود در $s = -1$ و $s = -3$ و یک صفر محدود در $s = -2$ می باشد و از آنجا که تعداد صفر و

قطب های آن باید برابر باشند یک صفر بی نهایت نیز خواهد داشت. همچنین:

$$H_2(s) = \frac{(s-1)(s^2+s+1)}{(s^2+s+1)} = s-1$$

$H_2(s)$ شامل سه صفر محدود در $s=1$ و $s = \frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$ می باشد، صفرهای مختلط توسط قطب هایی در همان محل

حذف می شوند، بنابراین تنها یک صفر محدود در $s=1$ داریم. بدین ترتیب برای آن که تعداد قطب و صفرهای برابری داشته باشیم، یک قطب در بی نهایت داشته و هیچ صفر نامحدودی نداریم.

توجه: اگر $x(t)$ سیگنالی فرد یا زوج باشد، ROCی آن نسبت به $s=0$ متقارن خواهد بود.

مثال: تعیین کنید کدام یک از نمودارهای قطب- صفر نمایش داده شده با سیگنالی زوج و یا فرد متناظر می باشند. در هر مورد ناحیه همگرایی را مشخص کنید؟

حل:

الف) به ازای ناحیه همگرایی $-1 < R\{s\} < 1$ شرط تقارن برآورده می شود.

$$X(s) = \frac{ks}{(s+1)(s-1)} \Rightarrow X(-s) = \frac{-ks}{(-s+1)(-s-1)} = -X(s)$$

بنابراین $x(t)$ سیگنالی فرد است.

ب) به ازای ناحیه همگرایی $-1 < R\{s\} < 1$ شرط تقارن $s=0$ برآورده می شود.

$$X(s) = \frac{k(s+j)(s-j)}{(s+1)(s-1)} = \frac{k(s^2+1)}{s^2-1} \Rightarrow X(-s) = \frac{k(s^2+1)}{s^2-1} = X(s)$$

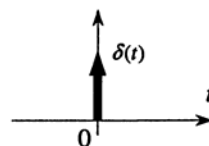
بنابراین $x(t)$ سیگنالی زوج است.

ج) شرط تقارن ROC برای این شکل امکان پذیر نبوده، بنابراین $x(t)$ نه می تواند زوج باشد نه فرد.

تبدیل لاپلاس دوطرفه چند سیگنال

ضربه واحد $\delta(t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1, \quad ROC: All s$$

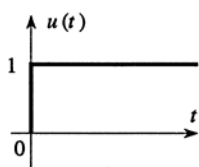


شکل ۶-۶

پله واحد $u(t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-st} dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{-e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}, \quad ROC: \text{Re}\{x\} > 0$$

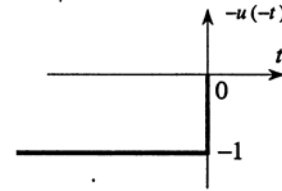


شکل ۷-۶

سیگنال $-u(-t)$

$$X(s) = -\int_{-\infty}^{\infty} u(-t)e^{-st} dt = -\int_{-\infty}^0 e^{-st} dt$$

$$= \frac{e^{-st}}{s} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{s}(1 - e^{-s(-\infty)}) = \frac{1}{s}, \text{ ROC : } \text{Re}\{s\} < 0$$

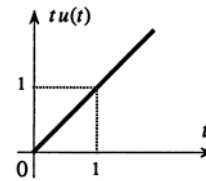


شکل ۸-۶

سیگنال $tu(t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} tu(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} te^{-st} dt$$

$$= \frac{-te^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s^2}, \text{ ROC : } \text{Re}\{s\} > 0$$



شکل ۹-۶

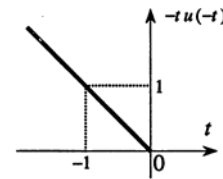
در حالت کلی:

$$x(t) = t^n u(t) \Rightarrow X(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{ROC : } \text{Re}\{s\} > 0$$

سیگنال $-tu(-t)$

$$X(s) = -\int_{-\infty}^{\infty} tu(-t)e^{-st} dt = -\int_{-\infty}^0 te^{-st} dt$$

$$= \frac{te^{-st}}{s} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{s} \int_{-\infty}^0 e^{-st} dt = \frac{1}{s^2}, \text{ ROC : } \text{Re}\{s\} < 0$$



شکل ۱۰-۶

سیگنال e^{-t^2}

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-st} dt = e^{\frac{s^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+\frac{s}{2})^2} dt = e^{\frac{s^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} dt = \sqrt{\pi} e^{\frac{s^2}{4}}$$

جدول زوج تبدیل های لاپلاس متداول سیگنال های زمان پیوسته

سیگنال $x(t)$	تبدیل لاپلاس $X(s)$	ناحیه همگرایی (ROC)
$\delta(t)$	1	تمام صفحه s
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\} < 0$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$-t^n u(-t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\text{Re}\{s\} < 0$
$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}\{s\} > -a$
$-e^{-at} u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}\{s\} < -a$
$t^n e^{-at} u(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\text{Re}\{s\} > -a$
$-t^n e^{-at} u(-t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\text{Re}\{s\} < -a$
$\delta(t-T)$	e^{-Ts}	تمام صفحه s
$\frac{d^n \delta(T)}{dt^n}$	s^n	تمام صفحه s
$u_{-n}(t) = u(t) * \dots * u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$\text{Cos } \omega_0 t u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$\text{Sin } \omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$e^{-at} \text{Cos } \omega_0 t u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\} > -a$
$e^{-at} \text{Sin } \omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\} > -a$

توجه: سیگنال هایی نظیر 1 ، e ، $e^{-\sigma t}$ ، $\cos \omega_0 t$ ، $\sin \omega_0 t$ ، e و te دارای تبدیل لاپلاس دوطرفه نمی باشند.
 توجه: اگر سیگنالی تبدیل فوریه داشته باشد، به آن معنی نمی باشد که حتماً تبدیل لاپلاس نیز دارد. به طور مثال سیگنال هایی نظیر 1 ، $e^{j\omega_0 t}$ ، $\frac{1}{\pi t}$ ، $\cos \omega_0 t$ و $\sin \omega_0 t$ دارای تبدیل فوریه هستند اما تبدیل لاپلاس ندارند. چرا که حتی یک σ برایشان پیدا نمی شود که سیگنال $x(t)e^{-\sigma t}$ مطلقاً انتگرال پذیر گردد.
 توجه: اگر سیگنالی تبدیل لاپلاس داشته باشد تنها در صورتی سیگنال فوق تبدیل فوریه دارد که ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس آن شامل محور $j\omega$ باشد.

خواص تبدیل لاپلاس

به منظور اجتناب از زحمت انتگرال گیری، در این بخش به معرفی چند خاصیت تبدیل لاپلاس می پردازیم و از این خواص در تحلیل مسایل استفاده می کنیم. از آنجا که تبدیل های فوریه و لاپلاس هر دو تبدیل های انتگرالی خطی هستند، بسیاری از خواص که بیان می شوند با توجه به ملاحظات دربارۀ تبدیل فوریه بدیهی خواهند بود. با فرض معلوم بودن تبدیل لاپلاس دو سیگنال $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به همراه ناحیه همگرایی آنها:

$$\begin{aligned} \ell[x_1(t)] &= X_1(s) \quad , \quad ROC_{x_1} : R_1 \\ \ell[x_2(t)] &= X_2(s) \quad , \quad ROC_{x_2} : R_2 \end{aligned}$$

این خواص عبارتند از:

خطی بودن

برای دو ثابت a و b که ممکن است مختلط باشند، نتیجه می شود که:

$$\ell[ax_1(t) + bx_2(t)] = aX_1(s) + bX_2(s)$$

ناحیه همگرایی ترکیب خطی چند سیگنال:

$$ROC : \min \{R_1 \cap R_2\}$$

نظیر:

$$\{-1 < \text{Re}\{s\} < 1\} \cap \{\text{Re}\{s\} > -1\} = \{-1 < \text{Re}\{s\} < 1\}$$

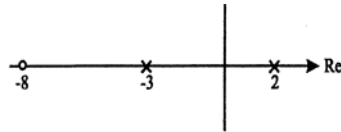
مثال: تبدیل لاپلاس، ناحیه همگرایی و نمودار صفر-قطب توابع زمانی زیر را تعیین کنید.

$$x_1(t) = 2e^{2t}u(-t) + e^{-3t}u(t)$$

$$x_2(t) = e^{-|t|} \quad -\infty < t < \infty$$

حل:

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \ell[2e^{2t}u(-t) + e^{-3t}u(t)] = \ell[2e^{2t}u(-t)] + \ell[e^{-3t}u(t)] \\ &= \left\{ \frac{2}{-s+2} , \text{Re}\{s\} < 2 \right\} + \left\{ \frac{2}{s+3} , \text{Re}\{s\} > -3 \right\} \\ &= \frac{2}{2-s} + \frac{1}{s+3} = \frac{s+8}{(2-s)(s+3)} , \quad -3 < \text{Re}\{s\} < 2 \end{aligned}$$

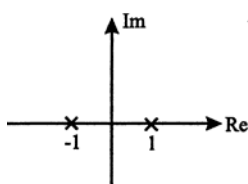


شکل ۶-۱۱

شکل بالا نمودار صفر و قطب $X_1(s)$ را نشان می دهد.

$$X_2(s) = \mathcal{L}[e^{-|t|}] = \mathcal{L}[e^t u(-t) + e^{-t} u(t)]$$

$$= \frac{-1}{s-1} + \frac{1}{s+1} = \frac{-2}{(s-1)(s+1)}, \quad -1 < \text{Re}\{s\} < 1$$



شکل ۶-۱۲

شکل بالا نمودار صفر و قطب $X_2(s)$ را نشان می دهد.

توجه: در صورتی که اشتراک نواحی همگرایی تهی گردد، آن گاه سیگنال، تبدیل لاپلاس نخواهد داشت.

مثال: تبدیل لاپلاس و ناحیه همگرایی توابع زمانی زیر را به دست آورید.

$$x_1(t) = |t| \quad -\infty < t < \infty$$

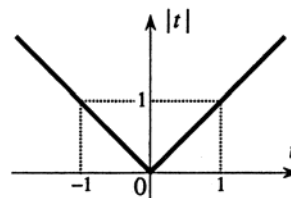
$$x_2(t) = \text{Sgn}(t)$$

حل:

$$X_1(s) = \mathcal{L}[|t|] = \mathcal{L}[-tu(-t) + tu(t)]$$

$$= \left\{ \frac{1}{(-s)^2}, \sigma < 0 \right\} + \left\{ \frac{1}{s^2}, \sigma > 0 \right\}$$

$$= \left\{ \frac{2}{s^2}, (\sigma < 0) \cap (\sigma > 0) \right\} = \frac{2}{s^2}, \quad \text{ROC} = \{\phi\}$$

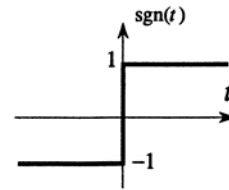


شکل ۶-۱۳

$$x_2(t) = \text{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$$

$$X_2(s) = \left\{ \frac{1}{s}, \sigma > 0 \right\} + \left\{ \frac{1}{s}, \sigma < 0 \right\}$$

$$= \left\{ \frac{2}{s^2}, (\sigma > 0) \cap (\sigma < 0) \right\} = \frac{2}{s^2}, \text{ROC} = \{\phi\}$$



شکل ۶-۱۴

بنابراین $x_2(t) = \text{sgn}(t) = S g n(t)$ تبدیل لاپلاس ندارد.

توجه: گاهی اوقات تبدیل لاپلاس ترکیب خطی چند سیگنال منجر به حذف صفر و قطب ها شده و در نهایت باعث تغییر ناحیه همگرایی آنها می گردد.

جابجایی زمانی

فرض کنید $X(s)$ در ناحیه R همگرا باشد، در این صورت:

$$\ell[x(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)e^{-st} dt$$

با تغییر متغیر $t-t_0 = \alpha$

$$\begin{aligned} \ell[x(t-t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)e^{-s(\alpha+t_0)} d\alpha \\ &= e^{-t_0s} \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)e^{-s\alpha} d\alpha = e^{-t_0s} X(s) \end{aligned}$$

به طور خلاصه:

$$\ell[x(t-t_0)] = e^{-t_0s} X(s), \text{ROC} = R$$

جابجایی زمانی، ناحیه همگرایی سیگنال را تغییر نمی دهد.

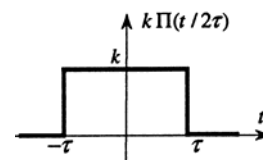
$$\ell[x(-t-t_0)] = e^{-t_0s} X(-s), \text{ROC} = -R$$

مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال مقابل را به دست آورید.

حل:

$$x(t) = k \Pi\left(\frac{t}{2\tau}\right) = ku(t+\tau) - ku(t-\tau)$$

$$X(s) = \frac{k}{s} e^{\tau s} - \frac{k}{s} e^{-\tau s} = \frac{k}{s} (e^{\tau s} - e^{-\tau s})$$



شکل ۶-۱۵

سیگنال $x(t)$ دارای طول محدود است و لذا ROC تبدیل لاپلاس آن کل صفحه s خواهد بود.

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT} \delta(t - nT)$$

$$X(s) = \ell \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT} \delta(t - nT) \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT} \ell \{ \delta(t - nT) \}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT} e^{-nTs} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-(1+s)T})^n$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-(1+s)T}}, \quad ROC : \{ \sigma > -1 \}$$

ناحیه همگرایی

$$\left| e^{-(1+s)T} \right| < 1 \Rightarrow \left| e^{-(1+\sigma+j\omega)T} \right| < 1 \Rightarrow \left| e^{-(1+\sigma)T} \right| \left| e^{-j\omega T} \right| = e^{-(1+\sigma)T} < 1$$

و در نهایت:

$$(1 + \sigma)T > 0 \Rightarrow \sigma > -1$$

جابجایی در حوزه لاپلاس

فرض کنید $X(s)$ در بازه $\alpha < \text{Re}\{s\} < \beta$ همگرا باشد، در این صورت:

$$\ell[e^{s_0 t} x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{s_0 t} x(t)) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(s-s_0)t} dt = X(s - s_0)$$

ناحیه همگرایی

$$\alpha < \text{Re}\{s - s_0\} < \beta \Rightarrow \alpha + \text{Re}\{s_0\} < \text{Re}\{s\} < \beta + \text{Re}\{s_0\}$$

جابجایی در حوزه لاپلاس باعث جابجا شدن ناحیه همگرایی به اندازه $\text{Re}\{s_0\}$ به سمت راست می گردد.

مثال: تبدیل لاپلاس توابع زمانی زیر را به دست آورید.

$$x_1(t) = e^{-5t} u(-t - t_0)$$

$$x_2(t) = \delta(t+1)\delta(t) + e^{-2(t+3)} u(t+1)$$

$$x_3(t) = e^{-4t} u(-t) + e^{-5t} \text{Sin}5tu(t)$$

حل:

$$x_1(t) = e^{-5t} u(-t - t_0)$$

$$X_1(s) = \ell[u(t - t_0)] = -\frac{e^{t_0 s}}{s} \quad \text{Re}\{s\} < -5$$

$$\delta(t+1)\delta(t)=0, \quad x_2(t)=e^{-2(t+3)}u(t+1)=e^{-4}e^{-2(t+1)}u(t+1)$$

$$X_2(s)=e^{-4}e^s \ell[e^{-2t}u(t)]=\frac{e^{s-4}}{s+2}, \quad \text{Re}\{s\}>-2$$

$$x_3(t)=e^{-4t}u(-t)+e^{-5t}\text{Sin}5tu(t)$$

$$X_3(s)=\left\{\frac{-1}{s+4}, \sigma < -4\right\} + \left\{\frac{5}{(s+5)^2+25}, \sigma > -5\right\}$$

$$= \frac{-1}{s+4} + \frac{5}{(s+5)^2+25}, \quad -5 < \sigma < -4$$

تغییر مقیاس زمانی

فرض کنید $X(s)$ در بازه $\alpha < \text{Re}\{s\} < \beta$ همگرا باشد در این صورت:

$$\ell[x(at)]=\frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right), \quad \alpha < \text{Re}\left\{\frac{s}{a}\right\} < \beta$$

به ازای $a > 0$ ناحیه همگرایی

$$a\alpha < \text{Re}\{s\} < a\beta$$

به ازای $0 < a < 1$ ناحیه همگرایی گسترده می شود.

به ازای $a < 1$ ناحیه همگرایی فشرده می شود.

به ازای $a < 0$ ناحیه همگرایی

$$a\beta < \text{Re}\{s\} < a\alpha$$

به ازای $a = -1$

$$\ell[x(-t)]=X(-s), \quad -\beta < \text{Re}\{s\} < -\alpha$$

به طور مثال اگر $ROC_x = \{-2 < \sigma < 5\}$ آن گاه ناحیه همگرایی $X(-s)$ برابر است با:

$$\{-5 < \sigma < 2\}$$

مثال: تبدیل لاپلاس توابع زیر را به دست آورید.

$$x_1(t)=e^{-|2t|} \quad -\infty < t < \infty$$

$$x_2(t)=e^{-t}\text{Sin}2tu(-t)$$

$$x_3(t)=\delta(3t)+u(3t)$$

$$x_1(t) = e^{-|2t|} \quad -\infty < t < \infty$$

$$\ell[e^{-|t|}] = \frac{-2}{(s-1)(s+1)}, \quad -1 < \operatorname{Re}\{s\} < 1$$

$$X_1(s) = \ell[e^{-|2t|}] = \frac{1}{2} \frac{-2}{\left(\frac{s}{2}-1\right)\left(\frac{s}{2}+1\right)}, \quad -1 < \operatorname{Re}\left\{\frac{s}{2}\right\} < 1$$

$$= \frac{-4}{(s-2)(s+2)}, \quad -2 < \operatorname{Re}\{s\} < 2$$

$$x_2(t) = e^{-t} \sin 2tu(-t)$$

$$G(s) = \ell[e^t \sin(-2t)u(t)] = \frac{-2}{(s-1)^2 + 4}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 1$$

$$X_2(s) = G(-s) = \frac{-2}{(s+1)^2 + 4}, \quad \operatorname{Re}\{s\} < -1$$

$$x_3(t) = \delta(3t) + u(3t)$$

$$X_3(s) = \ell[\delta(3t)] + \ell[u(3t)]$$

$$= \left\{ \frac{1}{3} \times 1, \quad -\infty < \operatorname{Re}\left\{\frac{S}{3}\right\} < \infty \right\} + \left\{ \frac{1}{3} \frac{1}{\left(\frac{S}{3}\right)}, \quad \operatorname{Re}\left\{\frac{S}{3}\right\} > 0 \right\}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{s} \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

توجه: با تفکیک سیگنال $x(t)$ به مولفه های زمان منفی و زمان مثبت، می توان تبدیل لاپلاس دوطرفه آن را با استفاده از تبدیل لاپلاس یک طرفه طی دو مرحله به دست آورد. فرض کنید که $x(t)$ برای $-\infty < t < \infty$ تعریف شده باشد.

۱- $x(t)$ را به دو مولفه علی $x_1(t)$ و غیرعلی $x_2(t)$ تجزیه می کنیم.

$$x_1(t) = x(t)u(t), \quad x_2(t) = x(t)u(-t)$$

توجه کنید که سیگنال های $x_1(t)$ و $x_2(-t)$ هر دو غیر علی هستند.

۲- تبدیل لاپلاس یک طرفه $x_1(t)$ را با تبدیل لاپلاس یک طرفه $x_2(-t)$ که در آن s به $-s$ تبدیل شده است، جمع کنید.

نتیجه به دست آمده تبدیل لاپلاس دو طرفه $x(t)$ خواهد بود.

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) = x(t)u(t) &\Rightarrow \ell[x_1(t)] = X_1(s) \\ x_2(t) = x(t)u(-t) &\Rightarrow \ell[x_2(-t)] = X_2(s) \end{aligned} \right\} X(s) = X_1(s) + X_2(s)$$

$$x_1(t) = e^{-3t}u(t) \Rightarrow X_1(s) = \frac{1}{s+3}, \sigma > -3$$

$$x_2(-t) = e^{-2t}u(t) \Rightarrow X_2(s) = \frac{1}{s+2}, \sigma > -2$$

از تعویض s با $-s$ در $X_2(s)$ داریم:

$$X_2(-s) = \frac{1}{-s+2}, \sigma < 2$$

$$X(s) = X_1(s) + X_2(-s) = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{-s+2}, -3 < \sigma < 2$$

مشتق گیری زمانی

فرض کنید $X(s)$ در ناحیه R همگرا باشد، در این صورت:

$$\ell\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s), \quad \text{حداقل } ROC = R$$

$$\ell\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right] = s^2X(s), \quad \text{حداقل } ROC = R$$

ضرب s در $X(s)$ ممکن است باعث حذف قطب شود. بنابراین ناحیه همگرایی حداقل R است.

مثال: دو سیگنال راستی $x(t)$ و $y(t)$ با معادلات دیفرانسیل زیر به هم مربوط می شوند.

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2y(t) + \delta(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2x(t)$$

$X(s)$ و $Y(s)$ و نواحی همگرایی آنها را تعیین کنید.

حل:

(*)

$$\ell\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = \ell[-2y(t) + \delta(t)] \Rightarrow sX(s) = -2Y(s) + 1$$

(**)

$$\ell\left[\frac{dy(t)}{dt}\right] = \ell[2x(t)] \Rightarrow sY(s) = 2X(s)$$

$$(*) , (***) \rightarrow \Delta(s) = \frac{1}{s^2 + 4}, \quad \Gamma(s) = \frac{1}{s^2 + 4}$$

قطب های $Y(s)$ و $X(s)$ موهومی خالص اند از طرفی سیگنال $x(t)$ و $y(t)$ دست راستی اند و لذا ROC هر دو $\text{Re}\{s\} > 0$ می باشد.

۳مثال: یک سیستم LTI با ورودی $x(t)$ ، خروجی $y(t)$ و تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید.

$$H(s) = \frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 2}$$

معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده خروجی به ورودی سیستم را به دست آورید.

حل:

$$H(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 2} \Rightarrow (s^2 + 3s + 2)Y(s) = (s^2 + 4s - 6)X(s)$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 4 \frac{dx(t)}{dt} - 6x(t)$$

توجه: روابط مشتق گیری زمانی در تبدیل لاپلاس یک طرفه برابرند با:

$$\ell\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s) - x(0^-)$$

$$\ell\left[\frac{d^2 x(t)}{dt^2}\right] = s^2 X(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

$x'(0^-)$ مقدار مشتق اول $x(t)$ در $t = 0^-$ است.

مثال: از معادله داده شده برای تبدیل $t \geq 0$ لاپلاس بگیرید.

$$y'' - 2y' - 3y = 0 \quad y(0^-) = 1, \quad y'(0^-) = 7$$

حل:

$$\ell[y'' - 2y' - 3y] = 0 \quad \ell[y''] - 2\ell[2y'] - 3\ell[3y] = 0$$

$$s^2 Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) - 2[s(s) - y(0^-)] - 3Y(s) = 0$$

$$[s^2 - 2s - 3]Y(s) = s + 5 \Rightarrow Y(s) = \frac{s + 5}{(s - 3)(s + 1)}$$

توجه: از $\ell[\delta(t)] = 1$ به دست می آوریم.

$$\ell[\delta^{(1)}(t)] = s, \quad \ell[\delta^{(2)}(t)] = s^2, \quad \dots, \quad \ell[\delta^{(n)}(t)] = s^n$$

فرض کنید $X(s)$ در ناحیه R همگرا باشد، در این صورت:

$$\ell[-tx(t)] = \frac{dX(s)}{ds} \quad ROC = R$$

$$\ell[t^2x(t)] = \frac{d^2X(s)}{ds^2} \quad ROC = R$$

$$\ell[(-t)^n x(t)] = \frac{d^n X(s)}{ds^n} \quad ROC = R$$

مثال: تبدیل لاپلاس توابع زیر را به دست آورید.

$$x_1(t) = |t|e^{-2|t|}, \quad x_2(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & o, w \end{cases}$$

حل:

$$x_1(t) = |t|e^{-2|t|}$$

$$X_1(s) = \ell[|t|e^{-2|t|}] = \ell[te^{-2t}u(t) - te^{2t}u(-t)]$$

$$= \frac{-d}{ds} \{ \ell[e^{-2t}u(t)] \} + \frac{d}{ds} \{ \ell[e^{2t}u(-t)] \}$$

$$X_1(s) = \left\{ \frac{d}{ds} \left[\frac{-1}{s+2} \right], \sigma < -2 \right\} + \left\{ \frac{d}{ds} \left[\frac{-1}{s-2} \right], \sigma < 2 \right\}$$

$$= \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s-2)^2}, \quad -2 < \text{Re}\{s\} < 2$$

$$x_2(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & o, w \end{cases}$$

$$x_2(t) = t[u(t) - u(t-1)] + (2-t)[u(t-1) - u(t-2)]$$

$$tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$$

تبدیل لاپلاس $x_2(s)$ برابر با:

$$X_2(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} = \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2}, \quad -\infty < \sigma < \infty$$

سیگنال $x_2(s)$ دارای عمر محدود می باشد و مطلقاً انتگرال پذیر است. بنابراین ROC آن تمام صفحه s است.

فرض کنید $X(s)$ در ناحیه R همگرا باشد، در این صورت:

$$\ell \left\{ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right\} = \ell \{x(t) * u(t)\} = \frac{1}{s} X(s), \text{ ROC : } R \cap \text{Re}\{s\} > 0$$

ناحیه همگرایی حداقل اشتراک R با $\text{Re}\{s\} > 0$ است.

$$\ell \left\{ \int_{-t}^{\infty} x(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} X(-s), \text{ ROC : } R \cap \text{Re}\{s\} < 0$$

مثال: تبدیل لاپلاس توابع زیر را به دست آورید.

$$x_1(t) = \int_{-\infty}^t [\delta(t) + 3te^{-t}u(t) - 3e^{-t}u(t)] dt$$

$$x_2(t) = \int_{-t}^{\infty} e^t \text{Cos } 3tu(-t) dt$$

حل:

$$x_1(t) = \int_{-\infty}^t [\delta(t) + 3te^{-t}u(t) - 3e^{-t}u(t)] dt$$

$$\ell[\delta(t)] = 1, \ell[3te^{-t}u(t)] = -3 \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s+1} \right] = \frac{3}{(s+1)^2}$$

$$G(s) = \ell[\delta(t) + 3te^{-t}u(t) - 3e^{-t}u(t)]$$

$$= 1 + \frac{3}{(s+1)^2} - \frac{3}{s+1} = \frac{s^2 - s + 1}{(s+1)^2}, \text{ Re}\{s\} > -1$$

$$x_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt \Rightarrow X_1(s) = \frac{1}{s} G(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s(s+1)^2}, \text{ Re}\{s\} > 0$$

ناحیه همگرایی $x_1(t)$

$$\{\text{Re}(s) > -1\} \cap \{\text{Re}(s) > 0\} = \text{Re}(s) > 0$$

$$x_2(t) = \int_{-t}^{\infty} e^t \text{Cos } 3tu(-t) dt$$

$$G(s) = \ell[e^{-t} \text{Cos } 3tu(t)] = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 9}, \text{ Re}\{s\} > -1$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s} G(-s) = \frac{1-s}{s((1-s)^2 + 9)}, \text{ Re}\{s\} < -1$$

ناحیه همگرایی $x_2(t)$

$$\{\text{Re}(s) < -1\} \cap \{\text{Re}(s) < 0\} = \text{Re}(s) < -1$$

فرض کنید $X(s)$ در ناحیه R همگرا باشد، در این صورت:

$$\ell[x^*(t)] = X^*(s^*) \quad , \quad ROC = R$$

در صورتی که $x(t)$ سیگنال حقیقی باشد آن گاه

$$X(s) = X^*(s^*)$$

در سیگنال های حقیقی قطب ها و صفرهای $X(s)$ خارج محور حقیقی به صورت زوج های مزدوج قرار می گیرند. به عبارتی اگر s_0 قطبی (یا صفری) از $X(s)$ باشد s_0^* نیز قطبی (یا صفری) از $X(s)$ خواهد بود.

$$X(s_0) = 0 \Rightarrow X(s_0^*) = 0$$

مثال: اگر تبدیل لاپلاس $x(t)$ را با $X(s)$ با ناحیه همگرایی $|\operatorname{Re}\{s\}| < a$ نشان دهیم، آن گاه تبدیل لاپلاس

$$y(t) = -x\left(\frac{1}{2}t\right) + x^*(-t+2)$$

را به دست آورید.

حل:

$$\ell[x(t)] = X(s) \quad , \quad -a < \operatorname{Re}\{s\} < a$$

$$\ell\left[x\left(\frac{1}{2}t\right)\right] = 2X(2s) \quad , \quad -\frac{a}{2} < \operatorname{Re}\{s\} < \frac{a}{2}$$

$$\ell[x(t+2)] = e^{2s} X(s) \quad , \quad -a < \operatorname{Re}\{s\} < a$$

$$\ell[x(-t+2)] = e^{-2s} x(-s) \quad , \quad -a < \operatorname{Re}\{s\} < a$$

$$\ell[x^*(-t+2)] = e^{-2s^*} x^*(-s^*) \quad , \quad -a < \operatorname{Re}\{s\} < a$$

$$Y(s) = \ell\left[-x\left(\frac{1}{2}t\right) + x^*(-t+2)\right] = -2X(2s) + e^{-2s^*} x^*(-s^*)$$

ناحیه همگرایی

$$\left\{-\frac{a}{2} > \operatorname{Re}\{s\} < \frac{a}{2}\right\} \cap \{-a < \operatorname{Re}\{s\} < a\} = |\operatorname{Re}\{s\}| < \frac{a}{2}$$

کانولوشن

فرض کنید تبدیل های $X_1(s)$ و $X_2(s)$ به ترتیب دارای همگرایی های R_1 و R_2 باشند و این که
 در این صورت، $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$

$$Y(s) = \ell[y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [x_1(t) * x_2(t)] e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} [x_1(\tau) x_2(t-\tau)] d\tau \right] e^{-st} dt$$

با توجه به ویژگی جابجایی زمانی:

$$y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) [e^{-s\tau} X_2(s)] d\tau = X_2(s) \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t - \tau) e^{-st} dt d\tau = X_1(s) X_2(s)$$

ناحیه همگرایی $Y(s)$ باید اشتراک درون نواحی همگرایی $X_1(s)$ و $X_2(s)$ باشد اما از آنجا که ضرب تبدیل لاپلاس ها ممکن است باعث گردد برخی صفر و قطب های $X_1(s)$ و $X_2(s)$ بر روی هم افتاده و حذف شوند، در چنین شرایطی ROC ممکن است توسعه یابد و لذا ناحیه همگرایی حداقل اشتراک دو ناحیه همگرایی است. به طور خلاصه:

$$\ell[x_1(t) * x_2(t)] = X_1(s) X_2(s) \quad , \quad ROC : \min\{R_1 \cap R_2\}$$

مثال: سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$x_1(t) = e^{-2t} u(t) \quad , \quad x_2(t) = e^{-3t} u(t)$$

در صورتی که $y(t)$ با سیگنال های فوق به صورت زیر رابطه داشته باشد، $Y(s)$ را به دست آورید.

$$y(t) = x_1(t - 2) * x_2(-t + 3)$$

حل:

$$\ell[x_1(t - 2)] = e^{-2s} X_1(s) \quad , \quad \text{Re}\{s\} > -2$$

$$\ell[x_2(t + 3)] = e^{3s} X_2(s) \quad , \quad \text{Re}\{s\} > -3$$

$$\ell[x_2(-t + 3)] = e^{-3s} X_1(-s) \quad , \quad \text{Re}\{s\} < 3$$

$$\ell[y(t)] = \ell[x_1(t - 2) * x_2(-t + 3)] = e^{-2s} X_1(s) \cdot e^{-3s} X_2(-s)$$

$$= e^{-5s} X_1(s) \cdot X_2(-s) = \frac{-e^{-5s}}{(s+2)(s-3)} \quad , \quad -2 < \text{Re}\{s\} < 3$$

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$y(t) = \text{Sin } 2tu(t) + \int_0^t y(\lambda) \text{Sin } 2(t - \lambda) d\lambda$$

حل:

از طرفین تبدیل لاپلاس (یک طرفه) می گیریم.

$$\ell[y(t)] = \ell[\text{Sin } 2tu(t)] = \int_0^t y(\lambda) \text{Sin } 2(t - \lambda) d\lambda$$

$$= \frac{2}{s^2 + 4} + \ell[y(t) * \text{Sin } 2tu(t)] = \frac{2}{s^2 + 4} + Y(s) \frac{2}{s^2 + 4} \Rightarrow Y(s) = \frac{2}{s^2 + 2}$$

$$y(t) = \sqrt{2} \text{Sin } \sqrt{2} t u(t) \quad , \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

برای سیگنال $x(t)u(t)$ و با تبدیل لاپلاس $X(s)$ ، مقدار اولیه $x(0^+)$ برابر است با:

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

رابطه فوق بیان می‌دارد برای تعیین مقدار اولیه $x(0^+)$ ، ابتدا $X(s)$ را در s ضرب می‌کنیم و سپس s را به بی نهایت میل می‌دهیم.

توجه: سیگنال $x(t)$ در $t=0$ نباید دارای ضربه و مشتقاتش باشد.

مثال: مقدار اولیه $x(t) = \sin t u(t)$ را محاسبه کنید.

$$x(t) = \sin t u(t) \Rightarrow x(0^+) = 0$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 1}, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{s^2 + 1} = 0$$

مشاهده می‌گردد مقدار اولیه هم در حوزه زمان و هم در حوزه لاپلاس دارای جواب یکسان است.

فرم کلی تر قضیه مقدار اولیه این است که به ازای $n < N$ خواهیم داشت:

$$X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(n)}(0^+)}{s^{n+1}}, \quad x^{(n)}(0^+) = 0 \Rightarrow x^{(N)}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{N+1} X(s)$$

$x^{(n)}(0^+)$ بیان کننده مشتق مرتبه n ام در لحظه $t = 0^+$ می‌باشد.

قضیه مقدار نهایی

برای سیگنال $x(t)u(t)$ و با تبدیل لاپلاس $X(s)$ ، مقدار اولیه $x(+\infty)$ برابر است با:

$$x(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

توجه: قطب‌های $X(s)$ نباید موهومی خالص باشند.

مثال: مقدار نهایی توابع زیر را به دست آورید.

$$x_1(t) = e^{-at}u(t) + u(t), \quad x_2(t) = \cos \omega t u(t) + u(t)$$

حل:

$$X_1(s) = \frac{1}{s+a} + \frac{1}{s} = \frac{2s+a}{s(s+a)} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} sX_1(s) = 1$$

$$X_2(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \frac{1}{s} = \frac{s^2 + 2s + \omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$$

$X_2(s)$ دارای قطب موهومی خالص $s = \pm j\omega$ است. لذا قضیه مقدار نهایی برای $X_2(s)$ صادق نیست.

با فرض آن که دو سیگنال $x(t)$ و $y(t)$ دارای نواحی همگرایی R_1 و R_2 باشند. آن گاه خلاصه ای از خواص تبدیل لاپلاس برابر است با:

جدول خواص تبدیل لاپلاس دوطرفه سیگنال های زمان پیوسته

سیگنال	تبدیل لاپلاس	ROC	خاصیت
$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	حداقل $\{R_1 \cap R_2\}$	خطی بودن
$x(t - t_0)$	$e^{-t_0 s} X(s)$	R	جابجایی زمانی
$e^{-t_0 s} x(t)$	$X(s - s_0)$	$\alpha + \text{Re}\{s_0\} < \text{Re}\{s\} < \beta + \text{Re}\{s_0\}$	جابجایی در حوزه s
$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$	$\begin{cases} \alpha a < \text{Re}\{s\} < \beta a & a > 0 \\ \beta a < \text{Re}\{s\} < \alpha a & a < 0 \end{cases}$	تغییر مقیاس زمانی
$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R	مزدوج گیری
$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	حداقل R	مشتق گیری زمانی
$-tx(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$	R	مشتق گیری در حوزه s
$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$	حداقل $\{R \cap \text{Re}\{s\} > 0\}$	انتگرال گیری زمانی
$\int_{-t}^{\infty} x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(-s)$	حداقل $\{R \cap \text{Re}\{s\} < 0\}$	انتگرال گیری زمانی
$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s) X_2(s)$	حداقل $\{R_1 \cap R_2\}$	کانولوشن
$x(0^+)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$		مقدار اولیه $x(t)u(t)$
$x(+\infty)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$		مقدار نهایی $x(t)u(t)$
$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$	$X(0)$		سطح زیر منحنی سیگنال

توجه: در تعیین مقدار نهایی سیگنال $x(t)$ نباید قطب موهومی خالص داشته باشد.

عکس تبدیل لاپلاس

سیگنال $x(t)$ را تبدیل لاپلاس معکوس $X(s)$ گویند که با انتگرال زیر تعریف می گردد.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds$$

معادله فوق بیان می دارد $x(t)$ را می توان به صورت انتگرال حاصل ضرب $X(s)$ در نمایی های مختلط نمایش داد. با توجه به این که یافتن تبدیل لاپلاس معکوس با استفاده از تعریف فوق به محاسبه انتگرال در صفحه مختلط s نیاز دارد و این مطلب خارج از بحث کتاب است؛ لذا با توجه به جدول تبدیل لاپلاس می توان تبدیل معکوس را به دست آورد. چرا که بسیاری از تبدیل های $X(s)$ مورد بحث به صورت یک کسر از چند جمله ای های بر حسب s هستند.

عبارت گویای داده شده را به کسرهای جزئی تبدیل می کنیم.

ROC مربوط به هر کسر را طوری انتخاب می کنیم که ROC داده شده در مساله را در بر بگیرد.

