سیستمهای غیر خطی

ویراست دوم . جلد اول . تحلیل

چاپ دوم



نگارنده: حسن خلیل
مترجم: غلامعلی منتظر

انتشارات
دانشگاه تربیت مدرس
۱۳۹۶

POWEREN.IR

فهرست

جلد اول ـ تحلیل

پیشگفتار مترجم ..... ز
پیشگفتار نگارنده ..... ک
نمادها ..... ف
۱ مقدمه ۱
۱ ـ ۱ مثالها ۷
۱ ـ ۱ ـ ۱ معادلهٔ پاندول ۷
۱ ـ ۱ ـ ۲ مدار دیود تونلی ۹
۱ ـ ۱ ـ ۳ سیستم جرم ـ فنر ۱۲
۱ ـ ۱ ـ ۴ نوسانساز با مقاومت منفی ۱۶
۱ ـ ۱ ـ ۵ شبکهٔ عصبی مصنوعی ۱۹
۱ ـ ۱ ـ ۶ کنترل تطبیقی ۲۲
۱ ـ ۲ سیستمهای مرتبهٔ دوم ۲۶
۱ ـ ۲ ـ ۱ رفتار کیفی سیستمهای خطی ۳۲
۱ ـ ۲ ـ ۲ نقاط تعادل چندگانه ۴۴
۱ ـ ۲ ـ ۳ رفتار کیفی در نزدیکی نقاط تعادل ۴۸
۱ ـ ۲ ـ ۴ چرخه‌های حدّی ۵۵
۱ ـ ۲ ـ ۵ رسم پیکره‌های فاز به طور عددی ۶۱
۱ ـ ۳ تمرینها ۶۴

۲ ویژگیهای اساسی ۷۷
۲ - ۱ پیشنیازهای ریاضی ۷۸
۲ - ۱ - ۱ فضای اقلیدسی ۷۸
۲ - ۱ - ۲ قضایای متقدار میانگین و تابع ضمنی ۸۵
۲ - ۱ - ۳ نامساوی گران وال - بِلمن ۸۶
۲ - ۱ - ۴ نگاشت انقباضی ۸۷
۲ - ۲ وجود و یکتایی ۹۲
۲ - ۳ وابستگی پیوسته به شرایط اولیه و پارامترها ۱۰۸
۲ - ۴ مشتق‌پذیری پاسخها و معادلات حساسیت ۱۱۳
۲ - ۵ اصل قیاس ۱۱۷
۲ - ۶ تمرینها ۱۲۲

۳ پایداری لیاپانوف ۱۳۵
۳ - ۱ سیستمهای خودگردان ۱۳۶
۳ - ۲ اصل پایایی ۱۵۸
۳ - ۳ سیستمهای خطی و خطی‌سازی ۱۶۸
۳ - ۴ سیستمهای ناخودگردان ۱۸۴
۳ - ۵ سیستمهای خطی متغیر با زمان و خطی‌سازی ۱۹۸
۳ - ۶ قضایای معکوس ۲۰۵
۳ - ۷ تمرینها ۲۱۳

۴ تحلیل پیشرفتهٔ پایداری ۲۳۱
۴ - ۱ قضیهٔ خمینهٔ مرکزی ۲۳۲
۴ - ۲ ناحیهٔ جذابیت ۲۴۴
۴ - ۳ قضایای پایایی ۲۶۳
۴ - ۴ تمرینها ۲۷۱

۵ پایداری سیستمهای آشفته ۲۷۹
۵ - ۱ آشفتگیهای صفر شونده ۲۸۱
۵ - ۲ آشفتگیهای غیرصفرشونده ۲۹۰

۵ - ۳ پایداری ورودی به حالت ۲۹۹
۵ - ۴ روش قیاس ۳۰۶
۵ - ۵ پیوستگی پاسخها در بازه‌های نامحدود ۳۱۴
۵ - ۶ سیستمهای به هم پیوسته ۳۱۷
۵ - ۷ سیستمهای با تغییرات آرام ۳۲۹
۵ - ۸ تمرینها ۳۴۴

۶ پایداری ورودی - خروجی ۳۵۹
۶ - ۱ پایداری $\mathcal{L}$ ۳۶۰
۶ - ۲ پایداری $\mathcal{L}$ مدلهای حالت ۳۷۰
۶ - ۳ پایداری ورودی به خروجی ۳۷۹
۶ - ۴ بهرهٔ $\mathcal{L}_2$ ۳۸۰
۶ - ۵ تمرینها ۳۹۲

۷ دورهای متناوب ۳۹۹
۷ - ۱ سیستمهای مرتبهٔ دوم ۴۰۰
۷ - ۲ پایداری پاسخهای متناوب ۴۱۵
۷ - ۳ تمرینها ۴۲۸

۸ نظریهٔ آشفتگی و متوسط‌گیری ۴۳۳
۸ - ۱ روش آشفتگی ۴۳۴
۸ - ۲ آشفتگی بر بازهٔ نامحدود ۴۵۲
۸ - ۳ متوسط‌گیری ۴۵۵
۸ - ۴ نوسانسازهای غیرخطی ضعیف مرتبهٔ دوم ۴۶۸
۸ - ۵ متوسط‌گیری عمومی ۴۷۲
۸ - ۶ تمرینها ۴۸۰

۹ آشفتگیهای منفرد ۴۸۵
۹ - ۱ مدل استاندارد آشفتگی منفرد ۴۸۶
۹ - ۲ ویژگیهای مقیاس زمانی مدل استاندارد ۴۹۳
۹ - ۳ خمینه‌های آرام و تند ۵۰۵

۹ ـ ۴ تحلیل پایداری ۵۱۴
۹ ـ ۵ آشفتگی منفرد با بازه‌های نامحدود ۵۲۸
۹ ـ ۶ تمرینها ۵۳۴

پیوست آ ملاحظات و مراجع ۵۴۷

پیوست ب کتابشناسی ۵۵۳

پیوست پ واژه‌نامه فارسی ـ انگلیسی ۵۶۷

پیوست ت واژه‌نامه انگلیسی ـ فارسی ۵۸۵

پیوست ث نمایهٔ موضوعی ۶۰۳

پیوست ج نمایهٔ قضایا ۶۲۳

جلد دوم ـ طراحی و کنترل

۱۰ تحلیل سیستمهای پسخور ۶۲۵
۱۰ ـ ۱ پایداری مطلق ۶۲۷
۱۰ ـ ۱ ـ ۱ معیار دایروی ۶۳۵
۱۰ ـ ۱ ـ ۲ معیار پوپوف ۶۵۱
۱۰ ـ ۱ ـ ۳ توابع لیاپانوف همزمان ۶۵۸
۱۰ ـ ۲ قضیهٔ بهرهٔ کوچک ۶۶۷
۱۰ ـ ۳ روش انفعال ۶۷۴
۱۰ ـ ۴ روش تابع وصف‌کننده ۶۹۲
۱۰ ـ ۵ تمرینها ۷۱۶

۱۱ کنترل پسخور ۷۲۹
۱۱ ـ ۱ مسائل کنترل ۷۲۹
۱۱ ـ ۲ طراحی از طریق خطی‌سازی ۷۳۷
۱۱ ـ ۲ ـ ۱ پایدارسازی ۷۳۷

۱۱ ـ ۲ ـ ۲ تنظیم به کمک کنترل انتگرالی ۷۴۲
۱۱ ـ ۳ جدولبندی بهره ۷۴۸
۱۱ ـ ۴ تمرینها ۷۷۱

۱۲ خطی‌سازی دقیق پسخور ۷۸۳
۱۲ ـ ۱ خطی سازی ورودی ـ حالت ۷۸۴
۱۲ ـ ۲ خطی‌سازی ورودی ـ خروجی ۷۹۹
۱۲ ـ ۳ کنترل پسخور حالت ۸۱۹
۱۲ ـ ۳ ـ ۱ پایدارسازی ۸۱۹
۱۲ ـ ۳ ـ ۲ ردیابی ۸۲۹
۱۲ ـ ۳ ـ ۳ تنظیم به کمک کنترل انتگرالی ۸۳۳
۱۲ ـ ۴ روش هندسهٔ دیفرانسیلی ۸۳۷
۱۲ ـ ۴ ـ ۱ ابزارهای هندسهٔ دیفرانسیلی ۸۳۷
۱۲ ـ ۴ ـ ۲ خطی سازی ورودی ـ خروجی ۸۴۶
۱۲ ـ ۴ ـ ۳ خطی سازی ورودی ـ حالت ۸۵۰
۱۲ ـ ۵ تمرینها ۸۵۴

۱۳ طراحی مبتنی بر لیاپانوف ۸۶۵
۱۳ ـ ۱ بازطراحی لیاپانوف ۸۶۶
۱۳ ـ ۱ ـ ۱ پایدارسازی مقاوم ۸۶۶
۱۳ ـ ۱ ـ ۲ میرایی غیرخطی ۸۷۸
۱۳ ـ ۲ بازگشت به عقب ۸۸۰
۱۳ ـ ۳ کنترل مُد لغزشی ۸۹۸
۱۳ ـ ۴ کنترل تطبیقی ۹۱۹
۱۳ ـ ۴ ـ ۱ کنترلگر مدل مرجع ۹۲۰
۱۳ ـ ۴ ـ ۲ کنترل تطبیقی مدل مرجع ۹۲۵
۱۳ ـ ۵ تمرینها ۹۴۹

پیوست آ برهان قضایا ۹۶۵
آ ـ ۱ برهان لم ۲ ـ ۵ ۹۶۵

آ ـ ۲ برهان لم ۳ ـ ۱ ..... ۹۶۷
آ ـ ۳ برهان لم ۳ ـ ۳ ..... ۹۶۸
آ ـ ۴ برهان لم ۳ ـ ۴ ..... ۹۷۲
آ ـ ۵ برهان لم ۳ ـ ۵ ..... ۹۷۳
آ ـ ۶ برهان قضیهٔ ۳ ـ ۱۴ ..... ۹۷۴
آ ـ ۷ برهان قضایای ۴ ـ ۱ و ۴ ـ ۳ ..... ۹۷۸
آ ـ ۸ برهان لم ۴ ـ ۱ ..... ۹۸۸
آ ـ ۹ برهان قضیهٔ ۶ ـ ۴ ..... ۹۸۹
آ ـ ۱۰ برهان قضیهٔ ۷ ـ ۱ ..... ۹۹۱
آ ـ ۱۱ برهان قضیهٔ ۸ ـ ۲ ..... ۹۹۶
آ ـ ۱۲ برهان قضیهٔ ۸ ـ ۳ ..... ۹۹۸
آ ـ ۱۳ برهان قضیهٔ ۸ ـ ۴ ..... ۱۰۰۳
آ ـ ۱۴ برهان قضیهٔ ۹ ـ ۱ ..... ۱۰۰۴
آ ـ ۱۵ برهان قضیهٔ ۹ ـ ۴ ..... ۱۰۱۲
آ ـ ۱۶ برهان قضیهٔ ۱۰ ـ ۱ ..... ۱۰۱۳
آ ـ ۱۷ برهان لم ۱۰ ـ ۲ ..... ۱۰۱۸
آ ـ ۱۸ برهان لم ۱۰ ـ ۷ ..... ۱۰۲۰
آ ـ ۱۹ برهان قضیهٔ ۱۰ ـ ۹ ..... ۱۰۲۵
آ ـ ۲۰ برهان لم ۱۳ ـ ۴ ..... ۱۰۲۸
آ ـ ۲۱ برهان لم ۱۳ ـ ۵ ..... ۱۰۳۲

پیوست ب ملاحظات و مراجع ۱۰۳۵
پیوست پ کتابشناسی ۱۰۳۹
پیوست ت واژه‌نامه فارسی ـ انگلیسی ۱۰۵۳
پیوست ث واژه‌نامه انگلیسی ـ فارسی ۱۰۷۱
پیوست ج نمایهٔ موضوعی ۱۰۸۹
پیوست چ نمایهٔ قضایا ۱۱۰۷

پیشگفتار مترجم

پیش درآمد

جامعهٔ نوپای علمی کشور هر چند دیرلیک با سرعتی شتابان، در پی رسیدن به جایگاه واقعی و درخور شأن میهن اسلامی و تمدّن کهن این سرزمین است؛ پشتگرمی این جنبش پس از الطاف واسعهٔ حضرت حق به جان بیدار و روان هشیار فرزندان اندیشمند این آب و خاک است که با اعتقاد به استقلال علمی و خودباوری و با تأسی به منویّات نورانی پیرمراد مبنی براینکه:

«مهمترین عامل در کسب خودکفایی و بازسازی، توسعهٔ مراکز علمی و تحقیقات و تمرکز و هدایت و امکانات و تشویق کامل و همه جانبهٔ مخترعین و مکتشفین و نیروهای متعهد و متخصصی است که شهامت مبارزه با جهل را دارند و از لاک نگرش انحصاری علم به غرب و شرق به درآمده و نشان دادند که می‌توانند کشور را روی پای خود نگه‌دارند*.»

بر منهج تعالی گام بردارند، در این راه هموارسازی بستر حرکت و فراهم آوردن رهتوشهٔ مناسب از اهمّ وظایف است. کتاب حاضر ادای دینی است هر چند خُرد نسبت به آنان که بزرگوارانه این راه را پیمودند و زاد توشه‌ای است هر چند ریز برآستان آنان که گام در راهند.

درآمد

درس سیستمهای غیرخطی یکی از پایه‌ای‌ترین دروس رشته‌های مهندسی برق، مهندسی مکانیک، مهندسی هوا ـ فضا و برخی گرایشهای مهندسی شیمی در مقطع تحصیلات تکمیلی است. مفاهیم مطرح در این درس در درک و فهم سایر مفاهیم و موضوعات مربوطه به این رشته‌ها بسیار مهم است.

---

* حضرت امام خمینی، منشور بازسازی، ۶۷/۷/۱۱

گرچه تا کنون کتابهای فراوانی در زمینهٔ کنترل غیرخطی نگاشته شده، لیکن دکتر حسن خلیل، از استادان بنام مهندسی سیستم و کنترل، کتابی را به رشتهٔ تحریر در آورده که در قیاس با بسیاری از کتابهای موجود در این زمینه اثری ممتاز محسوب می‌شود. دانش کافی و تجربهٔ وافی قلم وی را چنان توانمند کرده است که توانسته با بیانی شیوا و سلیس بسیاری از دقایق این علم را بر لوح کاغذ بنگارد. ویژگی مهم کتاب آن است که سعی شده مطالب کاملاً در خور فهم دانشجو عنوان شود و تا حد ممکن از پیچیده‌گویی پرهیز گردد. بیان بی تکلف، قدرت استدلال، مثالهای متعدد و تمرینهای فراوان سبب شده تا خواننده بتواند به آرامی مفاهیم یکی از اصلی‌ترین مباحث دانش مهندسی کنترل را فراگیرد.

کتاب «سیستمهای غیرخطی» در دو جلد ترجمه شده است و در طیّ ترجمه همهٔ تلاش مترجم بر این نکته معطوف بوده که ضمن وفاداری کامل به متن و ترجمهٔ بی‌کم و کاست کتاب، ترجمهٔ روان و شیوایی از متن اصلی را در اختیار دانشجویان گرانقدر و سایر خوانندگان بزرگوار قرار دهد. بی‌گمان این ترجمه تلاشی است بی‌ادّعا که در جهت ادای دین مترجم به نظام علمی میهن اسلامی‌مان تدوین شده است، از این رو رجای واثق آن دارد که خوانندگان، کریمانه لغزشهای سهوی آن را به نگارندهٔ این سطور هدیه فرمایند*.

جلد اول کتاب شامل نُه فصل است که بیشتر به روشهای مختلف تحلیل سیستمهای غیرخطی می‌پردازد؛ جلد دوم که شامل چهارفصل است بیشتر بر تبیین مفاهیم طراحی سیستمهای غیرخطی متمرکز شده (هر چند به دلیل حجم زیاد جلد اول، تحلیل سیستمهای غیرخطی همراه با پسخور نیز در جلد دوم آورده شده است)، علاوه بر این برهانهای مربوط به قضایای کتاب در پیوستی جداگانه در انتهای جلد دوم کتاب ذکر گردیده است این دو جلد، به رغم پیوندهای ذاتی و ماهوی، تا حدود زیادی از یکدیگر مستقلند و از این رو خوانندگان براحتی می‌توانند هر یک از آنها را به طور مستقل مطالعه کنند به همین دلیل نیز در پایان هر جلد، مراجع، کتابشناسی و واژه‌نامهٔ آن جلد آورده شده تا برغنای موضوعی آن بیفزاید.

تکمله

ترجمهٔ این کتاب میسر نبود مگر با لطف و کرم خداوند متعال؛ از این رو سربندگی و خضوع بر آستانش می‌سایم. حلاوت حکمت استادان بسیاری را در جان و از جان دوستتر دارم هم آنان که

* نشانی: تهران ـ تقاطع بزرگراههای شهید دکتر چمران و جلال آل احمد ـ دانشگاه تربیت مدرّس
صندوق پستی ۱۷۹ ـ ۱۴۱۱۵، پیام نگار: montazer@modares.ac.ir

فروغ دانششان فروزانی مسیرم بوده، با چشم ادب بر دستان موسایی آنان بوسهٔ فروتنی می‌زنم.

ترجمهٔ کتاب به مدد امکاناتی بوده که دانشگاه تربیت مدرّس فراهم آورده، از این رو برخود فرض می‌دانم از حمایتهای بیدریغ معاون فرهیختهٔ پژوهشی دانشگاه، جناب آقای دکتر میرفضل‌اله موسوی و رهنمودهای گهربار اعضای گرانسنگ شورای نشر دانشگاه خاضعانه سپاسگزاری می‌کنم.

در آماده سازی و چاپ کتاب، کارکنان بزرگوار دفتر نشر آثار علمی دانشگاه تربیت مدرّس با جدیّت و دلسوزیِ تمام، کمر به همکاری بسته بودند تا در اندک زمانی این کتاب به زیور طبع آراسته شود از این رو از مدیر فرزانهٔ آن دفتر، سرکار خانم دکتر گیتی ترکمان، و نیز سرکار خانم آتوما فروهی، سرکار خانم لیلا نجفی زمان، سرکار خانم فاطمه طالبی، سرکار خانم فرشته تقوی، سرکار خانم رقیه بابایی، جناب آقای علیرضا حسین‌پور، جناب آقای مصطفی جانجانی ، جناب آقای کاظم طالبی و جناب آقای فرزاد قنبری صمیمانه تشکر می‌نمایم.

پیراستگی کتاب مرهون جدیّت و تلاش فراوان جناب آقای محسن رودباری است که بدین وسیله از تلاش ایشان سپاسگزاری می‌کنم. زحمت مطابقت متن حروفچینی شده با متن دستنویس بر عهدهٔ دانشجوی سختکوش مهندسی کنترل جناب آقای سید علی تقوی و نیز سرکار خانم فرشته تقوی بوده که جهد وافر این عزیزان را نیز ارج می‌نهم.

حروفچینی کتاب در مؤسسهٔ حروفچینی امید و مراحل فنی چاپ نیز در لیتوگرافی مینا چاپخانه و صحافی محمد انجام شده است، بدین لحاظ از زحمات کارکنان این مراکز نیز تشکر می‌نمایم.

پیش از همه و بیش از همه ترجمهٔ این کتاب را مرهون شکیبایی، همراهی، پشتگرمی و علاقهٔ همسر مهربان و دانشدوستم سرکار خانم آزاده مظفّر می‌دانم که در اینجا سپاس ویژهٔ خود را به همراه آرزوی تندرستی و بهروزی همیشگی به ایشان تقدیم می‌دارم ـ خدایش حافظ! ـ

آخر سخن آنکه: نه خواستن که یارستن این بود ـ تا که قبول افتد و چه در نظر آید ـ.

غلامعلی منتظر
استادیار گروه کنترل
دانشکدهٔ فنی و مهندسی
دانشگاه تربیت مدرّس
بهار ۱۳۸۰

پیشگفتار نگارنده

این کتاب به عنوان کتاب درسی در زمینهٔ «سیستمهای غیرخطی» برای سال اول تحصیلات تکمیلی تدوین شده است لیکن مهندسان و ریاضیدانان کاربردی نیز می‌توانند آن را به عنوان خودآموز و یا مرجع به کار برند. این کتاب میوهٔ تجربیاتم در تدریس مکرّر درس سیستمهای غیرخطی در دانشگاه ایالتی میشیگان[1] و ایست لانسینگ[2] از سال ۱۹۸۵ میلادی است. دانشجویانی که این درس را داشته‌اند در رشته‌های مهندسی برق، مهندسی مکانیک و یا ریاضیات کاربردی تحصیل می‌کرده‌اند. پیشنیاز این کتاب، درسی در سطح تحصیلات تکمیلی دربارهٔ سیستمهای خطی؛ مانند کتابهای چِن[3] [۲۹]، دی کارلو[4] [۴۱]، کِی‌لت[5] [۸۶] یا راف[6] [۱۴۲] می‌باشد. در نوشتن این کتاب، سیستمهای خطی را به عنوان پیشنیاز فرض کرده‌ام تا لازم نباشد مفهوم «حالت» را توضیح دهم و بتوانم بسادگی به مفاهیمی مانند «توابع تبدیل»، «ماتریسهای انتقال حالت» و سایر ابزارهای سیستم خطی اشاره کنم. به عنوان پیشنیازهای ریاضی، سطح معمول ریاضی یعنی معادلات دیفرانسیل و نظریهٔ ماتریس را در نظر گرفته‌ام که هر دانشجوی تحصیلات تکمیلی در رشته‌های مهندسی یا ریاضی آنها را گذرانده است؛ البته همهٔ نکات ریاضی مورد نیاز در کتاب را در یک بخش جمع کرده‌ام. فرض را بر این نگذاشته‌ام که دانشجو همهٔ این مطالب ریاضی را از قبل می‌داند اما با توجه به استعداد دانشجویان تحصیلات تکمیلی انتظار این است که با ملاحظهٔ اجمالی این بخش بتوانند بی‌هیچ مشکلی بقیهٔ بخشهای کتاب را مطالعه کنند.

کتاب را به نحوی نگاشته‌ام که پیچیدگیهای ریاضی آن بتدریج و فصل به فصل افزایش یابد؛ به همین دلیل فصل اول به شکلی ساده و ابتدایی تدوین شده است، در واقع می‌توان این فصل

---

1. Michigan State University
2. East Lansing
3. Chen
4. DeCarlo
5. Kailath
6. Rugh

را بی‌هیچ دشواری در سال چهارم و یا حتی سوم مقطع کارشناسی تدریس نمود. دقیقاً به همین دلیل مبحث پایداری لیاپانوف را نیز به دو قسمت تقسیم کرده‌ام: در بخشهای ۳-۱ تا ۳ ـ ۳، مبنای پایداری لیاپانوف را برای سیستمهای خودگردان مطرح نموده و در آن هیچگونه دغدغه‌ای در مورد نکات فنی مانند: یکنواختی، توابع کلاس $\mathcal{K}$ و غیره نداشته‌ام. در بخشها ۳ ـ ۴ تا ۳ ـ ۶ پایداری لیاپانوف در حالتی کلّی‌تر، که دربرگیرندهٔ سیستمهای ناخودگردان نیز هست، بیان شده تا امکان بررسی عمیقتر جنبه‌های پیشرفتهٔ نظریهٔ پایداری فراهم آید. سطح پیچیدگی ریاضی در پایان فصل سوم همان جایی است که لازم است دانشجویان به آن برسند تا بتوانند فصول چهارم تا سیزدهم را براحتی مطالعه کنند.

سطح بالاتری از پیچیدگی ریاضی وجود دارد که در نوشتن برهانهای «پیوست آ» مدّنظر بوده است. برهانهای ارائه شده در این پیوست برای طرح در کلاس درس نیست؛ تدوین این بخش از یک سو موجب استقلال و خودکفایی کتاب می‌شود و از سوی دیگر پاسخ به نیاز دانشجویانی است که باید این برهانها را بخوانند، مانند دانشجویانی که می‌خواهند پژوهش دورهٔ دکتری خود را در زمینهٔ سیستمهای غیرخطی یا نظریهٔ کنترل بگذرانند. چنین دانشجویانی می‌توانند «پیوست آ» را به طور خودآموز مطالعه کنند. سطح بالاتر ریاضیات «پیوست آ» به معنای نیاز به دانش اولیهٔ بیشتر نیست بلکه ناشی از نحوهٔ نگارش من بوده است چه، سعی کرده‌ام گامهایی را که در متن کتاب به طور معمول سه چهار سطر به درازا می‌کشیده در پیوست در یک سطر بیان نمایم. به رغم این نکته، لازم است به این موضوع نیز اشاره کنم که معتقدم بسیاری از برهانهای «پیوست آ» ساده‌تر از مراجع اصلی‌شان بیان شده‌اند.

ویراست دوم کتاب در سیزده فصل تنظیم شده است: نُه فصل اول دربارهٔ تحلیل سیستمهای غیرخطی است، فصل دهم نیز راجع به تحلیل است اما با در نظر گرفتن سیستمهای پسخور. سه فصل آخر دربارهٔ طراحی کنترل پسخور می‌باشد. فصل اول بیانگر اشاره‌هایی مقدماتی به پدیده‌های غیرخطی است که دورنمایی از کتاب را تصویر می‌کند. این اشاره‌ها در دو بخش گردآوری شده است: بخش ۱ ـ ۱ مثالهایی از معادلات غیرخطی حالت را معرفی می‌کند که بعدتر در طول کتاب مورد استفاده قرار می‌گیرد تا ویژگیهای نتایج و ابزارهای مختلف را نمایان سازد. گمان می‌کنم در آموزش این موارد سودمند باشد قبل از اینکه دانشجویان در اثر نتایج فنیِ معادلات حالت سردرگم شوند، درک صحیحی راجع به تنوع معادلات غیرخطی حالت به آنها منتقل گردد. بخش ۱ ـ ۲، مطالبی کلاسیک را راجع به سیستمهای مرتبهٔ دوم بیان می‌کند؛ این بحث را از آن رو مطرح کرده‌ام که بتواند مقدمه‌ای بر دو پدیدهٔ مهم غیرخطی باشد که بعدتر در

کتاب مورد مطالعه قرار خواهند گرفت: نقاط تعادل چندگانه و ویژگیهای پایداری‌شان و چرخه‌های حدّی.

فصل دوم کتاب با بیان پیشنیازهای ریاضی آغاز می‌شود، قضیهٔ نگاشت انقباضی مربوط به بخش ۲ ـ ۱ ـ ۴، چند بار در «پیوست آ» و فقط یک بار در متن اصلی کتاب (در برهان قضیهٔ ۲ ـ ۲) مورد استفاده قرار خواهد گرفت. چنانچه استاد بخواهد از اثبات قضیهٔ ۲ ـ ۲ بگذرد می‌تواند از این قضیه چشمپوشی کند؛ لیکن باید توجه داشت فضاهای خطی نُرمدار، که در بخش ۲ ـ ۴ معرفی شده، در فصل ششم استفاده خواهد شد. بخشهای ۲ ـ ۲ تا ۲ ـ ۵ شامل نظریهٔ اساسی معادلات دیفرانسیل معمولی است که لازم است، ولو به طور خلاصه و بدون اثبات، تدریس گردد.

فصل سوم نظریهٔ لیاپانوف را مطرح می‌کند، این فصل، هستهٔ کتاب است و باید به طور کامل بیان شود. بخش ۳ ـ ۶ شامل قضایای معکوس لیاپانوف می‌باشد که بعدتر چندین‌بار به آن ارجاع داده می‌شود. لازم است این قضایا سرکلاس مطرح گردند اما می‌توان بخشهای ۳ ـ ۵ و ۳ ـ ۶ را به طور خلاصه بیان نمود و برهانهای مربوط به آن را به عنوان تکلیف در نظر گرفت.

پس از فصل سوم، همهٔ فصلها چنان تدوین شده‌اند که تا حد ممکن از یکدیگر مستقل باشند تا استاد بتواند محتوای درسی خود را با انعطاف بیشتری تعیین کند؛ لذا در اینجا به برخی موارد مهم اشاره می‌نمایم: قضایای پایایی مربوط به بخش ۴ ـ ۳ در بخش ۱۳ ـ ۴، بخش کنترل تطبیقی، استفاده می‌شود. بخشهای ۵ ـ ۱ تا ۵ ـ ۴ در بخشهای ۶ ـ ۲، ۶ ـ ۳، ۶ ـ ۴، ۱۲ ـ ۳، ۱۳ ـ ۱، ۱۳ ـ ۲ و ۱۳ ـ ۳ و نیز در برخی مثالهای پایان بخش ۱۳ ـ ۴ کاربرد دارد. اکیداً پیشنهاد می‌کنم بخشهای ۵ ـ ۱ تا ۵ ـ ۴ تدریس شود زیرا در مورد جنبه‌های مهم پایداری در حضور آشفتگی است؛ سوای اهمیت این موضوع، معمولاً در کتابهای مقدماتی سیستمهای غیرخطی، یا راجع به آن صحبتی نمی‌شود و یا بسیار گذراست. برای آشنایی بیشتر با اهمیت این جنبهٔ پایداری لیاپانوف بهتر است دانشجویان، منابع پیشرفتهٔ پایداری مانند هان[1] [۶۲] و کراسوسکی[2] [۹۶] را مطالعه کنند. بخش ۵ ـ ۷ در مورد سیستمهای با تغییرات آرام برای فصل نهم، دربارهٔ آشفتگیهای منفرد، و نیز برای بخش ۱۱ ـ ۳، دربارهٔ جدولبندی بهره، مفید است اما الزامی نیست. مفهوم پایداری $\mathcal{L}$، که در بخش ۶ ـ ۱ مطرح شده، در بخشهای ۱۰ ـ ۲ و ۱۰ ـ ۳ مورد استفاده قرار می‌گیرد. آشنایی با نظریهٔ آشفتگی منفرد (و نه نتایج فنی آن) مربوط به فصل

1. Hahn 2. Krasovskii

نهم برای بخش ۱۱ ـ ۳ مورد نیاز است. بخشهای ۱۱ ـ ۱ و ۱۱ ـ ۲ باید در هر گزینشی از سه فصل آخر کتاب مطرح گردند. سیستمهای خطی‌پذیر پسخور، که در بخشهای ۱۲ ـ ۱ و ۱۲ ـ ۲ معرفی شده‌اند، در چند مثال مربوط به بخشهای ۱۳ ـ ۱ تا ۱۳ ـ ۳ به کار گرفته شده اما برای طرح مفاهیم اصلی این بخشها ضروری نیستند.

هریک از فصلهای اول تا سیزدهم با بخشی شامل تمرینهای مختلف به پایان می‌رسد که چنان تدوین شده‌اند تا در فهم و بکارگیری نتایج و ابزارهای معرفی شده، خواننده را یاری کنند. بسیاری از این تمرینها در طول سالهای متمادی در تکلیفها و نیز آزمونهای کلاسی‌ام مورد استفاده قرار گرفته‌اند و می‌توان راهنمای حل آنها را از ناشر کتاب تهیه نمود.

موجب خرسندی است که از همهٔ کسانی که مرا در نوشتن این کتاب یاری کرده‌اند، سپاسگزاری کنم. از این رو پیش از همه از همسرم امینه[1] به دلیل تشویق و پشتگرمی کاملش در طی این طرح تشکر می‌نمایم. ضمناً از فرزندانم، محمد و عمر، برای درک و حمایت اخلاقی‌شان قدردانی می‌کنم. سپاس ویژهٔ خود را به دلیل بحث در مراحل مختلف این طرح، نثار پیترکوکوتوویک[2] می‌نمایم؛ رهنمودها و پیشنهادی وی بسیار ارزشمند بود*. علاوه بر این از ایاد عابد[3]، نذیر عطاسی[4]، مارتین کورلس[5]، احمد دَبروم[6]، فرزاد اسفندیاری، جسی گِریزل[7]، سوهادا جایسوریا[8]، رالف جوهانسون[9]، یونس کانلاکوپولوس[10]، مصطفی خماش[11]، پی.اس. کریش ناپ رساد[12]، میروسلاو کِرستیک[13]، زونگلی لین[14]، سِمیون میرکوف[15]، جک راف[16]، فتحی سلام[17]، ادواردو سانتاگ[18]، مارک اسپانگ[19] و استیو یورکوویچ[20] برای پیشنهادها، نکات سازنده، بازخوردشان نسبت به ویراست اول و/یا مرور بخشهای مختلف ویراست جدید کتاب تشکر می‌کنم. بویژه لازم است از سِمیون میرکوف به دلیل بازخورد جامعش دربارهٔ ویراست نخست و نیز پیشنهادهایش در تدوین کتاب جدید سپاسگزاری نمایم. دانشجویانم در درس سیستمهای غیرخطی در دانشگاه ایالتی میشیگان، پسخوری عالی در طی سالیان متمادی

* شایان ذکر اینکه کتاب به پیترکوکوتوویک تقدیم شده است [م].

1. Amina
2. Peter Kokotovic
3. Eyad Abed
4. Nazir Atassi
5. Martin Corless
6. Ahmed Dabroom
7. Jessy Grizzle
8. Suhada Jayasuriya
9. Rolf Johansson
10. Ioannis Kanellakopoulos
11. Mustafa Khammash
12. P.S.Krishnaprasad
13. Miroslav Kristic
14. Zongli Lin
15. Semyon Meerkov
16. Jack Rugh
17. Fathi Salam
18. Eduardo Sontag
19. Mark Spong
20. Steve Yurkovich

بوده‌اند. سرانجام باید دیگربار از یونس کانلاکوپولوس و سِمیون میرکوف برای مرور دستنویسهای ویراست دوم به منظور ارائه به شرکت پرنتیس هال[1] قدردانی کنم.

خود را مرهون دانشگاه ایالتی میشیگان می‌دانم زیرا محیطی را فراهم ساخت که بتوانم این کتاب را بنویسم، ضمناً از بنیاد ملی علوم[2] برای حمایت از پژوهشهایم در زمینهٔ آشفتگی منفرد و کنترل پسخور غیرخطی سپاسگزاری می‌کنم؛ چه در طی این تلاشها بود که به تجربهٔ لازم برای نگارش این کتاب دست یافتم.

در آماده‌سازی کتاب خود را مدیون جیان شنگ هو[3]، شارین ویترانو[4] و الیاس استرانگاس[5] می‌دانم. جیان شنگ همهٔ شکلهای ویراست نخست کتاب را تهیه کرد که بسیاری از آنها در این نسخه نیز مورد استفاده قرار گرفته است، شارین در نقش ویراستار کتاب جدید بخوبی ایفای نقش کرد و الیاس با تجربهٔ لَتکس[6] خود بارها به من کمک کرد.

کتاب به کمک نرم‌افزار لَتکس حروفچینی شده است. همهٔ محاسبات، شامل پاسخهای عددی معادلات دیفرانسیل، به کمک نرم‌افزار متلب[7] انجام شده، ضمن اینکه شکلهای کتاب نیز با نرم‌افزارهای فریم مِی‌کِر[8]، متلب و یا افزارهای گرافیکی لَتکس تهیه شده است.

حسن خلیل

ایست لانسینگ، میشیگان

1. Prentice Hall
2. National Science Foundation
3. Jian sheng Hou
4. Sharyn Vitrano
5. Elias Strangas
6. LATEX
7. MATLAB
8. Frame Maker

نمادها

$\equiv$	متحد است با
$\approx$	تقریباً مساوی است با
$\triangleq$	تعریف می‌شود
$\forall$	به ازای جمیع مقادیر
$\in$	متعلق است به
$\subset$	زیرمجموعهٔ
$\rightarrow$	میل می‌کند به
$\Rightarrow$	نتیجه می‌شود
Σ	مجموع
Π	حاصل ضرب
$\|a\|$	قدر مطلق کمیّت عددی a
$\|\|x\|\|$	نُرم بردار x
$\|\|x\|\|_p$	نُرم pی بردار x
$\|\|A\|\|_p$	نُرم pی القایی بر ماتریس A
max	بیشینه
min	کمینه
sup	سوپریمم، کوچکترین کران بالا
inf	اینفیمم، بزرگترین کران پایین
R_n	فضای اقلیدسی nبُعدی

B_r	گوی $\{x \in R_n \mid \|x\| \leq r\}$
$\bar{M}$	بستار مجموعهٔ M
δM	مرز مجموعهٔ M
$dist(p, M)$	فاصلهٔ نقطهٔ p تا مجموعهٔ M
$f: S_1 \longrightarrow S_2$	تابع f که مجموعهٔ S_1 را به مجموعهٔ S_2 می‌نگارد
$f_2 o f_1$	ترکیب دو تابع
$f^{-1}(\cdot)$	وارون تابع f
$f'(\cdot)$	مشتق اول تابع مقدار حقیقی f
$D^+f(\cdot)$	مشتق راست بالا
∇f	گرادیان بردار
$\partial f / \partial x$	ماتریس ژاکوبی
$diag[a_1, ..., a_n]$	ماتریس قطری با درایه‌های a_1 تا a_n
$diag[A_1, ..., A_n]$	ماتریس بلوکی قطری با بلوکهای قطری A_1 تا A_n
x^T	ترانهادهٔ بردار x
A^T	ترانهادهٔ ماتریس A
$\lambda_{max}(P)$	بزرگترین مقدار ویژهٔ ماتریس متقارن P
$\lambda_{min}(P)$	کوچکترین مقدار ویژهٔ ماتریس متقارن P
$P > 0$	ماتریس معیّن مثبت P
$P \geq 0$	ماتریس نیمه معیّن مثبت P
Rez یا $Re[z]$	بخش حقیقی متغیر مختلط z
Imz یا $Im[z]$	بخش موهومی متغیر مختلط z
z^* یا $\bar{z}$	مزدوج متغیر مختلط z
Z^*	ترانهادهٔ مزدوج ماتریس Z
$sat(\cdot)$	تابع اشباع
$sgn(\cdot)$	تابع علامت
$O(\cdot)$	نماد مرتبهٔ اندازه
$\diamond$	نماد پایان قضیه، لم و قضیهٔ فرعی
Δ	نماد پایان مثال
$\square$	نماد پایان برهان

۱

مقدمه

هنگامی که مهندسان، سیستمهای دینامیکی غیرخطی را در مدارهای الکتریکی، سیستمهای مکانیکی، سیستمهای کنترل و سایر موارد مهندسی تحلیل و طراحی می‌کنند، لازم است ابزار و لوازم وسیعی را در تحلیل غیرخطی به دست گیرند و از آنها استفاده کنند. در این کتاب برخی از این ابزار را معرفی می‌کنیم و به طور مشخص با تأکید بر روش لیاپانوف[1]، ابزاری را برای تحلیل پایداری سیستمهای کنترل ارائه می‌نماییم. در این کتاب به پایداری سیستمهای پسخور[2] توجه ویژه‌ای شده است. علاوه بر این با بیان روش تابع وصف‌کننده[3]، ابزار مناسبی را برای تشخیص و تحلیل نوسانهای «آزاد» معرفی می‌کنیم. ضمناً ابزار مجانبیِ نظریهٔ آشفتگی[4] (شامل متوسط‌گیری[5] و آشفتگی منفرد[6]) را نیز به کار خواهیم گرفت و سرانجام به بررسی ابزار کنترل پسخور غیرخطی (شامل خطی‌سازی[7]، جدولبندی بهره[8]، خطی سازی دقیق پسخور[9]، باز ـ طراحی لیاپانوف[10]، بازگشت به عقب[11]، کنترل مُد لغزشی[12] و کنترل تطبیقی[13]) خواهیم پرداخت.

در این کتاب با سیستمهایی دینامیکی سروکار داریم که می‌توان آنها را با تعداد معدودی از معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول تزویجی[14] به شکل ذیل توصیف کرد:

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_p)$$

---

1. Lyapunov's method
2. Feedback systems
3. Describing function
4. Perturbation theory
5. Averaging
6. Singular perturbation
7. Linearization
8. Gain scheduling
9. Exact feedbak linearization
10. Lyapunov redesign
11. Backstepping
12. Sliding mode control
13. Adaptive control
14. Coupled first-order ordinary differential equation

$$\dot{x}_2 = f_2\,(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_p)$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$\dot{x}_n = f_n\,(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_p)$$

که $\dot{x}_i$ مشتق x_i نسبت به متغیر زمان، t، است؛ u_1، u_2، ...، u_p نیز متغیرهای ورودی مشخصی هستند. متغیرهای x_1، x_2، ...، x_n، متغیرهای حالت[1] نامیده می‌شود، این متغیرها بیانگر حافظهٔ[2] سیستم دینامیکی نسبت به گذشته‌اش است. عموماً از نمادهای برداری[3] برای نوشتن معادلات پیشگفته به شکل بسته استفاده می‌شود؛ در این صورت با تعریف:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}, \quad f(t,x,u) = \begin{bmatrix} f_1\,(t,x,u) \\ f_2\,(t,x,u) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n\,(t,x,u) \end{bmatrix}$$

و با بازنویسی n معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول عددی به صورت یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول برداریِ nبُعدی[4] خواهیم داشت:

$$\dot{x} = f(t,x,u) \qquad (۱-۱)$$

رابطهٔ (۱ ـ ۱) را *معادلهٔ حالت*[5]، x را *حالت*[6] و u را ورودی[7] می‌نامیم. گاهی به همراه معادلهٔ (۱ـ۱)، معادلهٔ دیگری به شکل زیر به کار گرفته می‌شود:

$$y = h\,(t,x,u) \qquad (۱-۲)$$

1. State variables
2. Memory
3. Vector notation
4. N-dimensional first-order vector differential equation
5. State equation
6. State
7. Input

این معادله بیانگر بردار خروجی[1] qبُعدی است که شامل متغیرهایی است که در تحلیل سیستم دینامیکی به بررسی آن متغیرها علاقه‌مندیم؛ مانند متغیرهایی که می‌توان آنها را به طور فیزیکی اندازه‌گیری کرد و یا متغیرهایی که لازم است رفتار خاصی را از خود نشان دهند؛ معادلهٔ (۱ ـ ۲) را *معادلهٔ خروجی*[2] و مجموعه معادلات (۱ ـ ۱) و (۱ ـ ۲) را مدل *فضای حالت*[3] و یا به طور خلاصه *مدل حالت*[4] می‌نامند. شایان ذکر اینکه همیشه نمی‌توان مدلهای ریاضی مربوط به سیستمی فیزیکی با ابعاد محدود را به شکل مدل فضای حالت درآورد؛ اما در بسیاری از موارد هم با انتخاب دقیق و مناسب متغیرهای حالت، چنین امری امکانپذیر است. مثالها و تمرینهایی که در بخشهای دیگر این فصل خواهد آمد تنوع و وسعت عمل مدل فضای حالت را نشان می‌دهد.

بیشترین تحلیل در این کتاب بر پایهٔ معادلهٔ حالت انجام خواهد شد. در بسیاری از موارد معادله بدون حضور صریح ورودی، u، به شکل ذیل بیان می‌شود:

$$\dot{x} = f(t,x) \qquad (۱-۳)$$

چنین حالتی، موسوم به معادلهٔ حالت بدون ورودی است. مواجهه با معادلهٔ حالت بدون ورودی، لزوماً به این معنا نیست که ورودی سیستم، صفر است بلکه ممکن است بدین معنا باشد که ورودی به شکل تابع معلومی از زمان (یعنی $u = \gamma(t)$)، تابع معلومی از حالت (یعنی $u = \gamma(x)$) و یا تابع معلومی از هر دو (یعنی $u = \gamma(x,t)$) است. با جایگزینی $u = \gamma$ در رابطهٔ (۱ ـ ۱)، u حذف و معادلهٔ حالت بدون ورودی حاصل می‌شود.

یکی از حالتهای خاصّ رابطهٔ (۱ ـ ۳) زمانی رخ می‌دهد که f تابع صریحی از t نباشد؛ یعنی:

$$\dot{x} = f(x) \qquad (۱-۴)$$

در چنین حالتی، سیستم را خودگردان[5] یا *نامتغیر با زمان*[6] گویند. رفتار چنین سیستمی نسبت به انتقال مبدأ زمان تغییر نمی‌کند زیرا تغییر متغیر زمان از t به $\tau = t - \alpha$، تغییری در عبارت سمت راست معادلهٔ حالت به وجود نمی‌آورد. اگر سیستم، خودگردان نباشد،

1. Output
2. Output equation
3. State-space model
4. State model
5. Autonomous
6. Time invariant

ناخودگردان[1] و یا متغیر *با زمان*[2] نامیده می‌شود.

یکی از مفاهیم مهم در برخورد با معادلهٔ حالت، مفهوم «نقطهٔ تعادل»[3] است: در معادلهٔ حالت، نقطهٔ $x = x^*$ را نقطهٔ تعادل رابطهٔ (۱ ـ ۳) گوییم اگر با آغاز حرکت حالت از آن نقطه، برای تمامی لحظات آینده در x^* باقی بماند. نقاط تعادل سیستمهای خودگردان، معادلهٔ (۱ ـ ۴)، ریشه‌های حقیقی معادلهٔ ذیل است:

$$f(x) = 0$$

ممکن است نقطهٔ تعادل «تنها»[4] باشد، بدین معنا که هیچ نقطهٔ تعادل دیگری در مجاورتش[5] موجود نباشد و یا به تعبیر دیگر این نقطه در ویژگی تعادل خود استمرار[6] داشته باشد.

در سیستمهای خطی، مدل فضای حالت (۱ ـ ۱) و (۱ ـ ۲) به شکل خاص زیر بیان می‌شود:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

$$y = C(t)x + D(t)u$$

فرض بر این است که خواننده با ابزارهای قوی تحلیل سیستمهای خطی، مبتنی بر *اصل جمع آثار*[7]، آشناست. اما هنگامی که از سیستمهای خطی به سیستمهای غیرخطی رومی‌آوریم، موقعیت دشوارتر می‌شود؛ زیرا دیگر اصل جمع آثار صادق نیست و لازم است برای تحلیل از ریاضیات پیشرفته‌تری بهره جوییم. البته به دلیل آشنایی با ابزار توانمند تحلیل در سیستمهای خطی، معمولاً در بررسی سیستمهای غیرخطی، چنانچه امکانپذیر باشد، سعی می‌شود با خطی‌کردن سیستم حول نقاط کارنامی[8]، به تحلیل مدل خطی حاصل پرداخت. این روش از مرسومترین و مفیدترین شیوه‌های مهندسی است و هرگاه چنین امکانی وجود داشته باشد، بدون هیچ پرسشی این کار انجام می‌شود تا به کمک آن اطلاعات بیشتری از رفتار سیستم غیرخطی به دست آوریم. لیکن خطی‌سازی بتنهایی کافی نیست زیرا دو محدودیت اصلی در این روش وجود دارد: نخست آنکه به دلیل تقریبی بودن خطی‌سازی در مجاورت نقطهٔ کار، فقط

1. Nonautonomous
2. Time varying
3. Equilibrium point
4. Isolated
5. Vicinity
6. Continuum
7. Superposition Principle
8. Nominal operating points

می‌توان رفتار «محلی»[1] سیستم را در مجاورت نقطهٔ کار پیش‌بینی[2] کرد و نمی‌توان رفتار «غیرمحلی»[3] سیستم را در نقاط دور از نقطهٔ کار، و به طور دقیقتر رفتار «جامع»[4] سیستم را در همهٔ فضای حالت، پیش‌بینی نمود. نکتهٔ دیگر اینکه دینامیک سیستم غیرخطی بمراتب غنی‌تر از دینامیک سیستم خطی است؛ زیرا «پدیده‌های اساساً غیرخطی»[5] وجود دارد که فقط در حضور غیرخطی‌گری[6] امکان حضور می‌یابند و از این رو با مدلهای خطی قابل توصیف (و یا حتی قابل پیش‌بینی) نیستند. مثالهایی از چنین پدیده‌های اساساً غیرخطی به شرح ذیل است:

- *زمان رهایی*[7] *محدود:* در سیستمهای خطی ناپایدار[8]، اگر زمان به سمت بینهایت میل کند حالت سیستم نیز به سمت بینهایت سوق می‌یابد؛ اما در سیستمهای غیرخطی ممکن است حالت سیستم در زمان محدود نیز به سمت بینهایت میل کند.
- *نقاط تعادل چندگانهٔ*[9] *تنها:* سیستمهای خطی فقط می‌توانند یک نقطهٔ تعادل تنها داشته باشند؛ به همین دلیل نیز فقط یک نقطهٔ کار حالت مانا[10] برایشان متصوّر است که می‌تواند حالتهای سیستم را (بدون توجه به حالت اولیهٔ[11] سیستم) به سمت خود جذب[12] کند. اما سیستمهای غیرخطی ممکن است بیش از یک نقطهٔ تعادل تنها داشته باشند و از این رو حالتهای سیستم، بسته به حالت اولیه، به سمت یکی از آنها همگرا[13] خواهد شد.
- *چرخه‌های حدّی*[14]: برای نوسان سیستم خطی نامتغیر با زمان، باید یک زوج از مقادیر ویژه[15] روی محور موهومی قرار داشته باشد. چنین حالتی در واقع وضعی غیرمقاوم[16] است که حضور آشفتگی، ماندن در این حالت را تقریباً غیرممکن می‌سازد؛ حتی اگر چنین چیزی رخ هم دهد، باز دامنهٔ[17] نوسان به حالت اولیه وابسته است. در دنیای واقعی، نوسان پایدار[18] فقط در سیستمهای غیرخطی رخ می‌دهد؛ به تعبیر دیگر

1. Local
2. Predict
3. Nonlocal
4. Global
5. Essentially nonlinear Phenomena
6. Nonlinearity
7. Escape
8. Unstable
9. Multiple
10. Steady state
11. Initial state
12. Attract
13. Converge
14. Limit cycle
15. Eigen values
16. Nonrobust
17. Amplitude
18. Stable

سیستمهای غیرخطی‌ای وجود دارد که بدون توجه به حالت اولیهٔ سیستم، می‌تواند نوسانهایی با دامنه و فرکانس مشخص تولید کند. چنین نوسانهایی به نام چرخهٔ حدّی شناخته می‌شود.

- *نوسانهای تقریباً متناوب*[۱]، *هماهنگ*[۲] *یا زیرهماهنگ*[۳]: در سیستمهای خطی با اعمال ورودی متناوب[۴]، خروجی متناوبی با همان فرکانس تولید می‌شود. اما سیستمهای غیرخطی، با اعمال تحریک[۵] متناوب، می‌توانند با فرکانسهایی چند (یا یک چندم) برابر فرکانس ورودی، نوسان کنند و حتی ممکن است نوسانی تقریباً متناوب را نیز به وجود آورند. نمونه‌ای از این پدیده به شکل مجموع نوسانهای متناوبی، که فرکانس هیچیک مضربی از دیگری نیست، رخ می‌دهد.
- *آشوب*[۶]: سیستم غیرخطی ممکن است رفتار پیچیده‌ای را در حالت مانا بروز دهد که نه نقطهٔ تعادل است، نه نوسان متناوب و نه نوسان تقریباً متناوب. معمولاً چنین رفتاری را آشوب می‌نامند. برخی از نمودهای آشوبگرانه[۷] به شکل رفتار تصادفی سیستم (به رغم معیّن بودن[۸] طبیعت سیستم) ظاهر می‌شود.
- *مُدهای چندگانهٔ رفتاری*: معمولاً سیستمهای غیرخطی مُدهای رفتاری مختلفی را از خود نشان می‌دهد به طوری که سیستمهای بدون ورودی می‌تواند بیش از یک چرخهٔ حدّی داشته باشد، سیستمهای همراه با تحریک متناوب نیز با در نظر گرفتن دامنه و فرکانس ورودی، ممکن است رفتاری هماهنگ، زیرهماهنگ و یا رفتاری پیچیده‌تر در حالت مانا از خود نشان دهد، یا حتّی ممکن است سیستم غیرخطی در مقابل تغییر همواری[۹] در دامنه و فرکانس، جهش[۱۰] ناپیوسته‌ای را در مُدرفتاری خود بروز دهد.

در این کتاب فقط به بررسی سه مورد اوّل می‌پردازیم* نقاط تعادل چندگانه و چرخه‌های

* برای مطالعهٔ نوسان اجباری، آشوب، دوشاخه‌ای شدن[۱۱] و سایرموارد مهم، می‌توان به [۵۹]، [۶۴] و [۱۶۳] مراجعه کرد.

1. Almost-Periodic
2. Harmonic
3. Subharmonic
4. Periodic input
5. Excitation
6. Chaos
7. Chaotic
8. Deterministic
9. Smooth
10. Jump
11. Bifurcation

حدّی در بخشهای دیگر همین فصل (و در طیّ بررسیِ سیستمهای خودگردان مرتبهٔ دوم[۱]) و پدیدهٔ زمان رهایی محدود نیز در فصل دوم مورد بحث قرار خواهد گرفت.

۱ ـ ۱ مثالها

۱ ـ ۱ ـ ۱ معادلهٔ پاندول

پاندول[۲] سادهٔ شکل ۱ ـ ۱ را در نظر بگیرید. l طول میله و m جرم گلولهٔ سر آن است. فرض می‌کنیم میله، جسمی صُلب[۳] با جرم صفر است. ضمناً فرض می‌کنیم θ نیز نشاندهندهٔ زاویهٔ میان میله و محور عمودی گذرنده از نقطهٔ اتصال پاندول باشد. پاندول می‌تواند آزادانه در صفحهٔ قائم و گلولهٔ سر آن نیز می‌تواند بر محیط دایره‌ای به شعاع l حرکت کند. برای نوشتن معادلهٔ حرکت پاندول، ابتدا نیروهای اعمالی بر گلوله را مشخص می‌کنیم. یکی از نیروهای وارد بر گلوله، نیروی وزن آن، برابر با mg، می‌باشد که g نشاندهندهٔ شدّت جاذبه است؛ نیروی اصطکاک در مقابل حرکت گلوله مقاومت می‌کند که فرض می‌شود متناسب با سرعت گلوله، با ضریب k، تغییر می‌کند. در این صورت با استفاده از قانون دوم نیوتن، معادلهٔ حرکت در جهت مماس[۴] بر مسیر حرکت برابر است با:

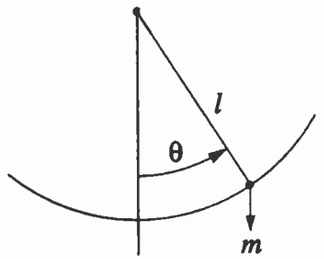
$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - kl\dot{\theta}$$

نوشتن معادلهٔ حرکت در جهت مماس بر مسیر حرکت این حُسن را داراست که کشش[۵] میله، که در جهت عمود بر حرکت است، در معادله ظاهر نمی‌شود. شایان توجه اینکه می‌توان همین معادله را با نوشتن معادلهٔ گشتاور[۶] حول نقطهٔ اتصال میله نیز به دست آورد. برای بیان مدل فضای حالتِ پاندول، متغیرهای حالت را به شکل $x_1 = \theta$ و $x_2 = \dot{\theta}$ برمی‌گزینیم. بنابراین معادلهٔ حالت برابر است با:

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad (۵ ـ ۱)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_2 \qquad (۶ ـ ۱)$$

1. Second-order
2. Pendulum
3. Rigid
4. Tangential
5. Tension
6. Moment



شکل ۱ ـ ۱ پاندول

برای یافتن نقاط تعادل با فرض $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ و با حلّ معادلات نسبت به x_1 و x_2 داریم:

$$0 = x_2$$

$$0 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2$$

نقاط تعادل در $(n\pi, 0)$، ...، $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$، قرار دارد. به لحاظ فیزیکی، واضح است که پاندول تنها دو نقطهٔ تعادل (متناظر با نقاط تعادل $(0, 0)$ و $(\pi, 0)$) دارد. سایر نقاط تعادل در واقع تکرار این دو نقطهٔ تعادل است که متناظر با تعداد چرخشهای کامل پاندول، قبل از توقف در یکی از دو نقطهٔ تعادل فوق می‌باشد. برای مثال چنانچه پاندول قبل از توقف در نقطهٔ عمودی پایینی، m دور کامل ۳۶۰ درجه‌ای بزند، آنگاه از نظر ریاضی می‌توان گفت پاندول به نقطهٔ تعادل $(m\pi, 0)$ نزدیک می‌شود. ما در بررسیهای خود در مورد پاندول، توجه خود را به دو «نقطهٔ تعادل واضح»، یعنی $(0, 0)$ و $(\pi, 0)$، معطوف می‌کنیم. به لحاظ فیزیکی می‌توان این دو نقطه را کاملاً مجزّا[1] از هم دانست؛ زیرا وقتی پاندول می‌تواند در نقطهٔ $(0, 0)$ توقف کند، بسیار بعید است در نقطهٔ $(\pi, 0)$ باقی بماند چراکه اغتشاش[2] بسیار کوچکی قادر است پاندول را از آن حالت خارج کند. تفاوت این دو نقطهٔ تعادل در پایداری آنهاست که بعدتر به طور دقیق مطالعه خواهد شد.

1. Distinct
2. Disturbance

گاهی آموزنده است معادلهٔ پاندول را با چشمپوشی از مقاومت اصطکاک (با قراردادن $k = 0$) در نظر بگیریم. در این حالت، معادلهٔ حاصل به شکل زیر خواهد شد:

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad (۱ - ۷)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 \qquad (۱ - ۸)$$

این معادله بیانگر حالت پایستاری[1] است که در آن اگر در ابتدا فشاری به پاندول وارد شود، با مبادلهٔ بدون تلفات انرژی جنبشی و پتانسیل، نوسان پاندول همچنان حفظ خواهد شد. البته چنین وضعی غیرواقعی است اما دیدی از رفتار پاندول را به دست می‌دهد و در حالتی که ضریب k کوچک است، می‌تواند به ما در یافتن پاسخ تقریبی معادلهٔ پاندول کمک کند. حالت دیگر معادلهٔ پاندول زمانی رخ می‌دهد که گشتاور T نیز به آن اعمال شود. چنین گشتاوری را می‌توان به عنوان ورودی کنترل[2] در نظر گرفت؛ در این صورت داریم:

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad (۱ - ۹)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{ml^2} T \qquad (۱ - ۱۰)$$

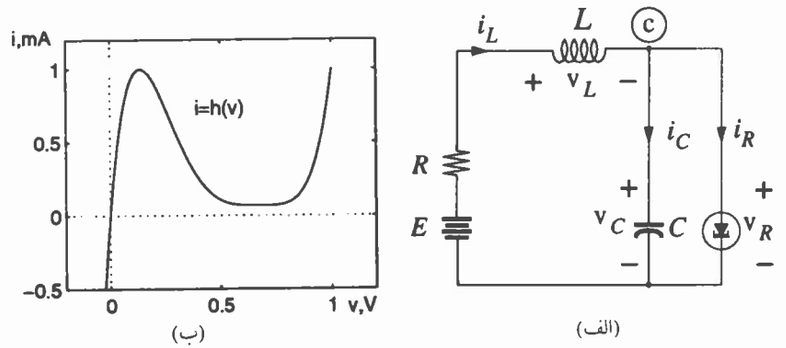
جالب اینکه می‌توان سیستمهای فیزیکی مختلفی را با معادلاتی شبیه به معادلهٔ پاندول، مدلسازی کرد، نمونه‌ای از اینگونه سیستمها شامل مدل ژنراتورسنکرونِ[3] متصل به شین[4] بینهایت (تمرین ۱ ـ ۷)، مدل مدار پیوند جوزفسون[5] (تمرین ۱ ـ ۸) و مدل حلقهٔ قفل شدهٔ فاز[6] (تمرین ۱ ـ ۱۰) است؛ بدین لحاظ معادلهٔ پاندول به لحاظ عملی از اهمیت زیادی برخوردار می‌باشد.

۱ ـ ۱ ـ ۲ مدار دیود تونلی

مدار دیود تونلی شکل ۱ ـ ۲ را در نظر بگیرید* که دیود تونلی با رابطهٔ $i_R = h(v_R)$ مشخص می‌شود.

* این شکل به همراه شکلهای ۱ ـ ۳ و ۱ ـ ۴ از [۳۳] اقتباس شده است.

1. Conservative
2. Control input
3. Synchronous generator
4. Bus
5. Josephson junction circuit
6. Phase-locked loop



شکل ۱ ـ ۲ (الف) مدار دیود تونلی؛ (ب) مشخصهٔ $i_R - v_R$ دیود تونلی

در این مدار، عناصر ذخیره‌کنندهٔ انرژی، خازن C و سلف L است که با فرض خطی و نامتغیر با زمان بودن این عناصر، می‌توان مدل آنها را با معادلات ذیل نشان داد:

$$i_C = C\frac{dv_c}{dt}$$

$$v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

که i و v، بترتیب جریان گذرنده و ولتاژ دو سر عنصری هستند که زیرنویس مذکور، آن عنصر را مشخص می‌کند. برای نوشتن مدل فضای حالت سیستم، $x_1 = v_C$ و $x_2 = i_L$ را به عنوان متغیرهای حالت و $u = E$ را به عنوان ورودی ثابت برمی‌گزینیم. برای نوشتن معادلهٔ حالت برای x_1، لازم است i_C را به عنوان تابعی از متغیرهای حالت x_1 و x_2 و نیز ورودی u بیان کنیم؛ با استفاده از قانون جریان کیرشهف[1] می‌توان مجموع جبری جریانهای خروجی از گره[2] را به شکل زیر نوشت:

$$i_C + i_R - i_L = 0$$

پس:

$$i_C = -h(x_1) + x_2$$

1. Kirchhoff's current law 2. Node

به طور مشابه، لازم است v_L را نیز به صورت تابعی از متغیرهای حالت x_1، x_2 و ورودی u بیان کنیم. برای این کار با استفاده از قانون ولتاژ کیرشهف[1] می‌توان مجموع جبری ولتاژهای دو سر همهٔ عناصر موجود در حلقهٔ[2] سمت چپ شکل ۱ ـ ۲ (الف) را به شکل ذیل نوشت:

$$v_C - E + Ri_L + v_L = 0$$

بنابراین:

$$v_L = -x_1 - Rx_2 + u$$

حال می‌توان مدل فضای حالت مدار را به شکل زیر بیان کرد:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C}[-h(x_1) + x_2] \qquad (۱۱ - ۱)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L}[-x_1 - Rx_2 + u] \qquad (۱۲ - ۱)$$

می‌توان نقاط تعادل سیستم را با صفر قراردادن $\dot{x}_1$ و $\dot{x}_2$ و حل کردن نسبت به x_1 و x_2 به دست آورد:

$$0 = -h(x_1) + x_2$$

$$0 = -x_1 - Rx_2 + u$$

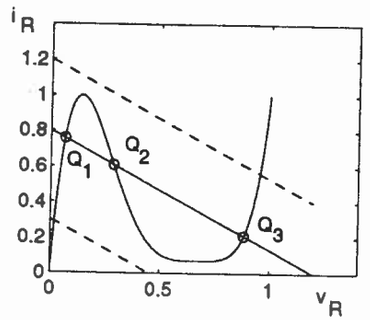
بنابراین نقاط تعادل، متناظر با ریشه‌های معادلهٔ زیر است:

$$h(x_1) = \frac{E}{R} - \frac{1}{R}x_1$$

شکل ۱ ـ ۳ به طور ترسیمی نشان می‌دهد برای مقادیر مشخص E و R، این معادله سه ریشهٔ مجزّا از هم دارد که متناظر با سه نقطهٔ تعادل تنهای سیستم است. نکتهٔ حائز اهمیت اینکه تعداد نقاط تعادل با تغییر مقادیر E و R تغییر می‌کند؛ برای مثال چنانچه E افزایش یابد اما R تغییر نکند به حالتی دست می‌یابیم که فقط Q_3 حضور دارد؛ از سوی دیگر اگر E کاهش یابد اما R تغییر نکند به حالتی می‌رسیم که فقط Q_1 حضور خواهد داشت. حال می‌توان پرسید اگر با حالت نقاط تعادل چندگانه مواجه باشیم، آنگاه در یک آزمایش خاص،

1. Kirchhoff's voltage law 2. Loop

کدامیک از این نقاط تعادل قابل رؤیت است؟ پاسخ این پرسش به ویژگیهای پایداری[1] نقاط تعادل بستگی دارد. در این فصل دوباره به این مثال بازمی‌گردیم و به پرسش مطرح شده، پاسخ خواهیم داد.



شکل ۱ ـ ۳ نقاط تعادل مدار دیود تونلی

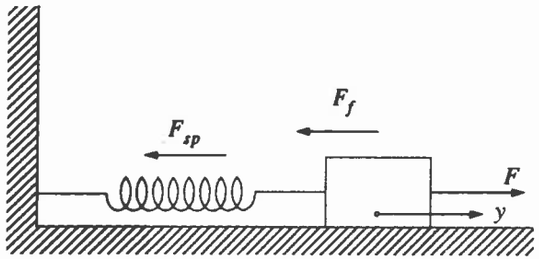
۱ ـ ۱ ـ ۳ سیستم جرم ـ فنر

در سیستم مکانیکی جرم ـ فنر (شکل ۱ ـ ۴)، جسمی به جرم m روی سطحی افقی می‌لغزد و از طریق فنری به یک سطح عمودی متصل است، ضمناً نیروی خارجی F نیز بر جرم اثر می‌کند. با تعریف y به عنوان جابه‌جایی نسبت به موقعیت مرجع[2] و با نوشتن قانون نیوتن در حرکت، می‌توان نوشت:

$$m\ddot{y} + F_f + F_{sp} = F$$

که F_f نیروی مقاوم متناظر با اصطکاک و F_{sp} نیز نیروی ذخیرهٔ شدهٔ فنر است. فرض می‌کنیم F_{sp} فقط تابعی از جابه‌جایی y باشد و آن را به شکل $F_{sp} = g(y)$ باز می‌نویسیم. علاوه بر این موقعیت مرجع را چنان انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم: $g(0) = 0$. نیروی خارجی F نیز در دسترس است. براساس ویژگیهای F، F_f و g، مدلهای مختلفی از سیستمهای مرتبهٔ دوم خودگردان و یا ناخودگردان برای این سیستم جرم ـ فنر به دست می‌آید.

1. Stability
2. Reference position



شکل ۱ ـ ۴ سیستم مکانیکی جرم ـ فنر

در جابه‌جاییهای نسبتاً کوچک، می‌توان نیروی بازگردانندهٔ فنر را به صورت خطی مدل کرد؛ یعنی: $g(y) = ky$ که k مقدار ثابت فنر است. اما چنانچه جابه‌جایی بزرگ باشد، نیروی بازگرداننده به صورت غیرخطی به y بستگی دارد. به عنوان مثال، تابع:

$$g(y) = k(1 - a^2y^2)\, y, \qquad |ay| < 1$$

مدل مناسبی برای فنر موسوم به فنر نرم[1] است که در آن افزایش زیاد جابه‌جایی تنها افزایش نیروی اندکی را سبب می‌شود. از سوی دیگر تابع:

$$g(y) = k(1 + a^2y^2)\, y$$

مدل مناسبی برای فنر موسوم به فنر سخت[2] است که در آن تغییر اندکی در جابه‌جایی، موجب پیدایش نیروی بزرگی می‌شود.

هنگامی که فنر در هوا (یا محیط چسبندهٔ[3] دیگری) حرکت می‌کند، نیروی اصطکاکی متناظر با این چسبندگی به وجود می‌آید. معمولاً می‌توان این نیرو را به صورت تابعی غیرخطی از چسبندگی بیان کرد (یعنی: $F_v = h(\dot{y})$ که $h(0) = 0$) که در غلظتهای کم می‌توان آن را به شکل تابعی خطی از سرعت توصیف نمود؛ یعنی: $F_v = c\dot{y}$. از ترکیب فنر سخت و خطی بودن ترمز چسبندگی و با اعمال نیروی خارجی متناوب به شکل: $F = A\cos\omega t$ به معادلهٔ دافینگ[4] دست خواهیم یافت:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + ka^2y^3 = A\cos\omega t \qquad (۱۳ ـ ۱)$$

1. Softening spring
2. Hardening spring
3. Viscous
4. Duffing's equation

این معادله، مثال کلاسیکی از تحریک متناوب در سیستمهای غیرخطی است.

به عنوان مثالی دیگر از نیروی اصطکاک، *اصطکاک کولنی*[1] (یا *اصطکاک خشک*[2]) را در نظر می‌گیریم. چنین حالتی زمانی رخ می‌دهد که جرمی خشک روی سطحی می‌لغزد. هنگامی که جرم در حال سکون است نیروی اصطکاک ایستای[3] F_s وجود دارد که موازی بر سطح عمل می‌کند و مقدار آن بین دو حدّ $\pm\mu_s mg$ قرار دارد که $0 < \mu_s < 1$، ضریب اصطکاک ایستاست. این نیرو هر مقداری را بین دو مقدار حدی‌اش می‌پذیرد تا جسم را در حال سکون نگه دارد. برای آغاز حرکت، لازم است نیروی وارد بر جسم بر مقاومت ناشی از اصطکاک ایستا غلبه کند. در غیاب نیروی خارجی، $F = 0$، نیروی اصطکاک ایستا برابر با نیروی بازگردانندهٔ فنر است و در نتیجه به ازای $|g(y)| \le \mu_s mg$، جسم در حالت تعادل باقی بماند. هنگامی که حرکت آغاز شد نیروی اصطکاک لغزشی[4]، با اندازهٔ $\mu_k mg$، در مقابل حرکت جسم مقاومت می‌کند (μ_k ضریب اصطکاک جنبشی[5] است که آن را ثابت فرض می‌کنیم). با در نظر گرفتن حالت ایدئال برای نیروی اصطکاک خشک، می‌توان آن را به شکل ذیل تعریف کرد:

$$F_d = \begin{cases} -\mu_k mg, & \dot{y} < 0 \\ F_s, & \dot{y} = 0 \\ \mu_k mg, & \dot{y} > 0 \end{cases}$$

اکنون از ترکیب فنر خطی، حالت خطی برای ترمز چسبندگی، اصطکاک خشک و با صفر در نظر گرفتن نیروی خارجی نتیجه می‌شود:

$$m\ddot{y} + ky + c\dot{y} + \eta(y, \dot{y}) = 0$$

که:

$$\eta(y, \dot{y}) = \begin{cases} \mu_k mg\, sign(\dot{y}), & \dot{y} > 0 \\ -ky, & \dot{y} = 0 \text{ و } |y| \le \mu_s mg / k \\ -\mu_s mg\, sign(y), & \dot{y} = 0 \text{ و } |y| > \mu_s mg / k \end{cases}$$

مقدار $\eta(y, \dot{y})$ به ازای $\dot{y} = 0$ و $|y| \le \mu_s mg/k$، از حالت تعادل $\dot{y} = \ddot{y} = 0$ به دست

1. Coulomb friction
2. Dry friction
3. Static friction force
4. Sliding friction force
5. Kinetic friction coefficient

می‌آید. با $x_1 = y$ و $x_2 = \dot{y}$، معادلهٔ حالت خواهد شد:

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad (۱۴-۱)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 - \frac{1}{m}\eta(x_1, x_2) \qquad (۱۵-۱)$$

اینک به دو نکتهٔ مهم در این معادله دقت می‌کنیم: نخست اینکه معادله دارای مجموعه‌ای از نقاط تعادل (به جای نقاط تعادل تنها) است و دیگر اینکه سمت راست معادله، تابع ناپیوسته‌ای از حالت است. این ناپیوستگی در واقع پیامد فرض ایدئالی است که در به دست آوردن مدل اصطکاک خشک در نظر گرفته شد در حالی که به لحاظ فیزیکی انتظار این است که اصطکاک خشک به طور هموار و به آرامی، و نه به صورت ناگهانیِ حالت ایدئال، از مُد اصطکاک ایستا به مُد اصطکاک لغزشی تغییر حالت دهد. مزیت فرض ناپیوسته بودن حالت ایدئالِ، آن است که تحلیل سیستم را آسان می‌کند؛ برای مثال وقتی که $x_2 > 0$ است، می‌توان سیستم را با مدل خطی ذیل بیان کرد:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \mu_k g$$

به طور مشابه، با فرض $x_2 < 0$، نیز می‌توان سیستم را با مدل خطی زیر بیان کرد:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \mu_k g$$

بنابراین در هر دو ناحیه می‌توان به کمک تحلیل خطی رفتار سیستم را پیش‌بینی کرد. این موضوع، مثالی از *تحلیل خطی ـ قطعه‌ای*[1] است که در آن، سیستم در ناحیه‌های مختلف فضای حالت با مدلهای خطی‌ای توصیف می‌شود که تفاوت آنها تنها در ضریب معیّنی است که از این ناحیه به ناحیهٔ دیگر تغییر می‌کند.

1. Piecewise linear analysis

۱ ـ ۱ ـ ۴ نوسانساز با مقاومت منفی

شکل ۱ ـ ۵ ساختار اصلی مدار دسته‌ای مهم از نوسانسازهای[1] الکترونیکی را نشان می‌دهد. فرض بر این است که سلف و خازن، خطی، نامتغیر با زمان و غیرفعال[2] هستند (یعنی: $L > 0$ و $C > 0$). عنصر مقاومتی نیز مداری فعال[3] است که دارای مشخصهٔ *کنترل شده با ولتاژ*[4] (به شکل $i = h(v)$) است. تابع $h(\cdot)$ شروط ذیل را ارضا می‌کند:

$$h(0) = 0 \quad \text{و} \quad h'(0) < 0$$

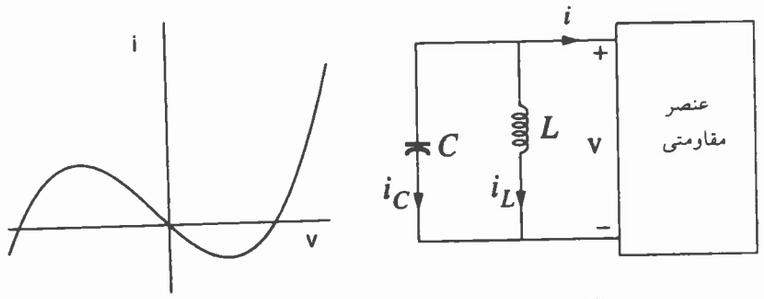
$$v \longrightarrow \infty \Rightarrow h(v) \longrightarrow \infty \quad \text{و} \quad v \longrightarrow -\infty \Rightarrow h(v) \longrightarrow -\infty$$

که $h'(v)$ مشتق اول $h(v)$ نسبت به v است. این مشخصهٔ $i - v$ را می‌توان به طور مثال به کمک مدار دیود تونلی دوقلوی[5] شکل ۱ ـ ۶ به دست آورد. در این صورت با استفاده از قانون جریان کیرشهف می‌توان نوشت:

$$i_C + i_L + i = 0$$

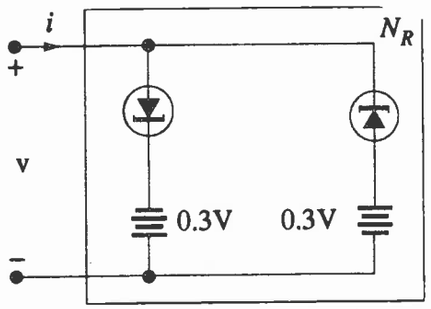
بنابراین:

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(s)\,ds + h(v) = 0$$



شکل ۱ ـ ۵ (الف) مدار نوسانساز پایه؛ (ب) مشخصهٔ نمونه‌ای نقطهٔ فعالیت غیرخطی

1. Oscillator
2. Passive
3. Active
4. Voltage-controlled
5. Twin



شکل ۱ ـ ۶ مدار دیود تونلی دو قلو همراه با مقاومت منفی

اکنون با مشتقگیری نسبت به t و ضرب‌کردن در L داریم:

$$CL\frac{d^2v}{dt^2} + v + Lh'(v)\frac{dv}{dt} = 0$$

این معادله را می‌توان به نحوی بازنویسی کرد که با معادلات مرسوم در نظریهٔ سیستمهای غیرخطی، همخوانی داشته باشد؛ برای این کار، متغیر زمان را از t به $\tau = t/\sqrt{CL}$ تغییر می‌دهیم؛ در این صورت مشتقات v نسبت به t و τ با روابط ذیل به هم مربوط می‌شود:

$$\frac{dv}{d\tau} = \sqrt{CL}\,\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} = CL\,\frac{d^2v}{dt^2}$$

با نمایش $\dot{v}$ به عنوان مشتق v نسبت به τ می‌توان معادلهٔ مدار را به شکل زیر نوشت:

$$\ddot{v} + \varepsilon h'(v)\dot{v} + v = 0$$

که $\varepsilon = \sqrt{L/C}$ است. این معادله حالت خاصی از *معادلهٔ لیئنارد*[1] است:

$$\ddot{v} + f(v)\dot{v} + g(v) = 0 \qquad (۱۶ ـ ۱)$$

که:

$$h(v) = -v + \frac{1}{3}v^3$$

1. Lie'nard's equation

بنابراین معادلهٔ مدار به شکل زیر درمی‌آید:

$$\ddot{v} - \varepsilon (۱ - v^۲) \dot{v} + v = ۰ \qquad (۱-۱۷)$$

که به نام معادلهٔ *وان دِرپُل*[1] خوانده می‌شود. این معادله؛ که وان دِرپُل از آن برای مطالعهٔ نوسانهای مدارهای لامپ خلأ[2] استفاده کرده؛ مثالی پایه از نظریهٔ نوسانهای غیرخطی است. این معادله پاسخی متناوب دارد که همهٔ پاسخها (بجز نقطهٔ تعادل یکتای $v = \dot{v} = ۰$) را به سمت خود جذب می‌کند. برای نوشتن مدل فضای حالت برای مدار، با انتخاب $x_۱ = v$ و $x_۲ = \dot{v}$ نتیجه می‌شود:

$$\dot{x}_۱ = x_۲ \qquad (۱-۱۸)$$

$$\dot{x}_۲ = - x_۱ - \varepsilon h'(x_۱)\, x_۲ \qquad (۱-۱۹)$$

شایان دقت اینکه می‌توان با انتخاب ولتاژ دو سر خازن و جریان گذرنده از سلف به عنوان متغیرهای حالت (مانند مثال قبل) به مدل حالت دیگری رسید؛ در این صورت با انتخاب $z_۱ = i_L$ و $z_۲ = v_C$، مدل فضای حالت به شکل زیر بیان می‌گردد:

$$\frac{dz_۱}{dt} = \frac{۱}{L} z_۲$$

$$\frac{dz_۲}{dt} = - \frac{۱}{C} [z_۱ + h(z_۲)]$$

چون مدل فضای حالت اولی را برحسب متغیر زمان ($\tau = t/\sqrt{CL}$) نوشته‌ایم، این معادله را نیز برحسب τ باز می‌نویسیم:

$$\dot{z}_۱ = \frac{۱}{\varepsilon} z_۲ \qquad (۱-۲۰)$$

$$\dot{z}_۲ = - \varepsilon [z_۱ + h(z_۲)] \qquad (۱-۲۱)$$

گرچه مدلهای فضای حالت نسبت به x و z متفاوت به نظر می‌رسند اما در واقع نمایشهای

1. Van der Pol equation
2. Vacuum tube

معادل یک سیستم هستند؛ زیرا می‌توان هریک از آنها را با تغییر مبدأ زیر از دیگری نتیجه گرفت:

$$z = T(x)$$

از آنجاکه x و z را به صورت عبارتهایی از متغیرهای فیزیکی مدار برگزیده‌ایم، لذا پیداکردن نگاشت[1] $T(\cdot)$، چندان مشکل نیست؛ زیرا:

$$x_۱ = v = z_۲$$

$$x_۲ = \frac{dv}{d\tau} = \sqrt{CL}\, \frac{dv}{dt} = \sqrt{\frac{L}{C}}\, [- i_L - h(v_C)] = \varepsilon [- z_۱ - h(z_۲)]$$

بنابراین:

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} -h(x_۱) - \frac{۱}{\varepsilon} x_۲ \\ x_۱ \end{bmatrix}$$

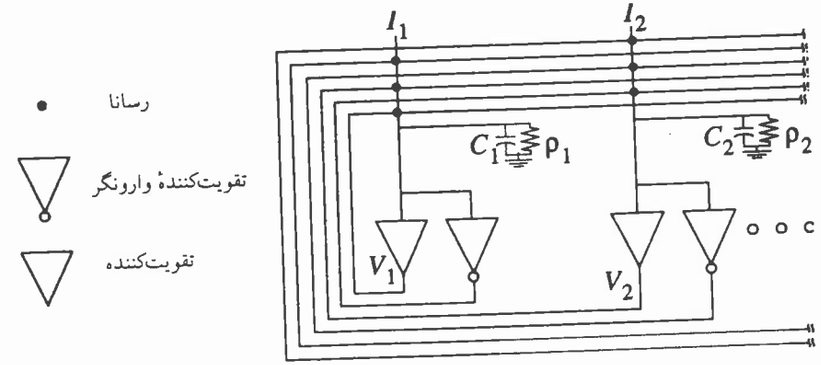
و نگاشت وارون[2] نیز به شکل زیر است:

$$x = T^{-۱}(x) = \begin{bmatrix} z_۲ \\ - \varepsilon z_۱ - \varepsilon h(z_۲) \end{bmatrix}$$

۱ ـ ۱ ـ ۵ شبکهٔ عصبی مصنوعی

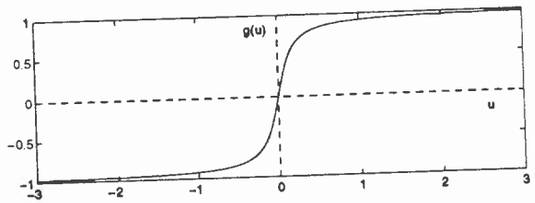
شبکه‌های عصبی مصنوعی[3]، مشابه با ساختارهای زیستی، این مزیت مهم را دارد که امکان پردازش گستردهٔ[4] اطلاعات و نیز استعداد ذاتی محاسبات موازی[5] را داراست. شکل ۱ ـ ۷ مدار الکتریکی یکی از مدلهای شبکهٔ عصبی، موسوم به *مدل هاپفیلد*[6]، را نشان می‌دهد. این مدار بر اساس شبکهٔ RCی متصل به تقویت‌کننده‌ها[7] ساخته شده است. مشخصهٔ ورودی ـ خروجی تقویت‌کننده‌ها با رابطهٔ $V_i = g_i(u_i)$ بیان می‌شود که u_i و V_i، بترتیب نشاندهندهٔ ولتاژ

1. Map
2. Inverse
3. Artificial Neural Network
4. Distributed processing
5. Parallel computing
6. Hopfield model
7. Amplifiers



شکل ۱ ـ ۷ مدل شبکهٔ عصبی هاپفیلد

ورودی و ولتاژ خروجی iاُمین تقویت‌کننده است. تابع: $g_i(\cdot): R \longrightarrow (-V_M, V_M)$ تابعی سیگموییدی[1] با مجانبهای $-V_M$ و V_M است. این تابع در شکل ۱ ـ ۸ با $V_M = ۱$ رسم شده است. نکتهٔ قابل توجه اینکه تابع مذکور، پیوسته ـ مشتق‌پذیر[2]، فرد[3] و افزایشی یکنواست[4] علاوه بر این $g_i(u_i) = ۰$ است اگر و تنها اگر داشته باشیم: $u_i = ۰$.



شکل ۱ ـ ۸ نمونه‌ای از مشخصهٔ ورودی ـ خروجی برای تقویت‌کننده‌های شبکهٔ هاپفیلد

مثالهایی از $g_i(\cdot)$ ممکن به شرح زیر است:

$$g_i(u_i) = \frac{۲V_M}{\pi} tan^{-۱} \frac{\lambda \pi u_i}{۲V_M} \quad , \lambda > ۰$$

و:

$$g_i(u_i) = V_M \frac{e^{\lambda u i} - e^{-\lambda u i}}{e^{\lambda u i} + e^{-\lambda u i}} \quad , \lambda > ۰$$

1. Sigmoid
2. Differentiable
3. Odd
4. Monotically increasing

که λ شیب[1] $g_i(u_i)$ در نقطهٔ $u_i = ۰$ است. می‌توان این مشخصهٔ ورودی ـ خروجی تابع سیگموییدِ را به کمک تقویت‌کننده‌های عملیاتی[2] محقّق ساخت. هریک از این تقویت‌کننده‌ها شامل مداری همراه با تقویت‌کنندهٔ وارونگر[3] است که خروجی‌اش برابر با $-V_M$ می‌باشد و ما را به انتخاب علامت خروجی تقویت‌کنندهٔ متصل به خط ورودی، مجاز می‌دارد. معمولاً خروجیهای V_i و $-V_i$ از طریق دو پایانهٔ[4] خروجیِ همان تقویت‌کننده‌های عملیاتی تأمین می‌شود. زوج تقویت‌کننده‌های غیرخطی، «نُرون»[5] نامیده می‌شود. علاوه بر این، مدارهای تقویت‌کننده شامل یک بخش RC نیز هست. ظرفیت $C_i > ۰$ و مقاومت $\rho_i > ۰$، بترتیب نشاندهندهٔ ظرفیت شنت[6] و مقاومت شنت iاُمین ورودی تقویت‌کننده است. اکنون با نوشتن قانون جریان کیرشهف در گره ورودیِ تقویت‌کنندهٔ iاُم داریم:

$$C_i \frac{du_i}{dt} = \sum_j T_{ij} V_j - \frac{۱}{R_i} u_i + I_i$$

که:

$$\frac{۱}{R_i} = \frac{۱}{\rho_i} + \sum_j \frac{۱}{R_{ij}}$$

R_{ij} مقاومت متصل به خروجی jاُمین تقویت‌کنندهٔ iاُمین خط ورودی است. T_{ij} نیز هدایت[7] علامتداری است که اندازه‌اش برابر با $\frac{۱}{R_{ij}}$ بوده، علامتش نیز با انتخاب خروجی مثبت یا منفیِ jاُمین تقویت‌کننده به دست می‌آید؛ ضمناً I_i نیز جریانهای ورودی ثابت می‌باشد (که در شکل نشان داده نشده است). می‌توان رفتار مداری با n تقویت‌کننده را با n معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول نمایش داد. برای نوشتن مدل فضای حالت مدار، متغیر حالت را به شکل $x_i = V_i$ $(i = ۱, ۲, \ldots, n)$ تعریف می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$\dot{x_i} = \frac{dg_i}{du_i}(u_i) \times \dot{u_i} = \frac{dg_i}{du_i}(u_i) \times \frac{۱}{C_i} \left(\sum_j T_{ij} x_j - \frac{۱}{R_i} u_i + I_i \right)$$

با تعریف:

$$h_i(x_i) = \left. \frac{dg_i}{du_i}(u_i) \right|_{u_i = g_i^{-۱}(x_i)}$$

1. Slope
2. Operational
3. Inverting amplifier
4. Terminal
5. Neuron
6. Shunt
7. Conductance

می‌توان معادلهٔ حالت را به شکل زیر نوشت:

$$\dot{x}_i = \frac{1}{C_i} h_i(x_i) \left[\sum_j T_{ij} x_j - \frac{1}{R_i} g_i^{-1}(x_i) + I_i \right] \qquad (۲۲-۱)$$

که: $i = 1, 2, ..., n$. باید دقت کرد با توجه به مشخصهٔ سیگموییدی تابع $g_i(\cdot)$، تابع $h_i(\cdot)$ در رابطهٔ ذیل صدق می‌نماید:

$$h_i(x_i) > 0 \quad , \quad \forall x_i \in (-V_M, V_M)$$

نقاط تعادل سیستم، ریشه‌های n معادلهٔ همزمان زیر است:

$$0 = \sum_j T_{ij} x_j - \frac{1}{R_i} g_i^{-1}(x_i) + I_i$$

این معادله‌ها به کمک مشخصه‌های سیگموید، اتصال مقاومتهای خطی و جریانهای ورودی مشخص می‌شوند. البته می‌توان با انتخاب ولتاژ ورودی تقویت‌کننده (u_i) به عنوان متغیر حالت، به مدل فضای حالت معادلی برای مدار موردنظر دست یافت.

تحلیل پایداری این شبکهٔ عصبی به طور بحرانی به ارضای شرط تقارن[1] شبکه (یعنی $T_{ij} = T_{ji}$) بستگی دارد. مثالی از این تحلیل با شرط $T_{ij} = T_{ji}$ در بخش ۳ - ۲ و مثالی از تحلیل با شرط $T_{ij} \neq T_{ji}$ در بخش ۵ ـ ۶ آمده است.

۱ ـ ۱ ـ ۶ کنترل تطبیقی

سیستم خطی مرتبهٔ اول با مدل ذیل مفروض است:

$$\dot{y}_p = a_p y_p + k_p u$$

که u ورودی کنترل و y_p خروجی اندازه‌گیری شده است. چنین سیستمی را «دستگاه»[2] می‌نامیم. اکنون فرض کنیم هدف، دستیابی به سیستمی حلقه ـ بسته[3] است که رفتار ورودی ـ خروجی‌اش مبتنی بر مدل مرجع[4] ذیل باشد:

$$\dot{y}_m = a_m y_m + k_m r$$

1. Symmetry
2. Plant
3. Closed-loop
4. Reference model

در این مدل r ورودی مرجع است و مدل چنان انتخاب شده که $y_m(t)$، نشاندهندهٔ خروجی مطلوب[1] سیستم حلقه ـ بسته باشد. برای دستیابی به این هدف می‌توان از کنترل پسخور خطی[2] زیر استفاده کرد:

$$u(t) = \theta_1^*(t)\, r(t) + \theta_2^*(t)\, y_p(t)$$

اگر a_p و k_p معلوم باشند $(k_p \neq 0)$، پارامترهای کنترلگر[3]، θ_1^* و θ_2^*، با روابط ذیل تعیین می‌شوند:

$$\theta_1^* = \frac{k_m}{k_p} \quad , \quad \theta_2^* = \frac{a_m - a_p}{k_p}$$

و اگر a_p و k_p معلوم نباشند، می‌توان کنترلگر را به شکل زیر تعریف کرد:

$$u(t) = \theta_1(t)\, r(t) + \theta_2(t)\, y_p(t)$$

که می‌توان بهره‌های متغیر با زمان $\theta_1(t)$ و $\theta_2(t)$ را به طور بیدرنگ[4] با داده‌های در دسترس مانند $r(\tau)$، $y_m(\tau)$، $y_p(\tau)$ و $u(\tau)$ برای $\tau < t$ تنظیم نمود؛ تطبیق باید به گونه‌ای باشد که $\theta_1(t)$ و $\theta_2(t)$ در نهایت به سمت مقادیر نامی‌شان (یعنی θ_1^* و θ_2^*) میل کنند. قاعدهٔ تطبیق[5] بر اساس ملاحظات پایداری سیستم، انتخاب می‌شود؛ یکی از این قاعده‌ها که الگوریتم گرادیان[6] نامیده می‌شود* به صورت زیر است:

$$\dot{\theta}_1 = -\gamma\, (y_p - y_m)\, r$$

$$\dot{\theta}_2 = -\gamma\, (y_p - y_m)\, y_p$$

γ ثابت مثبتی است که سرعت تطبیق را مشخص می‌کند. چنین قاعدهٔ تطبیقی بر این فرض استوار است که علامت k_p معلوم می‌باشد، بدون کاستن از عمومیت موضوع، k_p را مثبت فرض می‌کنیم. برای تعیین مدل فضای حالت سیستم حلقه ـ بسته تحت قانون کنترل تطبیقی،

* این قاعدهٔ تطبیق در بخش ۱۳ ـ ۴ به دست خواهد آمد.

1. Desired output
2. Linear feedback control
3. Controller
4. On-line
5. Adaptation rule
6. Gradient algorithm

معمول چنان است که خطای خروجی و خطاهای پارامتری ϕ_1 و ϕ_2 را به شکل زیر تعریف نماییم:

$$e_0 = y_p - y_m \ , \ \phi_1 = \theta_1 - \theta_1^* \ , \ \phi_2 = \theta_2 - \theta_2^*$$

با استفاده از تعریف θ_1^* و θ_2^* می‌توان مدل مرجع را به شکل ذیل باز نوشت:

$$\dot{y}_m = a_p y_m + k_p (\theta_1^* r + \theta_2^* y_m)$$

از سوی دیگر خروجی دستگاه، y_p، نیز در معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\dot{y}_p = a_p y_p + k_p (\theta_1 r + \theta_2 y_p)$$

حال با تفریق دو معادلهٔ اخیر، به معادلهٔ خطا[1] دست می‌یابیم:

$$\begin{aligned}\dot{e}_0 &= a_p e_0 + k_p (\theta_1 - \theta_1^*) r + k_p (\theta_2 y_p - \theta_2^* y_m) \\ &= a_p e_0 + k_p (\theta_1 - \theta_1^*) r + k_p (\theta_2 y_p - \theta_2^* y_m + \theta_2^* y_p - \theta_2^* y_p) \\ &= (a_p + k_p \theta_2^*) e_0 + k_p (\theta_1 - \theta_1^*) r + k_p (\theta_2 - \theta_2^*) y_p\end{aligned}$$

بنابراین سیستم حلقه ـ بسته با معادلهٔ حالت مرتبهٔ سوم، ناخودگردان و غیرخطی ذیل توصیف می‌گردد:

$$\dot{e}_0 = a_m e_0 + k_p \phi_1 r(t) + k_p \phi_2 (e_0 + y_m(t)) \qquad (۱-۲۳)$$

$$\dot{\phi}_1 = -\gamma e_0 r(t) \qquad (۱-۲۴)$$

$$\dot{\phi}_2 = -\gamma e_0 (e_0 + y_m(t)) \qquad (۱-۲۵)$$

در اینجا از رابطهٔ $\dot{\phi}_i(t) = \dot{\theta}_i(t)$ استفاده کرده‌ایم ضمناً $r(t)$ و $y(t)$ را به شکل توابع صریحی[2] از زمان نوشته‌ایم تا بر ناخودگردانی طبیعت سیستم تأکید کرده باشیم. سیگنالهای $r(t)$ و $y(t)$ نیز ورودیهای راه‌انداز[3] خارجیِ[4] سیستم حلقه ـ بسته هستند.

1. Error equation 2. Explicit 3. Driving
4. External

حالت سادهٔ این مدل زمانی رخ می‌دهد که k_p معلوم باشد؛ در این حالت می‌توان θ_1 را برابر با θ_1^* قرار داد و فقط θ_2 را به طور بیدرنگ تنظیم نمود، در این صورت مدل حلقه ـ بسته به معادلهٔ ذیل تقلیل می‌یابد:

$$\dot{e}_0 = a_m e_0 + k_p \phi (e_0 + y_m(t)) \qquad (۱-۲۶)$$

$$\dot{\phi} = -\gamma e_0 (e_0 + y_m(t)) \qquad (۱-۲۷)$$

در این معادلات زیرنویس ϕ_2 را در نظر نگرفته‌ایم. چنانچه هدفِ کنترل آن باشد که خروجی دستگاه y در مقدار صفر تنظیم شود، آنگاه $r(t)$ را متحد با صفر قرار می‌دهیم (در این صورت داریم: $y_m(t) \equiv 0$) و مدل حلقه ـ بسته به شکل مدل مرتبهٔ دوم خودگردان زیر ساده می‌شود:

$$\dot{e}_0 = (a_m + k_p \phi) e_0$$

$$\dot{\phi} = -\gamma e_0^2$$

نقاط تعادل این سیستم از قرار دادن $\dot{e}_0 = \dot{\phi} = 0$ برای به دست آوردن معادله‌های جبری ذیل حاصل می‌شود:

$$0 = (a_m + k_p \phi) e_0$$

$$0 = -\gamma e_0^2$$

بدین ترتیب سیستم به ازای جمیع مقادیر ϕ، نقطهٔ تعادلی در $e_0 = 0$ دارد و به تعبیر دیگر دارای مجموعهٔ تعادل[1] $e_0 = 0$ است ضمن اینکه هیچ نقطهٔ تعادل تنهایی نیز ندارد.

روش خاص کنترل تطبیقی مورد استفاده در این قسمت، *کنترل تطبیقی مدل مرجع مستقیم*[2] نامیده می‌شود. واژهٔ «مدل مرجع» برخاسته از این حقیقت است که هدف کنترلگر آن است که سیستم را با مدل مرجع حلقه ـ بسته‌ای هماهنگ و همخوان کند و واژهٔ «مستقیم» نیز حاکی از آن است که پارامترهای کنترلگر به طور مستقیم تطبیق می‌یابند. به عنوان مثال این روند

1. Equilibrium set 2. Direct model reference adaptive control

را می‌توان برای حالتی از کنترل تطبیقی به کار برد که در آن پارامترهای دستگاه (k_p, a_p) به طور بیدرنگ، تخمین[1] زده می‌شود و سپس از این تخمین برای محاسبهٔ پارامترهای کنترلگر استفاده می‌گردد. در اینجا به تشریح سایر روشهای کنترل تطبیقی نمی‌پردازیم* و به همین مقدار اکتفا می‌کنیم که نحوهٔ تحلیل کنترل تطبیقی مدل مرجع مستقیم، که بعدتر مورد بررسی قرار خواهد گرفت، برای سایر روشهای کنترل تطبیقی نیز عمومیت دارد. مسألهٔ کنترل تطبیقی مدلهای غیرخطی جالبی را (مانند مدلهای درجه دوم و سوم پیشگفته) به دست می‌دهد که می‌توان از آنها برای تشریح روشهای پایداری و آشفتگی مطرح در این کتاب بهره جُست. توصیف عمومی‌تر کنترل تطبیقی مدل مرجع و تحلیل پایداری آن را در بخش ۱۳ ـ ۴ پی خواهیم گرفت.

۱ ـ ۲ سیستمهای مرتبهٔ دوم

سیستمهای خودگردان مرتبهٔ دوم جایگاه مهمی را در مطالعهٔ سیستمهای غیرخطی به خود اختصاص می‌دهد زیرا در این سیستمها می‌توان مسیر[2] پاسخها را به صورت منحنی‌هایی[3] در صفحه نمایش داد. این موضوع، تصوّر رفتار کیفی[4] سیستم را بسادگی امکانپذیر می‌سازد. هدف این بخش آن است که با استفاده از سیستمهای مرتبهٔ دوم و با بیانی ابتدایی و ساده، برخی از مهمترین مفاهیم سیستمهای غیرخطی را تبیین کند؛ از این رو به طور مشخص به بررسی رفتار سیستم خطی در نزدیکی نقاط تعادل و نیز پدیدهٔ نوسان غیرخطی می‌پردازیم.

می‌توان سیستمهای خودگردان مرتبهٔ دوم را به کمک دو معادلهٔ دیفرانسیل عددی[5] به شکل زیر نمایش داد:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \qquad (۱ ـ ۲۸)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \qquad (۱ ـ ۲۹)$$

فرض کنید $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ پاسخ معادلات (۱ ـ ۲۸) و (۱ ـ ۲۹) باشد** که از حالت

* برای بررسی جامع کنترل تطبیقی، می‌توان به [۴]، [۱۱]، [۷۹]، [۱۲۲] و یا [۱۵۱] مراجعه کرد.

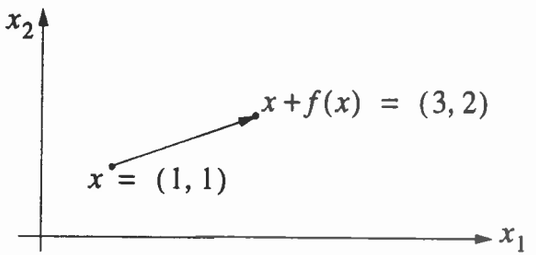
** فرض می‌شود سیستم پاسخی یکتا داشته باشد.

1. Estimate
2. Trajectory
3. Curve
4. Qualitative
5. Scalar

اولیهٔ[1] مشخصی مانند $x_0 = (x_{10}, x_{20})$ (یعنی: $x(0) = x_0$) آغاز شده است. مکان هندسی[2] پاسخ سیستم، $x(t)$، به ازای همهٔ مقادیر $t > 0$، در صفحهٔ $x_1 - x_2$ منحنی‌ای است که از نقطهٔ x_0 می‌گذرد. این منحنی *مسیر حالت* یا *دور حالت*[3] معادلات (۱ ـ ۲۸) و (۱ ـ ۲۹) نامیده می‌شود. صفحهٔ $x_1 - x_2$ نیز معمولاً به نام *صفحهٔ حالت*[4] یا *صفحهٔ فاز*[5] خوانده می‌شود. سمت راست عبارتهای (۱ ـ ۲۸) و (۱ ـ ۲۹) بیان‌کنندهٔ بردار مماس $\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))$ نسبت به منحنی است. با استفاده از نماد برداری می‌توان نوشت:

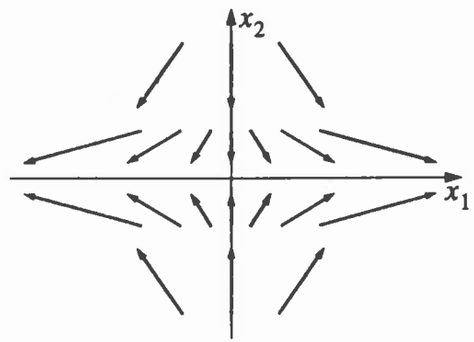
$$\dot{x} = f(x)$$

که $f(x)$ نشاندهندهٔ بردار $(f_1(x), f_2(x))$ است، $f(x)$ را *میدان برداری*[6] روی صفحهٔ حالت می‌نامیم. بدین ترتیب در واقع به هر نقطه از صفحه، برداری از میدان $f(x)$ را منتسب می‌کنیم. برای درک آسانتر، $f(x)$ را به شکل برداری با مبدأ x در نظر بگیرید یعنی به نقطهٔ x پاره‌خط مستقیمی از x تا $x + f(x)$ را منتسب نمایید. برای مثال اگر $f(x) = (2x_1^2, x_2)$ باشد، آنگاه در $(1\ و\ 1) = x$، پیکانی را رسم می‌کنیم که از $(1, 1)$ تا $(2, 3) = (1, 2) + (1, 1)$ امتداد یابد (شکل ۱ ـ ۹). با تکرار این کار در همهٔ نقاط صفحه، به نمودار میدان برداری شکل ۱ ـ ۱۰ دست می‌یابیم. در این شکل، طول پیکان در هر نقطهٔ مشخص مانند x، متناسب با $\sqrt{f_1^2(x) + f_2^2(x)}$ است. از آنجا که میدان برداری در هر نقطه، مماس بر مسیر حالت در آن نقطه می‌باشد، لذا علی‌القاعده این امکان مهیاست که با شروع از هر نقطه روی نمودار میدان برداری به مسیر حالت دست یابیم.



شکل ۱ ـ ۹ نمایش میدان برداری

1. Initial state
2. Locus
3. Orbit
4. State plane
5. Phase plane
6. Vector field



شکل ۱ ـ ۱۰ نمودار میدان برداری

خانوادهٔ همهٔ مسیرهای حالت و یا همهٔ منحنی‌های پاسخ، پیکرهٔ *فاز*[1] معادلات (۱ ـ ۲۸) و (۱ ـ ۲۹) نامیده می‌شود. می‌توان تصویر تقریبی پیکرهٔ فاز را با ترسیم مسیرهای حالت از تعداد زیادی از حالتهای اولیهٔ گسترده در همهٔ صفحهٔ $x_1 - x_2$ به دست آورد. با توجه به اینکه روشهای عددی در حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی عمومی کاربرد دارد، لذا بسادگی می‌توان پیکرهٔ فاز را به کمک شبیه‌سازی[2] کامپیوتری رسم کرد*. البته روشهای مختلف دیگری نیز برای ترسیم پیکرهٔ فاز وجود دارد و چنانچه اصراری بر توصیف همگی آنها نداشته باشیم، سودمندتر است که یکی از آنها را بیاموزیم. روش مورد بحث در این کتاب، تحت عنوان روش هم شیب[3] شناخته می‌شود. برای درک مفهوم این روش باید دقت کرد که شیب مسیر حالت در هر نقطهٔ مشخص، مانند x، که با $s(x)$ نشان داده می‌شود، عبارت است از:

$$s(x) = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

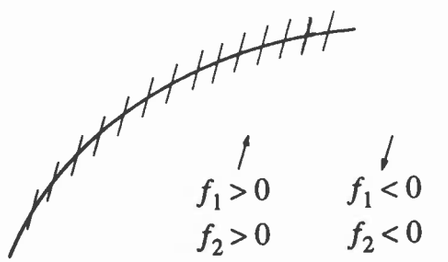
بنابراین معادلهٔ:

$$s(x) = c$$

* برخی نکات مربوط به رسم پیکرهٔ فاز با استفاده از شبیه‌سازی کامپیوتری در بخش ۱ ـ ۲ ـ ۵ ارائه می‌شود.

1. Phase portrait 2. Simulation 3. Isocline

منحنی‌ای را در صفحهٔ $x_1 - x_2$ مشخص می‌کند که شیب مسیرهای حالت در امتداد آن برابر با c است. هرگاه یکی از مسیرهای حالت معادله‌های (۱ ـ ۲۸) و (۱ ـ ۲۹) با منحنی $s(x) = c$ برخورد کند، شیب مسیر حالت در نقطهٔ تقاطع برابر با c خواهد بود؛ بنابراین روند کار چنین است که منحنی $s(x) = c$ را در صفحهٔ $x_1 - x_2$ و در امتداد آن پاره‌خطهای کوتاهی با شیب c را روی آن رسم می‌نمایند، این پاره‌خطها با هم موازیند و جهت آنها با علامت $f_1(x)$ و $f_2(x)$ در نقطهٔ x تعیین می‌شود (شکل ۱ ـ ۱۱). منحنی $s(x) = c$ به‌عنوان هم شیب شناخته می‌شود. این روند به تعداد به اندازهٔ کافی زیاد برای ثابتهای c تکرار می‌شود تا صفحه با هم شیبها



شکل ۱ ـ ۱۱ هم شیب با شیب مثبت

پُر گردد. سپس با شروع از یک نقطهٔ اولیهٔ مشخص و با حرکت در جهت پاره‌خطهای کوتاه از یک هم‌شیب به دیگری، مسیر حالت متناظر با آن حالت اولیه رسم می‌شود.

مثال ۱ ـ ۱ معادلهٔ پاندول بدون اصطکاک را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\sin x_1$$

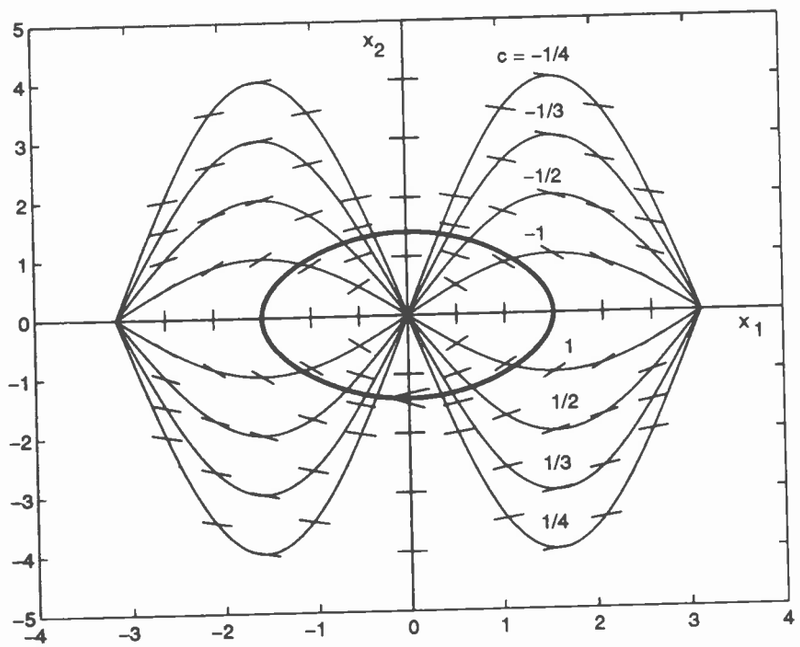
در این صورت شیب تابع $s(x)$ با رابطهٔ ذیل تعیین می‌شود:

$$s(x) = \frac{-\sin x_1}{x_2}$$

بنابراین معادلهٔ هم‌شیبها عبارت است از:

$$x_2 = -\frac{1}{c}\sin x_1$$

شکل ۱ ـ ۱۲، هم شیبها را برای مقادیر مختلف c نشان می‌دهد. بدین ترتیب بسادگی می‌توان با شروع از هر نقطه، مسیر حالت را رسم کرد (چنین مسیری برای نقطهٔ $(\pi/2, 0)$ در شکل ۱ ـ ۱۲ آورده شده است). چنانچه مسیر حالت بدقت رسم شود، می‌توان دریافت که مسیر حالت،



شکل ۱ ـ ۱۲ ترسیم پیکرهٔ فاز معادلهٔ پاندول (بدون اصطکاک) با روش هم شیب

منحنی بسته‌ای را طی می‌کند. حال معادلهٔ پاندول را با در نظر گرفتن اصطکاک بازمی‌نویسیم:

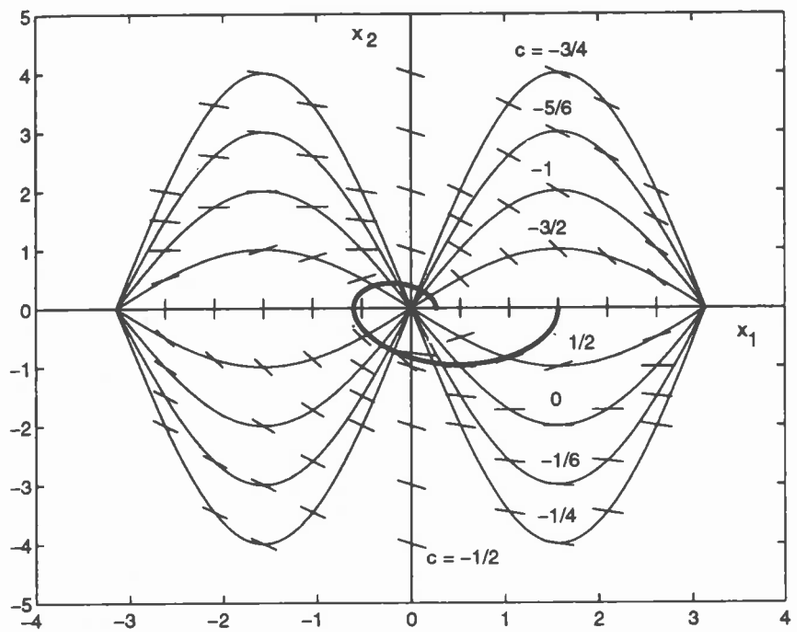
$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -0/5 - \sin x_1$$

در این حالت، معادلهٔ هم‌شیبها به شکل ذیل است:

$$x_2 = -\frac{1}{0/5 + c}\sin x_1$$

هم‌شیبهای رسم شده در شکل ۱ ـ ۱۳، معادل شکل ۱ ـ ۱۲ است جز آنکه شیب پاره‌خطها تغییر یافته است. رسم مسیر حالت با شروع از نقطهٔ $(\pi/2, 0)$ نشان می‌دهد مسیر حالت به صورت مارپیچ[1] جمع شونده[2] حول مبدأ مختصات حرکت می‌کند. Δ



شکل ۱ ـ ۱۳ ترسیم پیکرهٔ فاز معادلهٔ پاندول (با اصطکاک) با روش هم شیب

باید دقت کرد چون زمان t در مسیر حالت فشرده می‌شود، لذا بازیافت پاسخ $(x_1(t), x_2(t))$ متناظر با یک مسیر معلوم، امکانپذیر نیست. بنابراین مسیر حالت تنها رفتار کیفی (و نه رفتار کمّی[3]) پاسخ متناظر را نشان می‌دهد. برای مثال، یک مسیر بسته نشاندهندهٔ

1. Spiral 2. Shrinking 3. Quantitative

پاسخی متناوب است (بدین معنا که سیستم، نوسانی ماندگار[1] دارد) در حالی که یک مارپیچ جمع‌شونده نشاندهندهٔ نوسانی میراست[2]. در باقیماندهٔ این بخش با استفاده از پیکرهٔ فاز، به تحلیل کیفی رفتار سیستمهای مرتبه دوم می‌پردازیم.

۱ـ۲ـ۱ رفتار کیفی سیستمهای خطی

سیستم خطی نامتغیر بازمان ذیل را در نظر می‌گیریم:

$$\dot{x} = Ax \qquad (۱ - ۳۰)$$

که A ماتریسی حقیقی[3] با ابعاد ۲ × ۲ است. با مشخص بودن حالت اولیهٔ سیستم، x_0، پاسخ معادلهٔ (۱ ـ ۳۰) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$x(t) = M exp(J_r t) M^{-1} x_0$$

که J_r، صورت حقیقی جردن ماتریس A و M نیز ماتریس حقیقی غیرمنفردی[4] است که در رابطهٔ $M^{-1} A M = J_r$ صدق می‌کند. با توجه به مقادیر ویژهٔ ماتریس A، صورت حقیقی جردن ماتریس به یکی از سه شکل ذیل است:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & k \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

که k یا صفر است یا یک. شکل اول، متناظر با حالتی است که مقادیر ویژهٔ ماتریس، λ_1 و λ_2، حقیقی و مجزّایند؛ شکل دوم، متناظر با حالتی است که مقادیر ویژه حقیقی و تکراری‌اند و شکل سوم، متناظر با حالتی است که مقادیر ویژه، مختلطند[5] (یعنی: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$). در تحلیلها میان این سه حالت، تفاوت قائل می‌شویم. علاوه بر این در حالت مقادیر ویژهٔ حقیقی، حالتی را که حداقل یکی از مقادیر ویژه صفر است جداگانه بررسی می‌کنیم زیرا در این حالت، مبدأ، نقطهٔ تعادل تنها نیست و لذا رفتار کیفی سیستم کاملاً با حالتهای دیگر متفاوت است.

1. Sustained 2. Decaying 3. Real matrix
4. Nonsingular 5. Complex

حالت اول؛ هر دو مقدار ویژه حقیقی‌اند: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$

در این حالت $M = [v_1, v_2]$ است که v_1 و v_2، بترتیب بردارهای ویژهٔ[1] متناظر با λ_1 و λ_2 می‌باشد. تغییر مبدأ مختصات به اندازهٔ $z = M^{-1} x$، سیستم را به دو معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول ذیل تبدیل می‌کند:

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1$$
$$\dot{z}_2 = \lambda_2 z_2$$

که پاسخ آن برای حالت اولیهٔ معلوم (z_{10}, z_{20}) عبارت است از:

$$z_1 = z_{10} e^{\lambda_1 t} \quad , \quad z_2 = z_{20} e^{\lambda_2 t}$$

با حذف t بین دو معادله داریم:

$$z_2 = c z_1^{\lambda_2/\lambda_1} \qquad (۱ - ۳۱)$$

که: $c = z_{20} / (z_{10})^{\lambda_2/\lambda_1}$. می‌توان پیکرهٔ فاز سیستم را به کمک خانواده‌ای از منحنی‌های حاصل از معادلهٔ (۱ ـ ۳۱)، ناشی از تغییر مقدار ثابت c در R، به دست آورد. شکل پیکرهٔ فاز به علامتهای λ_1 و λ_2 بستگی دارد.

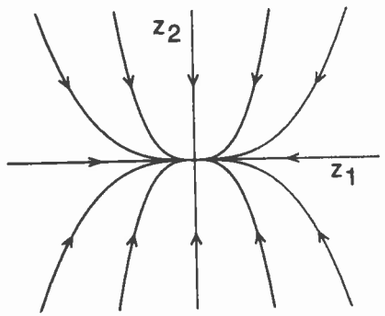
ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که هر دو مقدار ویژه منفی‌اند. بدون کاستن از عمومیت موضوع فرض می‌کنیم: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. در این صورت هر دو جملهٔ نمایی $e^{\lambda_1 t}$ و $e^{\lambda_2 t}$ با افزایش t به سمت بینهایت، به سمت صفر میل می‌کند؛ علاوه بر این با توجه به $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$، جملهٔ $e^{\lambda_1 t}$ سریعتر از $e^{\lambda_2 t}$ به سوی صفر می‌رود؛ از این رو λ_2 را مقدار ویژهٔ تند[2] و λ_1 را مقدار ویژهٔ کُند[3] می‌نامیم، به همین ترتیب v_2 را بردار ویژهٔ تند و v_1 را بردار ویژهٔ کُند می‌دانیم. با توجه به این موضوع، مسیر حالت در امتداد منحنی (۱ ـ ۳۱) و با سرعت λ_2/λ_1، که بزرگتر از واحد است، به سمت مبدأ صفحهٔ $z_1 - z_2$ می‌رود. شیب این منحنی برابر است با:

$$\frac{dz_2}{dz_1} = c \frac{\lambda_2}{\lambda_1} z_1^{[(\lambda_2/\lambda_1)-1]}$$

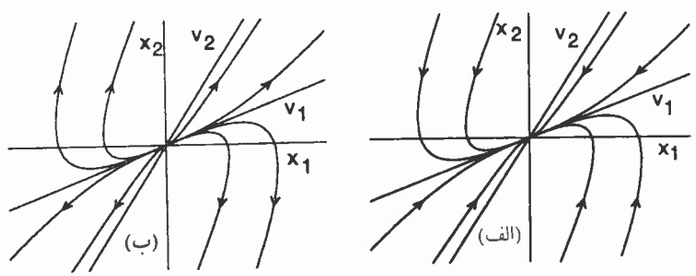
چون $[(\lambda_2/\lambda_1) - 1]$ مثبت است، لذا با میل $|z_1|$ به سمت صفر، شیب منحنی به سوی صفر و با افزایش $|z_1|$ به سمت بینهایت، شیب منحنی نیز به سوی بینهایت میل می‌کند.

1. Eigenvector 2. Fast 3. Slow

بنابراین هنگامی که مسیر حالت به سمت مبدأ سوق می‌یابد، بر محور z_1 مماس خواهد شد و زمانی که به سمت بینهایت میل کند، با محور z_2 موازی خواهد گردید. این مشاهدات ما را مجاز می‌دارد تا خانوادهٔ مسیرهای حالت را به طور تمثیلی مطابق شکل ۱ ـ ۱۴ رسم کنیم، در این صورت با بازگشت به دستگاه مختصات x، خانوادهٔ مسیرهای حالت به طور تمثیلی مطابق شکل ۱ ـ ۱۵ (الف) خواهد بود. باید توجه داشت هنگامی که مسیرهای حالت در صفحهٔ $x_2 - x_1$ به مبدأ نزدیک می‌گردد، بر بردار ویژهٔ v_1 (کُند) مماس خواهد شد و زمانی که مسیرهای حالت از مبدأ مختصات دور می‌شوند، با بردار ویژهٔ v_2 (تند) موازی خواهد بود؛ در این حالت نقطهٔ تعادل $x = 0$ را گره *پایدار*[1] می‌نامیم.



شکل ۱ ـ ۱۴ پیکرهٔ فاز گره پایدار در مختصات مُدال[2]

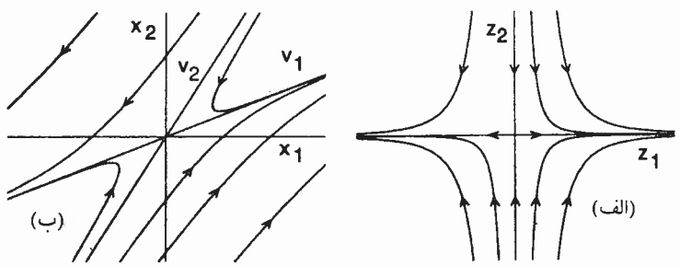


شکل ۱ ـ ۱۵ پیکرهٔ فاز برای: (الف) گره پایدار؛ (ب) گره ناپایدار

1. Stable node
2. Modal coordinate

هنگامی که λ_1 و λ_2 مثبتند، پیکرهٔ فاز همان شکل ۱ ـ ۱۵ (الف) را دارد جز آنکه جهت مسیرهای حالت وارونه می‌شود زیرا جملات نمایی $e^{\lambda_1 t}$ و $e^{\lambda_2 t}$ با افزایش t، به طور نمایی رشد می‌کنند. شکل ۱ ـ ۱۵ (ب)، پیکرهٔ فاز را برای حالت $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ نشان می‌دهد. در این حالت، نقطهٔ تعادل $x = 0$ را گره *ناپایدار*[1] می‌نامند.

اکنون فرض کنید مقادیر ویژه ناهمعلامتند و به طور مشخص فرض کنید: $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$؛ در این مورد با افزایش t به سمت بینهایت، $e^{\lambda_1 t} \longrightarrow \infty$ و $e^{\lambda_2 t} \longrightarrow 0$ میل می‌کند، به همین دلیل λ_2 را مقدار ویژهٔ پایدار[2] و λ_1 را مقدار ویژهٔ ناپایدار[3] می‌نامیم. متناظراً v_2 و v_1 نیز بترتیب بردار ویژهٔ پایدار[4] و بردار ویژهٔ ناپایدار[5] خوانده می‌شود. معادلهٔ مسیر حالت، رابطهٔ (۱ ـ ۳۱)، دارای عبارت نمایی λ_1/λ_2 (با علامت منفی) است لذا خانوادهٔ مسیرهای حالت در صفحه $z_1 - z_2$ دارای شکل نمونه‌ای ۱ ـ ۱۶ (الف) می‌باشد. مسیرها به شکل هذلولی[6] هستند که در حالت $|z_1| \longrightarrow \infty$، مماس بر محور z_1 و در حالت $|z_1| \longrightarrow 0$، مماس بر محور z_2 خواهد شد. تنها استثنای این شکلهای هذلولی، چهار مسیرِ در امتداد محورهاست: دو مسیرِ در امتداد محور z_2 را مسیر پایدار می‌گویند (زیرا با افزایش t، مسیرها به سمت مبدأ سوق می‌یابد) و دو مسیرِ در امتداد محور z_1 را مسیر ناپایدار می‌نامند (زیرا با افزایش t، مسیرها نیز به سمت بینهایت میل می‌کند). پیکرهٔ فاز در صفحهٔ $x_2 - x_1$ در شکل ۱ ـ ۱۶ (ب) رسم شده است؛ در این صفحه، مسیرهای پایدار در امتداد بردار ویژهٔ پایدار، v_2، و مسیرهای ناپایدار در امتداد بردار ویژهٔ ناپایدار، v_1، قرار می‌گیرند. در این حالت، نقطهٔ تعادل را *نقطهٔ زینی*[7] می‌نامند.



شکل ۱ ـ ۱۶ پیکرهٔ فاز نقطهٔ زینی: (الف) در مختصات مُدال؛ (ب) در مختصات اصلی

1. Unstable node
2. Stable eigenvalue
3. Unstable eigenvalue
4. Stable eigenvector
5. Unstable eigenvector
6. Hyperbolic
7. Saddle point

حالت دوم؛ مقادیر ویژه مختلطند: $\lambda_{۱,۲} = \alpha \pm j\beta$

تغییر مبدأ مختصات با تبدیل $z = M^{-۱}x$، سیستم (۱ ـ ۳۰) را به شکل زیر درمی‌آورد:

$$\dot{z}_۱ = \alpha z_۱ - \beta z_۲$$

$$\dot{z}_۲ = \beta z_۱ + \alpha z_۲$$

پاسخ این معادله، به صورت نوسانی است و معمولاً در مختصات قطبی[1] به صورت ذیل بیان می‌شود:

$$r = \sqrt{z_۱^۲ + z_۲^۲} \quad , \quad \theta = tan^{-۱}\left(\frac{z_۲}{z_۱}\right)$$

در این صورت به دو معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول غیرتزویجی[2] دست می‌یابیم:

$$\dot{r} = \alpha r$$

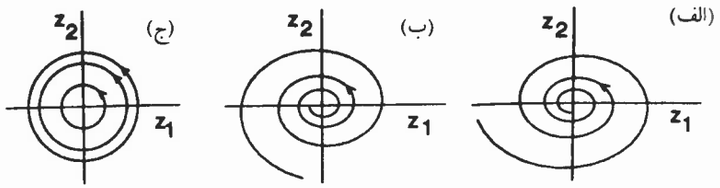
$$\dot{\theta} = \beta$$

پاسخ این معادله با در نظر گرفتن حالت اولیهٔ $(r_۰, \theta_۰)$ عبارت است از:

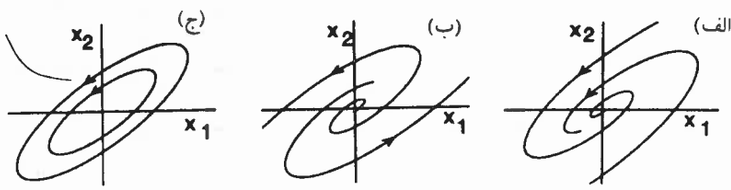
$$r(t) = r_۰ e^{\alpha t} \quad , \quad \theta(t) = \theta_۰ + \beta t$$

که بیانگر یک مارپیچ لگاریتمی[3] در صفحهٔ $z_۲ - z_۱$ است. بسته به مقدار α، مسیر حالت یکی از حالتهای شکل ۱ ـ ۱۷ را خواهد داشت: وقتی $\alpha < ۰$ است، مارپیچ به سمت مبدأ همگرا می‌شود، وقتی $\alpha > ۰$ است، مارپیچ به صورت واگرا از مبدأ دور می‌شود و هنگامی که $\alpha = ۰$ است، مسیر حالت، دایره‌ای به شعاع $r_۰$ است. شکل ۱ ـ ۱۸، مسیر حالت را در صفحهٔ $x_۲ - x_۱$ نشان می‌دهد: اگر $\alpha < ۰$ باشد، نقطهٔ تعادل $x = ۰$ راکانون پایدار[4]، اگر $\alpha > ۰$ باشد، آن راکانون ناپایدار[5] و اگر $\alpha = ۰$ باشد، آن را مرکز[6] می‌نامیم.

1. Polar coordinate
2. Uncoupled
3. Logarithmic spiral
4. Stable focus
5. Unstable focus
6. Center



شکل ۱ ـ ۱۷ نمونه‌ای از مسیرهای حالت برای مقادیر ویژهٔ مختلط:
(الف) $\alpha < ۰$؛ (ب) $\alpha > ۰$؛ (ج) $\alpha = ۰$



شکل ۱ ـ ۱۸ پیکرهٔ فاز برای: (الف) کانون پایدار؛ (ب) کانون ناپایدار؛ (ج) مرکز

حالت سوم؛ مقادیر ویژه مضاعف و غیرصفرند: $\lambda_۱ = \lambda_۲ = \lambda \neq ۰$

تغییر مبدأ مختصات با تبدیل $z = M^{-۱}x$، سیستم (۱ ـ ۳۰) را به شکل زیر درمی‌آورد:

$$\dot{z}_۱ = \lambda z_۱ + k z_۲$$

$$\dot{z}_۲ = \lambda z_۲$$

پاسخ این معادله با حالت اولیهٔ $(z_{۱۰}, z_{۲۰})$ به صورت ذیل می‌باشد:

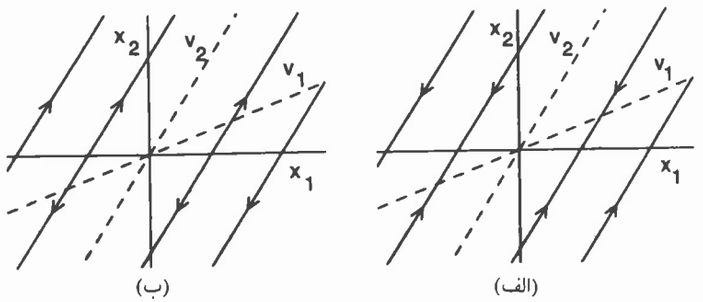
$$z_۱(t) = e^{\lambda t}(z_{۱۰} + k z_{۲۰} t) \quad , \quad z_۲(t) = e^{\lambda t} z_{۲۰}$$

با حذف t، معادلهٔ مسیر حالت خواهد شد:

$$z_۱ = z_۲\left[\frac{z_{۱۰}}{z_{۲۰}} + \frac{k}{\lambda} Ln\left(\frac{z_۲}{z_{۲۰}}\right)\right]$$

شکل ۱ ـ ۱۹، مسیر حالت را برای $k = ۰$ و شکل ۱ ـ ۲۰ همین مسیر را برای $k = ۱$ نشان

بنا به علامت λ_2، جملهٔ نمایی یا افزاینده است یا میرا. شکل ۱ ـ ۲۱، پیکرهٔ فاز را در صفحهٔ $x_2 - x_1$ نشان می‌دهد و ملاحظه می‌شود اگر $\lambda_2 < 0$ باشد، تمامی مسیرهای حالت به سمت زیرفضای[1] تعادل همگرا می‌شود و چنانچه $\lambda_2 > 0$ باشد همهٔ مسیرهای حالت از زیرفضای تعادل واگرا می‌گردد.



شکل ۱ ـ ۲۱ پیکرهٔ فاز برای: (الف) $\lambda_1 = 0$ و $\lambda_2 < 0$؛ (ب) $\lambda_1 = 0$ و $\lambda_2 > 0$

وقتی هر دو مقدار ویژه صفر باشد، تغییر متغیر $z = M^{-1}x$ نتیجه می‌دهد:

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = 0$$

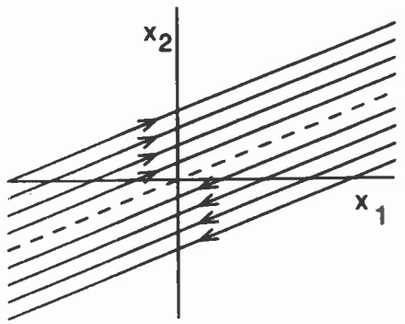
که پاسخ آن به شکل مقابل است:

$$z_1(t) = z_{10} + z_{20}t \quad , \quad z_2(t) = z_{20}$$

بنا به علامت z_{20}، جملهٔ $z_{20}t$ کاهش یا افزایش می‌یابد. محور z_1، زیرفضای تعادل است. شکل ۱ ـ ۲۲، پیکرهٔ فاز را در صفحهٔ $x_2 - x_1$ نشان می‌دهد که خطچین، بیانگر زیرفضای تعادل است. پیکرهٔ فاز شکل ۱ ـ ۲۲، کاملاً متفاوت با شکل ۱ ـ ۲۱ است به طوری که مسیرهایی که از زیرفضای تعادل خارج می‌شوند به صورت موازی با آن دور می‌گردند.

مطالعهٔ رفتار سیستمهای خطی در اطراف نقطهٔ تعادل $x = 0$، بسیار مهم است زیرا در بسیاری از موارد می‌توان برای بررسی رفتار محلی یک سیستم غیرخطی در نزدیکی نقطهٔ

1. Subspace



شکل ۱ ـ ۲۲ پیکرهٔ فاز برای حالتی که: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

تعادلش سیستم را حول آن نقطه خطی کرد و سپس رفتار سیستم خطی حاصل را بررسی نمود. اینکه نتایج این روش چقدر قطعی و قابل اتکاست به این نکته بستگی دارد که رفتارهای کیفی پیکره‌های فاز سیستم خطی تا چه حد در مقابل آشفتگیها ثابت می‌ماند. برای درک رفتار سیستمهای خطی در مقابل آشفتگی می‌توان تأثیر حالت خاصی از آشفتگی خطی[1] را بررسی کرد؛ بدین منظور $A + \Delta A$ را در نظر می‌گیریم که A دارای مقادیر ویژهٔ مجزا بوده، ΔA نیز ماتریسی حقیقی با ابعاد 2×2 است که درایه‌هایش[2] اعداد اختیاری کوچکی هستند. با توجه به نظریهٔ آشفتگی در ماتریسها می‌دانیم مقادیر ویژهٔ ماتریس به طور پیوسته به پارامترهایش بستگی دارد*، بدین معنا که برای هر عدد مثبت ε، عدد مثبت متناظری مانند δ چنان وجود دارد که اگر اندازهٔ آشفتگی در هر درایهٔ A کوچکتر از δ باشد، آنگاه مقادیر ویژهٔ ماتریس آشفتهٔ[3] $A + \Delta A$ درون گویهای بازی[4] به مرکزهای مقادیر ویژهٔ A و شعاع ε قرار خواهد داشت. در این صورت هر مقدار ویژهٔ ماتریس A که در نیم صفحهٔ باز سمت راست (بخش حقیقی مثبت) و یا در نیم‌صفحهٔ باز سمت چپ (بخش حقیقی منفی) قرار داشته باشد پس از بروز آشفتگی نسبتاً کوچک، در همان نیم صفحهٔ متناظر خود قرار خواهد داشت. لیکن باید توجه داشت پس از آشفته‌شدن سیستم، ممکن است مقادیر ویژهٔ روی محور موهومی به نیم صفحهٔ راست یا نیم صفحهٔ چپ منتقل گردد زیرا گویی که مرکزش روی محور موهومی باشد (هر چقدر هم که

* [۵۷، فصل هفتم] را ملاحظه کنید.

1. Linear perturbation
2. Element
3. Perturbed matrix
4. Open ball

شعاعش، ε، کوچک باشد)، باز وارد هر دو نیم‌صفحهٔ چپ و راست خواهد شد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت چنانچه نقطهٔ تعادل $x = 0$ (مربوط به $\dot{x} = Ax$)، گره، کانون یا نقطهٔ زینی باشد، آنگاه برای آشفتگیهای به اندازهٔ کافی کوچک، نقطهٔ تعادل $x = 0$ (مربوط به $\dot{x} = (A + \Delta A)x$) نیز از همان نوع خواهد بود. اما اگر نقطهٔ تعادل، مرکز باشد وضعیت کاملاً متفاوت خواهد بود؛ برای توضیح بیشتر، آشفتگی ذیل را مربوط به صورت حقیقی جردن در حالت مرکز در نظر می‌گیریم:

$$\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}$$

که μ پارامتر آشفتگی است. هنگامی که μ مثبت باشد، نقطهٔ تعادل سیستم آشفته، کانونی ناپایدار است اما اگر μ منفی باشد، نقطهٔ تعادل، کانونی پایدار است. این موضوع مستقل از اینکه μ چقدر کوچک (ولی غیرصفر) باشد، صادق است. با توجه به اینکه پیکرهٔ فاز کانونهای پایدار و یا ناپایدار کاملاً با پیکرهٔ فاز مرکز متفاوت می‌باشد، نقطهٔ تعادل مرکز در مقابل آشفتگی، مقاوم نخواهد بود.

نقاط تعادل گره کانون و زینی را *پایدار ساختاری*[1] می‌نامند زیرا رفتار کیفی خود را در مقابل آشفتگیهای بسیار کوچک حفظ می‌کنند*، اما نقطهٔ تعادل مرکز، پایدار ساختاری نیست. تمایز میان این دو مفهوم، به موقعیت مقادیر ویژهٔ A بستگی دارد. باید دقت کرد مقادیر ویژهٔ روی محور موهومی، بشدت نسبت به آشفتگی در معرض خطر هستند. چنین موضوعی ما را به مفهوم *نقطهٔ تعادل هذلولی*[2] رهنمون می‌سازد: مبدأ $x = 0$ را نقطهٔ تعادل هذلولیِ $\dot{x} = Ax$ گویند اگر A هیچ مقدار ویژه‌ای با بخش حقیقی صفر نداشته باشد**.

هنگامی که ماتریس A دارای مقدار ویژهٔ مضاعف غیرصفر است، آشفتگیهای بسیار کوچک نیز موجب پدیدآمدن یک زوج مقدار ویژهٔ مختلط می‌شود؛ بنابراین ممکن است یک گره پایدار (یا ناپایدار) به صورت یک گره پایدار (یا متناظراً ناپایدار) باقی بماند و یا به شکل یک کانون پایدار (یا متناظراً ناپایدار) درآید.

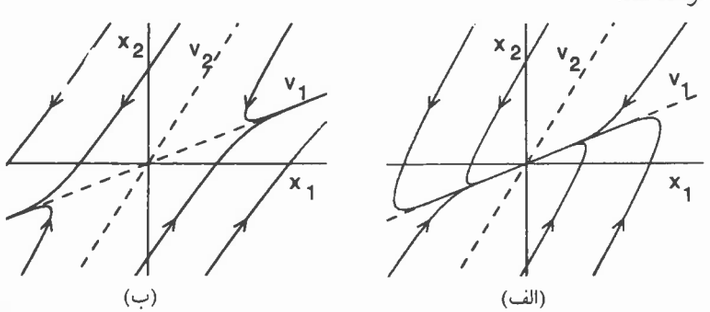
---

* برای تعریف دقیق و عمومی‌تر پایداری ساختاری، [۷۰، فصل شانزدهم] را ملاحظه کنید.

** تعریف نقطهٔ تعادل هذلولی، قابل تعمیم به سیستمهای با مرتبهٔ بالاتر است. ضمناً می‌توان با تعمیم این مفهوم به مقادیر ویژهٔ سیستم خطی شده، از آن برای نقاط تعادل سیستمهای غیرخطی نیز بهره جست.

1. Structurally stability
2. Hyperbolic equilibrium

هنگامی که مقادیر ویژهٔ A صفر باشد، انتظار این است که آشفتگی سبب دورشدن مقادیر ویژه از صفر گردد، در نتیجه تغییرات مهمی در پیکرهٔ فاز رخ می‌دهد؛ لیکن تفاوت آشکاری میان حالتی که فقط یک مقدار ویژه صفر است و نیز حالتی که هر دو مقدار ویژه صفرند ($A \neq 0$)، وجود دارد: در حالت اوّل، آشفتگی در مقدار ویژهٔ صفر، سبب می‌شود تا مقدار ویژه‌ای حقیقی به شکل $\lambda_1 = \mu$ به دست آید که μ ممکن است مثبت یا منفی باشد. چون مقدار ویژهٔ دیگر (λ_2)، مقداری غیرصفر دارد، آشفتگی همچنان آن را دور از صفر نگه خواهد داشت؛ علاوه بر این از آنجا که بحث دربارهٔ آشفتگیهای نسبتاً کوچک است لذا $|\lambda_1| = |\mu|$ بمراتب کوچکتر از $|\lambda_2|$ است. این مبحث را با بررسی دو مقدار ویژهٔ حقیقی مجزا به پایان می‌بریم یعنی حالتی که نقطهٔ تعادل سیستم برحسب علامتهای λ_2 و μ یا به صورت گره و یا به صورت نقطهٔ زینی باشد. قبلاً دیدیم این موضوع تغییر مهمی را در پیکرهٔ فاز سیستم موجب می‌شود؛ اما بررسی دقیقتر پیکرهٔ فاز، درک بیشتری از رفتار کیفی سیستم را به دست می‌دهد. چون $|\lambda_2| >> |\lambda_1|$ است، لذا جملهٔ نمایی $e^{\lambda_2 t}$ با تغییر t بسیار سریعتر از جملهٔ نمایی $e^{\lambda_1 t}$ تغییر می‌کند. این موضوع سبب پدیدآمدن یک گره و یک نقطهٔ زینی (برای حالت $\lambda_2 < 0$) در پیکرهٔ فاز می‌شود (شکل ۱ ـ ۲۳). مقایسهٔ این پیکره‌های فاز با شکل ۱ ـ ۲۲ (الف)، مشابهتهای زیادی را نشان می‌دهد به طوری که مانند شکل ۱ ـ ۲۱، مسیرهایی که از بردار v_1 حرکت خود را آغاز می‌کنند تقریباً در امتداد خطهایی موازی با بردار ویژهٔ v_1 همگرا می‌گردند و با نزدیک‌شدن به این بردار، به آن مماس شده، بر آن امتداد می‌یابند. در حالت $\mu < 0$، حرکت در امتداد v_1، به سمت مبدأ همگرا می‌شود (گره پایدار) و در حالت $\mu > 0$، حرکت در امتداد v_1 به سمت بینهایت سوق می‌یابد (نقطهٔ زینی). این رفتار کیفی، مشخصهٔ سیستمهای آشفتهٔ منفرد است که در فصل نهم مطالعه خواهد شد.



شکل ۱ ـ ۲۳ پیکرهٔ فاز سیستم آشفته در حالتی که $\lambda_1 = 0$ و $\lambda_2 < 0$ باشد: (الف) $\mu < 0$؛ (ب) $\mu > 0$

هنگامی که هر دو مقدار ویژهٔ ماتریس A صفرند، تأثیر آشفتگی بسیار عمیقتر است؛ بدین منظور چهار آشفتگی محتمل صورت جردن را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu^2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -\mu^2 & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

μ پارامتر آشفتگی است که ممکن است مثبت یا منفی باشد. بسادگی می‌توان دید نقطهٔ تعادل در هریک از چهار حالت فوق بترتیب مرکز، کانون، گره و نقطهٔ زینی است. به بیان دیگر می‌توان همهٔ حالاتِ پیکرهٔ فاز یک نقطهٔ تعادلِ تنها را از این آشفتگیها به دست آورد.

۱ ـ ۲ ـ ۲ نقاط تعادل چندگانه

اگر ماتریس A، مقدار ویژهٔ صفر نداشته باشد (یعنی: $\det A \neq 0$)، آنگاه سیستم خطی معادلهٔ (۱ ـ ۳۰) دارای نقطهٔ تعادل تنهایی در $x = 0$ است. چنانچه $\det A = 0$ باشد، سیستم دارای پیوستاری[1] در نقاط تعادل می‌باشد و این تنها الگوی تعادلی است که سیستمی خطی با این مشخصات می‌تواند داشته باشد، اما سیستمهای غیرخطی می‌توانند نقاط تعادل تنهای چندگانه داشته باشند. در دو مثال آتی به بررسی رفتار کیفی مدار دیود تونلیِ بخش ۱ ـ ۱ ـ ۲ و نیز معادلهٔ پاندول بخش ۱ ـ ۱ ـ ۱ می‌پردازیم. هر دو این مثالها نمایانگر نقاط تعادل چندگانهٔ سیستم هستند.

مثال ۱ ـ ۲ مدل فضای حالت مدار دیود تونلی با معادله‌های ذیل بیان می‌شود:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C}[-h(x_1) + x_2]$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L}[-x_1 - Rx_2 + v]$$

فرض کنید پارامترهای مداربه‌شرح مقابل باشند*: $u = 1/2\,V$، $R = 1/5\,K\Omega = 1/5 \times 10^3\,\Omega$، $C = 2\,pF = 2 \times 10^{-12}\,F$ و $L = 5\,\mu H = 5 \times 10^{-6}\,H$. با اندازه‌گیری زمان برحسب

* داده‌های عددی از [۴۳] گرفته شده است.

1. Continuum

نانوثانیه و جریانهای x_2 و $h(x_1)$ برحسب mA، مدل فضای حالت عبارت خواهد بود با:

$$\dot{x}_1 = 0/5\,[-h(x_1) + x_2]$$

$$\dot{x}_2 = 0/2\,[-x_1 - 1/5x_2 + 1/2]$$

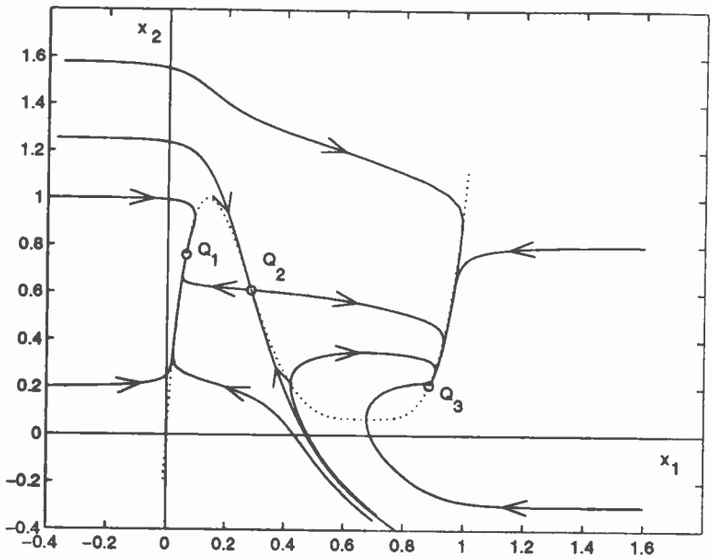
اینک فرض کنید تابع $h(\cdot)$ به صورت ذیل تعریف گردد:

$$h(x_1) = 17/76x_1 - 103/79x_1^2 + 229/62x_1^3 - 226/31x_1^4 + 83/72x_1^5$$

با قرار دادن $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ و حل برای نقاط تعادل می‌توان مشاهده کرد سه نقطهٔ تعادل وجود دارد: (۰/۷۵۸ , ۰/۰۶۳)، (۰/۶۱ , ۰/۲۸۵) و (۰/۲۱ , ۰/۸۸۴). پیکرهٔ فاز سیستم (که به کمک برنامهٔ کامپیوتری حاصل شده) در شکل ۱ ـ ۲۴ و سه نقطهٔ تعادل بترتیب با Q_1، Q_2 و Q_3 مشخص گردیده‌اند. بررسی پیکرهٔ فاز نشان می‌دهد بجز برای دو مسیر خاص که به سمت Q_2 حرکت می‌کنند، بقیهٔ مسیرهای حالت یا به سوی Q_1 و یا به سوی Q_3 سوق یافته‌اند. دو مسیر خاصی که به سمت Q_2 همگرا می‌شوند، منحنی‌ای را به وجود می‌آورند که صفحه را به دو نیم صفحه تقسیم می‌کند: همهٔ مسیرهایی که از سمت چپ این منحنی آغاز می‌شوند به سوی Q_1 و همهٔ مسیرهایی که از سمت راست این منحنی آغاز می‌شوند به سوی Q_3 تمایل یافته‌اند. این منحنی خاص را خط *جداساز*[1] می‌گوییم زیرا صفحه را به دو ناحیه با رفتار کیفی متفاوت افراز[2] کرده است*. در یک نمونهٔ آزمایشی می‌توان ملاحظه کرد که بسته به ولتاژ اولیهٔ خازن و جریان اولیهٔ سلف یکی از دو نقطهٔ Q_1 یا Q_3، نقطهٔ تعادل حالت مانا خواهد بود، اما هیچگاه نمی‌توان نقطهٔ تعادل Q_2 را در عمل مشاهده کرد زیرا نویز[3] فیزیکی (که همواره وجود دارد) سبب می‌شود تا حتی اگر حالتهای اولیه را چنان تنظیم کرده باشیم که Q_2 نقطهٔ تعادل شود، باز مسیرهای حالت از این نقطه دور گردند.

* در حالت کلّی، صفحهٔ حالت به چند ناحیهٔ مختلف افراز می‌شود که در هریک از آنها مسیرهای حالت رفتار متفاوتی را از خود نشان می‌دهند. منحنی‌هایی که این نواحی را از هم جدا می‌کنند، منحنی جداساز نامیده می‌شود.

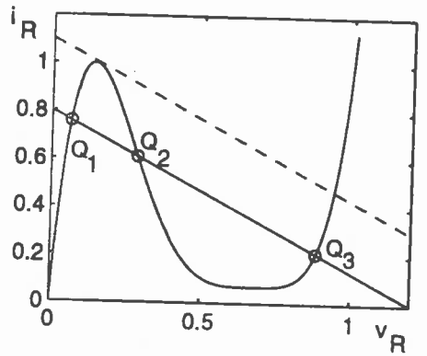
1. Separatrix 2. Partition 3. Noise



شکل ۱ ـ ۲۴ پیکرهٔ فاز برای مدار دیود تونلی مثال ۱ ـ ۲

این مدار دیود تونلی را به همراه نقاط تعادل چندگانه‌اش، مدار *دوپایدار*[1] گویند زیرا دارای دو نقطهٔ کار حالت ماناست. این مدار می‌تواند به مثابه حافظهٔ کامپیوتر عمل کند که نقطهٔ تعادل Q_1 متناظر با حالت دودویی[2] «۰» و نقطهٔ تعادل Q_2 نیز متناظر با حالت دودویی «۱» است. تغییر وضعیت از Q_1 به Q_3 (یا به عکس) مستلزم اعمال سیگنال تغییر وضعیتی[3] است که دامنه و دورهٔ عمل مناسبی داشته باشد تا بتواند مسیرهای حالت از یک سمت خط جداساز به سمت دیگر ببرد. برای مثال چنانچه مدار در ابتدا در نقطهٔ A_1 باشد، آنگاه پالس مثبت اضافه شده بر ولتاژ تغذیهٔ[4] u، می‌تواند مسیرهای حالت را به سمت راست خط جداساز منتقل کند، اما این پالس باید دارای دامنهٔ مناسبی باشد تا بتواند خط بار[5] را به بالای خط چینهای شکل ۱ ـ ۲۵ منتقل کند و ضمناً باید به اندازهٔ کافی طولانی باشد تا مسیرهای حالت، امکان رسیدن به سمت راست جداساز را داشته باشند.

1. Bistable
2. Binary
3. Triggering Signal
4. Supply voltage
5. Load line



شکل ۱ ـ ۲۵ تنظیم خط بار مدار دیود تونلی به هنگام تغییر وضعیت

پیکرهٔ فاز شکل ۱ ـ ۲۴ رفتار جامع کیفی مدار دیود تونلی را بیان می‌کند. معمولاً محدودهٔ x_1 و x_2 چنان انتخاب می‌شود که مهمترین جنبه‌های کیفی را نمایش دهد و پیکرهٔ فاز خارج از این محدوده، هیچگونه جنبهٔ کیفی نویی را در برنداشته باشد. Δ

مثال ۱ ـ ۳ معادلهٔ پاندول را با در نظر گرفتن اصطکاک به شکل زیر در نظر بگیرید:

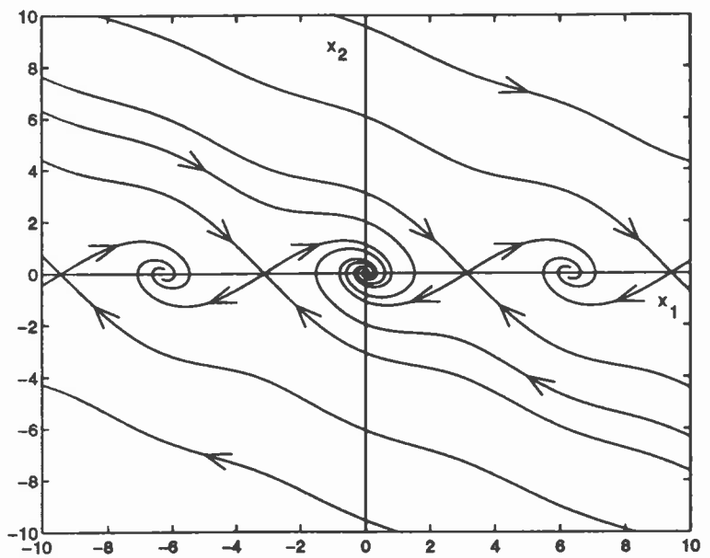
$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_2$$

پیکرهٔ فاز رسم شده با کامپیوتر برای مقادیر: $g/l = 1$ و $k/m = 0/5$ در شکل ۱ ـ ۲۶ نشان داده شده است. پیکرهٔ فاز، متناوب و دورهٔ تناوبش برابر با 2π است؛ بنابراین می‌توان تمامی ویژگیهای رفتار کیفی سیستم را با رسم پیکرهٔ فاز در نواری[1] عمودی در بازهٔ $-\pi \le x_1 \le \pi$ ملاحظه و بررسی کرد. برای دنبال کردن مسیر حالت از نقطه‌ای خاص در این صفحه، می‌توان از طریق مرزهای[2] نوار عمودی به سمت جلو یا عقب رفت. برای مثال مسیر حالت آغاز شده از نقطهٔ a (در شکل ۱ ـ ۲۷) را در نظر بگیرید. امتداد این مسیر، مرز سمت راست را در نقطهٔ b قطع می‌کند، حال نقطهٔ c را (که همعرض نقطهٔ b است) روی مرز سمت چپ می‌یابیم. و همین

1. Strip
2. Boundary

روند را برای نقطهٔ c تکرار می‌کنیم. این روش، معادل آن است که مسیر حالت را روی استوانه‌ای پیدا کنیم که از قطع کردن مسیر فاز شکل ۱ ـ ۲۷ در امتداد خطوط عمودی $x_1 = \pm\pi$ پدید آمده است. چنانچه به این روش عمل شود، گوییم معادلهٔ پاندول به جای صفحهٔ فاز معمولی در صفحهٔ فاز استوانه‌ای[1] نشان داده شده است. از دید پیکرهٔ فاز ملاحظه می‌شود بجز برای مسیرهای حالت خاصی که به موقعیت «ناپایدار» $(\pi\ ,\ 0)$ منتهی می‌شوند، بقیهٔ مسیرهای حالت دیگر به موقعیت تعادل «پایدار» $(0\ ,\ 0)$ ختم می‌گردند و باز باید اشاره کرد که موقعیت «ناپایدار» $(\pi\ ,\ 0)$، در عمل به دست نمی‌آید زیرا حضور نویز سبب می‌شود مسیرهای حالت از آن دور گردد. Δ



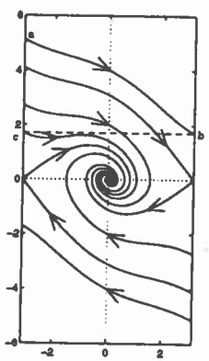
شکل ۱ ـ ۲۶ پیکرهٔ فاز معادلهٔ پاندول مربوط به مثال ۱ ـ ۳

۱ ـ ۲ ـ ۳ رفتار کیفی در نزدیکی نقاط تعادل

بررسی پیکره‌های فاز در مثالهای ۱ ـ ۲ و ۱ ـ ۳ نشان می‌دهد رفتار کیفی در مجاورت هریک از

1. Cylindrical phase space

نقاط تعادل، کاملاً مشابه حالتی است که برای سیستمهای خطی (بخش ۱ ـ ۲ ـ ۱) ملاحظه شد. به طور مشخص می‌توان گفت در شکل ۱ ـ ۲۴ رفتار مسیرهای حالت در نزدیکی نقاط Q_1، Q_2 و Q_3 بترتیب متناظر با رفتار این مسیرها در نزدیکی یک گره پایدار، یک نقطهٔ زینی و یک گره پایدار است. به طور مشابه در شکل ۱ـ ۲۶، مسیرهای حالتِ نزدیک بـه $(0\ ,\ 0)$ و $(\pi\ ,\ 0)$، بترتیب دارای رفتاری شبیه به رفتار مسیرهای حالت در نزدیکی یک کانون پایدار و یک نقطهٔ زینی است. این مشاهدات کاملاً قابل تعمیم هستند؛ از این رو بجز در موارد خاص، می‌توان رفتار کیفی سیستمی غیرخطی در نزدیکی یکی از نقاط تعادلش را از طریق *خطی‌سازی* نسبت به آن نقطه مشخص کرد.