با توجه به ROC انتخاب شده برای هر کسر عمل عکس تبدیل لاپلاس را انجام می دهیم.

مثال: تبدیل لاپلاس معکوس را برای توابع زیر به دست آورید.

$$X_1(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6} \quad -3 < \text{Re}\{s\} < -2$$

$$X_2(s) = \frac{s^3}{(s-1)(s+2)} \quad \text{Re}\{s\} < 2$$

حل: مرحله (۱)

$$X_1(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6} = \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+3} \quad -3 < \text{Re}\{s\} < -2$$

مرحله (۲)

$$X_1(s) = \left\{ \frac{-1}{s+2}, \text{Re}\{s\} < -2 \right\} + \left\{ \frac{2}{s+3}, \text{Re}\{s\} > -3 \right\}$$

مرحله (۳)

$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[X_1(s)] = e^{-2t}u(-t) + 2e^{-3t}u(t)$$

در حالت بعدی، چون درجه صورت $X_2(s)$ از مخرج بزرگتر است، ابتدا حاصل تقسیم را به دست می آوریم.

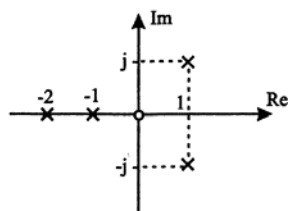
$$X_2(s) = s-1 + \frac{3s-2}{(s-1)(s+2)} = s-1 + \frac{1}{s-1} + \frac{8}{s+2}$$

با توجه به مکان ROC که در سمت چپ هر دو قطب می باشد هر دو کسر را باید به صورت دست چپی به حوزه زمان برگردانیم.

$$x_2(t) = \delta'(t) - \delta(t) - \frac{1}{3}e^t u(-t) - \frac{8}{3}e^{-2t} u(-t)$$

مثال: سیستمی دارای آرایش صفر و قطب مقابل به همراه ناحیه همگرایی $-1 < \text{Re}\{s\} < 1$ می باشد. پاسخ ضربه

سیستم برابر است با:



$$h(t) = [e^{-2t} - e^{-t} + e^t \text{Sint}]u(t) \quad (۱)$$

$$h(t) = [-e^{-2t} + e^{-t} - e^t \text{Sint}]u(-t) \quad (۲)$$

$$h(t) = -e^{-2t}u(t) + [e^{-t} - e^t \text{Sint}]u(-t) \quad (۳)$$

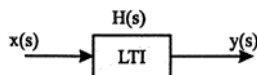
$$h(t) = (e^{-2t} - e^{-t})u(t) - e^t \text{Sint} u(-t) \quad (۴)$$

با توجه به ناحیه همگرایی در می یابیم که عوامل مربوط به قطب های $s = -1$ و $s = -2$ باید به صورت دست راستی بوده و عامل مربوط به قطب مزدوج $s = 1 \pm j$ باید دست چپی باشد و لذا گزینه (۴) می تواند صحیح باشد.

تحلیل سیستم های LTI به کمک تبدیل لاپلاس

از کاربردهای مهم تبدیل لاپلاس تحلیل و توصیف سیستم های LTI است که از خاصیت کانولوشن ناشی می شود.

$$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow Y(s) = X(s)H(s)$$



شکل ۶-۱۶

ناحیه همگرایی $Y(s)$ حداقل اشتراک دو ناحیه همگرایی $X(s)$ با $H(s)$ است.

پاسخ سیستم به ورودی نمایی $e^{s_0 t}$

فرض کنید ورودی یک سیستم LTI به صورت نمایی مختلط به صورت $x(t) = e^{s_0 t}$ باشد. آن گاه پاسخ سیستم برابر است با:

$$y(t) = h(t) * e^{s_0 t} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s_0(t-\tau)} d\tau$$

$$= e^{s_0 t} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s_0 \tau} d\tau = H(s_0) e^{s_0 t}$$

این یک نتیجه جالب و قابل توجه است. به عبارتی $e^{s_0 t}$ تابع ویژه سیستم است و مقدار ویژه متناظر $e^{s_0 t}$ محاسبه $H(s_0)$ به آسانی به دست می آید.

توجه: در صورتی که s_0 خارج از ناحیه همگرایی $H(s)$ قرار گیرد، آن گاه:

$$H(s_0) = \infty \Rightarrow y(t) = \infty, \forall t$$

مثال: در یک سیستم LTI با پاسخ $h(t) = e^{-2t} u(t)$ و تابع تبدیل $H(s)$ ، پاسخ به ورودی های e^{-t} ، e^{-3t} را به

دست آورید:

حل:

$$h(t) = e^{-2t} u(t) \Rightarrow H(s) = \frac{1}{s+2}, \text{Re}\{s\} > -2$$

مقادیر $s = -1, -3$ به ترتیب در خارج و داخل ناحیه همگرایی $H(s)$ قرار دارند، لذا:

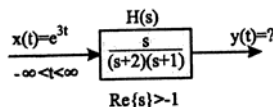
$$H(-1) = 1, H(-3) = \infty, y(t) = H(s_0) e^{s_0 t}$$

بنابراین

$$x_1(t) = e^{-t} \Rightarrow y_1(t) = H(-1) e^{-t} = e^{-t}$$

با دانستن $H(s)$ یا پاسخ سیستم به یک ورودی به صورت e^{s0t} می توانیم پاسخ سیستم به هر ورودی دلخواه $x(t)$ را محاسبه کنیم.

مثال: برای سیستم LTI زیر پاسخ $y(t)$ را به دست آورید.



شکل ۶-۱۷

حل:

$$x(t) = e^{3t} = e^{st} \Big|_{s=3}$$

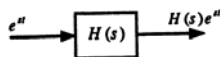
$$y(t) = H(s)e^{st} \Big|_{s=3} = H(3)e^{3t}$$

$$= \frac{3}{(3+2)(3+1)} e^{3t} \Rightarrow y(t) = \frac{3}{20} e^{3t} \quad -\infty < t < \infty$$

توجه: سیگنال e^{st} مشابه سیگنال ضربه وجود خارجی ندارد، اما از پاسخ سیستم به این سیگنال می توان به عنوان یک عامل واسطه جهت محاسبه پاسخ به هر ورودی دلخواه استفاده کرد.

پاسخ سیستم LTI به ورودی سینوسی

پاسخ یک سیستم LTI به ورودی نمایی به صورت $x(t) = e^{st}$ برابر $H(s)e^{st}$ است. با قرار دادن $s = \pm j\omega$ داریم:



شکل ۶-۱۸

$$e^{j\omega t} \rightarrow H(j\omega)e^{j\omega t}$$

$$e^{-j\omega t} \rightarrow H(-j\omega)e^{-j\omega t}$$

$$2\cos\omega t \rightarrow H(j\omega)e^{j\omega t} + H(-j\omega)e^{-j\omega t} = 2\text{Re}[H(j\omega)e^{j\omega t}]$$

با نمایش $H(j\omega)$ به فرم قطبی:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{\angle H(j\omega)}$$

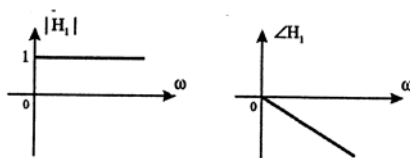
$$\cos\omega t \rightarrow |H(j\omega)| \cos[\omega t + \angle H(j\omega)]$$

$$y(t) = |H(j\omega)| \cos[\omega t + \angle H(j\omega)]$$

البته این نتیجه فقط برای سیستم های پایدار صادق هستند، تابع $|H(j\omega)|$ پاسخ دامنه و $\angle H(j\omega)$ پاسخ فاز می باشد. نمایش این دو مقدار بر حسب ω را پاسخ فرکانسی سیستم (پاسخ طیفی) می نامند. به طور مثال پاسخ فرکانسی یک تاخیر، مشتق گیر و انتگرال گیر در حالت ایده آل در ادامه اشاره شده است.

تأخیر ایده آل T ثانیه

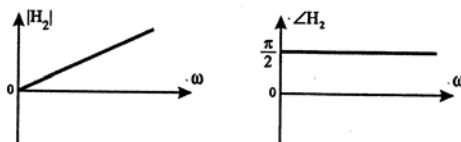
$$H_1(s) = e^{-sT} \Rightarrow H_1(j\omega) = e^{-j\omega T} \Rightarrow |H_1(j\omega)| = 1, \angle H_1(j\omega) = -\omega T$$



شکل ۶-۱۹

مشتق گیری ایده آل

$$H_2(s) = s \Rightarrow H_2(j\omega) = j\omega = \omega e^{j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow |H_2(j\omega)| = \omega, \angle H_2(j\omega) = \frac{\pi}{2}$$

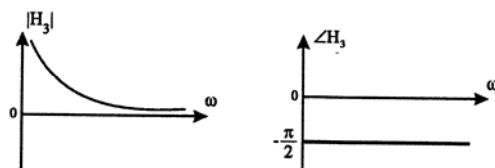


شکل ۶-۲۰

پاسخ دامنه به طور خطی با فرکانس افزایش می یابد و پاسخ فاز برای همه فرکانس ها مقدار ثابت $\frac{\pi}{2}$ است.

انتگرال گیری ایده آل

$$H_3(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow H_3(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow |H_3(j\omega)| = \frac{1}{\omega}, \angle H_3(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$$



شکل ۶-۲۱

پاسخ دامنه به طور معکوس با فرکانس متناسب است و اختلاف فاز نسبت به فرکانس، ثابت $\frac{\pi}{2}$ است.

محاسبه اندازه پاسخ فرکانسی به کمک نمودار صفر و قطب

در تابع تبدیل اگر به جای s ، $j\omega$ جایگزین کنیم، $H(j\omega)$ به دست می آید. بدین طریق می توان خواص حالت دایمی سینوسی را از فرکانس های پایین تا فرکانس های بالا رسم کرد. در صورتی که $H(j\omega)$ را به فرم اندازه و فاز بنویسیم، خواهیم داشت:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| \angle H(j\omega)$$

اطلاعات روی هم مربوط به اندازه و فاز یک تابع تبدیل را برای تمام ω ها، معمولاً پاسخ فرکانسی گویند.

محاسبه اندازه پاسخ فرکانسی

از تمام صفرها و قطب ها تابع تبدیل گویا، به مبدا مختصات وصل می کنیم.

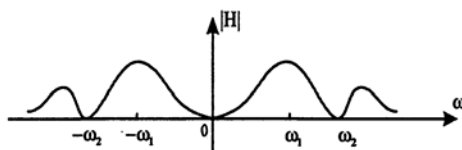
حاصل ضرب بردار حاصل از صفرها تقسیم بر حاصل ضرب بردار قطب ها، مقدار پاسخ فرکانسی به ازای $\omega = 0$ را می دهد. برای همه ω ها، بند (۲) را تکرار می کنیم و اندازه پاسخ فرکانسی را محاسبه می کنیم.

در بحث پاسخ فرکانسی

منحنی $|H(j\omega)|$ همواره تابع زوجی از متغیر حقیقی ω و منحنی $\angle H(j\omega)$ همواره تابع فردی از متغیر حقیقی ω است. در حوالی قطبی که در نزدیکی محور $j\omega$ قرار دارد، انتظار گردیم که اندازه تابع تبدیل ماکزیمم محلی داشته و فاز آن سریعاً تغییر نماید و در صورتی که قطب بر روی محور $j\omega$ باشد، مجانب ایجاد می گردد و منحنی $|H(j\omega)|$ بی نهایت می گردد. در حوالی صفری که در نزدیکی محور $j\omega$ قرار دارد، انتظار داریم که اندازه تابع تبدیل یک مینیمم محلی داشته و فاز آن سریعاً تغییر نماید و در صورتی که صفر بر روی محور $j\omega$ باشد، منحنی $|H(j\omega)|$ صفر می گردد. در قسمتی که خواهیم اندازه تابع تبدیل بزرگتر باشد، تعداد قطب ها را زیاد می کنیم و در جایی که خواهیم اندازه تابع تبدیل کوچکتر باشد، تعداد صفرها را زیاد می کنیم.

مثال: منحنی اندازه تابع تبدیل سیستمی به صورت شکل زیر است، حداقل تعداد قطب ها و صفرهای تابع تبدیل کدام

است؟



(۱) یک صفر و دو قطب

(۲) دو صفر و سه قطب

(۳) سه صفر و چهار قطب

(۴) چهار صفر و پنج قطب

در فرکانس $\omega = 0$ ، $|H(0)| = 0$ ، بنابراین حداقل یک صفر در مبدا قرار دارد.

در فرکانس $\omega = \omega_2$ ، $|H(\pm j\omega_2)| = 0$ ، بنابراین یک صفر مزدوج در فرکانس $\omega = \omega_2$ قرار دارد.

در فرکانس $\omega = \omega_1$ ، اندازه تابع تبدیل یک ماکزیمم محلی دارد که نشان دهنده حداقل یک جفت قطب مزدوج در نزدیکی محور $j\omega$ است.

در فرکانس $\omega = \infty$ ، $|H(0)| = 0$ ، بنابراین تعداد قطب ها از تعداد صفرها بیشتر است. با توضیحات داده شده سیستم فوق حداقل ۳ صفر و ۴ قطب دارد.

تابع تبدیل سیستم های LTI

نسبت تبدیل لاپلاس خروجی به تبدیل لاپلاس ورودی را تابع تبدیل $H(s)$ گویند.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

و معکوس تابع تبدیل، پاسخ ضربه سیستم خواهد بود.

$$\ell[H(s)] = h(t)$$

$H(s)$ به ازای $s = j\omega$ پاسخ فرکانسی سیستم LTI است. بسیاری از خواص سیستم های LTI به مشخصه های تابع تبدیل زیر در صفحه s بستگی دارد.

سیستم LTI علی

همان طور که در فصل دوم بیان شد، یک سیستم LTI وقتی علی است که پاسخ ضربه آن برای $t < 0$ صفر گردد. در این فصل روش دیگری برای تشخیص علی بودن سیستم بیان می کنیم.

در سیستم علی، ROC دسته راستی است یعنی ROC از سمت راست، راست ترین قطب تا $+\infty$ ادامه داشته و اگر تابع تبدیل سیستم گویا باشد، راست نیم صفحه بودن ROC به معنی علی بودن سیستم است. به طور مثال سیستمی با پاسخ ضربه

$$h(t) = e^{-t} u(t)$$

علی است چرا که به ازای $t < 0$ ، $h(t) = 0$ است. از طرفی تابع سیستم برابر است با:

$$H(s) = \frac{1}{s+1} , \text{Re}\{s\} > -1$$

در این حالت تابع سیستم گویاست و ROC آن یک راست نیم صفحه واقع در سمت راست، راست ترین قطب است.

سیستم LTI ضدعلی

سیستمی ضد علی است که پاسخ ضربه آن برای $t > 0$ صفر باشد. در این صورت $h(t)$ دست چپی بوده و ROC تابع سیستم

$H(s)$ آن چپ نیم صفحه است و اگر تابع تبدیل گویا باشد، چپ نیم صفحه بودن ROC به معنی ضدعلی بودن سیستم است.

یک سیستم LTI است اگر و تنها اگر ناحیه همگرایی تابع تبدیل $H(s)$ آن شامل محور $j\omega$ ($\text{Re}\{s\} = j\omega$) باشد و در غیر این صورت سیستم ناپایدار است.

توجه: در بحث های گذشته بیان نمودیم در صورتی که یک سیستم LTI پایدار است که پاسخ ضربه آن مطلقاً انتگرال پذیر باشد، در این صورت تبدیل فوریه پاسخ ضربه $h(t)$ همگراست.

پایداری سیستم LTI علی

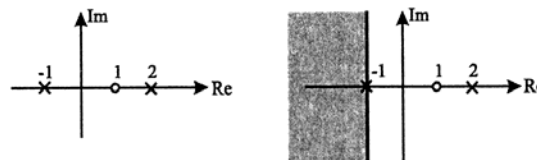
در سیستم های LTI علی با تابع تبدیل گویا، چون سیستم علی است، ROC باید سمت راست راست ترین قطب باشد و برای پایدار ماندن سیستم، می بایست ROC آن شامل محور موهومی $j\omega$ باشد. بنابراین یک سیستم LTI با تابع تبدیل گویا، علی و پایدار است اگر و فقط اگر تمامی قطب های $H(s)$ آن دارای قسمت حقیقی منفی باشند.

لازم به ذکر است که شرط علی توماً با پایداری برای $H(s)$ هیچ محدودیتی برای صفرهای $H(s)$ اعمال نمی کند. به عبارت دیگر صفرهای $H(s)$ می توانند در RHP یعنی سمت راست محور $j\omega$ قرار گیرند. مثال: پاسخ ضربه یک سیستم LTI با تابع تبدیل زیر را به دست آورید.

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{\frac{2}{3}}{s+1} + \frac{\frac{1}{3}}{s-2}, \quad \text{Re}\{s\} < -1$$

حل:

چون ROC مشخص نشده است، پاسخ ضربه را برای ناحیه های همگرایی متفاوت تعیین می کنیم.



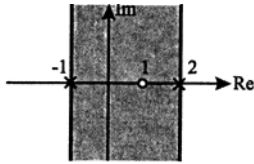
شکل ۶-۲۲

به ازای $\text{Re}\{s\} < -1$

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{\frac{2}{3}}{s+1} + \frac{\frac{1}{3}}{s-2}, \quad \text{Re}\{s\} < -1$$

$$h(t) = -\left(\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}\right)u(-t)$$

در این حالت سیستم غیرعلی است زیرا $h(t)$ دست چپی می باشد. از طرفی سیستم ناپایدار است زیرا ROC تابع تبدیل محور $j\omega$ را شامل نمی شود.



شکل ۶-۲۳

به ازای $-1 < \text{Re}\{s\} < 2$

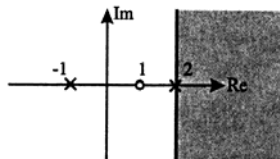
$$H(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s-2}, \quad -1 < \text{Re}\{s\} < 2$$

$$= \left\{ \frac{2}{s+1}, \text{Re}\{s\} > -1 \right\} + \left\{ \frac{1}{s-2}, \text{Re}\{s\} < 2 \right\}$$

پاسخ ضربه

$$h(t) = \frac{2}{3}e^{-t}u(t) - \frac{1}{3}e^{2t}u(-t)$$

در این حالت سیستم غیرعلی و پایدار می باشد.



شکل ۶-۲۴

به ازای $\text{Re}\{s\} > 2$

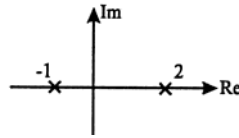
$$H(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s-2}, \quad \text{Re}\{s\} > 2$$

پاسخ ضربه

$$h(t) = \left(\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} \right) u(t)$$

در این حالت سیستم علی و ناپایدار است.

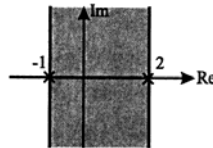
$H(0) = 2$ باشد پاسخ ضربه آن را به دست آورید.



شکل ۶-۲۵

حل:

سیستم غیرعلی ولی پایدار است. لذا ROC تابع تبدیل آن به صورت مقابل خواهد بود:



$$H(s) = \frac{k}{(s+1)(s-2)}, \quad H(0) = 2 \Rightarrow k = -1$$

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)}, \quad -1 < \text{Re}\{s\} < 2$$

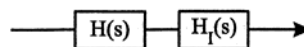
$$= \left\{ \frac{\frac{1}{3}}{s+1}, \text{Re}\{s\} > -1 \right\} + \left\{ \frac{\frac{-1}{3}}{s-2}, \text{Re}\{s\} < 2 \right\}$$

پاسخ ضربه سیستم برابر است با:

$$h(t) = \ell^{-1}[H(s)] = \frac{1}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(-t)$$

وارون سیستم LTI

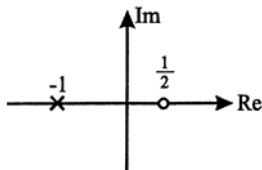
وارون یک سیستم LTI با تابع تبدیل $H(s)$ سیستمی است که وقتی با $H(s)$ سری شود، تابع تبدیل کل برابر واحد شود یا به بیان دیگر پاسخ ضربه کل سیستم ضربه واحد باشد. در صورتی که $H_1(s)$ تابع تبدیل سیستم وارون $H(s)$ باشد، آن گاه:



شکل ۶-۲۶

$$H(s) = H_1(s) = 1 \rightarrow H_1(s) = \overline{H(s)}$$

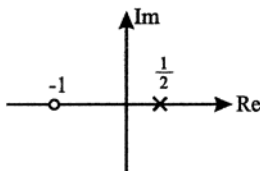
به طور مثال نمودار قطب و صفر $H(s)$ یک سیستم پایدار و علی داده شده است. با توجه به نمودار:



شکل ۶-۲۷

$$H(s) = \frac{k\left(s - \frac{1}{2}\right)}{s+1} \Rightarrow H_1(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{k'(s+1)}{s - \frac{1}{2}}$$

واضح است که اگر بخواهیم $H_1(s)$ تابع تبدیل یک سیستم پایدار باشد، ROC آن باید دست چپی و شامل محور $j\omega$ باشد، نمودار قطب و صفر $H_1(s)$ در شکل مقابل نشان داده شده است.



شکل ۶-۲۸

مثال: معکوس سیستمی با معادله دیفرانسیل زیر را محاسبه کنید.

$$2y'(t) + y(t) = 3x'(t) + x(t)$$

حل:

از طرفین رابطه ورودی-خروجی تبدیل لاپلاس می گیریم:

$$2sY(s) + Y(s) = 3sX(s) + X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{3s+1}{2s+1} \Rightarrow H_1(s) = \frac{2s+1}{3s+1} \Rightarrow 3y'(t) + y(t) = 2x'(t) + x(t)$$

نکته: یک سیستم LTI وارون پذیر است اگر و تنها اگر تبدیل لاپلاس آن صفر محدودی در صفحه s نداشته باشد. به عبارتی اگر تابع تبدیل یک سیستم LTI دارای یک صفر محدود در $s = s_0$ باشد، پاسخ آن به $e^{s_0 t}$ صفر خواهد شد و سیستم وارون ناپذیر می شود زیرا پاسخ به ورودی غیر صفر، صفر شده است.

$$H_1(s) = \frac{1}{H(s)}$$

نواحی همگرایی $H(s)$ و $H_1(s)$ باشد اشتراک (روی هم افتادگی) داشته باشند.

سیستم های مینیمم فاز

از جمله خصوصیات سیستم های مینیمم فاز این است که همه صفرها و قطب های آن LHP یعنی سمت چپ محور $j\omega$ قرار دارند به عبارتی دیگر هم خودشان و هم معکوسشان پایدار و علی هستند.

توصیف سیستم به کمک معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

سیستم های LTI، از جمله سیستم های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت را می توان به خاطر خواص تبدیل لاپلاس در حوزه s و به کمک عملیات جبری توصیف و تحلیل کرد.

معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت زیر را در نظر بگیرید.

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف معادله و استفاده از خواص خطی بودن و مشتق گیری داریم:

$$\left(\sum_{k=0}^N a_k s^k \right) Y(s) = \left(\sum_{k=0}^M b_k s^k \right) X(s)$$

و از آن جا تابع تبدیل برابر است با:

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k}$$

بنابراین تابع تبدیل سیستم توصیف شده با معادله دیفرانسیل همیشه گویاست و صفرهای آن ریشه های معادله:

$$\sum_{k=0}^M b_k s^k = 0$$

و قطب های آن ریشه های معادله زیر است:

$$\sum_{k=0}^N a_k s^k = 0$$

توجه: تنها با توجه به معادلات دیفرانسیل نمی توان ناحیه همگرایی ROC تابع تبدیل سیستم را مشخص کرد. اما با داشتن اطلاعاتی همچون پایداری یا علی بودن سیستم می توان ناحیه همگرایی را مشخص کرد. مثلاً اگر شرط سکون ابتدایی را فرض کنیم، سیستم علی می شود و باید ROC سمت راست راست ترین قطب باشد.

مثال: یک سیستم LTI زمان پیوسته با معادله دیفرانسیل زیر توصیف می گردد:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t)$$

(ب) پاسخ ضربه $h(t)$ را در هر یک از حالات زیر تعیین کنید.

(۱) سیستم پایدار است

(۲) سیستم علی است.

(۳) سیستم نه پایدار و نه علی است

(۴) توأمأ پایدار و علی است

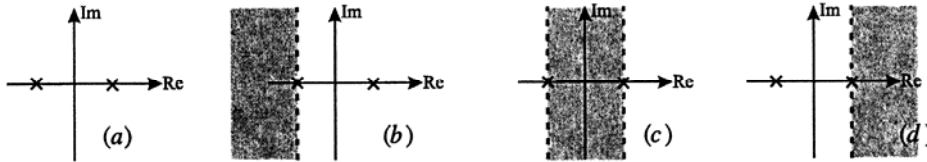
حل:

از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می گیریم:

$$s^2 Y(s) - sY(s) - 2Y(s) = X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 - s - 2} = \frac{1}{(s-2)(s+1)}$$

نمودار صفر و قطب سیستم فوق به همراه سه ROC ممکن:



شکل ۶-۲۹

ب-۱) برای آن که سیستم پایدار باشد باید محور $j\omega$ در ROC تابع تبدیل $H(s)$ قرار گیرد که شکل (c) این ویژگی را دارد.

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)} = \frac{\frac{1}{3}}{s-2} + \frac{-\frac{1}{3}}{s+1}, \quad -1 < \text{Re}\{s\} < 2$$

$$= \left\{ \frac{\frac{1}{3}}{s-2}, \text{Re}\{s\} < 2 \right\} + \left\{ \frac{-\frac{1}{3}}{s+1}, \text{Re}\{s\} > -1 \right\}$$

پاسخ ضربه

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] \Rightarrow h(t) = \frac{-1}{3}[e^{2t}u(-t) + e^{-t}u(t)]$$

ب-۲) برای آن که سیستم علی باشد، باید دسته راستی باشد که این ویژگی در شکل (d) مشهود است.

$$H(s) = \frac{\frac{1}{3}}{s-2} + \frac{-\frac{1}{3}}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} > 2$$

$$h(t) = \frac{1}{3}(e^{-t} + e^{-2t})u(t)$$

ب-۳) برای آن که سیستم نه پایدار و نه علی باشد، باید دسته چپی و محور $j\omega$ را هم شامل نشود که این ویژگی در شکل (b) مشهود است.

$$H(s) = \frac{1}{s-2} + \frac{-1}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} < -1$$

$$= \left\{ \frac{1}{s-2}, \text{Re}\{s\} < 2 \right\} + \left\{ \frac{-1}{s+1}, \text{Re}\{s\} < -1 \right\}$$

پاسخ ضربه

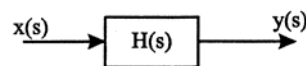
$$h(t) = \frac{-1}{3}(e^{2t} + e^{-t})u(-t)$$

ب-۴) در این حالت سیستم باید دست راستی بوده و محور $j\omega$ را نیز شامل می گردد که با توجه به نمودار صفر و قطب این حالت رخ نمی دهد.

نمایش بلوک دیاگرامی سیستم

عملیات جبری بر روی تابع تبدیل سیستم ابزار مناسبی برای تحلیل اتصال سیستم ها و یافتن نمایش جعبه ای سیستم های LTI توصیف شده با معادلات دیفرانسیل است.

شکل مقابل بلوک دیاگرام یک سیستم با تابع تبدیل $H(s)$ را نشان می دهد.



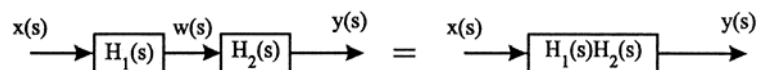
شکل ۶-۳۰

اتصالات اصلی بلوک ها

زیرسیستم ها را می توان به سه ساختار اساسی سری، موازی و فیدبک دار نمایش داد.

الف) اتصال سری (Cascade)

پاسخ ضربه اتصال سری



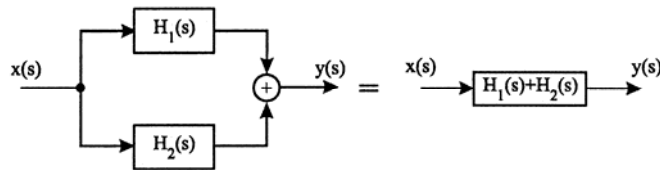
شکل ۶-۳۱

و تابع تبدیل آن

$$H(s) = \frac{w(s)}{X(s)} \cdot \frac{Y(s)}{w(s)} = H_1(s)H_2(s)$$

این نتیجه را می توان به هر تعداد از توابع تبدیل سری تعمیم داد.

(ب) اتصال موازی



شکل ۶-۲۲

پاسخ ضربه سیستم معادل

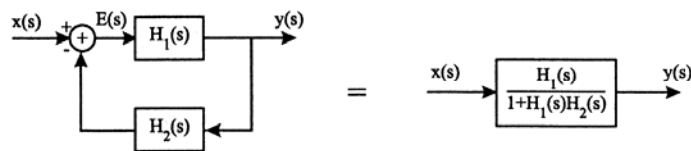
$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

و تابع تبدیل آن

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

این نتیجه را می توان به هر تعداد از توابع تبدیل موازی تعمیم داد.

(ج) اتصال فیدبک دار



شکل ۶-۲۳

تابع تبدیل سیستم

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

طراحی سیستم LTI علی

با بهره گیری از سه ساختار اشاره شده و استفاده از عناصر پایه ضرب کننده عددی، جمع کننده و انتگرال گیر می توان سیستم

های مرتبه بالا را به کمک دیاگرام بلوکی در حوزه s نمایش داد. در حالت کلی سه روش متفاوت برای طراحی سیستم در نظر می گیریم.

ساختار کانونی

ساختار سری

ساختار موازی

می شوند بیشتر تقویت می شوند و اعوجاج شدید در سیگنال مطلوب ایجاد کند و در نهایت باعث ناپایدار شدن سیستم گردد.

ساختار کانونی

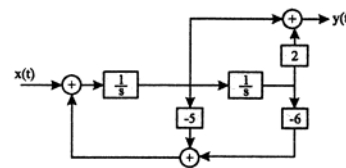
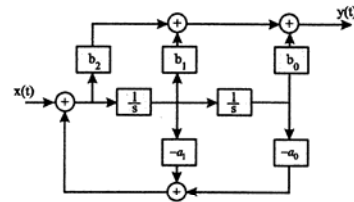
در این نوع نمایش ضرایب ظاهر شده در بلوک دیاگرام همان ضرایب تابع تبدیل یا معادله دیفرانسیل هستند به طور مثال:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

$$H(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 6 y = \frac{dx}{dt} + 2x$$

$$H(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 5s + 6}$$



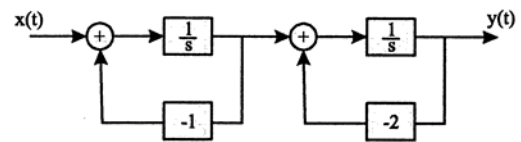
شکل ۶-۳۴

توجه: به روش میسون (در درس کنترل خطی) می توان به راحتی تابع تبدیل یک سیستم LTI علی را به کمک بلوک دیاگرام به دست آورد.

ساختار سری

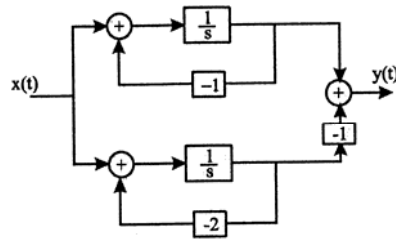
در این حالت تابع تبدیل مرتبه n ام $H(s)$ را می توان به صورت حاصل ضرب n تابع تبدیل مرتبه اول نوشت. نظیر:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \left(\frac{1}{s+1}\right) \left(\frac{1}{s+2}\right)$$



شکل ۶-۳۵

در این حالت تابع تبدیل مرتبه n را می توان به صورت حاصل جمع n تابع تبدیل مرتبه اول نوشت. یعنی به صورت کسرهای جزئی، نظیر:



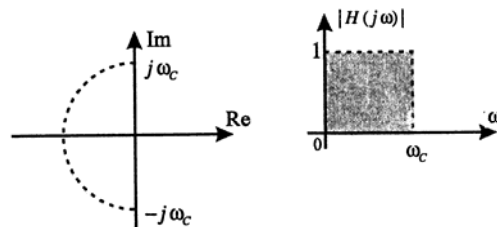
شکل ۶-۳۶

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

مکان هندسی فیلترهای ایده آل

- فیلتر پایین گذر

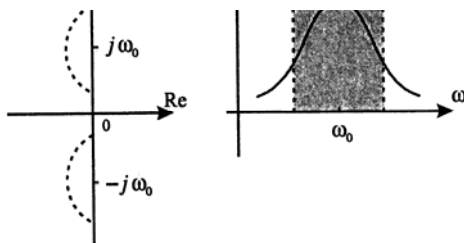
یک فیلتر پایین گذر دارای بیشترین بهره در $\omega = 0$ است. مکان هندسی قطب های فیلتر پایین گذر با بیشترین صاف شدگی در محدوده فرکانس صفر تا ω_c ، نیم دایره ای حول ω_c می باشد.



شکل ۶-۳۷

- فیلتر میان گذر

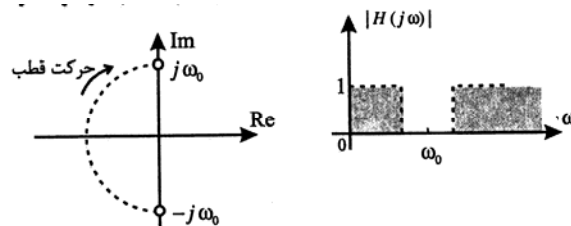
در فیلتر میان گذر، بهره در تمام ناحیه عبور بیشترین مقدار را دارد. مکان هندسی قطب های فیلتر میان گذر نیم دایره ای با مرکزیت $\pm \omega_0$ مقابل محور $j\omega$ است.



شکل ۶-۳۸

- فیلتر میان نگذر

پاسخ دامنه فیلتر ایده آل میان نگذر، مکمل پاسخ دامنه فیلتر ایده آل میان گذر است. هر چه مکان قطب ها به صفرهای واقع در $\pm \omega_0$ نزدیک تر باشد، انتقال بهره از صفر به یک در هر دو طرف ω_0 سریع تر انجام خواهد شد.



شکل ۶-۳۹

- رابطه میان فیلتر میان گذر و فیلتر میان نگذر

در صورتی که $H_{BP}(s)$ و $H_{BS}(s)$ توابع فیلترهای میان گذر و میان نگذر و با فرکانس مرکزی یکسان و پهنای یکسان باشند، در آن صورت:

$$H_{BS}(s) = 1 - H_{BP}(s)$$

یعنی تابع تبدیل فیلتر میان نگذر را می توان از تابع تبدیل فیلتر میان گذر متناظر به دست آورد.

- رابطه میان فیلتر پایین گذر و فیلتر بالاگذر

اگر $H_{LP}(s)$ و $H_{HP}(s)$ به ترتیب توابع تبدیل فیلترهای پایین گذر و بالاگذر با فرکانس قطع و پهنای باند یکسان باشند، در این صورت:

$$H_{HP}(s) = 1 - H_{LP}(s)$$

توجه: در طراحی فیلتر، با تعویض s با $\frac{1}{s}$ در $H_{LP}(s)$ می توان فیلتر پایین گذر را به فیلتر بالاگذر تبدیل کرد.

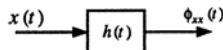
تابع خود همبستگی سیگنال $x(t)$ را در نظر بگیرید:

$$\phi_{xx}(t) = x(t) * x(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) x(t + \tau) d\tau$$

برای سیستم LTI مقابل، به ازای ورودی $x(t)$ و خروجی $\phi_{xx}(t)$ پاسخ ضربه $h(t)$ برابر است با:

$$\phi_{xx}(t) = x(t) * x(-t) = x(t) * h(t) \Rightarrow h(t) = x(-t)$$

با تبدیل لاپلاس گرفتن از تابع خودهمبستگی داریم:



شکل ۴۰-۶

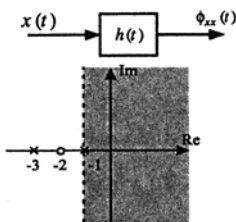
$$\phi_{xx}(t) = \mathcal{L}\{x(t) * x(-t)\} = X(s)X(-s)$$

و با جایگزینی $s = j\omega$ تبدیل فوریه تابع خود همبستگی به دست می آید:

$$\phi_{xx}(j\omega) = X(j\omega)X(-j\omega)$$

در صورتی که ROC و نمودار قطب-صفر $x(t)$ به صورت زیر باشند، آن گاه قطب-صفر به همراه ROC تابع خودهمبستگی

خروجی برابر است با:



شکل ۴۱-۶

$$X(s) = \frac{k(s+2)}{(s+1)(s+3)}$$

$$\phi_{xx}(s) = X(s)X(-s)$$

$$X(s) = \frac{k(s+2)}{(s+1)(s+3)} \times \frac{k(-s+2)}{(-s+1)(-s+3)} = \frac{-k^2(s^2-4)}{(s^2-1)(s^2-9)}$$

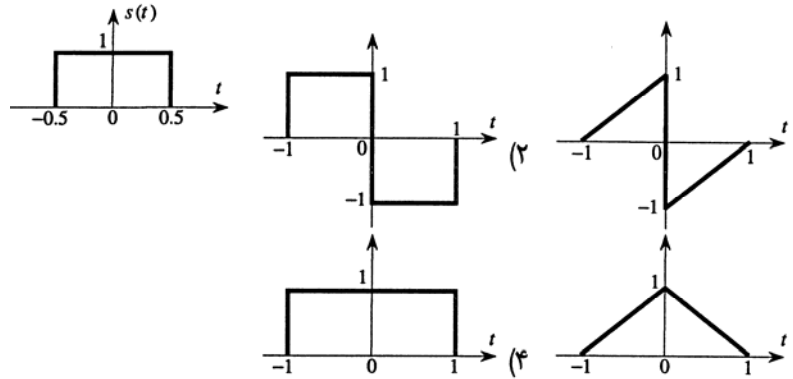
بنابراین تابع خود همبستگی $\phi_{xx}(s)$ دارای صفرهایی در $s = \pm 2$ و قطب های $s = \pm 1$ و $s = \pm 3$ است.

ناحیه همگرایی $\phi_{xx}(s)$ همان اشتراک نواحی همگرایی $X(s)$ و $X(-s)$ خواهد بود.

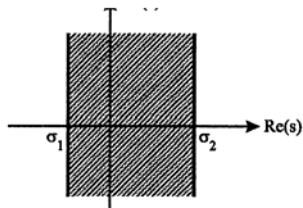
$$ROC_{\phi} = \{\text{Re}\{s\} > -1\} \cap \{\text{Re}\{-s\} > -1\}$$

$$ROC_{\phi} = \{\text{Re}\{s\} > -1\} \cap \{\text{Re}\{s\} < 1\} = -1 < \text{Re}\{s\} < 1$$

سوال ۱: اگر دو سیستم LTI مشابه را که پاسخ پله هر کدام مطابق شکل زیر است با هم کاسکود (سری) کنیم، پاسخ پله سیستم چه خواهد بود؟



سوال ۲: اگر ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)$ به صورت زیر باشد، ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس سیگنال $y(t) = x(t)u(t)$ کدام است؟



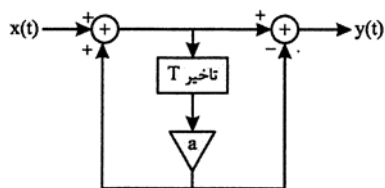
(۱) $\text{Re}(s) > \sigma_1$

(۲) $\text{Re}(s) < \sigma_2$

(۳) $\text{Re}(s) > \sigma_2$

(۴) $\sigma_2 < \text{Re}(s) < \sigma_1$

سوال ۳: در سیستم نشان داده شده اگر $x(t) = 3e^{-2t}u(t)$ باشد، در آن صورت $y(t)$ با کدام گزینه برابر است؟



(۱) صفر

(۲) $3e^{-2t}u(t)$

(۳) $3e^{-2(t-T)}u(t)$

(۴) $e^{-2t}u(t) + 2ae^{-2(t-T)}u(t-T)$

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+a)}$$

به ورودی $\forall t$ ، $x(t) = 1$ برابر با $\forall t$ ، $y(t) = \frac{a}{32}$ می باشد، مقدار a کدام است؟

$a = \pm 4$ (۴) $a = 0$ (۳) $a = 4$ (۲) $a = -4$ (۱)

سوال ۵: اگر پاسخ پله یک سیستم LTI برابر با $s(t) = (1 - e^{-t} - te^{-t})$ باشد و پاسخ خروجی سیستم به

ورودی $x(t)$ برابر $y(t) = (2 - 3e^{-t} + e^{-3t})u(t)$ باشد، $x(t)$ کدام است؟

$(2 + 4e^{-t})u(t)$ (۴) $2 + e^{-3t}$ (۱)

$(2 + 4e^{-3t})u(t)$ (۴) $(1 - e^{-t} - 3te^{-t})u(t)$ (۳)

سوال ۶: پاسخ ضربه یک سیستم در معادله دیفرانسیل زیر صدق می کند:

$$\frac{dh(t)}{dt} + 2h(t) = e^{-4t}u(t) + bu(t)$$

که در آن $u(t)$ پله واحد و b یک ثابت نامعین می باشد. خروجی سیستم به ورودی $x(t)e^{2t}$ به ازای تمام زمان ها

برابر $y(t) = \frac{1}{12}e^{2t}$ می باشد، مقدار b کدام است؟

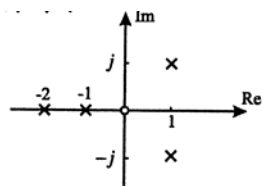
$b = \frac{1}{3}$ (۴) $b = \frac{1}{12}$ (۱)

$b = \frac{-1}{3}$ (۴) $b = \frac{-1}{12}$ (۳)

سوال ۷: اگر $y(t) = x(t) * h(t)$ باشد، آن گاه $x(3t) * h(3t)$ برابر است با:

$\frac{1}{3}y(t)$ (۴) $y(t)$ (۳) $\frac{1}{3}y(3t)$ (۲) $y(3t)$ (۱)

سوال ۸: در سیستم با آرایش صفرها و قطب های نشان داده شده در شکل زیر، به ازای ناحیه همگرایی



$-1 < \text{Re}\{s\} < 1$ پاسخ ضربه سیستم برابر است با:

$h(t) = [e^{-2t} - e^{-t} + e^t \text{Sint}]u(t)$ (۱)

$h(t) = [e^{-2t} + e^{-t} - e^t \text{Sint}]u(-t)$ (۴)

$h(t) = e^{-2t}u(t) + [e^{-t} - e^t \text{Sint}]u(-t)$ (۳)

$h(t) = (e^{-2t} - e^{-t})u(t) - e^t \text{Sint} u(-t)$ (۴)

برای تبدیل لاپلاس سیگنال $x(\alpha t)$ که $0 > \alpha > -1$ باشد، عبارت است از:

$$\text{Real}[s] > \frac{-3}{\alpha} \quad (۲) \qquad \text{Real}[s] > -3\alpha \quad (۱)$$

$$\frac{3}{\alpha} < \text{Real}[s] > \frac{-3}{\alpha} \quad (۴) \qquad \text{Real}[s] < -3\alpha \quad (۳)$$

سوال ۱۰: اگر $z(t) = x(t) * y(t)$ باشد، در آن صورت $x(2t) * y(2t)$ برابر است با:

$$\frac{1}{2} z(2t) \quad (۴) \qquad \frac{1}{4} z(2t) \quad (۳) \qquad 2z(2t) \quad (۲) \qquad z(2t) \quad (۱)$$

سوال ۱۱: پاسخ ضربه سیستم معکوس سیستم توصیف شده با رابطه:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau) d(\tau)$$

را به دست آورید؟

$$\delta(t) + \delta'(t) \quad (۴) \qquad \delta(t) \quad (۳) \qquad u(t) \quad (۲) \qquad \delta'(t) \quad (۱)$$

سوال ۱۲: یک سیستم LTI پایدار توسط معادله دیفرانسیل:

$$4y(t) - \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = x(t)$$

توصیف می شود. پاسخ سیستم به کدام ورودی (های) $x_1(t) = e^{-t}$ ، $x_2(t) = e^{-4t}$ و $x_3(t) = e^{6t}$ کراندار است؟

$$x_1(t) \quad (۱) \qquad \text{فقط } x_1(t) \quad (۱)$$

$$x_2(t) \text{ و } x_1(t) \quad (۲)$$

$$\text{هیچ کدام} \quad (۴) \qquad \text{هر سه} \quad (۳)$$

سوال ۱۳: یک سیستم LTI با معادله دیفرانسیل:

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = x(t)$$

توصیف می شود. پاسخ ضربه آن در صورتی که سیستم پایدار باشد، چگونه خواهد بود؟

$$h(t) = \frac{1}{3} e^{2t} u(t) - \frac{1}{3} e^{-t} u(t) \quad (۱)$$

$$h(t) = -\frac{1}{3} e^{2t} u(-t) + \frac{1}{3} e^{-t} u(-t) \quad (۲)$$

$$h(t) = -\frac{1}{3} e^{2t} u(-t) - \frac{1}{3} e^{-t} u(t) \quad (۳)$$

$$h(t) = \frac{1}{3} e^{2t} u(t) + \frac{1}{3} e^{-t} u(t) \quad (۴)$$

یک از گزینه های زیر صادق است؟

(۱) سیستم فوق یک سیستم علی LTI است.

(۲) سیستم فوق یک سیستم LTI نیست.

(۳) با اطلاعات داده شده نمی توان در مورد LTI بودن این سیستم اظهار نظر کرد.

(۴) سیستم فوق یک فیلتر بالاگذران است.

سوال ۱۵: مقدار نهایی پاسخ زمانی سیستم LTI علی با تابع تبدیل $H(s) = \frac{1}{s-2}$ به ورودی $x(t) = 3u(t)$

چقدر است؟

(۴) بی نهایت

(۳) ۴

(۲) $-\frac{3}{2}$

(۱) صفر

سوال ۱۶: S_1 و S_2 دو سیستم با پاسخ ضربه های به ترتیب $h_1(t) = e^{-t}u(t)$ و $h_2(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$ می باشند. در

این صورت:

(۱) S_1 معکوس پذیر و S_2 معکوس ناپذیر است.

(۲) S_1 و S_2 هر دو معکوس پذیرند.

(۳) S_1 معکوس پذیر و S_2 معکوس ناپذیر است.

(۴) S_1 و S_2 هر دو معکوس ناپذیرند.

سوال ۱۷: یک سیستم خطی دارای پاسخ ایمپالس $h(t) = 0.1e^{-2t}u(t)$ می باشد. پاسخ ایمپالس معکوس

(Inverse System) آن را به دست آورید؟

$$h^{-1}(t) = 10[\delta'(t) + 2\delta(t)] \quad (۲)$$

$$h^{-1}(t) = 5[\delta'(t) + 2\delta(t)] \quad (۱)$$

$$h^{-1}(t) = 5[2\delta'(t) + \delta(t)] \quad (۴)$$

$$h^{-1}(t) = 10[2\delta'(t) + \delta(t)] \quad (۳)$$

$$h_1(t) = 10^{-2t} u(t), \quad h_2(t) = 20^{-t} u(t)$$

این دو سیستم به صورت سری به ترتیب به یک دیگر متصل شده اند. پاسخ ایمپالس معادل مجموعه را به دست آورید؟

$$h(t) = 200[e^{-2t} - e^{-t}] u(t) \quad (2)$$

$$h(t) = 200[e^{-t} - e^{-2t}] u(t) \quad (1)$$

$$h(t) = 200[-e^{-t} - e^{-2t}] u(t) \quad (4)$$

$$h(t) = 200[e^{-t} + e^{-2t}] u(t) \quad (3)$$

سوال ۱۹: یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t) = e^{-t} u(t)$ را در نظر بگیرید. به ازای چه ورودی پاسخ سیستم $e^t u(-t)$ می گردد؟

$$2e^t u(-t) - \delta(t) \quad (2)$$

$$2e^t u(-t) + \delta(t) \quad (1)$$

$$-2e^t u(-t) - \delta(t) \quad (4)$$

$$-2e^t u(-t) + \delta(t) \quad (3)$$

سوال ۲۰: اگر ضابطه بین ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ سیستمی به صورت زیر باشد پاسخ ضربه سیستم وارون آن چه خواهد شد؟

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\alpha)} x(2\alpha) d\alpha$$

$$4\delta'(t) + 2\delta(t) \quad (2)$$

$$4\delta'(t) - 2\delta(t) \quad (1)$$

$$2\delta'(t) - 2\delta(t) \quad (4)$$

$$2\delta'(t) + 2\delta(t) \quad (3)$$

سوال ۲۱: پاسخ یک پله سیستم LTI به صورت:

$$g(t) = 2u(-t) + u(t) - e^t u(-t) + e^{-t} u(t)$$

است.

پاسخ ضربه آن چیست؟

$$3\delta(t) - e^t u(-t) - e^{-t} u(t) \quad (2)$$

$$-\delta(t) - e^{-|t|} \quad (1)$$

$$3\delta(t) - e^t u(-t) + e^{-t} u(t) \quad (4)$$

$$\delta(t) - e^{-|t|} \quad (3)$$

$$X(s) = \frac{e^{-s}}{1 + e^{-2s}}, \operatorname{Re}(s) > 0$$

باشد، مقدار انتگرال زیر برابر با کدام گزینه خواهد بود؟

$$\int_{t=0}^2 x(t) dt$$

+۲ (۴)

-۲ (۳)

+۱ (۲)

-۱ (۱)

(۲-۱)

$$s(t) = u(t + 0.5) - u(t - 0.5)$$

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \delta(t + 0.5) - \delta(t - 0.5) \Rightarrow H(s) = e^{0.5s} - e^{-0.5s}$$

پاسخ ضربه کل سیستم

$$H_t(s) = H(s) \cdot H(s) = e^s - 2 + e^{-s}$$

$$h_t(t) = \delta(t + 1) - 2\delta(t - 1) \Rightarrow s(t) = u(t + 1) - 2u(t) + u(t - 1)$$

(۱-۲)

سیگنال $x(t)$ را به مجموعه ای از دست چپ و راستی تجزیه می کنیم

$$x(t) = x_R(t) + x_L(t) = x(t)u(t) + x(t)u(-t)$$

$$y(t) = x(t)u(t) = [x(t)u(t) + x(t)u(-t)]u(t) = x(t)u(t)$$

بنابراین ناحیه همگرایی $y(t)$ دست راستی خواهد بود یعنی $\text{Re}(s) > \sigma_1$

(۲-۳)

$$H(s) = \frac{1 - ae^{-Ts}}{1 - ae^{-Ts}} = 1$$

$$Y(s) = H(s)X(s) = X(s) \Rightarrow y(t) = x(t) = 3e^{-2t} u(t)$$

(۲-۴)

$$y(t) = H(0)e^{0t} = \frac{a}{32}, \quad H(0) = \frac{1}{2a} \Rightarrow \frac{1}{2a} = \frac{a}{32} \Rightarrow a = \pm 4$$

سیستم فوق در صورتی به سمت مقدار ثابت $\frac{a}{32}$ میل می کند که پایدار باشد و $s = 0$ در ناحیه همگرایی $H(s)$

قرار گیرد. حال آن که سیستم به ازای $a = -4$ ناپایدار است.

(۴-۵)

با کمی دقت در پاسخ پله $s(t)$ و پاسخ $y(t)$ در می یابیم:

ورودی دارای قطب $s = -3$ است.

سیستم یک طرفه است (به علت جمله $u(t)$)

این دو ویژگی تنها در گزینه (۴) مشاهده می شود.

(۲-۶)

از طرفین معادله تبدیل لاپلاس یک طرفه به ازای شرایط اولیه صفر می گیریم:

$$sH(s) + 4H(s) = \frac{1}{1+4} + \frac{1}{s}$$

$$H(s) = \left(\frac{1}{s+4} + \frac{b}{s} \right) / (s+2), \quad H(2) = \frac{1}{12} \Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

(۲-۷)

$$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow Y(s) = X(s)H(s)$$

$$z(s) = \ell[x(3t) * h(3t)] = \frac{1}{3} X\left(\frac{s}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} H\left(\frac{s}{3}\right) = \frac{1}{9} Y\left(\frac{s}{3}\right)$$

$$z(t) = \ell^{-1}[z(s)] = \frac{1}{3} y(3t)$$

(۴-۸)

با توجه به ناحیه همگرایی $H(s)$ نسبت به $\sigma = 1$ چپ گرا و نسبت به $\sigma = -1$ راست گراست. بین گزینه ها تنها گزینه (۴) دارای این دو ویژگی است.

(۳-۹)

اگر

$$\ell[x(s)] = X(s), \quad \alpha < \operatorname{Re}\{s\} < \beta$$

آن گاه

$$\ell[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right), \quad \alpha < \operatorname{Re}\left\{\frac{s}{a}\right\} < \beta$$

به ازای $a < 0$ ناحیه همگرایی برابر است با $a\alpha < \operatorname{Re}\left\{\frac{s}{a}\right\} < a\beta$ بنابراین اگر

$$\ell[x(t)] = X(s), \quad \operatorname{Re}\{s\} > -3$$

(۴-۱۰)

$$Z(s) = \ell[x(2t) * y(2t)] = \frac{1}{4} X\left(\frac{s}{2}\right) Y\left(\frac{s}{2}\right)$$

$$Z(s) = \ell^{-1}[Z(s)] = \frac{1}{2} Z(2t)$$

(۴-۱۱)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)} u(t-\tau) x(\tau) d\tau$$

$$y(t) = \{e^{-t} u(t)\} * x(t) \Rightarrow h(t) = e^{-t} u(t)$$

$$H(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow H_i(s) = \frac{1}{H(s)} = s+1 \Rightarrow n_i(t) = \delta(t) + \delta(t)$$

(۱-۱۲)

$$(4-s^2)Y(s) = X(s) \Rightarrow H(s) = \frac{-1}{s^2-4} = \frac{-1}{(s-2)(s+2)}$$

سیستم پایدار است بنابراین ROC تابع $H(s)$ بین دو قطب $s = \pm 2$ است. با بررسی ورودی تنها $x_1(t)$ دارای قطبی در ROC تابع $H(s)$ است.

(۳-۱۳)

$$(s^2 - s - 2)Y(s) = X(s)$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - s - 2} = \frac{1}{(s+1)(s-2)}$$

سیستم پایدار است بنابراین ROC تابع $H(s)$ بین دو قطب $s = -1$ و $s = 2$ قرار دارد. پس ROC نسبت به $\sigma = 2$ چپ گرا و نسبت به $\sigma = -1$ راست گرا است. این دو ویژگی تنها در گزینه (۳) مشاهده می گردد.

(۲-۱۴)

در سیستم های LTI به ازای ورودی e^{jat} پاسخی به صورت ke^{jat} به دست می آید. لذا سیستم فوق LTI نیست.

(۴-۱۵)

سیستم LTI علی فوق ناپایدار است لذا مقدار نهایی پاسخ زمانی بی نهایت می گردد.

(۳-۱۶)

تابع تبدیل $H_1(s)$ فاقد صفر محدود می باشد لذا معکوس پذیر است.

$$h_1(t) = e^{-t}u(t) \Rightarrow H_1(s) = \frac{1}{s+1}$$

پاسخ فرکانسی $H_2(j\omega)$ برابر است با:

$$H_2(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}$$

سیستم با ضابطه $H_2(j\omega)$ وارون پذیر نمی باشد زیرا ضابطه سیستم $H_2(j\omega)$ به ازای $|\omega| > W$ صفر است.

(۲-۱۷)

$$h(t) = 0.1e^{-2t}u(t) \Rightarrow H(s) = \frac{0.1}{s+2}$$

$$H_i(s) = \frac{1}{H(s)} = 10(s+2) \Rightarrow h_i(t) = 10[\delta'(t) + 2\delta(t)]$$

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) = \frac{200}{(s+1)(s+2)} = \frac{200}{s+1} - \frac{200}{s+2}$$

$$h(t) = 200[e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$$

(۲-۱۹)

$$H(s) = \frac{1}{s+1}, \sigma > -1, Y(s) = \frac{-1}{s-1}, \sigma < 1$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \Rightarrow X(s) = \frac{Y(s)}{H(s)} = \frac{-1}{\frac{1}{s+1}} = -\frac{s+1}{s-1} = -1 - \frac{2}{s-1}$$

$$x(t) = -\delta(t) + 2e^t u(-t)$$

(۳-۲۰)

$$x(t) = \delta(t)$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\alpha)} u(t-\alpha) \delta(2\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\alpha)} u(t-\alpha) \delta(2\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} e^{-t} u(t)$$

$$H(s) = \frac{1}{2s+2} \Rightarrow H_i(s) = \frac{1}{H(s)} = 2s+2 \Rightarrow h_i(t) = 2\delta'(t) + 2\delta(t)$$

(۱-۲۱)

$$G(s) = -\frac{2}{s} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1} = -\frac{1}{s} + \frac{2s}{s^2-1}$$

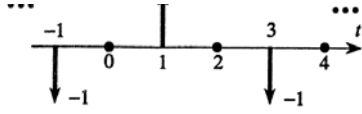
$$H(s) = \frac{1}{s} G(s) = 1 - \frac{2}{s^2-1} \Rightarrow h(t) = -\delta(t) - e^{-|t|}$$

(۲-۲۲)

با توجه به رابطه تبدیل لاپلاس سیگنال متناوب یک طرفه

$$X(s) = \frac{\int_0^T x(t) e^{-Ts} dt}{1 - e^{-Ts}}$$

$$X(s) = \frac{e^{-s}(1 - e^{-2s})}{(1 - e^{-2s})(1 + e^{-2s})} = \frac{e^{-s} - e^{-3s}}{1 - e^{-4s}}, T = 4$$



در طول یک پریود $x_1(t) = \delta(t-1) - \delta(t-3)$ ، $0 < t < 4$ خواهیم داشت:

$$\int_0^2 x_1(t) dt = \int_0^2 \delta(t-1) dt = 1$$

فهرست مطالب

۵۰۱.....	فصل هفتم: تبدیل Z در تحلیل سیگنال های زمان گسسته.....
۵۰۶.....	تعریف صفر، قطب و دیاگرام صفر و قطب.....
۵۱۰.....	رفتار قطب مزدوج مختلط.....
۵۱۲.....	خواص ناحیه همگرایی.....
۵۱۷.....	روش های تبدیل Z معکوس.....
۵۲۳.....	کاربردهای روش سری توانی.....
۵۲۵.....	جابجایی زمانی.....
۵۲۸.....	وارونگی زمانی.....
۵۲۹.....	مزدوج گیری.....
۵۳۰.....	مشتق گیری در حوزه Z
۵۳۳.....	کانولوشن زمانی.....
۵۳۵.....	جمع انباره ای.....
۵۳۸.....	قضیه مقدار نهایی.....
۵۳۹.....	جدول خواص تناوبی تبدیل Z
۵۴۰.....	تحلیل سیستم های LTI به کمک تبدیل Z
۵۴۳.....	سیستم های علی و پایدار.....
۵۵۵.....	سوالات طبقه بندی شده فصل هفتم.....
۵۶۷.....	پاسخنامه سوالات فصل هفتم.....

تبدیل Z معادل تبدیل لاپلاس برای سیستم‌های زمان گسسته است که تحلیل سیستم‌های گسسته و نامتغیر با زمان را آسان می‌کند. از طرفی هر یک از آنها رابطه مشابهی با تبدیل فوریه متناظر با خود دارند. علت تعمیم آن است که تبدیل فوریه برای تمام دنباله‌ها همگرا نمی‌شود و مفید است که تعمیمی از تبدیل فوریه گسسته داشته باشیم که دسته وسیع تری از سیگنال‌ها را در بر بگیرد و مزیت دوم این است که در مسایل تحلیلی، نمادگذاری تبدیل Z غالباً از نمادگذاری تبدیل فوریه راحت‌تر و ساده‌تر می‌باشد. همچنین همان‌گونه که تبدیل لاپلاس معادلات دیفرانسیل را به معادلات جبری تبدیل می‌کند، تبدیل Z هم معادلات تفاضلی را به معادلات جبری تبدیل می‌نماید و بدین صورت تحلیل سیستم‌های زمان گسسته را آسان می‌کند.

تبدیل Z

تبدیل Z دنباله $X[n]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (1)$$

این معادله در حالت کلی سری توانی نامتناهی می‌باشد که در آن Z متغیری مختلط است از لحاظ نمایش، سیگنال و تبدیل Z آن را به صورت زیر نمایش می‌دهند.

$$z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = X(z)$$

$$x[n] = z^{-1}\{X(z)\}$$

تناظر بین دنباله و تبدیل z آن با نمادگذاری زیر مشخص می‌شود.

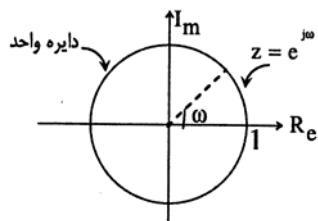
$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$$

با در نظر گرفتن متغیر مختلط Z به صورت قطبی $z = re^{j\omega}$ در رابطه (1) داریم:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{x[n]r^{-n}\}e^{-j\omega n} = F\{x[n]r^{-n}\} \quad (2) \end{aligned}$$

تابع نمایی r^{-n} بسته به این که r از یک کوچکتر یا بزرگتر باشد، یک دنباله افزایشی یا کاهششی است. بنابراین برای همگرایی تبدیل Z باید تبدیل فوریه $x[n]r^{-n}$ همگرا باشد که البته برای هر دنباله مشخص $x[n]$ تبدیل $x[n]r^{-n}$ تنها به ازای r ‌های معینی همگرا می‌شود. در حالت خاص $r=1$ یا $|z|=1$ تبدیل Z به تبدیل فوریه انتقال می‌یابد. یعنی:

$$X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = F\{x[n]\}$$



شکل ۱-۷

دایره واحد در مبحث Z نقشی مشابه محور موهومی صفحه s در مبحث تبدیل لاپلاس دارد.

ناحیه همگرایی

برای هر دنباله مفروض مجموعه مقادیری از Z که به ازای آن تبدیل Z همگرا شود را تجزیه همگرایی گویند. با اعمال این معیار به معادله (۲) برای همگرا شدن تبدیل Z باید داشته باشیم:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty$$

یعنی ROC تبدیل Z سیگنال $x[n]$ مقادیری از Z است که به ازای آن $x[n]r^{-n}$ مطلقاً جمع پذیر باشد.

مثال: تبدیل Z دنباله های $x_1[n] = a^n u[n]$ و $x_2[n] = -a^n u[-n-1]$ را به همراه ناحیه همگرایی آنها تعیین کنید.

حل:

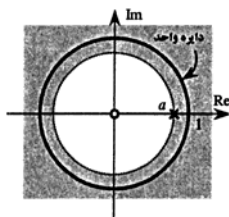
$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

برای همگرایی $X_1(z)$ لازم است که:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty \Rightarrow |az^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$$

با رعایت شرط همگرایی $|z| > |a|$ داریم:

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad |z| > |a|$$



شکل ۲-۷

همگرا می شود که $|a| < 1$ باشد و به عبارت دیگر برای $|a| > 1$ ، ROC شامل دایره واحد نمی شود و لذا تبدیل فوریه دنباله همگرا $a^n u[n]$ نخواهد شد.

توجه: دنباله $a^n u[n]$ یک دنباله نمایی راست گرا است و به ازای $|a| < 1$ دارای تبدیل فوریه است چرا که ROC شامل دایره واحد می شود.

توجه: به ازای $a=1$ ، تبدیل Z پله واحد به دست می آید.

$$a = 1 \Rightarrow x_1[n] = u[n] \Rightarrow X_1(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad |z| > 1$$

توجه: $X_1(z)$ یک تبدیل Z گویاست که یک صفر در مبدا $z=0$ و یک قطب در $z=a$ دارد.

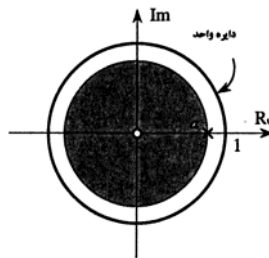
$$\begin{aligned} X_2(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n \end{aligned}$$

برای همگرایی $X_2(z)$ لازم است که:

$$|az^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| < |a|$$

$$X_2(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad |z| < |a|$$

نمودار صفر-قطب و ناحیه همگرایی $X_2(z)$ در شکل زیر نشان داده شده است. توجه کنید که برای $|a| < 1$ دنباله $-a^n u[-n-1]$ به ازای $n \rightarrow \infty$ ، به طور نمایی رشد می نماید و فاقد تبدیل فوریه می گردد.



شکل ۳-۷

توجه: با مقایسه تبدیل $X_1(z)$ و $X_2(z)$ با وجود نمودار صفر-قطب و تابع گویای یکسان، دیده می شود که دنباله ها و در نتیجه جمع نامتناهی متفاوت اند، بنابراین برای مشخص کردن تبدیل Z هم عبارت جبری تبدیل Z و هم ناحیه همگرایی آن لازم است.

توجه: دنباله $-a^n u[-n-1]$ یک دنباله نمایی چپ گراست که به ازای $|a| > 1$ دارای تبدیل فوریه است چرا که ROC شامل دایره واحد می شود.

مثال: تبدیل Z دنباله $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] + (\frac{-1}{3})^n u[-n-1]$ را به همراه ناحیه همگرایی آن تعیین کنید.

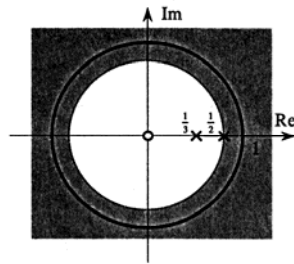
حل:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{-1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{-1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

ناحیه همگرایی $X(z)$: اشتراک نواحی همگرایی دو تابع تبدیل Z می باشد.



شکل ۴-۷

در این بخش تعدادی از زوج تبدیل های Z متداول، معرفی شده اند.

$x[n]$	$X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	تمام Z
$\delta[n-m]$	z^{-m}	تمام Z به جز $z=0$ (اگر $m > 0$) یا به جز $z=\infty$ (اگر $m < 0$)
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ Z > 1$
$nu[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$ Z > 1$
$n^2u[n]$	$\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$	$ Z > 1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ Z < 1$
$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!} a^n u[n]$	$\frac{a^m z^{-m}}{(1-az^{-1})^{m+1}}$	$ z > a $
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
$n^2 a^n u[n]$	$\frac{az^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3}$	$ z > a $
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z < a $
$\text{Cos } \omega_0 n u[n]$	$\frac{1-z^{-1}\text{Cos } \omega_0}{1-2z^{-1}\text{Cos } \omega_0 + z^{-2}}$	$ Z > 1$
$\text{Sin } \omega_0 n u[n]$	$\frac{z^{-1}\text{Sin } \omega_0}{1-2z^{-1}\text{Cos } \omega_0 + z^{-2}}$	$ Z > 1$
$a^n \text{Cos } \omega_0 n u[n]$	$\frac{1-az^{-1}\text{Cos } \omega_0}{1-2az^{-1}\text{Cos } \omega_0 + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $
$a^n \text{Sin } \omega_0 n u[n]$	$\frac{az^{-1}\text{Sin } \omega_0}{1-2az^{-1}\text{Cos } \omega_0 + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $
$\begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{other} \end{cases}$	$\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$ z > 0$
$\frac{-(-a)^n}{n} u[n-1]$	$\text{Log}(1+az^{-1})$	$ z > a $
$\frac{a^{-n}}{n} u[-n-1]$	$\text{Log}(1-a^{-1}z)$	$ z < a $

$$X_1(z) = \frac{z}{(z-2)^3} \xleftrightarrow{z^{-1}} x_1[n] = \frac{n(n-1)}{8} 2^n u[n]$$

$$X_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-4k} \xleftrightarrow{z^{-1}} x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k]$$

تعریف صفر، قطب و دیاگرام صفر و قطب

همانند تبدیل لاپلاس در اغلب مسایل تجزیه و تحلیل، تبدیل z دنباله $h[n]$ به یک کسر گویا از z به صورت:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{k(z+z_1)(z+z_2)\dots(z+z_m)}{(z+p_1)(z+p_2)\dots(z+p_n)} \quad (۶)$$

منجر می گردد که $N(z)$ و $D(z)$ چند جمله ای هایی بر حسب z هستند. مقادیری از z که به ازای آن $N(z)=0$ گردد،

صفرهای $H(z)$ و مقادیری از z که به ازای آن $D(z)=0$ گردد، قطب های $H(z)$ خوانده می شوند.

صفرهای $H(z)$

$$H(z)=0 \Rightarrow N(z)=0 \Rightarrow z = -z_1, -z_2, \dots, -z_m$$

قطب های $H(z)$

$$H(z)=\infty \Rightarrow N(z) \neq 0 \Rightarrow z = -p_1, -p_2, \dots, -p_n$$

در رابطه (۶)، p_1, p_2, \dots, p_n و z_1, z_2, \dots, z_m مقادیری حقیقی و یا مختلط می باشند و با توجه به حقیقی بودن دنباله

$h[n]$ به ازای هر p یا z مختلط مزدوج آنها نیز وجود دارد.

مثال: تبدیل z دنباله $x[n]$ را در نظر بگیرید.

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1 + \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}\right)}$$

دیاگرام صفر و قطب به همراه نواحی همگرایی $X(z)$ را تعیین کنید.

حل:

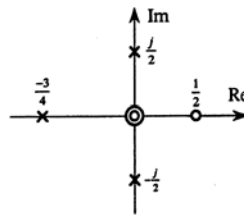
$$X(z) = \frac{z^2(z^2 - \frac{1}{4})}{\left(z^2 + \frac{1}{4}\right)\left(z^2 + \frac{5}{4}z + \frac{3}{8}\right)} = \frac{z^2(z - \frac{1}{2})}{\left(z^2 + \frac{1}{4}\right)\left(z + \frac{3}{4}\right)}$$

$$z^2 \left(z - \frac{1}{2} \right) = 0 \Rightarrow z_{1,2} = 0, z_3 = \frac{1}{2}$$

قطب های $X(z)$

$$\left(z^2 + \frac{1}{4} \right) \left(z + \frac{3}{4} \right) = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \pm j \frac{1}{2}, z_3 = -\frac{3}{4}$$

نمودار صفر و قطب $X(z)$ مطابق شکل زیر به دست می آید.



شکل ۵-۷

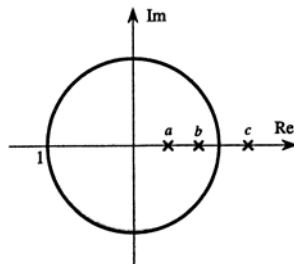
با توجه به مکان قرار گرفتن قطب ها ۳ ناحیه همگرایی وجود دارد:

$$ROC_1 : |z| < \frac{1}{2}$$

$$ROC_2 : \frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{4}$$

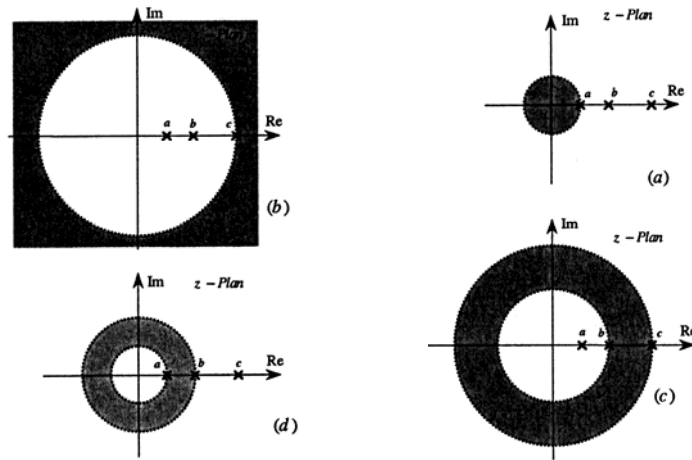
$$ROC_3 : |z| > \frac{3}{4}$$

مثال: دیاگرام صفر و قطب سیگنالی مطابق شکل مقابل است. نواحی همگرایی آن را نمایش دهید.



شکل ۶-۷

چهار ناحیه همگرایی متفاوت با مکان صفر و قطب یکسان:



شکل ۷-۷: (a) یک دنباله چپ‌گرا، شکل (b) یک دنباله راست‌گرا

شکل ۷-۸: (c) یک دنباله دو طرفه، شکل (d) یک دنباله دو طرفه دیگر

محل استقرار قطب و رفتار زمانی سیگنال‌های علی

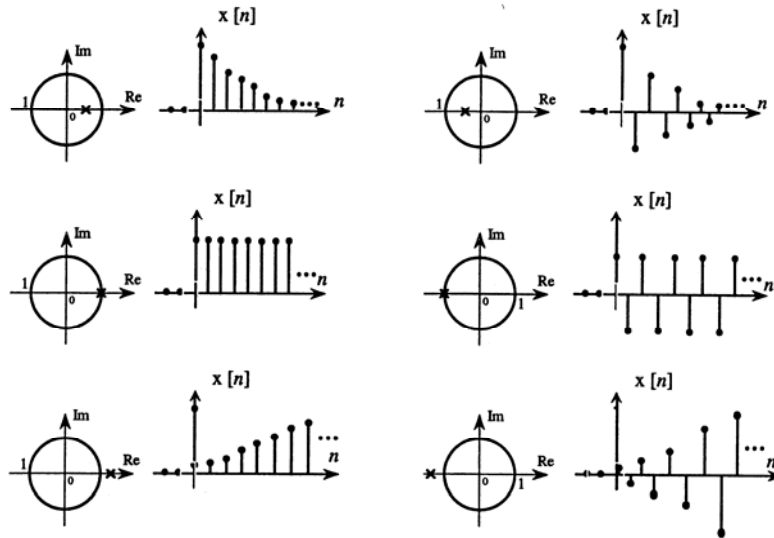
در این بخش رابطه بین محل استقرار قطب یک سیگنال علی با پاسخ زمانی آن مورد ارزیابی قرار گرفته است و همان‌طور که مشاهده خواهید نمود، در سیگنال‌های علی در صورتی که قطب در خارج از دایره واحد قرار گیرد، رفتار زمانی سیگنال رشد افزایشی خواهد داشت.

رفتار قطب ساده

تبدیل Z سیگنال $x[n]$ که دارای یک قطب ساده در $z=a$ و صفر در $z=0$ می‌باشد را در نظر بگیرید.

$$x[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

نمایش می دهند.