شکل ۱ ـ ۲۷ پیکرهٔ فاز معادلهٔ پاندول در ناحیهٔ $-\pi \le x_1 \le \pi$

فرض کنید $p = (p_1, p_2)$ نقطهٔ تعادل سیستم غیرخطی (۱ ـ ۲۸) ـ (۱ ـ ۲۹) و توابع f_1 و f_2 نیز پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد. با بسط عبارت سمت راست معادلات (۱ ـ ۲۸) ـ (۱ ـ ۲۹) به کمک سری تیلور[1] حول نقطهٔ (p_1, p_2) نتیجه می‌شود:

$$\dot{x}_1 = f_1(p_1, p_2) + a_{11}(x_1 - p_1) + a_{12}(x_2 - p_2) + \text{ج. م. ب}$$

$$\dot{x}_2 = f_2(p_1, p_2) + a_{21}(x_1 - p_1) + a_{22}(x_2 - p_2) + \text{ج. م. ب}$$

1. Taylor series

که:

$$a_{11}=\left.\frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{x_1=p_1,x_2=p_2},\quad a_{12}=\left.\frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{x_1=p_1,x_2=p_2}$$

$$a_{21}=\left.\frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{x_1=p_1,x_2=p_2},\quad a_{22}=\left.\frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{x_1=p_1,x_2=p_2}$$

«ج. م. ب.» نشاندهندهٔ «جملات مرتبهٔ بالاتر[1]» بسط است (یعنی جملات: $(x_1-p_1)^2$، $(x_2-p_2)^2$، $(x_1-p_1)\times(x_2-p_2)$ و غیره). چون (p_1,p_2) نقطهٔ تعادل سیستم است، داریم:

$$f_1(p_1,p_2)=f_2(p_1,p_2)=0$$

علاوه بر این چون به مسیرهای حالت در نزدیکی نقطهٔ (p_1,p_2) علاقه‌مندیم، با تعریف:

$$y_1=x_1-p_1,\quad y_2=x_2-p_2$$

می‌توان معادلهٔ حالت را به شکل ذیل بازنوشت:

$$\dot{y}_1=\dot{x}_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\text{ج.م.ب.}$$

$$\dot{y}_2=\dot{x}_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2+\text{ج.م.ب.}$$

چنانچه توجهمان را به همسایگی[2] بسیار کوچک حول نقطهٔ تعادل جلب کنیم (به طوری که جملات مرتبهٔ بالاتر قابل چشمپوشی باشد)، آنگاه با حذف جملات مرتبهٔ بالاتر، می‌توان معادلهٔ غیرخطی حالت را با معادلهٔ خطی ذیل تقریب زد:

$$\dot{y}_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2$$

$$\dot{y}_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2$$

1. Higher order terms - H.O.T -
2. Neighborhood

با بازنویسی این معادله به شکل برداری داریم:

$$\dot{y}=Ay$$

که:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}=\left.\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}&\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\\frac{\partial f_2}{\partial x_1}&\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}\right|_{x=p}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=p}$$

ماتریس $[\partial f/\partial x]$، ماتریس ژاکوبیِ[1] $f(x)$ و ماتریس A، ماتریس ژاکوبیِ محاسبه شده در نقطهٔ تعادل p نامیده می‌شود.

از نظر منطقی انتظار داریم مسیرهای حالت سیستم غیرخطی در همسایگی کوچکی حول نقطهٔ تعادل، به مسیرهای حالت همان سیستم خطی شده حول نقطهٔ تعادلش «نزدیک» باشد. در واقع صحیح است که بگوییم*: *چنانچه مبدأ معادلهٔ خطی شدهٔ حالت، گره پایدار (یا ناپایدار) با مقادیر ویژهٔ مجزا، یا کانون پایدار (یا ناپایدار) و یا نقطهٔ زینی باشد، آنگاه در همسایگی کوچکی نزدیک به نقطهٔ تعادل، مسیرهای حالت معادلهٔ غیرخطی مشابه با گره پایدار (یا متناظراً ناپایدار)، یا کانون پایدار (یا متناظراً ناپایدار) و یا نقطهٔ زینی رفتار خواهد کرد.* بنابراین نقطهٔ تعادل معادلهٔ غیرخطی (۱ ـ ۲۸) و (۱ ـ ۲۹) را گره پایدار (یا ناپایدار)، یا کانون پایدار (یا ناپایدار) و یا نقطهٔ زینی می‌دانیم اگر معادلهٔ خطی شدهٔ سیستم حول نقطهٔ تعادلش، همان رفتار را داشته باشد؛ لذا می‌توان نوع نقاط تعادل مثالهای ۱ ـ ۲ و ۱ ـ ۳ را با خطی‌سازی سیستم (و بدون نیاز به رسم پیکرهٔ جامع فاز) تعیین کرد.

* می‌توان اثبات این ویژگیِ خطی‌سازی را در [۶۶] یافت. این گزاره تحت این فرض معتبر است که اولین مشتقات جزئی $f_1(x_1,x_2)$ و $f_2(x_1,x_2)$ در همسایگی نقطهٔ تعادل (p_1,p_2) پیوسته باشد. یکی از نتایج وابسته (اما متفاوت) برای سیستمهای با ابعاد بالاتر در فصل سوم مورد بحث قرار خواهد گرفت (قضیهٔ ۳ ـ ۷ را ملاحظه کنید).

1. Jacobian matrix

مثال ۱ ـ ۴ ماتریس ژاکوبی تابع $f(x)$ مربوط به مدار دیود تونلیِ مثال ۱ ـ ۲ با عبارت ذیل بیان می‌شود:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{bmatrix} -۰/۵h'(x_۱) & ۰/۵ \\ -۰/۲ & -۰/۳ \end{bmatrix}$$

که:

$$h'(x)=\frac{dh}{dx_۱}=۱۷/۷۶-۲۰۷/۵۸x_۱+۶۸۸/۸۶x_۱^۲-۹۰۵/۲۴x_۱^۳+۴۱۸/۶x_۱^۴$$

با محاسبهٔ ماتریس ژاکوبی در نقاط تعادل $Q_۱=(۰/۰۶۳, ۰/۷۵۸)$، $Q_۲=(۰/۲۸۵, ۰/۶۱)$ و $Q_۳=(۰/۸۸۴, ۰/۲۱)$، بترتیب ماتریسهای زیر حاصل می‌شود:

$$A_۱=\begin{bmatrix} -۳/۵۹۸ & ۰/۵ \\ -۰/۲ & -۰/۳ \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه: $-۳/۵۷$ ، $-۰/۳۳$

$$A_۲=\begin{bmatrix} ۱/۸۲ & ۰/۵ \\ -۰/۲ & -۰/۳ \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه: $۱/۷۷$ ، $-۰/۲۵$

$$A_۳=\begin{bmatrix} -۱/۴۲۷ & ۰/۵ \\ -۰/۲ & -۰/۳ \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه: $۱/۳۳-$ ، $۰/۴-$

بنابراین $Q_۱$ گره پایدار، $Q_۲$ نقطهٔ زینی و $Q_۳$ نیز گره پایدار است. Δ

مثال ۱ ـ ۵ ماتریس ژاکوبی تابع $f(x)$ مربوط به معادلهٔ پاندولِ مثال ۱ ـ ۳ با عبارت ذیل بیان می‌گردد:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -\cos x_۱ & -۰/۵ \end{bmatrix}$$

با محاسبهٔ ماتریس ژاکوبی در نقاط تعادل $(۰, ۰)$ و $(۰, \pi)$، بترتیب به دو ماتریس زیر می‌رسیم:

$$A_۱=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & -۰/۵ \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه: $-۰/۲۵ \pm j\,۰/۹۷$

$$A_۲=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & -۰/۵ \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه: $-۱/۲۸$ ، $۰/۷۸$

بنابراین نقطهٔ تعادل $(۰, ۰)$، کانونی پایدار و نقطهٔ تعادل $(۰, \pi)$، نقطهٔ زینی است. Δ

باید دقت کرد ویژگی خطی‌سازی پیشگفته، فقط در مورد حالاتی بحث می‌کند که معادلهٔ خطی شدهٔ حالت، مقدار ویژه‌ای روی محور موهومی نداشته باشد (به بیان دیگر برای حالتی که مبدأ، نقطهٔ تعادل هذلولیِ سیستم خطی است). می‌توان این موضوع را به حالت غیرخطی نیز تعمیم داد و گفت یک نقطهٔ تعادل، هذلولی است اگر ماتریس ژاکوبیِ محاسبه شده در آن نقطه، هیچ مقدار ویژه‌ای روی محور موهومی نداشته باشد. چنانچه ماتریس ژاکوبی، دارای مقدار ویژه‌ای روی محور موهومی باشد، آنگاه ممکن است رفتار کیفی معادلهٔ غیرخطی حالت در نزدیکی نقطهٔ تعادل کاملاً متفاوت با رفتار معادلهٔ خطی حالت باشد. این موضوع با توجه به بحث قبلی راجع به اثر آشفتگی خطی بر رفتار کیفی سیستمهای خطی (برای حالتی که مبدأ، نقطهٔ تعادل هذلولی نیست) چندان هم تعجب برانگیز نیست. مثال زیر حالتی را بیان می‌کند که در آن مبدأ معادلهٔ خطی شدهٔ حالت، یک مرکز است.

مثال ۱ ـ ۶ سیستم:

$$\dot{x}_۱=-x_۲-\mu x_۱(x_۱^۲+x_۲^۲)$$

$$\dot{x}_۲=x_۱-\mu x_۲(x_۱^۲+x_۲^۲)$$

نقطهٔ تعادلی در مبدأ دارد. معادله خطی شدهٔ حالت در مبدأ نیز دارای مقادیر ویژهٔ $\pm j$ است؛ بنابراین مبدأ، نقطهٔ تعادل مرکز برای سیستم خطی شده می‌باشد. در این مثال خاص، می‌توان

رفتار کیفی سیستم غیرخطی را با نمایش سیستم در مختصات قطبی، مشخص کرد:

$$x_1 = r\cos\theta \quad و \quad x_2 = r\sin\theta$$

در نتیجه: $\dot{\theta} = 1$ و $\dot{r} = -\mu r^3$

با توجه به این معادلات بسادگی می‌توان دریافت مسیرهای حالت سیستم غیرخطی در حالت $\mu > 0$، شبیه کانون پایدار و در حالت $\mu < 0$ شبیه کانون ناپایدار عمل می‌کند. Δ

این مثال نشان می‌دهد رفتار کیفی معرّف یک مرکز در معادلهٔ خطی شدهٔ حالت، الزاما در معادلهٔ غیرخطی حالت حفظ نمی‌شود.

بحث پیشین حالتی را که معادله خطی شدهٔ حالت، گرهی با مقادیر ویژهٔ چندگانه داشته باشد، در نظر نمی‌گیرد. تمرین ۱ ـ ۱۵، حالتی را نشان می‌دهد که خطی‌سازی دارای یک گره پایدار است در حالی که مسیرهای معادلهٔ غیرخطی حالت مشابه یک کانون پایدار رفتار می‌کند. لیکن باید اشاره کرد اگر تابع $f(x)$، هموارتر باشد آنگاه این اتفاق رخ نمی‌دهد. به طور مشخص اگر توابع $f_1(x_1, x_2)$ و $f_2(x_1, x_2)$، در همسایگی نقطهٔ تعادل، تحلیلی[1] باشند*، آنگاه *می‌توان گفت چنانچه مبدأ معادلهٔ خطی شدهٔ حالت، گره پایدار (یا ناپایدار) باشد، آنگاه در همسایگی کوچکی در نزدیکی نقطهٔ تعادل، مسیرهای معادلهٔ غیرخطی حالت (بدون توجه به اینکه مقادیر ویژهٔ سیستم خطی شده مجزا باشند)، مشابه با یک گره پایدار (یا متناظراً ناپایدار) رفتار می‌کنند***.

مشخص کردن نوع نقاط تعادل از طریق خطی‌سازی، اطلاعات مفیدی را در خصوص ویژگیهای پیکرهٔ جامع فاز سیستم مرتبهٔ دوم (به هنگام رسم آن به صورت گرافیکی یا عددی) در اختیار ما قرار می‌دهد. در حقیقت اولین گام در یافتن پیکرهٔ فاز، محاسبهٔ همهٔ نقاط تعادل سیستم و تعیین نوع آنها از طریق خطی‌سازی است. این روند، دید روشنی را در مورد مشخصات پیکرهٔ فاز مورد انتظار در همسایگی نقاط تعادل به دست می‌دهد.

---

* بدین معنا که f_1 و f_2 دارای بسط تیلور همگرا باشند.

** [۱۰۲، قضیهٔ ۳ ـ ۴، صفحهٔ ۱۸۸] را ملاحظه کنید.

1. Analytical

۱ ـ ۲ ـ ۴ چرخه‌های حدّی

نوسان یکی از مهمترین پدیده‌هایی است که در سیستمهای دینامیکی رخ می‌دهد. سیستم زمانی نوسان می‌کند که *پاسخی متناوب غیربدیهی*[1] به شکل زیر داشته باشد (برای $T > 0$):

$$x(t+T) = x(t) \quad , \quad \forall t \geq 0$$

واژهٔ «غیربدیهی» بدین دلیل به کار می‌رود که از پاسخهای ثابت متناظر با نقاط تعادل تمایز داشته باشد؛ زیرا پاسخهای ثابت نیز معادلهٔ فوق را ارضا می‌کند اما این پاسخی نیست که هنگام صحبت راجع به نوسان پاسخهای متناوب مدّنظر داریم. از این رو مگر در جایی که بصراحت اشاره کرده باشیم، هرجا سخن از پاسخ متناوب باشد، منظور پاسخ غیربدیهی آن است. تصویر پاسخ متناوب در پیکرهٔ فاز، مسیر بسته‌ای است که اغلب از آن به *دور متناوب*[2] *یا دور بسته*[3] یاد می‌کنند.

پیشتر مثالی از نوسان را در بخش ۱ ـ ۲ ـ ۱ دیده‌ایم: سیستم خطی مرتبهٔ دوم با مقادیر ویژه $\pm j\beta$. مبدأ این سیستم از نوع مرکز و مسیرهای حالت آن به شکل دوربسته است. با تبدیل سیستم به صورت حقیقی جردن، می‌توان پاسخ آن را به شکل ذیل نوشت:

$$z_1(t) = r_0 \cos(\beta t + \theta_0) \quad , \quad z_2(t) = r_0 \cos(\beta t + \theta_0)$$

که:

$$r_0 = \sqrt{z_1^2(0) + z_2^2(0)} \quad , \quad \theta_0 = \tan^{-1}\left[\frac{z_2(0)}{z_1(0)}\right]$$

بنابراین سیستم دارای نوسانی ماندگار با دامنهٔ r_0 است. این حالت را اغلب به نام *نوسانساز هماهنگ*[4] می‌خوانند. چنانچه نوسانساز هماهنگ را به عنوان مدل مدار LCی خطیِ شکل ۱ ـ ۲۸ در نظر بگیریم، می‌توان مکانیزم فیزیکی منتهی به این پدیده را تبادل متناوب (بدون تلفات) انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی خازن و انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی سلف دانست؛ اما دو مسألهٔ اساسی در مورد چنین نوسانساز خطی وجود دارد: نخستین مسأله،

---

1. Nontrivial periodic solution
2. Periodic orbit
3. Closed orbit
4. Harmonic Oscillator

مشکل قوام[1] است؛ بدین معنا که دیدیم آشفتگی بسیار کوچک (خطی یا غیرخطی) در سمت راست، نوسان را تخریب خواهد کرد. در چنین حالتی می‌گوییم: *نوسانساز خطی، پایدار ساختاری نیست.* در حقیقت ساختن یک مدار LC که بتواند نوسانساز هماهنگ را تحقّق بخشد، غیرممکن است زیرا مقاومت سیمهای الکتریکی مدار، موجب تلف شدن انرژی ذخیره شده در خازن و سلف می‌شود؛ حتی اگر هم در ساخت چنین نوسانساز خطی موفق شویم، با مشکل دوم مواجه خواهیم گردید: *دامنهٔ نوسان به شرایط اولیهٔ مدار وابسته است.*



شکل ۱ ـ ۲۸ مدار LCی خطی برای نوسانساز هماهنگ

این دو مشکل اصلیِ نوسانسازهای خطی را می‌توان در نوسانسازهای غیر خطی حل کرد و می‌توان نوسانساز غیر خطی فیزیکی را چنان ساخت که:

- نوسانساز غیر خطی پایدار ساختاری باشد؛
- دامنهٔ نوسان (در حالت مانا) مستقل از شرایط اولیه باشد.

نوسانساز با مقاومت منفی مربوط به بخش ۱ ـ ۱ ـ ۴، مثالی از چنین نوسانساز غیرخطی است. معادلهٔ حالت این سیستم، به شکل ذیل نوشته می‌شود:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - \varepsilon h'(x_1).x_2$$

که تابع h، ویژگیهای خاص گفته شده در بخش ۱ ـ ۱ ـ ۴ را برآورده می‌کند. این سیستم تنها یک نقطهٔ تعادل در $x_1 = x_2 = 0$ دارد و ماتریس ژاکوبی آن در نقطهٔ تعادل برابر است با:

1. Robustness

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\varepsilon h'(0) \end{bmatrix}$$

که $h'(0) < 0$ می‌باشد و مبدأ بر اساس مقدار $\varepsilon h'(0)$ یا گره ناپایدار و یا کانون ناپایدار است. شایان ذکر اینکه در هریک از این دو حالت، مسیرهای حالتی که از نزدیکی مبدأ آغاز می‌شوند از آن دور شده، به سمت بینهایت سوق می‌یابند. این ویژگی دافعه‌ای مبدأ، ناشی از مقاومت منفی عنصر مقاومتی در نزدیکی مبدأ می‌باشد، بدین معنا که عنصر مقاومتی، عنصری «فعال» و منبع تأمین انرژی است. این نکته را می‌توان به طور تحلیلی و با نوشتن رابطه‌ای برای آهنگ[1] تغییر انرژی دریافت؛ بدین منظور می‌توان انرژی کل ذخیره شده در خازن و سلف را در لحظهٔ t با عبارت ذیل بیان کرد:

$$E = \frac{1}{2} C v_C^2 + \frac{1}{2} L i_L^2$$

در بخش ۱ ـ ۱ ـ ۴ دیدیم:

$$v_C = x_1, \quad i_L = -h(x_1) - \frac{1}{\varepsilon} x_2$$

اکنون با تعریف $\varepsilon = \sqrt{L/C}$، می‌توان عبارت انرژی را به شکل ذیل بازنوشت:

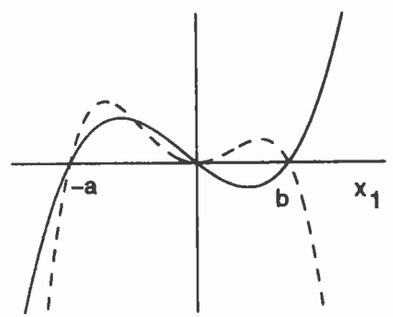
$$E = \frac{1}{2} C \{x_1^2 + [\varepsilon h(x_1) + x_2]^2\}$$

و لذا آهنگ تغییر انرژی برابر است با:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= C \{x_1 \dot{x}_2 + [\varepsilon h(x_1) + x_2][\varepsilon h'(x_1)\dot{x}_1 + \dot{x}_2]\} \\ &= C \{x_1 x_2 + [\varepsilon h(x_1) + x_2][\varepsilon h'(x_1) x_2 - x_1 - \varepsilon h'(x_1) x_2]\} \\ &= C [x_1 x_2 - \varepsilon h(x_1) - x_1 x_2] \\ &= -\varepsilon C x_1 h(x_1) \end{aligned}$$

1. Rate

این رابطه تأکید می‌کند در نزدیکی مبدأ، مسیرهای حالت، انرژی را افزایش می‌دهد زیرا برای مقادیر کوچک $|x_1|$، جملهٔ $x_1 h(x_1)$ منفی است. علاوه بر این، عبارت فوق نشان می‌دهد نواری بین $-a \le x_1 \le b$ چنان وجود دارد که مسیرهای حالت درون آن، انرژی را افزایش و خارج از آن انرژی را کاهش می‌دهد. مرزهای نوار، $-a$ و b، ریشه‌های معادلهٔ $h(x_1) = 0$ هستند (شکل ۱ ـ ۲۹). حرکت مسیر به درون یا برون نوار، موجب تبادل انرژی می‌شود به طوری که ورود به نوار سبب افزایش انرژی و خروج از آن باعث کاهش انرژی می‌گردد. چنانچه در امتداد یکی از مسیرهای حالت، تبادل خالص انرژی در یک چرخه برابر با صفر باشد، آنگاه می‌توان گفت یک نوسان ایستا[1] رخ داده است؛ چنین مسیر حالتی یک دوربسته است و می‌توان نتیجه گرفت نوسانساز با مقاومت منفی دارای یک دور بستهٔ تنهاست که در مثال بعدی برای نوسانساز وان دِر پُل نشان داده می‌شود.



شکل ۱ ـ ۲۹ نمودار $h(x_1)$ (خط پُر) و $-x_1 h(x_1)$ (خط‌چین) که نشان می‌دهد $\dot{E}$ در فاصله $-a \le x_1 \le b$ مثبت است.

مثال ۱ ـ ۷ شکلهای ۱ ـ ۳۰ (الف)، ۱ ـ ۳۰ (ب) و ۱ ـ ۳۱ (الف)، پیکرهٔ فاز معادلهٔ وان دِرپُل ذیل را:

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad (۱ ـ ۳۲)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2) x_2 \qquad (۱ ـ ۳۳)$$

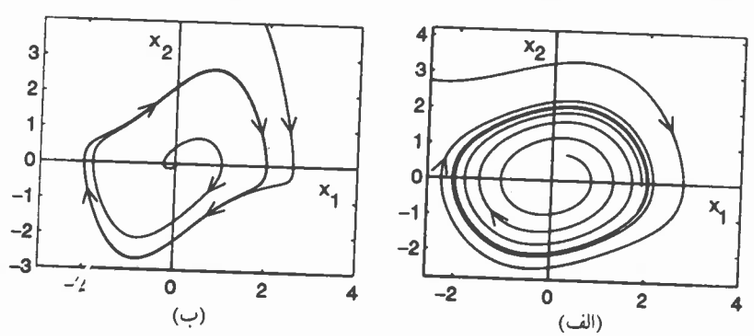
1. Stationary

برای سه مقدار مختلف پارامتر ε نشان می‌دهد: یکی مقدار کوچک ۰/۲، دیگری مقدار متوسط ۱/۰ و سومی مقدار بزرگ ۵/۰. در هر سه حالت فوق، پیکره‌های فاز بیانگر این نکته است که دور بستهٔ یکتایی وجود دارد که همهٔ مسیرهای حالت آغاز شده از دور را به سوی خود جذب می‌کند. برای $\varepsilon = 0/2$، دور بسته، دور همواری نزدیک به دایرهٔ با شعاع ۲ است، این حالت برای مقادیر کوچک ε (برای مثال کمتر از ۰/۳) صادق است. برای مقادیر متوسط ε ($\varepsilon = 1/0$)، شکل دایره‌وارِ دوربسته دچار اعوجاج می‌شود (شکل ۱ ـ ۳۰ (ب)) و برای مقادیر بزرگ ε ($\varepsilon = 5/0$)، این دور بسته شدیداً دچار اعوجاج می‌گردد (شکل ۱ ـ ۳۲ (الف)). می‌توان با انتخاب متغیرهای حالت به شکل $z_1 = i_L$ و $z_2 = v_C$، شکل واضحتری از پیکره‌های فاز را به دست آورد؛ در این صورت معادلهٔ حالت به شکل زیر درمی‌آید:

$$\dot{z}_1 = \frac{1}{\varepsilon} z_2$$

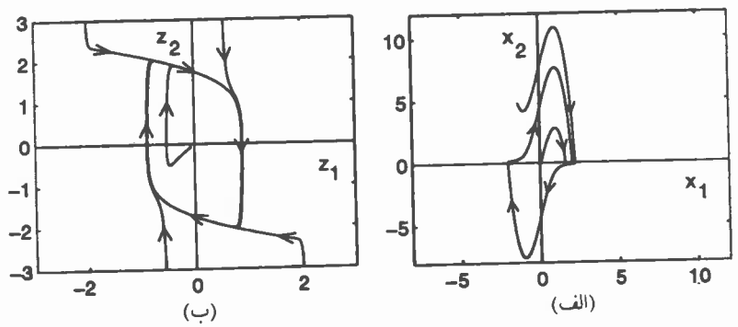
$$\dot{z}_2 = -\varepsilon(z_1 - z_2 + \frac{1}{3} z_2^3)$$

پیکرهٔ فاز در صفحهٔ $z_2 - z_1$ برای $\varepsilon = 5/0$ در شکل ۱ ـ ۳۱ (ب) رسم شده است. در این شکل ملاحظه می‌شود دور بسته (بجز در گوشه‌ها که تقریباً به صورت خطی عمودی درمی‌آید)، بسیار نزدیک به منحنی $z_1 = z_2 - \frac{1}{3} z_2^3$ می‌باشد. بخش عمودی مسیر بسته زمانی مشاهده می‌شود که دور بسته از یک شاخهٔ منحنی به شاخهٔ دیگری می‌جهد تا به گوشه برسد. در حالتی که چنین پدیدهٔ جهشی[1] رخ می‌دهد، نوسانهای رخ داده را *نوسانهای واهلش*[2] می‌نامند. این پیکرهٔ فاز برای مقادیر بزرگ ε (برای مثال مقادیر بزرگتر از ۳/۰) نیز رخ می‌دهد. Δ



شکل ۱ ـ ۳۰ پیکرهٔ فاز برای نوسانساز وان دِرپُل: (الف) $\varepsilon = 0/2$؛ (ب) $\varepsilon = 1/0$

1. Jump phenomenon
2. Relaxation oscillations



شکل ۱ ـ ۳۱ پیکرهٔ فاز برای نوسانساز وان دِرپُل با ۰/۵ = ε:
(الف) در صفحهٔ $x_2 - x_1$؛ (ب) در صفحهٔ $z_2 - z_1$

دور بسته‌ای که در مثال ۱ ـ ۷ بررسی شد، کاملاً متفاوت با حالتی است که در نوسانساز هماهنگ دیدیم. در حالت نوسانساز هماهنگ، تسلسلی در دورهای بسته وجود داشت در صورتی که در مثال وان دِرپُل، فقط یک دور متناوب تنها موجود است. دور متناوب تنها را چرخهٔ حدّی می‌نامند*. چرخهٔ حدّی نوسانساز وان دِرپُل این ویژگی را داراست که همهٔ مسیرهای حالت مجاور چرخهٔ حدّی، در نهایت ($t \longrightarrow \infty$) به سمت آن میل می‌کنند. به طور کلاسیک چنین چرخهٔ حدّی به عنوان چرخهٔ حدّی پایدار شناخته می‌شود؛ اما ممکن است با چرخهٔ حدّی *ناپایدار* نیز مواجه شویم و آن حالتی است که مسیرهای حالت آغاز شده از هر نقطهٔ اختیاری در نزدیکی چرخهٔ حدّی با افزایش زمان ($t \longrightarrow \infty$) از آن دور شوند (شکل ۱ ـ ۳۲). برای بررسی مثالی از چرخهٔ حدّی ناپایدار، معادلهٔ وان دِرپُل را در زمان معکوس[1] در نظر می‌گیریم؛ یعنی:

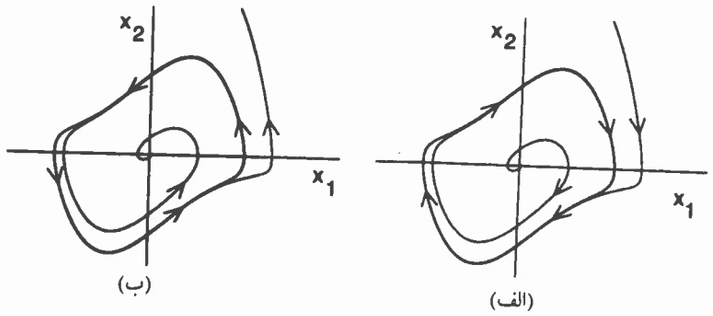
$$\dot{x}_1 = -x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - \varepsilon(1 - x_1^2)\, x_2$$

پیکرهٔ فاز این سیستم معادل با پیکرهٔ فاز نوسانساز وان دِرپُل است جز آنکه جهت پیکانها وارونه شده است؛ در نتیجه چرخه حدّی، ناپایدار است.

* تعریف رسمی چرخهٔ حدی در فصل ششم خواهد آمد.

1. Reverse time



شکل ۱ ـ ۳۲ (الف) چرخهٔ حدّی پایدار؛ (ب) چرخهٔ حدّی ناپایدار

در حالتهایی که ε، بسیار کوچک یا بسیار بزرگ است چرخهٔ حدّی نوسانساز وان دِرپُلِ مثال ۱ ـ ۷، شکلهای خاصی را به خود می‌گیرد که می‌توان آنها را به کمک روشهای مجانبی به طور تحلیلی پیش‌بینی کرد. در فصل هشتم با بهره‌گیری از *روش متوسط‌گیری*، شکل خاصی از چرخه حدّی را در حالت $\varepsilon \longrightarrow 0$ به دست می‌آوریم. در فصل نهم نیز با استفاده از *روش آشفتگی منفرد*، حالت خاص دیگری از چرخهٔ حدّی را برای حالت $\varepsilon \longrightarrow \infty$ بیان خواهیم کرد.

۱ ـ ۲ ـ ۵ رسم پیکره‌های فاز به طور عددی

برای محاسبهٔ پاسخ عددی معادلات دیفرانسیل معمولی می‌توان به طور گسترده از برنامه‌های کامپیوتری بهره برد. علاوه بر این از چنین برنامه‌هایی می‌توان برای رسم پیکره‌های فاز سیستمهای مرتبهٔ دوم استفاده نمود. در این بخش به ذکر نکاتی خواهیم پرداخت که برای مبتدیان سودمند خواهد بود*.

نخستین گام در رسم پیکرهٔ فاز، یافتن تمامی نقاط تعادل و تعیین نوع نقاط تعادل تنها (از طریق خطی‌سازی) است؛

رسم مسیرهای حالت شامل سه مرحلهٔ ذیل می‌باشد**:

* این نکات از [۱۳۲، فصل دهم] گرفته شده که شامل دستورالعمل بیشتری در مورد چگونگی تولید پیکره‌های حاوی اطلاعات فاز است.

** مرحلهٔ چهارم (که ما از ذکر آن خودداری کرده‌ایم)، مربوط به تعیین جهت پیکانهای مسیر است. با توجه به هدف این ←

- انتخاب محدودهٔ کرانداری در صفحهٔ حالت که مسیرهای حالت در آن رسم می‌شود؛ این محدوده با روابط زیر مشخص می‌گردد:

$$x_{1min} \le x_1 \le x_{1max} \quad , \quad x_{2min} \le x_2 \le x_{2max}$$

- انتخاب نقاط (شرایط) اولیهٔ درون محدودهٔ کراندار؛
- محاسبهٔ مسیرهای حالت.

ابتدا در مورد محاسبهٔ مسیرهای حالت صحبت می‌کنیم. برای یافتن مسیر حالتی که از نقطهٔ x_0 می‌گذرد باید معادلهٔ:

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad x(0) = x_0$$

را برای زمانهای پیشرو[1] (tهای مثبت) و زمانهای معکوس (tهای منفی) حل کرد. پاسخ در زمانهای معکوس، معادل با پاسخ معادلهٔ:

$$\dot{x} = -f(x) \quad , \quad x(0) = x_0$$

در زمانهای پیشرو است، زیرا تغییر متغیر زمانی $\tau = -t$، علامت سمت راست معادله را معکوس می‌کند. جهت پیکان روی مسیر حالت پیشرو، در جهت دورشدن از x_0 و روی مسیر معکوس، در جهت نزدیک شدن به x_0 است. باید دقت کرد که پاسخ در زمان معکوس، تنها راهی است که به کمک آن می‌توان پیکرهٔ مناسبی را در همسایگی کانون ناپایدار، گره ناپایدار و یا چرخهٔ حدّی ناپایدار به دست آورد. مسیرهای حالت تا رسیدن به مرزهای محدودهٔ کراندار ادامه می‌یابد. چنانچه زمان پردازش[2] برایمان مهم باشد، می‌توان معیار توقّفی[3] را در نظر گرفت تا با همگراشدن مسیرهای حالت به نقطهٔ تعادل، به برنامه اعمال گردد.

می‌توان محدودهٔ کراندار را چنان برگزید که همهٔ جنبه‌های مهم کیفی را نشان دهد و چون برخی از این جنبه‌ها از قبل مشخص نیستند، لازم است محدودهٔ کراندار را در طی برنامه، تنظیم کنیم؛ اما انتخاب اولیه نیز باید حاوی همهٔ اطلاعات قبلی سیستم باشد، برای مثال، محدوده

→ کتاب، این گام را می‌توان به طور دستی انجام داد.

1. Forward 2. Processing 3. Stopping criterion

باید شامل تمامی نقاط تعادل باشد. وقتی که مسیری از کرانها خارج می‌شود باید با دقت بیشتری آن را زیر نظر گرفت، چنین مسیرهایی یا بیکران[1] هستند و یا از طرف یک چرخهٔ حدّی پایدار جذب می‌گردند.

ساده‌ترین روش انتخاب نقاط (شرایط) اولیه، آن است که همگی آنها را به طور یکنواخت[2] روی شبکه‌ای[3] گسترده بر همهٔ محدودهٔ کراندار قرار دهیم، اما حتی یک مجموعهٔ کاملاً یکسان از شرایط اولیه، بندرت مجموعه‌ای کاملاً یکسان از مسیرهای حالت را نتیجه می‌دهد. روش بهتر در انتخاب نقاط اولیه، برگزیدن آنها در حین عمل و پس از رسم مسیرهای محاسبه شدهٔ قبلی است و چون بیشتر برنامه‌های کامپیوتری دارای ابزار رسم بسیار قوی می‌باشند لذا این روش کاملاً امکانپذیر است.

برای حالت نقطهٔ زینی، می‌توان از خطی‌سازی برای تولید مسیرهای پایدار و ناپایدار استفاده کرد. چنین روشی سودمند است زیرا (همچنانکه در مثالهای ۱ ـ ۲ و ۱ ـ ۳ دیدیم)، مسیرهای پایدار نقطهٔ زینی، خط (منحنی) جداساز را تعریف می‌کند. فرض کنید مقادیر ویژهٔ سیستم خطی شده به شکل $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ و بردارهای ویژهٔ متناظر نیز بترتیب v_1 و v_2 باشد؛ در این صورت مسیرهای حالت پایدار و ناپایدار نقطهٔ زینیِ غیرخطی به هنگام نزدیک‌شدن به نقطهٔ تعادل p، بترتیب مماس بر بردار ویژهٔ پایدار v_2 و بردار ویژهٔ ناپایدار v_1 هستند. بنابراین می‌توان دو مسیر ناپایدار را از نقطهٔ اولیهٔ $x_0 = p \pm \alpha v_1$ (که α عدد مثبت کوچکی است) تولید کرد، به طور مشابه می‌توان دو مسیر پایدار را از دو نقطهٔ اولیهٔ $x_0 = p \pm \alpha v_2$ به دست آورد؛ ضمناً باید اشاره کرد که بخش اصلی مسیرهای ناپایدار از حل در زمان پیشرو و بخش اصلی مسیرهای ناپایدار از حل در زمان معکوس به دست می‌آید.

1. Unbounded 2. Uniformly 3. Grid

۱ ـ ۳ تمرینها

تمرین ۱ ـ ۱ یکی از مدلهای ریاضی که دستهٔ بزرگی از سیستمهای غیرخطی فیزیکی را توصیف می‌کند، معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ nاُم ذیل است:

$$\frac{d^n y}{dt^n} = g\left(t, y, \dot{y}, ..., \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}, u\right)$$

که u و y، متغیرهای عددی هستند. اگر u ورودی و y خروجی باشد، مدل فضای حالت را بیابید.

تمرین ۱ ـ ۲ سیستم تک ورودی ـ تک خروجی[1] توصیف شده با معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ nاُم ذیل را در نظر بگیرید:

$$\frac{d^n y}{dt^n} = g_1\left(t, y, \dot{y}, ..., \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}, u\right) + g_2\left(t, y, \dot{y}, ..., \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}}\right) u$$

که تابع $g_2(\cdot)$، نسبت به آرگومانهایش[2] مشتق‌پذیر است. اگر u ورودی و y خروجی باشد، مدل فضای حالت سیستم را بیابید.

راهنمایی: فرض کنید:

$$x_n = \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} - g_2\left(t, y, \dot{y}, ..., \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}}\right) u$$

تمرین ۱ ـ ۳ معادلات دینامیکی غیرخطیِ روباتی mمفصله[3] به صورت زیر بیان می‌شود [۱۶۶]:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = u$$

که q بردار mبُعدی تعمیم یافته[4] است که موقعیت اتصالها[5] را نشان می‌دهد، u ورودی کنترل

1. Single-Input-Single-Output (SISO)
2. Argument
3. Link
4. Generalized
5. Joint

(گشتاور) m بُعدی و $M(q)$ ماتریس لختی[1] متقارنی[2] است که به ازای جمیع مقادیر $q \in R^m$، معیّن مثبت[3] می‌باشد. جملهٔ $C(q, \dot{q})\dot{q}$، بیانگر نیروهای گریز از مرکز[4] و کُریولیس[5] است. ماتریس C این ویژگی را داراست که به ازای جمیع مقادیر $q, \dot{q} \in R^m$، ماتریس $\dot{M} - 2C$ متقارن چپ[6] است ($\dot{M}$، مشتق کلّی M نسبت به t می‌باشد)، جملهٔ $g(q)$، که برای محاسبهٔ نیروهای جاذبه‌ای به کار می‌رود، عبارت است از: $g(q) = [\partial P(q)/\partial q]^T$ که $P(q)$ انرژی کلّ پتانسیل مفصل (ناشی از جاذبه) می‌باشد. فرض می‌کنیم $P(q)$ نسبت به q تابعی معیّن مثبت و معادلهٔ $g(q) = 0$ نیز دارای یک ریشهٔ تنها در $q = 0$ باشد*. با انتخاب متغیرهای مناسب حالت، معادلهٔ حالت سیستم را بنویسید.

تمرین ۱ ـ ۴ معادلات دینامیکی غیرخطی بازوی روباتی[7] تک مفصله با اتصالهای انعطاف‌پذیر[8] [۱۶۶] با چشمپوشی از میرایی آن به شکل زیر است:

$$I\ddot{q}_1 + MgL \sin q_1 + k(q_1 - q_2) = 0$$

$$J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = u$$

که q_1 و q_2 موقعیت زاویه‌ای، I و J گشتاور لختی[9]، k ثابت فنر، M جرم کل، L فاصله و u ورودی گشتاور است با انتخاب متغیرهای مناسب حالت، معادلهٔ سیستم را بنویسید.

تمرین ۱ ـ ۵ معادلات دینامیکی غیرخطی روباتی m مفصله با اتصالهای انعطاف‌پذیر [۱۶۶] به شکل زیر است:

$$M(q_1)\ddot{q}_1 + h(q_1, \dot{q}_1) + K(q_1 - q_2) = 0$$

$$J\ddot{q}_2 - K(q_1 - q_2) = u$$

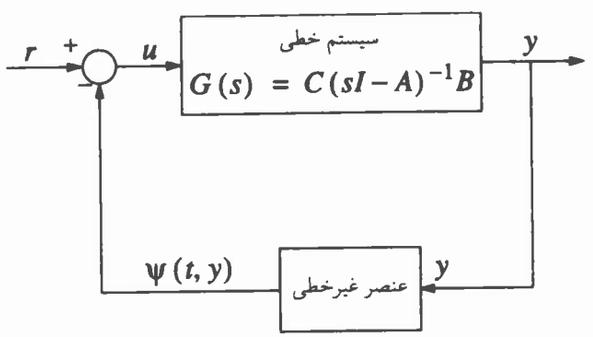
که q_1 و q_2، بردارهای m بُعدی مختصات تعمیم یافته، $M(q_1)$ و J، ماتریسهای لختی

* ویژگیهای ماتریسهای C، M و P در این تمرین مورد نیاز نیست ولی در تمرینهای بعدی به کار می‌آید.

1. Inertia matrix
2. Symmetric
3. Positive definite
4. Centrifugal force
5. Coriolis
6. Skew-symmetric
7. Manipulator
8. Flexible
9. Inertia Moment

(غیرمنفرد متقارن) و u نیز ورودی کنترل m بُعدی است. جملهٔ $h(q, \dot{q})$ نیز برای محاسبهٔ نیروهای گریز از مرکز، کُریولیس و جاذبه‌ای به کار می‌رود. K ماتریس قطریِ ثابتهای فنرهای اتصال است. برای این سیستم، متغیرهای حالت را انتخاب کرده، معادلهٔ حالت را بنویسید.

تمرین ۱ ـ ۶ شکل ۱ ـ ۳۳ اتصال پسخور یک سیستم خطی نامتغیر با زمان و یک عنصر غیرخطی متغیر با زمان را نشان می‌دهد. متغیرهای r، u و y، بردارهایی هم بُعد و $\psi(t, y)$ نیز تابعی با مقدار برداری[1] است. اگر r ورودی و y خروجی باشد، مدل فضای حالت سیستم را بیابید.



شکل ۱ ـ ۳۳ تمرین ۱ ـ ۶

تمرین ۱ ـ ۷ ژنراتورسنکرون متصل به یک شین بینهایت را می‌توان با معادلهٔ ذیل نشان داد [۱۳۱]:

$$M\ddot{\delta} = P - D\dot{\delta} - \eta_1 E_q \sin\delta$$

$$\tau \dot{E}_q = -\eta_2 E_q + \eta_3 \cos\delta + E_{FD}$$

که δ اندازهٔ زاویه برحسب رادیان، E_q ولتاژ، P قدرت[2] مکانیکی ورودی، E_{FD} ولتاژ میدان

1. Vector-valued function 2. Power

(ورودی)، D ضرایب میرایی[1]، M ضریب لختی، τ ثابت زمانی، η_1 و η_2 و η_3 نیز پارامترهایی ثابت هستند.

(الف) با استفاده از δ و $\dot{\delta}$ و E_q به عنوان متغیرهای حالت، معادلهٔ حالت را بیابید.

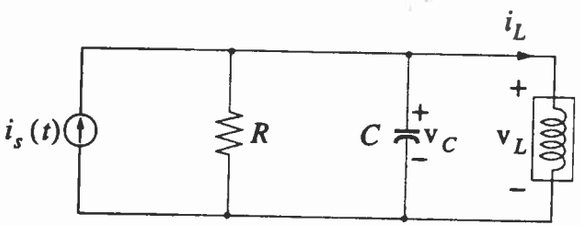
(ب) فرض کنید داشته باشیم: $P = 0/815$، $E_{FD} = 1/22$، $\eta_1 = 2/0$، $\eta_2 = 2/7$، $\eta_3 = 1/7$، $\tau = 6/6$، $M = 0/0147$ و $D/M = 4$. همهٔ نقاط تعادل را پیدا کنید.

(ج) فرض کنید τ آنقدر بزرگ باشد که داشته باشیم: $\dot{E}_q \simeq 0$. نشان دهید با فرض ثابت بودن E_q، مدل سیستم به معادلهٔ پاندول تقلیل می‌یابد.

تمرین ۱ ـ ۸ مدار نشان داده شده در شکل ۱ ـ ۳۴، شامل سلفی غیرخطی همراه با منبع جریانی[2] وابسته به زمان است. فرض کنید سلف غیرخطی به صورت پیوند جوزفسون [۳۳] با معادلهٔ $i_L = I_0 \sin k\phi_L$ باشد که ϕ_L شار[3] مغناطیسی سلف و I_0 و k نیز مقادیر ثابتی هستند.

(الف) با انتخاب ϕ_L و v_C به عنوان متغیرهای حالت، معادلهٔ حالت مدار را بیابید.

(ب) آیا آسانتر نیست i_L و v_C را به عنوان متغیرهای حالت برگزینیم؟



شکل ۱ ـ ۳۴ تمرینهای ۱ ـ ۸ و ۱ ـ ۹

تمرین ۱ ـ ۹ مدار نشان داده شده در شکل ۱ ـ ۳۴ شامل یک سلف غیرخطی همراه با منبع جریان وابسته به زمان است. فرض کنید سلف غیرخطی را بتوان با معادلهٔ $i_L = L\phi_L + \mu\phi_L^3$ بیان کرد که ϕ_L شار مغناطیسی سلف و L و μ نیز ثابتهای مثبتی باشند.

(الف) با انتخاب ϕ_L و v_C به عنوان متغیرهای حالت، معادلهٔ حالت مدار را بیابید.

1. Damping coefficient 2. Current source 3. Flux

(ب) با فرض $i_s = 0$، تمامی نقاط تعادل و نوع هریک از آنها را تعیین کنید.

تمرین ۱ ـ ۱۰ حلقهٔ قفل شدهٔ فاز [۵۴] را می‌توان با نمودار بلوکی[1] شکل ۱ ـ ۳۵ نشان داد. فرض کنید $\{A, B, C\}$، تحقّق[2] کمینهٔ[3] تابع تبدیل[4] عددی، اکیداً سره[5] و مرتبهٔ m اُم $G(s)$ باشد. ضمناً فرض کنید همهٔ مقادیر ویژهٔ A دارای بخش حقیقی منفی، $G(0) \neq 0$ و مقدار ثابت $\theta_i =$ باشد. z را نیز حالت تحقق $\{A, B, C\}$ در نظر بگیرید.

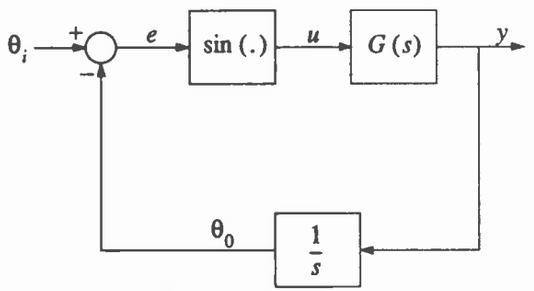
(الف) نشان دهید می‌توان سیستم حلقه ـ بسته را با معادلهٔ حالت زیر نشان داد:

$$\dot{z} = Az + B\sin e$$

$$\dot{e} = -Cz$$

(ب) تمامی نقاط تعادل سیستم را بیابید.

(ج) نشان دهید با فرض $G(s) = 1/(\tau s + 1)$ مدل حلقه ـ بستهٔ سیستم با مدل معادلهٔ پاندول یکی می‌شود.

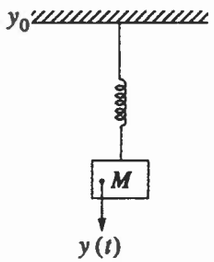


شکل ۱ ـ ۳۵ تمرین ۱ ـ ۱۰

تمرین ۱ ـ ۱۱ سیستم جرم ـ فنر نشان داده شده در شکل ۱ ـ ۳۶ را در نظر بگیرید. با فرض اینکه فنر، خطی و میرایی چسبندگی، غیرخطی (و با معادلهٔ $c_1 \dot{y} + c_2 \dot{y}|\dot{y}|$) باشد، معادلهٔ حالتی بیابید که حرکت سیستم را توصیف کند.

1. Block diagram 2. Realization 3. Minimal
4. Transfer function 5. Strictly proper

POWEREN.IR



شکل ۱ ـ ۳۶ تمرین ۱ ـ ۱۱

تمرین ۱ ـ ۱۲ موتورهای DC کنترل شده از طریق میدان[1] [۱۵۹] را می‌توان با معادلات زیر بیان کرد:

$$v_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt}$$

$$v_a = c_1 i_f \omega + L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = c_2 i_f i_a - c_3 \omega$$

نخستین معادله مربوط به مدار میدان است که v_f، i_f، R_f و L_f بترتیب نشاندهندهٔ ولتاژ، جریان، مقاومت و سلف مدار می‌باشد. متغیرهای v_a، i_a، R_a و L_a متغیرهای متناظر در مدار آرمیچر هستند که با معادلهٔ دوم توصیف می‌شود. معادلهٔ سوم، معادلهٔ گشتاور محور[2] است که J، لختی رُتور[3] و c_3 ضریب میرایی می‌باشد. جملهٔ $c_1 i_f \omega$ مقدار $e.m.f$ القا شده در مدار آرمیچر و $c_2 i_f i_a$ نیز گشتاور ایجاد شدهٔ ناشی از جریان آرمیچر و شار جریان میدان است. ولتاژ v_a مقداری ثابت و ولتاژ v_f ورودی کنترل است. با انتخاب متغیرهای مناسب حالت، معادلهٔ حالت مدار را بنویسید.

1. Field-controlled 2. Shaft 3. Rotor

تمرین ۱ ـ ۱۳ برای هریک از سیستمهای زیر، همهٔ نقاط تعادل را یافته، نوع هریک از نقاط تعادل تنها را تعیین کنید.

(۱)
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + \frac{x_1^3}{6} - x_2$$

(۲)
$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = 0/1x_1 - 2x_2 - x_1^2 - 0/1x_1^3$$

(۳)
$$\dot{x}_1 = (1 - x_1)x_1 - \frac{2x_1x_2}{1 + x_1}$$
$$\dot{x}_2 = \left(2 - \frac{x_2}{1 + x_1}\right)x_2$$

(۴)
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - 3x_1^2 - 2x_2^2)$$

(۵)
$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2(1 + x_1)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1(1 + x_1)$$

(۶)
$$\dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$
$$\dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

(۷)
$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2^3$$

تمرین ۱ ـ ۱۴ همهٔ نقاط تعادل سیستم:

$$\dot{x}_1 = ax_1 - x_1x_2$$
$$\dot{x}_2 = bx_1^2 - cx_2$$

را به‌ازای جمیع مقادیر حقیقی و مثبت a، b و c بیابید و نوع هریک از نقاط را نیز مشخص کنید.

تمرین ۱ ـ ۱۵ سیستم زیر دارای یک نقطهٔ تعادل در مبدأ است:

$$\dot{x}_1 = -x_1 - \frac{x_2}{ln\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + \frac{x_1}{ln\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

(الف) سیستم را حول مبدأ، خطی کنید و نوع مبدأ را به عنوان نقطهٔ تعادل سیستم خطی تعیین نمایید.

(ب) پیکرهٔ فاز سیستم غیرخطی را در نزدیکی مبدأ بیابید و نشان دهید پیکره شبیه به یک کانون پایدار است.

راهنمایی: معادله را به مختصات قطبی منتقل کنید.

(ج) موارد اختلاف بین (الف) و (ب) را توضیح دهید.

تمرین ۱ ـ ۱۶ برای هریک از سیستمهای زیر با استفاده از روش هم شیب، پیکرهٔ فاز را رسم و راجع به رفتار کیفی سیستم بحث کنید. برای این کار می‌توانید از اطلاعات مربوط به نقاط تعادل یا میدان برداری استفاده نمایید اما از کامپیوتر برای تولید پیکرهٔ فاز استفاده نکنید.

(۱)
$$\dot{x}_1 = x_2 \cos x_1$$
$$\dot{x}_2 = \sin x_1$$

(۲)
$$\dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$
$$\dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

(۳)
$$\dot{x}_1 = \left(1 - \frac{x_1}{x_2}\right)$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{x_1}{x_2}\left(1 - \frac{x_1}{x_2}\right)$$

(۴)
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - \frac{1}{3}x_1^3 - x_2$$

(۵)
$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1^3 - 4x_2$$

(۶)
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - \frac{1}{6}x_1^3$$

تمرین ۱ ـ ۱۷ برای هریک از سیستمهای ذیل، پیکرهٔ فاز را ترجیحاً به کمک کامپیوتر رسم و راجع به رفتار کیفی سیستم بحث کنید.

(۱)
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - 2\tan^{-1}(x_1 + x_2)$$

(۲)
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - 3x_1^2 - 2x_2^2)$$

(۳)
$$\dot{x}_1 = 2x_1 - x_1x_2$$
$$\dot{x}_2 = 2x_1^2 - x_2$$

(۴)
$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 - x_1(|x_1| + |x_2|)$$
$$\dot{x}_2 = -2x_1 + x_2 - x_2(|x_1| + |x_2|)$$

تمرین ۱ ـ ۱۸ سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = -(x_1 - x_1^2) + 1 - x_1 - x_2$$
$$\dot{x}_2 = -(x_2 - x_2^2) + 1 - x_1 - x_2$$

(الف) همهٔ نقاط تعادل و نوع هریک از آنها را مشخص کنید.

(ب) پیکرهٔ فاز سیستم را، ترجیحاً به کمک کامپیوتر، رسم نمایید و راجع به رفتار کیفی سیستم توضیح دهید.

تمرین ۱ ـ ۱۹ مدار دیود تونلی بخش ۱ ـ ۱ ـ ۲ را با داده‌های عددی مثال ۱ ـ ۲ (بجز مقادیر $E = 0/2\,V$ و $R = 0/2\,k\Omega$) درنظر بگیرید:

(الف) همهٔ نقاط تعادل و نوع هریک از آنها را تعیین کنید.

(ب) پیکرهٔ فاز را، ترجیحاً به کمک کامپیوتر، رسم و راجع به رفتار کیفی آن بحث نمایید.

تمرین ۱ ـ ۲۰ مسألهٔ قبلی را با مقادیر $E = 0/4\,V$ و $R = 0/2\,k\Omega$ تکرار کنید.

تمرین ۱ ـ ۲۱ مدل شبکهٔ عصبی هاپفیلد بخش ۱ ـ ۱ ـ ۵ را با داده‌های ذیل در نظر بگیرید: $n = 2$، $V_M = 1$، $T_{21} = T_{12} = 1$ (برای $i = 1, 2$)، $I_i = 0$، $C_i = 1$، $\rho_i = 1$، $T_{ii} = 0$ و $g_i(u) = (2/\pi)\tan^{-1}(\lambda\pi u/2)$.

(الف) همهٔ نقاط تعادل و نوع هریک از آنها را تعیین کنید.

(ب) با فرض $\lambda = 5$، پیکرهٔ فاز سیستم را، ترجیحاً به کمک کامپیوتر، رسم و راجع به رفتار کیفی آن بحث نمایید.

تمرین ۱ ـ ۲۲ پیکرهٔ فاز چهار سیستم زیر بترتیب در شکلهای ۱ ـ ۳۷ (الف)، (ب)، (ج) و (د) نشان داده شده است. جهت پیکانهای شکلها را مشخص و راجع به رفتار کیفی هریک از سیستمها بحث کنید.

(۱)
$$\dot{x}_1 = -x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2(1 - x_1^2 + 0/1x_1^4)$$

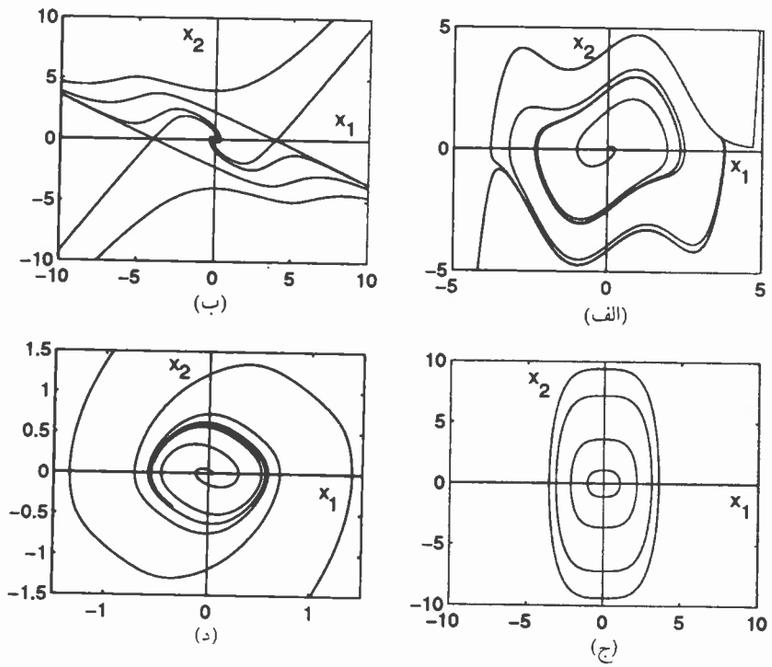
(۲)
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2 - 3\tan^{-1}(x_1 + x_2)$$

(۳)
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -(0/5x_1 + x_1^3)$$

(۴)
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 - \psi(x_1 - x_2)$$

که $\psi(y)$ به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$\psi(y) = \begin{cases} y^3 + 0/5y & |y| \le 1 \\ 2y - 0/5\,sign\,(y) & |y| > 1 \end{cases}$$



شکل ۱ ـ ۳۷ تمرین ۱ ـ ۲۲

تمرین ۱ ـ ۲۳ مدار معادل نوسانساز وین ـ بریج[1] در شکل ۱ ـ ۳۸ نشان داده شده است [۳۴] که $g(v)$ نشاندهندهٔ منبع ولتاژ[2] کنترل شده از طریق ولتاژ[3] است.

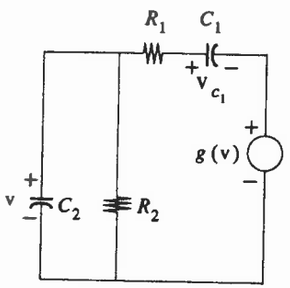
(الف) با انتخاب $x_1 = v_{C_1}$ و $v = v_{C_2}$ $x_2 = v$ به عنوان متغیرهای حالت، نشان دهید معادلهٔ حالت مدار به شکل زیر است:

1. Wien-Bridge oscillator 2. Voltage source 3. Voltage-controlled

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C_1 R_1}[-x_1 + x_2 - g(x_2)]$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{C_2 R_1}[-x_1 + x_2 - g(x_2)] - \frac{1}{C_2 R_2} x_2$$

(ب) فرض کنید $C_1 = C_2 = R_1 = R_2 = 1$ و $g(v) = 3/23\,v - 2/195\,v^2 + 0/666\,v^3$ باشد، پیکرهٔ فاز سیستم را، ترجیحاً به کمک کامپیوتر، رسم و راجع به رفتار کیفی آن بحث کنید.



شکل ۱ ـ ۳۸ تمرین ۱ ـ ۲۳

تمرین ۱ ـ ۲۴ سیستم جرم ـ فنر را با اصطکاک خشک در نظر بگیرید:

$$\ddot{y} + ky + c\dot{y} + \eta(y, \dot{y}) = 0$$

که η در بخش ۱ ـ ۱ ـ ۳ تعریف شده است. با استفاده از تحلیل قطعه‌ای ـ خطی، پیکرهٔ فاز را به صورت کیفی (بدون داده‌های عددی) رسم و راجع به رفتار کیفی سیستم بحث کنید.

۲

ویژگیهای اساسی

در این فصل نخست برخی از مفاهیم ریاضی ـ که در خلال این کتاب مورد استفاده قرار می‌گیرد ـ یادآوری می‌شود، سپس بعضی از ویژگیهای اساسی پاسخ معادلات دیفرانسیل معمولی مانند وجود[1]، یکتایی[2]، وابستگی پیوسته نسبت به شرایط اولیه و نسبت به پارامترها بررسی می‌گردد. این ویژگیها برای معادلهٔ حالت $\dot{x} = f(t,x)$، که مدل ریاضی سودمندی برای سیستمهای فیزیکی است، بسیار اساسی است. در آزمایش[3] با سیستمهای فیزیکی، مانند پاندول، انتظار این است که با آغاز آزمایش از حالت اولیهٔ مشخصی در زمان t_0، سیستم حرکت کرده، حالتش نیز در زمانهای آینده $t > t_0$ (حداقل در لحظهٔ بعد) قابل بیان باشد. علاوه بر این برای سیستمهای معیّن[4]، انتظار داریم چنانچه آزمایش را به طور دقیق تکرار کنیم، سیستم دقیقاً همان حرکت و همان حالت را در زمانهای $t > t_0$ داشته باشد. برای مدل ریاضی‌ای که حالت آیندهٔ سیستم را نسبت به حالت فعلی در t_0، پیش‌بینی کند، لازم است معادلهٔ با مقدار اولیهٔ ذیل:

$$\dot{x} = f(t,x) \ , \ x(t_0) = x_0 \qquad (۲-۱)$$

دارای پاسخی یکتا باشد، این موضوع در واقع پرسشی راجع به وجود و یکتایی پاسخ معادله است که در بخش ۲ ـ ۲ به آن اشاره خواهد شد. می‌توان نشان داد وجود و یکتایی پاسخ با اعمال قیودی[5] بر تابع سمت راست معادله، $f(t,x)$، محقّق خواهد گردید. قید کلیدی که در بخش ۲ ـ ۲ به کار گرفته شده موسوم به شرط لیپ شیتز[6] است که طبق آن باید تابع $f(t,x)$ نامساوی ذیل را به ازای جمیع مقادیر (t,x) و (t,y) در همسایگی (t_0,x_0) ارضا کند:

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\| \qquad (۲-۲)$$

---

1. Existance
2. Uniqueness
3. Experiment
4. Deterministic
5. Constraints
6. Lipschits Condition

POWEREN.IR

یکی از عوامل اصلی در اعتبار هر مدل ریاضی، وابستگی پیوستهٔ پاسخهای آن نسبت به داده‌های[1] مسأله است؛ حداقل خواستهٔ مورد انتظار از یک مدل ریاضی این است که بروز خطای کوچکی در داده‌ها، موجب بروز خطای بزرگی در پاسخهای حاصل از آن مدل نشود. داده‌های مربوط به مسألهٔ با مقدار اولیهٔ (۲ ـ ۱) عبارت است از: حالت اولیهٔ x_0، زمان اولیهٔ t_0 و تابع سمت راست معادله $(f(t,x))$. وابستگی پیوسته نسبت به شرایط اولیهٔ (t_0, x_0) و نیز نسبت به پارامترهای تابع f در بخش ۲ ـ ۳ مطالعه خواهد شد. اگر f نسبت به پارامترهایش مشتق‌پذیر[2] باشد، آنگاه پاسخ معادله نیز نسبت به آن پارامترها مشتق‌پذیر خواهد بود؛ این موضوع در بخش ۲ ـ ۴ نشان داده می‌شود و از آن برای به دست آوردن معادلات حساسیت[3] ـ که تأثیر تغییرات کوچک پارامترها را بر عملکرد سیستم توصیف می‌کند ـ استفاده خواهد شد. پیوستگی[4] و مشتق‌پذیری نتایج بخش ۲ ـ ۳ و ۲ ـ ۴، فقط در بازه‌های محدود (فشرده[5]) زمانی معتبر است. مفهوم پیوستگی روی بازه‌های محدود زمانی، بعدتر، پس از بیان مفاهیم پایداری، ارائه خواهد گردید*.

این فصل را با بحث کوتاهی راجع به اصل قیاس[6] به پایان می‌بریم که به کمک آن می‌توان پاسخ نامعادلهٔ دیفرانسیل عددیِ $\dot{v} \le f(t,v)$ را با پاسخ معادلهٔ دیفرانسیل $\dot{u} = f(t,u)$ کراندار کرد.

۲ ـ ۱ پیشنیازهای ریاضی

۲ ـ ۱ ـ ۱ فضای اقلیدسی

مجموعهٔ بردارهای n بُعدی $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ (که x_1، ...، x_n اعدادی حقیقی هستند)، فضای اقلیدسی[7] n بُعدی را تعریف می‌کند که با R^n نشان داده می‌شود. فضای اقلیدسی یک بُعدی متشکل از همهٔ اعداد حقیقی است که با R نمایش داده می‌شود. می‌توان بردارهای فضای R^n را با افزودن مؤلفه‌هایی مشابه زیاد کرد بدین منظور می‌توان بردارهای فضا را با ضرب کردن

* به طور مشخص، بخش ۵ ـ ۵ را ملاحظه کنید.

1. Data
2. Differentiable
3. Sensitivity equations
4. Countinuity
5. Compact
6. Comparison principle
7. Euclidean space

هریک از مؤلفه‌های آن در یک عدد، به صورت مضرب درآورد. حاصل ضرب داخلی[1] دو بردار x و y با رابطهٔ $x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ بیان می‌شود.

نُرمهای[2] برداری و ماتریسی

نُرم $\|x\|$ مربوط به بردار x، تابعی با مقداری حقیقی است که دارای ویژگیهای ذیل می‌باشد:

- به ازای جمیع مقادیر $x \in R^n$ داریم: $\|x\| \ge 0$. ضمناً $\|x\| = 0$ است اگر و تنها اگر: $x = 0$؛
- به ازای جمیع مقادیر $x, y \in R^n$ داریم: $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$؛
- به ازای جمیع مقادیر $\alpha \in R$ و $x \in R^n$، داریم: $\|\alpha x\| \le |\alpha| \, \|x\|$.

ویژگی دوم، به نام نامساوی مثلث[3] خوانده می‌شود. می‌توان دسته نُرمهای p را به شکل زیر در نظر گرفت:

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty$$

و:

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

سومین دسته نُرمِ بسیار پر استفاده، نُرمهای $\|x\|_p$، $\|x\|_1$، $\|x\|_\infty$ و نُرم اقلیدسی[4] است:

$$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} = (x^T x)^{\frac{1}{2}}$$

تمامی نُرمهای p از این لحاظ هم‌ارزند که اگر $\|\cdot\|_\alpha$ و $\|\cdot\|_\beta$ دو نُرم pی مختلف باشند، آنگاه می‌توان ثابتهای مثبت c_1 و c_2 را چنان یافت که برای همهٔ مقادیر $x \in R^n$ داشته باشیم:

$$c_1 \|x\|_\alpha \le \|x\|_\beta \le c_2 \|x\|_\alpha$$

تمرین ۲ ـ ۱ مقادیر این ثابتها را برای معمولترین نُرمها نشان می‌دهد. یکی از نتایج کلاسیک

1. Inner product
2. Norm
3. Triangle inequality
4. Euclidean norm

مربوط به نُرم p، *نامساوی هولدر*[1] است که برای تمامی مقادیر $x \in R^n$ و $y \in R^n$ برقرار می‌باشد:

$$|x^T y| \leq \|x\|_p \|y\|_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

تقریباً هرگاه از نُرم استفاده می‌کنیم، فقط از ویژگیهای ناشی از سه خاصیت اصلی همهٔ نُرمها بهره می‌جوییم؛ در این حالتها، زیرنویس p حذف می‌شود تا نشان دهد نُرم کاربردی می‌تواند هریک از نُرمهای p باشد.

ماتریس A با ابعاد $m \times n$ و با درایه‌های حقیقی، نگاشتی خطی[2] به شکل $y = Ax$ را از R^n به R^m تعریف می‌کند. نُرم pی القا شدهٔ A[3] با رابطهٔ ذیل بیان می‌شود*:

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p$$

که برای $p = 1, 2, \infty$ نتیجه می‌دهد:

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 = [\lambda_{max}(A^T A)]^{\frac{1}{2}}, \quad \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$\lambda_{max}(A^T A)$، بزرگترین مقدار ویژهٔ $A^T A$ است. برخی از ویژگیهای سودمند نُرمهای القا شدهٔ ماتریسی در تمرین ۲ ـ ۲ خلاصه شده است.

مفاهیم توپولوژیکی در R^n

همگرایی دنباله‌ها[4]: دنبالهٔ بردارهای x_0، x_1، ...، x_k، ... در R^n، که با $\{x_k\}$ نشان داده می‌شود، به سمت بردار حدّی x همگراست اگر داشته باشیم:

$$k \to \infty \Rightarrow \|x_k - x\| \to 0$$

---

* *sup* نماد سوپریمم[4]، کوچکترین کران بالا[5] و *inf* نماد اینفیمم، [6] بزرگترین کران پایین[7] است.

1. Hölder inequality
2. Linear mapping
3. Induced p-norm of A
4. Supremum
5. The Least Upper Bound (LUB)
6. Infimum
7. The Greatest Lower Bound (GLB)
4. Sequence

که معادل آن است که بگوییم برای هر مقدار معلوم $\varepsilon > 0$، مقدار N چنان یافت می‌شود که:

$$\|x_k - x\| < \varepsilon \quad , \quad \forall k \geq N$$

نماد «$\forall$» خوانده می‌شود: به ازای جمیع مقادیر (برای همهٔ مقادیر). بردار x را نقطهٔ انباشتگی[1] (حدّی) دنبالهٔ $\{x_k\}$ گوییم اگر زیر دنباله‌ای[2] از $\{x_k\}$ چنان وجود داشته باشد که به سمت x همگرا شود؛ به بیان دیگر زیرمجموعهٔ[3] نامحدودی مانند K از اعداد صحیح غیرمنفی چنان وجود داشته باشد که $\{x_k\}_{k \in K}$ به سمت x همگرا گردد. هر دنبالهٔ کراندار در R^n مانند $\{x_k\}$ حداقل یک نقطهٔ انباشتگی (حدّی) دارد. دنباله‌ای از اعداد حقیقی مانند $\{r_k\}$ را افزایشی[4] (افزایشی یکنوا یا غیرکاهشی[5]) نامند اگر داشته باشیم:

$$\forall k \quad , \quad r_k \leq r_{k+1}$$

با شرط $r_k < r_{k+1}$، دنباله را اکیداً افزایشی[6] گویند. دنبالهٔ کاهشی[7] (کاهشی یکنوا یا غیرافزایشی[8]) و نیز دنبالهٔ اکیداً کاهشی[9] هم به طور مشابه با $r_k \geq r_{k+1}$ تعریف می‌شود. هر دنبالهٔ افزایشی از اعداد حقیقی که از بالا کراندار باشد به سمت یک عدد حقیقی همگرا می‌گردد و به طور مشابه، هر دنبالهٔ کاهشی از اعداد حقیقی که از پایین کراندار باشد نیز به سمت یک عدد حقیقی همگرا شود.

مجموعه‌ها: زیرمجموعهٔ $S \subset R^n$ را باز[10] گوییم اگر به ازای هر بردار $x \in S$، بتوان همسایگی ε حول x به شکل:

$$N(x, \varepsilon) = \{z \in R^n | \ \|z - x\| < \varepsilon\}$$

را چنان یافت که داشته باشیم: $N(x, \varepsilon) \subset S$. مجموعهٔ S را بسته[11] گوییم اگر و تنها اگر مکمل[12] آن در R^n باز باشد؛ به طور معادل می‌توان گفت S بسته است اگر و تنها اگر هر دنبالهٔ همگرایی مانند $\{x_k\}$ با عناصری در S، به سمت نقطه‌ای در S همگرا شود. مجموعهٔ S را

---

1. Accumulation point
2. Subsequence
3. Subset
4. Increasing
5. Non decreasing
6. Strictly increasing
7. Decreasing
8. Nonincreasing
9. Strictly decreasing
10. Open
11. Closed
12. Complement

کراندار[1] نامیم اگر به ازای جمیع مقادیر $x \in S$، مقدار $r > 0$ چنان وجود داشته باشد که: $\|x\| < r$. مجموعهٔ S را فشرده[2] گوییم اگر هم بسته و هم کراندار باشد. نقطهٔ p را *نقطهٔ مرزی*[3] مجموعهٔ S نامیم اگر هر همسایگیِ p شامل حداقل یک نقطه متعلق به S و یک نقطه غیرمتعلق به S باشد. مجموعهٔ همهٔ نقاط مرزی S (که با ∂S نشان داده می‌شود)، مرز S خوانده می‌شود. هر مجموعهٔ بسته، شامل تمامی نقاط مرزی‌اش است؛ اما مجموعه‌های باز هیچیک از نقاط مرزی خود را شامل نمی‌شوند. درون[4] مجموعهٔ S عبارت است از: $S - \partial S$. هر مجموعهٔ باز برابر با درونش می‌باشد. *بستار*[5] S (که با $\bar{S}$ نشان داده می‌شود) از اجتماع S و مرزش به دست می‌آید. هر مجموعهٔ بسته برابر با بستارش است. مجموعهٔ باز S را همبند[6] گوییم اگر بتوان هر دو نقطه در آن را به کمک کمانی[7] که تماماً در S است، به هم وصل کرد. مجموعهٔ S را *ناحیه*[8] نامند اگر به شکل اجتماع یک مجموعهٔ باز همبند و تعدادی، هیچ و یا همهٔ نقاط مرزی‌اش قابل بیان باشد؛ چنانچه ناحیه هیچیک از نقاط مرزی را شامل نشود آن را ناحیهٔ باز و یا *قلمرو*[9] می‌گوییم. مجموعهٔ S راکوژ (محدب) خوانند اگر برای هر $x, y \in S$ و هر عدد حقیقی $0 < \theta < 1$، داشته باشیم: $\theta x + (1 - \theta) y \in S$. چنانچه $x \in X \subset R^n$ و $y \in Y \subset R^m$ باشد، زوج (x, y) را متعلق به حاصل ضرب $X \times Y \subset R^n \times R^m$ می‌دانیم.

توابع پیوسته: تابع f که مجموعهٔ S_1 را به مجموعهٔ S_2 می‌نگارد با $f: S_1 \longrightarrow S_2$ نشان داده می‌شود. تابع $f: R^n \longrightarrow R^m$ را در نقطهٔ x پیوسته گوییم اگر داشته باشیم: $x_k \longrightarrow x \Rightarrow f(x_k) \longrightarrow f(x)$. نماد «$\Rightarrow$» به معنای «نتیجه می‌دهد» است. به طور معادل می‌توان گفت f در نقطهٔ x پیوسته است اگر برای هر مقدار معلوم $\varepsilon > 0$، مقدار $\delta > 0$ را بتوان چنان یافت که داشته باشیم:

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

تابع f روی مجموعهٔ S، پیوسته است اگر در هر نقطهٔ آن پیوسته باشد و روی مجموعهٔ S،

1. Bounded
2. Compact set
3. Boundary point
4. Interior
5. Closure
6. Connected
7. Arc
8. Region
9. Domain

پیوستهٔ *یکنواخت*[1] است اگر برای هر مقدار معلوم $\varepsilon > 0$، مقدار $\delta > 0$ (فقط وابسته به ε) چنان وجود داشته باشد که نامساوی فوق به ازای جمیع مقادیر $x, y \in S$ برقرار باشد. باید دقت کرد پیوستگی یکنواخت روی یک مجموعه تعریف می‌شود درصورتی که پیوستگی در یک نقطه بیان می‌گردد. برای پیوستگی یکنواخت، همان مقدار ثابت δ، برای تمامی نقاط مجموعه به‌کار می‌رود. به تعبیر دیگر می‌توان گفت اگر f روی مجموعهٔ S پیوستهٔ یکنواخت باشد آنگاه روی S پیوسته نیز خواهد بود، اما عکس مطلب در حالت کلّی صحیح نیست؛ لیکن اگر S مجموعه‌ای فشرده باشد آنگاه پیوستگی و پیوستگی یکنواخت روی S معادل هم هستند. تابع:

$$(a_1 f_1 + a_2 f_2)(\cdot) = a_1 f_1(\cdot) + a_2 f_2(\cdot)$$

برای همهٔ مقادیر عددی a_1 و a_2 و هر دو تابع پیوستهٔ f_1 و f_2، پیوسته است. اگر S_1، S_2 و S_3 سه مجموعهٔ دلخواه باشند و داشته باشیم: $f_1: S_1 \longrightarrow S_2$ و $f_2: S_2 \longrightarrow S_3$، آنگاه تابع $f_2 \circ f_1: S_1 \longrightarrow S_3$ که با رابطهٔ زیر تعریف می‌گردد:

$$(f_2 \circ f_1)(\cdot) = f_2(f(\cdot))$$

ترکیب[2] توابع f_1 و f_2 نامیده می‌شود. ترکیب دو تابع پیوسته، پیوسته است. اگر $S \subset R^n$ و $f: S \longrightarrow R^m$ باشد، آنگاه مجموعهٔ $f(x)$هایی که $x \in S$ باشد، تصویر[3] S تحت f نامیده و با $f(S)$ نشان داده می‌شود. چنانچه f تابعی پیوسته بر مجموعهٔ فشردهٔ S باشد، آنگاه $f(S)$ نیز فشرده است؛ لذا می‌توان گفت توابع پیوسته بر مجموعه‌های فشرده، کراندارند. علاوه بر این اگر f تابعی مقدار حقیقی و $f: S \longrightarrow R$ باشد، آنگاه نقاط p و q در مجموعهٔ فشردهٔ S چنان وجود دارند که برای همهٔ مقادیر $x \in S$ داریم: $f(x) \leq f(p)$ و $f(x) \geq f(q)$. چنانچه f، تابعی پیوسته بر مجموعهٔ همبند S باشد، آنگاه $f(S)$نیز همبند خواهد بود. تابع f تعریف شده بر مجموعهٔ S را یک به یک[4] بر S گوییم اگر برای هر $x, y \in S$ و $x \neq y$ داشته باشیم: $f(x) \neq f(y)$. اگر تابع $f: S \longrightarrow R^m$، تابعی پیوسته و یک به یک بر مجموعهٔ فشردهٔ $S \subset R^n$ باشد، آنگاه f دارای تابع وارون[5] پیوسته‌ای بر $f(s)$ است که با f^{-1} نمایش داده می‌شود.

1. Uniformly continuous
2. Composition
3. Image
4. One-to-one
5. Inverse function

ترکیب دو تابع f و f^{-1}، تابع همانی[1] است؛ یعنی: $f^{-1}(f(x)) = x$. تابع $f: R \longrightarrow R^n$ را بر بازهٔ $J \subset R$ پیوستهٔ *قطعه‌ای*[2] گوییم اگر برای هر زیربازهٔ کراندار $J_\circ \subset J$ و به ازای جمیع نقاط $x \in J_\circ$ (بجز احتمالاً تعداد معدودی از نقاط که f در آنجا ناپیوسته است)، پیوسته باشد و در هر نقطهٔ غیر پیوستهٔ $x_\circ$، حدّ راست $f(x_\circ + h)$ $\underset{h \to \circ}{\text{حدّ}}$ و حدّ چپ $f(x_\circ - h)$ $\underset{h \to \circ}{\text{حدّ}}$ وجود داشته باشد؛ به تعبیر دیگر تابع دارای جهش محدودی در $x_\circ$ باشد. مثالهایی از توابع پیوستهٔ قطعه‌ای در تمرین ۲ ـ ۴ آورده شده است.

توابع مشتق‌پذیر: تابع $f: R \longrightarrow R$ را در نقطهٔ x مشتق‌پذیر گوییم اگر حدّ زیر وجود داشته باشد:

$$f'(x) = \underset{h \to \circ}{\text{حدّ}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مقدار حدّ $f'(x)$ را مشتق[3] f در نقطهٔ x گویند. تابع $f: R^n \longrightarrow R^m$ را در نقطهٔ $x_\circ$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر[4] گوییم اگر همهٔ مشتقات جزئی[5] $\partial f_i / \partial x_j$ در نقطهٔ $x_\circ$ به ازای جمیع مقادیر $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$ وجود داشته باشد. تابع f روی مجموعهٔ S، پیوسته ـ مشتق‌پذیر است اگر در هر نقطهٔ S، پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد. برای هر تابع پیوسته ـ مشتق‌پذیر مانند $f: R^n \longrightarrow R$ می‌توان بردار سطری $\partial f / \partial x$ را به شکل ذیل تعریف کرد:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$$

بردار گرادیان[6] که با $\nabla f(x)$ نشان داده می‌شود، عبارت است از:

$$\nabla f(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]^T$$

برای تابع پیوسته ـ مشتق‌پذیر $f: R^n \longrightarrow R^m$، *ماتریس ژاکوبی* $[\partial f / \partial x]$، ماتریسی با ابعاد $m \times n$ است که درایهٔ سطر i و ستون jاُم آن به صورت $\partial f_i / \partial x_j$ معرفی می‌شود. فرض کنید مجموعهٔ $S \subset R^n$ باز و f نیز نگاشتی از S به R^m باشد که در نقطهٔ $x_\circ \in S$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر است، ضمناً فرض کنید g نگاشتی از مجموعه‌ای باز (حاوی $f(S)$) به R^k باشد که در نقطهٔ $f(x_\circ)$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر است، در این صورت تابع $h: S \longrightarrow R^k$، که به شکل

1. Identity
2. Piecewise continuous
3. Derivative
4. Continuously
5. Partial derivative
6. Gradient vector

$h(x) = g(f(x))$ تعریف می‌گردد، در نقطهٔ $x_\circ$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر خواهد بود و ماتریس ژاکوبی آن به کمک *قاعدهٔ زنجیره‌ای*[1] به شکل ذیل محاسبه می‌شود:

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=x_\circ} = \left.\frac{\partial g}{\partial f}\right|_{f=f(x_\circ)} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_\circ}$$

۲ ـ ۱ ـ ۲ قضیهٔ مقدار میانگین و تابع ضمنی

اگر x و y دو نقطهٔ مجزا در R^n باشد، آنگاه *پاره‌خط* $L(x, y)$ که این دو نقطه را به هم می‌پیوندد به صورت زیر بیان می‌شود:

$$L(x, y) = \{z \mid z = \theta x + (1 - \theta) y, \quad \circ < \theta < 1\}$$

قضیهٔ مقدار میانگین

فرض کنید تابع $f: R^n \longrightarrow R$ در هر نقطهٔ x از مجموعهٔ باز $S \subset R^n$، پیوسته ـ مشتق‌پذیر و x و y دو نقطهٔ S باشند به طوری که پاره‌خط $L(x, y)$ متعلق به S باشد، در این صورت نقطه‌ای مانند z متعلق به $L(x, y)$ چنان یافت می‌شود که:

$$f(y) - f(x) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=z} (y - z)$$

قضیهٔ تابع ضمنی

فرض کنید تابع $f: R^n \times R^m \longrightarrow R^n$ در تمامی نقاط (x, y) متعلق به مجموعهٔ باز $S \subset R^n \times R^m$، پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد. علاوه بر این فرض کنید $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه‌ای از S باشد که برای آن $f(x_\circ, y_\circ) = \circ$ و ماتریس ژاکوبی در آن نقطه (یعنی: $[\partial f / \partial x]_{(x_\circ, y_\circ)}$) غیرمنفرد است؛ در این صورت همسایگی $U \subset R^n$ حول $x_\circ$ و همسایگی $V \subset R^m$ حول $y_\circ$ چنان یافت می‌شود که برای تمامی مقادیر $y \in V$، معادلهٔ $f(x, y) = \circ$ دارای پاسخ یکتای $x \in U$ است. ضمناً می‌توان این پاسخ را به شکل $x = g(y)$ نشان داد که g در نقطهٔ $y = y_\circ$، پیوسته ـ مشتق‌پذیر است.

1. Chain rule

می‌توان اثبات این دو قضیه به همراه سایر مواردی را که در قسمتهای پیشین این بخش گفته شده در هر کتاب درسی ریاضیات پیشرفته و یا آنالیز ریاضی یافت*.

۲ ـ ۱ ـ ۳ نامساوی گران وال ـ بلمن[1]

لم ۲ ـ ۱ *فرض کنید* $\lambda: [a, b] \longrightarrow R$ *تابعی پیوسته و* $\mu: [a, b] \longrightarrow R$ *نیز تابعی پیوسته و غیرمنفی باشد. اگر تابع پیوستهٔ* $y: [a, b] \longrightarrow R$ *به ازای همهٔ مقادیر* $a < t < b$ *در نامساوی ذیل صدق کند:*

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \mu(s) y(s)\, ds$$

آنگاه در همان بازه داریم:

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \lambda(s)\, \mu(s)\, exp\left[\int_s^t \mu(\tau)\, d\tau\right] ds$$

به طور مشخص، چنانچه $\lambda(t) \equiv \lambda$ *مقدار ثابتی باشد، آنگاه:*

$$y(t) \leq \lambda\ exp\ \left[\int_a^t \mu(\tau)\, d\tau\right]$$

و اگر $\mu(t) \equiv \mu > 0$ *مقدار ثابتی باشد، آنگاه:*

$$y(t) \leq \lambda\ exp\ [\ \mu\ (t - a)]$$

برهان: فرض کنید:

$$z(t) = \int_a^t \mu(s)\, y(s)\, ds$$

و:

$$v(t) = z(t) + \lambda(t) - y(t) \geq 0$$

در این صورت z مشتق‌پذیر است و داریم:

$$\dot{z} = \mu(t)\, y(t) = \mu(t)\, z(t) + \mu(t)\, \lambda(t) - \mu(t)\, v(t)$$

* برای مثال، [۷] را ملاحظه کنید.

1. Gronwall - Bellman inequality

که نشاندهندهٔ معادلهٔ حالتی خطی و عددی است که تابع انتقال حالت[1] آن به شکل دیل بیان می‌شود:

$$\phi(t, s) = exp\left[\int_s^t \mu(\tau)\, d\tau\right]$$

چون $z(a) = 0$ است، لذا:

$$z(t) = \int_a^t \phi(t, s)\, [\mu(s)\, \lambda(s) - \mu(s)\, v(s)]\, ds$$

$$\int_a^t \phi(t, s)\, \mu(s)\, v(s)\, ds$$ جملهٔ:

غیرمنفی است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$z(t) \leq \int_a^t exp\left[\int_s^t \mu(\tau)\, d\tau\right] \mu(s)\, \lambda(s)\, ds$$

زیرا می‌دانیم: $y(t) \leq \lambda(t) + z(t)$؛ بدین ترتیب برهان لم در حالت کلّی کامل می‌شود. در حالت خاص $\lambda(t) \equiv \lambda$ داریم:

$$\int_a^t \mu(s)\, exp\left[\int_s^t \mu(\tau)\, d\tau\right] ds = -\int_a^t \frac{d}{ds}\left\{exp\left[\int_s^t \mu(\tau)\, d\tau\right]\right\} ds$$

$$= -\left\{exp\left[\int_s^t \mu(\tau)\, d\tau\right]\right\}\Big|_{s=a}^{s=t}$$

$$= -1 + exp\left[\int_a^t \mu(\tau)\, d\tau\right]$$

که لم را در حالتی که λ مقدار ثابتی است، اثبات می‌کند. اثبات در حالتی که هردو پارامتر λ و μ ثابتند براحتی با انتگرالگیری به دست می‌آید. □

۲ ـ ۱ ـ ۴ نگاشت انقباض

معادله‌ای به شکل $x = T(x)$ را در نظر بگیرید. پاسخ x^* این معادله را *نقطهٔ ثابت*[2] نگاشت T نامند اگر نگاشت T بدون تغییر، از x^* دور شود. یکی از روشهای کلاسیک برای یافتن نقطهٔ ثابت، روش تقریبهای متوالی[3] است. در این شیوه ابتدا، بردار آزمون[4] x_1 را انتخاب و مقدار

1. State transition function 2. Fixed point
3. Successive approximation method 4. Trial vector

$x_{۲} = T(x_{۱})$ را محاسبه می‌کنیم. با ادامهٔ این روش به طور تکراری، بردارهای متوالی بعدی محاسبه می‌شود: $x_{k+۱} = T(x_k)$. قضیهٔ نگاشت انقباض، بیانگر شروط کافی است که تحت آن نقطهٔ ثابت x^* برای نگاشت $x = T(x)$ وجود خواهد داشت و دنبالهٔ $\{x_k\}$ به سمت x^* همگرا می‌شود. این روش ابزار تحلیلی توانمندی در اثبات وجود پاسخ معادله‌ای به شکل $x = T(x)$ است. این قضیه نه تنها وقتی معتبر است که T نگاشتی از یک فضای اقلیدسی به فضای اقلیدسی دیگر است، بلکه برای زمانی که T نگاشتی بین دو *فضای باناخ*[1] نیز می‌باشد کاربرد دارد. ما از قضیهٔ نگاشت انقباض در حالت کلّی آن استفاده می‌کنیم و برای این کار ابتدا فضاهای باناخ را شرح می‌دهیم*.

فضاهای برداری: فضای خطی برداری χ روی میدان R، مجموعه‌ای از عناصر x، y، z، ... است (که بردار نامیده می‌شوند) به طوری که برای هر دو بردار $x, y \in \chi$، مجموع $x + y$ قابل تعریف باشد و داشته باشیم: $x+y \in \chi$، $x+y=y+x$، $(x+y)+z=x+(y+z)$**
ضمناً بردار صفر $۰ \in \chi$ چنان وجود داشته باشد که به ازای جمیع مقادیر $x \in \chi$ بتوان نوشت: $x = x + ۰$. علاوه بر این برای هر دو عدد اختیاری $\alpha, \beta \in R$، ضرب عددی αx تعریف شده باشد و به ازای جمیع مقادیر $x, y \in \chi$ داشته باشیم: $\alpha x \in \chi$، $۱ . x = x$، $۰ . x = ۰$، $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$، $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ و $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$.

فضای خطی نُرم‌دار: فضای خطی χ را فضای خطی نُرم‌دار[2] گوییم، اگر برای هر یک از عناصر فضا $x \in \chi$، نُرمی با مقدار حقیقی $\|x\|$ وجود داشته باشد که شرایط ذیل را برآورده سازد:

- به ازای جمیع مقادیر $x \in \chi$، داشته باشیم: $\|x\| \geq ۰$ و شرط لازم و کافی برای $\|x\| = ۰$ این باشد که: $x = ۰$؛
- به ازای جمیع مقادیر $x, y \in \chi$ داشته باشیم: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$؛
- به ازای جمیع مقادیر $\alpha \in R$ و $x \in \chi$ داشته باشیم: $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$.

---

* برای بررسی بیشتر فضاهای باناخ، هریک از کتابهای درسی آنالیز تابعی[3] مفید است. یکی از موارد مناسب در این زمینه [۱۰۶، فصل دوم] می‌باشد.

** z نیز برداری از فضای خطی برداری χ است [م].

1. Banach space
2. Normed linear space
3. Functional analysis

اگر از مفاهیم متن، واضح نباشد $\|.\|$ بیانگر نُرم بر χ است یا بر R^n، از نماد $\|.\|_{\chi}$ برای نشان دادن نُرم بر χ استفاده می‌کنیم.

همگرایی: دنبالهٔ $\{x_k\} \in \chi$ در فضای خطی نُرم‌دار، به سمت $x \in \chi$ همگرا می‌شود اگر داشته باشیم:

$$k \longrightarrow \infty \Rightarrow \|x_k - x\| \longrightarrow ۰$$

مجموعهٔ بسته: مجموعهٔ $S \subset \chi$ بسته است اگر و تنها اگر هر دنبالهٔ همگرایی با عناصری در S، دارای حدی در S باشد.

دنبالهٔ کوشی: رشتهٔ $\{x_k\} \in \chi$ را دنبالهٔ کوشی[1] گویند اگر داشته باشیم:

$$k, m \longrightarrow \infty \Rightarrow \|x_k - x_m\| \longrightarrow ۰$$

هر دنبالهٔ همگرا کوشی است اما عکس آن صحیح نیست.

فضای باناخ: فضای خطی نُرم‌دار χ، کامل[2] است اگر هر دنبالهٔ کوشی در χ به سمت برداری در χ همگرا شود. فضای خطی نُرم‌دار کامل را فضای باناخ می‌گویند.

مثال ۲ ـ ۱ مجموعهٔ همهٔ توابع پیوستهٔ $f: [a, b] \longrightarrow R^n$ را با $C[a, b]$ نشان می‌دهیم. این مجموعه، فضایی برداری روی R را تشکیل می‌دهد. مجموع $x + y$ با رابطهٔ $(x + y)(t) = x(t) + y(t)$ تعریف می‌شود. ضرب عددی نیز با رابطهٔ $(\alpha x)(t) = \alpha x(t)$ بیان می‌گردد. بردار صفر، تابع همانی صفر روی فاصلهٔ $[a, b]$ می‌باشد. نُرم را نیز به شکل ذیل تعریف می‌کنیم:

$$\|x\|_C = \max_{t \in [a,b]} \|x(t)\|$$

که سمت راست عبارت فوق می‌تواند هریک از نُرمهای p روی R^n باشد. واضح است که $\|x\|_C$ نامنفی است و زمانی صفر است که تابع متحد با صفر باشد. می‌توان نامساوی مثلثی را از رابطهٔ ذیل نتیجه گرفت:

---

1. Cauchy sequence
2. Complete

$$\max \|x(t)+y(t)\| \le \max [\, \|x(t)\| + \|y(t)\| \,]$$

$$\le \max \|x(t)\| + \max \|y(t)\|$$

همچنین داریم: $\max \|\alpha x(t)\| = \max|\alpha| \; \|x(t))\| = |\alpha| \max \|x(t)\|$

که همهٔ مقادیر بیشینه[1] روی فاصلهٔ $[a, b]$ محاسبه می‌شود. بنابراین $C[a, b]$ به همراه نُرم $\|\cdot\|_C$، یک فضای خطی نُرم‌دار را تعریف می‌کند که فضای باناخ نیز می‌باشد. برای اثبات این ادعا لازم است نشان دهیم هر رشتهٔ کوشی در $C[a, b]$ به سمت برداری متعلق به همین مجموعه همگرا می‌شود. فرض کنید $\{x_k\}$ رشته‌ای کوشی در $C[a, b]$ باشد، در این صورت برای هر مقدار ثابت $t \in [a, b]$ داریم:

$$k, m \longrightarrow \infty \Rightarrow \|x_k(t) - x_m(t)\| \le \|x_k - x_m\|_c \longrightarrow 0$$

زیرا $\{x_k\}$ رشته‌ای کوشی در R^n است، اما R^n همراه با هر نوع نُرم p، کامل است زیرا همگرایی مجموعه به‌طور ضمنی همگرایی اجزا را نیز بیان می‌کند و R هم کامل است؛ بنابراین برداری حقیقی مانند $x(t)$ چنان یافت می‌شود که دنباله به سمت آن همگرا گردد یعنی: $x_k(t) \longrightarrow x(t)$. این موضوع همگرایی نقطه به نقطه[2] را اثبات می‌کند. اینک نشان می‌دهیم همگرایی در بازهٔ $t \in [a, b]$ به شکل یکنواخت است، برای این کار برای مقدار معلوم $\varepsilon > 0$، مقدار N را چنان انتخاب می‌کنیم که برای $k, m > N$ داشته باشیم: $\|x_k - x_m\|_C \le \varepsilon/2$، پس برای $k > N$ می‌توان نوشت:

$$\|x_k(t) - x(t)\| \le \|x_k(t) - x_m(t)\| + \|x_m(t) - x(t)\|$$

$$\le \|x_k - x_m\|_C + \|x_m(t) - x(t)\|$$

با انتخاب m به اندازهٔ کافی بزرگ (که ممکن است به t نیز وابسته باشد)، می‌توان هر یک از جمله‌های سمت راست را کمتر از $\varepsilon/2$ کرد و لذا برای $k > N$ خواهیم داشت: $\|x_k(t) - x(t)\| < \varepsilon$. بنابراین $\{x_k\}$ به طور یکنواخت روی فاصلهٔ $t \in [a, b]$

1. Maximum
2. Pointwise convergence

همگراست. برای تکمیل برهان، لازم است نشان دهیم $x(t)$ پیوسته است و $\{x_k\}$ با نُرم تعریف شده در $C[a, b]$ به‌سمت x همگرا می‌شود. برای اثبات پیوستگی، عبارت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\|x(t+\delta) - x(t)\| \le \|x(t+\delta) - x_k(t+\delta)\|$$

$$+ \|x_k(t+\delta) - x_k(t)\| + \|x_k(t) - x(t)\|$$

چون $\{x_k\}$ به طور یکنواخت به سمت x همگرا می‌شود، برای هر مقدار معلوم $\varepsilon > 0$ می‌توان مقدار k را آنقدر بزرگ انتخاب کرد که جمله‌های اول و سوم سمت راست کمتر از $\varepsilon/3$ شود. از آنجا که $x_k(t)$ پیوسته است می‌توان δ را نیز آنقدر کوچک انتخاب کرد که جملهٔ دوم هم کوچکتر از $\varepsilon/3$ گردد، بنابراین $x(t)$ نیز پیوسته است، همگرایی x_k به سمت x با نُرم $\|\cdot\|_C$ نیز مستقیماً از همگرایی یکنواخت حاصل می‌شود. Δ

سایر مثالهای مربوط به فضای باناخ در تمرینها آمده است.

قضیهٔ ۲ ـ ۱ (نگاشت انقباض) *فرض کنید S زیرمجموعه‌ای بسته از فضای باناخ χ و T نگاشتی از S به S باشد. ضمناً فرض کنید داشته باشیم:*

$$\|T(x) - T(y)\| \le \rho \|x - y\|, \quad \forall x, y \in S, \quad 0 \le \rho < 1$$

در این صورت:

- *بردار یگانهٔ $x^* \in S$ چنان وجود دارد که در رابطهٔ $x^* = T(x^*)$ صدق کند؛*
- *می‌توان x^* را به کمک روش تقریبهای متوالی و با شروع از هر بردار اولیهٔ اختیاری در S به دست آورد.* $\Diamond$

برهان: مقدار اختیاری $x_1 \in S$ را انتخاب و $\{x_k\}$ را با رابطهٔ $x_{k+1} = T(x_k)$ تعریف می‌کنیم. چون T نگاشتی از S به S است لذا به ازای جمیع مقادیر $k \ge 1$ داریم: $x_k \in S$. نخستین گام در اثبات این است که نشان دهیم دنبالهٔ $\{x_k\}$ کوشی است. بدین منظور می‌نویسیم:

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|T(x_k) - T(x_{k-1})\|$$

$$\leq \rho \|x_k - x_{k-1}\| \leq \rho^2 \|x_{k-1} - x_{k-2}\| \leq \ldots \leq \rho \|x_2 - x_1\|$$

و در نتیجه:

$$\|x_{k+r} - x_k\| \leq \|x_{k+r} - x_{k+r-1}\| + \|x_{k+r-1} - x_{k+r-2}\| + \ldots + \|x_{k+1} - x_k\|$$

$$\leq [\rho^{k+r-2} + \rho^{k+r-3} + \ldots + \rho^{k-1}] \|x_2 - x_1\|$$

$$\leq \rho^{k-1} \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \|x_2 - x_1\| = \frac{\rho^{k-1}}{1-\rho} \|x_2 - x_1\|$$

با افزایش k به سمت بینهایت، عبارتهای سمت راست به سمت صفر میل می‌کنند؛ بنابراین دنباله، کوشی است زیرا χ فضایی باناخ است یعنی با شرط $k \longrightarrow \infty$ داریم: $x_k \longrightarrow x^*$. علاوه بر این S نیز مجموعه‌ای بسته است یعنی $x^* \in S$. اکنون نشان می‌دهیم: $x^* = T(x^*)$. برای هر مقدار $x_k = T(x_{k-1})$ می‌توان نوشت:

$$\|x^* - T(x^*)\| \leq \|x^* - x_k\| + \|x_k - T(x^*)\| \leq \|x^* - x_k\| + \rho \|x_{k-1} - x^*\|$$

اگر k به اندازهٔ کافی بزرگ انتخاب شود، سمت راست نامساوی فوق بسیار کوچک خواهد شد، بنابراین داریم: $\|x^* - T(x^*)\| = 0$ و به تعبیر دیگر: $x^* = T(x^*)$. تنها نکتهٔ باقیمانده آن است که نشان دهیم x^* نقطهٔ ثابت T در S می‌باشد؛ برای این کار فرض می‌کنیم x^* و y^* نقاط ثابت باشند در این صورت می‌توان نوشت:

$$\|x^* - y^*\| = \|T(x^*) - T(y^*)\| \leq \rho \|x^* - y^*\|$$

و با توجه به $\rho < 1$، نتیجه می‌شود: $x^* = y^*$. □

۲ ـ ۲ وجود و یکتایی

در این بخش شروط کافی برای وجود و یکتایی پاسخ معادلهٔ با مقدار اولیهٔ (۲ ـ ۱) را به دست می‌آوریم. پاسخ معادلهٔ (۲ ـ ۱) بر بازهٔ $[t_0, t_1]$ بدین معناست که تابع پیوستهٔ $x: [t_0, t_1] \to R^n$ را چنان یافته‌ایم که به ازای جمیع مقادیر $t \in [t_0, t_1]$، $\dot{x}(t)$ با رابطهٔ $\dot{x} = f(t, x(t))$ تعریف شود. چنانچه تابع $f(t, x)$ نسبت به t و x پیوسته باشد آنگاه پاسخ $x(t)$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر خواهد بود. لیکن فرض می‌کنیم تابع $f(t, x)$ نسبت به x پیوسته

اما نسبت به t فقط پیوستهٔ قطعه‌ای باشد، در این حالت پاسخ $x(t)$ حداکثر ممکن است به صورت پیوستهٔ قطعه‌ای مشتق‌پذیر باشد. این فرض که $f(t, x)$ نسبت به t پیوستهٔ قطعه‌ای است، اجازه می‌دهد بتوان حالتی از $f(t, x)$ را نیز در نظر گرفت که وابسته به ورودی متغیر با زمان است و درنتیجه امکان تجربهٔ تغییرات پله‌ای با زمان نیز به وجود می‌آید.

هر معادلهٔ دیفرانسیل با شرط اولیهٔ معلوم، می‌تواند پاسخهای مختلفی داشته باشد؛ برای مثال معادلهٔ عددی ذیل:

$$\dot{x} = x^{\frac{1}{3}}, \quad x(0) = 0 \qquad (۲ ـ ۳)$$

دارای پاسخی به شکل $x(t) = (2t/3)^{\frac{3}{2}}$ است. این پاسخ یکتا نیست زیرا $x(t) \equiv 0$ پاسخ دیگری از این معادله است. با توجه به اینکه سمت راست معادلهٔ (۲ ـ ۳) نسبت به x پیوسته می‌باشد، واضح است پیوستگی $f(t, x)$ نسبت به آرگومانهایش برای یکتایی پاسخ کفایت نمی‌کند و باید شروط اضافی دیگری را به تابع f اعمال کرد. بحث راجع به وجود جواب، کمتر مشکل‌ساز است زیرا در حقیقت پیوستگی تابع $f(t, x)$ نسبت به آرگومانهایش ضامن وجود حداقل یک پاسخ برای معادله می‌باشد. این موضوع را در اینجا اثبات نمی‌کنیم* ولی به جای آن قضیهٔ ساده‌تری را ثابت می‌نماییم که با استفاده از شرط لیپ شیتز وجود و یکتایی پاسخ را نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۲ ـ ۲ (وجود و یکتایی محلی) *اگر $f(t, x)$ نسبت به t پیوستهٔ قطعه‌ای باشد و شرط لیپ شیتز را برآورده کند:*

$$\forall x, y \in B = \{x \in R^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}, \forall t \in [t_0, t_1], \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|$$

آنگاه مقدار $\delta > 0$ چنان وجود دارد که معادلهٔ:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

دارای پاسخ یکتایی در بازهٔ $[t_0, t_0 + \delta]$ باشد. ◇

---

* برای اثبات، [۱۱۸، قضیهٔ ۲ ـ ۳] را ملاحظه کنید.

برهان: اثبات را با اشاره به این نکته آغاز می‌کنیم که اگر $x(t)$ پاسخ معادلهٔ:

$$\dot{x} = f(t,x) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \qquad (۴-۲)$$

باشد، آنگاه با انتگرالگیری داریم:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds \qquad (۵-۲)$$

برعکس، اگر $x(t)$ شرط (۲ ـ ۵) را برآورده کند آنگاه در رابطهٔ (۲ ـ ۴) نیز صدق می‌کند؛ بنابراین بررسی وجود و یکتایی پاسخ معادلهٔ دیفرانسیل (۲ ـ ۴) معادل با بررسی وجود و یکتایی پاسخ معادلهٔ انتگرالی[1] (۲ ـ ۵) است. با در نظرگرفتن سمت راست عبارت (۲ ـ ۵) به عنوان نگاشتی از تابع پیوستهٔ $x:[t_0,t_1]\longrightarrow R^n$ و با استفاده از نماد $(Px)(t)$، می‌توان رابطهٔ (۲ ـ ۵) را به صورت زیر باز نوشت:

$$x(t) = (Px)(t) \qquad (۶-۲)$$

شایان ذکر اینکه $(Px)(t)$ نسبت به t پیوسته است. پاسخ معادلهٔ (۲ ـ ۶)، نقطهٔ ثابتی از نگاشت P است که x را به Px می‌نگارد. برای اثبات وجود نقطهٔ ثابت برای نگاشت (۲ ـ ۶) می‌توان از قضیهٔ نگاشت انقباض استفاده کرد، بدین منظور فضای باناخ χ و مجموعهٔ بستهٔ $S\subset\chi$ را چنان تعریف می‌کنیم که P نگاشتی از S به S و انقباضی بر S باشد، فرض کنید داشته باشیم:

با نُرم: $\chi = C[t_0,t_0+\delta]$, $\|x\|_C = \max\limits_{t\in[t_0,t_0+\delta]} \|x(t)\|$

و: $S = \{x\in\chi \mid \|x-x_0\|_C \le r\}$

که r شعاع گوی B و δ ثابت مثبتی است که باید انتخاب شود. در انتخاب δ باید توجه داشت رابطهٔ $\delta \le t_1 - t_0$ برآورده شود، لذا: $[t_0,t_0+\delta]\subset[t_0,t_1]$. ضمناً باید اشاره کرد $\|x(t)\|$ نشاندهندهٔ نُرم روی R^n است درصورتی که $\|x\|_C$ بیانگر نُرم روی χ می‌باشد.

1. Integral equation

علاوه بر این B گویی در R^n و S گویی در χ است. بنابه تعریف، P نگاشتی از χ به χ است، برای نشان دادن این نکته که P نگاشتی از S به S نیز هست، می‌توان نوشت:

$$(Px)(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds = \int_{t_0}^{t} [f(s,x(s)) - f(s,x_0) + f(s,x_0)]\,ds$$

از پیوستهٔ قطعه‌ای بودن f، نتیجه می‌شود $f(t,x_0)$ در بازهٔ $[t_0,t_1]$ کراندار است. فرض کنید داشته باشیم:

$$h = \max_{t\in[t_0,t_1]} \|f(t,x_0)\|$$

در این صورت با استفاده از شرط لیپ شیتز، رابطهٔ (۲ ـ ۲)، و این نکته که برای هر $x\in S$ می‌توان نوشت:

$$\|x(t) - x_0\| \le r,\ \forall t\in[t_0,t_0+\delta]$$

نتیجه می‌شود:

$$\|(Px)(t) - x_0\| \le \int_{t_0}^{t} [\,\|f(s,x(s)) - f(s,x_0)\| + \|f(s,x_0)\|\,]\,ds$$

$$\le \int_{t_0}^{t} [L\|x(s) - x_0\| + h]\,ds \le \int_{t_0}^{t} (Lr + h)\,ds$$

$$= (t - t_0)(Lr + h) \le \delta\,(Lr + h)$$

و:

$$\|Px - x_0\|_C = \max_{t\in[t_0,t_0+\delta]} \|(Px)(t) - x_0\| \le \delta\,(Lr + h)$$

بنابراین انتخاب $\delta \le r/(Lr+h)$ تضمین می‌کند P نگاشتی از S به S است. برای اثبات اینکه P نگاشتی انقباضی روی S می‌باشد، با فرض $x,y\in S$ داریم:

$$\|(Px)(t) - (Py)(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} [f(s,x(s)) - f(s,y(s))]\,ds \right\|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\|\, ds$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} L\|x(s) - y(s)\|\, ds \leq \int_{t_0}^{t} ds\, L\|x - y\|_C$$

بنابراین: برای: $\delta \leq \frac{\rho}{L}$ $\|Px - Py\|_C \leq L\delta\ \|x - y\|_C \leq \rho\|x - y\|_C$

لذا با انتخاب $\rho < 1$ و $\delta \leq \rho / L$، مطمئن هستیم P نگاشتی انقباضی روی S است. بااستفاده از قضیهٔ نگاشت انقباض، می‌توان گفت اگر δ چنان انتخاب شود که در نامساوی ذیل صدق کند:

$$\delta \leq min\left\{t_1 - t_0\ ,\ \frac{r}{Lr + h}, \frac{\rho}{L}\right\}, \quad \text{برای: } \rho < 1 \qquad (۲ - ۷)$$

آنگاه معادلهٔ (۲ ـ ۵) دارای پاسخ یکتایی در S می‌باشد. اما این پایان برهان نیست زیرا علاقه‌مند به بررسی یکتایی پاسخ در میان همهٔ توابع پیوستهٔ $x(t)$ (یعنی یکتایی در χ) هستیم. بدین لحاظ باید نشان داد هریک از پاسخهای معادلهٔ (۲ ـ ۵) موجود در χ، در S واقع است. چون $x(t_0) = x_0$ درون گوی B است، لذا هر پاسخ پیوسته‌ای (مانند $x(t)$) نیز در بازهٔ زمانی مشخصی درون B خواهد بود، حال فرض کنید $x(t)$ بخواهد از گوی خارج شود و $t_0 + \mu$ نخستین لحظه‌ای باشد که $x(t)$ با مرز B برخورد می‌کند؛ در این صورت می‌توان نوشت:

$$\|x(t_0 + \mu) - x_0\| = r$$

از سوی دیگر برای هر $t \leq t_0 + \mu$ داریم:

$$\|x(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^{t} [\,\|f(s,x(s)) - f(s,x_0)\| + \|f(s,x_0)\|\,]\, ds$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} [L\|x(s) - x_0\| + h]\, ds \leq \int_{t_0}^{t} (Lr + h)\, ds$$

بنابراین:

$$r = \|x(t_0 + \mu) - x_0\| \leq (Lr + h)_\mu \Rightarrow \mu \geq \frac{r}{Lr + h} \geq \delta$$

و این بدان معناست که $x(t)$ نمی‌تواند در بازهٔ زمانی $[t_0, t_0 + \delta]$ از مجموعهٔ B خارج شود و

لذا هریک از پاسخهای موجود در χ در S نیز واقع است. درنتیجه یکتایی پاسخ در S به معنای یکتایی در χ نیز هست. □

فرض اصلی در اثبات قضیهٔ ۲ ـ ۲ ارضای شرط لیپ شیتز، رابطهٔ (۲ ـ ۲)، است. تابعی که در شرط (۲ ـ ۲) صدق کند موسوم به *لیپ شیتز* نسبت به x است و ثابت مثبت L نیز *ثابت لیپ شیتز* نامیده می‌شود. علاوه بر این برای بیان اینکه در چه قلمرویی شرط لیپ شیتز صادق است از دو مفهوم *لیپ شیتز محلی*[1] و *لیپ شیتز جامع*[2] استفاده می‌گردد. ابتدا این دو واژه را برای حالتی که f تنها تابعی از x است تعریف می‌کنیم: تابع $f(x)$ را *لیپ شیتز محلی* بر قلمرو $D \subset R^n$ (مجموعهٔ باز و همبند) گویند اگر هر نقطه در D دارای همسایگی D_0 باشد به طوری که f شرط لیپ شیتز (۲ ـ ۲) را برای تمامی نقاط D_0 و ثابت لیپ شیتز L_0 برآورده کند. تابع f را *لیپ شیتز* روی مجموعهٔ W نامند اگر با همان مقدار ثابت لیپ شیتزِ L، رابطهٔ (۲ ـ ۲) را برای تمامی نقاط W برآورده سازد. نکتهٔ مهم اینکه یک تابع لیپ شیتز محلی بر قلمرو D، الزاماً بر D لیپ شیتز نیست زیرا شرط لیپ شیتز (با همان مقدار ثابت L) به طور یکنواخت قابل تعمیم به بقیهٔ نقاط D نیست؛ اما یک تابع لیپ شیتز محلی روی قلمرو D، بر هر زیر مجموعهٔ فشردهٔ D (که بسته و کراندار باشد) نیز لیپ شیتز است (تمرین ۲ ـ ۱۶). تابع $f(x)$ را *لیپ شیتز جامع* گوییم اگر روی R^n لیپ شیتز باشد. همین تعاریف را می‌توان برای تابع $f(t,x)$ نیز به کار برد، مشروط بر اینکه شرط لیپ شیتز به طور یکنواخت برای همهٔ t های موجود در بازهٔ زمانی مشخصی برقرار باشد. برای مثال تابع $f(t,x)$ نسبت به x روی مجموعهٔ $[a,b] \times D \subset R \times R^n$ لیپ شیتز محلی است اگر برای هر نقطهٔ $x \in D$، همسایگی D_0 چنان وجود داشته باشد که f روی $[a,b] \times D_0$ با مقدار ثابت لیپ شیتزِ L_0 در شرط (۲ ـ ۲) صدق کند. ضمناً تابع $f(t,x)$ را نسبت به x روی مجموعهٔ $[t_0, \infty) \times D$ لیپ شیتز محلی گویند اگر f روی هر بازهٔ فشرده‌ای مانند $[a,b] \subset [t_0, \infty)$ نسبت به x لیپ شیتز محلی باشد. علاوه بر این $f(t,x)$ نسبت به x روی فاصلهٔ $[a,b] \times W$ لیپ شیتز است اگر با همان مقدار ثابت لیپ شیتزِ L، رابطهٔ (۲ ـ ۲) را برای همهٔ مقادیر $t \in [a,b]$ و تمامی نقاط W برآورده کند.

1. Locally Lipschitz 2. Globally Lipschitz

هنگامی که f به شکل $f: R \longrightarrow R$ باشد، آنگاه می‌توان شرط لیپ شیتز را به شکل زیر نوشت:

$$\frac{f(y) - f(x)}{|y - x|} \leq L$$

که بدین معناست که روی نمودار $f(x)$ نسبت به x، قدر مطلق شیب خط راست گذرنده از هر دو نقطهٔ اختیاری تابع $f(x)$ از مقدار L بیشتر نیست؛ بنابراین هر تابعی که در برخی نقاط دارای شیب بینهایت باشد، در آن نقطه لیپ شیتز محلی نیست. برای مثال توابع ناپیوسته در نقاط ناپیوستگی‌شان، لیپ شیتز محلی نیستند. به عنوان مثالی دیگر، تابع $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$، که در بخش ۲ ـ ۳ به کار رفت، در نقطهٔ $x = 0$ لیپ شیتز محلی نمی‌باشد زیرا با حرکت x به سمت صفر، $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ به‌سمت بینهایت میل می‌کند. از سوی دیگر اگر $|f'(x)|$ در بازهٔ مورد نظر از مقدار k کوچکتر باشد، می‌توان گفت تابع $f(x)$ در آن بازه با ثابت $L = k$، لیپ شیتز محلی است. باتوجه به لم ذیل می‌توان این نکته را برای توابع با مقدار برداری نیز به کار برد:

لم ۲ ـ ۲ *فرض کنید تابع* $f: [a, b] \times D \longrightarrow R^m$ *در قلمرو* $D \subset R^n$، *پیوسته و* $[\partial f / \partial x]$ نیز موجود و بر $[a, b] \times D$ پیوسته باشد؛ در این صورت اگر برای زیر مجموعهٔ محدّب $W \subset D$، مقدار ثابت $L \geq 0$ چنان وجود داشته باشد که روی $[a, b] \times W$ داشته باشیم:

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\| \leq L$$

آنگاه به ازای جمیع مقادیر $t \in [a, b]$، $x \in W$ و $y \in W$ داریم:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\| \qquad \Delta$$

برهان: فرض کنید $\|.\|_p$ نشاندهندهٔ یکی از نُرمهای متناظر با $p \in [1, \infty]$ باشد، در این صورت $q \in [1, \infty]$ را نیز طبق رابطهٔ $1/p + 1/q = 1$ تعریف می‌کنیم. علاوه بر این مقادیر t، x و y را بترتیب متعلق به $[a, b]$، W و W در نظر می‌گیریم. اینک تابع $\gamma(s) = (1 - s)x + sy$ را به ازای جمیع مقادیر $s \in R$ چنان تعریف می‌کنیم که $\gamma(s) \in D$

باشد. چون $W \subset D$ مجموعه‌ای محدّب است لذا برای مقادیر $0 \leq s \leq 1$ داریم: $\gamma(s) \in W$.
حال مقدار $z \in R^m$ را چنان برمی‌گزینیم که داشته باشیم*:

$$\|z\|_q = 1 \quad \text{و} \quad z^T[f(t, y) - f(t, x)] = \|f(t, y) - f(t, x)\|_p$$

فرض کنید $g(s) = z^T f(t, \gamma(s))$ باشد، در این صورت چون $g(s)$ تابعی با مقدارحقیقی‌است که بر فاصله‌ای باز شامل $[0, 1]$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر می‌باشد، باتوجه به قضیهٔ مقدار میانگین، مقداری مانند $s_1 \in (0, 1)$ چنان وجود دارد که:

$$g(1) - g(0) = g'(s_1)$$

حال با محاسبهٔ g در نقاط $s = 0$ و $s = 1$ و محاسبهٔ $g'(s)$ (با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای) داریم:

$$z^T[f(t, y) - f(t, x)] = z^T \frac{\partial f}{\partial x}(t, \gamma(s_1))\,(y - x)$$

$$\|f(t, y) - f(t, x)\|_p \leq \|z\|_q \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, \gamma(s_1)) \right\|_p \|y - x\|_p \leq L \|y - x\|_p$$

که در آن از نامساوی هولدر $|z^T w| \leq \|z\|_q \|w\|_p$ استفاده شده است. □

برهان این لم نشان می‌دهد چگونه می‌توان با استفاده از $[\partial f / \partial x]$، ثابت لیپ شیتز را محاسبه کرد.

ویژگی لیپ شیتز تابع، قویتر از پیوستگی تابع است، بسادگی می‌توان نشان داد اگر تابع $f(x)$ بر W لیپ شیتز باشد، آنگاه $f(x)$ بر W پیوستهٔ یکنواخت است (تمرین ۲ ـ ۱۷)، اما عکس این مطلب صحیح نیست زیرا مثلاً تابع $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ در نقطهٔ $x = 0$ پیوسته است اما در این نقطه لیپ شیتز محلی نمی‌باشد؛ لیکن همچنانکه در لم زیر آمده ویژگی لیپ شیتز نسبت به پیوسته ـ مشتق‌پذیری ضعیفتر است.

لم ۲ ـ ۳ *فرض کنید* $f(t, x)$ *روی* $[a, b] \times D$ *و به ازای قلمرو* $D \subset R^n$ *پیوسته باشد. در این صورت اگر* $[\partial f / \partial x]$ *موجود و روی* $[a, b] \times D$ *پیوسته باشد، آنگاه* f *نسبت به* x *و*

* چنین zی همواره وجود دارد؛ تمرین ۲ ـ ۱۹ را ملاحظه کنید.

روی $[a, b] \times D$ لیپ شیتز محلی است. ◇

برهان: به ازای $x_0 \in D$، r را آنقدر کوچک انتخاب می‌کنیم که گوی $D_0 = \{x \in R^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$ در D قرار گیرد. مجموعهٔ D_0 محدّب و فشرده است. از پیوستگی نتیجه می‌شود $[\partial f / \partial x]$ روی $[a, b] \times D$ کراندار است. فرض کنید L_0 کرانی برای $\|\partial f / \partial x\|$ روی $[a, b] \times D$ باشد، در این صورت با توجه به لم ۲ ـ ۲، f روی $[a, b] \times D_0$، لیپ شیتز (با ثابت لیپ شیتز L_0) می‌باشد. □

این مسأله را به خواننده وامی‌گذاریم (تمرین ۲ ـ ۲۰) که با تعمیم برهان لم ۲ ـ ۲، لم ذیل را اثبات کند:

لم ۲ ـ ۴ *فرض کنید $f(t, x)$ روی $[a, b] \times R^n$ پیوسته و $[\partial f / \partial x]$ موجود و روی $[a, b] \times R^n$ پیوسته باشد، در این صورت f نسبت به x روی $[a, b] \times R^n$ لیپ شیتز جامع خواهد بود اگر و تنها اگر $[\partial f / \partial x]$ روی $[a, b] \times R^n$ کراندار یکنواخت باشد.* ◇

مثال ۲ ـ ۲ تابع:

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_1 x_2 \\ x_2 - x_1 x_2 \end{bmatrix}$$

بر روی R^2 پیوسته ـ مشتق‌پذیر و در نتیجه روی R^2 لیپ شیتز محلی است اما لیپ شیتز جامع نیست زیرا روی R^2 کراندار یکنواخت نمی‌باشد. f بر روی هر زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از R^2 لیپ شیتز است. حال فرض کنید بخواهیم ثابت لیپ شیتز را روی مجموعهٔ محدّب ذیل بیابیم:

$$W = \{x \in R^2 \mid |x_1| \leq a_1, |x_2| \leq a_2\}$$

ماتریس ژاکوبی $[\partial f / \partial x]$ عبارت است از:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \begin{bmatrix} -1 + x_2 & x_1 \\ -x_2 & 1 - x_1 \end{bmatrix}$$

با استفاده از $\|.\|_\infty$ برای بردارهای R^2 و نُرم ماتریسی القا شده برای ماتریسها داریم:

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\| = max \{|-1 + x_2| + |x_1|, |x_2| + |1 - x_1|\}$$

تمامی نقاط W در روابط ذیل صدق می‌کند:

$$|-1 + x_2| + |x_1| \leq 1 + a_2 + a_1$$

$$|x_2| + |1 - x_1| \leq a_2 + 1 + a_1$$

بنابراین:

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_\infty \leq 1 + a_1 + a_2$$

و ثابت لیپ شیتز را نیز می‌توان به شکل $L = 1 + a_1 + a_2$ تعریف نمود. Δ

مثال ۲ ـ ۳ تابع ذیل را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -sat\,(x_1 + x_2) \end{bmatrix}$$

که تابع $sat(\cdot)$ با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$sat(y) = \begin{cases} -1, & y < -1 \\ y, & |y| \leq 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$

تابع f در R^2 پیوسته ـ مشتق‌پذیر نیست ولی می‌خواهیم ویژگی لیپ شیتز آن را با بررسی $f(x) - f(y)$ مطالعه کنیم ـ با استفاده از $\|.\|_2$ برای بردارهای R^2 و با توجه به این نکته که تابع اشباع[1]، $sat(\cdot)$، در نامساوی زیر صدق می‌کند:

1. Saturation function

$$|sat(\eta) - sat(\xi)| \leq |\eta - \xi|$$

داریم:

$$\|f(x) - f(y)\|_2^2 \leq (x_2 - y_2)^2 + (x_1 + x_2 - y_1 - y_2)^2$$

$$\leq (x_1 - y_1)^2 + 2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) + 2(x_2 - y_2)^2$$

به کمک نامساوی:

$$a^2 + 2ab + b^2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \leq \lambda_{max} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\} \times \left\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\|_2^2$$

نتیجه می‌شود:

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \leq 1/618 \; \|x - y\|_2, \quad \forall x, y \in R^2$$

در اینجا از این ویژگی ماتریسهای متقارن نیمه معیّن مثبت[1] استفاده کرده‌ایم که طبق آن به ازای جمیع مقادیر $x \in R^n$ می‌توان نوشت:

$$x^T P x \leq \lambda_{max}(P) x^T x$$

که $\lambda_{max}(\cdot)$، مقدار ویژهٔ بیشینهٔ ماتریس است. البته با بهره‌جویی از نامساوی محافظه‌کارانهٔ[2] زیر:

$$a^2 + 2ab + 2b^2 \leq 2a^2 + 3b^2 \leq 3(a^2 + b^2)$$

به ثابت لیپ شیتز محافظه‌کارانهٔ (بزرگتری) می‌رسیم که برابر با $L = \sqrt{3}$ است. Δ

در یکی از این دو مثال از $\|\cdot\|_\infty$ و در دیگری از $\|\cdot\|_2$ استفاده کردیم. باتوجه به هم‌ارزی نُرمها، انتخاب نُرم اثری بر ویژگیهای لیپ شیتز تابع ندارد و فقط بر مقدار ثابت لیپ شیتز اثر می‌گذارد (تمرین ۲ ـ ۲۱). مثال ۲ ـ ۳ این حقیقت را نشان می‌دهد که شرط لیپ شیتز (۲ ـ ۲)، ثابت لیپ شیتز (L) را به طور یکتا مشخص نمی‌کند، زیرا اگر عدد مثبتی مانند L در شرط (۲ ـ ۲) صدق کند آنگاه تمامی اعداد مثبت بزرگتر از L نیز این نامساوی را برآورده می‌سازد؛ البته می‌توان با انتخاب کوچکترین مقدار ثابتی که در شرط لیپ شیتز صدق کند از بروز این عدم یکتایی احتراز نمود اما بندرت نیازی به استفاده از این محدودیت می‌باشد.

1. Positive semidefinite symmetric matrix
2. Conservative

قضیهٔ ۲ ـ ۲ قضیه‌ای محلی است زیرا وجود و یکتایی پاسخ را فقط بر بازهٔ $[t_0, t_0 + \delta]$ (که δ نیز مقدار بسیار کوچکی است) تضمین می‌کند؛ به بیان دیگر بر مقدار δ کنترلی نداریم و از این‌رو نسبت به وجود و یکتایی پاسخ بر بازهٔ $[t_0, t_1]$ اطمینان نداریم؛ اما می‌توان با اعمال مکرر قضیهٔ محلّی، بازهٔ وجود پاسخ را گسترش داد. برای این کار با آغاز از لحظهٔ t_0 و با حالت اولیهٔ $x(t_0) = x_0$، قضیهٔ ۲ ـ ۲ می‌گوید ثابت مثبت δ (وابسته به x_0) چنان وجود دارد که معادلهٔ حالت (۲ ـ ۱) دارای پاسخ یکتایی در بازهٔ $[t_0, t_0 + \delta]$ است، حال با در نظر گرفتن $t_0 + \delta$ به عنوان لحظهٔ اولیهٔ جدید و $x(t_0 + \delta)$ به عنوان حالت اولیهٔ جدید، می‌توان با اعمال مجدد قضیهٔ ۲ ـ ۲ به وجود پاسخ یکتایی خارج از لحظهٔ $t_0 + \delta$ رسید. چنانچه تمامی شرایط قضیه روی بازهٔ $[t_0 + \delta, x(t_0 + \delta)]$ برآورده شود آنگاه می‌توان مقدار $\delta > 0$ را چنان یافت که معادله دارای پاسخ یکتایی در بازهٔ $[t_0 + \delta, t_0 + \delta + \delta_2]$ باشد به طوری که از نقطهٔ $[t_0 + \delta, x(t_0 + \delta)]$ نیز بگذرد. سپس پاسخهای حاصل را در بازه‌های $[t_0, t_0 + \delta]$ و $[t_0 + \delta, t_0 + \delta + \delta_2]$ در کنار یکدیگر قرار می‌دهیم تا به وجود پاسخ یکتایی در بازهٔ $[t_0, t_0 + \delta + \delta_2]$ برسیم. می‌توان از این روش برای توسعهٔ حوزهٔ پاسخ بهره برد، لیکن در حالت کلّی نمی‌توان بازهٔ وجود جواب را تا بینهایت توسیع داد زیرا شروط معادلهٔ ۲ ـ ۲ دیگر برقرار نخواهد بود. به تعبیر دیگر بازهٔ بیشینه‌ای مانند $[t_0, T]$ وجود دارد که با آغاز از $[t_0, x_0]$، پاسخ یکتایی برای معادلهٔ (۲ ـ ۱) در آن بازه وجود خواهد داشت*. در حالت کلّی ممکن است T از t_1 کوچکتر باشد، در این حالت با شرط $t \longrightarrow T$، پاسخ معادله از هریک از مجموعه‌های فشرده‌ای، که تابع f روی آنها نسبت به x لیپ شیتز محلی است، دور می‌شود (تمرین ۲ ـ ۳۳).

مثال ۲ ـ ۴ سیستم عددی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = -x^2 \qquad , \qquad x(0) = -1$$

تابع $f(x) = -x^2$ به ازای جمیع مقادیر $x \in R$، لیپ شیتز محلی است، بنابراین روی هر زیر-

* برای اثبات این مطلب [۷۰، بخش ۵ ـ ۸] یا [۱۱۸، بخش ۲ ـ ۳] را ملاحظه کنید.

مجموعهٔ فشردهٔ R نیز لیپ شیتز می‌باشد. پاسخ یکتای سیستم به شکل: $x(t) = ۱ / (t - ۱)$ در بازهٔ $(۰ , ۱]$ وجود دارد و وقتی که t به سمت یک میل می‌کند، $x(t)$ از هر مجموعهٔ فشرده‌ای دور می‌گردد. Δ

عبارت «زمان رهایی محدود» برای توصیف پدیده‌ای به کار می‌رود که در آن مسیرهای حالت در زمان محدودی به سمت بینهایت سوق می‌یابد. در مثال ۲ ـ ۴ می‌گوییم مسیر حالت، دارای زمان رهایی محدودی در $t = ۱$ است.

با توجه به بحثِ قبل از مثال ۲ ـ ۴ ممکن است این پرسش مطرح شود: چه زمانی مطمئن می‌شویم پاسخ می‌تواند به صورت تعریف نشده بزرگ شود؟ یکی از روشهای پاسخ به این پرسش بیان شرطهای اضافی است که تحت آن، پاسخ $x(t)$ همواره درون مجموعه‌ای باقی بماند که نسبت به x لیپ شیتز یکنواخت است. این شرط در قضیهٔ بعد بدین ترتیب بیان شده که f باید شرط لیپ شیتز جامع را برآورده کند. این قضیه وجود پاسخ یکتا را در بازهٔ $[t_۰ , t_۱]$ بیان می‌کند که $t_۱$ ممکن است بسیار بزرگ باشد.

قضیهٔ ۲ ـ ۳ (وجود و یکتایی جامع) *اگر $f(t,x)$ نسبت به t پیوستهٔ قطعه‌ای باشد و در روابط ذیل نیز صدق کند:*

$$\forall x, y \le R^n , \forall t \in [t_۰ , t_۱] , \ \| f(t,x) - f(t,y) \| \le L \ \| x - y \|$$

$$\| f(t, x_۰) \| \le h$$

آنگاه معادلهٔ حالت:

$$\dot{x} = f(t,x) \quad , \quad x(t_۰) = x_۰$$

دارای پاسخی یکتا بر بازهٔ $[t_۰ , t_۱]$ است. $\Diamond$

برهان: نکتهٔ کلیدی در اثبات این قضیه آن است که می‌توان ثابت δی قضیهٔ ۲ ـ ۲ را مستقل از حالت اولیهٔ $x_۰$ در نظر گرفت. با توجه به رابطهٔ (۲ ـ ۷) ملاحظه می‌شود وابستگی δ به حالت اولیه به دلیل وجود ثابت h در جملهٔ $r/(Lr + h)$ می‌باشد. چون در این حالت، شرط لیپ

شیتز به طور جامع برآورده می‌شود لذا می‌توان مقدار r را به هر میزان دلخواه بزرگ انتخاب کرد. بنابراین برای هر مقدار محدود h، می‌توان مقدار r را آنقدر بزرگ برگزید که داشته باشیم: $r / (Lr + h) > \rho / L$؛ در این صورت رابطهٔ (۲ ـ ۷) به شرط زیر تقلیل می‌یابد:

$$\text{برای: } \rho > ۱ \ , \quad \delta \le min \left\{ t_۱ - t_۰ , \frac{\rho}{L} \right\}$$

اگر $t_۱ - t_۰ \le \rho / L$ باشد، δ را برابر با $t_۱ - t_۰$ انتخاب می‌کنیم تا شرط برآورده شود، در بقیهٔ حالتها نیز δ را چنان برمی‌گزینیم که داشته باشیم: $\delta \le \rho / L$. اکنون بازهٔ $[t_۰ , t_۱]$ را به زیر بازه‌های معدودی به طول $\delta \le \rho / L$ تقسیم و قضیهٔ ۲ ـ ۲ را به طور تکراری به آنها اعمال می‌کنیم تا به شرایط مورد نظر دست یابیم*. $\square$

مثال ۲ ـ ۵ سیستم خطی ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = A(t)x + g(t) = f(t,x)$$

که توابع $A(\cdot)$ و $g(\cdot)$ نسبت به t پیوستهٔ قطعه‌ای هستند. علاوه بر این فرض می‌شود بر هر بازهٔ اختیاری از زمان مانند $[t_۰ , t_۱]$، درایه‌های $A(t)$ و $g(t)$ کراندارند در این صورت می‌توان نوشت: $\| A(t) \| \le a$ و $\| g(t) \| \le b$ که $\| g \|$ هر نُرمی روی R^n و $\| A \|$ نیز نُرم القا شدهٔ ماتریسی است. با این ملاحظات شرایط قضیهٔ ۲ ـ ۳ برآورده می‌شود، زیرا:

$$\| f(t,x) - f(t,y) \| = \| A(t)(x - y) \| \le \| A(t) \| \ \| x - y \|$$

$$\le a \ \| x - y \| \ , \quad \forall x, y \in R^n , \forall t \in [t_۰ , t_۱]$$

و:

$$\| f(t, x_۰) \| = \| A(t)x_۰ + g(t) \| \le a \| x_۰ \| + b$$

$$\le h \ , \quad \forall t \in [t_۰ , t_۱] \text{ و } x_۰ \text{ محدود و برای هر}$$

بنابراین طبق قضیهٔ ۲ ـ ۳، سیستم خطی دارای پاسخ یکتایی در بازهٔ $[t_۰ , t_۱]$ می‌باشد. علاوه

* شایان ذکر اینکه باید حالت اولیهٔ هر زیر بازه (مثلاً $x_۱$) در نامساوی $\| f(t, x_۱) \| \le h_۱$ صدق کند، که $h_۱$ مقدار محدودی است.

بر این چون می‌توان t_1 را به هر اندازه بزرگ انتخاب کرد، لذا اگر به ازای جمیع مقادیر $t \geq t_1$، $A(t)$ و $g(t)$ پیوستهٔ قطعه‌ای باشند، آنگاه سیستم به ازای هر $t \geq t_1$، دارای پاسخی یکتاست. بنابراین چنین سیستمی نمی‌تواند زمان رهایی محدود داشته باشد. Δ

برای سیستم خطی مثال ۲ ـ ۵، برآوردن شرط لیپ شیتز جامع یکی از مستلزمات اصلی است اما در حالت کلّی برای سیستمهای غیرخطی چنین نیست. لازم است میان ملزومات لیپ شیتز محلی (مربوط به قضیهٔ ۲ ـ ۲) و لیپ شیتز جامع (مربوط به قضیهٔ ۲ ـ ۳) تفاوت قائل شویم زیرا ویژگی لیپ شیتز محلی یک تابع، در اصل به معنای هموار بودن آن است که عملاً از شرط پیوسته ـ مشتق‌پذیر بودن تابع به دست می‌آید. بجز برای غیرخطی گری‌های ناپیوسته؛ که نوعی ایدئال‌سازی از پدیده‌های فیزیکی است؛ در بقیهٔ موارد انتظار معقول آن است که سیستم فیزیکی مدلی داشته باشد که توابع سمت راست آن، لیپ شیتز محلی باشد. توابع پیوسته‌ای که لیپ شیتز محلی نباشند بسیار استثنایی‌اند و بندرت در عمل با آنها مواجه می‌شویم. اما ویژگی لیپ شیتز جامع، بسیار محدودکننده است و مدلهای بسیاری از سیستمها نمی‌توانند این شرط را برآورده سازند. برای مثال بسادگی می‌توان توابع هموار معنی‌داری ساخت که شرط لیپ شیتز جامع را برآورده نکنند اما پاسخ جامع یکتایی داشته باشند، این موضوع نشاندهندهٔ خصلت محافظه‌کاری قضیهٔ ۲ ـ ۳ است.

مثال ۲ ـ ۶ سیستم عددی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = -x^3 = f(x)$$

این تابع شرط لیپ شیتز جامع را برآورده نمی‌کند، زیرا مقدار ژاکوبیِ $\partial f / \partial x = -3x^2$، کراندار جامع نیست. به رغم این موضوع، معادله برای هر حالت اولیهٔ $x(t_0) = x_0$، پاسخ یکتایی به شکل زیر دارد که به ازای جمیع مقادیر $t \geq t_0$ خوش تعریف[1] است:

$$x(t) = sign(x_0) \sqrt{\frac{x_0^2}{1 + 2x_0^2(t - t_0)}} \qquad \Delta$$

1. Well - defined

باتوجه به خصلت محافظه‌کارانهٔ شرط لیپ شیتز جامع، بسیار سودمند است که بتوان قضیه‌ای برای وجود و یکتایی جامع بیان کرد که تنها لازمهٔ آن لیپ شیتز جامع بودن تابع باشد. قضیهٔ ذیل این موضوع را بیان می‌کند اما بهای پرداختی، داشتن اطلاعات بیشتری از پاسخ سیستم است.

قضیهٔ ۲ ـ ۴ *فرض کنید تابع $f(t, x)$ به ازای جمیع مقادیر $t \geq t_1$، نسبت به t پیوستهٔ قطعه‌ای و به ازای جمیع مقادیر x در قلمرو $D \subset R^m$، نسبت به x لیپ شیتز محلی باشد. ضمناً فرض کنید W زیرمجموعهٔ فشردهٔ D و $x_0 \in W$ باشد و بدانیم هر پاسخ معادلهٔ:*

$$\dot{x} = f(t, x) \quad , \quad x(t_0) = x_0$$

به طور کامل در W قرار دارد. در این صورت پاسخ یکتایی وجود دارد که به ازای جمیع مقادیر $t \geq t_1$، قابل تعریف می‌باشد. $\Diamond$

برهان: با یادآوری بحث مربوط به تعمیم پاسخ معادله، قبل از مثال ۲ ـ ۴، و با استفاده از قضیهٔ ۲ ـ ۲ می‌توان نتیجه گرفت معادله دارای پاسخ محلی یکتایی در بازهٔ $[t_0, t_0 + \delta]$ می‌باشد. حال فرض کنید $[t_0, T)$ بزرگترین بازهٔ وجود پاسخ باشد، در این صورت باید نشان دهیم: $T = \infty$. با توجه به این نکته که اگر T مقدار محدودی باشد، باید پاسخ معادله از هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ D دور شود (تمرین ۲ ـ ۳۳) و چون بنا به فرض، پاسخ هیچگاه از مجموعهٔ فشردهٔ W خارج نمی‌شود، لذا: $T = \infty$. $\square$

نکتهٔ مهم در اعمال قضیهٔ ۲ ـ ۴، بررسی این نکته است که بدون یافتن حل واقعی معادلهٔ دیفرانسیل، مطمئن شویم همهٔ پاسخها درون مجموعه‌ای فشرده قرار می‌گیرد. در فصل سوم با استفاده از همین موضوع خواهیم دید روش لیاپانوف چه ارزشی در مطالعهٔ پایداری دارد. اما اینک با بیان مثالی ساده، چگونگی اعمال این قضیه را نشان می‌دهیم:

مثال ۲ ـ ۷ دیگر بار سیستم مثال ۲ ـ ۶ را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = -x^3 = f(x)$$

تابع $f(x)$ روی R، لیپ شیتز محلی است. اگر در هر لحظه از زمان $x(t)$ مثبت باشد آنگاه تابع مشتق $\dot{x}(t)$ همواره منفی خواهد بود. به طور مشابه اگر $x(t)$ منفی باشد آنگاه $\dot{x}(t)$ مثبت است؛ بنابراین با آغاز از هر شرط اولیهٔ $x(0) = a$، پاسخ نمی‌تواند مجموعهٔ فشردهٔ $\{x \in R \mid |x| \leq |\alpha|\}$ را ترک کند، لذا بدون محاسبهٔ پاسخ و با توجه به قضیهٔ ۲ ـ ۴ نتیجه می‌شود معادله دارای پاسخ یکتایی برای تمامی مقادیر $t \geq 0$ می‌باشد. Δ

۲ ـ ۳ وابستگی پیوسته به شرایط اولیه و پارامترها

چنانچه پاسخ معادلهٔ حالت (۲ ـ ۱) مدّنظر باشد، می‌توان گفت این پاسخ به طور پیوسته به حالت اولیهٔ x_0، زمان اولیهٔ t_0 و تابع سمت راست، $f(t,x)$، بستگی دارد. با توجه به عبارت انتگرالی (۲ ـ ۵)، وابستگی پیوسته به زمان اولیه کاملاً مشهود است؛ از این‌رو بررسی آن را به عنوان تمرین به خواننده وامی‌گذاریم (تمرین ۲ ـ ۴۴) و همّ خود را بر بررسی وابستگی پیوستهٔ پاسخ به x_0 و تابع f معطوف می‌کنیم. فرض کنید $y(t)$ یکی از پاسخهای معادلهٔ (۲ ـ ۱) باشد که از نقطهٔ $y(t_0) = y_0$ آغاز می‌شود و در بازهٔ فشردهٔ زمانیِ $[t_0, t_1]$ تعریف شده است. در این حالت اگر پاسخهای آغاز شده از نقاط نزدیک به y_0، در همان بازهٔ زمانی تعریف شوند و در همین بازه نزدیک به هم باقی بمانند آنگاه گوییم پاسخ به طور پیوسته به y_0 وابسته است. این عبارت را می‌توان به کمک آرگومانهای $\varepsilon - \delta$ به صورت دقیقتری بیان کرد: برای هر $\varepsilon > 0$، مقدار $\delta > 0$ چنان وجود دارد که برای تمامی z_0های متعلق به گوی $\{x \in R^n \mid \|x - y_0\| < \delta\}$، معادلهٔ $\dot{x} = f(t,x)$ دارای پاسخ یکتایی مانند $z(t)$ در بازهٔ $[t_0, t_1]$ و با شرط $z(t_0) = z_0$ باشد به طوری که برای تمامی مقادیر $t \in [t_0, t_1]$، نامساوی $\|z(t) - y(t)\| < \varepsilon$ برآورده گردد. وابستگی پیوسته نسبت به تابع سمت راست، f، نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود اما برای بیان دقیق آن لازم است از برخی مفاهیم ریاضی مربوط به آشفتگی f استفاده کنیم. بدین منظور تابع f را با دنباله‌ای از توابع f_m جایگزین می‌کنیم که با میل m به‌سمت بینهایت، f_m نیز به‌طور یکنواخت به‌سمت f همگرا شود. برای هریک از توابع f_m، پاسخ معادلهٔ $\dot{x} = f_m(t,x)$ (با شرط: $x(t_0) = x_0$) را با $x_m(t)$ نشان می‌دهیم. در این صورت اگر با میل m به‌سمت بینهایت ($m \longrightarrow \infty$)، $x_m(t)$ به‌سمت $x(t)$ میل کند، گوییم پاسخ معادله به‌طور پیوسته به تابع سمت‌راست، f، وابسته است. این روش کمی پیچیده است و به همین

دلیل در این کتاب آن را پی نمی‌گیریم*. در روش دیگر که ساده‌تر (ولی کمی محدودکننده‌تر) است، فرض می‌شود f به طور پیوسته به مجموعه‌ای از پارامترهای ثابت وابسته است؛ یعنی: $f = f(t,x,\lambda)$ که: $\lambda \in R^p$. این پارامترهای ثابت می‌توانند بیانگر پارامترهای فیزیکی سیستم باشند که در این صورت بررسی آشفتگی در این پارامترها تعبیری از خطاهای مدلسازی و یا تغییرات مقدار پارامترها در اثر گذشت زمان است. فرض کنید $x(t,\lambda_0)$، پاسخ معادلهٔ $\dot{x} = f(t,x,\lambda_0)$ بر بازهٔ $[t_0, t_1]$ (و با شرط $x(t_0,\lambda_0)$) باشد. در این صورت گوییم پاسخ به‌طور پیوسته به λ وابسته است اگر برای هر $\varepsilon > 0$، مقدار $\delta > 0$ چنان وجود داشته باشد که به‌ازای جمیع مقادیر λ متعلق به گوی $\{\lambda \in R^p \mid \|\lambda - \lambda_0\| < \delta\}$، معادلهٔ $\dot{x} = f(t,x,\lambda)$ دارای پاسخی یکتا به‌شکل $x(t,\lambda)$ بربازهٔ $[t_0, t_1]$ (و با شرط: $x(t_0,\lambda) = x_0$) باشد به‌طوری که نامساوی $\|x(t,\lambda) - x(t,\lambda_0)\| < \varepsilon$ به ازای جمیع مقادیر $t \in [t_0, t_1]$ برقرار گردد.

می‌توان وابستگی پیوسته نسبت به حالتهای اولیه و نیز وابستگی پیوسته نسبت به پارامترها را به طور همزمان بررسی کرد. این موضوع را با نتیجهٔ ساده‌ای آغاز می‌کنیم که با کنار گذاشتن مسألهٔ وجود و یکتایی پاسخ، عمده توجه خود را بر نزدیک بودن[1] پاسخها معطوف می‌کند.

قضیهٔ ۲ ـ ۵ *فرض کنید تابع $f(t,x)$ نسبت به t پیوستهٔ قطعه‌ای و نسبت به x روی مجموعهٔ $[t_0, t_1] \times W$ لیپ شیتز باشد (با ثابت لیپ شیتز L) که $W \subset R^n$ مجموعه‌ای همبند و باز است. علاوه بر این فرض کنید $y(t)$ و $z(t)$ پاسخ معادلات زیر باشند:*

$$\dot{y} = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0$$

$$\dot{z} = f(t,z) + g(t,z), \quad z(t_0) = z_0$$

به طوری که: $\forall t \in [t_0, t_1]$, $y(t), z(t) \in W$. در این صورت اگر برای بعضی از مقادیر $\mu > 0$ داشته باشیم:

برای بررسی نتایج وابستگی پیوسته نسبت به پارامترها براساس این روش، [۳۶، بخش ۱ ـ ۳]، [۶۵، بخش ۱ ـ ۳] و یا [۱۱۸، بخش ۲ ـ ۵] را ملاحظه کنید.

1. Closeness

دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین

$$\|g(t,x)\| \le \mu\ ,\quad \forall\,(t,x) \in [t_0, t_1] \times W$$

و*:

$$\|y_0 - z_0\| \le \gamma$$

آنگاه به ازای جمیع مقادیر $t \in [t_0, t_1]$ *می‌توان نوشت:*

$$\|y(t) - z(t)\| \le \gamma \exp\,[L(t-t_0)] + \frac{\mu}{L}\{\exp\,[L(t-t_0)] - 1\}$$

◇

برهان: پاسخهای $y(t)$ و $z(t)$ با روابط ذیل بیان می‌شود:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} [f(s, z(s)) + g(s, z(s))]\, ds$$

با کم کردن این دو رابطه از هم و محاسبهٔ نُرم این تفریق، داریم:

$$\|y(t) - z(t)\| \le \|y_0 - z_0\| + \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s)) + f(s, z(s))\|\, ds$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \|g(s, z(s))\|\, ds$$

$$\le \gamma + \mu\,(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} L\,\|y(s) - z(s)\|\, ds$$

اکنون با اعمال نامساوی گران وال ـ بلمن به تابع $\|y(t) - z(t)\|$ نتیجه می‌شود:

$$\|y(t) - z(t))\| \le \gamma + \mu\,(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} L[\gamma + \mu(s - t_0)]\, \exp\,[L(t-s)]\, ds$$

با محاسبهٔ انتگرال سمت راست عبارت فوق داریم:

$$\|y(t) - z(t))\| \le \gamma + \mu\,(t - t_0) - \gamma - \mu(t - t_0) + \gamma \exp\,[L(t - t_0)]$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \mu \exp\,[L(t-s)]\, ds$$

$$= \gamma \exp\,[L(t - t_0)] + \frac{\mu}{L}\{\exp[L(t - t_0)] - 1\}$$

* γ نیز مقداری مثبت است [م].

□

که برهان قضیه را تکمیل می‌کند.