شکل ۷-۹

نتایج

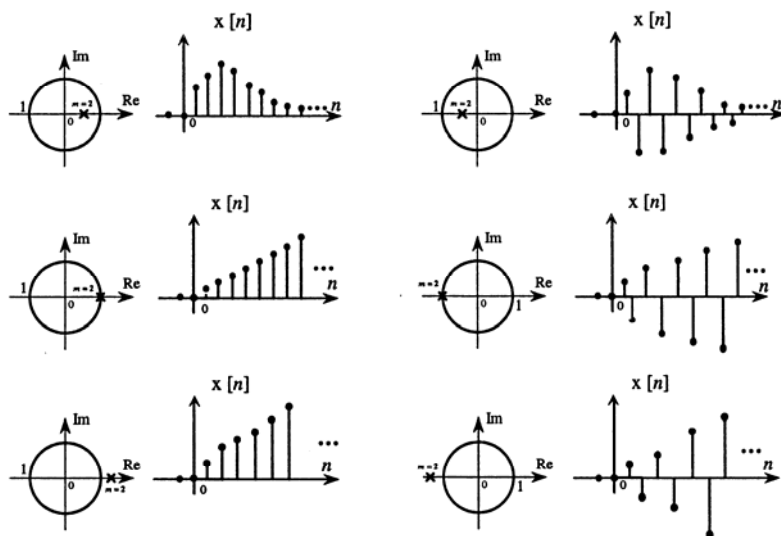
- اگر قطب ساده در داخل دایره واحد قرار گیرد، سیگنال $x[n]$ با افزایش n تنزل پیدا می کند.
- اگر قطب ساده بر روی دایره واحد قرار گیرد، سیگنال $x[n]$ با افزایش n ثابت باقی می ماند.
- اگر قطب ساده در خارج دایره واحد قرار گیرد، سیگنال $x[n]$ با افزایش n رشد افزایشی می یابد.
- اگر قطب ساده و منفی باشد، نتایج عنوان شده به صورت نوسانی رخ خواهند داد.

رفتار قطب مضاعف

تبدیل Z یک سیگنال علی حقیقی با دو قطب حقیقی تکراری ساده را در نظر بگیرید.

$$x[n] = na^n u[n] \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

زمانی سیگنال در اشکال زیر نمایش داده شده است.



شکل ۷-۱۰

همان طور که در اشکال مشاهده می کنید قرار گرفتن قطب مضاعف بر روی دایره واحد و همچنین در خارج دایره واحد باعث ناپایدار شدن سیگنال $x[n]$ می گردد.

رفتار قطب مزدوج مختلط

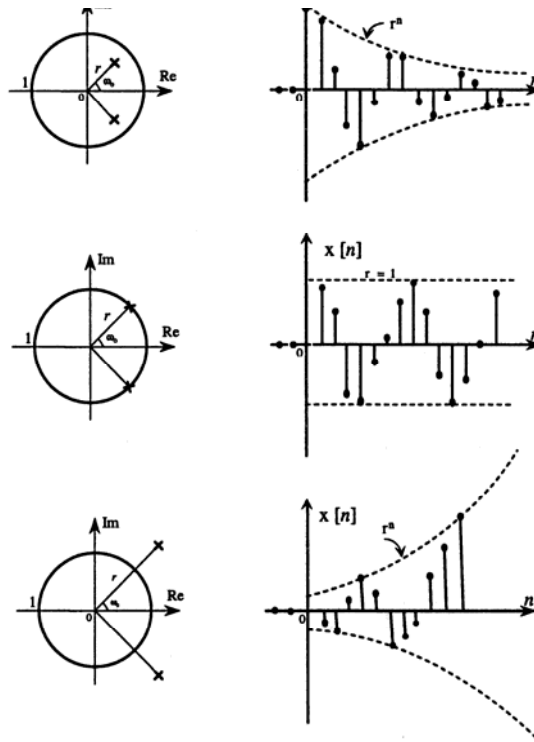
تبدیل Z یک سیگنال علی حقیقی با قطب مزدوج مختلط را در نظر بگیرید:

$$x[n] = (r^n \cos \omega_0 n) u[n] \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1 - r z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2r z^{-1} \cos \omega_0 + r^2 z^{-2}}, \quad |z| > r$$

که در آن $z_{1,2} = r e^{\pm j\omega_0}$ قطب مزدوج مختلط می باشد. مقدار r که همان فاصله قطب تا مبدا است بیان کننده پوش (رشد)

سیگنال سینوسی است و فاز قطب که نسبت به محور حقیقی مثبت اندازه گیری می شود $0 \leq \omega_0 \leq \pi$ می باشد.

مشابه حالت های قبل، اشکال زیر ارتباط بین محل استقرار قطب های مزدوج مختلط یک سیگنال علی را نسبت به دایره واحد با سیگنال زمانی آن نشان می دهند.



شکل ۷-۱۱

توجه کنید که:

اگر $|p| = r < 1$ باشد، سیگنال $x[n]$ سینوسی میرا می گردد.

اگر $|p| = r = 1$ باشد، سیگنال $x[n]$ سینوسی می ماند.

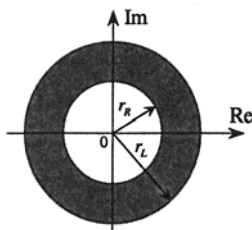
اگر $|p| = r > 1$ باشد، سیگنال $x[n]$ سینوسی نامیرا می گردد.

اگر $|p| = r = 1$ و قطب مضاعف باشد، سیگنال $x[n]$ سینوسی نامیرا می گردد.

در این بخش با فرض این که عبارت جبری تبدیل Z تابعی گویا بوده و $x[n]$ به جز احتمالاً در $n = \pm\infty$ دامنه محدودی داشته باشد، برخی خواص ROC دنباله $x[n]$ مورد بررسی قرار گرفته است:

۱- ناحیه همگرایی $X(z)$ ، حلقه ای از صفحه Z به مرکزیت مبدا است یعنی:

$$0 \leq r_R < |z| < r_L < \infty$$



شکل ۷-۱۲

۲- ROC نمی تواند هیچ قطبی را دربر گیرد. زیرا $X(z)$ در قطب بی نهایت می شود و طبق تعریف همگرا نیست.

۳- اگر دنباله $x[n]$ دست راستی باشد یعنی دنباله ای که برای $N_1 < n < \infty$ غیر صفر است و دایره $|z| = r_0$ در ROC باشد آن گاه تمام مقادیر Z به ازای $|z| > r_0$ نیز در ROC هستند. در این حالت ROC به سمت خارج از بیرونی ترین قطب محدود در $X(z)$ تا $z = \infty$ ادامه می یابد و فرم دنباله های دست راستی به صورت زیر است:

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (۷)$$

که در آن N_1 محدود است و می تواند مثبت یا منفی باشد، به طور مثال دنباله $X(z)$ برای همگرا شدن باید دست راستی باشد.

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-(n-1)} = z \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right) < \infty$$

برای همگرا شدن $X(z)$ باید

$$\left| \frac{1}{2} z^{-1} \right| < 1 \Rightarrow |z| > \frac{1}{2}$$

۴- اگر دنباله $x[n]$ دست چپ باشد یعنی دنباله ای که برای $\infty < n < N_2$ غیر صفر است و دایره $|z| = r_0$ در ROC باشد آن گاه تمام مقادیر Z به ازای $|z| < r_0$ نیز در ROC هستند. در این حالت ROC از درونی ترین قطب غیر صفر به سمت $z=0$ (و شاید شامل خود آن) ادامه می یابد و فرم دنباله های دست چپ به صورت زیر است:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{N_2} x[n]z^{-n} \quad (۸)$$

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n+1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-(n-1)} z^{n+1} = z \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n < \infty$$

برای همگرا شدن $X(z)$ باید

$$|2z| < 1 \Rightarrow |z| < \frac{1}{2}$$

توجه: به ازای $N_2 > 0$ دنباله $X(z)$ شامل توان های مثبت و منفی از Z است لذا $Z=0$ و $Z = \infty$ جز ناحیه همگرایی نیستند و به ازای $N_2 < 0$ دنباله $X(z)$ تنها شامل توان های مثبت از Z است. در این حالت $Z=0$ جز ناحیه همگرایی بوده ولی $Z = \infty$ در ناحیه همگرایی $X(z)$ قرار نمی گیرد.

اگر $x[n]$ دنباله ای دو طرفه باشد و دایره $|z| = r_0$ جز ROC باشد، آن گاه ROC حلقه ای مشتمل بر دایره $|z| = r_0$ است. مثال: تبدیل Z دنباله نمایی دوطرفه $x[n]$ را به همراه ROC آن تعیین کنید.

$$x[n] = a^n u[n] + b^n u[-n-1]$$

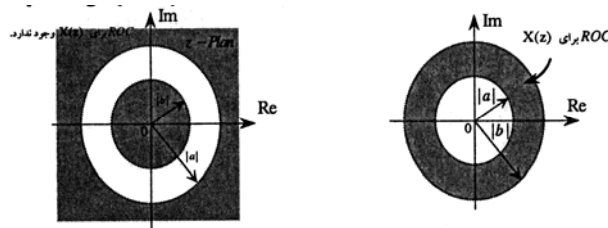
حل:

$$a^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

$$b^n u[-n-1] \xrightarrow{z} \frac{-1}{1-bz^{-1}}, \quad |z| < |b|$$

برای تعیین ROC، $X(z)$ دو حالت ممکن است:

- به ازای $|b| < |a|$ ، در این حالت دو ناحیه همگرایی دارای اشتراک نخواهند بود به عبارت دیگر ما نمی توانیم مقداری برای Z پیدا کنیم به طوری که هر دو دنباله به طور همزمان همگرا گردند.



شکل ۷-۱۳

- به ازای $|b| > |a|$ ، در این حالت در صفحه Z یک حلقه وجود دارد که هر دو سری می توانند به طور همزمان همگرا گردند.

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} - \frac{1}{1-bz^{-1}} = \frac{b-a}{a+b-z-abz^{-1}}, \quad |a| < |z| < |b| \quad (9)$$

توجه: دنباله $x[n] = a^n u[n] + b^n u[-n-1]$ یک دنباله نمایی دو طرفه است.

ROC دنباله $x[n]u[n]$ تعریف شود، برابر است با:

$$x[n] = b^{|n|} = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1], \quad 0 < b < 1$$

$$y[n] = x[n]u[n] = \{b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1]\}u[n] = b^n u[n]$$

و ناحیه همگرایی تبدیل Z آن به فرم راست گرا (Right Sided) خواهد بود.

۶- اگر $x[n]$ طول محدودی داشته باشد یعنی $-\infty < N_1 \leq n \leq N_2 < \infty$ آن گاه ROC تمام صفحه Z به جز احتمالاً $Z = 0$ و $Z = \infty$ است. در این صورت خواهیم داشت:

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n} \quad (10)$$

چند نکته

به ازای $Z \neq 0$ و $Z \neq \infty$ ، تمام جملات این دنباله محدود و $X(z)$ همگراست.

به ازای $N_1 < 0$ و $N_2 > 0$ ، دارای توان های مثبت و منفی Z است و لذا $Z = 0$ و $Z = \infty$ جزو ROC نیستند.

به ازای $N_1 \geq 0$ ، دارای توان های منفی Z است و لذا $Z = \infty$ جزو ROC است.

به ازای $N_2 \leq 0$ ، دارای توان های مثبت Z است و لذا $Z = 0$ جزو ROC است.

مثال: تبدیل Z دنباله های با طول محدود زیر را به دست آورید.

$$x_1[n] = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\} \quad x_4[n] = \delta[n-k], \quad k > 0$$

$$x_2[n] = \left\{ 2, 4, \overset{\downarrow}{5}, 7, 0, 1 \right\} \quad x_5[n] = \delta[n+k], \quad k > 0$$

$$x_3[n] = \delta[n] \quad x_6[n] = \begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & o, w \end{cases}$$

حل:

$$x_1[n] = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\}$$

با توجه به تعریف و فرمول (۱)

$$X_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5}$$

ROC شامل تمام صفحه Z به جز $Z=0$ است.

$$x_2[n] = \left\{ 2, 4, \overset{\downarrow}{5}, 7, 0, 1 \right\}$$

$$X_2(z) = 2z^2 + 4z + 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$$

$$x_3[n] = \delta[n]$$

$$X_3(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = 1$$

ROC شامل تمام صفحه Z و از جمله $Z = 0$ و $Z = \infty$ است.

$$x_4[n] = \delta[n - k], \quad k > 0$$

$$X_4(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - k] z^{-n} = z^{-k}, \quad k > 0$$

ROC شامل تمام صفحه Z به جز $Z = 0$ است.

$$x_5[n] = \delta[n + k], \quad k > 0$$

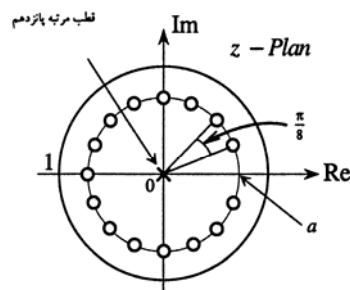
$$X_5(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n + k] z^{-n} = z^k, \quad k > 0$$

ROC شامل تمام صفحه Z به جز $Z = \infty$ است.

$$x_6[n] = \begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{و, } w \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X_6(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n \\ &= \frac{1 - (az^{-1})^N}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z - a} \end{aligned} \quad (11)$$

به ازای $|a|$ محدود، ROC شامل تمام صفحه Z به جز مبدا $Z=0$ است. نمودار صفر-قطب برای این مثال به ازای $N=16$ ، a حقیقی و بین صفر و یک در شکل زیر نشان داده شده است. N ریشه چند جمله ای صورت $X_6(z)$ عبارتند از:



شکل ۷-۱۴

$$z^N - a^N = 0 \Rightarrow z_k = ae^{j\frac{2\pi k}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

به ازای $k=0$ ، قطب $z=a$ با صفر متناظر حذف می گردد.

مثال: $x[n]$ را سیگنالی مطلقاً جمع پذیر با تبدیل Z نویای (z) Δ فرض کنید. می دانیم (z) قطبی در $z = \frac{1}{2}$

دارد. آیا $x[n]$ می تواند،

الف) سیگنالی با عمر محدود داشته باشد؟ (ب) سیگنال دست چپی باشد؟

ج) سیگنالی دست راستی باشد؟ (د) سیگنالی دوطرفه باشد؟

حل:

الف) خیر؛ زیرا طبق تعریف اگر $x[n]$ سیگنالی با عمر محدود باشد، ROC آن تمام صفحه Z به جز احتمالاً $Z = 0$ و

$Z = \infty$ خواهد بود، در صورتی که دانیم $X(z)$ دارای قطبی در $z = \frac{1}{2}$ است.

ب) خیر؛ زیرا اگر $x[n]$ دست چپی باشد، ROC آن دایره ای به شعاع $r = |z| < \frac{1}{2}$ است که شامل دایره واحد نمی باشد. حال

آن که $x[n]$ سیگنالی مطلقاً جمع پذیر است و باید دایره واحد را در بر گیرد.

ج) بله؛ زیرا با توجه به ویژگی های داده شده دنباله $x[n]$ می تواند دست راستی باشد. چرا که $X(z)$ قطبی در خارج دایره

واحد ندارد لذا ROC تبدیل Z آن $|z| > \frac{1}{2}$ بوده و تا بی نهایت گسترش می یابد.

د) $X(z)$ با فرض این که قطبی در خارج دایره واحد داشته باشد، می تواند سیگنالی دو طرفه گردد که در این صورت دیگر دست راستی نخواهد بود.

۷- اگر تبدیل Z دنباله $x[n]$ به صورت تابعی گویا از Z باشد، آن گاه ROC به قطب یا بی نهایت محدود می شود.

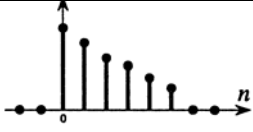
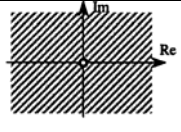
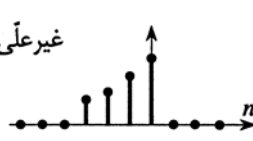
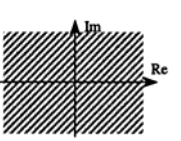
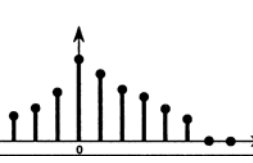
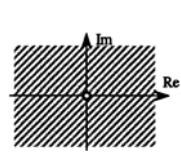
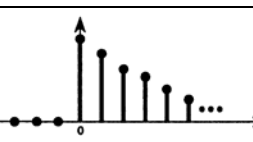
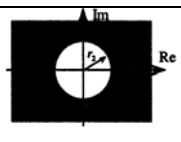
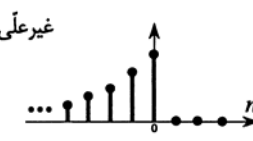
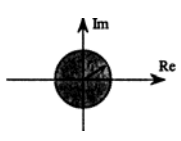
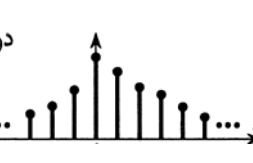
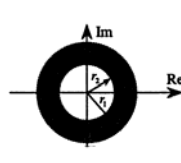
۸- با فرض این که تبدیل Z دنباله $x[n]$ گویا باشد، اگر دنباله $x[n]$ علی باشد، یعنی دست راستی بوده و در $n < 0$ برابر صفر باشد، آن گاه $Z = \infty$ در ROC قرار می گیرد.

۹- با فرض این که تبدیل Z دنباله $x[n]$ گویا باشد، اگر دنباله $x[n]$ غیرعلی باشد، یعنی دست چپی بوده و در $n > 0$ برابر صفر باشد، آن گاه $Z = 0$ در ROC قرار می گیرد.

توجه: همان طور که ملاحظه می کنید ROC یک سیگنال بستگی دارد به:

طول دنباله (محدود یا نامحدود)

و این که آن علی، غیر علی یا دوطرفه باشد.

سیگنال	ROC	دنباله های با طول محدود
<p>علی</p> 		<p>شامل صفحه Z به جز $Z=0$</p>
<p>غیرعلی</p> 		<p>شامل صفحه Z به جز $Z = \infty$</p>
<p>دوطرفه</p> 		<p>شامل صفحه Z به جز $Z = \infty$ و $Z=0$</p>
دنباله های با طول نامحدود		
<p>علی</p> 		<p>$Z > r_2$</p>
<p>غیرعلی</p> 		<p>$Z < r_1$</p>
<p>دوطرفه</p> 		<p>$r_2 < Z < r_1$</p>

تبدیل Z معکوس

از جمله ویژگی های مهم تبدیل Z، تحلیل سیستم های خطی زمان گسسته است که غالباً این تحلیل گرفتن تبدیل Z از دنباله ها و بعد مقداری پردازش بر روی سیگنال و در نهایت یافتن تبدیل Z معکوس می باشد.

روش های تبدیل Z معکوس

۱- روش انتگرال گیری: با بهره گیری از معادله (۲) و مقداری محاسبات بر روی آن خواهیم داشت:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz \quad (12)$$

نماد \oint بر روی انتگرال نشان می دهد که انتگرال باید در روی مسیر دایروی به شعاع r و مرکز مبدا در جهت پادساعتگرد و در ناحیه همگرایی $X(z)$ حساب شود. اگرچه رابطه (۱۲) نحوه تعیین دنباله $x[n]$ را به کمک $X(z)$ نشان می دهد. اما عملاً

۲-روش وارسی: در این روش غیر رسمی با بهره گیری از جدول تبدیل Z دنباله ها، سعی می کنیم تبدیل Z داده شده را به صورت جمعی از جملاتی که معکوس هر کدام در جدول داده شده است، بیان کنیم و سپس در صورت امکان تبدیل معکوس متناظر با هر جمله را بنویسیم.

مثال: تبدیل Z معکوس تابع $X(z)$ را به دست آورید.

$$X(z) = \frac{1}{1024} \times \frac{1024 z^{-10}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}, \quad |z| > 0$$

حل:

با توجه به این که ROC تابع $X(z)$ تمام صفحه Z به جز مبدا است، لذا دنباله $x[n]$ سیگنالی با عمر محدود می باشد.

$$X(z) = \frac{1}{1024} \times \frac{1024 z^{-10}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} = \frac{1 - (\frac{1}{2} z^{-1})^{10}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}, \quad |z| > 0$$

با توجه به فرمول جمع محدود:

$$X(z) = \sum_{n=0}^9 \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n \Rightarrow x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \leq n \leq 9 \\ 0 & o, w \end{cases}$$

۳- روش بسط گیری جزئی: فرض کنید $X(z)$ نسبت دو پند جمله ای از z^{-1} و در حالتی که $N > M$ باشد.

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}, \quad N > M \quad (13)$$

در این حالت $N - M$ صفر در $Z = 0$ وجود خواهند داشت. برای به دست آوردن بسط به کسرهای جزئی بهتر است مخرج کسر $X(z)$ به صورت حاصلضرب نوشته شود.

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})}, \quad N > M \quad (14)$$

در رابطه فوق p_k های قطب غیر صفر $X(z)$ می باشند. در حالتی که تمام قطب ها از مرتبه اول باشند، آن گاه:

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots + \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \dots + \frac{A_N}{1 - p_N z^{-1}} \quad (15)$$

که در آن ضرایب A_1, A_2, \dots, A_N از رابطه زیر به دست می آورند.

$$A_k = (1 - p_k z^{-1}) X(z) \Big|_{z=p_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (16)$$

$$X_1(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 2a^{-1})}$$

$$X_2(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5a^{-2}}$$

حل:

$$X_1(z) = \frac{A_1}{1 - z^{-1}} + \frac{A_2}{1 + 2z^{-1}}$$

$$A_1(z) = (1 - z^{-1})X_1(z) \Big|_{z=1} = \frac{2}{9}, \quad A_2(z) = (1 + 2z^{-1})X_1(z) \Big|_{z=-2} = \frac{7}{9}$$

$$X_1(z) = \frac{\frac{2}{9}}{1 - z^{-1}} + \frac{\frac{7}{9}}{1 + 2z^{-1}}$$

قطب های $X_2(z)$ عبارتند از: $p_{1,2} = \frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}$

$$X_2(z) = \frac{A_1}{1 - \frac{1}{2}(1+j)z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - \frac{1}{2}(1-j)z^{-1}}$$

$$A_1(z) = [1 - \frac{1}{2}(1+j)z^{-1}]X_2(z) \Big|_{z=\frac{1}{2}(1+j)} = \frac{1}{2}(1-j3), \quad A_2 = A_1^* = \frac{1}{2}(1+3j)$$

اگر $X(z)$ قطبی با تکرار ℓ در $z = p_1$ داشته باشد و تمامی قطب های دیگر مرتبه اول باشند آن گاه به ازای $k \neq i$ خواهیم داشت:

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^{\ell} \frac{d_m}{(1 - p_k z^{-1})^m} \quad (17)$$

ضرایب A_k همانند قبل از رابطه (۱۶) و ضرایب $d_1, d_2, \dots, d_{\ell}$ از معادله زیر به دست می آیند.

$$d_m = \frac{1}{(\ell - m)!(-p_i)^{\ell - m}} \left\{ \frac{d^{\ell - m}}{d \omega^{\ell - m}} [(1 - p_i \omega)^{\ell} X(\omega^{-1})] \right\}_{\omega = p_i^{-1}} \quad (18)$$

$$d_1 = \frac{-1}{p} \left\{ \frac{d}{d\omega} [(1 - p_i \omega)^2 X(\omega^{-1})] \right\}_{\omega=p^{-1}} \quad (19)$$

البته خیلی اوقات با یک عدد گذاری برای z^{-1} می توانیم مقداری d_1 را محاسبه کنیم و از روابط فوق اجتناب کنیم. معادله (۱۷) عمومی ترین فرم بسط به کسرهای جزئی برای یک تبدیل Z گویا بر حسب z^{-1} و به ازای $N > M$ و برای p_i به عنوان یک قطب مرتبه l ام را نشان می دهد.

توجه: در صورتی که $M \geq N$ باشد، آن گاه کسر گویا (۱۳) را به صورت زیر تبدیل می کنیم:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = C_0 + X_1 z^{-1} + \dots + C_{M-N} z^{-(M-N)} + \frac{N_1(z)}{D(z)} \quad (20)$$

در این حالت جمله $\sum_{r=0}^{M-N} c_r z^{-r}$ به معادلات (۱۴) و (۱۷) اضافه می گردد و جملات $c_r z^{-r}$ متناظر با دنباله های ضربه انتقال یافته و مقیاس داده شده است. یعنی:

$$c_r \delta[n-r] \xleftrightarrow{z} c_r z^{-r} \quad (21)$$

ضرایب C_r را می توان از تقسیمات متوالی صورت بر مخرج و خاتمه عملیات تقسیم در زمانی که باقیمانده درجه کمتری از مخرج داشته باشد، به دست می آید. نظیر:

$$X(z) = \frac{1 + 3z^{-1} + \frac{11}{6}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} = 1 + 2z^{-1} + \frac{\frac{1}{6}z^{-1}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

چند تبدیل Z معکوس مفید

(۲۲) و (۲۳)

$$\frac{1}{1 - az^{-1}} \xleftrightarrow{z^{-1}} \begin{cases} a^n u[n] & , |z| > |a| \\ -a^n u[-n-1] & , |z| < |a| \end{cases}$$

(۲۳) و (۲۴)

$$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} \xleftrightarrow{z^{-1}} \begin{cases} na^n u[n] & , |z| > |a| \\ -na^n u[-n-1] & , |z| < |a| \end{cases}$$

(۲۶)

$$\left(\frac{A_k}{1 - az^{-1}} + \frac{A_k^*}{1 - a^* z^{-1}} \right) \xleftrightarrow{z^{-1}} \begin{cases} na^n u[n] & , |z| > |a| \\ -na^n u[-n-1] & , |z| < |a| \end{cases}$$

علی $x[n]$ برابر است با:

$$x[n] = (A_1 p_1^n + A_2 p_2^n + \dots + A_k p_k^n + \dots + A_N p_N^n) u[n], \quad |z| > |a| = r$$

ضمناً

$$p_{\max} = \max\{|p_1|, |p_2|, \dots, |p_N|\}$$

مثال: از توابع زیر تبدیل Z معکوس بگیرید.

$$X_1(z) = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$X_2(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}, \quad |z| > 1$$

$$X_3(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}, \quad ,$$

$x[n]$ علی

حل:

(*)

$$X_1(z) = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{A_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{d_2}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{d_2}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})^2}$$

با توجه به فرمول (۱۶) جهت تعیین ضرایب A_1 و d_2 :

$$A_k = (1 - \frac{1}{2}z^{-1}) X_1(z) \Big|_{z=\frac{1}{2}} = 8, \quad d_2 = (1 - \frac{1}{4}z^{-1})^2 X_1(z) \Big|_{z=\frac{1}{4}} = -2$$

با توجه به فرمول (۱۹) جهت تعیین ضریب d_1 :

$$d_1 = \frac{-1}{(\frac{1}{4})} \left\{ \frac{d}{d\omega} \left[(1 - \frac{1}{4}\omega)^2 X_1(\omega^{-1}) \right] \right\}_{\omega=4} = -4 \frac{d}{d\omega} \left[\frac{2}{1 - \frac{1}{2}\omega} \right]_{\omega=4} = -4$$

روش دوم تعیین d_1 :

به ازای $A_1 = 8$ و $d_2 = -2$ در معادله (*) مقدار $z^{-1} = 0$ قرار می دهیم و به راحتی مقدار $d_1 = -4$ به دست می آید.

$$X_1(z) = \frac{8}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{4}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{2}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})^2}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$x_1[n] = \left\{ 8\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n \right\} u[n]$$

ضریب C_0 از تقسیمات متوالی صورت بر مخرج به دست می آید:

$$X_2(z) = 2 + \frac{-1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})} = 2 + G(z)$$

$$A_1 = \left. \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)G(z) \right|_{z=\frac{1}{2}} = -9, \quad A_2 = \left. \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)G(z) \right|_{z=1} = 8$$

$$X_2(z) = 2 - \frac{9}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{8}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1 \Rightarrow x_2[n] = 2\delta[n] - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 8u[n]$$

$$X_3(z) = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}}$$

با توجه به نتایج مثال قبلی:

$$\left. \begin{aligned} p_1 = p_2^* = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2} \Rightarrow A_1 = A_2^* = \frac{1}{2} - j\frac{3}{2} \\ A_1 = \frac{\sqrt{10}}{2} e^{-j71.57}, \quad p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{4}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_3[n] = \sqrt{10} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \cos\left(\frac{\pi n}{4} - 71.57^\circ\right) u[n]$$

۴- روش بسط به سری های توالی: اساس تبدیل Z یک سری لورن می باشد که در آن مقادیر دنباله $x[n]$ ضرایب z^{-n} می

باشند یعنی:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= \dots + x[-2]z^2 + x[-1]z + x[0] + x[n]z^{-2} + \dots \end{aligned} \quad (۲۷)$$

بنابراین برای تعیین هر مقدار به خصوص از دنباله های $x[n]$ کفایت ضریب توان مناسب z^{-1} را بیابیم.

تبدیل Z معکوس برای دنباله های با طول محدود

تبدیل Z معکوس برای توابعی که دارای تبدیل Z غیر گویا هستند.

سری های توالی مفید

$$\frac{1}{1-az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \dots \quad |z| > |a|$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n \Rightarrow x[n] = a^n u[n]$$

$$\frac{1}{1-a^{-1}z} = -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - \dots \quad |z| < |a|$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1}z)^n \Rightarrow x[n] = -a^n u[-n-1]$$

$$\text{Log}(1+az^{-1}) = az^{-1} - \frac{a^2z^{-2}}{2} + \frac{a^3z^{-3}}{3} - \dots, \quad |z| > |a|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^{n+1} (az^{-1})^n}{n} \Rightarrow x[n] = \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n} u[n-1]$$

$$\text{Log}(1-a^{-1}z) = -z^{-1}z - \frac{(a^{-1}z)^2}{2} - \frac{(a^{-1}z)^3}{3} - \dots, \quad |z| < |a|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a^{-1}z)^n}{n} \Rightarrow x[n] = \frac{a^{-n}}{n} u[-n-1]$$

خواص تبدیل Z

بسیاری از خواص تبدیل Z در مطالعه سیگنال ها و سیستم های زمان گسسته مفید می باشند به طوری که از این خواص می توان در تکنیک های به دست آوردن تبدیل Z معکوس و همچنین در تبدیل معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت به معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت به معادلات جبری بر حسب متغیر Z استفاده نمود. زوج های تبدیل Z سیگنال های زیر را در نظر بگیرید.

$$x_1[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z), \quad RLC : R_1$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_2(z), \quad RLC : R_2$$

خطی بودن

خاصیت خطی بودن بیان می کند که:

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{z} aX_1(z) + bX_2(z), \quad ROC: \min\{R_1 \cap R_2\} \quad (28)$$

می تواند بزرگتر شود. نظیر سیگنال

$$x[n] = a^n u[n] - a^n u[n - N]$$

که تک تک جملات $x[n]$ دارای طول نامحدود می باشند و ROC هر کدام $|z| > |a|$ است اما طول دنباله $x[n]$ محدود بوده و ROC آن تمام صفحه Z به جز در $Z = 0$ گسترش می یابد.

مثال: تبدیل Z سیگنال های زیر را به دست آورید.

$$x_1[n] = 3\delta[n+1] + 6\delta[n] + 6\delta[n-3] - \delta[n-4]$$

$$x_2[n] = \cos \omega_0 n u[n]$$

$$x_3[n] = \sin \omega_0 n u[n]$$

حل:

$$x_1[n] = 3\delta[n+1] + 6\delta[n] + 6\delta[n-3] - \delta[n-4]$$

$$X_1(z) = 3z\{\delta[n+1]\} + 2z\{\delta[n]\} + 6z\{\delta[n-3]\} - z\{\delta[n-4]\}$$

$$X_1(z) = 3z + 2 + 6z^{-3} - z^{-4}$$

ناحیه همگرایی $X_1(z)$ تمام صفحه Z به جز $Z = 0$ و $Z = \infty$ است. ضمناً $x_1[n]$ را می توان به صورت زیر نیز نمایش داد.

$$x_1[n] = \{3, 2, 0, 6, -1\}$$

$$x_2[n] = \cos \omega_0 n u[n] = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 n} u[n] + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 n} u[n]$$

$$X_2[z] = \frac{1}{2} z \{e^{j\omega_0 n} u[n]\} + \frac{1}{2} z \{e^{-j\omega_0 n} u[n]\}$$

$$e^{j\omega_0 n} u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{e^{-j\omega_0} z^{-1}}, \text{ ROC: } |z| > 1$$

$$e^{-j\omega_0 n} u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}}, \text{ ROC: } |z| > 1$$

از خاصیت خطی بودن نتیجه می شود که:

$$X_2(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}} \right], \text{ ROC: } |z| > 1$$

بعد از مقداری محاسبات ساده جبری:

$$\cos \omega_0 n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0 n}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 n + z^{-2}}, \text{ ROC: } |z| > 1$$

$$x_3[n] = \sin \omega_0 n u[n] = \frac{1}{2j} \{ e^{j\omega_0 n} u[n] - e^{-j\omega_0 n} u[n] \}$$

$$X_3(z) = \frac{1}{j2} \left(\frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}} \right), \text{ ROC: } |z| > 1$$

$$\sin \omega_0 n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{z^{-1} \sin \omega_0 n}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 n + z^{-2}}, \text{ ROC: } |z| > 1$$

جابجایی زمانی

اگر

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z), \text{ ROC: } R_x$$

آن گاه

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{z} z^{-n_0} X(z)$$

(۲۹)

اثبات:

تبدیل Z سیگنال $y[n] = x[n - n_0]$ عبارت است از:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n - n_0] z^{-n}$$

با تغییر متغیر $m = n - n_0$ خواهیم داشت:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-(m+n_0)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-m} = z^{-n_0} X(z)$$

عامل z^{-n_0} می تواند تعداد قطب ها را در $Z = 0$ یا در $Z = \infty$ تغییر دهد. لذا ناحیه همگرایی $y[n]$ همان R_x است به جز حذف یا اضافه شدن احتمال $Z = 0$ و $Z = \infty$ یعنی:

$$\text{ROC: } R_x \pm \{z = 0, \infty\}$$

مثال: فرض کنید $x[n] = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\}$ باشد، آن گاه تبدیل Z سیگنال های زیر را به دست آورید.

$$x_1[n] = x[n + 2], \quad x_2[n] = x[n - 2]$$

حل:

$$X_1(z) = z^2 X(z) = z^2 + 2z + 5 + 7z^{-1} + z^{-1}$$

ROC_{x_1} شامل تمام صفحه Z به جز $Z = 0$ و $Z = \infty$ می باشد.

$$X_2(z) = z^{-2} X(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 5z^{-4} + 7z^{-5} + z^{-7}$$

ROC_{x_2} همانند ROC_{x_1} شامل تمام صفحه Z به جز $Z = 0$ می باشد.

$$X_1(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{4}}, \quad |z| > \frac{1}{4}$$

$$X_2(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}, \quad |z| < \frac{1}{2}$$



حل:

$$X_1(z) = z^{-1} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \right), \quad |z| > \frac{1}{4}$$

عامل z^{-1} متناظر با انتقال زمانی دنباله $(\frac{1}{4})^n u[n]$ به اندازه یک نمونه به راست است.

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1]$$

و برای حالت بعد:

$$X_2(z) = \frac{3z \left(\frac{1}{2}\right) z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}, \quad ROC: |z| < \frac{1}{2} \Rightarrow x_2[n] = -3(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[-(n+1)-1]$$

مثال: تبدیل Z سیگنال $x[n]$ را به دست آورید.

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{و, } n < 0 \text{ و } n \geq N \end{cases}$$

حل: روش اول

$$x[n] = u[n] - u[n-N]$$

$$X(z) = z\{u[n]\} - z\{u[n-N]\} = (1 - z^{-N}) z\{u[n]\}$$

$$= \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

روش دوم:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = 1 + z^{-1} + \dots + z^{-(N-1)} = \begin{cases} N & z = 1 \\ \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} & z \neq 1 \end{cases}$$

تغییر مقیاس در حوزه Z (ضرب نمایی)

اگر

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \quad , \quad ROC : r_1 < |z| < r_2$$

آن گاه به ازای عدد مختلط z_0 داریم:

$$z_0^n x[n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad , \quad ROC : |z_0| r_1 < |z| < |z_0| r_2 \quad (30)$$

اثبات:

$$z \left\{ z_0^n x[n] \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_0^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\frac{z}{z_0}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

با فرض این که

$$ROC : r_1 < |z| < r_2$$

آن گاه ناحیه همگرایی $X\left(\frac{z}{z_0}\right)$ عبارت است از:

$$r_1 < \left| \frac{z}{z_0} \right| < r_2 \Rightarrow |z_0| r_1 < |z| < |z_0| r_2$$

در حالت خاص

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{z} X(e^{-j\omega_0} z) \quad , \quad ROC : R_x \quad (31)$$

مثال: تبدیل Z سیگنال های زیر را تعیین کنید.

$$x_1[n] = a^n \cos \omega_0 n u[n] \quad , \quad x_2[n] = a^n \sin \omega_0 n u[n]$$

حل:

$$x_1[n] = \frac{1}{2} (ae^{j\omega_0})^n u[n] + \frac{1}{2} (ae^{-j\omega_0})^n u[n]$$

$$\frac{1}{2} (ae^{j\omega_0})^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{2} \frac{1}{1 - ae^{j\omega_0} z^{-1}} \quad , \quad |z| > |a|$$

$$\frac{1}{2} (ae^{-j\omega_0})^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{2} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega_0} z^{-1}} \quad , \quad |z| > |a|$$

از خاصیت خطی بودن نتیجه می شود که:

$$X_1(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - ae^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega_0} z^{-1}} \quad , \quad |z| > |a|$$

$$= \frac{1}{1 - 2az^{-1}\cos\omega_0 + a^2z^{-2}}, \quad |z| > |a|$$

به طور مشابه

$$a^n \sin\omega_0 n u[n] \xrightarrow{z} \frac{az^{-1}\sin\omega_0}{1 - 2az^{-1}\cos\omega_0 + a^2z^{-2}}, \quad |z| > |a|$$

وارونگی زمانی

اگر

$$x[n] \xrightarrow{z} X(z), \quad ROC: r_1 < |z| < r_2$$

آن گاه

$$x[-n] \xrightarrow{z} X(z^{-1}), \quad ROC: \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$$

اثبات:

$$z\{x[-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[m](z^{-1})^{-m} = X(z^{-1})$$

با تغییر متغیر $m=-n$ ناحیه همگرایی $X(z^{-1})$ عبارت است از:

$$r_1 < |z^{-1}| < r_2 \Rightarrow \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$$

اگر z_0 در ناحیه همگرایی $x[n]$ قرار داشته باشد، آن گاه $\frac{1}{z_0}$ در ROC تبدیل Z ، $x[-n]$ قرار می گیرد. به عبارتی اگر

$$x[n] \text{ در } z_0 = z_0 \text{ (قطب صفر) داشته باشد، قطب (صفر) } x[-n] \text{ در } z = \frac{1}{z_0} \text{ است.}$$

مثال: تبدیل Z دنباله های زیر را به دست آورید.

$$x_1[n] = u[-n], \quad ROC: |z| > 1$$

$$x_2[n] = a^{-n}u[-n], \quad ROC: |z| > |a|$$

حل:

$$u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad ROC: |z| > 1$$

$$u[-n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-z}, \quad ROC: |z| < 1$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad ROC: |z| > |a|$$

$$a^{-n} u[-n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - az}, \quad ROC: |z| < |a^{-1}|$$

مزدوج گیری

اگر

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z), \quad ROC: R_x$$

آن گاه:

$$x^*[n] \xleftrightarrow{z} X^*(z^*), \quad ROC: R_x \quad (۳۳)$$

$$x^*[-n] \xleftrightarrow{z} X^*\left(\frac{1}{z^*}\right), \quad ROC: \frac{1}{R_x} \quad (۳۴)$$

در صورتی که $x[n]$ حقیقی باشد:

$$x[n] = x^*[n] \xleftrightarrow{z} X(z) = x^*(z^*) \quad (۳۵)$$

توجه: در صورتی که دنباله حقیقی $x[n]$ با تبدیل گویای $X(z)$ در $z = z_0$ قطب (صفر) داشته باشد حتماً در $z = z_0^*$ نیز قطب (صفر) خواهد داشت.

مثال: در صورتی که داشته باشیم:

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z), \quad ROC: 1 < |z| < 4$$

آن گاه تبدیل Z سیگنال $y[n] = 2x^*[-n + 3]$ را به دست آورید.

حل:

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z), \quad ROC: 1 < |z| < 4$$

$$2x^*[-n] \xleftrightarrow{z} 2X^*\left(\frac{1}{z^*}\right), \quad ROC: \frac{1}{4} < |z| < 1$$

$$2x^*[-(n-3)] \xleftrightarrow{z} 2z^{-3} X^*\left(\frac{1}{z^*}\right), \quad ROC: \frac{1}{4} < |z| < 1$$

اگر

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z), \quad ROC: R_x$$

آن گاه:

$$nx[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz}, \quad ROC: R_x \quad (36)$$

اثبات:

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n-1} = -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (nx[n]) z^{-n} = -z^{-1} z \{nx[n]\}$$

با توجه به این که مشتق از یک تابع گویا باعث حذف یا ایجاد قطب نمی شود لذا ناحیه همگرایی تغییر نخواهد کرد. همچنین می توان ثابت نمود:

$$(n^2 + n)x[n] \xleftrightarrow{z} z^2 \frac{d^2 X(z)}{dz^2}, \quad ROC: R_x \quad (37)$$

مثال: تبدیل Z سیگنال $x[n]$ را به دست آورید.

$$x[n] = na^n u[n], \quad ROC: |z| > |a|$$

حل: می دانیم

$$x_1[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

$$na^n u[n] \xleftrightarrow{z} X(z) = -z \frac{dX_1(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

به ازای $a = 1$ تبدیل Z دنباله شیب واحد به دست می آید:

$$nu[n] \xleftrightarrow{z} \frac{z^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > 1$$

مثال: تبدیل Z معکوس بگیرید.

$$X(z) = \text{Log}(1 - 2z), \quad |z| < \frac{1}{2}$$

حل: می دانیم

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{d}{dz} [\text{Log}(1 - 2z)] = \frac{-2}{1 - 2z} = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{2}$$

$$x[n] = \frac{1}{n} z^{-1} \left\{ \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{2} \right\}$$

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] = \frac{2^{-n}}{n} u[-n-1]$$

مثال: تبدیل Z بگیرید.

$$(n^2 + n)u[n], \quad |z| > 1$$

$$(n^2 + n)a^n u[n], \quad |z| > |a|$$

$$(n+1)^2 u[n], \quad |z| > 1$$

حل:

با توجه به رابطه (۳۷)

$$u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

$$z\{(n^2 + n)u[n]\} = z^2 \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{2z^2}{(z-1)^3}$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

$$z\{(n^2 + n)u[n]\} = z^2 \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{2z^2}{(z-1)^3}$$

$$x[n] = (n+1)^2 u[n] = (n^2 + 2n + 1)u[n] = (n^2 + n)u[n] + nu[n] + u[n]$$

با بهره گیری از نتایج قبل و خاصیت خطی بودن

$$x(z) = \frac{2z^2}{(z-1)^3} + \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1}$$

انبساط زمانی

طبق تعریف $X_{(k)}[n]$ برابر است با:

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{k}\right] & \frac{n}{k} \in Z \\ 0 & \frac{n}{k} \notin Z \end{cases}$$

حال اگر

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z), \quad ROC: r_1 < |z| < r_2$$

آن گاه

$$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{z} X(z^k), \quad ROC: r_1 < |z|^k < r_2 \quad (38)$$

اثبات:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \Rightarrow X(z^k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]z^k)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-kn}$$

معادله فوق نشان می دهد که:

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{k}\right] & \frac{n}{k} \in Z \\ 0 & \frac{n}{k} \notin Z \end{cases}$$

بنابراین اگر $z = a$ قطب (صفر) $X(z)$ باشد، آن گاه $z = a^{\frac{1}{k}}$ قطب (یا صفر) $X(z^k)$ خواهد بود.

مثال: تبدیل Z معکوس $X(z) = e^{1/z^2}$ با ناحیه همگرایی کل صفحه Z به جز $|z| = 0$ را به دست آورید.

حل:

$$X(z) = e^{1/z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2)^n}{n!}$$

با توجه به خاصیت انبساط زمانی

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)!} & n = 0, 2, 4, \dots \\ 0 & o, w \end{cases}$$

مثال: تبدیل Z معکوس بگیرید.

$$H(z) = \frac{z^8}{z^8 - e^{8a}}, \quad |z| < e^a$$

حل:

$$h[n] = z^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - e^{8a} z^{-8}}, \quad |z| > e^a \right\} = z^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - e^{8a} z^{-1}}, \quad |z| > e^{8a} \right\} = e^{8an} u[n]$$

$$h[n] = \begin{cases} e^{8ar} & n = 8r \\ 0 & n \neq 8r \end{cases}$$

کانولوشن زمانی

اگر

$$x_1[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z), \quad ROC: R_1$$

آن گاه

$$x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_2(z), \quad ROC: R_2$$

$$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z) X_2(z), \quad ROC: \min\{R_1 \cap R_2\} \quad (39)$$

اثبات:

$$\begin{aligned} z \{x_1[n] * x_2[n]\} &= z \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] x_2[n-k] \right\} = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] z \{x_2[n-k]\} \right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \{z^{-k} X_2(z)\} = X_2(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] z^{-k} = X_1(z) X_2(z) \end{aligned}$$

خاصیت کانولوشن برای سیستم های علی و غیر علی قابل استفاده است.

توجه: اگر $X_1(z) = x_1[0] + \sum_{n=1}^{N1} x_1[n] z^{-n}$ و $X_2(z) = x_2[0] + \sum_{n=1}^{N2} x_2[n] z^{-n}$ تعریف کنیم و داشته باشیم

$$Y(z) = X_1(z) X_2(z)$$

آن گاه خواهیم داشت:

$$y[0] = x_1[0] x_2[0]$$

$$y[1] = x_1[1] x_2[1] + x_1[0] x_2[2]$$

$$y[2] = x_1[2] x_2[0] + x_1[1] x_2[1] + x_1[0] x_2[2]$$

مثال: در صورتی که داشته باشیم:

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n], \quad x_2[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

آن گاه پاسخ $y[n] = x_1[n+3] * x_2[-n+1]$ را به دست آورید.

حل:

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{2}$$

$$x_2[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \longleftrightarrow X_2(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{3}$$

$$Y(z) = z \{x_1[n+3]\} z \{x_2[-(n-1)]\}$$

$$z^3 X_1(z) \cdot z^{-1} X_2\left(\frac{1}{z}\right) = z^2 X_1(z) X_2(z)$$

با جایگزینی $X_2(z)$ و $X_1(z)$ داریم:

$$Y(z) = z^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z} , \quad \frac{1}{2} < |z| < 3$$

$$= \frac{-3}{z^{-1}(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 3z^{-1})} = -\frac{3}{z^{-1}} + \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{\frac{54}{5}}{1 - 3z^{-1}}$$

با گرفتن تبدیل Z معکوس به ازای ناحیه همگرایی $\frac{1}{2} < |z| < 3$

$$y[n] = -3\delta[n+1] + \frac{3}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{54}{5} (3)^n u[-n-1]$$

تفاضل اول و دوم

اگر

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z), \quad ROC: R_x$$

آن گاه

$$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{z} (1 - z^{-1}) X(z), \quad ROC: \{R_x \cap |z| > 0\} \quad (40)$$

در حالت تفاضل دوم

$$x[n] - x[n-1] + x[n-2] \xleftrightarrow{z} (1 - z^{-1}) X(z) \quad (41)$$

ROC تفاضل دوم همانند تفاضل اول است.

مثال: با فرض این که داشته باشیم

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 5 \\ 0 & o, w \end{cases}$$

و همچنین $g[n] = x[n] - x[n-1]$ آن گاه تبدیل Z سیگنال $y[n]$ را به دست آورید.

$$\begin{aligned}
x[n] &= u[n] - u[n-6] \\
y[n] &= x[n] - x[n-1] \\
&= \{u[n] - u[n-6]\} - \{u[n-1] - u[n-7]\} \\
&= \{u[n] - u[n-1]\} - \{u[n-6] - u[n-7]\} \\
&= \delta[n] - \delta[n-6]
\end{aligned}$$

بنابراین

$$y(z) = 1 - z^{-6}$$

جمع انباره ای

اگر

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z), \quad ROC: R_x$$

آن گاه

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-z^{-1}} X(z), \quad ROC: \min\{R_x \cap |z| > 1\} \quad (42)$$

ناحیه همگرایی تبدیل Z جمع انباره ای حداقل اشتراک بین R و $|z| > 1$ می باشد.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-z^{-1}} X(z), \quad ROC: \min\{R_x \cap |z| < 1\} \quad (43)$$

قضیه مقدار اولیه

اگر به ازای $n < 0$ سیگنال $x[n] = 0$ باشد، به عبارتی سیگنال $x[n]$ علی باشد، آن گاه نمونه صفرم $x[n]$ برابر است با:

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (44)$$

و برای سیگنال ضد علی

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow 0} X(z) \quad (45)$$

اثبات (سیگنال علی):

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \{x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \dots\} = x[0]$$

نمونه های اول و دوم سیگنال علی

$$x[1] = \lim_{z \rightarrow \infty} z(X(z) - x[0]) \quad (46)$$

$$x[2] = \lim_{z \rightarrow \infty} z (X(z) - x[0] - z^{-1}x[1]) \quad (47)$$

برای سیگنال دست راستی مقابل مقدار اولیه $x[1]$ برابر است با:

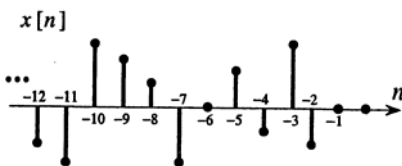


شکل ۷-۱۵

$$X(z) = x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \dots$$

$$x[1] = \lim_{z \rightarrow \infty} z X(z)$$

برای سیگنال دست چپ مقابل مقدار $x[-2]$ برابر است با:



شکل ۷-۱۶

$$X(z) = x[-2]z^2 + x[-3]z^3 + \dots$$

$$x[-2] = \lim_{z \rightarrow 0} z^{-2} X(z)$$

در حالت کلی برای سیگنال $x[n]$ که به ازای $n > n_0 > 0$ صفر است، خواهیم داشت:

$$x[n_0] = \lim_{z \rightarrow 0} z^{n_0} X(z) \quad (48)$$

توجه: مقادیر اولیه یک سیگنال زمان گسسته علی که دارای تبدیل Z گویاست با تقسیم صورت بر مخرج قابل محاسبه می باشند. به طور مثال:

$$X(z) = \frac{z^2 - 2z + 2}{z^2 + 5z - 1}$$

با تقسیم صورت بر مخرج داریم:

$$X(z) = \frac{z^2 - 2z + 2}{z^2 + 5z - 1} = 1 - 7z^{-1} + 38z^{-2} - \dots$$

بنابراین:

$$X(z) = 1 - 7z^{-1} + 38z^{-2} - \dots \Rightarrow x[0] = 1, x[1] = -7, x[2] = 38, \dots$$

اگر $x[n]$ راست گرا باشد $X(z)$ را بر حسب Z (از بالاترین درجه) مرتب کرده و عمل تقسیم را انجام می دهیم.

اگر $x[n]$ چپ گرا باشد $X(z)$ را بر حسب Z^{-1} (از پایین ترین درجه) مرتب کرده و عمل تقسیم را انجام می دهیم.

مثال: با در نظر گرفتن $X(z)$ سه مقدار اولیه $x[n]$ را به دست آورید.

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

به ازای ناحیه همگرایی $|z| > \frac{1}{3}$

به ازای ناحیه همگرایی $|z| < \frac{1}{3}$

حل:

$$X(z) = \frac{Z + 1}{Z + \frac{1}{3}}$$

با تقسیم صورت بر مخرج داریم

$$X(z) = 1 + \frac{2}{3}z^{-1} - \frac{2}{9}z^{-2} + \dots$$

بنابراین:

$$X(z) = 1 + \frac{2}{3}z^{-1} - \frac{2}{9}z^{-2} + \dots \Rightarrow x[0] = 1, x[1] = \frac{2}{3}, x[2] = \frac{-2}{9}, \dots$$

به طور مشابه با توجه به ناحیه همگرایی $|z| < \frac{1}{3}$

$$X(z) = \frac{Z^{-1} + 1}{\frac{1}{3}Z^{-1} + 1}$$

با تقسیم صورت بر مخرج داریم:

$$X(z) = 3 - 6z + 18z^2 - \dots$$

بنابراین:

$$X(z) = 3 - 6z + 18z^2 - \dots \Rightarrow x[0] = 3, x[-1] = -6, x[-2] = 18, \dots$$

اگر $x[n]$ یک سیگنال علی بوده و تمام قطب های $X(z)$ داخل دایره واحد باشند به استثنای یک قطب ساده در $z=1$ ، آن گاه:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) X(z) \quad (49)$$

مثال: مقدار نهایی سیگنال های علی زیر را در دو حالت زمانی و تبدیل Z به دست آورید.

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n-3]$$

$$x_2[n] = \left\{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} u[n]$$

حل:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1[n] = 0$$

$$X_1(z) = \frac{1}{125} \left(\frac{z^{-3}}{1 - \frac{1}{5}z^{-1}} \right), \quad |z| > \frac{1}{5}$$

$$x_1[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) X_1(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{125} \frac{z^{-3}(1 - z^{-1})}{1 - \frac{1}{5}z^{-1}} = 0$$

برای سیگنال $x_2[n]$ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_2[n] = 2 - 0 = 2$$

$$X_2(z) = \frac{2}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{(1 - z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}, \quad |z| > 1$$

$$x_2[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) X_2(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = 2$$

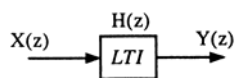
ملاحظه می گردد که نتایج در حوزه زمان و تبدیل Z یکسان به دست آمد.

با فرض این که تبدیل Z دنباله های $x_1[n]$ و $x_2[n]$ به ترتیب $X_1(z)$ و $X_2(z)$ به همراه ROC R_1 و R_2 در دست باشند، آن گاه خلاصه ای از خواص تبدیل Z برابر است با:

جدول خواص تبدیل Z سیگنال های زمان گسسته

دنباله	تبدیل z	ROC	خاصیت
$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	$\min\{R_1 \cap R_2\}$	خطی بودن
$x[n - n_0]$	$z^{-n_0} X(z)$	$R_x \pm \{z = 0, \infty\}$	جابجایی زمانی
$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$	$ a r_1 < z < a r_2$	تغییر مقیاس در حوزه Z
$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$ z_0 r_1 < z < z_0 r_2$	تغییر مقیاس در حوزه Z
$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{-j\omega_0} z)$	R_x	تغییر مقیاس در حوزه Z
$x[-n]$	$X(z^{-1})$	$r_2^{-1} < z < r_1^{-1}$	وارونگی زمانی
$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x	مزدوج گیری
$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	R_x	مشتق گیری در حوزه Z
$(n^2 + n)nx[n]$	$z^2 \frac{d^2 X(z)}{dz^2}$	R_x	مشتق گیری در حوزه Z
$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{k}] & \frac{n}{k} \in Z \end{cases}$	$X(z^k)$	$R_x^{\frac{1}{k}} < z ^k < r_2$	انبساط زمانی
$x_1[n]^* x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	$\min\{R_1 \cap R_2\}$	کانولوشن زمانی
$x[n] - x[n-1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	$\min\{R_x \cap z > 0\}$	تفاضل اول
$x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$	$(1 - z^{-1})^2 X(z)$	$\min\{R_x \cap z > 0\}$	تفاضل دوم
$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)$	$\min\{R_x \cap z > 1\}$	جمع انباره ای
$\sum_{k=n+1}^{\infty} x[k]$	$\frac{-1}{1 - z^{-1}} X(z)$	$\min\{R_x \cap z < 1\}$	جمع انباره ای

با توجه به خاصیت کانولوشن داریم:



شکل ۷-۱۷

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (50)$$

ناحیه همگرایی پاسخ $Y(z)$ حداقل اشتراک نواحی همگرایی $H(z)$ و $X(z)$ است. در رابطه (50) $H(z)$ تابع تبدیل سیستم می باشد.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

به ازای Z های روی دایره واحد ($z = e^{j\omega}$) و این که دایره واحد در ROC مربوط به $H(z)$ باشد، $H(z)$ به پاسخ فرکانسی سیستم تبدیل می شود.

سیگنال نمایی z^n

z^n تابع ویژه سیستم LTI زمان گسسته است به طوری که اگر دنباله ورودی به صورت $x[n] = z^n$ به سیستم LTI اعمال گردد، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} y[n] &= h(n) * z^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k} \\ &= z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} = H(z) z^n \end{aligned}$$

بنابراین اگر $h[n]$ پاسخ ضربه سیستم LTI باشد، آن گاه پاسخ دائمی سیستم به ورودی z^n برابر است با:

$$y[n] = H(z) z^n \quad (51)$$

مثال: در یک سیستم LTI با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ به صورت زیر را در نظر بگیرید.

$$y[n] = \delta[n] + a \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

(a ثابت است). در صورتی که به ازای ورودی $(-2)^n$ ، خروجی $y[n]$ صفر شود، آن گاه تابع تبدیل $H(z)$ را به دست آورید.

حل:

$$x[n] = (-2)^n = z^n \Big|_{z=-2} \Rightarrow y[n] = H(z) z^n \Big|_{z=-2} = 0 \Rightarrow H(-2) = 0$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$y[n] = 0[n] + a\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \longleftrightarrow 1 + \frac{a}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{4}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{a}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} = \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \left[1 + \frac{a}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}\right], \quad |z| > \frac{1}{2}$$

با اعمال شرط $H(-2) = 0$ مقدار $a = \frac{-9}{8}$ به دست می آید.

$$H(z) = \frac{-(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + 2z^{-1})}{8(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

سیستم های LTI علی

در سیستم های LTI علی، پاسخ ضربه به ازای $n < 0$ ، صفر است.

$$h[n] = 0, \quad n < 0$$

در این حالت

۱- برای علی بودن یک سیستم، ROCی آن باید خارج بیرونی ترین قطب بوده و $Z = \infty$ را شامل شود.

۲- تابع تبدیل $H(z)$ گویا باشد و درجه صورت نباید از درجه مخرج بزرگتر باشد. به عبارت دیگر حد $H(z)$ در $Z \rightarrow \infty$ باید متناهی باشد. یعنی:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} H(z) < \infty \quad (52)$$

به طور مثال تابع تبدیل $H_1(z)$ علی نیست زیرا:

$$H_1(z) = \frac{(z-1)^2}{z - \frac{1}{2}} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} H_1(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(z-1)^2}{z - \frac{1}{2}} \rightarrow \infty$$

حال آن که تابع تبدیل $H_2(z)$ علی است زیرا دو شرط بالا را رعایت می کند.

$$H_2(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, \quad |z| > 2$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} H_2(z) < \infty$$

پاسخ ضربه سیستم فوق با تبدیل Z معکوس از $H_2(z)$ به دست می آید:

$$h_2[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n \right] u[n]$$

سیستم های LTI پایدار

یک سیستم LTI پایدار است اگر و تنها اگر ROC تابع سیستم $H(z)$ دایره واحد $|z|=1$ را شامل باشد.

ویژگی های سیستم LTI پایدار

۱- پاسخ ضربه $h[n]$ آن مطلقاً جمع پذیر است:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

۲- تبدیل فوریه $h[n]$ همگراست.

مثال: تبدیل Z پاسخ ضربه یک سیستم مرتبه دوم به صورت زیر است:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2r \cos \theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

که در آن $z_1 = re^{j\theta}$ و $z_2 = re^{-j\theta}$ قطب های مختلط $H(z)$ می باشند. با فرض این که $H(\infty)$ موجود باشد، پایداری سیستم را بررسی کنید.

حل:

از موجود بودن $H(\infty)$ در می یابیم سیستم راست گرا و علی است و به عبارتی $|z| > |r|$ از طرفی:

به ازای $r < 1$ قطب ها داخل دایره واحد قرار می گیرند و لذا ROC سیستم دایره واحد را شامل می گردد و سیستم پایدار است.

به ازای $r > 1$ قطب ها خارج دایره واحد قرار می گیرند و لذا ROC شامل دایره واحد نمی گردد و سیستم ناپایدار است.

توجه: اگر ناحیه همگرایی تبدیل Z سیگنال $x[n]$ شامل دایره واحد شود، می توان تبدیل فوریه $x[n]$ را به راحتی به کمک تبدیل Z به دست آورد.

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (53)$$

برای آن که یک سیستم LTI با تابع تبدیل گویا توأمأ علی و پایدار باشد، باید تمام قطب های $H(z)$ داخل دایره واحد باشد، به عبارتی تمام قطب ها اندازه هایی کوچکتر از یک داشته باشند.
 مثال: پایداری و علی بودن سیستم های LTI توصیف شده با توابع زیر را بررسی کنید.

$$H_1(z) = \frac{1 - \frac{4}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{z^{-1}(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}$$

$$H_2(z) = \frac{z - \frac{1}{2}}{z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{3}{16}}$$

حل:

سیستم $H_1(z)$ دارای دو قطب محدود $z_1 = \frac{1}{3}$ و $z_2 = \frac{1}{2}$ است.

$$H_1(z) = \frac{1 - \frac{4}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{z^{-1}(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{z(z^2 - \frac{4}{3}z + \frac{1}{2})}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{3})}$$

به ازای نواحی $|z| < \frac{1}{3}$ و $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$ دایره واحد در ROC قرار نمی گیرد و لذا سیستم ناپایدار است.

به ازای $|z| > \frac{1}{2}$ دایره واحد داخل ROC، $H_1(z)$ بوده و لذا سیستم پایدار خواهد بود. از طرفی سیستم همواره غیرعلی

است زیرا $\lim_{z \rightarrow \infty} H_1(z) \rightarrow \infty$

سیستم $H_2(z)$ دارای دو قطب محدود $z_1 = \frac{-3}{4}$ و $z_2 = \frac{1}{4}$ است.

$$H_2(z) = \frac{z - \frac{1}{2}}{z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{3}{16}} = \frac{z - \frac{1}{2}}{(z + \frac{3}{4})(z - \frac{1}{4})}$$

به ازای نواحی $|z| < \frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4} < |z| < \frac{3}{4}$ دایره واحد در ROC قرار نمی گیرد و به علت چپ گرا

بودن غیر علی است.

به ازای $|z| > \frac{1}{4}$ تابع سیستم دایره واحد را شامل می‌گردد و لذا سیستم پایدار است و با توجه به راست کرا بودن سیستم و این

که $\lim_{z \rightarrow \infty} H_2(z) = 0$ سیستم علی می‌گردد.

سیستم های LTI معکوس

سیستم LTI با تابع تبدیل $H(z)$ به فرم زیر را در نظر بگیرید:

$$H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0} \right) \frac{\prod_{k=1}^M (1 - C_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} \quad (54)$$

در معادله (54)، $H(z)$ صفرهایی در $z = C_k$ و قطب‌هایی در $z = d_k$ به همراه صفر و قطب‌هایی در $z = 0$ و $z = \infty$ دارد. در این صورت سیستم معکوس متناظر با تابع تبدیل $H_i(z)$ برابر است با:

$$H(z)H_i(z) = 1 \Rightarrow H_i(z) = \frac{1}{H(z)}$$

$$H_i(z) = \left(\frac{a_0}{b_0} \right) \frac{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - C_k z^{-1})} \quad (55)$$

با مقایسه روابط (54) و (55) در می‌یابیم که قطب‌های $H_i(z)$ ، صفرهای $H(z)$ هستند.

ناحیه همگرایی $H_i(z)$

با بهره‌گیری از قضیه کانولوشن در می‌یابیم ناحیه همگرایی $H(z)$ و $H_i(z)$ ، باید اشتراک غیر تهی (روی هم افتادگی) داشته باشند. در صورتی که $H_i(z)$ علی باشد، ROC آن چنین است:

$$|z| > \text{Max} |C_k|$$

برای سیستم معکوس پایدار، ناحیه همگرایی $H_i(z)$ باید شامل دایره واحد باشد و به عبارتی رابطه زیر برقرار باشد:

$$\text{Max} |C_k| < 1$$

توجه: یک سیستم LTI معکوس، پایدار و علی است اگر و تنها اگر هم صفرها و هم قطب‌های $H(z)$ درون دایره واحد باشند چنین سیستمی به عنوان سیستم با حداقل فاز (مینیمم فاز) شناخته می‌شود.

مثال: برای توابع تبدیل $H(z)$ داده شده، علیت و پایداری سیستم معکوس را به ازای $|z| > 0.9$ بررسی کنید.

$$H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1}} \quad H(z) = \frac{z^{-1} - 0.5}{1 - 0.9z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1}} \Rightarrow H_i(z) = \frac{1 - 0.9z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}}$$

$H_i(z)$ دارای یک قطب در $z = 0.5$ است و لذا دو امکان برای ROC وجود دارد که البته برای ایجاد اشتراک غیر تهی تنها ناحیه همگرایی $H_i(z)$ ، $|z| > 0.5$ می باشد. پاسخ ضربه سیستم معکوس برابر خواهد بود با:

$$h_i[n] = (0.5)^n - 0.9(0.5)^{n-1} u[n-1]$$

در این حالت سیستم معکوس هم علی و هم پایدار می باشد. همچنین:

$$H(z) = \frac{z^{-1} - 0.5}{1 - 0.9z^{-1}} \Rightarrow H_i(z) = \frac{1 - 0.9z^{-1}}{z^{-1} - 0.5} = \frac{-2 + 1.8z^{-1}}{1 - 2z^{-1}}$$

دو ناحیه همگرایی برای $H_i(z)$ وجود دارد؛ $|z| > 2$ و $|z| < 2$ که در هر دو ناحیه با $|z| > 0.9$ اشتراک ناحیه همگرایی غیر تهی وجود دارد. پاسخ ضربه سیستم معکوس به ازای $|z| < 2$ برابر خواهد بود با:

$$h_i[n] = 2(2)^n u[n-1] - 1.8(2)^{n-1} u[-n]$$

در این حالت $h_i[n]$ غیرعلی و پایدار است و به ازای $|z| > 2$:

$$h_i[n] = -2(2)^n u[n] + 1.8(2)^{n-1} u[n-1]$$

در این حالت $h_i[n]$ علی و ناپایدار است.

سیستم های تمام گذر

سیستم تمام گذر، سیستمی است که اندازه پاسخ فرکانسی آن مقدار ثابت باشد:

$$|H_{ap}(e^{j\omega})| = 1, \quad 0 \leq \omega \leq \pi$$

$$H_{ap}(z) = \frac{a_N + a_{N-1}z^{-1} + \dots + a_1z^{-N+1} + z^{-N}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-N+k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (56)$$

به ازای $a_0 = 1$ می توان سیستم های تمام گذر را به فرم زیر نمایش داد:

$$H_{ap}(z) = z^{-N} \frac{A(z^{-1})}{A(z)}$$

سیستم های تمام گذر در ساختار تابع تبدیل خود عواملی به شکل زیر دارند:

$$\frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}$$

$$H_{ap}(z) = A \prod_{k=1}^{Mr} \frac{z^{-1} - d_k}{1 - d_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{MC} \frac{(z^{-1} - e_k^*)(z^{-1} - e_k)}{(1 - e_k z^{-1})(1 - e_k^* z^{-1})}$$

که در آن A ثابت مثبت و d_k ها قطب های حقیقی و e_k ها قطب های مختلط می باشند.

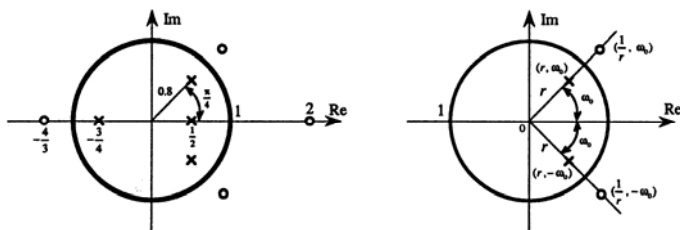
چند نکته

در سیستم های تمام گذر همواره $M = N + 2M_C + M_r$ می باشد.

برای یک سیستم علی تمام گذر هر کدام از جملات متشکل از یک قطب تکی درون دایره واحد و یک صفر در مکان در مکان مزدوج معکوس آن است.

برای سیستم های تمام گذر پایدار و علی همواره $|d_k| < 1$ و $|e_k| < 1$ می باشد.

نمودار صفر-قطب دو سیستم تمام گذر در زیر رسم شده است.



شکل ۷-۱۸

تاخیر گروهی یک سیستم تمام گذر علی همواره مثبت است یعنی $grad[H_{ap}(e^{j\omega})] \geq 0$

فاز یک سیستم تمام گذر علی همواره به ازای $0 \leq \omega \leq \pi$ نامثبت است.

$$\angle H_{ap}(e^{j\omega}) \leq 0, \quad 0 \leq \omega \leq \pi$$

از جمله کاربردهای سیستم تمام گذر می توان به موارد زیر اشاره کرد:

جبران ساز (فاز یا تاخیر گروهی)

در نظریه سیستم های مینیمم فاز مفیدند.

تبدیل فیلترهای پایین گذر فرکانس گزین به شکل های دیگر فرکانس گزین.

بررسی خواص سیستم ها به کمک نمودار صفر و قطب

- پایداری به همراه علی بودن سیستم: در این حالت تمام قطب ها در داخل دایره واحد قرار می گیرند.

- سیستم مینیمم فاز: در این حالت تمام صفرها و قطب ها در داخل دایره واحد قرار می گیرند.

- سیستم IIR: در این گونه سیستم ها محل قطب ها در $Z = 0$ یا $Z = \infty$ قرار نمی گیرند و پاسخ ضربه دارای طول نامحدود است.

- سیستم FIR: در این گونه سیستم ها محل قطب ها فقط در $Z = 0$ یا $Z = \infty$ قرار می گیرند.

- سیستم با فاز خطی تعمیم یافته: سیستم های FIR علی دارای فاز خطی تعمیم یافته اند. بنابراین FIR بودن سیستم جهت

- تاخیر گروهی مثبت (به ازای تمام مقادیر ω): سیستم های تمام گذر پایدار به همراه سیستم های علی توام با فاز خطی، دارای تاخیر گروهی مثبت به ازای تمام مقادیر ω می باشند.

توصیف سیستم به کمک معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

یک سیستم LTI که با معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت توصیف می شود را در نظر بگیرید:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (57)$$

در معادله (57)، N مرتبه معادله می باشد. با گرفتن تبدیل Z از دو طرف معادله و استفاده از خاصیت خطی و جابجایی زمانی خواهیم داشت:

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) \Rightarrow Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

چند نکته:

تابع تبدیل سیستم توصیف شده با معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت همواره گویا است.

معادلات تفاضلی به تنهایی اطلاعاتی راجع به ROC تابع $H(z)$ به دست نمی دهد.

با گرفتن تبدیل Z از معادلات تفاضلی خطی، معادلات جبری به دست می آید که روشی جهت یافتن پاسخ سیستم می باشد.

قطب های $H(z)$ ریشه های معادله مشخصه سیستم هستند.

معادله تفاضلی جمع انباره ای برابر است با:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] + x[n] \Rightarrow y[n] = y[n-1] + x[n] \quad (58)$$

که در آن $0 < r < 1$ و $0 \leq \theta \leq \pi$ است.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 2r \cos \theta z^{-1} + r^2 z^{-2}} = \frac{A}{1 - (re^{j\theta})z^{-1}} + \frac{B}{1 - (re^{-j\theta})z^{-1}}$$

که در رابطه فوق $A = \frac{e^{j\theta}}{2j \sin \theta}$ و $B = \frac{e^{-j\theta}}{2j \sin \theta}$ می باشد.

$$h[n] = [A(re^{j\theta})^n + B(re^{-j\theta})^n] u[n] = \frac{r^n \sin[(n+1)\theta]}{\sin \theta} u[n]$$

بررسی پایداری سیستم های LTI بر حسب قطب های $H(z)$

۱- یک سیستم LTI علی به طور مطلق پایدار است اگر و فقط اگر تابع انتقال $H(z)$ آن قطبی در بیرون دایره واحد (به مرکز مبدا مختصات) نداشته باشند. قطب‌ها ممکن است تکراری یا غیر تکراری باشند.

۲- یک سیستم LTI علی ناپایدار است اگر و فقط اگر یک یا دو شرط زیر برقرار باشد.

- حداقل یک قطب $H(z)$ بیرون دایره واحد داشته باشد.

- $H(z)$ روی دایره واحد دارای قطب تکراری باشد.

۳- یک سیستم LTI علی به صورت مجانبی پایدار است اگر و فقط اگر $H(z)$ قطبی خارج از دایره واحد نداشته باشد ولی در روی دایره واحد قطب غیر تکراری داشته باشد.

مثال: یک سیستم علی با معادله تفاضلی زیر توصیف شده است:

$$y[n] - y[n-1] - y[n-2] = x[n-1]$$

الف) تابع سیستم $H(z)$ را بیابید.

ب) صفرها و قطب‌ها را به همراه ناحیه همگرایی آن را مشخص کنید.

ج) پاسخ ضربه سیستم را تعیین کنید.

د) یک پاسخ ضربه پایدار ولی غیر علی بیابید که معادله تفاضلی فوق را ارضا کند.

حل:

الف) از طرفین معادله تفاضلی تبدیل Z می‌گیریم:

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) - z^{-2}Y(z) = z^{-1}X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1} - z^{-2}} = \frac{z}{z^2 - z - 1}$$

ب) $H(z)$ دارای یک صفر در مبدا و دو قطب در $z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ است. با توجه به علی بودن سیستم ROC تابع $H(z)$

خارج دایره ای خواهد بود که شعاع آن به اندازه بزرگترین قطب $H(z)$ است یعنی $|z| > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ از طرفی دایره واحد

شامل ROC تابع $H(z)$ نمی‌شود و لذا سیستم ناپایدار است.

ج)

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{\left(1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)z^{-1}\right)\left(1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)z^{-1}\right)}, \quad |z| > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \frac{1}{1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)z^{-1}}, |z| > \left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| \right\} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \frac{1}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)z^{-1}}, |z| > \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| \right\}$$

با تبدیل Z معکوس از $H(z)$ خواهیم داشت:

$$h[n] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right] u[n]$$

(د) در صورتی که ناحیه همگرایی $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < |z| < \left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|$ در نظر گرفته شود سیستم پایدار ولی غیرعلی خواهد بود:

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \frac{1}{1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)z^{-1}}, |z| < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \frac{1}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)z^{-1}}, |z| > \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| \right\}$$

از تبدیل $H(z)$ تبدیل Z معکوس می گیریم:

$$h[n] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n u[-n-1] + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n u[n] \right]$$

بلوک دیاگرام سیستم های علی توصیف شده با معادلات تفاضلی

با استفاده سه عمل جمع، ضرب دو عدد حقیقی و تاخیر واحد می توان سیستم های LTI علی توصیف شده با معادلات تفاضلی را به سه فرم مستقیم، سری و موازی نمایش داد.