با در دست داشتن قضیهٔ ۲ ـ ۵ می‌توان قضیهٔ ذیل را دربارهٔ پیوستگی پاسخها نسبت به حالت اولیه و پارامترها اثبات کرد:

قضیهٔ ۲ ـ ۶ *فرض کنید تابع* $f(t,x,\lambda)$ *نسبت به* (t,x,λ) *پیوسته و نسبت به* x *(و به طور یکنواخت نسبت به* t *و* λ*) و بر مجموعهٔ* $[t_0, t_1] \times D \times \{\|\lambda - \lambda_0\| \le c\}$*، لیپ شیتز محلی باشد که* $D \subset R^n$*، مجموعه‌ای همبند و باز است. علاوه بر این فرض کنید* $y(t, \lambda_0)$*، پاسخ معادلهٔ* $\dot{x} = f(t, x, \lambda_0)$ *با شرط* $y(t_0, \lambda_0) = y_0 \in D$ *است که* $y(t, \lambda_0)$*، به ازای جمیع مقادیر* $t \in [t_0, t_1]$ *در* D *تعریف شده، به آن تعلق دارد در این صورت اگر برای هر* $\varepsilon > 0$*، مقدار* $\delta > 0$ *چنان وجود داشته باشد که روابط ذیل صادق باشند:*

$$\|z_0 - y_0\| < \delta \quad \text{و} \quad \|\lambda - \lambda_0\| < \delta$$

آنگاه معادلهٔ $\dot{x} = f(t,x,\lambda)$ *با شرط* $z(t_0, \lambda) = z_0$*، دارای پاسخ یکتایی به شکل* $z(t,\lambda)$ *بر بازهٔ* $[t_0, t_1]$ *می‌باشد که رابطهٔ ذیل را برآورده می‌سازد:*

$$\|z(t,\lambda) - y(t,\lambda_0)\| < \varepsilon \quad ,\quad \forall\, t \in [t_0, t_1]$$

◇

برهان: از پیوستگی $y(t,\lambda_0)$ نسبت به t و فشردگی[1] بازهٔ $[t_0, t_1]$ نتیجه می‌شود $y(t,\lambda_0)$ روی $[t_0, t_1]$ کراندار یکنواخت است. اینک «لولهٔ[2]» U را مطابق شکل ۲ ـ ۱، حول پاسخ $y(t,\lambda_0)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

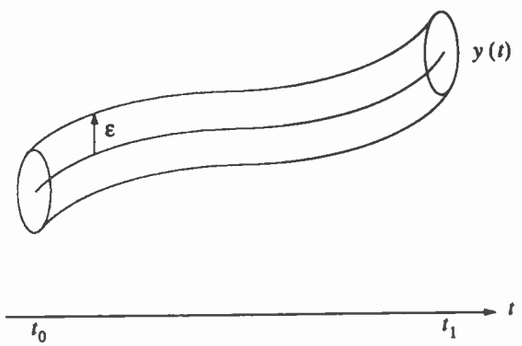
$$U = \{(t,x) \in [t_0, t_1] \times R^n \mid \|x - y(t,\lambda_0)\| \le \varepsilon\}$$

فرض بر این است که: $U \subset [t_0, t_1] \times D$ (اگر چنین نباشد مقدار $\varepsilon_1 < \varepsilon$ را چنان انتخاب می‌کنیم که این شرط برآورده شود و با آن مقدار ε_1 برهان را ادامه می‌دهیم). مجموعهٔ U فشرده است؛ لذا تابع $f(t,x,\lambda)$ روی مجموعهٔ U نسبت به x لیپ شیتز است (مثلاً با ثابت لیپ

1. Compactness
2. Tube

شیتز L). از پیوستگی f نسبت به λ نتیجه می‌شود برای هر $\alpha > 0$، مقدار $\beta > 0$ (که $\beta > c$) چنان وجود دارد که:

$$\|f(t,x,\lambda) - f(t,x,\lambda_0)\| < \alpha \,, \quad \forall\,(t,x) \in U, \quad \forall\,\|\lambda - \lambda_0\| < \beta$$



شکل ۲ ـ ۱ لولهٔ ساخته شده حول پاسخ $y(t)$

حال با فرض $\varepsilon > \alpha$ و $\|z_0 - y_0\| < \alpha$ و با استفاده از قضیهٔ وجود و یکتایی پاسخ محلی، نتیجه می‌شود پاسخ یکتایی مانند $z(t,\lambda)$ بر بازهٔ $[t_0, t_0 + \Delta)$ وجود دارد. پاسخ از درون لولهٔ U آغاز می‌شود و به رغم اینکه درون این لوله باقی می‌ماند، گسترش نیز می‌یابد. می‌توان با انتخاب مقدار کوچک مناسبی برای α، نشان داد پاسخ معادله برای تمامی مقادیر $t \in [t_0, t_1]$ درون لوله باقی می‌ماند. برای این کار فرض می‌کنیم τ نخستین لحظه‌ای باشد که پاسخ معادله، لوله را ترک می‌کند و ثابت می‌کنیم: $\tau > t_1$. با انتخاب $\gamma = \mu = \alpha$، همهٔ شروط قضیهٔ ۲ ـ ۵ بر بازهٔ زمانی $[t_0, \tau]$ صادق است، لذا:

$$\|z(t,\lambda) - y(t,\lambda_0)\| \le \alpha \exp\,[L(t-t_0)] + \frac{\alpha}{L}\{\exp\,[L(t-t_0)] - 1\}$$

$$< \alpha\left(1 + \frac{1}{L}\right)\exp\,[L(t-t_0)]$$

انتخاب $\alpha \le \varepsilon\, L\, exp[-L(t_1 - t_0)]/(1 + L)$ ما را مطمئن می‌سازد که پاسخ $z(t,\lambda)$ نمی‌تواند در طی زمانهای متعلق به بازهٔ $[t_0, t_1]$ لوله را ترک کند. بنابراین $z(t,\lambda)$ بر بازهٔ $[t_0, t_1]$ تعریف می‌شود و نامساوی $\|z(t,\lambda) - y(t,\lambda_0)\| < \varepsilon$ را برآورده می‌کند. انتخاب $\delta = min\,\{\alpha, \beta\}$، برهان قضیه را تکمیل می‌کند. □

۲ ـ ۴ مشتق‌پذیری پاسخها و معادلات حساسیت

فرض کنید تابع $f(t,x,\lambda)$ نسبت به (t,x,λ) پیوسته و مشتقات جزئی اول آن نیز به ازای جمیع مقادیر $(t,x,\lambda) \in [t_0, t_1] \times R^n \times R^p$ نسبت به x و λ پیوسته باشد، علاوه بر این فرض کنید λ_0 مقدار نامی λ و معادلهٔ حالت نامی ذیل نیز دارای پاسخ یکتای $x(t,\lambda_0)$ بر بازهٔ $[t_0, t_1]$ باشد:

$$\dot{x} = f(t,x,\lambda_0) \quad , \quad x(t_0) = x_0$$

در این صورت بنا به قضیهٔ ۲ ـ ۶ اگر λ به اندازهٔ کافی به λ_0 نزدیک باشد (به تعبیر دیگر اگر $\|\lambda - \lambda_0\|$ به اندازهٔ کافی کوچک باشد)، آنگاه معادلهٔ حالت:

$$\dot{x} = f(t,x,\lambda) \quad , \quad x(t_0) = x_0$$

بر بازهٔ $[t_0, t_1]$ دارای پاسخ یکتای $x(t,\lambda)$ است که تا حدّ ممکن به پاسخ نامی $x(t,\lambda_0)$ نزدیک می‌باشد. پیوسته ـ مشتق‌پذیر بودن f نسبت به x و λ تضمین کنندهٔ این ویژگی اضافی است که پاسخ $x(t,\lambda)$ نیز نسبت به λهای نزدیک به λ_0 مشتق‌پذیر می‌باشد؛ برای اثبات این نکته می‌توان نوشت:

$$x(t,\lambda) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s,\lambda), \lambda))\, ds$$

با محاسبهٔ مشتق جزئی عبارت فوق نسبت به λ نتیجه می‌شود:

$$x_\lambda(t,\lambda) = \int_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s,\lambda), \lambda)\, x_\lambda(s,\lambda) + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(s, x(s,\lambda), \lambda)\right] ds$$

که $x_\lambda(t,\lambda) = [\partial x(t,\lambda)/\partial\lambda]$ می‌باشد و چون x_0 مستقل از λ است لذا: $[\partial x_0/\partial\lambda] = 0$.

با مشتقگیری نسبت به t می‌توان نشان داد $x_\lambda(t,\lambda)$ معادلهٔ دیفرانسیل زیر را برآورده می‌سازد:

$$\frac{\partial}{\partial t}x_\lambda(t,\lambda) = A(t,\lambda)\,x_\lambda(t,\lambda) + B(t,\lambda)\,, \quad x_\lambda(t_0,\lambda) = 0 \qquad (۲-۸)$$

که:

$$A(t,\lambda) = \left.\frac{\partial f(t,x,\lambda)}{\partial x}\right|_{x=x(t,\lambda)}, \quad B(t,\lambda) = \left.\frac{\partial f(t,x,\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{x=x(t,\lambda)}$$

اگر λ به اندازهٔ کافی به λ_0 نزدیک باشد، ماتریسهای $A(t,\lambda)$ و $B(t,\lambda)$ بر بازهٔ $[t_0, t_1]$ تعریف می‌شود و به همین دلیل $x_\lambda(t,\lambda)$ نیز در همان بازه تعریف می‌گردد. در نقطهٔ $\lambda = \lambda_0$، سمت راست معادلهٔ (۲-۸) فقط به پاسخ نامیِ $x(t,\lambda_0)$ بستگی دارد. اگر $S(t) = x_\lambda(t,\lambda_0)$ باشد، آنگاه $S(t)$ پاسخ یکتای معادلهٔ زیر است:

$$\dot{S}(t) = A(t,\lambda_0)\,S(t) + B(t,\lambda_0), \quad S(t_0) = 0 \qquad (۲-۹)$$

تابع $S(t)$ را *تابع حساسیت*[1] و معادلهٔ (۲-۹) را *معادلهٔ حساسیت*[2] می‌نامند. توابع حساسیت در واقع بیان کنندهٔ تخمینهای مرتبهٔ اول اثر تغییرات پارامتر بر پاسخهاست. علاوه بر این اگر λ به اندازهٔ کافی به λ_0 نزدیک باشد آنگاه می‌توان به کمک این روابط، پاسخ معادله را نیز تقریب زد؛ زیرا می‌توان برای مقادیر کوچک $\|\lambda - \lambda_0\|$، بسط تیلور تابع $x(t,\lambda_0)$ را حول پاسخ نامی‌اش (یعنی: $x(t,\lambda_0)$) به شکل زیر باز نوشت:

$$x(t,\lambda) = x(t,\lambda_0) + S(t)(\lambda - \lambda_0) + \text{ج.م.ب}$$

با چشمپوشی از جملات مرتبهٔ بالاتر می‌توان پاسخ $x(t,\lambda)$ را با عبارت ذیل تقریب زد:

$$x(t,\lambda) \approx x(t,\lambda_0) + S(t)(\lambda - \lambda_0) \qquad (۲-۱۰)$$

در اینجا به بحث راجع به این تقریب نمی‌پردازیم و توجیه آن را به فصل هفتم (به هنگام مطالعهٔ نظریهٔ آشفتگی) موکول می‌کنیم. اهمیت رابطهٔ (۲-۱۰) در این حقیقت است که دانستن پاسخ نامی و تابع حساسیت برای تعیین تخمینی از پاسخ (به ازای همهٔ مقادیر λی درون گوی کوچکی به مرکز λ_0) کفایت می‌کند.

می‌توان روند[3] محاسبهٔ تابع حساسیت $S(t)$ را در گامهای زیر خلاصه کرد:

1. Sensitivity function 2. Sensitivity equation 3. Procedure

- معادلهٔ حالت نامی را برای یافتن پاسخ نامی $x(t,\lambda_0)$ حل کنید؛
- ماتریسهای ژاکوبی زیر را به دست آورید:

$$A(t,\lambda_0) = \left.\frac{\partial f(t,x,\lambda)}{\partial x}\right|_{x=x(t,\lambda_0),\,\lambda=\lambda_0}$$

$$B(t,\lambda_0) = \left.\frac{\partial f(t,x,\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{x=x(t,\lambda_0),\,\lambda=\lambda_0}$$

- معادلهٔ حساسیت (۲-۱۰) را برای یافتن $S(t)$ حل نمایید.

برای اجرای این روند لازم است معادلهٔ غیرخطی مربوط به حالت نامی و نیز معادلهٔ خطی متغیر با زمان حساسیت را حل کنیم. بجز در برخی موارد بدیهی، حل این معادلات فقط به طریق عددی امکانپذیر است. یکی از روشهای جایگزین برای محاسبهٔ $S(t)$، حل همزمان معادله برای یافتن پاسخ نامی و نیز تابع حساسیت می‌باشد. روند محاسبهٔ $x_\lambda(t,\lambda)$ از الحاق معادلهٔ تغییراتی[1] (۲-۸) به معادلهٔ اصلی حالت و به دست آوردن $(n + np)$ معادلهٔ افزودهٔ[2] زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{x} = f(t,x,\lambda)\,, \qquad x(t_0) = x_0 \qquad (۲-۱۱)$$

$$\dot{x}_\lambda = \left[\frac{\partial f(t,x,\lambda)}{\partial x}\right]x_\lambda + \left[\frac{\partial f(t,x,\lambda)}{\partial \lambda}\right], \quad x_\lambda(t_0) = 0$$

این معادلات با روشهای عددی قابل حل است. تابع حساسیت $S(t)$ را نیز می‌توان به کمک حل معادلهٔ (۲-۱۱) در مقدار نامیِ $\lambda = \lambda_0$ محاسبه کرد. شایان ذکر اینکه اگر معادلهٔ اصلی حالت خودگردان باشد (یعنی داشته باشیم: $f(t,x,\lambda) = f(x,\lambda)$) آنگاه معادلهٔ افزودهٔ (۲-۱۱) نیز خودگردان خواهد بود. روند اخیر را در مثال ذیل تشریح می‌کنیم:

مثال ۲-۸ معادلهٔ حلقهٔ قفل شدهٔ فاز زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad = f_1(x_1,x_2)$$

$$\dot{x}_2 = -c\sin x_1 - (a + b\cos x_1)x_2 = f_2(x_1,x_2)$$

1. Variational equation 2. Augmented equation

فرض کنید پارامترهای a، b و c دارای مقادیر نامی $a_0 = 1$، $b_0 = 1$ و $c_0 = 1$ باشد، در این صورت سیستم نامی با معادلات زیر بیان می‌شود:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\sin x_1 - x_2$$

می‌توان ماتریسهای ژاکوبیِ $[\partial f / \partial x]$ و $[\partial f / \partial \lambda]$ را به شکل ذیل نوشت:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c\cos x_1 + b\,x_2 \sin x_1 & -(a + b\cos x_1) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} & \frac{\partial f}{\partial c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & -x_2\cos x_1 & -\sin x_1 \end{bmatrix}$$

با محاسبهٔ این ماتریسها به ازای پارامترهای نامی: $a = 1$، $b = 0$ و $c = 1$ نتیجه می‌شود:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\text{نامی}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\cos x_1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\text{نامی}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & -x_2\cos x_1 & -\sin x_1 \end{bmatrix}$$

برای محاسبهٔ $S(t)$ به روشهای عددی، معادلات (۲ ـ ۱۱) را در نقاط نامی پارامترها حل می‌کنیم؛ لذا اگر داشته باشیم:

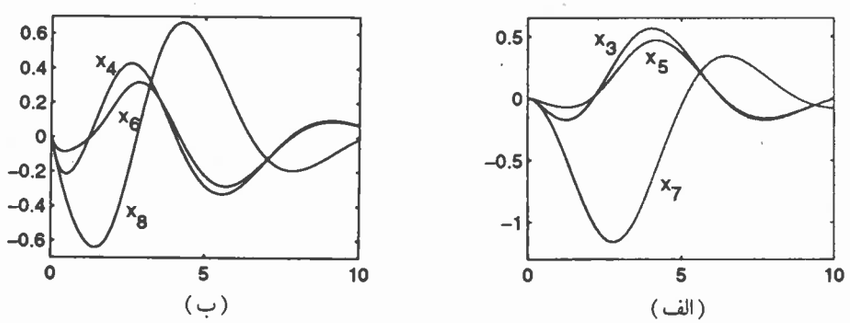
$$S = \begin{bmatrix} x_3 & x_5 & x_7 \\ x_4 & x_6 & x_8 \end{bmatrix} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a} & \frac{\partial x_1}{\partial b} & \frac{\partial x_1}{\partial c} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a} & \frac{\partial x_2}{\partial b} & \frac{\partial x_2}{\partial c} \end{bmatrix}\right|_{\text{نامی}}$$

آنگاه از معادلات (۲ ـ ۱۱) نتیجه می‌شود:

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad x_1(0) = x_{10}$$
$$\dot{x}_2 = -\sin x_1 - x_2, \qquad x_2(0) = x_{20}$$

$$\dot{x}_3 = x_4, \qquad x_3(0) = 0$$
$$\dot{x}_4 = -x_3\cos x_1 - x_4 - x_2, \qquad x_4(0) = 0$$
$$\dot{x}_5 = x_6, \qquad x_5(0) = 0$$
$$\dot{x}_6 = -x_5\cos x_1 - x_6 - x_2\cos x_1, \qquad x_6(0) = 0$$
$$\dot{x}_7 = x_8 \qquad x_7(0) = 0$$
$$\dot{x}_8 = -x_7\cos x_1 - x_8 - \sin x_1, \qquad x_8(0) = 0$$

پاسخ این معادله به ازای حالت اولیهٔ $x_{10} = x_{20} = 1$ محاسبه شده است. شکل ۲ ـ ۲ (الف) منحنی تغییرات x_3، x_5 و x_7 را (که بترتیب نشاندهندهٔ حساسیت x_1 نسبت به a، b و c است) نمایش می‌دهد. شکل ۲ ـ ۲ (ب) نیز نشاندهندهٔ کمیّتهای متناظر برای x_2 می‌باشد. این شکلها نشان می‌دهد پاسخ نسبت به تغییرات پارامتر c بسیار بیشتر از پارامترهای a و b حساس است. این موضوع برای حل در سایر حالتهای اولیه نیز صادق است. Δ



شکل ۲ ـ ۲ توابع حساسیت مثال ۲ ـ ۸

۲ ـ ۵ اصل قیاس

در اغلب مواقع، هنگام مطالعهٔ معادلهٔ حالت $\dot{x} = f(t, x)$ لازم است کرانهای پاسخ $x(t)$ را بدون محاسبهٔ خود پاسخ به دست آوریم. نامساوی گران وال ـ بلمن (لم ۲ ـ ۱) یکی از

ابزارهای رسیدن به این هدف می‌باشد. ابزار مفید دیگر لم قیاس[1] است. زمانی می‌توان از این لم استفاده کرد که مشتق تابع عددی و مشتق‌پذیر $v(t)$ به ازای جمیع مقادیر t هـای متعلق بـه بـازه‌های خـاص در نـامساوی $\dot{v}(t) \le f(t, v(t))$ صـدق کـند؛ ایـن شـرط را *نـامساوی دیفرانسیلی*[2] و تابع $v(t)$ را، که در این نامساوی صدق می‌کند، پاسخ نامساوی دیفرانسیلی می‌نامند. لم قیاس، پاسخ نامعادلهٔ دیفرانسـیلی $\dot{v}(t) \le f(t, v(t))$ را بـا پـاسخ مـعادلهٔ دیفرانسیل $\dot{u} = f(t, u)$ مقایسه می‌کند. این لم در حالتی که $v(t)$ مشتق‌پذیر نیست ولی دارای مشتق راست بالای[3] $D^+v(t)$ است که نامساوی دیفرانسـیلی را بـرآورده مـی‌کند، بـاز صادق است. مشتق راست بالا در پیوست آ ـ ۱ تعریف شده است؛ اما در این مبحث کافی است دو نکتهٔ زیر را بدانیم:

- اگر $v(t)$ در نقطهٔ t مشتق‌پذیر باشد، آنگاه: $D^+v(t) = \dot{v}(t)$؛
- اگر: $\forall h \in [0, b] \quad , \quad \frac{1}{h} |v(t+h) - v(t)| \le g(t, h)$

و: $\lim\limits_{h \to 0^+} g(t, h) = g_0(t)$

آنگاه: $D^+v(t) \le g_0(t)$

عبارت $h \to 0^+$ به این معناست که h از سمت بالا به سوی صفر میل می‌کند.

لم ۲ ـ ۵ (لم قیاس) *معادلهٔ دیفرانسیل عددی زیر را در نظر بگیرید:*

$$\dot{u} = f(t, u) \quad , \quad u(t_0) = u_0$$

که $f(t, u)$ به ازای جمیع مقادیر $t \ge 0$ و $u \in J \subset R$، نسبت به t پیوسته و نسبت به u لیپ شیتز محلی است. فرض کنید $[t_0, T]$ (که T می‌تواند بینهایت نیز باشد)، بازهٔ بیشینهٔ وجود پاسخ $u(t)$ باشد ضمناً فرض نمایید به ازای جـمیع مـقادیر $t \in [t_0, T)$ داشـته بـاشیم: $u(t) \in J$؛ دراین‌صورت اگر $v(t)$ تابع پیوسته‌ای باشد که مشتق راست بالای آن $(D^+v(t))$ با شرط $v(t) \in J$ و برای تمامیِ مقادیر $t \in [t_0, T)$ در نامعادلهٔ دیفرانسیلی زیر صدق کند:

1. Comparison lemma 2. Differential inequality 3. Upper right-hand derivative

$$D^+v(t) \le f(t, v(t)) \quad , \quad v(t_0) \le u_0$$

آنگاه به ازای جمیع مقادیر $t \in [t_0, T)$ داریم: $v(t) \le u(t)$. ◇

برهان: پیوست آ ـ ۱.

مثال ۲ ـ ۹ معادلهٔ دیفرانسیل عددی زیر:

$$\dot{x} = f(x) = -(1 + x^2)x, \quad x(0) = a$$

به ازای برخی مقادیر $t_1 > 0$، دارای پاسخ یکتایی روی بازهٔ $(0, t_1)$ می‌باشد؛ زیرا $f(x)$ لیپ شیتز محلی است. فرض کنید داشته باشیم: $v(t) = x^2(t)$؛ این تابع مشتق‌پذیر است و مشتق آن با عبارت زیر بیان می‌گردد:

$$\dot{v}(t) = 2x(t)\dot{x}(t) = -2x^2(t) - 2x^4(t) \le -2x^2(t)$$

بنابراین $v(t)$ در نامساوی دیفرانسیلی صدق می‌کند:

$$\dot{v}(t) \le -2v(t), \quad v(0) = a^2$$

حال فرض کنید $u(t)$ پاسخ معادلهٔ دیفرانسیل ذیل باشد:

$$\dot{u} = -2u, \quad u(0) = a^2 \Rightarrow u(t) = a^2 e^{-2t}$$

در این صورت باتوجه به لم قیاس، پاسخ $x(t)$ به ازای جمیع مقادیر $t \ge 0$ تعریف می‌شود و در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$|x(t)| = \sqrt{v(t)} \le e^{-t} |a|, \quad \forall t \ge 0$$ Δ

مثال ۲ ـ ۱۰ معادلهٔ دیفرانسیل عددی زیر:

$$\dot{x} = f(t, x) = -(1 + x^2)x + e^t, \quad x(0) = a$$

به ازای برخی مقادیر $t_1 > 0$، دارای پاسخ یکتایی بر بازهٔ $[0, t_1)$ است؛ زیرا تابع $f(t, x)$ نسبت به x لیپ شیتز محلی می‌باشد. هدف آن است که کران بالایی، مشابه آنچه در مثال قبل به دست آمد، برای $|x(t)|$ به دست آوریم. فرض کنید مانند مثال قبل با $v(t) = x^2(t)$ آغاز کنیم؛ مشتق v برابر است با:

$$\dot{v}(t) = 2x(t)\dot{x}(t) = -2x^2(t) - 2x^4(t) + 2x(t)e^t \leq -2v(t) + 2\sqrt{v(t)}e^t$$

اکنون می‌توان لم قیاس را به این نامعادلهٔ دیفرانسیلی اعمال کرد اما حل معادلهٔ دیفرانسیل حاصل چندان آسان نیست. از این‌رو مقدار دیگری را برای $v(t)$ برمی‌گزینیم؛ فرض کنید داشته باشیم: $v(t) = |x(t)|$. با شرط $x(t) \neq 0$، تابع $v(t)$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن برابر است با:

$$\dot{v}(t) = \frac{d}{dt}\sqrt{x^2(t)} = \frac{x(t)\dot{x}(t)}{|x(t)|} = -|x(t)|[1 + x^2(t)] + \frac{x(t)}{|x(t)|}e^t$$

چون $1 + x^2(t) \geq 1$ است، لذا داریم:

$$\dot{v}(t) \leq -v(t) + e^t \quad \text{و} \quad -|x(t)|[1 + x^2(t)] \leq -|x(t)|$$

از سوی دیگر با فرض $x(t) = 0$ می‌توان نوشت:

$$\frac{|v(t+h) - v(t)|}{h} = \frac{|x(t+h)|}{h} = \frac{1}{h}\left|\int_t^{t+h} f(\tau, x(\tau))\, d\tau\right|$$

$$= \left|f(t,0) + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} [f(\tau, x(\tau)) - f(t, x(t))]\, d\tau\right|$$

$$\leq |f(t,0)| + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} |f(\tau, x(\tau)) - f(t, x(t))|\, d\tau$$

چون تابع $f(t, x(t))$ نسبت به t پیوسته است، لذا برای هر مقدار معلوم $\varepsilon > 0$ می‌توان مقدار $\delta > 0$ را چنان یافت که برای $|\tau - t| < \delta$ داشته باشیم:

$$|f(\tau, x(\tau)) - f(t, x(t))| < \varepsilon$$

بنابراین برای همهٔ مقادیر $h < \delta$ داریم:

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} |f(\tau, x(\tau)) - f(t, x(t))|\, d\tau < \varepsilon$$

که نشان می‌دهد:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} |f(\tau, x(\tau)) - f(t, x(t))|\, d\tau = 0$$

بنابراین با شرط $x(t) = 0$ می‌توان نوشت: $D^+v(t) \leq |f(t,0)| = e^t$. پس به ازای جمیع مقادیر $t \in [0, t_1)$ داریم:

$$D^+v(t) \leq -v(t) + e^t, \quad v(0) = |a|$$

با فرض اینکه $u(t)$ پاسخ معادلهٔ دیفرانسیل خطی زیر باشد:

$$\dot{u} = -u + e^t, \quad u(0) = |a|$$

از لم قیاس نتیجه می‌شود:

$$v(t) \leq u(t) = e^{-t}|a| + \frac{1}{2}[e^t - e^{-t}], \quad \forall\, t \in [0, t_1)$$

کران بالای $v(t)$ با محدود بودن t_1، محدود است و فقط هنگامی که $t_1 \longrightarrow \infty$ میل کند، نامحدود خواهد شد. بنابراین پاسخ $x(t)$ برای تمامی مقادیر $t \geq 0$ تعریف می‌شود و ضمناً در نامساوی ذیل نیز صدق می‌کند:

$$|x(t)| \leq e^{-t}|a| + \frac{1}{2}[e^t - e^{-t}], \quad \forall\, t \geq 0$$

Δ

۲ ـ ۶ تمرینها

تمرین ۲ ـ ۱ نشان دهید برای هر $x \in R^n$، داریم:

$$\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\,\|x\|_2$$

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\,\|x\|_\infty$$

تمرین ۲ ـ ۲ نشان دهید برای هر ماتریس حقیقی A با ابعاد $m \times n$ و هر ماتریس B با ابعاد $n \times q$ می‌توان نوشت:

$$\|A\|_2 \le \sqrt{\|A\|_1\,\|A\|_\infty}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{m}\,\|A\|_\infty$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1 \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\,\|A\|_1$$

$$\|AB\|_p \le \|A\|_p\,\|B\|_p$$

تمرین ۲ ـ ۳ مجموعهٔ $S = \{x \in R^2 \mid -1 \le x_i \le 1 \ , \ i = 1,2\}$ را در نظر بگیرید. آیا این مجموعه باز است؟ آیا بسته است؟ بستار، درون و مرز آن را بیابید.

تمرین ۲ ـ ۴ فرض کنید $u_T(t)$، تابع پلهٔ واحد[1] با تعریف ذیل باشد:

$$u_T(t) = \begin{cases} 0 & t < T \\ 1 & t \ge T \end{cases}$$

(الف) نشان دهید $u_T(t)$ پیوستهٔ قطعه‌ای است.

(ب) نشان دهید تابع $f(t) = g(t)\,u_T(t)$ برای هر تابع پیوستهٔ $g(t)$، پیوستهٔ قطعه‌ای است.

1. Unit step function

(ج) نشان دهید شکل موج مربعیِ متناوب،[1] پیوستهٔ قطعه‌ای است.

تمرین ۲ ـ ۵ فرض کنید تابع $f(x)$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر و به صورت نگاشتی از قلمرو $D \subset R^n$ به R^n تعریف شده باشد. اگر D شامل مبدأ $(x = 0)$ و $f(0) = 0$ باشد، نشان دهید:

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma x)\,d\sigma\,x, \quad \forall x \in D$$

راهنمایی: تابع $g(\sigma) = f(\sigma x)$ را برای $0 \le \sigma < 1$ تعریف کرده، از این نکته استفاده کنید که:

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(\sigma)\,d\sigma.$$

تمرین ۲ ـ ۶ فرض کنید تابع $f(x)$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد. نشان دهید اگر ماتریس ژاکوبیِ $[\partial f / \partial x]$ (x^*) غیرمنفرد باشد، آنگاه نقطهٔ تعادل x^* مربوط به معادلهٔ $\dot{x} = f(x)$، نقطهٔ تعادل تنها است.

راهنمایی: از قضیهٔ تابع ضمنی استفاده کنید.

تمرین ۲ ـ ۷ فرض کنید $g(x)$ تابعی عددی و غیرمنفی باشد ده در نامساوی ذیل صدق کند:

$$y(t) \le k_1\,e^{-\alpha(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}\,[k_2\,y(\tau) + k_3]\,d\tau$$

k_1، k_2 و k_3 ثابتهایی غیرمنفی هستند، α نیز ثابت مثبتی با شرط $\alpha > k_2$ می‌باشد. با استفاده از نامساوی گران وال ـ بلمن نشان دهید:

$$y(t) \le k_1\,e^{-(\alpha-k_2)(t-t_0)} + \frac{k_3}{\alpha - k_2}\left[1 - e^{-(\alpha-k_2)(t-t_0)}\right]$$

راهنمایی: تابع $z(t) = y(t)\,e^{\alpha(t-t_0)}$ را تعریف کنید و نامساوی گران وال ـ بلمن را برای آن بیابید.

تمرین ۲ ـ ۸ فرض کنید $\mathcal{L}_2$ مجموعهٔ همهٔ توابع پیوستهٔ قطعه‌ای به شکل: $u:[0,\infty) \to R^n$ و با این ویژگی باشد که مجذور هریک از توابع، انتگرال‌پذیر باشد، یعنی: $\int_0^\infty |u_i(t)|^2\,dt < \infty$.

1. Periodic square waveform

نُرم روی این مجموعه را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\| u \|_{\mathcal{L}_2} = \sqrt{\int_0^\infty u^T(t)\, u(t)\, dt}$$

نشان دهید $\| u \|_{\mathcal{L}_2}$ یک نُرم خوش‌تعریف است.

راهنمایی: از نامساوی کوشی ـ شوارتز[1] استفاده کنید:

$$\int_a^b v(t) u(t) dt \le \sqrt{\int_a^b v^2(t)\, dt \int_a^b u^2(t)\, dt}$$

که $u(t)$ و $v(t)$ توابع عددی غیرمنفی هستند.

تمرین ۲ ـ ۹ فرض کنید l_2 مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های عددی $\{\eta_1, \eta_2, \ldots\}$ باشد که در رابطهٔ $\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^2 < \infty$ صدق می‌نماید. تعریف می‌کنیم:

$$\| x \|_l = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

(الف) نشان دهید $\| x \|_l$ یک نُرم خوش‌تعریف است.

(ب) نشان دهید l_2 همراه با نُرم $\| x \|_l$، فضای باناخ است.

تمرین ۲ ـ ۱۰ فرض کنید S مجموعهٔ تمامی سیگنالهای متناوب متقارن نیم موج[2] با فرکانس پایهٔ ω باشد که در هر بازهٔ محدود دارای انرژی محدودی است. در این صورت می‌توان هر سیگنال $y \in S$ را با بسط سری فوریهٔ آن به شکل زیر نمایش داد:

$$y(t) = \sum_{k \text{ فرد}} a_k \exp(jk\omega t), \quad \sum_{k \text{ فرد}} |a_k|^2 < \infty$$

با تعریف:

$$\| y \|_s = \left[\frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} y^2(t)\, dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

1. Cauchy-Schwartz inequality
2. Half-wave

(الف) نشان دهید $\| y \|_S$ یک نُرم خوش تعریف است.

(ب) نشان دهید S همراه با نُرم $\| y \|_S$، فضای باناخ است.

تمرین ۲ ـ ۱۱ فرض کنید $\mathcal{L}_\infty$ مجموعهٔ تمامی توابع پیوستهٔ قطعه‌ای به شکل: $u : [0, \infty) \longrightarrow R^n$ و با این ویژگی باشد که هریک از توابع به ازای جمیع مقادیر $t \ge 0$، کراندار یکنواخت است. ضمناً فرض کنید داشته باشیم: $\| u(t) \|$ که $\| u \|_{\mathcal{L}_\infty} = sup_{t \ge 0} \| u(t) \|$ می‌تواند هریک از نُرمهای p باشد.

(الف) نشان دهید $\| y \|_{\mathcal{L}_\infty}$، یک نُرم خوش تعریف است.

(ب) نشان دهید $\mathcal{L}_\infty$ همراه با نُرم $\| u \|_{\mathcal{L}_\infty}$ فضای باناخ است.

تمرین ۲ ـ ۱۲ معادلهٔ جبری خطی $Ax = b$ را در نظر بگیرید که A ماتریسی $n \times n$ است. فرض کنید a_{ij} نشاندهندهٔ درایهٔ سطر i و ستون jاُم ماتریس A باشد. اگر به ازای جمیع مقادیر i، a_{ii} مخالف صفر و ماتریس A نیز دارای خاصیت غلبهٔ اکید قطری[1] باشد، یعنی:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \ne 1} |a_{ij}|$$

نشان دهید معادلهٔ $Ax = b$ پاسخ یکتایی دارد که می‌توان آن را به کمک تقریبهای متوالی ذیل محاسبه کرد:

$$D_x^{(k+1)} = (D - A)x^{(k)} + b, \quad k \le 1$$

که $D = diag[\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{nn}]$ و $x^{(1)}$ هر بردار دلخواه در R^n است.

تمرین ۲ ـ ۱۳ معادلهٔ جبری غیرخطی ذیل را در نظر بگیرید:

$$c - Dx + \varepsilon x (a - b^T x) = 0$$

که D ماتریس غیرمنفرد $n \times n$، b و c بردارهای nتایی و a و $\varepsilon > 0$ نیز کمیّتهایی عددی

1. Strict diagonal dominance

هستند. نشان دهید اگر ε به اندازهٔ کافی کوچک باشد، معادله دارای یک ریشهٔ حقیقی یکتا در مجموعهٔ $\{x \in R^n | \ \|x - D^{-1}c\|_2 \leq 1\}$ است.

تمرین ۲ ـ ۱۴ سیستم دینامیکی گسستهٔ زمانیِ[1] $x(k+1) = Ax(k)$ را در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید با افزایش k به سمت بینهایت، $x(k)$ به سمت صفر سوق می‌یابد اگر و تنها اگر همهٔ مقادیر ویژهٔ ماتریس A، در رابطهٔ $|\lambda_i| < 1$ صدق کند.

(ب) آیا از بند (الف) می‌توان نتیجه گرفت شرط $|\lambda_i| < 1$ تلویحاً به این معناست که نگاشت Ax نسبت به هر نُرم p روی R^n، نگاشتی انقباضی است؟

تمرین ۲ ـ ۱۵ معادلات غیرخطی ذیل را در نظر بگیرید:

$$\left(1 + \frac{\varepsilon x_1}{1 + x_1^2}\right) x_1 + \varepsilon x_2 = 1$$

$$\varepsilon x_1 + \left(1 + \frac{\varepsilon x_1}{1 + x_2^2}\right) x_2 = 2$$

که $|\varepsilon| < \frac{1}{2}$ است. با استفاده از اصل نگاشت انقباض، نشان دهید این معادلات دارای یک پاسخ حقیقی یکتاست.

تمرین ۲ ـ ۱۶ فرض کنید تابع $f: R^n \longrightarrow R^n$ در قلمرو $D \subset R^n$، لیپ شیتز محلی و $S \subset D$ نیز مجموعه‌ای فشرده است. نشان دهید می‌توان ثابت مثبتی مانند L را چنان یافت که به ازای جمیع مقادیر $x, y \in S$ داشته باشیم:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

راهنمایی: مجموعهٔ S را می‌توان با تعداد معدودی از همسایگی‌ها پوشاند؛ یعنی:

$$S \subset N(a_1, r_1) \cup N(a_2, r_2) \cup \ldots \cup N(a_k, r_k)$$

1. Discrete-time

اینک دو حالت ذیل را به طور جداگانه در نظر بگیرید:

- برای برخی مقادیر i داریم: $x, y \in S \cap N(a_i, r_i)$؛
- به ازای جمیع مقادیر i داریم: $x, y \notin S \cap N(a_i, r_i)$، در این حالت می‌توان نوشت: $\|x - y\| \geq \min_i r_i$.

در حالت دوم از این نکته استفاده کنید که $f(x)$ روی S، کراندار یکنواخت است.

تمرین ۲ ـ ۱۷ نشان دهید اگر تابع $f: R^n \longrightarrow R^n$ روی $W \subset R^n$ لیپ شیتز باشد، آنگاه $f(x)$ روی W پیوستهٔ یکنواخت است.

تمرین ۲ ـ ۱۸ نشان دهید اگر تابع $f: R^n \longrightarrow R^n$ بر قلمرو $D = \{x \in R^n | \ \|x\| < r\}$ لیپ شیتز باشد و داشته باشیم: $f(0) = 0$، آنگاه می‌توان ثابت مثبتی مانند k را چنان یافت که به ازای جمیع مقادیر $x \in D$ داشته باشیم: $\|f(x)\| \leq k\|x\|$.

تمرین ۲ ـ ۱۹ برای هر مقدار $x \in R^n - \{0\}$ و هر مقدار $p \in [1, \infty)$، مقدار $y \in R^n$ را با عبارت ذیل تعریف می‌کنیم:

$$y_i = \frac{x_i^{p-1}}{\|x\|_p^{p-1}} \, sign(x_i^p)$$

نشان دهید: $y^T x = \|x\|_p$ و $\|y\|_q = 1$ که $q \in (1, \infty)$ از رابطهٔ $1/p + 1/q = 1$ به دست می‌آید. برای حالت $p = \infty$، بردار y را چنان بیابید که داشته باشیم: $y^T x = \|x\|_\infty$ و $\|y\|_1 = 1$.

تمرین ۲ ـ ۲۰ لم ۲ ـ ۴ را اثبات کنید.

تمرین ۲ ـ ۲۱ اگر $\|\cdot\|_\alpha$ و $\|\cdot\|_\beta$ دو نُرم مختلف از دسته نُرمهای p روی R^n باشد، نشان دهید تابع $f: R^n \longrightarrow R^n$ نسبت به $\|\cdot\|_\alpha$ لیپ شیتز است اگر و تنها اگر این تابع نسبت به $\|\cdot\|_\beta$ نیز لیپ شیتز باشد.

تمرین ۲ ـ ۲۲ مسألهٔ مقدار اولیهٔ (۲ ـ ۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید $D \subset R^n$ قلمرویی شامل $x = 0$ باشد. علاوه‌بر این فرض نمایید: $f(t, 0) = 0$ و $f(t, x)$ نیز نسبت به x و روی

$D \times [t_0, \infty[$ لیپ شیتز (با ثابت لیپ شیتز L نسبت به $\|.\|_2$) باشد ضمن اینکه پاسخ معادلهٔ (۲ ـ ۱)، یعنی $x(t)$، به ازای جمیع مقادیر $t \geq t_0$ تعریف شود و متعلق به D باشد.

(الف) نشان دهید:

$$\left| \frac{d}{dt} [x^T(t)x(t)] \right| \leq 2L \|x(t)\|_2^2$$

(ب) ثابت کنید:

$$\|x_0\|_2 \exp[-L(t-t_0)] \leq \|x(t)\|_2 \leq \|x_0\|_2 \exp[L(t-t_0)]$$

تمرین ۲ ـ ۲۳ فرض کنید تابع $x: R \longrightarrow R^n$ مشتق‌پذیر باشد و در رابطهٔ ذیل صدق کند:

$$\|\dot{x}(t)\| \leq g(t), \quad \forall t \geq t_0$$

نشان دهید:
$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds$$

تمرین ۲ ـ ۲۴ ([۳۶]) با استفادهٔ مستقیم از اصل انقباض در فضای توابع پیوسته همراه با نُرم ذیل:

$$\|x\|_X = \max_{t_0 \leq t \leq t_1} \left\{ e^{-L(t-\tau_0)/\rho} \|x(t)\| \right\}, \quad 0 < \rho < 1, \quad L > 0$$

برهان دیگری برای قضیهٔ ۲ ـ ۲ بیان کنید.

تمرین ۲ ـ ۲۵ فرض کنید تابع $f: R \longrightarrow R$، نامساوی ذیل را در برخی همسایگی‌های x_0 برآورده سازد.

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M |x - x_0|^\alpha, \quad M \geq 0, \alpha \geq 0$$

نشان دهید با شرط $\alpha > 0$، f در x_0 پیوسته و با شرط $\alpha > 1$، f در x_0 مشتق‌پذیر است.

تمرین ۲ ـ ۲۶ برای هریک از توابع $f: R \longrightarrow R$ با تعاریف ذیل مشخص کنید آیا: (الف) f در نقطهٔ $x = 0$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر است؛ (ب) f در نقطهٔ $x = 0$ لیپ شیتز محلی است؛ (ج) f در نقطهٔ $x = 0$ پیوسته است؛ (د) f لیپ شیتز جامع است؛ (ه) f روی R پیوستهٔ یکنواخت است؛ (و) f بر بازهٔ $(-1, 1)$ لیپ شیتز است؟

(۱) $$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ x = 0 & 0 \end{cases}$$

(۲) $$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(۳) $$f(x) = \tan(\pi x/2)$$

تمرین ۲ ـ ۲۷ برای هریک از توابع $f: R^n \longrightarrow R^n$ با تعاریف ذیل مشخص کنید آیا: (الف) f پیوسته ـ مشتق‌پذیر است؛ (ب) f لیپ شیتز محلی است؛ (ج) f پیوسته است؛ (د) f لیپ شیتز جامع است؛ (ه) f روی R^n پیوستهٔ یکنواخت است؟

(۱) $$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 + sgn(x_2) \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(۲) $$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 + sat(x_2) \\ x_1 + \sin x_2 \end{bmatrix}$$

(۳) $$f(x) = \begin{bmatrix} x_3 sat(x_1 + x_2) \\ x_2^2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

تمرین ۲ ـ ۲۸ فرض کنید $D_r = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$ باشد، برای هریک از سیستمهای ذیل که به شکل $\dot{x} = f(t,x)$ بیان می‌شود، مشخص کنید آیا: (الف) f روی D_r (و برای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک r) نسبت به x لیپ شیتز محلی است؛ (ب) f روی D_r (و به ازای مقدار محدود $r > 0$) نسبت به x لیپ شیتز محلی است؛ (ج) f نسبت به x لیپ شیتز جامع است؟

(۱) معادلهٔ پاندول همراه با اصطکاک و گشتاور ورودی ثابت (بخش ۱ ـ ۱ ـ ۱)؛

(۲) مدار دیود تونلی (مثال ۱ ـ ۲)؛

(۳) معادلهٔ جرم ـ فنر همراه با فنر خطی، ترمز چسبندگیِ خطی، اصطکاک خشک و نیروی خارجی صفر (بخش ۱ ـ ۱ ـ ۳)؛

(۴) نوسانساز وان دِرپل (مثال ۱ ـ ۷)؛

(۵) معادلهٔ حلقه ـ بستهٔ سیستم کنترل تطبیقی مرتبهٔ سوم (بخش ۱ ـ ۱ ـ ۶)؛

(۶) سیستم $\dot{x} = Ax - B\psi(Cx)$ که A، B و C بترتیب ماتریسهایی با ابعاد $n \times n$، $n \times ۱$ و $۱ \times n$ می‌باشد، $\psi(\cdot)$ نیز غیرخطی‌گری ناحیهٔ راکد[1] است که با تعریف‌ذیل بیان می‌گردد.

$$\psi(y) = \begin{cases} y + d, & y < -d \\ ۰ & -d \le y \le d \\ y - d, & y > d \end{cases}$$

تمرین ۲ ـ ۲۹ نشان دهید اگر توابع $f_۱ : R \longrightarrow R$ و $f_۲ : R \longrightarrow R$ لیپ شیتز محلی باشد، آنگاه توابع $f_۱ + f_۲$، $f_۱ f_۲$ و $f_۲ \, o f_۱$ نیز لیپ شیتز محلی است.

تمرین ۲ ـ ۳۰ اگر تابع $f : R^n \longrightarrow R^n$ با رابطهٔ ذیل تعریف شود:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{۱}{\|Kx\|} Kx, & \text{اگر: } g(x)\|Kx\| \ge \mu > ۰ \\ \dfrac{g(x)}{\mu} Kx, & \text{اگر: } g(x)\|Kx\| < \mu \end{cases}$$

که $g : R^n \longrightarrow R$، لیپ شیتز محلی و غیرمنفی و K نیز ماتریس ثابتی است، نشان دهید $f(x)$ بر هر زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از R^n، لیپ شیتز است.

تمرین ۲ ـ ۳۱ اگر تابع $V : R \times R^n \longrightarrow R$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد و برای تمامی مقادیر $t \ge ۰$ داشته باشیم: $V(t, ۰) = ۰$ و نیز بتوان نوشت:

$$V(t,x) \ge c_۱ \|x\|^۲ ; \quad \left\| \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) \right\| \le c_۴ \|x\| , \ \forall (t,x) \in [۰, \infty) \times D$$

که $c_۱$ و $c_۴$ ثابتهایی مثبت و $D \subset R^n$ نیز قلمرو محدّبی است که مبدأ $x = ۰$ را نیز در برمی‌گیرد.

(الف) نشان دهید به ازای جمیع مقادیر $x \in D$ داریم: $V(t,x) \le \frac{۱}{۲} c_۴ \|x\|^۲$.

1. Dead - zone

راهنمایی: از عبارت $V(t,x) = \int_۰^۱ \frac{\partial V}{\partial x}(t, \sigma x) \, d\sigma x$ برای نمایش V استفاده کنید.

(ب) نشان دهید ثابتهای $c_۱$ و $c_۴$ در نامساوی $۲c_۱ \le c_۴$ صدق می‌کنند.

(ج) نشان دهید تابع $W(t,x) = \sqrt{V(t,x)}$ شرط لیپ شیتز ذیل را برآورده می‌سازد:

$$|W(t,x_۲) - W(t,x_۱)| \le \frac{c_۴}{۲\sqrt{c_۱}} \|x_۲ - x_۱\| , \ \forall t \ge ۰ , \ \forall x_۱, x_۲ \in D$$

تمرین ۲ ـ ۳۲ فرض کنید $f(t,x)$ در قلمرو $D \subset R^n$ و روی $D \times [t_۰, t_۱]$، نسبت به t پیوستهٔ قطعه‌ای و نسبت به x لیپ شیتز محلی باشد. ضمناً فرض کنید W زیرمجموعهٔ فشردهٔ D و $x(t)$ پاسخ $\dot{x} = f(t,x)$ باشد که از نقطهٔ $x(t_۰) = x_۰ \in W$ آغاز می‌شود؛ در این صورت اگر برای تمامی مقادیر $t \in [t_۰, T)$ و $T < t_۱$، پاسخ $x(t)$ تعریف شود و داشته باشیم: $x(t) \in W$، آنگاه نشان دهید:

(الف) $x(t)$ بر بازهٔ $[t_۰, T)$ پیوستهٔ یکنواخت است.

(ب) $x(T)$ تعریف می‌شود و متعلق به مجموعهٔ W است. $x(t)$ نیز پاسخی بر بازهٔ $[t_۰, T)$ می‌باشد؛

(ج) مقداری مانند $\delta > ۰$ وجود دارد که به ازای آن، پاسخ بر بازهٔ $[t_۰, T + \delta)$ توسعه خواهد یافت.

تمرین ۲ ـ ۳۳ فرض کنید $f(t,x)$ در قلمرو $D \subset R^n$ و روی $D \times [t_۰, t_۱]$، نسبت به t پیوستهٔ قطعه‌ای و نسبت به x لیپ شیتز محلی باشد. ضمناً فرض کنید $g(t)$ پاسخ معادلهٔ (۲ ـ ۱) روی بزرگترین فاصلهٔ باز $[t_۰, T) \subset [t_۰, t_۱]$ (با شرط $T < \infty$) باشد. در این صورت اگر W زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از D باشد، نشان دهید می‌توان مقداری برای $t \in [t_۰, T)$ یافت که به ازای آن داشته باشیم: $y(t) \notin W$.

راهنمایی: از تمرین قبل استفاده کنید.

تمرین ۲ ـ ۳۴ فرض کنید تابع $f(t,x)$ نسبت به t پیوستهٔ قطعه‌ای و نسبت به x لیپ شیتز محلی باشد و داشته باشیم:

$$\|f(t,x)\| \le k_۱ + k_۲ \|x\| , \quad \forall (t,x) \in [t_۰, \infty) \times R^n$$

(الف) نشان دهید پاسخ معادلهٔ (۲ ـ ۱)، برای تمامی مقادیر $t \ge t_۰$ که به ازای آنها پاسخ

وجود دارد، در عبارت ذیل صدق می‌کند:

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| \exp[k_2(t-t_0)] + \frac{k_1}{k_2}\{\exp[k_2(t-t_0)] - 1\}$$

(ب) آیا پاسخ می‌تواند زمان رهایی محدود داشته باشد؟

تمرین ۲ ـ ۳۵ فرض کنید تابع $g: R^n \longrightarrow R^n$ به ازای جمیع مقادیر $x \in R^n$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد. تابع $f(x)$ را با عبارت ذیل تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1}{1 + g^T(x)g(x)}\, g(x)$$

نشان دهید معادلهٔ $\dot{x} = f(x)$ دارای پاسخ یکتایی است که برای تمامی مقادیر $t \geq 0$ تعریف می‌گردد.

تمرین ۲ ـ ۳۶ نشان دهید معادلهٔ حالت:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + \frac{2x_2}{1 + x_2^2}\,, \quad x_1(0) = a$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + \frac{2x_1}{1 + x_1^2}\,, \quad x_2(0) = b$$

دارای پاسخ یکتایی برای تمامی مقادیر $t \geq 0$ می‌باشد

تمرین ۲ ـ ۳۷ فرض کنید سیستم مرتبهٔ دوم $\dot{x} = f(x)$ همراه با تابع لیپ شیتز محلیِ $f(x)$، دارای چرخهٔ حدّی است. نشان دهید هر پاسخی که در ناحیهٔ محصور در چرخهٔ حدّی آغاز شود، نمی‌تواند زمان رهایی محدود داشته باشد.

تمرین ۲ ـ ۳۸ ([۳۶]) فرض کنید تابع $x_1: R \longrightarrow R^n$ و $x_2: R \longrightarrow R^n$ مشتق‌پذیر باشند به طوری که برای $a \leq t \leq b$ داشته باشیم:

$$\|x_1(a) - x_2(a)\| \leq \gamma\,, \quad \|\dot{x}_i(t) - f(t, x_i(t))\| \geq \mu_i\,, \quad i = 1, 2$$

نشان دهید اگر f شرط لیپ شیتز (۲ ـ ۲) را برآورده کند، داریم:

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \gamma e^{L(t-a)} + (\mu_1 + \mu_2)\left[\frac{e^{L(t-a)} - 1}{L}\right], \quad a \leq t \leq b$$

تمرین ۲ ـ ۳۹ معادلات حساسیت را برای مدار دیود تونلی مثال ۱ ـ ۲ در حالتی که L و C از مقادیر نامی خود تغییر می‌کنند، به دست آورید.

تمرین ۲ ـ ۴۰ معادلات حساسیت را برای نوسانساز وان دِرپل مثال ۱ ـ ۷ برای حالتی که ε از مقدار نامی‌اش تغییر می‌کند، به دست آورید. برای این کار از معادلهٔ حالت در دستگاه مختصات x استفاده نمایید.

تمرین ۲ ـ ۴۱ تمرین قبل را با استفاده از معادلهٔ حالت در دستگاه مختصات z تکرار کنید.

تمرین ۲ ـ ۴۲ معادلات حساسیت را برای سیستم ذیل:

$$\dot{x}_1 = \tan^{-1}(ax_1) - x_1x_2$$
$$\dot{x}_2 = bx_1^2 - cx_2$$

و در حالتی که پارامترهای a، b و c از مقادیر نامیِ $a_0 = 1$، $b_0 = 1$ و $c_0 = 1$ تغییر می‌کند، بیابید.

تمرین ۲ ـ ۴۳ فرض کنید تابع $f(x)$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد و داشته باشیم:

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right\|_2 \leq L_i \|x\|_2\,, \quad 1 \leq i \leq n$$

نشان دهید: که: $\left\| f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(0)x \right\|_2 \leq L_i \|x\|_2^2\,,\ L = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} L_i^2}$

تمرین ۲ ـ ۴۴ نشان دهید براساس فرضیات قضیهٔ ۲ ـ ۶، پاسخ معادلهٔ (۲ ـ ۱) به طور پیوسته به زمان اولیهٔ t_0 وابسته است.

تمرین ۲ ـ ۴۵ فرض کنید تابع $f(t, x)$ و مشتق جزئی آن نسبت به x، به ازای همهٔ مقادیر $(t, x) \in [t_0, t_1] \times R^n$، نسبت به (t, x) پیوسته باشد. علاوه بر این فرض نمایید $x(t, \eta)$ پاسخ معادلهٔ (۲ ـ ۱) باشد که از نقطهٔ $x(t_0) = \eta$ آغاز می‌شود ضمن اینکه $x(t, \eta)$ نیز بر بازهٔ $[t_0, t_1]$ تعریف می‌گردد. نشان دهید تابع $x(t, \eta)$ نسبت به η پیوسته ـ مشتق‌پذیر است. معادلهٔ تغییراتی را بیابید که $[\partial x / \partial \eta]$ در آن صدق کند.

راهنمایی: با بکارگیری $y = x - \eta$ عبارت (۲ ـ ۱) را به شکل زیر تبدیل کنید (η به عنوان پارامتر استفاده می‌شود):

$$\dot{y} = f(t, y + \eta), \quad y(t_0) = 0$$

تمرین ۲ ـ ۴۶ فرض کنید تابع $f(t,x)$ و مشتق جزئی آن نسبت به x، به ازای جمیع مقادیر $(t,x) \in R \times R^n$، نسبت به (t,x) پیوسته باشد. ضمناً فرض کنید تابع $x(t,a,\eta)$ پاسخ معادلهٔ (۲ ـ ۱) باشد که از نقطهٔ $x(a) = \eta$ آغاز می‌شود ضمن اینکه تابع $x(t,a,\eta)$ نیز بر بازهٔ $[a, t_1]$ تعریف می‌گردد. نشان دهید تابع $x(t,a,\eta)$ نسبت به a و η پیوسته ـ مشتق‌پذیر است. اگر $x_a(t)$ و $x_\eta(t)$ بترتیب نشاندهندهٔ $[\partial x / \partial a]$ و $[\partial x / \partial \eta]$ باشد، ثابت کنید $x_a(t)$ و $x_\eta(t)$ در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$x_a(t) + x_\eta(t) f(a, \eta) \equiv 0, \quad \forall t \in [a, t_1]$$

تمرین ۲ ـ ۴۷ ([۳۶]) فرض کنید تابع $f: R \times R \longrightarrow R$ پیوسته باشد. ضمناً فرض نمایید $f(t,x)$ به ازای هر مقدار ثابت t، نسبت به x لیپ شیتز محلی و غیرکاهشی باشد. در این صورت اگر $x(t)$ پاسخ $\dot{x} = f(t,x)$ بر بازهٔ $[a,b]$ باشد و تابع پیوستهٔ $y(t)$ نیز برای مقادیر $a \le t \le b$ در نامساوی انتگرالی زیر صدق کند:

$$y(t) \le x(a) + \int_a^t f(s, y(s))\, ds$$

نشان دهید روی این بازه داریم: $y(t) \le x(t)$.

۳

پایداری لیاپانوف

نظریهٔ پایداری نقشی اساسی در نظریه و مهندسی سیستمها دارد. مسائل مختلفی در خصوص پایداری وجود دارد که در مطالعه و بررسی سیستمهای دینامیکی مطرح می‌شود. این فصل به بررسی پایداری نقاط تعادل می‌پردازد. در فصلهای بعد انواع دیگر پایداری، مانند دورهای متناوب و پایداری ورودی ـ خروجی را خواهیم دید. معمولاً پایداری نقاط تعادل را از دید لیاپانوف (ریاضیدان و مهندس روسی که این نظریه رابنا نهاد و امروزه به نام خودش خوانده می‌شود) بررسی می‌کنند. یک نقطهٔ تعادل را پایدار می‌گوییم اگر همهٔ پاسخهایی که از نقاط نزدیک به آن آغاز می‌شود در همان نزدیکی باقی بماند؛ در غیر این‌صورت آن نقطهٔ تعادل، ناپایدار است. این نقطه را پایدار مجانبی[1] می‌گوییم اگر تمامی پاسخهایی که از نقاط نزدیک به آن آغاز شود نه تنها در همان نزدیکی باقی بماند بلکه با افزایش زمان، به سوی نقطهٔ تعادل سوق یابد. این مفاهیم در بخش ۳ ـ ۱، که قضایای اصلی روش لیاپانوف برای سیستمهای خودگردان بیان می‌شود، به‌طور دقیق تعریف خواهد گردید. تعمیم نظریهٔ اصلی، بر اساس ایده‌های لاسَل[2]، در بخش ۳ ـ ۲ ارائه می‌شود. برای سیستم خطی و نامتغیر با زمان $\dot{x} = Ax(t)$ می‌توان پایداری نقطهٔ تعادلِ $x = 0$ را به‌طور کامل به‌کمک موقعیت مکانی مقادیر ویژهٔ ماتریس A بیان کرد. این موضوع دربخش ۳ ـ ۳ بررسی خواهد شد. در همین بخش خواهیم دید که در چه حالتی و چگونه می‌توان پایداری نقطهٔ تعادل را به کمک خطی سازی حول آن نقطه مشخص نمود. در بخشهای ۳ ـ ۴ و ۳ ـ ۵، روش لیاپانوف را به سیستمهای ناخودگردان تعمیم خواهیم داد. در بخش ۳ ـ ۴، مفاهیم پایداری یکنواخت[3]، پایداری مجانبی یکنواخت[4] و پایداری نماییِ[5] نقاط

1. Asymptotic stable
2. LaSalle
3. Uniform stability
4. Uniform asymptotic stability
5. Exponential stability

تعادل سیستمهای ناخودگردان ارائه خواهد شد و روش لیاپانوف برای آزمون پایداری مجانبی یکنواخت و نیز پایداری نمایی به کار خواهد رفت. در بخش ۳ ـ ۵ نیز به مطالعهٔ سیستمهای خطی متغیر با زمان و همچنین خطی‌سازی خواهیم پرداخت.

قضایای پایداری لیاپانوف، بیانگر شروط کافی برای پایداری، پایداری مجانبی و غیره هستند؛ اما نمی‌گویند آیا این شروط لازمند یا خیر. قضایای دیگری وجود دارد که حداقل از دید مفهومی، برای بسیاری از قضایای لیاپانوف واقعاً شرط لازم هستند. معمولاً این قضایا را قضایای معکوس می‌نامند. در بخش ۳ ـ ۶ دو مورد از قضیه‌های معکوس بیان خواهد شد؛ علاوه بر این از قضایای معکوس[1] در بررسی پایداری نمایی و نشان دادن این نکته استفاده می‌کنیم که نقطهٔ تعادلِ یک سیستم غیر خطی، پایدار نمایی است اگر و تنها اگر خطی‌سازی سیستم حول آن نقطه، دارای نقطهٔ تعادل پایدار نمایی در مبدأ باشد.

۳ ـ ۱ سیستمهای خودگردان

سیستم خودگردان زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x) \qquad (۳ ـ ۱)$$

که $f: D \to R^n$ نگاشت لیپ شیتز محلی از قلمرو $D \subset R^n$ به R^n است. فرض کنید $\bar{x} \in d$ یکی از نقاط تعادل معادلهٔ (۳ ـ ۱) باشد؛ یعنی:

$$f(\bar{x}) = 0$$

هدف، تعیین مشخصات و مطالعهٔ پایداری نقطهٔ $\bar{x}$ می‌باشد. برای سادگی، همهٔ تعاریف و قضایا را برای حالتی بیان می‌کنیم که نقطهٔ تعادل منطبق بر مبدأ R^n باشد، یعنی: $\bar{x} = 0$؛ این نکته هیچگونه اثری بر عمومیت موضوع ندارد زیرا هر نقطهٔ تعادلی را می‌توان به کمک تغییر متغیر به مبدأ مختصات انتقال داد. برای تفهیم بیشتر اگر $\bar{x} \neq 0$ باشد، می‌توان با تغییر متغیر $y = x - \bar{x}$، مشتق y را به شکل ذیل نوشت:

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + \bar{x}) \triangleq g(y), \quad g(0) = 0$$ که:

1. Converse theorems

بدین ترتیب نقطهٔ تعادل سیستم نسبت به متغیر جدید (y) در مبدأ واقع است؛ لذا بدون کاستن از عمومیت موضوع، همواره فرض می‌کنیم تابع $f(x)$ در رابطهٔ $f(0) = 0$ صدق می‌کند و با این شرط به بررسی پایداری مبدأ $x = 0$ می‌پردازیم.

تعریف ۳ ـ ۱ *نقطهٔ تعادل $x = 0$ مربوط به معادلهٔ (۳ ـ ۱):*

- *پایدار است اگر برای هر $\varepsilon > 0$، مقدار $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ چنان وجود داشته باشد که:*

$$\| x(0) \| < \delta \Rightarrow \| x(t) \| < \varepsilon, \quad \forall t > 0$$

- *ناپایدار است اگر پایدار نباشد؛*
- *پایدار مجانبی است اگر پایدار باشد و بتوان δ را چنان یافت که:*

$$\| x(0) \| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

استلزام $\varepsilon - \delta$ برای برقراری پایداری، در واقع به شکل پاسخی مبارزه‌جو بیان شده است؛ بدین معنا که برای نشان دادن پایداری مبدأ باید برای هر مقدار اختیاری ε، مقداری برای δ بیابیم (احتمالاً وابسته به ε) که به ازای آن هر مسیر حالتی که از همسایگی δ نسبت به مبدأ آغاز شود، هیچگاه از همسایگی ε بیرون نرود. می‌توان ویژگیهای هر سه نوع پایداری بیان شده را با مثال پاندول بخش ۱ ـ ۱ نشان داد: معادلهٔ پاندول ذیل:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\left(\frac{g}{l}\right) \sin x_1 - \left(\frac{k}{m}\right) x_2$$

دارای دو نقطهٔ تعادل در $(x_1 = 0 \ , \ x_2 = 0)$ و $(x_1 = \pi \ , \ x_2 = 0)$ است. در مثال ۱ ـ ۱ دیدیم با چشمپوشی از اصطکاک (یعنی صفر قرار دادن k)، مسیرهای حالت در نزدیکی نقطهٔ تعادل اول به شکل دورهای بسته است؛ بنابراین اگر حرکت را از نقاط به اندازهٔ کافی نزدیک به نقطهٔ تعادل آغاز کنیم، مطمئن خواهیم بود مسیرهای حالت درون هرگوی مشخصی به مرکز نقطهٔ تعادل باقی خواهد ماند و لذا استلزام $\varepsilon - \delta$ی مربوط به پایداری برآورده می‌شود. اما نقطهٔ تعادل، پایدار مجانبی نیست زیرا مسیرهایی که از جاهایی غیر از نقطهٔ تعادل آغاز می‌شود

الزاماً به سمت آن همگرا نمی‌گردد و در دورهای بستهٔ خود باقی می‌ماند. اگر فرض کنیم در معادله، اصطکاک نیز وجود دارد ($k > 0$)، آنگاه نقطهٔ تعادل به‌کانون پایدار تبدیل می‌گردد و با ملاحظهٔ پیکرهٔ فازِ کانون پایدار مشاهده می‌شود استلزام $\varepsilon - \delta$ ی مربوط به پایداری برآورده شده است؛ علاوه بر این مسیرهایی که از نزدیکی نقطهٔ تعادل آغاز می‌شود با افزایش t به سمت بینهایت، به سوی آن نقطه سوق می‌یابد. نقطهٔ تعادل دوم $x_1 = \pi$ نقطهٔ زینی است و واضح است نمی‌تواند استلزام $\varepsilon - \delta$ ی مربوط به پایداری را برآورده سازد زیرا برای هر $\varepsilon > 0$، همواره یک مسیر حالت وجود دارد که حتی در حالتی که $x(0)$ بسیار نزدیک به نقطهٔ تعادل باشد، باز گویِ $\{x \in R^n \mid \|x - \bar{x}\| \leq \varepsilon\}$ را ترک می‌کند.

یکی از نکات ضمنی تعریف ۳ ـ ۱ آن است که باید پاسخهای معادلهٔ (۳ ـ ۱) برای لحظات $t \geq 0$ تعریف شوند*؛ اما محلی بودن ویژگی لیپ شیتز تابع f، وجود جامع پاسخ [1] را تضمین نمی‌کند، البته با افزودن شروط دیگری به قضایای لیاپانوف، مطمئن خواهیم شد که شرط وجود پاسخ به طور جامع برآورده خواهد گردید. این موضوع به عنوان یکی از کاربردهای قضیهٔ ۲ ـ ۴ بررسی خواهد شد.

پس از تعریف پایداری و پایدای مجانبیِ نقاط تعادل، اکنون هدف آن است که راههایی برای تعیین پایداری بیابیم. شیوهٔ مورد استفاده در مثال پاندول بر دانسته‌هایمان از پیکرهٔ فاز سیستم استوار بود، تعمیم این روش، مستلزم یافتن همهٔ پاسخهای معادلهٔ (۳ ـ ۱) می‌باشد که در عمل مشکل یا حتی ناممکن است؛ امّامی‌توان با استفاده از مفاهیم انرژی نیز به یافته‌های مربوط به نقاط تعادل پایدار پاندول دست پیداکرد. بدین منظور ابتدا انرژی پاندول، $E(x)$، را به صورت مجموع انرژیهای پتانسیل و جنبشی تعریف می‌کنیم (مرجع انرژی پتانسیل را چنان برمی‌گزینیم که داشته باشیم: $E(0) = 0$)، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$E(x) = \int_0^{x_1} \left(\frac{g}{l}\right) \sin y \, dy + \frac{1}{2} x_2^2 = \left(\frac{g}{l}\right)(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2$$

اگر از اصطکاک صرف‌نظر شود ($k = 0$)، سیستم پایستار [2] خواهد بود، بدین معنا که انرژی

---

* می‌توان تعریف را چنان تغییر داد که شرط ضمنیِ وجود جامع پاسخ را تخفیف دهد. برای مثال در [۱۳۷]، پایداری بر اساس بزرگترین بازهٔ وجود $[0, t_1]$، و بدون فرض $t_1 = \infty$، تعریف شده است.

1. Global existence of solution
2. Conservative system

هیچگونه تلفاتی ندارد. در این صورت مقدار انرژی در طیّ حرکت سیستم ثابت می‌ماند و یا به بیان دیگر مقدار dE/dt در امتداد مسیرهای حالت سیستم برابر با صفر است. از آنجاکه معادلهٔ $E(x) = c$ برای مقادیر کوچک c، منحنی بسته‌ای را حول نقطهٔ $x = 0$ تشکیل می‌دهد، لذا دوباره به این نتیجه می‌رسیم که $x = 0$ نقطهٔ تعادل پایدار سیستم است. هنگامی که اصطکاک را نیز به حساب آوریم ($k > 0$)، در طیّ حرکت سیستم، انرژی تلف خواهد شد (به تعبیر دیگر در امتداد مسیرهای سیستم، مقدار dE/dt نامثبت است). به دلیل حضور اصطکاک، وقتی سیستم در حال حرکت است، E نمی‌تواند تا بینهایت ثابت بماند بلکه بتدریج کم می‌شود تا سرانجام به مقدار صفر برسد و این نشاندهندهٔ آن است که با افزایش t به سمت بینهایت، مسیرهای سیستم به سمت $x = 0$ سوق می‌یابد؛ بنابراین می‌توان با بررسی مشتق E در امتداد مسیرهای سیستم، پایداری نقطهٔ تعادل را تعیین کرد. در سال ۱۹۸۲ میلادی لیاپانوف نشان داد می‌توان با استفاده از توابع خاص دیگری به جای انرژی، پایداری نقطهٔ تعادل را تعیین نمود. بدین منظور فرض کنید $V: D \to R$ تابعی پیوسته ـ مشتق‌پذیر در قلمرو $D \subset R^n$ (شامل مبدأ) باشد. در این صورت می‌توان مشتق تابع V را در امتداد مسیرهای معادلهٔ (۳ ـ ۱) با عبارت ذیل بیان کرد:

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x)$$

$$= \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right] \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$$

مشتق تابع V در امتداد مسیرهای حالت سیستم، به معادلهٔ سیستم بستگی دارد، لذا مقدار تابع $\dot{V}(x)$ در سیستمهای مختلف، متفاوت خواهد بود. اگر $\phi(t; x)$ پاسخ معادلهٔ (۳ ـ ۱) باشد که از حالت اولیهٔ x در زمان $t = 0$ شروع شده است، آنگاه داریم:

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(\phi(t; x)) \Big|_{t=0}$$

بنابراین اگر $\dot{V}(x)$ منفی باشد، آنگاه تابع V در امتداد پاسخ (۳ ـ ۱) کاهش خواهد یافت.

اکنون آماده‌ایم تا قضیهٔ پایداری لیاپانوف را بیان کنیم:

قضیهٔ ۳ ـ ۱ *فرض کنید* $x = 0$ *یکی از نقاط تعادل معادلهٔ (۳ ـ ۱) و* $D \subset R^n$ *قلمرویی شامل* $x = 0$ *باشد. در این صورت اگر* $V: D \to R$ *تابعی پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد که برای آن داشته باشیم:*

$$V(x) = 0 \quad \text{و} \quad V(x) > 0 \quad \text{در} \quad D - \{0\} \tag{۳ ـ ۲}$$

$$\dot{V}(x) \le 0 \quad \text{در} \quad D \tag{۳ ـ ۳}$$

آنگاه نقطهٔ $x = 0$ *پایدار است؛ علاوه بر این اگر داشته باشیم:*

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{در} \quad D - \{0\} \tag{۳ ـ ۴}$$

آنگاه نقطهٔ $x = 0$ *پایدار مجانبی است.* ◇

برهان: برای $\varepsilon > 0$، مقدار $r \in (0, \varepsilon]$ را چنان انتخاب می‌کنیم که:

$$B_r = \{x \in R^n \mid \|x\| \le r\} \subset D$$

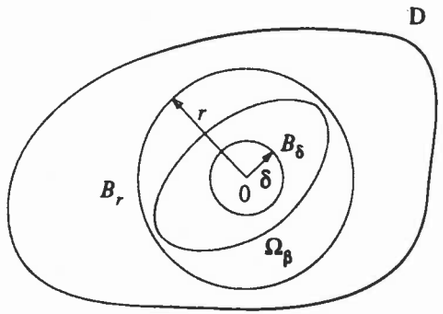
فرض کنید داشته باشیم: $\alpha = \min_{\|x\| = r} V(x)$، در این صورت با توجه به عبارت (۳ ـ ۲)، α مثبت است. مقدار $\beta \in (0, \alpha)$ را برمی‌گزینیم و فرض می‌کنیم:

$$\Omega_\beta = \{x \in B_r \mid V(x) \le \beta\}$$

در این صورت Ω_β، درون B_r خواهد بود* (شکل ۳ ـ ۱ را ملاحظه کنید). مجموعهٔ Ω_β دارای این ویژگی است که هر مسیری که در لحظهٔ $t = 0$ در Ω_β آغاز شود، برای تمامی مقادیر $t \ge 0$ در Ω_β باقی خواهد ماند، زیرا بر اساس عبارت (۳ ـ ۳) داریم:

$$\dot{V}(x(t)) \le 0 \Rightarrow V(x(t)) \le V(x(0)) \le \beta, \quad \forall t \ge 0$$

* این واقعیت را می‌توان از طریق برهان خلف نیز نشان داد: فرض کنید مجموعهٔ Ω_β، درون B_r نباشد در این صورت نقطه‌ای مانند $p \in \Omega_\beta$ وجود دارد که در مرز B_r قرار گرفته است، در این نقطه داریم: $V(p) > \alpha > \beta$، اما می‌دانیم برای همهٔ نقاط $x \in \Omega_\beta$، $V(x) \le \beta$ است و این، تناقض است.



شکل ۳ ـ ۱ نمایش هندسی مجموعه‌ها در برهان قضیهٔ ۳ ـ ۱

چون Ω_β مجموعه‌ای فشرده است* از قضیهٔ ۲ ـ ۴ نتیجه می‌شود اگر $x(0) \in \Omega_\beta$ باشد آنگاه معادلهٔ (۳ ـ ۱) به ازای جمیع مقادیر $t \ge 0$، دارای پاسخی یکتاست. از آنجا که $V(x)$ تابعی پیوسته و $V(0) = 0$ است، مقداری برای $\delta > 0$ چنان وجود دارد که به ازای آن می‌توان نوشت:

$$\|x\| \le \delta \Rightarrow V(x) < \beta$$

پس:

$$B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r$$

و:

$$x(0) \in B_\delta \Rightarrow x(0) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in B_r$$

بنابراین:

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < r \le \varepsilon, \quad \forall t \ge 0$$

که نشان می‌دهد نقطهٔ تعادلِ $x = 0$ پایدار است. اینک فرض می‌کنیم عبارت (۳ ـ ۴) نیز برقرار باشد، در این صورت برای بررسی پایداری مجانبی باید نشان دهیم: $t \to \infty \Rightarrow x(t) \to 0$، به تعبیر دیگر باید نشان دهیم برای هر $\alpha > 0$، مقداری مانند $T > 0$ چنان وجود دارد که به ازای آن برای هر $t > 0$، عبارت $\|x(t)\| < \alpha$ برقرار است. با تکرار استدلال قبل، واضح است برای هر $\alpha > 0$، می‌توان مقداری مانند $b > 0$ چنان یافت که داشته باشیم: $\Omega_b \subset B_\alpha$؛ لذا کافی است

* طبق تعریف، Ω_β بسته است و چون درون B_r قرار دارد کراندار می‌باشد.

نشان دهیم با افزایش t به سمت بینهایت، $V(x(t))$ به‌سمت صفر سوق خواهد یافت. چون $V(x(t))$ به طور یکنوا کاهشی است و از پایین با مقدار صفر کراندار می‌باشد یعنی:

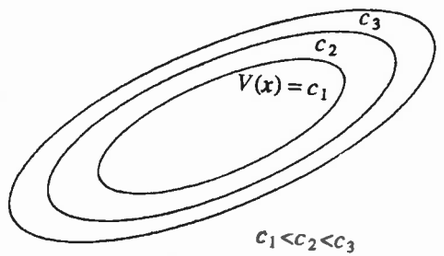
$$t \to \infty \Rightarrow V(x(t)) \to c \geq 0$$

بنابراین برای اثبات صفر بودن c از برهان خلف استفاده می‌کنیم: فرض نمایید $c > 0$ باشد در این صورت از پیوستگی تابع $V(x)$ نتیجه می‌شود مقداری مانند $d > 0$ چنان وجود دارد که به‌ازای آن $B_d \subset \Omega_c$ است. عبارت حدّی $V(x(t)) \to c > 0$ بدین معناست که مسیر حالت $x(t)$ برای همهٔ مقادیر $t \geq 0$، خارج از گوی B_d می‌باشد. فرض کنید داشته باشیم: $-\gamma = max_{d \leq \|x\| \leq r} \dot{V}(x)$ که این مقدار وجود دارد زیرا تابع پیوستهٔ $\dot{V}(x)$ دارای مقدار بیشینه‌ای روی مجموعهٔ فشردهٔ $\{d \leq \|x\| \leq r\}$ است*. از رابطهٔ (۳ ـ ۴) نتیجه می‌شود: $\gamma > 0$ ـ، لذا:

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}(x(\tau))\, d\tau \leq V(x(0)) - \gamma t$$

چون سمت راست عبارت فوق مقداری منفی است، لذا نامساوی پیشگفته، متناقض با فرض $c > 0$ می‌باشد. □

هر تابع پیوسته ـ مشتق‌پذیر $V(x)$ که شروط (۳ ـ ۲) و (۳ ـ ۳) را برآورده کند، *تابع لیاپانوف*[1] و رویهٔ $V(x) = c$ (به ازای مقادیر $c > 0$)، *رویهٔ لیاپانوف*[2] یا *رویهٔ سطح*[3] نامیده می‌شود. شکل ۳ ـ ۲ با استفاده از رویه‌های لیاپانوف، درک قضیه را ساده می‌کند.



شکل ۳ ـ ۲ رویه‌های سطح یک تابع لیاپانوف

* [۷، قضیهٔ ۴ ـ ۲۰] را ملاحظه کنید.

1. Lyapunov function
2. Lyapunov surface
3. Level surface

این شکل نشاندهندهٔ رویه‌های لیاپانوف برای مقادیر کاهشی c می‌باشد. شرط $\dot{V} < 0$ بیانگر این نکته است که وقتی یکی از مسیرهای حالت، رویهٔ لیاپانوف $V(x) = c$ را قطع می‌کند، وارد مجموعهٔ $\Omega_c = \{x \in R^n \mid V(x) \leq c\}$ شده، دیگر از آن خارج نمی‌گردد. هنگامی که $\dot{V} < 0$ است، مسیر حالت با مقدار cی کوچکتری، از یک رویهٔ لیاپانوف به سمت یکی دیگر از رویه‌های درونی لیاپانوف سوق می‌یابد. هرچه c کاهش یابد رویهٔ لیاپانوفِ $V(x) = c$ بیشتر به سمت مبدأ منقبض می‌شود که بدین معناست که با افزایش زمان، مسیر حالت به مبدأ نزدیک می‌گردد. اگر فقط بدانیم $\dot{V} < 0$ است نمی‌توان مطمئن بود مسیرهای حالت به سمت مبدأ سوق می‌یابند* اما می‌توان نتیجه گرفت مبدأ پایدار است زیرا از این شرط که حالت اولیهٔ $x(0)$ درون رویهٔ لیاپانوفی محصور درگوی اختیاری B_ε است، می‌توان نتیجه گرفت مسیر حالت نیز درون آن گوی قرار گرفته است.

هر تابع $V(x)$ که شرط (۳ ـ ۲) را برآورده کند، یعنی: $V(0) = 0$ و $V(x) > 0$ (برای $x \neq 0$)، معیّن مثبت نامیده می‌شود. اگر این تابع شرط ضعیفتر $V(x) \geq 0$ (برای $x \neq 0$) را برآورده کند، نیمه معیّن مثبت[1] خوانده می‌شود. تابع $V(x)$ را معیّن منفی[2] و یا نیمه معیّن منفی[3] می‌گوییم اگر $-V(x)$ بترتیب معیّن مثبت یا نیمه معیّن مثبت باشد. چنانچه تابع $V(x)$ علامت معیّنی به ازای هر یک از این چهار حالت نداشته باشد، آن را نامعیّن[4] می‌نامیم. اکنون با این واژه‌نگاری می‌توان قضیهٔ لیاپانوف را با عبارت ذیل نیز بیان کرد:

مبدأ پایدار است اگر تابع معیّن مثبت و پیوسته ـ مشتق‌پذیر $V(x)$ چنان وجود داشته باشد که $\dot{V}(x)$، نیمه معیّن منفی باشد. این نقطه پایدار مجانبی است اگر تابع $\dot{V}(x)$ معیّن منفی باشد.

دسته‌ای از توابع عددیِ $V(x)$، که می‌توان علامت معیّن بودن آنها را بسادگی بررسی کرد، خانوادهٔ توابع به صورت مجذوری[5] است، یعنی:

$$V(x) = x^T P x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, x_i\, x_j$$

* قضیهٔ لاسَل را در بخش ۳ ـ ۲ ملاحظه کنید

1. Positive semidefinite
2. Negative definite
3. Negative semidefinite
4. Indefinite
5. Quadraric form

که P ماتریس متقارن حقیقی است. در این حالت، $V(x)$ معیّن مثبت (یا نیمه معیّن مثبت) است اگر و تنها اگر همهٔ مقادیر ویژهٔ P مثبت (یا متناظراً غیر منفی) باشد بدین معنا که باید همهٔ کهادهای پیشرو اصلی[1] ماتریس P، مثبت (و یا متناظراً همهٔ کهادهای پیشرو اصلی ماتریس P غیر منفی) باشد* اگر تابع $V(x) = x^T Px$، معیّن مثبت (یا نیمه معیّن مثبت) باشد، گوییم ماتریس P معیّن مثبت (یا متناظراً نیمه معیّن مثبت) است و می‌نویسیم: $P > 0$ (یا متناظراً: $P \geq 0$).

مثال ۳ ـ ۱ تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$V(x) = ax_1^2 + 2x_1x_3 + ax_2^2 + 4x_2x_3 + ax_3^2$$

$$= [x_1\ x_2\ x_3]\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x^T Px$$

کهادهای پیشرو اصلی ماتریس P برابر است با: a، a^2 و $a(a^2 - 5)$. بنابراین $V(x)$ معیّن مثبت است اگر $a > \sqrt{5}$ باشد. برای معیّن منفی بودن باید کهادهای پیشرو اصلیِ $-P$، مثبت باشد، به تعبیر دیگر باید کهادهای پیشرو اصلی P، یک درمیان تغییر علامت دهند به طوری که کهادهای مرتبهٔ فرد، منفی و کهادهای مرتبهٔ زوج، مثبت باشند؛ بنابراین $V(x)$ معیّن منفی است اگر $a < -\sqrt{5}$ باشد. با محاسبهٔ کهادهای پیشرو اصلی مشخص می‌شود اگر $a \geq \sqrt{5}$ باشد $V(x)$ نیمه معیّن مثبت و اگر $a \leq -\sqrt{5}$ باشد، $V(x)$ نیمه معیّن منفی خواهد بود؛ به ازای مقادیر $a \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ هم $V(x)$ نامعیّن است. Δ

می‌توان قضیهٔ لیاپانوف را بدون حل معادلهٔ دیفرانسیل (۳ ـ ۱) به کار گرفت. لیکن هیچ روش منظمی برای یافتن توابع لیاپانوف وجود ندارد. در برخی حالتها می‌توان از نامزدهایی[2] طبیعی به عنوان تابع لیاپانوف استفاده کرد، مانند توابع انرژی در سیستمهای الکتریکی یا مکانیکی. اما

* این موضوع یکی از نکات کاملاً آشنا در نظریهٔ ماتریسهاست، می‌توان برهان آن را در [۱۶] یا [۵۳] ملاحظه کرد.

1. Principle minors
2. Candidate

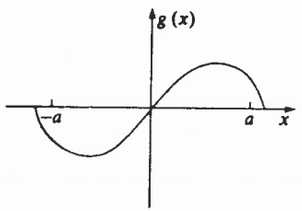
در حالتهای دیگر یافتن تابع لیاپانوف بر اساس روش آزمون و خطا انجام می‌پذیرد. البته وضع به آن بدی هم که به نظر می‌رسد نیست و ضمن بررسی مثالهای مختلف و کاربردهای آنها در طیّ این کتاب، ایده‌ها و روشهای گوناگونی برای جستجوی توابع لیاپانوف ارائه خواهد شد.

مثال ۳ ـ ۲ معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = -g(x)$$

که $g(x)$ بر بازهٔ $(-a, a)$ لیپ شیتز محلی است و شروط ذیل را نیز ارضا می‌کند:

$$g(0) = 0; \quad xg(x) > 0, \quad \forall x \neq 0,\ x \in (-a, a)$$



شکل ۳ ـ ۳ نمونه‌ای از غیر خطی‌گری مربوط به مثال ۳ ـ ۲

نمونه‌ای از تابع $g(x)$ در شکل ۳ ـ ۳ نشان داده شده است. سیستم دارای یک نقطهٔ تعادلِ تنها در مبدأ است. در این مثالِ ساده، بررسی پایداری مجانبی مبدأ چندان دشوار نیست؛ زیرا پاسخهایی که از هر طرف مبدأ آغاز شوند بنا به علامت $\dot{x}$ به سوی مبدأ سوق خواهند یافت. برای دستیابی به همین نتیجه با استفاده از قضیهٔ لیاپانوف، تابع ذیل را روی قلمرو $D = (-a, a)$ در نظر می‌گیریم:

$$V(x) = \int_0^x g(y)\,dy$$

تابع $V(x)$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر و $V(0) = 0$ است، ضمناً به ازای همهٔ مقادیر $x \neq 0$ داریم: $V(x) > 0$. بنابراین $V(x)$ یکی از نامزدهای معتبر تابع لیاپانوف است. برای بررسی اینکه آیا $V(x)$ واقعاً یک تابع لیاپانوف است یا خیر، مشتقش را در امتداد مسیرهای حالت سیستم می‌یابیم:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}[-g(x)] = -g^{۲}(x) < ۰, \quad \forall x \in D - \{۰\}$$

بنابراین از قضیهٔ ۳ ـ ۱ نتیجه می‌شود مبدأ، نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی است. Δ

مثال ۳ ـ ۳ معادلهٔ پاندول را بدون اصطکاک درنظر می‌گیریم:

$$\dot{x}_۱ = x_۲$$

$$\dot{x}_۲ = -\left(\frac{g}{l}\right) sinx_۱$$

هدف، مطالعهٔ پایداری نقطهٔ تعادل واقع در مبدأ است. یکی از نامزدهای طبیعی تابع لیاپانوف، تابع انرژی سیستم می‌باشد:

$$V(x) = \left(\frac{g}{l}\right)(۱ - cosx_۱) + \frac{۱}{۲}x_۲^{۲}$$

واضح است که $V(۰) = ۰$ و $V(x)$ نیز در فاصلهٔ $-۲\pi \le x_۱ \le ۲\pi$، معیّن مثبت است. مشتق تابع $V(x)$ در امتداد مسیرهای حالت سیستم با عبارت ذیل بیان می‌شود:

$$\dot{V} = \left(\frac{g}{l}\right)\dot{x}_۱ sinx_۱ + x_۲\dot{x}_۲ = \left(\frac{g}{l}\right)x_۲ sinx_۱ - \left(\frac{g}{l}\right)x_۲ sinx_۱ = ۰$$

بنابراین شروط (۳ ـ ۲) و (۳ ـ ۳) مربوط به قضیهٔ ۳ ـ ۱ تأمین شده و لذا مبدأ، پایدار است. علاوه بر این چون $\dot{V}(x) \equiv ۰$ می‌باشد مبدأ، پایدار مجانبی نیست، ضمناً تمامی مسیرهای حالتی که از رویهٔ لیاپانوف $V(x) = c$ آغاز می‌شود، در همهٔ لحظات آینده روی همان رویه باقی می‌ماند.

Δ

مثال ۳ ـ ۴ دیگر بار معادلهٔ پاندول را درنظر بگیرید اما این بار فرض کنید اصطکاک نیز حضور داشته باشد:

$$\dot{x}_۱ = x_۲$$

$$\dot{x}_۲ = -\left(\frac{g}{l}\right) sinx_۱ - \left(\frac{k}{m}\right)x_۲$$

دوباره تابع $V(x) = (g/l)(۱ - cosx_۱) + \frac{۱}{۲}x_۲^{۲}$ را به عنوان نامزد تابع لیاپانوف در نظر

می‌گیریم؛ پس:

$$\dot{V}(x) = \left(\frac{g}{l}\right)\dot{x}_۱ sinx_۱ + x_۲\dot{x}_۲ = -\left(\frac{k}{m}\right)x_۲^{۲}$$

$\dot{V}(x)$ نیمه معیّن مثبت است. این تابع معیّن منفی نیست زیرا به ازای $x_۲ = ۰$ (و قطع نظر از مقدار $x_۱$) داریم: $\dot{V}(x) = ۰$. به تعبیر دیگر $\dot{V}(x)$ در امتداد محور $x_۱$ برابر با صفر می‌باشد؛ بنابراین می‌توان فقط نتیجه گرفت مبدأ، پایدار است. اما با استفاده از پیکرهٔ فازِ معادلهٔ پاندول دیدیم مبدأ با شرط $k > ۰$، پایدار مجانبی می‌باشد در حالی که تابع لیاپانوف انرژی در نشان دادن این حقیقت، ناتوان است. کمی بعدتر در بخش ۳ ـ ۲ خواهیم دید به کمک قضیه‌ای منتسب به لاسَل می‌توان با استفاده از تابع لیاپانوف انرژی به نتیجه‌ای متفاوت رسید اما در این مقطع، به دنبال تابع لیاپانوف $V(x)$ هستیم که مشتق آن، $\dot{V}(x)$، معیّن منفی باشد. با استفاده از مفهوم تابع لیاپانوف انرژی، عبارت $\frac{۱}{۲}x_۲^{۲}$ را با صورت کلّی‌تر مجذورِ آن، یعنی $\frac{۱}{۲}x^T Px$ (که P ماتریسی معیّن مثبت با ابعاد ۲ × ۲ است)، جایگزین می‌کنیم. در نتیجه:

$$V(x) = \frac{۱}{۲}x^T Px + \left(\frac{g}{l}\right)(۱ - cosx_۱)$$

$$= \frac{۱}{۲}[x_۱ \; x_۲]\begin{bmatrix} p_{۱۱} & p_{۱۲} \\ p_{۱۲} & p_{۲۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} + \left(\frac{g}{l}\right)(۱ - cosx_۱)$$

برای اینکه صورت مجذورِ $\frac{۱}{۲}x^T Px$ معیّن مثبت باشد، باید درایه‌های ماتریس P در روابط ذیل صدق کند:

$$p_{۱۱} > ۰; \quad p_{۲۲} > ۰; \quad p_{۱۱}p_{۲۲} - p_{۱۲}^{۲} > ۰$$

تابع مشتق $\dot{V}(x)$ عبارت است از:

$$\dot{V}(x) = \left[p_{۱۱}x_۱ + p_{۱۲}x_۲ + \left(\frac{g}{l}\right)sinx_۱\right]x_۲$$
$$+ (p_{۱۲}x_۱ + p_{۲۲}x_۲)\left[-\left(\frac{g}{l}\right)sinx_۱ - \left(\frac{k}{m}\right)x_۲\right]$$
$$= \left(\frac{g}{l}\right)(۱ - p_{۲۲})x_۲ sinx_۱ - \left(\frac{g}{l}\right)p_{۱۲}x_۱ sinx_۱$$
$$+ \left[p_{۱۱} - p_{۱۲}\left(\frac{k}{m}\right)\right]x_۱x_۲ + \left[p_{۱۲} - p_{۲۲}\left(\frac{k}{m}\right)\right]x_۲^{۲} +$$

اکنون باید مقادیر p_{11}، p_{12} و p_{22} را چنان بیابیم که تابع $\dot{V}(x)$ معیّن منفی باشد. با توجه به اینکه حاصل‌ضرب خارجی[1] جملات $x_2 sinx_1$ و $x_1 x_2$، نامعیّن است، می‌توان با انتخاب $p_{22} = 1$ و $p_{11} = (k/m)p_{12}$، اثر آنها را حذف کرد. با این انتخاب، باید p_{12} در نامساوی $0 < p_{12} < (k/m)$ صدق کند تا $V(x)$ معیّن مثبت شود. با فرض $p_{12} = 0/5(k/m)$، $\dot{V}(x)$ عبارت است از:

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{g}{l}\right)\left(\frac{k}{m}\right)x_1 sinx_1 - \left(\frac{k}{m}\right)x_2^2$$

که جملهٔ $x_1 sinx_1$ برای تمامی مقادیر $|x_1| < \pi$، $|x_1| > 0$، مثبت است. اگر مجموعهٔ D را به شکل $D = \{x \in R^2 \mid |x_1| < \pi\}$ در نظر بگیریم، ملاحظه می‌شود روی این مجموعه، تابع $V(x)$ معیّن مثبت و تابع $\dot{V}(x)$ معیّن منفی است؛ بنابراین طبق قضیهٔ ۳ ـ ۱، مبدأ پایدار مجانبی می‌باشد. Δ

این مثال بر یکی از وجوه مهم قضیهٔ پایداری لیاپانوف تأکید می‌ورزد و آن اینکه: *شروط قضیه فقط شرط کافی هستند*. بدین معنا که عدم توفیق در یافتن نامزد تابع لیاپانوفی که شروط پایداری و پایداری مجانبی را برآورده کند به این معنا نیست که نقطهٔ تعادل، پایدار یا پایدار مجانبی نیست و تنها این نکته از آن استنباط می‌شود که نمی‌توان ویژگیهای پایداری را به کمک نامزدهای تابع لیاپانوف بررسی کرد و این موضوع که آیا نقطهٔ تعادل، پایدار (یا پایدار مجانبی) است تنها با بررسی بیشتر امکانپذیر می‌باشد.

در جستجوی تابع لیاپانوف برای مثال ۳ ـ ۴، مسأله را به روش پسرو[2] حل کردیم؛ بدین معنا که نخست عبارتی را برای تابع $V(x)$ در نظر گرفتیم و سپس پارامترهای $V(x)$ را چنان برگزیدیم که تابع $\dot{V}(x)$، معیّن منفی باشد. این روش، راه مناسبی برای جستجوی تابع لیاپانوف است. روندی که ویژگیهای این روش را بخوبی آشکار می‌کند، تحت عنوان شیوهٔ *گرادیان متغیر*[3] شناخته می‌شود. برای تشریح این روند، فرض کنید $V(x)$ تابعی عددی از متغیر x باشد و داشته باشیم: $g(x) = \nabla V = (\partial V/\partial x)^T$. در این صورت تابع مشتق، $\dot{V}(x)$، در

1. Cross product 2. Backward 3. Variable gradient method

امتداد مسیرهای حالت معادلهٔ (۳ ـ ۱) با عبارت ذیل بیان می‌گردد:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = g^T(x) f(x)$$

اکنون می‌خواهیم که تابع $g(x)$ را چنان برگزینیم که برابر با گرادیان تابع معیّن مثبت $V(x)$ شود و در عین حال، تابع $\dot{V}(x)$ نیز معیّن منفی باشد. می‌توان بسادگی نشان داد (تمرین ۳ ـ ۵) تابع $g(x)$، گرادیان یک تابع عددی است اگر و تنها اگر ماتریس ژاکوبیِ $[\partial g/\partial x]$ متقارن باشد؛ یعنی:

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, \quad \forall i, j = 1 \ldots, n$$

با این شرط، $g(x)$ را چنان انتخاب می‌کنیم که تابع $g^T(x) f(x)$ معیّن منفی باشد، در این صورت می‌توان تابع $V(x)$ را از انتگرال ذیل به دست آورد:

$$V(x) = \int_0^x g^T(y)\, dy = \int_0^x \sum_{i=1}^{n} g_i(y)\, dy_i$$

این انتگرال بر روی هر مسیری که مبدأ را به نقطهٔ x متصل کند، محاسبه می‌شود* ولی غالباً آن را در امتداد محورها حساب می‌کنند؛ یعنی:

$$V(x) = \int_0^{x_1} g_1(y_1, 0, \ldots, 0)\, dy_1 + \int_0^{x_2} g_2(x_1, y_2, 0, \ldots, 0)\, dy_2$$

$$+ \ldots + \int_0^{x_n} g_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y_n)\, dy_n$$

با توجه به اینکه برخی از پارامترهای تابع $g(x)$ نامعلومند، سعی می‌شود این پارامترها را چنان برگزینیم که تابع $V(x)$ معیّن مثبت شود. می‌توان شیوهٔ گرادیان متغیر را برای به دست آوردن تابع لیاپانوف مثال ۳ ـ ۴ نیز به‌کار برد، اما به جای تکرار این مثال، استفاده از آن را در سیستمی کلّی‌تر نشان می‌دهیم.

* انتگرال خطی بردار گرایان، مستقل از مسیر است؛ [۷، قضیهٔ ۱۰ ـ ۳۷] را ملاحظه کنید

مثال ۳ ـ ۵ سیستم مرتبهٔ دوم ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -h(x_1) - ax_2$$

که $a > 0$ ، $h(\cdot)$ لیپ شیتز محلی، $h(0) = 0$ و مقدار عبارت $yh(y)$ نیز به ازای جمیع مقادیر $y \neq 0$ و $y \in (-b, c)$ (که b و c ثابتهای مثبتی هستند)، مثبت است. معادلهٔ پاندول، حالت خاصی از این سیستم می‌باشد. برای اعمال شیوهٔ گرادیان متغیر، باید بردار مرتبه دوم $g(x)$ را چنان انتخاب کنیم که داشته باشیم:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2} = \frac{\partial g_2}{\partial x_1}$$

برای: $x \neq 0$ ، $\dot{V}(x) = g_1(x)x_2 - g_2(x)[h(x_1) + ax_2] < 0$

و:

برای: $x \neq 0$ ، $V(x) = \int_0^x g^T(y)\,dy > 0$

فرض کنید $g(x)$ را به شکل زیر برگزینیم:

$$g(x) = \begin{bmatrix} \alpha(x)x_1 + \beta(x)x_2 \\ \gamma(x)x_1 + \delta(x)x_2 \end{bmatrix}$$

در این صورت باید توابع عددی $\alpha(\cdot)$ ، $\beta(\cdot)$ ، $\gamma(\cdot)$ و $\delta(\cdot)$ تعیین شوند. برای برآوردن شرط تقارن، باید داشته باشیم:

$$\beta(x) + \frac{\partial \alpha}{\partial x_2}x_1 + \frac{\partial \beta}{\partial x_2}x_2 = \gamma(x) + \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial \delta}{\partial x_1}x_2$$

مشتق $\dot{V}(x)$ با عبارت ذیل بیان می‌گردد:

$$\dot{V}(x) = \alpha(x)x_1x_2 + \beta(x)x_2^2 - a\gamma(x)x_1x_2$$
$$- a\delta(x)x_2^2 - \delta(x)x_2h(x_1) - \gamma(x)x_1h(x_1)$$

برای حذف اثر جمله‌های ضرب خارجی، با انتخاب:

$$\alpha(x)x_1 - a\gamma(x)x_1 - \delta(x)h(x_1) = 0$$

خواهیم داشت: $\dot{V}(x) = -[a\delta(x) - \beta(x)]x_2^2 - \gamma(x)x_1h(x_1)$

بـه مـنظور سـاده کـردن انـتخابها مـقادیر ذیـل را بـرمی‌گزینیم: ثـابت $= \delta(x) = \delta$ ، ثابت $= \gamma(x) = \gamma$ و ثابت $= \beta(x) = \beta$. در این صورت $\alpha(x)$ فقط به x_1 وابسته است و شرط تقارن نیز با انتخاب $\beta = \gamma$ برآورده می‌شود، پس می‌توان نوشت:

$$g(x) = \begin{bmatrix} a\gamma x_1 + \delta h(x_1) + \gamma x_2 \\ \gamma x_1 + \delta x_2 \end{bmatrix}$$

و با انتگرالگیری نتیجه می‌گردد:

$$V(x) = \int_0^{x_1} [a\gamma y_1 + \delta h(y_1)]\,dy_1 + \int_0^{x_2} (\gamma x_1 + \delta y_2)\,dy_2$$

$$= \frac{1}{2}a\gamma x_1^2 + \delta\int_0^{x_1} h(y)\,dy + \gamma x_1x_2 + \frac{1}{2}\delta x_2^2 = \frac{1}{2}x^TPx + \delta\int_0^{x_1} h(y)\,dy$$

که:

$$P = \begin{bmatrix} a\gamma & \gamma \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

در نتیجه با انتخاب $\delta > 0$ و $0 < \gamma < a\delta$ ، مطمئن خواهیم بود تابع $V(x)$ معیّن مثبت و تابع $\dot{V}(x)$ نیز معیّن منفی است. برای مثال با قرار دادن $\gamma = ak\delta$، به ازای $0 < k < 1$ ، تابع لیاپانوف به شکل زیر بیان می‌شود:

$$V(x) = \frac{\delta}{2}x^T\begin{bmatrix} ka^2 & ka \\ ka & 1 \end{bmatrix}x + \delta\int_0^{x_1} h(y)\,dy$$

این تابع شروط (۳ـ۲) و (۳ـ۴) مربوط به قضیهٔ ۳ـ۱ را برقلمرو $D = \{x \in R^2 \mid -b < x_1 < c\}$ برآورده می‌کند؛ بنابراین مبدأ پایدار مجانبی است. Δ

هنگامی که مبدأ، $x = 0$، پایدار مجانبی است اغلب مایلیم بدانیم اگر مسیرهای حالت با

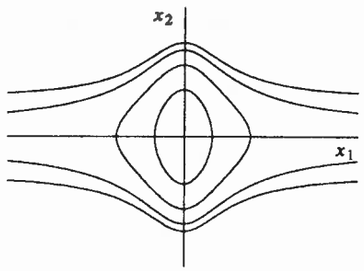
افزایش t به سمت بینهایت، به سوی مبدأ همگرا شوند، حداکثر فاصلهٔ آنها نسبت به مبدأ چقدر می‌تواند باشد. این موضوع موجب تعریف مفهوم جدیدی به نام *ناحیهٔ جذابیت*[1] (*ناحیهٔ پایداری مجانبی*[2]، *قلمرو جذابیت*[3] و یا *حوزه*[4]) می‌شود. فرض کنید $\varphi(t;x)$ پاسخ معادلهٔ (۳ ـ ۱) باشد که از حالت اولیهٔ x در زمان $t = 0$ آغاز می‌گردد، در این صورت ناحیهٔ جذابیت به صورت مجموعه‌ای از همهٔ نقاط x تعریف می‌شود که برای آنها داریم: $\lim_{t\to\infty} \varphi(t;x) = 0$

در عمل ممکن است یافتن ناحیهٔ جذابیت به طور تحلیلی بسیار دشوار (و یا حتی ناممکن) باشد؛ لیکن می‌توان به کمک توابع لیاپانوف، تخمینی از ناحیهٔ جذابیت را ارائه نمود. یعنی می‌توان مجموعه‌هایی را مشخص کرد که در ناحیهٔ جذابیت محصور هستند. از برهان قضیهٔ ۳ ـ ۱ به خاطر داریم اگر تابع لیاپانوفی وجود داشته باشد که شروط پایداری مجانبی را بر قلمرو D برآورده سازد و اگر مجموعهٔ $\Omega_c = \{x \in R^n \mid V(x) \le c\}$ کراندار و شامل D باشد، آنگاه هر مسیری که از Ω_c آغاز می‌شود در Ω_c نیز باقی می‌ماند و با افزایش t به سمت بینهایت، به سوی مبدأ همگرا می‌شود؛ لذا Ω_c تخمینی از ناحیهٔ جذابیت است اما ممکن است این تخمین کمی محافظه‌کارانه باشد، بدین معنا که ممکن است این مجموعه بسیار کوچکتر از ناحیهٔ جذابیت باشد. در بخش ۴ ـ ۲ مثالهایی را راجع به ناحیهٔ جذابیت بیان و ایده‌هایی را برای تخمین آن ارائه خواهیم کرد. اینک به دنبال پاسخ پرسش دیگری هستیم و آن اینکه: تحت چه شرایطی ناحیهٔ جذابیت همهٔ فضای R^n خواهد بود؟ در واقع این سؤال بدین معناست که تحت چه شرایطی می‌توان گفت مسیر حالت $\varphi(t;x)$ از هر حالت اولیهٔ x (قطع‌نظر از اینکه $\|x\|$ چقدر بزرگ است)، با افزایش t به سمت بینهایت، به سوی مبدأ سوق می‌یابد؟ چنانچه نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی در مبدأ، چنین ویژگی را داشته باشد، آن را نقطهٔ *پایدار مجانبی جامع*[5] نامند. با بازنگری برهان قضیهٔ ۳ ـ ۱ می‌توان گفت زمانی پایداری مجانبی جامع حاصل می‌شود که هر نقطهٔ $x \in R^n$، درون مجموعهٔ کراندار Ω_c قرار گرفته باشد و واضح است برای برآورده کردن این شرایط باید شروط قضیه نیز جامع باشد یعنی داشته باشیم: $D = R^n$؛ اما آیا همین نکته کافی است؟ واقعیت این است که شروط بیشتری لازم است تا مطمئن شویم هر نقطهٔ R^n در مجموعهٔ کراندار Ω_c قرار دارد. مسأله این است که برای مقادیر بزرگ c، لزومی نیست مجموعهٔ

1. Region of attraction
2. Region of asymptotically stability
3. Domain of attraction
4. Basin
5. Globally asymptotically stable

Ω_c کراندار باشد؛ به عنوان مثال تابع ذیل را درنظر بگیرید:

$$V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$$



شکل ۳ ـ ۴ رویه‌های لیاپانوف برای تابع $V(x) = \dfrac{x_1^2}{(1+x_1^2)+x_2^2}$

شکل ۳ ـ ۴ رویه‌های $V(x) = c$ را برای مقادیر مثبت c نشان می‌دهد. برای مقادیر کوچک c، رویهٔ $V(x) = c$ بسته و در نتیجه Ω_c کراندار است زیرا درون گوی بستهٔ B_r (برای برخی مقادیر $r > 0$) محصور است. این نکته پیامدی از پیوستگی و معیّن مثبت بودن تابع $V(x)$ می‌باشد. با افزایش مقدار c به مقداری می‌رسیم که برای مقادیر بزرگتر از آن، رویهٔ $V(x) = c$ باز و مجموعهٔ Ω_c نیز بیکران خواهد شد. برای اینکه Ω_c درون گوی B_r قرار گیرد باید c در نامساوی $c < \inf_{\|x\| \ge r} V(x)$ صدق کند. اگر داشته باشیم:

$$l = \lim_{r\to\infty} \inf_{\|x\| \ge r} V(x) < \infty$$

آنگاه با شرط $c < l$، مجموعهٔ Ω_c کراندار خواهد بود. برای مثال قبل می‌توان نوشت:

$$l = \lim_{r\to\infty} \min_{\|x\| = r} \left[\frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2\right] = \lim_{|x_1|\to\infty} \frac{x_1^2}{1+x_1^2} = 1$$

بنابراین اگر $c < 1$ باشد، Ω_c کراندار است. شرط اضافی دیگری که ما را مطمئن می‌سازد به‌ازای جمیع مقادیر $c > 0$، Ω_c کراندار می‌باشد عبارت است از: $V(x) \to \infty \Rightarrow \|x\| \to \infty$. تابعی که

چنین شرطی را برآورده کند، بیکران شعاعی[1] می‌نامند.

قضیهٔ ۳ ـ ۲ *فرض کنید* $x = 0$ *یکی از نقاط تعادل معادلهٔ (۳ ـ ۱) و تابع* $V: R^n \to R$ *نگاشتی پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد که برای آن داشته باشیم:*

$$V(0) = 0 \quad \text{و} \quad V(x) > 0 \ , \quad \forall x \neq 0 \tag{۳ ـ ۵}$$

$$\|x\| \to \infty \Rightarrow V(x) \to \infty \tag{۳ ـ ۶}$$

$$\dot{V}(x) < 0 \ , \ \forall x \neq 0 \tag{۳ ـ ۷}$$

آنگاه نقطهٔ $x = 0$*، پایدار مجانبی است.* ◇

برهان: برای نقطهٔ اختیاریِ $p \in R^n$، فرض می‌کنیم: $c = V(p)$. شرط (۳ ـ ۶) بدین معناست که برای هر $c > 0$، مقداری مانند $r > 0$ چنان یافت می‌شود که با شرط $\|x\| > r$، $V(x) > c$ خواهد بود؛ بنابراین $\Omega_c \subset B_r$ و در نتیجه Ω_c کراندار است. ادامهٔ برهان مشابه برهان قضیهٔ ۳ ـ ۱ می‌باشد. □

قضیهٔ ۳ ـ ۲ به نام قضیهٔ باربashین ـ کراسوسکی[2] شناخته می‌شود. تمرین ۳ ـ ۷، مثال نقضی را نشان می‌دهد که در آن شرط بیکران شعاعی قضیه، واقعاً لازم است.

مثال ۳ ـ ۶ دیگر بار سیستم مرتبهٔ دوم مثال ۳ ـ ۵ را با این فرض درنظر می‌گیریم که برای تمامی مقادیر $y \neq 0$ داشته باشیم: $yh(y) > 0$. تابع لیاپانوف ذیل:

$$V(x) = \frac{\delta}{2} x^T \begin{bmatrix} ka^2 & ka \\ ka & 1 \end{bmatrix} x + \delta \int_0^{x_1} h(y)\, dy$$

به ازای جمیع مقادیر $x \in R^2$، معیّن مثبت و بیکران شعاعی است. مشتق این تابع، یعنی:

$$\dot{V}(x) = -a\delta(1-k)x_2^2 - a\delta k x_1 h(x_1)$$

1. Radially unbounded 2. Barbashin-Krasovskii theorem

برای تمامی مقادیر $x \in R^2$، معیّن منفی است زیرا $0 < k < 1$ می‌باشد؛ بنابراین مبدأ، پایدار مجانبی جامع است. Δ

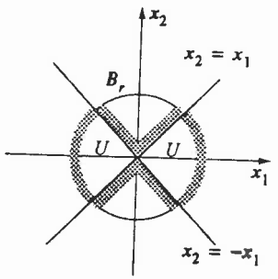
اگر نقطهٔ $x = 0$، نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی جامع سیستمی باشد، آنگاه باید نقطهٔ تعادل یکتای آن سیستم نیز باشد؛ زیرا اگر نقطهٔ تعادل دیگری مانند $\bar{x}$ وجود داشته باشد باید هریک از مسیرهایی که از $\bar{x}$ آغاز می‌شود، برای تمامی مقادیر $t \geq 0$، در آنجا بماند در نتیجه به سوی مبدأ میل نخواهد کرد و این، خلاف ادّعای پایداری مجانبی جامع مبدأ می‌باشد. بنابراین واضح است مفهوم پایداری مجانبی جامع برای سیستمهای با نقاط تعادل چندگانه (مانند معادلهٔ پاندول) قابل بررسی نیست.

قضایای ۳ ـ ۱ و ۳ ـ ۲ مربوط به پایداری یا پایداری مجانبیِ نقطهٔ تعادل است، لیکن قضایایی نیز در مورد ناپایداری نقطهٔ تعادل وجود دارد. قویترین قضیه در این خصوص، موسوم به قضیهٔ چِتِف[1] است که در اینجا به عنوان قضیهٔ ۳ ـ ۳ بیان می‌گردد. قبل از بیان این قضیه، برخی واژه‌نگاریهای کاربردی درآن را معرفی می‌کنیم. فرض کنید $V: D \to R$ تابعی پیوسته ـ مشتق‌پذیر بر قلمرو $D \subset R^n$ و شامل $x = 0$ باشد؛ ضمناً فرض کنید $V(0) = 0$ باشد و نقطه‌ای اختیاری مانند x_0 نزدیک به مبدأ چنان یافت شود که داشته باشیم: $V(0) > 0$. مقدار $r > 0$ را چنان انتخاب می‌کنیم که گوی $B_r = \{x \in R^n \mid \|x\| \leq r\}$ در D محصور باشد، علاوه بر این فرض کنید داشته باشیم:

$$U = \{x \in B_r \mid V(x) > 0\} \tag{۳ ـ ۸}$$

مجموعهٔ U، مجموعه‌ای غیر تهی و محصور در B است که مرزش با رویهٔ $V(x) = 0$ و کرهٔ[2] $\|x\| = r$ مشخص می‌گردد. چون $V(0) = 0$ است مبدأ بر مرز U و درون B قرار دارد. شایان ذکر اینکه ممکن است مجموعهٔ U بیش از یک مؤلفه داشته باشد، برای مثال شکل ۳ ـ ۵ نشاندهندهٔ مجموعهٔ U برای $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$ می‌باشد. باید اشاره کرد همواره می‌توان مجموعهٔ U را چنان یافت که به ازای مقدار اختیاری x_0 نزدیک به مبدأ داشته باشیم: $V(0) = 0$ و $V(x_0) > 0$.

1. Chetaev's theorem 2. Sphere



شکل ۳ ـ ۵ مجموعهٔ U برای $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$

قضیهٔ ۳ ـ ۳ *فرض کنید $x = 0$، نقطهٔ تعادل معادلهٔ (۳ ـ ۱) و $V : D \longrightarrow R$ تابعی پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد که برای آن داشته باشیم: $V(0) = 0$ و $V(x_0) > 0$ (برای مقدار اختیاری x_0 با $\| x_0 \|$ کوچک). با تعریف مجموعهٔ U مشابه عبارت (۳ ـ ۸) و با این فرض که برای تابع V در مجموعهٔ U داشته باشیم: $\dot{V}(x) = a > 0$، آنگاه می‌توان گفت $x = 0$ ناپایدار است.* ◇

برهان: نقطهٔ x_0 درون مجموعهٔ U قرار دارد و داریم: $V(x_0) = a > 0$. مسیر $x(t)$ که از نقطهٔ $x(0) = x_0$ آغاز می‌شود باید مجموعهٔ U را ترک کند؛ برای ملاحظهٔ این نکته باتوجه به اینکه $\dot{V}(x)$ در U، مثبت است لذا در طول مدتی که $x(t)$ درون U می‌باشد، داریم: $V(x(t)) \geq a$. حال فرض می‌کنیم:

$$\gamma = min \{ \dot{V}(x) \mid x \in U \text{ و } V(x) \geq a \}$$

چنین مقداری وجود دارد زیرا تابع پیوستهٔ $\dot{V}(x)$ دارای مقدار کمینه‌ای بر روی مجموعهٔ فشردهٔ $\{ x \in U , V(x) \geq a \} = \{ x \in B_r , V(x) \geq a \}$ می‌باشد*. در این صورت $\gamma > 0$ است و داریم:

$$V(x(t)) = V(x_0) + \int_0^t \dot{V}(x(s))\, ds \geq a + \int_0^t \gamma\, ds = a + \gamma t$$

* [۷، قضیهٔ ۴ ـ ۲۰] را ملاحظه کنید.

این نامساوی نشان می‌دهد $x(t)$ نمی‌تواند برای همیشه در U بماند زیرا $V(x)$ روی U کراندار است، از سوی دیگر $x(t)$ نمی‌تواند از میان رویهٔ $V(x) = 0$، U را ترک کند زیرا $V(x(t)) \geq a$ می‌باشد؛ بنابراین باید U را از طریق کرهٔ $\| x \| = r$ ترک کند و چون این موضوع برای مقدار کاملاً اختیاری و کوچک $\| x_0 \|$ رخ داده، لذا مبدأ ناپایدار است. □

قضایای دیگری نیز دربارهٔ ناپایداری قبل از قضیهٔ چتف اثبات شده‌اند لیکن همهٔ آنها نتایج و قضایای فرعی[1] این قضیه هستند؛ برای مثال تمرینهای ۳ ـ ۱۰ و ۳ ـ ۱۱ را ملاحظه کنید.

مثال ۳ ـ ۷ سیستم مرتبهٔ دوم ذیل را درنظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_1 + g_1(x)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + g_2(x)$$

که $g_1(0)$ و $g_2(0)$ شرط ذیل را در همسایگی D حول مبدأ برآورده می‌کنند:

$$| g_i(x) | \leq k \| x \|_2^2$$

این نامساوی به طور ضمنی بیان می‌کند که: $g_i(0) = 0$؛ درنتیجه مبدأ نقطهٔ تعادل است. اکنون تابع زیر را درنظر بگیرید:

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$$

بر روی خط $x_2 = 0$، $V(x)$ در نقاط بسیار نزدیک به مبدأ، مثبت است. مجموعهٔ U در شکل ۳ ـ ۵ نشان داده شده است.

مشتق تابع $V(x)$ در امتداد مسیرهای حالت سیستم با عبارت ذیل بیان می‌گردد:

$$\dot{V}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 g_1(x) - x_2 g_2(x)$$

اندازهٔ جملهٔ $x_1 g_1(x) - x_2 g_2(x)$ در نامساوی زیر صدق می‌کند:

1. Corollary

$$|x_1 g_1(x) - x_2 g_2(x)| \le \sum_{i=1}^{2} |x_i| \cdot |g_i(x)| \le 2k \|x\|_2^3$$

بنابراین:

$$\dot{V}(x) \ge \|x\|_2^2 - 2k\|x\|_2^3 = \|x\|_2^2 (1 - 2k\|x\|_2)$$

با انتخاب r با شرط: $B_r \subset D$ و $r < 1/2k$، مشاهده می‌شود همهٔ شروط قضیهٔ ۳ ـ ۳ برآورده می‌گردد و در نتیجه مبدأ ناپایدار است. Δ

۳ ـ ۲ اصل پایایی

در بررسی معادلهٔ پاندولِ همراه با اصطکاک (مثال ۳ ـ ۴)، دیدیم تابع لیاپانوف انرژی در ارضای شرط پایداری مجانبیِ قضیهٔ ۳ ـ ۱ شکست می‌خورد؛ زیرا تابع $\dot{V}(x) = -(k/m)x_2^2$ فقط نیمه معیّن منفی است. باید توجه کرد $\dot{V}(x)$ در همهٔ نقاط، مگر روی خط $x_2 = 0$ که مقدار تابع مشتق در آن برابر با صفر است، منفی می‌باشد. برای برقراری شرط $\dot{V}(x) = 0$ باید مسیر سیستم بر خط $x_2 = 0$ منطبق گردد که بجز نقاط خط $x_1 = 0$، در بقیهٔ نقاط، این موضوع ناممکن است زیرا از معادلهٔ پاندول داریم:

$$x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_2(t) \equiv 0 \Rightarrow \sin x_1(t) \equiv 0$$

بنابراین بر روی پاره‌خط $-\pi < x_1 < \pi$ از خط $x_2 = 0$، شرط $\dot{V}(x) = 0$ تنها در مبدأ $(x = 0)$ برقرار است، لذا باید $V(x(t))$ به سمت صفر کاهش یابد و در نتیجه با افزایش t به سمت بینهایت، $x(t)$ به سمت صفر میل کند. این موضوع با درک فیزیکی ما نیز سازگار است زیرا به دلیل وجود اصطکاک، انرژی مجموعه به هنگام حرکت سیستم ثابت نمی‌ماند.

بحث فوق نشان می‌دهد اگر در قلمرویی حول مبدأ بتوان تابع لیاپانوفی یافت که مشتقش در امتداد مسیرهای حالت سیستم، نیمه معیّن منفی باشد و اگر بتوان نشان داد هیچ مسیری نمی‌تواند به طور کامل در نقاطی که $\dot{V}(x) = 0$ است، باقی بماند (مگر در مبدأ)، در این صورت می‌توان گفت مبدأ، پایدار مجانبی است. این موضوع از *اصل پایایی*[1] لاسل ناشی

1. Invariance principle

می‌شود که دراین بخش مورد بحث قرار می‌گیرد. برای بیان و اثبات قضیهٔ پایایی لاسل لازم است تعاریف جدیدی را بیان کنیم: فرض کنید $x(t)$، پاسخ معادلهٔ (۳ ـ ۱) باشد، در این صورت نقطهٔ p را *نقطهٔ حدّی مثبت*[1] $x(t)$ گویند اگر دنباله‌ای مانند $\{t_n\}$ چنان وجود داشته باشد که از شرط $n \to \infty \Rightarrow t_n \to \infty$ بتوان نتیجه گرفت: $n \to \infty \Rightarrow x\{t_n\} \to \infty$. مجموعهٔ تمامی نقاط حدی مثبت را مجموعهٔ حدّی مثبت[2] $x(t)$ می‌نامند. مجموعهٔ M را مجموعهٔ پایا[3] نسبت به معادلهٔ (۳ ـ ۱) گوییم اگر داشته باشیم:

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \quad \forall t \in R$$

به تعبیر دیگر مجموعهٔ M را در صورتی پایا گوییم که اگر در لحظه‌ای از زمان، پاسخی متعلق به M باشد آنگاه در همهٔ لحظات آتی و قبلی نیز متعلق به آن بماند. مجموعهٔ M را *پایای مثبت*[4] گویند اگر داشته باشیم:

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \quad \forall t \ge 0$$

علاوه بر این گوییم $x(t)$ با افزایش زمان به سمت بینهایت، به مجموعهٔ M نزدیک می‌شود اگر برای هر $\varepsilon > 0$، مقدار $T > 0$ چنان وجود داشته باشد که:

$$dist(x(t), M) < \varepsilon, \quad \forall t > T$$

$dist(p, M)$ نشاندهندهٔ فاصلهٔ نقطهٔ p تا مجموعهٔ M می‌باشد که طبق تعریف عبارت است از کوتاهترین فاصلهٔ نقطهٔ p تا هر نقطهٔ M؛ به طور دقیقتر می‌توان نوشت:

$$dist(p, M) = \inf_{x \in M} \|p - x\|$$

می‌توان این مفاهیم را با بررسی یک نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی و نیز یک چرخهٔ حدّی پایدار در صفحه بیشتر تشریح کرد. نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی، مجموعهٔ حدّی مثبت پاسخهایی است که از نقاط کاملاً نزدیک به نقطهٔ تعادل آغاز شده‌اند. چرخهٔ حدّی پایدار نیز مجموعهٔ حدّی مثبت

1. Positive limit point
2. Positive limit set
3. Invariant set
4. Positively invariant

پاسخهایی است که از نقاط کاملاً نزدیک به چرخهٔ حدّی آغاز شده‌اند. این پاسخها با افزایش t به‌سمت بینهایت، به سوی چرخهٔ حدّی میل می‌کنند، اما باید توجه داشت که روی چرخهٔ حدّی به سمت هیچ نقطهٔ مشخصی همگرا نمی‌شوند. به تعبیر دیگر مفهوم $t \to \infty \Rightarrow x(t) \to M$ این نیست که مقدار $x(t)$ حـــدّ $t \to \infty$ وجود دارد. نقطهٔ تعادل و چرخهٔ حدّی، مجموعه‌هایی پایا هستند زیرا هر پاسخی که از هریک از این دو مجموعه آغاز شود، به‌ازای جمیع مقادیر $t \in R$، درون آن دو بـاقی مـی‌ماند. مـجموعهٔ $\Omega_c = \{x \in R^n \mid V(x) \le c\}$ همراه بـا شـرط $\forall x \in \Omega_c, \dot{V}(x) \le 0$ پایای مثبت است زیرا همچنانکه در برهان قضیهٔ ۳ ـ ۱ دیدیم هر پاسخی که از Ω_c آغاز می‌شود به ازای تمامی مقادیر $t > 0$ در Ω_c باقی خواهد ماند.

یکی از ویژگیهای اساسی مجموعه‌های حدّی در لم ذیل بیان شده که برهان آن در پیوست آ ـ ۲ آمده است.

لم ۳ ـ ۱ *اگر پاسخ $x(t)$ مربوط به معادلهٔ (۳ ـ ۱) برای تمامی مقادیر $t > 0$، کراندار و متعلق به مجموعهٔ D باشد، آنگاه مجموعهٔ حدّی مثبت آن (L^+)، مجموعه‌ای ناتهی، فشرده و پایاست و می‌توان نوشت:*

$$t \to \infty \Rightarrow x(t) \to L^+ \qquad \diamond$$

قضیهٔ ۳ ـ ۴ *فرض کنید $\Omega \subset D$ مجموعه‌ای فشرده باشد که نسبت به معادلهٔ (۳ ـ ۱) پایای مثبت است. علاوه بر این فرض کنید $V: D \to R$ مجموعه‌ای پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد که مشتق آن ($\dot{V}(x)$) در Ω نامثبت است. در این صورت اگر E مجموعهٔ همهٔ نقاطی از Ω باشد که به ازای آنها داریم: $\dot{V}(x) = 0$ و نیز M بزرگترین مجموعهٔ پایای موجود در E باشد، آنگاه با افزایش t، هر یک از پاسخهایی که از Ω آغاز شده‌اند به سوی M میل می‌کند.* $\diamond$

برهان: فرض کنید $x(t)$ پاسخی از معادلهٔ (۳ ـ ۱) باشد که از Ω آغاز شده است. چون در Ω، $\dot{V}(x) < 0$ است لذا $V(x(t))$ نسبت به t کاهنده می‌باشد. علاوه بر این با توجه به پیوستگی $V(x)$ بر روی مجموعهٔ فشردهٔ Ω، تابع $V(x)$ دارای حدّ a است. ضمناً باید توجه داشت چون مجموعهٔ Ω بسته است لذا مجموعهٔ حدّی مثبت L^+ درون Ω واقع شده است. برای هر

نقطهٔ $p \in L^+$، دنباله‌ای مانند $\{t_n\}$ چنان وجود دارد که با شرط $n \to \infty$، $t_n \to \infty$ بتوان نوشت: $x(t_n) \to p$ و از پیوستگی $V(x)$ نتیجه می‌شود: $V(x(t_n)) = a$ حـــدّ $n \to \infty$ $V(p) = a$. بنابراین روی L^+ داریم: $V(x) = a$ و چون براساس لم ۳ ـ ۱، L^+ مجموعه‌ای پایاست لذا روی L^+ می‌توان نوشت: $\dot{V}(x) = 0$ و در نتیجه: $L^+ \subset M \subset E \subset \Omega$. از سویی طبق لم ۳ ـ ۱، چون $x(t)$ کراندار است با افزایش t به سمت بینهایت، $x(t)$ به سمت L^+ میل می‌کند و درنتیجه: $t \to \infty \Rightarrow x(t) \to M$. □

برخلاف قضیهٔ لیاپانوف، در قضیهٔ ۳ ـ ۴ نیازی نیست $V(x)$ معیّن مثبت باشد؛ علاوه بر این نباید انتخاب مجموعهٔ Ω را به انتخاب $V(x)$ گره زد، اما در بسیاری از موارد، انتخاب $V(x)$ بـتنهایی، وجـود مـجموعهٔ Ω را تـضمین‌می‌کند. در حـالت خـاص اگـر مـجموعهٔ $\Omega_c = \{x \in R^n \mid V(x) \le c\}$ کراندار و تابع $\dot{V}(x)$ در Ω_c نامثبت باشد آنگاه می‌توان Ω را برابر با Ω_c درنظر گرفت. چنانچه $V(x)$ معیّن مثبت باشد، Ω_c نیز به ازای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک $c > 0$، کراندار خواهد بود؛ اگر $V(x)$ معیّن مثبت نباشد، این نکته الزاماً صحیح نخواهد بود. برای مثال در حالت $V(x) = (x_1 - x_2)^2$، صرف‌نظر از اینکه c چقدر کوچک است، مجموعهٔ Ω_c کراندار نیست. اگر $V(x)$ بـیکران شـعاعی بـاشد، یـعنی داشـته بـاشیم: $\|x\| \to \infty \Rightarrow V(x) \to \infty$، مجموعهٔ Ω_c برای تمامی مقادیر c (و قطع‌نظر از اینکه $V(x)$ معیّن مثبت است یا نه)، کراندار می‌باشد. بررسی بیکران شعاعی بودن برای توابع معیّن مثبت، ساده‌تر است زیراکافی است اجازه دهیم x در امتداد محورهای اصلی به سوی بینهایت میل کند؛ لیکن همچنانکه برای تابع $V(x) = (x_1 - x_2)^2$ ملاحظه می‌شود، این نکته برای توابع غیر معیّن مثبت، کافی نیست زیرا در این مثال هم مشهود است که اگـر $\|x\|$ در امـتداد خـطوط $x_1 = 0$ و x_2 به سوی بینهایت میل کند، $V(x)$ نیز به سمت بینهایت سوق خواهد یافت امّا چنانچه $\|x\|$ در امتداد $x_1 = x_2$ به سوی بینهایت حرکت کند، $V(x)$ به سـمت بینهایت سوق نمی‌یابد.

چنانچه هدف این باشد که نشان دهیم: $t \to \infty \Rightarrow x(t) \to 0$، باید ثابت کنیم بـزرگترین مجموعهٔ پایا در E، مبدأ است. بدین منظور نشان می‌دهیم بجز پاسخ بدیهی $x = 0$، هیچیک از پاسخها در E باقی نمی‌ماند. با استفاده از قضیهٔ ۳ ـ ۴ و برگزیدن تابعی معیّن مثبت به عنوان

$V(x)$، دو قضیهٔ فرعی ذیل را نتیجه می‌گیریم که قضایای ۳ ـ ۱ و ۳ ـ ۲ را تعمیم می‌بخشد*.

قضیهٔ فرعی ۳ ـ ۱ *فرض کنید $x = 0$ یکی از نقاط تعادل معادلهٔ (۳ ـ ۱) باشد، علاوه بر این فرض کنید $V: D \to R$ تابعی معیّن مثبت بر قلمرو D و شامل مبدأ $x = 0$ باشد به‌طوری که در مجموعهٔ D داشته باشیم: $\dot{V}(x) \leq 0$. در این صورت اگر $S = \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$ باشد و بجز پاسخ بدیهی هیچیک از پاسخها به طور دائم در S باقی نماند آنگاه مبدأ پایدار مجانبی است.* ◇

قضیهٔ فرعی ۳ ـ ۲ *فرض کنید $x = 0$ یکی از نقاط تعادل معادلهٔ (۳ ـ ۱) باشد، علاوه بر این فرض کنید $V: R^n \to R$ تابعی پیوسته ـ مشتق‌پذیر، بیکران شعاعی و معیّن مثبت باشد به طوری که برای تمامی مقادیر $x \in R^n$ داشته باشیم: $\dot{V}(x) \leq 0$. در این صورت اگر $S = \{x \in R^n \mid \dot{V}(x) = 0\}$ باشد و بجز پاسخ بدیهی هیچیک از پاسخها به طور دائم در S باقی نماند، آنگاه مبدأ پایدار مجانبی جامع است.* ◇

اگر $\dot{V}(x)$ معیّن منفی باشد، داریم: $S = \{0\}$؛ در این صورت قضایای فرعی ۳ ـ ۱ و ۳ ـ ۲ بترتیب معادل قضایای ۳ ـ ۱ و ۳ ـ ۲ خواهد بود.

مثال ۳ ـ ۸ سیستم ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -g(x_1) - h(x_2)$$

که $g(\cdot)$ و $h(\cdot)$، لیپ شیتز محلی هستند و در شروط ذیل نیز صدق می‌کنند:

$$g(0) = 0,\ yg(y) > 0, \quad \forall y \neq 0, \quad y \in (-a, a)$$

$$h(0) = 0,\ yh(y) > 0, \quad \forall y \neq 0, \quad y \in (-a, a)$$

* قضایای فرعی ۳ ـ ۱ و ۳ ـ ۲ به عنوان قضایای باریاشین و کراسوسکی شناخته می‌شوند که آنها را قبل از بیان اصل پایایی لاسَل اثبات کرده بودند.

سیستم دارای یک نقطهٔ تعادل تنها در مبدأ است و بسته به توابع $g(\cdot)$ و $h(\cdot)$ ممکن است نقاط تعادل دیگری نیز داشته باشد. معادلهٔ این سیستم را می‌توان به عنوان معادلهٔ تعمیم یافتهٔ پاندول[1] با $h(x_2)$ به عنوان جملهٔ اصطکاک درنظر گرفت؛ بنابراین نامزد تابع لیاپانوف به شکل تابع شبه انرژی[2] ذیل بیان می‌شود:

$$V(x) = \int_0^{x_1} g(y)\,dy + \frac{1}{2}x_2^2$$

حال فرض کنید $D = \{x \in R^2 \mid -a < x_i < a\}$ باشد، در این صورت $V(x)$ در D معیّن مثبت است. مشتق تابع $V(x)$ در امتداد مسیرهای حالت سیستم با عبارت زیر بیان می‌شود:

$$\dot{V}(x) = g(x_1)x_2 + x_2[-g(x_1) - h(x_2)] = -x_2 h(x_2) \leq 0.$$

بنابراین $\dot{V}(x)$ نیمه‌معیّن منفی است. برای مشخص کردن مجموعهٔ $S = \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$ می‌توان نوشت:

$$\dot{V}(x) = 0 \Rightarrow x_2 h(x_2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \qquad \text{زیرا: } -a < x_2 < a$$

پس $S = \{x \in D \mid x_2 = 0\}$ است. فرض کنید $x(t)$ مسیری است که به طور دائم متعلق به S می‌باشد، در این صورت داریم:

$$x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_2(t) = 0 \Rightarrow g(x_1(t)) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) \equiv 0$$

یعنی تنها پاسخی که می‌تواند به طور دائم در S باقی بماند، پاسخ بدیهی $x(t) = 0$ است و درنتیجه می‌توان گفت مبدأ پایدار مجانبی است. Δ

مثال ۳ ـ ۹ دیگر بار سیستم مثال ۳ ـ ۸ را درنظر بگیرید اما این بار فرض کنید $a = \infty$ و $g(\cdot)$ نیز شرط اضافی زیر را برآورده کند:

1. Generalized pendulum equation
2. Energy-like function

$$|y| \to \infty \Rightarrow \int_0^y g(z)\,dz \to \infty$$

تابع لیاپانوف ذیل:

$$V(x) = \int_0^{x_1} g(y)\,dy + \frac{1}{2}x_2^2$$

بیکران شعاعی است و مشابه مثال قبل می‌توان نشان داد در R^2، $\dot{V}(x) \le 0$ است و مجموعهٔ:

$$S = \{x \in R^2 \mid \dot{V}(x) = 0\} = \{x \in R^2 \mid x_2 = 0\}$$

شامل هیچ پاسخی (مگر پاسخ بدیهی سیستم) نمی‌شود؛ بنابراین مبدأ پایدار مجانبی جامع است. Δ

قضیهٔ لاسَل نه تنها شرط معیّن منفی بودن قضیهٔ لیاپانوف را انعطاف‌پذیرتر می‌کند بلکه این قضیه را در سه جهت مختلف نیز توسعه می‌بخشد: نخست آنکه این قضیه تخمینی از ناحیهٔ جذابیت را ارائه می‌کند که الزاماً به شکل $\Omega_c = \{x \in R^n \mid V(x) \le c\}$ نیست. مجموعهٔ Ω در قضیهٔ ۳ ـ ۴ می‌تواند هر یک از مجموعه‌های فشرده و پایای مثبت باشد. از این نکته در بخش ۴ ـ ۲ استفاده خواهیم کرد تا به تخمینی از ناحیهٔ جذابیت برسیم که کمتر محافظه‌کارانه باشد. دوم اینکه قضیهٔ لاسَل را می‌توان در مواردی به کار بست که سیستم به جای یک نقطهٔ تعادل تنها دارای مجموعهٔ تعادل می‌باشد. این حالت را می‌توان با کاربرد این قضیه در مثال سادهٔ کنترل تطبیقی بخش ۱ ـ ۱ ـ ۶ نشان داد. نکته سوم اینکه لازم نیست تابع $V(x)$ حتماً معیّن مثبت باشد. بهره‌برداری از این نکته را می‌توان با کاربرد آن در مثال شبکهٔ عصبی بخش ۱ ـ ۱ ـ ۵ نشان داد.

مثال ۳ ـ ۱۰ سیستم مرتبهٔ اول ذیل را درنظر بگیرید:

$$\dot{y} = ay + u$$

که قانون کنترل تطبیقی آن به شکل زیر بیان می‌شود:

$$u = -ky, \quad \dot{k} = \gamma y^2, \quad \gamma > 0$$

با انتخاب $x_1 = y$ و $x_2 = k$، سیستم حلقه ـ بسته با رابطهٔ زیر تعریف می‌گردد:

$$\dot{x}_1 = -(x_2 - a)x_1$$

$$\dot{x}_2 = \gamma x_1^2$$

خط $x_1 = 0$ مجموعهٔ تعادل این سیستم است. می‌خواهیم نشان دهیم مسیرهای حالت سیستم با افزایش t به سمت بینهایت به سوی این مجموعهٔ تعادل میل می‌کند به تعبیر دیگر کنترلگر تطبیقی در تنظیم y بر مقدار صفر، موفق است. بدین منظور نامزد تابع لیاپانوف ذیل را درنظر بگیرید:

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2\gamma}(x_2 - b)^2, \quad b > a$$

مشتق تابع V در امتداد مسیرهای حالت سیستم عبارت است از:

$$\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + \frac{1}{\gamma}(x_2 - b)\dot{x}_2$$

$$= x_1^2(x_2 - a) + x_1^2(x_2 - b) = -x_1^2(b - a) \le 0$$

بنابراین: $\dot{V}(x) \le 0$. چون $V(x)$ بیکران‌شعاعی‌است‌لذا مجموعهٔ $\Omega_c = \{x \in R^2 \mid V(x) \le c\}$ فشرده و پایای مثبت است. بنابراین با انتخاب $\Omega = \Omega_c$، تمامی شرایط قضیهٔ ۳ ـ ۴ برآورده می‌شود. مجموعهٔ E را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$E = \{x \in \Omega_c \mid x_1 = 0\}$$

و چون هر نقطهٔ خط $x_1 = 0$، یک نقطهٔ تعادل است، E نیز مجموعه‌ای پایاست؛ بنابراین در این مثال $M = E$ می‌باشد. از قضیهٔ ۳ ـ ۴ نتیجه می‌شود هر مسیر حالتی که از Ω_c آغاز گردد با افزایش t به سمت بینهایت به سوی مجموعهٔ E میل می‌کند؛ یعنی: با میل t به سمت بینهایت، $x_1(t)$ به سوی صفر میل می‌کند. علاوه بر این چون $V(x)$ بیکران شعاعی است این نتیجه، جامع می‌باشد بدین معنا که برای تمامی شروط اولیهٔ $x(0)$ صادق است زیرا برای هر مقدار $x(0)$، ثابت c را می‌توان آنقدر بزرگ انتخاب کرد که داشته باشیم: $x(0) \in \Omega_c$. Δ

باید توجه کرد تابع لیاپانوف مربوط به مثال ۳ ـ ۱۰ به مقدار b وابسته است که b نیز باید

در رابطهٔ $b > a$ صدق کند. از آنجا که در این مسألهٔ کنترل تطبیقی، مقدار ثابت a معلوم نیست، ممکن است مقدار ثابت b را دقیقاً ندانیم اما می‌دانیم همیشه وجود دارد. این موضوع یکی از مزایای دیگر شیوهٔ لیاپانوف را بیان می‌کند که قبلاً آن را ذکر نکرده‌ایم، بدین معنا که گاهی اوقات می‌توان بدون معرفی دقیق تابع لیاپانوف، دربارهٔ وجود آن و ارضای شروط خاص قضیه به طور قطعی اظهار نظر کرد. در مثال ۳ ـ ۱۰ اگر اطلاعاتی راجع به کران a داشته باشیم، می‌توان تابع لیاپانوف را مشخص کرد. برای مثال اگر بدانیم: $|a| \leq \alpha$ (که کران α مشخص است)، می‌توان b را بزرگتر از α انتخاب کرد.

مثال ۳ ـ ۱۱ شبکهٔ عصبی بخش ۱ ـ ۱ ـ ۵ با معادلهٔ زیر بیان می‌شود:

$$\dot{x}_i = \frac{1}{C_i} h_i(x_i) \left[\sum_j T_{ij} x_j - \frac{1}{R_i} g_i^{-1}(x_i) + I_i \right]$$

که $i = 1, 2, \ldots, n$ و متغیرهای حالت x_i، ولتاژهای خروجی تقویت کننده می‌باشد که فقط می‌تواند مقادیر مجموعهٔ زیر را اختیار کند:

$$H = \{x \in R^n \mid -V_M < x_i < V_M\}$$

توابع $g_i : R \to (-V_M, V_M)$، توابع سیگموید هستند و داریم:

$$h_i(x_i) = \frac{dg_i}{du_i}\bigg|_{u_i = g_i^{-1}(x_i)} > 0, \qquad \forall x_i \in (-V_M, V_M)$$

I_i جریانهای ورودی و R_i و C_i نیز مقادیر مثبتند، فرض می‌کنیم شرط تقارن $T_{ij} = T_{ji}$ نیز برآورده شود. چنین سیستمی می‌تواند چند نقطهٔ تعادل در H داشته باشد و فرض می‌شود تمامی نقاط تعادلِ موجود در H تنها باشند. با توجه به شرط تقارن $T_{ij} = T_{ji}$، برداری که iاُمین مؤلفهٔ آن به شکل زیر باشد:

$$-\left[\sum_j T_{ij} x_j - \frac{1}{R_i} g_i^{-1}(x_i) + I_i \right]$$

بردار گرادیانِ تابعی عددی است. با محاسبهٔ مجموع (مشابه با آنچه در شیوهٔ گرادیان متغیر بیان

شد) می‌توان نشان داد این تابع عددی به شکل زیر بیان می‌گردد:

$$V(x) = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j T_{ij} x_i x_j + \sum_i \frac{1}{R_i} \int_0^{x_i} g_i^{-1}(y)\, dy - \sum_i I_i x_i$$

این تابع پیوسته ـ مشتق‌پذیر است اما در حالت کلّی معیّن مثبت نیست. معادلات حالت به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\dot{x}_i = -\frac{1}{C_i} h_i(x_i) \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

اکنون قضیهٔ ۳ ـ ۴ را به $V(x)$، به عنوان تابع نامزد، اعمال می‌کنیم در این صورت مشتق $V(x)$ در امتداد مسیرهای حالت سیستم عبارت است از:

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} h_i(x_i) \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 \leq 0$$

علاوه بر این می‌توان نوشت: $\dot{V}(x) = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \dot{x}_i = 0, \quad \forall i$

بنابراین $\dot{V}(x)$ فقط در نقاط تعادل برابر با صفر است. برای اعمال قضیهٔ ۳ ـ ۴ لازم است مجموعهٔ Ω را تشکیل دهیم:

$$\Omega(\varepsilon) = \{x \in R^n \mid -(V_M - \varepsilon) \leq x_i \leq (V_M - \varepsilon)\}$$

که $\varepsilon > 0$ مقدار اختیاری کوچکی می‌باشد. مجموعهٔ $\Omega(\varepsilon)$ بسته و کراندار است. تنها نکتهٔ باقیمانده این است که نشان دهیم $\Omega(\varepsilon)$ مجموعهٔ پایای مثبت است یعنی مسیرهای حالتی که از $\Omega(\varepsilon)$ آغاز می‌شود در همهٔ لحظات آتی نیز در $\Omega(\varepsilon)$ باقی می‌ماند. برای سادگی، شکل خاصی از تابع سیگموید $g_i(\cdot)$ را درنظر می‌گیریم. فرض کنید داشته باشیم:

$$g_i(u_i) = \frac{2V_M}{\pi} \tan^{-1} \frac{\lambda \pi u_i}{2V_M}, \quad \lambda > 0$$

در این صورت داریم:

$$\dot{x}_i = \frac{1}{C_i} h_i(x_i) \left[\sum_j T_{ij} x_j - \frac{2V_M}{\lambda \pi R_i} \tan \frac{\pi x_i}{2V_M} + I_i \right]$$

برای $|x_i| \geq V_M - \varepsilon$ می‌توان نوشت:

$$\varepsilon \to 0 \Rightarrow \left| \tan \frac{\pi x_i}{2V_M} \right| \geq \tan \frac{\pi (V_M - \varepsilon)}{2V_M} \to \infty$$

چون x_i و I_i کراندارند می‌توان ε را آنقدر کوچک برگزید تا مطمئن شویم که:

برای: $V_M - \varepsilon \leq |x_i| < V_M$ $\quad x_i \sum_j T_{ij} x_j - \frac{2V_M x_i}{\lambda \pi R_i} \tan \frac{\pi x_i}{2V_M} + x_i I_i < 0,$

بنابراین:

برای: $\forall i$ $\quad V_M - \varepsilon \leq |x_i| < V_M,$ $\quad \frac{d}{dt}(x_i^2) = 2x_i \dot{x}_i < 0,$

در نتیجه می‌توان گفت همهٔ مسیرهایی که از $\Omega(\varepsilon)$ آغاز می‌شود در تمامی لحظات آینده نیز درون $\Omega(\varepsilon)$ خواهد ماند؛ در حقیقت مسیرهایی که از $H - \Omega(\varepsilon)$ شروع می‌شود به سمت $\Omega(\varepsilon)$ همگرا می‌گردد و این بدان معناست که تمامی نقاط تعادل سیستم در مجموعهٔ فشردهٔ $\Omega(\varepsilon)$ قرار دارد؛ لذا فقط تعداد معدودی نقطهٔ تعادل تنها می‌تواند وجود داشته باشد. در $\Omega(\varepsilon)$ داریم: $E = M =$ مجموعهٔ نقاط تعادل درون $\Omega(\varepsilon)$. از قضیهٔ ۳ ـ ۴ می‌دانیم هر مسیری که از درون $\Omega(\varepsilon)$ آغاز شود با افزایش t به سمت بینهایت، به سوی M همگرا می‌گردد و چون M شامل نقاط تعادل تنهاست می‌توان نشان داد هر مسیری که به M همگرا شود به سمت یکی از این نقاط تعادل میل می‌کند (تمرین ۳ ـ ۲۲)؛ بنابراین برای هر یک از شرایط اولیهٔ ممکن، همواره مسیرهای حالت سیستم به سمت یکی از نقاط تعادل همگرا خواهد شد و این موضوع ما را مطمئن می‌سازد که سیستم، نوسان نخواهد کرد. Δ

۳ ـ ۳ سیستمهای خطی و خطی‌سازی

سیستم خطی و نامتغیر با زمان زیر:

$$\dot{x} = Ax \qquad (۳ ـ ۹)$$

دارای نقطهٔ تعادلی در مبدأ است. این نقطهٔ تعادل تنهاست اگر و تنها اگر داشته باشیم: $det(A) \neq 0$. اگر $det(A) = 0$ باشد، ماتریس A دارای فضای پوچ[1] غیر بدیهی[2] می‌باشد. هر نقطه در فضای پوچ A، یکی از نقاط تعادل سیستم (۳ ـ ۹) است؛ به بیان دیگر اگر $det(A) = 0$

1. Null space
2. Nontrivial

باشد، سیستم دارای یک زیر فضای تعادل[1] است. البته باید توجه داشت سیستمهای خطی نمی‌توانند چند نقطهٔ تعادل تنهای چندگانه داشته باشند زیرا اگر $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ دو نقطهٔ تعادل معادلهٔ (۳ ـ ۹) باشند، آنگاه از اصل خطی بودن سیستم نتیجه می‌شود هر نقطه بر روی خط واصل بین دو نقطهٔ $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ نیز یک نقطهٔ تعادل سیستم است. می‌توان ویژگیهای پایداری مبدأ را به کمک محل مقادیر ویژهٔ ماتریس A بیان کرد. با یادآوری نظریهٔ سیستمهای خطی* می‌دانیم پاسخ معادلهٔ (۳ ـ ۹) با حالت اولیهٔ $x(0)$ به شکل ذیل بیان می‌گردد:

$$x(t) = exp(At)\, x(0) \qquad (۳ ـ ۱۰)$$

علاوه بر این می‌دانیم برای هر ماتریس A، ماتریس غیر منفردی مانند P (احتمالاً مختلط) وجود دارد که A را به صورت جردن در می‌آورد؛ یعنی:

$$P^{-1} AP = J = block\ diag\,[J_1, J_2, \ldots, J_r]$$

که J_i، بلوک جردن[2] متناظر با مقدار ویژهٔ λ_iی ماتریس A است. بلوک جردن مرتبهٔ m به شکل زیر می‌باشد:

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}_{m \times m}$$

بنابراین:

$$exp(At) = P\, exp(Jt)\, P^{-1} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_i} t^{k-1} exp(\lambda_i t) R_{ik} \qquad (۳ ـ ۱۱)$$

* برای مثال [۲۹]، [۴۱]، [۷۰]، [۸۶] یا [۱۴۲] را ملاحظه کنید.

1. Equilibrium subspace
2. Jordan block

که m_i مرتبهٔ بلوک جردن متناظر با مقدار ویژهٔ λ_i است*. قضیهٔ ذیل، ویژگیهای پایداری مبدأ را بیان می‌کند:

قضیهٔ ۳ ـ ۵ *نقطهٔ تعادل $x = 0$ مربوط به معادلهٔ (۳ ـ ۹) پایدار است اگر و تنها اگر تمامی مقادیر ویژهٔ A در شرط $Re\lambda_i \leq 0$ صدق کند و برای هر مقدار ویژه که برای آن $Re\lambda_i = 0$ است، دارای بلوک جردن متناظری از مرتبهٔ یک باشد. نقطهٔ تعادل $x = 0$ پایدار مجانبی (جامع) است اگر و تنها اگر تمامی مقادیر ویژهٔ ماتریس A در شرط $Re\lambda_i < 0$ صدق کند.* ◇

برهان: از رابطهٔ (۳ ـ ۱۰) ملاحظه می‌شود مبدأ پایدار است اگر و تنها اگر $exp(At)$ برای تمامی مقادیر $t \geq 0$، تابعی کراندار باشد؛ از سویی اگر یکی از مقادیر ویژهٔ A در سمت راست صفحهٔ مختلط قرار داشته باشد، جملهٔ نمایی متناظر با آن در عبارت (۳ ـ ۱۱)، یعنی $exp(\lambda_i t)$، با افزایش t به سمت بینهایت، بیکران خواهد شد بنابراین باید مقادیر ویژه در نیم‌صفحهٔ بستهٔ چپ صفحهٔ مختلط واقع باشد. اگر مرتبهٔ بلوک جردن متناظر با مقادیر ویژهٔ واقع بر محور موهومی، بیشتر از یک باشد، سبب افزایش جملهٔ t^{k-1} در رابطهٔ (۳ ـ ۱۱) به سمت بینهایت خواهد شد؛ لذا لازم است مقادیر ویژهٔ واقع بر محور موهومی دارای بلوک جردنی از مرتبهٔ واحد باشد. بنابراین شرط پایداری، شرط لازم است و البته واضح است که این شرط برای کراندار ماندن $exp(At)$، کافی نیز هست. برای برآوردن شرط پایداری مجانبیِ مبدأ، باید با افزایش t به سمت بینهایت، $exp(At)$ به سمت صفر همگرا شود که با توجه به عبارت (۳ ـ ۱۱) این اتفاق رخ می‌دهد اگر و تنها اگر به ازای جمیع مقادیر i داشته باشیم: $Re\lambda_i < 0$ و چون $x(t)$ به طور خطی به‌حالت اولیهٔ $x(0)$ وابسته است لذا پایداری مجانبی مبدأ، جامع نیز می‌باشد. □

برهان فوق از دید ریاضی نشان می‌دهد چرا برای پایداری لازم است مقادیر ویژهٔ واقع بر محور موهومی دارای بلوک جردنی با مرتبهٔ واحد باشند. مثال ذیل معنای فیزیکی این استلزام را روشن می‌کند:

* به طور معادل، m_i بیانگر تکرّر λ_i (به عنوان صفری از چند جمله‌ای کمین[1] ماتریس A) می‌باشد.