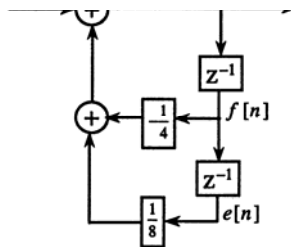
مثال: سیستم مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$H(z) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}$$

که معادله تفاضلی آن به صورت زیر توصیف می شود:

$$y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]$$

نمایش به فرم مستقیم در شکل مقابل نشان داده شده است. در این نوع نمایش ضرایب را می توان با توجه به ضرایب معادله تفاضلی با ضرایب تابع سیستم تعیین کرد:



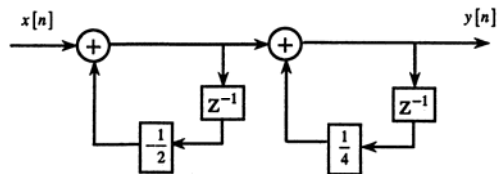
شکل ۱۹-۷

$$f[n] = y[n-1]$$

$$e[n] = f[n-1] = y[n-2]$$

در نمایش به فرم سری مطابق شکل مقابل با کمی عملیات جبری تابع سیستم را به فرم حاصل ضرب عوامل مرتبه اول در نظر می

گیریم:

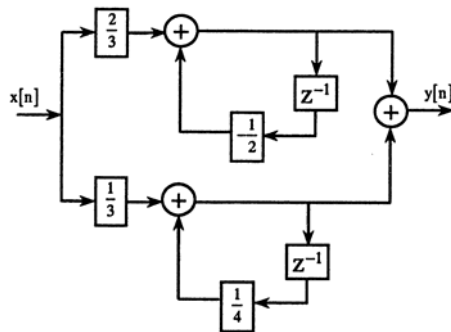


شکل ۲۰-۷

$$H(z) = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \right)$$

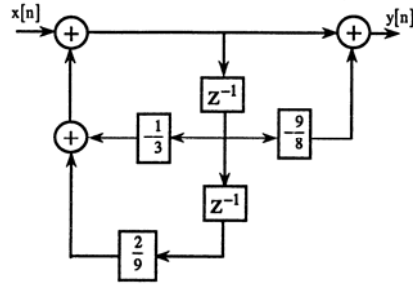
با بسط به کسرهای جزئی فرم موازی به دست می آید:

$$H(z) = \frac{\frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$



شکل ۲۱-۷

مثال: بلوک دیاگرام یک سیستم LTI علی در شکل مقابل رسم شده است.



شکل ۷-۲۲

الف) معادله تفاضلی ارتباط دهنده $y[n]$ به $x[n]$ را به دست آورید.

ب) آیا سیستم پایدار است؟

حل:

الف) به کمک قاعده میسون تابع سیستم خروجی به ورودی را به دست می آوریم:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - \frac{9}{8}z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1} - \frac{2}{9}z^{-2}}$$

البته با توجه به فرم نمایش بلوک دیاگرام که به صورت مستقیم است تابع سیستم $H(z)$ به راحتی حدس زده می شود:

$$Y(z) + \frac{1}{3}z^{-1}Y(z) - \frac{2}{9}z^{-2}Y(z) = X(z) - \frac{9}{8}z^{-1}X(z)$$

$$y[n] + \frac{1}{3}y[n-1] - \frac{2}{9}y[n-2] = x[n] - \frac{9}{8}x[n-1]$$

ب) سیستم دارای دو قطب در $z = \frac{1}{3}$ و $z = \frac{-2}{3}$ می باشد و با توجه به علی بودن آن راست گرا بوده و لذا ROC آن

$|z| > \frac{2}{3}$ خواهد بود. بنابراین دایره واحد در ROC تابع سیستم قرار گرفته و لذا سیستم پایدار است.

تبدیل Z یک طرفه

تبدیل Z یک طرفه سیگنال $x[n]$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$X[n] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (59)$$

که مخصوص تحلیل سیستم های LTI علی توصیف شده با معادلات تفاضلی خطی دارای ضرایب ثابت و شرایط اولیه (سیستم ابتدائاً ساکن نیست) می باشد.

تبدیل Z یک طرفه $x[n]$ همان تبدیل Z دو طرفه $x[n]u[n]$ است.

اگر دنباله ای به ازای $n < 0$ برابر صفر باشد، تبدیل Z یک طرفه و دو طرفه آن یکسانند.

$x[n]u[n]$ همیشه یک دنباله دست راستی بوده و ناحیه همگرایی $X(z)$ همیشه خارج یک دایره است.

مثال: تبدیل Z یک طرفه و دو طرفه $x[n] = a^{n+1}u[n+1]$ را به دست آورید.

حل:

$$X(z) = \frac{z}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \quad (\text{تبدیل Z دو طرفه})$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1}z^{-n} = \frac{a}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \quad (\text{تبدیل Z یک طرفه})$$

در مثال فوق، تبدیل های یک طرفه و دو طرفه یکی نیستند زیرا دنباله $x[n]$ برای $n < 0$ صفر نیست.

مثال: تبدیل Z معکوس یک طرفه $X(z)$ را به دست آورید.

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})}$$

حل:

سیستم علی است پس $|z| > 2$

$$X(z) = \frac{\frac{2}{9}}{1 - z^{-1}} + \frac{\frac{7}{9}}{1 + 2z^{-1}} \Rightarrow x[n] = \frac{1}{9} [2 + z(-2)^n] u[n]$$

توجه: $X(z)$ اگر تابع گویایی از Z به صورت $X(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ یعنی نسبت دو چند جمله بر حسب Z باشد.

برای این که $X(z)$ تبدیل Z یک طرفه داشته باشد، درجه صورت نباید از درجه مخرج آن بزرگتر باشد، به عبارت دیگر برای این

که عکس تبدیل Z در $n < 0$ صفر داشته باشد، درجه $P(z)$ باید کوچکتر یا مساوی درجه $q(z)$ باشد. به طور مثال توابع

گویای زیر هیچ کدام دارای تبدیل Z یک طرفه نیستند.

$$X_1(z) = \frac{1 - 4z^{-1} + z^{-2}}{z^{-1}(1 - z^{-1})(1 - 3z^{-1})} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} X_1(z) \rightarrow \infty$$

$$X_2(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} X_2(z) \rightarrow \infty$$

با فرض این که دنباله $x[n]$ دارای تبدیل Z یک طرفه $X(z)$ باشد، برخی خواص آن به شرح جدول زیر می باشد:

جدول خواص تبدیل Z یک طرفه سیگنال های زمان گسسته

دنباله	تبدیل Z یک طرفه	خاصیت
$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	خطی بودن
$x[n-m]$	$z^{-m}X(z) + z^{-m}\sum_{k=1}^m x[-k]z^k$	تاخیر زمانی
$x[n-1]$	$z^{-1}X(z) + x[-1]$	تاخیر زمانی
$x[n-2]$	$z^{-2}X(z) + z^{-1}x[-1] + x[-2]$	تاخیر زمانی
$x[n-3]$	$z^{-3}X(z) + z^{-2}x[-1] + z^{-1}x[-2] + x[-3]$	تاخیر زمانی
$x[n+m]$	$z^mX(z) - z^m\sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k}$	تقدم زمانی
$x[n+1]$	$zX(z) - zX[0]$	تقدم زمانی
$x[n+2]$	$z^2X(z) + z^2x[0] - zx[1]$	تقدم زمانی
$x[n+3]$	$z^3X(z) - z^3x[0] - z^2x[1] - zx[2]$	تقدم زمانی
$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	تغییر مقیاس در حوزه Z
$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{-j\omega_0} z)$	تغییر مقیاس در حوزه Z
$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$	تغییر مقیاس در حوزه Z
$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[m] & n = mk \\ 0 & n \neq mk \end{cases}$	$X(z^k)$	انبساط زمانی
$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	مزدوج گیری
$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	مشتق گیری در حوزه Z
$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	کانولوشن
$x[0]$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$	قضیه مقدار اولیه
$\lim_{z \rightarrow \infty} x[n]$	$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$	قضیه مقدار نهایی
$\sum_{k=0}^n x[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	جمع انباره ای
$x[n] - x[n-1]$	$(1-z^{-1})X(z) - x[-1]$	تفاضل اول

توجه ۱: هنگامی که $H(e^{j\omega})$ دارای یک صفر بر روی دایره واحد باشد، سیستم معکوس آن یک قطب بر روی دایره واحد خواهد داشت. بنابراین سیستم معکوس ناپایدار خواهد بود.

توجه ۲: با در دست بودن فاز پیوسته پاسخ فرکانسی $\angle H(e^{j\omega})$ نمی توان به علی بودن سیستم پی برد.

توجه ۳: سیستم مینیمم فاز کلیه صفر و قطب هایش داخل دایره واحد می باشد. بنابراین سیستم هم علی و هم پایدار بوده و سیستم معکوس آن نیز علی و پایدار خواهد بود.

توجه ۴: سیستم های علی و IIR نمی توانند متقارن بوده و بنابراین نمی توانند دارای فاز خطی باشند.

توجه ۵: $20 \text{Log}_{10} \left| H(e^{j\frac{\pi}{5}}) \right| = \infty$ یعنی $H(e^{j\omega})$ قطبی در $z = e^{j\frac{\pi}{5}}$ دارد.

توجه ۶: $20 \text{Log}_{10} \left| H(e^{j0}) \right| = -\infty$ یعنی $H(e^{j\omega})$ صفری در $z = 1$ دارد.

توجه ۷: وجود قطب های مکرر بر روی دایره واحد باعث می گردد ROC شامل دایره واحد نگردد و لذا سیستم ناپایدار گردد. البته وجود تنها یک قطب بر روی دایره واحد باعث پایداری مجانبی می گردد.

توجه ۸: سیستم های علی که دارای فاز خطی می باشند، از نوع FIR خواهند بود و سیستمی که FIR باشد قطب هایش یا در $z = 0$ است یا در $z = \infty$.

توجه ۹: کانولوشن دو دنباله حداقل فاز، یک دنباله حداقل فاز می باشد. زیرا:

$$h_1[n] * h_2[n] \xrightarrow{z} H_1(z) H_2(z)$$

وقتی کلیه صفر و قطب های $H_1(z)$ و $H_2(z)$ داخل دایره واحد باشند، نتیجه کانولوشن آنها نیز حداقل فاز خواهد بود.

توجه ۱۰: در صورتی که دنباله $x[n]$ حقیقی باشد، صفر و قطب هایش به صورت جفت مزدوج مختلط ظاهر می

گردند. به طور مثال اگر $X(z)$ صفری در $z = 2e^{j\frac{\pi}{4}}$ داشته باشد در $z = 2e^{-j\frac{\pi}{4}}$

نیز صفری خواهد داشت.

توجه ۱۱: سیستمی که توأمأ دارای فاز خطی به همراه پاسخ ضربه حقیقی باشد، صفر آن به صورت متقابلاً مزدوج به صورت

$$z = z_1, \frac{1}{z_1^*}, z_1^*, \frac{1}{z_1}$$

ظاهر می گردند.

سوال ۱: تابع تبدیل یک سیستم زمان گسسته LTI علی به صورت $H(z) = \frac{1 - az^{-1} + z^{-2}}{7 + az^{-1}}$ است. پاسخ پله به

این سیستم چیست؟

$$\frac{1}{3}u[n] + \frac{2}{3}(-0.5)^n u[n] \quad (۲) \qquad \frac{2}{3}u[n] + \frac{1}{3}(-0.5)^n u[n] \quad (۱)$$

$$\frac{1}{3}u[n] + \frac{2}{3}(0.5)^n u[n] \quad (۴) \qquad \frac{2}{3}u[n] + \frac{1}{3}(0.5)^n u[n] \quad (۳)$$

سوال ۲: تابع تبدیل یک سیستم زمان گسسته LTI به صورت:

$$H(z) = \frac{1 - az^{-1} + z^{-2}}{7 + az^{-1}}$$

می باشد. ضمناً می دانیم پاسخ این سیستم به ورودی $x[n] = a^n$ به صورت $y[n] = a^{n+1}$ می باشد. مقدار a چقدر است؟

$$a = ۱,۵ \quad (۲)$$

$$a = ۲ \quad (۱)$$

$$a = ۰,۵ \quad (۴)$$

$$a = ۱ \quad (۳)$$

سوال ۳: یک سیستم زمان گسسته LTI علی را در نظر بگیرید و فرض کنید بین ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ آن

معادله تفاضلی $y[n] = 4ay[n-1] - \frac{25}{4}a^2 y[n-2] + x[n]$ برقرار است. به ازای چه مقادیری از a این

سیستم پایدار خواهد ماند؟

$$|a| > \frac{2}{5} \quad (۲)$$

$$|a| > \frac{2}{3} \quad (۱)$$

$$|a| < \frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$|a| < \frac{2}{5} \quad (۳)$$

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{z^{-1}(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + 2z^{-1})}$$

و ناحیه همگرایی آن $|z| > 2$ می باشد. در مورد این سیستم کدام گزینه درست است؟

(۱) سیستم علی است.

(۲) سیستم پایدار است.

(۳) اگر $h[-1] = 1$ پاسخ ضربه سیستم باشد آن گاه

(۴) اگر $\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) = 0$ پاسخ ضربه سیستم باشد آن گاه

سوال ۵: تابع تبدیل یک سیستم گسسته LTI به صورت

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{z^{-1}(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}$$

می باشد. در این صورت کدام گزاره درست است؟

(۱) این تابع تبدیل می تواند به یک سیستم سببی مربوط باشد.

(۲) برای ناحیه همگرایی $|z| < \frac{1}{2}$ پاسخ سیستم به ورودی $x[n] = 2^n u[-n-1]$ به صورت

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[-n-2] \text{ می باشد.}$$

(۳) برای ناحیه همگرایی $|z| < \frac{1}{2}$ سیستم پایدار است.

(۴) پاسخ ضربه برای $|z| > \frac{1}{2}$ به صورت $y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n] - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ می باشد.

سوال ۶: ورودی یک سیستم علی به صورت $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ می باشد. اگر $y[0] = 1$ ، $y[1] = 2$ ،

$y[2] = 3$ و $y[3] = 4$ باشد، مقدار پاسخ ضربه در $n = 3$ یعنی $h[3]$ کدام است؟

$\frac{5}{2}$ (۴)

(۳)

$\frac{1}{5}$ (۲)

(۱)

$$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) & n \leq 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$$

$$|z| > \frac{1}{3}, \frac{1}{3} e^{\pm j\frac{\pi}{4}} \quad (2)$$

$$|z| < \frac{1}{3}, \frac{1}{3} e^{\pm j\frac{\pi}{4}} \quad (1)$$

$$|z| > \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} e^{\pm j\frac{1}{3}} \quad (4)$$

$$|z| < \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} e^{\pm j\frac{1}{3}} \quad (3)$$

سوال ۸: اگر $H(z)$ تبدیل Z پاسخ ضربه مربوط به یک سیستم LTI باشد، کدام گزینه صحیح است؟

$$H(z) = \frac{1 - \frac{4}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{z^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

(۱) سیستم به شرط پایداری، علی است

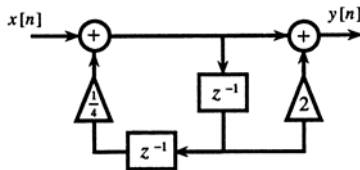
(۲) سیستم به شرط پایداری، غیر علی است.

(۳) سیستم همواره غیر علی است

(۴) سیستم همواره علی است.

سوال ۹: پاسخ ضربه سیستم نشان داده شده در شکل زیر با فرض علی بودن سیستم کدام است؟ ($u_{-1}[n]$ معرف

دنباله پله واحد می باشد).



$$h[n] = \left[\frac{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] u_{-1}[n] \quad (1)$$

$$h[n] = \left[\frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] u_{-1}[n] \quad (2)$$

$$h[n] = \left[\frac{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] u_{-1}[n] \quad (3)$$

$$h[n] = \left[\frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{5}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] u_{-1}[n] \quad (4)$$

سوال ۱۰: ورودی یک سیستم زمان دسسته LTI با پاسخ صربه $u[n] = \left(\frac{-7}{4}\right)^n$ به صورت

$$x[n] = \left(\frac{-7}{6}\right)^n \text{ است. خروجی این سیستم در لحظه } n=1 \text{ برابر است با:}$$

$\frac{-7}{8}$ (۴) $\frac{-7}{9}$ (۳) $\frac{49}{72}$ (۲) $-\frac{49}{72}$ (۱)

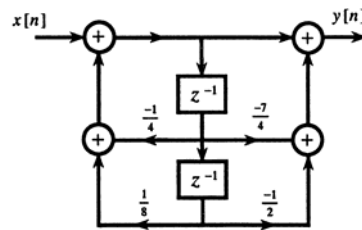
سوال ۱۱: گفته شده اگر ورودی یک سیستم LTI به صورت $x_1[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ باشد خروجی آن

$$x_2[n] = \left(\frac{-1}{4}\right)^n \text{ باشد خروجی آن } y_1[n] = \left[b\left(\frac{1}{2}\right)^n + 10\left(\frac{1}{3}\right)^n \right] u[n] \text{ خواهد بود و چنان چه ورودی}$$

$$y_2[n] = \frac{118}{9} \left(\frac{-1}{4}\right)^n \text{ خواهد بود، مقدار } b \text{ چقدر است؟}$$

$b = 4$ (۴) $b = 3$ (۳) $b = 2$ (۲) $b = 1$ (۱)

سوال ۱۲: شکل زیر نمایش جعبه ای یک سیستم LTI است.



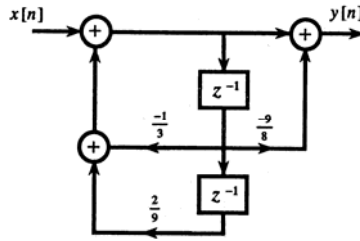
کدام یک از گزینه های زیر در مورد این سیستم نادرست است؟

(۱) تابع تبدیل سیستم به صورت $H(z) = \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \times \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$ است.

(۲) تابع تبدیل سیستم به صورت $H(z) = 4 + \frac{5}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \times \frac{14}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$ است.

(۳) تابع تبدیل سیستم به صورت $H(z) = \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}$ است.

(۴) تابع تبدیل سیستم به صورت $H(z) = \frac{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}$ است.



کدام یک از گزینه های زیر در مورد این سیستم صحیح است؟

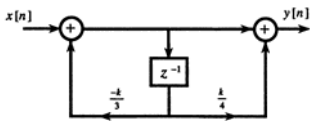
(۱) دو قطب در $Z = 0$ و $Z = \frac{9}{8}$ و دو صفر در $Z = \frac{1}{3}$ و $Z = \frac{-2}{3}$ دارد و ناپایدار است.

(۲) دو قطب در $Z = 0$ و $Z = \frac{9}{8}$ و دو صفر در $Z = \frac{1}{3}$ و $Z = \frac{-2}{3}$ دارد و اگر غیرعلی باشد پایدار است.

(۳) دو صفر در $Z = 0$ و $Z = \frac{9}{8}$ و دو قطب در $Z = \frac{1}{3}$ و $Z = \frac{-2}{3}$ دارد و پایدار است.

(۴) دو صفر در $Z = 0$ و $Z = \frac{9}{8}$ و دو قطب در $Z = \frac{1}{3}$ و $Z = \frac{-2}{3}$ دارد و اگر علی باشد پایدار است.

سوال ۱۴: ساختار فیلتر دیجیتال علی در شکل زیر نشان داده شده است:



کدام یک از گزینه های زیر در مورد این سیستم صحیح است؟

(۱) این سیستم به ازای $|k| < 4$ پایدار و پاسخ ضربه آن برابر است با:

$$h[n] = \left(\frac{k}{4}\right)^n u[n] + \frac{k}{3} \left(\frac{k}{4}\right)^{n-1} u[n-1]$$

(۲) این سیستم به ازای $|k| > 4$ پایدار و پاسخ ضربه آن برابر است با:

$$h[n] = \left(-\frac{k}{4}\right)^n u[n] + \frac{k}{3} \left(\frac{k}{4}\right)^{n-1} u[n-1]$$

(۳) این سیستم به ازای $|k| > 3$ پایدار و پاسخ ضربه آن برابر است با:

$$h[n] = \left(\frac{k}{3}\right)^n u[n] + \frac{k}{4} \left(\frac{k}{3}\right)^{n-1} u[n-1]$$

(۴) این سیستم به ازای $|k| < 3$ پایدار و پاسخ ضربه آن برابر است با:

$$h[n] = \left(-\frac{k}{3}\right)^n u[n] + \frac{k}{4} \left(-\frac{k}{3}\right)^{n-1} u[n-1]$$

خروجی سیستم در حالت دایمی به $y[n] - \frac{1}{2}y[n-2] + \frac{1}{16}y[n-4] = x[n] + x[n-1]$ داده شده است.

ورودی $x[n] = \sin\frac{\pi}{2}n + 3\cos\pi n$ برابر است با:

$$\frac{16\sqrt{2}}{25} \sin\frac{\pi}{2}(n-\frac{1}{2}) \quad (1) \quad \frac{9}{8} 3\cos\pi n \quad (2)$$

$$\frac{16\sqrt{2}}{25} \sin\frac{\pi}{2}(n-\frac{1}{2}) + \frac{9}{8} 3\cos\pi n \quad (3) \quad \frac{32}{23} \sin\frac{\pi}{2}(n-\frac{1}{2}) \quad (4)$$

سوال ۱۶: فرض کنید یک سیستم LTI و علی توسط معادله تفاضلی زیر توصیف شده است:

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = -6x[n] + x[n-1]$$

در صورتی که ورودی به صورت $x[n] = (\frac{1}{4})^n u[n]$ باشد، کدام یک از گزینه های زیر در مورد این سیستم نادرست

است؟

$$y[n] = [(\frac{1}{4})^n - 2(n+1)(\frac{1}{4})^n] u[n] \quad (1)$$

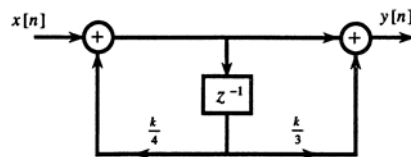
$$y[n] = -2(n+3)(\frac{1}{4})^n u[n] \quad (2)$$

$$y[n] = -6(n+1)(\frac{1}{4})^n u[n] + n(\frac{1}{4})^{n-1} u[n] \quad (3)$$

$$y[n] = -6(n+1)(\frac{1}{4})^n u[n] + n(\frac{1}{4})^{n-1} u[n-1] \quad (4)$$

سوال ۱۷: ساختار یک فیلتر دیجیتال در شکل زیر نشان داده شده است. در صورتی که ورودی $x[n] = (3)^n$ ،

خروجی این سیستم $y[n] = 16(3)^{n-2}$ باشد، مقدار k چقدر است؟



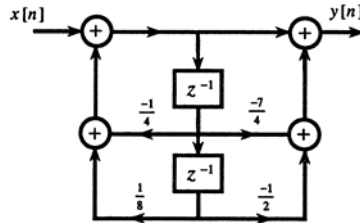
$$K = \frac{1}{3} \quad (۴)$$

$$K = 3 \quad (۱)$$

$$K = 4 \quad (۲)$$

$$K = \frac{1}{4} \quad (۳)$$

سوال ۱۸: شکل زیر نمایش جعبه ای یک سیستم LTI و علی است. چنانچه پاسخ ضربه این سیستم را $h[n]$ و تابع تبدیل آن را $H(z)$ بنامیم، کدام یک از گزینه های زیر در مورد این سیستم نادرست است؟



(۱) تبدیل فوریه $\left(\frac{1}{3}\right)^n h[n]$ همگرا خواهد شد.

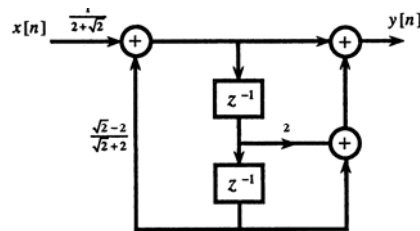
(۲) نقطه یا نقاطی روی دایره واحد (در صفحه Z) وجود دارد که $H(e^{j\omega}) = 0$ خواهد شد.

(۳) سیستمی با پاسخ ضربه $g[n] = n(h[n] * h[n])$ پایدار است.

$$H(z) = \frac{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}} \quad (۴) \text{ تابع تبدیل این سیستم به صورت}$$

سوال ۱۹: شکل مقابل یک شبکه دیجیتال برای پیاده سازی یک فیلتر با ترورت مرتبه دوم را نمایش می دهد. معادله

تفصیلی توصیف کننده این شبکه کدام است؟



$$\frac{1}{2 + \sqrt{2}} y[n] + (2 - \sqrt{2}) y[n - 2] = x[n] + 2x[n - 1] + x[n - 2] \quad (۱)$$

$$(2 + \sqrt{2}) y[n] + (\sqrt{2} - 2) y[n - 2] = x[n] + 2x[n - 1] + x[n - 2] \quad (۲)$$

$$(2 + \sqrt{2}) y[n] + (2 - \sqrt{2}) y[n - 2] = x[n] + 2x[n - 1] + x[n - 2] \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2 + \sqrt{2}} y[n] + (\sqrt{2} - 2) y[n - 2] = x[n] + 2x[n - 1] + x[n - 2] \quad (۴)$$

تواند صحیح باشد؟

(۱) این سیستم نمی تواند تماماً علی و پایدار باشد.

(۲) این سیستم نمی تواند تماماً علی و ناپایدار باشد.

(۳) این سیستم نمی تواند تماماً غیرعلی و ناپایدار باشد.

(۴) این سیستم نمی تواند تماماً غیرعلی و پایدار باشد.

سوال ۲۱: سیستم گسسته زمان LTI با پاسخ ضربه $h[n] = \delta[n] + \frac{3}{2}\delta[n-1] - \delta[-n+2]$ مفروض است.

وارون علی این سیستم ...

(۱) وجود ندارد

(۲) IIR و پایدار است.

(۳) FIR (Finite Impulse Response) است.

(۴) IIR (Infinite Impulse Response) و ناپایدار است.

سوال ۲۲: سیگنال زمان گسسته $x[n]$ را در نظر بگیرید. با فرض این که $n > 0$ و $x[n] = 0$ باشد، آن گاه ...

($X(z)$ تبدیل Z سیگنال $x[n]$ می باشد.)

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow 1} zX(z) \quad (۲)$$

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow 0} X(z) \quad (۱)$$

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow 1} X(z) \quad (۴)$$

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (۳)$$

سوال ۲۳: $h[n]$ دنباله ای با $H(z)$ دارای دو قطب در $\sqrt{3}e^{\pm j\frac{\pi}{8}}$ است. اگر $h_1[n] = h[n]\cos\frac{\pi}{4}n$ باشد. در

حالت کلی محل قطب های $H_1(z)$ به فرم زیر است:

$$\sqrt{\frac{3}{2}}e^{\pm j\frac{3\pi}{8}} \quad (۲)$$

$$\sqrt{3}e^{\pm j\frac{3\pi}{8}} \quad (۱)$$

$$\sqrt{3}e^{\pm j\frac{3\pi}{8}}, \sqrt{3}e^{\pm j\frac{\pi}{8}} \quad (۴)$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}}e^{\pm j\frac{3\pi}{8}}, \sqrt{\frac{3}{2}}e^{\pm j\frac{\pi}{8}} \quad (۳)$$

سوال ۲۴: سیگنال $x[n]$ مطلقاً انتگرال پذیر و دارای تبدیل Z به صورت $X(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}z^{-1}}$ است. $x[n]$ به چه صورت خواهد بود؟

$$x[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2} \right] u[n] \quad (۱)$$

$$x[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2} \right] u[-n] \quad (۲)$$

$$x[n] = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad (۳)$$

$$x[n] = \left[4 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 4 \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2} \right] u[n] \quad (۴)$$

سوال ۲۵: یک سیستم LTI توسط معادله تفاضلی زیر توصیف شده است. کدام یک از گزینه های زیر صحیح است؟

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2] + x[n-1]$$

(۱) این سیستم نمی تواند توأمأً علی و پایدار باشد.

(۲) این سیستم نمی تواند توأمأً غیر علی و پایدار باشد.

(۳) این سیستم نمی تواند توأمأً غیر علی و ناپایدار باشد.

(۴) این سیستم نمی تواند توأمأً علی و ناپایدار باشد.

سوال ۲۶: پاسخ یک سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان گسسته با پاسخ ضربه $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ به ورودی

$$x[n] = 2^n \quad \text{در } n=0 \text{ کدام مورد خواهد بود؟}$$

$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

(۳)

$$\frac{4}{3} \quad (۲)$$

(۱) نامحدود

در شرایط زیر صدق می کند:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] = 4, \quad h[0] = 1, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n h[n] = 0$$

محل صفر z_0 و قطب p_0 آن را مشخص کنید؟

$$p_0 = \frac{1}{3}, z_0 = 1 \quad (\text{ب})$$

$$p_0 = \frac{1}{2}, z_0 = 1 \quad (\text{ا})$$

$$p_0 = \frac{1}{3}, z_0 = -1 \quad (\text{د})$$

$$p_0 = \frac{1}{2}, z_0 = -1 \quad (\text{س})$$

سوال ۲۸: یک سیستم گسسته خطی و تغییرناپذیر با زمان را در نظر بگیرید که دارای پاسخ ضربه

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \text{ باشد. } (u[n] \text{ مشخص کننده دنباله پله واحد می باشد}). \text{ خروجی این سیستم } y[n] \text{ را وقتی}$$

$$\text{تبدیل فوریه ورودی } X(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega}} \text{ باشد برابر کدام است؟}$$

$$\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] u[n] \quad (\text{ب})$$

$$\left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] u[n] \quad (\text{ا})$$

$$\left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] u[n] \quad (\text{د})$$

$$\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] u[n] \quad (\text{س})$$

سوال ۲۹: اگر $x[n] = 1$ به ازای همه n ها

$$h(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \geq 0 \\ 4^n & n < 0 \end{cases}$$

مطلوب است محاسبه کانولوشن

$x[n]$ و $h[n]$.

$$\frac{7}{3} \quad (\text{د})$$

$$\frac{7}{5} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{2}{5} \quad (\text{س})$$

$$\frac{2}{3} \quad (\text{ا})$$

$$h[n] = \begin{cases} 4 & , \quad n \text{ is positive and even} \\ 6 & , \quad n \text{ is positive and odd} \end{cases}$$

در دیاگرام بلوکی این سیستم مقادیر a_2 و b_1 کدامند؟ (تاخیر به میزان یک نمونه: D)

$$\begin{cases} a_2 = 1 \\ b_1 = 4 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} a_2 = 1 \\ b_1 = 6 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_2 = -1 \\ b_1 = 4 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} a_2 = -1 \\ b_1 = 6 \end{cases} \quad (3)$$

سوال ۳۱: تبدیل Z یک سیگنال زمان گسسته $x[n]$ به صورت $X(z)$ مفروض است. تبدیل Z سیگنال $y[n]$

چیست؟

$$y[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{2}] & n \text{ is even} \\ x[\frac{n-1}{2}] & n \text{ is odd} \end{cases}$$

$$y(z) = (1 + z^2)X(z) \quad (2)$$

$$y(z) = (1 + z^{-1})X(z) \quad (1)$$

$$y(z) = (1 + z^2)X(z^2) \quad (4)$$

$$y(z) = (1 + z^{-1})X(z^2) \quad (3)$$

سوال ۳۲: تابع تبدیل یک سیستم زمان گسسته LTI به صورت:

$$H(z) = \frac{3}{1 - 0.25z^{-2}}, \quad |z| > 0.5$$

مفروض است. پاسخ این سیستم به ورودی دو طرفه $x[n] = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ چیست؟

$$4 + 3\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \quad (2)$$

$$3 + 4\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \quad (1)$$

$$4 + 2.4\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \quad (4)$$

(۳) بی نهایت

$x[n]$ هستند. اگر بین تبدیل Z سیگنال های $x[n]$ و $y[n]$ رابطه $Y(Z) = \frac{1}{2}[X(Z^{-1}) - X(-z)]$ برقرار

باشد، به ازای مقادیر فرد n مقدار $y[n]$ برابر با کدام یک از گزینه های زیر خواهد بود؟

- (۱) $-x_e[n]$ (۲) $x_e[n]$ (۳) $x_0[n]$ (۴) $-x_0[n]$

سوال ۳۴: یک سیستم زمان گسسته پایدار با تابع تبدیل:

$$M(Z) = \frac{1 - 3Z^{-1}}{(1 - 0.5Z^{-1})(1 - 2Z^{-1})}$$

را در نظر بگیرید. در مورد این سیستم کدام یک از دو گزاره زیر صحیح است؟

این سیستم دارای یک سیستم وارون پایدار است.

این سیستم دارای یک سیستم وارون علی است.

- (۱) فقط ۲ (۲) هر دو (۳) فقط ۱ (۴) هیچ کدام

(۱-۱)

$$H(z) = \frac{1}{1+0.5z^{-1}}, \quad X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{(1+0.5z^{-1})(1-z^{-1})} = \frac{\frac{1}{3}}{1+0.5z^{-1}} + \frac{\frac{2}{3}}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

$$y[n] = \frac{1}{3}(-0.5)^n u[n] + \frac{2}{3}u[n]$$

(۴-۲)

$$x[n] = a^n = z^n \Big|_{z=a} \Rightarrow y[n] = H(z)z^n \Big|_{z=a} = a^{n+1} \Rightarrow H(a) = a$$

$$H(z) = \frac{1-az^{-1}+z^{-2}}{7+az^{-1}}, \quad H(a) = a \Rightarrow \frac{1-az^{-1}+a^{-2}}{7+aa^{-1}} = a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

(۳-۳)

قطب های $H(z)$ را به دست می آوریم:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-4az^{-1} + \frac{25}{4}z^{-2}}$$

$$z^2 - 4az + \frac{24}{4}z^2 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = a(2 \pm j\frac{3}{2})$$

برای آن که سیستم LTI علی و پایدار باشد باید قطب های $H(z)$ داخل دایره واحد قرار گیرند. به عبارت دیگر اندازه قطب های $H(z)$ کوچکتر از یک باشند.

$$|z| < 1 \Rightarrow |a| < \frac{2}{5}$$

(۳-۴)

مقدار $Z = \infty$ در ROC تابع تبدیل $H(z)$ قرار ندارد. لذا سیستم غیر علی است. از طرفی با توجه با $|z| > 2$ دایره واحد در ROC تابع تبدیل $H(z)$ قرار نمی گیرد. لذا سیستم ناپایدار است. با عمل تقسیم صورت بر مخرج داریم:

$$H(z) = \frac{z^{-3}}{z^2 + \frac{3}{2}z - 1} = z - \frac{11}{6} + \dots \Rightarrow h[-1] = 1$$

برای توضیح بیشتر:

$$H[1] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{4}{9} \neq 0$$

(۲-۵)

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{z^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} H(z) \rightarrow \infty$$

سیستم غیر علی است از طرفی به ازای $|z| < \frac{1}{2}$ ROC $H(z)$ شامل دایره واحد نمی گردد و سیستم ناپایدار است. همچنین گزینه ۴ غلط است زیرا جمله z^{-1} در مخرج $H(z)$ بیانگر جمله $\delta[n+1]$ در پاسخ ضربه $h[n]$ است. برای گزینه (۲) داریم:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{z^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} \times \frac{(-1)}{1 - 2z^{-1}} = \frac{-z}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{2}$$

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[-n-2]$$

(۴-۶)

با فرض محدود بودن طول دنباله $y[n]$

$$y[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 4\delta[n-3]$$

$$Y(z) = 1 = 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{z^{-3}}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} + 2z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-3} - 2z^{-4}$$

$$\Rightarrow h[3] = \frac{5}{2}$$

(۱-۷)

سیگنال چپ گرا است، لذا ناحیه همگرایی نمی تواند به صورت گزینه های (۲) و (۴) باشد. با بهره گیری از خاصیت خطی بودن و تغییر مقیاس در حوزه Z داریم:

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[-n] = \frac{1}{2} \left\{ e^{j\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{3}\right)^n + e^{-j\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} u[-n]$$

$$X(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}}$$

تعیین ناحیه همگرایی و قطب های $X(z)$

$$\left| ze^{\pm j\frac{\pi}{4}} \right| < \frac{1}{3} \Rightarrow |z| < \frac{1}{3}$$

$$1 - \frac{1}{3}e^{\pm j\frac{\pi}{4}}z_p^{-1} = 0 \Rightarrow z_p = \frac{1}{3}e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$$

(۳-۸)

$$H(z) = \frac{z^3 - \frac{4}{3}z^2 + \frac{1}{2}z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} H(z) \rightarrow \infty$$

سیستم همواره غیر علی است.

(۳-۹)

$$Y(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{\frac{5}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$h[n] = \left[\frac{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] u[n]$$

$$y[n] = H(z)z^n \Big|_{z=-\frac{7}{8}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \times \left(\frac{-7}{8}\right)^n \Big|_{z=-\frac{7}{8}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{7}} \left(\frac{-7}{8}\right)^n$$

$$y[n] = \frac{7}{9} \left(\frac{-7}{8}\right)^n = \frac{-49}{72}$$

(۴-۱۱)

$$H(z) = \frac{Y_1(z)}{X_1(z)} = \frac{\frac{b}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{10}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}}{\frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}}, \quad H\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{118}{9}$$

$$H\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{\frac{b}{3} + \frac{30}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{118}{9} \Rightarrow b = 4$$

(۴-۱۲)

به کمک قاعده میسون داریم:

$$Y(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-1}}$$

(۴-۱۳)

$$H(z) = \frac{1 - \frac{9}{8}z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1} - \frac{2}{9}z^{-2}} = \frac{z(z - \frac{9}{8})}{(z + \frac{2}{3})(z - \frac{1}{3})}$$

صفرها $z = 0$ و $z = \frac{9}{8}$ و قطب‌ها $z = \frac{1}{3}$ و $z = -\frac{2}{3}$ قرار دارند. با توجه به این که قطب‌های $H(z)$ داخل دایره واحد

واقع شده‌اند لذا در صورتی سیستم پایدار می‌شود که علی باشد.