1. Minimal polynomial

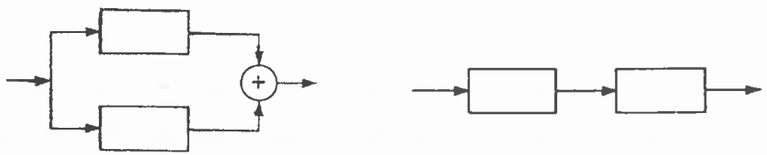
مثال ۳ ـ ۱۲ شکل ۳ ـ ۶ اتصال سری و موازی دو سیستم یکسان را نشان می‌دهد. هر یک از این سیستمها با مدل فضای حالت زیر بیان می‌شود:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \quad 0]\, x$$

که u و y بترتیب ورودی و خروجی سیستم است. فرض کنید A_s و A_p بترتیب ماتریسهای اتصال سری و موازی سیستم پس از مدل شدن به شکل عبارت (۳ ـ ۹) (و بدون ورودیهای راه‌انداز) باشد، در این صورت اگر J_s و J_p بلوکهای جردن متناظر باشد، داریم:

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_p = \begin{bmatrix} j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j \end{bmatrix}$$

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_s = \begin{bmatrix} j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -j \end{bmatrix}$$



(ب) (الف)

شکل ۳ ـ ۶ (الف) اتصال سری؛ (ب) اتصال موازی

که $j = \sqrt{-1}$ است. ماتریسهای A_p و A_s هر دو دارای مقادیر ویژهٔ یکسانی بر روی محور موهومی هستند اما بلوک جردن متناظر برای حالت اتصال موازی از مرتبهٔ یک است در حالی که

بلوک جردن متناظر برای اتصال سری از مرتبهٔ دو می‌باشد. بنابراین بر اساس قضیهٔ ۳ ـ ۵، مبدأ در اتصال موازی، پایدار و در اتصال سری، ناپایدار است. به منظور درک فیزیکی اختلاف میان این دو حالت باید توجه کرد که در حالت اتصال موازی، شرایط اولیهٔ صفر موجب نوسانهایی سینوسی با فرکانس $1\ rad/sec$ می‌شود که توابعی کراندار نسبت به زمان هستند و مجموع آنها نیز کراندار باقی می‌ماند اما از سوی دیگر شرایط اولیهٔ غیر صفر در جزء اول اتصال سری موجب نوسانهایی سینوسی با فرکانس $1\ rad/sec$ می‌شود که به عنوان نیروی راه‌انداز برای جزء دوم سیستم عمل می‌کند و چون جزء دوم دارای فرکانس طبیعی غیر میرای $1\ rad/sec$ می‌باشد لذا نیروی راه‌انداز موجب «تشدید»[1] شده، پاسخ سیستم بیکران خواهد گردید. Δ

هنگامی که همهٔ مقادیر ویژهٔ ماتریس A در شرط $Re\lambda_i < 0$ صدق کند، A را *ماتریس پایداری*[2] یا *ماتریس هرویتز*[3] گوییم. در این صورت مبدأ معادلهٔ (۳ ـ ۹) پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر A ماتریس پایداری باشد. پایداری مجانبیِ مبدأ را می‌توان با استفاده از شیوهٔ لیاپانوف نیز بررسی کرد. بدین منظور نامزد تابع لیاپانوف را به صورت مجذوری ذیل درنظر بگیرید:

$$V(x) = x^T P x$$

که P ماتریسی معیّن مثبت، متقارن و حقیقی می‌باشد. مشتق تابع V در امتداد مسیرهای حالتِ سیستم خطی (۳ ـ ۹) با رابطهٔ ذیل بیان می‌گردد:

$$\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T (PA + A^T P) = -x^T Q x$$

که Q ماتریس متقارنی است که با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$PA + A^T P = -Q \qquad (۱۲ ـ ۳)$$

اگر Q معیّن مثبت باشد طبق قضیهٔ ۳ ـ ۱ مبدأ پایدار مجانبی است یعنی به‌ازای تمامی مقادیر ویژهٔ A رابطهٔ $Re\lambda_i < 0$ برقرار است. دراینجا ما روال معمولی شیوهٔ لیاپانوف را دنبال می‌کنیم که در آن باید ابتدا تابع $V(x)$ را چنان انتخاب کرد که معیّن مثبت باشد و سپس معیّن منفی بودن $\dot{V}(x)$ را بررسی نمود. در مورد سیستمهای خطی، می‌توان ترتیب این دو گام را برعکس درنظر گرفت. فرض کنید بحث را با انتخاب ماتریس Q به‌طوری‌که ماتریسی معیّن مثبت، حقیقی و متقارن باشد، آغاز کنیم و سپس معادلهٔ (۳ ـ ۱۲) را برای به‌دست آوردن P حل نماییم؛ در این

1. Resonance 2. Stability matrix 3. Hurwitz matrix

صورت اگر پاسخ معادلهٔ (۳ ـ ۱۲) معیّن مثبت باشد می‌توان نتیجه گرفت مبدأ پایدار مجانبی است. معادلهٔ (۳ ـ ۱۲) را *معادلهٔ لیاپانوف*[1] می‌نامند. قضیهٔ زیر پایداری مجانبیِ مبدأ را بر اساس ویژگیهای پاسخ معادلهٔ لیاپانوف بیان می‌کند:

قضیهٔ ۳ ـ ۶ *ماتریس A ماتریس پایداری است (یعنی برای تمامی مقادیر ویژهٔ A داریم: $Re\lambda_i < 0$) اگر و تنها اگر برای هر ماتریس متقارن معیّن مثبت مانند Q، ماتریس متقارن معیّن مثبتی مانند P چنان وجود داشته باشد که در معادلهٔ لیاپانوف (۳ ـ ۱۲) صدق کند. علاوه بر این اگر A ماتریس پایداری باشد آنگاه P پاسخ یکتای معادلهٔ (۳ ـ ۱۲) خواهد بود.* $\Diamond$

برهان: شرط کفایت قضیه با انتخاب تابع لیاپانوف به‌شکل $V(x) = x^T P x$ و طبق قضیهٔ ۳ ـ ۱ محقّق است. برای اثبات شرط لازم، فرض کنید تمامی مقادیر ویژهٔ ماتریس A، رابطهٔ $Re\lambda_i < 0$ را برآورده می‌کنند؛ ماتریس P را به شکل زیر درنظر بگیرید:

$$P = \int_0^\infty exp(A^T t)\, Q\, exp(At)\, dt \qquad (۱۳ ـ ۳)$$

تابع درون انتگرال، مجموع جملاتی به شکل $t^{k-1} exp(\lambda_i t)$ است و می‌دانیم: $Re\lambda_i < 0$، لذا این انتگرال دارای پاسخ است. ماتریس P معیّن مثبت و متقارن است. اثبات معیّن مثبت بودن به شرح ذیل است: اگر چنین نباشد بردار $x \neq 0$ را به نحوی برمی‌گزینیم که داشته باشیم: $x^T P x = 0$؛ بنابراین داریم:

$$x^T P x = 0 \Rightarrow \int_0^\infty x^T\, exp(A^T t)\, Q\, exp(At) x\, dt = 0$$

$$\Rightarrow exp(At)x \equiv 0, \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow x = 0$$

زیرا $exp(At)$ به ازای جمیع مقادیر t، غیر منفرد است. این تناقض نشان می‌دهد P معیّن مثبت است، حال با جایگذاری (۳ ـ ۱۳) در سمت چپ عبارت (۳ ـ ۱۲) نتیجه می‌شود:

$$PA + A^T P = \int_0^\infty exp(A^T t)\, Q\, exp(At) A\, dt + \int_0^\infty A^T exp(A^T t)\, Q\, exp(At)\, dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{d}{dt} exp(A^T t)\, Q\, exp(At)\, dt = exp(A^T t)\, Q\, exp(At)\,|_0^\infty = -Q$$

1. Lyapunov equation

که نشان می‌دهد P در واقع پاسخ معادلهٔ (۳ ـ ۱۲) است. برای اثبات یکتایی پاسخ، فرض کنید $\tilde{P} \neq P$ پاسخ دیگری برای معادله باشد، در این صورت داریم:

$$(P-\tilde{P})A + A^T(P-\tilde{P}) = 0$$

با پیش‌ضرب[1] $exp(A^T t)$ و پس‌ضرب[2] $exp(At)$ در عبارت فوق، خواهیم داشت:

$$0 = exp(A^T t)\left[(P-\tilde{P})A + A^T(P-\tilde{P})\right]exp(At) = \frac{d}{dt}exp(A^T t)(P-\tilde{P})exp(At)$$

لذا می‌توان نوشت:

$$exp(A^T t)(P-\tilde{P})exp(At) \equiv a \quad \text{ثابت} \quad \forall t$$

ضمناً چون $exp(Ao) = I$ است، داریم:

$$t \to \infty \Rightarrow (P-\tilde{P}) = exp(A^T t)(P-\tilde{P})exp(At) \to 0$$

بنابراین، $\tilde{P} = P$. □

می‌توان با شرط معیّن مثبت بودن Q، با انعطاف بیشتری برخورد کرد. این موضوع را به عنوان تمرین به خواننده وامی‌گذاریم (تمرین ۳ ـ ۲۴) که تحقیق کند می‌توان Q را به صورت ماتریسی نیمه معیّن به شکل $Q = C^T C$ درنظر گرفت که زوج[3] (A, C)، رؤیت‌پذیر[4] باشد.

معادلهٔ (۳ ـ ۱۲)، معادله‌ای جبری و خطی است که می‌توان آن را با تغییر به شکل $Mx = y$ حل کرد که x و y از تفکیک ستونی درایه‌های ماتریس P و Q به صورت برداری (مشابه مثال بعدی) حاصل می‌شود. روشهای عددی توانمندی برای حل اینگونه معادلات وجود دارد*.

مثال ۳ ـ ۱۳ فرض کنید داشته باشیم:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

* به منظور بررسی روشهای عددیِ حل معادلات جبری خطی، [۵۷] را ملاحظه کنید. می‌توان معادلهٔ لیاپانوف را به عنوان حالت خاصی از معادلهٔ سیلوستر $PA + BP + C = 0$ درنظر گرفت که در [۵۷] مورد بررسی قرار گرفته است. تقریباً تمامی برنامه‌های نرم‌افزاری تجاری مربوط به سیستمهای کنترل، شامل نکاتی دربارهٔ حل معادلهٔ لیاپانوف هستند.

1. Premultiplying
2. Postmultiplying
3. Pair
4. Observable
5. Sylvester's equation

که به علّت تقارن داریم: $p_{21} = p_{12}$. می‌توان معادلهٔ لیاپانوف (۳ ـ ۱۲) را به شکل ذیل نوشت:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

پاسخ یکتای این معادله با رابطهٔ زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ -0/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1/5 & -0/5 \\ -0/5 & 1/0 \end{bmatrix}$$

ماتریس P معیّن مثبت است زیرا کهادهای پیشرو اصلی آن (۱/۵ ، ۱/۲۵) مثبتند. بنابراین تمامی مقادیر ویژهٔ ماتریس A در نیم‌صفحهٔ باز سمت چپ صفحهٔ مختلط قرار دارند. Δ

به جای محاسبهٔ مقادیر ویژهٔ ماتریس A می‌توان از معادلهٔ لیاپانوف برای بررسی اینکه آیا A ماتریس پایداری است یا نه بهره جُست. برای این کار در ابتدا باید ماتریس مثبت معیّن Q را انتخاب کرد (مثلاً: $Q = I$) و آنگاه معادلهٔ لیاپانوف (۳ ـ ۱۲) را برای یافتن ماتریس P حل کرد. چنانچه پاسخ معادله، معیّن مثبت باشد A ماتریس پایداری است و در غیر این صورت نیست. لیکن حلّ معادلهٔ لیاپانوف هیچ مزیت محاسباتی بر محاسبهٔ مقادیر ویژهٔ A ندارد*. علاوه بر این مقادیر ویژه، اطلاعات مستقیم بیشتری در خصوص پاسخ سیستم خطی ارائه می‌کند. محبوبیت معادلهٔ لیاپانوف نه به دلیل استفاده از آن در تعیین پایداری سیستمهای خطی است**، بلکه در

* یکی از روالهای معمولی برای حل معادلهٔ لیاپانوف (الگوریتم بارتلز ـ استوارت[1] [۵۷]) با تبدیل ماتریس A به صورت حقیقی شور[2] آغاز می‌شود که مقادیر ویژهٔ A را نتیجه می‌دهد. بنابراین پیچیدگی محاسباتی حل معادلهٔ لیاپانوف از پیچیدگی محاسبهٔ مقادیر ویژه بیشتر است. سایر الگوریتمهای حل معادلهٔ لیاپانوف دارای حجم محاسباتی بیشتری نسبت به الگوریتم بارتلز ـ استوارت هستند.

** البته جالب است بدانیم می‌توان از معادلهٔ لیاپانوف برای به دست آوردن معیار مرسوم روت ـ هرویتز[3] استفاده کرد؛ [۲۹]، صص. ۴۱۷ ـ ۴۱۹] را ملاحظه کنید.

1. Bartels-Stewart Algorithm
2. Real Schur form
3. Routh-Hurwitz criterion

این نکته است که در حالتی که A ماتریس پایداری است، روندی را برای یافتن تابع لیاپانوفِ هر سیستم خطی به شکل معادلهٔ (۳ ـ ۹) ارائه می‌دهد. صرف وجود تابع لیاپانوف ما را مجاز می‌دارد تا در حالتی که عبارت سمت راست معادله، یعنی Ax، آشفته می‌شود نتایجی را راجع به سیستم بیان کنیم، چه این آشفتگی به شکل آشفتگی خطی در ضرایب A باشد و یا به صورت آشفتگی غیرخطی. این موضوع در ادامهٔ بحث دربارهٔ شیوهٔ لیاپانوف، آشکارتر خواهد شد.

سیستم غیر خطی معادلهٔ (۳ ـ ۱) را درنظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x)$$

که $f: D \to R^n$ نگاشتی پیوسته ـ مشتق‌پذیر از قلمرو $D \subset R^n$ به R^n است. فرض کنید مبدأ $x = 0$ واقع در درون D، نقطهٔ تعادل سیستم باشد؛ یعنی: $f(0) = 0$. طبق قضیهٔ مقدار میانگین می‌توان نوشت:

$$f_i(x) = f_i(0) + \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)\,x$$

که z_i، نقطه‌ای روی پاره‌خط واصل میان x و مبدأ است. تساوی فوق برای همهٔ نقاط $x \in D$ برقرار است به طوری که پاره‌خط واصل بین x و مبدأ به طور کامل درون D قرار گیرد. چون $f(0) = 0$ است، می‌توان $f_i(x)$ را به شکل زیر نوشت:

$$f_i(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)\,x = \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)\,x + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)\right] x$$

بنابراین:

$$f(x) = Ax + g(x)$$

که:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0), \quad \text{و} \quad g_i(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)\right] x$$

تابع $g_i(x)$ شرط ذیل را برآورده می‌سازد:

$$|g_i(x)| \le \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right\| \|x\|$$

از شرط پیوستگیِ $[\partial f / \partial x]$ نتیجه می‌شود:

$$\|x\| \to 0 \Rightarrow \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \to 0$$

و این بدان معناست که در همسایگی کوچکی حول مبدأ، می‌توان رفتار غیرخطی سیستم (۳ ـ ۱) را با خطی شدهٔ آن سیستم حول مبدأ تقریب زد؛ یعنی:

$$\dot{x} = Ax, \qquad A = \frac{\partial f}{\partial x}(0)$$

قضیهٔ زیر شرایطی را بیان می‌کند که تحت آنها می‌توان نتایج مربوط به پایداری مبدأ (به عنوان نقطهٔ تعادل یک سیستم غیرخطی) را با بررسی پایداری آن نقطه به عنوان نقطهٔ تعادل سیستمی خطی بیان نمود. این قضیه تحت عنوان شیوهٔ غیرمستقیم *لیاپانوف*[1] شناخته می‌شود.

قضیهٔ ۳ ـ ۷ *فرض کنید $x = 0$ یکی از نقاط تعادل سیستم غیر خطی $\dot{x} = f(x)$ باشد که $f: D \to R^n$ تابعی پیوسته ـ مشتق‌پذیر و D نیز همسایگی حول مبدأ می‌باشد؛ در این صورت اگر داشته باشیم:*

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x)\Big|_{x=0}$$

آنگاه: ۱ ـ مبدأ پایدار مجانبی است اگر به ازای جمیع مقادیر ویژهٔ ماتریس A داشته باشیم: $Re\,\lambda_i < 0$؛

۲ ـ مبدأ ناپایدار است اگر برای یک یا چند مقدار ویژهٔ A داشته باشیم: $Re\,\lambda_i > 0$؛

◇

برهان: برای اثبات قسمت اول، فرض کنید A ماتریس پایداری باشد؛ در این صورت با توجه به قضیهٔ ۳ ـ ۶ می‌دانیم برای هر ماتریس متقارن و معیّن مثبت Q، پاسخ معادلهٔ لیاپانوف (۳ ـ ۱۲)، معیّن مثبت است. حال تابع $V(x) = x^T P x$ را به عنوان نامزد تابع لیاپانوف سیستم غیر خطی برمی‌گزینیم. مشتق تابع $V(x)$ در امتداد مسیرهای حالت سیستم با عبارت ذیل بیان می‌گردد.

$$\dot{V}(x) = x^T P f(x) + f^T(x) P x$$

$$= x^T P [Ax + g(x)] + [x^T A^T + g^T(x)] P x$$

1. Lyapunov's indirect method

$$= x^T (PA + A^T P)x + 2x^T Pg(x)$$

$$= -x^T Qx + 2x^T Pg(x)$$

اولین جملهٔ سمت راست در عبارت فوق، معیّن منفی است درحالی‌که جملهٔ دوم در حالت کلّی، نامعیّن می‌باشد. از سویی برای تابع $g(x)$ داریم:

$$\|x\|_2 \to 0 \Rightarrow \frac{\|g(x)\|_2}{\|x\|_2} \to 0$$

بنابراین برای هر $\gamma > 0$، مقدار $r > 0$ چنان وجود دارد که:

بنابراین داریم: $$\|g(x)\|_2 < \gamma \|x\|_2, \quad \forall \|x\|_2 < r$$

$$\dot{V}(x) < -x^T Qx + 2\gamma \|P\|_2 \|x\|_2^2, \quad \forall \|x\|_2 < r$$

اما می‌دانیم: $$x^T Qx \geq \lambda_{min}(Q) \|x\|_2^2$$

که $\lambda_{min}(0)$ نشاندهندهٔ کوچکترین مقدار ویژهٔ ماتریس است. باید توجه داشت که چون Q ماتریسی متقارن و معیّن مثبت است، لذا $\lambda_{min}(Q)$ نیز حقیقی و مثبت می‌باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\dot{V}(x) < -[\lambda_{min}(Q) - 2\gamma \|P\|_2] \|x\|_2^2, \quad \forall \|x\|_2 < r$$

با انتخابِ $\gamma < \lambda_{min}(Q)/2\|P\|_2$، مطمئن خواهیم بود که $\dot{V}(x)$ معیّن منفی است و با توجه به قضیهٔ ۳ ـ ۱ نتیجه می‌شود مبدأ پایدار مجانبی است. برای اثبات قسمت دوم قضیه، ابتدا حالت خاصی را درنظر می‌گیریم که A هیچگونه مقدار ویژه‌ای بر محور موهومی نداشته باشد. در این صورت اگر مقادیر ویژهٔ A را به دو گروه موجود در نیم‌صفحهٔ باز سمت راست و نیم‌صفحهٔ باز سمت چپ صفحهٔ مختلط تفکیک کنیم، ماتریس غیر منفردی مانند T را می‌توان یافت* که به ازای آن داشته باشیم:

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

* روشهای مختلفی برای یافتن T وجود دارد؛ یکی از آنها تبدیل ماتریس A به صورت حقیقی جردن آن است [۵۷].

که A_1 و A_2 ماتریسهای پایداری هستند. حال فرض کنید داشته باشیم:

$$z = Tx = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

که افراز[1] z با ابعاد A_1 و A_2 سازگار است، در این صورت تغییر متغیر $z = Tx$، سیستم $\dot{x} = Ax + g(x)$ را به شکل زیر تبدیل می‌کند:

$$\dot{z}_1 = -A_1 z_1 + g_1(z)$$

$$\dot{z}_2 = A_2 z_2 + g_2(z)$$

توابع $g_i(z)$ این ویژگی را دارا هستند که برای هر $\gamma > 0$، مقدار $r > 0$ چنان وجود دارد که:

$$\|g_i(z)\|_2 < \gamma \|z\|_2, \quad \forall \|z\|_2 \leq r, \quad i = 1,2$$

مبدأ $z = 0$ یکی از نقاط تعادل سیستم در مختصات z می‌باشد. با توجه به اینکه T ماتریسی غیر منفرد است* لذا به طور واضح می‌توان گفت نتایج حاصل دربارهٔ ویژگیهای پایداری $z = 0$ در مورد نقطهٔ $x = 0$ (در مختصات x) نیز برقرار است. برای اثبات ناپایداری مبدأ از قضیهٔ ۳ ـ ۳ استفاده می‌کنیم. به دست آوردن تابع $V(z)$ در اصل مشابه با مثال ۳ ـ ۷ بسیار ساده است جز آنکه باید به جای عدد از بردار استفاده نمود. فرض کنید Q_1 و Q_2 ماتریسهایی متقارن و معیّن مثبت باشند که بترتیب با ماتریسهای A_1 و A_2 هم بُعد می‌باشند. از آنجا که A_1 و A_2 ماتریسهای پایداری هستند با توجه به قضیهٔ ۳ ـ ۶ می‌دانیم معادلات لیاپانوف زیر:

$$P_i A_i + A_i^T P_i = -Q_i \qquad i = 1,2$$

دارای پاسخهای یکتای معیّن مثبت P_1 و P_2 می‌باشند. اگر داشته باشیم:

$$V(z) = z_1^T P_1 z_1 - z_2^T P_2 z_2 = z^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{bmatrix} z$$

* برای بحث کلّی در خصوص نگاشتهای حافظ پایداری، تمرین ۳ ـ ۲۷ را ملاحظه کنید.

1. Partition

آنگاه در زیر فضای $z_۲ = ۰$ و برای نقاط بسیار نزدیک به مبدأ، $V(z) > ۰$ است. فرض کنید که:

$$U = \{z \in R^n \mid \|z\|_۲ \le r \text{ و } V(z) > ۰\}$$

در این صورت در مجموعهٔ U می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= -z_۱^T (P_۱A_۱ + A_۱^T P_۱) z_۱ + ۲z_۱^T P_۱ g_۱(z) \\ &\quad - z_۲^T (P_۲A_۲ + A_۲^T P_۲) z_۲ + ۲z_۲^T P_۲ g_۲(z) \\ &= z_۱^T Q_۱ z_۱ + z_۲^T Q_۲ z_۲ + ۲z^T \begin{bmatrix} P_۱ g_۱(z) \\ -P_۲ g_۲(z) \end{bmatrix} \\ &\ge \lambda_{min}(Q_۱) \|z_۱\|_۲^۲ + \lambda_{min}(Q_۲) \|z_۲\|_۲^۲ \\ &\quad - ۲\|z\|_۲ \sqrt{\|P_۱\|_۲^۲ \|g_۱(z)\|_۲^۲ + \|P_۲\|_۲^۲ \|g_۲(z)\|_۲^۲} \\ &> (\alpha - ۲\sqrt{۲}\beta\gamma) \|z\|_۲^۲\end{aligned}$$

که: $\alpha = min\{\lambda_{min}(Q_۱), \lambda_{min}(Q_۲)\}$، $\beta = max\{\|P_۱\|_۲, \|P_۲\|_۲\}$

بنابراین با انتخاب $\gamma < \alpha / ۲\sqrt{۲}\beta$، مطمئن هستیم $\dot{V}(z)$ در U، منفی است. بنابراین طبق قضیهٔ ۳ ـ ۳، مبدأ ناپایدار است. باید توجه کرد که می‌توان قضیهٔ ۳ ـ ۳ را به مختصات اصلی نیز اعمال نمود؛ بدین منظور با تعریف ماتریسهای زیر:

$$P = T^T \begin{bmatrix} P_۱ & ۰ \\ ۰ & -P_۲ \end{bmatrix} T; \quad Q = T^T \begin{bmatrix} Q_۱ & ۰ \\ ۰ & Q_۲ \end{bmatrix} T$$

که در معادلهٔ $PA + A^T P = Q$ صدق می‌کنند، می‌توان گفت ماتریس Q معیّن مثبت است و تابع $V(x) = x^T Px$ نیز برای نقاط به اندازهٔ کافی نزدیک به مبدأ $x = ۰$ مثبت است. اینک حالت کلّی A را درنظر می‌گیریم که در آن A می‌تواند علاوه بر مقادیر ویژه‌ای که در نیم‌صفحهٔ راست صفحهٔ مختلط دارد، مقادیر ویژه‌ای نیز بر محور موهومی داشته باشد. این حالت را با

ترفند سادهٔ انتقال محور موهومی، به حالت خاص قبل تقلیل می‌دهیم. فرض کنید A دارای m مقدار ویژه باشد که برای آن ها $Re\lambda_i > \delta > ۰$ است؛ در این صورت ماتریس $[A - (\delta/۲)I]$ دارای m مقدار ویژه در نیم‌صفحهٔ راست است ولی هیچ مقدار ویژه‌ای بر محور موهومی ندارد. مشابه بحث قبل، ماتریسهای $P = P^T$ و $Q = Q^T > ۰$ چنان وجود دارند که:

$$P\left[A - \frac{\delta}{۲}I\right] + \left[A - \frac{\delta}{۲}I\right]^T P = Q$$

تابع $V(x) = x^T Px$ برای نقاط به اندازهٔ کافی نزدیک به مبدأ، مثبت است و می‌توان مشتق آن را در امتداد مسیرهای حالت سیستم با عبارت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= x^T(PA + A^T P)x + ۲x^T Pg(x) \\ &= x^T\left[P\left(A - \frac{\delta}{۲}I\right) + \left(A - \frac{\delta}{۲}I\right)^T P\right]x + \delta x^T Px + ۲x^T Pg(x) \\ &= x^T Qx + \delta V(x) + ۲x^T Pg(x)\end{aligned}$$

در مجموعهٔ: $\{x \in R^n \mid \|x\|_۲ \le r \text{ و } V(x) > ۰\}$

r چنان انتخاب می‌شود که برای $\|x\|_۲ < r$، شرط $\|g(x)\|_۲ \le \gamma \|x\|_۲$ را برآورده کند، $\dot{V}(x)$ نیز در رابطهٔ زیر صدق می‌نماید:

$$\dot{V}(x) \ge \lambda_{min}(Q)\|x\|_۲^۲ - ۲\|P\|_۲\|x\|_۲\|g(x)\|_۲ \ge (\lambda_{min}(Q) - ۲\gamma\|P\|_۲)\|x\|_۲^۲$$

این عبارت به ازای مقادیر $\gamma < \lambda_{min}(Q)/۲\|P\|_۲$، مثبت است. بدین ترتیب با استفاده از قضیهٔ ۳ ـ ۳، نتیجه حاصل است. □

قضیهٔ ۳ ـ ۷ روال ساده‌ای را برای تعیین پایداری نقطهٔ تعادل در مبدأ به دست می‌دهد. برای این کار *ماتریس ژاکوبی* زیر را محاسبه و مقادیر ویژهٔ آن را امتحان می‌کنیم:

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=۰}$$

اگر به ازای جمیع مقادیر i، $Re\lambda_i < ۰$ باشد، مبدأ پایدارنمایی است و اگر به ازای برخی مقادیر

i، $Re\lambda_i > 0$ باشد، مبدأ ناپایدار است. علاوه‌براین قضیه نشان می‌دهددر حالتی که $\forall i\ Re\lambda_i < 0$ است، می‌توان تابع لیاپانوفی برای سیستم یافت که به طور محلی در همسایگی مبدأ عمل کند؛ این تابع به صورت مجذوریِ $V(x) = x^T Px$ بیان می‌گردد که P پاسخ معادلهٔ لیاپانوف (۳ ـ ۱۲) برای هر ماتریس متقارن و معیّن مثبت Q می‌باشد. شایان ذکر اینکه قضیهٔ ۳ ـ ۷ دربارهٔ حالت $\forall i\ Re\lambda_i \leq 0$ و یا $\exists i\ Re\lambda_i = 0$، هیچ اظهار نظری نمی‌کند. در این دو حالت، فرایند خطی‌سازی از تبیین پایداری نقطهٔ تعادل، ناتوان است*.

مثال ۳ ـ ۱۴ سیستم عددی زیر را درنظر بگیرید:

$$\dot{x} = ax^3$$

از خطی‌سازی سیستم حول مبدأ $x = 0$ نتیجه می‌شود:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 3ax^2\bigg|_{x=0} = 0$$

در این سیستم یکی از مقادیر ویژه روی محور موهومی قرار دارد؛ از این رو خطی‌سازی از تعیین پایداری سیستم ناتوان است. این نکته کاملاً بدیهی است زیرا بر اساس مقادیری که پارامتر a می‌پذیرد، سیستم می‌تواند پایدار مجانبی، پایدار و یا ناپایدار شود: چنانچه $a < 0$ باشد، مبدأ پایدار مجانبی است و می‌توان این نکته را با انتخاب تابع لیاپانوف $V(x) = x^4$ (که با توجه به مقدار $a < 0$، مشتقش در امتداد مسیرهای حالت سیستم، منفی است) تحقیق کرد. اگر $a = 0$ باشد، سیستم خطی است و طبق قضیهٔ ۳ ـ ۵، مبدأ پایدار است. اگر $a > 0$ باشد، مبدأ ناپایدار است و می‌توان این نکته را با انتخاب تابع لیاپانوف $V(x) = x^4$ (که با توجه به مقدار $a > 0$، مشتقش در امتداد مسیرهای حالت سیستم، مثبت است) و به‌کمک قضیهٔ ۳ ـ ۳، تحقیق نمود. Δ

مثال ۳ ـ ۱۵ معادلهٔ پاندول زیر:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\left(\frac{g}{l}\right)\sin x_1 - \left(\frac{k}{m}\right)x_2$$

* برای اطلاعات بیشتر دربارهٔ حالتهای بحرانی که خطی‌سازی فایده‌ای ندارد، بخش ۴ ـ ۱ را ملاحظه کنید.

دارای دو نقطهٔ تعادل $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ و $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$ است. می‌خواهیم پایداری این دو نقطه را به‌کمک خطی‌سازی بررسی کنیم. ماتریس ژاکوبی این معادله به شکل زیر است:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{g}{l}\right)cosx_1 & -\left(\frac{k}{m}\right) \end{bmatrix}$$

برای بررسی پایداری مبدأ، ماتریس ژاکوبی را در $x = 0$ محاسبه می‌کنیم:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{g}{l}\right) & -\left(\frac{k}{m}\right) \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژهٔ ماتریس A برابر است با:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 - \frac{4g}{l}}$$

واضح است به ازای همهٔ مقادیر $g, l, m, k > 0$، مقادیر ویژهٔ A در نامساوی $Re\lambda_i < 0$ صدق می‌کند؛ لذا نقطهٔ تعادل واقع در مبدأ، پایدار مجانبی است. در غیاب اصطکاک $(k = 0)$، هر دو مقدار ویژه روی محور موهومی قرار می‌گیرند، در این حالت نمی‌توان پایداری مبدأ را از طریق خطی‌سازی تعیین کرد. البته همچنانکه در مثال ۳ ـ ۳ دیدیم می‌توان به‌کمک تعریف تابع لیاپانوف انرژی نشان داد مبدأ پایدار است. برای تعیین پایداری نقطهٔ تعادلِ واقع در $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$، تابع ژاکوبی را در این نقطه محاسبه می‌کنیم، بدین منظور با تغییر متغیر $z_1 = x_1 - \pi$ و $z_2 = x_2$، نقطهٔ تعادل را به مبدأ انتقال می‌دهیم در این صورت با محاسبهٔ ماتریس ژاکوبی $[\partial f/\partial z]$ در نقطهٔ $z = 0$ داریم:

$$\tilde{A} = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x_1=\pi, x_2=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \left(\frac{g}{l}\right) & -\left(\frac{k}{m}\right) \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژهٔ $\tilde{A}$ برابر است با:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 + \frac{4g}{l}}$$

که ملاحظه می‌شود برای تمامی مقادیر $g, l, m > 0$ و $k \geq 0$، یکی از مقادیر ویژه در نیم صفحهٔ باز سمت راست صفحهٔ مختلط قرار می‌گیرد و در نتیجه نقطهٔ $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$ ناپایدار می‌باشد. Δ

۳ـ۴ سیستمهای خودگردان

سیستم خودگردان ذیل را درنظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(t,x) \qquad (۱۴-۳)$$

که تابع $f: [0,\infty) \times D \to R^n$ نسبت به t، پیوستهٔ قطعه‌ای و نسبت به x روی $[0,\infty) \times D$، لیپ شیتز محلی است. ضمناً $D \subset R^n$، قلمرویی است که شامل مبدأ نیز هست؛ در این صورت نقطهٔ $x = 0$، نقطهٔ تعادل معادلهٔ (۳ـ۱۴) در $t = 0$ است اگر داشته باشیم:

$$f(t,0) = 0 \qquad \forall t \geq 0$$

می‌توان نقطهٔ تعادلِ واقع در مبدأ را به عنوان نقطهٔ تعادل غیر صفر و یا در حالت کلّی‌تر، به عنوان پاسخ غیر صفر سیستم، تعبیر کرد. برای ملاحظهٔ این نکته فرض کنید $\bar{y}(\tau)$، پاسخ سیستم زیر باشد:

$$\frac{dy}{d\tau} = g(\tau, y) \quad \forall \tau \geq a$$

در این صورت تغییر متغیر $x = y - \bar{y}(\tau)$ و $t = \tau - a$، سیستم را به شکل ذیل تبدیل می‌کند:

$$\dot{x} = g(\tau,y) - \dot{\bar{y}}(\tau) = g\left(t+a, x+\bar{y}(t+a)\right) - \dot{\bar{y}}(t+a) \triangleq f(t,x)$$

چون به ازای همهٔ مقادیر $t \geq 0$ داریم: $\dot{\bar{y}}(t+a) = g\left(t+a, \bar{y}(t+a)\right)$، لذا نقطهٔ $x = 0$، نقطهٔ تعادل سیستم تبدیل شده در $t = 0$ است، بنابراین با بررسی رفتار پایداری مبدأ به عنوان نقطهٔ تعادل سیستم تبدیل یافته، می‌توان رفتار پایداری پاسخ $\bar{y}(\tau)$ را در سیستم اصلی تعیین کرد. باید توجه کرد اگر $\bar{y}(\tau)$ ثابت نباشد، سیستم تبدیل یافته، ناخودگردان خواهد بود هرچند

که سیستم اصلی خودگردان باشد (یعنی حتی اگر داشته باشیم: $g(\tau,y) = g(y)$) و به همین دلیل است که مطالعهٔ رفتار پایداری پاسخهای سیستم از دید لیاپانوف، فقط به عنوان مبحثی از مطالعهٔ رفتار پایداری نقاط تعادل سیستمهای ناخودگردان قابل بررسی می‌باشد.

مفاهیم پایداری و پایدای مجانبیِ نقطهٔ تعادل در سیستمهای ناخودگردان، مشابه تعریف ۳ـ۱ در سیستمهای خودگردان است جز آنکه نکتهٔ جدیدی در این حالت وجود دارد و آن اینکه گرچه پاسخ سیستم خودگردان فقط به $(t - t_0)$ وابسته است، پاسخ سیستم ناخودگردان هم به t و هم به t_0 بستگی دارد؛ لذا در حالت کلّی، رفتار پایداری نقطهٔ تعادل به t_0 وابسته است. مبدأ $x = 0$، نقطهٔ تعادل معادلهٔ (۳ـ۱۴) است اگر برای $\varepsilon > 0$ و هر $t_0 \geq 0$، مقداری مانند $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ چنان وجود داشته باشد که:

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \qquad \forall t \geq t_0$$

در حالت کلّی، ثابت δ به زمان اولیهٔ t_0 وابسته است. وجود δ برای هر t_0 الزاماً تضمین کنندهٔ این نکته نیست که δیی ثابت (فقط وابسته به ε) برای همهٔ مقادیر t_0 وجود دارد. این نکته در مثال ذیل تشریح شده است:

مثال ۳ـ۱۶ سیستم خطی مرتبه اول: $\dot{x} = (6t\sin t - 2t)x$ دارای پاسخی به شکل بستهٔ[1] زیر می‌باشد:

$$x(t) = x(t_0)\exp\left[\int_{t_0}^{t} (6\tau\sin\tau - 2\tau)\,d\tau\right]$$

$$= x(t_0)\exp\left[6\sin t - 6t\cos t - t^2 - 6\sin t_0 + 6t_0\cos t_0 + t_0^2\right]$$

برای هر مقدار t_0، جملهٔ $-t^2$ جملهٔ غالب خواهد بود که نشان می‌دهد جملهٔ نمایی برای تمامی مقادیر $t \geq t_0$ کراندار است؛ با درنظر گرفتن کران $c(t_0)$ به عنوان کران جملهٔ نمایی خواهیم داشت:

$$|x(t)| < |x(t_0)|\,c(t_0), \qquad \forall t \geq t_0$$

1. Closed form

برای هر $\varepsilon > 0$، انتخاب $\delta = \varepsilon / c(t_0)$ نشان می‌دهد مبدأ پایدار است. حال فرض کنید t_0 بتواند مقادیر متوالی $t_0 = 2n\pi$، $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ را بپذیرد و فرض کنید مقدار $x(t)$ هر π ثانیه یک بار محاسبه شود، در این صورت داریم:

$$x(t_0 + \pi) = x(t_0) \exp\left[(4n + 1)(6 - \pi)\pi\right]$$

که بیانگر آن است که برای $x(t_0) \neq 0$ می‌توان نوشت:

$$n \to \infty \Rightarrow \frac{x(t_0 + \pi)}{x(t_0)} \longrightarrow \infty$$

بنابراین برای هر مقدار معلوم $\varepsilon > 0$، نمی‌توان هیچ مقدار δیی مستقل از t_0 یافت به طوری که پایداری را به طور یکنواخت نسبت به t_0 برآورده سازد. Δ

علاوه بر حالت فوق، ممکن است عدم یکنواختی نسبت به t_0 در مطالعهٔ پایداری مجانبی نقطهٔ تعادل نیز رخ دهد. مثال ذیل این حالت را نشان می‌دهد:

مثال ۳ ـ ۱۷ سیستم غیر خطی مرتبهٔ اول: $\dot{x} = -x/(1 + t)$ دارای پاسخی به شکل بستهٔ زیر است:

$$x(t) = x(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{-1}{1 + \tau} d\tau \right) = x(t_0) \frac{1 + t_0}{1 + t}$$

از آنجاکه به ازای جمیع مقادیر $t \geq t_0$، $|x(t)| \leq |x(t_0)|$ است، مبدأ پایدار می‌باشد. در واقع برای هر مقدار معلوم $\varepsilon > 0$ می‌توان مقدار δ را مستقل از t_0 انتخاب کرد. علاوه بر این داریم: $t \to \infty \Rightarrow x(t) \to 0$؛ پس طبق تعریف ۳ ـ ۱، مبدأ پایدار مجانبی است. اما باید توجه داشت همگرایی $x(t)$ به سمت مبدأ، نسبت به زمان اولیهٔ t_0 یکنواخت نیست زیرا به خاطر داریم که همگرایی $x(t)$ به سمت مبدأ معادل این است که بگوییم برای هر مقدار معلوم $\varepsilon > 0$، مقدار $T = T(\varepsilon, t_0) > 0$ چنان وجود دارد که برای تمامی مقادیر $t \geq t_0 + T$ داشته باشیم: $|x(t)| < \varepsilon$. گرچه در این مثال برای هر t_0 این همگرایی برقرار است لیکن نمی‌توان ثابت T را مستقل از t_0 برگزید. Δ

به عنوان نتیجه، لازم است با بازنگریِ تعریف ۳ ـ ۱، بر وابستگی رفتار پایداریِ مبدأ نسبت

به زمان اولیهٔ t_0 تأکید کنیم در اینجا هدف آن است که پایداری و پایداری مجانبیِ مبدأ را به عنوان ویژگیهای یکنواخت نسبت به زمان اولیه تعریف نماییم*.

تعریف ۳ ـ ۲ *نقطهٔ تعادل* $x = 0$ *مربوط به معادلهٔ* (۳ ـ ۱۴):

- *پایدار است اگر برای هر* $\varepsilon > 0$، *مقداری برای* $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ *چنان وجود داشته باشد که:*

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \qquad \forall t \geq t_0 \geq 0 \qquad (۳ ـ ۱۵)$$

- *پایدار مجانبی است اگر برای هر* $\varepsilon > 0$، *مقداری برای* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *(مستقل از* t_0*) چنان وجود داشته باشد که رابطهٔ* (۳ ـ ۱۵) *برآورده شود؛*
- *ناپایدار است اگر پایدار نباشد؛*
- *پایدار مجانبی است اگر پایدار باشد و مقداری مانند* $c = c(t_0) > 0$ *چنان وجود داشته باشد که برای تمامی مقادیر* $\|x(t_0)\| < c$، *داشته باشیم:* $t \to \infty \Rightarrow x(t) \to 0$؛
- *پایدار مجانبی یکنواخت است اگر پایدار یکنواخت باشد و مقداری مانند* $c > 0$ *(مستقل از* t_0*) چنان وجود داشته باشد که برای تمامی مقادیر* $\|x(t_0)\| < c$، *با افزایش* t *به سمت بینهایت،* $x(t)$ *به‌طور یکنواخت نسبت به* t_0 *به‌سوی صفر میل نماید؛ به بیان دیگر برای هر* $\varepsilon > 0$، *مقداری مانند* $T = T(\varepsilon) > 0$ *چنان وجود داشته باشد که:*

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \qquad \forall t \geq t_0 + T(\varepsilon), \qquad \forall \|x(t_0)\| < c$$

- *پایدار مجانبی یکنواخت جامع است اگر پایدار یکنواخت باشد و برای هر زوج اعداد مثبت* ε *و* c، *مقدار* $T = T(\varepsilon, c) > 0$ *چنان وجود داشته باشد که:*

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \qquad \forall t \geq t_0 + T(\varepsilon, c), \qquad \forall \|x(t_0)\| < c$$

می‌توان پایداری یکنواخت و پایداری مجانبی یکنواخت را بر اساس توابع عددی خاصی، موسوم به توابع کلاس $\mathcal{K}$ *و کلاس* $\mathcal{KL}$ *نیز بیان نمود:*

---

* برای بررسی سایر دیدگاههای موجود در بازنگری تعریف ۳ ـ ۱، [۶۲] یا [۸۷] را ملاحظه کنید.

تعریف ۳ ـ ۳ *تابع پیوستهٔ $\alpha:[0,a)\to[0,\infty)$ را متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ گوییم اگر اکیداً افزایشی باشد و داشته باشیم: $\alpha(0)=0$. این تابع متعلق به $\mathcal{K}_\infty$ است اگر $a=\infty$ باشد و با افزایش r به سمت بینهایت، $\alpha(r)$ نیز به سمت بینهایت میل کند.*

تعریف ۳ ـ ۴ *تابع پیوستهٔ $\beta:[0,a)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ را متعلق به کلاس $\mathcal{KL}$ گوییم اگر برای هر مقدار مشخص s، نگاشت $\beta(r,s)$ نسبت به r متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ باشد و نیز برای هر مقدار مشخص r، نگاشت $\beta(r,s)$ نسبت به s کاهشی باشد و افزایش s به سمت بینهایت، $\beta(r,s)$ به سمت صفر میل کند.*

مثال ۳ ـ ۱۸

- تابع $\alpha(r)=\tan^{-1}r$، اکیداً افزایشی است زیرا: $\alpha'(r)=1/(1+r^2)>0$. این تابع متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ است اما به کلاس $\mathcal{K}_\infty$ تعلق ندارد زیرا: $\lim_{r\to\infty}\alpha(r)=\pi/2<\infty$.
- تابع $\alpha(r)=r^c$ برای تمامی مقادیر حقیقی و مثبت c، اکیداً افزایشی است زیرا: $\alpha'(r)=cr^{c-1}>0$. علاوه بر این داریم: $\lim_{r\to\infty}\alpha(r)=\infty$؛ بنابراین $\alpha(r)$ متعلق به کلاس $\mathcal{K}_\infty$ می‌باشد.
- تابع $\beta(r,s)=r/(ksr+1)$ برای تمامی مقادیر حقیقی و مثبت k، نسبت به r اکیداً افزایشی است؛ زیرا:

$$\frac{\partial\beta}{\partial r}=\frac{1}{(ksr+1)^2}>0$$

و نسبت به s اکیداً کاهشی است زیرا:

$$\frac{\partial\beta}{\partial s}=\frac{-kr^2}{(ksr+1)^2}<0$$

علاوه بر این هنگامی که $s\to\infty$ میل می‌کند، $\beta(r,s)$ نیز به سمت صفر سوق می‌یابد. بنابراین تابع، متعلق به کلاس $\mathcal{KL}$ می‌باشد.

- تابع $\beta(r,s)=r^c e^{-s}$ برای هر مقدار حقیقی و مثبت c، متعلق به کلاس $\mathcal{KL}$ است.

Δ

لم زیر برخی از ویژگیهای آشکار توابع کلاس $\mathcal{K}$ و $\mathcal{KL}$ را (که بعدتر مورد نیاز خواهد بود) بیان می‌کند. برهان این لم به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌گردد (تمرین ۳ ـ ۳۲).

لم ۳ ـ ۲ *فرض کنید $\alpha_1(\cdot)$ و $\alpha_2(\cdot)$ بر بازهٔ $[0,a)$، توابع کلاس $\mathcal{K}$ و $\alpha_3(\cdot)$ و $\alpha_4(\cdot)$، توابع کلاس $\mathcal{K}_\infty$ باشد. اگر معکوس $\alpha_i(\cdot)$ را با $\alpha_i^{-1}(\cdot)$ نشان دهیم، داریم:*

- *α_1^{-1} بر بازهٔ $[0,\alpha_1(a))$ تعریف می‌شود و متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ است؛*
- *α_3^{-1} بر بازهٔ $[0,\infty)$ تعریف می‌شود و متعلق به کلاس $\mathcal{K}_\infty$ می‌باشد؛*
- *$\alpha_1\circ\alpha_2$ متعلق به کلاس $\mathcal{K}_\infty$ می‌باشد؛*
- *$\alpha_3\circ\alpha_4$ متعلق به کلاس $\mathcal{K}_\infty$ است؛*
- *$\sigma(r,s)=\alpha_1(\beta(\alpha_2(r),s))$ متعلق به کلاس $\mathcal{K}_\infty$ می‌باشد.*

$\diamond$

لم زیر تعاریف معادلی را برای پایداری یکنواخت و پایداری مجانبیِ یکنواخت بر اساس توابع کلاس $\mathcal{K}$ و $\mathcal{KL}$ بیان می‌کند:

لم ۳ ـ ۳ *نقطهٔ تعادل $x=0$ مربوط به معادلهٔ (۳ ـ ۱۴)؛*

- *پایدار یکنواخت است اگر و تنها اگر تابع $\alpha(\cdot)$ متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ و ثابت مثبت c (مستقل از t_0) چنان وجود داشته باشد که:*

$$\|x(t)\|\le\alpha(\|x(t_0)\|),\quad \forall t\ge t_0\ge 0,\quad \forall\|x(t_0)\|<c \qquad (۳ ـ ۱۶)$$

- *پایدار مجانبی یکنواخت است اگر و تنها اگر تابع $\beta(\cdot,\cdot)$ متعلق به کلاس $\mathcal{KL}$ و ثابت مثبت c (مستقل از t_0) چنان وجود داشته باشد که:*

$$\|x(t)\|\le\beta(\|x(t_0)\|),\quad \forall t\ge t_0\ge 0,\ \forall\|x(t_0)\|<c \qquad (۳ ـ ۱۷)$$

- *پایدار مجانبیِ یکنواخت است اگر و تنها اگر نامساوی (۳ ـ ۱۷) برای هر حالت اولیهٔ $x(t_0)$ برقرار باشد.*

$\diamond$

برهان: پیوست آ ـ ۳.

به عنوان یکی از نتایج لم ۳ ـ ۳ می‌توان ملاحظه کرد که در حالت سیستمهای خودگردان، پایداری و پایداری مجانبی طبق تعریف ۳ ـ ۱ بدین معناست که توابعی از کلاس $\mathcal{K}$ و $\mathcal{KL}$ چنان وجود دارند که نامساویهای (۳ ـ ۱۶) و (۳ ـ ۱۷) را برآورده می‌کنند؛ زیرا در سیستمهای خودگردان، پایداری و پایداری مجانبیِ مبدأ، نسبت به زمان اولیهٔ t_0، یکنواخت هستند.

یکی از حالتهای خاص پایداری مجانبیِ یکنواخت زمانی رخ می‌دهد که در معادلهٔ (۳ ـ ۱۷) تابع β متعلق به کلاس $\mathcal{KL}$ به شکل $\beta(r,s) = kre^{-\gamma s}$ باشد. این حالت بسیار مهم است و می‌توان آن را به عنوان یکی از ویژگیهای شاخص پایداری نقاط تعادل درنظر گرفت.

تعریف ۳ ـ ۵ *نقطهٔ تعادل $x = 0$ مربوط به رابطهٔ (۳ ـ ۱۴)، پایدار نمایی[1] است اگر نامساوی (۳ ـ ۱۷) به ازای مقادیر زیر برآورده شود:*

$$\beta(r,s) = kre^{-\gamma s}, \quad k > 0, \quad \gamma > 0$$

علاوه بر این، مبدأ پایدارنمایی جامع[2] است اگر شرط فوق برای همهٔ حالتهای اولیه برقرار باشد.

می‌توان نظریهٔ لیاپانوف مربوط به سیستمهای خودگردان را به سیستمهای ناخودگردان نیز تعمیم داد و بدین لحاظ لازم است برای هر یک از قضایای ۳ ـ ۱ تا ۳ ـ ۴، تعمیمهای مختلفی را برای اعمال به سیستمهای ناخودگردان بیان نمود. در اینجا به دنبال بیان این موضوع نیستیم*؛ در عوض، بحث را بر پایداری مجانبیِ یکنواخت متمرکز می‌کنیم** زیرا در بیشتر کاربردهای روش لیاپانوف با این حالت مواجه می‌شویم. برای تبیینِ پایداری مجانبیِ یکنواخت نقطهٔ $x = 0$، لازم است نامساوی (۳ ـ ۱۷) را تحقیق کنیم. در تحلیل ما توابع کلاس $\mathcal{KL}$ مورد استفاده در این نامساوی از طریق پاسخ یک معادلهٔ دیفرانسیل عددی و خودگردان به دست می‌آید. برای تشریح بیشتر بحث، ابتدا به بیان دو لم می‌پردازیم: اولین لم، ویژگیهای پاسخ این

---

* نظریهٔ لیاپانوف برای سیستمهای ناخودگردان بخوبی در مراجع دیگر تشریح شده است. منابع مناسب در این خصوص شامل [۶۲] و [۱۳۷] است ضمن اینکه مقدمات خوبی در [۱۱۸] و [۱۸۱] ذکر گردیده است.

** برای بررسی قضیهٔ پایداری یکنواخت، تمرین ۳ ـ ۳۵ را ملاحظه کنید.

1. Exponentially stable
2. Globally exponentially stable

معادلهٔ خاص را بیان می‌کند و دومین، کرانهای بالا و پایین توابع معیّن مثبت را بر حسب توابع کلاس $\mathcal{K}$ به دست می‌دهد.

لم ۳ ـ ۴ *معادلهٔ دیفرانسیل عددی و خودگردان زیر را درنظر بگیرید:*

$$\dot{y} = -\alpha(y), \qquad y(t_0) = y_0$$

که $\alpha(\cdot)$ متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ و لیپ شیتز محلی است که بر بازهٔ $[0, a)$ تعریف شده است. برای تمامی مقادیر $a > y_0 > 0$ و به ازای جمیع مقادیر $t \geq t_0$، این معادله دارای پاسخ یکتای $y(t)$ می‌باشد. علاوه بر این داریم:

$$y(t) = \sigma(y_0, t - t_0)$$

که $\sigma(r,s)$ تابعی متعلق به کلاس $\mathcal{KL}$ است که بر بازهٔ $[0,\infty) \times [0, a)$ تعریف شده است. ◇

برهان: پیوست آ ـ ۴.

اینک حکم این لم را به کمک مثالهای خاصی (که در آن می‌توان شکل بستهٔ پاسخ معادله را یافت) تحقیق می‌کنیم. برای مثال اگر $\dot{y} = -ky$ و $k > 0$ باشد، پاسخ معادله به شکل زیر بیان می‌شود:

$$y(t) = y_0 \exp[-k(t - t_0)] \Rightarrow \sigma(r,s) = r\exp(-ks)$$

به عنوان مثالی دیگر اگر $\dot{y} = -ky^2$ و $k > 0$ باشد، پاسخ معادله به شکل زیر بیان می‌گردد:

$$y(t) = \frac{y_0}{ky_0(t - t_0) + 1} \Rightarrow \sigma(r,s) = \frac{r}{krs + 1}$$

لم ۳ ـ ۵ *فرض کنید $V(x): D \to R$ تابعی پیوسته و معیّن مثبت باشد که بر قلمرو $D \subset R^n$ (شامل مبدأ) تعریف شده است. در این صورت اگر برای برخی مقادیر $r > 0$ داشته باشیم: $B_r \subset D$، آنگاه توابع α_1 و α_2 متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ چنان وجود دارد که بر بازهٔ $[0, r)$ تعریف شده، به ازای جمیع مقادیر $x \in B_r$ داریم:*

$$\alpha_1(\|x\|) \le V(x) \le \alpha_2(\|x\|)$$

علاوه بر این اگر $D = R^n$ *و* $V(x)$ *بیکران شعاعی باشد، آنگاه می‌توان* α_1 *و* α_2 *را چنان انتخاب کرد که متعلق به کلاس* $\mathcal{K}_\infty$ *باشد و نامساوی فوق برای همهٔ مقادیر* $x \in R^n$ *برقرار گردد.* ◇

برهان: پیوست آ ـ ۵.

برای تابع مجذوری و معیّن مثبت $V(x) = x^T P x$، لم ۳ ـ ۵ با نامساوی ذیل بیان می‌گردد:

$$\lambda_{min}(P)\,\|x\|_2^2 \le x^T P x \le \lambda_{max}(P)\,\|x\|_2^2$$

اکنون آماده‌ایم تا نتیجهٔ اصلی این بخش را بیان و اثبات کنیم:

قضیهٔ ۳ ـ ۸ *فرض کنید* $x = 0$*، یکی از نقاط تعادل معادلهٔ (۳ ـ ۱۴) و* $D \subset R^n$ *قلمرویی شامل مبدأ باشد. علاوه بر این فرض کنید* $V(x) : [0, \infty) \times D \to R$ *تابعی پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد که به ازای جمیع مقادیر* $t \ge 0$ *و* $x \in D$ *در روابط ذیل صدق می‌کند:*

$$W_1(x) \le V(t,x) \le W_2(x) \qquad (۳ ـ ۱۸)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \le -W_3(x) \qquad (۳ ـ ۱۹)$$

که $W_1(x)$*،* $W_2(x)$ *و* $W_3(x)$ *توابعی پیوسته و معیّن مثبت روی* D *هستند. در این صورت نقطهٔ* $x = 0$*، پایدار مجانبی یکنواخت است.*

برهان: مشتق V در امتداد مسیرهای حالت معادلهٔ (۳ ـ ۱۴) با رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$\dot V(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \le -W_3(x)$$

مقدار $r > 0$ و $\rho > 0$ را چنان برمی‌گزینیم که $B_r \subset D$ و $\rho < \min_{\|x\|=r} W_1(x)$ باشد، در این صورت $\{x \in B_r \mid W_1(x) \le \rho\}$ درون B_r است. مجموعهٔ وابسته به زمان $\Omega_{t,\rho}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Omega_{t,\rho} = \{x \in B_r \mid V(t,x) \le \rho\}$$

مجموعهٔ $\Omega_{t,\rho}$ شامل مجموعهٔ $\{x \in B_r \mid W_2(x) \le \rho\}$ می‌باشد زیرا:

$$W_2(x) \le \rho \Rightarrow V(t,x) \le \rho$$

از سوی دیگر $\Omega_{t,\rho}$ زیر مجموعهٔ $\{x \in B_r \mid W_1(x) \le \rho\}$ نیز هست زیرا:

$$V(t,x) \le \rho \Rightarrow W_1(x) \le \rho$$

بنابراین برای تمامی مقادیر $t \ge 0$ می‌توان نوشت:

$$\{x \in B_r \mid W_2(x) \le \rho\} \subset \Omega_{t,\rho} \subset \{x \in B_r \mid W_1(x) \le \rho\} \subset B_r$$

برای هر مقدار $t_0 \ge 0$ و هر مقدار $x_0 \in \Omega_{t_0,\rho}$، پاسخی که از (t_0, x_0) آغاز می‌شود برای تمامی مقادیر $t > t_0$ در $\Omega_{t,\rho}$ باقی خواهد ماند؛ زیرا $\dot V(t,x)$ روی $D - \{0\}$ منفی است در نتیجه $V(t,x)$ کاهشی می‌باشد؛ بنابراین پاسخ آغاز شده از (t_0, x_0) برای همهٔ مقادیر $t > t_0$ و تمامی مقادیر $x(t) \in B_r$ تعریف می‌شود. در ادامهٔ برهان فرض می‌کنیم داشته باشیم: $x_0 \in \{x \in B_r \mid W_2(x) \le \rho\}$، طبق لم ۳ ـ ۵ می‌توان توابع α_1، α_2، α_3 متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ را چنان بر بازهٔ $[0, r]$ تعریف کرد که:

$$W_1(x) \ge \alpha_1(\|x\|), \qquad W_2(x) \le \alpha_2(\|x\|), \qquad W_3(x) \ge \alpha_3(\|x\|)$$

بنابراین V و $\dot V$ در نامساویهای ذیل صدق می‌کنند:

$$\alpha_1(\|x\|) \le V(t,x) \le \alpha_2(\|x\|)$$

$$\dot V(t,x) \le -\alpha_3(\|x\|)$$

پس:

$$\dot V \le -\alpha_3(\|x\|) \le -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V)) \triangleq -\alpha(V)$$

بنابراین تابع $\alpha(\cdot)$ متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ می‌باشد که بر بازهٔ $[0, r]$ تعریف شده است (لم ۳ ـ ۲ را ملاحظه کنید). اینک بدون کاستن از کلیّت مسأله، فرض می‌کنیم $\alpha(\cdot)$ لیپ شیتز محلی باشد*،

---

* اگر α لیپ شیتز محلی نباشد، می‌توان تابع لیپ شیتز و متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ی β را چنان برگزید که روی قلمرو مورد نظر داشته باشیم: $\alpha(r) \ge \beta(r)$. در این صورت $\dot V \le -\beta(V)$ است و می‌توان قضیه را با β ادامه داد. برای مثال فرض ←

در این صورت با فرض اینکه $y(t)$ پاسخ معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول و خودگردان زیر است:

$$\dot{y} = -\alpha(y), \qquad y(t_0) = V(t_0, x(t_0)) \geq 0$$

از لم قیاس (لم ۲ ـ ۵) نتیجه می‌شود:

$$V(t, x(t)) \leq y(t), \quad \forall t \geq t_0$$

و با استفاده از لم ۳ ـ ۴ می‌توان تابع $\sigma(r,s)$ متعلق به کلاس $\mathcal{KL}$ را بر بازهٔ $[0,\infty) \times [0,r]$ چنان تعریف کرد که داشته باشیم:

$$V(t, x(t)) \leq \sigma V(t_0, x(t_0)), t - t_0), \quad \forall V(t_0, x(t_0)) \in [0, \rho]$$

بنابراین پاسخی که از $\Omega_{t_0,\rho}$ آغاز می‌شود، نامساوی زیر را برآورده می‌کند:

$$\| x(t) \| \leq \alpha_1^{-1}(V(t, x(t))) \leq \alpha_1^{-1}(\sigma(V(t_0, x(t_0)), t - t_0))$$

$$\leq \alpha_1^{-1}(\sigma(\alpha_2(\| x(t_0) \|), t - t_0)) \triangleq \beta(\| x(t_0) \|, t - t_0)$$

لم ۳ ـ ۲ نشان می‌دهد تابع $\beta(\cdot,\cdot)$ متعلق به کلاس $\mathcal{KL}$ می‌باشد؛ بنابراین نامساوی (۳ ـ ۱۷) برای همهٔ مقادیر $x(t_0) \in \{x \in B_r \mid W_2(x) \leq \rho\}$ برقرار است یعنی نقطهٔ $x = 0$، پایدار مجانبی یکنواخت می‌باشد. □

تابع $V(t,x)$ که سمت چپ نامعادلهٔ (۳ ـ ۱۸) را برآورده کند، معیّن مثبت و تابعی که سمت راست این نامعادله را ارضا کند، کاهنده[1] نامیده می‌شود. تابع $V(t,x)$ را معیّن منفی گوییم اگر $-V(t,x)$، معیّن مثبت باشد. بنابراین قضیهٔ ۳ ـ ۸ بیانگر این نکته است که مبدأ، پایدار مجانبی یکنواخت است اگر بتوان تابع $V(t,x)$ را چنان یافت که خودِ تابع معیّن مثبت، پیوسته ـ مشتق‌پذیر و کاهنده و مشتق آن نیز در امتداد مسیرهای حالت سیستم، معیّن منفی

→ کنید $\alpha(r) = \sqrt{r}$ باشد، تابع $\sqrt{r}$ متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ است اما در $r = 0$ لیپ شیتز محلی نیست؛ لذا تابع β را به شکل: $\beta(r) = r$(برای $r < 1$) و $\beta(r) = \sqrt{r}$ (برای $r \geq 1$) تعریف می‌کنیم. در این صورت تابع β متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ و لیپ شیتز محلی است و ضمناً برای تمامی مقادیر $r \geq 0$ داریم: $\alpha(r) \geq \beta(r)$.

1. Decrescent

باشد. در این صورت $V(t,x)$ تابع لیاپانوف نامیده می‌شود.

برهان قضیهٔ ۳ ـ ۸، ناحیهٔ جذابیّت مبدأ را با مجموعهٔ $\{x \in B_r \mid W_2(x) \leq \rho\}$ تخمین می‌زند. این تخمین ما را مجاز می‌دارد که نسخهٔ جامعی از قضیهٔ ۳ ـ ۸ را بیان کنیم:

قضیهٔ فرعی ۳ ـ ۳ *فرض کنید همهٔ فرضیات قضیهٔ ۳ ـ ۸ به طور جامع (یعنی برای $x \in R^n$) برقرار باشد و $W_1(x)$ نیز بیکران شعاعی باشد، در این صورت نقطهٔ $x = 0$ پایدار مجانبی یکنواخت جامع می‌باشد.* ◇

برهان: چون $W_1(x)$ بیکران شعاعی است بنابراین $W_2(x)$ نیز هست، پس مجموعهٔ $\{x \in R_n \mid W_2(x) \leq \rho\}$ برای هر مقدار $\rho > 0$، کراندار است. برای هر مقدار $x_0 \in R_n$، می‌توان ρ را آنقدر بزرگ انتخاب کرد که داشته باشیم: $x_0 \in \{x \in R_n \mid W_2(x) \leq \rho\}$. ادامهٔ برهان مشابه برهان قضیهٔ ۳ ـ ۸ است. □

تابع لیاپانوف $V(t,x)$ که در رابطهٔ (۳ ـ ۱۸) صدق کند همزاه با تابع بیکران شعاعی $W_1(x)$، *بیکران شعاعی* نامیده می‌شود.

اگر توابع کلاس $\mathcal{K}$ به شکل خاص $\alpha_i(r) = k_i r^c$ باشد، کاربرد آن در برهان قضیهٔ ۳ ـ ۸ ساده‌تر می‌شود. در این حالت می‌توان نشان داد مبدأ پایدار نمایی است.

قضیهٔ فرعی ۳ ـ ۴ *فرض کنید همهٔ فرضیات قضیهٔ ۳ ـ ۸ به همراه شروط ذیل برقرار باشد:*

$$W_1(x) \geq k_1 \|x\|^c, \qquad W_2(x) \leq k_2 \|x\|^c, \qquad W_3(x) \geq k_3 \|x\|^c$$

که k_1، k_2 و k_3 و c ثابتهای مثبتی هستند، در این صورت $x = 0$ پایدار نمایی است. علاوه بر این اگر فرضیات به طور جامع برقرار باشد، $x = 0$ پایدار نمایی جامع است. ◇

برهان: توابع V و $\dot{V}$ در نامساویهای زیر صدق می‌کنند:

$$k_1 \|x\|^c \leq V(t,x) \leq k_2 \|x\|^c$$

$$\dot{V}(t,x) \leq -k_3 \|x\|^c \leq -\frac{k_3}{k_2} V(t,x)$$

با استفاده از لم قیاس (لم ۲ ـ ۵) می‌توان نوشت:

$$V(t,x(t)) \le V(t_0,x(t_0))\, e^{-(k_3/k_2)(t-t_0)}$$

بنابراین:

$$\|x(t)\| \le \left[\frac{V(t,x(t))}{k_1}\right]^{1/c} \le \left[\frac{V(t_0,x(t_0))\, e^{-(k_3/k_2)(t-t_0)}}{k_1}\right]^{1/c}$$

$$\le \left[\frac{k_2 \|x(t_0)\|^c e^{-(k_3/k_2)(t-t_0)}}{k_1}\right]^{1/c} = \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{1/c} \|x(t_0)\|\, e^{-(k_3/k_2 c)(t-t_0)}$$

درنتیجه مبدأ پایدار نمایی است. چنانچه تمامی فرضیات به طور جامع برقرار باشد، نامساوی فوق به ازای جمیع مقادیر $x(t_0) \in R^n$ صدق خواهد کرد. □

مثال ۳ ـ ۱۹ سیستم عددی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = -[1+g(t)]x^3$$

که $g(t)$ تابعی پیوسته است و برای تمامی مقادیر $t \ge 0$ داریم: $g(t) \ge 0$. با استفاده از نامزد تابع لیاپانوف $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ می‌توان نوشت:

$$\dot{V} = -[1+g(t)]x^4 \le -x^4, \qquad \forall x \in R, \qquad \forall t \ge 0$$

در این صورت با انتخاب $W_1(x) = W_2(x) = V(x)$ و $W_3(x) = x^4$، همهٔ فرضیات قضیهٔ ۳ ـ ۸ به‌طور جامع برآورده می‌شود، لذا مبدأ پایدار مجانبی یکنواخت جامع است. Δ

مثال ۳ ـ ۲۰ سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = -x_1 - g(t)x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2$$

که تابع $g(t)$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر است و در روابط ذیل صدق می‌کند:

$$0 \le g(t) \le k \quad \text{و} \quad \dot{g}(t) \le g(t), \qquad \forall t \ge 0$$

با انتخاب $V(t,x) = x_1^2 + [1+g(t)]x_2^2$ به عنوان نامزد تابع لیاپانوف، بسادگی

می‌توان نشان داد:

$$x_1^2 + x_2^2 \le \dot{V}(t,x) \le x_1^2 + (1+k)x_2^2, \qquad \forall x \in R^2$$

بنابراین $V(t,x)$ معیّن مثبت، کاهنده و بیکران شعاعی است و مشتق آن در امتداد مسیرهای حالت سیستم برابر است با:

$$\dot{V}(t,x) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - [2 + 2g(t) - \dot{g}(t)]x_2^2$$

اکنون با استفاده از نامساوی:

$$2 + 2g(t) - \dot{g}(t) \ge 2 + 2g(t) - g(t) \ge 2$$

داریم:

$$\dot{V}(t,x) \le -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 = -\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \triangleq -x^T Q x$$

که Q معیّن مثبت و درنتیجه $\dot{V}(t,x)$ معیّن منفی است؛ لذا می‌توان گفت با انتخاب توابع W_1, W_2 و W_3 به شکل توابع مجذوریِ معیّن مثبت، همهٔ فرضیات قضیهٔ ۳ ـ ۸ به طور جامع برآورده می‌شود و طبق قضیهٔ فرعی ۳ ـ ۴، مبدأ پایدار نمایی جامع است. Δ

مثال ۲ ـ ۲۱ سیستم خطی متغیر با زمان زیر مفروض است:

$$\dot{x} = A(t)x \qquad (۳ ـ ۲۰)$$

این سیستم دارای نقطهٔ تعادل $x = 0$ است. فرض کنید $A(t)$ به ازای جمیع مقادیر $t \ge 0$ پیوسته و ماتریس $P(t)$ نیز پیوسته ـ مشتق‌پذیر، متقارن، کراندار و معیّن مثبت باشد، یعنی:

$$0 < c_1 I \le P(t) \le c_2 I, \qquad \forall t \ge 0$$

ضمناً فرض کنید P در معادلهٔ دیفرانسیل ماتریسی زیر صدق کند:

$$-\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + Q(t) \qquad (۳ ـ ۲۱)$$

که ماتریس $Q(t)$ پیوسته، متقارن و معیّن مثبت است؛ یعنی: $Q(t) \geq c_3 I > 0, \quad \forall t \geq 0$
حال با انتخاب نامزد تابع لیاپانوف: $V(t,x) = x^T P(t) x$ مشخص می‌شود این تابع، معیّن مثبت، کاهنده و بیکران شعاعی است زیرا داریم:

$$c_1 \|x\|_2^2 \leq V(t,x) \leq c_2 \|x\|_2^2$$

مشتق تابع $V(t,x)$ در امتداد مسیرهای حالت سیستم (۳ ـ ۲۰) با رابطهٔ ذیل بیان می‌گردد:

$$\dot{V}(t,x) = x^T \dot{P}(t) x + x^T P(t) \dot{x} + \dot{x}^T P(t) x$$

$$= x^T [\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t)] x = -x^T Q(t) x \leq -c_3 \|x\|_2^2$$

بنابراین $\dot{V}(t,x)$ معیّن منفی است. با انتخاب $c = 2$، تمامی فرضیات قضیهٔ فرعی ۳ ـ ۴ به طور جامع برآورده می‌شود؛ بنابراین مبدأ پایدار نمایی جامع است. Δ

۳ ـ ۵ سیستمهای خطی متغیر با زمان و خطی‌سازی

می‌توان رفتار پایداری مبدأ را به عنوان نقطهٔ تعادل سیستم خطی متغیر با زمان معادلهٔ (۳ ـ ۲۰)، $\dot{x} = A(t)x$، به طور کامل براساس جمله‌های ماتریس انتقال حالت[1] سیستم تعیین کرد. از نظریهٔ سیستمهای خطی می‌دانیم پاسخ معادلهٔ (۳ ـ ۲۰) عبارت است از*:

$$x(t) = \Phi(t, t_0) x(t_0)$$

که $\Phi(t, t_0)$، ماتریس انتقال حالت است. قضیهٔ زیر ویژگیهای پایداری مجانبی یکنواخت را براساس جملات $\Phi(t, t_0)$ بیان می‌کند:

قضیهٔ ۳ ـ ۹ *نقطهٔ تعادل $x = 0$ مربوط به معادلهٔ (۳ ـ ۲۰) پایدار مجانبی یکنواخت (جامع) است اگر و تنها اگر ماتریس انتقال حالت آن در نامساوی ذیل صدق کند:*

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq k e^{-\gamma(t-t_0)}, \qquad \forall t \geq t_0 \geq 0 \qquad (۳-۲۲)$$

* برای مثال [۲۹]، [۴۱]، [۸۶] یا [۱۴۲] را ملاحظه کنید.

1. State transition matrix

که k و γ *ثابتهای مثبتی هستند.* $\Diamond$

برهان: باتوجه به وابستگی خطی $x(t)$ به $x(t_0)$، اگر مبدأ پایدار مجانبی یکنواخت باشد، ویژگی جامع بودن را نیز خواهد داشت. کفایت رابطهٔ (۳ ـ ۲۲) واضح است زیرا:

$$\|x(t)\| \leq \|\Phi(t, t_0)\| \, \|x(t_0)\| \leq k \, \|x(t_0)\| \, e^{-\gamma(t-t_0)}$$

برای اثبات شرط لازم، فرض کنید مبدأ پایدار مجانبی یکنواخت باشد، در این صورت می‌توان تابع $\beta(\cdot,\cdot)$ متعلق به کلاس $\mathcal{KL}$ را چنان یافت که:

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \qquad \forall t \geq t_0, \qquad \forall x(t_0) \in R^n$$

از تعریف نُرم القایی ماتریس (بخش ۲ ـ ۱) نتیجه می‌شود که:

$$\|\Phi(t, t_0)\| = \max_{\|x\|=1} \|\Phi(t, t_0)x\| \leq \max_{\|x\|=1} \beta(\|x\|, t - t_0) = \beta(1, t - t_0)$$

بنابراین با شرط $s \longrightarrow \infty$ خواهیم داشت: $\beta(1, s) \longrightarrow 0$، ضمناً مقداری مانند $T > 0$ وجود دارد که به ازای آن $\beta(1, T) \leq 1/e$ می‌باشد. اکنون برای هر $t \geq t_0$ فرض می‌کنیم N کوچکترین عدد صحیح مثبتی باشد که به ازای آن رابطهٔ $t \leq t_0 + NT$ برقرار است؛ با تقسیم بازهٔ $[t_0, t_0 + (N-1)T]$ به $(N-1)$ زیر بازهٔ مساوی با پهنای T و با استفاده از خاصیت انتقال ماتریس $\Phi(t, t_0)$ می‌توان نوشت:

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_0 + (N-1)T)\Phi(t_0 + (N-1)T, t_0 + (N-2)T) \ldots \Phi(t_0 + T, t_0)$$

بنابراین:

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq \|\Phi(t, t_0 + (N-1)T)\| \prod_{k=1}^{k=N-1} \|\Phi(t_0 + kT, t_0 + (k-1)T)\|$$

$$\leq \beta(1, 0) \prod_{k=1}^{k=N-1} \frac{1}{e} = e\beta(1, 0) e^{-N}$$

$$\leq e\beta(1, 0) e^{-(t-t_0)/T} = k e^{-\gamma(t-t_0)}$$

که $k = e\beta(1, 0)$ و $\gamma = 1/T$ است. $\square$

قضیهٔ ۳ ـ ۹ نشان می‌دهد در سیستمهای خطی، پایداری مجانبی یکنواخت مبدأ، معادل با پایداری نمایی است. گرچه نامعادلهٔ (۳ ـ ۲۲) پایداری مجانبی یکنواخت مبدأ را بدون نیاز به یافتن تابع لیاپانوف مشخص می‌کند؛ لیکن این روش به سودمندی معیار ویژهٔ کاربردی در سیستمهای خطی نامتغیربا زمان نیست زیرا در اینجا دستیابی به ماتریس انتقال حالت $\Phi(t, t_0)$، مستلزم حل معادلهٔ حالت (۳ ـ ۲۰) می‌باشد. البته باید توجه داشت در سیستمهای خطی متغیر با زمان نمی‌توان پایداری مجانبی یکنواخت را از روی مکان مقادیر ویژهٔ ماتریس A تعیین کرد*؛ این موضوع در مثال ذیل مطرح شده است:

مثال ۳ ـ ۲۳ سیستم خطی مرتبهٔ دوم زیر مفروض است:

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 + 1/5\cos^2 t & 1 - 1/5\sin t\cos t \\ -1 - 1/5\sin t\cos t & -1 + 1/5\sin^2 t \end{bmatrix}$$

به ازای هر مقدار t، مقادیر ویژهٔ ماتریس A برابر است با: $-0/25 \pm 0/25\sqrt{7}j$. بنابراین مقادیر ویژهٔ ماتریس A مستقل از t بوده، در نیم صفحهٔ باز سمت چپ صفحهٔ مختلط قرار دارند. در این مثال، مبدأ ناپایدار است. این نکته را می‌توان به کمک ماتریس زیر تحقیق کرد:

$$\Phi(t, 0) = \begin{bmatrix} e^{0/5t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ -e^{0/5t}\sin t & e^{-t}\cos t \end{bmatrix}$$

که نشان می‌دهد حالتهای اولیه‌ای از سیستم در فاصلهٔ بسیار نزدیکی نسبت به مبدأ چنان یافت می‌شود که پاسخ متناظر با آن بیکران است و به سمت بینهایت میل می‌کند. Δ

گرچه قضیهٔ ۳ ـ ۹ به عنوان آزمون پایداری چندان سودمند نیست، لیکن به عنوان ضامن وجود تابع لیاپانوف برای سیستم خطی (۳ ـ ۲۰) ارزشمند است. در مثال ۳ ـ ۲۱ دیدیم چنانچه

* حالتهای خاصی وجود دارد که پایداری مجانبی یکنواخت مبدأ به عنوان نقطهٔ تعادل معادلهٔ (۳ ـ ۲۰)، معادل با شرطی بر مقدار ویژهٔ آن باشد؛ یکی از این حالتها، سیستمهای متناوب است (تمرین ۳ ـ ۴۰ و مثال ۸ ـ ۸ را ملاحظه کنید). حالت خاص دیگر، سیستمهای با تغییرات آرام است (مثال ۵ ـ ۱۳ را ملاحظه کنید).

بتوان ماتریس معیّن مثبت و کراندار را چنان یافت که همراه با ماتریس معیّن مثبت $Q(t)$ در معادلهٔ دیفرانسیل (۳ ـ ۲۱) صدق کند؛ آنگاه $V(t, x) = x^T P(t) x$ تابع لیاپانوف سیستم است. اگر ماتریس $Q(t)$ علاوه بر معیّن مثبت بودن، کراندار نیز باشد، یعنی:

$$0 < c_3 I \le Q(t) \le c_4 I, \quad \forall t \ge 0$$

و اگر $A(t)$ پیوسته و کراندار باشد، آنگاه می‌توان نشان داد مبدأ پایدار مجانبی یکنواخت است، به تعبیر دیگر معادلهٔ (۳ ـ ۲۱) دارای پاسخی است که ویژگیهای مطلوب را داراست.

قضیهٔ ۳ ـ ۱۰ *فرض کنید $x = 0$، نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی یکنواخت معادلهٔ (۳ ـ ۲۰) باشد. علاوه بر این فرض کنید ماتریس $A(t)$ پیوسته و کراندار و ماتریس $Q(t)$ نیز پیوسته، کراندار، معیّن مثبت و متقارن باشد. در این صورت ماتریس $P(t)$ چنان وجود دارد که پیوسته ـ مشتق‌پذیر، کراندار، معیّن مثبت و متقارن است و در رابطهٔ (۳ ـ ۲۱) نیز صدق می‌کند. بنابراین $V(t, x) = x^T P(t) x$، تابع لیاپانوف سیستم است که شرایط قضیهٔ ۳ ـ ۸ را نیز برآورده می‌کند.* $\Diamond$

برهان: فرض کنید داشته باشیم:

$$P(t) = \int_t^\infty \Phi^T(\tau, t)\, Q(\tau)\, \Phi(\tau, t)\, d\tau$$

همچنین $\phi(\tau, t, x)$ پاسخ معادلهٔ (۳ ـ ۲۰) باشد که از نقطهٔ (t, x) آغاز شده است. از خطی بودن نتیجه می‌شود: $\phi(\tau, t, x) = \phi(\tau, t)x$. با ملاحظهٔ تعریف $P(t)$ می‌توان نوشت:

$$x^T P(t) x = \int_t^\infty \phi^T(\tau, t, x)\, Q(\tau)\, \phi(\tau, t, x)\, d\tau$$

با استفاده از رابطهٔ (۳ ـ ۲۲) داریم:

$$x^T P(t) x \le \int_t^\infty c_4 \| \Phi(\tau, t) \|_2^2 \, \| x \|_2^2 \, d\tau$$

$$\le \int_t^\infty k^2 e^{-2\gamma(\tau - t)}\, d\tau\, c_4 \| x \|_2^2 = \frac{k^2 c_4}{2\gamma} \| x \|_2^2 \triangleq c_2 \| x \|_2^2$$

از سوی دیگر چون رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\|A(t)\|_2 \le L, \qquad \forall t \ge 0$$

سیستم خطی (۳ ـ ۲۰)، شرط لیپ شیتز جامع را با ثابت لیپ شیتز L برآورده می‌سازد؛ بنابراین پاسخ $\phi(\tau, t, x)$ در نامساوی ذیل صدق می‌کند*:

$$\|\phi(\tau, t, x)\|_2^2 \ge \|x\|_2^2 e^{-2L(\tau - t)}$$

بنابراین:

$$x^T P(t) x \ge \int_t^\infty c_3 \|\phi(\tau, t, x)\|_2^2 d\tau$$

$$\ge \int_t^\infty e^{-2L(\tau-t)} d\tau \; c_3 \|x\|_2^2 = \frac{c_3}{2L} \|x\|_2^2 \triangleq c_1 \|x\|_2^2$$

پس:

$$c_1 \|x\|_2^2 \ge x^T P(t) x \le c_2 \|x\|_2^2$$

که نشان می‌دهد ماتریس $P(t)$ معیّن مثبت و کراندار است. تعریف $P(t)$ نیز بیانگر آن است که متقارن و پیوسته ـ مشتق‌پذیر می‌باشد لذا می‌توان با مشتقگیری براساس خاصیت زیر:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(\tau, t) = -\Phi(\tau, t) A(t)$$

به این نتیجه رسید که $P(t)$ در رابطهٔ (۳ ـ ۲۱) صدق می‌کند، به طور مشخص می‌توان نوشت:

$$\dot{P}(t) = \int_t^\infty \Phi(\tau, t) Q(\tau) \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\tau, t) d\tau$$

$$+ \int_t^\infty \frac{\partial}{\partial t} \Phi^T(\tau, t) Q(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau - Q(\tau)$$

$$= -\int_t^\infty \Phi^T(\tau, t) Q(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau A(t)$$

$$-A^T(t) \int_t^\infty \Phi^T(\tau, t) Q(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau - Q(\tau)$$

* تمرین ۲ ـ ۲۲ را ملاحظه کنید.

$$= -P(t) A(t) - A^T(t) P(t) - Q(t)$$

بررسی اینکه $V(t, x) = x^T P(t) x$ تابع لیاپانوف است، در مثال ۳ ـ ۲۱ آمده است. □

اگر سیستم خطی (۳ ـ ۲۰)، نامتغیر با زمان باشد (یعنی ماتریس A ثابت باشد)، می‌توان تابع لیاپانوف $V(t, x)$ مربوط به قضیهٔ ۳ ـ ۱۰ را مستقل از t انتخاب کرد؛ زیرا می‌دانیم در سیستمهای خطی می‌توان نوشت:

$$\Phi(\tau, t) = exp\,[(\tau - t)A]$$

اگر A ماتریس پایداری باشد، در رابطهٔ (۳ ـ ۲۲) صدق می‌کند. حال با انتخاب ماتریس معیّن مثبت و متقارن (ثابت) Q می‌توان ماتریس $P(t)$ را به شکل زیر بیان نمود:

$$P = \int_t^\infty exp\,[(\tau - t)A^T]\, Q \cdot exp\,[(\tau - t)A]\, d\tau = \int_t^\infty exp\,[A^T s]\, Q\, exp\,[As]\, ds$$

که مستقل از t است. از مقایسهٔ این عبارت با رابطهٔ (۳ ـ ۱۳) مشاهده می‌شود P پاسخ یکتای معادلهٔ لیاپانوف (۳ ـ ۱۲) می‌باشد؛ بنابراین تابع لیاپانوف قضیهٔ ۳ ـ ۱۰ به شکل مطرح در بخش ۳ ـ ۳ تقلیل می‌یابد.

اکنون می‌توان از وجود توابع لیاپانوف در سیستمهای خطی قضیهٔ (۳ ـ ۱۰) برای اثبات نتایج خطی‌سازی و تعمیم قضیهٔ ۳ ـ ۷ به حالتهای ناخودگردان بهره جُست. برای این کار سیستم غیرخطی و ناخودگردان معادلهٔ (۳ ـ ۱۴) را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(t, x)$$

که $f: [0, \infty) \times D \longrightarrow R^n$ تابعی پیوسته ـ مشتق‌پذیر است و داریم: $D = \{x \in R^n \mid \|x\|_2 < r\}$. فرض کنید $x = 0$ نقطهٔ تعادل سیستم در لحظهٔ $t = 0$ باشد، یعنی: $f(t, 0) = 0, \forall t \ge 0$، ضمناً فرض کنید ماتریس ژاکوبی $[\partial f / \partial x]$ کراندار و نسبت به t، روی مجموعهٔ D به طور یکنواخت، لیپ شیتز باشد، بنابراین به ازای تمامی مقادیر $1 \le i \le n$ می‌توان نوشت:

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, x_1) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, x_2) \right\|_2 \le L_1 \|x_1 - x_2\|_2, \qquad \forall x_1, x_2 \in D, \quad \forall t \ge 0$$

از قضیهٔ مقدار میانگین می‌دانیم که:

$$f_i(t,x) = f_i(t,0) + \frac{\partial f_i}{\partial x}(t,z_i)x$$

که z_i، نقطه‌ای روی پاره‌خط واصل بین مبدأ و نقطهٔ x می‌باشد. چون $f(t,0) = 0$ است، می‌توان $f_i(t,x)$ را به شکل زیر نوشت:

$$f_i(t,x) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(t,z_i)x = \frac{\partial f_i}{\partial x}(t,0)x + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(t,z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(t,0)\right]x$$

بنابراین:

$$f(t,x) = A(t)x + g(t,x)$$

که:

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,0) \quad \text{و} \quad g_i(t,x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(t,z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(t,0)\right]x$$

تابع $g(t,x)$ در نامساوی ذیل صدق می‌کند:

$$\|g(t,x)\|_2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial f_i}{\partial x}(t,z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(t,0)\right\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2 \le L\|x\|_2^2$$

که $L = \sqrt{n}L_1$ است. بنابراین در همسایگیهای کوچک حول مبدأ می‌توان سیستم غیرخطی (۳ ـ ۱۴) را با خطی شدهٔ آن حول مبدأ تقریب زد. قضیهٔ ذیل بیانگر شیوهٔ غیرمستقیم لیاپانوف برای بررسی پایداری مجانبی یکنواختِ مبدأ در سیستمهای ناخودگردان است:

قضیهٔ ۳ ـ ۱۱ *فرض کنید $x = 0$، نقطهٔ تعادل سیستم غیرخطی زیر باشد:*

$$\dot{x} = f(t,x)$$

که $f: [0,\infty) \times D \longrightarrow R^n$، تابعی پیوسته ـ مشتق‌پذیر و D نیز برابر با $\{x \in R^n \mid \|x\|_2 < r\}$ است. ماتریس ژاکوبی $[\partial f/\partial x]$ کراندار و نسبت به t، روی

مجموعهٔ D به طور یکنواخت، لیپ شیتز است. در این صورت با شرط:

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\Big|_{x=0}$$

اگر مبدأ، نقطهٔ تعادل پایدار نمایی سیستم خطی $\dot{x} = A(t)x$ باشد آنگاه نقطهٔ تعادل پایدار نمایی سیستم غیرخطی نیز خواهد بود. ◇

برهان: از آنجا که سیستم خطی دارای یک نقطهٔ تعادل نمایی در مبدأ است و $A(t)$ نیز پیوسته و کراندار است، لذا قضیهٔ ۳ ـ ۱۰ تضمین می‌کند ماتریس $P(t)$ چنان وجود دارد که پیوسته ـ مشتق‌پذیر، کراندار، معیّن مثبت و متقارن است و در رابطهٔ (۳ ـ ۲۱) نیز صدق می‌کند ضمناً Q نیز پیوسته، معیّن مثبت و متقارن می‌باشد. حال با انتخاب تابع $V(t,x) = x^T P(t)x$ به عنوان نامزد تابع لیاپانوف برای سیستم غیرخطی و با محاسبهٔ مشتق تابع $V(t,x)$ در امتداد مسیرهای حالت سیستم می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= x^T P(t)f(t,x) + f^T(t,x)P(t)x + x^T\dot{P}(t)x \\
&= x^T[P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + \dot{P}(t)]x + 2x^T P(t)g(t,x) \\
&= -x^T Q(t)x + 2x^T P(t)g(t,x) \\
&\le -c_3\|x\|_2^2 + 2c_2 L\|x\|_2^3 \\
&\le -(c_3 - 2c_2 L_\rho)\|x\|_2^2, \qquad \forall \|x\|_2 < \rho
\end{aligned}$$

انتخاب $\rho < min\{r, c_3/2c_2L\}$ ما را مطمئن می‌سازد که در ناحیهٔ $\|x\|_2 < \rho$، تابع $\dot{V}(t,x)$ معیّن منفی است. بنابراین در ناحیهٔ $\|x\|_2 < \rho$، تمامی شروط قضیهٔ فرعی ۳ ـ ۴ برآورده می‌شود و در نتیجه می‌توان گفت مبدأ پایدار نمایی است. □

۳ ـ ۶ قضایای معکوس

قضایای ۳ ـ ۸ و قضایای فرعی ۳ ـ ۳ و ۳ ـ ۴ با استفاده از وجود تابع لیاپانوف $V(t,x)$، که شرایط خاصی را برآورده کند، پایداری مجانبی یکنواخت (و یا پایداری نماییِ) نقطهٔ $x = 0$ را

تضمین می‌کنند. در بسیاری از قضایای لیاپانوف لازم است تابع کمکی[1] با شرایط خاصی وجود داشته باشد. شرایط این قضایا را نمی‌توان مستقیماً بر اساس داده‌های مسأله بررسی کرد، در عوض باید به دنبال تابع کمکی مناسبی گشت. برای یافتن این تابع، دو سؤال اصلی در ذهن پیش می‌آید: نخست آنکه آیا تابعی وجود دارد که شرایط قضیه را برآورده کند؟ دیگر اینکه چگونه می‌توان چنین تابعی را یافت؟ در بسیاری از حالتها، نظریهٔ لیاپانوف پاسخ مثبتی به پرسش اول می‌دهد؛ در واقع پاسخ به شکل قضایای معکوس لیاپانوف[2] بیان می‌گردد که وارون هریک از قضایای لیاپانوف می‌باشد، برای مثال معکوس قضیهٔ پایداری مجانبی یکنواخت بیانگر این نکته است که اگر مبدأ، پایدار مجانبی یکنواخت باشد آنگاه تابع لیاپانوفی وجود دارد که شرایط قضیهٔ ۳ ـ ۸ را برآورده می‌کند. بسیاری از قضایای معکوس را می‌توان با انتخاب فرضیِ توابع کمکی، که شرایط قضایای متناظرشان را تأمین کنند، اثبات نمود؛ لیکن متأسفانه در بیشتر مواقع، انتخاب این توابع بر مبنای دانستن پاسخهای معادلهٔ دیفرانسیل است لذا این قضایا در جستجوی عملی برای یافتن تابع کمکی چندان به کار نمی‌آیند. اما صرف دانستن اینکه چنین تابعی وجود دارد بهتر از هیچ است زیرا حداقل می‌دانیم جستجویمان بی‌نتیجه نخواهد بود. ضمناً این قضایا از این نظر نیز سودمندند که با استفاده از نظریهٔ لیاپانوف، نتایجی مفهومی را در خصوص رفتار سیستمهای دینامیکی بیان می‌کنند. قضیهٔ ۳ ـ ۱۳ نمونه‌ای از چنین حالتی می‌باشد. مثالهای دیگری نیز در فصلهای بعدی بیان خواهد شد. در این بخش به بیان دو قضیهٔ معکوس لیاپانوف خواهیم پرداخت* که اولی مربوط به حالتی است که مبدأ، نقطهٔ تعادل پایدار نمایی است و دومی نیز مربوط به حالتی است که مبدأ پایدار مجانبی یکنواخت باشد.

ایدهٔ یافتن تابع معکوس لیاپانوف، برای ما جدید نیست چرا که در برهان قضیهٔ ۳ ـ ۱۰ و برای سیستمهای خطی این کار را انجام داده‌ایم. مطالعهٔ دقیق این برهان نشان می‌دهد خطی بودن سیستم، نقش مهمّی در اثبات قضیه ندارد (جز اینکه نشاندهندهٔ آن است که تابع $V(t,x)$ نسبت به x مجذوری است). این موضوع ما را به سوی اولین قضیهٔ معکوس رهنمون می‌کند که برهان آن نیز تعمیم ساده‌ای از برهان قضیهٔ ۳ ـ ۱۰ می‌باشد.

* برای بررسی جامع قضایای معکوس لیاپانوف، [۶۲] یا [۹۶] را ملاحظه کنید.

1. Auxiliary function
2. Converse Lyapunov's theorems

قضیهٔ ۳ ـ ۱۲ *فرض کنید $x = 0$، یکی از نقاط تعادل سیستم غیرخطی $\dot{x} = f(t,x)$ باشد که $f: [0,\infty) \times D \longrightarrow R^n$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر است و داریم: $D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$. ضمناً ماتریس ژاکوبی $[\partial f / \partial x]$ روی D و نسبت به t، کراندار یکنواخت است. علاوه بر این فرض کنید k، γ و r_0 ثابتهای مثبتی هستند که در نامساوی $r_0 < r/k$ صدق می‌کنند و داریم: $D_0 = \{x \in R^n \mid \|x\| < r_0\}$. در این صورت اگر مسیرهای حالت سیستم در عبارت ذیل صدق کنند:*

$$\|x(t)\| \le k \|x(t_0)\| e^{-\gamma(t-t_0)}, \quad \forall x(t_0) \in D_0, \quad \forall t \ge t_0 \ge 0$$

آنگاه تابع $V: [0,\infty) \times D_0 \longrightarrow R$ چنان وجود دارد که نامعادلات ذیل را برآورده می‌کند:

$$c_1 \|x\|^2 \le V(t,x) \le c_2 \|x\|^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \le -c_3 \|x\|^2$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \le c_4 \|x\|$$

که c_1، c_2، c_3 و c_4 ثابتهای مثبتی هستند. ضمناً اگر $r = \infty$ و مبدأ، نقطهٔ تعادل پایدار نمایی جامع باشد، آنگاه تابع $V(t,x)$ قابل تعریف است و تمامی نامعادلات فوق را در R^n ارضا می‌کند. علاوه بر این اگر سیستم خودگردان باشد، می‌توان V را نیز مستقل از t برگزید. ◇

برهان: با توجه به هم‌ارزی نُرمها کافی است قضیه را برای نُرم ۲ اثبات کنیم. فرض کنید $\Phi(t,\tau,x)$ پاسخی از سیستم باشد که از نقطهٔ (t,x) آغاز شده است یعنی: $\Phi(t,t,x) = x$. به ازای جمیع مقادیر $x \in D_0$ و $\tau \ge t$ داریم: $\Phi(\tau,t,x) \in D$. حال فرض کنید داشته باشیم:

$$V(t,x) = \int_t^{t+T} \phi^T(\tau,t,x)\, \phi(\tau,t,x)\, d\tau$$

که T ثابت مثبتی است که بعدتر انتخاب خواهد شد. با توجه به کران مسیرهای حالت (که به طور نمایی کاهش می‌یابد) می‌توان نوشت:

$$V(t,x) = \int_t^{t+T} \|\phi(\tau,t,x)\|_2^2\, d\tau$$

$$\leq \int_t^{t+T} k^2 e^{-2\gamma(\tau-t)}\, d\tau \;\|x\|_2^2 = \frac{k^2}{2\gamma}\left(1 - e^{-2\gamma T}\right)\|x\|_2^2$$

از سوی دیگر ماتریس ژاکوبی $[\partial f/\partial x]$ روی مجموعهٔ D کراندار است، پس با فرض:

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \right\|_2 \leq L, \qquad \forall x \in D$$

تابع $f(t,x)$ روی مجموعهٔ D لیپ شیتز است و ثابت لیپ شیتز آن نیز برابر با L می‌باشد؛ بنابراین پاسخ $\phi(\tau,t,x)$ در عبارت کران پایین زیر صدق می‌کند*:

$$\|\phi(\tau,t,x)\|_2^2 \geq \|x\|_2^2 e^{-2L(\tau-t)}$$

پس:

$$V(t,x) \geq \int_t^{t+T} e^{-2L(\tau-t)}\, d\tau \;\|x\|_2^2 = \frac{1}{2L}\left(1 - e^{-2LT}\right)\|x\|_2^2$$

حال با انتخاب مقادیر زیر، تابع $V(t,x)$ در اولین نامساوی قضیه صدق می‌کند:

$$c_1 = \frac{\left(1 - e^{-2LT}\right)}{2L} \quad \text{و} \quad c_2 = \frac{k^2\left(1 - e^{-2\gamma T}\right)}{2\gamma}$$

برای محاسبهٔ مشتق V در امتداد مسیرهای سیستم، تابع حساسیت ذیل را تعریف می‌کنیم:

$$\phi_t(\tau,t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(\tau,t,x); \qquad \phi_x(\tau,t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\phi(\tau,t,x)$$

پس:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) &= \phi^T(t+T,t,x)\,\phi(t+T,t,x) - \phi^T(t,t,x)\,\phi(t,t,x) \\
&\quad + \int_t^{t+T} 2\,\phi^T(\tau,t,x)\,\phi_t(\tau,t,x)\, d\tau \\
&\quad + \int_t^{t+T} 2\,\phi^T(\tau,t,x)\,\phi_x(\tau,t,x)\, d\tau f(t,x) \\
&= \phi^T(t+T,t,x)\,\phi(t+T,t,x) - \|x\|_2^2
\end{aligned}$$

* تمرین ۲ ـ ۲۲ را ملاحظه کنید.

$$+ \int_t^{t+T} 2\,\phi^T(\tau,t,x)\left[\phi_t(\tau,t,x) + \phi_x(\tau,t,x) f(t,x)\right] d\tau$$

چندان دشوار نیست که نشان دهیم*:

$$\phi_t(\tau,t,x) + \phi_x(\tau,t,x) f(t,x) \equiv 0, \qquad \forall \tau \geq t$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) &= \phi^T(t+T,t,x)\,\phi(t+T,t,x) - \|x\|_2^2 \\
&\leq -\left(1 - k^2 e^{-2\gamma T}\right)\|x\|_2^2
\end{aligned}$$

با انتخاب $T = Ln\left(2k^2\right)/2\gamma$ و $c_3 = \frac{1}{2}$، نامعادلهٔ دوم قضیه نیز برآورده می‌شود. برای تحقیق آخرین نامساوی، باید توجه داشت که $\phi_x(\tau,t,x)$ در معادلهٔ حساسیت زیر صادق است:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\phi_x = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\tau, \phi(\tau,t,x)\right)\phi_x, \qquad \phi_x(t,t,x) = I$$

زیرا:

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \right\|_2 \leq L$$

علاوه بر این روی مجموعهٔ D، ϕ_x رابطهٔ ذیل را نیز برآورده می‌کند:**

$$\|\phi_x(\tau,t,x)\|_2 \leq e^{L(\tau-t)}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\|_2 &= \left\| \int_t^{t+T} 2\,\phi^T(\tau,t,x)\,\phi_x(\tau,t,x)\, d\tau \right\|_2 \\
&\leq \int_t^{t+T} 2\,\|\phi(\tau,t,x)\|_2\,\|\phi_x(\tau,t,x)\|_2\, d\tau \\
&\leq \int_t^{t+T} 2k e^{-\gamma(\tau-t)} e^{L(\tau-t)}\, d\tau\;\|x\|_2 \\
&= \frac{2k}{(\gamma - L)}\left[1 - e^{-(\gamma-L)T}\right]\|x\|_2
\end{aligned}$$

** تمرین ۲ ـ ۲۶ را ملاحظه کنید.

** تمرین ۲ ـ ۲۲ را ملاحظه کنید.

در نتیجه با انتخاب مقدار زیر، آخرین نامساوی قضیه نیز محقق می‌گردد:

$$c_۴ = \frac{۲k}{(\gamma - L)}[۱ - e^{-(\gamma - L)T}]$$

واضح است اگر همهٔ فرضیات به طور جامع برآورده شود، می‌توان $r_۰$ را به طور دلخواه بزرگ انتخاب کرد. چنانچه سیستم خودگردان باشد، آنگاه $\phi(\tau, t, x)$ تنها به $(\tau - t)$ بستگی خواهد داشت؛ یعنی:

$$\phi(\tau, t, x) = \psi(\tau - t, x)$$

پس:

$$V(t,x) = \int_t^{t+T} \psi^T(\tau - t, x)\psi(\tau - t, x)\, d\tau = \int_۰^t \psi^T(s,x)\psi(s,x)\, ds.$$

که مستقل از t است. □

در قضیهٔ ۳ ـ ۱۱ دیدیم اگر خطی شدهٔ سیستم غیرخطی حول مبدأ، دارای نقطهٔ تعادل پایدار نمایی باشد آنگاه مبدأ، نقطهٔ تعادل پایدار نمایی سیستم غیرخطی است. اینک از قضیهٔ ۳ ـ ۱۲ برای اثبات این نکته استفاده می‌کنیم که پایداری نمایی سیستم خطی شده، شرط لازم و کافی برای پایداری نمایی مبدأ می‌باشد.

قضیهٔ ۳ ـ ۱۳ *فرض کنید $x = ۰$، نقطهٔ تعادل سیستم غیرخطی $\dot{x} = f(t,x)$ باشد که $f: [۰, \infty) \times D \longrightarrow R^n$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر است و داریم: $D = \{x \in R^n \mid \|x\|_۲ < r\}$ علاوه بر این فرض می‌کنیم ماتریس ژاکوبی $[\partial f/\partial x]$ کراندار و روی مجموعهٔ D، به طور یکنواخت نسبت به t، لیپ شیتز باشد. در این صورت اگر داشته باشیم:*

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\Big|_{x=۰}$$

آنگاه مبدأ، نقطهٔ تعادل پایدار نمایی سیستم غیرخطی خواهد بود اگر و تنها اگر نقطهٔ تعادل پایدار نمایی سیستم خطی $\dot{x} = A(t)x$ باشد. ◇

برهان: قسمت «اگر» حکم از قضیهٔ ۳ـ۱۱ حاصل می‌شود. برای اثبات قسمت «تنها اگر»، سیستم خطی را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\dot{x} = f(t,x) - [f(t,x) - A(t)x] = f(t,x) - g(t,x)$$

با یادآوری بحث پیشین در قضیهٔ ۳ ـ ۱۱، می‌دانیم که:

$$\|g(t,x)\|_۲ \le L\,\|x\|_۲^۲ \qquad \forall x \in D, \qquad \forall t \ge ۰$$

چون مبدأ یکی از نقاط تعادل پایدار نمایی سیستم غیرخطی است، لذا می‌توان مقادیر k، γ و c را چنان یافت که داشته باشیم:

$$\|x(t)\|_۲ \le k\,\|x(t_۰)\|_۲ e^{-\gamma(t-t_۰)}, \qquad \forall t \ge t_۰ \ge ۰, \qquad \forall \|x(t_۰)\|_۲ < c$$

با انتخاب $r_۰ < min\{c, r/k\}$ تمامی شرایط قضیهٔ ۳ ـ ۱۲ برآورده می‌شود. حال فرض می‌کنیم $V(t,x)$ تابعی باشد که از قضیهٔ ۳ ـ ۱۲ به دست آمده است و آن را به عنوان نامزد تابع لیاپانوف برای سیستم خطی برمی‌گزینیم؛ پس می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}A(t)x = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}f(t,x) - \frac{\partial V}{\partial x}g(t,x)$$

$$\le -c_۳\|x\|_۲^۲ + c_۴ L\,\|x\|_۲^۳$$

$$\le -(c_۳ - c_۴ L\rho)\,\|x\|_۲^۲, \quad \forall \|x\|_۲ < \rho$$

انتخاب $\rho < min\{r_۰, c_۳/c_۴ L\}$ ما را مطمئن می‌سازد که در ناحیهٔ $\|x\| < \rho$، $\dot{V}(t,x)$ معیّن منفی است، لذا همهٔ شرایط قضیهٔ فرعی ۳ ـ ۴ در ناحیهٔ $\|x\|_۲ < \rho$ برقرار است و نتیجه می‌شود مبدأ، نقطهٔ تعادل پایدار نمایی سیستم خطی است. □

مثال ۳ ـ ۲۳ سیستم مرتبهٔ اول زیر مفروض است:

$$\dot{x} = -x^۳$$

در مثال ۳ ـ ۱۴ دیدیم مبدأ پایدار مجانبی است اما خطی‌سازی سیستم حول مبدأ به سیستم خطی ذیل منجر می‌شود:

$$\dot{x} = 0$$

که ماتریس Aی آن هرویتز نیست، بنابراین طبق قضیهٔ ۳ ـ ۱۳ می‌توان نتیجه گرفت مبدأ پایدار نمایی نیست. Δ

این بخش را با بیان قضیهٔ معکوس دیگری به پایان می‌بریم که به حالت عمومیتری از نقاط تعادل پایدار مجانبی یکنواخت قابل اعمال است. برهان این قضیه، پیچیده‌تر از قضیهٔ ۳ ـ ۱۳ می‌باشد.

قضیهٔ ۳ ـ ۱۴ *فرض کنید $x = 0$، نقطهٔ تعادل سیستم غیرخطی $\dot{x} = f(t,x)$ و $f: [0,\infty) \times D \longrightarrow R^n$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد و داشته باشیم: $D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$. ماتریس ژاکوبی $[\partial f / \partial x]$ نیز روی مجموعهٔ D، نسبت به t کراندار یکنواخت است. علاوه بر این فرض کنید $\beta(\cdot,\cdot)$، تابعی متعلق به کلاس $\mathcal{KL}$ و r_0 ثابت مثبتی باشد که در رابطهٔ $r > \beta(r_0, 0)$ صدق می‌کند و داشته باشیم: $D_0 = \{x \in R^n \mid \|x\| < r_0\}$. در این صورت اگر مسیرهای حالت سیستم، عبارت ذیل را برآورده کنند:*

$$\|x(t)\| \le \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \qquad \forall x(t_0) \in D_0, \qquad \forall t \ge t_0 \ge 0$$

آنگاه تابع $V: [0,\infty) \times D_0 \longrightarrow R$ چنان وجود دارد که پیوسته ـ مشتق‌پذیر بوده، در روابط ذیل صدق نماید:

$$\alpha_1(\|x\|) \le V(t,x) \le \alpha_2(\|x\|)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \le -\alpha_3(\|x\|)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \le \alpha_4(\|x\|)$$

که $\alpha_1(\cdot)$، $\alpha_2(\cdot)$، $\alpha_3(\cdot)$ و $\alpha_4(\cdot)$، توابعی متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ هستند که بر بازهٔ $[0, r_0]$ تعریف شده‌اند. اگر سیستم خودگردان باشد، می‌توان V را مستقل از t برگزید. $\Diamond$

برهان: پیوست آ ـ ۶.

۳ ـ ۷ تمرینها

تمرین ۳ ـ ۱ سیستم مرتبهٔ دوم و خودگردان $\dot{x} = f(x)$ مفروض است. برای هریک از انواع نقاط تعادل زیر، بررسی کنید آیا نقطهٔ تعادل، پایدار، ناپایدار یا پایدار مجانبی است. پاسخ خود را به کمک رسم پیکره‌های فاز تحقیق کنید:

(الف) گره پایدار (ب) گره ناپایدار (ج) کانون پایدار

(د) کانون ناپایدار (ه) مرکز (و) نقطهٔ زینی

تمرین ۳ ـ ۲ سیستم عددیِ $\dot{x} = ax^p + g(x)$ را در نظر بگیرید که p عدد صحیح مثبتی است و $g(x)$ نیز در همسایگی مبدأ $x = 0$، در نامعادلهٔ $|g(x)| \le k\,|x|^{p+1}$ صدق می‌کند. نشان دهید اگر p فرد و a منفی باشد، مبدأ پایدار مجانبی است و اگر p فرد و a مثبت باشد و یا p زوج و $a \ne 0$ باشد، مبدأ ناپایدار است.

تمرین ۳ ـ ۳ برای هریک از سیستمهای زیر، با انتخاب نامزد تابع لیاپانوف مجذوری نشان دهید مبدأ پایدار مجانبی است. سپس بررسی کنید آیا مبدأ پایدار مجانبی جامع است؟

(الف)
$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2$$

(ب)
$$\dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$
$$\dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

(ج)
$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2 x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_1$$

(د)
$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2^3$$

تمرین ۳ ـ ۴ با استفاده از تابع: $V(x) = x_1^2 + x_2^2$، پایداری مبدأ را در سیستم ذیل برای دو حالت: (الف) $k = 0$ و (ب) $k \ne 0$ بررسی کنید.

$$\dot{x}_1 = x_1(k^2 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(x_1^2 + x_2^2 + k^2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1(k^2 + x_1^2 + x_2^2) + x_2(k^2 - x_1^2 - x_2^2)$$

تمرین ۳ ـ ۵ فرض کنید $g(x)$ نگاشتی از R^n به R^n باشد. نشان دهید $g(x)$ بردار گرادیانِ

تابع عددیِ $V: R^n \longrightarrow R$ است اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, \qquad \forall i, j = ۱, ۲, ..., n$$

تمرین ۳ ـ ۶ با استفاده از شیوهٔ گرادیان متغیر، تابع لیاپانوف $V(x)$ را چنان بیابید که پایداری مجانبی مبدأ را در سیستم زیر نشان دهد:

$$\dot{x}_۱ = x_۲$$
$$\dot{x}_۲ = -(x_۱ + x_۲) - sin(x_۱ + x_۲)$$

تمرین ۳ ـ ۷ ([۶۲]) سیستم مرتبهٔ دوم ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_۱ = \frac{-۶x_۱}{u^۲} + ۲x_۲$$
$$\dot{x}_۲ = \frac{-۲(x_۱ + x_۲)}{u^۲}$$

که: $u = ۱ + x_۱^۲$. اگر $V(x) = x_۱^۲/(۱ + x_۱^۲) + x_۲^۲$ باشد:

(الف) نشان دهید به ازای جمیع مقادیر $x \in R^۲ - \{۰\}$ داریم: $V(x) > ۰$ و $\dot{V}(x) < ۰$.

(ب) هذلولی[1] $x_۲ = ۲/(x_۱ - \sqrt{۲})$ را در نظر بگیرید. با محاسبهٔ میدان برداری در مرز این هذلولی نشان دهید مسیرهای واقع در شاخهٔ راست ربع اول نمی‌تواند آن شاخه را قطع کند.

(ج) نشان دهید مبدأ پایدار مجانبی جامع نیست.

راهنمایی: در بند (ب) نشان دهید روی نقاط واقع بر هذلولی داریم:

$\dot{x}_۲/\dot{x}_۱ = -۱/(۱ + ۲\sqrt{۲}\,x_۱ + ۲x_۱^۲)$ و این مقدار را با شیب مماس بر هذلولی مقایسه کنید.

تمرین ۳ ـ ۸ سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_۱ = x_۲$$
$$\dot{x}_۲ = x_۱ - sat(۲x_۱ + x_۲)$$

(الف) نشان دهید مبدأ پایدار مجانبی است.

1. Hyperbola

(ب) نشان دهید هیچیک از مسیرهایی که از ربع صفحهٔ سمت راست منحنی $x_۱ x_۲ = c$ (که $c > ۰$ به اندازهٔ کافی بزرگ است) آغاز می‌شود، نمی‌تواند به مبدأ برسد.

(ج) نشان دهید مبدأ پایدار مجانبی جامع نیست.

تمرین ۳ ـ ۹ (شیوهٔ کراسوسکی[1]) سیستم $\dot{x} = f(x)$ را با شرط $f(۰) = ۰$ در نظر بگیرید. فرض کنید $f(x)$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد و ژاکوبی $[\partial f/\partial x]$ در نامساوی زیر صدق کند:

$$P\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x)\right] + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x)\right]^T P \le -I, \qquad \forall x \in R^n, \quad P = P^T > ۰$$ که:

(الف) با استفاده از نماد $f(x) = \int_۰^۱ \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma x)\, x\, d\sigma$ نشان دهید:

$$x^T P f(x) + f^T(x) P x \le -x^T x, \qquad \forall x \in R^n$$

(ب) نشان دهید تابع $V(x) = f^T P f(x)$، به ازای جمیع مقادیر $x \in R^n$، معیّن مثبت است.

(ج) نشان دهید $V(x)$ بیکران شعاعی است.

(د) با استفاده از $V(x)$ به عنوان نامزد تابع لیاپانوف، نشان دهید مبدأ، پایدار مجانبی جامع می‌باشد.

تمرین ۳ ـ ۱۰ با استفاده از قضیهٔ ۳ ـ ۳، قضیهٔ اول ناپایداری لیاپانوف[2] را اثبات کنید: برای سیستم (۳ ـ ۱) اگر بتوان تابع پیوستهٔ $V_۱(x)$ را همراه با مشتقات اول پیوستهٔ آن در همسایگی مبدأ چنان یافت که $V_۱(۰) = ۰$ و $\dot{V}_۱$ در نزدیکی مبدأ، معیّن منفی یا نیمه معیّن نباشد، آنگاه مبدأ ناپایدار است.

تمرین ۳ ـ ۱۱ با استفاده از قضیهٔ ۳ ـ ۳، قضیهٔ دوم ناپایداری لیاپانوف[3] را اثبات کنید: در سیستم (۳ ـ ۱) اگر در همسایگی D حول مبدأ، تابع پیوسته ـ مشتق‌پذیرِ $V_۱(x)$ چنان وجود داشته باشد که $V_۱(۰) = ۰$ و $\dot{V}_۱$ نیز در امتداد مسیرهای حالت سیستم به شکل $\dot{V}_۱ = \lambda V_۱ + W(x)$ باشد (که $\lambda > ۰$ است و در D داریم: $W(x) \ge ۰$) و اگر $V_۱(x)$ در همسایگی نزدیک به مبدأ،

1. Krasovskii's method 2. Lyapunov's first instability theorem
3. Lyapunov's second instability theorem

معیّن منفی یا نیمه معیّن منفی نباشد، آنگاه مبدأ ناپایدار است.

تمرین ۳ ـ ۱۲ نشان دهید مبدأ سیستم زیر ناپایدار است:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2^6$$

$$\dot{x}_2 = x_2^3 + x_1^6$$

تمرین ۳ ـ ۱۳ نشان دهید مبدأ سیستم زیر ناپایدار است:

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1^6 - x_2^3$$

راهنمایی: نشان دهید مجموعهٔ $\{x_2 \leq x_1^2\} \cap \{x_2 \geq x_1^3\} \cap \{0 \leq x_1 \leq 1\} = \Gamma$، مجموعه‌ای ناتهی و پایای مثبت است و رفتار مسیرهای حالت را درون Γ بررسی کنید.

تمرین ۳ ـ ۱۴ ([۲۳]) سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{z} = -\sum_{i=1}^{m} a_i y_i$$

$$\dot{y}_i = -h(z,y)y_i + b_i g(z), \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

که z مقداری عددی و $y^T = (y_1, \ldots, y_m)$ است. توابع $h(\cdot,\cdot)$ و $g(\cdot)$ به ازای جمیع مقادیر (z,y) پیوسته ـ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$zg(z) > 0, \qquad \forall z \neq 0, \quad h(z,y) > 0, \qquad \forall (z,y) \neq 0$$

ضمن اینکه می‌توان نوشت:

$$|z| \longrightarrow \infty \Rightarrow \int_0^z g(z)\,d\sigma \longrightarrow \infty$$

ثابتهای a_i و b_i نیز در رابطهٔ ذیل صدق می‌کنند:

$$a_i/b_i > 0, b_i \neq 0, \forall i = 1, 2, \ldots, m$$

نشان دهید مبدأ نقطهٔ تعادل است و پایداری آن را با استفاده از نامزد تابع لیاپانوف زیر بررسی کنید:

$$V(z,y) = \alpha \int_0^z g(\sigma)\,d\sigma + \sum_{i=1}^{m} \beta_i y_i^2$$

تمرین ۳ ـ ۱۵ ([۱۴۳]) سیستم ذیل مفروض است:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2\, sat\,(x_2^2 - x_3^2)$$

$$\dot{x}_3 = x_3\, sat\,(x_2^2 - x_3^2)$$

که $sat(\cdot)$ تابع اشباع می‌باشد. نشان دهید مبدأ، نقطهٔ تعادل یکتای سیستم است و به‌کمک تابع $V(x) = x^T x$ تحقیق کنید نقطهٔ تعادل، پایدار مجانبی جامع است.

تمرین ۳ ـ ۱۶ مبدأ $x = 0$ یکی از نقاط تعادل سیستم زیر است:

$$\dot{x}_1 = -kh(x)x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -h(x)x_2 - x_1^3$$

فرض کنید $D = \{x \in R^2 \mid \|x\|_2 < 1\}$ باشد، با استفاده از تابع $V(x) = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2$ پایداری مبدأ را در هریک از حالتهای زیر بررسی کنید:

(الف) $k > 0,\ h(x) > 0,\ \forall x \in D;$ (د) $k > 0,\ h(x) > 0,\ \forall x \in R^2;$

(ب) $k > 0,\ h(x) < 0,\ \forall x \in D;$ (ه) $k > 0,\ h(x) = 0,\ \forall x \in D;$

(ج) $k = 0,\ h(x) > 0,\ \forall x \in D;$ (و) $k = 0,\ h(x) = 0,\ \forall x \in R^2.$

تمرین ۳ ـ ۱۷ سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + g(x_3)$$

$$\dot{x}_2 = -g(x_3)$$

$$\dot{x}_3 = -ax_1 + bx_2 - cg(x_3)$$

که a، b و c ثابتهای مثبتی هستند و $g(\cdot)$ نیز در رابطهٔ ذیل صدق می‌کند:

$$g(\circ) = \circ \text{ و } yg(y) > \circ, \quad \forall \circ < |y| < k, \quad k > \circ$$

(الف) نشان دهید مبدأ، نقطهٔ تعادل تنهاست.

(ب) با انتخاب: $V(x) = \frac{۱}{۲} a x_۱^۲ + \frac{۱}{۲} b x_۲^۲ + \int_\circ^{x_۳} g(y)\,dy$ به عنوان نامزد تابع لیاپانوف، نشان دهید مبدأ پایدار مجانبی است.

(ج) اگر داشته باشیم: $\forall y \in R - \{\circ\}, yg(y) > \circ$، آیا مبدأ پایدار مجانبی جامع است؟

تمرین ۳ ـ ۱۸ ([۶۷]) معادلهٔ لیئنارد[1] را در نظر بگیرید:

$$\ddot{y} + h(y)\dot{y} + g(y) = \circ$$

که g و h پیوسته ـ مشتق‌پذیرند.

(الف) با استفاده از $x_۱ = y$ و $x_۲ = \dot{y}$، معادلهٔ حالت را بنویسید و شرایطی را بر g و h تحمیل کنید که بر اساس آن، مبدأ نقطهٔ تعادل تنها باشد.

(ب) به کمک $V(x) = \int_\circ^{x_۱} g(y)\,dy + \frac{۱}{۲} x_۲^۲$ به عنوان نامزد تابع لیاپانوف، شرایطی را بر g و h تحمیل کنید که بر اساس آن، مبدأ نقطهٔ تعادل مجانبی باشد.

(ج) بند (ب) را با تابع $V(x) = \frac{۱}{۲}[x_۲ + \int_\circ^{x_۱} h(y)\,dy]^۲ + \int_\circ^{x_۱} g(y)\,dy$ تکرار کنید.

تمرین ۳ ـ ۱۹ سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_۱ = x_۲$$

$$\dot{x}_۲ = -a \sin x_۱ - k x_۱ - d x_۲ - c x_۳$$

$$\dot{x}_۳ = -x_۳ + x_۲$$

که تمامی ضرایب مثبتند و $k > a$ است. با استفاده از تابع:

$$V(x) = ۲a \int_\circ^{x_۱} \sin y\,dy + k x_۱^۲ + x_۲^۲ + p x_۳^۲$$

1. Liénard's equation

(با فرض $p > \circ$) نشان دهید مبدأ پایدار مجانبی جامع است.

تمرین ۳ ـ ۲۰ سیستم جرم ـ فنر تمرین ۱ ـ ۱۱ را می‌توان با مدل ذیل نشان داد:

$$M\ddot{y} = Mg - ky - c_۱\dot{y} - c_۲\dot{y}|\dot{y}|$$

نشان دهید این سیستم دارای یک نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی جامع است.

تمرین ۳ ـ ۲۱ معادلات حرکت روبات m مفصلهٔ تمرین ۱ ـ ۳ را در نظر بگیرید:

(الف) اگر $u = \circ$ باشد، با استفاده از تابع انرژی کل: $V(q, \dot{q}) = \frac{۱}{۲} \dot{q}^T M(q)\dot{q} + P(q)$ به عنوان نامزد تابع لیاپانوف، نشان دهید مبدأ $(q = \circ, \dot{q} = \circ)$، پایدار است.

(ب) با انتخاب: $u = -K_d \dot{q}$ (که K_d ماتریس قطری مثبت است)، نشان دهید مبدأ پایدار مجانبی است.

(ج) با انتخاب: $u = g(q) - K_p(q - q^*) - K_d \dot{q}$ (که K_p و K_d ماتریسهای قطری مثبت و q^* نیز موقعیت مطلوب روبات در R^m است) نشان دهید نقطهٔ $(q = q^*, \dot{q} = \circ)$، نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی است.

تمرین ۳ ـ ۲۲ فرض کنید مجموعهٔ M در قضیهٔ لاسَل، شامل تعداد معدودی از نقاط تنها باشد. نشان دهید $\lim_{t\to\infty} x(t)$ وجود دارد و برابر با یکی از آن نقاط است.

تمرین ۳ ـ ۲۳ ([۷۰]) سیستم گرادیان[1]، سیستمی دینامیکی به شکل $\dot{x} = -\nabla V(x)$ است که در آن $\nabla V(x) = [\partial V/\partial x]^T$ است و $V: D \subset R^n \longrightarrow R$ تابعی پیوسته ـ مشتق‌پذیر تا مرتبهٔ دوم است.

(الف) نشان دهید به ازای جمیع مقادیر $x \in D$ داریم: $\dot{V}(x) \leq \circ$. ضمناً $\dot{V}(x) = \circ$ است اگر و تنها اگر x، نقطهٔ تعادل سیستم باشد.

(ب) فرض کنید مجموعهٔ $\Omega_c = \{x \in R^n \mid V(x) \leq c\}$ به ازای جمیع مقادیر $c \in R$، فشرده است. نشان دهید هریک از پاسخهای سیستم برای تمامی مقادیر $t \geq \circ$ تعریف می‌شود.

(ج) در ادامهٔ بند (ب)، فرض کنید $\nabla V(x)$ به ازای جمیع مقادیر (بجز نقاط معدودی مانند

1. Gradient system

p_1، p_2، ...، p_n)، مخالف صفر است. نشان دهید برای هریک از پاسخهای $x(t)$، مقدار $\lim_{t\to\infty} x(t)$ وجود دارد و برابر با یکی از نقاط p_1، ...، p_n می‌باشد.

تمرین ۳ ـ ۲۴ معادلهٔ لیاپانوف: $PA + A^T P = -C^T C$ را در نظر بگیرید که زوج (A, C) رؤیت‌پذیر است. نشان دهید ماتریس A هرویتز است اگر و تنها اگر ماتریس $P = P^T > 0$ وجود داشته باشد و در معادلهٔ لیاپانوف صدق کند. علاوه بر این نشان دهید اگر A هرویتز باشد معادلهٔ لیاپانوف دارای پاسخ یکتایی خواهد بود.

راهنمایی: از قضیهٔ لاسَل استفاده کنید و توجه داشته باشید برای هر زوج رؤیت‌پذیر (A, C)، بردار $C\exp(At)$، به ازای جمیع مقادیر t، متحد با صفر است اگر و تنها اگر $x = 0$ باشد.

تمرین ۳ ـ ۲۵ سیستم خطیِ $\dot{x} = (A - BR^{-1}B^T P)x$ را در نظر بگیرید که زوج (A, B) کنترل‌پذیر[1] است و ماتریس $P = P^T > 0$ نیز در معادلهٔ ریکاتی[2] ذیل صدق می‌کند:

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

که $R = R^T > 0$ و $Q = Q^T > 0$ می‌باشد. با استفاده از تابع $V(x) = x^T Px$ به عنوان نامزد تابع لیاپانوف، نشان دهید مبدأ پایدار مجانبی جامع است اگر:

(الف) $Q > 0$ باشد؛

(ب) $Q = C^T C$ و زوج (A, C) رؤیت‌پذیر باشد (راهنمایی تمرین قبل را ملاحظه کنید).

تمرین ۳ ـ ۲۶ سیستم خطیِ $\dot{x} = Ax + Bu$ و زوج کنترل‌پذیر (A, B) مفروض است. اگر برای برخی مقادیر $\tau > 0$ داشته باشیم: $W = \int_0^\tau e^{-At}BB^T e^{-A^T t}\,dt$ و $K = -B^T W^{-1}$؛

(الف) نشان دهید W^{-1} معیّن مثبت است.

(ب) به کمک $V(x) = x^T W^{-1} x$ به عنوان نامزد تابع لیاپانوف برای سیستم $\dot{x} = (A + BK)x$، نشان دهید ماتریس $(A + BK)$، هرویتز است.

تمرین ۳ ـ ۲۷ فرض کنید $\dot{x} = f(x)$ و $f: R^n \longrightarrow R^n$ است. تغییر متغیر $z = T(x)$ را با

1. Controllable
2. Riccati equation

شرط $T(0) = 0$ در نظر بگیرید که $T: R^n \longrightarrow R^n$ نگاشتی وایَرسان[1] در همسایگی مبدأ است؛ بدین معنا که نگاشت وارون $T^{-1}(\cdot)$ وجود دارد و هر دو نگاشت $T(\cdot)$ و $T^{-1}(\cdot)$ پیوسته ـ مشتق‌پذیرند. سیستم تبدیل یافته به شکل زیر است:

$$\dot{z} = \hat{f}(z), \qquad \hat{f}(z) = \frac{\partial T}{\partial x} f(x)\Big|_{x = T^{-1}(z)}$$

(الف) نشان دهید $x = 0$ یکی از نقاط تعادل تنهای $\dot{x} = f(x)$ است اگر و تنها اگر $z = 0$ یکی از نقاط تعادل تنهای $\dot{z} = \hat{f}(z)$ باشد.

(ب) نشان دهید $x = 0$، پایدار (پایدار مجانبی / ناپایدار) است اگر و تنها اگر نقطهٔ $z = 0$، پایدار (پایدار مجانبی / ناپایدار) باشد.

تمرین ۳ ـ ۲۸ نشان دهید سیستم زیر:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{1 + x_3} - x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2$$

$$\dot{x}_3 = x_2 - 3x_3$$

دارای نقطهٔ تعادل یکتایی در ناحیهٔ $i = 1, 2, 3$ و $x_i \geq 0$ می‌باشد. با استفاده از خطی‌سازی، پایداری این نقطه را بررسی کنید.

تمرین ۳ ـ ۲۹ سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = (x_1 x_2 - 1)x_1^3 + (x_1 x_2 - 1 + x_2^2)x_1$$

$$\dot{x}_2 = -x_2$$

(الف) نشان دهید $x = 0$، نقطهٔ تعادل یکتای سیستم است.

1. Diffeomorphism

(ب) به‌کمک خطی‌سازی نشان دهید نقطهٔ $x = 0$، پایدار مجانبی است.

(ج) نشان دهید مجموعهٔ $\Gamma = \{x \in R^2 \mid x_1 x_2 \geq 2\}$ پایای مثبت است.

(د) آیا $x = 0$ پایدار مجانبی جامع است؟ پاسخ خود را اثبات کنید.

تمرین ۳ ـ ۳۰ برای هریک از سیستمهای ذیل به کمک خطی‌سازی نشان دهید مبدأ پایدار مجانبی می‌باشد، سپس نشان دهید مبدأ پایدار مجانبی جامع نیز هست.

(الف)
$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = (x_1 + x_2)\sin x_1 - 3x_2$$

(ب)
$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = -ax_1 - bx_2, \quad a, b > 0$$

تمرین ۳ ـ ۳۱ برای هریک از سیستمهای زیر، پایداری مبدأ را بررسی کنید:

(الف)
$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_3^2$$
$$\dot{x}_3 = x_3 - x_1^2$$

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_1^3$$

(ج)
$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_1^2$$
$$\dot{x}_3 = -x_3$$

(ب)
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\sin x_3 + x_1[-2x_3 - sat(y)]^2$$
$$\dot{x}_3 = -2x_3 - sat(y)$$
$$y = -2x_1 - 5x_2 + 2x_3$$

(د)
$$\dot{x}_1 = -x_1$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - x_3 - x_1 x_3$$
$$\dot{x}_3 = (x_1 + 1)x_2$$

تمرین ۳ ـ ۳۲ لم ۳ ـ ۲ را اثبات کنید.

تمرین ۳ ـ ۳۳ اگر α تابعی متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ بر بازهٔ $[0, a)$ باشد، ثابت کنید:

$$\alpha(r_1 + r_2) \leq \alpha(2r_1) + \alpha(2r_2), \qquad \forall r_1, r_2 \in [0, a)$$

تمرین ۳ ـ ۳۴ آیا مبدأ سیستم عددیِ: $\dot{x} = -x/t, t \geq 1$، پایدار مجانبی یکنواخت است؟

تمرین ۳ ـ ۳۵ فرض کنید همهٔ شرایط قضیهٔ ۳ ـ ۸ (بجز شرط: $\dot{V}(t,x) \leq -W_3(x)$ که $W_3(x)$ نیمه معیّن مثبت است)، برقرار باشد. نشان دهید مبدأ پایدار یکنواخت است.

تمرین ۳ ـ ۳۶ سیستم خطی متغیر با زمانِ زیر مفروض است:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & \alpha(t) \\ -\alpha(t) & -1 \end{bmatrix} x$$

که $\alpha(t)$ برای تمامی مقادیر $t \geq 0$، پیوسته می‌باشد. ثابت کنید مبدأ پایدار نمایی است.

تمرین ۳ ـ ۳۷ ([۸۷]) یک مدار RLC با عناصر متغیر با زمان به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L(t)} x_2$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C(t)} x_1 - \frac{R(t)}{L(t)} x_2$$

فرض کنید توابع $L(t)$، $C(t)$ و $R(t)$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشند و به ازای جمیع مقادیر $t \geq 0$، در نامساویهای $k_1 < L(t) \leq k_2$، $k_3 < C(t) \leq k_4$ و $k_5 < R(t) \leq k_6$ صدق کنند که k_1، k_2 و k_3 مقادیری مثبتند. نامزد تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید:

$$V(t,x) = \left[R(t) + \frac{2L(t)}{R(t)C(t)}\right] x_1^2 + 2x_1 x_2 + \frac{2}{R(t)} x_2^2$$

(الف) نشان دهید $V(t,x)$ معیّن مثبت و کاهنده است.

(ب) شرایطی را بر $L(t)$، $\dot{C}(t)$ و $\dot{R}(t)$ تحمیل کنید که پایداری نمایی مبدأ را تضمین نماید.

تمرین ۳ ـ ۳۸ سیستم زیر مفروض است:

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + \alpha(t) x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\alpha(t) x_1 - x_2^3$$

که $\alpha(t)$ تابعی پیوسته و کراندار است. نشان دهید مبدأ پایدار مجانبی یکنواخت جامع است.

آیا پایدار نمایی نیز هست؟

تمرین ۳ ـ ۳۹ ([۱۳۷]) معادلهٔ پاندولِ همراه با اصطکاک متغیر با زمان، به شکل زیر بیان می‌گردد:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\sin x_1 - g(t)x_2$$

فرض کنید $g(t)$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد و به ازای جمیع مقادیر $t \geq 0$، در نامساوی زیر صدق کند:

$$0 < a < \alpha \leq g(t) \leq \beta < \infty \; ; \qquad \dot{g}(t) \leq \gamma < 2$$

نامزد تابع لیاپانوف ذیل را در نظر بگیرید:

$$V(t,x) = \frac{1}{2}(a \sin x_1 + x_2)^2 + [1 + ag(t) - a^2](1 - \cos x_1)$$

(الف) نشان دهید تابع $V(t,x)$ معیّن مثبت و کاهنده است.

(ب) نشان دهید: $\dot{V} \leq (\alpha - a)x_2^2 - a(2 - \gamma)(1 - \cos x_1) + O(\|x\|^3)$

که $O(\|x\|^3)$ جمله‌ای است که در همسایگی مبدأ با $k\|x\|^3$ کرانمند می‌شود.

(ج) نشان دهید مبدأ پایدار مجانبی یکنواخت است.

تمرین ۳ ـ ۴۰ (نظریهٔ فلوکت[1])* سیستم خطیِ $\dot{x} = A(t)x$ مفروض است که: $A(t) = A(t+T)$. فرض کنید $\Phi(\cdot,\cdot)$ ماتریس انتقال حالت باشد، با تعریف ماتریس ثابت B به کمک معادلهٔ $\exp(BT) = \Phi(T,0)$ و با فرض $\Phi(0,t).P(t) = \exp(BT)$، نشان دهید:

(الف) $P(t+T) = P(t)$؛

(ب) $\Phi(t,\tau) = P^{-1}(t)\exp[(t-\tau)B]P(\tau)$؛

---

* برای بررسی جامع نظریهٔ فلوکت، [۱۴۲] را ملاحظه کنید.

1. Floquet theory

(ج) مبدأ $\dot{x} = A(t)x$، پایدار نمایی است اگر و تنها اگر B هرویتز باشد.

تمرین ۳ ـ ۴۱ سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1x_2 + 3t + 2 - 3x_1 - 2(t+1)x_2$$

(الف) تحقیق کنید $x_1 = t$ و $x_2(t) = 1$ یکی از پاسخهای سیستم است.

(ب) نشان دهید اگر $x(0)$ به اندازهٔ کافی به $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ نزدیک باشد، آنگاه با شرط $t \longrightarrow \infty$، $x(t)$ به سوی $\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$ همگرا می‌شود.

تمرین ۳ ـ ۴۲ سیستم ذیل مفروض ا ست:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + g(t)x_2$$

$$\dot{x}_2 = g(t)x_1 - 2x_2$$

که $g(t)$ تابعی پیوسته ـ مشتق‌پذیر است و برای تمامی مقادیر $t \geq 0$ داریم: $|g(t)| \leq 1$.
نشان دهید در این سیستم، مبدأ پایدار مجانبی یکنواخت است.

تمرین ۳ ـ ۴۳ سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - (1 + b\cos t)x_2$$

مقدار $b^* > 0$ را چنان بیابید که مبدأ به ازای جمیع مقادیر $|b| < b^*$، پایدار نمایی باشد.

تمرین ۳ ـ ۴۴ سیستم ذیل مفروض است:

$$\dot{x}_1 = x_2 - g(t)x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - g(t)x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

که $g(t)$ تابعی پیوسته ـ مشتق‌پذیر و کراندار است و به ازای جمیع مقادیر $t \geq 0$ داریم: $g(t) \geq k > 0$. آیا مبدأ پایدار مجانبی یکنواخت است؟ آیا پایدار نمایی است؟

تمرین ۳ ـ ۴۵ سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + (x_1^2 + x_2^2)\sin t$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + (x_1^2 + x_2^2)\cos t$$

نشان دهید مبدأ پایدار نمایی است. ناحیهٔ جذابیت را تخمین بزنید.

تمرین ۳ ـ ۴۶ دو سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x) \qquad (۳ ـ ۲۳)$$

$$\dot{x} = h(x)f(x) \qquad (۳ ـ ۲۴)$$

که $f: R^n \longrightarrow R^n$ و $h: R^n \longrightarrow R$ توابعی پیوسته ـ مشتق‌پذیرند و داریم: $f(0) = 0$ و $h(0) > 0$. نشان دهید مبدأ سیستم (۳ ـ ۲۳) پایدار نمایی است اگر و تنها اگر مبدأ سیستم (۳ ـ ۲۴) پایدار نمایی باشد.

تمرین ۳ ـ ۴۷ ثابت کنید سیستم:

$$\dot{x}_1 = -a x_1 + b$$

$$\dot{x}_2 = -c x_2 + x_1(\alpha - \beta x_1 x_2)$$

که تمامی ضرایب مثبت هستند، دارای نقطهٔ تعادل پایدار نمایی جامع می‌باشد.
راهنمایی: نقطهٔ تعادل را به مبدأ انتقال دهید و از تابع $V = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + k_3 y_1^4$ استفاده کنید که (y_1, y_3) دستگاه مختصات جدید است.

تمرین ۳ ـ ۴۸ سیستم ذیل مفروض است:

$$\dot{x} = f(t,x); \quad f(t,0) = 0$$

که $[\partial f/\partial x]$ کراندار و در همسایگی مبدأ، به طور یکنواخت نسبت به t و برای تمامی مقادیر $t > t_0 \geq 0$ ، نسبت به x لیپ شیتز است. فرض کنید مبدأ سیستمِ خطی شده در $x = 0$ ، پایدار نمایی باشد و پاسخهای سیستم در رابطهٔ زیر صدق کند:

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x(t_0)\| < c \qquad (۳ ـ ۲۵)$$

که β تابعی متعلق به کلاس $\mathcal{KL}$ و c نیز ثابت مثبتی است.
(الف) نشان دهید تابع $\alpha(\cdot)$ متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ و ثابت مثبتی مانند γ چنان وجود دارند که:

$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|x(t_0)\|)\exp[-\gamma(t - t_0)], \qquad \forall t \geq t_0, \forall \|x(t_0)\| < c$$

(ب) ثابت کنید ثابت مثبتی مانند M (که می‌تواند وابسته به c باشد) چنان وجود دارد که:

$$\|x(t)\| \leq M\|x(t_0)\|\exp[-\gamma(t - t_0)], \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall \|x(t_0)\| < c \qquad (۳ ـ ۲۶)$$

(ج) اگر نامساوی (۳ ـ ۲۵) به طور جامع برقرار باشد، آیا می‌توان نامساوی (۳ ـ ۲۶) را نیز به طور جامع بیان کرد؟

در چند مسألهٔ بعدی، با سیستم دینامیکی زمان ـ گسستهٔ[1] زیر سروکار داریم*:

$$x(k+1) = f(x(k)), \quad f(0) = 0 \qquad (۳ ـ ۲۷)$$

آهنگ تغییرات[2] تابع عددی $V(x)$ در امتداد حرکت (۳ ـ ۲۷) با رابطهٔ ذیل بیان می‌شود:

$$\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x)$$

تمرین ۳ ـ ۴۹ تعریف ۳ ـ ۱ را برای مبدأ سیستم زمان ـ گسستهٔ (۳ ـ ۲۷) بیان کنید.

تمرین ۳ ـ ۵۰ نشان دهید مبدأ سیستم (۳ ـ ۲۷)، پایدار است اگر بتوان در همسایگی مبدأ، تابع پیوسته و معیّن مثبت $V(x)$ را چنان یافت که $\Delta V(x)$ نیمه معیّن منفی باشد. ثابت کنید

---

* برای بررسی مفصّل مبحث پایداری لیاپانوف برای سیستمهای دینامیکی گسستهٔ زمانی، [۸۷] را ملاحظه کنید.

1. Discrete-time dynamical system
2. Rate of change

سیستم، پایدار مجانبی است اگر علاوه بر شرط قبلی، $V(x)$ معیّن منفی نیز باشد. در نهایت نشان دهید مبدأ پایدار مجانبی جامع است اگر شروط مربوط به پایداری مجانبی، به طور جامع برقرار و $V(x)$ نیز بیکران شعاعی باشد.

تمرین ۳ ـ ۵۱ ثابت کنید مبدأ سیستم (۳ ـ ۲۷)، پایدار مجانبی است اگر بتوان در همسایگی مبدأ، تابع پیوسته و معیّن مثبت $V(x)$ را چنان یافت که $\Delta V(x)$ برای مقادیر $x \neq 0$، صفر نشود.

تمرین ۳ ـ ۵۲ سیستم خطی $x(k+1) = Ax(k)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید عبارتهای ذیل معادلند:

(الف) $x = 0$، پایدار مجانبی است؛

(ب) برای تمامی مقادیر ویژهٔ A، $|\lambda_i| < 1$ می‌باشد؛

(ج) برای هر ماتریس $Q = Q^T > 0$، ماتریس $P = P^T > 0$ چنان وجود دارد که پاسخ یکتای معادلهٔ زیر باشد:

$$A^T PA - P = -Q$$

تمرین ۳ ـ ۵۳ فرض کنید A خطی شدهٔ معادلهٔ (۳ ـ ۲۷) در مبدأ باشد؛ یعنی:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0)$$

نشان دهید مبدأ پایدار مجانبی است اگر اندازهٔ همهٔ مقادیر ویژهٔ A کمتر از واحد باشد.

تمرین ۳ ـ ۵۴ فرض کنید $x = 0$، نقطهٔ تعادل سیستم غیرخطی و زمان ـ گسستهٔ زیر باشد:

$$x(k+1) = f(x(k))$$

که $f: D \longrightarrow R^n$ تابعی پیوسته ـ مشتق‌پذیر است و داریم: $D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$. فرض کنید $C, \gamma < 1$ و r_0 ثابتهای مثبتی هستند که برای آنها داریم: $r_0 < r/C$ و نیز: $D_0 = \{x \in R^n \mid \|x\| < r_0\}$. در این صورت اگر پاسخهای سیستم در نامساوی ذیل صدق کنند:

$$\|x(k)\| \leq C \|x(0)\| \gamma^k, \quad \forall x(0) \in D_0, \quad \forall k \geq 0$$

نشان دهید تابع $V: D_0 \longrightarrow R$ چنان وجود دارد که به ازای جمیع مقادیر $x, y \in D_0$ و ثابتهای مثبت c_1، c_2، c_3 و c_4 می‌توان نوشت:

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq c_2 \|x\|^2$$

$$\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x) \leq -c_3 \|x\|^2$$

$$|V(x) - V(y)| \leq c_4 \|x - y\| (\|x\| + \|y\|)$$

۴

تحلیل پیشرفتهٔ پایداری

در فصل سوم، مفاهیم اساسی و ابزارهای پایداری لیاپانوف را ارائه کردیم. در این فصل به بررسی دقیقتر برخی از این مفاهیم و تبیین برخی موارد تعمیمی و اصلاحی می‌پردازیم.

در فصل سوم چگونگی استفاده از خطی سازی را برای مطالعهٔ پایداری نقاط تعادل سیستمهای خودگردان بررسی کردیم. علاوه بر این دیدیم هنگامی که بخش حقیقی برخی از مقادیر ویژهٔ ماتریس ژاکوبیِ محاسبه شده در نقطهٔ تعادل صفر باشد و در عین حال هیچیک از مقادیر ویژه، بخش حقیقی مثبت نداشته باشد، آنگاه نمی‌توان از خطی سازی بهره جُست؛ از این رو در بخش ۴ ـ ۱ با تشریح قضیهٔ خمینهٔ مرکزی[1] و نحوهٔ استفاده از آن، به مطالعهٔ پایداری مبدأ سیستمهای خودگردان در حالت بحرانیِ شکست خطی سازی خواهیم پرداخت.

مفهوم ناحیهٔ جذابیتِ مربوط به نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی در بخش ۳ ـ ۱ بیان شد، در بخش ۴ ـ ۲، این موضوع با تشریح بیشتری مورد بحث قرار خواهد گرفت و ایده‌های جدیدی برای تخمین این ناحیه بیان خواهد گردید.

اصل پایایی لاسَل[2] دارای کاربردهای سودمندی در سیستمهای خودگردان است لیکن در حالت کلی برای سیستمهای ناخودگردان، اصل پایایی به شکل مطرح شده در قضیهٔ ۳ ـ ۴ وجود ندارد. اما قضایایی وجود دارد که برخی جنبه‌های اصل پایایی را در بر می‌گیرد. دو نمونه از این قضایا در بخش ۳ ـ ۶ بیان شده است که اولی نشاندهندهٔ همگرایی مسیر حالت به سمت یک مجموعه و دومی بیانگر پایداری مجانبی یکنواخت مبدأ می‌باشد.

---

1. Center manifold
2. LaSalle's invariance principle

۴ ـ ۱ قضیهٔ خمینهٔ مرکزی

سیستم خودگردان زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x) \qquad (۴ - ۱)$$

که $f: D \to R^n$ تابعی پیوسته ـ مشتق‌پذیر است و D نشاندهندهٔ همسایگی حول مبدأ $x = ۰$ می‌باشد. فرض کنید مبدأ، نقطهٔ تعادل معادلهٔ (۴ ـ ۱) باشد. قضیهٔ ۳ ـ ۷ می‌گوید چنانچه خطی شدهٔ f در مبدأ؛ یعنی ماتریس:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x)\Big|_{x=۰}$$

دارای مقادیر ویژه‌ای با بخش حقیقی منفی باشد، آنگاه مبدأ پایدار مجانبی و اگر بخش حقیقی برخی مقادیر ویژه، مثبت باشد مبدأ ناپایدار خواهد بود. علاوه بر این اگر بخش حقیقی برخی از مقادیر ویژهٔ ماتریس A صفر باشد و در عین حال بقیهٔ مقادیر ویژه دارای بخش حقیقی منفی باشد، آنگاه خطی سازی قادر به تعیین ویژگیهای مبدأ نیست. در این بخش به طور دقیقتر به حالت اخیر می‌پردازیم. شکست خطی‌سازی ما را با موضوع تحلیل سیستم غیرخطی از مرتبهٔ nاُم، معادلهٔ (۴ ـ ۱)، برای تعیین پایداری مبدأ، تنها می‌گذارد. نکتهٔ جالبی که در چند صفحهٔ بعد بیان می‌گردد ناظر بر این واقعیت است که می‌توان ویژگیهای پایداری مبدأ را به کمک تحلیل سیستمی غیرخطی با مرتبهٔ پایین‌تر تعیین کرد که مرتبهٔ این سیستم دقیقاً برابر با تعداد مقادیر ویژه‌ای از ماتریس A است که بخش حقیقی‌شان برابر با صفر می‌باشد. این موضوع، یکی از کاربردهای *نظریهٔ خمینهٔ مرکزی* است*.

خمینهٔ kبُعدی در R^n $(۱ \le k < n)$، دارای تعریف ریاضی مشخصی است**، لیکن برای بحث ما کافی است آن را به عنوان پاسخ معادلهٔ ذیل در نظر بگیریم:

$$\eta(x) = ۰$$

* نظریهٔ خمینهٔ مرکزی کاربردهای مختلفی در سیستمهای دینامیکی دارد، اما در اینجا فقط به جنبه‌ای از آن توجه می‌شود که به پایداری مبدأ مربوط است. برای بررسی دیدگاه وسیعتری در خصوص این نظریه می‌توان به [۲۸] مراجعه کرد.

** برای مثال، [۶۰] را ملاحظه کنید.

که $\eta: R^n \to R^{n-k}$ به اندازهٔ کافی هموار است (یعنی به تعداد بار کافی پیوسته ـ مشتق‌پذیر می‌باشد)، برای مثال دایرهٔ واحد: $\{x \in R^۲ \mid x_۱^۲ + x_۲^۲ = ۱\}$ یکی از خمینه‌های تک بعدی در $R^۲$ می‌باشد، به طور مشابه، کرهٔ واحد: $\{x \in R^n \mid \sum_{i=۱}^{n} x_i^۲ = ۱\}$ یکی از خمینه‌های $(n-۱)$ بُعدی در R^n است. خمینهٔ $\{\eta(x) = ۰\}$ را خمینهٔ پایای[1] معادلهٔ (۴ ـ ۱) می‌نامیم اگر داشته باشیم:

$$\eta(x(۰)) = ۰ \Rightarrow \eta(x(t)) \equiv ۰, \quad \forall t \in [۰, t_۱] \subset R$$

که $[۰, t_۱)$ هر بازهٔ زمانی است که پاسخ $x(t)$ بر روی آن تعریف می‌شود.

اکنون فرض کنید $f(x)$ تا مرتبهٔ دوم پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد، در این صورت می‌توان معادلهٔ (۴ ـ ۱) را به شکل زیر نوشت:

$$\dot{x} = Ax + \left[f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(۰)x\right] = Ax + \tilde{f}(x)$$

که تابع:

$$\tilde{f}(x) = f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(۰)x$$

تا مرتبهٔ دوم پیوسته ـ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$\tilde{f}(۰) = ۰; \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(۰) = ۰$$

از آنجا که به دنبال بررسی حالتی هستیم که خطی سازی شکست می‌خورد، لذا فرض می‌کنیم ماتریس A دارای k مقدار ویژه با بخش حقیقی صفر و $m = n - k$ مقدار ویژه با بخش حقیقی منفی باشد. همواره می‌توان تبدیل تشابهی[2] T را چنان یافت که ماتریس A را به شکل ماتریس بلوکی ـ قطری[3] تبدیل نماید، یعنی:

$$TAT^{-۱} = \begin{bmatrix} A_۱ & ۰ \\ ۰ & A_۲ \end{bmatrix}$$

1. Invariant manifold
2. Similarity transformation
3. Block diagonal matrix

که همهٔ مقادیر ویژهٔ A_1 دارای بخش حقیقی صفر و تمامی مقادیر ویژهٔ A_2 دارای بخش حقیقی منفی هستند. واضح است A_1 ماتریسی با ابعاد $k \times k$ و A_2 ماتریسی با ابعاد $m \times m$ می‌باشد. تغییر متغیر ذیل:

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = Tx; \quad y \in R^k; \quad z \in R^m$$

معادلهٔ (۴ ـ ۱) را به شکل ذیل در می‌آورد:

$$\dot{y} = A_1 y + g_1(y, z) \qquad (۴ ـ ۲)$$

$$\dot{z} = A_2 z + g_2(y, z) \qquad (۴ ـ ۳)$$

که g_1 و g_2 ویژگیهای f را با خود به همراه دارند، یعنی به طور مشخص، تا مرتبهٔ دوم پیوسته ـ مشتق‌پذیرند و برای مقادیر $i = 1, 2$ در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$g_i(0, 0) = 0; \quad \frac{\partial g_i}{\partial y}(0, 0) = 0; \quad \frac{\partial g_i}{\partial z}(0, 0) = 0 \qquad (۴ ـ ۴)$$

چنانچه $z = h(y)$ خمینهٔ پایایی برای معادلات (۴ ـ ۲) ـ (۴ ـ ۳) و h نیز هموار باشد، آنگاه می‌توان آن را خمینهٔ مرکزی نامید اگر داشته باشیم:

$$h(0) = 0; \quad \frac{\partial h}{\partial y}(0) = 0$$

قضیهٔ ۴ ـ ۱ *اگر g_1 و g_2 تا مرتبهٔ دوم پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشند و در رابطهٔ (۴ ـ ۴) صدق کنند و نیز اگر همهٔ مقادیر ویژهٔ A_1 دارای بخش حقیقی صفر و تمامی مقادیر ویژهٔ A_2 دارای بخش حقیقی منفی باشند، آنگاه می‌توان مقدار $\delta > 0$ و تابع پیوسته ـ مشتق‌پذیر $h(y)$ را (که برای جمیع مقادیر $\|y\| < \delta$ تعریف می‌شود) چنان یافت که $z = h(y)$ خمینهٔ مرکزی معادلات (۴ ـ ۲) ـ (۴ ـ ۳)* ◇

برهان: پیوست آ ـ ۷.

اگر حالت اولیهٔ سیستم (۴ ـ ۲) ـ (۴ ـ ۳) بر روی خمینهٔ مرکزی باشد (یعنی: $z(0) = h(y(0))$)، آنگاه پاسخ $(g(t), z(t))$ برای همهٔ مقادیر $t \geq 0$ بر روی خمینه باقی خواهد ماند

(یعنی: $z(t) = h(y(t))$). در این حالت می‌توان حرکت سیستم را درون خمینهٔ مرکزی با معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ kام ذیل توصیف کرد:

$$\dot{y} = A_1 y + g_1(y, h(y)) \qquad (۴ ـ ۵)$$

که از آن به عنوان سیستم *تقلیل یافته*[1] یاد می‌کنیم. چنانچه $z(0) \neq h(0)$ باشد، مقدار تفاضل $z(t) - h(y(t))$ نشاندهندهٔ میزان انحراف مسیر حالت نسبت به خمینه در لحظهٔ t می‌باشد. تغییر متغیر ذیل:

$$\begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z - h(y) \end{bmatrix}$$

معادلات (۴ ـ ۲) ـ (۴ ـ ۳) را به شکل زیر تبدیل می‌کند:

$$\dot{y} = A_1 y + g_1(y, w + h(y)) \qquad (۴ ـ ۶)$$

$$\dot{w} = A_2[w + h(y)] + g_2(y, w + h(y)) - \frac{\partial h}{\partial y}(y)[A_1 y + g_1(y, w + h(y))] \qquad (۴ ـ ۷)$$

در مختصات جدید، خمینهٔ مرکزی $w = 0$ است و می‌توان حرکت درون خمینه را با معادلهٔ ذیل بیان نمود:

$$w(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{w}(t) \equiv 0$$

از جایگذاری این اتحادها[2] در رابطهٔ (۴ ـ ۷) نتیجه می‌شود:

$$0 = A_2 h(y) + g_2(y, h(y)) - \frac{\partial h}{\partial y}(y)[A_1 y + g_1(y, h(y))] \qquad (۴ ـ ۸)$$

چون باید این معادله به ازای هر پاسخ موجود در خمینهٔ مرکزی برقرار باشد، لذا باید تابع $h(y)$ در معادلهٔ دیفرانسیل با مشتق جزئی[3] (۴ ـ ۸) صدق کند. اکنون با افزودن و کاستن جملهٔ $g_1(y, h(y))$ به سمت راست معادلهٔ (۴ ـ ۶) و تفریق (۴ ـ ۸) از (۴ ـ ۶)، می‌توان معادله را در دستگاه مختصات تبدیل‌یافته بازنوشت:

1. Reduced system 2. Identity 3. Partial differential equation

$$\dot{y} = A_1 y + g_1(y, h(y)) + N_1(y, w)$$

$$\dot{w} = A_2 w + N_2(y, w)$$

که: $$N_1(y, w) = g_1(y, w + h(y)) - g_1(y, h(y))$$

و: $$N_2(y, w) = g_2(y, w + h(y)) - g_2(y, h(y)) - \frac{\partial h}{\partial y}(y) N_1(y, w)$$

چندان دشوار نیست که تحقیق کنیم N_1 و N_2 تا مرتبهٔ دوم پیوسته ـ مشتق‌پذیرند و داریم:

$$N_i(y, 0) = 0; \quad \frac{\partial N_i}{\partial w}(0, 0) = 0 \quad \text{و} \quad i = 1, 2$$

علاوه بر این در قلمرو: $$\left\| \begin{matrix} y \\ w \end{matrix} \right\|_2 < \rho$$

N_1 و N_2 در نامساوی ذیل صدق می‌کنند:

$$\| N_i(y, w) \|_2 \le k_i \| w \|, \quad i = 1, 2$$

که با انتخاب ρ به اندازهٔ کوچک می‌توان ثابتهای مثبت k_1 و k_2 را به طور دلخواه کوچک اختیار کرد. این نامعادلات به همراه این نکته که ماتریس A_2 هرویتز است، بیانگر این نکته می‌باشد که می‌توان ویژگیهای پایداری مبدأ را به کمک سیستم تقلیل یافتهٔ (۴ ـ ۵) تعیین کرد. قضیهٔ زیر، که به نام *اصل تقلیل*[1] خوانده می‌شود، این نتیجه را تأیید می‌نماید:

قضیهٔ ۴ ـ ۱ *تحت فرضیات قضیهٔ ۴ ـ ۱، اگر مبدأ $y = 0$ مربوط به سیستم تقلیل یافتهٔ (۴ ـ ۵)، پایدار مجانبی (یا متناظراً ناپایدار) باشد آنگاه مبدأ مربوط به سیستم کامل (۴ ـ ۲) ـ (۴ ـ ۳) نیز پایدار مجانبی (یا متناظراً ناپایدار) خواهد بود.* ◇

برهان: تغییر مختصات از (y, z) به (y, w)، خواص پایداری مبدأ را تغییر نمی‌دهد (تمرین ۳ ـ ۲۷)؛ بنابراین می‌توانیم با سیستم (۴ ـ ۹) ـ (۴ ـ ۱۰) کار را ادامه دهیم. اگر مبدأ سیستم تقلیل یافتهٔ (۴ ـ ۵) ناپایدار باشد آنگاه با توجه به ویژگی پایایی، مبدأ سیستم (۴ ـ ۹) ـ (۴ ـ ۱۰) نیز

1. Reduction Principle

ناپایدار خواهد بود، مشخصاً می‌توان گفت برای هر پاسخ $y(t)$ مربوط به معادلهٔ (۴ ـ ۵)، پاسخ متناظر $(y(t), 0)$ مربوط به معادلات (۴ ـ ۹) ـ (۴ ـ ۱۰) وجود خواهد داشت، لذا پایداری مبدأ سیستم (۴ ـ ۹) ـ (۴ ـ ۱۰) به معنای پایداری مبدأ سیستم (۴ ـ ۵) می‌باشد. این نکته معادل آن است که بگوییم ناپایداری مبدأ سیستم (۴ ـ ۵) به معنای ناپایداری مبدأ سیستم (۴ ـ ۹) ـ (۴ ـ ۱۰) می‌باشد. اینک فرض کنید مبدأ سیستم تقلیل یافتهٔ (۴ ـ ۵) پایدار مجانبی باشد، بر اساس قضیهٔ ۳ ـ ۱۴ (قضیهٔ معکوس لیاپانوف) می‌توان تابع پیوسته ـ مشتق‌پذیر $V(y)$ را چنان یافت که معیّن مثبت بوده، نامساویهای ذیل را در همسایگی مبدأ برآورده سازد:

$$\frac{\partial V}{\partial y}[A_1 y + g_1(y, h(y))] \le -\alpha_3(\|y\|_2)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial y} \right\|_2 \le \alpha_4(\|y\|_2) \le k$$

که α_3 و α_4 توابعی متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ هستند. از سوی دیگر با توجه به اینکه A_2 هرویتز است، معادلهٔ لیاپانوف: $PA_2 + A_2^T P = -I$ دارای پاسخ یکتا و معیّن مثبت P می‌باشد. تابع:

$$v(y, w) = V(y) + \sqrt{w^T P w}$$

را به عنوان نامزد تابع لیاپانوف کلّ سیستم (۴ ـ ۹) ـ (۴ ـ ۱۰) در نظر می‌گیریم* در این صورت مشتق v در امتداد مسیرهای حالت سیستم برابر است با:

$$\dot{v}(y, w) = \frac{\partial V}{\partial y}[A_1 y + g_1(y, h(y)) + N_1(y, w)]$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{w^T P w}} [w^T (PA_2 + A_2^T P) w + 2 w^T P N_2(y, w)]$$

$$\le -\alpha_3(\|y\|_2) + k k_1 \|w\|_2 - \frac{\|w\|_2}{2\sqrt{\lambda_{max}(P)}} + \frac{k_2 \lambda_{max}(P)}{\sqrt{\lambda_{min}(P)}} \|w\|_2$$

$$= -\alpha_3(\|y\|_2) - \frac{1}{4\sqrt{\lambda_{max}(P)}} \|w\|_2$$

$$- \left[\frac{1}{4\sqrt{\lambda_{max}(P)}} - k k_1 - k_2 \frac{\lambda_{max}(P)}{\sqrt{\lambda_{min}(P)}} \right] \|w\|_2$$

* تابع $v(y, w)$ در هر نقطه‌ای حول مبدأ (بجز خمینهٔ $w = 0$)، پیوسته ـ مشتق‌پذیر است. هر دو تابع $v(y, w)$ و $\dot{v}(y, w)$ حول مبدأ تعریف می‌شوند و پیوسته‌اند. بسادگی می‌توان بررسی کرد که قضیهٔ ۳ ـ ۱ همچنان معتبر است.

با محدود کردن قلمرو حول مبدأ، می‌توان k_1 و k_2 را به اندازهٔ دلخواه کوچک اختیار کرد به طوری که بتوان نوشت:

$$\frac{1}{4\sqrt{\lambda_{max}(P)}} - kk_1 - k_2\frac{\lambda_{max}(P)}{\sqrt{\lambda_{min}(P)}} > 0$$

بنابراین: $$\dot{v}(y,w) \leq -\dot{\alpha}_3(\|y\|_2) - \frac{1}{4\sqrt{\lambda_{max}(P)}}\|w\|_2$$

که نشان می‌دهد $\dot{v}(y,w)$ معیّن منفی است. بنابراین نتیجه می‌شود مبدأ سیستم کاملِ معادلهٔ (۴ ـ ۹) ـ (۴ ـ ۱۰)، پایدار مجانبی است. □

تعمیم برهان قضیهٔ ۴ ـ ۲ (قضایای فرعی ذیل) را به خواننده وا می‌گذاریم (تمرینهای ۴ ـ ۱ و ۴ ـ ۲):

قضیهٔ فرعی ۴ ـ ۱ *تحت فرضیات قضیهٔ ۴ ـ ۱، اگر مبدأ $y = 0$ مربوط به سیستم تقلیل یافتهٔ (۴ ـ ۵) پایدار باشد و تابع پیوسته ـ مشتق‌پذیر $v(y)$ به عنوان تابع لیاپانوف چنان وجود داشته باشد که در همسایگی $y = 0$ داشته باشیم**:

$$\frac{\partial V}{\partial y}[A_1 y + g_1(y, h(y))] \leq 0$$

آنگاه مبدأ سیستم کاملِ (۴ ـ ۲) ـ (۴ ـ ۳)، پایدار است. ◇

قضیهٔ فرعی ۴ ـ ۲ *تحت شرایط قضیهٔ ۴ ـ ۱، مبدأ سیستم تقلیل یافتهٔ (۴ ـ ۵) پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر مبدأ سیستم کاملِ (۴ ـ ۲) ـ (۴ ـ ۳) نیز پایدار مجانبی باشد.* ◇

برای استفاده از قضیهٔ ۴ ـ ۲، لازم است خمینهٔ مرکزی $z = h(y)$ را بیابیم. تابع h، پاسخ

* نمی‌توان وجود تابع لیاپانوف $V(y)$ را از قضیهٔ معکوس لیاپانوف نتیجه گرفت. قضیهٔ معکوس لیاپانوف دربارهٔ پایداری [۶۲، ۹۶]، تضمین کنندهٔ وجود تابع لیاپانوفی به شکل $V(t,y)$ است که مشتقش در رابطهٔ $\dot{V}(t,y) \leq 0$ صدق کند. در حالت کلی نمی‌توان این تابع را مستقل از t ساخت [۶۲، صفحهٔ ۲۲۸]. گرچه می‌توان تابع $V(t,y)$ را چنان برگزید که نسبت به آرگومانهایش پیوسته ـ مشتق پذیر باشد. اما نمی‌توان مطمئن بود مشتقهای جزئی‌اش (یعنی $\partial V/\partial y$ و $\partial V/\partial t$) در همسایگی مبدأ و برای تمامی مقادیر $t \geq 0$، کراندار یکنواخت باشد [۹۶، صفحهٔ ۵۳].

معادلهٔ دیفرانسیل با مشتق جزئی زیر:

$$N(h(y)) \triangleq \frac{\partial h}{\partial y}(y)[A_1 y + g_1(y, h(y))] - A_2 h(y) - g_2(y, h(y)) = 0 \quad (۴ ـ ۱۱)$$

با شروط مرزی ذیل است:

$$h(0) = 0; \quad \frac{\partial h}{\partial y}(0) = 0 \quad (۴ ـ ۱۲)$$

در بسیاری از موارد نمی‌توان حل دقیقی برای معادلهٔ فوق یافت (یافتن چنین پاسخی به معنای این است که توانسته‌ایم پاسخ سیستم کامل (۴ ـ ۲) ـ (۴ ـ ۳) را بیابیم)، اما می‌توان پاسخ را با دقت خوبی به شکل سری تیلور نسبت به y تقریب زد.

قضیهٔ ۴ ـ ۳ *اگر بتوان تابع پیوسته ـ مشتق‌پذیر $\phi(y)$ را با شرط $\phi(0) = 0$ و $[\partial\phi/\partial y](0) = 0$ چنان یافت که برای برخی مقادیر $p > 1$ داشته باشیم: $N(\phi(y)) = O(\|y\|^p)$، آنگاه اگر $\|y\|$ به اندازهٔ کافی کوچک باشد، می‌توان نوشت:*

$$h(y) - \phi(y) = O(\|y\|^p)$$

ضمناً می‌توان سیستم تقلیل یافته را نیز با معادلهٔ ذیل نمایش داد:

$$\dot{y} = A_1 y + g_1(y, \phi(y)) + O(\|y\|^{p+1})$$

◇

برهان: پیوست آ ـ ۷.

نماد مرتبهٔ اندازه[1] $O(\cdot)$ را به طور رسمی در فصل هشتم معرفی خواهیم کرد (تعریف ۸ ـ ۱)، اما فعلاً کافی است $f(y) = O(\|y\|^p)$ را به عنوان نماد ساده‌ای برای $\|f(y)\| \leq k\|y\|^2$ (در حالتی که $\|y\|$ به اندازهٔ کافی کوچک است) در نظر بگیریم. در اینجا کاربرد قضیهٔ خمینهٔ مرکزی را به کمک ذکر مثالهایی بیان می‌کنیم: در مثال اول خواهیم دید برای معادلهٔ حالت عددی زیر:

$$\dot{y} = ay^p + O(|y|^{p+1})$$

1. Order of magnitude

(که pعدد صحیح مثبتی است)، مبدأ پایدار مجانبی است اگر p فرد و $a < 0$ باشد؛ ضمناً این معادله ناپایدار است اگر p فرد و $a > 0$ و یا p زوج و $a \neq 0$ باشد*.

مثال ۴ ـ ۱ سیستم زیر مفروض است:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + ax_1^2 = bx_1x_2, \quad a \neq 0$$

این سیستم دارای نقطهٔ تعادل یکتایی در مبدأ می‌باشد. از خطی سازی این معادله در مبدأ، ماتریس زیر به دست می‌آید:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

که دارای مقادیر ویژهٔ ۰ و ۱− می‌باشد. فرض کنید M ماتریسی باشد که ستونهایش بردارهای ویژهٔ ماتریس A باشد؛ یعنی:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

بافرض $T = M^{-1}$ می‌توان نوشت:

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

تغییر متغیر:

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

سیستم را به شکل زیر در می‌آورد:

$$\dot{y} = a(y+z)^2 - b(yz + z^2)$$

$$\dot{z} = -z - a(y+z)^2 + b(yz + z^2)$$

* تمرین ۳ ـ ۲ را ملاحظه کنید.

و معادلهٔ خمینهٔ مرکزی (۴ ـ ۱۱) ـ (۴ ـ ۱۲) خواهد شد:

$$N(h(y)) = h'(y)[a(y + h(y))^2 - b(yh(y) + h^2(y)) + h(y)$$

$$+ a(y + h(y))^2 - b(yh(y) + h^2(y)) = 0, h(0) = h'(0) = 0$$

با انتخاب $h(y) = h_2y^2 + h_3y^3 + \ldots$ و جانشینی این دنباله در معادلهٔ خمینهٔ مرکزی می‌توان با برابر قرار دادن ضرایب جمله‌های همتوان نسبت به y، ضرایب مجهول h_2 و h_3 و ... را یافت (باید دقت کرد که این معادله مانند اتحادی نسبت به y عمل می‌کند). البته از ابتدا نمی‌دانیم به چند جمله از این دنباله نیاز داریم، از این رو با ساده‌ترین تقریب یعنی: $h(y) \approx 0$ آغاز می‌کنیم و با جایگزینی $h(y) = O(|y|^2)$ در سیستم تقلیل یافته به بررسی پایداری مبدأ می‌پردازیم. چنانچه ویژگیهای پایداری مبدأ برآورده شود کار به پایان رسیده است، در غیر این صورت، ضریب h_2 را محاسبه کرده با جانشینی $h(y) \approx h_2y^2 + O(|y|^3)$، پایداری مبدأ را محک می‌زنیم، اگر این حالت نیز کافی نبود با تقریب $h(y) \approx h_2y^2 + h_3y^3$ پیش می‌رویم و .... اینک فرض کنید تقریب $h(y) \approx 0$ را برگزیده‌ایم؛ در این صورت سیستم تقلیل یافته به شکل: $\dot{y} = ay^2 + O(|y|^3)$ بیان می‌گردد. باید دقت کرد که خطای $O(|y|^2)$ در $h(y)$ به خطای $O(|y|^3)$ در سمت راست معادلهٔ سیستم تقلیل یافته منجر می‌شود، زیرا تابع $g_1(y, h(y))$ (که در سمت راست معادلهٔ سیستم تقلیل یافتهٔ (۴ ـ ۵) به شکل $g_1(y, z)$ ظاهر می‌شود)، دارای مشتق جزئی‌ای نسبت به z است که در مبدأ صفر می‌شود. این موضوع برای تقریبهای مرتبهٔ بالاتر نیز برقرار است، یعنی خطایی از مرتبهٔ $O(|y|^k)$ (که $k \geq 2$ است) در $h(y)$ به خطایی از مرتبهٔ $O(|y|^{k+1})$ در $g_1(y, h(y))$ منتهی می‌گردد. جملهٔ ay^2، جملهٔ غالب در سمت راست معادلهٔ سیستم تقلیل یافته است و اگر $a \neq 0$ باشد، مبدأ سیستم تقلیل یافته ناپایدار می‌باشد، بنابراین بر اساس قضیهٔ ۴ ـ ۲، مبدأ سیستم کامل نیز ناپایدار خواهد بود. Δ

مثال ۴ ـ ۲ سیستم ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{y} = yz$$

$$\dot{z} = -z + ay^2$$

که در دستگاه مختصات (y, z) بیان شده است. در این سیستم، معادلهٔ خمینهٔ مرکزی (۴ ـ ۱۱) ـ (۴ ـ ۱۲) به شکل زیر است:

$$h'(y)\,[yh(y)] + h(y) - ay^2 = 0, \quad h(0) = h'(0) = 0$$

با انتخاب $\phi(y) = 0$، معادلهٔ سیستم تقلیل یافته برابر است با:

$$\dot{y} = O(|y|^3)$$

که واضح است به هیچ نتیجه‌ای دربارهٔ پایداری مبدأ دست نمی‌یابیم. بنابراین مقدار $h(y) = h_2 y^2 + O(|y|^3)$ را در معادلهٔ خمینهٔ مرکزی جایگزین می‌کنیم و از برابر قرار دادن جمله‌های همتوان نتیجه می‌گیریم: $h_2 = a$؛ لذا معادلهٔ سیستم تقلیل یافته برابر است با*:

$$\dot{y} = ay^3 + O(|y|^4)$$

بنابراین اگر $a < 0$ باشد، مبدأ پایدار مجانبی و اگر $a > 0$ باشد ناپایدار خواهد بود؛ لذا طبق قضیهٔ ۴ ـ ۲ مبدأ سیستم کامل نیز با شرط $a < 0$، پایدار مجانبی و با شرط $a > 0$، ناپایدار است. Δ

مثال ۴ ـ ۳ سیستم معادلهٔ (۴ ـ ۲) ـ (۴ ـ ۳) را با مقادیر زیر در نظر بگیرید:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad g_1 = \begin{bmatrix} -y_1^3 \\ -y_2^3 + z^2 \end{bmatrix} \text{ و } A_2 = -1, \quad g_2 = y_1^3 - 3y_1^5 + 3y_1^2 y_2$$

می‌توان از رابطهٔ $\phi(y) = 0$، عبارت $N(\phi(y)) = O(\|y\|_2^3)$ را نتیجه گرفت، ضمن اینکه داریم:

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} -y_1^3 + y_2 \\ -y_1 + y_2^3 \end{bmatrix} + O(\|y\|_2^4)$$

* در اصل، خطای سمت راست معادلهٔ سیستم تقلیل یافته به شکل $O(|y|^5)$ است، زیرا اگر $h(y) = h_2 y^2 + h_3 y^3 + \dots$ باشد، خواهیم دید: $h_3 = 0$.

با استفاده از تابع $V(y) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)$ به عنوان نامزد تابع لیاپانوف، در همسایگی مبدأ و برای مقادیر $k > 0$ می‌توان نوشت.

$$\dot{V} = -y_1^4 - y_2^4 + y^T O(\|y\|_2^4) \le -\|y\|_2^4 + k\|y\|_2^5$$

بنابراین:

اگر: $\dot{V} \le -\frac{1}{2}\|y\|_2^4, \quad \|y\|_2 < \frac{1}{2k}$

که نشان می‌دهد مبدأ سیستم تقلیل یافته، پایدار مجانبی می‌باشد. Δ

شایان ذکر اینکه در مثال قبل کافی نیست سیستم زیر را مطالعه کنیم:

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} -y_1^3 + y_2 \\ -y_1 - y_2^3 \end{bmatrix}$$

بلکه باید تابع لیاپانوفی بیابیم که پایداری مجانبی مبدأ را برای تمامی آشفتگیهای مرتبهٔ $O(\|y\|_2^4)$ تضمین نماید. اهمیت این نکته در مثال ذیل نشان داده شده است:

مثال ۴ ـ ۴ سیستم مثال قبل را با تغییر زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اگر $\phi(y) = 0$ باشد، می‌توان سیستم تقلیل یافته را به شکل زیر بیان کرد:

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} -y_1^3 + y_2 \\ -y_2^3 \end{bmatrix} + O(\|y\|_2^4)$$

بدون حضور جملهٔ آشفتگی $O(\|y\|_2^4)$، مبدأ این سیستم، پایدار مجانبی است* اما چنانچه بخواهیم در حضور جملهٔ آشفتگی، تابع لیاپانوف $V(y)$ را برای اثبات پایداری مجانبی بیابیم،

* تمرین ۵ ـ ۲۴ را ملاحظه کنید.

به نتیجه‌ای نخواهیم رسید؛ زیرا در واقع باید بتوان تحقیق کرد معادلهٔ خمینهٔ مرکزی (۴ ـ ۱۱) ـ (۴ ـ ۱۲) دارای پاسخ دقیق $h(y) = y_1^3$ است و برای این کار نیز باید سیستم تقلیل یافته با معادلهٔ ذیل بیان گردد:

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} -y_1^3 + y_2 \\ y_1^6 - y_2^3 \end{bmatrix}$$

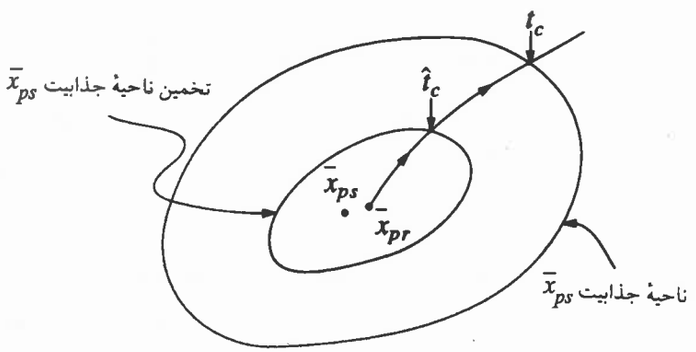
که مبدأ آن ناپایدار است*. Δ

۴ ـ ۲ ناحیهٔ جذابیت

در اغلب اوقات کافی نیست بدانیم سیستم مورد نظر دارای یک نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی است و باید بتوان ناحیهٔ جذابیت آن نقطه (و یا حداقل تخمینی از آن) را نیز یافت. برای تبیین اهمیت این نکته، مجموعه وقایعی را بررسی می‌کنیم که ممکن است در حین عملِ سیستمی غیر خطی رخ دهد: فرض کنید سیستمی غیرخطی دارای نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی باشد که در شکل ۴ ـ ۱ با $\bar{x}_{pr}$ نشان داده شده است، همچنین فرض کنید سیستم در وضعیت فعلی در حالت مانای $\bar{x}_{pr}$ کار می‌کند، اما در لحظهٔ t_0 اشکالی در سیستم رخ دهد که ساختار آن را تغییر دهد (برای مثال بروز اتصال کوتاه در یک شبکهٔ الکتریکی). فرض می‌کنیم نقطهٔ تعادل سیستمِ تغییر یافته در $\bar{x}_{pr}$ (یا همسایگی‌اش) نباشد، در این صورت مسیرهای حالت از نقطهٔ $\bar{x}_{pr}$ رانده می‌شود. حال فرض کنید خطای پیش آمده در لحظه t_1 برطرف گردد و سیستمِ پس از خطا دارای نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی در $\bar{x}_{ps}$ باشد که یا $\bar{x}_{ps} = \bar{x}_{pr}$ است و یا $\bar{x}_{ps}$ آنقدر نزدیک به $\bar{x}_{pr}$ است که عملکرد حالت مانا در نقطهٔ $\bar{x}_{ps}$ نیز قابل قبول می‌باشد. در حالت کلی ممکن است حالت سیستم در لحظهٔ t_1 (یعنی $x(t_1)$) دور از نقطهٔ تعادل پس از خطا باشد. اینکه آیا سیستم می‌تواند به عملکرد حالت مانای $\bar{x}_{ps}$ بازگردد یا خیر به این نکته بستگی دارد که آیا $x(t_1)$ به ناحیهٔ جذابیت $\bar{x}_{ps}$ (که به کمک معادلهٔ پس از خطای سیستم مشخص می‌شود) تعلق دارد یا خیر؟ یکی از عوامل اصلی در تعیین مقدار مجاز فاصلهٔ $x(t_1)$ از $\bar{x}_{ps}$، زمانی است که طول می‌کشد تا سیستم از حالت خطا خارج شود یعنی: $t_1 - t_0$. اگر $(t_1 - t_0)$ خیلی کوتاه باشد آنگاه به حسب پیوستگی پاسخ نسبت به t، انتظار این است که $x(t_1)$ در ناحیهٔ جذابیت قرار داشته باشد. اما در اصل عیب‌یابی و رفع آن

* تمرین ۳ ـ ۱۳ را ملاحظه کنید.

منوط به صرف زمان می‌باشد و یکی از پرسشهای حیاتی این است که این زمان چقدر است؟ در طراحی و برنامه ریزی چنین سیستمهایی بسیار ارزشمند است که به کارکنان آن بخش، میزان «زمان بحرانی رفع خطا[1]» (t_c) اطلاع داده شود که در طی آن مجازند به رفع عیب اقدام کنند، به تعبیر دیگر باید مقدار $(t_1 - t_0)$ کوچکتر از مقدار t_c باشد. چنانچه ناحیهٔ جذابیت $\bar{x}_{ps}$ مشخص باشد، می‌توان با انتگرالگیری از معادلهٔ سیستم دچار خطا در فاصلهٔ نقطهٔ تعادل پیش از خطا ($\bar{x}_{pr}$) تا مرز ناحیهٔ جذابیت سیستم، به مقدار t_c دست یافت. زمانی که طول می‌کشد تا مسیر حالت سیستم به مرز ناحیهٔ جذابیت برسد همان زمان بحرانی رفع خطاست زیرا اگر سیستم در طی این زمان رفع عیب شود، $x(t_1)$ درون ناحیهٔ جذابیت خواهد ماند. البته این بحث بر اساس این فرض منطقی است که $\bar{x}_{pr}$ متعلق به ناحیهٔ جذابیت $\bar{x}_{ps}$ باشد.



شکل ۴ ـ ۱ زمان بحرانی رفع خطا

اگر ناحیهٔ واقعی جذابیت معلوم نباشد و تخمینی از t_c به دست آمده باشد ($\hat{t}_c$) باید $\hat{t}_c < t_c$ باشد یعنی باید مرز تخمین ناحیهٔ جذابیت درون مرز واقعی ناحیه باشد (شکل ۴ ـ ۱ را ملاحظه کنید). این مثال نشان می‌دهد برای برنامه‌ریزی عملکرد سیستمهای غیر خطی، دانستن ناحیهٔ

1. Critical clearance time

جذابیت بسیار لازم است، علاوه براین بیانگر اهمیت یافتن تخمینی نه خیلی محافظه کارانه از این ناحیه نیز می‌باشد. زیرا تخمین خیلی محافظه‌کارانهٔ ناحیهٔ جذابیت سبب می‌شود $\hat{t}_c$ آنقدر کوچک گردد که در عمل غیر قابل استفاده به نظر رسد. به عنوان آخرین نکته در این بحث به این موضوع اشاره می‌کنیم که سلسله رخدادهای مطرح شده در این مثال چندان هم انتزاعی نیست بلکه اساس و مبنای مسألهٔ پایداری‌گذرا در سیسمتهای قدرت است*.

فرض کنید $x = 0$ نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی برای سیستم غیرخطی زیر باشد:

$$\dot{x} = f(x) \qquad (۴-۱۳)$$

که تابع $f: D \to R^n$ لیپ‌شیتز محلی است و $D \subset R^n$ نیز قلمرویی شامل مبدأ می‌باشد. فرض کنید $\phi(t;x)$ پاسخ معادلهٔ (۴-۱۳) باشد که از حالت اولیهٔ x در زمان $t = 0$ آغاز می‌شود؛ در این صورت ناحیهٔ جذابیت مبدأ، که با R_A نشان داده می‌شود، برابر است با:

$$R_A = \left\{ x \in D \;\middle|\; t \to \infty \Rightarrow \phi(t;x) \to 0 \right\}$$

برخی از ویژگیهای ناحیهٔ جذابیت در لم زیر بیان می‌گردد که برهان آن نیز در پیوست آ-۸ ذکر شده است:

لم ۴-۱ *اگر $x = 0$ نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی سیستم (۴-۱۳) باشد، آنگاه ناحیهٔ جذابیت آن (R_A) مجموعه‌ای باز، همبند و پایاست[1]؛ علاوه بر این مسیرهای حالت سیستم، مرزهای R_A را تشکیل می‌دهند.* ◇

این لم بیان می‌کند یکی از راههای تعیین ناحیهٔ جذابیت آن است که مسیرهای حالتی را مشخص کنیم که روی مرز R_A قرار می‌گیرند. روشهای مختلفی وجود دارد که مسأله را از این دیدگاه بررسی می‌کند اما از مفاهیم هندسی‌ای مربوط به نظریهٔ سیستمهای غیرخطی استفاده

* برای آشنایی با مسألهٔ پایداری گذرا در سیستمهای قدرت، [۱۳] را ملاحظه کنید.

1. Transient stability

می‌نماید که در این کتاب مورد بحث قرار نگرفته است؛ لذا از بیان آنها صرف نظر می‌کنیم*. اما می‌توانیم به کمک پیکره‌های فاز، شمّه‌ای از این روشهای هندسی را در حالت سیستمهای مرتبهٔ دوم ($n = 2$) بیان نماییم. مثالهای ۴-۵ و ۴-۶ دو حالت نوعی در صفحهٔ فاز را نشان می‌دهند: در مثال اول، مرز ناحیهٔ جذابیت، یک چرخهٔ حدّی است در حالی که در مثال دوم این مرز از مسیرهای حالت نقاط زینی تشکیل شده است. مثال ۴-۷ آسیب‌شناسی[1] حالتی را نشان می‌دهد که مرز ناحیه، منحنی بسته‌ای از نقاط تعادل است.

مثال ۴-۵ سیستم مرتبهٔ دوم ذیل مفروض است:

$$\dot{x}_1 = -x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + (x_1^2 - 1)\, x_2$$

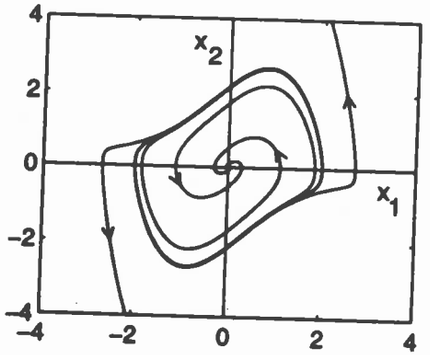
این معادله، بیانگر معادلهٔ وان دِرپُل در زمان معکوس است (یعنی در حالتی که $-t$ جانشین t شده است). این سیستم دارای یک نقطهٔ تعادل در مبدأ و یک چرخهٔ حدّی ناپایدار می‌باشد (پیکرهٔ فاز شکل ۴-۲ را ملاحظه کنید). پیکرهٔ فاز نشان می‌دهد مبدأ، کانون پایدار و در نتیجه پایدار مجانبی است. این نکته را می‌توان به کمک خطی سازی نیز تأیید کرد، زیرا ماتریس:

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

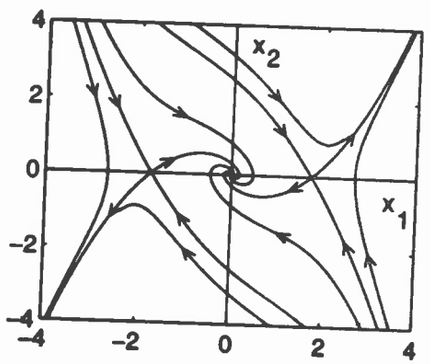
دارای مقادیر ویژه‌ای برابر با $-\frac{1}{2} \pm j\sqrt{\frac{3}{2}}$ می‌باشد. واضح است که ناحیهٔ جذابیت کراندار است زیرا مسیرهای حالتی که از خارج چرخهٔ حدّی آغاز می‌شوند، نمی‌توانند آن را قطع کنند تا به مبدأ برسند و از آنجا که نقطهٔ تعادل دیگری وجود ندارد، باید چرخهٔ حدّی، مرز R_A باشد. ملاحظه و بررسی پیکرهٔ فاز نشان می‌دهد که واقعاً همهٔ مسیرهایی که از درون چرخهٔ حدّی آغاز می‌شوند به صورت مارپیچی به سوی مبدأ سوق می‌یابند. Δ

* می‌توان مثالهایی از این روشها را در [۳۰] و [۱۹۱] یافت.

1. Pathological case



شکل ۴ ـ ۲ پیکرهٔ فاز مثال ۴ ـ ۵



شکل ۴ ـ ۳ پیکرهٔ فاز مثال ۴ ـ ۶

مثال ۴ ـ ۶ سیستم مرتبهٔ دوم ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \frac{1}{3}x_1^3 - x_2$$

این سیستم دارای سه نقطهٔ تعادل تنها در $(0, 0)$، $(\sqrt{3}, 0)$ و $(-\sqrt{3}, 0)$ می‌باشد و پیکرهٔ فاز آن در شکل ۴ ـ ۳ نشان داده شده است. این پیکرهٔ فاز نشان می‌دهد مبدأ، کانون پایدار و دو نقطهٔ تعادل دیگر، نقاط زینی است؛ بنابراین مبدأ، پایدار مجانبی و دو نقطهٔ تعادل دیگر ناپایدار

است. می‌توان این موضوع را به کمک خطی‌سازی نیز تأیید کرد. علاوه بر این با رسم پیکرهٔ فاز می‌توان دید مسیرهای حالت مربوط به نقاط زینی، دو جداساز را تشکیل می‌دهند که همان مرزهای ناحیهٔ جذابیت هستند و واضح است که این ناحیه، بیکران می‌باشد. Δ

مثال ۴ ـ ۷ سیستم:

$$\dot{x}_1 = -x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

دارای یک نقطهٔ تعادل در مبدأ و گستره‌ای از نقاط تعادل بر دایرهٔ واحد است (بدین معنا که هر نقطه روی دایرهٔ واحد، یک نقطهٔ تعادل سیستم است). واضح است که باید R_A محدود به درون دایرهٔ واحد باشد؛ مسیرهای حالت این سیستم، شعاعهای دایرهٔ واحد می‌باشد. می‌توان این موضوع را با انتقال سیستم به مختصات قطبی نیز ملاحظه کرد؛ از تغییر متغیرهای:

$$x_1 = \rho \cos\theta, \quad x_2 = \rho \sin\theta$$

داریم:

$$\dot{\rho} = -\rho(1 - \rho^2), \quad \dot{\theta} = 0$$

بنابراین همهٔ مسیرهای حالتی که با شرط $\rho < 1$ آغاز شوند، با افزایش t به سمت بینهایت، به سوی مبدأ همگرا می‌گردند، لذا R_A درون دایرهٔ واحد است. Δ

می‌توان از روش لیاپانوف نیز برای یافتن ناحیهٔ جذابیت (و یا تخمینی از آن) استفاده کرد. ابزار اصلی برای تعیین مرز R_A، قضیهٔ زوبوف[1] است که در تمرین ۴ ـ ۱۱ بیان شده است. اما این قضیه نیز بیشتر شبیه به قضایای وجود است و لازم است پاسخ معادلهٔ دیفرانسیل جزئی را داشته باشیم. از طریق روند بسیار ساده‌تری نیز می‌توان به کمک روش لیاپانوف، مرز R_A را تخمین زد. تخمین R_A به معنای یافتن مجموعهٔ $\Omega \subset R_A$ است به طوری که هر یک از مسیرهای حالتی که از Ω آغاز می‌شود، با افزایش t به سمت بینهایت، به سوی مبدأ همگرا گردد. در باقیماندهٔ این

1. Zubov's theorem

بخش به بحث راجع به جنبه‌های مختلف تخمین R_A می‌پردازیم و ابتدا نشان می‌دهیم قلمرو D در قضیهٔ ۳ ـ ۱، تخمینی از R_A نیست: در قضیهٔ ۳ ـ ۱ دیدیم اگر D قلمرویی شامل مبدأ باشد و بتوانیم تابع لیاپانوف $V(x)$ را چنان بیابیم که خودش در D معیّن مثبت و مشتقش در D معیّن منفی باشد، آنگاه مبدأ پایدار مجانبی خواهد بود، از این رو ممکن است کسی نتیجه بگیرد که D تخمینی از R_A است. همچنانکه در مثال ذیل تشریح شده. این استنتاج صحیح نیست.

مثال ۴ ـ ۸ دیگر بار سیستم مثال ۴ ـ ۶ را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \frac{1}{3}x_1^3 - x_2$$

این مثال حالت خاصی از مثال ۳ ـ ۵ با مقادیر ذیل است:

$$a = 1 \quad \text{و} \quad h(x_1) = x_1 - \frac{1}{3}x_1^3$$

بنابراین می‌توان تابع لیاپانوف زیر را در نظر گرفت:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} x + \int_0^{x_1} (y - \frac{1}{3}y^3)\, dy$$

$$= \frac{3}{4}x_1^2 - \frac{1}{12}x_1^4 + \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

و:

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2}x_1^2(1 - \frac{1}{3}x_1^2) - \frac{1}{2}x_2^2$$

حال با تعریف قلمرو D به شکل: $D = \left\{ x \in R^2 \;\middle|\; -\sqrt{3} < x_1 < \sqrt{3} \right\}$ می‌توان بسادگی نشان داد در $D - \{0\}$ داریم: $V(x) > 0$ و $\dot{V}(x) < 0$. اما ملاحظهٔ پیکرهٔ فاز سیستم در شکل ۴ ـ ۳ نشان می‌دهد D زیر مجموعهٔ R_A نیست. Δ

با عنایت به این مثال، چندان دشوار نیست که بیان کنیم چرا مجموعهٔ D در قضیهٔ ۳ ـ ۱، تخمینی از R_A نیست؛ زیرا اگرچه هر یک از مسیرهایی که از D آغاز می‌شوند از رویهٔ لیاپانوف

$V(x) = c_1$ به سمت رویهٔ لیاپانوف $V(x) = c_2$ $(c_2 < c_1)$ حرکت می‌کند لیکن هیچ تضمینی وجود ندارد که این مسیر حالت تا ابد درون D باقی بماند ضمناً وقتی که مسیر، مجموعهٔ D را ترک کند هیچ تضمینی بر منفی ماندن $\dot{V}(x)$ وجود ندارد؛ بنابراین همهٔ بحثها هنگامی که $V(x)$ به سمت صفر کاهش می‌یابد، بی ثمر است. ولی ما به دنبال آن هستیم که نشان دهیم چنین مسأله‌ای در تخمین R_A رخ نمی‌دهد زیرا مجموعهٔ R_A پایای مثبت است، بدین معنی که هر مسیری که از این مجموعه آغاز شود برای همهٔ لحظات آتی نیز درون آن باقی خواهد ماند. می‌توان ساده‌ترین تخمین را به شکل زیر بیان کرد:

$$\Omega_c = \left\{ x \in R^n \;\middle|\; V(x) \le c \right\}$$

که Ω_c کراندار و محصور در D می‌باشد. این موضوع را می‌توان به عنوان یکی از نتایج قضیهٔ ۳ ـ ۴ تعبیر نمود. سادگیِ به دست آوردن Ω_c در مقایسه با نتایج خطی سازی بخش ۳ ـ ۳ دارای اهمیت چشمگیری است؛ زیرا در آنجا دیدیم ماتریس ژاکوبی:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x=0}$$

ماتریس پایداری است، بنابراین همواره می‌توان با حل معادلهٔ لیاپانوف (۳ ـ ۱۲) و به دست آوردن ماتریس معیّن مثبت Q، تابع لیاپانوف مجذوریِ $V(x) = x^T Px$ را یافت. حال با کنار هم نهادن این تکه‌ها می‌توان گفت *در حالتی که A ماتریس هرویتز است می‌توان ناحیهٔ جذابیت مبدأ را تخمین زد*. این موضوع در دو مثال بعدی تشریح شده است:

مثال ۴ ـ ۹ سیستم مرتبهٔ دوم ذیل را:

$$\dot{x}_1 = -x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + (x_1^2 - 1)x_2$$

در مثال ۴ ـ ۵ دیدیم مبدأ پایدار مجانبی است زیرا ماتریس:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ماتریس پایداری است. برای یافتن تابع لیاپانوف، با انتخاب $Q = I$، ماتریس P را از معادلهٔ لیاپانوف ذیل می‌یابیم:

$$PA + A^T P = -I$$

پاسخ یکتای معادلهٔ فوق، ماتریس معیّن مثبت ذیل است:

$$P = \begin{bmatrix} ۱/۵ & -۰/۵ \\ -۰/۵ & ۱ \end{bmatrix}$$

در این صورت تابع مجذوری $V(x) = x^T P x$ تابع لیاپانوف سیستم در همسایگی مشخصی نسبت به مبدأ می‌باشد. از آنجا که هدف ما محاسبهٔ تخمینی از ناحیهٔ جذابیت است، لازم است قلمرو D حول مبدأ را چنان تعیین کنیم که $\dot{V}(x)$ در آن ناحیه، معیّن منفی و مجموعهٔ $\Omega_c \subset D$ کراندار باشد. علاوه بر این به دنبال آن هستیم که بزرگترین مجموعهٔ ممکن Ω_c را پیدا نماییم (یعنی بزرگترین مقدار ثابت c را بیابیم، زیرا Ω_c تخمینی از R_A می‌باشد) شایان توجه اینکه هیچگونه نگرانی در مورد معیّن مثبت بودن $V(x)$ در مجموعهٔ D وجود ندارد زیرا $V(x)$ برای تمامی مقادیر x، معیّن مثبت است. مشتق $V(x)$ در امتداد مسیرهای حالت سیستم عبارت است از:

$$\dot{V}(x) = -(x_۱^۲ + x_۲^۲) - (x_۱^۳ x_۲ - ۲x_۱^۲ x_۲^۲)$$

سمت راست تابع $\dot{V}(x)$ به صورت مجموع دو جمله نوشته شده است: جملهٔ اول ($-\|x\|_۲^۲$)، نشاندهندهٔ سهم بخش خطی Ax و جملهٔ دوم بیانگر سهم جملهٔ غیر خطی $g(x) = f(x) - Ax$ است که از جملهٔ اخیر معمولاً به نام آشفتگی یاد می‌شود. از آنجا که رابطهٔ ذیل برقرار است:

$$\|x\|_۲ \longrightarrow ۰ \Rightarrow \frac{\|g(x)\|_۲}{\|x\|_۲} \longrightarrow ۰$$

لذا می‌توان گوی بازی را به شکل $D = \{x \in R^۲ \mid \|x\|_۲ < r\}$ چنان یافت که $\dot{V}(x)$ در آن

معیّن منفی باشد. با مشخص شدن این گوی، می‌توان مجموعهٔ $\Omega_c \subset D$ را به کمک رابطهٔ ذیل تعیین نمود:

$$c < \min_{\|x\|_۲ = r} V(x) = \lambda_{min}(P)\, r^۲$$

بنابراین برای بزرگ شدن تخمین ناحیهٔ جذابیت، لازم است بزرگترین گویی را بیابیم که در آن $\dot{V}(x)$ معیّن منفی است؛ بدین منظور می‌توان نوشت:

$$\dot{V}(x) \le -\|x\|_۲^۲ + |x_۱|\,|x_۱ x_۲|\,|x_۱ - ۲x_۲| \le -\|x\|_۲^۲ + \frac{\sqrt{۵}}{۲}\|x\|_۲^۴$$

که در عبارت فوق از نامساویهای ذیل بهره جسته‌ایم:

$$|x_۱| \le \|x\|_۲,\ |x_۱ x_۲| \le \frac{۱}{۲}\|x\|_۲^۲,\ |x_۱ - ۲x_۲| \le \sqrt{۵}\,\|x\|_۲$$

بنابراین $\dot{V}(x)$ در گویی به شعاع $r^۲ = ۲/\sqrt{۵} = ۰/۸۹۴۴$، معیّن منفی است. در این مثال می‌توان با جستجوی D در دستگاه مختصات قطبی به تخمینی از Ω_c رسید که کمتر محافظه‌کار است؛ بدین منظور با در نظر گرفتن: $x_۱ = \rho\cos\theta$ و $x_۲ = \rho\sin\theta$ داریم:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= -\rho^۲ + \rho^۴ \cos^۲\theta \sin\theta\,(۲\sin\theta - \cos\theta) \\
&\le -\rho^۲ + \rho^۴\,|\cos^۲\theta\sin\theta|\,.\,|۲\sin\theta - \cos\theta| \\
&\le -\rho^۲ + \rho^۴ \times ۰/۳۸۴۹ \times ۲/۲۳۶۱ \\
&\le -\rho^۲ + ۰/۸۶۱\rho^۴ < ۰, \quad \rho^۲ < \frac{۱}{۰/۸۶۱}
\end{aligned}$$

برای:

اکنون با استفاده از این روابط به همراه $\lambda_{min}(P) \ge ۰/۶۹$، مقدار c را به شکل زیر بر می‌گزینیم:

$$c = ۰/۸ < \frac{۰/۶۹}{۰/۸۶۱} = ۰/۸۰۱$$

در این صورت مجموعهٔ Ω_c با مقدار $c = ۰/۸$، تخمینی از ناحیهٔ جذابیت است. Δ

مثال ۴ ـ ۱۰ سیستم مرتبهٔ دوم ذیل مفروض است:

$$\dot{x}_۱ = -۲x_۱ + x_۱ x_۲$$

$$\dot{x}_۲ = -x_۲ + x_۱ x_۲$$

این سیستم دارای دو نقطهٔ تعادل در (۰ ، ۰) و (۲ ، ۱) می‌باشد. نقطهٔ تعادل (۲ ، ۱) ناپایدار است؛ زیرا ماتریس:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_1=1,\,x_2=2}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

دارای مقادیر ویژه‌ای در $\pm\sqrt{2}$ می‌باشد که نشاندهندهٔ نقطهٔ زینی است، اما مبدأ پایدار مجانبی است؛ زیرا ماتریس:

$$A=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

هرویتز می‌باشد. تابع لیاپانوف سیستم را می‌توان با انتخاب $Q=I$ و به دست آوردن P از معادلهٔ لیاپانوف ذیل محاسبه کرد:

$$PA+A^TP=-I$$

مشتق تابع $V(x)=x^TPx$ در امتداد مسیرهای حالت سیستم با رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$\dot V(x)=-(x_1^2+x_2^2)+(\tfrac{1}{2}x_1^2x_2+x_1x_2^2)$$

$$\le -\|x\|_2^2+\frac{1}{2}|x_1^2x_2|\;|x_1+2x_2|\le -\|x\|_2^2+\frac{\sqrt{5}}{4}\|x\|_2^3$$

بنابراین $\dot V(x)$ در گویی به شعاع $r=4/\sqrt{5}$، معیّن مثبت است. با توجه به اینکه $\lambda_{min}(P)=\frac{1}{4}$ است، c را برابر با مقدار ذیل در نظر می‌گیریم:

$$c=0/79<\frac{1}{4}\times(\frac{4}{\sqrt{5}})^2=0/8$$

مجموعهٔ Ω_c با این مقدار c، تخمینی از ناحیهٔ جذابیت است. Δ

تخمین ناحیهٔ جذابیت به کمک مجموعهٔ Ω_c، ساده اما محافظه‌کارانه است، از این رو به بیان دو روش دیگر می‌پردازیم که تخمینهای مناسبتری را ارائه می‌کنند: روش اول، مبتنی بر قضیهٔ لاسَل (قضیه ۳ ـ ۴) و روش دوم، بر پایهٔ شیوهٔ معکوس‌کنندهٔ مسیر *حالت*[1] است که از طریق

1. Trajectory - reversing method

شبیه سازی کامپیوتری به دست می‌آید. قضیهٔ لاسَل به کمک مجموعهٔ Ω (که مجموعه‌ای فشرده و پایای مثبت است)، تخمینی از R_A را به دست می‌دهد. در واقع مجموعهٔ Ω_c (که مرزش، رویهٔ لیاپانوف است)، حالت خاصی از مجموعهٔ Ω است که ویژگی پایاییِ آن ناشی از معیّن منفی بودن $\dot V(x)$ می‌باشد. البته می‌توان با مجموعه‌های کلّی‌تری نیز کار کرد اما لازم است مجموعه‌هایی باشند که بتوان پایای مثبت بودن آنها را تضمین نمود و این موضوع مستلزم آن است که میدان برداری در مرز مجموعه بررسی گردد تا مطمئن شویم مسیرهای حالتی که از مجموعه آغاز می‌شوند هیچگاه آن را ترک نمی‌کنند. مثال ذیل این روش را تشریح می‌کند:

مثال ۴ ـ ۱۱ سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot x_1=x_2$$

$$\dot x_2=-4(x_1+x_2)-h(x_1+x_2)$$

که تابع $h:R\longrightarrow R$ در شروط ذیل صدق می‌کند:

$$h(0)=0;\quad uh(u)\ge 0,\quad \forall\,|u|\le 1$$

حال تابع مجذوری زیر با به عنوان نامزد تابع لیاپانوف فرض می‌کنیم *:

$$V(x)=x^T\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}x=2x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$$

در این صورت مشتق $\dot V(x)$ عبارت است از:

$$\dot V(x)=(4x_1+2x_2)\dot x_1+2(x_1+x_2)\dot x_2$$

$$=-2x_1^2-6(x_1+x_2)^2-2(x_1+x_2)h(x_1+x_2)$$

$$\le -2x_1^2-6(x_1+x_2)^2,\quad \forall\,|x_1+x_2|\le 1$$

$$=-x^T\begin{bmatrix}8 & 6\\ 6 & 6\end{bmatrix}x$$

* می‌توان این تابع لیاپانوف را با استفاده از شیوهٔ گرادیان متغیر به دست آورد. تمرین ۴ ـ ۱۴ را ملاحظه کنید.

بنابراین $\dot{V}(x)$ در مجموعهٔ $G = \left\{ x \in R^2 \;\middle|\; |x_1 + x_2| \le 1 \right\}$، معیّن منفی است و در نتیجه مبدأ پایدار مجانبی است. برای تخمین R_A، ابتدا شکل Ω_c را تخمین می‌زنیم، بدین منظور لازم است بزرگترین مقدار c را چنان بیابیم که داشته باشیم: $\Omega_c \subset G$. بسادگی می‌توان نشان داد چنین cیی برابر است با:

$$c = \min_{|x_1+x_2|=1} V(x) = \min \left\{ \min_{x_1+x_2=1} V(x), \min_{x_1+x_2=-1} V(x) \right\}$$

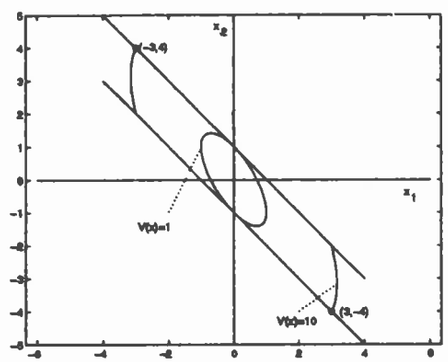
اولین کمینه سازی به نتیجهٔ زیر منجر می‌شود:

$$\min_{x_1+x_2=1} V(x) = \min_{x_1} \left\{ 2x_1^2 + 2x_1(1-x_1) + (1-x_1)^2 \right\} = 1$$

به طور مشابه می‌توان نوشت:

$$\min_{x_1+x_2=-1} V(x) = 1$$

بنابراین مجموعهٔ Ω_c با مقدار $c = 1$، تخمینی از R_A است (شکل ۴ ـ ۴).



شکل ۴ ـ ۴ تخمینهایی از ناحیهٔ جذابیت برای مثال ۴ ـ ۱۱

البته در این مثال می‌توان بدون تقیّد به اینکه تخمین حتماً به شکل Ω_c باشد، به تخمین بهتری برای R_A رسید. نکتهٔ اساسی در راه حل جدید توجه به این نکته است که مسیرهای درون G

نمی‌توانند از محیط محصور در مرز $|x_1 + x_2| = 1$ بیرون روند. برای مشاهدهٔ این نکته، هم می‌توان از ترسیم پیکرهٔ فاز سیستم و هم از تحلیل ذیل بهره جُست: فرض کنید داشته باشیم: $\sigma = x_1 + x_2$، به طوری که مرز G با $\sigma = 1$ و $\sigma = -1$ مشخص می‌شود؛ در این صورت مشتق σ^2 در امتداد مسیرهای حالت سیستم برابر است با:

$$\frac{d}{dt}\sigma^2 = 2\sigma(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) = 2\sigma x_2 - 8\sigma^2 - 2\sigma h(\sigma) \le 2\sigma x_2 - 8\sigma^2, \quad \forall\, |\sigma| \le 1$$

روی مرز $\sigma = 1$ می‌توان نوشت:

$$\frac{d}{dt}\sigma^2 \le 2x_2 - 8 \le 0, \quad \forall x_2 \le 4$$

و این بدان معناست که در حالت $x_2 \le 4$، اگر مسیر حالت در یکی از نقاط مرز $\sigma = 1$ باشد، دیگر نمی‌تواند از مجموعهٔ G خارج شود زیرا تابع σ^2 در چنین نقطه‌ای غیر افزایشی است. به طور مشابه در مرز $\sigma = 1$ داریم:

$$\frac{d}{dt}\sigma^2 \le -2x_2 - 8 \le 0, \quad \forall x_2 \ge -4$$

بنابراین در حالت $x_2 \ge -4$ نیز مسیرهای حالت نمی‌توانند از طریق $\sigma = -1$ مجموعهٔ G را ترک کنند پس می‌توان مجموعه‌ای بسته، کراندار و پایای مثبت را به دست آورد که در شروط قضیهٔ ۳ ـ ۴ نیز صدق کند (مجموعهٔ Ω). بدین منظور با مشخص شدن دو بخش فوق به عنوان مرز G، لازم است دو بخش دیگر مرز را نیز بیابیم تا مجموعه، بسته باشد. این بخشها باید دارای این ویژگی باشد که نباید مسیرهای حالت بتوانند از طریق آنها مجموعه را ترک نمایند؛ از این رو می‌توان آنها را به عنوان بخشهایی از رویهٔ لیاپانوف در نظر گرفت. فرض کنید مقدار c_1 چنان انتخاب شود که رویهٔ $V(x) = c_1$، مرز $x_1 + x_2 = 1$ را در نقطهٔ $x_2 = 4$ قطع کند (نقطهٔ $(4, -3)$ در شکل ۴ ـ ۴)؛ علاوه بر این فرض کنید مقدار c_2 چنان انتخاب گردد که رویهٔ لیاپانوف $V(x) = c_2$ مرز $x_1 + x_2 = -1$ را در نقطهٔ $x_2 = -4$ قطع نماید (نقطهٔ $(-3, 4)$ در شکل ۴ ـ ۴). در این صورت رویهٔ لیاپانوف مورد نیاز به شکل $V(x) = \min\{c_1, c_2\}$ تعریف می‌گردد که مقدار c_1 از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$c_1 = V(x)\Big|_{x_1 = -3,\, x_2 = 4} = 10$$

به همین ترتیب مقدار c_2 نیز برابر با ۱۰ خواهد شد. بنابراین $c = 10$ و مجموعهٔ Ω نیز برابر است با:

$$\Omega = \left\{ x \in R^2 \,\middle|\, V(x) \le 10 \text{ و } |x_1 + x_2| \le 1 \right\}$$

این مجموعه، بسته، کراندار و پایای مثبت است. علاوه بر این، از آنجا که $\Omega \subset G$ می‌باشد، $\dot{V}(x)$ نیز معیّن منفی است، لذا همهٔ شرایط قضیهٔ ۳ ـ ۴ برآورد شده است و می‌توان نتیجه گرفت تمامی مسیرهای حالتی که از Ω آغاز شده‌اند با افزایش t به سمت بینهایت، به سوی مبدأ همگرا می‌گردند؛ یعنی: $\Omega \subset R_A$. Δ

شیوهٔ معکوس کنندهٔ مسیر حالت، به کمک شبیه سازی کامپیوتری، تخمین اولیهٔ بزرگتری را برای ناحیهٔ جذابیت به دست می‌دهد. نام این روش مبتنی بر معکوس شدن جهت مسیرهای حالت معادلهٔ (۴ ـ ۱۳) از طریق انتگرالگیری پسرو[1] است که هم ارز با انتگرالگیری پیشرو[2] در سیستم زیر می‌باشد:

$$\dot{x} = -f(x) \qquad (۱۴ - ۴)$$

این رابطه همان معادلهٔ (۴ ـ ۱۳) است که فقط در آن t به $-t$ تبدیل شده است. مسیرهای حالت سیستم (۴ ـ ۱۴) نیز همان مسیرهای حالت سیستم (۴ ـ ۱۳) است با این تفاوت که جهت پیکانهای آن وارونه شده است. حال فرض کنید $W_0 \subset D$ مجموعه‌ای فشرده و شامل مبدأ در درونش می‌باشد، همچنین فرض کنید W_0 نسبت به (۴ ـ ۱۳) پایای مثبت است و تابع $V: W_0 \longrightarrow R$ چنان وجود دارد که معیّن مثبت و پیوسته ـ مشتق‌پذیر می‌باشد و در رابطهٔ ذیل نیز صدق می‌کند:

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in W_0 - \{0\}$$

در این صورت بر اساس قضایای ۳ ـ ۱ و ۳ ـ ۴، مبدأ، نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی برای سیستم (۴ ـ ۳) است و داریم: $W_0 \subset R_A$، در نتیجه می‌توان گفت مجموعهٔ W_0 همبند است*. اکنون

* تمرین ۴ ـ ۱۵ را ملاحظه کنید.

1. Backward integration 2. Forward integration

فرض می‌کنیم برای $x \in W_0$، $\psi(t,x)$ پاسخ معادلهٔ (۴ ـ ۱۴) باشد که در لحظهٔ $t = 0$ از نقطهٔ x آغاز می‌شود، این موضوع را انتگرالگیری پسرو سیستم (۴ ـ ۱۳) از نقطهٔ x می‌نامیم. چون $f(x)$ لیپ‌شیتز محلی و W_0 نیز فشرده است، لذا مقدار $T > 0$ چنان وجود دارد که تابع $\psi(t,x)$ به ازای جمیع مقادیر $x \in W_0$ بر بازهٔ $[0, T]$ تعریف گردد. البته باید توجه داشت ممکن است انتگرالگیری پسرو سیستم از نقطهٔ $x \in W_0$ دارای زمان رهایی محدود باشد (به رغم اینکه با توجه به $x \in R_A$، انتگرالگیری پیشرو برای همهٔ مقادیر t تعریف می‌گردد). مثال سادهٔ سیستم عددی ذیل:

$$\dot{x} = -x^3, \quad x(0) = x_0$$

این نکته را بخوبی تبیین می‌کند، این سیستم در زمان معکوس به شکل زیر در می‌آید:

$$\dot{x} = x^3, \quad x(0) = x_0$$

انتگرالگیری پیشرو به ازای جمیع مقادیر t امکانپذیر است و $x(t)$ به سمت مبدأ میل می‌کند در صورتی که از انتگرالگیری پسرو نتیجه می‌شود:

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 - 2tx_0^2}}$$

که دارای زمان رهایی محدود در لحظهٔ $t = \frac{1}{2}x_0^2$ می‌باشد. حال فرض کنید $t_1 \in (0, t)$ و نگاشت پسرو ذیل نیز وجود داشته باشد:

$$F(x) = \psi(t_1, x), \quad x \in W_0$$

در این صورت با توجه به یکتایی و پیوستگی پاسخها هم در انتگرالگیری پیشرو و هم در انتگرالگیری پسرو، می‌توان نتیجه گرفت این نگاشت بر روی مجموعهٔ W_0، پیوسته و یک به یک است و وارونش (F^{-1}) نیز روی $F(W_0)$ پیوسته می‌باشد. فرض کنید $W_1 = F(W_0)$ باشد، در این صورت W_1، فشرده و همبند است*. ضمناً می‌توان نوشت: $W_0 \subset W_1 \subset R_A$.

* این موضوع ناشی از این نکته است که فشردگی و همبندی مجموعه، تحت نگاشتهای توپولوژیکی[1] و یا همریختی[2] ثابت می‌ماند [۷]. توضیح اینکه نگاشت $F(\cdot)$ را نگاشت توپولوژیکی بر روی مجموعهٔ S می‌نامیم اگر پیوسته و یک به یک باشد و وارونش نیز بر روی $F(S)$ پیوسته باشد. نگاشت پسرو $F(x) = \psi(t_1, x)$، نگاشتی توپولوژیکی روی مجموعهٔ W_0 است.

1. Topological mapping 2. Homeomorphism

این نکته که W_0 زیر مجموعهٔ W_1 می‌باشد بدین دلیل است که W_0 نسبت به انتگرالگیری پیشرو، پایای مثبت است؛ بدین منظور فرض کنید نقطهٔ $\bar{x} \in W_0$ چنان باشد که به ازای هر $x \in W_0$ داشته باشیم: $\bar{x} \neq \psi(t_1, x)$. در این صورت مسیر پیشرویی[1] که از $\bar{x}$ آغاز می‌شود باید از مجموعهٔ W_0 خارج گردد که متناقض با شرط پایایی پیشرو[2] W_0 است. در واقع W_0 زیر مجموعهٔ سرهٔ[3] W_1 می‌باشد*. برای ملاحظهٔ این نکته باید توجه کرد که نمی‌توان هیچیک از نقاط مرزی W_0 را به کمک انتگرالگیری پسرو در درون W_0 قرار داد، زیرا باز این موضوع متناقض با پایای مثبت بودن مجموعه نسبت به انتگرالگیری پیشروست. علاوه بر این، چون هر یک از مسیرهای پیشرویی که از روی مرز W_0 آغاز می‌شود، باید به سمت مبدأ همگرا گردد لذا باید نقاطی روی مرزها وجود داشته باشد که در آنجا میدانهای برداری مسیرهای پیشرو به سوی درون مجموعهٔ W_0 متوجه گردند، از سویی انتگرالگیری پسرو باید این نقاط را در خارج از W_0 بگذارد. اینکه $W_1 \subset R_A$ می‌باشد، ناشی از آن است که انتگرالگیری پیشرو از هر یک از نقاط W_1، آن نقطه را درون W_0 می‌گذارد که زیر مجموعهٔ R_A می‌باشد. بنابراین W_1 نسبت به W_0، تخمین بهتری از ناحیهٔ جذابیت را ارائه می‌کند. حال t_1 را به t_2، t_3، ...، t_i،... افزایش می‌دهیم (با این شرط که برای جمیع مقادیر i داشته باشیم: $t_i < t_{i+1} < T$). تکرار بحث پیشین نشان می‌دهد نگاشتهای پسرو $\psi(t_i, x)$، مجموعه‌های فشردهٔ تو در تو[4] W_i را چنان تعریف می‌کند که داشته باشیم:

$$W_i = F_i(W_0), \quad W_i \subset W_{i+1} \subset R_A$$

که $F_i(x) = \psi(t_i, x)$ می‌باشد؛ بنابراین دنبالهٔ W_1، W_2 و ... تخمین بمراتب بهتری از R_A را به دست می‌دهد. کاربرد شیوهٔ معکوس کنندهٔ مسیر حالت نه در تولید تحلیلی مجموعه‌های W_i، که در استفاده از آن در شبیه سازیهای کامپیوتری برای تخمین و تقریب این مجموعه‌هاست**. برای این کار فرض کنید Γ_i مرز W_i باشد در این صورت بسادگی می‌توان

---

* A را زیر مجموعهٔ سرهٔ B گویند اگر $A \subset B$ اما $A \neq B$ باشد.

** می‌توان تقریب توصیف شده را در حالت کلّی به هر سیستم n بُعدی اعمال کرد. ضمناً در حالت $n = 2$ می‌توان از ترکیب ملاحظات توپولوژیکی با مفهوم عکس مسیر حالت به مجموعه‌ای از خطوط کلّی رسید که در تعیین ناحیهٔ جذابیت سهم مؤثری دارد. برای توضیحات بیشتر، [۵۵، ۱۲۷] را ملاحظه کنید.

1. Forward trajectory
2. Forward invariance
3. Proper subset
4. Nested compact sets

نشان داد که نگاشت پسرو $F_i(x) = \psi(t_i, x)$، Γ_0 را به Γ_i تبدیل می‌کند. حال Γ_0 را به کمک نقاط مناسبی گسسته کرده، سپس با استفاده از انتگرالگیری پسروِ این نقاط روی بازهٔ $[0, t_1]$، به تصاویر گسسته شدهٔ Γ_1 دست می‌یابیم. برای دستیابی به تخمین مناسبتر، مقدار $t_2 > t_1$ را برگزیده، انتگرالگیری پسرو را تکرار می‌کنیم. البته بدین منظور کافی است از نقاطِ روی Γ_1 و بر بازهٔ $[t_1, t_2]$ انتگرالگیری نماییم؛ زیرا بر اساس یکتایی پاسخ، نتیجهٔ این عمل با انتگرالگیری از نقاطِ روی Γ_0 و بر بازهٔ $[t_1, t_2]$ یکسان است. می‌توان با تکرار این روش به مرزهای Γ_3، Γ_4 و ... دست یافت. شایان ذکر اینکه در حالتی که R_A کراندار است، این روش بخوبی پاسخ می‌دهد زیرا در این حالت انتگرال پسرو به سمت بینهایت میل نخواهد کرد.

مثال ۴ ـ ۱۲ سیستم مرتبهٔ دوم ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = -x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + (x_1^2 - 1)x_2$$

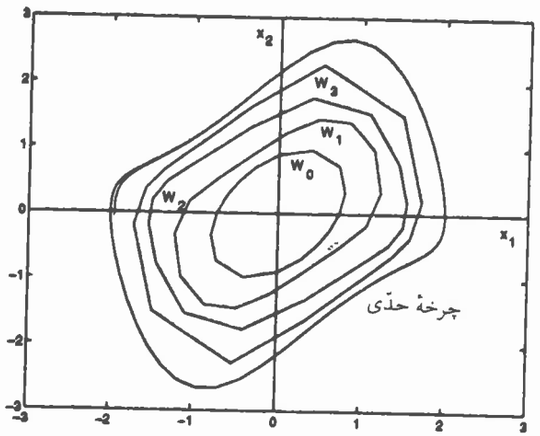
در مثال ۴ ـ ۵ دیدیم ناحیهٔ جذابیت (R_A) درون چرخهٔ حدّیِ شکل ۴ ـ ۲ واقع است. در مثال ۴ ـ ۹ نیز به کمک شیوهٔ لیاپانوف، R_A را به صورت ذیل تخمین زدیم:

$$W_0 = \left\{ x \in R^2 \,\middle|\, x^T P x \leq 0/8 \right\} \quad P = \begin{bmatrix} 1/5 & -0/5 \\ -0/5 & 1/0 \end{bmatrix} \quad \text{که:}$$

حال می‌خواهیم به کمک شیوهٔ معکوس کنندهٔ مسیر حالت، تخمین W_0 را بهبود بخشیم، برای این کار رویهٔ $x^T P x = 0/8$ را به کمک شانزده نقطه (که به لحاظ فضایی هم زاویه هستند)، گسسته کرده‌ایم، با نمایش این نقاط در مختصات قطبیِ (ρ_k, θ_k) داریم:

$$\theta_k = \frac{2\pi k}{16}, \quad \rho_k^2 = 0/8 \Big/ \begin{bmatrix} \cos\theta_k \\ \sin\theta_k \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} \cos\theta_k \\ \sin\theta_k \end{bmatrix}$$

که: $k = ۰, ۱, ۲, ...$ ۱۵. شکل ۴ ـ ۵، رویه‌های حاصل از انتگرالهای پسروِ این نقاط را بر بازهٔ $[۰, t_i]$ $(t_i = ۱, ۲, ۳)$ نشان می‌دهد. با توجه به این شکل واضح است با ادامهٔ روش، تخمین W_i هر چه بیشتر به R_A نزدیک می‌شود. Δ



شکل ۴ ـ ۵ تخمینهای ناحیهٔ جذابیت برای مثال ۴ ـ ۱۲

چنانچه R_A بیکران باشد، این روش، تخمین بزرگتری را برای ناحیهٔ جذابیت به دست می‌دهد اما نمی‌توانیم به طور مجانبی R_A را بازیابی کنیم، یکی از مشکلات، مسألهٔ زمان رهایی محدودِ انتگرالگیری پیشرو است. حتی بدون مواجهه با این مشکل، موضوع دیگر دشواریهای عددیِ ناشی از این نکته است که مسیرهای حالت پسرو با سرعتهای مختلفی به سمت بینهایت میل می‌کنند؛ یعنی گرچه انتگرال پسرو برخی نقاطِ روی $\Gamma_۰$ همچنان نزدیک به $\Gamma_۰$ می‌ماند، ممکن است انتگرال پسروِ نقاط دیگری، پاسخهای بزرگی را ایجاد کند که موجب بروز مشکلات عددی در روند شبیه‌سازی کامپیوتری گردد. مثال ذیل این موضوع را نشان می‌دهد:

مثال ۴ ـ ۱۳ سیستم مرتبهٔ دوم ذیل مفروض است:

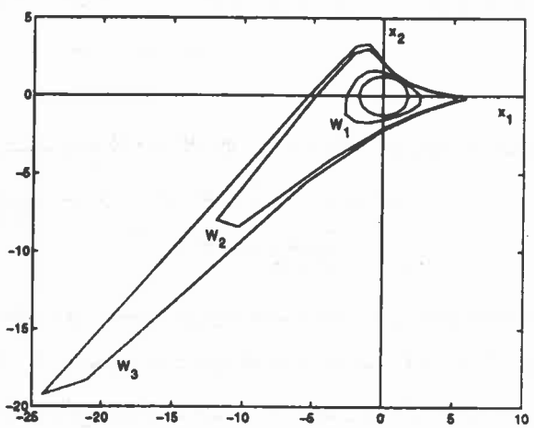
$$\dot{x}_۱ = -۲x_۱ + x_۱x_۲$$

$$\dot{x}_۲ = -x_۲ + x_۱x_۲$$

در مثال ۴ ـ ۱۰، R_A را با مجموعهٔ ذیل تخمین زدیم:

$$W_۰ = \left\{x \in R^۲ \;\middle|\; x^TPx \le ۰/۷۹\right\}, P = \begin{bmatrix} ۰/۲۵ & ۰ \\ ۰ & ۰/۵ \end{bmatrix} \quad \text{که:}$$

حال با گسسته کردن رویهٔ $x^TPx = ۰/۷۹$ به کمک روش ۴ ـ ۱۲، رویه‌های $\Gamma_۰$ را برای مقادیر $t_i = ۰/۲, ۰/۵, ۰/۵۵$ به دست می‌آوریم (شکل ۴ ـ ۶). شکل شبه بال این رویه‌ها به علت انتگرال پسرو مربوط به دو نقطه‌ای از $\Gamma_۰$ است که بسرعت به سمت بینهایت میل می‌کنند. برنامهٔ شبیه سازی در $t_i = ۰/۶$ به دلیل برخورد با نقاط منفرد دچار مشکل می‌شود و دیگر نتایج، قابل اعتماد نخواهد بود*. Δ



شکل ۴ ـ ۶ تخمینهای ناحیهٔ جذابیت برای مثال ۴ ـ ۱۳

۴ ـ ۳ قضایای پایایی

در مورد سیستمهای خودگردان، قضیهٔ پایایی لاسَل (قضیه ۳ ـ ۴) نشان می‌دهد مسیرهای حالت سیستم به سمت بزرگترین مجموعهٔ پایای موجود در E میل می‌کند که E مجموعه‌ای از همهٔ

* می‌توان انتگرالگیری را به کمک الگوریتم کلاسیک رانگ ـ کوتای مرتبهٔ چهارم[1] همراه با تنظیم خودکار گامها انجام داد. البته با استفاده از الگوریتم دیگری می‌توان به حدّ ۰/۶ نیز نزدیک شد؛ اما مشکل برای مقادیر بزرگتر t_i رخ خواهد داد.

1. Fourth - order Runge - Kutta algorithm

نقاط Ω است که به ازای آنها داریم: $\dot{V}(x) = 0$. در مورد سیستمهای ناخودگردان، حتی مشخص نیست چگونه می‌توان مجموعهٔ E را تعریف کرد زیرا $\dot{V}(t, x)$ هم تابع t و هم تابع x است. البته اگر بتوان تابع لیاپانوف را به شکل زیر بیان کرد، موقعیت ساده‌تر خواهد بود:

$$\dot{V}(t,x) \leq -W(x) \leq 0$$

زیرا می‌توان مجموعهٔ E را به عنوان مجموعه نقاطی تعریف کرد که برای آن نقاط داشته باشیم: $W(x) = 0$. انتظار این است که با افزایش t به سمت بینهایت، مسیرهای حالت سیستم به سمت مجموعهٔ E میل کند، این موضوع مبنای قضیهٔ بعدی است اما قبل از بیان قضیه به بیان لِمی می‌پردازیم که در اثبات قضیه به ما کمک می‌کند. این لم به خودی خود نیز دارای اهمیت است و به نام *لم باربالت*[1] خوانده می‌شود.

لم ۴ ـ ۲ *فرض کنید تابع $\phi : R \longrightarrow R$ بر بازهٔ $[0, \infty)$ پیوستهٔ یکنواخت و مقدار $\lim_{t \to \infty} \int_0^t \phi(\tau)\, d\tau$ نیز موجود و محدود باشد، در این صورت داریم:*

$$\lim_{t \to \infty} \phi(t) = 0$$

◇

برهان: اگر رابطهٔ حکم برقرار نباشد، می‌توان ثابت مثبت k_1 را چنان یافت که برای هر مقدار $T > 0$، مقدار $T_1 > T$ به نحوی یافت شود که داشته باشیم: $|\phi(T_1)| \geq k_1$. چون $\phi(t)$ پیوستهٔ یکنواخت است، می‌توان ثابت مثبت k_2 را چنان پیدا کرد که به ازای جمیع مقادیر $t \geq 0$ و $0 \leq \tau \leq k_2$ بتوان نوشت: $|\phi(t+\tau) - \phi(t)| < k_1 / 2$، در این صورت داریم:

$$|\phi(t)| = |\phi(t) - \phi(T_1) + \phi(T_1)|$$

$$\geq |\phi(T_1)| - |\phi(T) - \phi(T_1)|$$

$$> k_1 - \frac{1}{2}k_1 = \frac{1}{2}k_1, \quad \forall t \in [T_1, T_1 + k_2]$$

بنابراین: $$\left| \int_{T_1}^{T_1 + k_2} \phi(t)\, dt \right| = \int_{T_1}^{T_1 + k_2} |\phi(t)|\, dt > \frac{1}{2}k_1 k_2$$

1. Barbalat's lemma

تساوی اخیر به این دلیل برقرار است که علامت $\phi(t)$ در بازهٔ $T_1 \leq t \leq T_1 + k_2$ تغییر نمی‌کند، لذا مقدار $\lim_{t \to \infty} \int_0^t \phi(\tau)\, d\tau$ نمی‌تواند محدود باشد که تناقض است. □

قضیهٔ ۴ ـ ۴ *فرض کنید: $D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$ که $f(t, x)$ نسبت به t پیوستهٔ قطعه‌ای و نسبت به x، به طور یکنواخت نسبت به t، روی مجموعهٔ $[0, \infty)$ لیپ شیتز محلی باشد. علاوه بر این فرض کنید تابع $V : [0, \infty) \times D \longrightarrow R$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد که به ازای جمیع مقادیر $t \geq 0$ و $x \in D$ در روابط ذیل صدق می‌کند:*

$$W_1(x) \leq V(t,x) \leq W_2(x)$$

$$\dot{V}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq -W(x)$$

که $W_1(x)$ و $W_2(x)$ توابع پیوسته و معیّن مثبت و $W(x)$ تابعی پیوسته و نیمه معیّن مثبت روی D هستند. در این صورت اگر $\rho < \min_{\|x\| = r} W_1(x)$ باشد، آنگاه همهٔ پاسخهای معادلهٔ $\dot{x} = f(t,x)$ با شرط $x(t_0) \in \{x \in B_r \mid W_2(x) \leq \rho\}$ کراندارند و در شرط ذیل صدق می‌کنند: $\lim_{t \to \infty} W(x(t)) = 0$. علاوه بر این اگر همهٔ شروط قضیه به طور جامع برقرار و $W_1(x)$ نیز بیکران شعاعی باشد، حکم برای تمامی مقادیر $x(t_0) \in R^n$ برقرار خواهد بود.

◇

برهان: مشابه برهان قضیهٔ ۳ ـ ۸ و با توجه به $\dot{V}(t,x) \leq 0$ می‌توان نشان داد:

$$x(t_0) \in \{x \in B_r \mid W_2(x) \leq \rho\} \Rightarrow x(t) \in \Omega_{t,\rho} \quad \forall t \geq t_0$$

بنابراین به ازای جمیع مقادیر $t \geq t_0$، $\|x(t)\| < r$ است. از سویی چون $V(t, x(t))$ غیر افزایشی یکنوا و از سمت پایین با مقدار صفر کراندار است، لذا با افزایش t به سمت بینهایت، همگرا می‌باشد. اکنون می‌توان نوشت:

$$\int_{t_0}^{t} W(x(\tau))\, d\tau \leq -\int_{t_0}^{t} \dot{V}(\tau, x(\tau))\, d\tau = V(t_0, x(t_0)) - V(t, x(t))$$

بنابراین $\int_{t_0}^{t} W(x(\tau))\,d\tau$ حدّ $t\to\infty$ موجود و محدود است. ضمناً چون برای تمامی مقادیر $t\geq t_0$ ، $\|x(t)\|<r$ و تابع $f(t,x)$ نسبت به x و به طور یکنواخت نسبت به t، لیپ شیتز محلی است، نتیجه می‌شود $x(t)$ نسبت به t و بر بازهٔ $[t_0,\infty)$، پیوستهٔ یکنواخت است، در این صورت $W(x(t))$ نیز نسبت به t و بر بازهٔ $[t_0,\infty)$ پیوستهٔ یکنواخت است زیرا $W(x)$ نسبت به x و بر مجموعهٔ فشردهٔ B_r، پیوستهٔ یکنواخت است. بنابراین طبق لم ۴-۲ می‌توان نوشت: $\lim_{t\to\infty} W(x(t))=0$. اگر همهٔ فرضیات قضیه به طور جامع برقرار و $\dot{W}_1(x)$ نیز بیکران شعاعی باشد، می‌توان برای هر مقدار $x(t_0)$، مقدار ρ را آنقدر بزرگ انتخاب کرد که داشته باشیم:

$$x(t_0)\in\left\{x\in R^n \;\middle|\; W_2(x)\leq\rho\right\}$$

عبارت $\lim_{t\to\infty} W(x(t))=0$ بدین معناست که با افزایش t به سمت بینهایت، $x(t)$ به سوی E همگرا می‌گردد که E برابر است با:

$$E=\left\{x\in D \;\middle|\; W(x)=0\right\}$$

بنابراین مجموعهٔ حدّی مثبت $x(t)$، زیر مجموعهٔ E است. البته صرف دانستن اینکه $x(t)$ به سمت E همگرا می‌شود ضعیفتر از اصل پایایی در سیستمهای خودگردان است که طبق آن $x(t)$ به سوی بزرگترین مجموعهٔ پایای درون E میل می‌کند. نتیجهٔ قویتر در مورد سیستمهای خودگردان ناشی از ویژگی مطرح شده در لم ۳ ـ ۱ است که براساس آن مجموعهٔ حدّی مثبت، مجموعه‌ای پایاست. البته حالتهای خاصی از سیستمهای ناخودگردان نیز وجود دارد که در آنها مجموعهٔ حدّی مثبت، به نوعی دارای ویژگی پایایی هستند*، اما در حالت کلّی، مجموعه‌های حدّی مثبت، پایا نیستند، این واقعیت که در سیستمهای خودگردان، $x(t)$ به سوی بزرگترین مجموعهٔ پایای موجود در E همگرا می‌شود ما را به قضیهٔ فرعیِ ۳ ـ ۱ رهنمون می‌سازد که در آن

* مثالهایی از این حالتهای خاص عبارت است از: سیستمهای متناوب، سیستمهای تقریباً متناوب و سیستمهای خودگردان مجانبی. برای بررسی قضایای مربوط به این دسته سیستمها، [۱۳۷، فصل هشتم] و برای بررسی تعمیم دیگری از اصل پایایی، [۱۱۹] را ملاحظه کنید.

شرط پایداری مجانبی مبدأ، نشان دادن این نکته بود که مجموعهٔ E شامل هیچ مسیر کاملی از سیستم (مگر مسیر حالت مربوط به پاسخ بدیهی) نباشد. در سیستمهای ناخودگردان هیچ تعمیمی از قضیهٔ فرعی ۳ ـ ۱ وجود ندارد که بیانگر پایداری مجانبی یکنواخت باشد؛ لیکن قضیهٔ ذیل نشان می‌دهد اگر علاوه بر شرط $\dot{V}(t,x)<0$، انتگرال $\dot{V}(t,x)$ نیز در نامساوی خاصی صدق کند، آنگاه می‌توان پایداری مجانبی یکنواخت را برای سیستمهای ناخودگردان نیز نتیجه گرفت.

□

قضیهٔ ۴ ـ ۵ *فرض کنید* $D=\left\{x\in R^n \;\middle|\; \|x\|<r\right\}$ *و تابع* $f(t,x)$ *نسبت به* t *پیوستهٔ قطعه‌ای و نسبت به* x *و روی مجموعهٔ* $D\times[0,\infty)$ *لیپ شیتز محلی باشد. ضمناً فرض کنید* $x=0$ *نقطهٔ تعادل معادلهٔ* $\dot{x}=f(t,x)$ *در لحظهٔ* $t=0$ *و* $V:[0,\infty)\times D\longrightarrow R$ *تابعی پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد که برای آن (و به ازای جمیع مقادیر* $t>0$ ، $x\in D$ *و برخی مقادیر* δ*) بتوان نوشت:*

$$W_1(x)\leq V(t,x)\leq W_2(x)$$

$$\dot{V}(t,x)=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial t}f(t,x)\leq 0$$

$$\int_t^{t+\delta}\dot{V}(t,\phi(\tau,t,x))\,d\tau\leq-\lambda V(t,x),\quad 0<\lambda<1^*$$

که $W_1(x)$ *و* $W_2(x)$ *توابعی پیوسته و معیّن مثبت روی* D *و* $\phi(\tau,t,x)$ *نیز پاسخی از سیستم است که از* (t,x) *آغاز می‌شود. در این صورت مبدأ پایدار مجانبی یکنواخت است. علاوه بر این اگر همهٔ فرضیات به طور جامع برقرار و* $W_1(x)$ *نیز بیکران شعاعی باشد آنگاه مبدأ پایدار مجانبی یکنواخت جامع خواهد بود. ضمناً اگر داشته باشیم:*

$$W_1(x)\geq k_1\|x\|^c,\quad W_2(x)\leq k_2\|x\|^c,\quad k_1>0,\quad k_2>0,\quad c>0$$

* فرض $\lambda<1$ هیچگونه خللی بر کلیّت موضوع وارد نمی‌کند، زیرا اگر نامساوی با مقدار $\lambda_1\geq 1$ نیز برقرار باشد، آنگاه برای هر مقدار مثبت $\lambda<1$ نیز صادق است زیرا داریم: $\dot{V}\leq-\lambda V$ ، $-\lambda_1 V\leq-\lambda V$، لیکن باید توجه داشت ممکن است این نامساوی برای مقدارهای $\lambda>1$ برآورده نشود چرا که می‌دانیم: $V(t,x)>0\quad \forall x\neq 0$.

آنگاه مبدأ پایدار نمایی است. ◇

برهان: مشابه برهان قضیهٔ ۳ ـ ۸، می‌توان نشان داد:

$$x(t_0) \in \left\{ x \in B_r \;\middle|\; W_2(x) \le \rho \right\} \Rightarrow x(t) \in \Omega_{t,\rho} \quad \forall t \ge t_0$$

که $W_1(x) = \|x\|^2$ و $\rho < min_{\|x\|=r} W_1(x)$ است زیرا $\dot{V}(t,x) \le 0$ می‌باشد. به ازای جمیع مقادیر $t \ge t_0$ داریم:

$$V(t+\delta, x(t+\delta)) = V(t,x(t)) + \int_t^{t+\delta} \dot{V}(\tau, \phi(\tau,t,(x(t))\, d\tau$$

$$\le V(t,x(t)) - \lambda V(t,x(t)) = (1-\lambda)\, V(t,x(t))$$

علاوه بر این چون $\dot{V}(t,x) \le 0$ است، لذا:

$$V(\tau, x(\tau)) \le V(t,x(t)), \quad \forall \tau \in [t, t+\delta]$$

حال برای هر $t \ge t_0$، مقدار N را برابر با کوچکترین مقدار صحیح مثبتی در نظر می‌گیریم که به ازای آن بتوان نوشت: $t \le t_0 + N\delta$. در این صورت با تقسیم بازهٔ $[t_0, t_0 + (N-1)\delta]$ به $(N-1)$ زیر بازهٔ مساوی به طول δ داریم:

$$V(t,x(t)) \le V(t_0 + (N-1)\delta, x(t_0 + (N-1)\delta))$$

$$\le (1-\lambda) V(t_0 + (N-2)\delta, x(t_0 + (N-2)\delta)))$$

$$\le (1-\lambda)^{(N-1)} V(t_0, x(t_0))$$

$$\le \left(\frac{1}{(1-\lambda)}\right)(1-\lambda)^{(t-t_0)/\delta}\, V(t_0, x(t_0))$$

$$= \frac{1}{(1-\lambda)} e^{-b(t-t_0)} V(t_0, x(t_0))$$

که:
$$b = \frac{1}{\delta} ln \frac{1}{(1-\lambda)}$$

با انتخاب:
$$\sigma(r,s) = \frac{r}{(1-\lambda)} e^{-b\delta}$$

بسادگی می‌توان نشان داد تابع $\sigma(r,s)$ متعلق به کلاس $\mathcal{KL}$ است و $V(t,x(t))$ در رابطهٔ ذیل صدق می‌کند:

$$V(t,x(t)) \le \sigma(V(t_0,x(t_0)), t-t_0), \quad \forall\ V(t_0,x(t_0)) \in [0,\rho]$$

از اینجا به بعد، ادامهٔ برهان دقیقاً مشابه برهان قضیهٔ ۳ ـ ۸ می‌باشد. اثبات حکم پایداری مجانبی یکنواختِ جامع و نیز حکم پایداری نمایی نیز مشابه برهانهای قضایای فرعی ۳ ـ ۳ و ۳ ـ ۴ است. □

مثال ۴ ـ ۱۴ سیستم خطی و متغیر با زمان زیر مفروض است:

$$\dot{x} = A(t)x$$

که $A(t)$ به ازای جمیع مقادیر $t \ge 0$ پیوسته می‌باشد. فرض کنید ماتریس متقارن و پیوسته مشتق‌پذیر $P(t)$ چنان وجود داشته باشد که در روابط ذیل صدق کند:

$$0 < c_1 I \le P(t) \le c_2 I, \forall t \ge 0$$

$$-\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + C^T(t)\,C(t)$$

که $C(t)$ نسبت به t پیوسته است. در این صورت مشتق تابع مجذوری $V(t,x) = x^T P x$ در امتداد مسیرهای حالت سیستم برابر است با:

$$\dot{V}(t,x) = -x^T C^T(t)\,C(t)x \le 0$$

پاسخ سیستم خطی نیز با عبارت ذیل بیان می‌شود: $\phi(\tau,t,x) = \Phi(\tau,t)x$ که $\phi(\tau,t)$ ماتریس انتقال حالت است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\int_t^{t+\delta} \dot{V}(\tau,\phi(\tau,t,x))\, d\tau = -x^T \int_t^{t+\delta} \Phi^T(\tau,t)\, C^T(\tau)\, C(\tau)\, \Phi(\tau,t) d\tau x$$

$$= -x^T W(t,t+\delta)x$$

که: $$W(t,t+\delta)=\int_t^{t+\delta}\Phi^T(\tau,t)\,C^T(\tau)\,C(\tau)\,\Phi(\tau,t)\,d\tau$$

اگر ثابت مثبت $k<c_2$ چنان یافت شود که داشته باشیم:

$$W(t,t+\delta)\geq kI,\quad \forall t\geq 0$$

آنگاه می‌توان نوشت: $$\int_t^{t+\delta}\dot{V}(\tau,\phi(\tau,t,x)\,d\tau\leq -k\|x\|_2^2\leq -\frac{k}{c_2}V(t,x)$$

بدین ترتیب با انتخاب مقادیر ذیل تمامی شروط قضیهٔ ۴ ـ ۵ به طور جامع برآورده می‌گردد:

$$W_i(x)=c_i\,\|x\|_2^2,\quad i=1,2,\quad \lambda=\frac{k}{c_2}<1$$

و می‌توان نتیجه گرفت مبدأ پایدار نمایی است. خوانندگان آشنا با نظریهٔ سیستمهای خطی می‌دانند که ماتریس $W(t,t+\delta)$، گرامیان رؤیت پذیری[1] $\big(A(t),\,C(t)\big)$ می‌باشد و نامساوی $W(t,t+\delta)\geq kI$ به معنای رؤیت پذیری یکنواخت[2] $\big(A(t),C(t)\big)$ است. مقایسه این مثال با مثال ۳ ـ ۲۱ نشان می‌دهد در حالتی که زوج $\big(A(t),C(t)\big)$ رؤیت‌پذیر یکنواخت است، می‌توان شرط معیّن مثبت بودن $Q(t)$ (در رابطهٔ (۳ ـ ۲۱)) را با شرط ضعیفتر $Q(t)=C^T(t)\,C(t)$ جایگزین نمود. Δ

1. Observability Gramian 2. Uniform observability

۴ ـ ۴ تمرینها

تمرین ۴ ـ ۱ قضیهٔ فرعی ۴ ـ ۱ را اثبات کنید.

تمرین ۴ ـ ۲ قضیهٔ فرعی ۴ ـ ۲ را اثبات کنید.

تمرین ۴ ـ ۳ فرض کنید شروط قضیهٔ ۴ ـ ۱ در حالتی برآورده شود که داشته باشیم: $A_1=0, g_2(y,0)=0, g_1(y,0)=0$. نشان دهید مبدأ سیستم کامل، پایدار است.

تمرین ۴ ـ ۴ مثالهای ۴ ـ ۱ و ۴ ـ ۲ را با مقدار $a=0$ در نظر بگیرید. در هر یک از این دو حالت با اعمال قضیهٔ فرعی ۴ ـ ۱ نشان دهید مبدأ پایدار است.

تمرین ۴ ـ ۳ ([۸۰]) سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_a=f_a(x_a,x_b)$$

$$\dot{x}_b=A_bx_b+f_b(x_a,x_b)$$

که $dim(x_a)=n_1$، $dim(x_b)=n_2$، A_b ماتریس هرویتز، f_a و f_b پیوسته ـ مشتق‌پذیر، $f_b(0,0)=0$ و $[\partial f_b/\partial x_b](0,0)$ نیز در همسایگی $x_a=0$، صفر است.

(الف) نشان دهید اگر مبدأ $x_a=0$، نقطهٔ تعادل پایدار نماییِ معادلهٔ $\dot{x}_a=f_a(x_a,0)$ باشد، آنگاه مبدأ $(x_a,x_b)=(0,0)$، نقطهٔ تعادل پایدار نمایی سیستم کامل خواهد بود.

(ب) با استفاده از قضیهٔ خمینهٔ مرکزی ثابت کنید اگر مبدأ $x_a=0$، نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی (اما نه نمایی) معادلهٔ $\dot{x}_a=f(x_a,0)$ باشد آنگاه مبدأ $(x_a,x_b)=(0,0)$، نقطهٔ تعادل پایدار مجانبیِ سیستم کامل است.

تمرین ۴ ـ ۶ ([۵۹]) در هر یک از سیستمهای زیر به کمک قضیهٔ خمینهٔ مرکزی، پایداری مبدأ را بررسی کنید:

(الف)

$$\dot{x}_1=-x_2^2$$
$$\dot{x}_2=-x_2+x_1^2+x_1x_2$$

(ب)

$$\dot{x}_1=ax_1^2-x_2^2,\ a\neq 0$$
$$\dot{x}_2=-x_2+x_1^2+x_1x_2$$

(ج)
$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1 x_3$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2 x_3$$
$$\dot{x}_3 = -x_3 - (x_1^2 + x_2^2) + x_3^2$$

تمرین ۴ ـ ۷ در هر یک از سیستمهای ذیل به کمک قضیهٔ خمینهٔ مرکزی، پایداری مبدأ را بررسی کنید:

(الف)
$$\dot{x}_1 = x_1 x_2^3$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 - x_1^2 + 2x_1^8$$

(ب)
$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2^3(x_1 + x_2 - 1)$$
$$\dot{x}_2 = x_2^3(x_1 + x_2 - 1)$$

(ج)
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + a x_1^3/(1 + x_1^2)$$
$$a \neq 0$$

(د)
$$\dot{x}_1 = -2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_3^2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + x_1^2 + x_2$$
$$\dot{x}_3 = x_1^2$$

تمرین ۴ ـ ۸ ([۲۸]) سیستم زیر مفروض است:

$$\dot{x}_1 = x_1 x_2 + a x_1^3 + b x_1 x_2^2$$
$$\dot{x}_1 = -x_2 + c x_1^2 + d x_1^2 x_2$$

با استفاده از قضیهٔ خمینهٔ مرکزی، پایداری مبدأ را در هر یک از حالتهای ذیل بررسی کنید:

(الف) $a + c > 0$ (ب) $a + c < 0$

(ج) $a + c > 0$ و $cd + bc^2 < 0$ (د) $a + c = 0$ و $cd + bc^2 > 0$

(هـ) $a + c = cd + bc^2 = 0$

تمرین ۴ ـ ۹ ([۲۸]) سیستم ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = a x_1^3 + x_1^2 x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3$$

به کمک قضیهٔ خمینهٔ مرکزی، پایداری مبدأ را برای همهٔ مقادیر حقیقی پارامتر a بررسی کنید.

تمرین ۴ ـ ۱۰ ([۸۰]) سیستم زیر مفروض است:

$$\dot{x}_1 = a x_1 x_2 - x_1^3$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + b x_1 x_2 + c x_1^2$$

با استفاده از قضیهٔ خمینهٔ مرکزی، پایداری مبدأ را برای همهٔ مقادیر حقیقی ثابتهای a ، b ، c بررسی کنید.

تمرین ۴ ـ ۱۱ (قضیهٔ زوبوف) سیستم (۳ ـ ۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید $G \subset R^n$ قلمرویی شامل مبدأ باشد ضمناً فرض کنید دو تابع $V: G \longrightarrow R$ و $h: R^n \longrightarrow R$ با ویژگیهای ذیل وجود داشته باشد:

- V تابعی پیوسته ـ مشتق‌پذیر و معیّن در G است که در نامساوی ذیل صدق می‌نماید:

$$0 < V(x) < 1, \quad \forall x \in G - \{0\}$$

- اگر x به سمت کرانهای G میل کند (چنانچه G بیکران باشد، اگر $\|x\|$ به سمت بینهایت میل‌کند) آنگاه داریم: $V(x) = 1$ حدّ؛
- h بر روی R^n، پیوسته و معیّن مثبت است؛
- برای هر $x \in G$، $V(x)$ در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی زیر صدق می‌کند:

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) = -h(x)[1 - V(x)] \qquad (۴ ـ ۱۵)$$

ثابت کنید $x = 0$ پایدار نمایی و G ناحیهٔ جذابیت است.

تمرین ۴ ـ ۱۲ ([۶۲]) سیستم مرتبهٔ دوم ذیل مفروض است:

$$\dot{x}_1 = -h_1(x_1) + g_2(x_2)$$
$$\dot{x}_2 = -g_1(x_1)$$

که روابط زیر برای برخی مقادیر مثبت a_i و b_i برقرار است (مقدار $a_i = \infty$ یا $b_i = \infty$ نیز مجازاست):

$$h_1(0)=0,\quad zh_1(z)>0\quad \forall\ -a_1<z<b_1$$

$$g_i(0)=0,\quad zg_i(z)>0\quad \forall\ -a_i<z<b_i$$

$$z\longrightarrow -a_i \text{ یا } z\longrightarrow b_i \Rightarrow \int_0^t g_i(\sigma)\,d\sigma\to\infty$$

با اعمال قضیهٔ زوبوف نشان‌دهید ناحیهٔ جذابیت به شکل ذیل می‌باشد: $\{x\in R^2 \mid -a_i<x_i<b_i\}$.

راهنمایی: با انتخاب $h(x)=g_1(x_1)h_1(x_1)$، پاسخی از معادلهٔ دیفرانسیل جزئیِ رابطهٔ (۴ ـ ۱۵) را بیابید که به شکل $V(x)=1-W_1(x_1)W_2(x_2)$ باشد. توجه کنید این انتخاب موجب می‌شود $\dot V(x)$ فقط نیمه معیّن مثبت باشد. حال اصل پایایی لاسَل را اعمال نمایید.

تمرین ۴ ـ ۱۳ ناحیهٔ جذابیت سیستم ذیل را بیابید.

$$\dot x_1=-x_1+x_2$$

$$\dot x_2=-\tan(x_1)$$

راهنمایی: از تمرین قبل استفاده کنید.

تمرین ۴ ـ ۱۴ سیستم مثال ۴ ـ ۱۱ را در نظر بگیرید. با استفاده از شیوهٔ گرادیان متغیر، تابع لیاپانوف $V(x)=2x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$ را به دست آورید.

تمرین ۴ ـ ۱۵ فرض کنید Ω مجموعه‌ای باز، پایای مثبت و شامل مبدأ باشد. نشان دهید اگر با افزایش t به سمت بینهایت، هر یک از مسیرهای حالتِ درون Ω به سمت مبدأ همگرا گردد، آنگاه Ω مجموعه‌ای همبند است.

تمرین ۴ ـ ۱۶ سیستم مرتبهٔ دوم $\ddot x=f(x)$ را با مبدأ پایدار مجانبی در نظر بگیرید. فرض کنید داشته باشیم: $V(x)=x_1^2+x_2^2$ و $D=\{x\in R^2 \mid |x_2|<1,\ |x_1-x_2|<1\}$، ضمن اینکه تابع $[\partial V/\partial x]$ نیز در D معیّن منفی است. ناحیهٔ جذابیت را تخمین بزنید.

تمرین ۴ ـ ۱۷ سیستم زیر مفروض است:

$$\dot x_1=x_2$$

$$\dot x_2=-x_1-x_2-(2x_2+x_1)(1-x_2^2)$$

(الف) با استفاده از تابع $V(x)=5x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2$ نشان دهید مبدأ پایدار مجانبی‌است.

(ب) فرض کنید داشته باشیم:

$$S=\{x\in R^2 \mid V(x)\le 5\}\cap\{x\in R^2 \mid |x_2|\le 1\}$$

ثابت کنید S، تخمینی از ناحیهٔ جذابیت است.

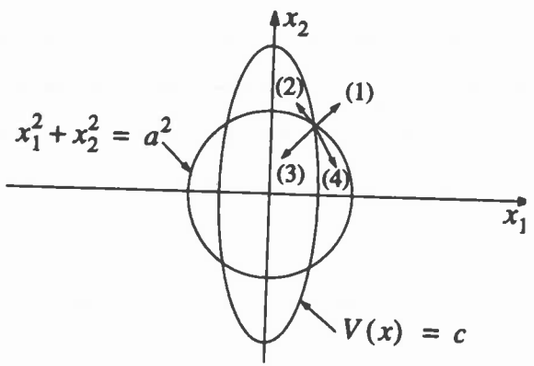
تمرین ۴ ـ ۱۸ نشان دهید مبدأ سیستم ذیل:

$$\dot x_1=x_2$$

$$\dot x_2=-x_2-x_1+x_1^3$$

پایدار مجانبی است و ناحیهٔ جذابیت آن را تخمین بزنید.

تمرین ۴ ـ ۱۹ سیستم مرتبهٔ دوم $\ddot x=f(x)$ را همراه با تابع لیاپانوف $V(x)$ در نظر بگیرید و فرض کنید به ازای جمیع مقادیر $x_1^2+x_2^2>a^2$ داشته باشیم: $\dot V(x)<0$. شکل ۴ ـ ۷، نشاندهندهٔ چهارجهت مختلف میدان برداری در یکی از نقاط روی دایرهٔ $x_1^2+x_2^2=a^2$ می‌باشد. کدام جهت، ممکن و کدام غیرممکن است؟ پاسخ خود را اثبات کنید.



شکل ۴ ـ ۷ تمرین ۴ ـ ۱۹

تمرین ۴ ـ ۲۰ سیستم زیر مفروض است:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - \sin x_1 - 2\,sat\,(x_1 + x_2)$$

که $sat\,(\cdot)$ تابع اشباع می‌باشد.

(الف) ثابت کنید مبدأ، نقطهٔ تعادل یکتای سیستم است.

(ب) به کمک خطی‌سازی نشان دهید مبدأ پایدار مجانبی است.

(ج) با فرض $\sigma = x_1 + x_2$، نشان دهید: به ازای $|\sigma| \geq 1$ داریم: $\sigma\dot{\sigma} \leq -|\sigma|$

(د) با فرض $V(x) = x_1^2 + 0/5x_2^2 + 1 - \cos x_1$ و M_c به عنوان مجموعه‌ای با تعریف ذیل (برای هر $c > 0$):

$$M_c = \{x \in R^2 \mid V(x) \leq c\} \cap \{x \in R^2 \mid |\sigma| \leq 1\}$$

نشان دهید M_c پایای مثبت است و با افزایش t به سمت بینهایت، هریک از مسیرهای حالتِ درون M_c به سمت مبدأ همگرا می‌شود.

(ه) ثابت کنید مبدأ پایدار مجانبی جامع است.

تمرین ۴ ـ ۲۱ مدار دیود تونلی مثال ۱ ـ ۲ را در نظر بگیرید. این مدار دارای سه نقطهٔ تعادل است.

(الف) به کمک خطی‌سازی، پایداری هریک از این سه نقطه را بررسی کنید.

(ب) برای هر نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی، یک تابع لیاپانوف مجذوری به شکل $V(x) = x^T Px$ بیابید و با استفاده از آن، ناحیهٔ جذابیت را تخمین بزنید.

(ج) در ادامهٔ بند (ب)، به کمک شیوهٔ معکوس کنندهٔ مسیرحالت، ناحیهٔ جذابیت را توسعه دهید.

تمرین ۴ ـ ۲۲ مدل مرتبهٔ سوم ژنراتور سنکرون مربوط به تمرین ۱ ـ ۷ را در نظر بگیرید.

1. Uniform observability

متغیرهای حالت و پارامترها را مطابق با بندهای (الف) و (ب) آن تمرین انتخاب کنید، علاوه بر این فرض کنید داشته باشیم: $\tau = 6/6\ sec$، $D/M = 4\ sec^{-1}$ و $M = 0/0147$ (واحد توان یکّه)[1] $\times\ sec^2\ /\ rad$.

(الف) همهٔ نقاط تعادل موجود در ناحیهٔ $-\pi \leq x_1 \leq \pi$ را بیابید به کمک خطی‌سازی، ویژگیهای پایداری هریک از نقاط تعادل را تعیین نمایید.

(ب) برای هر نقطهٔ تعادلِ پایدار مجانبی، به کمک تابع لیاپانوف مجذوری، ناحیهٔ جذابیت را تخمین بزنید.

تمرین ۴ ـ ۲۳ ([۱۰۰]) سیستم ذیل مفروض است:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - g(t)\,x_2$$

که $g(t)$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر است و به ازای جمیع مقادیر $t \geq 0$ داریم: $0 < k_1 \leq g(t) \leq k_2$

(الف) نشان دهید مبدأ پایدار نمایی است.

(ب) اگر $g(t)$ کراندار نباشد آیا باز بند (الف) صحیح است؟ در بررسی خود $g(t) = 2 + exp\,(t)$ را در نظر بگیرید.

راهنمایی: بند (الف) از ویژگیهای رؤیت‌پذیری سیستمهای خطی استفاده می‌کند. بدین معنا که برای هرماتریس کراندار $K(t)$، رؤیت‌پذیری یکنواخت زوج $(A(t), C(t))$ معادل با رؤیت‌پذیری یکنواخت زوج $(A(t) - K(t)\,C(t), C(t))$ می‌باشد.

تمرین ۴ ـ ۲۴ سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\sin x_1 - g(t)\,x_2$$

که $g(t)$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر است و به ازای جمیع مقادیر $t \geq 0$ داریم: $0 < k_1 \leq g(t) \leq k_2$.

1. Per unit power

ثابت کنید مبدأ پایدار نمایی است.

راهنمایی: از تمرین قبل استفاده کنید.

تمرین ۴ ـ ۲۵ سیستم ذیل مفروض است:

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2 - \alpha(t)x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

$$\dot{x}_3 = \alpha(t)x_1$$

که $\alpha(t) = \sin t$ می‌باشد. نشان دهید مبدأ پایدار نمایی است.

راهنمایی: از تابع $V(x) = x^T x$ استفاده کنید و نتیجهٔ مثال ۴ ـ ۱۴ را به آن اعمال نمایید.



۵

پایداری سیستمهای آشفته

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x) \qquad (۱ ـ ۵)$$

که توابع $f: [0, \infty) \times D \longrightarrow R^n$ و $g: [0, \infty) \times D \longrightarrow R^n$ نسبت به t پیوستهٔ قطعه‌ای و نسبت به x و روی مجموعهٔ $[0, \infty) \times D$ لیپ شیتز محلی هستند. $D \subset R^n$ نیز قلمرویی شامل مبدأ $x = 0$ می‌باشد. این سیستم را به عنوان آشفتهٔ سیستم نامی ذیل می‌دانیم:

$$\dot{x} = f(t, x) \qquad (۲ ـ ۵)$$

جملهٔ آشفتگی $g(t, x)$ در حالت کلّی ناشی از خطاهای مدلسازی[1]، کهولت سیستم[2]، عدم قطعیت[3] و اغتشاشهایی است که در هر مسألهٔ واقعی وجود دارد. در حالتهای معمولی اغلب تابع $g(t, x)$ را دقیقاً نمی‌شناسیم اما اطلاعاتی راجع به آن داریم و مثلاً می‌دانیم کران بالای $\|g(t, x)\|$ چقدر است. در این مبحث آشفتگی را به صورت جمله‌ای در نظر می‌گیریم که به سمت راست معادلهٔ حالت افزوده می‌شود؛ بدین ترتیب می‌توان عدم قطعیتهایی که مرتبهٔ سیستم را تغییر نمی‌دهند جزء همین آشفتگیها به حساب آورد. زیرا اگر سمت راست معادلهٔ آشفته، تابع $\tilde{f}(t, x)$ باشد، می‌توان با افزودن و کاستن $f(t, x)$، عبارت سمت راست را به شکل ذیل باز نوشت:

$$\tilde{f}(t, x) = f(t, x) + [\tilde{f}(t, x) - f(t, x)]$$

1. Modeling errors 2. Aging 3. Uncertainty

در نتیجه تعریف می‌کنیم:

$$g(t,x)=\bar{f}(t,x)-f(t,x)$$

اکنون پرسش اصلی این است: اگر سیستمِ نامی معادلهٔ (۵ ـ ۲) دارای یک نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی یکنواخت در مبدأ باشد، در مورد رفتار پایداری سیستم آشفتهٔ معادلهٔ (۵ ـ ۱) چه می‌توان گفت؟ نحوهٔ طبیعی مواجهه با این پرسش، استفاده از یکی از توابع لیاپانوف سیستمِ نامی به عنوان نامزد تابع لیاپانوف سیستم آشفته می‌باشد. این همان کاری است که در تحلیل روش خطی سازی در بخشهای ۳ ـ ۳ و ۳ ـ ۵ انجام دادیم لیکن نکتهٔ جدید آن است که در اینجا جملهٔ آشفتگی کلّی‌تر از جملهٔ آشفتگی در حالت خطی‌سازی است. نتایج حاصل در این فصل مستقیماً به این نکتهٔ بحرانی بستگی دارد که آیا جملهٔ آشفتگی در مبدأ صفر می‌شود یا خیر؟ چنانچه $g(t,0)=0$ باشد، سیستم آشفتهٔ (۵ ـ ۲) دارای نقطهٔ تعادلی در مبدأ می‌باشد در این حالت رفتار پایدار مبدأ را به عنوان نقطهٔ تعادل سیستم آشفته بررسی می‌کنیم. اما اگر $g(t,0)\neq 0$باشد، مبدأ، نقطهٔ تعادل سیستم آشفته نیست، بنابراین دیگر نمی‌توان مسأله را به عنوان پایداری نقاط تعادلِ واقع در مبدأ مطرح کرد و لازم است مفاهیم جدیدی را معرفی نمود.

حالتهای مختلف آشفتگیهای صفر شونده[1] و غیرصفر شونده[2] بترتیب در بخشهای ۵ ـ ۱ و ۵ ـ ۲ مطرح شده است. در بخش ۵ ـ ۳ با استفاده از نتایج آشفتگیهای غیرصفر شونده، مفهوم پایداری ورودی به حالت[3] را بیان می‌کنیم. در بخش ۵ ـ ۴ توجه خود را به حالتی معطوف می‌نماییم که در آن سیستم نامی دارای یک نقطهٔ تعادل پایدار نمایی در مبدأ است و به کمک لم قیاس، نتایج واضحتری را برای رفتار مجانبیِ پاسخ سیستم آشفته به دست می‌آوریم. در بخش ۵ ـ ۵ نیز نتیجه‌ای را ذکر می‌کنیم که بیانگر پیوستگی پاسخ معادلهٔ حالت در بازهٔ زمانی نامحدود[4] می‌باشد.

دو بخش آخر این فصل بترتیب دربارهٔ سیستمهای به هم پیوسته[5] و سیستمهای متغیر آرام[6] بحث می‌کند، در این دو حالت می‌توان با در نظر گرفتن سیستم به عنوان آشفتگیِ سیستم

1. Vanishing perturbation
2. Nonvanishing perturbation
3. Input - to - state stability
4. Infinite - time interval
5. Interconnected
6. Slowly varying system

ساده‌تری به تحلیل پایداری آن پرداخت. در مورد سیستمهای به هم پیوسته می‌توان به کمک تفکیک[1] سیستم به زیر سیستمهای[2] مجزّا و ساده‌تری آن را بررسی کرد؛ در حالت سیستمهای متغیر آرام نیز می‌توان سیستم ناخودگردانِ توأم با ورودیهای متغیر آرام[3] را با سیستمی خودگردان تقریب زد که ورودیهای متغیر آرام به صورت پارامترهای ثابتی در نظر گرفته شده است.

۵ ـ ۱ آشفتگیهای صفر شونده

بحث را با حالتی آغاز می‌کنیم که $g(t,0)=0$ باشد. فرض کنید $x=0$ یکی از نقاط تعادل پایدار نماییِ سیستم نامیِ (۵ ـ ۲) و $V(t,x)$ نیز تابع لیاپانوفی باشد که به ازای همهٔ مقادیر $(t,\infty)\in(0,\infty)\times D$ در شروط ذیل صدق می‌کند:

$$c_1\|x\|^2\leq V(t,x)\leq c_2\|x\|^2 \qquad (۵-۳)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}f(t,x)\leq -c_3\|x\|^2 \qquad (۵-۴)$$

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|\leq c_4\|x\| \qquad (۵-۵)$$

که c_1، c_2 و c_3 ثابتهای مثبتی هستند. قضیهٔ ۳ ـ ۱۲ به همراه برخی فرضیات اضافی، وجود تابع لیاپانوف مناسب را تضمین می‌کند. حال فرض کنید جملهٔ آشفتگی $g(t,x)$ در شرط کران با رشد خطی صدق کند، یعنی:

$$\|g(t,x)\|\leq\gamma\|x\|,\quad \forall t\geq 0,\forall x\in D \qquad (۵-۶)$$

که γ ثابتی غیرمنفی است، با توجه به فرضیات اعمالی بر تابع $g(t,x)$، چنین کرانی طبیعی است، در واقع هر تابع $g(t,x)$ که در مبدأ صفر شود و نسبت به x و به طور یکنواخت نسبت به t (به ازای جمیع مقادیر $t\geq 0$)، لیپ شیتز محلی باشد، در همسایگی کراندار مبدأ، رابطهٔ (۵ ـ ۶) را روی همان همسایگی برآورده می‌کند*. از تابع V به عنوان نامزد تابع لیاپانوف برای بررسی

* البته باید توجه داشت اگر قرار باشد شرط کران با رشد خطیِ (۵ ـ ۶) به طور جامع برقرار باشد، آنگاه این شرط محدودکننده خواهد بود زیرا مستلزم آن است که تابع g نسبت به x، لیپ شیتز جامع باشد.

1. Decomposition
2. Subsystems
3. Slowly varying input

پایداری مبدأ به عنوان نقطهٔ تعادلِ سیستم آشفتهٔ (۵ ـ ۱) استفاده می‌کنیم. مشتق تابع V در امتداد مسیرهای حالت معادلهٔ (۵ ـ ۱) عبارت است از:

$$\dot{V}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(t,x)$$

دو جملهٔ اول سمت راست عبارت فوق بیانگر مشتق $V(t,x)$ در امتداد مسیرهای حالت سیستم نامی است که معیّن منفی می‌باشد و در رابطهٔ (۵ ـ ۴) نیز صدق می‌کند. جملهٔ سوم $(g)[\partial V / \partial x]$)، نشاندهندهٔ اثر آشفتگی است. چون اطلاعات کاملی از g نداریم، نمی‌توان به طور صریح در مورد سود یا ضرر این جمله در معیّن منفی بودن $V(t,x)$ اظهارنظر کرد. با توجه به کران رشدی (۵ ـ ۶) به عنوان تنها دانش ما نسبت به g، بهترین کاری که می‌توان انجام داد تحلیل بدترین حالتی[1] است که در آن $g[\partial V / \partial x]$ با جمله‌ای غیرمنفی محدود شود؛ در این صورت با استفاده از روابط (۵ ـ ۴) ـ (۵ ـ ۶) می‌توان نوشت:

$$\dot{V}(t,x) \le -c_3\|x\|^2 + \left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\| \|g(t,x)\| \le -c_3\|x\|^2 + c_4\gamma\|x\|^2$$

اگر γ آنقدر کوچک باشد که در شرط زیر صدق کند:

$$\gamma < \frac{c_3}{c_4} \qquad (۵ ـ ۷)$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$\dot{V}(t,x) \le -(c_3 - \gamma c_4)\|x\|^2, \quad (c_3 - \gamma c_4) > 0$$

لذا به کمک قضیهٔ فرعی ۳ ـ ۴، لم ذیل نتیجه می‌شود:

لم ۵ ـ ۱ *فرض کنید $x = 0$، نقطهٔ تعادل پایدار نمایی سیستم نامیِ (۵ ـ ۲) و $V(t,x)$ تابع لیاپانوفِ سیستم نامی باشد که در مجموعهٔ $D \times (0, \infty]$، در روابط (۵ ـ ۳) ـ (۵ ـ ۵) صدق می‌کند. علاوه بر این فرض کنید جملهٔ آشفتگی $g(t,x)$ نیز روابط (۵ ـ ۶) ـ (۵ ـ ۷) را برآورده نماید. در این صورت مبدأ، نقطهٔ تعادل پایدار نماییِ سیستم آشفته خواهد بود. علاوه بر این اگر*

1. Worst - case

فرضیات به طور جامع برآورده گردد، مبدأ پایدار نمایی جامع است. ◇

این لم به لحاظ مفهومی بسیار مهم است زیرا نشان می‌دهد پایداری نمایی مبدأ، نسبت به دسته‌ای از آشفتگیهایی که در روابط (۵ ـ ۶) ـ (۵ ـ ۷) صدق می‌کنند، مقاوم است. برای تبیین این ویژگیِ قوام[1]، لازم نیست $V(t,x)$ را به طور صریح بدانیم و فقط کافی است بدانیم مبدأ، نقطهٔ تعادل پایدار نماییِ سیستم نامی است. گهگاه می‌توان بدون یافتن تابع لیاپانوفی که روابط (۵ ـ ۳) ـ (۵ ـ ۵) را برآورده سازد، نشان داد مبدأ پایدار نمایی است*. قطع نظر از روش مورد استفاده در اثبات پایداری نماییِ مبدأ، می‌توان به کمک قضیهٔ ۳ ـ ۱۲ (که برطبق آن باید ماتریس ژاکوبی $[\partial f / \partial x]$ کراندار باشد)، وجود تابع $V(t,x)$ را، که در روابط (۵ ـ ۳) ـ (۵ ـ ۵) صدق کند، اثبات نمود اما چنانچه تابع لیاپانوف $V(t,x)$ را نشناسیم نمی‌توان کران (۵ ـ ۷) را محاسبه کرد، بنابراین هنگامی که می‌گوییم: «اگر آشفتگیها در رابطهٔ: $\|g(t,x)\| \le \gamma\|x\|$ (برای γهای کوچک) صدق کند، آنگاه مبدأ پایدار نمایی است» در واقع معیاری کمّی از قوام را ارائه داده‌ایم. از سوی دیگر اگر $V(t,x)$ را بشناسیم می‌توان کران (۵ ـ ۷) را محاسبه کرد که بخش جدیدی از اطلاعات ما خواهد بود. البته نباید بیش از حد بر این کرانها تکیه نماییم زیرا ممکن است برای تابع آشفتگی معلومِ $g(t,x)$ محافظه‌کارانه باشد، ضمن اینکه این محافظه‌کاری ناشی از آن است که از ابتدا توجهمان را به تحلیل بدترین حالت معطوف کرده‌ایم.

مثال ۵ ـ ۱ سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = Ax + g(t,x)$$

که A ماتریس هرویتز است و به ازای جمیع مقادیر $t \ge 0$ و $x \in R^n$ داریم:

$$\|g(t,x)\|_2 \le \gamma\|x\|_2$$

با فرض $Q = Q^T > 0$، از حل معادلهٔ:

$$PA + A^TP = -Q$$

* برای مثال در حالتی که پایداری نمایی مبدأ به کمک قضیهٔ ۴ ـ ۵ نشان داده می‌شود.

1. Robustness

ماتریس P را می‌یابیم. از قضیهٔ ۳ ـ ۶ می‌دانیم این معادله دارای پاسخ یکتای $P = P^T > 0$ می‌باشد. در این صورت تابع لیاپانوف مجذوری $V(x) = x^T P x$ در روابط (۵ ـ ۳) ـ (۵ ـ ۵) صدق می‌کند و می‌توان نوشت:

$$\lambda_{min}(P)\,\|x\|_2^2 \le V(x) \le \lambda_{max}(P)\,\|x\|_2^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} Ax = -x^T Q x \le -\lambda_{min}(Q)\,\|x\|_2^2$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\|_2 = \|2x^T P\|_2 \le 2\|P\|_2 \|x\|_2 = 2\lambda_{max}(P)\,\|x\|_2$$

مشتق تابع $V(x)$ در امتداد مسیرهای حالت سیستمِ آشفته در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$\dot{V}(x) \le -\lambda_{min}(Q)\,\|x\|_2^2 + 2\lambda_{max}(P)\gamma\|x\|_2^2$$

بنابراین اگر $\gamma < \lambda_{min}(Q) / 2\lambda_{max}(P)$ باشد، مبدأ پایدار نمایی جامع است. از آنجا که این کران به انتخاب Q بستگی دارد ممکن است در تشخیص مقدار مناسب Q برای بیشینه کردن نسبت $\lambda_{min}(Q) / \lambda_{max}(Q)$ دچار اشتباه شویم. می‌توان اثبات کرد با انتخاب $Q = I$، این نسبت بیشترین مقدار را خواهد داشت (تمرین ۵ ـ ۱). Δ

مثال ۵ ـ ۲ سیستم مرتبهٔ دوم ذیل مفروض است:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -4x_1 - 2x_2 + \beta x_2^3$$

که ثابتِ $\beta \ge 0$ مجهول می‌باشد. می‌توان این سیستم را به شکل سیستم آشفتهٔ معادلهٔ (۵ ـ ۱) در نظر گرفت که در آن:

$$f(x) = Ax = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ و } g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta x_2^3 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژهٔ A برابر با $-1 \pm j\sqrt{3}$ می‌باشد، لذا ماتریس A هرویتز است. پاسخ معادلهٔ لیاپانوف زیر:

$$PA + A^T P = -I$$

برابر است با:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{16} \end{bmatrix}$$

همچنانکه در مثال ۵ ـ ۱ ملاحظه شد، تابع لیاپانوف $V(x) = x^T Px$ همراه با مقدار $c_3 = 1$ و:

$$c_4 = 2\lambda_{max}(P) = 2 \times 1/513 = 3/026$$

نامساویهای (۵ ـ ۳) ـ (۵ ـ ۵) را برآورده می‌سازد، جملهٔ آشفتگی $g(x)$ نیز در رابطهٔ ذیل صدق می‌کند:

$$\|g(x)\|_2 = \beta|x_2|^3 \le \beta k_2^2 |x_2| \le \beta k_2^2 \|x\|_2 \quad , \quad \forall\, |x_2| \le k_2$$

تا این مرحلهٔ تحلیل، مقدار کران $x_2(t)$ را نمی‌دانیم (گر چه می‌دانیم اگر مسیر حالت $x(t)$ در مجموعه‌ای فشرده محصور باشد، آنگاه $x_2(t)$ کراندار خواهد بود). فعلاً مقدار k_2 را نامعلوم فرض می‌کنیم و ادامهٔ بحث را پی می‌گیریم. با استفاده از تابع $V(x)$ به عنوان نامزد تابع لیاپانوف سیستم آشفته، نتیجه می‌شود:

$$\dot{V}(x) \le -\|x\|_2^2 + 3/026\,\beta k_2^2 \|x\|_2^2$$

بنابراین با شرط:

$$\beta < \frac{1}{3/026 k_2^2}$$

$\dot{V}(x)$ معیّن منفی خواهد بود.

برای تخمین کران k_2 فرض کنید داشته باشیم: $\Omega_c = \{x \in R^2 \mid \dot{V}(x) \le c\}$؛ در این صورت برای هر مقدار ثابت و مثبت c مجموعهٔ Ω_c بسته و کراندار است، ضمناً کران مجموعهٔ Ω_c رویهٔ لیاپانوف زیر می‌باشد:

$$V(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_1 x_2 + \frac{5}{16}x_2^2 = c$$

برای یافتن بیشترین مقدار $|x_2|$ بر رویهٔ $V(x) = c$ می‌توان مشتق جزیی رویه را نسبت به x_1 محاسبه کرد؛ در این صورت داریم:

$$3x_1 + \frac{1}{4}x_2 = 0$$

بنابراین مقدار نهایی x_2، محل برخورد خط $x_1 = -x_2/12$ با رویهٔ لیاپانوف است. محاسبات ساده نشان می‌دهد بزرگترین مقدار x_2^2 بر رویهٔ لیاپانوف برابر با $96c/29$ است؛ لذا تمامی نقاط درون مجموعهٔ Ω_c در شرط کران ذیل صدق می‌کنند:

$$\text{که:} \quad |x_2| \le k_2 \quad , \quad k_2^2 = \frac{96c}{29}$$

در نتیجه اگر داشته باشیم: $$\beta < \frac{29}{3/026 \times 96c} \approx \frac{0/1}{c}$$

آنگاه تابع $\dot{V}(x)$ در مجموعهٔ Ω_c معیّن منفی خواهد بود و می‌توان نتیجه گرفت مبدأ $x = 0$، پایدار نمایی و Ω_c تخمینی از ناحیهٔ جذابیت است. نامعادلهٔ $\beta < \frac{0/1}{c}$ نشاندهندهٔ نوعی مصالحه[1] میان تخمین ناحیهٔ جذابیت و تخمین کران بالای β است: هرچه کران بالایی β کوچکتر باشد، تخمین ناحیهٔ جذابیت بزرگتر خواهد بود. چنین مصالحه‌ای مصنوعی نیست و در واقعیت نیز وجود دارد زیرا تغییر متغیر:

$$z_1 = \sqrt{\frac{3\beta}{2}}\, x_2$$

$$z_2 = \sqrt{\frac{3\beta}{8}}\,(4x_1 + 2x_2 - \beta x_2^3) = -\sqrt{\frac{3\beta}{8}}\,\dot{x}_2$$

$$\tau = 2t$$

معادلهٔ حالت را به شکل زیر تبدیل می‌کند:

$$\frac{dz_1}{d\tau} = -z_2$$

$$\frac{dz_2}{d\tau} = z_1 + (z_1^2 - 1)z_2$$

1. Trade off

که همچنانکه در مثال ۴ ـ ۵ نشان داده شد، بیانگر ناحیهٔ جذابیت کرانداری است که با یک چرخهٔ حدّی ناپایدار محصور شده است. هنگامی که تبدیل به دستگاه مختصات x برده می‌شود، ناحیهٔ جذابیت با کاهش β، گسترده‌تر و با افزایش آن، کوچکتر خواهد گردید. اینک فرض کنید بخواهیم از این مثال برای تبیین طبیعت محافظه‌کارانهٔ کران (۵ ـ ۷) استفاده نماییم. با استفاده از این کران، با نامساوی $\beta < 1/3/026 k_2^2$ مواجه هستیم. این نامساوی به جملهٔ آشفتگی $g(t,x)$ اجازه می‌دهد هر بردار مرتبهٔ دومی باشد که در رابطهٔ $\|g(t,x)\|_2 \le \beta k_2^2 \|x\|_2$ صدق می‌کند. این دسته آشفتگیها بسیار عمومیتر از آشفتگیهایی است که در این مسألهٔ خاص مورد بحث قرار گرفت. در واقع از این دید که مؤلفهٔ اول g همیشه صفر است، با *آشفتگی ساختاری*[1] سر و کار داریم، در حالی که تحلیل ما براساس *آشفتگی غیرساختاری*[2] است که در آن بردار g می‌تواند در همهٔ جهتها تغییر کند. در حالت کلّی عدم‌لحاظ ویژگیهای ساختاری آشفتگی به بروز محافظه‌کاری منجر خواهد شد؛ از این رو دیگر بار بررسی خود را تکرار می‌کنیم اما این بار، ساختار آشفتگی را نیز در نظر می‌گیریم و به جای استفاده از کران کلّی رابطهٔ (۵ ـ ۷)، مشتق تابع $V(t,x)$ را در امتداد مسیرهای حالت سیستم آشفته محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= -\|x\|_2^2 + 2x^T P g(x) \\
&= -\|x\|_2^2 + 2\beta x_2^2\left(\frac{1}{8}x_1x_2 + \frac{5}{16}x_2^2\right) \\
&\le -\|x\|_2^2 + 2\beta x_2^2\left(\frac{1}{16}\|x\|_2^2 + \frac{5}{16}\|x\|_2^2\right) \\
&\le -\|x\|_2^2 + \frac{3}{4}\beta k_2^2 \|x\|_2^2
\end{aligned}$$

بنابراین در حالتی که $\beta < \frac{4}{3}k_2^2$ می‌باشد، $\dot{V}(x)$ معیّن منفی است. اکنون دوباره با استفاده از اینکه به ازای جمیع مقادیر $x \in \Omega_c$ داریم: $|x_2|^2 \le k_2^2 = 96c/29$، به مقدار $\beta < \frac{0/4}{c}$ می‌رسیم که چهار برابر نتیجه‌ای است که با استفاده از رابطهٔ (۵ ـ ۷) حاصل می‌شود. Δ

هنگامی که مبدأ سیستم نامیِ (۵ ـ ۲) پایدار مجانبی یکنواخت است اما پایدار نمایی

1. Structured Perturbation 2. Unstructured perturbation

نیست، تحلیل پایداری سیستم آشفته بسیار پیچیده‌تر است. برای بررسی این حالت فرض کنید سیستم نامی دارای تابع لیاپانوف $V(t,x)$ باشد که معیّن مثبت و کاهشی است و به ازای جمیع مقادیر $D \times (\infty , 0] \in (t,x)$ در رابطهٔ ذیل نیز صدق می‌کند:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq - W_3(x)$$

که $W_3(x)$ تابعی معیّن مثبت و پیوسته است. مشتق تابع V در امتداد مسیرهای حالت (۵ ـ ۱) برابر است با:

$$\dot{V}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(t,x) \leq - W_3(x) + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} g(t,x) \right\|$$

اکنون هدف آن است که نشان دهیم برای جمیع مقادیر $D \times (\infty , 0] \in (t,x)$ داریم:

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} g(t,x) \right\| < W_3(x)$$

در این مورد نمی‌توان مشابه حالت پایدار نمایی، با گذاشتن کرانی با مرتبهٔ اندازهٔ ساده‌ای بر $\| g(t,x) \|$ به هدف موردنظر دست یافت زیرا کران رشدیِ اعمالی بر $\| g(t,x) \|$ به طبیعت تابع لیاپانوف سیستمِ نامی بستگی دارد. دسته‌ای از توابع لیاپانوف که تحلیل آنها تقریباً به سادگی حالت پایدار نمایی است، توابعی هستند که معیّن مثبت و کاهشی بوده، به ازای جمیع مقادیر $D \times (\infty , 0] \in (t,x)$ در روابط ذیل صدق می‌کنند:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq - c_3 \phi^2(x) \qquad (۵ ـ ۸)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4 \phi(x) \qquad (۵ ـ ۹)$$

که c_3 و c_4 ثابتهای مثبتی هستند و $\phi : R^n \longrightarrow R$ نیز تابعی معیّن مثبت و پیوسته می‌باشد. تابع لیاپانوفی که در روابط (۵ ـ ۸) ـ (۵ ـ ۹) صدق کند، تابع لیاپانوف نوع مجذوری[1] نامیده می‌شود. واضح است تابع لیاپانوفی که در روابط (۵ ـ ۳) ـ (۵ ـ ۵) صدق کند نیز نوع مجذوری است اما باید توجه داشت ممکن است به رغم وجود تابع لیاپانوف نوع مجذوری، مبدأ پایدار نمایی نباشد. این موضوع را به کمک مثال تشریح می‌کنیم: اگر سیستم نامی معادلهٔ (۵ ـ ۲) دارای

1. Quadratic - type

تابع لیاپانوف نوع مجذوری $V(t,x)$ باشد، مشتقش در امتداد مسیرهای حالت (۵ ـ ۱) برابر است با:

$$\dot{V}(t,x) \leq - c_3 \phi^2(x) + c_4 \phi(x) \| g(t,x) \|$$

حال فرض کنید جملهٔ آشفتگی در شرط ذیل نیز صدق نماید:

$$\| g(t,x) \| \leq \gamma \phi(x), \qquad \gamma < \frac{c_3}{c_4}$$

پس:

$$\dot{V}(t,x) \leq - (c_3 - c_4 \gamma) \phi^2(x)$$

که نشان می‌دهد $\dot{V}(t,x)$ معیّن منفی است.

مثال ۵ ـ ۳ سیستم عددی زیر مفروض است:

$$\dot{x} = - x^3 + g(t,x)$$

سیستم نامیِ $\dot{x} = -x^3$ دارای یک نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی جامع در مبدأ است اما همچنانکه در مثال ۳ ـ ۲۳ ملاحظه شد مبدأ پایدار نمایی نیست؛ بنابراین هیچ تابع لیاپانوفی نمی‌توان یافت که در روابط (۵ ـ ۳) ـ (۵ ـ ۵) صدق کند. تابع لیاپانوف $V(x) = x^4$ همراه با مقادیر $\phi(x) = \|x\|^3$، $c_3 = 4$ و $c_4 = 4$، روابط (۵ ـ ۸) ـ (۵ ـ ۹) را برآورده می‌سازد. فرض کنید جملهٔ آشفتگی $g(t,x)$ به ازای جمیع مقادیر x، نامساوی $|g(t,x)| \leq \gamma |x|^3$ را ارضا کند $(\gamma < 1)$، در این صورت مشتق تابع V در امتداد مسیرهای حالت سیستم آشفته در رابطهٔ ذیل صدق می‌نماید:

$$\dot{V}(t,x) \leq - 4(1 - \gamma) \phi^2(x)$$

در نتیجه مبدأ در سیستم آشفته، نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی یکنواخت جامع است. Δ

در قیاس با حالت پایداری نمایی باید اشاره کرد در سیستمی نامی با نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی یکنواخت (اما نه پایدار نمایی)، مبدأ نسبت به آشفتگیهای هموار با کرانهایی با رشد

خطی (به شکل عبارت (۵ ـ ۶)) مقاوم نیست. این نکته را می‌توان به کمک مثال ذیل تشریح کرد*:

مثال ۵ ـ ۴ سیستم عددی مثال قبل را همراه با آشفتگی: $g = \gamma x$ (که $\gamma > 0$ است) در نظر بگیرید؛ یعنی:

$$\dot{x} = -x^3 + \gamma x$$

به کمک خطی‌سازی بسادگی می‌توان نشان داد برای هر مقدار $\gamma > 0$ (و قطع نظر از اینکه γ چقدر کوچک است)، مبدأ ناپایدار است. Δ

۵ ـ ۲ آشفتگیهای غیرصفر شونده

اینک به حالت کلّی‌تری بازمی‌گردیم که در آن نمی‌دانیم $g(t, 0) = 0$ است؛ علاوه بر این ممکن است مبدأ $x = 0$، نقطهٔ تعادل سیستم آشفتهٔ (۵ ـ ۱) نباشد. در این صورت نه می‌توان راجع به پایداری نقطهٔ تعادل بحث کرد و نه انتظار داشت با افزایش t به سمت بینهایت، پاسخ سیستم به سمت مبدأ همگرا گردد. حداکثر امیدمان آن است که اگر $g(t,x)$ برحسب معیار خاصی کوچک باشد، آنگاه $x(t)$ نیز در غایت امر با مقدار کوچکی کراندار بماند؛ به تعبیر دیگر برای مقادیر بزرگ t، $\|x(t)\|$ مقدار کوچکی داشته باشد. این موضوع، مفهوم کرانمندی غایی[1] را تبیین می‌سازد.

تعریف ۵ ـ ۱ پاسخ معادلهٔ $\dot{x} = f(t,x)$ را *کراندار غایی یکنواخت*[2] گوییم اگر ثابتهای مثبت b و c و $\alpha \in (0, c)$ و نیز ثابت مثبت $T = T(\alpha)$ چنان وجود داشته باشد که داشته باشیم:

$$\|x(t_0)\| < \alpha \Rightarrow \|x(t)\| \le b, \qquad \forall\, t \ge t_0 + T \qquad (۱۰ ـ ۵)$$

علاوه بر این پاسخ معادلهٔ $\dot{x} = f(t,x)$ را *کراندار غاییِ یکنواخت جامع* گوییم اگر رابطهٔ

* همچنین تمرین ۵ ـ ۸ را ملاحظه کنید.

1. Ultimate boundness 2. Uniformly ultimately bounded

(۵ ـ ۱۰) *برای هر مقدار بزرگ* α *برقرار باشد.*

ثابت b در رابطهٔ (۵ ـ ۱۰) را کران غایی می‌نامیم. در مورد سیستمهای خودگردان، نیازی به ذکر واژهٔ «یکنواخت» نیست زیرا پاسخ معادله فقط به $t - t_0$ بستگی دارد. قضیه شبه‌لیاپانوف[1] ذیل، در تعیین کرانداری غایی یکنواخت بسیار سودمند است:

قضیهٔ ۵ ـ ۱ *فرض کنید* $D \subset R^n$ *قلمرویی شامل مبدأ و تابع* $f: [0, \infty) \times D \longrightarrow R^n$ *نسبت به* t *پیوستهٔ قطعه‌ای و نسبت به* x *لیپ شیتز محلی باشد. ضمناً فرض کنید تابع* $V: [0, \infty) \times D \longrightarrow R$ *پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد که به ازای جمیع مقادیر* $t > 0$ *و* $x \in D$ *در روابط ذیل صدق نماید:*

$$W_1(x) \le V(t,x) \le W_2(x) \qquad (۱۱ ـ ۵)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \le -W_3(x) \qquad \forall\, \|x\| \ge \mu > 0 \qquad (۱۲ ـ ۵)$$

که $W_1(x)$، $W_2(x)$ *و* $W_3(x)$، *توابعی پیوسته و معیّن مثبت روی* D *هستند. در این صورت اگر مقدار* $r > 0$ *چنان اختیار شود که* $B_r \subset D$ *باشد و مقدار* μ *نیز آنقدر کوچک باشد که بتوان نوشت:*

$$\max_{\|x\| \le \mu} W_2(x) < \min_{\|x\| = r} W_1(x) \qquad (۱۳ ـ ۵)$$

و ضمناً داشته باشیم: $\eta = \max_{\|x\| \le \mu} W_2(x)$ *و نیز مقدار* ρ *چنان باشد که:*

$$\eta < \rho < \max_{\|x\| = r} W_1(x)$$

در این صورت زمان محدود t_1 *(وابسته به* $x(t_0)$ *و* μ*) و تابع* $\beta(\cdot, \cdot)$ *متعلق به کلاس* $\mathcal{KL}$ *چنان‌وجود دارد که:* $\forall x(t_0) \in \{x \in B_r \mid W_2(x) \le \rho\}$، *ضمن اینکه پاسخ* $\dot{x} = f(t,x)$ *نیز در روابط ذیل صدق می‌کند:*

$$\|x(t)\| \le \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \qquad \forall t_0 \le t < t_1 \qquad (۱۴ ـ ۵)$$

1. Lyapunov - like theorem

$$x(t) \in \{x \in B_r \mid W_1(x) \le \eta\}, \qquad \forall t \ge t_1 \qquad (۱۵-۵)$$

علاوه بر این اگر $D = R^n$ و $W_1(x)$ بیکران شعاعی باشد، آنگاه روابط (۵ ـ ۱۴) ـ(۵ ـ ۱۵) برای هر حالت اولیهٔ $x(t_0)$ و هر μ برقرار است. ◇

برهان: برهان این قضیه دارای نقاط اشتراک بسیاری با برهان قضیهٔ ۳ ـ ۸ است؛ از این رو برای کوتاه کردن اثبات، از واژگان و مفاهیم به‌کار رفته در آن قضیه استفاده می‌کنیم. بدین منظور با تعریف $\Omega_{t,\eta} = \{x \in B_r \mid V(t,x) \le \eta\}$ می‌توان نوشت:

$$B_\mu \subset \{x \in B_r \mid W_2(x) \le \eta\} \subset \Omega_{t,\eta} \subset \{x \in B_r \mid W_1(x) \le \eta\} \subset \{x \in B_r \mid W_1(x) \le \rho\}$$

و:

$$\Omega_{t,\eta} \subset \Omega_{t,\rho} \subset \{x \in B_r \mid W_1(x) \le \rho\} \subset B_r \subset D$$

دو مجموعهٔ $\Omega_{t,\rho}$ و $\Omega_{t,\eta}$ دارای این ویژگی هستند که پاسخی که از درون هر یک آغاز شود نمی‌تواند از آنها خارج گردد، زیرا تابع $\dot V(t,x)$ روی مرزها منفی است. بنابراین اگر داشته باشیم: $x(t_0) \in \{x \in B_r \mid W_2(x) \le \rho\}$، آنگاه به ازای جمیع مقادیر $t \ge t_0$، پاسخ $x(t)$ متعلق به $\Omega_{t,\rho}$ خواهد بود. چنانچه پاسخی از درون مجموعهٔ $\Omega_{t,\eta}$ آغاز شود، رابطهٔ (۵ ـ ۱۵) برای همهٔ مقادیر $t \ge t_0$ برقرار است. حال فرض کنید پاسخی از درون $\Omega_{t,\eta}$، ولی خارج از $\Omega_{t,\rho}$ آغاز شود و t_1 نیز نخستین زمانی باشد که پاسخ معادله به $\Omega_{t,\eta}$ می‌رسد، واضح است اگر پاسخ هیچگاه به مجموعهٔ $\Omega_{t,\eta}$ نرسد، $t_1 = \infty$ خواهد بود. برای تمامی مقادیر $t \in [t_0, t_1]$، نامساویهای (۵ ـ ۱۱) ـ(۵ ـ ۱۲) صادق است، بنابراین مشابه برهان قضیهٔ ۳ ـ ۸، تابع $\alpha(\cdot)$ متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ چنان وجود دارد که: $\dot V \le -\alpha(V)$. در نتیجه می‌توان تابع $\beta(\cdot,\cdot)$ متعلق به کلاس $\mathcal{KL}$ را چنان یافت که در رابطهٔ (۵ ـ ۱۴) صدق کند. می‌دانیم با افزایش t به سمت بینهایت، $\beta(\|x(t_0)\|, t-t_0)$ به سمت صفر میل می‌کند، لذا زمان محدودی وجود دارد که برای همهٔ لحظات پس از آن می‌توان نوشت: $\beta(\|x(t_0)\|, t-t_0) < \mu$. پس باید زمان t_1 محدود باشد به تعبیر دیگر باید پاسخ معادله در زمان محدودی به $\Omega_{t,\eta}$ برسد در این صورت اگر پاسخ یک بار وارد مجموعه شود، برای تمامی مقادیر $t \ge t_1$ درون آن خواهد ماند؛ در نتیجه برای تمامی مقادیر $t \ge t_1$ داریم: $x(t) \in \{x \in B_r \mid W_1(x) \le \eta\}$. چنانچه $D = R^n$ و $W_1(x)$ نیز بیکران شعاعی باشد، آنگاه می‌توان برای هر حالت اولیهٔ $x(t_0)$ و هر مقدار μ،

مقادیر r و ρ را آنقدر بزرگ برگزید که رابطهٔ (۵ ـ ۱۳) برآورده شود و نیز داشته باشیم: $x(t_0) \in \{x \in B_r \mid W_2(x) \le \rho\}$. □

تحقیق در مورد صحت قضایای ذیل را به خواننده وا می‌گذاریم (تمرینهای ۵ ـ ۱۰، ۵ ـ ۱۱ و ۵ ـ ۱۲).

قضیهٔ فرعی ۵ ـ ۱ *فرض کنید شرایط قضیهٔ ۵ ـ ۱، توابع $\alpha_1(\cdot)$ و $\alpha_2(\cdot)$ متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ روی بازهٔ $[0, r]$ چنان تعریف شده باشند که داشته باشیم:*

$$\alpha_1(\|x\|) \le W_1(x) \quad \text{و} \quad W_2(x) \le \alpha_2(\|x\|), \qquad \forall x \in D$$

همچنین فرض کنید که: $\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ و $\|x(t_0)\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$. در این صورت پاسخ $\dot x = f(t,x)$ کراندار غایی یکنواخت است و کران غایی آن برابر با $\alpha_1^{-1}(\alpha_1(\mu))$ می‌باشد. ◇

قضیهٔ فرعی ۵ ـ ۲ *تحت فرضیات قضیهٔ فرعی ۵ ـ ۱، پاسخهای معادلهٔ $\dot x = f(t,x)$ در رابطهٔ ذیل صدق می‌کنند:*

$$\|x(t)\| \le \beta(\|x(t_0)\|, t-t_0) + \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)), \qquad \forall t \ge t_0 \qquad (۱۶-۵)$$ ◇

قضیهٔ فرعی ۵ ـ ۳ *فرض کنید مفروضات قضیهٔ ۵ ـ ۱ با مقادیر ذیل برقرار باشند:*

$$W_1(x) \ge k_1\|x\|^c, \qquad W_2(x) \le k_2\|x\|^c, \qquad W_3(x) \ge k_3\|x\|^c$$

که k_i و c ثابتهای مثبتی هستند. علاوه بر این فرض کنید داشته باشیم:

$$\mu < r(k_1/k_2)^{1/c}, \qquad \|x(t_0)\| < r(k_1/k_2)^{1/c};$$

در این صورت روابط (۵ ـ ۱۴) ـ(۵ ـ ۱۵) به شکل زیر درمی‌آید:

$$\|x(t)\| \le k\|x(t_0)\| e^{-\gamma(t-t_0)}, \qquad \forall t_0 \le t < t_1 \qquad (۱۷-۵)$$

$$\|x(t)\| \le \mu\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{1/c}, \qquad \forall t \ge t_1 \qquad (۱۸-۵)$$

که: $k = (k_2/k_1)^{1/c}$ و $\gamma = (k_3/k_4 c)$ ◇

شایان توجه اینکه کران غایی مطرح شده در قضیهٔ فرعی ۵ ـ ۱، تابعی از μ و متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ می‌باشد، زیرا هرچه μ کوچکتر باشد کران غایی نیز کوچکتر خواهد بود به طوری که اگر μ به سمت صفر میل کند، کران غایی نیز به سمت صفر همگرا خواهد شد.

اینک به بررسی چگونگی استفاده از قضیهٔ ۵ ـ ۱ در تحلیل سیستم آشفتهٔ (۵ ـ ۱) در حالتی می‌پردازیم که مبدأ سیستمِ نامی، پایدار نمایی باشد.

لم ۵ ـ ۲ *فرض کنید $x = 0$ نقطهٔ تعادل پایدار نمایی سیستم نامیِ (۵ ـ ۲) و $V(t,x)$ تابع لیاپانوف آن باشد که در مجموعهٔ $D \times (0, \infty]$، در روابط (۵ ـ ۳) ـ (۵ ـ ۵) صدق می‌کند و داریم: $D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$. علاوه بر این فرض کنید جملهٔ آشفتگی $g(t,x)$، نامساوی ذیل را به ازای جمیع مقادیر $t \ge 0$ و $x \in D$ برآورده می‌سازد:*

$$\|g(t,x)\| \le \delta < \frac{c_3}{c_4}\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\,\theta r \qquad (۱۹-۵)$$

که θ ثابت مثبتی کوچکتر از واحد می‌باشد. در این صورت برای همهٔ مقادیر $\|x(t_0)\| < \sqrt{c_1/c_2}\,r$، پاسخ سیستم آشفتهٔ معادلهٔ (۵ ـ ۱) در روابط ذیل صدق می‌نماید:

$$\|x(t)\| \le k \exp[-\gamma(t-t_0)]\,\|x(t_0)\|, \qquad \forall t_0 \le t < t_1$$

و:

$$\|x(t)\| \le b, \qquad \forall t \ge t_1$$

که t_1 زمان محدودی است و داریم:

$$k = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}, \qquad \gamma = \frac{(1-\theta)c_3}{2c_2}, \qquad b = \frac{c_4}{c_3}\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\,\frac{\delta}{\theta}$$ ◇

برهان: از $V(t,x)$ به عنوان نامزد تابع لیاپانوفِ سیستم آشفتهٔ معادلهٔ (۵ ـ ۱) استفاده می‌کنیم؛

در این صورت مشتق تابع $V(t,x)$ در امتداد مسیرهای حالت معادلهٔ (۵ ـ ۱)، در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t,x) &\le -c_3\|x\|^2 + \left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\| \|g(t,x)\| \\
&\le -c_3\|x\|^2 + c_4\delta\|x\| \\
&= -(1-\theta)c_3\|x\|^2 - \theta c_3\|x\|^2 + c_4\delta\|x\|, \qquad 0 < \theta < 1 \\
&\le -(1-\theta)c_3\|x\|^2, \qquad \forall \|x\| \ge \delta c_4/\theta c_3
\end{aligned}$$

و بدین ترتیب با استفاده از قضیهٔ فرعی ۵ ـ ۳، برهان کامل می‌شود. □

باید دقت کرد کران غایی b در لم ۵ ـ ۲، متناسب با کران بالایی آشفتگی δ است. دوباره می‌توان این نتیجه را به عنوان ویژگی قوام سیستمهای نامی‌ای دانست که دارای نقاط تعادل پایدار نمایی در مبدأ هستند زیرا این موضوع نشان می‌دهد آشفتگیهای نسبتاً کوچک (و کراندار یکنواخت) نمی‌توانند به انحراف ماندگار بزرگی از مبدأ منجر شوند.

مثال ۵ ـ ۵ سیستم مرتبهٔ دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -4x_1 - 2x_2 + \beta x_2^3 + d(t)$$

که $\beta \ge 0$ ضریبی مجهول و $d(t)$ نیز اغتشاش کراندار یکنواختی است که در رابطهٔ ذیل صدق می‌کند: $|d(t)| \le \delta, \ \forall t \ge 0$. این همان سیستمی است که در مثال ۵ ـ ۲ بررسی شد جز آنکه جملهٔ اضافی $d(t)$ به آن افزوده شده است؛ از این رو می‌توان آن را به عنوان آشفتگیِ سیستم خطیِ نامی در نظر گرفت که دارای تابع لیاپانوف $V(x) = x^T P x$ می‌باشد و داریم:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{16} \end{bmatrix}$$

تابع $V(x)$ را به عنوان نامزد تابع لیاپانوفِ سیستم آشفته برمی‌گزینیم اما دو جملهٔ آشفتگی βx_2^3

و $d(t)$ را به طور جداگانه مورد توجه قرار می‌دهیم زیرا اولین جمله در مبدأ صفر می‌شود اما دومی چنین نیست. با محاسبهٔ مشتق $V(x)$ در امتداد مسیرهای حالت سیستم آشفته، می‌توان نوشت:

$$\dot{V}(t,x) = -\|x\|_2^2 + 2\beta x_2^2\left(\frac{1}{8}x_1x_2 + \frac{5}{16}x_2^2\right) + 2d(t)\left(\frac{1}{8}x_1 + \frac{5}{16}x_2\right)$$

$$\leq -\|x\|_2^2 + \frac{3}{4}\beta k_2^2\|x\|_2^2 + \frac{\sqrt{29}\,\delta}{8}\|x\|_2$$

که در رابطهٔ فوق از نامساوی ذیل بهره جسته‌ایم:

$$|2x_1 + 5x_2| \leq \|x\|_2\sqrt{4+25}$$

k_2 نیز کران بالایی $|x_2|$ می‌باشد. با فرض $\beta \leq 4(1-\xi)/3k_2^2$ (که $0 < \xi < 1$)، می‌توان نوشت:

$$\dot{V}(t,x) \leq -\xi\|x\|_2^2 + \frac{\sqrt{29}\,\delta}{8}\|x\|_2$$

$$\leq -(1-\theta)\xi\|x\|_2^2, \qquad \forall \|x\|_2 \geq \mu = \frac{\sqrt{29}\,\delta}{8\xi\theta}$$

که $0 < \theta < 1$ است. همچنانکه در مثال ۵ ـ ۲ دیدیم $|x_2|^2$ در Ω_c با مقدار c ۲۹/۹۶ کراندار است؛ بنابراین چنانچه داشته باشیم: $\beta \leq 0/4(1-\xi)/c$ و δ نیز آنقدر کوچک باشد که: $\mu^2\lambda_{max}(P) < c$، آنگاه $B_\mu \subset \Omega_c$ است و همهٔ مسیرهای حالتی که از درون Ω_c آغاز می‌شوند تا ابد درون Ω_c باقی خواهند ماند. علاوه بر این چون شروط قضیهٔ ۵ ـ ۱ در مجموعهٔ Ω_c برآورده می‌شود، بنابراین پاسخهای سیستم آشفته، کراندار غایی یکنواختند و کران غایی آن با مقدار ذیل بیان می‌گردد:

$$b = \frac{\sqrt{29}\,\delta}{8\xi\theta}\sqrt{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}} \qquad \Delta$$

در حالت کلّی‌تری که مبدأ $x = 0$ در سیستم نامیِ (۵ ـ ۲)، نقطهٔ تعادل پایدار مجانبیِ یکنواخت (به جای پایدار نمایی) باشد، تحلیل سیستم آشفته به روش مشابهی انجام می‌پذیرد.

لم ۵ ـ ۳ *فرض کنید $x = 0$ نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی یکنواخت سیستم نامیِ (۵ ـ ۲) و $V(t,x)$ تابع لیاپانوف سیستم نامی باشد که در مجموعهٔ: $[0,\infty) \times D$ ($D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$) در نامساویهای ذیل صدق می‌کند*:*

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t,x) \leq \alpha_2(\|x\|) \qquad (۵ ـ ۲۰)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}f(t,x) \leq -\alpha_3(\|x\|) \qquad (۵ ـ ۲۱)$$

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\| \leq \alpha_4(\|x\|) \qquad (۵ ـ ۲۲)$$

که $\alpha_i(\cdot)$، $i = 1,2,3,4$، توابعی متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ هستند. علاوه بر این فرض کنید جملهٔ آشفتگی $g(t,x)$ به‌ازای جمیع مقادیر $t \geq 0$ و $x \in D$ در عبارت کران یکنواخت زیر صدق کند:

$$\|g(t,x)\| \leq \delta < \frac{\theta\alpha_3(\alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)))}{\alpha_4(r)} \qquad (۵ ـ ۲۳)$$

که θ ثابت مثبتی کوچکتر از واحد است. در این صورت برای همهٔ مقادیر $\|x(t_0)\| < \alpha_2^{-1}\alpha_1(r))$، پاسخ سیستم آشفتهٔ (۵ ـ ۱) در رابطهٔ ذیل صادق است:

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t-t_0), \qquad \forall t_0 \leq t < t_1$$

ضمناً:

$$\|x(t)\| \leq \rho(\delta), \qquad \forall t \geq t_1$$

که $\beta(\cdot,\cdot)$ تابعی متعلق به کلاس $\mathcal{KL}$ و t_1 نیز زمان محدودی است؛ $\rho(\delta)$ نیز تابعی از δ و متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ می‌باشد که با عبارت ذیل تعریف می‌گردد:

$$\rho(\delta) = \alpha_1^{-1}\left(\alpha_2\left(\alpha_3^{-1}\left(\frac{\delta\alpha_4(r)}{\theta}\right)\right)\right) \qquad \diamond$$

برهان: با استفاده از تابع $V(t,x)$ به عنوان نامزد تابع لیاپانوف سیستم آشفتهٔ (۵ ـ ۱) و محاسبهٔ

---

* وجود تابع لیاپانوفی که این نامساویها را در قلمرو کرانداری برآورده کند، به کمک قضیهٔ ۳ ـ ۱۴ (و تحت شرایط اضافه‌ای) تضمین شده است.

مشتق آن در امتداد مسیرهای حالت سیستم (۵ ـ ۱) می‌توان نوشت:

$$\dot{V}(t,x) \le -\alpha_3(\|x\|) + \left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\| \|g(t,x)\|$$

$$\le -\alpha_3(\|x\|) + \delta\alpha_4(\|x\|)$$

$$\le -(1-\theta)\alpha_3(\|x\|) - \theta\alpha_3(\|x\|) + \delta\alpha_4(r), \qquad 0 < \theta < 1$$

$$\le -(1-\theta)\alpha_3(\|x\|), \qquad \forall \|x\| \ge \alpha_3^{-1}\left(\frac{\delta\alpha_4(r)}{\theta}\right)$$

حال به کمک قضیهٔ ۵ ـ ۱ و قضیهٔ فرعی ۵ ـ ۱، برهان کامل می‌شود. □

این لم مشابه لمی است که در حالت خاص پایداری نمایی به دست آوردیم؛ لیکن جنبهٔ مهمی در تحلیل حالت پایداری نمایی وجود دارد که در حالت کلّی‌تر پایداری مجانبی یکنواخت با آن مواجه نمی‌شویم: در مورد پایداری نمایی، لازم است δ، رابطهٔ (۵ ـ ۱۹) را برآورده کند ضمن اینکه سمت راست این رابطه با افزایش $r \longrightarrow \infty$، به سوی بینهایت میل می‌کند. بنابراین چنانچه همهٔ فرضیات به طور جامع برآورده شود، می‌توان نتیجه گرفت: *برای تمامی اغتشاشهای کراندار یکنواخت، پاسخ سیستم آشفته، کراندار یکنواخت خواهد بود*؛ زیرا در این حالت برای هر مقدار δ، می‌توان مقدار r را چنان بزرگ برگزید که در رابطهٔ (۵ ـ ۱۹) صدق نماید. در حالت پایداری مجانبی یکنواخت، باید δ رابطهٔ (۵ ـ ۲۳) را برآورده کند. با ملاحظهٔ سمت راست عبارت (۵ ـ ۲۳) ملاحظه می‌شود اگر اطلاعاتی راجع به تعلق توابع به کلاس $\mathcal{K}$ نداشته باشیم، نمی‌توان در خصوص مقدار حدّ عبارت سمت راست، با شرط $r \to \infty$، اظهارنظر کرد؛ از این رو نمی‌توان نتیجه گرفت آشفتگیهای کراندار یکنواخت در سیستم نامیِ همراه با نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی یکنواخت در مبدأ، دارای پاسخهای کرانداری (قطع‌نظر از اندازهٔ آشفتگی) خواهد بود. البته باید توجه داشت ناتوانی در اثبات این نکته به معنای عدم صحت همیشگیِ آن نیست. لیکن موارد نقض آن نیز وجود دارد و بسادگی می‌توان مثالهایی را ساخت (مانند تمرین ۵ ـ ۱۹) که در آن مبدأ، پایدار مجانبیِ یکنواخت جامع است اما آشفتگی کرانداری می‌تواند پاسخ سیستم را به سوی بینهایت ببرد.