(۴-۱۴)

$$H(z) = \frac{1 + kz^{-1}}{1 + \frac{k}{3}z^{-1}}$$

$$|z| < 1 \Rightarrow \left| \frac{k}{3} \right| < 1 \Rightarrow |k| < 3$$

(۲-۱۵)

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{16}z^{-4}} = \frac{z^4 + z^3}{z^4 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{16}}$$

$$x[n] = \text{Sin} \frac{n\pi}{2} + 3 \text{Cis} \pi n = \frac{1}{j2}(j^n) - \frac{1}{j2}(-j)^n + 3(-1)^n$$

با توجه به مقدار ویژه به ازای $H(-1) = 0$ و $H(\pm j) = \frac{16}{25}(1 \mp j)$ داریم

$$y[n] = \frac{1}{j2}H(j)j^n - \frac{1}{j2}H(-j)(-j)^n + 3H(-1)(-1)^n = \frac{16}{25}\sqrt{2}\text{Sin} \frac{\pi}{2}(n - \frac{1}{2})$$

(۱-۱۶)

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{-6 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$y[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} Y(z) \lim_{z \rightarrow \infty} H(z)X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{-6 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} = -6$$

بین گزینه ها تنها گزینه (۱) می باشد که $y[0] \neq -6$ است.

(۳-۱۷)

با توجه به قضیه مقدار ویژه برای سیستم های LTI داریم:

$$H(z) = \frac{1 + \frac{k}{3}z^{-1}}{1 - \frac{k}{4}z^{-1}}, \quad H(3) = \frac{16}{9} \Rightarrow \frac{1 + \frac{k}{9}}{1 - \frac{k}{12}} = \frac{16}{9} \Rightarrow k = 3$$

(۲-۱۸)

به کمک قاعده میسون

$$H(z) = \frac{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}$$

قطب ها: $\frac{z}{2}$, $\frac{z}{4}$ و صفرها: $z = \frac{z}{4}$, $z = \frac{z}{4}$ می باشند. با توجه به محل صفرهای $H(z)$ در می یابیم بر روی دایره واحد صفری وجود ندارد.

برای توضیح بیشتر، قطب ها در داخل دایره واحد قرار دارند و با توجه به علی بودن آن سیستم پایدار است. از طرفی $F\{3^{-n}h[n]\}$ ، تبدیل Z دنباله $h[n]$ در $|z|=3$ است و دلیل همگرایی آن این است که $|z|=3$ در ROC در $H(z)$ قرار دارد.

همچنین محل قطب های تابع تبدیل $g[n]$ و همان محل قطب های $H(z)$ است که فقط تعداد قطب های در همان محل دو برابر شده اند.

$$G(z) = -zH^2(z)$$

(۳-۱۹)

$$H(z) = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \times \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-1}}{1 - \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2}z^{-1}}$$

$$(2 + \sqrt{2})Y(z) + (\sqrt{2} - 2)z^{-2}Y(z) = X(z) + 2z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z)$$

$$(2 + \sqrt{2})y[n] + (2 - \sqrt{2})y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

(۱-۲۰)

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 + kz^{-1} - z^{-2}} = \frac{z}{z^2 + kz - 1}$$

حاصل ضرب ریشه های $H(z)$ منفی یک است لذا یک ریشه در داخل دایره واحد و دیگری در خارج دایره واحد قرار می گیرند. لذا سیستم نمی تواند تواما علی و پایدار باشد.

(۴-۲۱)

$$H(z) = 1 + \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}$$

سیستم وارون علی است.

$$H_I(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}} = \frac{z^2}{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z + 2)}, |z| > 2$$

دایره واحد در ROC تابع تبدیل $H_I(z)$ قرار ندارد لذا سیستم $H_I(z)$ ناپایدار است. از طرفی $h_I[n]$ دارای طول نامحدود است.

$$X(z) = \dots + x[-2]z^n + x[-1]z + z[0]$$

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow 0} X(z)$$

(۴-۲۳)

$$h_1[n] = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}n} h[n] + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}n} h[n]$$

$$z_0^n h[n] \xleftrightarrow{z} H\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad |z_0|\alpha < |z| < |z_0|\beta$$

بنابراین جابجایی قطب‌ها به ازای $z_1 = \frac{z}{z_0}$ و $z_0 = e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$

$$z = \sqrt{3}e^{\pm j\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z_1 = \sqrt{3}e^{\pm j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{\mp j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{3}e^{\pm j\frac{3\pi}{8}}, \quad \sqrt{3}e^{\pm j\frac{3\pi}{8}}$$

(۱-۲۴)

$$X(z) = \frac{3z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{3z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{4}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}$$

سیستم مطلقاً انتگرال پذیر است لذا پایدار بوده و دایره واحد را در بر می‌گیرد و لذا ROC تابع $X(s)$ به صورت $|z| > \frac{1}{2}$

خواهد بود.

$$x[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 4\left(\frac{-1}{4}\right)^n u[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n] + \left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1} u[n]$$

(۱-۲۵)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1} - z^{-2}} = \frac{z}{z^2 - z - 1}$$

حاصل ضرب قطب‌های $H(z)$ یک است لذا یک قطب در بیرون و قطب دیگر در داخل دایره واحد قرار دارد. لذا سیستم نمی

تواند تواما علی و پایدار باشد.

(۲-۲۶)

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$y[n] = a^n H(a) \Rightarrow y[n] = z^n H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \Rightarrow n=0 \Rightarrow y[0] = \frac{1}{3}$$

(3-27)

$$H(z) = \frac{k(z - z_0)}{z - p_0}$$

$$h[0] = 1 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = 1 \Rightarrow k = 1$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n h[n] = 0 \Rightarrow H(-1) = 0 \Rightarrow -1 - z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = -1$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] = 4 \Rightarrow H(1) = 4 \Rightarrow \frac{1 - z_0}{1 - p_0} = 4, \quad z_0 = -1 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{2}$$

(3-28)

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{3}{4}z^{-1}\right)} = \frac{-2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}}$$

$$y[n] = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 3\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$$

(3-29)

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 4^n u[-n-1]$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1 - 4z^{-1}} \Rightarrow H(1) = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$y[n] = a^n H(a) = (1)^n \frac{7}{3} = \frac{7}{3}$$

(3-30)

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{k=2n} x\left[\frac{k}{3}\right]z^{-k} + \sum_{k=2n+1} x\left[\frac{k-1}{2}\right]z^{-k}, \quad k \in z$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-2k} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-(2k+1)}$$

$$= X(z^2) + z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-2k} = (1+z)^{-1} X(z^3)$$

$z = 1$ در ناحیه همگرایی $H(z)$ قرار دارد بنابراین $H(1) = 1$ از طرفی:

$$x[n] = 1 + \text{Cos} \frac{\pi}{2} n = x_1[n] + x_2[n]$$

$$x_1[n] = 1 \Rightarrow y_1[n] = H(1) \times 1 = \frac{3}{1 - \frac{1}{4}} = 4$$

$$x_2[n] = \text{Cos} \frac{\pi}{2} n = \frac{e^{j\frac{\pi}{2}n} + e^{-j\frac{\pi}{2}n}}{2} = \frac{1}{2} j^n + \frac{1}{2} (-j)^n$$

$$y_2[n] = \frac{1}{2} H(j) j^n + \frac{1}{2} H(-j) (-j)^n = \frac{6}{5} j^n + \frac{6}{5} (-j)^n = \frac{12}{5} \text{Cos} \frac{\pi}{2} n$$

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n] = 4 + 2.4 \text{Cos} \frac{\pi}{2} n$$

(۲-۳۲)

با توجه به خاصیت مقیاس دهی زمانی و فرکانسی

$$y[n] = \frac{1}{2} \{x[-n] - (-1)^n x[n]\}$$

به ازای nهای فرد

$$y[n] = \frac{1}{2} \{x[-n] + x[n]\} = x_e[n]$$

(۴-۳۳)

سیستم وارون دارای دو قطب $z = 0$ و $z = 3$ می باشد. لذا سیستم وارون به ازای $|z| > 3$ ناپایدار و به ازای $0 < |z| < 3$ غیر علی است.

تجزیه و تحلیل سیستم ها

۱- رابطه ورودی و خروجی یک سیستم زمان گسسته به صورت $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$ داده شده است.

$X(e^{j\omega})$ تبدیل فوریه ورودی $x[n]$ می باشد. کدام عبارت در مورد این سیستم صحیح نمی باشد؟

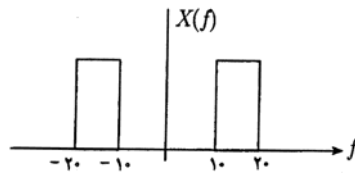
(۱) سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان است.

(۲) سیستم خطی و تغییرپذیر با زمان است.

(۳) سیستم وارون پذیر و پایدار است.

(۴) سیستم پایدار و بدون حافظه است.

۲- تبدیل فوریه سیگنال باند میانی زمان پیوسته به صورت ذیل داده شده است:



حداقل فرکانس نمونه برداری برای آن که بتوان این سیگنال را از روی نمونه های آن بازسازی نمود کدام مورد خواهد بود؟

۴۰ (۴)

۳۰ (۳)

۲۰ (۲)

۱۰ (۱)

۳- کدام یک از سیگنال ها به عنوان ورودی (تحریک) برای تعیین پاسخ فرکانسی یک سیستم LTI کفایت می کند؟

$$x(t) = \prod(t) \quad (۲)$$

$$x(t) = e^{-|t|} \quad (۱)$$

$$x(t) = \sin(t) \quad (۴)$$

$$x(t) = \Lambda(t) \quad (۳)$$

۴- $h_o(t)$ و $h_e(t)$ به ترتیب بخش های زوج و فرد پاسخ ضربه $h(t)$ از یک سیستم LTI علی است. اگر

$\int_{-\infty}^{\infty} H_e(j\omega) d\omega = 0$ و $h_e(t)$ بوده و کدام گزینه صحیح می باشد؟

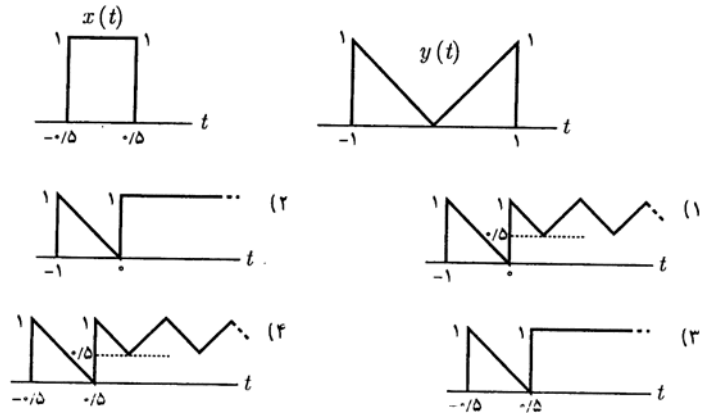
$$h(t) = 2h_o(t)u(t) \quad (۲)$$

$$h(t) = h_e(t)u(t) \quad (۱)$$

$$h(t) = 2h_e(t)u(t) \quad (۴)$$

$$h(t) = h_o(t)u(t) \quad (۳)$$

به دست می دهد؟



۶- پاسخ فرکانسی یک سیستم LTI به صورت:

$$H(j\omega) \begin{cases} j\omega e^{-j3\omega} & |\omega| < \pi \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

است در صورتی که ورودی سیستم $x(t) = 2\cos 4t + \sin 2t$ باشد، خروجی کدام مورد خواهد بود؟

$2\cos(2t) \quad (1)$
 $2\cos(2t - 6) \quad (2)$

$8\sin(4t) + 2\cos(2t) \quad (3)$
 $8\sin(4t - 12) + 2\cos(2t - 6) \quad (4)$

۷- $X(\omega)$ تبدیل فوریه سیگنال دلخواه $x(t)$ است. $X^*(3 - 2\omega)$ تبدیل فوریه کدام گزینه است؟

$\frac{3}{2} e^{3jt} x^*\left(\frac{3t}{2}\right) \quad (1)$
 $\frac{3}{2} e^{-\frac{3jt}{2}} x^*\left(-\frac{t}{2}\right) \quad (2)$

$\frac{1}{2} e^{\frac{3jt}{2}} x^*\left(\frac{t}{2}\right) \quad (3)$
 $\frac{3}{2} e^{-3jt} x^*\left(-\frac{3t}{2}\right) \quad (4)$

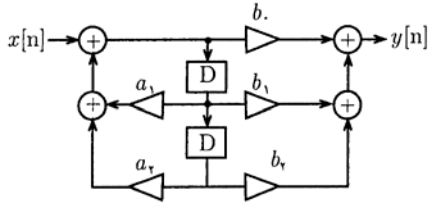
۸- اگر $x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$ در آن صورت ضرایب سری فوریه $y(t) = X\left(e^{j\frac{2\pi}{T}t}\right)$ عبارتند از:

$x[k] \quad (1)$
 $x[-k] \quad (2)$

$\frac{T}{2\pi} x[-k] \quad (3)$
 $\frac{T}{2\pi} x[k] \quad (4)$

$$h[n] = \begin{cases} 4 & \text{for } n \text{ positive \& even} \\ 6 & \text{for } n \text{ positive \& odd} \end{cases}$$

در دیاگرام بلوکی این سیستم (شکل زیر) مقادیر a_2 و b_1 کدامند؟ (تاخیر به میزان یک نمونه: D)



$$\begin{cases} a_2 = 1 \\ b_1 = 4 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} a_2 = 1 \\ b_1 = 6 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_2 = -1 \\ b_1 = 4 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} a_2 = -1 \\ b_1 = 6 \end{cases} \quad (3)$$

۱۰- پاسخ یک سیستم LTI زمان گسسته به ورودی $x_1[n] = 1 + \cos \frac{2\pi}{3}n$ برابر با $y_1[n] = 2 + \sin \frac{2\pi}{3}n$

است. پاسخ این سیستم به ورودی $x_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n-3m]$ کدام است؟

$$y_2[n] = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \sin \frac{2\pi n}{3} \quad (2)$$

$$y_2[n] = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cos \frac{2\pi n}{3} \quad (1)$$

$$y_2[n] = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \cos \frac{2\pi n}{3} \quad (4)$$

$$y_2[n] = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \sin \frac{2\pi n}{3} \quad (3)$$

۱۱- یک سیستم LTI زمان گسسته و علی، با معادله تفاضلی زیر توصیف می شود:

$$y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{3}{8}y[n-2] = 4x[n-2] + x[n-1] - \frac{3}{2}x[n]$$

این سیستم چه نوع فیلتری است؟

(۲) میان نگذر

(۱) میان گذر

(۴) پایین گذر

(۳) تمام گذر

$X(e^{j\omega})$ نشان داده و $Y(e^{j\omega})$ را به صورت مربع اندازه X یعنی $|X(e^{j\omega})| \triangleq Y(e^{j\omega})$ تعریف می کنیم.

با گرفتن عکس تبدیل فوریه از $Y(e^{j\omega})$ سیگنال $|y[n]|$ به دست می آید. در این صورت $y[12]$ برابر است با:

$$x[n] = \begin{cases} 15-n & 0 \leq n < 15 \\ 0 & \text{در غیر صورت} \end{cases}$$

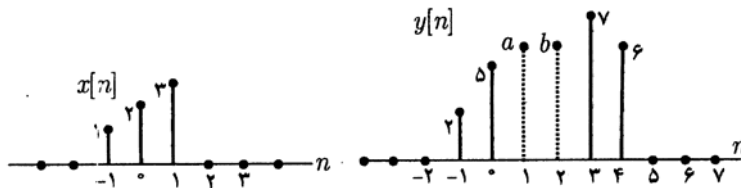
۸۳ (۲)

۸۲ (۱)

۸۶ (۴)

۸۵ (۳)

۱۳- یک سیستم زمان گسسته LTI دارای پاسخ ضربه به طول ۴، به ازای ورودی $x[n]$ ، خروجی $y[n]$ را ایجاد کرده است (شکل زیر). مقادیر مجهول $y[1] = a$ و $y[2] = b$ در دنباله خروجی برابرند با:



$$\begin{cases} a = 9 \\ b = 8 \end{cases} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} a = 8 \\ b = 7 \end{cases} \quad (۱)$$

$$\begin{cases} a = 9 \\ b = 7 \end{cases} \quad (۴)$$

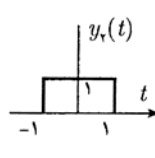
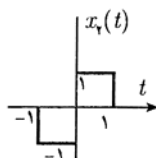
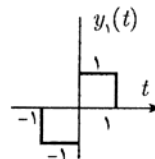
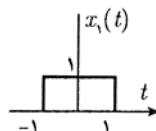
$$\begin{cases} a = 8 \\ b = 8 \end{cases} \quad (۳)$$

۱۴- یک سیستم خطی در نظر بگیرید. پاسخ این سیستم به دو ورودی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به صورت $y_1(t)$ و $y_2(t)$

مطابق شکل روبه رو مفروض است. با توجه به این اطلاعات کدام یک از دو عبارت زیر لزوماً صحیح است؟

(ب) این سیستم تغییرپذیر با زمان است.

(الف) این سیستم با حافظه است.



(۲) فقط الف

(۱) فقط ب

(۴) هیچکدام

(۳) الف و ب

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-2k]$$

است، این سیستم است.

(۱) تغییرناپذیر با زمان و معکوس پذیر

(۳) تغییرپذیر با زمان و معکوس پذیر

(۲) تغییرپذیر با زمان و معکوس ناپذیر

(۴) تغییرناپذیر با زمان و معکوس ناپذیر

۱- گزینه ۱ صحیح است.

(البته اگر ω_0 مضربی صحیح از 2π باشد، گزینه ۲ صحیح است).

بررسی خطی بودن: رابطه داده شده در حوزه فرکانس را به حوزه زمان باز می گردانیم:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\omega_0)}) \Rightarrow y[n] = e^{j\omega_0 n} x[n]$$

با حذف تمام پارامترهای وابسته به n و همچنین کمان های x و y رابطه کاملاً خطی $y = x$ می رسیم که با توجه به آن به خطی بودن سیستم پی می بریم.

بررسی تغییرناپذیری سیستم: با توجه به ضریب $e^{j\omega_0 n}$ که وابسته به متغیر زمانی n است. سیستم در حالت کلی تغییرناپذیر با زمان است البته اگر ω_0 مضربی صحیح از 2π باشد مقدار $e^{j\omega_0 n}$ همیشه ۱ خواهد شد و لذا سیستم در این حالت تغییرناپذیر با زمان خواهد بود که این امر را می توان در حوزه فرکانس به صورت زیر توجیه کرد:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\omega_0)}) \stackrel{\omega_0=2k\pi}{\Rightarrow} y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-2k\pi)})$$

از طرفی تبدیل فوری سیگنال های گسسته در زمان همیشه با دوره تناوب 2π متناوب می باشند و لذا داریم:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \Rightarrow y(t) = x(t) \Rightarrow$$

بررسی وارون پذیری: سیستم وارون پذیر است زیرا ضریب $e^{j\omega_0 n}$ هرگز صفر نخواهد شد.

یادآوری: سیستم هایی با شکل کلی $y[n] = f[n]x[n]$ وارون پذیرند اگر و تنها اگر $f(n) = 0$ ریشه صحیح نداشته باشد.

بررسی حافظه سیستم: از آنجا که برای محاسبه $y[n]$ در هر لحظه ای فقط به مقدار $x[n]$ در همان لحظه نیاز داریم، سیستم بی حافظه است.

بررسی پایداری: با محاسبه بهره سیستم داریم:

$$gain = \frac{y[n]}{x[n]} = e^{j\omega_0 n}$$

ملاحظه می شود که بهره سیستم همواره مقدار محدودی دارد و لذا سیستم پایدار است.

۲- گزینه ۲ صحیح است.

در حالت کلی کمترین فرکانس نمونه برداری برای عدم تداخل ۲ برابر بزرگترین فرکانس موجود در سیگنال است (نرخ ناپکویبست). ولی در مواردی برخی از سیگنال های باند میانی (با میان گذر) ممکن است بتوان با نرخ کمتر از ناپکویبست نیز نمونه برداری را انجام داد. در این حالات کافی است نمونه برداری را با نرخ انجام دهیم که کپی های انتقال یافته فرکانسی از سیگنال نمونه برداری شده، بر روی یک دیگر قرار نگیرند (عدم تداخل).

$$x_s(t) = x(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mL_s) \Rightarrow X_s(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_s X(f - mf_s)$$

در گزینه ۱ که $f_s = 10$ انتخاب شده است بدیهی است که به ازای $m = \pm 3$ کپی های $X(f)$ یعنی $X(f - 30)$ و $X(f + 30)$ بر روی مولفه های اصلی $X(f)$ قرار می گیرند ولی در گزینه ۲ که $f_s = 20$ انتخاب شده است هیچ یک از کپی های $X(f)$ یعنی $X(f - 20m)$ بر روی خود $X(f)$ قرار نمی گیرند و لذا با یک فیلتر میان گذر با فرکانس های قطع ۱۰ و ۲۰ هرتز می توان $X(f)$ را از $X_s(f)$ استخراج نمود.

دقت نماییم که به ازای $f_s = 30$ کپی های (± 1) از $X(f)$ یعنی $X(f \pm 30)$ دقیقاً بر روی $X(f)$ قرار می گیرند که قابل قبول نیست و به ازای $f_s = 40$ نیز که دقیقاً نرخ نایکویست است تداخل رخ نمی دهد.

۳- گزینه ۱ صحیح است.

برای محاسبه پاسخ فرکانسی با کمک ورودی، از رابطه ذیل استفاده می شود:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

برای آن که مقدار $H(\omega)$ در تمامی مقادیر حقیقی ω به دست بیاید باید از سیگنالی به عنوان $x(t)$ استفاده شود که $X(\omega)$ مربوط به آن هرگز صفر نشود و لذا گزینه ۱ صحیح است.

$$x(t) = e^{-|t|} \Rightarrow X(\omega) = \frac{2}{\omega^2 + 1} \neq 0, \quad \forall \omega$$

دقت نماییم که تبدیل فوریه گزینه ۲ به صورت تابع سینک خواهد بود که در برخی مقادیر ω صفر می شود و تبدیل فوریه گزینه ۳ به صورت توان دوم سینک است که آن نیز در برخی مقادیر ω صفر می شود و تبدیل فوریه گزینه ۴ نیز به صورت یک فیلتر پایین گذر ایده آل است که آن نیز در بسیاری از فرکانس ها صفر می شود.

۴- گزینه ۴ صحیح است.

$$h_e(t) = \frac{h(t) + h(-t)}{2}$$

$$h_o(t) = \frac{h(t) - h(-t)}{2}$$

$$h(t) = 0, \quad t < 0$$

با توجه به سه رابطه فوق، باید مقدار $h(t)$ در مقادیر مثبت t به دست آید. برای مقادیر مثبت t مقدار $h(-t)$ لزوماً صفر است (به علت علی بودن سیستم) و لذا ۲ رابطه اول به صورت ذیل خلاصه می شود:

$$h_e(t) = \frac{h(t)}{2}, \quad t > 0 \Rightarrow h(t) = 2h_e(t), \quad t > 0$$

$$h_o(t) = \frac{h(t)}{2}, \quad t > 0 \Rightarrow h(t) = 2h_o(t), \quad t > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_e(j\omega) d\omega = 2\pi h_e(0) = 0 \Rightarrow h_e(0) = 0$$

البته مقدار دقیق تابع $u(t)$ در $t = 0$ مقدار $\left(\frac{1}{2}\right)$ است و لذا نیازی به رهنمایی اخیر در ورت مساله وجود ندارد.

در حالت کلی در مورد سیگنال علی داریم:

$$h(t) = \begin{cases} 2h_e(t) & t > 0 \\ h_e(t) & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = 2h_e(t)u(t), \quad (u(t)) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} 2h_o(t) & t > 0 \\ ? & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

ملاحظه می شود که با داشتن قسمت فرد $h(t)$ نمی توان مقدار $h(0)$ را به دست آورد.

در مورد سیگنال های ضد علی نیز رابطه مشابهی وجود دارد:

$$h(t) = 2h_e(t)u(-t) = \begin{cases} 2h_e(t) & t > 0 \\ h_e(t) & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

دقت نماییم که سیگنال ضد علی سیگنالی است که برای لحظات مثبت مقدار صفر دارد.

۵- گزینه ۳ صحیح است.

در مورد یک سیستم LTI می توان نوشت:

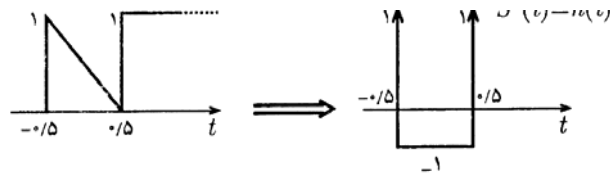
$$y(t) = x(t) * h(t)$$

از طرفی داریم:

$$h(t) = s'(t)$$

منظور از $s(t)$ در رابطه فوق پاسخ پله سیستم است.

با توجه به $x(t)$ و $y(t)$ که هر دو زوج هستند پی می بریم که $h(t)$ نیز باید زوج باشد زیرا کانولوشن دو سیگنال زوج، سیگنالی زوج خواهد شد و لذا گزینه ای می تواند درست باشد که مشتق آن تابعی زوج باشد که فقط در مورد گزینه ۳ این امر صحیح است.



۶- گزینه ۲ صحیح است.

با توجه به پاسخ فرکانسی سیستم در می یابیم که سیستم سیگنال هایی که فرکانس بالاتر از π یا کوچکتر از $(-\pi)$ دارند را حذف می کند و به سیگنالی هایی با فرکانس بین $(-\pi)$ تا π واحد تاخیر زمانی می دهد (به دلیل وجود $e^{-j3\omega}$ و از آنها مشتق گیری نیز می نماید (به دلیل وجود $j\omega$) و لذا می توان نوشت:

$$2\cos 4t \rightarrow \text{حذف} \rightarrow \text{عبور از سیستم} \rightarrow \frac{d(\sin 2t)}{dt} \Big|_{t \rightarrow t-3} = 2\cos(2t-6)$$

عبور از سیستم $\sin 2t$

۷- گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به خواص تبدیل فوریه داریم:

$$x(t) \xleftrightarrow{ft} X(\omega)$$

$$e^{-j3t} x(t) \xleftrightarrow{ft} X(\omega + 3)$$

$$\frac{1}{2} e^{+j3\frac{t}{2}} x\left(\frac{t}{-2}\right) \xleftrightarrow{ft} X(-2\omega + 3)$$

$$\frac{1}{2} e^{+j3\frac{t}{2}} x^*\left(\frac{t}{2}\right) \xleftrightarrow{ft} X^*(-2\omega + 3)$$

در محاسبه روابط فوق از قوانین ذیل استفاده کرده ایم:

$$x(t) \xleftrightarrow{ft} X(\omega) \Rightarrow \begin{cases} e^{j\omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{ft} X(\omega - \omega_0) \\ x(at) \xleftrightarrow{ft} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \Rightarrow |a|x(at) \xleftrightarrow{ft} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \\ x^*(t) \xleftrightarrow{ft} X^*(-\omega) \Rightarrow x^*(-t) \xleftrightarrow{ft} X^*(\omega) \end{cases}$$

۸- گزینه ۲ صحیح است.

$$x[n] \xleftrightarrow{ft} X(e^{j\omega}) \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

(۱)

$$\omega = \frac{2\pi}{T}t \Rightarrow X\left(e^{j\frac{2\pi}{T}t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\frac{2\pi}{T}tn}$$

حال به $X\left(e^{j\frac{2\pi}{T}t}\right)$ به شکل یک سیگنال پیوسته زمانی نگاه می کنیم و باید توجه داشته باشیم که از آنجا که تابعی از

$$X\left(e^{j\frac{2\pi}{T}t}\right) \text{ است، هر دوره تناوبی که این عبارت را داشته باشد، } X \text{ نیز همان دوره تناوب را دارد. حال سری فوریه } e^{j\frac{2\pi}{T}t}$$

را به دست می آوریم:

(۲)

$$X\left(e^{j\frac{2\pi}{T}t}\right) = T \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow X\left(e^{j\frac{2\pi}{T}t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{T}tn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

در سیگمای اول، تغییر متغیر $(n \rightarrow -k)$ می دهیم تا شبیه سیگمای دوم شود:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]e^{-j\frac{2\pi}{T}tk} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

برای برقراری تساوی فوق باشد داشته باشیم:

$$a_k = x[-k]$$

۹- گزینه ۱ صحیح است.

با کمک رابطه میسون تابع تبدیل سیستم را به دست می آوریم و برای این کار به جای بلوک های D از عبارت z^{-1} استفاده می

کنیم:

(۱)

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

از طرفی $h[n]$ را می توان به صورت ذیل بازنویسی کرد:

$$h[n] = (5 - (-1)^n)u[n] \Rightarrow H(z) = \frac{5}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 + z^{-1}}$$

(۲)

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1}{1-z^{-2}}$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \\ b_0 = 4 \\ b_1 = 6 \\ b_2 = 0 \end{cases}$$

۱۰- گزینه ۲ صحیح است.

اگر ضرایب ورودی یک سیستم LTI را با a_k نمایش دهیم و ضرایب سری فوریه خروجی سیستم را نیز با b_k نمایش دهیم بین a_k و b_k رابطه ذیل برقرار است:

$$b_k = a_k H(jk\omega_0)$$

در رابطه فوق $H(j\omega)$ پاسخ فرکانسی سیستم را نشان می دهد و ω_0 نیز فرکانس پایه سیگنال ورودی است. با توجه به توضیحات فوق ضرایب سری فوریه ورودی و خروجی داده شده را محاسبه می کنیم:

$$x_1[n] = 1 + \cos \frac{2\pi}{3}n = 1 + \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{3}n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{3}n}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow a_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ \frac{1}{2} & k=1 \\ \frac{1}{2} & k=-1 \end{cases}, \quad a_k = a_{k+3}$$

$$y_1[n] = 2 + \sin \frac{2\pi}{3}n = 2 + \frac{1}{2j}e^{j\frac{2\pi}{3}n} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{2\pi}{3}n}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow b_k = \begin{cases} 2 & k=0 \\ \frac{1}{2j} & k=1 \\ \frac{1}{2j} & k=-1 \end{cases}, \quad b_k = b_{k+3}$$

دقت نماییم که به علت متناوب بودن $x_1[n]$ و $y_1[n]$ با دوره تناوب ۳، a_k و b_k نیز همین دوره تناوب را دارند. حال می

توان نوشت:

$$\left. \begin{matrix} a_0 = 2 \\ b_0 = 2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow H(j0) = 2$$

$$\left. \begin{matrix} a_0 = \frac{1}{2} \\ b_0 = \frac{1}{2j} \end{matrix} \right\} \Rightarrow H\left(j\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{j}$$

$$\left. \begin{matrix} a_0 = \frac{1}{2} \\ b_0 = \frac{-1}{2j} \end{matrix} \right\} \Rightarrow H\left(-j\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2j}$$

حال ضرایب $x_2[n]$ را محاسبه می کنیم و با کمک مقادیر به دست آمده برای $H(j\omega)$ ضرایب سری فوریه $y_2[n]$ سپس خود $y_2[n]$ را محاسبه می کنیم:

$$x_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n-3m] \xleftarrow{f_s} a_k = \frac{1}{3}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_0 = \frac{1}{3}H(j0) = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3} \\ b_1 = \frac{1}{3}H\left(j\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{j} = \frac{1}{3j} \\ b_{-1} = \frac{1}{3}H\left(-j\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{-1}{j} = \frac{-1}{3j} \end{cases}$$

از آنجا که دوره تناوب $x_2[n]$ برابر ۳ می باشد و با توجه به آن که سیستم تغییرناپذیر با زمان است این دوره تناوب به $y_2[n]$ نیز منتقل می شود و لذا سری فوریه $y_2[n]$ به صورت ذیل قابل حصول است:

$$y_2[n] = \sum_{k=\langle 2 \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow y_2[n] = b_{-1}e^{-j\omega_0 n} + b_0 + a_1 e^{-j\omega_0 n}$$

$$\Rightarrow y_2[n] = -\frac{1}{3j} e^{-j\frac{2\pi}{3}n} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3j} e^{j\frac{2\pi}{3}n} \Rightarrow y_2[n] = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \text{Sin}\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$$

۱۱- گزینه ۳ صحیح است.

در ابتدا تابع تبدیل سیستم را به دست می آوریم:

$$H(z) = \frac{4z^2 + z - 2}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}}$$

با کمی دقت در می یابیم که مخرج کسر فوق با تغییر متغیر $z \rightarrow \frac{1}{z}$ و z برابر کردن کاملاً مشابه صورت کسر می شود و لذا بر

روی دایره واحد که اندازه تمام نقاط برابر یک است مقدار تابع تبدیل برابر ۴ است و از آنجا که تبدیل z بر روی دایره واحد $(z = e^{j\omega})$ تبدیل فوریه را به دست می دهد، می توان گفت:

$$|H(e^{j\omega})| = 4, \quad \forall \omega \Rightarrow \text{سیستم یک فیلتر تمام گذر است}$$

البته تمام گذر بودن فیلتر را با محاسبه $H(1)$ ، $H(-1)$ و $H(j)$ که به ترتیب بیانگر فرکانس های بالا، پایین و میانی می باشد نیز می توان اثبات کرد.

$$H(1) = H(-1) = H(j) = 4$$

بنابراین در فرکانس های بالا و پایین و میانی پاسخ فرکانسی مقدار ثابت ۴ دارد و لذا با توجه به گزینه ها فقط گزینه تمام گذر می تواند صحیح باشد.

۱۲- گزینه ۴ صحیح است.

با توجه به خواص تبدیل فوریه می توان نوشت:

$$Y(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2 = X(e^{j\omega}) \cdot X^*(e^{j\omega})$$

$$\Rightarrow y[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} * \mathcal{F}^{-1}\{X^*(e^{j\omega})\} = x[n] * x^*[-n]$$

از آنجا که $x[n]$ حقیقی است می توان به جای $x^*[n]$ از $x[-n]$ استفاده کرد:

$$y[n] = x[n] * x[-n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]x[n-k]$$

$$\Rightarrow y[12] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]x[k-12] = \sum_{k=12}^{14} (15-k)(15-(k-12))$$

$$\Rightarrow y[12] = (3)(15) + (14) + (1)(13) = 86$$

۱۳- گزینه ۴ صحیح است.

از آنجا که $x[n]$ از $(n = -1)$ آغاز می شود و $y[n]$ نیز از $(n = -1)$ آغاز می شود می توان نتیجه گرفت که $h[n]$ از $(n = 0)$ آغاز می شود و با توجه به طول عمر ۴ واحدی $h[n]$ می توان آن را به صورت زیر نمایش داد:

$$h[n] = \{ \dots 000 \overset{\downarrow}{h[0]} h[1] h[2] h[3] 000 \dots \}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

و لذا داریم:

$$\left. \begin{array}{l} y[-1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[-1-k] \\ x[-1-k] = \{\dots 0321 \dots\} \end{array} \right\} \Rightarrow y[-1] = 1 \times h[0] = 2 \Rightarrow h[0] = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[-k] \\ x[-k] = \{\dots 0321 \dots\} \end{array} \right\} \Rightarrow y[0] = 1h[1] + 2h[0] \Rightarrow h[1] = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} y[4] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[4-k] \\ x[4-k] = \{\dots 0 \downarrow 000032100 \dots\} \end{array} \right\} \Rightarrow y[4] = 3 \times h[3] = 6 \Rightarrow h[3] = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} y[3] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[3-k] \\ x[3-k] = \{\dots 000 \downarrow 0321 \dots\} \end{array} \right\} \Rightarrow y[3] = h[3] \times 2 + h[2] \times 3 \Rightarrow h[2] = 1$$

و لذا سیگنال $h[n]$ به صورت ذیل خواهد بود:

$$h[n] = \{\dots 0 \downarrow 2112\}$$

حال باید مقدار کانتولوشن در $n = 1$ و $n = 2$ را به دست آوریم تا a و b به دست آیند:

$$\left. \begin{array}{l} y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[1-k] \\ x[1-k] = \{\dots 0 \downarrow 3 \ 21 \dots\} \end{array} \right\} \Rightarrow y[1] = (3 \times 2) + (2 \times 1) + (1 \times 1) = 9 = a$$

$$\left. \begin{array}{l} y[2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[2-k] \\ x[2-k] = \{\dots 00 \downarrow 3210 \dots\} \end{array} \right\} \Rightarrow y[2] = (3 \times 1) + (2 \times 1) + (1 \times 2) = 7 = b$$

$y_2(t_0)$ نیز با هم برابر باشند که این شرط در سیگنال های داده شده برقرار است. زیرا در تمام لحظاتی که $x_1(t)$ و $x_2(t)$ برابرند خروجی های مربوطه نیز برابر هستند.

یک شرط لازم یک سیستم خطی و بدون حافظه این است که هر گاه ورودی صفر باشد، باید خروجی نیز در همان لحظه صفر گردد که این شرط نیز در مورد سیگنال های داده شده برقرار است. پس سیستم داده شده شروط لازم یک سیستم بی حافظه را دارد و لذا نمی توان در مورد حافظه آن با قاطعیت نظر داد.

اگر سیستم تغییرناپذیر با زمان باشد، با توجه به خطی بودن سیستم که در صورت تست مطرح شده، باید بتوان برای سیستم یک تابع تبدیل منحصر به فرد بدست آورد:

$$H(s) = \frac{Y_2(s)}{X_2(s)} = \frac{(e^s - e^{-s})/s}{(e^s - e^{-s})/s} = \frac{-e^s + 2 - e^{-s}}{e^s - e^{-s}}$$

پر واضح است که توابع تبدیل به دست آمده از دو روش فوق با هم برابر نیستند و لذا سیستم نمی تواند تغییرناپذیر با زمان باشد و حتماً تغییرپذیر با زمان است.

۱۵- گزینه ۳ صحیح است.

رابطه داده شده را با توجه به خواص تابع ضربه ساده می کنیم:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-2k]$$

$$\Rightarrow y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & n \text{ is even} \\ 0 & n \text{ is odd} \end{cases}$$

دقت نماییم که وقتی n فرد است $\delta[n-2k]$ به ازای همه مقادیر k ، مقدار صفر دارد و لذا حاصل سیگنال صفر می شود.