۵ ـ ۳ پایداری ورودی به حالت

سیستم ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(t,x,u) \qquad (۵ ـ ۲۴)$$

که تابع $f: [0,\infty) \times D \times D_u \longrightarrow R^n$ نسبت به t پیوستهٔ قطعه‌ای و نسبت به x و u لیپ شیتز محلی است. $D \subset R^n$ قلمرویی شامل مبدأ $x = 0$ و $D_u \subset R^m$ قلمرویی شامل مبدأ $u = 0$ می‌باشد. ورودی $u(t)$ به ازای جمیع مقادیر $t \ge 0$، تابعی پیوستهٔ قطعه‌ای و کراندار است. حال فرض کنید سیستم بدون ورودی:

$$\dot{x} = f(t,x,0) \qquad (۵ ـ ۲۵)$$

دارای نقطهٔ تعادل مجانبی یکنواختی در $x = 0$ باشد. با در نظرگرفتن سیستم (۵ ـ ۲۴) به عنوان آشفتگیِ سیستم بدون ورودیِ (۵ ـ ۲۵) می‌توان روش کاربردی در بخش قبل را برای تحلیل رفتار ورودی به حالت سیستم (۵ ـ ۲۴) به کار گرفت. برای مثال چنانچه سیستم بدون ورودی، فرضیات لم ۵ ـ ۳ و جملهٔ آشفتگی نیز مقدار کران ذیل را به ازای جمیع مقادیر $t > 0$ و همهٔ مقادیر (x,u) در همسایگی کرانداری از $(x = 0, u = 0)$ برآورده سازد:

$$\|f(t,x,u) - f(t,x,0)\| \le L\|u\|, \qquad L \ge 0 \qquad (۵ ـ ۲۶)$$

آنگاه نتایج لم ۵ ـ ۳ نشان می‌دهد برای مقادیر به اندازهٔ کوچک $\|x(t_0)\|$ و $\sup_{t \ge t_0} \|u(t)\|$، پاسخ معادلهٔ (۵ ـ ۲۴) در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\|x(t)\| \le \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \rho\left(L \sup_{\tau \ge t_0} \|u(\tau)\|\right), \qquad \forall t \ge t_0$$

این نامساوی ما را به تعریف ذیل در مورد *پایداری ورودی به حالت* رهنمون می‌سازد:

تعریف ۵ ـ ۲ سیستم (۵ ـ ۲۴) *را پایدار محلی ورودی به حالت*[1] *گوییم اگر تابع β متعلق به کلاس $\mathcal{KL}$، تابع γ متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ و ثابتهای مثبت k_1 و k_2 چنان وجود داشته باشند که برای هر حالت اولیهٔ $x(t_0)$ با شرط $\|x(t_0)\| < k_1$ و هر ورودی $u(t)$ با شرط*

1. Locally input - to - state stability

$t \geq t_0 > 0$، پاسخ $x(t)$ وجود داشته باشد و به ازای جمیع مقادیر $\sup_{t \geq t_0} \|u(t)\| < k_2$ در رابطهٔ ذیل صدق کند:

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t-t_0) + \gamma\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|\right) \qquad (۵-۲۷)$$

علاوه بر این سیستم (۵ ـ ۲۴) را پایدار ورودی به حالت گوییم اگر داشته باشیم: $D = R^n$ و $D_u = R^m$ و ضمناً نامساوی (۵ ـ ۲۷) برای هر حالت اولیهٔ $x(t_0)$ و هر ورودی کراندار $u(t)$ صادق باشد.

نامساوی (۵ ـ ۲۷) تضمین‌کنندهٔ این نکته است که اگر ورودی $u(t)$ کراندار باشد، حالت $x(t)$ نیز کراندار خواهد بود. علاوه بر این هنگامی که t افزایش می‌یابد، حالت $x(t)$ در نهایت با کرانی (که تابعی از $\sup_{t \geq t_0} \|u(t)\|$ و متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ می‌باشد)، محدود می‌گردد. اثبات این نکته را به خواننده وامی‌گذاریم (تمرین ۵ ـ ۱۲) که با استفاده از نامساوی (۵ ـ ۲۷) ثابت کند اگر با افزایش t به سمت بینهایت، $u(t)$ به سمت صفر میل کند، آنگاه $x(t)$ نیز به سمت صفر همگرا خواهد شد*. از آنجاکه با مقدار $u(t) \equiv 0$، رابطهٔ (۵ ـ ۲۷) به رابطهٔ ذیل تقلیل می‌یابد:

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t-t_0)$$

لذا پایداری محلی ورودی به حالت بدین معناست که مبدأ سیستمِ بدون ورودیِ (۵ ـ ۲۵)، پایدار مجانبی یکنواخت است در صورتی که پایدار ورودی به حالت بیانگر آن است که مبدأ، پایدار مجانبیِ یکنواخت جامع می‌باشد.

قضیهٔ شبه لیاپانوف زیر، شرط کافی را برای پایداری ورودی به حالت بیان می‌کند**:

قضیهٔ ۵ ـ ۲ فرض کنید داشته باشیم: $D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$ و $D_u = \{u \in R^m \mid \|u\| < r_u\}$، ضمناً تابع $f: [0, \infty) \times D \times D_u \longrightarrow R^n$ نسبت به t پیوستهٔ قطعه‌ای و نسبت به x و u لیپ شیتز محلی باشد، در این صورت اگر $V: [0, \infty) \times D \longrightarrow R$ تابعی پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد که به ازای جمیع مقادیر $(t,x,u) \in [0, \infty) \times D \times D_u$ در روابط ذیل صدق کند:

* یکی دیگر از کاربردهای جالب نامساوی (۵ ـ ۲۷) در لم ۵ ـ ۶ بیان خواهد شد.

** برای سیستمهای خودگردان، می‌توان نشان داد شروط قضیهٔ ۵ ـ ۲، لازم هم هستند. [۱۶۴] را ملاحظه کنید.

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V_2(t,x) \leq \alpha_2(\|x\|) \qquad (۵-۲۸)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x,u) \leq -\alpha_3(\|x\|), \qquad \forall \|x\| \geq \rho(\|u\|) > 0 \qquad (۵-۲۹)$$

(α_1، α_2، α_3 و ρ توابعی از کلاس $\mathcal{K}$ هستند)، آنگاه سیستم (۵ ـ ۲۴) همراه با مقادیر $\gamma = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \rho$، $k_1 = \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ و $k_2 = \rho^{-1}(\min\{k_1, \rho(r_u)\})$، پایدار محلی ورودی به حالت است. علاوه بر این اگر $D = R^n$، $D_u = R^m$ و α_1 تابعی متعلق به کلاس $\mathcal{K}_\infty$ باشد، آنگاه سیستم (۵ ـ ۲۴) همراه با مقدار $\gamma = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \rho$، پایدار ورودی به حالت خواهد بود. ◇

برهان: استفاده از قضیهٔ ۵ ـ ۱ (به همراه قضایای فرعی ۵ ـ ۱ و ۵ ـ ۲) نشان می‌دهد برای هر حالت اولیهٔ $x(t_0)$ و هر ورودی $u(t)$ که در روابط ذیل صدق کنند:

$$\|x(t_0)\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)), \quad \rho\left(\sup_{t \geq t_0} \|u(t)\|\right) < \min\{\alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)), \rho(r_u)\} \qquad (۵-۳۰)$$

پاسخ $x(t)$ موجود است و نامساوی ذیل را برآورده می‌سازد:

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t-t_0) + \gamma\left(\sup_{\tau \geq t_0} \|u(\tau)\|\right), \qquad \forall t \geq t_0 \qquad (۵-۳۱)$$

چون برای مقادیر $t_0 \leq \tau \leq t$، پاسخ $x(t)$ فقط به $u(\tau)$ بستگی دارد، می‌توان مقدار سوپریمم عبارت سمت راست رابطهٔ (۵ ـ ۳۱) را بر بازهٔ $[t_0, t]$ محاسبه کرد که عبارت (۵ ـ ۲۷) را نتیجه می‌دهد*. در حالت جامع نیز تابع $\alpha_2^{-1} \circ \alpha_1$ متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ می‌باشد بنابراین برای هر حالت اولیهٔ $x(t_0)$ و هر ورودی کراندار $u(t)$، می‌توان مقادیر r و r_u را آنقدر بزرگ برگزید که رابطهٔ (۵ ـ ۳۰) صادق باشد. □

دو لم آتی، نتایج بلافصل قضیهٔ معکوس لیاپانوف است:

* به طور مشخص، بحث فوق را بر دورهٔ تناوب $[0, T]$ تکرار کنید و نشان دهید:

$$\|x(\sigma)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, \sigma - t_0) + \gamma\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq T} \|u(\tau)\|\right), \qquad \forall t_0 \leq \sigma \leq T$$

آنگاه مقدار ذیل را جایگزین نمایید: $\sigma = T = t$

لم ۵ ـ ۴ *فرض کنید در همسایگی مشخصی از* $(x=0, u=0)$، *تابع* $f(t,x,u)$ *پیوسته ـ مشتق‌پذیر و ماتریسهای ژاکوبی* $[\partial f/\partial x]$ *و* $[\partial f/\partial u]$ *نسبت به* t *کراندار یکنواخت باشد. در این صورت اگر سیستمِ بدون ورودی (۵ ـ ۲۵) دارای نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی یکنواخت در مبدأ* $x=0$ *باشد آنگاه سیستم (۵ ـ ۲۴)، پایدار محلی ورودی به حالت است.* ◇

برهان: قضیهٔ ۳ ـ ۱۴ (معکوس لیاپانوف) نشان می‌دهد سیستمِ بدون ورودی (۵ ـ ۲۵) در همسایگی کرانداری از $x=0$، دارای تابع لیاپانوف $V(t,x)$ است که در شروط (۵ ـ ۲۰) ـ (۵ ـ ۲۵) صدق می‌کند. از آنجا که $[\partial f/\partial u]$ کراندار است، لذا جملهٔ آشفتگی به ازای جمیع مقادیر $t \geq t_0$ و همهٔ مقادیر (x,u)، در همسایگی مشخصی از $(x=0, u=0)$ در رابطهٔ (۵ ـ ۲۰) صادق است و می‌توان نشان داد تابع $V(t,x)$ شروط قضیهٔ ۵ ـ ۲ را در همسایگی $(x=0, u=0)$ برآورده می‌کند. □

در مورد سیستمهای خودگردان، فرضیات کرانمندی لم ۵ ـ ۴ در بطن شرط پیوسته ـ مشتق‌پذیر بودن $f(x,u)$ نهفته است؛ بنابراین در حالت سیستمهای خودگردان، لم ۵ ـ ۴ بدین صورت بیان می‌شود: *اگر* $f(x,u)$ *پیوسته ـ مشتق‌پذیر و مبدأ سیستم (۵ ـ ۲۵) پایدار مجانبی باشد، آنگاه معادلهٔ (۵ ـ ۲۴)، پایدار محلی ورودی به حالت است.*

لم ۵ ـ ۵ *فرض کنید تابع* $f(t,x,u)$ *پیوسته ـ مشتق‌پذیر و به طور یکنواخت نسبت به* t، *نسبت به* (x,u) *لیپ شیتز جامع باشد، در این صورت اگر سیستمِ بدون ورودی (۵ ـ ۲۵) دارای نقطهٔ تعادل پایدار نمایی جامع در مبدأ* $x=0$ *باشد، آنگاه سیستم (۵ ـ ۲۴) پایدار ورودی به حالت است.* ◇

برهان: قضیهٔ ۳ ـ ۱۲ (معکوس لیاپانوف) نشان می‌دهد سیستمِ بدون ورودی (۵ ـ ۲۵) دارای تابع لیاپانوف $V(t,x)$ می‌باشد که شروط (۵ ـ ۳) ـ (۵ ـ ۵) را به طور جامع برآورده می‌سازد. از جامعیت و یکنواختی ویژگی لیپ شیتز f نتیجه می‌شود جملهٔ آشفتگی به ازای جمیع مقادیر $t \geq t_0$ و همهٔ مقادیر (x,u) در رابطهٔ (۵ ـ ۲۶) صدق می‌کند و می‌توان تحقیق نمود تابع $V(t,x)$ تمامی شروط قضیهٔ ۵ ـ ۲ را به طور جامع برآورده می‌کند. □

با یادآوری آخرین پاراگراف بخش قبل و با توجه به تمرین ۵ ـ ۱۹، مشخص است اگر مبدأ سیستمِ بدون ورودی (۵ ـ ۲۵)، پایدار مجانبی یکنواخت جامع باشد اما پایدار نمایی جامع نباشد، آنگاه حتی اگر f نسبت به (x,u) لیپ شیتز جامع باشد، باز نمی‌توان الزاماً نتیجه گرفت سیستم (۵ ـ ۲۴) پایدار ورودی به حالت است. چگونگی استفاده از قضیهٔ ۵ ـ ۲ را با بیان سه مثال مرتبهٔ اول تشریح می‌کنیم:

مثال ۵ ـ ۶ سیستم: $\dot{x} = -x^3 + u$ با شرط $u=0$، دارای یک نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی جامع در مبدأ می‌باشد. اکنون با انتخاب $V=\frac{1}{2}x^2$، مشتق V در امتداد مسیرهای حالت سیستم با رابطهٔ ذیل بیان می‌شود:

$$\dot{V} = -x^4 + xu = -(1-\theta)x^4 - \theta x^4 + xu \leq -(1-\theta)x^4, \quad \forall\, |x| \geq \left(\frac{|u|}{\theta}\right)^{\frac{1}{3}}$$

که θ مقدار ثابتی در بازهٔ $(0,1)$ است. بنابراین سیستم همراه با مقدار $\gamma(a) = (a/\theta)^{\frac{1}{3}}$، پایدار ورودی به حالت می‌باشد. Δ

مثال ۵ ـ ۷ سیستم ذیل:

$$\dot{x} = f(x,u) = -x - 2x^3 + (1+x^2)u^2$$

با شرط $u=0$، دارای یک نقطهٔ تعادل پایدار نمایی جامع در مبدأ می‌باشد، اما نمی‌توان از لم ۵ ـ ۵ استفاده کرد زیرا تابع f لیپ شیتز جامع نیست. در این صورت با انتخاب $V=\frac{1}{2}x^2$ نتیجه می‌شود:

$$\dot{V} = -x^2 - 2x^4 + x(1+x^2)u^2 \leq -x^4, \quad \forall\, |x| \geq u^2$$

بنابراین سیستم همراه با مقدار $\gamma(a) = a^2$، پایدار ورودی به حالت است. Δ

مثال ۵ ـ ۸ سیستم ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x,u) = -x + (1+x^2)u$$

مشابه مثال قبل اگر $u = 0$ باشد، سیستم دارای یک نقطهٔ تعادل پایدار نمایی جامع در مبدأ است اما چون f نسبت به x لیپ شیتز جامع نیست نمی‌توان لم ۵ ـ ۵ را به آن اعمال کرد؛ لیکن برخلاف مثال قبل، این سیستم پایدار ورودی به حالت نیست زیرا با انتخاب $u \equiv 1$ داریم:

$$\dot{x} = x^2 - x + 1$$

پاسخ این سیستم که از $x(0) = 0$ آغاز می‌شود به سوی بینهایت سوق می‌یابد (توجه کنید که: $\dot{x} \geq \frac{3}{4}$). در این صورت سیستم براساس لم ۵ ـ ۴، پایدار محلی ورودی به حالت می‌باشد و می‌توان به کمک قضیهٔ ۵ ـ ۲ کرانهای حالت اولیه و ورودی (ثابتهای k_1 و k_2 در تعریف ۵ ـ ۲) را تخمین زد؛ فرض کنید داشته باشیم: $D = \{|x| < r\}$ و $D_u = r$، در این صورت با انتخاب تابع $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ می‌توان نوشت:

$$\dot{V} = -x^2 + x(1+x^2)u \leq -(1-\theta)x^2 - \theta x^2 + |x|(1+r^2)|u|$$

$$\leq -(1-\theta)x^2, \qquad \forall \frac{(1+r^2)|u|}{\theta} \leq |x| < r$$

که $0 < \theta < 1$ است؛ بنابراین سیستم با انتخاب مقادیر $k_1 = r$، $k_2 = r\theta/(1+r^2)$ و $\gamma(a) = a(1+r^2)/\theta$، پایدار محلی ورودی به حالت می‌باشد. Δ

یکی از کاربردهای زیبای مفهوم پایداری ورودی به‌حالت در بررسی پایداری سیستمهای به هم پیوستهٔ ذیل نمایان می‌شود:

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2) \qquad (۵-۳۲)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(t, x_2) \qquad (۵-۳۳)$$

که توابع $f_1 : [0, \infty) \times D_1 \times D_2 \longrightarrow R^{n_1}$ و $f_2 : [0, \infty) \times D_2 \longrightarrow R^{n_2}$، نسبت به t پیوستهٔ قطعه‌ای و نسبت به x لیپ شیتز محلی هستند و داریم:

$$x \triangleq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

مجموعهٔ D_i قلمرویی در R^{n_i} و شامل مبدأ $x_i = 0$ است، در حالت کلّی می‌توان فرض کرد:

$D_i = R^{n_i}$. حال فرض کنید سیستم $\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, 0)$ دارای نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی یکنواختی در $x_1 = 0$ و سیستم (۵ ـ ۳۳) نیز دارای نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی یکنواختی در $x_2 = 0$ باشد. به طور حسّی مشهود است اگر x_2ی موجود در معادلهٔ $\dot{x}_1$ از دید خاصی «خوشرفتار» باشد آنگاه سیستمِ به هم پیوستهٔ (۵ ـ ۳۲) ـ (۵ ـ ۳۳) دارای نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی یکنواختی در $x = 0$ خواهد بود. لم زیر نشان می‌دهد بدین‌منظور باید معادلهٔ (۵ ـ ۳۲) (با x_2 به عنوان ورودی)، پایدار ورودی به حالت باشد:

لم ۵ ـ ۶ تحت فرضیات پیش‌گفته:

- *اگر سیستم (۵ ـ ۳۲) با x_2 به عنوان ورودی، پایدار محلی ورودی به حالت و مبدأ سیستم (۵ ـ ۳۳)، پایدار مجانبی یکنواخت باشد، آنگاه مبدأ سیستمِ به هم پیوستهٔ (۵ ـ ۳۲) ـ (۵ ـ ۳۳) پایدار مجانبیِ یکنواخت است.*
- *اگر سیستم (۵ ـ ۳۲) با x_2 به عنوان ورودی، پایدار ورودی به حالت و مبدأ سیستم (۵ ـ ۳۳)، پایدار مجانبی یکنواخت جامع باشد، آنگاه مبدأ سیستمِ به هم پیوستهٔ (۵ ـ ۳۲) ـ (۵ ـ ۳۳) پایدار مجانبی یکنواخت جامع است.* $\diamond$

برهان: این لم را فقط در حالت جامع آن اثبات می‌کنیم (حالت محلی نیز مشابه حالت جامع است جز آنکه حوزهٔ تحلیل، محدودتر می‌شود). فرض کنید $t_0 > 0$، زمان اولیه باشد در این صورت پاسخهای (۵ ـ ۳۲) و (۵ ـ ۳۳) به طور جامع در شروط ذیل صدق می‌کند:

$$\|x_1(t)\| \leq \beta_1(\|x_1(s)\|, t-s) + \gamma_1\left(\sup_{s \leq \tau \leq t} \|x_2(\tau)\|\right) \qquad (۵-۳۴)$$

$$\|x_2(t)\| \leq \beta_2(\|x_2(s)\|, t-s) \qquad (۵-۳۵)$$

که $t \geq s \geq t_0$ است و β_1 و β_2، توابع متعلق به کلاس $\mathcal{KL}$ و γ_1 نیز تابع متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ می‌باشد. با استفاده از رابطهٔ (۵ ـ ۳۴) به ازای مقدار $s = (t+t_0)/2$ داریم:

$$\|x_1(t)\| \leq \beta_1\left(\left\|x_1\left(\frac{t+t_0}{2}\right)\right\|, \frac{t-t_0}{2}\right) + \gamma_1\left(\sup_{\frac{t+t_0}{2} \leq \tau \leq t} \|x_2(\tau)\|\right) \qquad (۵-۳۶)$$

برای تخمین مقدار $x_1\left(\frac{t_1+t_0}{2}\right)$، با استفاده از رابطهٔ (۵ ـ ۳۴) به ازای مقدار $s=t_0$ و جایگزینی t با $2/(t+t_0)$ می‌توان نوشت:

$$\left\| x_1\left(\frac{t+t_0}{2}\right)\right\| \le \beta_1\left(\|x_1(t_0)\|, \frac{t-t_0}{2}\right)+\gamma_1\left(\sup_{t_0\le\tau\le\frac{t+t_0}{2}}\|x_2(\tau)\|\right) \qquad (۳۷-۵)$$

اکنون با استفاده از (۵ ـ ۳۵) داریم:

$$\sup_{t_0\le\tau\le\frac{t+t_0}{2}}\|x_2(\tau)\| \le \beta_2(\|x_2(t_0)\|, 0) \qquad (۳۸-۵)$$

$$\sup_{\frac{t+t_0}{2}\le\tau\le t}\|x_2(\tau)\| \le \beta_2\left(\|x_2(t_0)\|, \frac{t-t_0}{2}\right) \qquad (۳۹-۵)$$

حال با کاستن عبارت (۵ ـ ۳۶) از عبارتهای (۵ ـ ۳۷) ـ (۵ ـ ۳۹) می‌توان نوشت:

$$\|x_1(t_0)\| \le \|x(t_0)\|,\ \|x_2(t_0)\| \le \|x(t_0)\|,\ \|x(t)\| \le \|x_1(t)\| + \|x_2(t)\|$$

در نتیجه:

$$\|x(t)\| \le \beta(\|x(t_0)\|, t-t_0)$$

که: $\beta(r,s)=\beta_1\left(\beta_1\left(r,\frac{s}{2}\right)+\gamma_1\left(\beta_2(r,0)\right),\frac{s}{2}\right)+\gamma_1\left(\beta_2\left(r,\frac{s}{2}\right)\right)+\beta_2(r,s)$

بسادگی می‌توان تحقیق کرد به ازای جمیع مقادیر $r>0$، β تابعی متعلق به کلاس $\mathcal{KL}$ می‌باشد. بنابراین مبدأ معادلات (۵ ـ ۳۲) ـ (۵ ـ ۳۳) پایدار مجانبی یکنواخت جامع است. □

۵ ـ ۴ شیوهٔ قیاس

سیستم آشفتهٔ معادلهٔ (۵ ـ ۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید $V(t,x)$ تابع لیاپانوفی برای سیستم نامیِ (۵ ـ ۲) باشد که مشتقش در امتداد مسیرهای حالت (۵ ـ ۱) در نامساوی دیفرانسیلی ذیل صدق می‌کند:

$$\dot V \le h(t,V)$$

حال با استفاده از لم قیاس (لم ۲ ـ ۵) می‌توان نوشت:

$$V(t,x(t)) \le y(t)$$

که $y(t)$ پاسخ معادلهٔ دیفرانسیل ذیل است:

$$\dot y = h(t,y), \quad y(t_0)=V(t_0,x(t_0))$$

این روش بویژه در مواردی سودمند است که نامساویِ دیفرانسیلی خطی باشد یعنی داشته باشیم: $h(t,V)=a(t)V+b(t)$؛ زیرا در این حالت می‌توان برای معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول y، پاسخ بسته‌ای یافت که اگر مبدأ سیستم نامیِ (۵ ـ ۲)، پایدار نمایی باشد آنگاه می‌توان نامساوی دیفرانسیلی را به شکل خطی بیان نمود.

فرض کنید $V(t,x)$، تابع لیاپانوف سیستم نامی (۵ ـ ۲) باشد که به ازای جمیع مقادیر $(t,x)\in[0,\infty)\times D$ $(D=\{x\in R^n \mid \|x\|<r\}$ (که: در روابط (۵ ـ ۳) ـ (۵ ـ ۵) صدق می‌نماید. ضمناً فرض کنید جملهٔ $g(t,x)$ در رابطهٔ کران زیر صادق باشد:

$$\|g(t,x)\| \le \gamma(t)\|x\| + \delta(t), \qquad \forall t\ge 0, \qquad \forall x\in D \qquad (۴۰-۵)$$

که تابع $\gamma: R\longrightarrow R$ به ازای جمیع مقادیر $t\ge 0$، غیرمنفی و پیوسته است، $\delta: R\longrightarrow R$ نیز به ازای جمیع مقادیر $t\ge 0$، غیرمنفی، پیوسته و کراندار می‌باشد. مشتق تابع V در امتداد مسیرهای حالت (۵ ـ ۱)، روابط ذیل را برآورده می‌سازد:

$$\begin{aligned}\dot V(t,x) &= \frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}f(t,x)+\frac{\partial V}{\partial x}g(t,x)\\ &\le -c_3\|x\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|\|g(t,x)\|\\ &\le -c_3\|x\|^2+c_4\gamma(t)\|x\|^2+c_4\delta(t)\|x\| \qquad (۴۱-۵)\end{aligned}$$

با استفاده از (۵ ـ ۳) می‌توان نوشت:

$$\dot V \le -\left[\frac{c_3}{c_2}-\frac{c_4}{c_1}\gamma(t)\right]V+c_4\delta(t)\sqrt{\frac{V}{c_1}}$$

برای دستیابی به یک نامساوی دیفرانسیلی خطی، با انتخاب $W(t) = \sqrt{V(t,x(t))}$ و استفاده از $\dot{W} = \dot{V} / 2\sqrt{V}$ در حالت $V(t) \neq 0$ می‌توان نوشت:

$$\dot{W} \leq -\frac{1}{2}\left[\frac{c_2}{c_3} - \frac{c_4}{c_1}\gamma(t)\right] W + \frac{c_4}{2\sqrt{c_1}}\delta(t) \qquad (۴۲-۵)$$

در حالت $V(t) = 0$ نیز می‌توان نشان داد*: $D^+ W(t) \leq c_4 \delta(t) / 2\sqrt{c_1}$. در این صورت به ازای جمیع مقادیر $V(t)$، $D^+W(t)$ در رابطهٔ (۵ ـ ۴۲) صدق می‌کند. از سویی از لم قیاس نتیجه می‌شود $W(t)$ نامساوی زیر را برآورده می‌سازد:

$$W(t) \leq \phi(t,t_0) W(t_0) + \frac{c_4}{2\sqrt{c_1}} \int_{t_0}^{t} \phi(t,\tau)\delta(\tau)\, d\tau \qquad (۴۳-۵)$$

که تابع انتقال $\phi(t,\tau)$ با رابطهٔ زیر بیان می‌گردد:

$$\phi(t,\tau) = exp\left[-\frac{c_3}{2c_2}(t-t_0) + \frac{c_4}{2c_1}\int_{t_0}^{t}\gamma(\tau)\, d\tau\right]$$

با استفاده از (۵ ـ ۳) در (۵ ـ ۴۳) نتیجه می‌شود:

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\phi(t,t_0)\,\|x(t_0)\| + \frac{c_4}{2c_1}\int_{t_0}^{t}\phi(t,\tau)\delta(\tau)\, d\tau \qquad (۴۴-۵)$$

حال فرض کنید تابع $\gamma(t)$ در شرط ذیل صدق کند:

$$\int_{t_0}^{t}\gamma(\tau)\, d\tau \leq \varepsilon(t-t_0) + \eta \qquad (۴۵-۵)$$

که ε و η ثابتهای غیرمنفی‌ای هستند و داریم:

$$\varepsilon < \frac{c_1 c_3}{c_2 c_4} \qquad (۴۶-۵)$$

اینک با تعریف α و ρ با عبارتهای:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[\frac{c_3}{c_2} - \varepsilon\frac{c_4}{c_1}\right] > 0, \qquad \rho = exp\left(\frac{c_4\eta}{2c_1}\right) \geq 1 \qquad (۴۷-۵)$$

* تمرین ۵ ـ ۲۷ را ملاحظه کنید.

و استفاده از (۵ ـ ۴۵) ـ (۵ ـ ۴۶) در (۵ ـ ۴۴) می‌توان نوشت:

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\,\rho\,\|x(t_0)\|\, e^{-\alpha(t-t_0)} + \frac{c_4\rho}{2c_1}\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}\delta(\tau)\, d\tau \qquad (۴۸-۵)$$

برای اینکه این کران اعتبار داشته باشد باید مطمئن شویم به ازای جمیع مقادیر $t \geq t_0$، $\|x(t)\| < r$ است؛ با توجه به اینکه می‌توان نوشت*:

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\,\rho\,\|x(t_0)\|\, e^{-\alpha(t-t_0)} + \frac{c_4\rho}{2\alpha c_1}\left[1 - e^{-\alpha(t-t_0)}\right]\sup_{t\geq t_0}\delta(t)$$

$$\leq max\left\{\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\,\rho\,\|x(t_0)\|, \frac{c_4\rho}{2\alpha c_1}\sup_{t\geq t_0}\delta(t)\right\}$$

لذا شرط $\|x(t)\| < r$ در حالتی برآورده می‌شود که داشته باشیم:

$$\|x(t_0)\| < \frac{r}{\rho}\sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \qquad (۴۹-۵)$$

و:

$$\sup_{t\geq t_0}\delta(t) < \frac{2c_1\alpha r}{c_4\rho} \qquad (۵۰-۵)$$

برای رجوع ساده‌تر، این نتایج را در لم زیر خلاصه می‌کنیم:

لم ۵ ـ ۷ *فرض کنید $x = 0$ نقطهٔ تعادل پایدار نمایی سیستم نامی (۵ ـ ۲) و $V(x,t)$ تابع لیاپانوف آن باشد که این تابع در مجموعهٔ $D \times [0, \infty)$ (که: $D = \{x \in R^n \mid \|x\|_2 < r\}$)، در شروط (۵ ـ ۳) ـ (۵ ـ ۵) صدق می‌کند. علاوه بر این فرض کنید جملهٔ آشفتگی $g(x,t)$، رابطهٔ (۵ ـ ۴۰) را برآورده کند که تابع $\gamma(t)$ در روابط (۵ ـ ۴۵) ـ (۵ ـ ۴۶) صادق است؛ در این صورت $x(t_0)$ در عبارت (۵ ـ ۴۹)، $\sup_{t\geq t_0}\delta(t)$ در عبارت (۵ ـ ۵۰) و پاسخ سیستم آشفتهٔ*

* از این نکته استفاده می‌کنیم که تابع $ae^{-\alpha t} + b(1 - e^{-\alpha t})$ با مقادیر مثبت a، b و α به طور یکنوا از مقدار اولیهٔ a به سمت مقدار مانای b سوق می‌یابد؛ لذا کران این تابع با مقدار بیشینهٔ این دو عدد تعیین می‌شود.

(۵ ـ ۱) در عبارت (۵ ـ ۴۸) صدق می‌نماید. ضمناً اگر تمامی فرضیات به طور جامع برآورده گردد، آنگاه به ازای جمیع مقادیر $x(t_0)$ و هر مقدار کرانـدار $\delta(t)$، رابطهٔ (۵ ـ ۴۸) بـرقرار می‌باشد. ◇

با کاربرد لم فوق در حالت آشفتگی صفر شونده (یعنی وقتی که $\delta(t) \equiv 0$ است)، به نتیجهٔ ذیل دست می‌یابیم:

قضیهٔ فرعی ۵ ـ ۴ *فرض کنید $x = 0$ نقطهٔ تعادل پایدار نمایی سیستم نـامی (۵ ـ ۲) و $V(t,x)$ نیز تابع لیاپانوف آن باشد که در مجموعهٔ $x\,D\,(0,\infty]$، روابط (۵ ـ ۳) ـ (۵ ـ ۵) را برآورده می‌سازد. اگر جملهٔ آشفتگی $g(t,x)$ در نامساوی ذیل صدق کند:*

$$\|g(t,x)\| \le \gamma(t)\|x\|$$

(که $\gamma(t)$ در روابط (۵ ـ ۴۵) ـ (۵ ـ ۴۶) صدق می‌نماید) آنگاه مبدأ، نقطهٔ تعادل پایدار نمایی سیستم آشفتهٔ (۵ ـ ۱) می‌باشد. علاوه بر این اگر تمامی فرضیات به طور جامع برآورده شود مبدأ، نقطهٔ تعادل پایدار نمایی جامع است. ◇

اگر $\gamma(t) = \gamma$ مقدار ثابتی باشد، آنگاه باید مقدار γ در قضیهٔ فرعی ۵ ـ ۴، در شرط زیـر صدق کند:

$$\gamma < \frac{c_1 c_3}{c_2 c_4}$$

البته چون $c_1 / c_2 \le 1$ است، این شرط هیچ مزیّتی بر شرط (۵ ـ ۷) (یعنی: $\gamma < c_3 / c_4$) مورد نیاز برای لم ۵ ـ ۱ ندارد. در حقیقت وقتی که $c_1 / c_2 < 1$ است، کران اخیر بـمراتب محافظه‌کارانه‌تر (یعنی کوچکتر) از (۵ ـ ۷) خواهد بود. مزیت قضیهٔ فرعی ۵ ـ ۴ مـربوط بـه حالتی است که انتگرال تابع $\gamma(t)$ شـروط (۵ ـ ۴۵) ـ (۵ ـ ۴۶) را بـرآورده سـازد (حـتی اگـر $\sup_{t \ge t_0} \gamma(t)$ آنقدر کوچک نباشد که در رابطهٔ (۵ ـ ۷) صدق نماید). این سه حالت مختلف در لم ذیل تشریح شده است:

لم ۵ ـ ۸ *الف ـ اگر داشته باشیم:*

$$\int_{t_0}^{\infty} \gamma(\tau)\, d\tau \le k$$

آنگاه رابطهٔ (۵ ـ ۴۵) به ازای مقادیر $\varepsilon = 0$ و $\eta = k$ برقرار است:

ب ـ اگر داشته باشیم:

$$\lim_{t \to \infty} \gamma(t) = 0$$

آنگاه برای هر مقدار $\varepsilon > 0$، مقدار $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ چنان وجود دارد که رابطهٔ (۵ ـ ۴۵) برآورده شود.

ج ـ اگر ثابتهای $\Delta > 0$، $T \ge 0$ و $\varepsilon_1 > 0$ چنان وجود داشته باشد که:

$$\frac{1}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} \gamma(\tau)\, d\tau \le \varepsilon_1, \qquad \forall t \ge t_0 + T$$

آنگاه رابطهٔ (۵ ـ ۴۵) به ازای مقادیر $\varepsilon = \varepsilon_1$ و $\eta = \varepsilon_1 \Delta + T \max_{[t_0, t_0+T]} \gamma(t)$ برقرار است. ◇

برهان: اولین بند کاملاً مشهود است. برای اثبات بند دوم، باید توجه کرد برای هر $\varepsilon > 0$، مقدار $T = T(\varepsilon)$ چنان وجود دارد که به ازای جمیع مقادیر $t \ge t_0 + T$ رابطهٔ $\gamma(t) < \varepsilon$ برقرار باشد، برای مقادیر $t \ge t_0 + T$ می‌توان نوشت:

$$\int_{t_0}^{t} \gamma(\tau)\, d\tau \le T \max_{[t_0, t_0+T]} \gamma(\tau) + \varepsilon(t - t_0 - T) \le T \max_{[t_0, t_0+T]} \gamma(\tau) + \varepsilon(t - t_0)$$

بنابراین عبارت (۵ ـ ۴۵) به ازای مقادیر معلوم ε و $\eta = T \max_{[t_0, t_0+T]} \gamma(t)$ برقرار است. برای اثبات آخرین بند، فرض کنید $t \ge t_0 + T$ و N نیز عـدد صـحیحی بـاشد کـه بـه ازای آن نـامساوی $(N-1)\Delta \le t - t_0 - T \le N\Delta$ برقرار است. حال با فرض $k_1 = \max_{[t_0, t_0+T]} \gamma(t)$ می‌توان نوشت:

$$\int_{t_0}^{t} \gamma(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t_0+T} \gamma(\tau)\, d\tau + \int_{t_0+T}^{t} \gamma(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+T} \gamma(\tau)\,d\tau + \sum_{i=0}^{i=N-2} \int_{t_0+T+i\Delta}^{t_0+T+(i+1)\Delta} \gamma(\tau)\,d\tau$$

$$+ \int_{t_0+T+(N-1)\Delta}^{t} \gamma(\tau)\,d\tau$$

$$\le k_1 T + \sum_{i=0}^{i=N-2} \varepsilon_1 \Delta + \varepsilon_1 \Delta \le k_1 T + \varepsilon_1 (t - t_0 - T) + \varepsilon_1 \Delta$$

$$\le \varepsilon_1 (t - t_0) + \eta$$

□

نکتهٔ قابل توجه در لم قبل این است که شرط (۵ ـ ۴۵) در حالت اول به ازای $\varepsilon = 0$ و در حالت دوم به ازای مقادیر بسیار کوچک ε برآورده می‌شود، در نتیجه در این دو حالت همواره شرط (۵ ـ ۴۶) برقرار است، اما در حالت سوم برآورده شدن شرط (۵ ـ ۴۶) مستلزم کوچک بودن متوسط حرکتیِ[1] $\gamma(t)$ به طور مجانبی و در حالت $t \to \infty$ می‌باشد.

مثال ۵ ـ ۹ سیستم خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = [A(t) + B(t)]x$$

که $A(t)$ و $B(t)$ توابعی پیوسته هستند و $A(t)$ نیز در بازهٔ $[0, \infty)$ کراندار است. فرض کنید مبدأ، نقطهٔ تعادل پایدار نماییِ سیستم نامی ذیل باشد:

$$\dot{x} = A(t)x$$

و داشته باشیم:

$$\lim_{t \to \infty} B(t) = 0$$

در این صورت با توجه به قضیهٔ ۳ ـ ۱۰ می‌دانیم تابع لیاپانوف مجذوری $V(t,x) = x^T P x$ چنان یافت می‌شود که شروط (۵ ـ ۳) ـ (۵ ـ ۵) را به طور جامع برآورده کند. جملهٔ آشفتگی $B(t)x$ نیز در نامساوی ذیل صدق می‌کند:

$$\|B(t)x\| \le \|B(t)\|\,\|x\|$$

1. Moving average

لذا چون: $\|B(t)\| \longrightarrow 0 \Rightarrow t \longrightarrow \infty$، از قضیهٔ فرعی ۵ ـ ۴ و حالت دوم لم ۵ ـ ۸ نتیجه می‌شود مبدأ، نقطهٔ تعادل پایدار نمایی جامعِ سیستم آشفته است. Δ

می‌توان نتایج مشابهی را در حالتهای ذیل به دست آورد: $\int_0^\infty \|B(t)\|\,dt < \infty$ (تمرین ۵ ـ ۲۸) و $\int_0^\infty \|B(t)\|^2\,dt < \infty$ (تمرین ۵ ـ ۲۹).

در حالت آشفتگیهای غیرصفر شونده (یعنی $\delta(t) \not\equiv 0$)، لم زیر برخی نتایج مربوط به رفتار مجانبی $x(t)$ را در حالت $t \longrightarrow \infty$ بیان می‌کند:

لم ۵ ـ ۹ *فرض کنید شروط ۵ ـ ۷ برآورده شود و $x(t)$ نیز پاسخ سیستم آشفتهٔ (۵ ـ ۱) باشد، در این صورت:*

الف ـ اگر داشته باشیم:

$$\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}\,\delta(\tau)\,d\tau \le \beta, \qquad \forall t \ge t_0$$

که β ثابت مثبتی است، آنگاه $x(t)$ کراندار غایی یکنواخت می‌باشد و مقدارکران غایی آن برابر است با:

$$b = \frac{c_4 \rho \beta}{2 c_1 \theta}$$

که $\theta \in (0, 1)$، ثابت مثبت اختیاری است.

ب ـ اگر داشته باشیم:

$$\lim_{t \to \infty} \delta(t) = \delta_\infty$$

آنگاه $x(t)$ کراندار غایی یکنواخت است و مقدارکران غایی آن برابر است با:

$$b = \frac{c_4 \rho \delta_\infty}{2 \alpha c_1 \theta}$$

که $\theta \in (0, 1)$، ثابت مثبت اختیاری است.

ج ـ اگر داشته باشیم:

$$\lim_{t\to\infty}\delta(t)=0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty}x(t)=0$$

اگر شروط لم ۵ ـ ۷ به طور جامع برآورده شود، آنگاه حکمهای پیشین برای هر حالت اولیهٔ $x(t_0)$ برقرار است. ◇

برهان: هر سه حالت حکم را می‌توان بسادگی از نامساوی (۵ ـ ۴۸) به دست آورد. □

۵ ـ ۵ پیوستگی پاسخها بر بازهٔ نامحدود

در بخش ۲ ـ ۳ وابستگی پیوستهٔ پاسخ معادلهٔ حالت را نسبت به حالتهای اولیه و نیز پارامترها بررسی کردیم. به طور مشخص، در قضیهٔ ۲ ـ ۵ به بررسی سیستم نامی ذیل:

$$\dot{x} = f(t,x) \qquad (۵۱ ـ ۵)$$

به همراه سیستم آشفتهٔ:

$$\dot{x} = f(t,x) + g(t,x) \qquad (۵۲ ـ ۵)$$

پرداختیم (با این شرط که در قلمرو خاصی داشته باشیم: $\|g(t,x)\| < \delta$). با استفاده از نامساوی گران وال ـ بلمن دیدیم اگر $y(t)$ و $z(t)$ بترتیب پاسخهای خوش تعریفی از سیستم نامی و سیستم آشفته باشد آنگاه می‌توان نوشت:

$$\|y(t)-z(t)\| \le \|y(t_0)-z(t_0)\| \exp[L(t-t_0)] + \frac{\delta}{L}\{\exp[L(t-t_0)]-1\} \qquad (۵۳ ـ ۵)$$

که L ثابت لیپ شیتز f است. البته این کران فقط در بازه‌های فشردهٔ زمانی[1] اعتبار دارد زیرا جملهٔ نمایی $\exp[L(t-t_0)]$ با افزایش t به سمت بینهایت، به سوی بینهایت میل می‌کند. در واقع این کران فقط بر بازهٔ $[t_0, t_1]$ سودمند است و باید t_1 نیز مقدار کوچکی داشته باشد، زیرا اگر t_1 بزرگ باشد مقدار کران آنقدر بزرگ خواهد شد که در عمل از حیّز انتفاع خارج خواهد بود.

این نکته چندان هم تعجب برانگیز نیست زیرا در بخش ۲ ـ ۳ هیچگونه پیش‌شرطی را بر پایداری سیستم تحمیل نکرده‌ایم. در این بخش با استفاده از قضیهٔ ۵ ـ ۱ به محاسبهٔ کران خطای بین

1. Compact time interval

پاسخهای (۵ ـ ۵۱) و (۵ ـ ۵۲) می‌پردازیم که برای همهٔ مقادیر $t \ge t_0$ و به طور یکنواخت نسبت به t اعتبار داشته باشد.

قضیهٔ ۵ ـ ۳ *فرض کنید* $D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$ *و فرضیات ذیل به ازای جمیع مقادیر* $(t,x) \in [0,\infty) \times D$ *برقرار باشد:*

- *تابع* $f(t,x)$ *پیوسته ـ مشتق‌پذیر و ماتریس ژاکوبی* $\partial f/\partial x$ *نسبت به* x*، به طور یکنواخت نسبت به* t *کراندار و لیپ شیتز است؛*
- *مبدأ* $x=0$*، نقطهٔ تعادل پایدار نمایی سیستم نامی (۵ ـ ۵۱) است؛*
- *جملهٔ آشفتگی* $g(t,x)$ *نسبت به* t *پیوستهٔ قطعه‌ای و نسبت به* x *لیپ شیتز محلی است و ضمناً در شرط ذیل نیز صدق می‌کند:*

$$\|g(t,x)\| \le \delta, \qquad \forall t \ge t_0 \ge 0, \qquad \forall x \in D \qquad (۵۴ ـ ۵)$$

علاوه بر این فرض کنید $y(t)$ *و* $z(t)$ *بترتیب پاسخهای سیستم نامی (۵ ـ ۵۱) و سیستم آشفتهٔ (۵ ـ ۵۲) باشد؛ در این‌صورت ثابتهای مثبت* β*،* γ*،* η*،* λ *و* k*(مستقل از* δ*) چنان یافت می‌شوند که اگر شروط* $\delta < \eta$*،* $\|y(t_0)\| < \lambda$ *و* $\|z(t_0)-y(t_0)\| < \mu$ *برقرار باشد، آنگاه به‌ازای جمیع مقادیر* $t \ge t_0 \ge 0$*، پاسخهای* $y(t)$ *و* $z(t)$ *کراندار یکنواخت است و داریم:*

$$\|z(t)-y(t)\| \le ke^{-\gamma(t-t_0)}\|z(t_0)-y(t_0)\| + \beta\delta \qquad (۵۵ ـ ۵)$$ ◇

برهان: باتوجه به پایداری نمایی مبدأ، می‌توان ثابتهای مثبت $r > \rho$ و $\lambda \le \rho$ را چنان یافت که:

$$\|y(t_0)\| < \lambda \Rightarrow \|y(t)\| < \rho, \qquad \forall t \ge t_0$$

خطای $e(t) = z(t) - y(t)$ در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{z} - \dot{y}\\ &= f(t,z) + g(t,z) - f(t,y)\\ &= f(t,e) + \Delta F(t,e) + g(t,z) \qquad (۵۶ ـ ۵)\end{aligned}$$

که:

$$\Delta F(t,e) = f(t,y(t)+e) - f(t,y(t)) - f(t,e)$$

حال با توجه به:

$$\|e\| < r-\rho \Rightarrow \|e+y\| < r$$

به تحلیل معادلهٔ خطای (۵ ـ ۵۶) روی‌گوی $\{\|e\| < r-\rho\}$ می‌پردازیم. می‌توان معادلهٔ (۵ ـ ۵۶) را به عنوان آشفتگی سیستم $\dot{e} = f(t,e)$ در حالتی در نظر گرفت که مبدأ آن پایدار نمایی باشد. بنا به قضیهٔ ۳ ـ ۱۲، می‌توان تابع لیاپانوف $V(t,e)$ را چنان تعریف کرد که به ازای مقادیر $\rho < r_0 < r$ $\|e\| < r_0$ در روابط (۵ ـ ۳) ـ (۵ ـ ۵) صدق نماید. طبق قضیهٔ مقدار میانگین، جملهٔ خطای ΔF_i عبارت است از:

$$\Delta F_i(t,e) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(t,\lambda_1 e+y) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(t,\lambda_2 e)\right] e$$

که $0 < \lambda_i < 1$ است. چون ماتریس ژاکوبی $[\partial f/\partial x]$ نسبت به x و به طور یکنواخت نسبت به t، لیپ شیتز می‌باشد، می‌توان نوشت:

$$\|\Delta F\| \le L_1 \|e\|_2^2 + L_2 \|e\| \|y(t)\|$$

بنابراین جملهٔ آشفتگیِ $(\Delta F + g)$ در رابطهٔ ذیل صادق است:

$$\|\Delta F(t,e) + g(t,z)\| \le L_1 \|e\|^2 + L_2 \|e\| k_1 \exp[-\gamma_1(t-t_0)] + \delta$$

در رابطهٔ فوق از این نکته استفاده کرده‌ایم که پاسخ سیستم نامی سریعاً به صورت نمایی به سمت صفر سوق می‌یابد. حال به ازای جمیع مقادیر $\|e\| \le r_1 < r_0$ داریم:

$$\|\Delta F(t,e) + g(t,z)\| \le \{L_1 r_1 + L_2 k_1 \exp[-\gamma_1(t-t_0)]\} \|e\| + \delta$$

این نامساوی به ازای مقادیر ذیل به شکل عبارت (۵ ـ ۴۰) در می‌آید:

$$\gamma(t) = \{L_1 r_1 + L_2 k_1 \exp[-\gamma_1(t-t_0)]\} \text{ و } \delta(t) \equiv \delta$$

شرط (۵ ـ ۴۵) نیز برقرار است زیرا می‌توان نوشت:

$$\int_{t_0}^{t} \gamma(\tau)\, d\tau \le L_1 r_1 (t-t_0) + \frac{L_2 k_1}{\gamma_1}$$

حال با انتخاب مقدار کوچکی برای r_1، شرط (۵ ـ ۴۶) نیز برآورده می‌شود، بنابراین تمامی فرضیات لم ۵ ـ ۷ برقرار است و نامساوی (۵ ـ ۵۵) از رابطهٔ (۵ ـ ۴۸) به دست می‌آید. □

۵ ـ ۶ سیستمهای به‌هم پیوسته

به هنگام بررسی پایداری سیستمهای دینامیکی غیرخطی، هر چه مرتبهٔ سیستم افزایش می‌یابد، پیچیدگی تحلیل نیز بیشتر می‌شود، از این رو به دنبال آنیم تا راههایی برای ساده کردن تحلیلها بیابیم. چنانچه بتوان سیستم را به شکل اتصال دو زیر سیستم با مرتبهٔ پایین‌تر در نظر گرفت، آنگاه می‌توان پایداری سیستم را در دو گام مورد بررسی قرار داد: در نخستین گام، با چشمپوشی از اتصال، سیستم را به دو زیر سیستم مجزّا تفکیک و پایداری هر یک از آن دو زیر سیستم را بررسی می‌کنیم. درگام دوم نتایج حاصل ازگام اول را با اطلاعات مربوط به اتصال دو سیستم در هم می‌آمیزیم تا به نتایج واقعی در مورد پایداری سیستمِ به هم پیوسته دست یابیم. در این بخش نشان خواهیم داد چگونه می‌توان از این ایده برای یافتن توابع لیاپانوف مورد نیاز برای سیستمهای به هم پیوسته بهره جُست.

سیستم به هم پیوستهٔ ذیل را در نظر بگیرید.

$$\dot{x}_i = f_i(t,x_i) + g_i(t,x), \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (۵۷ ـ ۵)$$

که $x_i(\cdot) \in R^{n_i}$، $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$ و $x = (x_1^T, \ldots, x_m^T)$است. فرض کنید توابع $f_i(\cdot,\cdot)$ و $g_i(\cdot,\cdot)$ آنقدر هموارند که تضمین‌کنندهٔ وجود و یکتایی پاسخ برای همهٔ شروط اولیه (در قلمرو مشخصی) باشد، ضمناً فرض کنید داشته باشیم:

$$f_i(t,0) = 0, \qquad g_i(t,0) = 0, \qquad \forall i$$

یعنی مبدأ $x = 0$، نقطهٔ تعادل سیستم است. هدف، مطالعهٔ پایداری نقطهٔ تعادل $x = 0$ به کمک شیوهٔ لیاپانوف می‌باشد. با چشمپوشی از جمله‌های اتصال $g_i(\cdot,\cdot)$، می‌توان سیستم را به m زیرسیستم مجزّا تفکیک نمود:

$$\dot{x}_i = f_i(t,x_i) \qquad (۵۸ ـ ۵)$$

که هر یک از آنها دارای نقطهٔ تعادلی در مبدأ $x_i = ۰$ باشد. اکنون کار را با جستجو برای یافتن تابع لیاپانوفی دنبال می‌کنیم که ضامن پایداری مجانبی یکنواخت برای هر یک از مبدأهای زیرسیستمهای مجزّا باشد. فرض کنید چنین جستجویی موفقیت‌آمیز باشد و برای هر زیرسیستم، تابع لیاپانوف معیّن مثبت و کاهشی به شکل $V_i(t,x_i)$ یافت شود که که مشتقش در امتداد مسیرهای حالت زیر سیستم مجزّای (۵ ـ ۵۸)، معیّن منفی باشد. در این صورت تابع:

$$V(t,x) = \sum_{i=۱}^{m} d_i V_i(t,x_i), \quad d_i > ۰$$

تابع مرکّب لیاپانوف[1] برای مجموعهٔ m زیر سیستم مجزّا و به ازای همهٔ مقادیر ثابت و مثبت d_i می‌باشد. با ملاحظهٔ سیستم به هم پیوستهٔ (۵ ـ ۵۷) به عنوان آشفتهٔ زیرسیستمهای مجزّای (۵ ـ ۵۸)، منطقی است $V(t,x)$ را به عنوان نامزد تابع لیاپانوف سیستم (۵ ـ ۵۷) در نظر بگیریم؛ مشتق تابع $V(t,x)$ در امتداد مسیرهای حالت (۵ ـ ۵۷) به شکل زیر بیان می‌گردد:

$$\dot{V}(t,x) = \sum_{i=۱}^{m} d_i \left[\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i}{\partial x_i} f_i(t,x_i) + \frac{\partial V_i}{\partial x_i} g_i(t,x) \right]$$

جملهٔ:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i}{\partial x_i} f_i(t,x_i)$$

معیّن منفی است (با توجه به این نکته که V_i تابع لیاپانوف iاُمین زیرسیستم مجزّاست)، اما جملهٔ:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} g_i(t,x)$$

در حالت کلّی، نامعیّن است. چنین حالتی مشابه با ارزیابی اولیه‌مان از سیستمهای آشفته (بخش ۵ ـ ۱) می‌باشد، بنابراین مسأله را در بدترین حالت در نظر می‌گیریم یعنی حالتی که به جای جملهٔ $g_i\,[\partial V_i / \partial x_i]$ از کران بالای غیرمنفی آن استفاده شود. حال این ایده را به کمک توابع لیاپانوف نوع مجذوری (بخش ۵ ـ ۱) تشریح می‌نماییم. فرض کنید داشته باشیم: $B = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$ و $V_i(t,x_i)$ نیز برای مقادیر $i = ۱, ۲, \dots, m$ در روابط ذیل

1. Composite Lyapunov's function

صدق کند:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i}{\partial x_i} f_i(t,x_i) \le -\alpha \phi_i^{۲}(x_i) \qquad (۵ ـ ۵۹)$$

$$\left\| \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right\| \le \beta_i \phi_i(x_i) \qquad (۵ ـ ۶۰)$$

که $\phi_i : R^{n_i} \longrightarrow R$ تابعی پیوسته و معیّن مثبت می‌باشد. علاوه بر این فرض کنید جمله‌های اتصال $g_i(t,x)$ نیز به ازای جمیع مقادیر $(t,x) \in [۰, \infty) \times B$ در رابطهٔ ذیل صدق نمایند:

$$\|g_i(t,x)\| \le \sum_{j=۱}^{m} \gamma_{ij} \phi_j(x_j) \qquad (۵ ـ ۶۱)$$

که γ_{ij} ثابتهایی غیرمنفی است. در این صورت برای مشتق تابع $V(t,x) = \sum_{i=۱}^{m} d_i V_i(t,x_i)$ در امتداد مسیرهای حالت سیستم به هم پیوستهٔ (۵ ـ ۵۷) داریم:

$$\dot{V}(t,x) \le \sum_{i=۱}^{m} d_i \left[-\alpha \phi_i^{۲}(x_i) + \sum_{j=۱}^{m} \beta_i \gamma_{ij} \phi_i(x_i) \phi_j(x_j) \right]$$

سمت راست عبارت فوق، نسبت به $\phi_۱, \dots, \phi_m$ به شکل مجذوری است و می‌توان آن را به شکل زیر باز نوشت:

$$\dot{V}(t,x) \le -\frac{۱}{۲} \phi^T (DS + S^T D) \phi$$

که:

$$\phi = (\phi_۱, \dots, \phi_m)^T$$

$$D = diag\,(d_۱, \dots, d_m)$$

S نیز ماتریس مربعی با ابعاد $m \times m$ است که درایه‌هایش به شکل ذیل تعریف می‌شود:

$$s_{ij} = \begin{cases} \alpha_i - \beta_i \gamma_{ii}, & i = j \\ -\beta_i \gamma_{ij}, & i \ne j \end{cases} \qquad (۵ ـ ۶۲)$$

چنانچه ماتریس قطری مثبت[1] چنان یافت شود که داشته باشیم:

1. Positive diagonal matrix

$$DS + S^T D > 0$$

آنگاه تابع $\dot{V}(t,x)$، معیّن منفی خواهد بود زیرا $\phi(x) = 0$ است اگر و تنها اگر $x = 0$ باشد (به یاد داشته باشید که $\phi_i(x_i)$ تابعی معیّن مثبت از x_i می‌باشد)؛ بنابراین شرط کافی برای اینکه مبدأ، نقطهٔ تعادل پایدار مجانبیِ یکنواخت سیستمِ به هم پیوسته باشد، این است که بتوان ماتریس قطری مثبت D را چنان یافت که ماتریس $DS + S^T D$ معیّن مثبت باشد. ماتریس S در حالتی که درایه‌های برون قطری‌اش[1] غیرمثبت است، ماتریس خاصی می‌باشد؛ لم ذیل مشخصات چنین ماتریسی را بیان می‌کند:

لم ۵ ـ ۱۰ *ماتریس قطری مثبت D، که به ازای آن عبارت $DS + S^T D$ معیّن مثبت باشد، وجود دارد اگر و تنها اگر S، ماتریس M[2] باشد یعنی کهاد پیشرو اصلی S مثبت باشد:*

$$\diamond \qquad det \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1k} \\ s_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ s_{k1} & \cdots & \cdots & s_{kk} \end{bmatrix} > 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

برهان: [۴۸] را ملاحظه کنید.

ویژگی وجود ماتریس M را می‌توان بدین ترتیب تعبیر کرد که باید درایه‌های قطری ماتریس S «در مجموع» بزرگتر از درایه‌های برون قطری‌اش باشد. می‌توان نشان داد ماتریسهای غالب قطری[3] با درایه‌های برون‌قطریِ غیرمثبت، ماتریس M هستند (تمرین ۵ ـ ۳۴). درایه‌های قطری S اندازه‌ای از «درجهٔ پایداری[4]» را در زیر سیستمهای مجزّا بیان می‌کند؛ بدین معنا که ثابت α_i نشاندهندهٔ کران پایین آهنگ کاهش تابع لیاپانوف V_i نسبت به $\phi_i^2(x_i)$ می‌باشد. درایه‌های برون قطری S بیانگر «قوّت اتصال[5]» است به تعبیر دیگر نشاندهندهٔ کران بالای $g_i(t,x)$ نسبت به $\phi_j(x_j)$ $(j = 1, \ldots, m)$ می‌باشد. بنابراین شرط ماتریس M بدین معناست که اگر درجهٔ

1. Off - diagonal
2. M - matrix
3. Diagonally dominant matrix
4. Degree of stability
5. Strength of the interconnection

پایداری در زیر سیستمهای مجزّا در مجموع بزرگتر از قوّت اتصال باشد، آنگاه مبدأ، نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی یکنواخت سیستم به هم پیوسته خواهد بود. این نتیجه را در قضیهٔ ذیل خلاصه می‌کنیم:

قضیهٔ ۵ ـ ۴ *سیستم (۵ ـ ۵۷) را در نظر بگیرید و فرض کنید توابع لیاپانوف معیّن مثبت و کاهشیِ $V_i(t,x_i)$ چنان وجود داشته باشد که در روابط (۵ ـ ۵۹) ـ(۵ ـ ۶۰) صدق کند، ضمناً توابع $g_i(t,x)$ نیز در مجموعهٔ $B \times (0, \infty]$، در رابطهٔ (۵ ـ ۶۱) صدق می‌نماید. در این صورت اگر ماتریس S با تعریف (۵ ـ ۶۲)، ماتریس M باشد آنگاه $x = 0$، نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی یکنواخت سیستم خواهد بود. علاوه بر این اگر همهٔ فرضیات به طور جامع برآورده گردند و توابع $V_i(t,x_i)$ نیز بیکران شعاعی باشد مبدأ، نقطهٔ تعادل مجانبیِ یکنواخت جامع خواهد بود.* ◇

مثال ۵ ـ ۱۰ سیستم مرتبهٔ پنجم ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{z}_k = -\rho_k z_k + \sigma, \qquad k = 1, 2, 3, 4$$

$$\dot{\sigma} = \sum_{k=1}^{4} \eta_k z_k - \xi\sigma - h(\sigma)$$

که $\rho_k > 0$، $\xi > 0$ و η_k مقادیری ثابت و x_k و σ نیز متغیرهایی عددی هستند. تابع $h : R \longrightarrow R$ لیپ شیتز محلی است و داریم: $h(0) = 0$ و $\sigma h(\sigma) > 0$ $\forall \sigma \neq 0$. این سیستم دارای نقطهٔ تعادلی در مبدأ می‌باشد. برای بررسی پایداری این نقطهٔ تعادل، سیستم را به شکل اتصال دو زیر سیستم مجزّا در نظر می‌گیریم؛ زیر سیستم اول عبارت است از:

$$\dot{z}_k = -\rho_k z_k, \qquad k = 1, 2, 3, 4$$

دومین زیر سیستم نیز برابر است با:

$$\dot{\sigma} = -\xi\sigma - h(\sigma)$$

می‌توان این سیستم را همراه با مقادیر زیر به شکل رابطهٔ (۵ ـ ۵۷) درآورد:

$$x_1 = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T, \quad x_2 = \sigma$$

$$f_1(x_1) = -A_1 x_1, \quad A_1 = diag(p_1, p_2, p_3, p_4)$$

$$f_2(x_2) = -\zeta x_2 - h(x_2)$$

$$g_1(x_2) = \ell^T x_2, \quad \ell^T = [1, 1, 1, 1], \quad g_2(x_1) = \eta^T x_1$$

که: $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)^T$. تابع لیاپانوف مناسب برای زیر سیستم اول را به شکل $V_1(x_1) = \frac{1}{2} x_1^T x_1$ تعریف می‌کنیم که به ازای مقادیر ذیل در روابط (۵ ـ ۵۹) ـ (۵ ـ ۶۰) صدق می‌نماید.

$$\alpha_1 = \rho_{min} \triangleq min\{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\}, \quad \beta_1 = 1, \quad \phi_1(x_1) = \|x_1\|_2$$

تابع لیاپانوف مناسب برای زیر سیستم دوم نیز به شکل $V_2(x_2) = \frac{1}{2} x_2^2$ تعریف می‌شود که به ازای مقادیر ذیل در روابط (۵ ـ ۵۹) ـ (۵ ـ ۶۰) صادق است:

$$\alpha_2 = \zeta, \quad \beta_2 = 1, \quad \phi_2(x_2) = |x_2|$$

(در اینجا از ویژگی $\sigma h(\sigma) \geq 0$ استفاده کرده‌ایم). جمله‌های اتصال نیز به ازای مقادیر زیر، رابطهٔ (۵ ـ ۶۱) را برآورده می‌کند:

$$\gamma_{11} = 0 \qquad \gamma_{12} = \|\ell\|_2 = 2$$

$$\gamma_{21} = \|\eta\|_2 \quad \gamma_{22} = 0$$

شایان ذکر اینکه روابط (۵ ـ ۵۹) ـ (۵ ـ ۶۱) به طور جامع برقرار است. علاوه بر این ماتریس S با تعریف:

$$S = \begin{bmatrix} \rho_{min} & -2 \\ -\|\eta\|_2 & \zeta \end{bmatrix}$$

و با شرط: $\frac{1}{2}\zeta\rho_{min} > \|\eta\|_2$، ماتریس M است.

بنابراین نتیجه می‌شود چنانچه ضرایب اتصال η_1 تا η_4 آنقدر کوچک باشند که نامساویهای پیشگفته را برآورده کنند، آنگاه مبدأ پایدار مجانبی می‌باشد؛ البته در حقیقت در این مثال، مبدأ پایدار نمایی است (تمرین ۵ ـ ۳۵ را ملاحظه کنید). Δ

مثال ۵ ـ ۱۱ سیستم مرتبهٔ دوم زیر مفروض است:

$$\dot{x}_1 = -x_1 - 1/5 x_1^2 x_2^3$$

$$\dot{x}_2 = -x_2^3 + 0/5 x_1^2 x_2^2$$

می‌توان با لحاظ تعاریف ذیل، سیستم را به شکل معادلهٔ (۵ ـ ۵۷) در نظر گرفت:

$$f_1(x_1) = -x_1, \qquad g_1(x) = -1/5 x_1^2 x_2^3$$

$$f_2(x_2) = -x_2^3, \qquad g_2(x) = 0/5 x_1^2 x_2^2$$

زیرسیستم مجزّای اول ($\dot{x}_1 = -x_1$) دارای تابع لیاپانوف $V_1(x_1) = \frac{1}{2} x_1^2$ است که در رابطهٔ ذیل صدق می‌کند:

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} f_1(x_1) = -x_1^2 = -\alpha_1 \phi_1^2(x_1)$$

که: $\alpha_1 = 1$ و $\phi_1(x_1) = |x_1|$ می‌باشد. دومین زیر سیستم مجزّا ($\dot{x}_2 = -x_2^3$) دارای تابع لیاپانوف $V_2(x_2) = \frac{1}{4} x_2^4$ است که در عبارت زیر صادق است:

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_2} f_2(x_2) = -x_2^6 = -\alpha_2 \phi_2^2(x_2)$$

که: $\alpha_2 = 1$ و $\phi_2(x_2) = |x_2|^3$ می‌باشد. این دو تابع لیاپانوف به ازای $\beta_1 = \beta_2 = 1$، عبارت (۵ ـ ۶۰) را برآورده می‌کنند. جملهٔ اتصال $g_1(x)$ نیز برای جمیع مقادیر $|x_1| \leq c_1$ در عبارت زیر صدق می‌نماید:

$$|g_1(x)| = 1/5 x_1^2 |x_2|^3 \leq 1/5 c_1^2 \phi_2(x_2)$$

در حالی که برای جملهٔ اتصال $g_2(x)$ (و به ازای جمیع مقادیر $|x_1| \leq c_1$ و $|x_2| \leq c_2$) داریم:

$$|g_2(x)| = 0/5x_1^2x_2^2 \le 0/5c_1c_2^2\phi_1(x_1)$$

بنابراین چنانچه توجه خود را به مجموعهٔ G با تعریف زیر معطوف کنیم:

$$G = \{x \in R^2 \mid |x_1| \le c_1,\ |x_2| \le c_2\}$$

نتیجه می‌شود جمله‌های اتصال به ازای مقادیر ذیل در رابطهٔ (۵ ـ ۶۱) صدق می‌کنند:

$$\gamma_{11} = 0 \qquad \gamma_{12} = 1/5c_1^2$$

$$\gamma_{21} = 0/5c_1c_2^2 \qquad \gamma_{22} = 0$$

ماتریس:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1/5c_1^2 \\ -0/5c_1c_2^2 & 1 \end{bmatrix}$$

با شرط $0/75\,c_1^3c_2^2 < 1$، ماتریس M می‌باشد (برای برآوردن شرط پیشگفته کافی است داشته باشیم: $c_1 = c_2 = 1$). بنابراین مبدأ پایدار مجانبی است. حال اگر علاقه‌مند به تخمین ناحیهٔ جذابیت مبدأ باشیم، لازم است تابع مرکّب لیاپانوف $V = d_1V_1 + d_2V_2$ را بیابیم، یعنی باید ماتریس قطری مثبت D را چنان پیدا کنیم که داشته باشیم:

$$DS + S^TD > 0$$

با انتخاب $c_1 = c_2 = 1$، داریم:

$$DS + S^TD = \begin{bmatrix} 2d_1 & -1/5d_1 - 0/5d_2 \\ -1/5d_1 - 0/5d_2 & 2d_2 \end{bmatrix}$$

که برای مقادیر $1 < d_2/d_1 < 9$ معیّن مثبت است. با توجه به اینکه ضرب ثابت مثبتی در تابع لیاپانوف هیچ تأثیری بر کلیّت بحث ندارد، لذا با انتخاب $d_1 = 1$، تابع مرکّب لیاپانوف را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}d_2x_2^4, \qquad 1 < d_2 < 9$$

در این صورت تخمین ناحیهٔ جذابیت عبارت است از:

$$\Omega_c = \{x \in R^2 \mid V(x) \le c\}$$

مقدار c آنقدر کوچک انتخاب می‌شود که مجموعهٔ Ω_c درون مربع $|x_i| < 1$ جای گیرد. بسادگی می‌توان ملاحظه کرد که مقدار c باید در شرط $c < min\{\frac{1}{2}, \frac{d_2}{4}\}$ نیز بگنجد، بنابراین برای بیشینه کردن مقدار c باید داشته باشیم: $d_2 \ge 2$. از سوی دیگر مقادیر بزرگ d_2 موجب منقبض شدن ناحیهٔ جذابیت در جهت محور x_2 می‌گردد؛ از این رو مقدار d_2 را برابر با ۲ و مقدار c را برابر با $\frac{1}{2}$ برمی‌گزینیم تا به تخمین ذیل برای ناحیهٔ جذابیت برسیم:

$$\Omega_{0/5} = \{x \in R^2 \mid x_1^2 + x_2^4 \le 1\} \qquad \Delta$$

مثال ۵ ـ ۱۳ مدل ریاضی نمونه‌ای از شبکهٔ عصبی مصنوعی در بخش ۱ ـ ۱ ـ ۵ و ویژگیهای پایداری‌اش (به کمک اصل پایایی لاسَل) در مثال ۳ ـ ۱۱ مطرح شد. یکی از فرضهای کلیدی در مثال ۳ ـ ۱۱ این بود که شرط تقارن (یعنی $T_{ij} = T_{ji}$) برقرار باشد تا بدین ترتیب بتوان سمت راست معادلهٔ حالت را به شکل گرادیان یک تابع عددی نمایش داد. اینک فرض کنید چنین شرطی وجود نداشته باشد (یعنی $T_{ij} \ne T_{ji}$)؛ در این صورت می‌توان ویژگیهای پایداری شبکه را با لحاظ کردن آن به شکل اتصال دو زیرسیستم بررسی کرد که هر یک از این زیرسیستمها متناظر با یک نُرون باشد. در اینجا راحت‌تریم ولتاژ را به عنوان ورودی تقویت‌کننده (u_i) در نظر بگیریم؛ در این صورت معادلات حرکت به شکل ذیل درمی‌آید:

$$C_i\dot{u}_i = \sum_j T_{ij}g_j(u_j) - \frac{1}{R_i}u_i + I_i$$

که $i = 1, 2, \dots, n$، $g_i(\cdot)$ توابع سیگموید، I_i ورودیهای جریان (ثابت)، $R_i > 0$ و $C_i > 0$ می‌باشد. فرض می‌کنیم سیستم دارای تعداد معدودی نقطهٔ تعادلِ تنها باشد. هر یک از این نقاط (u^*) در معادلهٔ زیر صدق می‌نماید:

$$0 = \sum_j T_{ij}g_j(u_j^*) - \frac{1}{R_i}u_i^* + I_i$$

برای بررسی ویژگیهای پایداری یکی از این نقاط تعادل، آن را به مبدأ انتقال می‌دهیم، در این

صورت با فرض $x_i = u_i - u_i^*$ داریم:

$$\dot{x_i} = \frac{1}{C_i}\dot{u_i} = \frac{1}{C_i}\left[\sum_j T_{ij} g_j\,(x_j + u_j^*) - \frac{1}{R_i}(x_i + u_i^*) + I_i\right]$$

$$= \frac{1}{C_i}\left[\sum_j T_{ij}\,(g_j(x_j + u_j^*) - g_j(u_j^*)) - \frac{1}{R_i}x_i\right]$$

با تعریف: $$\eta_i(x_i) = g_i(x_i + u_i^*) - g_i(u_i^*)$$

معادلهٔ حالت را به شکل زیر باز می‌نویسیم:

$$\dot{x_i} = \frac{1}{C_i}\left[\sum_j T_{ij}\eta_j(x_j) - \frac{1}{R_i}x_i\right]$$

حال فرض کنید $\eta_i(\cdot)$ در شرط قطاعی[1] زیر صدق کند:

برای: $\sigma^2 k_{i1} \le \sigma\eta_i(\sigma) \le \sigma^2 k_{i2}, \qquad \sigma \in [-r_i, r_i]$

که k_{i1} و k_{i2} ثابتهای مثبتی هستند. شکل ۵ ـ ۱ نشان می‌دهد این شرط قطاعی زمانی واقعاً برآورده می‌شود که:

$$g_i(u_i) = \frac{2V_M}{\pi}\tan^{-1}\frac{\lambda\pi u_i}{2V_M}, \qquad \lambda > 0$$

بدین ترتیب می‌توان با تعریف عبارتهای ذیل، این سیستم را به شکل (۵ ـ ۵۷) درآورد:

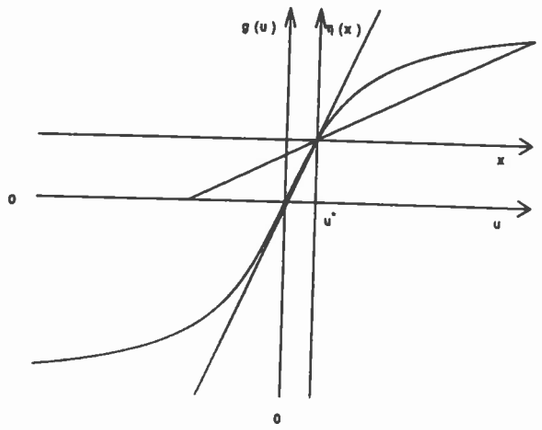
$$f_i(x_i) = -\frac{1}{C_i R_i}x_i + \frac{1}{C_i}T_{ii}\eta_i(x_i)$$

$$g_i(x) = \frac{1}{C_i}\sum_{j\neq i} T_{ii}\eta_j(x_j)$$

و زیرسیستمهای مجزّا برابر خواهد شد با:

1. Sector condition

$$\dot{x_i} = f_i(x_i) = -\frac{1}{C_i R_i}x_i + \frac{1}{C_i}T_{ii}\eta_i(x_i)$$



شکل ۵ ـ ۱ غیرخطی گری قطاعی $\eta_i(x_i)$ در مثال ۵ ـ ۱۲

حال با استفاده از تابع: $V_i(x_i) = \frac{1}{2}C_i x_i^2$ به عنوان نامزد تابع لیاپانوف نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i}f_i(x_i) = -\frac{1}{R_i}x_i^2 + T_{ii}x_i\eta_i(x_i)$$

با شرط $T_{ii} \le 0$ داریم:

$$T_{ii}x_i\eta_i(x_i) \le -|T_{ii}|\,k_{i1}\,x_i^2$$

و: $$\frac{\partial V_i}{\partial x_i}f_i(x_i) \le -\left(\frac{1}{R_i} + |T_{ii}|\,k_{i1}\right)x_i^2$$

که معیّن منفی است. اگر $T_{ii} > 0$ باشد، آنگاه می‌توان نوشت:

$$T_{ii}x_i\eta_i(x_i) \le T_{ii}k_{i2}x_i^2$$

و: $$\frac{\partial V_i}{\partial x_i}f_i(x_i) \le -\left(\frac{1}{R_i} - T_{ii}k_{i2}\right)x_i^2$$

در این حالت نیز با فرض $T_{ii}k_{i۲} < ۱ / R_i$، تابع مشتق V_i معیّن منفی است. برای ساده‌نگاری نمادها می‌توان نوشت:

$$\delta_i = \begin{cases} |T_{ii}|k_{i۱}, & T_{ii} \le ۰ \\ -T_{ii}k_{i۲}, & T_{ii} > ۰ \end{cases}$$

در این صورت $V_i(x_i)$ به ازای مقادیر ذیل و بر بازهٔ $[-r_i, r_i]$ در روابط (۵ ـ ۵۹) ـ (۵ ـ ۰) صدق می‌کند:

$$\alpha_i = \left(\frac{۱}{R_i} + \delta_i\right), \qquad \beta_i = C_i, \qquad \phi_i(x_i) = |x_i|$$

که α_i، بنا به فرض، مثبت است. برای جملهٔ اتصال $g_i(x)$ نیز داریم:

$$|g_i(x)| \le \frac{۱}{C_i}\sum_{j\neq i} |T_{ij}\|\eta_j(x_j)| \le \frac{۱}{C_i}\sum_{j\neq i} |T_{ij}|k_{j۲}|x_j|$$

در نتیجه به ازای مقادیر $\gamma_{ii} = ۰$ و $\gamma_{ij} = k_{j۲}|T_{ij}| / C_i$ $(i \neq j)$، تابع $g_i(x)$ در رابطهٔ (۵ ـ ۶۱) صدق می‌نماید. اکنون می‌توان ماتریس S را با درایه‌های ذیل تشکیل داد:

$$s_{ij} = \begin{cases} \frac{۱}{R_i} + \delta_i, & i = j \\ -|T_{ij}|k_{j۲}, & i \neq j \end{cases}$$

نقطهٔ تعادل u^* پایدار مجانبی است اگر S ماتریس M باشد؛ در این صورت می‌توان ناحیهٔ جذابیت را با تخمین زیر نمایش داد:

$$\Omega_c = \left\{ x \in R^n \;\middle|\; \sum_{i=۱}^{n} d_i V_i(x_i) \le c \right\}$$

مقدار c آنقدر کوچک انتخاب می‌شود تا تضمین کند Ω_c درون مجموعهٔ $|x_i| \le r_i$ است. همین روند را می‌توان برای هر نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی دیگر نیز تکرار کرد. شایان ذکر اینکه نتایج حاصل از این تحلیل بسیار محافظه‌کارانه‌تر از نتایج حاصل از بکارگیری اصل پایایی لاسَل می‌باشد؛ زیرا اولاً باید اندازهٔ ضرایب T_{ij} را چنان انتخاب کرد که در شرط ماتریس M صدق کند،

ثانیاً در اینجا فقط می‌توان به تخمینی محلی از ناحیهٔ جذابیت در مورد هر یک از نقاط تعادلِ تنها دست یافت و اجتماع این نواحی تمامی قلمرو موردنظر را نمی‌پوشاند. لیکن مزیت این روش آن است که نیازی به فرض $T_{ij} = T_{ji}$ نیست. Δ

۵ ـ ۷ سیستمهای متغیر آرام

سیستم ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x, u(t)) \qquad (۵ ـ ۶۳)$$

که: $\forall t \ge ۰ \;\; u(t) \in \Gamma \subset R^m, x \in R^n$. این سیستم را متغیر آرام[1] گوییم اگر $u(t)$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر و $\|\dot{u}(t)\|$ «به اندازهٔ کافی» کوچک باشد. مؤلفه‌های $u(t)$ عبارت است از: متغیرهای ورودی یا پارامترهای متغیر بازمان. در تحلیل معادلهٔ (۵ ـ ۶۳)، معمولاً u را به عنوان پارامتر «منجمد[2]» در نظر می‌گیرند و فرض می‌کنند برای هر مقدار مشخص $u = \alpha \in \Gamma$ سیستم منجمد[3] دارای نقطهٔ تعادل تنهایی است که با معادلهٔ $x = h(\alpha)$ تعریف می‌شود. چنانچه ویژگی $x = h(\alpha)$ نسبت به α یکنواخت باشد منطقاً انتظار داریم سیستم متغیر آرامِ (۵ ـ ۶۳) دارای رفتار مشابهی باشد. یکی از ویژگیهای چنین سیستمی آن است که تحریک ناشی از تغییر شروط اولیه بسیار سریعتر از تحریک ناشی از ورودیها و یا پارامترهای متغیر بازمان بر سیستم اثر می‌گذارد. در این بخش به بررسی این موضوع می‌پردازیم که چگونه می‌توان از روش پایداری لیاپانوف برای تحلیل سیستمهای متغیر آرام بهره جُست.

فرض کنید تابع $f(x,u)$ روی $R^n \times \Gamma$، لیپ شیتز محلی باشد و معادلهٔ $f(x,u) = ۰$ نیز به ازای هر مقدار $u \in \Gamma$ دارای ریشهٔ تنهای پیوسته ـ مشتق‌پذیرِ $x = h(u)$ باشد، یعنی:

$$۰ = f(h(u), u)$$

علاوه بر این فرض کنید داشته باشیم:

$$\left\| \frac{\partial h}{\partial u} \right\| \le L, \qquad \forall u \in \Gamma \qquad (۵ ـ ۶۴)$$

---

1. Slowly varying
2. Frozen
3. Frozen system

برای تحلیل ویژگیهای پایداری نقطهٔ تعادل منجمد $x = h(\alpha)$، با انتقال آن به مبدأ (به کمک تغییر متغیر $z = x - h(\alpha)$) می‌توان نوشت:

$$\dot{z} = f(z + h(\alpha), \alpha) \triangleq g(z, \alpha) \qquad (۶۵ - ۵)$$

اینک به دنبال تابع لیاپانوفی هستیم که به کمک آن بتوان نشان داد نقطهٔ $z = ۰$ پایدار مجانبی است. از آنجا که $g(z, \alpha)$ به پارامتر α بستگی دارد تابع لیاپانوف مناسب نیز در حالت کلّی وابسته به α خواهد بود. فرض کنید بتوان تابع لیاپانوف $V(z, \alpha)$ را چنان یافت که در شروط ذیل صدق نماید:

$$c_۱ \|z\|^۲ \le V(z, \alpha) \le c_۲ \|z\|^۲ \qquad (۶۶ - ۵)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} g(z, \alpha) \le - c_۳ \|z\|^۲ \qquad (۶۷ - ۵)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial z} \right\| \le c_۴ \|z\| \qquad (۶۸ - ۵)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right\| \le c_۵ \|z\|^۲ \qquad (۶۹ - ۵)$$

که $z \in D = \{z \in R^n \mid \|z\| < r\}$، $\alpha \in \Gamma$ و c_i $(i = ۱, ۲, \dots, ۵)$ نیز ثابتهایی مثبت هستند. نامساویهای (۵ ـ ۶۶) و (۵ ـ ۶۷) بیان می‌کند تابع V معیّن مثبت، کاهشی و مشتق آن نیز در امتداد مسیرهای حالت سیستم (۵ ـ ۶۵) معیّن منفی است. ضمناً این روابط نشان می‌دهد مبدأ $z = ۰$ پایدار مجانبی می‌باشد. تنها نکتهٔ خاص آن است که این نامساویها به طور یکنواخت نسبت به α برقرارند. نامساویهای (۵ ـ ۶۸) و (۵ ـ ۶۹) برای بررسی آشفتگیهای معادلهٔ(۵ ـ ۶۵) لازم است و از این واقعیت ناشی می‌شود که $u(t)$ ثابت نیست بلکه تابعی متغیر با زمان می‌باشد. لم ذیل نشان می‌دهد اگر نقطهٔ تعادل $z = ۰$، نسبت به α پایدار نمایی یکنواخت باشد آنگاه تحت شرایط ضعیفی در مورد هموار بودن، می‌توان تابع لیاپانوفی یافت که در روابط (۵ ـ ۶۶) ـ (۵ ـ ۶۹) صدق کند. این کار با اعمال تابع معکوس لیاپانوف (مشابه قضایای معکوس لیاپانوف بخش ۳ ـ ۶) به سیستم امکانپذیر است.

لم ۵ ـ ۱۱ سیستم (۵ ـ ۶۵) را در نظر بگیرید و فرض کنید تابع $g(z, \alpha)$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر

باشد و ماتریسهای ژاکوبی $[\partial g / \partial z]$ و $[\partial g / \partial \alpha]$ نیز در روابط ذیل صدق کنند:

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial z}(z, \alpha) \right\| \le L_۱, \qquad \left\| \frac{\partial g}{\partial \alpha}(z, \alpha) \right\| \le L_۲ \|z\|$$

که: $(z, \alpha) \in D \times \Gamma$ و $D = \{z \in R^n \mid \|z\| < r\}$ می‌باشد. فرض کنید k، γ و $r_۰$، ثابتهای مثبتی باشند که در رابطهٔ $r_۰ < r / k$ صدق می‌نمایند. با تعریف $D_۰ = \{x \in R^n \mid \|x\| < r_۰\}$ و با این فرض که برای مسیرهای حالت سیستم، عبارت ذیل برقرار است:

$$\|z(t)\| \le k \|z(۰)\| e^{-\gamma t}, \qquad \forall z(۰) \in D_۰, \alpha \in \Gamma, t \ge ۰$$

تابع $V: D_۰ \times \Gamma \longrightarrow R$ چنان یافت می‌شود که روابط (۵ ـ ۶۶)ـ(۵ ـ ۶۹) را برآورده سازد. علاوه بر این اگر همهٔ فرضیات به طور جامع نسبت به z برقرار باشد، آنگاه می‌توان تابع $V(z, \alpha)$ را چنان تعریف کرد که روی مجموعهٔ $R^n \times \Gamma$، در تمامی شروط (۵ ـ ۶۶) ـ(۵ ـ ۶۹) صدق کند. ◇

برهان: با توجه به هم ارزی نُرمها، کافی است لم را برای نُرم ۲ اثبات کنیم. فرض نمایید $\phi(t, z; \alpha)$ پاسخ معادلهٔ (۵ ـ ۶۵) باشد که از نقطهٔ $(۰, z)$ آغاز می‌شود یعنی: $\phi(۰, z; \alpha) = z$. این نماد، وابستگیِ پاسخ سیستم را به پارامتر α بخوبی نشان می‌دهد. حال فرض کنید داشته باشیم:

$$V(z, \alpha) = \int_۰^T \phi^T(t, z; \alpha) \phi(t, z; \alpha) \, dt$$

که: $T = Ln(۲k^۲) / ۲\gamma$. مشابه برهان قضیهٔ ۳ ـ ۱۲، می‌توان نشان داد $V(z, \alpha)$ به ازای مقادیر:

$$c_۱ = [۱ - exp(-۲L_۱ T)] / ۲L_۱ \quad , \quad c_۲ = k^۲ [۱ - exp(-۲\gamma T)] / ۲\gamma$$

$$c_۳ = \frac{۱}{۲} \qquad c_۴ = ۲k \{۱ - exp[-(\gamma - L_۱) T]\} / (\gamma - L_۱)$$

در روابط (۵ ـ ۶۶) ـ (۵ ـ ۶۸) صدق می‌کند. برای تحقیق اینکه تابع $V(z, \alpha)$ در آخرین نامساوی، عبارت (۵ ـ ۶۹)، نیز صادق است، باید توجه داشت که تابع حساسیت $\phi_\alpha(t, z; \alpha)$، معادلهٔ حساسیت ذیل را برآورده می‌سازد:

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_\alpha = \frac{\partial g}{\partial z}(\phi(t, z; \alpha), \alpha) \phi_\alpha + \frac{\partial g}{\partial \alpha}(\phi(t, z; \alpha), \alpha), \qquad \phi_\alpha(۰, z; \alpha) = ۰$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\|\phi_\alpha(t,z;\alpha)\|_2 \le \int_0^t L_1 \|\phi_\alpha(\tau,z;\alpha)\|_2 d\tau + \int_0^t L_2 \|\phi(\tau,z;\alpha)\|_2 d\tau$$

$$\le \int_0^t L_1 \|\phi_\alpha(\tau,z;\alpha)\|_2 d\tau + \int_0^t L_2 k e^{-\gamma\tau} d\tau \, \|z\|_2$$

$$\le \int_0^t L_1 \|\phi_\alpha(\tau,z;\alpha)\|_2 d\tau + \frac{L_2 k}{\gamma} \|z\|_2$$

با استفاده از نامساوی گرانوال ـ بلمن می‌توان نوشت:

$$\|\phi_\alpha(t,z;\alpha)\|_2 \le \frac{L_2 k}{\gamma} \|z\|_2 e^{L_1 t}$$

بنابراین:

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right\|_2 = \left\| \int_0^t 2\phi^T(t,z;\alpha)\,\phi_\alpha(t,z;\alpha)\,dt \right\|_2$$

$$\le \int_0^t 2k e^{-\gamma t} \|z\|_2 \left(\frac{L_2 k}{\gamma}\right) e^{L_1 t} \|z\|_2 dt$$

$$\le \frac{2k^2 L_2}{\gamma(\gamma - L_1)} \left[1 - e^{-(\gamma - L_1)T}\right] \|z\|_2^2 \triangleq c_5 \|z\|_2^2$$

و بدین ترتیب برهان لم، کامل می‌شود. □

اگر سیستم منجمد (۵ـ۶۵)، خطی باشد می‌توان تابع لیاپانوف ارضاکنندهٔ روابط (۵ـ۶۶) ـ (۵ـ۶۹) را صریحاً با حل معادلهٔ لیاپانوف پارامتری به دست آورد. این نکته در لم ذیل تشریح شده است:

لم ۵ـ۱۲ سیستم $\dot{z} = A(\alpha)z$ را با شرط $\alpha \in \Gamma$ در نظر بگیرید که $A(\alpha)$ تابعی پیوسته ـ مشتق‌پذیر است. فرض کنید درایه‌های A و اولین مشتق جزئی‌شان نسبت به α کراندار یکنواخت باشد؛ یعنی:

$$\|A(\alpha)\|_2 \le c, \qquad \left\| \frac{\partial}{\partial \alpha_i} A(\alpha) \right\|_2 \le b_i, \qquad \forall \alpha \in \Gamma, \qquad \forall\, 1 \le i \le m$$

در این صورت اگر $A(\alpha)$ نسبت به α هرویتز یکنواخت باشد، یعنی داشته باشیم:

$$Re[\lambda(A(\alpha))] \le -\sigma < 0, \qquad \forall \alpha \in \Gamma$$

آنگاه معادلهٔ لیاپانوف زیر:

$$PA(\alpha) + A^T(\alpha)P = -I \qquad (۵ـ۷۰)$$

به ازای جمیع مقادیر $\alpha \in \Gamma$ دارای پاسخ معیّن مثبت و یکتای $P(\alpha)$ می‌باشد. ضمن اینکه این پاسخ پیوسته ـ مشتق‌پذیر است و به ازای جمیع مقادیر $(z,\alpha) \in R^n \times \Gamma$ در روابط زیر صدق می‌کند:

$$c_1 z^T z \le z^T P(\alpha) z \le c_2 z^T z$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \alpha_i} P(\alpha) \right\|_2 \le \mu_i, \qquad \forall\, 1 \le i \le m$$

که c_1، c_2 و μ_i ثابتهای مثبتی هستند. در نتیجه می‌توان گفت برای تابع:

$V(z,\alpha) = z^T P(\alpha) z$، نامساویهای (۵ـ۶۷) ـ (۵ـ۶۹) به ازای نُرم ۲ و مقادیر $c_3 = 1$،

$c_4 = 2c_2$ و $c_5 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \mu_i^2}$ برقرار است. ◇

برهان: یکنواخت بودن ویژگی هرویتز در $A(\alpha)$ بدین معناست که ماتریس نمایی $\exp[tA(\alpha)]$ در عبارت زیر صدق می‌کند:

$$\|\exp[tA(\alpha)]\| \le k(A) e^{-\beta t}, \qquad \forall t \ge 0, \qquad \forall \alpha \in \Gamma$$

که $\beta > 0$ مستقل از α، اما $k(A)$ وابسته به α است. برای اینکه کران میرای نمایی، نسبت به α یکنواخت باشد، لازم است از خاصیت کرانمندی $\|A(\alpha)\|$ استفاده کنیم. مجموعهٔ ماتریسهای ارضاکنندهٔ روابط $Re[\lambda(A(\alpha))] \le -\sigma$ و $\|A(\alpha)\| \le c$، مجموعه‌ای فشرده است که آن را با S نشان می‌دهیم. فرض کنید A و B دو عضو این مجموعه باشد، در این صورت

می‌توان نوشت*:

$$exp\,[t(A+B)] = exp\,[tA] + \int_{\circ}^{t} [exp\,(t-\tau)A]\,B\,exp\,[\tau(A+B)]\,d\tau$$

با استفاده از کران میرای نمایی $exp[tA]$ داریم:

$$\| exp\,[t(A+B)] \| \le k(A)\,e^{-\beta t} + \int_{\circ}^{t} k(A)\,e^{-\beta(t-\tau)} \| B \| \, \| exp\,[\tau(A+B)] \| \, d\tau$$

از ضرب عبارت فوق در $e^{\beta t}$ نتیجه می‌شود:

$$e^{\beta t} \| exp\,[t(A+B)] \| \le k(A) + k(A) \| B \| \int_{\circ}^{t} e^{\beta\tau} \| exp\,[\tau(A+B)] \| \, d\tau$$

با اعمال نامساوی گران وال ـ بلمن می‌توان نوشت:

$$\| exp\,[t(A+B)] \| \le k(A)\,e^{-(\beta - k(A)\| B \|)t}, \qquad \forall t \ge \circ$$

بنابراین ثابت مثبت $\beta > \gamma$ و همسایگی $N(A)$ حول A (با شرط: $C \in N(A)$) چنان وجود دارد که:

$$\| exp\,[tC] \| \le k(A)\,e^{-\gamma t}, \qquad \forall t \ge \circ$$

چون S فشرده است لذا می‌توان آن را با تعداد معدودی از این همسایگیها پوشاند. بنابراین می‌توان ثابت مثبت k را مستقل از α چنان یافت که داشته باشیم:

$$\| exp\,[tA(\alpha)] \| \le k e^{-\gamma t}, \qquad \forall t \ge \circ, \quad \forall \alpha \in \Gamma$$

---

* این خاصیت ماتریسی را می‌توان با نوشتن $\dot{x} = (A+B)x$ به شکل $\dot{x} = Ax + Bx$ و در نظر گرفتن $B(x)$ به عنوان جملهٔ ورودی تبیین کرد. در این صورت با جایگزینی: $x(t) = exp\,[t(A+B)]x_{\circ}$ در جملهٔ ورودی نتیجه می‌شود:

$$exp\,[t(A+B)]x_{\circ} = exp\,[tA]x_{\circ} + \int_{\circ}^{t} exp\,[(t-\tau)A]\,B\,exp\,[\tau(A+B)]x_{\circ}\,d\tau$$

و از آنجا که این عبارت به ازای جمیع مقادیر $x_{\circ} \in R^n$ برقرار است به اتحاد ماتریسی مذکور می‌رسیم.

اکنون معادلهٔ لیاپانوف (۵ ـ ۷۰) را در نظر بگیرید، در این معادله با توجه به قضیهٔ ۳ ـ ۶ نتیجه می‌شود به ازای هر مقدار $\alpha \in \Gamma$، پاسخ معیّن مثبت و یکتایی وجود دارد. ضمناً برهان آن قضیه نشان می‌دهد که:

$$P(\alpha) = \int_{\circ}^{\infty} [e^{tA(\alpha)}]^T [e^{tA(\alpha)}]\,dt$$

از آنجا که $A(\alpha)$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر است، $P(\alpha)$ نیز چنین خواهد بود و می‌توان نوشت:

$$z^T P(\alpha) z \le \int_{\circ}^{\infty} k^2 e^{-2\gamma t} \| z \|_2^2 \, dt = \frac{k^2}{2\gamma} \| z \|_2^2 \Rightarrow c_2 = \frac{k^2}{2\gamma}$$

اگر $y(t) = e^{tA(\alpha)} z$ باشد، آنگاه داریم: $\dot{y} = A(\alpha) y$ و در نتیجه:

$$-y^T(t)\dot{y}(t) = -y^T(t)A(\alpha)y(t) \le \| A(\alpha) \|_2 y^T(t) y(t) \le c\, y^T(t) y(t)$$

و:

$$z^T P(\alpha) z = \int_{\circ}^{\infty} y^T(t) y(t)\,dt \ge \int_{\circ}^{\infty} \frac{-1}{c} y^T(t)\dot{y}(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2c} \int_{\circ}^{\infty} \frac{d}{dt} [-y^T(t)y(t)]\,dt = \frac{1}{2c} [-y^T(t)y(t)] \Big|_{\circ}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2c} y^T(\circ) y(\circ) = \frac{1}{2c} z^T z \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2c}$$

حال با محاسبهٔ مشتق جزئی عبارت $P(\alpha)A(\alpha) + A^T(\alpha)P(\alpha) = -I$ نسبت به هر یک از مؤلفه‌های α_i از α و نمایش مشتق $P(\alpha)$ با $P'(\alpha)$ می‌توان نوشت:

$$P'(\alpha)A(\alpha) + A^T(\alpha)P'(\alpha) = -\{P(\alpha)A'(\alpha) + [A'(\alpha)]^T P(\alpha)\}$$

بنابراین $P'(\alpha)$ با رابطهٔ زیر بیان می‌گردد:

$$P'(\alpha) = \int_{\circ}^{\infty} [e^{tA(\alpha)}]^T \{P(\alpha)A'(\alpha) + [A'(\alpha)]^T P(\alpha)\} [e^{tA(\alpha)}]\,dt$$

و در نتیجه:

$$\| P'(\alpha) \|_2 \le \int_{\circ}^{\infty} k^2 e^{-2\gamma t} \, 2 \frac{k^2}{2\gamma} b_i \, dt = \frac{b_i k^4}{2\gamma^2} \Rightarrow \mu_i = \frac{b_i k^4}{2\gamma^2}$$

که برهان لم را کامل می‌کند. □

باید دقت کرد مجموعهٔ Γ در لم ۵ ـ ۱۲ لزوماً فشرده نیست و چنانچه Γ فشرده باشد، می‌توان شرط کرانمندی را از فرض پیوسته ـ مشتق‌پذیر بودن $A(\alpha)$ نتیجه گرفت.

با انتخاب $V(z,\alpha)$ به عنوان نامزد تابع لیاپانوف، می‌توان ادامهٔ تحلیل معادلهٔ (۵ ـ ۶۳) را به شکل ذیل پیش برد: تغییر متغیر $z = x - h(u)$ معادلهٔ (۵ ـ ۶۳) را به صورت زیر درمی‌آورد:

$$\dot{z} = g(z,u) - \frac{\partial h}{\partial u}\dot{u} \qquad (۵ ـ ۷۱)$$

در اینجا اثر تغییرات زمانی u به شکل آشفتگی در سیستم منجمد (۵ ـ ۶۵) ظاهر می‌شود. مشتق تابع $V(z,u)$ در امتداد مسیرهای حالت معادلهٔ (۵ ـ ۷۱) عبارت است از:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial V}{\partial u}\dot{u}(t)\\ &= \frac{\partial V}{\partial z}g(z,u) + \left[\frac{\partial V}{\partial u} - \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial u}\right]\dot{u}(t)\\ &\le -c_3\|z\|^2 + c_5\|z\|^2\|\dot{u}(t)\| + c_4 L\|z\|\,\|\dot{u}(t)\|\end{aligned}$$

با انتخاب: $\delta(t) = L\|\dot{u}(t)\|$ و $\gamma(t) = \frac{c_5}{c_4}\|\dot{u}(t)\|$ می‌توان آخرین نامساوی را به شکل زیر باز نوشت:

$$\dot{V} \le -c_3\|z\|^2 + c_4\gamma(t)\|z\|^2 + c_4\delta(t)\|z\|$$

که به شکل نامساوی (۵ ـ ۴۱) در بخش ۵ ـ ۴ درمی‌آید. بنابراین با تکرار گامهای کاربرد لم قیاس (که در بخش ۵ ـ ۴ ذکر شده)، می‌توان نشان داد $\dot{u}(t)$ در نامساوی ذیل صدق می‌کند:

$$\int_{t_0}^{t}\|\dot{u}(\tau)\|\,d\tau \le \varepsilon_1(t-t_0) + \eta_1, \quad \varepsilon_1 < \frac{c_1 c_3}{c_2 c_5} \qquad (۵ ـ ۷۲)$$

که:

و:

$$\|z(0)\| < \frac{r}{\rho_1}\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}; \quad \sup_{t\ge 0}\|\dot{u}(t)\| \le \frac{2c_1\alpha_1 r}{c_4\rho_1 L}$$

که α_1 و ρ_1 با عبارتهای زیر تعریف می‌شوند:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{c_3}{c_2} - \varepsilon_1\frac{c_5}{c_1}\right] > 0, \quad \rho_1 = exp\left(\frac{c_5\eta_1}{2c_1}\right) \ge 1$$

در این صورت $z(t)$ نامساوی زیر را برآورده می‌کند:

$$\|z(t)\| \le \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\,\rho_1\|z(0)\|e^{-\alpha_1 t} + \frac{c_4\rho_1 L}{2c_1}\int_0^t e^{-\alpha_1(t-\tau)}\|\dot{u}(\tau)\|\,d\tau \qquad (۵ ـ ۷۳)$$

بر اساس فرضیات اعمالی بر $\|\dot{u}\|$، نتایج مختلفی از این نامساوی حاصل می‌شود که برخی از آنها در قضیهٔ زیر ذکر شده است:

قضیهٔ ۵ ـ ۵ *سیستم (۵ ـ ۷۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید $[\partial h/\partial u]$ در رابطهٔ (۵ ـ ۶۴) صدق می‌نماید و داریم: $\|\dot{u}(t)\| \le \varepsilon$, $\forall t \ge 0$. علاوه بر این فرض کنید تابع لیاپانوف $V(z,u)$ چنان یافت شود که در عبارتهای (۵ ـ ۶۶) ـ (۵ ـ ۶۹) صدق نماید؛ در این صورت اگر داشته باشیم:*

$$\varepsilon < \frac{c_1 c_3}{c_2 c_5}\times\frac{r}{r + c_2 L/c_5}$$

آنگاه به ازای جمیع مقادیر $\|z(0)\| < r\sqrt{c_1/c_2}$؛ پاسخهای معادلهٔ (۵ ـ ۷۱) برای تمامی مقادیر $t \ge 0$، کراندار یکنواخت و کراندار غایی یکنواخت است و کران غایی آن نیز برابر است با:

$$b = \frac{c_2 c_4 L\varepsilon}{\theta(c_1 c_3 - \varepsilon c_2 c_5)}$$

که $\theta \in (0,1)$، ثابتی اختیاری می‌باشد. علاوه بر این از شرط $t \longrightarrow \infty \Rightarrow \dot{u}(t) \longrightarrow 0$ می‌توان نتیجه گرفت: $t \longrightarrow \infty \Rightarrow z(t) \longrightarrow 0$. سرانجام اگر داشته باشیم: $\forall u \in \Gamma, h(u) = 0$ و $\varepsilon < c_3/c_5$؛ آنگاه $z = 0$، نقطهٔ تعادل پایدار نمایی برای معادلهٔ (۵ ـ ۷۱) و یا به طور معادل، $x = 0$ نقطهٔ تعادل پایدار نمایی برای سیستم (۵ ـ ۶۳) می‌باشد. ◇

برهان: چون داریم: $\|\dot{u}(t)\| \leq \varepsilon < c_1 c_3 / c_2 c_5$ لذا نامعادلهٔ (۵ ـ ۷۲) به ازای مقادیر $\varepsilon_1 = \varepsilon$ و $\eta_1 = 0$ برآورده می‌شود؛ در نتیجه:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{c_3}{c_2} - \varepsilon\frac{c_5}{c_1}\right], \quad \rho_1 = 1$$

با توجه به معلوم بودن کران بالای ε می‌توان نوشت:

$$\frac{2c_1\alpha_1 r}{c_4 L} = \frac{c_1 r}{c_4 L}\left[\frac{c_3}{c_2} - \varepsilon\frac{c_5}{c_1}\right] > \frac{c_1 r}{c_4 L}\left[\frac{c_3}{c_2} - \frac{c_3}{c_2}\times\frac{r}{r + c_4 L/c_5}\right] = \frac{c_1 c_3}{c_2 c_5}\times\frac{r}{r + c_4 L/c_5} > \varepsilon$$

بنابراین نامعادلهٔ $\sup_{t\geq 0}\|\dot{u}(t)\| < 2c_1\alpha_1 r/c_4 L$ برقرار است و از رابطهٔ (۵ ـ ۷۳) نتیجه می‌شود:

$$\|z(t)\| \leq \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\,\|z(0)\|e^{-\alpha_1 t} + \frac{c_4 L}{2c_1}\int_0^t e^{-\alpha_1(t-\tau)}\varepsilon\, d\tau$$

$$\leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\,\|z(0)\|\,e^{-\alpha_1 t} + \frac{c_4 L\varepsilon}{2c_1\alpha_1} = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\,\|z(0)\|\,e^{-\alpha_1 t} + b\theta$$

پس از گذشت زمان محدودی، جملهٔ میرای نمایی از مقدار $b(1-\theta)$ کمتر خواهد شد که نشان می‌دهد $z(t)$ در نهایت دارای کران b می‌باشد. علاوه بر این اگر داشته باشیم: $t\longrightarrow\infty \Rightarrow \dot{u}(t)\longrightarrow 0$ آنگاه از رابطهٔ (۵ ـ ۷۳) نتیجه می‌شود: $t\longrightarrow\infty \Rightarrow z(t)\longrightarrow 0$. چنانچه به ازای جمیع مقادیر $u\in\Gamma$، $h(u)=0$ باشد، می‌توانیم L را برابر با صفر انتخاب کنیم، در این صورت کران بالای $\dot{V}$ به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\dot{V} \leq -(c_3 - c_5\varepsilon)\|z\|^2$$

که نشان می‌دهد اگر $\varepsilon < c_3/c_5$ باشد، آنگاه $z=0$ پایدار نمایی است. □

مثال ۵ ـ ۱۳ سیستم ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = A(\varepsilon t)x \qquad , \qquad \varepsilon > 0$$

چنانچه ε به اندازهٔ کافی کوچک باشد می‌توان سیستم را به عنوان سیستم متغیر آرام در نظر گرفت که به ازای $u=\varepsilon t$ و $\Gamma=[0,\infty)$ به شکل (۵ ـ ۶۳) درمی‌آید. به ازای جمیع مقادیر $u\in\Gamma$، مبدأ $x=0$، نقطهٔ تعادل سیستم است؛ بنابراین $h(u)=0$، حالت خاصی از معادله می‌باشد. حال فرض کنید داشته باشیم: $Re[\lambda(A(\alpha))] < -\sigma < 0$ و $A(\alpha)$ و $A'(\alpha)$ نیز به ازای جمیع مقادیر $\alpha\in\Gamma$، کراندار یکنواخت باشد؛ در این صورت پاسخ معادلهٔ لیاپانوف (۵ ـ ۷۰) ویژگیهای گفته شده در لم ۵ ـ ۱۲ را داراست. با استفاده از $V(x,u)=x^T P(u)x$ به عنوان نامزد تابع لیاپانوف برای سیستم $\dot{x}=A(u)x$ می‌توان نوشت:

$$\dot{V}(t,x) = x^T[P(u(t))A(u(t)) + A^T(u(t))P(u(t))]x + x^T P'(u(t))\dot{u}(t)x$$

$$\leq -x^T x + \varepsilon c_5\|x\|_2^2 = -(1-\varepsilon c_5)\|x\|_2^2$$

که c_5 کران بالای $\|P'(\alpha)\|_2$ می‌باشد. بنابراین به ازای تمامی مقادیر $\varepsilon < 1/c_5$، مبدأ $x=0$، نقطهٔ تعادل پایدار نمایی سیستم $\dot{x}=A(\varepsilon t)x$ است. Δ

مثال ۵ ـ ۱۴ معادلهٔ پاندول ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\sin x_1 - x_2 + u(t)$$

که $u(t)$ گشتاور راه‌انداز نرمالیزه می‌باشد. فرض کنید داشته باشیم:

$$|u(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad |\dot{u}(t)| \leq \varepsilon, \qquad \forall t \geq 0$$

که ε مقدار کوچکی است، در این صورت Γ بازهٔ بستهٔ $\left[-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}\right]$ است؛ بدین ترتیب برای مقادیر ثابت گشتاور ورودی $(u=\alpha)$، نقاط تعادل سیستم، ریشه‌های معادلهٔ زیر می‌باشد:

$$0 = x_2$$

$$0 = -\sin x_1 + \alpha$$

سیستم در مجموعهٔ $|x_1| < 3\pi/4$ ، دارای نقطهٔ تعادل یکتایی است که با عبارت ذیل تعریف می‌شود:

$$h(\alpha) = \begin{bmatrix} sin^{-1}(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}$$

تغییر متغیرهای:

$$z_1 = x_1 - sin^{-1}(\alpha), \qquad z_2 = x_2$$

سیستم منجمد را به شکل ذیل درمی‌آورد:

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = -\eta(z_1, \alpha) - z_2$$

که: $\eta(z_1, \alpha) = sin(z_1 + sin^{-1}(\alpha)) - \alpha = sin(z_1 + \delta) - sin\delta$

و: $\delta = sin^{-1}(\alpha)$. تابع $\eta(z_1, \alpha)$ در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$z_1 \eta(z_1, \alpha) > 0, \qquad \forall -\pi - 2\delta < z_1 < \pi - 2\delta$$

چون $|\delta| \le \pi/4$ است، لذا داریم: $(-\pi/2, \pi/2) \subset (-\pi - 2\delta, \pi - 2\delta)$. حال با فرض اینکه $0 < \xi < 1/\sqrt{2}$ عدد مثبت کوچکی باشد و z_1 نیز به مجموعهٔ D_α محدود شود، داریم:

$$z_1 \eta(z_1, \alpha) \ge \xi z_1^2$$

چون $|\alpha| < 1/\sqrt{2}$ است، مجموعهٔ D_α ناتهی و شامل مجموعهٔ $|z_1| \le \rho$ می‌باشد که می‌توان با انتخاب ξ به اندازهٔ کافی کوچک، ρ را به اندازهٔ دلخواه، نزدیک به $\pi/2$ برگزید. این سیستم حالت خاصی از سیستمی است که در مثال ۳ ـ ۵ بررسی شد؛ از این رو می‌توان تابع لیاپانوف آن را به شکل زیر تعریف کرد:

$$V(z, \alpha) = \frac{1}{2} z^T P z + \int_0^{z_1} \eta(y, \alpha)\, dy$$

$$= \frac{1}{2} z^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} z + \int_0^{z_1} [sin(y + \delta) - sin\delta]\, dy$$

$$= \frac{1}{4} z_1^2 + \frac{1}{2} z_1 z_2 + \frac{1}{2} z_2^2 + (1 - cosz_1) cos\delta + (sinz_1 - z_1) sin\delta$$

با توجه به اینکه:

$$|y - siny| \le \frac{1}{6} |y|^3, \quad |1 - cosy| \le \frac{1}{2} y^2$$

و نیز $|z_1| \le 3\pi/2$ و $\forall z_1 \in D_a$، بسادگی می‌توان تحقیق نمود که برای همهٔ مقادیر $z_1 \in D_a$، تابع لیاپانوف تعریف شده، به ازای مقادیر ذیل در رابطهٔ (۵ ـ ۶۶) صدق می‌کند:

$$c_1 = \frac{1}{2} \lambda_{min}(P), \quad c_2 = \frac{1}{2} \lambda_{max}(P) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right)$$

مشتق تابع $V(z, \alpha)$ در امتداد مسیرهای حالت سیستم منجمد برابر است با:

$$\frac{\partial V}{\partial z} g(z, \alpha) = -\frac{1}{2} z_1 \eta(z_1, \alpha) - \frac{1}{2} z_2^2 \le -\frac{1}{2} \xi z_1^2 - \frac{1}{2} z_2^2 \le -\frac{1}{2} \xi \|z\|_2^2$$

لذا $V(z, \alpha)$ در معادلهٔ (۵ ـ ۶۷) صادق است. در نهایت می‌توان نامساویهای (۵ ـ ۶۸) ـ (۵ ـ ۶۹) را از عبارتهای ذیل نتیجه گرفت:

$$\left| \frac{\partial V}{\partial z_1} \right| = \left| \frac{1}{2} z_1 + \frac{1}{2} z_2 + \eta(z_1, \alpha) \right| \le \frac{3}{2} |z_1| + \frac{1}{2} |z_2| \le \frac{1}{2} \sqrt{10}\, \|z\|_2$$

$$\left| \frac{\partial V}{\partial z_2} \right| = \left| \frac{1}{2} z_1 + z_2 \right| \le \frac{1}{2} |z_1| + |z_2| \le \frac{1}{2} \sqrt{5}\, \|z\|_2$$

$$\left| \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right| = \left| \frac{\partial V}{\partial \delta} \frac{\partial \delta}{\partial \alpha} \right| = \left| [(cosz_1 - 1) sin\delta + (sinz_1 - z_1) cos\delta] \frac{1}{cos\delta} \right|$$

$$\le |cosz_1 - 1| + |sinz_1 - z_1| \le \left(\frac{1}{2} z_1^2 + \frac{\pi}{4} z_1^2 \right) \le \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \|z\|_2^2$$

بنابراین تمامی شروط قضیهٔ ۵ ـ ۵ برآورده می‌شود و می‌توان گفت برای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک ε، گویی حول نقطهٔ $x = 0$ وجود دارد که تمامی پاسخهایی که از آن آغاز می‌شود به سوی گوی کوچکی همگرا می‌شود که مرکز آن در نقطهٔ متغیر آرام $x_1(t) = sin^{-1}(u(t))$ و $x_2(t) = 0$ قرار گرفته است و اندازهٔ آن وابسته به مقدار ε می‌باشد. علاوه بر این چنانچه با افزایش t به سمت بینهایت، $u(t)$ به سمت حد ثابت u_∞ و $\dot{u}(t)$ نیز به سمت صفر میل کند، آنگاه پاسخ سیستم نیز به سمت $x_1 = sin^{-1}(u_\infty)$ و $x_2 = 0$ همگرا می‌گردد. Δ

مثال ۵ ـ ۱۵ سیستم زیر مفروض است:

$$\dot{x} = f(x, u)$$

که $f(x, u)$ در قلمرو $D_x \times D_u \subset R^n \times R^m$، تا مرتبهٔ دوم پیوسته ـ مشتق‌پذیر است. فرض کنید تابع $h: D_u \longrightarrow D_x$ چنان وجود داشته باشد که پیوسته ـ مشتق‌پذیر بوده، در رابطهٔ ذیل صدق کند:

$$0 = f(h(\alpha), \alpha), \qquad \forall \alpha \in D_u$$

در این صورت با تعریف:

$$A(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, u)\Big|_{x=h(\alpha), u=\alpha}$$

ماتریس $A(\alpha)$، خطی شدهٔ سیستم $\dot{x} = f(x, \alpha)$ حول نقطهٔ تعادل $x = h(\alpha)$ خواهد بود. $A(\alpha)$ نسبت به α تابعی پیوسته ـ مشتق‌پذیر است. حال فرض کنید $A(\alpha)$ به ازای جمیع مقادیر $\alpha \in \Gamma$ (که $\Gamma \subset D_u$ مجموعه‌ای فشرده است)، به طور یکنواخت نسبت به α، هرویتز باشد؛ در این صورت ماتریس $A(\alpha)$ به ازای جمیع مقادیر $\alpha \in \Gamma$، تمامی شروط لم ۵ ـ ۱۲ را برآورده می‌سازد. اگر $P(\alpha)$ پاسخ معادلهٔ لیاپانوف (۵ ـ ۷۰) باشد، با تعریف: $V(z, \alpha) = z^T P(\alpha) z$ به عنوان نامزد تابع لیاپانوف برای سیستم منجمد ذیل:

$$\dot{z} = f(z + h(\alpha), \alpha) \triangleq g(z, \alpha)$$

می‌توان از لم ۵ ـ ۱۲ نتیجه گرفت که $V(z, \alpha)$ در روابط (۵ ـ ۶۶)، (۵ ـ ۶۸) و (۵ ـ ۶۹) صدق می‌کند و فقط نیاز است صحت عبارت (۵ ـ ۶۷) را تحقیق کنیم؛ بدین منظور می‌توان سیستم منجمد را در قلمرو $\{\|z\|_2 < r_1\}$ به شکل زیر باز نوشت:

$$\dot{z} = A(\alpha)z + \Delta g(z, \alpha)$$

که: $$\|\Delta g(z, \alpha)\|_2 = \|g(z, \alpha) - A(\alpha)z\|_2 \le k_1 \|z\|_2^2$$

بنابراین برای مشتق تابع V در امتداد مسیرهای حالت $\dot{z} = g(z, \alpha)$ می‌توان نوشت:

$$\dot{V} \le -\|z\|_2^2 + 2c_2 k_1 \|z\|_2^3 \le -\frac{1}{2}\|z\|_2^2 \quad \|z\|_2 < \frac{1}{4} c_2 k_1$$

با شرط:

لذا مقدار $r > 0$ چنان وجود دارد که به ازای جمیع مقادیر $(z, \alpha) \in \{\|z\|_2 < r\} \times \Gamma$، تابع $V(z, \alpha)$ در روابط (۵ ـ ۶۶) ـ (۵ ـ ۶۹) صدق می‌کند. اکنون فرض نمایید به ازای جمیع مقادیر $t \ge 0$، $u(t)$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر، $u(t) \in \Gamma$ و $\|\dot{u}(t)\| \le \varepsilon$ باشد، در این صورت از قضیهٔ ۵ ـ ۵ نتیجه می‌شود ثابتهای مثبت ρ_1 و ρ_2 چنان وجود دارند که اگر $\varepsilon < \rho_1$ و $\|x(0) - h(u(0))\|_2 < \rho_2$ باشد، آنگاه پاسخ $x(t)$ مربوط به معادلهٔ $\dot{x} = f(x, u(t))$ برای تمامی مقادیر $t \ge 0$ کراندار یکنواخت و $x(t) - h(u(t))$ نیز کراندار غایی یکنواخت می‌باشد که مقدار کران غایی آن برابر با $k\varepsilon$ است ($k > 0$). علاوه بر این اگر $t \longrightarrow \infty$ بتوان نتیجه گرفت: $u(t) \longrightarrow u_\infty$ و $\dot{u}(t) \longrightarrow 0$ آنگاه داریم: $t \longrightarrow \infty \Rightarrow x(t) \longrightarrow h(u_\infty)$.

Δ

۵ـ۸ تمرینها

تمرین ۵ـ۱ ([۱۳۳]) معادلهٔ لیاپانوف $PA + A^TP = -Q$ را در نظر بگیرید که $Q = Q^T > 0$ و A نیز ماتریس هرویتز است. ضمناً فرض کنید داشته باشیم:

$$\mu(Q) = \lambda_{min}(Q) / \lambda_{max}(P)$$

(الف) نشان دهید برای هر مقدار ثابت مثبت k می‌توان نوشت: $\mu(kQ) = \mu(Q)$

(ب) اگر $\hat{Q} = \hat{Q}^T > 0$ دارای $\lambda_{min}(\hat{Q}) = 1$ باشد، نشان دهید: $\mu(I) \geq \mu(\hat{Q})$

(ج) نشان دهید به ازای هر مقدار $Q = Q^T > 0$، داریم: $\mu(I) \geq \mu(Q)$

راهنمایی: برای بند (ب)، با فرض اینکه P_1 و P_2 بترتیب پاسخ معادلهٔ لیاپانوف با شرطهای $Q = I$ و $Q = \hat{Q}$ باشد، ثابت کنید:

$$P_1 - P_2 = \int_0^\infty exp(A^Tt)(I - \hat{Q})\, exp(At)\, dt \leq 0$$

تمرین ۵ـ۲ سیستم $\dot{x} = Ax + Bu$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $u = Fx$ قانون کنترل پسخور حالت پایدارساز[1] باشد، یعنی ماتریس $(A + BF)$ هرویتز است. علاوه بر این فرض کنید بنا بر محدودیتهای فیزیکی، لازم است به کمک یک محدودکننده[2] مقدار u_i را تا حدّ L محدود کنیم، یعنی: $|u_i(t)| \leq L$. در این صورت می‌توان سیستم حلقه ـ بسته را با معادلهٔ $\dot{x} = Ax + BL\, sat(Fx / L)$ نمایش داد که $sat(v)$، برداری است که iاُمین مؤلفهٔ آن تابع اشباع ذیل می‌باشد:

$$sat(v_i) = \begin{cases} -1, & v_i < -1 \\ v_i, & |v_i| \leq 1 \\ 1, & v_i > 1 \end{cases}$$

حال با افزون و کاستن جملهٔ BFx، می‌توان معادلهٔ حلقه ـ بستهٔ سیستم را به شکل $\dot{x} = (A + BF)x + Bh(Fx)$ بازنوشت که: $h(v) = L\, sat(v / L) - v$. بنابراین می‌توان اثر محدودکننده را به عنوان آشفتگی در سیستم نامی (بدون محدودکننده) در نظر گرفت.

(الف) نشان دهید:

1. Stabilizing state feedback control
2. Limiter

$$\forall |v_i| \leq L(1 + \delta) \quad , \quad |h_i(v)| \leq [\delta / (1 + \delta)]\, |v_i|$$

(ب) فرض کنید P پاسخ معادلهٔ $P(A + BF) + (A + BF)^TP = -I$ باشد. نشان دهید با شرط $\delta / (1 + \delta) < \frac{1}{2} \|PB\|_2 \|F\|_2$، مشتق تابع $V(x) = x^TPx$ در امتداد مسیرهای حالت سیستم حلقه ـ بسته بر بازهٔ $|(Fx)_i| \leq L(1 + \delta)$، معیّن منفی است.

(ج) ثابت کنید مبدأ پایدار مجانبی است و دربارهٔ نحوهٔ تخمین ناحیهٔ جذابیت بحث کنید.

(د) نتیجهٔ بالا را به حالت خاص زیر اعمال نمایید*:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1/9 \end{bmatrix}, \quad L = 1$$

ناحیهٔ جذابیت مبدأ را نیز تخمین بزنید.

تمرین ۵ـ۳ سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(t,x) + Bu, \quad y = Cx, \quad u = -g(t,y)$$

که به ازای جمیع مقادیر $t \geq 0$ داریم: $f(t,0) = 0$، $g(t,0) = 0$، $\|g(t,y)\| \leq \gamma \|y\|$. فرض کنید مبدأ سیستم $\dot{x} = f(t,x)$، پایدار نمایی جامع باشد و تابع لیاپانوف $V(t,x)$ به طور جامع در روابط (۵ـ۳) ـ (۵ـ۵) صدق کند. کران γ را (که با γ^* نشان داده می‌شود) چنان بیابید که برای $\gamma < \gamma^*$، مبدأ سیستم داده شده پایدار نمایی جامع باشد.

تمرین ۵ـ۴ سیستم $\dot{x} = (A + B)x$ را در نظر بگیرید و فرض کنید ماتریس A هرویتز باشد. اگر P پاسخ معادلهٔ لیاپانوف $PA + A^TP = -Q$ (با شرط $Q = Q^T > 0$) باشد، نشان دهید ماتریس $(A + B)$، هرویتز است اگر داشته باشیم:

$$B^TPQ^{-1}PB < \frac{1}{4}Q \quad \text{یا} \quad BQ^{-1}B < \frac{1}{4}P^{-1}QP^{-1}$$

راهنمایی: برای حالت اول ثابت کنید:

* این حالت عددی در [۶۱] بررسی شده است.

$$x^T(PB+B^TP)x \le \frac{1}{2}x^TQx + 2x^TB^TQP^{-1}PBx, \qquad \forall x \in R^n$$

و بدین منظور از رابطهٔ ذیل آغاز نمایید:

$$x^T\left[\frac{1}{\sqrt{2}}Q^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2}\,Q^{-\frac{1}{2}}PB\right]^T\left[\frac{1}{\sqrt{2}}Q^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2}\,Q^{-\frac{1}{2}}PB\right]x \ge 0$$

برای حالت دوم نیز به روشی مشابه عمل کنید.

تمرین ۵ ـ ۵ سیستم آشفتهٔ $\dot{x} = Ax + B[u + g(t,x)]$ را در نظر بگیرید که تابع $g(t,x)$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر است و به ازای جمیع مقادیر $t \ge 0$ و $x \in B_r$ (که r مقدار مثبتی است) در رابطهٔ $\|g(t,x)\|_2 \le k\|x\|_2$ صدق می‌کند. فرض کنید $P = P^T > 0$ پاسخ معادلهٔ ریکاتی ذیل باشد:

$$PA + A^TP + Q - PBB^TP + 2\alpha P = 0$$

که $Q \ge k^2 I$ و $\alpha > 0$ است. نشان دهید $u = -B^TPx$، مبدأ سیستم آشفته را پایدار می‌کند.

تمرین ۵ ـ ۶ ([۹۲]) سیستم آشفتهٔ $\dot{x} = Ax + Bu + Dg(t,y),\ y = Cx$ را درنظر بگیریدکه $g(t,y)$ تابعی پیوسته ـ مشتق‌پذیر است که به ازای جمیع مقادیر $t \ge 0,\ \|y\|_2 \le r$ (که r مقدار مثبتی است) در شرط $\|g(t,y)\|_2 \le k\|y\|_2$ صدق می‌کند. علاوه بر این فرض کنید معادلهٔ:

$$PA + A^TP + \varepsilon Q - \frac{1}{\varepsilon}PBB^TP + \frac{1}{\gamma}PDD^TP + \frac{1}{\gamma}C^TC = 0$$

با شرط $Q = Q^T > 0$، $\varepsilon > 0$ و $0 < \gamma < 1/k$ دارای پاسخ معیّن مثبت $P = P^T > 0$ می‌باشد. نشان دهید $u = -(\frac{\varepsilon}{2})B^TPx$ مبدأ سیستم آشفته را پایدار می‌کند.

تمرین ۵ ـ ۷ سیستم زیر مفروض است:

$$\dot{x}_1 = -\alpha x_1 - \omega x_2 + (\beta x_1 - \gamma x_2)(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = \omega x_1 - \alpha x_2 + (\gamma x_1 + \beta x_2)(x_1^2 + x_2^2)$$

که $\alpha > 0$، β، γ و $\omega > 0$ مقادیر ثابتی هستند.

(الف) با در نظر گرفتن این سیستم به عنوان آشفتگیِ سیستم خطیِ:

$$\dot{x}_1 = -\alpha x_1 - \omega x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\omega x_1 - \alpha x_2$$

نشان دهید اگر $|\beta|$ و $|\gamma|$ به اندازهٔ کافی کوچک و مجموعهٔ $\{\|x\|_2 \le r\}$ در ناحیهٔ جذابیت محصور باشد، مبدأ سیستمِ آشفته پایدارنمایی خواهد بود. کرانهای بالای $|\beta|$ و $|\gamma|$ را برحسب r بیابید.

(ب) با استفاده از $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ به عنوان نامزد تابع لیاپانوفِ سیستم آشفته، ثابت کنید اگر $\beta \le 0$ باشد، مبدأ پایدار نمایی جامع است.

همچنین اگر $\beta > 0$ و مجموعهٔ $\{\|x\|_2 < \sqrt{\alpha/\beta}\}$ در ناحیهٔ جذابیت محصور باشد، مبدأ پایدار نمایی خواهد بود.

(ج) نتایج بند (الف) و (ب) را با هم مقایسه کنید و در مورد طبیعت محافظه‌کارانهٔ نتیجهٔ بند (الف) توضیح دهید.

تمرین ۵ ـ ۸ سیستم آشفتهٔ $\dot{x} = f(x) + g(x)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید مبدأ سیستم نامیِ $\dot{x} = f(x)$، پایدار مجانبی (اما نه نمایی) باشد. نشان دهید برای هر مقدار $\gamma > 0$ می‌توان تابع $g(x)$ را چنان یافت که برآوردن شرط $\|g(x)\| \le \gamma\|x\|$ در همسایگی مبدأ، سیستم آشفته ناپایدار شود.

تمرین ۵ ـ ۹ ([۵۶]) سیستم آشفتهٔ $\dot{x} = f(x) + g(x)$ را در نظر بگیرید که $f(x)$ و $g(x)$ توابعی پیوسته ـ مشتق‌پذیرند و به ازای جمیع مقادیر $r > \|x\|$ داریم: $\|g(x)\| \le \gamma\|x\|$. علاوه بر این فرض کنید داشته باشیم:

- مبدأ سیستم نامیِ $\dot{x} = f(x)$، پایدار مجانبی است و تابع لیاپانوف $V(x)$ چنان وجود دارد که به ازای جمیع مقادیر $r > \|x\|$، در روابط (۵ ـ ۲۰) ـ (۵ ـ ۲۲) صدق نماید؛

● خطی شدهٔ $f(x)$ در مبدأ (یعنی در نقطهٔ $A = [\partial f / \partial x]$ (۰))، هرویتز است.

(الف) نشان دهید می‌توان ثابتهای مثبت ρ و γ_1^* را چنان یافت که برای $\gamma < \gamma_1^*$، مبدأ سیستم آشفته، پایدار مجانبی باشد و با افزایش t به سمت بینهایت، هر مسیر حالتی که از درون مجموعهٔ $\{V(x) \le c\}$ آغاز می‌شود به سمت مبدأ همگرا گردد.

(ب) نشان دهید ثابت مثبت γ^* چنان وجود دارد که برای $\gamma < \gamma^*$ و به ازای هر مقدار $c \le \alpha_1(r)$، هر یک از مسیرهای حالتی که از درون مجموعهٔ $\{V(x) \le c\}$ آغاز می‌شود، با افزایش t به سمت بینهایت، به سوی مبدأ میل کند.

(ج) آیا ممکن است بند (ب) رخ دهد اما تابع خطی شده، هرویتز نباشد؟ حالت ذیل را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_2 - (2x_1 + x_3)^3 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad g(x) = a \begin{bmatrix} x_1 - x_3 - (2x_1 + x_3)^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ a \neq 0$$

راهنمایی: برای مثال بند (ج) با استفاده از $V(x) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + x_1 x_3$، نشان دهید مبدأ $\dot{x} = f(x)$، پایدار مجانبی است و سپس با اعمال قضیهٔ ۳ ـ ۱۴، تابع لیاپانوفی را به دست آورید که در نامعادلات مورد نظر صدق کند.

تمرین ۵ ـ ۱۰ قضیهٔ فرعی ۵ ـ ۱ را اثبات کنید.

تمرین ۵ ـ ۱۱ قضیهٔ فرعی ۵ ـ ۲ را اثبات کنید.

تمرین ۵ ـ ۱۲ قضیهٔ فرعی ۵ ـ ۳ را اثبات کنید.

تمرین ۵ ـ ۱۳ ([۶۲]) سیستم $\dot{x} = f(t,x)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید تابع $V(t,x)$ چنان وجود داشته باشد که در نامساویهای ذیل صدق نماید:

$$W_1(x) \le V(t,x) \le W_2(x), \quad \forall \|x\| \ge r > 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) < 0, \quad \forall \|x\| \ge r_1 \ge r$$

که $W_1(x)$ و $W_2(x)$ توابعی پیوسته و معیّن مثبت هستند. نشان دهید پاسخهای سیستم،

کراندار یکنواخت است.

راهنمایی: دقت کنید $V(t,x)$ الزاماً معیّن مثبت نیست.

تمرین ۵ ـ ۱۴ سیستم زیر مفروض است:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + \gamma(t) x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\gamma(t) x_1 - x_2 + h(t) \cos x_1$$

که $\gamma(t)$ و $h(t)$ توابعی پیوسته‌اند و به ازای جمیع مقادیر $t \ge 0$ داریم: $|h(t)| \le H$. نشان دهید پاسخهای سیستم، کراندار غایی یکنواخت جامع است و کران غایی آن را تخمین بزنید.

تمرین ۵ ـ ۱۵ سیستم زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2^5 - \gamma x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2^5 + \gamma(x_1 + x_2), \qquad 0 \le \gamma \le \frac{1}{2}$$

(الف) با شرط $\gamma = 0$ نشان دهید مبدأ پایدار مجانبی جامع است. آیا پایدار نمایی نیز هست؟

(ب) با شرط $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ نشان دهید مبدأ ناپایدار و پاسخهای سیستم نیز کراندار غایی جامع است. ضمناً ثابت کنید کران غایی سیستم، تابعی از γ و متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ می‌باشد.

تمرین ۵ ـ ۱۶ ([۱۴]) سیستم ذیل مفروض است.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a \sin x_1 - b x_1 - c x_2 - \gamma(c x_1 + 2x_2) + q(t) \cos x_1$$

که a، $b > a$، c و γ ثابتهای مثبتی هستند و $g(t)$ تابعِ پیوسته‌ای از t می‌باشد.

(الف) اگر $q(t) \equiv 0$ باشد، با استفاده از تابع

$$V(x) = \left(b + \frac{1}{2}c^2\right) x_1^2 + c x_1 x_2 + x_2^2 + 2a(1 - \cos x_1)$$

نشان دهید مبدأ پایدار نمایی جامع است.

(ب) اگر به ازای جمیع مقادیر $t \geq 0$ داشته باشیم: $|q(t)| \leq k, q(t) \neq 0$ ، راجع به پایداری سیستم بحث کنید.

تمرین ۵ ـ ۱۷ سیستم زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x}_1 = [(\sin x_2)^2 - 1]x_1$$

$$\dot{x}_2 = -bx_1 - (1+b)x_2$$

(الف) بـا شـرط $b = 0$ نشـان دهـید مـبدأ پـایدار نـمایی و پـایدار مـجانبی جـامع است.
(ب) با شرط $b \neq 0$ نشان دهید اگر $|b|$ به اندازهٔ کافی کوچک باشد، مبدأ پایدار نمایی است اما صرف‌نظر از اندازهٔ $|b|$ ، هیچگاه پایدار مجانبی جامع نیست.
(ج) از دیدگاه مبحث قوام مطرح شده در بخش ۵ ـ ۱، در مورد نتایج بند (الف) و (ب) بحث کنید و نشان دهید اگر $b = 0$ باشد، مبدأ پایدار نمایی جامع نیست.

تمرین ۵ ـ ۱۸ ([۶]) سیستم زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x}_1 = -x_1 + (x_1 + a)x_2^2, \qquad a \neq 0$$

$$\dot{x}_2 = -x_1(x_1 + a) + bx_2$$

(الف) با فرض $b = 0$ نشان دهید مبدأ پایدار مجانبی جامع است. آیا پایدار نمایی نیز هست؟
(ب) با فرض $b > 0$ ثابت کنید اگر داشته باشیم: $b < \min\{1, a^2\}$ آنگاه مبدأ پایدار نمایی است.
(ج) نشان دهید به ازای هیچ مقدار $b > 0$، مبدأ پایدار مجانبی نیست.
(د) از دیدگاه مبحث قوام مطرح شده در بخش ۵ ـ ۱، در مورد نتایج (الف) ـ (ج) بحث نمایید و نشان دهید اگر $b = 0$ باشد، مبدأ پایدار نمایی جامع نیست.
راهنمایی: در بند (د) به این نکته توجه داشته باشید که ماتریس ژاکوبیِ سیستم نامی، کراندار جامع نیست.

تمرین ۵ ـ ۱۹ سیستم عددی $\dot{x} = -x/(1+x^2)$ و $V(x) = x^4$ را در نظر بگیرید.

(الف) ثابت کنید نامساویهای (۵ ـ ۲۰) ـ (۵ ـ ۲۲) به ازای مقادیر ذیل به طور جامع برآورده می‌شود:

$$\alpha_1(r) = \alpha_2(r) = r^4; \qquad \alpha_3(r) = \frac{4r^4}{1+r^2}; \qquad \alpha_4(r) = 4r^3$$

(ب) تحقیق کنید این توابع متعلق به کلاس $\mathcal{K}_\infty$ هستند.
(ج) نشان دهید با افزایش r به سمت بینهایت، سمت راست عبارت (۵ ـ ۲۳) به سوی صفر میل می‌کند.
(د) سیستم آشفتهٔ $\dot{x} = -x/(1+x^2) + \delta$ را در نظر بگیرید که δ ثابت مثبتی است. نشان دهید اگر $\delta < \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه قطع نظر از مقدار $x(0)$، پاسخ $x(t)$ به سمت بینهایت میل می‌کند.

تمرین ۵ ـ ۲۰ سیستم عددی $\dot{x} = -x^3 + e^{-t}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید:

$$t \longrightarrow \infty \Rightarrow x(t) \longrightarrow 0$$

تمرین ۵ ـ ۲۱ برای هر یک از سیستمهای عددی ذیل، پایداری ورودی به حالت را بررسی کنید:

(الف) $\dot{x} = -(1+u)x^3$ **(ب)** $\dot{x} = -(1+u)x^3 - x^5$

(ج) $\dot{x} = -x + x^2 u$ **(د)** $\dot{x} = x - x^3 + u$

تمرین ۵ ـ ۲۲ در مورد هر یک از سیستمهای ذیل، پایداری ورودی به حالت را بررسی کنید:

(الف)
$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + u$$

(ب)
$$\dot{x}_1 = (x_1 - x_2 + u)(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$
$$\dot{x}_2 = (x_1 + x_2 + u)(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

(ج)
$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2 x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_1 + u$$

(د)
$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + u_1$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 + u_2$$

تمرین ۵ ـ ۲۳ سیستم زیر *مفروض است*:

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$$

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu$$

که $\eta \in R^{n-r}$، $\xi \in R^r$، $1 \le r < n$ و زوج (A, B) کنترل‌پذیر است. علاوه بر این سیستم $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$ (با فرض اینکه ξ ورودی باشد)، پایدار ورودی به حالت می‌باشد. کنترل پسخور حالت $u = \gamma(\eta, \xi)$ را چنان بیابید که مبدأ سیستم کامل را پایدار کند. اگر $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$ پایدار ورودی به حالت باشد، کنترل پسخور را چنان طراحی کنید که مبدأ سیستم حلقه ـ بسته، پایدار مجانبی جامع گردد.

تمرین ۵ ـ ۲۴ به کمک لم ۵ ـ ۶ نشان دهید مبدأ سیستم زیر:

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2^3$$

پایدار مجانبی است.

تمرین ۵ ـ ۲۵ شکل دیگری از قضیهٔ ۵ ـ ۲ را اثبات کنید که در آن همهٔ فرضیات برقرار است جز آنکه نامساوی (۵ ـ ۲۹) با عبارت ذیل جا به جا شده است.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, u) \le -\alpha_3(\|x\|) + \psi(u)$$

در این نامساوی $\alpha_3(\cdot)$، تابعی متعلق به کلاس $\mathcal{K}_\infty$ و $\psi(u)$ تابعی پیوسته از u (با شرط $\psi(0) = 0$) می‌باشد.

تمرین ۵ ـ ۲۶ سیستم ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_1\left[\left(\sin\frac{\pi x_2}{2}\right)^2 - 1\right]$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + u$$

(الف) با شرط $u = 0$ نشان دهید مبدأ پایدار مجانبی جامع است.

(ب) ثابت کنید برای هر ورودی کراندار $u(t)$، حالت $x(t)$ نیز کراندار است.

(ج) به ازای مقادیر $u(t) \equiv 1$، $x_1(0) = a$ و $x_2(0) = 1$، نشان دهید پاسخ سیستم برابر است با: $x_1(t) \equiv a$ و $x_2(t) \equiv 1$.

(د) آیا سیستم، پایدار ورودی به حالت است؟

تمرین ۵ ـ ۲۷ تحقیق کنید اگر $V(t) = 0$ باشد، آنگاه $D^+W(t)$ در رابطهٔ (۵ ـ ۴۱) صدق می‌کند.

راهنمایی: ابتدا نشان دهید: $V(t+h, x(t+h)) \le \frac{1}{2}c_4 h \|g(t,0)\|^2 + h\,o(h)$ که: $o(h)/h \longrightarrow 0 \Rightarrow h \longrightarrow 0$. سپس از این نکته استفاده کنید که: $\sqrt{c_4 / 2c_1} \ge 1$.

تمرین ۵ ـ ۲۸ سیستم خطی مثال ۵ ـ ۹ را در نظر بگیرید اما فرض روی $B(t)$ را به شکل $\int_0^\infty \|B(t)\|\,dt < \infty$ تغییر دهید. نشان دهید مبدأ پایدار نمایی است.

تمرین ۵ ـ ۲۹ سیستم خطی مثال ۵ ـ ۹ را در نظر بگیرید اما فرض روی $B(t)$ را به شکل $\int_0^\infty \|B(t)\|^2\,dt < \infty$ تغییر دهید. نشان دهید مبدأ پایدار نمایی است.

راهنمایی: از نامعادلهٔ ذیل (که از نامساوی کوشی ـ شوارتز نتیجه شده) استفاده کنید.

$$\int_a^b v(t)\,dt \ge \sqrt{(b-a)\int_a^b v^2(t)\,dt}, \qquad \forall v(t) \ge 0$$

تمرین ۵ ـ ۳۰ سیستم $\dot{x} = A(t)x$ را در نظر بگیرید که $A(t)$ پیوسته است. اگر داشته باشیم: $A(t) \xrightarrow[t\to\infty]{\text{جدّ}} \bar{A}$ و $\bar{A}$ هرویتز باشد، نشان دهید مبدأ پایدار نمایی است.

تمرین ۵ ـ ۳۱ بند (ب) تمرین ۵ ـ ۱۶ را در حالتی تکرار کنید که $q(t)$ کراندار باشد و داشته باشیم: $t \longrightarrow \infty \Rightarrow q(t) \longrightarrow 0$.

تمرین ۵ ـ ۳۲ سیستم $\dot{x} = f(t,x)$ را در نظر بگیرید که به ازای جمیع مقادیر $t > 0$، $x \in R^2$ و با شرط $\|f(t,x) - f(0,x)\|_2 \le \gamma(t)\|x\|_2$ بتوان نوشت: $t \longrightarrow \infty \Rightarrow \gamma(t) \longrightarrow 0$

$$f(\circ, x) = Ax - (x_1^2 + x_2^2)Bx, \qquad A = \begin{bmatrix} -\alpha & -\omega \\ \omega & -\alpha \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \beta & \Omega \\ -\Omega & \beta \end{bmatrix}$$

که α، β، ω و Ω ثابتهای مثبتی هستند. ثابت کنید مبدأ پایدار نمایی جامع است.

تمرین ۵ ـ ۳۳ سیستم آشفتهٔ (۵ ـ ۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید تابع لیاپانوف $V(t,x)$ چنان وجود داشته باشد که در روابط (۵ ـ ۳) ـ (۵ ـ ۵) صدق نماید و برای جملهٔ آشفتگی نیز داشته باشیم: $\forall t \geq \circ, \forall x \in D, \ \|g(t,x)\| \leq \delta(t)$. نشان دهید به ازای هر مقدار $\varepsilon > \circ$ و $\Delta > \circ$، مقادیر $\eta > \circ$ و $\rho > \circ$ چنان وجود دارد که اگر $\frac{1}{\Delta}\int_t^{t+\Delta} \delta(\tau)\,d\tau < \eta$ باشد، آنگاه هر پاسخ سیستم آشفته با شرط $\|x(t_\circ)\| < \rho$ و به ازای جمیع مقادیر $t \geq t_\circ$، در رابطهٔ $\|x(t_\circ)\| < \varepsilon$ صدق می‌کند. (این نتیجه را پایداری کلّی[1] در حضور آشفتگی توأم با میانگین کراندار[2] می‌نامند [۹۶]).

راهنمایی: با انتخاب $W = \sqrt{V}$، بازهٔ زمانی را با نقاط نمونه‌برداری[3] $t_\circ + i\Delta$ $(i = \circ, 1, 2, \ldots)$ گسسته کنید و ثابت کنید $W(t_\circ + i\Delta)$ در نامساوی تفاضلی[4] زیر صدق می‌کند:

$$W(t_\circ + (i+1)\Delta) \leq e^{-\alpha\Delta} W(t_\circ + i\Delta) + k\eta\Delta$$

تمرین ۵ ـ ۳۴ فرض کنید A ماتریس مربعی با ابعاد $n \times n$، با شرط $\alpha_{ij} \leq \circ$ (برای $i \neq j$) و $|\alpha_{ii}| > \sum_{j \neq i} |\alpha_{ij}|$ (برای $i = 1, 2, \ldots, n$) باشد. ثابت کنید A، ماتریس M است.

راهنمایی: نشان دهید: $\sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} > \circ, \ i = 1, \ldots, n$ و با استفاده از استقرای ریاضی[5] ثابت کنید همهٔ کهادهای پیشرو اصلیِ ماتریس مثبتند.

تمرین ۵ ـ ۳۵ فرض کنید شروط قضیهٔ ۵ ـ ۴ به ازای مقادیر ذیل برآورده شود:

$$\phi_i(x_i) = \|x_i\| \quad \text{و} \quad c_{i1}\|x_i\|^2 \leq V_i(t,x_i) \leq c_{i2}\|x_i\|^2$$

نشان دهید مبدأ پایدار نمایی است.

1. Total stability
2. Bounded mean
3. Sampling point
4. Difference inequality
5. Mathematical induction

تمرین ۵ ـ ۳۶ ([۱۱۵]) با استفاده از روش تابع مرکّب لیاپانوف، پایداری مبدأ سیستم زیر را بررسی کنید:

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 - 1/5x_1|x_2|^3$$

$$\dot{x}_2 = -x_2^5 + x_1^2 x_2^2$$

تمرین ۵ ـ ۳۷ به کمک روش تابع مرکّب لیاپانوف، پایداری مبدأ سیستم ذیل را بررسی نمایید:

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_2 x_3^3$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_1^2$$

$$\dot{x}_3 = x_1 + x_2 - x_3^3$$

تمرین ۵ ـ ۳۸ سیستم به هم پیوستهٔ زیر مفروض است:

$$\dot{x}_i = A_{ii}x_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{m} A_{ij}x_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

که x_i بردارهای n_i بُعدی و A_{ii} ماتریسهای هرویتز است. به کمک روش مرکّب لیاپانوف، راجع به پایداری مبدأ بحث کنید.

تمرین ۵ ـ ۳۹ ([۱۵۶]) می‌توان سیستمهای به هم پیوستهٔ مختلط را ذیل بحث آشفتگیهای ساختاری بررسی کرد که سبب می‌شود گروهی از زیرسیستمها در حین عمل، متصل و گروهی دیگر غیرمتصل درنظر گرفته شوند. چنین آشفتگیهای ساختاری را می‌توان به شکل زیر نمایش داد:

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_i) + g_i(t, e_{i1}x_i, \ldots, e_{im}x_m), \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

که e_{ij}، متغیری دودویی است که هرگاه jاُمین زیرسیستم روی iاُمین زیر سیستم عمل می‌کند، مقدار یک و در غیر این صورت مقدار صفر را می‌گیرد. مبدأ سیستم به هم پیوسته را پایدار

مجانبی اتصالی[1] گوییم اگر به ازای همهٔ حالتهای اتصال (یعنی برای تمامی مقادیر متغیر دودویی e_{ij})، پایدار مجانبی باشد. فرض کنید همهٔ شروط قضیهٔ ۵ ـ ۴ برقرار باشد و عبارت (۵ ـ ۶۱) نیز به شکل زیر بیان شود:

$$\| g_i(t, e_{i1}x_1, \dots, e_{im}x_m) \| \leq \sum_{i=1}^{m} e_{ij}\gamma_{ij}\phi_j(x_j)$$

ثابت کنید مبدأ پایدار مجانبی اتصالی است.

تمرین ۵ ـ ۴۰ ([۴۰]) می‌خواهیم خروجی $y(t)$ در سیستم خطی:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

ورودی مرجع[2] r را ردیابی[3] کند. کنترلگر انتگرالی ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{z} = r - Cx, \quad u = F_1 z + F_2 z$$

فرض می‌شود حالت x قابل اندازه‌گیری است و می‌توان ماتریسهای F_1 و F_2 را چنان طرح کرد که ماتریس:

$$\begin{bmatrix} A + BF_1 & BF_2 \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

هرویتز باشد.

(الف) نشان دهید اگر r مقدار ثابتی باشد، آنگاه داریم: $t \longrightarrow \infty \Rightarrow y(t) \longrightarrow r$.

(ب) اگر $r(t)$ ورودی متغیر آرام باشد، ویژگیهای ردیابی سیستم را بررسی کنید.

تمرین ۵ ـ ۴۱ ([۱۷۷]) می‌خواهیم خروجی $y(t)$ در سیستم غیرخطی:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x)$$

ورودی مرجع r را ردیابی کند. کنترلگر انتگرالی ذیل را در نظر بگیرید:

1. Connectively asymptotically stable
2. Reference input
3. Track

$$\dot{z} = r - h(x), \quad u = \gamma(x, z, r)$$

فرض می‌شود حالت x قابل اندازه‌گیری باشد و بتوان تابع γ را چنان طرح کرد که سیستم حلقه ـ بستهٔ زیر:

$$\dot{x} = f(x, \gamma(x, z, r))$$
$$\dot{z} = r - h(x)$$

دارای نقطهٔ تعادل پایدار نمایی $(\bar{x}, \bar{z})$ باشد. توابع f، h و γ نیز نسبت به آرگومانهایشان تا مرتبهٔ دوم، پیوسته ـ مشتق‌پذیرند.

(الف) نشان دهید اگر r مقدار ثابتی باشد و حالت اولیهٔ $(x(0), z(0))$ نیز به اندازهٔ کافی به $(\bar{x}, \bar{z})$ نزدیک باشد، آنگاه: $t \longrightarrow \infty \Rightarrow y(t) \longrightarrow r$.

(ب) اگر $r(t)$ ورودی متغیر آرام باشد، ویژگیهای ردیابی سیستم را بررسی کنید.

تمرین ۵ ـ ۴۲ ([۷۷]) مسأله ردیابی تمرین ۵ ـ ۴۱ را در نظر بگیرید اما فرض کنید فقط می‌توان $y = h(x)$ را اندازه گرفت. کنترلگر انتگرالی مبتنی بر رؤیتگر[1] ذیل را در نظر بگیرید.

$$\dot{z}_1 = f(z_1, u) + G(r)[y - h(z_1)]$$

$$\dot{z}_2 = r - y$$

$$u = \gamma(z_1, z_2, r)$$

و فرض کنید بتوان γ و G را چنان طرح کرد که سیستم حلقه ـ بسته دارای نقطهٔ تعادل پایدار نمایی $(\bar{x}, \bar{z})$ باشد. ویژگیهای ردیابی سیستم را در حالت زیر بررسی کنید:

(الف) r مقدار ثابتی است؛ **(ب)** $r(t)$ متغیر آرام است.

تمرین ۵ ـ ۴۳ سیستم $\dot{x} = A(t)x$ را با شرط $\|A(t)\| \leq k$ در نظر بگیرید که به ازای جمیع مقادیر $t \geq 0$ مقادیر ویژهٔ $A(t)$ در رابطهٔ $Re[\lambda(t)] \leq -\sigma$ صدق می‌کند. فرض کنید داشته باشیم: $\int_0^\infty \|A(t)\|^2 dt \leq \rho$؛ نشان دهید مبدأ $\dot{x} = A(t)x$، پایدار نمایی است.

1. Observer - based

۶

پایداری ورودی ـ خروجی

در اکثر فصلهای این کتاب برای مدلسازی سیستمهای دینامیکی غیرخطی از معادلات دیفرانسیل و یا مدلهای فضای حالت استفاده می‌کنیم. در حالت کلّی می‌توان مدل فضای حالت را به شکل زیر نمایش داد:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$$

$$y(t) = h(t, x(t), u(t))$$

که u، y و x بترتیب ورودی، خروجی و متغیرهای حالت هستند. در دیدگاه فضای حالت، بیشترین تأکید بر رفتار متغیرهای حالت معطوف می‌شود. این نکته تا این فصل نیز بخوبی رعایت شده زیرا در اکثر تحلیلها، از مدل حالت سیستم استفاده کرده و در بیشتر مواقع سیستم را بدون حضور صریح ورودی خارجی (u) در نظر گرفته‌ایم. رویکرد دیگر در مدلسازی ریاضی سیستمهای دینامیکی، روش ورودی ـ خروجی است*. مدل ورودی ـ خروجی، خروجی سیستم را مستقیماً (و بدون بیان ساختار درونی سیستم که با معادلهٔ حالت بیان می‌شود) به ورودی آن ارتباط می‌دهد. در این مدل، سیستم به عنوان جعبهٔ سیاهی[1] در نظر گرفته می‌شود که فقط از طریق پایانه‌های ورودی و خروجی می‌توان به آن دسترسی یافت. در بخش ۶ ـ ۱ به

---

* در این فصل تنها به ارائهٔ نظری اجمالی دربارهٔ روش ورودی ـ خروجی می‌پردازیم تا رابطهٔ میان پایداری لیاپانوف و پایداری ورودی ـ خروجی را بیان و واژه‌نگاریهای مورد نیاز برای تبیین قضیهٔ بهرهٔ کوچک (فصل دهم) را مطرح کنیم. برای مطالعهٔ جامع این موضوع می‌توان به [۴۳]، [۱۸۴] و یا [۱۴۶] مراجعه نمود. مبانی روش ورودی ـ خروجی در سیستمهای غیرخطی در تحقیقات سندبرگ[2] و زِیمز[3] در دههٔ ۱۹۶۰ میلادی مطرح شده است؛ برای مثال [۱۴۸]، [۱۹۲] و [۱۹۳] را ملاحظه کنید.

1. Black box 2. Sandberg 3. Zames

معرفی مدلهای ریاضی ورودی ـ خروجی و تعریف پایداری $\mathcal{L}$ می‌پردازیم که مفهوم مهمی در دیدگاه ورودی ـ خروجی است.

در بخش ۶ ـ ۲ به مطالعهٔ پایداری $\mathcal{L}$ در سیستمهای غیرخطی‌ای می‌پردازیم که با مدلهای فضای حالت نمایش داده شده‌اند. در بخش ۶ ـ ۳، مفهوم پایداری ورودی به خروجی را معرفی می‌کنیم که به طور مشخص برای مدلهای فضای حالت تعریف می‌گردد. سرانجام در بخش ۶ ـ ۴ در بارهٔ محاسبهٔ بهرهٔ $\mathcal{L}_2$[1] برای دسته‌ای از سیستمهای خودگردان بحث می‌کنیم.

۶ ـ ۱ پایداری $\mathcal{L}$

سیستمی را در نظر بگیرید که رابطهٔ ورودی ـ خروجی‌اش با معادلهٔ ذیل بیان شود:

$$y = Hu$$

H نگاشت و یا عملگری[2] است که y را بر حسب u بیان می‌کند. ورودیِ u متعلق به فضایی از سیگنالهاست که اغلب به شکل فضای خطی نُرمدار $\mathcal{L}^m$ به صورت $u:[0,\infty) \longrightarrow R^m$ در نظر گرفته می‌شود. مثالهایی از این فضا، فضای توابع پیوستهٔ قطعه‌ای و کراندار یکنواخت $\mathcal{L}_\infty^m$ با نُرم زیر است*:

$$\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} = \sup_{t\geq 0} \|u(t)\| < \infty$$

مثال دیگری از این نمونه، فضای توابع پیوستهٔ قطعه‌ای و مجذور ـ انتگرال پذیر[3] $\mathcal{L}_2^m$ ذیل می‌باشد:

$$\|u\|_{\mathcal{L}_2} = \sqrt{\int_0^\infty u^T(t)\,u(t)\,dt} < \infty$$

در حالت کلّی‌تر می‌توان فضای $\mathcal{L}_p^m$ را برای مقادیر $1 \leq p < \infty$، به صورت مجموعه‌ای از همهٔ

* برای تفاوت قائل شدن بین نُرم u به عنوان برداری در فضای $\mathcal{L}$ و نُرم $u(t)$ به عنوان برداری در R^m، نُرم اول را به شکل $\|.\|_{\mathcal{L}}$ می‌نویسیم. شایان ذکر اینکه نُرم $\|.\|_{\mathcal{L}_p}$ مورد استفاده در تعریف $\|.\|_{\mathcal{L}}$، برای هر مقدار $p\in[1,\infty]$، می تواند هر نُرم p در R^m باشد؛ اما لزوماً عدد p در هر دو نُرم یکسان نیست. برای مثال می‌توان فضای $\mathcal{L}_\infty$ را با هر یک از نرمهای $\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} = \sup_{t\geq 0} \|u(t)\|_1$، $\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} = \sup_{t\geq 0} \|u(t)\|_2$ و یا $\|.\|_{\mathcal{L}_\infty} = \sup_{t\geq 0} \|u(t)\|_\infty$ تعریف کرد؛ لیکن مرسوم آن است که فضای $\mathcal{L}_\infty$ را با نُرم ۲ در R^m تعریف می‌نمایند.

1. L_2-gain
2. Operator
3. Square - integrable

توابع پیوستهٔ قطعه‌ای $u:[0,\infty) \longrightarrow R^m$ با نُرم ذیل تعریف کرد:

$$\|u\|_{\mathcal{L}_p} = \left(\int_0^\infty \|u(t)\|^p\,dt\right)^{1/p} < \infty$$

می‌توان تحقیق کرد $\mathcal{L}_p^m$ برای جمیع مقادیر $p\in[1,\infty]$، فضای خطی نُرمدار است*.

چنانچه $u \in \mathcal{L}^m$ را به عنوان ورودیِ «خوشرفتار» در نظر بگیریم، سؤال مطرح آن است که اگر $y \in \mathcal{L}^q$ باشد (که $\mathcal{L}^q$ فضای خطی نُرمداری مشابه با $\mathcal{L}^m$ است جز آنکه در حالت کلّی تعداد متغیرهای خروجی (q) متفاوت با تعداد متغیرهای ورودی (m) می‌باشد)، آیا خروجیِ y نیز «خوشرفتار» است؟ اگر در سیستمی هر ورودی «خوشرفتار»، خروجی «خوشرفتار» را تولید کند، آن را سیستم پایدار می‌نامند. اما نمی‌توان H را به عنوان نگاشتی از $\mathcal{L}^m$ به $\mathcal{L}^q$ تعریف نمود. زیرا باید بتوان سیستمهایی را نیز بررسی کرد که ناپایدارند یعنی سیستمهایی که در آن ممکن است ورودیِ $u \in \mathcal{L}^m$، خروجی‌ای را تولید کند که متعلق به $\mathcal{L}^q$ نباشد؛ از این رو معمولاً H را به شکل نگاشتی از فضای توسعه یافتهٔ[1] $\mathcal{L}_e^m$ به فضای توسعهٔ یافتهٔ $\mathcal{L}_e^q$ تعریف می‌کنیم که $\mathcal{L}_e^m$ با عبارت ذیل تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L}_e^m = \{u \mid u_\tau \in \mathcal{L}^m,\ \forall \tau \geq 0\}$$

u_τ نیز تقطیع شدهٔ[2] u است که با عبارت زیر تعریف می‌گردد:

$$u_\tau(t) = \begin{cases} u(t), & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$$

فضای توسعه یافته $\mathcal{L}_e^m$، فضایی خطی است که فضای توسعه نیافتهٔ $\mathcal{L}^m$ زیر مجموعهٔ آن می‌باشد؛ بدین ترتیب امکانِ مواجهه با سیگنالهای بیکران و «دائماً رشد یابنده» نیز وجود دارد. برای مثال سیگنال $u(t) = t$ متعلق به فضای $\mathcal{L}_\infty$ نیست، اما تقطیع شدهٔ آن:

$$u_\tau(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$$

* تمرینهای ۲ ـ ۸ و ۲ ـ ۱۱ را ملاحظه کنید.

1. Extended space
2. Truncated

به ازای هر مقدار محدود τ به $\mathcal{L}_\infty$ تعلق دارد. بنابراین $u(t) = t$ عضوی از فضای توسعه یافتهٔ $\mathcal{L}_{\infty e}$ می‌باشد.

نگاشت $H: \mathcal{L}_e^m \longrightarrow \mathcal{L}_e^q$ را علّی[1] گوییم اگر مقدار خروجی $(Hu)(t)$ در لحظهٔ t فقط به مقادیر ورودی تا همان لحظه بستگی داشته باشد. این مفهوم با عبارت ذیل معادل است:

$$(Hu)_\tau = (Hu_\tau)_\tau$$

علیّت[2] یکی از ویژگیهای ذاتی[3] سیستمهای دینامیکی نمایش داده شده با مدل فضای حالت است.

تعریف ۶ ـ ۱ نگاشت $H: \mathcal{L}_e^m \longrightarrow \mathcal{L}_e^q$ *را پایدار* $\mathcal{L}$[4] *گوییم اگر بتوان تابع* α *متعلق به کلاس* $\mathcal{K}$ *و تعریف شده بر بازهٔ* $[0, \infty)$ *و ثابت غیر منفی* β *را چنان یافت که به ازای جمیع مقادیر* $u \in \mathcal{L}_e^m$ *و* $\tau \in [0, \infty)$ *در نامساوی ذیل صدق کنند:*

$$\|(Hu)_\tau\|_{\mathcal{L}} \le \alpha(\|u_\tau\|_{\mathcal{L}}) + \beta \qquad (۶-۱)$$

ضمناً این نگاشت پایدار با بهرهٔ محدود[5] *است اگر ثابتهای غیر منفی* γ *و* β *چنان یافت شوند که به ازای جمیع مقادیر* $u \in \mathcal{L}_e^m$ *و* $t \in [0, \infty)$ *داشته باشیم:*

$$\|(Hu)_\tau\|_{\mathcal{L}} \le \gamma \|u_\tau\|_{\mathcal{L}} + \beta \qquad (۶-۲)$$

ثابت β در عبارتهای (۶ ـ ۱) و (۶ ـ ۲) جملهٔ بایاس[6] نامیده می‌شود، این جمله بدان دلیل در تعریف گنجانده شده که Hu در $u = 0$، صفر نشود*. اگر نامساوی (۶ ـ ۲) برآورده گردد، معمولاً علاقه‌مند به یافتن کوچکترین مقدار ممکن γ هستیم که به ازای آن βیی وجود دارد که در رابطهٔ (۶ ـ ۲) صدق کند. وقتی چنین مقدار γیی پیدا شد، آن را بهرهٔ سیستم می‌نامیم و چنانچه نامساوی (۶ ـ ۲) به ازای مقداری از $\gamma \ge 0$ برقرار باشد، گوییم سیستم دارای بهرهٔ $\mathcal{L}$ کمتر از (یا مساوی با) γ است.

برای سیستمهای علّی و پایدار $\mathcal{L}$، بسادگی می‌توان نشان داد که:

* برای بررسی نقش متفاوت دیگری از جملهٔ بایاس، تمرین ۶ ـ ۳ را ملاحظه کنید.

1. Causal
2. Causality
3. Intrinsic
4. $\mathcal{L}$ - stable
5. Finite - gain $\mathcal{L}$ stable
6. Bias term

$$u \in \mathcal{L}^m \Rightarrow Hu \in \mathcal{L}^q$$

و:

$$\|Hu\|_{\mathcal{L}} \le \alpha(\|u\|_{\mathcal{L}}) + \beta, \qquad \forall u \in \mathcal{L}^m$$

در سیستمهای علّی و پایدار $\mathcal{L}$ با بهرهٔ محدود، نامساوی فوق به شکل ذیل بیان می‌شود.

$$\|Hu\|_{\mathcal{L}} \le \gamma \|u_\tau\|_{\mathcal{L}} + \beta, \qquad \forall u \in \mathcal{L}^m$$

اگر $\mathcal{L}$ فضای سیگنالهای کراندار یکنواخت باشد ($\mathcal{L}_\infty$)، تعریف پایداری $\mathcal{L}_\infty$، مشابه با مفهوم پایداری ورودی کراندار ـ خروجی کراندار خواهد بود؛ به تعبیر دیگر چنانچه سیستم، پایدار $\mathcal{L}_\infty$ باشد، آنگاه برای هر ورودی کراندارِ $u(t)$، خروجیِ $Hu(t)$ نیز کراندار خواهد بود.

مثال ۶ ـ ۱ تابع بدون حافظه[1] و متغیر با زمان $h: [0, \infty) \times R \longrightarrow R$ را می‌توان به عنوان عملگر H در نظر گرفت که هر یک از سیگنالهای ورودی $u(t)$ را به سیگنال خروجی $y(t) = h(t, u(t))$ متناظر می‌کند. ما از این عملگر ساده برای تعریف پایداری $\mathcal{L}$ استفاده می‌کنیم؛ بدین منظور فرض کنید داشته باشیم:

$$h(u) = a + b \tanh cu = a + b \frac{e^{cu} - e^{-cu}}{e^{cu} + e^{-cu}}$$

که a، b و c ثابتهایی غیرمنفی هستند. با استفاده از نکتهٔ زیر:

$$h'(u) = \frac{4bc}{(e^{cu} + e^{-cu})^2} \le bc, \qquad \forall u \in R$$

می‌توان نوشت:

$$|h(u)| \le a + bc|u|, \qquad \forall u \in R$$

بنابراین H به ازای $\gamma = bc$ و $\beta = a$، پایدار $\mathcal{L}_\infty$ با بهرهٔ محدود است. علاوه بر این اگر $a = 0$ باشد، به ازای جمع مقادیر $p \in [1, \infty)$ داریم:

$$\int_0^\infty |h(u(t))|^p dt \le (bc)^p \int_0^\infty |u(t)|^p dt$$

1. Memoryless

بنابراین برای هر یک از مقادیر $p \in [1, \infty)$، عملگر H پایدار $\mathcal{L}_p$ با بهرهٔ محدود است که مقدار بایاس آن صفر و $\gamma = bc$ می‌باشد.

فرض کنید h تابعی متغیر با زمان باشد که در عبارت زیر صدق می‌کند:

$$|h(t,u)| \le a|u|, \qquad \forall t \ge 0, \qquad \forall u \in R$$

که a ثابت مثبتی است؛ در این صورت برای هر یک از مقادیر $p \in [1, \infty)$، عملگر H به ازای بایاس صفر و $\gamma = a$، پایدار $\mathcal{L}_p$ با بهرهٔ محدود است.

سرانجام اگر داشته باشیم: $h(u) = u^2$

آنگاه با توجه به: $\sup_{t\ge 0} |h(u(t))| \le \left(\sup_{t\ge 0} |u(t)|\right)^2$

H به ازای مقدار بایاس صفر و $\alpha(r) = r^2$، پایدار $\mathcal{L}_\infty$ است. باید توجه داشت H پایدار $\mathcal{L}_\infty$ با بهرهٔ محدود نیست. زیرا نمی‌توان تابع $h(u) = u^2$ را به ازای جمیع مقادیر $u \in R$، با خط راستی به شکل $|h(u)| \le \gamma |u| + \beta$ کرانمند نمود. Δ

مثال ۶ ـ ۲ سیستمی تک ورودی ـ تک خروجی را در نظر بگیرید که با عملگر کانولوشن[1] علّی ذیل تعریف شده باشد.

$$y(t) = \int_0^t h(t-\sigma)\, u(\sigma)\, d\sigma$$

که $h(t)$ به ازای جمیع مقادیر $t < 0$، برابر با صفر است. فرض کنید $h \in \mathcal{L}_{1e}$ باشد یعنی برای هر $\tau \in [0, \infty)$ بتوان نوشت:

$$\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1} = \int_0^\infty |h_\tau(\sigma)|\, d\sigma = \int_0^\tau |h(\sigma)|\, d\sigma < \infty$$

اگر $u \in \mathcal{L}_{\infty e}$ و $\tau \ge t$ باشد، داریم.

$$|y(t)| \le \int_0^t |h(t-\sigma)|\, |u(\sigma)|\, d\sigma$$

1. Convolution

$$\le \int_0^t |h(t-\sigma)|\, d\sigma \sup_{0\le\sigma\le\tau} |u(\sigma)| = \int_0^t |h(s)|\, ds \sup_{0\le\sigma\le\tau} |u(\sigma)|$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty} \le \|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1} \|u_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty}, \qquad \forall \tau \in [0, \infty)$$

این نامساوی، مشابه عبارت (۶ ـ ۲) است اما با آن معادل نیست زیرا ثابت γ در نامساوی (۶ ـ ۲) مستقل از τ می‌باشد. اما اگر به ازای هر مقدار محدود τ، $\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1}$ نیز محدود باشد، الزاماً به معنای کرانمندی یکنواخت آن نسبت به τ نیست. به عنوان مثال برای تابع $h(t) = e^t$ داریم: $\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1} = (e^\tau - 1)$ که به ازای جمیع مقادیر $\tau \in [0, \infty)$ محدود است اما نسبت به τ کراندار یکنواخت نیست. زمانی نامساوی (۶ ـ ۲) برقرار است که داشته باشیم: $h \in \mathcal{L}_1$، یعنی:

$$\|h\|_{\mathcal{L}_1} = \int_0^\infty |h(\sigma)|\, d\sigma < \infty$$

در این صورت، نامساوی ذیل:

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty} \le \|h\|_{\mathcal{L}_1} \|u_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty}, \qquad \forall \tau \in [0, \infty)$$

نشان می‌دهد سیستم، پایدار $\mathcal{L}_\infty$ با بهرهٔ محدود است. شرط $\|h\|_{\mathcal{L}_1} < \infty$، در واقع تضمین کنندهٔ پایداری $\mathcal{L}_p$ با بهرهٔ محدود برای جمیع مقادیر $p \in [1, \infty)$ می‌باشد. ابتدا حالت $p = 1$ را در نظر می‌گیریم: برای $t \le \tau < \infty$ می‌توان نوشت:

$$\int_0^\tau |y(t)|\, dt = \int_0^\tau \left| \int_0^t h(t-\sigma) u(\sigma)\, d\sigma \right| dt \le \int_0^\tau \int_0^t |h(t-\sigma)|\, |u(\sigma)|\, d\sigma\, dt$$

در این صورت با معکوس کردن مرتبهٔ انتگرالگیری نتیجه می‌شود:

$$\int_0^\tau |y(t)|\, dt = \int_0^\tau |u(\sigma)| \int_\sigma^\tau |h(t-\sigma)|\, dt\, d\sigma \le \int_0^\tau |u(\sigma)|\, \|h\|_{\mathcal{L}_1}\, d\sigma$$

$$\le \|h\|_{\mathcal{L}_1} \|u_\tau\|_{\mathcal{L}_1}$$

بنابراین: $\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_1} \le \|h\|_{\mathcal{L}_1} \|u_\tau\|_{\mathcal{L}_1}, \qquad \forall \tau \in [0, \infty)$

اینک حالت $p \in (1, \infty)$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم مقدار $q \in (1, \infty)$ با رابطهٔ $1/p + 1/q = 1$ تعریف شود؛ در این صورت برای $t \le \tau < \infty$ داریم:

$$|y(t)| \leq \int_0^t |h(t-\sigma)|\,|u(\sigma)|\,d\sigma$$

$$= \int_0^t |h(t-\sigma)|^{1/q}\,|h(t-\sigma)|^{1/q}\,|u(\sigma)|\,d\sigma$$

$$\leq \left(\int_0^t |h(t-\sigma)|\,d\sigma\right)^{1/q}\left(\int_0^t |h(t-\sigma)|\,|u(\sigma)|^p\,d\sigma\right)^{1/p}$$

$$\leq (\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1})^{1/q}\left(\int_0^t |h(t-\sigma)|\,|u(\sigma)|^p\,d\sigma\right)^{1/p}$$

که نامعادلهٔ دوم از اعمال نامساوی هولدر به دست آمده است*. بنابراین می‌توان نوشت:

$$(|y_\tau|_{\mathcal{L}p})^p = \int_0^\tau |y(t)|^p\,dt$$

$$\leq \int_0^\tau (\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1})^{p/q}\left(\int_0^t |h(t-\sigma)|\,|u(\sigma)|^p\,d\sigma\right)dt$$

$$= (\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1})^{p/q}\int_0^\tau\int_0^t |h(t-\sigma)|\,|u(\sigma)|^p\,d\sigma\,dt$$

حال با معکوس کردن مرتبهٔ انتگرالگیری نتیجه می‌شود:

$$(\|y_\tau\|_{\mathcal{L}p})^p \leq (\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1})^{p/q}\int_0^\tau |u(\sigma)|^p\int_\sigma^\tau |h(t-\sigma)|\,dt\,d\sigma$$

$$\leq (\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1})^{p/q}\,\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1}\,\|u_\tau\|_{\mathcal{L}_1})^p = (\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1})^p\,(\|u_\tau\|_{\mathcal{L}p})^p$$

بنابراین خواهیم داشت:

* نامساوی هولدر بیانگر آن است که اگر $f \in \mathcal{L}_{pe}$، $g \in \mathcal{L}_{pe}$، $p \in [1, \infty]$ و $1/p + 1/q = 1$ باشد، آنگاه به ازای جمیع مقادیر $\tau \in [0, \infty]$ داریم ([۱۰] را ملاحظه کنید):

$$\int_0^\tau |f(t)g(t)|\,dt \leq \left(\int_0^\tau |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_0^\tau |g(t)|^q\,dt\right)^{1/q}$$

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}p} \leq \|h\|_{\mathcal{L}_1}\,\|u_\tau\|_{\mathcal{L}p}$$

به طور خلاصه اگر داشته باشیم: $\|h_\tau\|_{\mathcal{L}_1} < \infty$، آنگاه به ازای هر $p \in [1, \infty]$، عملگر کانولوشن علّی، پایدار $\mathcal{L}_p$ با بهرهٔ محدود است و نامعادلهٔ (۶ ـ ۲) نیز به ازای $\gamma = \|h\|_{\mathcal{L}_1}$ و $\beta = 0$ برقرار می‌باشد. Δ

مثال ۶ ـ ۳ سیستم خطی و نامتغیر با زمان ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = Ax + Bu, x(0) = x_0$$

$$y = Cx + Du$$

که A ماتریس هرویتز است. خروجی $y(t)$ نیز با عبارت ذیل بیان می‌شود:

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{(t-\tau)A}Bu(\tau)\,d\tau + Du(t)$$

عبارت فوق برای هر مقدار مشخص $x_0 \in R^n$، بیانگر عملگری مانند H است که به هر یک از سیگنالهای ورودی $u(t)$، مقدار متناظر سیگنال خروجی $y(t)$ را منتسب می‌کند. با توجه به ویژگی هرویتز بودن ماتریس A، می‌توان برای مقادیر مثبت k و a نوشت*:

$$\|e^{At}\| \leq ke^{-at},\ \forall t \geq 0$$

بنابراین:

$$\|y(t)\| \leq k_1 e^{-at} + k_2\int_0^t e^{-a(t-\tau)}\,\|u(\tau)\|\,d\tau + k_3\,\|u(t)\| \quad (۶-۳)$$

که:

$$k_1 = k\|C\|\,\|x_0\|,\ k_2 = k\|B\|\,\|C\|,\ k_3 = \|D\|$$

اکنون با فرض:

$$y_1(t) = k_1 e^{-at}, y_2(t) = k_2\int_0^t e^{-a(t-\tau)}\,\|u(\tau)\|\,d\tau, y_3(t) = k_3\,\|u(t)\|$$

* رابطهٔ (۳ ـ ۱۱) را ملاحظه کنید.

و در نظر گرفتن اینکه به ازای مقادیر $p \in [1, \infty)$ داریم: $u \in \mathcal{L}_{pe}^m$ و با استفاده از نتایج مثال قبل، بسادگی می‌توان تحقیق کرد که:

$$\|y_{2e}\|_{\mathcal{L}p} \le \frac{k_2}{a} \|u_e\|_{\mathcal{L}p}$$

علاوه بر این مستقیماً می‌توان نتیجه گرفت:

$$\|y_{3e}\|_{\mathcal{L}p} \le \frac{k_3}{a} \|u_e\|_{\mathcal{L}p}$$

و مشابه جملهٔ اول ($y_1(t)$) می‌توان نوشت:

$$\|y_{1e}\|_{\mathcal{L}p} \le k_1 \rho \text{ ، که: } \rho = \begin{cases} 1, & p = \infty \\ \left(\frac{1}{ap}\right)^{1/p} & p \in [1, \infty) \end{cases}$$

بنابراین به ازای مقادیر ذیل و با استفاده از نامساوی مثلث، عبارت (۶ ـ ۲) برآورده می‌شود:

$$\gamma = k_3 + \frac{k_2}{a}, \quad \beta = k_1 \rho$$

در نتیجه می‌توان گفت سیستم خطی نامتغیر با زمانِ $\{A, B, C, D\}$ (با این شرط که ماتریس A هرویتز باشد)، برای هر یک از مقادیر $p \in [1, \infty)$، پایدار $\mathcal{L}_p$ با بهرهٔ محدود است. باید توجه کرد جملهٔ بایاس β در عبارت (۶ ـ ۲)، متناسب با $\|x_0\|$ می‌باشد که با شرط $x_0 = 0$ عبارت (۶ ـ ۲) با مقدار بایاس صفر ارضا می‌شود. Δ

تعریف ۶ ـ ۱ به طور ضمنی بیانگر این نکته است که باید نامساویهای (۶ ـ ۱) یا (۶ ـ ۲) به ازای جمیع سیگنالهای موجود در فضای ورودی $\mathcal{L}^m$، برقرار باشد و این یکی از اشکالهای این تعریف است زیرا سیستمهایی را که رابطهٔ ورودی ـ خروجی‌شان صرفاً در زیر مجموعه‌هایی از فضای ورودی تعریف می‌شود، شامل نمی‌گردد. مثال ذیل این نکته را بخوبی نشان می‌دهد و مفهوم پایداری $\mathcal{L}$ سیگنال کوچک[1] را (که پس از این مثال تشریح می‌شود)، بیان می‌کند.

1. Small - signal $\mathcal{L}$ stability

مثال ۶ ـ ۴ سیستم تک ورودی ـ تک خروجیِ تعریف شده با رابطهٔ غیرخطی ذیل، مفروض است:

$$y = \tan u$$

خروجی $y(t)$ فقط زمانی تعریف می‌شود که سیگنال ورودی در بازهٔ ذیل محدود گردد:

$$|u(t)| < \frac{\pi}{2}, \qquad \forall t \ge 0$$

لذا این سیستم براساس تعریف ۶ ـ ۱ پایدار $\mathcal{L}_\infty$ نیست؛ اما اگر $u(t)$ به مجموعهٔ زیر محدود شود:

$$|u| \le r < \frac{\pi}{2}$$

آنگاه:

$$|y| \le \left(\frac{\tan r}{r}\right) |u|$$

در این صورت به ازای تمامی مقادیر $u \in \mathcal{L}_p$ و با شرط $|u(t)| \le r$ (به ازای جمیع مقادیر $t \ge 0$) سیستم در نامساوی ذیل صدق می‌کند:

$$\|y\|_{\mathcal{L}p} \le \left(\frac{\tan r}{r}\right) \|u\|_{\mathcal{L}p}$$

که p می‌تواند هر یک از اعداد متعلق به فاصلهٔ $[1, \infty]$ باشد. در فضای $\mathcal{L}_\infty$، شرط $|u(t)| \le r$ به این معناست که: $\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} \le r$ و نشاندهندهٔ آن است که نامساوی پیشگفته فقط برای سیگنالهای ورودی با نُرم کوچک صادق است؛ لیکن باید توجه داشت برای سایر فضاهای $\mathcal{L}_p$ (با مقدار $p < \infty$)، کران لحظه‌ای[1] روی $|u(t)|$، الزاماً به معنای اعمال قیدی بر نُرم سیگنال ورودی نیست، برای مثال سیگنال:

$$u(t) = re^{-rt/a}, \; a > 0$$

(که به ازای جمیع مقادیر $p \in [1, \infty]$ به $\mathcal{L}_p$ متعلق است)، در رابطهٔ کران لحظه‌ای $|u(t \ge 0)| \le r$ صدق می‌کند ولی ممکن است نُرم $\mathcal{L}_p$ی آن، یعنی: $\|u\|_{\mathcal{L}p} = r\left(\frac{a}{rp}\right)^{1/p}$, $1 \le p < \infty$ بسیار بزرگ باشد. Δ

1. Instantanous bound

تعریف ۶ ـ ۲ نگاشت $H: \mathcal{L}_e^m \longrightarrow \mathcal{L}_e^q$، پایدار $\mathcal{L}$ سیگنال کوچک (و یا متناظراً پایدار $\mathcal{L}$ سیگنال کوچک با بهرهٔ محدود[1]) است اگر ثابت مثبت r چنان وجود داشته باشد که رابطهٔ (۶ ـ ۱) (و یا متناظراً رابطهٔ (۶ ـ ۲))، به ازای جمیع مقادیر $u \in \mathcal{L}_e^m$ همراه با $\sup_{0 \le t \le r} \| u(t) \| \le r$ با برقرار باشد.

۶ ـ ۲ پایداری $\mathcal{L}$ مدلهای حالت

پایداری ورودی ـ خروجی از مفاهیم شهودی است، شاید به همین دلیل است که اغلب، پایداری سیستم دینامیکی را در چهارچوب پایداری ورودی کراندار ـ خروجی کراندار در نظر می‌گیریم. از سویی چون در بحث پایداری لیاپانوف، تأکید وافری بر مطالعهٔ پایداری نقاط تعادل و نیز رفتار مجانبیِ متغیرهای حالت داشتیم، ممکن است مطالعهٔ پایداری ورودی ـ خروجی با رویکرد پایداری لیاپانوف کمی تعجب‌آمیز باشد. در این بخش نشان خواهیم داد چگونه می‌توان به کمک ابزارهای پایداری لیاپانوف به بررسی پایداری $\mathcal{L}$ سیستمهای غیرخطیِ دارای مدل حالت پرداخت.

سیستم ذیل را در نظر بگیرید.

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(0) = x_0 \tag{۶ ـ ۴}$$

$$y = h(t, x, u) \tag{۶ ـ ۵}$$

که $x \in R^n$، $u \in R^m$، $y \in R^q$، $f: [0, \infty) \times D \times D_u \longrightarrow R^n$، نسبت به t پیوستهٔ قطعه‌ای و نسبت به (x, u) لیپ شیتز محلی می‌باشد. ضمناً تابع $h: [0, \infty) \times D \times D_u \longrightarrow R^q$ نسبت به t پیوستهٔ قطعه‌ای و نسبت به (x, u) نیز پیوسته است، علاوه بر این $D \subset R^n$ قلمرویی شامل $x = 0$ و $D_u \subset R^m$ نیز قلمرویی شامل $u = 0$ می‌باشد. با توجه به این تعریف می‌توان برای هر نقطهٔ مشخص $x_0 \in R^n$، مدل فضای حالت (۶ ـ ۴) ـ (۶ ـ ۵) را به صورت عملگری مانند H در نظر گرفت که به هر سیگنال ورودی $u(t)$، مقدار متناظر سیگنال خروجی $y(t)$ را منتسب می‌کند. فرض کنید $x = 0$، یکی از نقاط تعادل سیستم بدون ورودیِ ذیل باشد:

1. Small-signal finite-gain $\mathcal{L}$ stable

$$\dot{x} = f(t, x, 0) \tag{۶ ـ ۶}$$

موضوع این بخش آن است که اگر مبدأ معادلهٔ (۶ ـ ۶) پایدار مجانبی یکنواخت (یا پایدار نمایی) باشد، آنگاه تحت شرایط خاصی روی f و h، سیستم (۶ ـ ۴) ـ (۶ ـ ۵) برای دسته‌ای خاص از فضای سیگنال $\mathcal{L}$، پایدار $\mathcal{L}$ و یا پایدار $\mathcal{L}$ سیگنال کوچک است. نخست این مفهوم را در حالتی که مبدأ پایدار نمایی است بررسی می‌کنیم و سپس برای حالت عمومیتری که مبدأ پایدار مجانبی یکنواخت است، پی می‌گیریم.

قضیهٔ ۶ ـ ۱ فرض کنید داشته باشیم:

$$D_u = \{u \in R^m \mid \|u\| < r_u\}, \quad D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$$

و تابع $f: [0, \infty) \times D \to D_u \times R^n$، نسبت به t پیوستهٔ قطعه‌ای و نسبت (x, u) لیپ شیتز محلی باشد، ضمن اینکه تابع $h: [0, \infty) \times D \times D_u \to R^n$ نیز نسبت به t پیوستهٔ قطعه‌ای و نسبت به (x, u) پیوسته می‌باشد. علاوه بر این فرض کنید:

- $x = 0$ نقطهٔ تعادل پایدار نماییِ معادلهٔ (۶ ـ ۶) است و تابع لیاپانوف $V(t, x)$ چنان وجود دارد که شروط ذیل را به ازای جمیع مقادیر $D \times (t, x) \in [0, \infty)$ و ثابتهای مثبت c_1، c_2، c_3 و c_4 برآورده کند:

$$c_1 \|x\|^2 \le V(t, x) \le c_2 \|x\|^2 \tag{۶ ـ ۷}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, 0) \le -c_3 \|x\|^2 \tag{۶ ـ ۸}$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \le c_4 \|x\| \tag{۶ ـ ۹}$$

- f و h به ازای جمیع مقادیر $D \times D_u \times (t, x, u) \in [0, \infty)$ و برای ثابتهای غیر منفی L، η_1 و η_2 در روابط زیر صدق کنند:

$$\|f(t, x, u) - f(t, x, 0)\| \le L \|u\| \tag{۶ ـ ۱۰}$$

$$\|f(t, x, u)\| \le \eta_1 \|x\| + \eta_2 \|u\| \tag{۶ ـ ۱۱}$$

در این صورت برای هر مقدار x_0 با شرط $\|x_0\| < r\sqrt{c_1/c_2}$، سیستم (۶ ـ ۴) ـ (۶ ـ ۵) به ازای جمیع مقادیر $p \in [1, \infty]$، پایدار $\mathcal{L}_p$ی سیگنال کوچک با بهرهٔ محدود می‌باشد. به طور مشخص برای هریک از مقادیر $u \in \mathcal{L}_{pe}$ باشرط $\sup_{0 \le t \le r} \|u(t)\| < \min\{r_u, c_1 c_3 r/c_2 c_4 L\}$،

خروجی $y(t)$ به ازای جمیع مقادیر $\tau \in [0, \infty]$ در رابطهٔ ذیل صدق خواهد کرد:

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}p} \le \gamma \|u_\tau\|_{\mathcal{L}p} + \beta \qquad (۶ ـ ۱۲)$$

که:

$$\gamma = \eta_2 + \frac{\eta_1 c_2 c_4 L}{c_1 c_3}, \beta = \eta_1 \|x_0\| \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \rho$$

که:

$$\rho = \begin{cases} 1, & p = \infty \\ \left(\frac{2c_2}{c_3 p}\right)^{1/p}, & p \in [1, \infty) \end{cases}$$

علاوه بر این چنانچه مبدأ پایدارنمایی جامع باشد و همهٔ شروط نیز به طور جامع برآورده شود (یعنی: $D = R^n$ و $D_u = R^m$)، آنگاه سیستم (۶ ـ ۴) ـ (۶ ـ ۵) به ازای هر یک از مقادیر $p \in [1, \infty]$، پایدار $\mathcal{L}_p$ی با بهرهٔ محدود است و نامساوی (۶ ـ ۱۲) نیز به ازای جمیع مقادیر $x_0 \in R^n$ و $u \in \mathcal{L}_{pe}$ برقرار می‌باشد. ◇

برهان: مشتق تابع V در امتداد مسیرهای حالت (۶ ـ ۴) در رابطهٔ ذیل صدق می‌کند:

$$\dot{V}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x,0) + \frac{\partial V}{\partial x}[f(t,x,u) - f(t,x,0)]$$

$$\le -c_3 \|x\|^2 + c_4 L \|x\| \|u\|$$

حال با انتخاب $W(t) = \sqrt{V(t,x(t))}$، با شرط $V(t) \ne 0$ و به کمک $\dot{W} = \dot{V}/2\sqrt{V}$ و

رابطهٔ (۶ ـ ۷) داریم:

$$\dot{W} \le -\frac{1}{2}\left(\frac{c_3}{c_2}\right) W + \frac{c_4 L}{2\sqrt{c_1}} \|u(t)\|$$

اگر $V(t) = 0$ باشد، می‌توان تحقیق کرد که:

$$D^+ W(t) \le \frac{c_4 L}{2\sqrt{c_1}} \|u(t)\|$$

بنابراین عبارت زیر برای همهٔ مقادیر $V(t)$ برقرار است:

$$D^+ W(t) \le -\frac{1}{2}\left(\frac{c_3}{c_2}\right) W + \frac{c_4 L}{2\sqrt{c_1}} \|u(t)\|$$

از لم قیاس (لم ۲ ـ ۵)، نتیجه می‌شود $W(t)$ در نامساوی ذیل صدق می‌کند:

$$W(t) \le e^{-t c_3/2c_2} W(0) + \frac{c_4 L}{2\sqrt{c_1}} \int_0^t e^{-(t-\tau)c_3/2c_2} \|u(\tau)\| \, d\tau$$

با استفاده از عبارت (۶ ـ ۷) داریم:

$$\|x(t)\| \le \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \|x_0\| e^{-t c_3/2c_2} + \frac{c_4 L}{2c_1} \int_0^t e^{-(t-\tau)c_3/2c_2} \|u(\tau)\| \, d\tau$$

و بسادگی می‌توان صحت عبارت ذیل را تحقیق نمود:

$$\|x_0\| < r\sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \text{ و } \sup_{0 \le \sigma \le t} \|u(\sigma)\| < \frac{c_1 c_3 r}{c_2 c_4 L}$$

باید توجه داشت که $\|x(t)\| < r$ است لذا $x(t)$ در قلمرو اعتبار شروط باقی می‌ماند، حال به کمک عبارت (۶ ـ ۱۱) می‌توان نوشت:

$$\|y(t)\| \le k_1 e^{-at} + k_2 \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \|u(\tau)\| \, d\tau + k_3 \|u(t)\| \qquad (۶ ـ ۱۳)$$

که:

$$k_1 = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \|x_0\| \eta_1, k_2 = \frac{c_4 L \eta_1}{2c_1}, k_3 = \eta_2, a = \frac{c_3}{2c_2}$$

نامساوی (۶ ـ ۱۳) به شکل نامساوی (۶ ـ ۳) در مثال ۶ ـ ۳ است از این رو با تکرار همان استدلال به نامساوی (۶ ـ ۱۲) دست می‌یابیم. هنگامی که همهٔ شرایط به طور جامع برآورده شود دیگر نیازی نیست $\|x_0\|$ یا کران لحظه‌ای $\|u(t)\|$ محدود باشد و در نتیجه رابطهٔ (۶ ـ ۱۲) به ازای هر مقدار $x_0 \in R^n$ و $u \in \mathcal{L}_{pe}$ برقرار است. □

استفاده از قضیهٔ ۳ ـ ۱۲ (قضیهٔ معکوس لیاپانوف)، بیانگر وجود تابع لیاپانوفی است که در عبارتهای (۶ ـ ۷) ـ (۶ ـ ۹) صدق کند؛ لذا می‌توان به نتیجهٔ زیر دست یافت:

قضیهٔ فرعی ۶ ـ ۱ *فرض‌کنید تابع* $f(t,x,u)$ *در همسایگی مشخصی حول* $(x=0, u=0)$ *پیوسته ـ مشتق‌پذیر و ماتریسهای ژاکوبیِ* $[\partial f/\partial x]$ *و* $[\partial f/\partial u]$ *نیز نسبت به* t *به طور یکنواخت کراندار باشد ضمن اینکه* $h(t,x,u)$ *نیز در رابطهٔ (۶ ـ ۱۱) صدق کند. در این صورت اگر مبدأ* $x=0$ *نقطهٔ تعادل پایدار نماییِ معادلهٔ (۵ ـ ۲۵) باشد، آنگاه می‌توان ثابت* $r_0>0$ *را چنان یافت که برای هر* x_0 *با شرط* $\|x_0\|<r_0$، *سیستم (۶ ـ ۴) ـ (۶ ـ ۵) برای هر یک از مقادیر* $p\in[1,\infty]$، *پایدار* $\mathcal{L}_p$*ی سیگنال کوچک با بهرهٔ محدود باشد. علاوه بر این اگر همهٔ شروط به طور جامع برآورده گردد و مبدأ* $x=0$، *نقطهٔ تعادل پایدار نمایی جامعِ معادلهٔ (۶ ـ ۱۱) باشد آنگاه به ازای هر یک از مقادیر* $x_0\in R^n$، *سیستم (۶ ـ ۴) ـ (۶ ـ ۵) به ازای جمیع مقادیر* $p\in[1,\infty]$، *پایدار* $\mathcal{L}_p$*ی با بهرهٔ محدود خواهد بود.* ◇

مثال ۶ ـ ۵ سیستم تک ورودی ـ تک خروجی مرتبهٔ اول زیر مفروض است:

$$\dot{x} = -x - x^3 + u,\quad x(0) = x_0$$

$$y = \tanh x + u$$

به کمک تابع لیاپانوف $V(x)=\frac{1}{2}x^2$ می‌توان نشان داد مبدأ معادلهٔ $\dot{x}=-x-x^3$ پایدار نمایی جامع است. تابع V به ازای مقادیر $c_1=c_2=\frac{1}{2}$ و $c_3=c_4=1$، عبارتهای (۶ ـ ۷) ـ (۶ ـ ۹) را به طور جامع برآورده می‌کند. توابع f و h نیز به ازای مقادیر $L=\eta_1=\eta_2=1$ به طور جامع در روابط (۶ ـ ۱۰) ـ (۶ ـ ۱۱) صدق می‌نماید؛ بنابراین سیستم به ازای هر مقدار $x_0\in R$ و $p\in[1,\infty]$، پایدار $\mathcal{L}_p$*ی* با بهرهٔ محدود می‌باشد. Δ

مثال ۶ ـ ۶ سیستم تک ورودی ـ تک خروجی مرتبهٔ دوم ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - a\tanh x_1 + u$$

$$y = x_1$$

که a ثابتی غیرمنفی است. می‌توان این سیستم را بدون ورودی به عنوان آشفتگی در سیستم خطی و نامتغیر با زمان زیر دانست:

$$\dot{x} = Ax \quad و \quad A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

چون A هرویتز است، از حل معادلهٔ لیاپانوف: $PA+A^TP=-I$ داریم:

$$P=\begin{bmatrix} 1/5 & 0/5 \\ 0/5 & 1 \end{bmatrix}$$

و در نتیجه می‌توان از تابع $V(x)=x^TPx$ به عنوان نامزد تابع لیاپانوفِ سیستم بدون ورودی استفاده کرد؛ لذا:

$$\dot{V} = -x_1^2 - x_2^2 - ax_1\tanh x_1 - 2ax_2\tanh x_1$$

حال با توجه به: $\forall x_1\in R\ x_1\tanh x_1\geq 0$، نتیجه می‌شود:

$$\dot{V} \leq -\|x\|_2^2 + 2a\,|x_1|\,|x_2| \leq -(1-a)\,\|x\|_2^2$$

بنابراین برای همهٔ مقادیر $a<1$ و به ازای مقادیر $c_1=\lambda_{min}(P)$، $c_2=\lambda_{max}(P)$، $c_3=1-a$ و $c_4=2\|P\|_2=2\lambda_{max}(P)$، V به طور جامع در عبارتهای (۶ ـ ۷) ـ (۶ ـ ۹) صدق می‌کند. علاوه بر این توابع f و h نیز به ازای مقادیر $L=\eta_1=1$ و $\eta_2=0$، روابط (۶ ـ ۱۰) ـ (۶ ـ ۱۱) را به طور جامع برآورده می‌کنند؛ بنابراین سیستم برای هر یک از مقادیر $x_0\in R$ و $p\in[1,\infty]$، پایدار $\mathcal{L}_p$*ی* با بهرهٔ محدود است. Δ

اینک به حالت جامعتری باز می‌گردیم که در آن مبدأ معادلهٔ (۶ ـ ۶)، پایدار مجانبی

یکنواخت است و بحث خود را بر مطالعهٔ پایداری $\mathcal{L}_\infty$ متمرکز می‌کنیم؛ در این صورت با یادآوری مفهوم پایداری ورودی به حالت (بخش ۵ ـ ۳)، می‌توان قضیهٔ ذیل را بیان نمود:

قضیهٔ ۶ ـ ۲ *فرض کنید داشته باشیم:* $D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$، $D_u = \{u \in R^m \mid \|u\| < r_u\}$ *و تابع* $f: [0, \infty) \times D \times D_u \longrightarrow R^n$ *نسبت به* t *پیوستهٔ قطعه‌ای و نسبت به* (x,u) *لیپ شیتز محلی و تابع* $h: [0, \infty) \times D \times D_u \longrightarrow R^n$ *نیز نسبت به* t *پیوستهٔ قطعه‌ای و نسبت به* (x,u) *پیوسته باشد، در این صورت اگر:*

- *سیستم (۶ ـ ۴)، پایدار محلی ورودی به حالت باشد؛*
- h *به ازای جمیع مقادیر* $(t,x,u) \in [0, \infty) \times D \times D_u$ *و توابع* α_1 *و* α_2 *متعلق به کلاس* $\mathcal{K}$ *و ثابت غیرمنفی* η_3 *در رابطهٔ زیر صدق نماید**:

$$\|h(t,x,u)\| \le \alpha_1(\|x\|) + \alpha_2(\|u\|) + \eta_3$$

آنگاه می‌توان ثابت $k_1 > 0$ *را چنان یافت که به ازای هر* x_0 *(با شرط* $\|x_0\| < k_1$*)، سیستم (۶ ـ ۴) ـ (۶ ـ ۵) پایدار* $\mathcal{L}_\infty$ *سیگنال کوچک باشد. علاوه بر این اگر همهٔ فرضیات به طور جامع برآورده گردند (یعنی:* $D = R^n$ *و* $D_u = R^m$*) و معادلهٔ (۶ ـ ۴) نیز پایدار ورودی به حالت باشد، آنگاه سیستمِ (۶ ـ ۴) ـ (۶ ـ ۵)، پایدار* $\mathcal{L}_\infty$ *خواهد بود.* ◇

برهان: با توجه به تعریف ۵ ـ ۲ واضح است اگر عبارت (۶ ـ ۴) پایدار محلی ورودی به حالت باشد، آنگاه تابع β متعلق به کلاس $\mathcal{KL}$، تابع γ متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ و ثابتهای مثبت k_1 و k_2 چنان وجود دارند که برای هر حالت اولیهٔ x_0 (با شرط $\|x_0\| < k_1$) و هر ورودی $u(t)$ (با شرط $\sup_{0 \le \sigma \le t} \|u(\sigma)\| < k_2$)، پاسخ $x(t)$ در عبارت ذیل صدق می‌کند:

$$\|x(t)\| \le \beta(\|x_0\|, t) + \gamma\left(\sup_{0 \le \sigma \le t} \|u(\sigma)\|\right), \quad t > 0 \qquad (۶ ـ ۱۵)$$

اینک با استفاده از رابطهٔ (۶ ـ ۱۴) داریم:

* اگر h مستقل از t باشد و D و D_u نیز قلمروهای کرانداری باشند، می‌توان نامساوی (۶ ـ ۱۴) را از پیوستگی h نتیجه گرفت.

$$\|y(t)\| \le \alpha_1\left(\beta(\|x_0\|, t) + \gamma\left(\sup_{0 \le \sigma \le t} \|u(\sigma)\|\right)\right) + \alpha_2(\|u(t)\|) + \eta_3$$

$$\le \alpha_1(2\beta(\|x_0\|, t)) + \alpha_1\left(2\gamma\left(\sup_{0 \le \sigma \le t} \|u(\sigma)\|\right)\right) + \alpha_2(\|u(t)\|) + \eta_3$$

که در این روابط از ویژگی عمومی توابع کلاس $\mathcal{K}$ استفاده کرده‌ایم، یعنی:

$$\alpha_1(a+b) \le \alpha_1(2a) + \alpha_1(2b)$$

بنابراین:

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty} \le \gamma_0(\|u_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty}) + \beta_0 \qquad (۶ ـ ۱۶)$$

که: $\beta_0 = \alpha_1(2\beta(\|x_0\|, 0)) + \eta_3$ و $\gamma_0 = \alpha_1 \circ 2\gamma + \alpha_2$. هنگامی که تمامی شروط به طور جامع برآورده شود، نامساوی (۶ ـ ۱۵) به ازای جمیع مقادیر x_0 و جمیع مقادیر $u \in \mathcal{L}_{\infty e}$ برقرار است و در نتیجه رابطهٔ ۶ ـ ۱۶ نیز صادق می‌باشد. □

می‌توان پایداری ورودی به حالتِ معادلهٔ (۶ ـ ۴) را به کمک قضیهٔ ۵ ـ ۲ نیز بررسی کرد، در این صورت متناظر با لم ۵ ـ ۴، نتیجهٔ ذیل حاصل می‌شود.

قضیهٔ فرعی ۶ ـ ۲ *فرض کنید در همسایگی مشخصی حول* $(x=0, u=0)$*، تابع* $f(t,x,u)$ *پیوسته ـ مشتق‌پذیر و ماتریسهای ژاکوبی* $[\partial f / \partial u]$ *و نسبت به* t *کراندار یکنواخت باشند و تابع* $h(t,x,u)$ *نیز در رابطهٔ (۶ ـ ۱۴) صدق کند. در این صورت اگر سیستمِ بدون ورودی (۶ ـ ۶) دارای نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی یکنواخت در مبدأ* $(x=0)$ *باشد، آنگاه سیستم (۶ ـ ۴) ـ (۶ ـ ۵) پایدار* $\mathcal{L}_\infty$ *سیگنال کوچک است.* ◇

مثال ۶ ـ ۷ سیستم تک ورودی ـ تک خروجی مرتبهٔ اول زیر مفروض است:

$$\dot{x} = -x - 2x^3 + (1 + x^2)u^2$$

$$y = x^2 + u$$

در مثال ۵ ـ ۷ دیدیم معادلهٔ حالت، پایدار ورودی به حالت است. ضمناً تابع خروجی h نیز به ازای مقادیر $\alpha_1(r)=r^2$، $\alpha_2(r)=r$ و $\eta_3=0$ به طور جامع در (۶ ـ ۱۴) صدق می‌کند؛ بنابراین سیستم، پایدار $\mathcal{L}_\infty$ است. Δ

مثال ۶ ـ ۸ سیستم تک ورودی ـ تک خروجی مرتبهٔ دوم ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + g(t)x_2$$

$$\dot{x}_2 = -g(t)x_1 - x_2^3 + u$$

$$y = x_1 + x_2$$

که $g(t)$ به ازای جمیع مقادیر $t\geq 0$ پیوسته است، در این صورت با فرض $V=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$ داریم:

$$\dot{V} = -x_1^4 - x_2^4 + x_2 u$$

با استفاده از این نکته که:

$$x_1^4 + x_2^4 \geq \frac{1}{2}\|x\|_2^4$$

نتیجه می‌شود:

$$\dot{V} \leq -\frac{1-\theta}{2}\|x\|_2^4 - \frac{\theta}{2}\|x\|_2^4 + \|x\|_2 |u|, \quad 0<\theta<1$$

$$\leq -\frac{1-\theta}{2}\|x\|_2^4, \qquad \forall \|x\|_2 \geq \left(\frac{2|u|}{\theta}\right)^{\frac{1}{3}}$$

بنابراین V به ازای مقادیر $\alpha_1(r)=\alpha_2(r)=\frac{1}{2}r^2$، $\alpha_3(r)=\frac{1-\theta}{2}r^4$ و $\rho(r)=\left(\frac{2r}{\theta}\right)^{\frac{1}{3}}$ نامساویهای (۵ ـ ۲۸) ـ (۵ ـ ۲۹) را به طور جامع برآورده می‌کند، لذا معادلهٔ حالت، پایدار ورودی به حالت می‌باشد. علاوه بر این تابع $h=x_1+x_2$ به ازای مقادیر $\alpha_1(r)=\sqrt{2}r$، $\alpha_2=0$ و $\eta_3=0$، عبارت (۶ ـ ۱۴) را به طور جامع برآورده می‌کند بنابراین سیستم، پایدار $\mathcal{L}_\infty$ است. Δ

۶ ـ ۳ پایداری ورودی به خروجی

هنگام بررسی پایداری $\mathcal{L}_\infty$ در برهان قضیهٔ ۶ ـ ۲ دیدیم نامساوی (۶ ـ ۱۶) به ازای جملهٔ بایاس $\eta_3 + \alpha_1(2\beta(\|x_0\|,0))$ برقرار است، در حالت خاصی که $h(t,0,0)=0$ می‌باشد، معقول آن است که مقدار η_3 برابر با صفر فرض شود؛ در این صورت، جملهٔ بایاس (β_0) فقط به حالت اولیهٔ x_0 بستگی خواهد داشت. اما این جملهٔ بایاس، این واقعیت را نشان نمی‌دهد که با افزایش t به سمت بینهایت، اثر حالتهای اولیهٔ غیر صفر به سمت صفر میل می‌کند. به طور مشخص با توجه به رابطهٔ (۶ ـ ۱۵) می‌توان به جای عبارت (۶ ـ ۱۶)، نامساوی زیر را در نظر گرفت:

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \gamma_0(\|u_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty}) + \alpha_1(2\beta(\|x_0\|,t))$$

که:

$$t\longrightarrow\infty \Rightarrow \alpha_1(2\beta(\|x_0\|,t)) \longrightarrow 0$$

این عبارت نشان می‌دهد در نهایت، تابعی از کلاس $\mathcal{K}$ متعلق به نُرم $\mathcal{L}_\infty$ ورودی، خروجی y را محدود می‌کند. از این نکته می‌توان برای تعریف پایداری ورودی به خروجی[1] استفاده کرد:

تعریف ۶ ـ ۳ سیستم (۶ ـ ۴) ـ (۶ ـ ۵) *را پایدار محلی ورودی به خروجی*[2] *گوییم اگر تابع* β *متعلق به کلاس* $\mathcal{KL}$، *تابع* γ_0 *متعلق به کلاس* $\mathcal{K}$ *و ثابتهایی مثبت* k_1 *و* k_2 *چنان وجود داشته باشند که برای هر حالت اولیهٔ* $x(t_0)$ (*با شرط* $\|x(t_0)\|<k_1$) *و هر ورودی* $u(t)$ (*با شرط* $\sup_{t\geq t_0}\|u(t)\|<k_2$)، *پاسخ* $x(t)$ *به ازای هر* $t_0\leq t\leq 0$ *وجود داشته باشد و خروجی* $y(t)$ *نیز به‌ازای مقادیر* $t_0\leq t\leq 0$ *در عبارت ذیل صدق کند:*

$$\|y(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t-t_0) + \gamma_0\left(\sup_{t_0\leq\tau\leq t}\|u(\tau)\|\right) \qquad (۶-۱۷)$$

این سیستم را پایدار ورودی به خروجی گوییم اگر داشته باشیم: $D=R^n$، $D_u=R^m$ *و نامساوی (۶ ـ ۱۷) نیز به ازای جمیع حالتهای اولیهٔ* $x(t_0)$ *و ورودی کراندار* $u(t)$ *برقرار باشد.*

با توجه به تعریف ۶ ـ ۳، قضیهٔ زیر بدیهی می‌باشد:

---

1. Input-to-output stability
2. Locally input-to-output stability

قضیهٔ ۶ ـ ۳ *اگر همهٔ فرضیات قضیهٔ ۶ ـ ۲ برقرار و* $\eta_{\infty} = 0$ *باشد، آنگاه سیستم (۶ ـ ۴) ـ (۶ ـ ۵) پایدار محلی ورودی به خروجی است. علاوه بر این اگر تمامی فرضیات به طور جامع برقرار و رابطهٔ (۶ ـ ۴) نیز پایدار ورودی به حالت باشد، آنگاه سیستم (۶ ـ ۴) ـ (۶ ـ ۵)، پایدار ورودی به خروجی است.*

بدیهی است سیستمهای مثالهای ۶ ـ ۷ و ۶ ـ ۸، پایدار ورودی به خروجی هستند.

۶ ـ ۴ بهرهٔ $\mathcal{L}_2$

پایداری $\mathcal{L}_2$ نقش ویژه‌ای در تحلیل سیستمها دارد زیراکار با سیگنالهای مجذوری ـ انتگرال‌پذیر طبیعی‌تر است، چراکه می‌توان آنها را به عنوان سیگنالهای با انرژی محدود[1] در نظر گرفت*. در بسیاری از مسائل کنترل، سیستم را به شکل نگاشت ورودی ـ خروجی از ورودی اغتشاش u تا خروجی کنترل شدهٔ y (که باید کوچک باشد) در نظر می‌گیرند**. در این صورت با اعمال سیگنالهای کنترل متعلق به $\mathcal{L}_2$، هدف آن است که نگاشت ورودی ـ خروجی، پایدار $\mathcal{L}_2$ با بهرهٔ محدود باشد و ضمناً بهرهٔ $\mathcal{L}_2$ سیستم نیز کمینه گردد. در چنین سیستمهایی فقط مهم نیست که بتوان سیستم را پایدار $\mathcal{L}_2$ با بهرهٔ محدود نمود بلکه این نکته نیز اهمیت دارد که بتوان مقدار بهرهٔ $\mathcal{L}_2$ سیستم و یا کران بالای آن را محاسبه کرد. در این بخش، به محاسبهٔ بهرهٔ $\mathcal{L}_2$ در دسته‌ای خاص از سیستمهای خودگردان می‌پردازیم و از سیستمهای خطی نامتغیر با زمان آغاز می‌کنیم:

قضیهٔ ۶ ـ ۴ *سیستم خطی نامتغیر با زمان ذیل مفروض است:*

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad (۱۸ ـ ۶)$$

$$y = Cx + Du \qquad (۱۹ ـ ۶)$$

که A *ماتریس هرویتز است. اگر داشته باشیم:* $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ *آنگاه*

* چنانچه $u(t)$، جریان یا ولتاژ باشد، آنگاه $u^T(t).u(t)$ متناسب با توان لحظه‌ای سیگنال است و در نتیجه انتگرال آن روی تمامی لحظات زمان، اندازه‌ای از میزان انرژی سیگنال را نشان می‌دهد.

** منابع موجود دربارهٔ کنترل H_{∞}، مانند [۱۵]، [۴۴]، [۵۱]، [۸۱]، [۱۷۸] یا [۱۹۴] را ملاحظه کنید.

1. Finite-energy signal

بهرهٔ $\mathcal{L}_2$ *سیستم برابر است با:* $\sup_{\omega \in R} \| G(j\omega) \|_2$*.

برهان: با توجه به به خطی بودن سیستم، $x(0)$ را برابر با صفر در نظر می‌گیریم. از نظریهٔ تبدیل فوریه[2] می‌دانیم برای سیگنالهای علّی (مانند $y \in \mathcal{L}_2$)، تبدیل فوریه $(y(j\omega))$ به شکل زیر بیان می‌شود**:

$$Y(j\omega) = \int_0^{\infty} y(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

و:

$$Y(j\omega) = G(j\omega)\, U(j\omega)$$

با استفاده از قضیهٔ پارسوال[3] می‌توان نوشت***:

$$\|y\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \int_0^{\infty} y^T(t) y(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y^*(j\omega) Y(j\omega)\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U^*(j\omega) G^T(-j\omega) G(j\omega) U(j\omega)\, d\omega$$

$$\leq \left(\sup_{\omega \in R} \| G(j\omega) \|_2 \right)^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U^*(j\omega) U(j\omega)\, d\omega$$

$$= \left(\sup_{\omega \in R} \| G(j\omega) \|_2 \right)^2 \| u \|_{\mathcal{L}_2}^2$$

که نشان می‌دهد بهرهٔ $\mathcal{L}_2$ کمتر از یا مساوی با $\sup_{\omega \in R} \| G(j\omega) \|_2$ می‌باشد. اثبات اینکه

* این عبارت نُرم دو القایی مربوط به ماتریس مختلط $G(j\omega)$ است که برابر با:

$$\sigma_{max}[G(j\omega)] = \sqrt{\lambda_{max}[G^T(-j\omega)\, G(j\omega)]}$$

می‌باشد. اگر $G(j\omega)$ مؤلفه‌ای از فضای هاردی[1] (H_{∞}) باشد، این مقدار به عنوان نُرم H_{∞} مربوط به $G(j\omega)$ شناخته می‌شود؛ [۵۱] را ملاحظه کنید. ** [۴۳] را ملاحظه کنید.

*** قضیهٔ پارسوال بیانگر این نکته است که برای سیگنال علّیِ $y \in \mathcal{L}_2$ می‌توان نوشت [۴۳]:

$$\int_0^{\infty} y^T(t) y(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y^*(j\omega) Y(j\omega)\, d\omega$$

1. Hardy space 2. Fourier transform 3. Parseval's theorem

بهرهٔ $\mathcal{L}_2$ برابر با $\sup_{\omega \in R} \| G(j\omega) \|_2$ است به کمک برهان خلف در پیوست آ ـ ۹ آمده است. □

حالت سیستمهای خطی نامتغیر با زمان، حالتی استثنایی است که در آن می‌توان دقیقاً بهرهٔ $\mathcal{L}_2$ را یافت. در حالت کلّی‌تر (مانند حالت مطرح در قضیهٔ زیر)، فقط می‌توان کران بالایی بهرهٔ $\mathcal{L}_2$ را به دست آورد:

قضیهٔ ۶ ـ ۵ *سیستم غیرخطی و خودگردان ذیل مفروض است:*

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \quad x(0) = x_0 \qquad (۶ ـ ۲۰)$$

$$y = h(x) \qquad (۶ ـ ۲۱)$$

که تابع $f(x)$ لیپ شیتز محلی و توابع $G(x)$ و $h(x)$ نیز روی R^n پیوسته است. G ماتریسی با ابعاد $n \times m$ و تابع $h: R^n \longrightarrow R^q$ می‌باشد، توابع f و h در مبدأ صفر می‌شوند؛ یعنی: $f(0)=0$ و $h(0)=0$. فرض کنید γ عددی مثبت باشد و بتوان تابع پیوسته ـ مشتق‌پذیر و نیمه معیّن مثبت $V(x)$ را چنان یافت که به ازای جمیع مقادیر $x \in R^n$ در نامساوی ذیل صدق نماید:

$$\mathcal{H}(V,f,G,h,\lambda) \triangleq \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} G(x) G^T(x) \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T + \frac{1}{2} h^T(x) h(x) \leq 0$$

(۶ ـ ۲۲)

در این صورت برای هر مقدار $x_0 \in R^n$، سیستم (۶ ـ ۲۰) ـ (۶ ـ ۲۱)، پایدار $\mathcal{L}_2$ با بهرهٔ محدود است و بهرهٔ $\mathcal{L}_2$ آن کمتر از یا مساوی با γ می‌باشد. ◇

برهان: با کامل کردن مربعات داریم:

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} G(x)u = -\frac{1}{2}\gamma^2 \left\| u - \frac{1}{\gamma^2} G^T(x) \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T \right\|_2^2 + \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$$

$$+ \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} G(x) G^T(x) \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T + \frac{1}{2}\gamma^2 \| u \|_2^2 +$$

با جایگزینی عبارت ۶ ـ ۲۲، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} G(x)u \leq \frac{1}{2}\gamma^2 \| u \|_2^2 - \frac{1}{2}\| y \|_2^2$$

$$-\frac{1}{2}\gamma^2 \left\| u - \frac{1}{\gamma^2} G^T(x) \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T \right\|_2^2$$

بنابراین:

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} G(x)u \leq \frac{1}{2}\gamma^2 \| u \|_2^2 - \frac{1}{2}\| y \|_2^2 \qquad (۶ ـ ۲۳)$$

شایان ذکر اینکه عبارت سمت چپ (۶ ـ ۲۳)، مشتق تابع V در امتداد مسیرهای حالت سیستم (۶ ـ ۲۰) می‌باشد. با انتگرالگیری از عبارت (۶ ـ ۲۳) داریم:

$$V(x(\tau)) - V(x_0) \leq \frac{1}{2}\gamma^2 \int_0^\tau \| u(t) \|_2^2 dt - \frac{1}{2}\int_0^\tau \| y(t) \|_2^2 dt$$

که $x(t)$، پاسخ معادلهٔ (۶ ـ ۲۰) به ازای هر مقدار $u \in \mathcal{L}_{2e}$ است؛ اینک با استفاده از شرط $V(x) \geq 0$ نتیجه می‌شود:

$$\int_0^\tau \| y(t) \|_2^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^\tau \| u(t) \|_2^2 dt + 2V(x_0)$$

با محاسبهٔ جذر عبارت فوق و استفاده از نامساوی $\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$ (برای اعداد غیر منفیِ a و b)، داریم:

$$\| y_\tau \|_{\mathcal{L}_2} \leq \gamma \| u_\tau \|_{\mathcal{L}_2} + \sqrt{2V(x_0)} \qquad (۶ ـ ۲۴)$$

که برهانِ قضیه را کامل می‌کند. □

نامساوی (۶ ـ ۲۲) به نام *نامساوی همیلتون ـ ژاکوبی*[1] خوانده می‌شود (اگر $\leq$ به $=$ تبدیل گردد، این عبارت، *تساوی همیلتون ـ ژاکوبی* نامیده می‌شود). جستجو برای یافتن تابع $V(x)$ مورد نیاز در رابطهٔ (۶ ـ ۲۲)، مستلزم حل معادلهٔ دیفرانسیل با مشتق جزئی است که ممکن است با چندان آسان نباشد. در ادامهٔ روند یافتن می‌یابیم $V(x)$ به نتیجهٔ پایداری $\mathcal{L}_2$ بهرهٔ محدود دست

1. Hamilton -Jacobi inequality

می‌یابیم که برخلاف قضیهٔ ۶ ـ ۱، نیازی به این نکته ندارد که مبدأ سیستمِ بدون ورودی، پایدار نمایی باشد. این نکته در طی مثال بعد تشریح شده است:

مثال ۶ ـ ۹ سیستم تک ورودی ـ تک خروجی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a x_1^3 - k x_2 + u$$

$$y = x_2$$

که a و k ثابتهای مثبتی هستند. در این حالت، سیستمِ بدون ورودی، حالت خاصی از دسته سیستمهای مورد بحث در مثال ۳ ـ ۹ می‌باشد، در آن مثال با استفاده از تابع لیاپانوف شبه انرژی: $V(x) = \frac{1}{4} a x_1^4 + \frac{1}{2} x_2^2$ نشان دادیم مبدأ پایدار مجانبی جامع است. اکنون به کمک تابع $V(x) = \alpha\left(\frac{1}{4} a x_1^4 + \frac{1}{2} x_2^2\right)$ (با شرط $\alpha > 0$) به عنوان نامزد پاسخ نامساوی همیلتون ـ ژاکوبی (۶ ـ ۲۲) می‌توان نشان داد:

$$\mathcal{H}(V, f, G, h, \gamma) = \left(-\alpha k + \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} + \frac{1}{2}\right) x_2^2$$

برای برقراری عبارت (۶ ـ ۲۲) لازم است مقادیر $\alpha > 0$ و $\gamma > 0$ چنان انتخاب شوند که داشته باشیم:

$$-\alpha k + \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} + \frac{1}{2} \le 0 \qquad (۶ ـ ۲۵)$$

با ساده کردن عبارت فوق می‌توان نوشت:

$$\gamma^2 \ge \frac{\alpha^2}{2\alpha k - 1}$$

چون به دنبال یافتن کوچکترین مقدار ممکن γ هستیم، α را چنان برمی‌گزینیم که سمت راست نامساوی فوق را کمینه کند. کمترین مقدار $(1/k^2)$ در نقطهٔ $\alpha = 1/k$ به دست می‌آید؛ بنابراین با انتخاب $\gamma = 1/k$ نتیجه می‌شود سیستم، پایدار $\mathcal{L}_2$ با بهرهٔ محدود است و بهرهٔ $\mathcal{L}_2$ آن کمتر از یا مساوی با $1/k$ می‌باشد، البته باید توجه داشت در این مثال، شرایط قضیهٔ ۶ ـ ۱ برآورده نشده

زیرا مبدأ سیستمِ بدون ورودی، پایدار نمایی نیست. خطی شدهٔ سیستم در مبدأ به ماتریس زیر منتهی می‌شود که هرویتز نمی‌باشد.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -k \end{bmatrix} \qquad \Delta$$

نکتهٔ مطرح شده در مثال قبل، در مثال ذیل تعمیم داده شده است:

مثال ۶ ـ ۱۰ سیستم غیرخطی با معادلات (۶ ـ ۲۰) ـ (۶ ـ ۲۱) را با شرط $m = q$ در نظر بگیرید و فرض کنید تابع پیوسته ـ مشتق‌پذیر و نیمه معیّن مثبتِ $W(x)$ چنان وجود داشته باشد که به ازای جمیع مقادیر $x \in R^n$ در روابط ذیل صدق نماید*:

$$\frac{\partial W}{\partial x} f(x) \le -k h^T(x) h(x), \quad k > 0 \qquad (۶ ـ ۲۶)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} G(x) = h^T(x) \qquad (۶ ـ ۲۷)$$

با استفاده از $V(x) = \alpha W(x)$ (با شرط $\alpha > 0$)، به عنوان نامزد پاسخ نامساوی همیلتون ـ ژاکوبیِ (۶ ـ ۲۲)، می‌توان نشان داد:

$$\mathcal{H}(V, f, G, h, \gamma) = \left(-\alpha k + \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} + \frac{1}{2}\right) h^T(x) h(x)$$

برای برقرار بودن رابطهٔ (۶ ـ ۲۲)، باید مقادیر $\alpha > 0$ و $\gamma > 0$ را چنان برگزینیم که داشته باشیم:

$$-\alpha k + \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} + \frac{1}{2} \le 0$$

این نامساوی شبیه به نامساوی (۶ ـ ۲۵) در مثال ۶ ـ ۹ است، از این رو با تکرار همان بحث می‌توان نشان داد سیستم، پایدار $\mathcal{L}_2$ با بهرهٔ محدود می‌باشد و مقدار بهرهٔ $\mathcal{L}_2$ آن کمتر از یا مساوی با $1/k$ است. Δ

---

* در بخش ۱۰ ـ ۳ خواهیم دید سیستمی که روابط (۶ ـ ۲۶) ـ (۶ ـ ۲۷) را برآورده کند، سیستم اکیداً غیرفعال خروجی[1] نامیده می‌شود.

1. Output strictly passive system

مثال ۶ ـ ۱۱ سیستم غیر خطیِ معادلات (۶ ـ ۲۰) ـ (۶ ـ ۲۱) را با شرط $m=q$ در نظر بگیرید و فرض کنید تابع پیوسته ـ مشتق‌پذیر و نیمه معیّن مثبتِ $W(x)$ چنان وجود داشته باشد که به ازای جمیع مقادیر $x \in R^n$، در روابط ذیل صدق نماید*:

$$\frac{\partial W}{\partial x} f(x) \leq 0 \qquad (۶ ـ ۲۸)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} G(x) = h^T(x) \qquad (۶ ـ ۲۹)$$

در این صورت اعمال قانون کنترل پسخور خروجی زیر:

$$u = -ky + v, \; k > 0$$

به سیستم حلقه ـ بستهٔ ذیل منجر می‌شود:

$$\dot{x} = f(x) - kG(x)G^T(x)\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^T + G(x)v \triangleq f_c(x) + G(x)v$$

$$y = h(x) = G^T(x)\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^T$$

بسادگی می‌توان تحقیق کرد برای سیستم حلقه ـ بسته، $W(x)$ در روابط (۶ ـ ۲۶) ـ (۶ ـ ۲۷) مربوط به مثال قبل صدق می‌کند؛ بنابراین نگاشت ورودی ـ خروجی از v به y، پایدار $\mathcal{L}_2$ با بهرهٔ محدود است و بهرهٔ $\mathcal{L}_2$ آن کمتر از یا مساوی با $1/k$ می‌باشد، این مثال نشان می‌دهد می‌توان با انتخاب بهرهٔ پسخور k به اندازهٔ کافی بزرگ، مقدار بهرهٔ $\mathcal{L}_2$ را به اندازهٔ دلخواه کوچک نمود. Δ

مثال ۶ ـ ۱۲ سیستم خطی نامتغیر با زمان زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

* در بخش ۱۰ ـ ۳، سیستمی که در روابط (۶ ـ ۲۸) ـ (۶ ـ ۲۹) صدق کند به عنوان سیستم غیرفعال[1] معرفی خواهد شد. در آن بخش به این مثال بازمی‌گردیم و آن را از دیدگاه اتصال پسخور سیستمهای غیرفعال بررسی خواهیم کرد.

1. Passive system

فرض کنید پاسخ نیمه معیّن مثبت P برای معادلهٔ ریکاتی ذیل وجود داشته باشد:

$$PA + A^TP + \frac{1}{\gamma^2}PBB^TP + C^TC = 0 \qquad (۶ ـ ۳۰)$$

که γ مقداری مثبت است. با انتخاب $V(x) = \frac{1}{2}x^TPx$ و با استفاده از رابطهٔ $[\partial V/\partial x] = x^TP$، بسادگی می‌توان نشان داد $V(x)$ در معادلهٔ همیلتون ـ ژاکوبی صدق می‌کند:

$$\mathcal{H}(V, Ax, B, Cx) = x^TPAx + \frac{1}{2\gamma^2}x^TPB^TBPx + \frac{1}{2}x^TC^TCx = 0$$

بنابراین سیستم، پایدار $\mathcal{L}_2$ با بهرهٔ محدود است و مقدار بهرهٔ آن کمتر از یا مساوی با γ می‌باشد. این نتیجه روش دیگری را برای محاسبهٔ کران بالای بهرهٔ $\mathcal{L}_2$ ارائه می‌دهد که در تقابل با روش محاسباتی حوزهٔ فرکانس در قضیهٔ ۶ ـ ۴ می‌باشد. نکتهٔ قابل توجه آنکه وجود پاسخ نیمه معیّن مثبت برای معادلهٔ (۶ ـ ۳۰)، شرط لازم و کافی برای آن است که بهرهٔ $\mathcal{L}_2$ کوچکتر از یا مساوی با γ باشد*. Δ

در قضیهٔ ۶ ـ ۵ فرض کردیم تمامی شروط به طور جامع برقرار هستند، لیکن از برهان قضیه مشخص است اگر فرضیات، فقط در قلمرو محدود D برآورده شوند، آنگاه تا زمانی که پاسخ معادلهٔ (۶ ـ ۲۰) درون D قرار دارد، می‌توان همچنان به نامعادلهٔ (۶ ـ ۲۴) دست یافت.

قضیهٔ فرعی ۶ ـ ۳ *فرض کنید همهٔ فرضیات قضیهٔ ۶ در قلمرو $D \subset R^n$، که شامل مبدأ نیز هست، برآورده شوند؛ در این صورت برای هر مقدار $x_0 \in D$ و هر مقدار $u \in \mathcal{L}_{2e}$، که برای آنها پاسخ معادلهٔ (۶ ـ ۲۰) در شرط $\forall t \in [0, \tau] \; x(t) \in D$ صدق کند، داریم:*

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_2} \leq \gamma \|u_\tau\|_{\mathcal{L}_2} + \sqrt{2V(x_0)} \qquad \diamond$$

با یادآوری تعریف پایداری ورودی به حالت در بخش ۵ ـ ۳، می‌توان نتیجهٔ زیر را راجع به پایداری $\mathcal{L}_2$ سیگنال کوچک بیان کرد:

* برهان شرط لازم را در [۴۴] ملاحظه کنید.

لم ۶ ـ ۱ *فرض کنید همهٔ فرضیات قضیهٔ ۶ ـ ۵ در قلمرو $D\subset R^n$، که شامل مبدأ نیز است، برقرار و معادلهٔ حالت (۶ ـ ۲۰) نیز پایدار محلی ورودی به حالت باشد، در این صورت ثابت مثبت r_0 چنان وجود دارد که برای هر x_0 با شرط $\|x_0\|_2<r_0$، سیستم (۶ ـ ۲۰) ـ (۶ ـ ۲۱)، پایدار $\mathcal{L}_2$ سیگنال کوچک با بهرهٔ محدود است و مقدار بهرهٔ $\mathcal{L}_2$ آن کوچکتر از یا مساوی با γ می‌باشد.* ◇

برهان: با یادآوری تعریف ۵ ـ ۲، واضح است اگر (۶ ـ ۲۰) پایدار محلی ورودی به حالت باشد، آنگاه تابع β متعلق به کلاس $\mathcal{KL}$، تابع γ_0 متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ و ثابتهای مثبت k_1 و k_2 چنان وجود دارند که برای هر حالت اولیهٔ x_0 با شرط $\|x_0\|_2<k_1$ و هر ورودی $u(t)$ با شرط $\sup_{0\le\sigma\le t}\|u(\sigma)\|_2<k_2$، پاسخ $x(t)$ به ازای جمیع مقادیر $t\ge 0$ در رابطهٔ ذیل صدق کند:

$$\|x(t)\|_2\le\beta(\|x_0\|_2,t)+\gamma_0\left(\sup_{0\le\sigma\le t}\|u(\sigma)\|_2\right)$$

بنابراین با انتخاب مقادیر کوچکی برای k_1 و k_2 و قرار دادن $r_0=k_1$ می‌توان مطمئن شد به ازای جمیع مقادیر $t\ge 0$ داریم: $x(t)\in D$. در این صورت لم از قضیهٔ فرعی ۶ ـ ۳ نتیجه می‌شود. □

می‌توان به کمک قضیهٔ ۵ ـ ۲، پایداری ورودی به حالت سیستم (۶ ـ ۲۰) را بررسی کرد، در لم ذیل دو حالت سادهٔ قابل تحقیق ذکر شده است:

لم ۶ ـ ۲ *فرض کنید فرضیات قضیهٔ ۶ ـ ۵ در قلمرو $D\subset R^n$، که شامل مبدأ نیز هست، برقرار و تابع $f(x)$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر و یکی از دو شرط ذیل نیز صادق باشد:*

الف ـ ماتریس $A=[\partial f/\partial x](0)$ هرویتز است؛

ب ـ هیچیک از پاسخهای سیستم بدون ورودیِ $\dot{x}=f(x)$ (بجز پاسخ بدیهی $x(t)\equiv 0$) نمی‌توانند به طور دائم در مجموعهٔ $S=\{x\in D\mid h(x)=0\}$ باقی بمانند.

دراین صورت مبدأ معادلهٔ $\dot{x}=f(x)$، پایدار مجانبی است و ثابت مثبت r_0 چنان وجود دارد که

برای هر مقدار x_0 با شرط $\|x_0\|_2<r_0$، سیستم (۶ ـ ۲۰) ـ (۶ ـ ۲۱) پایدار $\mathcal{L}_2$ سیگنال کوچک با بهرهٔ محدود است که مقدار بهرهٔ $\mathcal{L}_2$ آن کمتر از یا مساوی با γ می‌باشد. ◇

برهان: در حالت «الف»، پایداری مجانبی مبدأ سیستم $\dot{x}=f(x)$، از قضیهٔ ۳ ـ ۷ حاصل می‌شود. در حالت «ب»، با شرط $u(t)\equiv 0$ و به کمک رابطهٔ (۶ ـ ۲۲) داریم:

$$\dot{V}(x)=\frac{\partial V}{\partial x}f(x)\le-\frac{1}{2}h^T(x)h(x),\qquad\forall x\in D\qquad(۶-۳۱)$$

فرض کنید $B_r=\{x\in R^n\mid\|x\|_2\le r\}$ درون مجموعهٔ D باشد، بنابراین باید ثابت کنیم $V(x)$ در مجموعهٔ B_r، معیّن مثبت است؛ بدین منظور $\phi(t,x)$ را پاسخی از معادلهٔ $\dot{x}=f(x)$ در نظر می‌گیریم که از نقطهٔ $\phi(0,x)=x\in B_r$ آغاز شده است، اکنون با استفاده از وجود و یکتایی پاسخ (قضیهٔ ۲ ـ ۲) و وابستگی پیوستهٔ پاسخ معادله به حالتهای اولیه (قضیهٔ ۲ ـ ۵) می‌توان مقدار $\delta>0$ را چنان یافت که برای هر یک از مقادیر $x\in B_r$، پاسخ $\phi(t,x)$ برای همهٔ مقادیر $t\in[0,\delta]$ درون D بماند، حال با انتگرالگیری از رابطهٔ (۶ ـ ۳۱) روی بازهٔ $[0,\tau]$ (با شرط $\tau\le\delta$) خواهیم داشت:

$$V(\phi(\tau,x))-V(x)\le-\frac{1}{2}\int_0^\tau\|h(\phi(t,x))\|_2^2dt$$

با توجه به $V(\phi(\tau,x))\ge 0$ می‌توان نوشت:

$$V(x)\ge\frac{1}{2}\int_0^\tau\|h\phi((t,x))\|_2^2dt$$

اکنون با تعریف: $V_a(x)=\frac{1}{2}\inf_{\tau\le[0,\delta]}\int_0^\tau\|h\phi((t,x))\|_2^2dt$ داریم:

$$V(x)\ge V_a(x)\ge 0$$

فرض کنید مقدار $\bar{x}\neq 0$ چنان وجود داشته باشد که برای آن بتوان نوشت: $V(\bar{x})=0$، در این صورت نامساوی فوق بدین معناست که $V_a(\bar{x})=0$ می‌باشد، بنابراین:

$$\int_{0}^{\tau} \| h\phi((t, \bar{x})) \|_{2}^{2} dt = 0, \quad \forall \tau \in [0, \delta] \Rightarrow h(\phi(t, \bar{x})) \equiv 0 \quad \forall t \in [0, \delta]$$

از آنجا که در طی این بازهٔ زمانی، پاسخ درون مجموعهٔ S باقی می‌ماند و چون بنا به فرض تنها پاسخی که می‌تواند در S واقع شود، پاسخ بدیهی است، لذا نتیجه می‌شود: $\phi(t, \bar{x}) \equiv 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$، بنابراین تابع $V(x)$ در مجموعهٔ B_r معیّن مثبت است. با استفاده از $V(x)$ به عنوان نامزد تابع لیاپانوف برای سیستم $\dot{x} = f(x)$، از رابطهٔ (۶ ـ ۳۱) و اصل پایایی لاسَل (قضیهٔ فرعی ۳ ـ ۱) نتیجه می‌شود مبدأ $\dot{x} = f(x)$، پایدار مجانبی است؛ ادامهٔ برهان براساس لم‌های ۵ ـ ۴ و ۶ ـ ۱ بیان می‌شود. □

مثال ۶ ـ ۱۳ به عنوان تغییری در موضوع مثالهای ۶ ـ ۹ و ۶ ـ ۱۰، سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a\left(x_1 - \frac{1}{3}x_1^3\right) - kx_2 + u$$

$$y = x_2$$

که $a, k > 0$ است. تابع $V(x) = \alpha\left[a\left(\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{12}x_1^4\right) + \frac{1}{2}x_2^2\right]$ با شرط $\alpha > 0$، در مجموعهٔ $\{ |x_1| \leq \sqrt{6} \}$ نیمه معیّن مثبت می‌باشد. با استفاده از تابع $V(x)$ به عنوان نامزدی برای نامساوی همیلتون ـ ژاکوبیِ رابطهٔ (۶ ـ ۲۲)، می‌توان نشان داد:

$$\mathcal{H}(V, f, G, h, \gamma) = \left(-\alpha k + \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} + \frac{1}{2}\right)x_2^2$$

با تکرار استدلال مذکور در مثال ۶ ـ ۹، بسادگی می‌توان ملاحظه کرد با انتخاب $\alpha = \gamma = 1/k$، نامساوی (۶ ـ ۲۲) به ازای جمیع مقادیر $x \in R^2$ برقرار است. چون شروط قضیهٔ ۶ ـ ۵ به طور جامع برآورده نمی‌شود، می‌توان به کمک لم ۶ ـ ۲، در خصوص پایداری سیگنال کوچک با بهرهٔ محدود بحث نمود؛ در این مثال شرط «الف» برقرار است زیرا خطی‌سازی سیستمِ بدون ورودی در مبدأ، به ماتریس هرویتز ذیل منجر می‌گردد:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -k \end{bmatrix}$$

علاوه بر این شرط «ب» نیز در قلمرو $D = \{ |x_1| < \sqrt{3} \}$ برقرار است زیرا:

$$x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t)\left[3 - x_1^2(t)\right] \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) \equiv 0$$

بنابراین می‌توان گفت سیستم، پایدار $\mathcal{L}_2$ سیگنال کوچک با بهرهٔ محدود است و مقدار بهرهٔ $\mathcal{L}_2$ کوچکتر از یا مساوی با $1/k$ می‌باشد. Δ

POWEREN.IR

۶ـ۵ تمرینها

تمرین ۶ ـ ۱ نشان دهید اتصال متوالی دو سیستم پایدار $\mathcal{L}$ (و یا متناظراً پایدار $\mathcal{L}$ بابهرهٔ محدود)، پایدار $\mathcal{L}$ (و یا متناظراً پایدار $\mathcal{L}$ با بهرهٔ محدود) است.

تمرین ۶ ـ ۲ نشان دهید اتصال موازی دو سیستم پایدار $\mathcal{L}$ (و یا متناظراً پایدار $\mathcal{L}$ با بهرهٔ محدود)، پایدار $\mathcal{L}$ (و یا متناظراً پایدار $\mathcal{L}$ با بهرهٔ محدود) است.

تمرین ۶ ـ ۳ سیستم تعریف شده با تابع بدون حافظهٔ $y = u^{\frac{1}{3}}$ را در نظر بگیرید:

(الف) نشان دهید سیستم با مقدار بایاس صفر، پایدار $\mathcal{L}_\infty$ است.

(ب) نشان دهید سیستم به ازای هر مقدار ثابت a، پایدار $\mathcal{L}_\infty$ با بهرهٔ محدود است و برای آن داریم: $\gamma = a$ و $\beta = (1/a)^{\frac{1}{2}}$.

(ج) دو بند فوق را با هم مقایسه کند.

تمرین ۶ ـ ۴ سیستم بدون حافظهٔ $y = h(u)$ را در نظر بگیرید که تابع $h : R^m \longrightarrow R^q$، لیپ ـ شیتز جامع است. پایداری $\mathcal{L}_p$ را برای مقادیر $p \in [1, \infty]$ در حالتهای زیر بررسی کنید:

(۱) $h(0) = 0$ ؛ (۲) $h(0) \neq 0$

تمرین ۶ ـ ۵ مثال ۶ ـ ۳ را برای سیستمهای خطی و متغیر با زمان تکرار کنید.

تمرین ۶ ـ ۶ برای هر یک از سیستمهای عددی زیر، پایداری $\mathcal{L}_\infty$ و نیز پایداری $\mathcal{L}_\infty$ با بهرهٔ محدود را بررسی کنید:

(۱) $\dot{x} = -(1+u)x^3$, $y = x$

(۲) $\dot{x} = -(1+u)x^3 - x^5$, $y = x + u$

(۳) $\dot{x} = -x + x^2 u$, $y = \sin x$

(۴) $\dot{x} = x - x^3 + u$, $y = \tan x$

تمرین ۶ ـ ۷ برای هریک از سیستمهای ذیل، پایداری $\mathcal{L}_\infty$ و نیز پایداری $\mathcal{L}_\infty$ با بهرهٔ محدود را بررسی کنید:

(۱)
$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + u$$
$$y = 1/x_1$$

(۲)
$$\dot{x}_1 = (x_1 - x_2 + u)(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$
$$\dot{x}_2 = (x_1 + x_2 + u)(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$
$$y = x_1^2 + x_2^2$$

(۳)
$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2 x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_1 + u$$
$$y = -x_2 + x_1 + u$$

(۴)
$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + u_1$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 + u_2$$
$$y = x_1 (x_2 + u)$$

تمرین ۶ ـ ۸ فرض کنید همهٔ فرضیات قضیهٔ ۶ ـ ۱ برقرار باشد مگر شرط (۶ ـ ۱۱) که با نامساوی زیر جایگزین شده است:

$$\|h(t,x,u)\| \leq \eta_1 \|x\| + \eta_2 \|u\| + \eta_3, \quad \eta_3 > 0$$

نشان دهید سیستم، پایدار $\mathcal{L}_\infty$ سیگنال کوچک با بهرهٔ محدود است (اگر همهٔ شروط به طور جامع برآورده شوند، پایدار $\mathcal{L}_\infty$ با بهرهٔ محدود خواهد بود). ثابتهای γ و β در رابطهٔ (۶ ـ ۱۲) را بیابید.

تمرین ۶ ـ ۹ فرض کنید همهٔ فرضیات قضیهٔ ۶ ـ ۱ برقرار باشد مگر شرط (۶ ـ ۱۱) که با رابطهٔ (۶ ـ ۱۴) جایگزین شده است. نشان دهید سیستم، پایدار $\mathcal{L}_\infty$ سیگنال کوچک است (اگر همهٔ شروط به طور جامع برآورده شوند، پایدار $\mathcal{L}_\infty$ خواهد بود).

تمرین ۶ ـ ۱۰ ([۱۷۳]) سیستم خودگردان زیر مفروض است:

$$\dot{x} = f(x,u)$$
$$y = h(x,u)$$

که f لیپ شیتز محلی، h پیوسته، $f(0,0) = 0$ و $h(0,0) = 0$ می‌باشد. فرض کنید تابع پیوسته ـ مشتق‌پذیر، معیّن مثبت و بیکران شعاعیِ $V(x)$ چنان وجود دارد که داشته باشیم:

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x,u) \leq -W(x) + \psi(u), \quad \forall\, (x,u)$$

$W(x)$ تابعی پیوسته، معیّن مثبت و بیکران شعاعی است؛ $\psi(u)$ نیز تابعی پیوسته با شرط $\psi(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ می‌باشد.

(الف) نشان دهید سیستم، پایدار $\mathcal{L}_\infty$ است.

(ب) نشان دهید سیستم، پایدار ورودی به خروجی است.

تمرین ۶ ـ ۱۱ فرض کنید $H(s)$ تابع تبدیل[1] هرویتز و اکیداً سره و $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ نیز تابع پاسخ ضربهٔ متناظر آن باشد. نشان دهید:

$$sup_{\omega \in R} |H(j\omega)| \leq \int_0^\infty |h(t)|\, dt$$

تمرین ۶ ـ ۱۲ در هر یک از موارد ذیل نشان دهید سیستم، پایدار $\mathcal{L}_2$ با بهرهٔ محدود (یا پایدار $\mathcal{L}_2$ سیگنال کوچک با بهرهٔ محدود است) و کران بالای بهرهٔ $\mathcal{L}_2$ آنها را بیابید.

(۱)
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a \sin x_1 - k x_2 + u \\ y &= x_2 \\ a &> 0, \; k > 0 \end{aligned}$$

(۲)
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2\, sat(x_2^2 - x_3^2) + x_2 u \\ \dot{x}_3 &= x_3\, sat(x_2^2 - x_3^2) - x_3 u \\ y &= x_2^2 - x_3^2 \end{aligned}$$

(۳)
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - sat(2x_1 + x_2) + u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

(۴)
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -(1 + x_1^2)x_2 - x_1^3 + x_1 u \\ y &= x_1 x_2 \end{aligned}$$

تمرین ۶ ـ ۱۳ ([۶۷]) سیستم ذیل را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + G(x)u \\ y &= h(x) + J(x)u, \; x \in R^n, u \in R^m, y \in R^q \end{aligned}$$

1. Transfer function

که G, f و h توابعی هموار از x هستند. فرض کنید ثابت مثبت γ چنان وجود داشته باشد که به ازای آن بتوان نوشت:

$$\gamma^2 I - J^T(x) J(x) > 0$$

و:

$$\mathcal{H} = \frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{1}{2}\left[h^T J + \frac{\partial V}{\partial x} G\right](\gamma^2 I - J^T J)^{-1}\left[h^T J + \frac{\partial V}{\partial x} G\right]^T + \frac{1}{2} h^T h \leq 0$$

$$\forall x \in R^n$$

نشان دهید سیستم، پایدار $\mathcal{L}_2$ با بهرهٔ محدود است و مقدار بهرهٔ $\mathcal{L}_2$ آن کمتر از یا مساوی با γ می‌باشد.

راهنمایی: با انتخاب توابع ذیل:

$$\begin{aligned} R(x) &= \gamma^2 I - J^T(x) J(x) = W^T(x) W(x) \\ L(x) &= -[W^T(x)]^{-1}\left[h^T(x) J(x) + \frac{\partial V}{\partial x} G(x)\right]^T \end{aligned}$$

نشان دهید نامساوی زیر به ازای جمیع مقادیر $u \in R^m$ برقرار است:

$$\frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{\partial V}{\partial x} G u = -\frac{1}{2}[L + Wu]^T [L + Wu] + \frac{\gamma^2}{2} u^T u - \frac{1}{2} y^T y + \mathcal{H}$$

تمرین ۶ ـ ۱۴ ([۱۷۸]) سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + G(x)u + K(x)w, \quad x \in R^n, \quad u \in R^m, \quad w \in R^r \\ y &= h(x), \quad y \in R^q \end{aligned}$$

که u ورودی کنترل و w ورودی اغتشاش است. توابع f، G، K و h هموار هستند و داریم: $f(0) = h(0) = 0$ و $\gamma > 0$. فرض کنید تابع هموار و نیمه معیّن مثبت $V(x)$ چنان وجود داشته باشد که به ازای جمیع مقادیر $x \in R^n$ در رابطهٔ زیر صدق کند:

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x}\left[\frac{1}{\gamma^2} K(x) K^T(x) - G(x) G^T(x)\right]\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T + \frac{1}{2} h^T(x) h(x) \leq 0$$

نشان دهید با قانون کنترل $u = -G^T(x)(\partial V/\partial x)^T$، نگاشت حلقه ـ بسته از w به $\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}$،

پایدار $\mathcal{L}_2$ با بهرهٔ محدود است و مقدار بهرهٔ $\mathcal{L}_2$ آن کمتر از یا مساوی با γ می‌باشد.

تمرین ۶ ـ ۱۵ ([۸۱]) سیستم (۶ ـ ۲۰) ـ (۶ ـ ۲۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید $\frac{\partial f}{\partial x}(0)$ هرویتز است، علاوه بر این فرض کنید $u(t)$ تابع متناوب زمانی با دورهٔ T_0 می‌باشد که از معادلهٔ خطی $\dot{u} = Su$ تولید شده است، S نیز ماتریسی با مقادیر ویژهٔ ساده روی محور موهومی است.

(الف) نشان دهید سیستم:

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$\dot{u} = Su$$

دارای خمینه‌ای مرکزی به شکل $\{x = h_c(u)\}$ در D_u (همسایگی خاصی حول $u = 0$) است که $h_c(.)$ تابعی پیوسته ـ مشتق‌پذیر می‌باشد.

(ب) فرض کنید $x_{ss}(t)$ پاسخی از معادلهٔ (۶ ـ ۲۰) با شرط $x(0) = h_c(u(0))$ باشد، ضمناً فرض کنید برای $u(t)$ به ازای جمیع مقادیر $t \geq 0$ بتوان نوشت: $u(t) \in D$. نشان دهید $x_{ss(t)}$ با دورهٔ تناوب T_0 متناوب است و پاسخ $x(t)$ برای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک $\|x(0) - h_c(u(0))\|$، با افزایش t به سمت بینهایت، به سوی $x_{ss}(t)$ سوق می‌یابد. با در نظر گرفتن این ویژگیها، $x_{ss}(t)$ را پاسخ حالت مانای سیستم غیرخطی[1] می‌نامیم.

(ج) فرض کنید داشته باشیم: $y_{ss}(t) = h(x_{ss}(t))$. نشان دهید اگر شروط معادلهٔ ۶ ـ ۵ برآورده شود داریم:

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} y_{ss}^T(t) y_{ss}(t)\, dt \leq \gamma^2 \int_{t_0}^{t_0+T_0} u^T(t) u(t)\, dt, \qquad \forall t_0 \geq 0$$

با استفاده از این نامساوی و در قیاس با تحلیل پاسخ فرکانسیِ سیستمهای خطی، تعبیری فرکانسی برای بهرهٔ $\mathcal{L}_2$ سیستم غیرخطی ارائه دهید.

تمرین ۶ ـ ۱۶ ([۱۸۰]) این تمرین نشان می‌دهد بهرهٔ $\mathcal{L}_2$ سیستمهای خطی نامتغیر با زمان، با معادلهٔ (۶ ـ ۱۸) ـ (۶ ـ ۱۹) و همراه با ماتریس Aی هرویتز، در هر دو حالتی که فضای توابع

1. Steady - state response of nonlinear system

روی $R_t = [0, \infty)$ و یا روی خط حقیقی $R = (-\infty, +\infty)$ تعریف شود یکسان است. بدین منظور فرض کنید $\mathcal{L}_2$ فضای توابع مجذور ـ انتگرال‌پذیر روی R_+ همراه با نُرم $\|u\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \int_0^\infty u^T(t) u(t)\, dt$ و $\mathcal{L}_{2R}$ نیز فضای توابع مجذور ـ انتگرال‌پذیر روی R همراه با نُرم $\|u\|_{\mathcal{L}_{2R}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^T(t) u(t)\, dt$ باشد؛ علاوه بر این فرض کنید γ_2 و γ_{2R}، بترتیب بهره‌های $\mathcal{L}_2$ روی $\mathcal{L}_2$ و $\mathcal{L}_{2R}$ باشد؛ چون $\mathcal{L}_2$ زیر مجموعهٔ $\mathcal{L}_{2R}$ است لذا داریم: $\gamma_{2R} \leq \gamma$. در این تمرین نشان خواهیم داد: $\gamma_{2R} = \gamma_2$، بدین منظور ثابت می‌کنیم به ازای هرمقدار $\varepsilon > 0$، سیگنال $u \in \mathcal{L}_2$ چنان‌وجود دارد که: $y \in \mathcal{L}_2, \|y\|_{\mathcal{L}_2} \geq (1-\varepsilon)\gamma_{2R} \|u\|_{\mathcal{L}_2}$.

(الف) با فرض معلوم بودن $\varepsilon > 0$، نشان دهید همواره می‌توان مقدار $0 < \delta < 1$ را چنان انتخاب کرد که داشته باشیم:

$$(1 - \varepsilon/2 - \sqrt{\delta}) \ / \sqrt{1-\delta} \geq 1 - \varepsilon$$

(ب) نشان دهید همواره می‌توان مقدار $u \in \mathcal{L}_{2R}$ و زمان $t_1 < \infty$ را چنان برگزید که داشته باشیم:

$$\|u\|_{\mathcal{L}_{2R}} = 1, \quad \|y\|_{\mathcal{L}_{2R}} \geq \gamma_{2R}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right), \int_{-\infty}^{t_1} u^T(t) u(t)\, dt = \delta$$

(ج) فرض کنید داشته باشیم: $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ که $u_1(t)$ برای مقادیر $t < t_1$ و $u_2(t)$ برای مقادیر $t > t_1$ صفر هستند. چنانچه $y_1(t)$ خروجی متناظر با وردی $u_1(t)$ باشد، نشان دهید:

$$\frac{\|y_1\|_{\mathcal{L}_{2R}}}{\|u_1\|_{\mathcal{L}_{2R}}} \geq \frac{1 - \varepsilon/2 - \sqrt{\delta}}{\sqrt{1-\delta}} \gamma_{2R} \geq (1-\varepsilon)\gamma_{2R}$$

(د) به ازای جمیع مقادیر $t \geq 0$، $u(t)$ و $y(t)$ را بترتیب به شکل $u(t) = u_1(t + t_1)$ و $y(t) = y_1(t + t_1)$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید هر دو سیگنال u و y متعلق به $\mathcal{L}_2$ هستند، $y(t)$ خروجی متناظر با $u(t)$ است و داریم: $\|y\|_{\mathcal{L}_2} \geq (1-\varepsilon)\gamma_{2R} \|u\|_{\mathcal{L}_2}$.

۷

دورهای متناوب

پس از نقاط تعادل، ساده‌ترین پاسخهای حالت مانای سیستمها، پاسخهای متناوب است. برای مشخص کردن اینگونه پاسخها دونکتهٔ اساسی وجود دارد: نخست پیش‌بینی[1] وجود آنها و دیگری تعیین وضع پایداری‌شان. دورهای متناوب در صفحه دارای حالت خاصی هستند که صفحه را به دوبخش درونِ دور و برون آن تقسیم می‌کنند. به‌کمک این موضوع می‌توان معیاری را برای شناسایی و وجود دورهای متناوب در سیستمهای مرتبهٔ دوم به دست داد؛ لیکن این معیار، قابل تعمیم به سیستمهای مرتبهٔ بالاتر نیست. برجسته‌ترین وجه این معیار، قضیهٔ پوانکاره ـ بِن‌دیکسون[2] است که در بخش ۷ ـ ۱ بررسی می‌شود، ضمن اینکه در این بخش، به معیار بِن‌دیکسون و شیوهٔ شاخص[3] نیز اشارهٔ کوتاهی می‌شود که می‌توان از آن برای بررسی وجود دورهای متناوب بهره جُست. دو روش مختلف را برای پیش‌بینی وجود دورهای متناوب در سیستمهای مرتبهٔ سوم مطرح خواهیم نمود: یکی روش متوسط‌گیری[4] و دیگری روش تابع وصف‌کننده[5]. هریک از این روشها به دستهٔ خاصی از سیستمهای غیرخطی اعمال می‌شود: روش متوسط‌گیری، که در بخش ۸ ـ ۳ مطرح خواهد شد، قابل اعمال به سیستمهای غیرخطی است که به‌طور خاصی به پارامتر کوچکی وابسته‌اند. روش تابع وصف‌کننده، که در بخش ۱۰ ـ ۴ شرح داده خواهد شد، قابل اعمال به سیستمهایی غیرخطی است که بتوان آنها را به شکل اتصال پسخور یک سیستم دینامیکی خطی و یک غیرخطی‌گری درنظر گرفت (مشروط براینکه سیستم خطی دارای مشخصات فیلتر پایین‌گذر[6] باشد). در بخش ۷ ـ ۲ به بررسی پایداری

---

1. Predicting
2. Poincaré - Bendixon theorem
3. Index method
4. Averaging method
5. Describing function method
6. Low - pass filter

پاسخهای متناوب خواهیم پرداخت و نگاشت پوانکاره[1] را به عنوان ابزار مناسبی در تعیین پایداری دورهای متناوب معرفی خواهیم کرد.

۷ـ۱ سیستمهای مرتبهٔ دوم

در این بخش با سیستمهای مرتبهٔ دوم خودگردان به شکل ذیل سروکار داریم:

$$\dot{x} = f(x) \qquad (۷ - ۱)$$

که $f: D \longrightarrow R^2$ است، ضمناً $D \subset R^2$ قلمرویی (مجموعه‌ای باز و همبند) شامل $x = 0$ است. فرض می‌کنیم تابع f در مجموعهٔ D، لیپ شیتز محلی باشد تا مطمئن شویم معادلهٔ (۷ ـ ۱) دارای پاسخ یکتایی در مجموعهٔ D خواهد بود؛ علاوه بر این فرض می‌کنیم $\phi(t,y)$ پاسخی از معادلهٔ (۷ ـ ۱) باشد که از نقطهٔ $\phi(0,y)$ آغاز شده است، بازهٔ بیشینهٔ وجود پاسخ را در زمان پیشرو[2] با $[0, T^+(y)]$ و در زمان پسرو[3] با $[0, -T^-(y)]$ نمایش می‌دهیم، در ادامهٔ بحث فرض خواهیم نمود که پاسخ معادله می‌تواند از هردوسو (زمان پیشرو و زمان پسرو) تا بینهایت امتداد یابد یعنی: $T^+(y) = \infty$ یا $T^-(y) = \infty$. البته ممکن است داشته باشیم: $T^+(y) = T^-(y) = \infty$ اما الزامی به وجود این شرط نیست. چنانچه $T^+(y) = \infty$ باشد، نیمدور مثبت[4] ناشی از y به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\gamma^+(y) = \{\phi(t,y) \mid 0 \le t < \infty\}$$

و اگر $T^-(y) = \infty$ باشد، می‌توان نیمدور منفی[5] ناشی از y را به شکل زیر تعریف کرد:

$$\gamma^-(y) = \{\phi(t,y) \mid -\infty < t \le 0\}$$

اکنون فرض کنید $T^+(y) = \infty$ باشد، در این صورت با یادآوری بخش ۳ ـ ۲ می‌دانیم اگر دنباله‌ای مانند $\{t_n\}$ چنان موجود باشد که با شرط: $n \longrightarrow \infty \Rightarrow t_n \longrightarrow \infty$، داشته باشیم: $n \longrightarrow \infty \Rightarrow \phi(t_n, y) \longrightarrow p$، آنگاه به ازای جمیع مقادیر $t \ge 0$، p نقطهٔ حدّی مثبت پاسخ

1. Poincaré map
2. Forward time
3. Backward time
4. Positive semiorbit
5. Negative semiorbit

$\phi(t_n, y)$ خواهد بود. مجموعهٔ همهٔ نقاط حدّی مثبتِ $\phi(t,y)$، مجموعهٔ حدّی مثبتِ $\phi(t,y)$ می‌باشد. در لم ۳ ـ ۱ دیدیم اگر $\phi(t,y)$ کراندار باشد، آنگاه مجموعهٔ حدّی مثبت آن ناتهی، فشرده و پایاست و با افزایش t به سمت بینهایت، $\phi(t,y)$ به سمت مجموعهٔ حدّی مثبتش میل می‌کند. این مجموعه را مجموعهٔ حدّی مثبتِ $\gamma^+(y)$ می‌نامیم. به‌طور مشابه هنگامی که $T^-(y) = \infty$ است، می‌توان با جایگزینی $-\infty$ به جای ∞ به مجموعهٔ حدّی منفیِ $\gamma^-(y)$ دست یافت و می‌توان لمی مشابه با لم ۳ ـ ۱ را برای پاسخهای کراندار در زمان پسرو بیان کرد.

اینک می‌توان با دردست داشتن تعاریف فوق، مهمترین نتیجهٔ این بخش را مطرح کرد: قضیهٔ پوانکاره ـ بِن‌دیکسون.

قضیهٔ ۷ ـ ۱ (پوانکاره ـ بِن‌دیکسون) *فرض کنید γ^+ نیمدور مثبت و کراندار مربوط به معادلهٔ (۷ ـ ۱) و L^+ مجموعهٔ حدّی مثبتش باشد، در این صورت اگر L^+ شامل هیچیک از نقاط تعادل نباشد آنگاه L^+ یک دور متناوب است. همین نتیجه برای نیمدور منفی نیز برقرار است.* ◇

برهان: پیوست آ ـ ۱۰.

برهان قضیهٔ فوق، مبتنی بر این حقیقت است که اگر منحنی بسته‌ای در R^2 خودش را قطع نکند، آنگاه صفحه را به دو ناحیهٔ درون و برون منحنی تقسیم می‌نماید. این نکته که تحت عنوان قضیهٔ منحنی جردن[1] شناخته می‌شود*، برای فضای R^n $(n > 2)$ صدق نمی‌کند، بنابراین نمی‌توان قضیهٔ پوانکاره ـ بِن‌دیکسون را به سیستمهای با مراتب بالاتر تعمیم داد، تمرین ۷ ـ ۸ مثال نقضی را در این مورد بیان می‌کند. در پس قضیهٔ فوق این نکتهٔ شهودی نهفته است که مجموعه‌های حدّی فشرده، در صفحه به یکی از صورتهای نقاط تعادل، دورهای متناوب و یا اجتماع نقاط تعادل و مسیرهای حالت متناظر با آنها ظاهر می‌شوند، بدین ترتیب اگر L^+ شامل هیچیک از نقاط تعادل نباشد، آنگاه حتماً دور متناوب خواهد بود.

* برای مشاهدهٔ قضیهٔ منحنی جردن و برهان آن، [۷] را ملاحظه کنید.

1. Jordan curve theorem

قضیهٔ پوانکاره ـ بِن‌دیکسون راهی را پیشنهاد می‌کند که به کمک آن می‌توان وجود دورهای متناوب را در صفحه مشخص نمود؛ برای مثال فرض کنید بتوان مجموعهٔ کراندار بسته‌ای مانند M را در R^2 چنان یافت که هیچیک از نقاط تعادل معادلهٔ (۷ ـ ۱) را دربر نگیرد و پایای مثبت نیز باشد (بدین معنا که هریک از پاسخهای معادلهٔ (۷ ـ ۱) که از مجموعهٔ M آغاز شود، بـه ازای جمیع مقادیر $t \geq 0$، درون آن باقی بماند)، در این حالت مطمئن هستیم M شامل نیمدور مثبت کراندارِی مانند γ^+ می‌باشد. علاوه بر این چون M بسته است، مجموعهٔ حدّی مثبت L^+ نیز درون M است بنابراین به کمک قضیهٔ پوانکاره ـ بِن‌دیکسون، وجود دور متناوب در M محقّق است. این مفهوم را به کمک دومثال آتی روشنتر می‌کنیم:

مثال ۷ ـ ۱ نوسانساز هماهنگ ذیل مفروض است:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1$$

تابع $V(x)$ را نیز به شکل زیر درنظر بگیرید:

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

مشتق $V(x)$ در امتداد مسیرهای حالت سیستم برابر است با:

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 0$$

بنابراین مسیرهای حالت سیستم به ازای هیچ مقدار ثابت مـثبت c، رویـهٔ سـطحی $V(x) = c$ را قطع نمی‌کند. اینک با تعریف M به عنوان ناحیهٔ حلقوی[1] به صورت ذیل:

$$M = \{x \in R^2 \mid c_1 \leq V(x) \leq c_2\} \quad , \quad c_2 > c_1 > 0$$

واضح است M کراندار و پایای مثبت است و شامل هیچیک از نقاط تعادل نـیز نـیست (زیـرا

1. Annular region

تنها نقطهٔ تعادل سیستم، در مبدأ واقع است)، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت یک دور متناوب در M وجود دارد. Δ

مثال فوق بر این نکته تأکید دارد که قضیهٔ پوانکاره ـ بِن‌دیکسون تضمین‌کنندهٔ وجـود دور متناوب است اما تضمینی بر یکتایی آن ندارد. در این مثال از اطلاعات قبلی راجع به نوسانساز متناوب می‌دانیم که این سیستم در مجموعهٔ M دارای پیوستاری در دورهای متناوب است.

مثال ۷ ـ ۲ سیستم ذیل را به همراه تابع لیاپانوف معرفی شده در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

مشتق $V(x)$ در امتداد مسیرهای حالت سیستم با عبارت زیر بیان می‌شود:

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$$

$$= 2x_1x_2 + 2x_1^2(1 - x_1^2 - x_2^2) - 2x_1x_2 + 2x_2^2(1 - x_1^2 - x_2^2) =$$

$$= 2V(x)(1 - V(x))$$

تابع مشتق $\dot{V}(x)$، به ازای $V(x) < 1$ مثبت و به ازای $V(x > 1)$، منفی می‌باشد، بنابراین بر رویهٔ سطحی $V(x) c = 1$ با شرط $0 < c < 1$، همهٔ مسیرهای حالت به سمت خارج حرکت می‌کنند درحالی‌که بر رویهٔ سطحی $V(xc = 2)$، با شرط $c_2 > 1$، تمامی مسیرهای حالت به سمت داخل حرکت می‌کنند، بنابراین ناحیهٔ حلقوی:

$$M = \{x \in R^2 \mid c_1 \leq V(x) \leq c_2\}$$

پایای مثبت و نیز بسته، کراندار و خالی از هرگونه نقطهٔ تعادلی است (زیرا مبدأ $x = 0$ تـنها

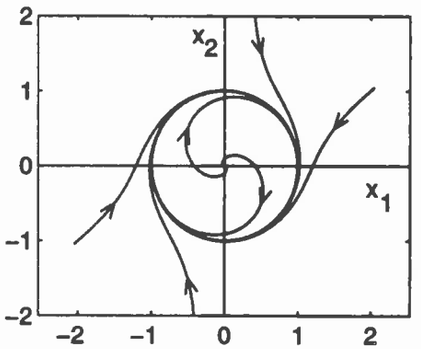
نقطهٔ تعادل سیستم می‌باشد)، بنابراین با استفاده از قضیهٔ پوانکاره ـ بِن‌دیکسون نتیجه می‌شود یک دور متناوب در M وجود دارد. باتوجه به صحت استدلال فوق برای هریک از مقادیر $c_1 < 1$ و $c_2 > 1$، می‌توان فرض کرد هر دو مقدار c_1 و c_2 چنان به سمت یک میل کنند که مجموعهٔ M به سمت دایرهٔ واحد سوق یابد؛ بنابراین دایرهٔ واحد نیز یکی از دورهای متناوب است. البته می‌توان با نمایش سیستم در مختصات قطبی نیز به همان نتیجهٔ قبلی دست یافت، بدین منظور با تعریف:

$$x_1 = r\cos\theta\,,\quad x_2 = r\sin\theta$$

نتیجه می‌شود:

$$\dot{r} = r(1 - r^2)\,,\quad \dot{\theta} = -1$$

که بیانگر این نکته است که نه‌تنها دایرهٔ واحد، دور متناوب است بلکه این دور متناوب، منحصر به فرد نیز می‌باشد و همهٔ مسیرهای حالت (بجز پاسخ بدیهیِ $x(t) = 0$) هم از داخل و هم از خارج با حرکتی پیچشی به‌سوی این دایره سوق می‌یابد (شکل ۷ ـ ۱ را ملاحظه کنید). یکتاییِ دور متناوب را نمی‌توان صرفاً با کاربردهای قضیهٔ پوانکاره ـ بِن‌دیکسون ثابت نمود. Δ



شکل ۷ ـ ۱ پیکرهٔ فاز مثال ۷ ـ ۲

در هر دو این مثالها، مفهوم اصلی استفاده از قضیهٔ پوانکاره ـ بِن‌دیکسون یکسان است؛ بدین ترتیب که در هر دو حالت نشان دادیم نیمدور مثبت کراندار γ^+ در مجموعهٔ M وجود دارد و

نتیجه گرفتیم مجموعهٔ حدّی مثبتِ L^+، دور متناوب است؛ لیکن باید دقت کرد که در مثال نوسانساز هماهنگ هر نیمدور مثبت موجود در M، خودش یک دور متناوب می‌باشد به بیان دیگر $L^+ = \gamma^+$ و هردو نیز متناوبند. این نکته برای مثال ۷ ـ ۲ صادق نیست زیرا بجز مسیرهای حالتی که از مبدأ و یا از روی دایرهٔ واحد آغاز می‌شوند، نیمدورهای مثبت، متناوب نیستند. در مقابل، این نیمدورها با حرکتی پیچشی به سمت مجموعهٔ حدّی مثبت پیش می‌روند که متناوب می‌باشد. دور متناوب مطرح در مثال ۷ ـ ۲، براساس تعریف ذیل، چرخهٔ حدّی است.

تعریف ۷ ـ ۱ *چرخهٔ حدّی، دوربسته‌ای مانند γ است که γ مجموعهٔ حدّی مثبتی مربوط به نیمدور مثبت $\gamma^+(y)$ یا مجموعهٔ حدّی منفی‌ای مربوط به نیمدور منفی $\gamma^-(y)$ برای مقادیر $y \notin \gamma$ است.*

مثال بعدی بیانگر کاربردی غیربدیهی از قضیهٔ پوانکاره ـ بِن‌دیکسون در مثال نوسانساز با مقاومت منفی در بخش ۱ ـ ۱ ـ ۴ می‌باشد.

مثال ۷ ـ ۳ نوسانساز با مقاومت منفیِ بخش ۱ ـ ۱ ـ ۴ را می‌توان با معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم زیر مدل کرد:

$$\ddot{v} + \varepsilon h'(v)\dot{v} + v = 0$$

که ε ثابت مثبتی است و $h: R \longrightarrow R$ در شروط ذیل صدق می‌نماید:

$$h(0) = 0\,,\qquad h'(0) < 0$$

$$v \longrightarrow \infty \Rightarrow h(v) \longrightarrow \infty \quad \text{و} \quad v \longrightarrow -\infty \Rightarrow h(v) \longrightarrow -\infty$$

برای سادگی تحلیل، شروط اضافی زیر را نیز درنظر می‌گیریم:

$$h(v) = -h(-v)$$

$$\begin{cases} h(v) < 0 \;, & 0 < v < a \\ h(v) > 0 \;, & a < v \end{cases}$$

این شروط اضافی برای تابعی به شکل ۱ ـ ۵ (ب) و نیز نوسانساز وان دِرپل با تابع $h(v) = -v + \frac{1}{3}v^3$ برقرار است. حال با انتخاب متغیرهای حالت ذیل:

$$x_1 = v \quad , \quad x_2 = \dot{v} + \varepsilon h(v)$$

به معادلات حالت زیر می‌رسیم:

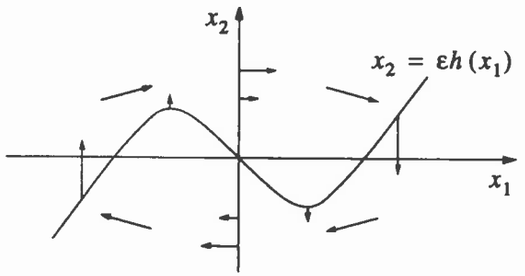
$$\dot{x}_1 = x_2 - \varepsilon h(x_1) \qquad (۲ ـ ۷)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1$$

که دارای نقطهٔ تعادل یکتایی در مبدأ می‌باشد. بحث خود را با نشان دادن این نکته آغاز می‌کنیم که هر پاسخ غیرتعادلیِ سیستم درجهت عقربه‌های ساعت به دور نقطهٔ تعادل می‌چرخد، بدین منظور صفحهٔ حالت را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنیم که این نواحی از تقاطع دو منحنیِ ذیل، مطابق شکل ۷ ـ ۲، به‌دست می‌آید:

$$x_2 - \varepsilon h(x_1) = 0$$

$$-x_1 = 0$$

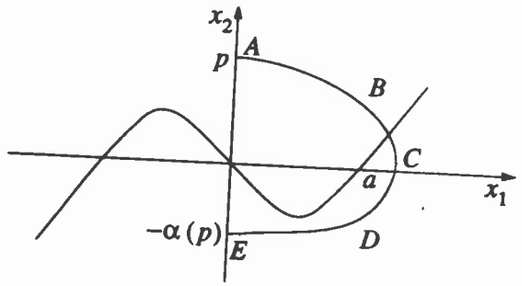


شکل ۷ ـ ۲ نمودار میدان برداری مربوط به مثال ۷ ـ ۳

ضمناً این شکل نشاندهندهٔ جهت عمومی میدان برداری $f(x)$ مربوط به معادلهٔ (۷ ـ ۲) در چهار ناحیهٔ مشخص‌شده و نیز در مرزهای بین آنهاست. ملاحظهٔ این موضوع چندان دشوار نیست که

پاسخ آغاز شده از نقطهٔ $A = (0, p)$ در نیم‌صفحهٔ محور x_2، دوری کمانی مشابه شکل ۷ ـ ۳ را توصیف می‌کند. نقطهٔ E (که نقطهٔ تقاطع نیمهٔ پایین محور x_2 با کمان است)، به نقطهٔ آغاز A بستگی دارد؛ این نقطه را با $(0, -\alpha(p))$ نشان می‌دهیم. نشان خواهیم داد اگر p به مقدار کافی بزرگ انتخاب شود، آنگاه $\alpha(p) < p$ خواهد بود. تابع زیر را درنظر بگیرید:

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$



شکل ۷ ـ ۳ دور $ABCDE$ مربوط به مثال ۷ ـ ۳

برای اثبات $\alpha(p) < p$، کافی است نشان دهیم: $V(E) - V(A) < 0$، زیرا:

$$V(E) - V(A) = \frac{1}{2}[\alpha^2(p) - p^2] \triangleq \delta(p)$$

مشتق $V(x)$ در امتداد مسیرهای حالت معادلهٔ (۷ ـ ۲) با رابطهٔ زیر بیان می‌گردد:

$$\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1x_2 - \varepsilon x_1 h(x_1) - x_1x_2 = -\varepsilon x_1 h(x_1)$$

بنابراین $\dot{V}(x)$ به ازای مقادیر $x_1 < a$، مثبت و به ازای مقادیر $x_1 > a$، منفی است. حال می‌توان نوشت:

$$\delta(p) = V(E) - V(A) = \int_{AE} \dot{V}(x(t))\,dt$$

که انتگرال سمت راست در امتداد کمان از A تا E محاسبه می‌شود. چنانچه p کوچک باشد

همهٔ کمان، درون نوار $0 < x_1 < a$ قرار می‌گیرد، بنابراین $\delta(p)$ مثبت خواهد بود، هنگامی‌که p افزایش می‌یابد قطعه‌ای از کمان (یعنی قطعهٔ BCD در شکل ۷ ـ ۳)، خارج از نوار واقع خواهد شد. در این حالت بسته به اینکه آیا کمان درون یا برون نوار $0 < x_1 < a$ قرار گرفته، می‌توان انتگرال را به روشهای مختلفی محاسبه کرد، به‌عنوان مثال انتگرال را به سه‌جزء تقسیم می‌نماییم:

$$\delta(p) = \delta_1(p) + \delta_2(p) + \delta_3(p)$$

که:

$$\delta_1(p) = \int_{AB} \dot{V}(x(t))\,dt$$

$$\delta_2(p) = \int_{BCD} \dot{V}(x(t))\,dt$$

$$\delta_3(p) = \int_{DE} \dot{V}(x(t))\,dt$$

ابتدا جملهٔ $\delta_1(p)$ را درنظر می‌گیریم:

$$\delta_1(p) = -\int_{AB} \varepsilon x_1 h(x_1)\,dt = -\int_{AB} \varepsilon x_1 h(x_1)\ \frac{dt}{dx_1}\,dx_1$$

با جایگزینی dx_1/dt از رابطهٔ (۷ ـ ۲) نتیجه می‌شود:

$$\delta_1(p) = -\int_{AB} \varepsilon x_1 h(x_1)\ \frac{1}{x_2 - \varepsilon x_1 h(x_1)}\,dx_1$$

که x_2 در امتداد کمان AB، تابع معلومی از x_1 است، واضح است $\delta_1(p)$ مثبت می‌باشد. باید توجه کرد با افزایش p، $x_2 - \varepsilon h(x_1)$ نیز روی کمان AB افزایش می‌یابد، بنابراین با افزایش p به سمت بینهایت، $\delta_1(p)$ کاهش پیدا می‌کند. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد جملهٔ سوم ($\delta_3(p)$) نیز مثبت است و با افزایش p به سمت بینهایت، کاهش می‌یابد. اینک جملهٔ دوم ($\delta_2(p)$) را درنظر می‌گیریم:

$$\delta_2(p) = -\int_{BCD} \varepsilon x_1 h(x_1)\,dt = -\int_{BCD} \varepsilon x_1 h(x_1)\ \frac{dt}{dx_2}\,dx_2$$

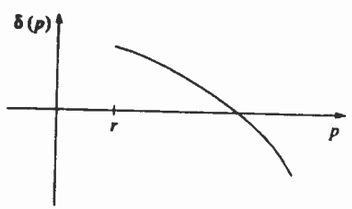
با جایگزینی dx_2/dt از رابطهٔ (۷ ـ ۲) نتیجه می‌شود:

$$\delta_2(p) = \int_{BCD} \varepsilon h(x_1)\,dx_2$$

که x_1 در امتداد کمان BCD، تابع معلومی از x_2 می‌باشد. عبارت انتگرال سمت راست، دارای مقداری منفی است زیرا $h(x_1) > 0$ و $dx_2 < 0$ است. با افزایش p، کمان $ABCDE$ به سمت راست حرکت می‌کند و ناحیهٔ انتگرالگیری $\delta_2(p)$ افزایش می‌یابد، درنتیجه با افزایش p، $\delta_2(p)$ کاهش می‌یابد و می‌توان نوشت: $\lim_{p\to\infty} \delta_2(p) = -\infty$. به‌طور خلاصه می‌توان گفت:

- برای مقادیر $r > 0$، با شرط $p < r$، $\delta(p)$ مثبت است؛
- اگر $p \geq r$ باشد، با افزایش p به سمت ∞، $\delta(p)$ به طور یکنواخت به سمت $-\infty$ کاهش می‌یابد.

نمودار تمثیلی تابع $\delta(p)$ در شکل ۷ ـ ۴ نشان داده شده است، بنابراین مشخص است با انتخاب p به اندازهٔ کافی بزرگ، مطمئن هستیم $\delta(p)$ منفی و درنتیجه $\alpha(p) < p$ است.



شکل ۷ ـ ۴ نمودار تمثیلی تابع $\delta(p)$ مربوط به مثال ۷ ـ ۳

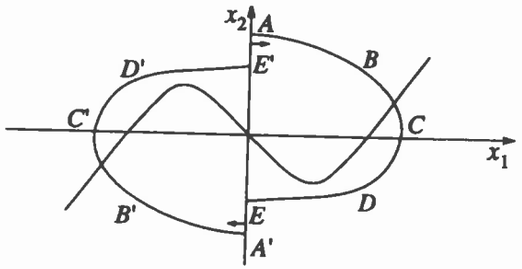
شایان ذکر اینکه باتوجه به تقارن ناشی از فرد بودن تابع $h(\cdot)$، اگر $(x_1(t), x_2(t))$ پاسخ معادلهٔ (۷ ـ ۲) باشد آنگاه $(-x_1(t), -x_2(t))$ نیز پاسخ معادله خواهد بود؛ بنابراین چنانچه بدانیم مسیر $ABCDE$ مشابه شکل ۷ ـ ۳ وجود دارد آنگاه قرینهٔ آن نسبت به مبدأ نیز مسیر دیگری خواهد بود. نقاط $A = (0, p)$ و $E = (0, -\alpha(p))$ را با فرض $\alpha(p) < p$ درنظر بگیرید، منحنی بستهٔ حاصل از کمان $ABCDE$، قرینهٔ آن نسبت به مبدأ و پاره‌خطهای روی محور x_2 را، که این کمانها را به هم می‌پیوندد، رسم کنید (برای رسم منحنی بسته، شکل ۷ ـ ۵ را ملاحظه کنید). ناحیهٔ محصور بین این منحنیهای بسته، پایای مثبت است به تعبیر دیگر هر مسیر حالتی که در لحظهٔ $t = 0$ از درون این ناحیه آغاز می‌شود، به ازای جمیع مقادیر $t \geq 0$ درون آن باقی خواهد ماند. این نکته پیامدی از جهتهای میدانهای برداری روی محور x_2 و نیز این واقعیت است که به علت یکتایی پاسخها، مسیرهای حالت یکدیگر را قطع نمی‌کنند، در این صورت با یادآوری اینکه:

$$\text{برای: } |x_1| < a, \quad \dot{V}(x) = -\varepsilon x_1 h(x_1) > 0,$$

می‌توان مقدار $c > 0$ را آنقدر کوچک برگزید که رویهٔ سطحی $V(x) = c$ درون نوار $|x_1| < a$ قرار گیرد. بدین ترتیب باید همهٔ مسیرهای حالت رویهٔ سطحی $V(x) = c$ به سمت خارج حرکت کنند. حال مجموعهٔ بستهٔ M را به صورت ناحیه‌ای حلقوی تعریف می‌کنیم که مرز بیرونی‌اش، منحنی بستهٔ نشان داده شده در شکل ۷ ـ ۵ و مرز درونی‌اش، رویهٔ سطحی $V(x) = c$ باشد. مجموعهٔ M بسته، کراندار، پایای مثبت و خالی از هر نقطهٔ تعادلی است، لذا طبق قضیهٔ پوانکاره ـ بِن‌دیکسون، دور متناوبی در M وجود دارد.

مشابه استدلال مثال قبل، می‌توان به نتایجی ورای قضیهٔ پوانکاره ـ بِن‌دیکسون دست یافت و نشان داد این دور بسته یکتاست. باید توجه داشت که براساس خاصیت تقارن پیشگفته، سیستم دارای دور بسته است اگر و تنها اگر داشته باشیم: $\alpha(p) = p$.

با توجه به شکل ۷ ـ ۴ واضح است فقط یک مقدار برای p وجود دارد که به ازای آن، شرط مذکور برآورده می‌شود، بنابراین تنها یک دور متناوب وجود خواهد داشت. علاوه بر این



شکل ۷ ـ ۵ منحنی بستهٔ حاصل در مثال ۷ ـ ۳

می‌توان نشان داد هر پاسخ غیرتعادلی به سمت این دور بستهٔ یکتا سوق می‌یابد. برای اثبات این نکته فرض کنید $p_0 > 0$، مقدار منحصر به فرد p در معادلهٔ $\alpha(p) = p$ باشد، نقطهٔ $(0, p)$ را روی محور x_2 با شرط $p > p_0$ درنظر بگیرید، در این صورت مطابق بحث پیشین، مسیر حالت گذرنده از $(0, p)$ نیمهٔ پایینی محور x_2 را در نقطهٔ $(0, -\alpha(p))$ قطع می‌کند که $\alpha(p) < p$ می‌باشد. ضمناً براساس خاصیت تقارن، مسیر حالت گذرنده از $(0, -\alpha(p))$، نیمهٔ بالایی محور x_2 را در نقطهٔ $(0, \sigma(p))$ قطع می‌کند که $p_0 \leq \sigma(p) < p$ می‌باشد. می‌توان کران بالایی را از خاصیت تقارن به‌دست آورد اما کران پایینی ثابت می‌ماند زیرا برای اینکه $\sigma(p)$ کمتر از p_0 باشد باید مسیر حالت، دور متناوب را قطع کند. نگاشت $p \to \sigma(p)$ به دلیل وابستگی پیوستگی پاسخ به حالتهای اولیه‌اش، پیوسته است. حال با آغاز مجدد از نقطهٔ $(0, \sigma(p))$، مسیر حالت به سمت نقطهٔ $(0, \sigma^2(p))$ در نیمهٔ بالای محور x_2 حرکت می‌کند که $p_0 < \sigma^2(p) < \sigma(p)$ می‌باشد. بدین ترتیب با روش استقرا به دنبالهٔ $\sigma^n(p)$ دست می‌یابیم که در شرط ذیل صدق می‌نماید:

$$p_0 \leq \sigma^{n+1}(p) < \sigma^n(p), \quad n = 1, 2, \ldots$$

دنبالهٔ $\sigma^n(p)$ دارای مقدار حدّ $p_1 \geq p_0$ است. شایان ذکر اینکه باتوجه به پیوستگی $\sigma(\cdot)$، مقدار حدّ p_1 در رابطهٔ زیر صادق است:

$$\sigma(p_1) - p_1 = \lim_{n\to\infty} \sigma(\sigma^n(p)) - p_1 = p_1 - p_1 = 0$$

باتوجه به یکتایی دور بسته داریم: $p_1 = p_0$. این نتیجه نشان می‌دهد با افزایش $t \to \infty$، مسیر حالت p به‌طور انقباضی به‌سمت دور متناوب یکتا میل می‌کند، همین نتیجه برای حالت $p < p_0$ نیز برقرار است. Δ

نتیجهٔ بعدی، که تحت عنوان معیارِ بن دیکسون[1] شناخته می‌شود، برای تعیین وجود دورهای متناوب در برخی حالتها کاربرد دارد:

قضیهٔ ۷ ـ ۲ (معیار بِن دیکسون) *چنانچه در مجموعهٔ همبند سادهٔ $D \subset R^2$*، عبارت $\partial f_1/\partial x_1 + \partial f_2/\partial x_2$ متحد با صفر نباشد و علامتش نیز تغییر نکند، آنگاه سیستم (۷ ـ ۱) هیچگونه دور متناوبی که به طور کامل در D باشد، ندارد.* $\Diamond$

برهان: برای هریک از دورهای رابطهٔ (۷ ـ ۱) می‌توان نوشت: $dx_2/dx_1 = f_2/f_1$. بنابراین روی هر دور بسته مانند γ داریم:

$$\int_\gamma f_2(x_1, x_2)\, dx_1 - f_1(x_1, x_2)\, dx_2 = 0$$

درنتیجه به کمک قضیهٔ گرین[3] می‌توان نوشت:

$$\int\int_S \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) dx_1\, dx_2 = 0$$

که S درون γ است. اگر عبارت $\partial f_1/\partial x_1 + \partial f_2/\partial x_2$ روی D، مثبت (یا منفی) باشد، آنگاه نمی‌توان ناحیه‌ای مانند $S \subset D$ را چنان یافت که تساوی اخیر برقرار باشد، لذا هیچ دور بسته‌ای نمی‌تواند به طور کامل در D باشد. $\square$

---

* مجموعهٔ $D \subset R^2$ را همبند ساده گوییم اگر برای هر منحنی جردنِ C در D، ناحیهٔ درونی C نیز مجموعه‌ای از D باشد؛ برای مثال درون دایره، همبند ساده است اما ناحیهٔ حلقوی $c_1 \le x_1^2 + x_2^2 \le c_2 < 0$، همبند ساده نیست؛ به طور شهودی می‌توان گفت همبند ساده بودن به معنای فقدان «حفره»[2] است.

1. Bendixon Criterion 2. hole 3. Green theorem

مثال ۷ ـ ۴ سیستم زیر را درنظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = x_2$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = a x_1 + b x_2 - x_1^2 x_2 - x_1^3$$

در این روابط داریم:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = b - x_1^2$$

بنابراین اگر $b < 0$ باشد، هیچ دور متناوبی نمی‌تواند وجود داشته باشد. Δ

این بخش را با نتیجهٔ سودمندی دربارهٔ ارتباط وجود دورهای متناوب و نقاط تعادل به پایان می‌بریم. این نتیجه از شاخص پوانکارهٔ نقطهٔ تعادل استفاده می‌کند؛ برای تبیین این موضوع، فرض کنید در سیستم مرتبهٔ دوم (۷ ـ ۱)، C منحنی سادهٔ بسته‌ای باشد که از هیچیک از نقاط تعادل رابطهٔ (۷ ـ ۱) نمی‌گذرد. جهت میدان برداری $f(x)$ را در نقطهٔ $p \in C$ درنظر بگیرید و فرض کنید منحنی C در خلاف جهت عقربه‌های ساعت از نقطهٔ p بگذرد، ضمناً فرض نمایید $f(x)$ به طور پیوسته می‌چرخد و هنگام بازگشت به موقعیت اولیهٔ خود، زاویهٔ $2\pi k$ را در خلاف جهت عقربه‌های ساعت طی می‌کند که k مقدار صحیحی می‌باشد. عدد صحیح k را شاخص[1] منحنی بستهٔ C می‌نامند. اگر C چنان انتخاب شود که نقطهٔ تعادل تنهای $\bar{x}$ را دور بزند، آنگاه k را شاخص $\bar{x}$ می‌گوییم. این نکته را به خواننده وامی‌گذاریم که به کمک خواص میدانهای برداری، لم ذیل را تحقیق نماید (تمرین ۷ ـ ۱۱):

لم ۷ ـ ۱

(الف) *شاخص گره، کانون و یا مرکز، $+1$ است.*

(ب) *شاخص نقطهٔ زینی (هذلولوی)، -1 است.*

(ج) *شاخص دور بسته، $+1$ است.*

(د) *شاخص منحنی بسته‌ای که هیچ نقطهٔ تعادلی را دور نمی‌زند، 0 است.*

---

1. Index

(ه) *شاخص هر منحنی بسته برابر با مجموع شاخصهای نقاط تعادل موجود در آن است.* ◇

قضیهٔ کمکی ذیل، نتیجهٔ این لم می‌باشد:

قضیهٔ فرعی ۷ ـ ۱ *درون هر دور متناوب γ، حداقل یک نقطهٔ تعادل وجود دارد. اگر نقاط تعادل درون γ، هذلولی باشد و تعداد گره‌ها و کانونها را با S و تعداد نقاط زینی را با N نمایش دهیم، آنگاه: $N - S = ۱$.* ◇

شایان ذکر اینکه یک نقطهٔ تعادل، هذلولوی است اگر ماتریس ژاکوبی در آن نقطه، شامل هیچ مقدار ویژه‌ای روی محور موهومی نباشد؛ چنانچه نقطهٔ تعادل، هذلولوی نباشد شاخص آن برابر با ± ۱ است (تمرین ۷ ـ ۱۲ را ملاحظه کنید).

یکی از مزایای روش شاخص این است که به کمک آن می‌توان وجود دورهای متناوب را در بخشهای خاصی از صفحه ممنوع نمود:

مثال ۷ ـ ۵ سیستم ذیل:

$$\dot{x}_۱ = -x_۱ + x_۱x_۲$$

$$\dot{x}_۲ = x_۱ + x_۲ - ۲x_۱x_۲$$

دارای دونقطهٔ تعادل در $(۰,۰)$ و $(۱,۱)$ می‌باشد. ماتریس ژاکوبی در این نقاط برابر است با:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{(۰,۰)} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \; ; \; \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{(۱,۱)} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین $(۰,۰)$ نقطهٔ زینی و $(۱,۱)$ نقطهٔ کانونی است. تنها حالتی از نقاط تعادل که دور متناوب می‌تواند آن را دور زند، کانون منفرد است و سایر حالتهای ممکن دورهای متناوب، مانند دور متناوبی که هر دو نقطهٔ تعادل را دور زند، کنار گذاشته می‌شود. Δ

۷ ـ ۲ پایداری پاسخهای متناوب

در فصلهای سوم و چهارم، نظریهٔ جامعی را دربارهٔ رفتار پاسخهای سیستمهای دینامیکی در نزدیکی نقطهٔ تعادلشان مطرح کردیم. در این بخش بحث مشابهی را برای پاسخهای متناوب ارائه می‌نماییم. اگر $u(t)$ پاسخ متناوب سیستم زیر باشد:

$$\dot{x} = f(t,x) \qquad (۳ ـ ۷)$$

راجع به سایر پاسخهایی که از نزدیکی $u(t)$ آغاز می‌شود، چه می‌توان گفت؟ آیا آنها برای همهٔ لحظات زمان $t > ۰$، در همان همسایگی باقی می‌مانند؟ آیا این پاسخها به سمت $u(t)$ میل می‌کنند؟ می‌توان ویژگیهای پایداری پاسخ متناوب $u(t)$ را به کمک شیوهٔ لیاپانوف بررسی کرد؛ بدین منظور عبارت ذیل را درنظر بگیرید:

$$y = x - u(t)$$

که مبدأ $y = ۰$، نقطهٔ تعادل سیستم ناخودگردان زیر است:

$$\dot{y} = f(t,y+u(t)) - f(t,u(t)) \qquad (۴ ـ ۷)$$

رفتار پاسخهای معادلهٔ (۷ ـ ۳) در نزدیکی $u(t)$، هم‌ارز رفتار پاسخهای معادلهٔ (۷ ـ ۴) در نزدیکی $y = ۰$ می‌باشد، بنابراین می‌توان ویژگیهای پایداریِ پاسخ $u(t)$ را بر اساس ویژگیهای پایداریِ نقطهٔ تعادل $y = ۰$ تعیین کرد، به طور مشخص می‌توان گفت پاسخ متناوب $u(t)$، پایدار مجانبی یکنواخت است اگر $y = ۰$، نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی یکنواختِ معادلهٔ (۷ ـ ۴) باشد. بدین ترتیب بررسی پایداریِ $u(t)$ به مطالعهٔ پایداری نقطهٔ تعادل سیستمی ناخودگردان تقلیل می‌یابد که این موضوع نیز در فصل سوم مورد بحث قرار گرفت. در فصل هشتم خواهیم دید مفهوم پایداری مجانبیِ یکنواخت پاسخهای متناوب از دیدگاه نظریهٔ لیاپانوف، در مطالعهٔ سیستمهای ناخودگردانی که به پارامترهای کوچکی وابسته‌اند، بسیار سودمند خواهد بود. البته این رویکرد در تحلیل پاسخهای متناوب سیستمهای خودگردان، بسیار محافظه‌کارانه است؛ مثال ذیل طبیعت محافظه‌کاری روش را بخوبی نشان می‌دهد:

مثال ۷ ـ ۶ سیستم مرتبهٔ دوم زیر را درنظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_1\left[\frac{(1-x_1^2-x_2^2)^3}{x_1^2+x_2^2}\right] - x_2\left[1+(1-x_1^2-x_2^2)^2\right]$$

$$\dot{x}_2 = x_2\left[\frac{(1-x_1^2-x_2^2)^3}{x_1^2+x_2^2}\right] + x_1\left[1+(1-x_1^2-x_2^2)^2\right]$$

این سیستم در مختصات قطبیِ $x_1 = r\cos\theta\ ,\ x_2 = r\sin\theta$ به شکل ذیل نمایش داده می‌شود:

$$\dot{r} = \frac{(1-r^2)^3}{r}$$

$$\dot{\theta} = 1 + (1-r^2)^2$$

پاسخی که از نقطهٔ (r_0, θ_0) آغاز می‌گردد، عبارت است از:

$$r(t) = \left[1 - \frac{1-r_0^2}{\sqrt{1+4t(1-r_0^2)^2}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + t + \frac{1}{4}ln\left[1+4t(1-r_0^2)^2\right]$$

لذا سیستم دارای پاسخ متناوب زیر می‌باشد:

$$\bar{x}_1(t) = \cos t, \quad \bar{x}_2(t) = \sin t$$

دور متناوب متناظر با این پاسخ، دایرهٔ واحد $r = 1$ است. همگی پاسخهای نزدیک به این مسیر، با افزایش t به سمت بینهایت، به سوی این دور متناوب میل می‌کند که همان رفتار «پایدار مجانبی» است که از یک دور متناوب انتظار داریم. در حقیقت این دور متناوب همان چرخهٔ حدّی پایدار است اما پاسخ متناوب $\bar{x}(t)$، از دید لیاپانوف، پایدار مجانبی یکنواخت نیست. این نکته را به یاد بیاورید که برای پایداری مجانبیِ یکنواخت، با شرط کوچک بودن

$[r_0\cos\theta_0 - 1]^2 + [r_0\sin\theta_0]^2$، باید داشته باشیم:

$$t\to\infty \Rightarrow \left[r(t)\cos\theta(t) - \cos t\right]^2 + \left[r(t)\sin\theta(t) - \sin t\right]^2 \to 0$$

باتوجه به اینکه می‌دانیم: $t\to\infty \Rightarrow r(t)\to 1$، لذا باید:

$$t\to\infty \Rightarrow |1 - \cos(\theta(t) - t)| \to 0$$

که مشخص است اگر $r_0 \neq 1$ باشد، برآورده نمی‌شود؛ زیرا $\theta(t) - t$، تابعی افزایشیِ یکنوا از t می‌باشد. Δ

نکتهٔ مورد بحث در این مثال، در حالت کلّی نیز صحیح است؛ به‌طور مشخص می‌توان گفت هیچیک از پاسخهای متناوب غیر بدیهیِ سیستم خودگردان، نمی‌تواند از دیدگاه لیاپانوف، پایدار مجانبی باشد*.

می‌توان ویژگیهای شبه‌پایداری[1] دور متناوب مثال ۷ ـ ۶ را با توسعهٔ مفهوم پایداری از دیدگاه لیاپانوف، از پایداری یک نقطهٔ تعادل به پایداری یک مجموعهٔ پایا، تشریح نمود؛ بدین منظور سیستم زیر را درنظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x) \qquad (۵-۷)$$

که $f: D\to R^n$ نگاشتی پیوسته ـ مشتق‌پذیر از قلمرو $D\subset R^n$ به R^n است. فرض کنید $M\subset D$، یکی از مجموعه‌های پایای معادلهٔ (۷ ـ ۵) باشد. همسایگی ε مربوط به مجموعهٔ M را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$U_\varepsilon = \{x\in R^n \mid dist(x,M) < \varepsilon\}$$

که $dist(x,M)$، کمترین فاصلهٔ بین x تا نقطه‌ای از M است؛ یعنی:

$$dist(x,M) = \inf_{y\in M}\|x-y\|$$

---

* برای اثبات این نکته، [۶۲، قضیهٔ ۸۱ ـ ۱] را ملاحظه کنید.

1. Stability - like

تعریف ۷ ـ ۲ مجموعهٔ پایای M مربوط به معادلهٔ (۷ ـ ۵):

- *پایدار است اگر برای هر* $\varepsilon > 0$، *مقدار* $\delta > 0$ *چنان وجود داشته باشد که:*

$$x(0) \in U_\delta \Rightarrow x(t) \in U_\varepsilon, \qquad \forall t \geq 0$$

- *پایدار مجانبی است اگر پایدار باشد و مقدار* δ *را بتوان چنان برگزید که:*

$$x(0) \in U_\delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} dist(x(t), M) = 0$$

اگر M نقطهٔ تعادل باشد، این تعریف به تعریف ۳ ـ ۱ تقلیل می‌یابد. پایداری و پایداری مجانبیِ مجموعه‌های پایا در جای خود مفاهیم جذّابی هستند اما در اینجا آنها را در حالت خاصی بررسی می‌کنیم که در آن مجموعهٔ پایای M، دور بسته‌ای متناظر با پاسخی متناوب است. فرض کنید $u(t)$، پاسخ متناوب غیر بدیهی سیستم خودگردان (۷ ـ ۵) با دورهٔ تناوب T و γ نیز دور بسته‌ای باشد که با عبارت زیر تعریف شده است:

$$\gamma = \{x \in R^n \mid x = u(t),\ 0 \leq t \leq T\}$$

دور متناوب γ، تصویر $u(t)$ در فضای حالت می‌باشد. این دور مجموعهٔ پایایی است که ویژگیهای پایداری‌اش به کمک تعریف ۷ ـ ۲ مشخص می‌شود. مرسوم این است، بویژه برای سیستمهای مرتبهٔ دوم، که دورهای متناوب پایدار مجانبی را به عنوان چرخه‌های حدّی پایدار درنظر بگیرند.

مثال ۷ ـ ۷ نوسانساز هماهنگ ذیل:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1$$

دارای سلسله دورهای متناوبی به شکل دایره‌های هم‌مرکز است که مرکز آنها در مبدأ قرار دارد. هریک از این دورهای متناوب، پایدار است، برای مثال دور متناوب γ_c را درنظر بگیرید که با عبارت زیر تعریف شده باشد:

$$\gamma_c = \{x \in R^2 \mid r = c > 0\}, \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{که:}$$

همسایگی U_ε مربوط به γ_c با ناحیهٔ حلقوی زیر بیان می‌گردد:

$$U_\varepsilon = \{x \in R^2 \mid c - \varepsilon < r < c + \varepsilon\}$$

این ناحیهٔ حلقوی بتنهایی مجموعه‌ای پایاست، بنابراین برای هر مقدار $\varepsilon > 0$ می‌توان مقدار δ را برابر با ε قرار داد و مشاهده کرد هر یک از پاسخهایی که در لحظهٔ $t = 0$ در همسایگی U_ε آغاز می‌شود، برای تمامی مقادیر $t \geq 0$ درون همسایگی U_ε باقی خواهد ماند لذا دور متناوب γ_c پایدار است اما پایدار مجانبی نیست زیرا پاسخی که در همسایگی U_ε مربوط به γ_c آغاز می‌گردد، صرف نظر از اینکه δ چقدر کوچک است، با افزایش $t \to \infty$ به سوی γ_c میل نمی‌کند. Δ

مثال ۷ ـ ۸ سیستم مثال ۷ ـ ۶ را درنظر بگیرید. این سیستم دارای یک دور متناوبِ تنها به شکل زیر است:

$$\gamma = \{x \in R^2 \mid r = 1\}, \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{که:}$$

در حالت $x \notin \gamma$، داریم:

$$dist(x, \gamma) = \inf_{y \in \gamma} \|x - y\|_2 = \inf_{y \in \gamma} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = |r - 1|$$

با یادآوری این نکته که:

$$r(t) = \left[1 - \frac{1 - r_0^2}{\sqrt{1 + 4t(1 - r_0^2)^2}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

بسادگی می‌توان ملاحظه کرد استلزام $\varepsilon - \delta$ ی مربوط به پایداری برآورده می‌شود و داریم:

$$t \to \infty \Rightarrow dist(x(t), \gamma) \to 0$$

بنابراین دور متناوب این سیستم، پایدار مجانبی است. Δ

با مشخص شدن ویژگیهای پایداریِ دورهای متناوب، اکنون می‌توان ویژگیهای پایداری

پاسخهای متناوب را تعریف کرد:

تعریف ۷ ـ ۳ *پاسخ متناوب غیر بدیهی $u(t)$ مربوط به معادلهٔ (۷ ـ ۵):*

- *پایدار دوری*[1] *است اگر دور بستهٔ γی ناشی از $u(t)$ پایدار باشد؛*
- *پایدار دوری مجانبی*[2] *است اگر دور بستهٔ γی ناشی از $u(t)$ پایدار مجانبی باشد.*

در اینجا بدین دلیل از واژه‌نگاریهای متفاوت استفاده شده که تمایز بحث راجع به پاسخ متناوب و دور متناوب متناظر با آن مشخص گردد: در مثال ۷ ـ ۸، دایرهٔ واحد یک دور متناوب پایدار مجانبی است اما پاسخ متناوب آن $(cost, sint)$، پایدار دوری مجانبی است.

یکی از ابزارهای مفهومی مهم برای درک پایداری دورهای متناوب، نگاشت پوانکاره است. این نگاشت به جای سیستمی از مرتبهٔ n، زمان ـ پیوسته و خودگردان؛ سیستمی از مرتبهٔ $(n-1)$ و زمان ـ گسسته را به‌کار می‌گیرد. فرض کنید γ دور متناوبی از سیستم مرتبهٔ nام با معادلهٔ (۷ ـ ۵) باشد، ضمناً فرض کنید p نقطه‌ای روی γ و H نیز ابرصفحه‌ای[3] $(n-1)$ بُعدی در p باشد (منظور از ابرصفحه، رویهٔ $a^T(x-p)=0$ با شرط $a \in R^n$ است) که در نقطهٔ p با γ متقاطع است (یعنی $a^T f(p) \neq 0$). درحالت $n=2$، چنین ابرصفحه‌ای، خطی گذرنده از p است که در نقطهٔ p بر γ مماس نیست. $S \subset H$ را نیز سطح مقطعی درنظر می‌گیریم که برای آن $p \in S$ بوده، برای جمیع مقادیر $x \in S$ داشته باشیم: $a^T f(x) \neq 0$. مسیر حالتی که از نقطهٔ p آغاز شود، S را در T ثانیه بعد در نقطهٔ p قطع می‌کند که T دورهٔ تناوب دور متناوب می‌باشد. باتوجه به پیوستگی پاسخها نسبت به حالتهای اولیه، مسیرهای حالتی که از روی S و در همسایگی کوچکی حول p آغاز می‌شود، تقریباً در T ثانیه بعد در مجاورت p با S برخورد می‌کند. فرض کنید $U \subset S$، همسایگی (به اندازهٔ کافی کوچکی) حول p باشد به‌طوری که γ فقط یک‌بار U را در p قطع نماید، نگاشت پوانکارهٔ $g: U \to S$ برای هر نقطه $x \in U$ با تعریف ذیل مشخص می‌شود:

$$g(x) = \phi(\tau, x)$$

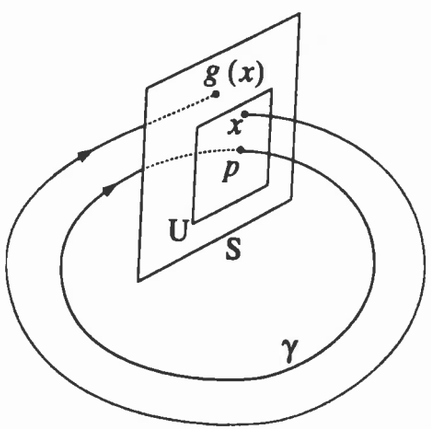
که $\phi(t,x)$ پاسخ معادلهٔ (۷ ـ ۵) است که در لحظهٔ $t=0$ از x آغاز می‌گردد و $\tau = \tau(x)$

1. Orbitally stable
2. Asymptotically Orbitally stable
3. Hyperplane

نیز زمان موردنیاز برای نخستین باری است که $\phi(t,x)$ دوباره به S بازمی‌گردد (شکل ۷ ـ ۶ را ملاحظه کنید). باید توجه کرد که در حالت کلّی، τ به x وابسته است و الزاماً برابر با T (دورهٔ تناوب γ) نیست ضمناً نگاشت پوانکاره فقط به‌طور محلی تعریف می‌شود یعنی لزومی نیست آن را برای تمامی مقادیر $x \in S$ تعریف کنیم. فرض کنید در تعریف قبل U را چنان برگزینیم که نگاشت برای همهٔ مقادیر $x \in U$ تعریف گردد. حال با درنظرگرفتن $x^{(0)} \in U$، فرض می‌کنیم: $x^{(1)} = g(x^{(0)})$. اگر $x^{(1)} \in U$ باشد، نگاشت پوانکاره در $x^{(1)}$ تعریف خواهد شد و مقدار $x^{(2)}$ را برابر با $g(x^{(1)})$ قرار می‌دهیم. تا هنگامی‌که $x^{(k)} \in U$ است داریم: $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$؛ بنابراین دنبالهٔ $x^{(k)}$ پاسخ سیستم زمان ـ گسستهٔ زیر می‌باشد:

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) \qquad (۶ \text{ ـ } ۷)$$

واضح است p یکی از نقاط تعادل معادلهٔ (۷ ـ ۶) است زیرا داریم: $p = g(p)$. گرچه بردار x، n بُعدی است اما پاسخ حاصل از (۷ ـ ۶) به ابرصفحهٔ $(n-1)$ بُعدی H محدود می‌شود؛ بنابراین معادل با پاسخ یک سیستم $(n-1)$ بُعدی می‌باشد. این نکته را می‌توان به کمک تغییر متغیرها



شکل ۷ ـ ۶ نگاشت پوانکاره

آشکارتر کرد: فرض کنید معادلهٔ ابرصفحهٔ H به شکل $a^T(x-p)=0$ باشد، چون $a^T f(p) \neq 0$ است، باید بردار a غیرصفر باشد بنابراین حداقل یکی از مؤلفه‌های این بردار

مخالف صفر است. باتوجه به امکان تغییر نام درایه‌های a، بدون کاستن از کلیّت مطلب، فرض می‌کنیم: $a_n \neq 0$؛ حال با افراز a، x، p و g به شکل:

$$a = \begin{bmatrix} b \\ a_n \end{bmatrix} \; ; \; x = \begin{bmatrix} y \\ x_n \end{bmatrix} \; ; \; p = \begin{bmatrix} q \\ p_n \end{bmatrix} \; ; \; g = \begin{bmatrix} \eta \\ g_n \end{bmatrix}$$

ماتریس غیر منفرد M (و به تبع آن، وارون M) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ b^T & a_n \end{bmatrix} \; ; \; M^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\frac{1}{a_n} b^T & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}$$

که I ماتریس همانی[1] $(n-1) \times (n-1)$ بُعدی است. اکنون به ازای جمیع مقادیر $x \in H$، با اعمال تغییر متغیر:

$$z = Mx = \begin{bmatrix} y \\ a^T x \end{bmatrix}$$

داریم: $a^T x = a^T p$. در این صورت با توصیف روابط در دستگاه مختصات z، آخرین جزء پاسخ (۷ ـ ۶) همواره ثابت است. $(n-1)$ جزء نخست را نیز می‌توان به عنوان پاسخ سیستم $(n-1)$ بُعدی زیر درنظر گرفت:

$$y^{(k+1)} = h\left(y^{(k)}\right) \qquad (۷ \text{ ـ } ۷)$$

که:

$$h(y) = \eta \left(\begin{bmatrix} y \\ P_n - \frac{1}{a_n} b^T (y - q) \end{bmatrix} \right)$$

سیستم (۷ ـ ۷) دارای نقطهٔ تعادلی در $y = q$ می‌باشد زیرا می‌توان نوشت:

1. Identity matrix

$$h(q) = \eta \left(\begin{bmatrix} q \\ p_n \end{bmatrix} \right) = \eta(p) = q$$

رابطهٔ معنی‌داری میان ویژگیهای پایداری دور متناوب γ و ویژگیهای پایداری q به عنوان نقطهٔ تعادل سیستم زمان ـ گسستهٔ (۷ ـ ۷) وجود دارد. گرچه ما پیشتر پایداری نقاط تعادل سیستمهای زمان ـ گسسته را مطالعه نکرده‌ایم لیکن مفاهیم آن کاملاً مشابه با حالت زمان ـ پیوسته می‌باشد. به‌طور مشخص، می‌توان تعریف ۳ ـ ۱ را به عنوان پایداری و پایداری مجانبیِ مبدأ سیستمهای زمان ـ گسسته درنظر گرفت و فقط باید متغیر زمان (t) را به عنوان مقداری صحیح انگاشت. در تعدادی از تمرینهای پایان بخش ۳ ـ ۷، ویژگیهای پایداری لیاپانوف برای سیستمهای زمان ـ گسسته تشریح شده است.