همچنین وقتی n زوج است، $\delta[n-2k]$ فقط به ازای $k = \frac{n}{2}$ مقدار یک دارد و طبق خاصیت غربالی تابع ضربه می توان به

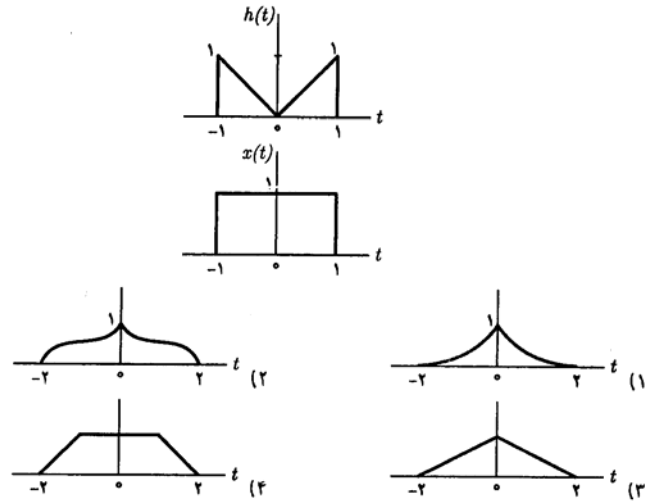
جای $x[n]$ از $x\left[\frac{n}{2}\right]$ استفاده نمود و آن را از سیگما خارج کرد.

بررسی تغییرناپذیری سیستم: با توجه به رابطه ورودی-خروجی به دست آمده سیستم تغییرپذیر با زمان است زیرا شروط سیستم بر حسب n هستند و علاوه بر آن ضریب n داخل کمان x عددی غیر از یک (در اینجا $1/2$) است که هر دو باعث تغییرپذیر با زمان بودن سیستم می شوند.

بررسی وارون پذیری سیستم: رابطه داده شده رابطه یک سیستم up sampler با فاکتور ۲ است که بین هر دو نمونه از ورودی یک نمونه صفر اضافه می کند و لذا با داشتن خروجی و حذف کردن صفرهای اضافه شده می توان ورودی را به طور کامل به دست آورد و به این ترتیب سیستم وارون پذیر است.

تجزیه و تحلیل سیستم ها

۱- اگر پاسخ ضربه سیستم LTI به صورت $h(t)$ باشد، پایخ ضربه سیستم به ورودی $x(t)$ به صورت کدام یک از شکل های زیر می تواند باشد؟

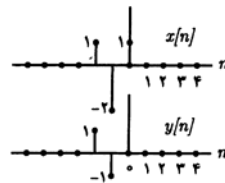


۲- اگر $X(e^{j\omega})$ تبدیل فوریه سیگنال زمان گسسته $x[n]$ باشد، در این صورت ضرایب بسط سری فوریه سیگنال زمان پیوسته $y(t) = X(e^{j2t})$ کدام است؟

- (۱) $x[-k]$
- (۲) $x[k]$
- (۳) $x[2k]$
- (۴) $x[-2k]$

۳- کدام یک از دو گزاره زیر در مورد سیگنال های زمان گسسته شکل ذیل صحیح است؟

- (الف) یک سیستم LTI علی می تواند $x[n]$ را به $y[n]$ تبدیل کند.
- (ب) یک سیستم LTI پایدار می تواند $x[n]$ را به $y[n]$ تبدیل کند.



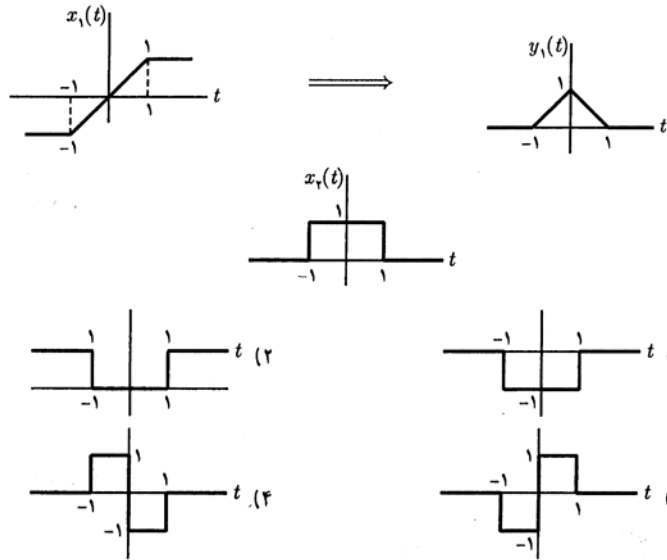
(۴) هیچکدام

(۳) هر دو

(۲) فقط ب

(۱) فقط الف

به ورودی $x_2(t)$ چیست؟



۵- در مورد سیستمی که رابطه ورودی- خروجی آنها به صورت زیر می باشد، کدام گزینه نادرست می باشد؟

$$y(t) = \begin{cases} 0 & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-2) & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

(۱) این سیستم علی و پایدار است.

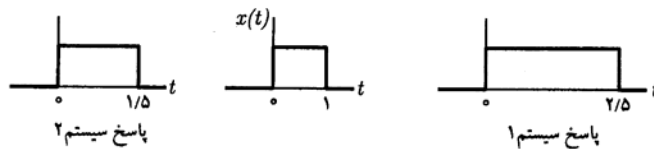
(۲) این سیستم غیرخطی و TI است.

(۳) این سیستم TI و معکوس ناپذیر است.

(۴) این سیستم معکوس ناپذیر و حافظه دار است.

۶- در شکل زیر ورودی $x(t)$ و پاسخ دو سیستم به این ورودی نشان داده شده است. کدام یک از این دو سیستم

می تواند یک سیستم LTI باشد؟



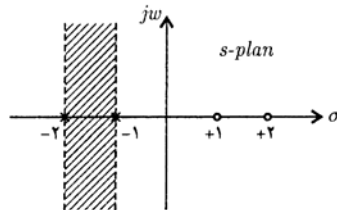
(۱) فقط سیستم ۱

(۲) فقط سیستم ۲

(۳) هر دو

(۴) هیچکدام

کدام یک از موارد زیر ناحیه همگرایی سیستم معکوس $\left(H_i(s) = \frac{1}{H(s)} \right)$ خواهد بود:



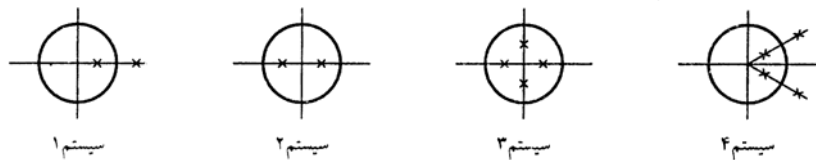
(۱) $R_e(s) < 1$

(۲) $R_e(s) > 2$

(۳) $1 < R_e(s) < 4$

(۴) هر سه جواب داده شده می تواند درست باشد.

۸- محل قطب های چهار سیستم زمان گسسته در صفحه Z در شکل زیر نشان داده شده است (صفرها نشان داده نشده است). شعاع دایره ها نیز برابر با واحد است. پاسخ ضربه کدام یک از سیستم ها میز تواند تقارن زوج داشته باشد؟



(۴) ۱ و ۲

(۳) ۳ و ۴

(۲) ۱ و ۴

(۱) ۲ و ۳

۹- معادله دیفرانسیل یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان پیوسته علی به صورت زیر داده شده است:

$$y'' - y = x' + 2x$$

پاسخ این سیستم به ورودی های $x_1(t) = e^{2t}$ و $x_2(t) = e^{-2t}$ کدام مورد خواهد بود؟

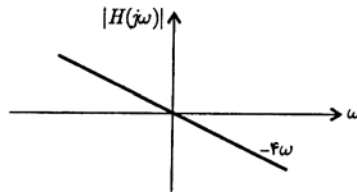
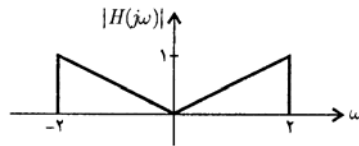
(۱) $y_2(t) = 0$, $y_1(t) = \frac{4}{3}e^{2t}u(t)$

(۲) $y_2(t) = \infty$, $y_1(t) = \frac{4}{3}e^{2t}u(t)$

(۳) $y_2(t) = \infty$, $y_1(t) = \frac{4}{3}e^{2t}$

(۴) $y_2(t) = 0$, $y_1(t) = \frac{4}{3}e^{2t}$

کدام است $x(t) = \text{Sin}\left(\frac{t}{2}\right)$ ؟



$$\frac{1}{4} \text{Sin}\left(\frac{t}{2} - 1\right) \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \text{Sin}\left(\frac{t}{2} - 1\right) \quad (۱)$$

$$\frac{1}{2} \text{Sin}\left(\frac{t}{2} - 2\right) \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \text{Sin}\left(\frac{t}{2} - 2\right) \quad (۳)$$

۱۱- اگر تبدیل فوریه سیگنال زمان گسسته $x[n]$ به صورت زیر باشد:

$$x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \pi \delta\left(\omega - \frac{k\pi}{2}\right)$$

آن گاه $x[6]$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} \text{Cos } \omega & \frac{\pi}{2} \leq |\omega| \leq \pi \\ 0 & 0 \leq |\omega| \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{۱۲- اگر}$$

باشد و $y[n] = (-1)^n x[n]$ پاسخ ضربه یک فیلتر ... است.

۴ پایین گذر

۳ میان نگذر

۲ میان گذر

۱ بالاگذر

الف) سیستم LTI زمان گسسته علی با تابع تبدیل $\frac{1+2z^{-1}}{1-3z^{-1}}$ دارای معکوس پایدار است.

ب) سیستم با ورودی $x(t) = 3 \sin(2\pi t)$ و خروجی $y(t) = 5 \sin^2(\pi t) - 2.5$ می تواند یک سیستم LTI باشد.

(۱) فقط الف (۲) فقط ب (۳) هر دو (۴) هیچکدام

۱۴- معادله دیفرانسیل یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان پیوسته به صورت $y'' - y' - 2y = x$ داده شده است. این سیستم نمی تواند ... باشد.

(۱) ناپایدار و غیر علی (۲) ناپایدار و علی
(۳) پایدار و علی (۴) پایدار و غیر علی

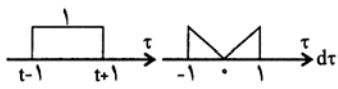
۱۵- اگر ورودی یک فیلتر پایین گذر ایده آل با فرکانس قطع $3\pi \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ به صورت زیر باشد:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[2(-1)^k \delta\left(t - \frac{k}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{1}{2} - k\right) \right]$$

آن گاه خروجی فیلتر کدام است؟

(۱) $y(t) = (10 \cos 2\pi t) - 1$
(۲) $y(t) = (5 \cos 2\pi t) - 1$
(۳) $y(t) = (-\cos 2\pi t) - 5$
(۴) $y(t) = (-2 \cos 2\pi t) + 5$

۱- با توجه به خواص یک سیستم LTI می توان نوشت:

$$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau) d\tau$$


با توجه به مقدار t سیگنال های $h(\tau)$ و $x(t-\tau)$ حالت های متفاوتی نسبت به هم پیدا می کنند.

حالت اول ($t+1 < -1 \Rightarrow t < -2$):

در این حالت $h(\tau)$ و $x(t-\tau)$ هیچ همپوشانی ندارند و لذا حاصلضرب آنها صفر است و داریم:

$$y(t) = 0$$

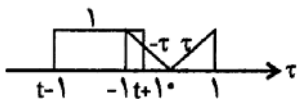
حالت دوم ($-1 < t+1 < 1 \Rightarrow -2 < t < 0$):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau) d\tau$$

با توجه به اینکه تابع $h(\tau)$ دارای دو رابطه متفاوت است این حالت به دو زیرحالت تقسیم می شود:

حالت دوم- زیر حالت اول ($-1 < t+1 < 0 \Rightarrow -2 < t < -1$):

در این صورت دو سیگنال نسبت به هم شکل ذیل را پیدا می کنند:



$$\Rightarrow y(t) = \int_{-1}^{t+1} \tau d\tau = \left[\frac{\tau^2}{2} \right]_{-1}^{t+1} = \frac{1}{2} - \frac{(t+1)^2}{2} = \frac{-t^2 - 2t}{2}$$

دقت نماییم که پاسخ درست در همین مرحله قابل شناسایی است بدین ترتیب که با توجه به تابع غیرخطی $\frac{-t^2 - 2t}{2}$ گزینه

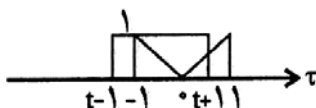
های ۳ و ۴ نادرست می باشند. با دو بار مشتق گیری از جواب داریم:

$$\left(\frac{-t^2 - 2t}{2} \right)'' = -1$$

و لذا تقعر $y(t)$ در بازه ($-2 < t < -1$) باید رو به پایین باشد که با گزینه ۲ تطابق دارد.

حالت دوم- زیر حالت دوم ($0 < t+1 < 1 \Rightarrow -1 < t < 0$):

در این حالت دو سیگنال نسبت به هم به شکل ذیل می باشند:



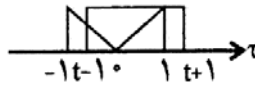
$$\Rightarrow y(t) = \int_{-1}^0 -\tau d\tau + \int_0^{t+1} \tau d\tau = \frac{1}{2} + \frac{(t+1)^2}{2}$$

حالت سوم $(-1 < t-1 < 1 \Rightarrow 0 < t < 2)$:

در اینجا نیز با توجه به آن که سیگنال $h(\tau)$ دارای دو رابطه متفاوت می باشد، حالت سوم را به دو زیر حالت تقسیم می کنیم:

حالت سوم- زیر حالت اول $(-1 < t-1 < 0 \Rightarrow 0 < t < 1)$:

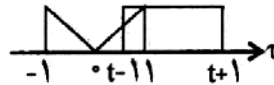
در این حالت موقعیت نسبی دو سیگنال به صورت زیر است:



$$\Rightarrow y(t) = \int_{t-1}^0 -\tau d\tau + \int_0^1 \tau d\tau = \frac{(t-1)^2}{2} + \frac{1}{2}$$

حالت سوم- زیر حالت دوم $(0 < t-1 < 1 \Rightarrow 1 < t < 2)$:

در این حالت موقعیت نسبی دو سیگنال به صورت زیر است:



$$\Rightarrow y(t) = \int_{t-1}^1 \tau d\tau = \frac{1}{2} - \frac{(t-1)^2}{2} = \frac{(t-1)^2}{2}$$

حالت چهارم $(1 < t-1 \Rightarrow t < 2)$:

در این حالت $h(\tau)$ و $x(t-\tau)$ هیچ همپوشانی ندارند و لذا حاصلضرب آنها صفر است.

۲- گزینه ۱ صحیح است.

در ابتدا رابطه ضرایب $y(t)$ را می نویسیم و باید دقت نماییم که $Y(e^{j\omega})$ در حالت کلی دارای دوره تناوب 2π است و لذا

دوره تناوب $X(e^{jt})$ نیز 2π است. بنابراین دوره تناوب $x(e^{j2t})$ برابر π خواهد بود و داریم:

$$\omega_{0y} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \Rightarrow y[k] = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi y(t) e^{-jk2t} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi X(e^{j2t}) e^{-jk2t} dt$$

با تغییر متغیر $(k \rightarrow n)$ داریم:

$$y[n] = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi X(e^{j2t}) e^{-jn2t} dt$$

حال تغییر متغیر $(t \rightarrow \omega)$ می دهیم:

$$y[n] = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi X(e^{j2\omega}) e^{-j2n\omega} d\omega$$

$$y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(e^{j\Omega}) e^{-jn\Omega} d\Omega$$

با توجه به رابطه عکس تبدیل فوریه سیگنال های گسسته طرف دوم، رابطه اخیر با $x[-n]$ برابر است و لذا می توان نوشت:

$$y[n] = x[-n] \Rightarrow y[k] = x[-k]$$

۳- گزینه ۱ صحیح است.

با فرض LTI بودن سیستم تابع تبدیل آن را به دست می آوریم:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 - z}{z^2 - 2z + 1}$$

$$= \frac{z(z-1)}{(z-1)^2} = \frac{1}{z-1} = \frac{z}{1-z^{-1}}$$

با توجه به آن که تابع تبدیل سیستم بر روی دایره واحد قطب قرار دارد، این سیستم هرگز نمی تواند پایدار باشد زیرا برای پایداری می بایست دایره واحد داخل ROC باشد که به علت وجود قطب بر روی دایره واحد این امر امکان پذیر نمی باشد.

با توجه به آن که $\lim_{|z| \rightarrow \infty} H(z)$ مقدار محدود یک دار داراست، سیستم می تواند علی باشد.

۴- گزینه ۲ صحیح است.

قبل از حل این تست دو نکته زیر را یادآوری می کنیم:

نکته ۱: در یک سیستم بی حافظه (تغییرپذیر یا تغییرناپذیر با زمان) می توان نتیجه گیری ذیل را داشت:

$$x_1(t_0) = x_2(t_0) \Rightarrow y_1(t_0) = y_2(t_0)$$

یعنی در یک سیستم بی حافظه اگر دو ورودی متفاوت در یک زمان خاص t_0 یک مقدار را پیدا کند، خروجی های متناظر نیز در آن زمان t_0 برابر خواهد بود.

نکته ۲: در یک سیستم بی حافظه و تغییرناپذیر با زمان دو نتیجه گیری ذیل صحیح است:

$$x_1(t_0) = x_1(t_1) \Rightarrow y_1(t_0) = y_1(t_1)$$

$$x_1(t_0) = x_2(t_1) \Rightarrow y_1(t_0) = y_2(t_0)$$

یعنی اگر یک ورودی در ۲ لحظه t_0 و t_1 مقدار یکسانی داشته باشد، خروجی نیز در آن لحظات مقدار یکسانی دارد و حتی اگر دو ورودی متفاوت در دو لحظه t_0 و t_1 مقدار یکسانی داشته باشند، خروجی های متناظر آنها نیز در لحظات t_0 و t_1 با هم برابرند.

حال با دانستن نکات فوق تست را حل می کنیم:

$$x_1(0) = x_2(t) = 0 \quad |t| > 1 \Rightarrow y_2(t) = y_1(0) \quad |t| > 1$$

$$y_2(t)=1, \quad |t|>1$$

با توجه به رابطه اخیر فقط گزینه ۲ می تواند صحیح باشد ولی برای محاسبه $y_2(t)$ به طور کامل، حل را ادامه می دهیم:

$$x_1(t)=1 \quad t>1, \quad x_2(t)=1 \quad |t|<1 \Rightarrow y_2(t)=0 \quad |t|<1$$

۵- گزینه ۴ صحیح است.

سیستم داده شده علی است زیرا برای محاسبه خروجی در هر لحظه به مقدار ورودی در همان لحظه یا دو واحد قبل آن نیاز داریم و هرگز در هیچ لحظه ای به مقادیر آینده ورودی نیاز نخواهیم داشت.

سیستم غیر خطی است زیرا شروط آن بر حسب x می باشند، به عنوان مثال اگر ورودی $x_1(t)=5$ را به سیستم اعمال نماییم، خروجی مقدار ثابت ۱۰ خواهد شد زیرا:

$$x_1(t)=5 \Rightarrow x_1(t-2)=5 \Rightarrow y_2(t)=x_1(t)+x_1(t-2)=10$$

حال اگر ورودی را منفی کنیم یعنی داشته باشیم:

$$x_2(t)=-x_1(t)=5 \Rightarrow y_2(t)=0$$

یعنی با منفی کردن ورودی، خروجی در صفر ضرب شد و لذا سیستم همگن نمی باشد پس غیر خطی است.

سیستم تغییرناپذیر با زمان است زیرا تمام متغیرهای زمانی t در داخل کمان های x و y هستند و تمامی کمان ها نیز به صورت کلی $t+b$ ($b \in R$) می باشند. تغییرناپذیری سیستم با زمان را به صورت ذیل می توان نشان داد:

$$y(t-1)=\begin{cases} 0 & x(t-1)<0 \\ x(t-1)+x(t-3) & x(t-1)\geq 0 \end{cases}$$

از طرفی داریم:

$$\hat{x}(t)=x(t-1) \Rightarrow \hat{y}(t)=T\{\hat{x}(t)\}=T\{x(t-1)\}$$

$$= \begin{cases} 0 & \hat{x}(t)<0 \\ \hat{x}(t)+\hat{x}(t-2) & \hat{x}(t)\geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{y}(t)=\begin{cases} 0 & x(t-1)<0 \\ x(t-1)+x(t-3) & x(t-1)\geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{y}(t)=y(t-1)$$

سیستم حافظه دار است زیرا اگر $x(t)$ مثبت باشد برای محاسبه $y(t)$ علاوه بر مقدار $x(t)$ مقدار $x(t-2)$ را نیز نیاز داریم.

سیستم معکوس ناپذیر است زیرا می توان ورودی های متفاوتی پیدا نمود که خروجی یمنان تولید می کنند به عنوان مثال پاسخ سیستم به تمام ورودی های $x_1(t)=-2+\sin t$, $x_2(t)=-2$, $x_3(t)=-5$, $x_4(t)=0$.

$x_5(t) = \cos \frac{t}{2}$ و ... صفر خواهد شد؛ در مورد ۲ ورودی اول چون در تمامی زمان ها منفی می باشند خروجی از شرط بالا

محاسبه می شود و لذا صفر است و در مورد $x_5(t)$ نیز در لحظاتی که خروجی از رابطه پایین محاسبه می شود داریم:

$$y(t) = \cos \frac{\pi}{2} t + \cos \left(\frac{\pi}{2} (t-2) \right) = \cos \frac{\pi}{2} t + \cos \left(\frac{\pi}{2} t - \pi \right) = 0$$

با توجه به مطالب گفته شده گزینه ۴ مورد نظر می باشد.

۶- گزینه ۴ صحیح است.

برای حل این تست ابتدا تبدیل های فوریه زیر را محاسبه می کنیم:

$$X(\omega) = A e^{-j\frac{\omega}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega}$$

$$Y_1(\omega) = B e^{-j\frac{5}{4}\omega} \frac{\sin\left(\frac{5}{4}\omega\right)}{\omega}$$

$$Y_2(\omega) = C e^{-j\frac{3}{4}\omega} \frac{\sin\left(\frac{3}{4}\omega\right)}{\omega}$$

ثابت های A ، B و C به دامنه پالس های داده شده وابسته است که اگر دامنه این پالس ها را یک در نظر بگیریم، A و B و C مقدار ۲ خواهند داشت که این موضوع در کلیت حل مساله هیچ تاثیری ندارد.

با کمی دقت در می یابیم که در برخی از فرکانس ها مقدار $X(\omega)$ صفر است ولی در همان فرکانس ها $Y_1(\omega)$ و $Y_2(\omega)$ غیر صفر هستند (به عنوان مثال فرکانس زاویه ای $\omega = 2\pi$ به این صورت است) که این موضوع با LTI بودن سیستم تناقض دارد زیرا در یک سیستم LTI داریم:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

با توجه به رابطه فوق اگر $Y(\omega)$ در فرکانسی غیر صفر باشد، می بایست $X(\omega)$ و $H(\omega)$ هر دو در آن فرکانس غیر صفر باشند (البته اگر $X(\omega)$ در فرکانسی صفر و در همان فرکانس $H(\omega)$ مقدار بی نهایت را اختیار کند، ممکن است در $Y(\omega)$ آن فرکانس دیده شود و لذا بهتر بود در صورت تست به جای عبارت سیستم LTI از عبارت سیستم LTI پایدار استفاده می شد).

نتیجه مهم: برای آن که فرکانس خاصی در خروجی یک سیستم LTI پایدار دیده شود، می بایست آن فرکانس در ورودی و پاسخ فرکانسی سیستم موجود و غیر صفر باشد.

شاید این سوال برای شما خواننده گرامی پیش بیاید که چون در صورت تست صحبتی از پایداری سیستم نشده است، و با توجه به توضیحات داده شده، پس هر دو سیستم می توانند بیانگر یک سیستم LTI (البته ناپایدار) باشند و گزینه ۳ صحیح است. در پاسخ باید گفت که حق کاملاً با شماست؛ و با توجه به کلید سازمان سنجش که گزینه ۴ را درست اعلام کرده است، حتماً باید شرط

می کند که طراح پایداری سیستم را در این گونه سوالات به عنوان پیش فرض در نظر می گیرد. برای درک بهتر، ممساله را بار دیگر بدون در نظر گرفتن شرط پایداری حل می کنیم:

$$X(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s}) \quad , \quad Y_1(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-2.5s})$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-1.5s})$$

$$\Rightarrow H_1(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)} = \frac{1 - e^{-2.5s}}{1 - e^{-s}} \quad , \quad H_2(s) = \frac{1 - e^{-1.5s}}{1 - e^{-s}}$$

با توجه به خواص تبدیل لاپلاس داریم:

$$y_1(t) - y_1(t-1) = x(t) - x(t-2.5)$$

$$y_2(t) - y_2(t-1) = x(t) - x(t-1.5)$$

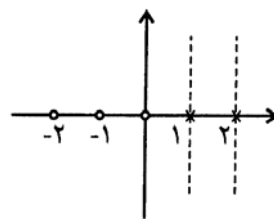
هر یک از دو سیستم فوق بیانگر ۲ سیستم (علی و غیر علی) و البته ناپایدار می باشند که به ورودی $x(t)$ خروجی های داده شده را می دهند.

۷- گزینه ۱ صحیح است.

با توجه به آرایش صفر و قطب $H(s)$ داریم:

$$H_i(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{(s+1)(s+2)}{(s-1)(s-2)}$$

و لذا آرایش صفر و قطب $H_i(s)$ به صورت ذیل است:



برای آرایش فوق سه ناحیه برای ROC می توان متصور بود:

$$R_e\{s\} < 1 \quad , \quad 1 < R_e\{s\} < 2 \quad , \quad R_e\{s\} > 2$$

با توجه به آن که ناحیه همگرایی دو سیستم معکوس می بایست دارای اشتراک غیر تهی باشند از بین سه ناحیه فوق فقط $R_e\{s\} < 1$ قابل قبول است.

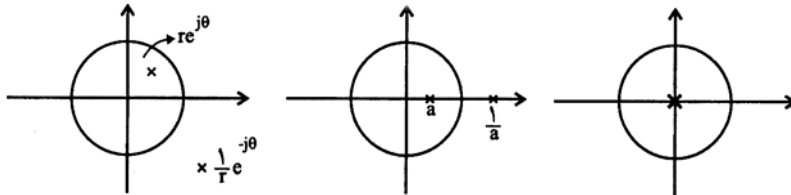
۸- گزینه ۲ صحیح است.

با فرض زوج بودن سیگنال $h[n]$ می توان نوشت:

$$n[n] = n[-n] \Rightarrow H(z) = H\left(\frac{1}{z}\right)$$

اگر $H(z)$ در z_0 قطبی داشته باشد برای برقراری تساوی فوق می بایست قطبی در $\frac{1}{z_0}$ نیز داشته باشد و لذا آرایش قطب

های آن به صورت ذیل خواهد بود:



رسم حالت های خاص $\theta = \pi$ و $\theta = \frac{\pi}{2}$ را به عهده شما خوانندگان گرامی می گذاریم.

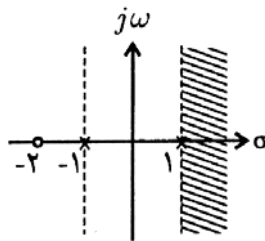
دقت نماییم که اگر سیستم مورد بحث حقیقی باشد برای هر قطب داده شده می بایست مزدوج آن را در نظر بگیریم که به شکل سیستم ۴ در صورت تست می رسمیم.

۹- گزینه ۳ صحیح است.

پاسخ یک سیستم LTI نسبت به ورودی $e^{s.t}$ به صورت $H(s_0)e^{s.t}$ می باشد و لذا داریم:

$$H(s) = \frac{s+2}{s^2-1}$$

با توجه به علی بودن سیستم آرایش صفر و قطب و ناحیه همگرایی سیستم را رسم می کنیم:



یادآوری: در یک سیستم دست راستی یا علی ناحیه همگرایی (ROC) سمت راست، سمت راست ترین قطب است. اگر s_0 عضو ROC یا روی آن باشد $(H(s_0))$ با توجه به رابطه $H(s)$ به دست می آید ولی اگر s_0 در این ناحیه یا مرز آن نباشد مقدار $H(s_0)$ بی کران است و لذا داریم:

$$y_1(t) = T\{e^{2t}\} = H(2)e^{2t} = \frac{4}{3}e^{2t}$$

$$y_2(t) = T\{e^{-2t}\} = H(-2)e^{-2t} = \infty e^{-2t} = \infty$$

باز هم با توجه به خواص توابع ویژه سیستم LTI می توان به صورت ذیل عمل نمود:

$$x(t) = \text{Sin}\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2j} e^{j\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2j} e^{-j\frac{1}{2}t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T\left\{\frac{1}{2j} e^{j\frac{1}{2}t}\right\} = \frac{1}{2j} H\left(j\frac{1}{2}\right) e^{j\frac{1}{2}t} \\ T\left\{\frac{-1}{2j} e^{-j\frac{1}{2}t}\right\} = -\frac{1}{2j} H\left(-j\frac{1}{2}\right) e^{-j\frac{1}{2}t} \end{cases}$$

با توجه به نمودارهای داده شده می توان نوشت:

$$H\left(j\frac{1}{2}\right) = \left|H\left(j\frac{1}{2}\right)\right| e^{j\angle H\left(j\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4} e^{-j2}$$

$$H\left(-j\frac{1}{2}\right) = \left|H\left(-j\frac{1}{2}\right)\right| e^{j\angle H\left(-j\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4} e^{j2}$$

و لذا می توان نوشت:

$$y(t) = \frac{1}{2j} \times \frac{1}{4} e^{-j2} e^{j\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2j} \times \frac{1}{4} e^{j2} e^{-j\frac{1}{2}t} = \frac{1}{4} \text{Sin}\left(\frac{1}{2}t - 2\right)$$

و لذا گزینه ۳ صحیح می باشد.

۱۱- گزینه ۳ صحیح است.

می دانیم:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

و لذا می توان نوشت:

$$x[6] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{7\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \pi \delta\left(\omega - \frac{k\pi}{2}\right) e^{j6\omega} d\omega$$

با توجه به خاصیت غربالی تابع ضربه داریم:

$$x[6] = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{k6\frac{k\pi}{2}} \int_{-\frac{7\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{2}} \delta\left(\omega - \frac{k\pi}{2}\right) d\omega$$

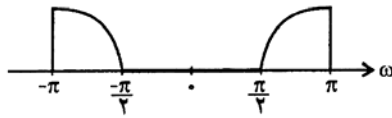
دارد و به ازای بقیه مقادیر k مقدار آن صفر است و لذا عبارت فوق به صورت ذیل ساده می گردد:

$$x[6] = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 (-1)^k e^{j3\pi k}, \quad (e^{j3\pi k} = (-1)^k)$$

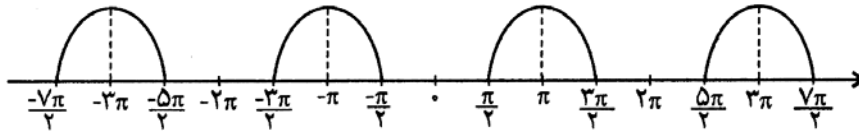
$$\Rightarrow x[6] = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 (-1)^{2k} = 2$$

۱۲- گزینه ۴ صحیح است.

ابتدا $|X(e^{j\omega})|$ را در بازه $\omega \in (-\pi, \pi]$ رسم می کنیم:



با توجه به آن که $X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)})$ است. شکل فوق را در دوره تناوب های دیگر نیز کامل می کنیم:

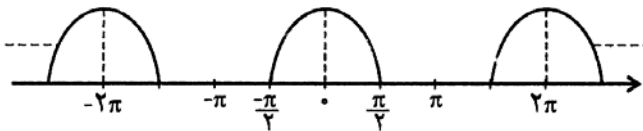


حال رابطه $Y(e^{j\omega})$ و $X(e^{j\omega})$ را به دست می آوریم:

$$y[n] = (-1)^n x[n] \Rightarrow y[n] = e^{j\pi n} x[n]$$

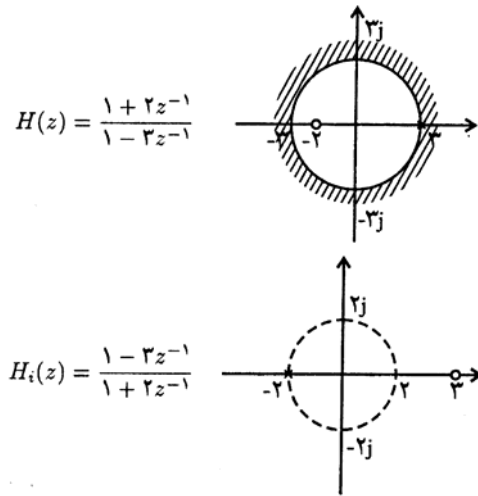
$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$$

و لذا $|Y(e^{j\omega})|$ به صورت ذیل است:



با توجه به $|Y(e^{j\omega})|$ در بازه $\omega \in (-\pi, \pi]$ به پایین گذر بودن آن پی می بریم.

بررسی گزاره الف) ابتدا آرایش صفر و قطب $H(z)$ و معکوس آن را که با $H_i(z)$ نشان می دهیم، به دست می آوریم:



با توجه به آن که $H(z)$ علی معرفی شده است، ROC را خارج قطب در نظر گرفته ایم. برای $H_i(z)$ داده شده دو ناحیه $|z| < 2$ و $|z| > 2$ به عنوان ROC وجود دارد که فقط ناحیه $|z| > 2$ قابل قبول است. با توجه به آن که $|z| > 2$ دایره واحد را شامل نمی شود، سیستم معکوس به دست آمده ناپایدار است.

بررسی گزاره ب):

$$y(t) = 5 \sin^2 \pi t - 2.5 = 5 \left(\frac{1 - \cos 2\pi t}{2} \right) - 2.5 = -2.5 \cos 2\pi t$$

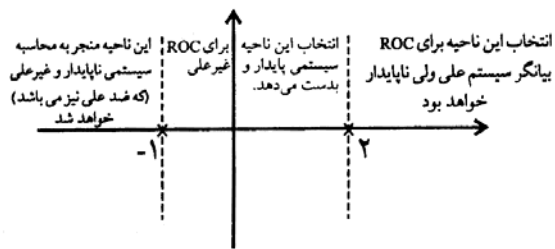
با توجه به آن که در ورودی $x(t)$ فقط فرکانس $\omega = 2\pi$ موجود است و خروجی نیز فرکانسی به غیر از $\omega = 2\pi$ ندارد بنابراین سیستم داده شده می تواند مربوط به یک سیستم LTI باشد.

۱۴- گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به رابطه ورودی-خروجی داده شده تابع تبدیل سیستم را به دست می آوریم:

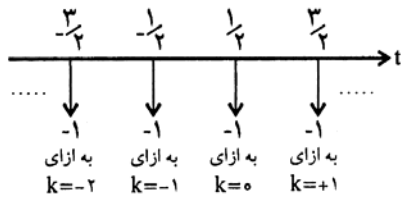
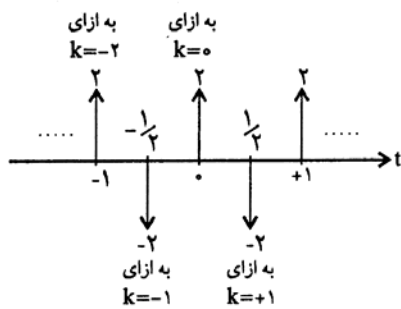
$$y'' - y' - 2y = x \Rightarrow s^2 Y(s) - sY(s) - 2Y(s) = X(s)$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 - s - 2} = \frac{1}{(s-2)(s+1)}$$

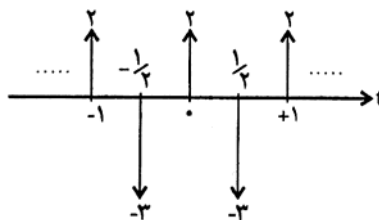


۱۵- گزینه ۱ صحیح است.

در ابتدا $x(t)$ را بر روی محور زمان رسم می کنیم و برای تفهیم ساده تر در ابتدا آن را به دو قسمت تقسیم می کنیم:



با توجه به آن که $x(t)$ مجموع دو سیگنال فوق است داریم:



و لذا $x(t)$ مجموع دو قطار ضربه است که ضرایبی مشخص دارند:

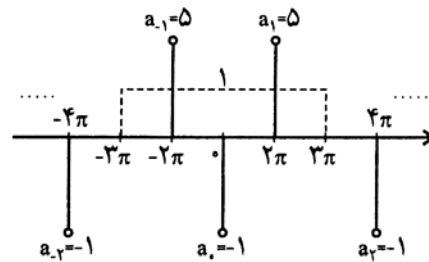
$$x(t) \xleftarrow{F_n} 2 + (-3)e^{-jk\pi}$$

۲: ضرایب قطار ضربه های با سطح زیر منحنی

۳: ضرایب قطار ضربه های تاخیریافته با سطح زیر منحنی $-3e^{-jk\pi}$

$$a_k = 2 - 3(-1)^k, \quad \omega_0 = 2\pi \frac{\text{rad}}{s}$$

با توجه به فرکانس پایه به دست آمده و پهنای باند فیلتر که $(3\pi) \frac{\text{rad}}{s}$ است، فقط مولفه های متناظر با a_0 ، a_1 و a_{-1} قابل عبور از فیلتر هستند. به شکل ذیل توجه نمایید:



پس مولفه های خروجی به صورت زیر هستند:

$$y(t) = (-1)e^{j0t} + 5e^{j2\pi t} + 5e^{-j2\pi t} = -1 + 10\cos 2\pi t$$