قضیهٔ ۷ ـ ۳ *فرض کنید γ دور متناوب معادلهٔ (۷ ـ ۵) باشد، نگاشت پوانکاره و سیستم زمان ـ گسستهٔ (۷ ـ ۷) را مطابق قبل تعریف می‌کنیم در این صورت اگر q نقطهٔ تعادل پایدار مجانبیِ معادلهٔ (۷ ـ ۷) باشد، آنگاه γ پایدار مجانبی است.* ◇

برهان: باید نشان دهیم برای هر همسایگی U_ε حول γ، همسایگی U_δ چنان وجود دارد که برای هر مقدار $x \in U_\delta$ می‌توان نوشت:

$$\phi(t,x) \in U_\varepsilon, \qquad \forall t \geq 0$$

و:

$$\lim_{t \to \infty} dist(\phi(t,x), \gamma) = 0$$

نگاشت پوانکاره باتوجه به سطح مقطع S در نقطهٔ مشخص $p \in \gamma$ تعریف شده است، ضمن اینکه لزومی ندارد حالت اولیهٔ نزدیک به γ، در همسایگی p واقع باشد. حال با فرض:

$$x \in U_\delta = \{x \in R^n \mid dist(x, \gamma) < \delta\}$$

نقطه‌ای مانند $p_1 \in \gamma$ چنان وجود دارد که داشته باشیم: $\| x - p_1 \| < \delta$. با عنایت به پیوستگی پاسخ نسبت به حالتهای اولیه (به‌طور مشخص به کمک قضیهٔ ۲ ـ ۵) داریم:

$$\| \phi(t,x) - \phi(t,p_1) \| \leq \delta \exp(Lt)$$

که L ثابت لیپ‌شیتز مربوط به f می‌باشد. پاسخ $\phi(t,p_1)$، تابعی متناوب با دورهٔ تناوب T است، بنابراین می‌توان زمانی مانند $t_1 < T$ را چنان یافت که داشته باشیم: $\phi(t_1,p_1) = p_1$؛ در نتیجه:

$$\|\phi(t_1,x) - p\| \le \delta \exp(Lt)$$

بنابراین با انتخاب مقادیر کوچک δ، مطمئن خواهیم بود مسیر حالت x از درون همسایگی مشخص حول p می‌گذرد، اینک باید نشان دهیم مسیر حالت، با سطح مقطع S از ابرصفحهٔ H برخورد خواهد کرد؛ بدین منظور معادلهٔ H را به شکل $a^T(x-p) = 0$ درنظر گرفته، تعریف می‌کنیم:

$$G(t,x) = a^T[\phi(t,x) - p]$$

باتوجه به $\phi(T,p) = p$ داریم: $G(T,p) = 0$. علاوه بر این می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,x)_{t=T;\,x=p} = a^T f(\phi(t,x))_{t=T;\,x=p} = a^T f(p) \neq 0$$

با استفاده از قضیهٔ تابع ضمنی[1] می‌توان نگاشت یکتا و پیوسته ـ مشتق‌پذیر $x \to \tau(x) \in R$ را روی همسایگی V حول p در R^n چنان یافت که داشته باشیم: $\tau(p) = T$ و $G(\tau(x),x) = 0$. این نکته بدان معناست که هر پاسخی که از درون همسایگی V آغاز گردد، در زمان $\tau(x)$ با ابرصفحهٔ H برخورد خواهد کرد. بنابه پیوستگی پاسخها نسبت به حالتهای اولیه، واضح است با انتخاب همسایگی V به اندازهٔ کافی کوچک، مطمئن خواهیم بود که پاسخ، در مجموعهٔ $U \subset S$ با ابرصفحهٔ H برخورد خواهد کرد. علاوه بر این باتوجه به پیوستگی $\tau(x)$، برای هر مقدار $\Delta \in (0,T)$ می‌توان همسایگی V را آنقدر کوچک انتخاب کرد که داشته باشیم:

$$T - \Delta \le \tau(x) \le T + \Delta, \qquad \forall x \in V \qquad (۷ ـ ۸)$$

این استدلال نشان می‌دهد با آغاز حرکت ازمجاورت γ، مسیر حالت دارای نقطه‌ای درون $U \subset S$

1. Implicit function theorem

می‌باشد، بنابراین نگاشت پوانکاره برای این نقطه تعریف می‌گردد. اینک می‌توان سیستم زمان ـ گسستهٔ (۷ ـ ۷) را درنظر گرفت که دارای نقطهٔ تعادلی در q است، اگر q پایدار باشد آنگاه برای هر مقدار معلوم $\varepsilon_1 > 0$، مقدار $\delta_1 > 0$ چنان وجود دارد که:

$$\|y^{(0)} - q\| < \delta_1 \Rightarrow \|y^{(k)} - q\| < \varepsilon_1, \ \forall k \ge 0$$

باتوجه به:

$$x - p = \begin{bmatrix} y - q \\ -\frac{1}{a_n} b^T (y - q) \end{bmatrix}$$

به ازای ثابتهای مثبت c_1 و c_2 می‌توان نوشت:

$$c_1 \|y - q\| \le \|x - p\| \le c_2 \|y - q\|$$

بنابراین برای هرمقدار $\varepsilon_2 > 0$، مقدار $\delta_2 > 0$ چنان وجود دارد که:

$$\|x^{(0)} - p\| < \delta_2 \Rightarrow \|x^{(k)} - p\| < \varepsilon_2, \qquad \forall k \ge 0$$

با انتخاب مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک برای ε_2، مطمئن خواهیم بود که دنبالهٔ $x^{(k)}$ همواره درون همسایگی V خواهد بود. نقاط تقاطع $\phi(t,x)$ با سطح مقطع S، دنباله‌ای مانند t_k را با شروط ذیل تعریف می‌نماید:

$$T - \Delta \le t_{k+1} - t_k \le T + \Delta$$

$$k \to \infty \Rightarrow t_k \to \infty$$

و:

$$\|\phi(t_k,x) - p\| = \|x^{(k)} - p\| < \varepsilon_2, \qquad \forall k \ge 0$$

کرانهای $t_{k+1} - t_k$ از رابطهٔ (۷ ـ ۸) به دست می‌آید، این نکته که $t_k \to \infty$ میل می‌کند از کران پایین $t_{k+1} - t_k$ حاصل می‌شود. در فاصلهٔ دولحظهٔ پیاپی t_k و t_{k+1} داریم:

$$\|\phi(t - t_k, x^{(k)}) - \phi(t - t_k, p)\| \le \|x^{(k)} - p\| \exp[L(T + \Delta)] \qquad (۷ ـ ۹)$$

که باز از قضیهٔ ۲ ـ ۵ به دست آمده است؛ بنابراین برای ثابت مثبت k_1 و همسایگی به اندازهٔ کافی کوچک V نتیجه می‌شود:

$$dist\,(\phi(t,x),\gamma) \le k_1 \varepsilon_2, \qquad \forall t \ge 0, \qquad \forall x \in V$$

اگر ε_2 به اندازهٔ کافی کوچک باشد می‌توان $\phi(t,x)$ را درون همسایگی U_ε حول γ قرار داد.
حال فرض کنید q یکی از نقاط تعادل پایدار مجانبیِ معادلهٔ (۷ ـ ۷) باشد، در این صورت داریم:

$$k \to \infty \Rightarrow \|y^{(k)} - q\| \to 0$$

که تلویحاً بدین معناست که: $k \to \infty \Rightarrow \|x^{(k)} - p\| \to 0$

برای هر مقدار $\varepsilon > 0$، مقدار $N > 0$ چنان وجود دارد که:

$$\|x^{(k)} - p\| < \varepsilon, \qquad \forall k \ge N$$

از رابطهٔ (۷ ـ ۹) داریم:

$$dist\,(\phi(t,x),\gamma) < k_1 \varepsilon, \qquad \forall t \ge t_N$$

بنابراین: $t \longrightarrow \infty \Rightarrow dist\,(\phi(t,x),\gamma) \longrightarrow 0$

بدین ترتیب برهان قضیه کامل می‌شود. □

مثال ۷ ـ ۹ سیستم مرتبهٔ دوم ذیل مفروض است:

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

این سیستم با تغییر متغیر: $x_1 = r\cos\theta$ و $x_2 = r\sin\theta$ به مختصات قطبی زیر تبدیل می‌شود:

$$\dot{r} = r(1 - r^2)$$

$$\dot{\theta} = 1$$

پاسخ آغازشده از نقطهٔ (r_0, θ_0) با عبارت ذیل بیان می‌شود:

$$r(t) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1\right) exp\,(-2t)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + t$$

از این روابط درمی‌یابیم دایرهٔ $r = 1$، یک دور متناوب است. برای تعیین نگاشت پوانکاره، p را در نقطهٔ $(0, 1)$ و سطح مقطع S را به عنوان نیمهٔ مثبت محور x_1 انتخاب می‌کنیم؛ در این صورت با آغاز از نقطهٔ $(r, 0) \in S$، نخستین بازگشت مسیر حالت به S در زمان $\tau = 2\pi$ خواهد بود بنابراین نگاشت پوانکاره (در مختصات قطبی) با عبارت زیر معرفی می‌گردد:

$$g(r) = \left[1 + \left(\frac{1}{r^2} - 1\right) exp\,(-4\pi)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

که نگاشتی تک‌بُعدی است و دیگر نیازی به استفاده از روند تقلیل پیشگفته نیست. سیستم زمان ـ گسستهٔ متناظر با این نگاشت برابر است با:

$$r_{k+1} = \left[1 + \left(\frac{1}{r_k^2} - 1\right) exp\,(-4\pi)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

این سیستم دارای نقطهٔ تعادلی در $r = 1$ است که اگر اندازهٔ مقادیر ویژهٔ ماتریس ژاکوبی در نقطهٔ تعادل (در این مثال فقط یکی) کمتر از واحد باشد، آنگاه این نقطهٔ تعادل، پایدار مجانبی خواهد بود؛ در این مثال داریم:

$$\frac{dg}{dr}\Big|_{r=1} = -\frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{r^2} - 1\right) exp\,(-4\pi)\right]^{-\frac{3}{2}} \left(-\frac{2e^{-4\pi}}{r^3}\right)_{r=1}$$
$$= e^{-4\pi} < 1$$

بنابراین $r = 1$، نقطهٔ تعادل پایدار مجانبیِ سیستم زمان ـ گسسته است و دایرهٔ واحد، یک دور متناوب پایدار مجانبی می‌باشد. Δ

تعیین نگاشت پوانکاره بر پایهٔ دانستن پاسخ معادلهٔ دیفرانسیل است، بنابراین بجز درمورد مثالهای بدیهی، که پاسخشان به شکل بسته بیان می‌شود، نمی‌توان نگاشت پوانکاره را به طور تحلیلی مشخص نمود و در عمل آن را به کمک شبیه‌سازی کامپیوتری رسم می‌کنند*.

* می‌توان الگوریتمهای عددی مربوط به تعیین و تولید نگاشت پوانکاره را در [۱۳۲] یافت.

۷ـ۳ تمرینها

تمرین ۷ ـ ۱ در هریک از سیستمهای زیر با استفاده از قضیهٔ پوانکاره ـ بِن‌دیکسون نشان دهید سیستم دارای یک دور متناوب است:

(۱)
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2(1 - 3x_1^2 - 2x_2^2)\end{aligned}$$

(۲)
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2 - 2(x_1 + 2x_2)x_2^2\end{aligned}$$

(۳)
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2 - x_1(|x_1| + |x_2|)\\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + x_2 - x_2(|x_1| + |x_2|)\end{aligned}$$

(۴) $\ddot{y} + y = \varepsilon\dot{y}\,(1 - y^2 - \dot{y}_2),\ \varepsilon > 0$

تمرین ۷ ـ ۲ (سیستمهای پایستار) سیستم مرتبهٔ دوم زیر را درنظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -g(x_1)$$

که $g(\cdot)$ تابعی پیوسته ـ مشتق‌پذیر است و به ازای جمیع مقادیر $z \in (-a, a)$ داریم: $zg(z) > 0$. علاوه بر این تابع انرژی ذیل مفروض است:

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} g(z)\,dz$$

(الف) نشان دهید $V(x)$ در امتداد مسیرهای حالت سیستم، ثابت می‌ماند.

(ب) نشان دهید برای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک $\|x(0)\|$، هریک از پاسخها متناوب است.

(ج) فرض کنید به ازای جمیع مقادیر $z \in (-\infty, +\infty)$ داشته باشیم: $zg(z) > 0$ و نیز:

$$|y| \to \infty \Rightarrow \int_0^y g(z)\,dz \to \infty$$

ثابت کنید هریک از پاسخها متناوب است.

(د) اگر داشته باشیم: $g(z) = -g(-z)$ و $G(y) = \int_0^y g(z)\,dz$، نشان دهید مسیر حالت گذرنده از $(A, 0)$ با رابطهٔ ذیل بیان می‌گردد:

$$x_2 = \pm\sqrt{2[G(A) - G(x_1)]}$$

(ه) با استفاده از بند (د) نشان دهید دورهٔ تناوب نوسان مربوط به مسیر حالت بستهٔ گذرنده از $(A, 0)$ برابر است با:

$$T(A) = 2\sqrt{2}\int_0^A \frac{dy}{[G(A) - G(y)]^{\frac{1}{2}}}$$

(و) درمورد چگونگی استفاده از معادلهٔ مسیر حالت بند (د) برای رسم پیکرهٔ فاز سیستم بحث کنید.

تمرین ۷ ـ ۳ با استفاده از تمرین قبل، پیکرهٔ فاز هریک از سیستمهای ذیل را رسم و ویژگیهای پاسخهای متناوب آنها را بررسی کنید. در هر حالت، دورهٔ تناوب نوسان مربوط به دور متناوبِ گذرنده از نقطهٔ $(1, 0)$ را محاسبه نمایید.

(۱) $g(x_1) = \sin x_1$

(۲) $g(x_1) = x_1 + x_1^3$

(۳) $g(x_1) = x_1^3$

تمرین ۷ ـ ۴ نشان دهید هیچیک از سیستمهای ذیل چرخهٔ حدّی ندارد.

(۱)
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= g(x_1) + ax_2, \qquad a \neq 0\end{aligned}$$

(۲)
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_1^3 + x_1x_2^2\\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_2^3 + x_1^2x_2\end{aligned}$$

(۳)
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 1 - x_1x_2\\ \dot{x}_2 &= x_1\end{aligned}$$

$$(۴)\qquad \begin{aligned} \dot{x}_۱ &= x_۱ x_۲ \\ \dot{x}_۲ &= -x_۲ \end{aligned}$$

$$(۵)\qquad \begin{aligned} \dot{x}_۱ &= x_۲ \cos(x_۱) \\ \dot{x}_۲ &= \sin(x_۱) \end{aligned}$$

تمرین ۷ ـ ۵ سیستم زیر مفروض است:

$$\dot{x}_۱ = -x_۱ + x_۲(x_۱ + a) - b$$

$$\dot{x}_۲ = -c x_۱ (x_۱ + a)$$

که a، b و c ثابتهای مثبتی با شرط $b > a$ هستند، فرض کنید داشته باشیم:

$$D = \left\{ x \in R^۲ \mid x_۱ < -a \quad , \quad x_۲ < \frac{x_۱ + b}{x_۱ + a} \right\}$$

(الف) نشان دهید مجموعهٔ D پایای مثبت است.

(ب) ثابت کنید هیچ دور متناوبی از نقاط $x \in D$ نمی‌گذرد.

تمرین ۷ ـ ۶ سیستم ذیل را درنظر بگیرید:

$$\dot{x}_۱ = a x_۱ - x_۱ x_۲$$

$$\dot{x}_۲ = b x_۱ - c x_۲$$

که a، b و c ثابتهای مثبتی با شرط $b > a$ هستند. فرض کنید داشته باشیم:

$$D = \{ x \in R^۲ \mid x_۲ \geq ۰ \}$$

(الف) نشان دهید مجموعهٔ D پایای مثبت است.

(ب) نشان دهید هیچ دور متناوبی از نقاط $x \in D$ نمی‌گذرد.

تمرین ۷ ـ ۷ [(۱۷۶)] سیستم ذیل را درنظر بگیرید:

$$\dot{x}_۱ = x_۲$$

$$\dot{x}_۲ = -[۲b - g(x_۱)] a x_۲ - a^۲ x_۱$$

که a و b ثابتهای مثبتی هستند و داریم:

$$g(x_۱) = \begin{cases} ۰, & |x_۱| > ۱ \\ k, & |x_۱| \leq ۱ \end{cases}$$

(الف) با استفاده از معیار بِن‌دیکسون نشان دهید اگر $k < ۲b$ باشد، هیچ دور متناوبی وجود ندارد.

(ب) با استفاده از قضیهٔ پوانکاره ـ بِن‌دیکسون ثابت کنید اگر $k > ۲b$ باشد، یک دور متناوب وجود دارد.

تمرین ۷ ـ ۸ ([۱۱۸]) سیستم مرتبهٔ سوم ذیل را در مختصات کروی[1] درنظر بگیرید:

$$\dot{\theta} = ۱, \quad \dot{\phi} = \pi, \quad \dot{\rho} = \rho(\sin\theta + \pi \sin\phi)$$

و فرض کنید داشته باشیم: $\theta(۰) = \phi(۰) = ۰$ و $\rho(۰) = ۱$. نشان دهید پاسخ این سیستم در $R^۳$ کراندار است اما نه متناوب است و نه به سمت پاسخی متناوب میل می‌کند.

تمرین ۷ ـ ۹ سیستمی مرتبهٔ دوم را درنظر بگیرید و فرض کنید M مجموعهٔ فشرده و پایای مثبت است. نشان دهید M یا شامل یک دور متناوب و یا یک نقطهٔ تعادل می‌باشد.

تمرین ۷ ـ ۱۰ سیستمی مرتبهٔ دوم را درنظر بگیرید و فرض کنید مجموعهٔ:

$$M = \{ x \in R^۲ \mid x_۱^۲ + x_۲^۲ \leq a^۲ \}$$

پایای مثبت باشد. ثابت کنید M شامل یک نقطهٔ تعادل است.

تمرین ۷ ـ ۱۱ لم ۷ ـ ۱ را به کمک ویژگیهای میدانهای برداری تحقیق کنید.

---

1. Spherical coordinate

تمرین ۷ ـ ۱۲ ([۵۹]) در هریک از سیستمهای ذیل نشان دهید مبدأ، هذلولوی نیست، شاخص مبدأ را بیابید و تحقیق کنید این شاخص مخالف با ۱± است.

$$(۱)\qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned}$$

$$(۲)\qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1x_2 \end{aligned}$$

۸

نظریهٔ آشفتگی و متوسط‌گیری

پاسخ تحلیلی به شکل بستهٔ دقیق فقط برای تعداد معدودی از معادلات دیفرانسیل غیرخطی وجود دارد و در حالت کلّی باید از روشهای تقریبی بهره جوییم. دو دستهٔ اصلی در روشهای تقریبی وجود دارد که مهندسان و دانشمندان در تحلیل سیستمهای غیرخطی از آن استفاده می‌کنند: (الف) روشهای حل عددی و (ب) روشهای مجانبی. در این فصل و فصل بعدی برخی از روشهای مجانبیِ تحلیل معادلات دیفرانسیل غیرخطی را معرفی می‌کنیم*.

فرض کنید معادلهٔ حالت ذیل مفروض باشد:

$$\dot{x} = f(t, x, \varepsilon)$$

که ε پارامتر عددی «کوچکی» است و تحت شرایط معیّنی، معادله دارای پاسخ دقیق $x(t, \varepsilon)$ می‌باشد. در بسیاری از کاربردها با چنین معادلاتی مواجه می‌شویم. هدف از روش مجانبی به دست آوردن پاسخی تقریبی به شکل $\tilde{x}(t, \varepsilon)$ است که در آن خطای تقریب (یعنی: $x(t, \varepsilon) - \tilde{x}(t, \varepsilon)$) برای مقادیر کوچک $|\varepsilon|$ و برحسب نُرم خاصی کوچک باشد و ضمناً پاسخ تقریبی $\tilde{x}(t, \varepsilon)$ برحسب جملاتی از معادله بیان گردد که ساده‌تر از معادلهٔ اصلی است. اهمیت عملی روشهای مجانبی در این نکته نهفته است که به کمک آنها می‌توان ویژگیهای ساختاری معادلهٔ حالت اصلی را برای مقادیر کوچک $|\varepsilon|$ بیان کرد. در بخش ۸ ـ ۱ مثالهایی را خواهیم دید که در آن روشهای مجانبی، ساختار تزویجیِ ضعیفی را میان زیرسیستمهای مجزّا و یا ساختار سیستم غیرخطی ضعیف نمایان می‌سازد. نکتهٔ مهمتر اینکه روشهای مجانبی

---

* روشهای حل عددی در این کتاب بیان نشده زیرا فرض بر آن است که دانشجو در درس معادلات دیفرانسیل مقدماتی با آنها آشنا شده و اطلاعات عمیقی را در خصوص این موضوع در درسهای تحلیل عددی و یا حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی به دست آورده است.

می‌توانند ساختارهای چند مقیاس زمانی[1] ذاتی را در بسیاری از مسائل عملی نشان دهند: تقریباً در اکثر اوقات، حل معادلهٔ حالت، نمایش‌دهندهٔ پدیده‌ای است که در آن برخی متغیرها به لحاظ زمانی سریعتر از برخی دیگر حرکت می‌کنند، این پدیده موجب می‌شود متغیرها را به دو دستهٔ «آرام» و «تند» دسته‌بندی کنیم. هر دو روش متوسط‌گیری، مذکور در این فصل، و نیز روش آشفتگی منفرد، مورد بحث در فصل بعد، در مورد برهم‌کنش[2] متغیرهای آرام و تند است.

بخش ۸ ـ ۱ روش معمولی آشفتگی را معرفی می‌کند که به کمک آن می‌توان پاسخ تقریبی را به صورت بسط سری محدود تیلورِ پاسخ دقیق بیان نمود. اعتبار مجانبی این تقریب در بخش ۸ ـ ۱ براساس بازه‌های محدود زمانی و در بخش ۸ ـ ۲ براساس بازه‌های نامحدود زمانی بررسی شده است. در بخش ۸ ـ ۳ به معرفی ساده‌ترین شکل روش متوسط‌گیری می‌پردازیم که با توجه به متناوب بودن سمت راست تابع نسبت به زمان، روش «متوسط‌گیری متناوب»[3] نامیده می‌شود. بخش ۸ ـ ۴، کاربرد روش متوسط‌گیری را در مطالعهٔ پاسخهای متناوب مربوط به سیستمهای غیرخطیِ ضعیف مرتبهٔ دوم بیان می‌کند و سرانجام حالت عمومیتر روش متوسط‌گیری را در بخش ۸ ـ ۵ مطرح خواهیم نمود.

۸ ـ ۱ روش آشفتگی

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(t,x,\varepsilon) \qquad (۸-۱)$$

که تابع $f: [t_0,t_1]\times D\times[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]\longrightarrow R^n$ نسبت به آرگومانهایش روی قلمرو $D\subset R^n$، «به اندازهٔ کافی هموار» است. شروط هموار در ادامهٔ این بحث تبیین خواهد شد. فرض کنید بخواهیم معادلهٔ حالت (۸ ـ ۱) را برای حالت اولیهٔ ذیل حل کنیم:

$$x(t_0) = \eta(\varepsilon) \qquad (۸-۲)$$

در حالت کلّی‌تر فرض می‌کنیم حالت اولیه «به طور آرام» به ε بستگی داشته باشد. پاسخ معادلهٔ (۸ ـ ۱) ـ (۸ ـ ۲) به پارامتر ε وابسته است و به همین دلیل آن را با $x(t,\varepsilon)$ نمایش می‌دهیم. هدف از روش آشفتگی این است که معیاری برای «کوچکی» پارامتر آشفتگیِ ε به دست دهد که

1. Multiple-time-scale structure
2. Interaction
3. Periodic averaging

به کمک آن بتوان حلی تقریبی ارائه نمود که برای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک $|\varepsilon|$ معتبر باشد. ساده‌ترین تقریب با فرض $\varepsilon = 0$ در معادلات (۸ ـ ۱) ـ (۸ ـ ۲) به دست می‌آید که در واقع به مسألهٔ نامی[1] یا غیرآشفتهٔ[2] ذیل منجر می‌گردد:

$$\dot{x} = f(t,x,0), \qquad x(t_0) = \eta(0) \qquad (۸-۳)$$

فرض کنید این مسألهٔ دارای حل منحصر به فرد $x_0(t)$ بر بازهٔ $[t_0,t_1]$ باشد و به ازای جمیع مقادیر $t\in[t_0,t_1]$ داریم: $x_0(t)\in D$. علاوه بر این فرض کنید توابع f و η نسبت به آرگومانهایشان در قلمرو $[t_0,t_1]\times D\times[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشند. بنا به پیوستگی پاسخها نسبت به حالتهای اولیه و پارامترها (قضیهٔ ۲ ـ ۶) می‌دانیم برای هر مقدار به اندازهٔ کافی کوچک $|\varepsilon|$، مسألهٔ (۸ ـ ۱) ـ (۸ ـ ۲) دارای پاسخ یکتای $x(t,\varepsilon)$ بر بازهٔ $[t_0,t_1]$ است؛ در این صورت می‌توان به کمک قضیهٔ ۲ ـ ۵ میزان تقریب $x(t,\varepsilon)$ و $x_0(t)$ را با عبارت ذیل نمایش داد*:

$$\|x(t,\varepsilon)-x_0(t)\| \le k|\varepsilon|, \qquad \forall\,|\varepsilon|<\varepsilon_1, \qquad \forall t\in[t_0,t_1] \qquad (۸-۴)$$

که k مقداری مثبت و $\varepsilon_1 \le \varepsilon_0$ می‌باشد. با نمایش این کران برحسب خطای تقریب، می‌توان خطا را از مرتبهٔ $O(\varepsilon)$ بیان کرد و نوشت:

$$x(t,\varepsilon)-x_0(t) = O(\varepsilon)$$

نماد مرتبهٔ اندازه[3]، بکرّات در این فصل و فصل آتی مورد استفاده قرار خواهد گرفت و لذا آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۸ ـ ۱ *اگر ثابتهای مثبت k و c چنان وجود داشته باشد که:*

$$|\delta_1(\varepsilon)| \le k|\delta_2(\varepsilon)|, \qquad \forall\,|\varepsilon|<c$$

آنگاه: $\delta_1(\varepsilon) = O(\delta_2(\varepsilon))$.

* جزئیات به دست آوردن کران (۸ ـ ۴) به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود؛ تمرین ۸ ـ ۱ را ملاحظه کنید.

1. Nominal problem
2. Unperturbed
3. Order of magnitude

مثال ۸ ـ ۱

- به ازای جمیع مقادیر $n \geq m$ داریم: $\varepsilon^n = O(\varepsilon^m)$ زیرا:

$$|\varepsilon|^n = |\varepsilon|^m\,|\varepsilon|^{m-n} < |\varepsilon|^m, \qquad \forall\, |\varepsilon| < ۱$$

- داریم: $۲/(۰/۵ + \varepsilon) = O(\varepsilon^۲)$، زیرا:

$$\left|\frac{\varepsilon^۲}{۰/۵ + \varepsilon}\right| < \frac{۱}{۰/۵ - a}\,|\varepsilon|^۲, \qquad \forall\, |\varepsilon| < a < ۰/۵$$

- داریم: $۱ + ۲\varepsilon = O(۱)$، زیرا

$$|۱ + ۲\varepsilon| < ۱ + ۲a, \qquad \forall\, |\varepsilon| < a$$

- $\exp(-a/\varepsilon)$ همراه با مقادیر مثبت a و ε برابر با $O(\varepsilon^n)$ (n عدد صحیح مثبت) می‌باشد، زیرا:

$$\frac{e^{-a/\varepsilon}}{\varepsilon^n} \leq \left(\frac{n}{a}\right)^n e^{-n}, \qquad \forall \varepsilon > ۰ \qquad \Delta$$

اکنون فرض کنید نشان داده‌ایم خطای تقریب $(x(t,\varepsilon) - x_۰(t))$ برابر با $O(\varepsilon)$ است، در این صورت دربارهٔ مقدار عددی این خطا برای یک مقدار معلوم ε، چه می‌توان گفت؟ متأسفانه نمی‌توان عبارت مرتبهٔ اندازهٔ $O(\varepsilon)$ را به عنوان کران عددی روی خطا تعبیر کرد. دانستن اینکه خطا برابر با $O(\varepsilon)$ است بدین معناست که تُرم خطا کمتر از $k|\varepsilon|$ می‌باشد (k ثابت مثبتی مستقل از ε می‌باشد)، اما مقدار k را نمی‌دانیم و ممکن است ۱، ۱۰ و یا هر عدد مثبت دیگری باشد*. مستقل بودن k از ε تضمین کنندهٔ آن است که با کاهش $|\varepsilon|$، $k|\varepsilon|$ نیز به طور یکنوا کاهش می‌یابد؛ بنابراین برای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک $|\varepsilon|$، خطا نیز کوچک خواهد بود؛ به طور دقیقتر می‌دانیم برای هر مقدار تلرانس[2] δ، تُرم خطا برای جمیع مقادیر $|\varepsilon| < \delta/k$،

* البته باید اشاره کرد در مسألهٔ آشفتگی با فرمولبندی خوب[1] (که در آن متغیرها چنان نرمالیزه شده‌اند که دارای متغیرهای حالت بدون بُعد، زمان و پارامتر آشفتگی باشند) می‌توان انتظار داشت مقدار عددی k خیلی بزرگتر از واحد نباشد. برای بحث بیشتر در مورد نرمالیزاسیون، مثال ۸ ـ ۴ و برای مثالهای بیشتر [۱۲۴] و [۸۹] را ملاحظه کنید.

1. Well-formulated perturbation problem
2. Tolerance

کوچکتر از δ خواهد بود. چنانچه این محدوده آنقدر کوچک باشد که نتواند محدودهٔ مقادیر عددی ε را بپوشاند، لازم است به کمک تقریبهای مرتبهٔ بالاتر، محدودهٔ اعتبار را توسعه دهیم. تقریب $O(\varepsilon^۲)$ به ازای جمیع مقادیر $|\varepsilon| < \sqrt{\delta/k_۲}$، با همان تلرانس δ متناظر خواهد بود و تقریب $O(\varepsilon^۳)$ به ازای جمیع مقادیر $|\varepsilon| < (\delta/k_۳)^{\frac{۱}{۳}}$ نیز با همان میزان تلرانس δ و غیره. گرچه مقادیر k، $k_۲$، $k_۳$ و... الزاماً یکسان نیستند، اما طول این بازه‌ها بتدریج افزایش می‌یابد زیرا مقدار تلرانس δ به طور نمونه‌ای بسیار کوچکتر از واحد است.

روش دیگر برای ملاحظهٔ تقریبهای مرتبهٔ بالاتر توجه به این نکته است که برای هر مقدار «به اندازهٔ کافی کوچک» ε و با شرط $n > m$، مقدار خطای $O(\varepsilon^n)$ کوچکتر از $O(\varepsilon^m)$ است زیرا*:

$$\frac{k_۱|\varepsilon|^n}{k_۲|\varepsilon|^m} < ۱, \qquad \forall\, |\varepsilon| < \left(\frac{k_۲}{k_۱}\right)^{۱/(n-m)}$$

می‌توان تقریبهای مرتبهٔ بالاتر حلهای (۸ ـ ۱) ـ (۸ ـ ۲) را نیز به روشهای سرراستی (با توجه به اینکه f و η به اندازهٔ کافی هموار هستند) محاسبه نمود.

فرض کنید توابع f و η بترتیب دارای مشتقات جزئی پیوسته‌ای تا مرتبهٔ $N+۱$ و N نسبت به (x,ε) برای $(t,x,\varepsilon) \in [t_۰, t_۱] \times D \times [-\varepsilon_۰, \varepsilon_۰]$ باشند. برای محاسبهٔ تقریب مرتبهٔ بالاتری از $x(t,\varepsilon)$، بسط محدود سری تیلور آن را می‌نویسیم:

$$x(t,\varepsilon) = x_۰(t) + \sum_{k=۱}^{N-۱} x_k(t)\varepsilon^k + \varepsilon^N x_R(t,\varepsilon) \qquad (۵ ـ ۸)$$

در اینجا لازم است دو نکته را بیابیم: نخست باید بدانیم چگونه می‌توان جمله‌های $x_۰$، $x_۱$، ...، $x_{N-۱}$ را یافت (در فرایند رسیدن به این جملات خواهیم دید آنها خوش تعریف هستند) و دوم باید نشان دهیم جملهٔ باقیماندهٔ x_R، خوش تعریف و بر بازهٔ $[t_۰, t_۱]$ کراندار است؛ بدین منظور باید نشان دهیم عبارت $\sum_{k=۱}^{N-۱} x_k(t)\varepsilon^k$، یک تقریب $O(\varepsilon^n)$ (مرتبهٔ Nاُم) از

* [۷، قضیهٔ ۵ ـ ۱۴] را ملاحظه کنید.

$x(t,\varepsilon)$ می‌باشد.

شایان ذکر اینکه براساس قضیهٔ تیلور[1]، شرط هموار بودن حالت اولیهٔ $\eta(\varepsilon)$، تضمین کنندهٔ وجود سری محدود تیلور برای $\eta(\varepsilon)$ است؛ یعنی:

$$\eta(\varepsilon)=\eta(0)+\sum_{k=1}^{N-1}\eta_k\varepsilon^k+\varepsilon^N\eta_R(\varepsilon)$$

بنابراین:

$$x_0(t_0)=\eta(0);\ x_k(t_0)=\eta_k,\ k=1,2,\dots,N-1$$

از جایگزینی (۸ ـ ۵) در (۸ ـ ۱) نتیجه می‌شود:

$$\sum_{k=0}^{N-1}\dot{x}_k(t)\varepsilon^k+\varepsilon^N\dot{x}_R(t,\varepsilon)=f(t,x(t,\varepsilon),\varepsilon)\triangleq h(t,\varepsilon)$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}h_k(t)\varepsilon^k+\varepsilon^N h_R(t,\varepsilon) \qquad (۸-۶)$$

که ضرایب سری تیلور $h(t,\varepsilon)$، توابعی از ضرایب بسط تیلور $x(t,\varepsilon)$ است. از آنجاکه معادله به ازای جمیع مقادیرِ به اندازهٔ کافی کوچک ε برقرار می‌باشد، لذا باید نسبت به ε اتحاد باشد؛ بنابراین باید ضرایب همتوان ε برابر باشند، با معادل قرار دادن این ضرایب به معادلاتی می‌رسیم که باید به ازای مقادیر x_0، x_1 و غیره برقرار شوند. اما قبل از اجرای این کار لازم است ضرایب سری تیلور $h(t,\varepsilon)$ را به دست آوریم: جملهٔ مرتب صفرم $h_0(t)$ برابر است با:

$$h_0(t)=f(t,x_0(t),0)$$

بنابراین با یکسان قرار دادن ضرایب ε^0 در معادلهٔ (۸ ـ ۶) باید $x_0(t)$ در عبارت ذیل صدق کند:

$$\dot{x}_0=f(t,x_0,0),\qquad x_0(t_0)=\eta(0)$$

1. Taylor's theorem

که همان مسألهٔ غیرآشفتهٔ (۸ ـ ۳) می‌باشد. جملهٔ مرتبهٔ اول $h_1(t)$ برابر است با:

$$h_1(t)=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}f(t,x(t,\varepsilon),\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$=\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t,\varepsilon),\varepsilon)+\frac{\partial x}{\partial\varepsilon}(t,\varepsilon)+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}(t,x(t,\varepsilon),\varepsilon)\right\}\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0(t),0)x_1(t)+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}(t,x_0(t),0)$$

با معادل قرار دادن ضرایب ε در معادلهٔ (۸ ـ ۶)، باید $x_1(t)$ در عبارت زیر صدق نماید:

$$\dot{x}_1=\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0(t),0)x_1+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}(t,x_0(t),0),\quad x_1(t_0)=\eta_1$$

با تعریف: $A(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0(t),0)$ و $g_1(t,x_0(t))=\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}(t,x_0(t),0)$

و بازنویسی معادله برای x_1 داریم:

$$\dot{x}_1=A(t)x_1+g_1(t,x_0(t)),\quad x_1(t_0)=\eta_1$$

این معادلهٔ خطی دارای پاسخ یکتایی بر بازهٔ $[t_0,t_1]$ می‌باشد.

با ادامهٔ این روند می‌توان معادلات مربوط به x_2 و x_3 و غیره را نیز به دست آورد، که شامل مراتب بالاتری از مشتقات f نسبت به x است که کاربرد نمادها را مشکل خواهد کرد. یافتن پاسخ کلّی، هیچ مشکل خاصی را در برندارد و با توجه به مشخص بودن روند، می‌توان معادلات را برای هر حالت مشخص به دست آورد. به رغم این نکته، برای مشخص شدن الگوی مشترک این معادلات (هر چند ممکن است برخی خوانندگان خسته شوند)، معادلهٔ x_2 را نیز به دست می‌آوریم: ضریب مرتبهٔ دوم در بسط تیلور $h(t,\varepsilon)$ برابر است با:

$$h_2(t)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}h(t,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}$$

حال داریم:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}h(t,\varepsilon)=\frac{\partial f}{\partial x}(t,x,\varepsilon)\frac{\partial x}{\partial\varepsilon}(t,\varepsilon)+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}(t,x,\varepsilon)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(t,x,\varepsilon)\,[x_1(t) + 2\varepsilon x_2(t) + \dots] + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(t,x,\varepsilon)$$

برای سادگی نمادگذاری می‌توان نوشت:

$$\psi(t,x,\varepsilon) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,x,\varepsilon)\,x_1(t)$$

در این صورت با ادامه دادن محاسبهٔ مشتق دوم h نسبت به ε داریم:

$$\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} h(t,\varepsilon) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(t,x,\varepsilon)\,\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t,\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\frac{\partial f}{\partial x}(t,x,\varepsilon)\,x_1(t)$$

$$+ 2\,\frac{\partial f}{\partial x}(t,x,\varepsilon)\,x_2(t) + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(t,x,\varepsilon)\,\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t,\varepsilon)$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2}(t,x,\varepsilon) + \varepsilon\,[\cdot]$$

بنابراین: $$h_2(t) = A(t)x_2(t) + g_2(t,x_0(t),x_1(t))$$

که:

$$g_2(t,x_0(t),x_1(t)) = \frac{1}{2}\frac{\partial \psi}{\partial x}(t,x_0(t),0)\,x_1(t) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0(t),0)\,x_1(t)$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2}(t,x_0(t),0)$$

حال با برابر قرار دادن ضرایب ε^2 در معادلهٔ (۸ ـ ۶) نتیجه می‌شود:

$$\dot{x}_2 = A(t)x_2 + g_2(t,x_0(t),x_1(t)), x_2(t_0) = \eta_2$$

به طور خلاصه ضرایب سری تیلور x_0، x_1،...، x_{N-1} از حل معادلات ذیل به دست می‌آید:

$$\dot{x}_0 = f(t,x_0,0), \quad x_0(t_0) = \eta(0) \qquad (۸ ـ ۷)$$

$$\dot{x}_k = A(t)x_k + g_k(t,x_0(t),\dots x_{k-1}(t)), \quad x_k(t_0) = \eta_k \qquad (۸ ـ ۸)$$

که $k = 1, 2, \dots, N-1$، $A(t)$ ماتریس ژاکوبیِ محاسبه شده در $x = x_0(t)$ و $\varepsilon = 0$ می‌باشد و جملهٔ $g_k\left(t,x_0(t),x_1(t),\dots,x_{k-1}(t)\right)$، نیز چند جمله‌ای بر حسب x_1، ...،

x_{k-1} است که ضرایبش به طور پیوسته به t و $x_0(t)$ بستگی دارد. این فرض که $x_0(t)$ بر بازهٔ $[t_0, t_1]$ تعریف شده، تلویحاً بدین معناست که $A(t)$ نیز بر همان بازه تعریف می‌شود. اکنون محاسبهٔ ضرایب سری تیلور را در مثالی برای یک سیستم مرتبهٔ دوم نشان می‌دهیم:

مثال ۸ ـ ۲ معادلهٔ حالت وان‌درپُل را درنظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad x_1(0) = \eta_1(\varepsilon)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2, \qquad x_2(0) = \eta_2(\varepsilon)$$

فرض کنید می‌خواهیم بسط محدود سری تیلور را برای $N = 3$ به دست آوریم؛ بدین منظور با فرض:

$$x_i = x_{i0} + \varepsilon x_{i1}\,\varepsilon + {}^2x_{i2} + \varepsilon^3 x_{iR}, \qquad i = 1, 2$$

و: $$\eta_i = \eta_i(0) + \varepsilon\eta_{i1}\,\varepsilon + {}^2\eta_{i2} + \varepsilon^3\eta_{iR}, \qquad i = 1, 2$$

و با جایگزینی بسط x_1 و x_2 در معادلهٔ حالت، نتیجه می‌شود:

$$\dot{x}_{10} + \varepsilon\dot{x}_{11} + \varepsilon^2\dot{x}_{12} + \varepsilon^3\dot{x}_{1R} = x_{20} + \varepsilon x_{21} + \varepsilon^2 x_{22} + \varepsilon^3 x_{2R}$$

$$\dot{x}_{20} + \varepsilon\dot{x}_{21} + \varepsilon^2\dot{x}_{22} + \varepsilon^3\dot{x}_{2R} = -x_{10} - \varepsilon x_{11} - \varepsilon^2 x_{12} - \varepsilon^3 x_{1R}$$

$$+ \varepsilon\left[1 - (x_{10} + \varepsilon x_{11} + \varepsilon^2 x_{12} + \varepsilon^3 x_{1R})^2\right]$$

$$\times (x_{20} + \varepsilon x_{21} + \varepsilon^2 x_{22} + \varepsilon^3 x_{2R})$$

با برابر قرار دادن ضرایب ε^0 داریم:

$$\dot{x}_{10} = x_{20}, \quad x_{10}(0) = \eta_1(0)$$

$$\dot{x}_{20} = -x_{10}, \quad x_{20}(0) = \eta_2(0)$$

که همان مسألهٔ غیرآشفته در $\varepsilon = 0$ می‌باشد. با برابر قرار دادن ضرایب ε نیز نتیجه می‌شود:

$$\dot{x}_{11} = x_{21}, \qquad x_{11}(0) = \eta_{11}$$

$$\dot{x}_{21} = -x_{11} + (1 - x_{10}^2)x_{20}, \qquad x_{21}(0) = \eta_{21}$$

همچنین از معادل قرار دادن ضرایب ε^2 به عبارت ذیل می‌رسیم:

$$\dot{x}_{12} = x_{22}, \qquad x_{12}(0) = \eta_{12}$$

$$\dot{x}_{22} = -x_{12} + (1 - x_{10}^2)x_{21} - 2x_{10}x_{11}x_{20}, \qquad x_{22}(0) = \eta_{22}$$

دو دسته معادلهٔ اخیر به شکل عبارت (۸ ـ ۸) برای $k = 1, 2$ می‌باشد. Δ

پس از محاسبهٔ جملات x_0، x_1، ...، x_{N-1}، گام بعدی، اثبات این نکته است که $\sum_{k=0}^{N-1} x_k(t)\varepsilon^k$ در واقع تقریب $O(\varepsilon^N)$ مربوط به $x(t,\varepsilon)$ می‌باشد. بدین منظور خطای تقریب ذیل را در نظر بگیرید:

$$e = x - \sum_{k=0}^{N-1} x_k(t)\varepsilon^k \qquad (۸ ـ ۹)$$

با مشتق‌گیری از دو طرف عبارت (۸ ـ ۹) نسبت به t و جایگزین کردن عبارتهای متناظر با x و x_k از معادلات (۸ ـ ۱)، (۸ ـ ۷) و (۸ ـ ۸) می‌توان نشان داد ε در معادلهٔ ذیل صدق می‌کند:

$$\dot{e} = A(t)e + \rho_1(t,e,\varepsilon) + \rho_2(t,\varepsilon), \quad e(t_0) = \varepsilon^N \eta_R(\varepsilon) \qquad (۸ ـ ۱۰)$$

که:

$$\rho_1(t,e,\varepsilon) = f(t, e + \sum_{k=0}^{N-1} x_k(t)\varepsilon^k, \varepsilon) - f(t, \sum_{k=0}^{N-1} x_k(t)\varepsilon^k, \varepsilon) - A(t)e$$

$$\rho_2(t,\varepsilon) = f(t, \sum_{k=0}^{N-1} x_k(t)\varepsilon^k, \varepsilon) - f(t, x_0(t), 0)$$

$$\rho_2(t,\varepsilon) = f(t, \sum_{k=0}^{N-1} x_k(t)\varepsilon^k, \varepsilon) - f(t, x_0(t), 0)$$

$$- \sum_{k=1}^{N-1} [A(t)x_k(t) + g_k(\cdot)]\varepsilon^k$$

بنا به فرض، $x_0(t)$ به ازای جمیع مقادیر $t \in [t_0, t_1]$، کراندار و عضو D می‌باشد بنابراین مقادیر $\lambda > 0$ و $\varepsilon_1 > 0$ چنان وجود دارند که به ازای تمامی مقادیر $\|e\| < \lambda$ و $|\varepsilon| \le \varepsilon_1$، تابع $x_0(t)$، $\sum_{k=0}^{N-1} x_k(t)\varepsilon^k$ و $e + \sum_{k=0}^{N-1} x_k(t)\varepsilon^k$ متعلق به زیر مجموعهٔ فشرده‌ای از D هستند. بسادگی می‌توان تحقیق کرد به ازای جمیع مقادیر $(t,e,\varepsilon) \in [t_0,t_1] \times B_\lambda \times [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$ داریم:

$$\rho_1(t,0,\varepsilon) = 0 \qquad (۸ ـ ۱۱)$$

$$\left\| \frac{\partial \rho_1}{\partial e}(t,e,\varepsilon) \right\| \le k_1(\|e\| + |\varepsilon|) \qquad (۸ ـ ۱۲)$$

و:

$$\|\rho_2(t,\varepsilon)\| \le |\varepsilon|^N k_2 \qquad (۸ ـ ۱۳)$$

که k_1 و k_2 ثابتهای مثبتی هستند. می‌توان معادلهٔ (۸ ـ ۱۰) را به عنوان آشفتهٔ معادلهٔ ذیل در نظر گرفت:

$$\dot{e}_0 = A(t)e_0 + \rho_1(t,e_0,\varepsilon), \quad e_0(t_0) = 0 \qquad (۸ ـ ۱۴)$$

که به ازای جمیع مقادیر $t \in [t_0, t_1]$ دارای پاسخ یکتایی است. قضیهٔ ۲ ـ ۶ نشان می‌دهد اگر $|\varepsilon|$ به اندازهٔ کافی کوچک باشد آنگاه معادلهٔ (۸ ـ ۱۰) دارای پاسخ یکتایی بر بازهٔ $[t_0, t_1]$ خواهد بود؛ علاوه بر این از قضیهٔ ۲ ـ ۵ نتیجه می‌شود:

$$\|e(t,\varepsilon)\| = \|e(t,\varepsilon) - e_0(t,\varepsilon)\| = O(\varepsilon^N)$$

این نتایج را در قضیهٔ ذیل خلاصه می‌کنیم:

قضیهٔ ۸ ـ ۱ *فرض کنید:*

- f *تابعی پیوسته است که نسبت به* (x, ε) *و به ازای مقادیر:* $(t,x,\varepsilon) \in [t_0, t_1] \times D \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ *دارای مشتقات جزئی پیوسته تا مرتبهٔ* $N+1$ *می‌باشد.*
- η *و مشتقاتش به ازای مقادیر* $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ *تا مرتبهٔ* N *پیوسته است.*
- *مسألهٔ نامی (۸ ـ ۳) دارای پاسخ یکتای* $x_0(t)$ *بر بازهٔ* $[t_0, t_1]$ *است که به ازای جمیع مقادیر* $t \in [t_0, t_1]$ *داریم:* $x_0(t) \in D$.

در این صورت مقدار $\varepsilon^* > 0$ *چنان وجود دارد که به ازای جمیع مقادیر* $|\varepsilon| < \varepsilon^*$، *مسألهٔ (۸ ـ ۱) ـ (۸ ـ ۲) دارای پاسخ یکتای* $x(t,\varepsilon)$ *بر بازهٔ* $[t_0, t_1]$ *می‌باشد که در عبارت ذیل صدق می‌کند:*

$$x(t,\varepsilon) - \sum_{k=0}^{N-1} x_k(t)\,\varepsilon^k = O(\varepsilon^N) \qquad \diamond$$

قضیهٔ ۸ ـ ۱ با شرط $N = 1$، مشابه قضایای ۲ ـ ۵ و ۲ ـ ۶ می‌باشد که نشاندهندهٔ پیوستگی پاسخها نسبت به حالتها و پارامترهای اولیه است، اما این قضیه کمی صریحتر از آنهاست زیرا تخمین $O(\varepsilon)$ را برای مرتبهٔ اندازهٔ خطا بیان می‌کند. شایان ذکر است وقتی $x(t,\varepsilon)$ را با $x_0(t)$ تخمین می‌زنیم نیازی نیست مقدار پارامتر ε را بدانیم؛ زیرا ممکن است ε پارامتری نامعلوم باشد که انحراف پارامترهای سیستم را نسبت به مقادیر نامی‌شان نشان می‌دهد. اما اگر از تقریب مرتبهٔ بالاتر $\sum_{k=0}^{N-1} x_k(t)\,\varepsilon^k$ برای $N > 1$ استفاده کنیم، برای مشخص شدن سری محدود تیلور لازم است مقدار ε را بدانیم هر چند برای محاسبهٔ جملات x_1، x_2 و غیره نیازی به دانستن آن نیست. چنانچه برای تعیین تقریب سری تیلور نیاز به دانستن ε باشد باید میزان زحمت محاسباتی تقریب پاسخ از طریق سری تیلور را با زحمت محاسبهٔ پاسخ دقیق مقایسه کنیم: پاسخ دقیق $x(t,\varepsilon)$ را می‌توان از حل معادلهٔ غیرخطی حالت (۸ ـ ۱) به دست آورد در صورتی که پاسخ تقریبی از حل معادلهٔ غیرخطی حالت (۸ ـ ۷) و تعدادی از معادلات خطی حالت (۸ ـ ۸)، بسته به مرتبهٔ تقریب، حاصل می‌آید. از آنجا که در هر دو مورد باید یک معادلهٔ غیرخطی حالت از مرتبهٔ n را حل کنیم، طبیعی است از خود بپرسیم از حل معادلهٔ (۸ ـ ۷) به جای معادلهٔ (۸ ـ ۱)

چه چیزی عایدمان می‌شود؟ یکی از مواردی که استفاده از تقریب سری تیلور کاملاً ارجح است مربوط به حالتی است که بخواهیم پاسخ را برای مقادیر مختلف ε به دست آوریم. زیرا در تقریب سری تیلور لازم است معادلات (۸ ـ ۷) و (۸ ـ ۸) فقط یک بار حل شوند و سپس به کمک آنها بسط سری تیلور را برای مقادیر مختلف ε به دست آورد. صرف‌نظر از این حالت خاص (مقادیر تکراری ε)، تقریب سری تیلور در موارد زیر نیز سودمند است:

- معادلهٔ غیر آشفتهٔ حالت (۸ ـ ۷) بمراتب ساده‌تر از معادلهٔ حالت وابسته به ε (۸ ـ ۱) باشد،
- مقدار ε آنقدر کوچک باشد که بتوان تقریب «قابل قبولی» را با تعداد کمی از جملات دنباله به دست آورد.

در بسیاری از کاربردی‌ها مهندسیِ روش آشفتگی، می‌توان با انتخاب ۳ یا ۲ $= N$ به پاسخ تقریبی مناسبی دست یافت ضمن اینکه انتخاب $\varepsilon = 0$، معادلهٔ حالت را بشدت ساده می‌کند. در دو مثال بعد به بررسی دو مورد مختلف می‌پردازیم که در آنها انتخاب $\varepsilon = 0$، پیچیدگی معادلهٔ حالت را کاهش می‌دهد. در مثال اول، دیگر بار معادلهٔ وان دِرپُل مربوط به مثال ۸ ـ ۲ را در نظر می‌گیریم که دستهٔ وسیعی از «سیستمهای غیرخطی ضعیف» را توصیف می‌کند که در $\varepsilon = 0$ خطی می‌شوند. در این حالت برای تعیین تقریب سری تیلور، کافی است فقط معادله‌های خطی را حل کنیم. در مثال دوم، سیستمی را در نظر می‌گیریم که از اتصال زیر سیستمهایی با تزویج «ضعیف» یا تزویج ε[1] حاصل شده است. در این مورد با شرط $\varepsilon = 0$، سیستم به زیر سیستمهای غیرتزویجی[2] با مرتبهٔ پایینتر تجزیه می‌شود، بنابراین برای تعیین تقریب سری تیلور کافی است به جای حل معادلهٔ مرتبهٔ بالاتر اصلی، یعنی معادلهٔ (۸ ـ ۱)، معادلات غیرتزویجی از مرتبهٔ پایینتر را حل نماییم.

مثال ۸ ـ ۳ فرض کنید می‌خواهیم معادلهٔ وان دِرپُل زیر را در بازهٔ زمانی $[0, \pi]$ حل کنیم:

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad x_1(0) = 1$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2, \qquad x_2(0) = 0$$

1. ε - coupling 2. Decoupled

حل مسأله را با انتخاب $\varepsilon = ۰$ برای به دست آوردن معادلهٔ غیرآشفتهٔ خطیِ ذیل آغاز می‌کنیم:

$$\dot{x}_{۱۰} = x_{۲۰}, \qquad x_{۱۰}(۰) = ۱$$

$$\dot{x}_{۲۰} = -x_{۱۰}, \qquad x_{۲۰}(۰) = ۰$$

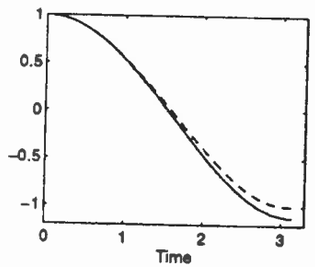
پاسخ این معادله برابر است با:

$$x_{۱۰}(t) = \cos t, \quad x_{۲۰}(t) = -\sin t$$

بدین ترتیب واضح است همهٔ فرضیات قضیهٔ ۸ ـ ۱ برقرار و در نتیجه خطای تقریب $x(t,\varepsilon) - x_۰(t)$ برابر با $O(\varepsilon)$ می‌باشد. با محاسبهٔ حل دقیق عددی $x(t,\varepsilon)$ برای سه مقدار مختلف ε و با استفاده از:

$$E_۰ = \max_{۰\le t\le \pi} \|x(t,\varepsilon) - x_۰(t)\|_۲$$

به عنوان اندازه‌ای از خطای تقریب، به ازای مقادیر $\varepsilon = ۰/۰۱ , ۰/۰۵ , ۰/۱$ بترتیب داریم: $E_۰ = ۰/۰۱۱۲ , ۰/۰۵۸۹ , ۰/۱۱۹۲$. این اعداد بوضوح نشان می‌دهد برای مقادیر کوچک ε، کران خطا برابر با $k\varepsilon$ است که k ثابت مثبتی می‌باشد. با توجه به این اعداد، مشخص است برای مقادیر $\varepsilon < ۰/۱$، مقدار $k = ۱/۲$ مناسب خواهد بود. شکل ۸ ـ ۱ نشاندهندهٔ مسیرهای حالت تقریبی و دقیقِ مؤلفهٔ اول بردار حالت به ازای $\varepsilon = ۰/۱$ می‌باشد. اکنون فرض کنید می‌خواهیم مقدار تقریب در $\varepsilon = ۰/۱$ را بهبود بخشیم، بدین منظور لازم است $x_{۱۱}$ و $x_{۲۱}$ را محاسبه کنیم. در مثال ۸ ـ ۲ دیدیم $x_{۱۱}$ و $x_{۲۱}$ در معادلهٔ ذیل صدق می‌کنند:



شکل ۸ ـ ۱ نمودار $x_۱(t,\varepsilon)$ (خط پُر) و $x_{۱۰}(t)$ (خط چین) مربوط به مثال ۸ ـ ۳ به ازای $\varepsilon = ۰/۱$

$$\dot{x}_{۱۱} = x_{۲۱}, \qquad x_{۱۱}(۰) = ۰$$

$$\dot{x}_{۲۱} = -x_{۱۱} + \left[(۱ - x_{۱۰}^۲(t))\right] x_{۲۰}(t), \qquad x_{۲۱}(۰) = ۰$$

که در این مسأله داریم:

$$\left[۱ - x_{۱۰}^۲(t)\right] x_{۲۰}(t) = -(۱ - \cos^۲ t)\sin t$$

در نتیجه پاسخ معادله به شکل ذیل بیان می‌شود:

$$x_{۱۱}(t) = -\frac{۹}{۳۲}\sin t - \frac{۱}{۳۲}\sin ۳t + \frac{۳}{۸} t\cos t$$

$$x_{۲۱}(t) = \frac{۳}{۳۲}\cos t - \frac{۳}{۳۲}\cos ۳t - \frac{۳}{۸} t\sin t$$

بنا به قضیهٔ ۸ ـ ۱، تقریب مرتبهٔ دوم ذیل:

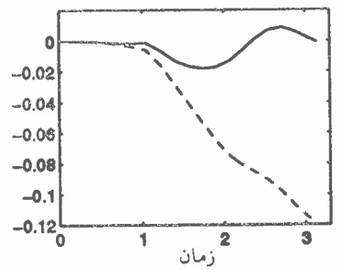
$$\begin{bmatrix} x_{۱۰}(t) + \varepsilon x_{۱۱}(t) \\ x_{۲۰}(t) + \varepsilon x_{۲۱}(t) \end{bmatrix}$$

برابر با $O(\varepsilon^۲)$ می‌باشد که برای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک ε، نزدیک به پاسخ دقیق است. برای مقایسهٔ حل تقریبی با حل دقیق، به ازای $\varepsilon = ۰/۱$ داریم:

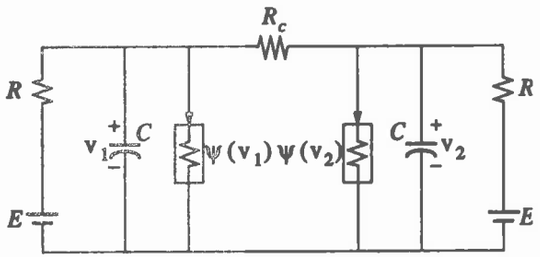
$$E_۱ = \max_{۰\le t\le \pi} \|x(t, ۰/۱) - x_۰(t) - ۰/۱ x_۱(t)\|_۲ = ۰/۰۰۵۷$$

که نشاندهندهٔ کاهشی معادل با یک مرتبهٔ اندازه در خطای تقریب می‌باشد. شکل ۸ ـ ۲ خطاهای تقریب رادر اولین مؤلفهٔ بردار حالت برای تقریب مرتبهٔ اول $x_۰$ و نیز تقریب مرتبهٔ دوم $x_۰ + \varepsilon x_۱$ به ازای $\varepsilon = ۰/۱$ نشان می‌دهد. Δ

مثال ۸ ـ ۴ مدار نشان داده شده در شکل ۸ ـ ۳ شامل مقاومتهایی غیرخطی است که مشخصهٔ $I - V$ آنها به شکل $i = \psi(v)$ بیان می‌شود. معادلات دیفرانسیل ولتاژ دو سر خازنها به شکل زیر است:



شکل ۸ ـ ۲ خطاهای تقریب $x_1(t,\varepsilon)-x_{10}(t)$ (خط چین) و $x_1(t,\varepsilon)-x_{10}(t)-\varepsilon x_{11}(t)$ (خط پُر) برای مثال ۸ ـ ۳ به ازای $\varepsilon = 0/1$



شکل ۸ ـ ۳ مدار الکتریکی مثال ۸ ـ ۴

$$C\frac{dv_1}{dt}=\frac{1}{R}(E-v_1)-\psi(v_1)-\frac{1}{R_c}(v_1-v_2)$$

$$C\frac{dv_2}{dt}=\frac{1}{R}(E-v_2)-\psi(v_2)-\frac{1}{R_c}(v_2-v_1)$$

ساختار مدار به نحوی است که دارای دو بخش می‌باشد؛ هر یک شامل یک بخش RC به همراه یک مقاومت غیرخطی. این دو بخش از طریق مقاومت R_c به هم وصل می‌شوند. هنگامی که R_c «نسبتاً بزرگ» است، اتصال بین این دو بخش «ضعیف» خواهد بود. به طور مشخص اگر $R_c = \infty$ باشد، اتصال، باز و دو بخش از هم مجزّا خواهد بود. چنانچه بتوان تزویج میان دو

بخش مدار را به کمک پارامتر کوچک ε، پارامتری نمود آنگاه می‌توان مدار را به عنوان نمایش تزویج ε در نظر گرفت. در اولین نگاه به نظر می‌رسد $\varepsilon = 1/R_c$، انتخاب معقولی برای ε است، در واقع با این انتخاب جملات تزویج در معادلهٔ فوق در ε ضرب می‌شوند. اما چنین انتخابی مقدار ε را به قدر مطلق یکی از پارامترهای فیزیکی وابسته می‌سازد که مقدار این پارامتر (صرف‌نظر از کوچکی یا بزرگی‌اش)، به خودی خود و بدون در نظر گرفتن ارزش سایر پارامترهای فیزیکیِ موجود در مدار، هیچ تأثیری ندارد. در یک مسألهٔ آشفتگی با فرمولبندی خوب، پارامتر ε به صورت نسبت پارامترهای فیزیکی چنان انتخاب می‌گردد که «کوچکیِ واقعی» ε را با آن دید نمایان سازد. از این رو برای انتخاب ε، معمولاً با انتخاب متغیرهای حالت و/یا متغیر زمان به عنوان کمیّتهای بدون بُعد کار را آغاز می‌کنیم. در این مدار انتخاب مناسب متغیرهای حالت، v_1 و v_2 می‌باشد؛ به جای کار با v_1 و v_2 آنها را چنان مقیاس‌بندی می‌کنیم که مقادیر نهایی نمونه‌ای آنها برابر با ± 1 باشد. با توجه به تزویج ضعیف میان دو بخش معادل، استفاده از یک ضریب مقیاس (α) برای مقیاس‌بندی هر دو متغیر حالت منطقی است؛ بنابراین متغیرهای حالت را به شکل $x_1 = v_1/\alpha$ و $x_2 = v_2/\alpha$ تعریف می‌کنیم. با انتخاب زمان بدون بُعد $\tau = t/RC$ و با تعریف $\dot{x} = dx/d\tau$، به معادلات حالت ذیل دست می‌یابیم:

$$\dot{x_1}=\frac{E}{\alpha}-x_1-\frac{R}{\alpha}\psi(\alpha x_1)-\frac{R}{R_c}(x_1-x_2)$$

$$\dot{x_2}=\frac{E}{\alpha}-x_2-\frac{R}{\alpha}\psi(\alpha x_2)-\frac{R}{R_c}(x_2-x_1)$$

بدین ترتیب انتخاب معقول ε به شکل $\varepsilon = R/R_c$ خواهد بود. اینک فرض می‌کنیم $R=1/5\times10^3\ \Omega$، $E = 1/2V$ و مقاومتهای غیر خطی به شکل دیودهای تونلی با مشخصهٔ زیر باشد:

$$\psi(v) = 10^{-3}\times(17/76v - 103/79v^2 + 229/62v^3 - 226/31v^4 + 83/72v^5)$$

در این صورت با انتخاب $\alpha = 1$ و با بازنویسی معادلات حالت داریم:

$$\dot{x_1}=1/2-x_1-h(x_1)-\varepsilon(x_1-x_2)$$

$$\dot{x_2}=1/2-x_2-h(x_2)-\varepsilon(x_2-x_1)$$

که: $h(v) = ۱/۵ \times ۱۰^{۳} \times \psi(v)$ می‌باشد. حال فرض کنید بخواهیم معادلهٔ حالت را به ازای حالت اولیهٔ ذیل حل کنیم:

$$x_۱(۰) = ۰/۱۵ \quad ; \quad x_۲(۰) = ۰/۶$$

در این صورت با انتخاب $\varepsilon = ۰$ به معادلات غیر تزویجی زیر می‌رسیم:

$$\dot{x}_۱ = ۱/۲ - x_۱ - h(x_۱), \quad x_۱(۰) = ۰/۱۵$$

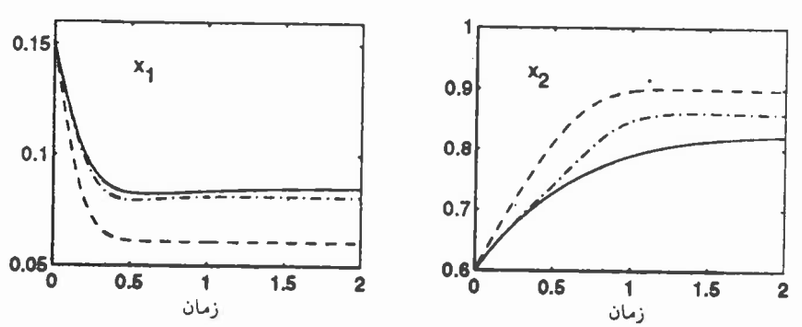
$$\dot{x}_۲ = ۱/۲ - x_۲ - h(x_۲), \quad x_۲(۰) = ۰/۶$$

که می‌توان آنها را مستقل از هم حل کرد. چنانچه $x_{۱۰}(t)$ و $x_{۲۰}(t)$ پاسخهای این دو معادله باشند، با توجه به قضیهٔ ۸ ـ ۱ و با شرط اینکه ε به اندازهٔ کافی کوچک باشد، آنگاه میزان تقریب این پاسخها نسبت به پاسخ دقیق از مرتبهٔ $O(\varepsilon)$ می‌باشد. برای دستیابی به تقریب $O(\varepsilon^{۲})$، دو معادلهٔ ذیل را برای $x_{۱۱}$ و $x_{۲۱}$ در نظر می‌گیریم:

$$\dot{x}_{۱۱} = -\left[۱ + h'(x_{۱۰}(t))\right]x_{۱۱} - \left[x_{۱۰}(t) - x_{۲۰}(t)\right], \quad x_{۱۱}(۰) = ۰$$

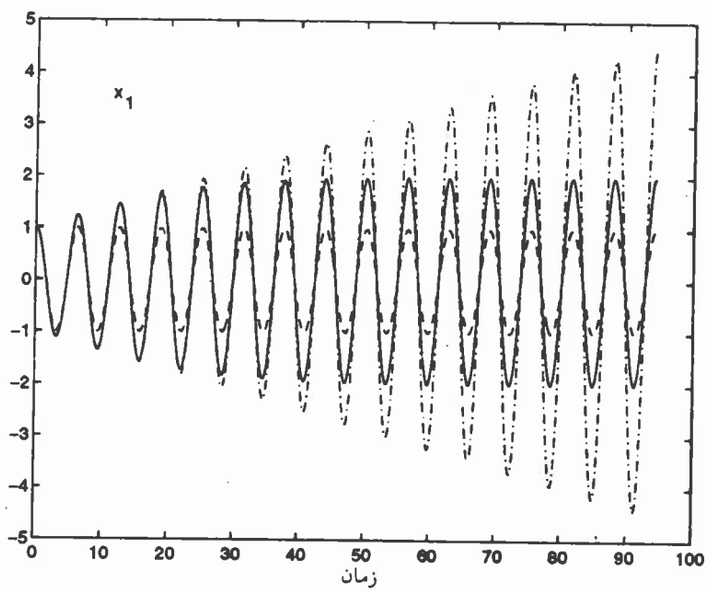
$$\dot{x}_{۱۲} = -\left[۱ + h'(x_{۲۰}(t))\right]x_{۲۱} - \left[x_{۲۰}(t) - x_{۱۰}(t)\right], \quad x_{۲۱}(۰) = ۰$$

که $h'(۰)$ مشتق $h(۰)$ می‌باشد. شکل ۸ ـ ۴ پاسخ دقیق را به همراه تقریبهای مرتبهٔ اول و مرتبهٔ دوم به ازای $\varepsilon = ۰/۳$ نشان می‌دهد. Δ



شکل ۸ ـ ۴ پاسخ دقیق (خط پُر)، تقریب مرتبهٔ اول (خط چین) و تقریب مرتبهٔ دوم (خط ـ نقطه) برای مثال ۸ ـ ۴ به ازای $\varepsilon = ۰/۳$

یکی از محدودیتهای جدّی قضیهٔ ۸ ـ ۱ این است که کران خطای $O(\varepsilon^{N})$ فقط بر بازهٔ محدود زمانی $[t_۰, t_۱]$ معتبر است (مرتبهٔ $O(۱)$) و بر بازه‌هایی مانند $[t_۰, T/\varepsilon]$ و یا بازه‌های نامحدود زمانی مانند $[t_۰, \infty)$ صادق نیست. علت این است که ثابت k در کران $k|\varepsilon|^{N}$ چنان به $t_۱$ وابسته است که با افزایش $t_۱$، k نیز بیکران می‌شود؛ به طور مشخص چون ثابت k از کاربرد قضیهٔ ۲ ـ ۵ ناشی می‌شود دارای مؤلفه‌ای به شکل $\exp(Lt_۱)$ می‌باشد. در بخش بعدی خواهیم دید چگونه می‌توان به کمک شروط پایداری، قضیهٔ ۸ ـ ۱ را بر بازهٔ نامحدودی از زمان تعمیم داد. بدون این شروط، مقدار تقریب برای مقادیر بزرگ t برقرار نیست (گرچه بر بازه‌های زمانی $O(۱)$ صادق می‌باشد). شکل ۸ ـ ۵ پاسخهای دقیق و تقریبی را برای معادلهٔ وان دِرپُل مثال ۸ ـ ۳، به ازای $\varepsilon = ۰/۱$، در بازهٔ بزرگ زمانی نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود برای مقادیر بزرگ t، خطای $x_۱(t,\varepsilon) - x_{۱۰}(t)$ دیگر با $O(\varepsilon)$ برابر نیست. به طور واضحتر می‌توان گفت خطای $x_۱(t,\varepsilon) - x_{۱۰}(t) - \varepsilon x_{۱۱}(t)$ به صورت بیکران رشد می‌کند که ناشی از وجود جملهٔ $t\cos t$ در عبارت $x_{۱۱}(t)$ می‌باشد.



شکل ۸ ـ ۵ پاسخ دقیق (خط پُر)، تقریب مرتبهٔ اول (خط چین) و تقریب مرتبهٔ دوم (خط ـ نقطه) برای معادلهٔ وان دِرپُل در بازهٔ بزرگ زمانی

۸ ـ ۲ آشفتگی بر بازهٔ نامحدود

می‌توان نتایج آشفتگی حاصل از قضیهٔ ۸ ـ ۱ را به بازهٔ نامحدود $[t_0, \infty)$ نیز تعمیم داد مشروط بر اینکه شرایط اضافی به آن افزوده شود تا پایداری نمایی پاسخ سیستم نامیِ (۸ ـ ۷) برآورده گردد. پاسخ $\bar{x}_0(t)$ مربوط به معادلهٔ (۸ ـ ۷)، پایدار نمایی است اگر ثابت $c > 0$ چنان وجود داشته باشد که بتوان نوشت:

$$\|x_0(t_0) - \bar{x}_0(t_0)\| < c \Rightarrow$$

$$\|x_0(t) - \bar{x}_0(t)\| \le ke^{-\gamma(t-t_0)} \|x_0(t_0) - \bar{x}_0(t_0)\|, \quad \forall t \ge t_0$$

که k و γ ثابتهای مثبت و $x_0(t)$ نیز پاسخی از معادلهٔ (۸ ـ ۷) است که از نقطهٔ $x_0(t_0)$ آغاز می‌گردد. شرط اضافی مهم این است که باید معادلهٔ (۸ ـ ۷) دارای نقطهٔ تعادل پایدار نمایی $x = p^*$ باشد؛ این شرط ما را مطمئن می‌سازد که هر یک از پاسخهای معادلهٔ (۸ ـ ۷) که از همسایگی (به اندازهٔ کافی کوچک) p^* آغاز می‌شود، پایدار نمایی خواهد بود.

قضیهٔ ۸ ـ ۲ *فرض کنید:*

- *f پیوسته و کراندار باشد و نسبت به (x, ε) و به ازای مقادیر $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ $\times D \times [0, \infty) \in (t, x, \varepsilon)$ دارای مشتقات جزئی پیوسته و کراندار تا مرتبهٔ $N+1$ باشد؛*
- *به ازای جمیع مقادیر $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$، η و مشتقاتش تا مرتبهٔ N پیوسته باشد؛*
- *در سیستم نامی (۸ ـ ۷)، $x = p^* \in D$ نقطهٔ تعادل پایدار نمایی باشد.*

در این صورت ثابتهای مثبت ρ و ε^* چنان وجود دارد که به ازای جمیع مقادیر $|\varepsilon| < \varepsilon^*$ و $\|p^* - \eta(\varepsilon)\| < \rho$، معادلات (۸ ـ ۱) ـ (۸ ـ ۲) دارای پاسخ یکتا و کراندار یکنواخت $x(t, \varepsilon)$ بر بازهٔ $[0, \infty)$ می‌باشد و برای آن داریم:

$$x(t, \varepsilon) - \sum_{k=0}^{N-1} x_k(t)\varepsilon^k = O(\varepsilon^N)$$

که به ازای جمیع مقادیر $0 \le t_0 \le t$ و $O(\varepsilon^N)$، نسبت به t به طور یکنواخت برقرار است. ◇

برهان: پیوست آ ـ ۱.

مثال ۸ ـ ۵ مدار الکتریکی مربوط به مثال ۸ ـ ۴ با معادلات ذیل بیان می‌شود:

$$\dot{x}_1 = 1/2 - x_1 - h(x_1) - \varepsilon(x_1 - x_2)$$

$$\dot{x}_2 = 1/2 - x_2 - h(x_2) - \varepsilon(x_2 - x_1)$$

که:

$$h(v) = 1/5\,(17/76v - 103/79v^2 + 229/62v^3 - 226/31v^4 + 83/72v^5)$$

در نقطه $\varepsilon = 0$، سیستم غیرآشفته شامل دو سیستم مجزّای مرتبهٔ اول ذیل است:

$$\dot{x}_1 = 1/2 - x_1 - h(x_1)$$

$$\dot{x}_2 = 1/2 - x_2 - h(x_2)$$

می‌توان تحقیق کرد که هر یک از این دو سیستم، دارای سه نقطهٔ تعادل در ۰/۰۶۳، ۰/۲۸۵ و ۰/۸۸۴ می‌باشد. مقدار تابع ژاکوبیِ $-1 + h'(x_i)$ در نقاط $x_i = 0/063$ و $x_i = 0/884$، منفی و در نقطهٔ $x_i = 0/285$، مثبت است. بنابراین نقاط تعادل ۰/۰۶۳ و ۰/۸۸۴ پایدار نمایی و نقطهٔ تعادل ۰/۲۸۵ ناپایدار است. چنانچه دو سیستم مرتبهٔ اول را با هم در نظر بگیریم، سیستم مرکّب مرتبهٔ دوم دارای نُه نقطهٔ تعادل خواهد بود که فقط چهارتا از آنها پایدار نمایی می‌باشد؛ این چهار نقطه عبارت است از: (۰/۰۶۳ , ۰/۰۶۳)، (۰/۸۸۴ , ۰/۰۶۳)، (۰/۰۶۳ , ۰/۸۸۴) و (۰/۸۸۴ , ۰/۸۸۴). بنا به قضیهٔ ۸ ـ ۲، در همسایگی این نقاط، تقریبهای حاصل از مثال ۸ ـ ۴ به ازای جمیع مقادیر $t \ge 0$ معتبر است. شبیه‌سازیهای شکل ۸ ـ ۴ نشان می‌دهد برای رسیدن پاسخ به‌حالت مانا، لازم‌است زمانی نسبتاً طولانی بگذرد؛ دراین حالت خاص، حالت اولیهٔ (۰/۶ , ۰/۱۵) در قلمرو جذابیت نقطهٔ تعادل (۰/۸۲۲ , ۰/۰۸۵) قرار دارد که به طور

مشخص، آشفتگیِ نقطهٔ تعادل (۰/۸۲۲ , ۰/۰۶۳) می‌باشد. باید دقت کرد اگر ε به اندازهٔ کافی کوچک باشد، سیستم آشفته دارای نُه نقطهٔ تعادل تنهاست که هر یک در همسایگی یکی از نقاط تعادل سیستم غیرآشفته قرار گرفته است. Δ

تخمین $O(\varepsilon^N)$ مربوط به قضیهٔ ۸ ـ ۲، فقط زمانی معتبر است که نقطهٔ تعادل $x = p^*$، پایدار نمایی باشد؛ اما اگر نقطهٔ تعادل، پایدار مجانبی باشد (ولی پایدار نمایی نباشد)، نیازی به اِعمال این شرط نیست. این موضوع در مثال ذیل تشریح شده است:

مثال ۸ ـ ۶ سیستم مرتبهٔ اول ذیل مفروض است:

$$\dot{x} = -x^3 + \varepsilon x \quad , \qquad \varepsilon > 0$$

مبدأ سیستم غیرآشفتهٔ:

$$\dot{x} = -x^3$$

پایدار مجانبی جامع می‌باشد اما پایدار نمایی نیست (مثال ۳ ـ ۲۳ را ملاحظه کنید). سیستم آشفته دارای سه نقطهٔ تعادل در $x = 0$ و $x = \pm\sqrt{\varepsilon}$ است که نقطهٔ تعادل $x = 0$ ناپایدار می‌باشد ولی دو نقطهٔ تعادل دیگر پایدار مجانبی هستند. با حل این دو سیستم با شرط اولیهٔ مثبت یکسان: $x(0) = \alpha$، بسادگی می‌توان تحقیق کرد که:

$$t \to \infty \Rightarrow x(t,\varepsilon) \to \sqrt{\varepsilon} \quad \text{و} \quad t \to \infty \Rightarrow x_0(t) \to 0$$

چون $\sqrt{\varepsilon}$ از مرتبهٔ $O(\varepsilon)$ نیست واضح است خطای تقریب $x(t,\varepsilon) - x_0(t)$ به ازای جمیع مقادیر $t \geq 0$ از مرتبهٔ $O(\varepsilon)$ نمی‌باشد؛ لیکن از آنجا که مبدأ پایدار مجانبی است می‌توان در مورد رفتار مجانبی تقریب در $t \to \infty$ اظهارنظر نمود، در واقع می‌توان به نتیجه‌ای (هر چند ضعیفتر از نتیجهٔ قضیهٔ ۸ ـ ۲) دست یافت. چون مبدأ سیستم غیرآشفته، پایدار مجانبی است با افزایش $t \to \infty$، پاسخ $x_0(t)$ به سمت صفر میل می‌کند، به تعبیر دیگر برای $\delta > 0$ مقدار $T_1 > 0$ چنان وجود دارد که:

$$\|x_0(t)\| < \delta/2, \quad \forall t \geq T_1$$

پاسخهای سیستم آشفته، با کرانی که به سمت ε میل می‌کند، کراندار غایی می‌شوند؛ بنابراین

برای هر $\delta > 0$، مقدار $T_2 > 0$ و $\varepsilon^* > 0$ چنان وجود دارد که:

$$\|x(t,\varepsilon)\| < \delta/2, \quad \forall t \geq T_2, \quad \forall \varepsilon < \varepsilon^*$$

با در نظر گرفتن این دو تخمین می‌توان گفت برای هر $\delta > 0$، خطای تقریب در عبارت ذیل صدق می‌کند:

$$\|x(t,\varepsilon) - x_0(t)\| < \delta, \quad \forall t \geq T, \quad \forall \varepsilon < \varepsilon^*$$

که $T = max\{T_1, T_2\}$. از نتیجهٔ زمان محدودِ قضیهٔ ۸ ـ ۱ می‌دانیم بر بازهٔ $[0, T]$ با مرتبهٔ $O(1)$، خطای تقریب برابر با $O(\varepsilon)$ می‌باشد؛ بنابراین می‌توان گفت برای هر $\delta > 0$، مقدار $\varepsilon^{**} > 0$ چنان وجود دارد که:

$$\|x(t,\varepsilon) - x_0(t)\| < \delta, \quad \forall t \in [0, \infty], \quad \forall \varepsilon < \varepsilon^{**}$$

نامساوی اخیر معادل با این است که بگوییم با حرکت ε به سمت صفر، خطای تقریب به طور یکنواخت و به ازای جمیع مقادیر $t \geq 0$، به سمت صفر میل می‌کند. در حالتی که پایداری نمایی وجود نداشته باشد، این مطلب بهترین چیزی است که می‌توان در حالت کلّی نشان داد، البته در این مثال خاص می‌توان هم $x_0(t)$ و هم $x(t,\varepsilon)$ را به شکل بسته به دست آورد و واقعاً نشان داد مقدار خطای تقریب برابر با $O(\sqrt{\varepsilon})$ می‌باشد. Δ

۸ ـ ۳ متوسط‌گیری

روش متوسط‌گیری به سیستمی به شکل ذیل اعمال می‌گردد:

$$\dot{x} = \varepsilon f(t,x,\varepsilon)$$

که ε پارامتر مثبت کوچکی است و $f(t,x,\varepsilon)$ نیز نسبت به t تابعی متناوب با دورهٔ تناوب T می‌باشد، یعنی در قلمرو $D \subset R^n$ می‌توان نوشت:

$$f(t+T,x,\varepsilon) = f(t,x,\varepsilon), \quad \forall (t,x,\varepsilon) \in [0,\infty) \times D \times [0, \varepsilon_0]$$

این روش، پاسخ چنین سیستمی را با پاسخ «سیستمی متوسط[1]»، که از متوسط‌گیری $f(t,x,\varepsilon)$ در $\varepsilon = 0$ حاصل شده، تقریب می‌زند. برای تفهیم بیشتر روش متوسط‌گیری، مطلب را با مثالی از سیستمهای عددی آغاز می‌کنیم:

مثال ۸ ـ ۷ سیستم خطی مرتبهٔ اول ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = \varepsilon a(t,\varepsilon)x\ ,\quad x(0) = \eta \qquad (۱۵ ـ ۸)$$

که ε پارامتری مثبت است و به ازای جمیع مقادیر $t \geq 0$ داریم: $a(t+T,\varepsilon) = a(t,\varepsilon)$. فرض کنید a نسبت به آرگومانهایش به اندازهٔ کافی هموار باشد. برای یافتن پاسخی تقریبی که برای مقادیر کوچک ε معتبر باشد، می‌توان از روش آشفتگیِ مورد بحث در بخش ۸ ـ ۱ بهره جُست. با انتخاب $\varepsilon = 0$، سیستم غیرآشفتهٔ ذیل به دست می‌آید:

$$\dot{x} = 0\ ,\quad x(0) = \eta$$

که دارای پاسخ ثابت $x_0(t) = \eta$ می‌باشد. براساس قضیهٔ ۸ ـ ۱، خطای این تقریب بر بازه‌های زمانی $O(1)$ برابر با $O(\varepsilon)$ است. سیستم غیرآشفته، شروط قضیهٔ ۸ ـ ۲ را برآورده نمی‌کند بنابراین معلوم نیست آیا این تقریب بر بازه‌های زمانی بزرگتر از $O(1)$ معتبر است یا خیر؟ از آنجا که در این مثال می‌توان پاسخ دقیق سیستم را به شکل بسته محاسبه کرد می‌توان خطای تقریب را با محاسبهٔ مستقیم به دست آورد؛ پاسخ معادلهٔ (۸ ـ ۱۵) برابر است با:

$$x(t,\varepsilon) = \exp\left[\varepsilon \int_0^t a(\tau,\varepsilon)\,d\tau\right]\eta$$

بنابراین خطای تقریب به شکل ذیل بیان می‌شود:

$$x(t,\varepsilon) - x_0(t) = \left\{\exp\left[\varepsilon \int_0^t a(\tau,\varepsilon)\,d\tau\right] - 1\right\}\eta$$

برای تبیین رفتار خطای تقریب نسبت به افزایش t، لازم است جملهٔ انتگرال موجود در عبارت فوق را بررسی نماییم. تابع $a(t,\varepsilon)$ نسبت به t متناوب است؛ اگر مقدار میانگین آن را با عبارت

1. Averaged system

زیر نشان دهیم:

$$\bar{a}(\varepsilon) = \frac{1}{T}\int_0^T a(\tau,\varepsilon)\,d\tau$$

می‌توان $a(t,\varepsilon)$ را به شکل زیر باز نوشت:

$$a(t,\varepsilon) = \bar{a}(\varepsilon) + \left[a(t,\varepsilon) - \bar{a}(\varepsilon)\right]$$

جملهٔ درون قلاب[1] تابعی متناوب با دورهٔ تناوب T و با میانگین صفر است، بنابراین انتگرال:

$$\int_0^t \left[a(\tau,\varepsilon) - \bar{a}(\varepsilon)\right]d\tau \triangleq \Delta(t,\varepsilon)$$

نیز متناوب با دورهٔ تناوب T و در نتیجه به ازای جمیع مقادیر $t \geq 0$، کراندار است. از سوی دیگر حاصل انتگرالگیری از جملهٔ $\bar{a}(\varepsilon)$ بر بازهٔ $[0\ ,\ t]$ برابر با $t\,\bar{a}(\varepsilon)$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$x(t,\varepsilon) - x_0(t) = \left\{\exp\left[\varepsilon\,\bar{a}(\varepsilon)t\right]\exp\left[\varepsilon\,\Delta(t,\varepsilon)\right] - 1\right\}\eta$$

بجز در حالت $\bar{a}(\varepsilon) = 0$، خطای تقریب فقط بر بازه‌های زمانی $O(1)$ برابر با $O(\varepsilon)$ است. بررسی دقیقتر خطای تقریب بیانگر این نکته است که تقریبهای بهتر برای $x(t,\varepsilon)$، عبارت $\exp\left[\varepsilon\,\bar{a}(\varepsilon)t\right]\eta$ و یا حتی $\exp\left[\varepsilon\,\bar{a}(\varepsilon)t\right]$ می‌باشد زیرا داریم: $\bar{a}(\varepsilon) - \bar{a}(0) = O(\varepsilon)$. فرض کنید به عنوان تقریب جایگزین داشته باشیم: $\bar{x}(t,\varepsilon) = \exp\left[\varepsilon\,\bar{a}(0)t\right]\eta$. در این صورت خطای تقریب برابر است با:

$$x(t,\varepsilon) - \bar{x}(t,\varepsilon) = \left\{\exp\left[\varepsilon\,\bar{a}(\varepsilon)t\right]\exp\left[\varepsilon\,\Delta(t,\varepsilon)\right] - \exp\left[\varepsilon\,\bar{a}(0)t\right]\right\}\eta$$

$$= \exp\left[\varepsilon\,\bar{a}(0)t\right]\left\{\exp\left[\varepsilon\,(\bar{a}(\varepsilon) - \bar{a}(0))t\right]\exp\left[\varepsilon\,\Delta(t,\varepsilon)\right] - 1\right\}\eta$$

با توجه به اینکه به ازای هر مقدار محدود $b > 0$ می‌توان نوشت:

$$\exp\left[\varepsilon\,\Delta(t,\varepsilon)\right] = 1 + O(\varepsilon),\quad \forall t \geq 0$$

1. Bracket

$$exp\left[\varepsilon\left(\bar{a}(\varepsilon)-\bar{a}(0)\right)t\right]=exp\left[tO(\varepsilon^{2})\right]=1+O(\varepsilon),\quad \forall t\in[0,b/\varepsilon]$$

$$exp\left[\varepsilon\,\bar{a}(0)t\right]=O(1),\quad \forall t\in[0,b/\varepsilon]$$

لذا در بازه‌های زمانی از مرتبهٔ $O(1/\varepsilon)$ داریم: $x(t,\varepsilon)-\bar{x}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon)$، که نشان می‌دهد تقریب $\bar{x}(t,\varepsilon)=exp[\varepsilon\,\bar{a}(0)t]\eta$ بهتر از تقریب $x_0(t)=\eta$ می‌باشد. شایان ذکر اینکه $\bar{x}(t,\varepsilon)$ پاسخ معادلهٔ زیر است:

$$\dot{x}=\varepsilon\,\bar{a}(0)x,\quad x(0)=\eta \qquad (۱۶-۸)$$

که بیانگر سیستمی متوسط است که عبارت سمت راست آن برابر با عبارت سمت راست معادلهٔ (۸ ـ ۱۵) در $\varepsilon=0$ می‌باشد. Δ

در این مثال با توجه به دانستن شکل بستهٔ پاسخ دقیق معادلهٔ (۸ ـ ۱۵) توانستیم به سیستم متوسط (۸ ـ ۱۶) دست یابیم؛ اما دستیابی به شکل بستهٔ پاسخ فقط در حالتهای خاصی امکانپذیر است در حالی که توانمندی و شایستگی روش متوسط‌گیری به شکل چنین مثالهایی بستگی ندارد. در اینجا مفهوم متوسط‌گیری را از دیدگاه دیگری مورد بحث قرار می‌دهیم: عبارت سمت راست معادلهٔ (۸ ـ ۱۵) در ثابت مثبت ε ضرب شده است، اگر ε کوچک باشد پاسخ x «به آرامی» با tی مربوط به تموّجات[1] متناوب $a(t,\varepsilon)$ تغییر می‌کند. کاملاً مشهود است اگر پاسخ سیستم خیلی آرامتر از تحریک باشد آنگاه می‌توان بخش غالب پاسخ را با مقدار متوسط تحریک مشخص نمود. ریشهٔ این نکتهٔ شهودی در نظریهٔ سیستمهای خطی است چراکه می‌دانیم اگر پهنای باند[2] سیستم خیلی کوچکتر از پهنای باند ورودی باشد، آنگاه سیستم به مثابه فیلتری پایین گذر عمل می‌کند که مؤلفه‌های با فرکانس زیاد ورودی را حذف می‌نماید. چنانچه پاسخ معادلهٔ (۸ ـ ۱۵)، عمدتاً ناشی از مقدار متوسط تموّجات $a(t,\varepsilon)$ باشد، آنگاه معقول است برای به دست آوردن تقریبی مرتبهٔ اول از مرتبهٔ $O(\varepsilon)$، تابع $a(t,\varepsilon)$ را با مقدار متوسطش جایگزین کرد. این دو تعبیرِ مقیاس زمانی از روش متوسط‌گیری هیچگونه ارتباطی نه با شکل خاص مثال ۸ ـ ۷ و نه با خطی بودن سیستم دارد بلکه مفهومی برتر از این موضوعات است که همچنانکه در ادامهٔ این فصل نشان داده خواهد شد، در حالتهای کلّی‌تری به کار می‌آید.

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

1. Fluctuation 2. Bandwidth

$$\dot{x}=\varepsilon f(t,x,\varepsilon) \qquad (۱۷-۸)$$

که $f:[0,\infty)\times D\times[0,\varepsilon_0]\longrightarrow R^n$ تابعی پیوسته و کراندار است و به ازای جمیع مقادیر $(t,x,\varepsilon)\in[0,\infty)\times D\times[0,\varepsilon_0]$، دارای مشتقات پیوسته و کراندار تا مرتبهٔ دوم نسبت به آرگومانهایش می‌باشد، علاوه بر این $f(t,x,\varepsilon)$ نسبت به t متناوب و دورهٔ تناوب آن $T>0$ است. پارامتر ε مقداری مثبت و $D\subset R^n$ هم قلمرو مشخصی می‌باشد. فرض کنید داشته باشیم $\Gamma=[0,\infty)\times D$. می‌توان به همراه معادلهٔ (۸ ـ ۱۷)، سیستم متوسط خودگردان ذیل را در نظر گرفت:

$$\dot{x}=\varepsilon f_{av}(x) \qquad (۱۸-۸)$$

که:

$$f_{av}(x)=\frac{1}{T}\int_0^t f(\tau,x,0)\,d\tau \qquad (۱۹-۸)$$

مسألهٔ اصلی در روش متوسط‌گیری این است که براساس چه معیاری رفتار سیستم خودگردانِ (۸ ـ ۱۸)، رفتار سیستم بسیار پیچیده‌تر و ناخودگردان (۸ ـ ۱۷) را تقریب می‌زند؟ برای پاسخ به این پرسش به کمک روش تغییر متغیرها نشان خواهیم داد می‌توان سیستم ناخودگردان (۸ ـ ۱۷) را به عنوان آشفتگی سیستم خودگردان (۸ ـ ۱۸) در نظر گرفت. بدین منظور تعریف می‌کنیم:

$$u(t,x)=\int_0^t h(\tau,x)\,d\tau \qquad (۲۰-۸)$$

که:

$$h(t,x)=f(t,x,0)-f_{av}(x) \qquad (۲۱-۸)$$

چون $h(t,x)$ نسبت به t با دورهٔ تناوب T، متناوب و مقدار میانگین آن نیز صفر است، لذا تابع $u(t,x)$ نیز نسبت به t با دورهٔ تناوب T، متناوب می‌باشد. بنابراین به ازای جمیع مقادیر $(t,x)\in\Gamma$، $u(t,x)$ کراندار است. علاوه بر این توابع $\partial u/\partial t$ و $\partial u/\partial x$ نیز که با عبارتهای ذیل بیان می‌شوند:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=h(t,x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\int_0^t \frac{\partial h}{\partial x}(\tau,x)\,d\tau$$

نسبت به t با دورهٔ تناوب T، متناوب و روی Γکراندارند. در اینجا از این نکته استفاده کرده‌ایم که $\partial h/\partial x$ نسبت به t با دورهٔ تناوب T، متناوب و دارای میانگین صفر است. اکنون تغییر متغیر ذیل را در نظر بگیرید:

$$x = y + \varepsilon u(t,y) \qquad (۸-۲۲)$$

با مشتقگیری از طرفین این معادله نسبت به t داریم:

$$\dot{x} = \dot{y} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(t,y) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t,y)\dot{y}$$

با جایگزینی $\dot{x}$ از معادلهٔ (۸ ـ ۱۷) درمی‌یابیم متغیر جدید حالت، y، در معادلهٔ ذیل صدق می‌کند:

$$\left[I + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}\right]\dot{y} = \varepsilon f(t,y+\varepsilon u,\varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$= \varepsilon f(t,y+\varepsilon u,\varepsilon) - \varepsilon f(t,y,0) + \varepsilon f_{av}(y)$$

$$\triangleq \varepsilon f_{av}(y) + \varepsilon p(t,y,\varepsilon)$$

که:

$$p(t,y,\varepsilon) = \left[f(t,y,\varepsilon) - f(t,y,0)\right] + \left[f(t,y+\varepsilon u,\varepsilon) - f(t,y,\varepsilon)\right]$$

نامساوی لیپ شیتز ذیل به طور یکنواخت نسبت به t روی Γ برقرار است:

$$\left\| f(t,y,\varepsilon) - f(t,y,0) \right\| \le L_1 \varepsilon$$

و:

$$\left\| f(t,y+\varepsilon u,\varepsilon) - f(t,y,\varepsilon) \right\| \le L_2 \varepsilon \left\| u \right\|$$

بنابراین $p(t,y,\varepsilon)$ روی Γ، از مرتبهٔ $O(\varepsilon)$ است. باید دقت کرد که $p(t,y,\varepsilon)$ نیز نسبت به t با دورهٔ تناوب T، متناوب می‌باشد. چون $\partial u/\partial y$ روی Γ کراندار است ماتریس $I + \varepsilon\, \partial u/\partial y$ برای مقادیر کوچک ε، غیر منفرد است و داریم:

$$\left[I + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}\right]^{-1} = I + O(\varepsilon) \quad \text{روی } \Gamma$$

بنابراین معادلهٔ حالت y به شکل زیر بیان می‌گردد:

$$\dot{y} = \varepsilon f_{av}(y) + \varepsilon^2 q(t,y,\varepsilon) \qquad (۸-۲۳)$$

که $q(t,y,\varepsilon)$ برای مقادیر کوچک ε، نسبت به t با دورهٔ تناوب T، متناوب و روی Γکراندار است. این معادله نشاندهندهٔ آشفتگیِ سیستم متوسط (۸ ـ ۱۸) می‌باشد. با تعمیم آرگومانهای مورد استفاده در دو بخش قبلی به قضیهٔ زیر دست می‌یابیم:

قضیهٔ ۸ ـ ۳ *فرض کنید تابع $f(t,x,\varepsilon)$ پیوسته و کراندار و به ازای مقادیر $(t,x,\varepsilon) \in [0,\infty) \times D \times [0,\varepsilon_0]$ نسبت به (x,ε) دارای مشتقات جزئی پیوسته و کراندار تا مرتبهٔ دوم باشد، علاوه بر این فرض کنید f نسبت به t با دورهٔ تناوب T، متناوب و ε نیز پارامتری مثبت باشد، اگر $x(t,\varepsilon)$ و $x_{av}(t,\varepsilon)$ بترتیب پاسخهای معادلات (۸ ـ ۱۷) و (۸ ـ ۱۸) باشد، آنگاه:*

- *اگر داشته باشیم:*

$$x_{av}(t,\varepsilon) \in D \ \ \forall t \in [0,b/\varepsilon] \ \left\| x(0,\varepsilon) - x_{av}(0,\varepsilon) \right\| = O(\varepsilon)$$

آنگاه: روی $[0,b/\varepsilon]$:

$$\left\| x(t,\varepsilon) - x_{av}(t,\varepsilon) \right\| = O(\varepsilon)$$

- *اگر $p^* \in D$ نقطهٔ تعادل پایدار نمایی برای سیستم متوسط (۸ ـ ۸) باشد، آنگاه ثابت مثبت ρ چنان یافت می‌شود که با شرط:*

$$\left\| x_{av}(0,\varepsilon) - p^* \right\| < \rho \ \text{ و } \ \left\| x(0,\varepsilon) - x_{av}(0,\varepsilon) \right\| = O(\varepsilon)$$

داشته باشیم:

$$\left\| x(t,\varepsilon) - x_{av}(t,\varepsilon) \right\| = O(\varepsilon) \quad \forall t \in [0,\infty)$$

- *اگر $p^* \in D$ نقطهٔ تعادل پایدار نمایی برای سیستم متوسط (۸ ـ ۱۸) باشد، آنگاه ثابت مثبت ε^* چنان یافت می‌شود که به ازای جمیع مقادیر $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$، معادلهٔ*

(۸ ـ ۱۷) دارای پاسخ متناوب پایدار نمایی و یکتا با دورهٔ تناوب T در همسایگی $O(\varepsilon)$ حول $p^{\#}$ باشد. ◇

برهان: پیوست آ ـ ۱۲.

شایان ذکر اینکه پاسخ متناوب $\bar{x}(t,\varepsilon)$ با دورهٔ تناوب T، می‌تواند پاسخ متناوب بدیهیِ $\bar{x}(t,\varepsilon)=p_\varepsilon$ باشد که p_ε نقطهٔ تعادل معادلهٔ (۸ ـ ۲۱) می‌باشد. در این صورت قضیهٔ فوق ما را مطمئن می‌سازد که نقطهٔ تعادل p_ε پایدار نمایی است. در حالت خاصی که داشته باشیم:

$$\forall (t,x)\in[\circ,\infty)\times[\circ,\varepsilon_\circ]\ ,\ f(t,\circ,\varepsilon)=\circ$$

آنگاه هر دو سیستم اصلی (۸ ـ ۲۱) و متوسط (۸ ـ ۲۲) دارای نقطهٔ تعادل $x=\circ$ هستند و با توجه به یکتایی پاسخ متناوب $\bar{x}(t,\varepsilon)$، می‌توان نتیجه گرفت که $\bar{x}(t,\varepsilon)$ همان پاسخ بدیهی $x=\circ$ است.

مثال ۸ ـ ۸ سیستم خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}=\varepsilon A(t)x$$

که $A(t+T)=A(t)$ و $\varepsilon>\circ$ می‌باشد. با فرض:

$$\bar{A}=\frac{1}{T}\int_\circ^T A(\tau)\,d\tau$$

سیستم متوسط به شکل ذیل بیان می‌گردد:

$$\dot{x}=\varepsilon\bar{A}x$$

این سیستم دارای نقطهٔ تعادلی در $x=\circ$ است. فرض کنید ماتریس $\bar{A}$ هرویتز باشد، در این صورت از قضیهٔ ۸ ـ ۳ نتیجه می‌شود برای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک ε، سیستم $\dot{x}=\varepsilon A(t)x$ دارای پاسخ یکتا و متناوبی با دورهٔ تناوب T در همسایگی $O(\varepsilon)$ حول مبدأ $x=\circ$ می‌باشد؛ اما $x=\circ$ نقطهٔ تعادل سیستم است بنابراین پاسخ متناوب، همان پاسخ بدیهی $x=\circ$ می‌باشد لذا می‌توان گفت برای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک ε، $x=\circ$ نقطهٔ تعادل پایدار نمایی برای سیستم ناخودگردان $\dot{x}=\varepsilon A(t)x$ می‌باشد. Δ

مثال ۸ ـ ۹ سیستم عددی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}=\varepsilon\,(x\sin^2 t-\circ/5x^2)=\varepsilon f(t,x)$$

تابع $f(t,x)$ نسبت به t با دورهٔ تناوب π، متناوب است. مقدار تابع متوسط $f_{av}(x)$ با رابطهٔ ذیل بیان می‌شود:

$$f_{av}(x)=\frac{1}{\pi}\int_\circ^\pi (x\sin^2 t-\circ/5x^2)\,dt=\circ/5\,(x-x^2)$$

سیستم متوسط:

$$\dot{x}=\circ/5\,\varepsilon\,(x-x^2)$$

دارای دو نقطهٔ تعادل در $x=\circ$ و $x=1$ می‌باشد. مقدار ماتریس ژاکوبی df_{av}/dx محاسبه شده در این نقاط برابر است با:

$$\left.\frac{df_{av}}{dx}\right|_{x=\circ}=(\circ/5-x)\Big|_{x=\circ}=\circ/5$$

$$\left.\frac{df_{av}}{dx}\right|_{x=1}=(\circ/5-x)\Big|_{x=1}=-\circ/5$$

بنابراین برای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک ε، سیستم دارای پاسخ پایدارنمایی و متناوب، با دورهٔ تناوب π، در همسایگی $O(\varepsilon)$ حول نقطهٔ $x=1$ می‌باشد. علاوه بر این به ازای حالتهای اولیهٔ نزدیک به $x=1$، از حل سیستم متوسط با همان شرایط اولیهٔ سیستم اصلی به تقریب ذیل دست می‌یابیم:

$$x(t,\varepsilon)-x_{av}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon),\quad \forall t\geq\circ$$

اکنون فرض کنید بخواهیم تقریب مرتبهٔ دوم را محاسبه نماییم؛ برای این کار لازم است از تغییر متغیر (۸ ـ ۲۲) برای نمایش مسألهٔ استاندارد آشفتگی استفاده کنیم و سپس به کمک آن پاسخ را مشابه بخش ۸ ـ ۱ تخمین بزنیم. با استفاده از معادلهٔ (۸ ـ ۲۰)، تابع $u(t,x)$ با رابطهٔ ذیل بیان می‌گردد:

$$u(t,x)=\int_\circ^t (x\sin^2\tau-\circ/5x^2-\circ/5x+\circ/5x^2)\,d\tau$$

$$= x \int_{0}^{t} (\sin^2 \tau - 0/5)\, d\tau = -\frac{1}{4} x \sin 2t$$

با تغییر متغیر (۸ ـ ۲۲) داریم:

$$x = y - \frac{\varepsilon}{4} y \sin 2t = \left(1 - \frac{\varepsilon}{4} \sin 2t\right) y$$

با مشتقگیری از دو طرف عبارت فوق نسبت به t نتیجه می‌شود:

$$\dot{x} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{4} \sin 2t\right) \dot{y} - \frac{\varepsilon}{2} y \cos 2t$$

بنابراین:

$$\dot{y} = \frac{\varepsilon}{1 - (\varepsilon/4)\sin 2t} \left(x \sin^2 t - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y \cos 2t\right)$$

با جایگزینی x به صورت جملاتی از y و بسط جملهٔ $1/[1 - (\varepsilon/4)\sin 2t]$ با سری توانی:

$$\frac{1}{1 - (\varepsilon/4)\sin 2t} = 1 + \frac{\varepsilon}{4} \sin 2t + O(\varepsilon^2)$$

به معادلهٔ ذیل می‌رسیم:

$$\dot{y} = \frac{\varepsilon}{2}(y - y^2) + \frac{\varepsilon^2}{16}(y \sin 4t + 2y^2 \sin 2t) + O(\varepsilon^3)$$

بدین ترتیب سیستم به شکل آشفتگیِ سیستم متوسط ظاهر می‌شود. برای یافتن تقریب مرتبهٔ دوم لازم است y_0 و y_1 را در بسط محدود تیلور زیر بیابیم:

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_R$$

می‌دانیم که $y_0 = x_{av}$ همان پاسخ سیستم متوسط است؛ ضمناً معادلهٔ y_1 به شکل زیر بیان می‌گردد:

$$\dot{y}_1 = \varepsilon \left[\left(\frac{1}{2} - y_0(t)\right) y_1 + \frac{1}{16} y_0(t) \sin 4t + \frac{1}{8} y_0^2(t) \sin 2t\right], \quad y_1(0) = 0$$

این عبارت با رعایت این فرض نوشته شده که حالت اولیهٔ $x(0)$ مستقل از ε است. با استفاده از تغییر متغیر (۸ ـ ۲۲)، تقریب مرتبهٔ دوم x عبارت است از:

$$x = \left(1 - \frac{\varepsilon}{4} \sin 2t\right) x_{av}(t, \varepsilon) + \varepsilon y_1(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^2)$$

شکل ۸ ـ ۶ پاسخهای سیستم اصلی سیستم متوسط و تقریب مرتبهٔ دوم را برای حالت اولیهٔ $x(0) = 0/7$ و $\varepsilon = 0/3$ نمایش می‌دهد. این شکل بخوبی بیان می‌کند چگونه پاسخ سیستم متوسط می‌تواند مقدار متوسط پاسخ دقیق را نشان دهد. در عمل، تقریب مرتبهٔ دوم تفاوت ناچیزی با پاسخ دقیق سیستم دارد اما در حالت مانا، اختلاف پاسخها مشهودتر است. Δ

مثال ۸ ـ ۱۰ پاندول معلّق بخش ۱ ـ ۱ ـ ۱ را در نظر بگیرید و فرض کنید نقطهٔ تعلیق تحت ارتعاشهای عمودی با دامنهٔ کم و فرکانس زیاد قرار گرفته است. علاوه بر این فرض کنید بتوان حرکت نقطهٔ تعلیق را با معادلهٔ $a \sin \omega t$ توصیف کرد که a دامنه و ω فرکانس می‌باشد. با اعمال قانون نیوتن در جهت مماسی (عمود بر میله)، معادلهٔ حرکت به شکل زیر بیان می‌گردد*:

$$m(l\ddot{\theta} - a\omega^2 \sin\omega t \sin\theta) = -mg \sin\theta - k(l\dot{\theta} + a\omega \cos\omega t \sin\theta)$$

فرض کنید داشته باشیم: $a/l << 1$ و $\omega_0/\omega << 1$ که $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ فرکانس نوسان آزاد پاندول در مجاورت موقعیت پایینی نقطهٔ تعادل $(\theta = 0)$ است. علاوه بر این فرض کنید $\varepsilon = a/l$ و $\omega_0/\omega = \alpha\varepsilon$ باشد که $\alpha = \omega_0 l/\omega a$؛ در این صورت با انتخاب $\beta = k/m\omega_0$ و تغییر مقیاس زمانی از t به $\tau = \omega t$، معادلهٔ حرکت در مقیاس جدید زمانی برابر خواهد شد با:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \alpha\beta\varepsilon \frac{d\theta}{d\tau} + (\alpha^2\varepsilon^2 - \varepsilon \sin\tau) \sin\theta + \alpha\beta\varepsilon^2 \cos\tau \sin\theta = 0$$

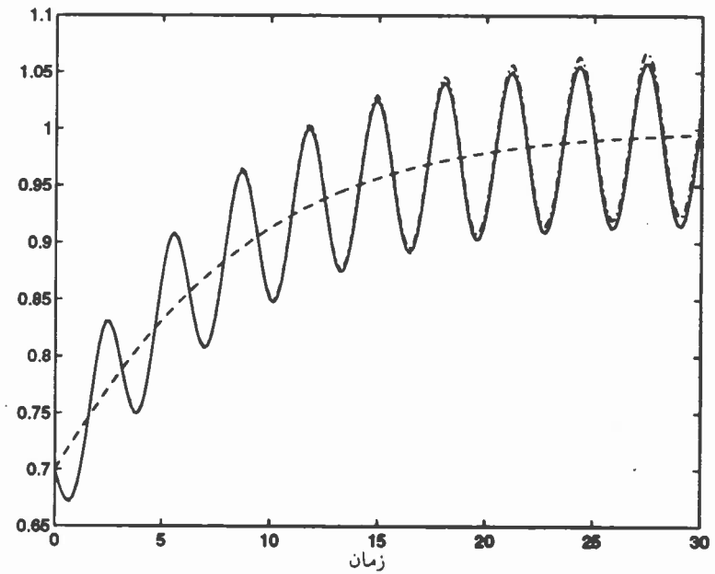
با انتخاب متغیرهای حالت ذیل:

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\theta}{d\tau} + \cos\tau \sin\theta$$

---

* برای به دست آوردن این معادله، معادلات گلولهٔ پاندول را در مختصات $x - y$ به شکل $x = l\sin\theta$ و $y = l\cos\theta - a\sin\omega t$ بنویسید، سپس نشان دهید سرعت و شتاب گلوله در جهت مماسی بترتیب برابر است با: $(l\dot{\theta} + a\omega\cos\omega t \sin\theta)$ و: $(l\ddot{\theta} - a\omega^2 \sin\omega t \sin\theta)$. نیروی اصطکاک نیز به صورت اصطکاک چسبندگی متناسب با سرعت گلوله (همراه با ضریب اصطکاک k) در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۸ ـ ۶ پاسخهای دقیق (خط پُر)، متوسط (خط چین) و مرتبهٔ دوم (خط ـ نقطه) مربوط به مثال ۸ ـ ۹ با مقدار $\varepsilon = ۰/۳$

معادلهٔ حالت به شکل زیر بیان می‌گردد:

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon f(\tau, x) \qquad (۲۴-۸)$$

که:

$$f_۱(\tau, x) = x_۲ - \cos\tau \sin x_۱$$

$$f_۲(\tau, x) = -\alpha\beta x_۲ - \alpha^۲ \sin x_۱ + \cos\tau x_۲ \cos x_۱ - \cos^۲\tau \sin x_۱ \cos x_۱$$

تابع $f(\tau, x)$ نسبت به τ با دورهٔ تناوب ۲π، متناوب است. حال این سیستم را با روش متوسط‌گیری بررسی خواهیم کرد: سیستم متوسط با معادلهٔ ذیل بیان می‌شود:

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon f_{av}(x) \qquad (۲۵-۸)$$

که:

$$f_{av۱}(x) = \frac{۱}{۲\pi} \int_۰^{۲\pi} f_۱(\tau, x)\, d\tau = x_۲$$

$$f_{av۲}(x) = \frac{۱}{۲\pi} \int_۰^{۲\pi} f_۲(\tau, x)\, d\tau = -\alpha\beta x_۲ - \alpha^۲ \sin x_۱ - \frac{۱}{۴} \sin ۲x_۱$$

برای رسیدن به این عبارتها، از این نکته استفاده کرده‌ایم که مقدار متوسط $\cos\tau$ برابر با صفر و مقدار متوسط $\cos^۲\tau$ برابر با $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد. هر دو سیستم اصلی (۸ ـ ۲۴) و سیستم متوسط (۸ ـ ۲۵) دارای نقاط تعادلی در $(x_۱ = ۰, x_۲ = ۰)$ و $(x_۱ = \pi, x_۲ = ۰)$ هستند که متناظر با موقعیتهای تعادلی $\theta = ۰$ و $\theta = \pi$ می‌باشد. برای یک نقطهٔ تعلیق ساکن، موقعیت تعادل $\theta = ۰$ پایدارنمایی است در صورتی که موقعیت تعادل $\theta = \pi$ ناپایدار می‌باشد. اینک به بررسی تأثیر نقطهٔ تعلیق مرتعش بر پایداری سیستم می‌پردازیم؛ برای اعمال قضیهٔ ۸ ـ ۳، ویژگیهای پایداری نقاط تعادل سیستم متوسط (۸ ـ ۲۵) را به کمک خطی‌سازی تحلیل می‌کنیم. ماتریس ژاکوبی $f_{av}(x)$ برابر است با:

$$\frac{\partial f_{av}}{\partial x} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -\alpha^۲ \cos x_۱ - ۰/۵ \cos ۲x_۱ & -\alpha\beta \end{bmatrix}$$

در نقطهٔ تعادل $(x_۱ = ۰, x_۲ = ۰)$، ماتریس ژاکوبی زیر:

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -\alpha^۲ - ۰/۵ & -\alpha\beta \end{bmatrix}$$

به ازای همهٔ مقادیر مثبت α و β هرویتز است؛ بنابراین طبق قضیهٔ ۸ ـ ۳، برای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک ε، سیستم اصلی (۸ ـ ۲۴) دارای پاسخ یکتا، پایدارنمایی و متناوب (با دورهٔ تناوب ۲π) در همسایگی $O(\varepsilon)$ حول مبدأ می‌باشد. مبدأ، نقطهٔ تعادل سیستم اصلی است لذا پاسخ متناوب، همان پاسخ بدیهی $x = ۰$ می‌باشد. در این حالت قضیهٔ ۸ ـ ۳ مبیّن این نکته است که مبدأ به ازای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک ε، نقطهٔ تعادل پایدارنمایی برای سیستم

اصلی (۸ ـ ۲۴) می‌باشد. به تعبیر دیگر پایداری نمایی موقعیت تعادل پایینی پاندول، تحت ارتعاش (با دامنهٔ کم و فرکانس زیاد) نقطهٔ تعلیق همچنان حفظ می‌شود. در نقطهٔ تعادل $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$، ماتریس ژاکوبیِ:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 - 0/5 & -\alpha\beta \end{bmatrix}$$

به ازای مقادیر $0 < \alpha < 1/\sqrt{2}$ و $\beta > 0$ هرویتز است. دیگربار باید توجه داشت که $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$، نقطهٔ تعادل سیستم اصلی است. با استفاده از قضیهٔ ۸ ـ ۳ به این نتیجه می‌رسیم اگر $\alpha < 1/\sqrt{2}$ باشد، آنگاه موقعیت تعادل بالایی $(\theta = \pi)$ نیز به ازای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک ε، نقطهٔ تعادل پایدار نمایی برای سیستم اصلی (۸ ـ ۲۴) می‌باشد. این نتیجه از آن رو شگفت‌آور است که نشان می‌دهد می‌توان موقعیت ناپایدار تعادل بالایی را به کمک ارتعاش نقطهٔ تعلیق در صفحهٔ عمودی (با دامنهٔ کوچک و فرکانس زیاد) پایدار ساخت*. Δ

۸ ـ ۴ نوسانسازهای غیرخطی ضعیف مرتبهٔ دوم

سیستم مرتبهٔ دوم ذیل را در نظر بگیرید:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \varepsilon g(y, \dot{y}) \qquad (۸ ـ ۲۶)$$

که $g(0,0)$ به اندازهٔ کافی هموار، $|g|$ کراندار و کران آن برابر با $k|y|$ یا $k|\dot{y}|$ بر مجموعه‌های فشردهٔ $(y, \dot{y})$ است (k ثابت مثبتی می باشد). با انتخاب $x_1 = y$ و $x_2 = \dot{y}/\omega$ به عنوان متغیرهای حالت، معادلهٔ حالت به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\dot{x}_1 = \omega x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\omega x_1 + \frac{\varepsilon}{\omega} g(x_1, \omega x_2)$$

با نمایش سیستم در مختصات قطبیِ: $x_1 = r\sin\phi$ و $x_2 = r\cos\phi$ داریم:

* نظریهٔ اعمال ارتعاشهای با فرکانس زیاد و مقدار میانگین صفر به پارامترهای یک سیستم دینامیکی، به منظور تصحیح ویژگیهای آن در جهت دلخواه، در مبحث *اصول کنترل ارتعاشی* مورد بررسی قرار گرفته است؛ [۱۱۰] و [۱۷] را ملاحظه کنید.

$$\dot{r} = \frac{1}{r}(x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2)$$

$$= \frac{1}{r}\left(\omega x_1 x_2 - \omega x_1 x_2 + \frac{\varepsilon}{\omega} x_2 g(x_1, \omega x_2)\right)$$

$$= \frac{\varepsilon}{\omega} g(r\sin\phi, \omega r\cos\phi)\cos\phi \qquad (۸ ـ ۲۷)$$

و:

$$\dot{\phi} = \frac{d}{dt}\tan^{-1}\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{1}{r^2}(x_2\dot{x}_1 - x_1\dot{x}_2)$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(\omega x_1^2 + \omega x_2^2 - \frac{\varepsilon}{\omega} x_1 g(x_1, \omega x_2)\right)$$

$$= \omega - \frac{\varepsilon}{\omega r} g(r\sin\phi, \omega r\cos\phi)\sin\phi \qquad (۸ ـ ۲۸)$$

چون طبق فرض $|g|$ دارای کرانی برابر با $k|y|$ یا $k|\dot{y}|$ است لذا در عبارت فوق، جملهٔ دوم سمت راست، بر روی مجموعهٔ کرانمند r، از مرتبهٔ $O(\varepsilon)$ می‌باشد؛ بنابراین برای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک ε، عبارت سمت راست معادلهٔ (۸ ـ ۲۸) از سمت پایین کراندار است. با تقسیم عبارت (۸ ـ ۲۷) بر (۸ ـ ۲۸) داریم:

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{\varepsilon g(r\sin\phi, \omega r\cos\phi)\cos\phi}{\omega^2 - (\varepsilon/r) g(r\sin\phi, \omega r\cos\phi)\sin\phi}$$

این عبارت را به شکل ذیل باز می‌نویسیم:

$$\frac{dr}{d\phi} = \varepsilon f(\phi, r, \varepsilon) \qquad (۸ ـ ۲۹)$$

که:

$$f(\phi, r, \varepsilon) = \frac{g(r\sin\phi, \omega r\cos\phi)\cos\phi}{\omega^2 - (\varepsilon/r) g(r\sin\phi, \omega r\cos\phi)\sin\phi}$$

چنانچه ϕ را به عنوان متغیری مستقل در نظر بگیریم آنگاه معادلهٔ (۸ ـ ۲۹) به شکل عبارت (۸ ـ ۲۸) درمی‌آید که $f(\phi, r, \varepsilon)$ نسبت به ϕ با دورهٔ تناوب 2π، متناوب است. تابع $f_{av}(r)$ با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$f_{av}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi, r, 0)\, d\phi = \frac{1}{2\pi\omega^2}\int_0^{2\pi} g(r\sin\phi, \omega r\cos\phi)\cos\phi\, d\phi$$

فرض کنید سیستم متوسط ذیل:

$$\frac{dr}{d\phi} = \varepsilon f_{av}(r) \qquad (۸-۳۰)$$

دارای نقطهٔ تعادل r^* باشد که به ازای آن بتوان نوشت: $[\partial f_{av}/\partial r](r^*) < 0$، در این صورت مقدار $\varepsilon^* > 0$ چنان یافت می‌شود که برای جمیع مقادیر $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$، معادلهٔ (۸ ـ ۲۹) دارای پاسخی یکتا، پایدارنمایی و متناوب (با دورهٔ تناوب 2π) به شکل $r = R(\phi, \varepsilon)$ در همسایگی $O(\varepsilon)$ حول r^* باشد. این نکته بتنهایی بیانگر این مفهوم نیست که معادلهٔ (۸ ـ ۲۶) دارای پاسخی متناوب نسبت به t است و برای رسیدن به این نتیجه لازم است کار بیشتری انجام شود: از جایگزینی $r = R(\phi, \varepsilon)$ در معادلهٔ (۸ ـ ۲۸) نتیجه می‌شود:

$$\dot{\phi} = \omega - \frac{\varepsilon}{\omega R(\phi,\varepsilon)} g\Big(R(\phi,\varepsilon)\sin\phi, \omega R(\phi,\varepsilon)\cos\phi\Big)\sin\phi$$

فرض کنید $\phi^*(t,\varepsilon)$ یکی از پاسخهای این معادله باشد، برای اثبات متناوب بودن پاسخ معادلهٔ (۸ ـ ۲۶)، باید نشان دهیم مقدار $T = T(\varepsilon) > 0$ (در حالت کلّی وابسته به ε) چنان یافت می‌شود که داشته باشیم:

$$\phi^*(t+T,\varepsilon) = 2\pi + \phi^*(t,\varepsilon), \quad \forall t \geq 0 \qquad (۸-۳۱)$$

و در نتیجه:

$$R(\phi^*(t+T,\varepsilon),\varepsilon) = R(2\pi + \phi^*(t,\varepsilon),\varepsilon) = R(\phi^*(t,\varepsilon),\varepsilon)$$

به تعبیر دیگر $R(\phi^*(t,\varepsilon),\varepsilon)$ نسبت به t با دورهٔ تناوب T، متناوب باشد. تصویر پاسخ $r = R(\phi^*(t,\varepsilon),\varepsilon)$ در صفحهٔ فاز $x_2 - x_1$، به شکل دور بسته‌ای در همسایگی دایرهٔ $r = r^*$ است، از آنجا که پاسخ $r = R(\phi,\varepsilon)$ پایدار نمایی است لذا دور بسته، همهٔ پاسخهای واقع در همسایگی خود را جذب می‌کند؛ یعنی دور بسته یک چرخهٔ حدّی پایدار می‌باشد. اکنون به پرسش قبلیِ وجود T برای برآوردن معادلهٔ (۸ ـ ۳۱) باز می‌گردیم. باید دقت کرد که می‌توان بر بازه‌های زمانی از مرتبهٔ $O(1)$، پاسخ معادلهٔ (۸ ـ ۲۸) را با مقدار ωt (با خطایی از مرتبهٔ $O(\varepsilon)$) تقریب زد؛ یعنی: $\phi(t,\varepsilon) = t\omega + O(\varepsilon)$.

در نقطهٔ $\varepsilon = 0$، عبارت (۸ ـ ۳۱) به معادلهٔ ذیل تقلیل می‌یابد:

$$(t+T)\omega = 2\pi + t\omega$$

که دارای پاسخ یکتای $T_0 = 2\pi/\omega$ می‌باشد؛ علاوه بر این مشتق جزئی $\phi^*(t+T,\varepsilon)$ نسبت به T در نقطهٔ $\varepsilon = 0$ برابر با $\omega \neq 0$ است. از قضیهٔ تابع ضمنی نتیجه می‌شود برای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک ε، معادلهٔ (۸ ـ ۳۱) دارای پاسخ یکتای $T(\varepsilon)$ می‌باشد و می‌توان واقعاً نشان داد که: $T(\varepsilon) = 2\pi/\omega + O(\varepsilon)$.

مثال ۸ ـ ۱۱ نوسانساز وان دِرپُل را در نظر بگیرید:

$$\ddot{y} + y = \varepsilon\dot{y}(1 - y^2)$$

که حالت خاصی از معادلهٔ (۸ ـ ۲۶) به ازای $\omega = 1$ و $g(y,\dot{y}) = \dot{y}(1-y^2)$ می‌باشد. تابع $f_{av}(r)$ به شکل ذیل بیان می‌گردد:

$$f_{av}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r\sin\phi, \omega r\cos\phi)\cos\phi\, d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1 - r^2\sin^2\phi) r\cos^2\phi\, d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r\cos^2\phi\, d\phi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^3\sin^2\phi\cos^2\phi\, d\phi$$

$$= \frac{1}{2}r - \frac{1}{8}r^3$$

سیستم متوسط:

$$\frac{dr}{d\phi} = \varepsilon\left(\frac{1}{2}r - \frac{1}{8}r^3\right)$$

دارای سه نقطهٔ تعادل در $r = 0$، $r = 2$ و $r = -2$ است که با توجه به شرط $r \geq 0$، ریشهٔ منفی غیرقابل قبول می‌باشد. پایداری نقاط تعادل را به کمک خطی‌سازی بررسی می‌کنیم؛ ماتریس ژاکوبی عبارت است از:

$$\frac{df_{av}}{dr} = \frac{۱}{۲} - \frac{۳}{۸} r^۲$$

و:

$$\left.\frac{df_{av}}{dr}\right|_{r=۰} = \frac{۱}{۲} > ۰ ; \quad \left.\frac{df_{av}}{dr}\right|_{r=۲} = -۱ < ۰$$

پس نقطهٔ تعادل $r = ۲$ پایدارنمایی است، در نتیجه به ازای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک ε، نوسانساز وان دِرپُل، دارای چرخهٔ حدّی پایداری در همسایگی مرتبهٔ $O(\varepsilon)$ حول $r = ۲$ می‌باشد. دورهٔ تناوب نوسان مانا، از مرتبهٔ $O(\varepsilon)$ حول ۲π است. شایان ذکر اینکه در مثال ۱ ـ ۷ همین چرخهٔ حدّی پایدار را از طریق شبیه‌سازی مشاهده کردیم. Δ

این بخش را با اشاره به این نکته به پایان می‌بریم که چنانچه سیستم متوسط (۸ ـ ۳۰) دارای نقطهٔ تعادل r^* با شرط $(r^*) > ۰$ [$\partial f_{av} / \partial r$] باشد، آنگاه مقدار $\varepsilon^* > ۰$ چنان یافت می‌شود که به ازای جمیع مقادیر $\varepsilon < \varepsilon^* < ۰$، عبارت (۸ ـ ۲۶) دارای یک چرخهٔ حدّی ناپایدار در همسایگی دایرهٔ $r = r^*$ باشد. این نتیجه را می‌توان با معکوس کردن زمان در معادلهٔ (۸ ـ ۲۶)، یعنی جایگزینی t با $-t = \tau$، به دست آورد.

۸ ـ ۵ متوسط‌گیری عمومی

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon) \qquad (۸ ـ ۳۲)$$

که تابع $f: [۰ , \infty) \times D \times [۰ , \varepsilon_۰] \longrightarrow R^n$ پیوسته و کراندار است و به ازای مقادیر $(t, x, \varepsilon) \in [۰ , \infty) \times D \times [۰ , \varepsilon_۰]$ و نسبت به (x, ε) دارای مشتقات جزئی پیوسته و کراندار تا مرتبهٔ دوم می‌باشد. ε پارامتری مثبت و $D \subset R^n$ نیز قلمرو مشخصی است. فرض کنید داشته باشیم: $\Gamma = [۰ , \infty) \times D$، در این صورت می‌توان روش متوسط‌گیری را در حالتهای بسیار عمومیتر و برای حالتی که $f(t, x, \varepsilon)$ دارای مقدار متوسط $f_{av}(x)$ است و این مقدار متوسط در حالت عمومی تعریف شده، به کار برد.

تعریف ۸ ـ ۲ *گوییم تابع پیوسته و کراندار $g: \Gamma \longrightarrow R^n$ دارای مقدار متوسط $g_{av}(x)$*

است اگر مقدار حدّ ذیل موجود باشد:

$$g_{av}(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{۱}{T} \int_t^{t+T} g(\tau, x)\, d\tau$$

و نیز داشته باشیم:

$$\left\| \frac{۱}{T} \int_t^{t+T} g(\tau, x)\, d\tau - g_{av}(x) \right\| \le k\sigma(T), \quad \forall (t, x) \in \Gamma$$

که k ثابت مثبتی است و $\sigma: [۰ , \infty) \longrightarrow (۰ , \infty)$ تابعی اکیداً کاهشی، پیوسته و کراندار است که در شرط $T \longrightarrow \infty \Rightarrow \sigma(T) \longrightarrow ۰$ صدق می‌کند. تابع σ را تابع همگرایی[1] می‌نامند.

مثال ۸ ـ ۱۲

● فرض کنید داشته باشیم: $g(t, x) = \sum_{k=۱}^{N} g_k(t, x)$ که تابع $g_k(t, x)$ نسبت به t با دورهٔ تناوب T_k (با شرط اینکه به ازای $i \neq j$ داشته باشیم: $T_i \neq T_j$) متناوب است. تابع g نسبت به t متناوب نیست ولی دارای مقدار متوسط ذیل می‌باشد*:

$$g_{av}(x) = \sum_{k=۱}^{N} g_{kav}(x)$$

که g_{kav} مشابه تعریف بخش ۸ ـ ۳، مقدار متوسط تابع متناوب $g_k(t, x)$ می‌باشد. تابع همگرایی σ نیز با شرط $T \to \infty$، از مرتبهٔ $O(۱/T)$ است و می‌توان آن را به شکل $\sigma(T) = ۱/(T + ۱)$ در نظر گرفت.

● مقدار متوسط تابع: $g(t, x) = \frac{۱}{۱ + t} h(x)$

---

* چنین تابعی تقریباً متناوب[2] نامیده می‌شود. برای ملاحظهٔ مقدمه‌ای بر نظریهٔ توابع تقریباً متناوب می‌توان به [۶۵] یا [۵۰] مراجعه کرد.

1. Convergence function

2. Almost periodic

صفر است و می‌توان تابع همگرایی σ را به شکل $\sigma(T) = (1/T)\,Ln\,(1+T)$ نمایش داد. Δ

اکنون فرض کنید تابع $f(t,x,0)$ دارای مقدار متوسط $f_{av}(x)$ روی Γ و نیز تابع همگرایی $\sigma(\cdot)$ باشد. در این صورت با فرض:

$$h(t,x) = f(t,x,0) - f_{av}(x) \qquad (۸-۳۳)$$

تابع $h(t,x)$ دارای مقدار متوسط صفر و تابع همگرایی $\sigma(\cdot)$ خواهد بود. فرض کنید ماتریس $[\partial h/\partial x]$ نیز دارای مقدار متوسط صفر روی Γ و همان تابع همگرایی $\sigma(\cdot)$ باشد؛ لذا با تعریف:

$$w(t,x,\eta) = \int_0^t h(\tau,x)\exp[-\eta(t-\tau)]\,d\tau \qquad (۸-۳۴)$$

(η ثابتی مثبت است)، در $\eta = 0$ داریم:

$$\|w(t+\delta,x,0) - w(t,x,0)\| = \left\| \int_t^{t+\delta} h(\tau,x)\,d\tau - \int_0^t h(\tau,x)\,d\tau \right\|$$

$$= \left\| \int_t^{t+\delta} h(\tau,x)\,d\tau \right\| \le k\delta\sigma(\delta) \qquad (۸-۳۵)$$

بدین ترتیب این تابع به طور مشخص در رابطهٔ ذیل صدق می‌کند:

$$\|w(t,x,0)\| \le kt\sigma(t), \quad \forall (t,x)\in\Gamma$$

زیرا $w(0,x,0) = 0$ است. با انتگرالگیری جزء به جزء از جملات سمت راست معادلهٔ (۸-۳۴) نتیجه می‌شود:

$$w(t,x,\eta) = w(t,x,0) - \eta\int_0^t \exp[-\eta(t-\tau)]\,w(\tau,x,0)\,d\tau$$

$$= \exp(-\eta t)\,w(t,x,0) - \eta\int_0^t \exp[-\eta(t-\tau)]\,[w(\tau,x,0) - w(t,x,0)]\,d\tau$$

که تساوی دوم از افزودن و کاستن جملهٔ ذیل به عبارت سمت راست حاصل شده است:

$$\eta\int_0^t \exp[-\eta(t-\tau)]\,d\tau\,w(t,x,0)$$

با استفاده از رابطهٔ (۸-۳۵) داریم:

$$\|w(t,x,\eta)\| \le kt\exp(-\eta t)\,\sigma(t) + k\eta\int_0^t \exp[-\eta(t-\tau)]\,(t-\tau)\,\sigma(t-\tau)\,d\tau \qquad (۸-۳۶)$$

به کمک این نامساوی می‌توان نشان داد عبارت $\eta\|w(t,x,\eta)\|$ با تابعی متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ از η کراندار یکنواخت می‌شود. برای مثال اگر $\sigma(t) = 1/(t+1)$ باشد، آنگاه:

$$\eta\|w(t,x,\eta)\| \le k\eta\exp(-\eta t) + k\eta^2\int_0^t \exp[-\eta(t-\tau)]\,d\tau = k\eta$$

با تعریف $\alpha(\eta) = k\eta$ داریم: $\|w(t,x,\eta)\| \le \alpha(\eta)$. اگر $\sigma(t) = 1/(t^3+1)$ باشد با شرط $0 < r < 1$ می‌توان نوشت:

$$\eta\|w(t,x,\eta)\| \le k\eta t^{(1-r)}e^{-\eta t} + k\eta^2\int_0^t e^{-\eta(t-\tau)}(t-\tau)^{(1-r)}\,d\tau$$

$$\le k\eta\left(\frac{1-r}{\eta}\right)^{1-r}e^{-(1-r)} + k\eta^2\int_0^\infty e^{-\eta s}s^{(1-r)}\,ds$$

$$\le k\eta\left(\frac{1-r}{\eta}\right)^{1-r}e^{-(1-r)} + k\eta^2\frac{\Gamma(2-r)}{\eta^{(2-r)}} \le k_1\eta^r$$

که $\Gamma(\cdot)$ نشاندهندهٔ تابع استاندارد گاما[1] می‌باشد. در این حالت نیز با تعریف $\alpha(\eta) = k_1\eta^3$ نتیجه می‌شود: $\|w(t,x,\eta)\| \le \alpha(\eta)$. در حالت کلّی می‌توان اثبات کرد (تمرین ۸-۱۸) تابع α متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ چنان یافت می‌شود که:

$$\eta\|w(t,x,\eta)\| \le \alpha(\eta), \quad \forall\,(t,x)\in\Gamma \qquad (۸-۳۷)$$

1. Standard gamma function

بدون کاستن از کلیّت بحث، می‌توان $\alpha(\eta)$ را چنان برگزید که به ازای جمیع مقادیر $\eta \in [0, 1]$ داشته باشیم: $\alpha(\eta) \geq c\eta$ (c ثابت مثبتی است). مشتقات جزئی $[\partial w/\partial t]$ و $[\partial w/\partial x]$ عبارتند از:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = h(t,x) - \eta w(t,x,\eta)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \int_0^t \frac{\partial h}{\partial x}(\tau,x)\, exp\left[-\eta(t-\tau)\right] d\tau$$

چون $[\partial h/\partial x]$ تمامی ویژگیهای h را (که برای رسیدن به عبارت (۸ ـ ۳۷) به کار گرفته شده) دارا است، لذا می‌توان همان روال قبلی را تکرار کرد و به نتیجهٔ زیر رسید:

$$\eta \left\| \frac{\partial w}{\partial x} \right\| \leq \alpha(\eta), \quad \forall (t,x) \in \Gamma \qquad (۳۸ ـ ۸)$$

بدیهی است استفاده از یک تابع متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ برای هر دو عبارت (۸ ـ ۳۷) و (۸ ـ ۳۸) هیچگونه مشکلی به وجود نمی‌آورد زیرا تخمینهای حاصل فقط در ثابت مثبتی، که در جملهٔ وابسته به η ضرب می‌شود، با هم تفاوت دارند؛ بنابراین می‌توان α را براساس مقدار بزرگتر دو ثابت حاصل، تعریف نمود.

تابع $w(t,x,\eta)$ی تعریف شده، همهٔ ویژگیهای اصلی تابع $u(t,x)$ مذکور در بخش ۸ ـ ۳ را دارا است؛ تنها تفاوت این است که تابع w نسبت به پارامتر η چنان پارامتریزه شده که کرانهای w و $[\partial w/\partial x]$ به شکل $\eta/\alpha(\eta)$ بیان می‌گردد (α تابعی متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ می‌باشد). لیکن نیازی نیست u را بر حسب جمله‌های هیچ پارامتری پارامتریزه کنیم؛ در واقع تابع $u(t,x)$ چیزی بیش از تابع $w(t,x,\eta)$ به ازای $\eta = 0$ نیست. چنین نتیجه‌ای به علت متناوب بودن تابع همگرایی $\sigma(t) = 1/(t+1)$ چندان عجیب نیست زیرا می‌توان نوشت $\alpha(\eta) = k\eta$ و کران $\alpha(\eta)/\eta = k$ نیز مستقل از مقدار η می‌باشد.

از اینجا به بعد، روند تحلیل بسیار مشابه بخش ۸ ـ ۳ می‌باشد: با استفاده از تغییر متغیر ذیل:

$$x = y + \varepsilon w(t,y,\varepsilon) \qquad (۳۹ ـ ۸)$$

چون جملهٔ $\varepsilon w(t,y,\varepsilon)$ از مرتبهٔ $O(\alpha(\varepsilon))$ خواهد بود، بنابراین برای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک، تغییر متغیر (۸ ـ ۳۹) خوش‌تعریف است زیرا ماتریس $[I + \varepsilon\, \partial w/\partial y]$ غیر منفرد

می‌باشد. به طور مشخص می‌توان نوشت:

$$\left[I + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial y}\right]^{-1} = I + O(\alpha(\varepsilon)), \quad \Gamma \text{ روی}$$

اینک با ادامهٔ بحثی مشابه با بخش ۸ ـ ۳، می‌توان نشان داد معادلهٔ حالت y با رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$\dot{y} = \varepsilon f_{av}(y) + \varepsilon\, \alpha(\varepsilon)\, q(t,y,\varepsilon) \qquad (۴۰ ـ ۸)$$

که $q(t,y,\varepsilon)$ برای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک ε روی Γ کراندار است. در رسیدن به عبارت (۸ ـ ۴۰)، از این نکته استفاده کرده‌ایم که: $\alpha(\varepsilon) \geq c\varepsilon$. معادلهٔ (۸ ـ ۴۰) در اصل به صورت آشفتگی سیستم متوسط زیر است:

$$\dot{x} = \varepsilon f(t,x) \qquad (۴۱ ـ ۸)$$

این سیستم مشابه معادلهٔ (۸ ـ ۲۳) است جز اینکه ضریب جملهٔ q به جای ε^2 برابر با $\varepsilon\, \alpha(\varepsilon)$ می‌باشد. این نکته به قضیهٔ ذیل منتهی می‌شود که مشابه بخش اول و دوم قضایای ۸ ـ ۳ است جز آنکه تخمین $O(\varepsilon)$ با $O(\alpha(\varepsilon))$ جایگزین شده است.

قضیهٔ ۸ ـ ۴ *فرض کنید تابع $f(t,x,\varepsilon)$ پیوسته و کراندار و مشتقات جزئی آن نیز نسبت به (x,ε)، به ازای مقادیر $(t,x,\varepsilon) \in [0,\infty) \times D \times [0,\varepsilon_0]$ و با شرط $\varepsilon > 0$ تا مرتبهٔ دوم پیوسته و کراندار باشد. علاوه بر این فرض کنید مقدار تابع متوسط $f(t,x,0)$ روی $D \times [0,\infty)$ برابر با $f_{av}(x)$ باشد و تابع ژاکوبیِ $h(t,x) = f(t,x,0) - f_{av}(x)$ نیز دارای مقدار متوسط صفر و همان تابع همگراییِ مربوط به f باشد. در این صورت اگر $x(t,\varepsilon)$ و $x_{av}(t,\varepsilon)$ بترتیب پاسخهای معادلات (۸ ـ ۳۲) و (۸ ـ ۴۱) و $\alpha(0)$ نیز تابعی متعلق به کلاس k باشد که در تخمینهای (۸ ـ ۳۷) و (۸ ـ ۳۸) ظاهر می‌شود، آنگاه:*

- *اگر داشته باشیم: $\forall t \in [0, b/\varepsilon]\, x_{av}(t,\varepsilon) \in D$ و:*

$$\left\| x(0,\varepsilon) - x_{av}(0,\varepsilon) \right\| = O(\alpha(\varepsilon))$$

آنگاه:

$$\|x(t,\varepsilon)-x_{av}(t,\varepsilon)\| = O(\alpha(\varepsilon)) \qquad \text{روی } [\,0\,,\,b/\varepsilon\,]$$

● *اگر به ازای جمیع مقادیر* $[\,0\,,\varepsilon_0\,]\times(0\,,\infty)$ $(t,\varepsilon)\in$ *داشته باشیم:* $f(t,0,\varepsilon)$ *و مبدأ سیستم متوسط (۸ ـ ۴۱) نیز پایدارنمایی باشد، آنگاه ثابتهای مثبت* ε^* *و* ρ *چنان وجود دارند که برای تمامی مقادیر* $0<\varepsilon<\varepsilon^*$، *مبدأ سیستم اصلی (۸ ـ ۳۲) پایدارنمایی باشد و به ازای جمیع مقادیر* $\|x_{av}(0\,,\varepsilon)\|<\rho$، *تخمین* $O(\alpha(\varepsilon))$ *مربوط به خطای تقریب نیز برای همهٔ مقادیر* $t\in[\,0\,,\infty)$ *برقرار باشد.* ◇

برهان: پیوست آ ـ ۱۳.

مثال ۸ ـ ۱۳ سیستم خطی ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = \varepsilon A(t)x\,, \qquad \varepsilon>0$$

فرض کنید $A(t)$ و مشتقاتش تا مرتبهٔ دوم پیوسته و کراندار باشد؛ علاوه بر این فرض کنید $A(t)$ براساس تعریف ۸ ـ ۲ دارای مقدار متوسط زیر باشد:

$$A_{av} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_t^{t+T} A(\tau)\,d\tau$$

در این صورت سیستم متوسط به شکل $\dot{x}=A_{av}x$ بیان می‌گردد. با فرض اینکه A_{av} هرویتز باشد، از قضیهٔ ۸ ـ ۴ نتیجه می‌شود مبدأ سیستم خطی و متغیر با زمان اصلی، به ازای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک ε، پایدار نمایی است. علاوه بر این ماتریس $A(t)=A_{tr}(t)+A_{ss}(t)$ را به عنوان مجموعه مؤلفه‌های حالت گذرا $\big(A_{tr}(t)\big)$ و مؤلفه‌های حالت مانا $\big(A_{ss}(t)\big)$ در نظر می‌گیریم؛ درایه‌های مؤلفهٔ حالت گذرا بسرعت و به طور نمایی به صفر می‌رسد یعنی:

$$\|A_{tr}(t)\| \le k_1 \exp(-\alpha t), \quad k_1>0\,,\alpha>0$$

در صورتی که درایه‌های مؤلفهٔ حالت مانا به شکل مجموع محدودی از سینوسهای با فرکانس مختلف بیان می‌شود. مقدار متوسط مؤلفهٔ حالت گذرا صفر است زیرا:

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\|A_{tr}(\tau)\|\,d\tau \le \frac{1}{T}\int_t^{t+T} k_1 e^{-\alpha\tau}\,d\tau = \frac{k_1 e^{-\alpha t}}{\alpha T}[\,1-e^{-\alpha T}] \le \frac{k_2}{T+1}$$

با یادآوری حالت اولِ مثال ۸ ـ ۱۲، درمی‌یابیم $A(t)$ دارای متوسطی با تابع همگرایی $\sigma(T)=1/(T+1)$ می‌باشد؛ بنابراین تابع کلاس $\mathcal{K}$ی مربوط به قضیهٔ ۸ ـ ۴ برابر است با: $\alpha(\eta)=k\eta$. فرض کنید $x(t,\varepsilon)$ و $x_{av}(t,\varepsilon)$ بترتیب پاسخهای سیستم اصلی و سیستم متوسط باشد که از شرایط اولیهٔ یکسانی آغاز شده است. در این صورت طبق قضیهٔ ۸ ـ ۴ داریم:

$$\|x(t,\varepsilon)-x_{av}(t,\varepsilon)\| = O(\varepsilon)\,, \quad \forall t\ge 0 \qquad \Delta$$

۸ـ۶ تمرینها

تمرین ۸ـ۱ با استفاده از قضیهٔ ۲ـ۵، نامساوی (۸ـ۴) را تحقیق کنید.

تمرین ۸ـ۲ اگر $\delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ باشد آیا از مرتبهٔ $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$ است؟ آیا از مرتبهٔ $O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right)$ است؟

تمرین ۸ـ۳ اگر $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^{1/n}$ باشد (که $n > 1$ عدد صحیح مثبتی است)، آیا عدد صحیح مثبت N وجود دارد که به ازای آن $\delta(\varepsilon) = O(\varepsilon^N)$ برقرار باشد؟

تمرین ۸ـ۴ مسألهٔ مقدار اولیهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = -(0/2 + \varepsilon)x_1 + \frac{\pi}{4} - tan^{-1}x_1 + \varepsilon\, tan^{-1}x_2, \quad x_1(0) = \eta_1$$

$$\dot{x}_2 = -(0/2 + \varepsilon)x_2 + \frac{\pi}{4} - tan^{-1}x_2 + \varepsilon\, tan^{-1}x_1, \quad x_2(0) = \eta_2$$

(الف) تقریبی از مرتبهٔ $O(\varepsilon)$ برای مسأله بیابید.

(ب) تقریبی از مرتبهٔ $O(\varepsilon^2)$ برای مسأله بیابید.

(ج) اعتبار تقریب را بر بازهٔ نامحدود زمانی بررسی کنید.

(د) با استفاده از برنامهٔ کامپیوتری، پاسخ دقیق، تقریب $O(\varepsilon)$ و تقریب $O(\varepsilon^2)$ را برای مقادیر $\varepsilon = 0/1$، $\eta_1 = 0/5$ و $\eta_2 = 1/5$ بر بازهٔ زمانی $[3\ ,\ 0]$ بیابید. در مورد صحت تقریب توضیح دهید.

راهنمایی: در بندهای (الف) و (ب) کافی است معادلات معرّف تقریب را ارائه کنید و لازم نیست شکل بستهٔ تحلیلی عبارتهای تقریب را بیابید.

تمرین ۸ـ۵ تمرین ۸ـ۴ را برای سیستم ذیل تکرار کنید:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + \varepsilon x_1^3$$

برای بند (د) مقادیر: $\varepsilon = 0/1$، $\eta_1 = 1/0$ و $\eta_2 = 0/0$ و بازهٔ زمانی $[5\ ,\ 0]$ را در نظر بگیرید.

تمرین ۸ـ۶ تمرین ۸ـ۴ را برای سیستم زیر تکرار کنید:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = \varepsilon x_1 - x_2 - \frac{1}{3}x_2^3$$

برای بند (د) مقادیر: $\varepsilon = 0/2$، $\eta_1 = 1/0$ و $\eta_2 = 0/0$ و بازهٔ زمانی $[4\ ,\ 0]$ را در نظر بگیرید.

تمرین ۸ـ۷ ([۱۵۰]) تمرین ۸ـ۴ را برای سیستم ذیل تکرار نمایید:

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_1^2 + \varepsilon x_1 x_2$$

$$\dot{x}_2 = 2x_2 - x_2^2 - \varepsilon x_1 x_2$$

برای بند (د) مقادیر: $\varepsilon = 0/2$، $\eta_1 = 0/5$ و $\eta_2 = 1/0$ و بازهٔ زمانی $[4\ ,\ 0]$ را در نظر بگیرید.

تمرین ۸ـ۸ تمرین ۸ـ۴ را برای سیستم زیر تکرار کنید:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2(1 + x_1) + \varepsilon(1 + x_1)^2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1(x_1 + 1)$$

برای بند (د) مقادیر: $\varepsilon = -0/1$، $\eta_1 = -1$ و $\eta_2 = 2$ را در نظر بگیرید. محاسبات را برای مقادیر $\varepsilon = -0/05$ و $\varepsilon = -0/2$ نیز تکرار نمایید و در مورد صحت تقریب توضیح دهید.

تمرین ۸ـ۹ مسألهٔ مقدار اولیهٔ ذیل مفروض است:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + \varepsilon x_2, \quad x_1(0) = \eta$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - \varepsilon x_1, \quad x_2(0) = \eta$$

تقریبی از مرتبهٔ $O(\varepsilon)$ برای مسأله بیابید. پاسخهای دقیق و تقریبی را برای مقدار $\varepsilon = 0/1$ و به ازای شروط اولیهٔ ذیل محاسبه کنید: (۱) $\eta = 1$، (۲) $\eta = 10$. در مورد صحت تقریب توضیح دهید، موارد اختلاف با قضیهٔ ۸ـ۱ را نیز شرح دهید.

تمرین ۸ـ۱۰ ([۵۹]) با استفاده از روش متوسط‌گیری، هر یک از سیستمهای عددی زیر را

بررسی کنید:

(۱) $\dot{x} = \varepsilon (x - x^{۲}) \sin^{۲} t$ (۲) $\dot{x} = \varepsilon (x \cos^{۲} t - \frac{۱}{۲} x^{۲})$

(۳) $\dot{x} = \varepsilon (-x + \cos^{۲} t)$ (۴) $\dot{x} = -\varepsilon x \cos t$

تمرین ۸ ـ ۱۱ در هر یک از سیستمهای ذیل نشان دهید اگر $\varepsilon > ۰$ به اندازهٔ کافی کوچک باشد، مبدأ پایدار نمایی است.

(۱)
$$\begin{aligned} \dot{x}_{۱} &= \varepsilon x_{۲} \\ \dot{x}_{۲} &= -\varepsilon (۱ + ۲\sin t) x_{۲} - \varepsilon (۱ + \cos t) \sin x_{۱} \end{aligned}$$

(۲)
$$\begin{aligned} \dot{x}_{۱} &= \varepsilon [(-۱ + ۱/۵ \cos^{۲} t) x_{۱} + (۱ - ۱/۵ \sin t \cos t) x_{۲}] \\ \dot{x}_{۲} &= \varepsilon [(-۱ - ۱/۵ \sin t \cos t) x_{۱} + (-۱ + ۱/۵ \sin^{۲} t) x_{۲}] \end{aligned}$$

(۳) $\dot{x} = \varepsilon (-x \sin^{۲} t + x^{۲} \sin t + x e^{-t})$, $\varepsilon > ۰$

تمرین ۸ ـ ۱۲ سیستم $\dot{y} = Ay + \varepsilon g(t, y, \varepsilon)$, $\varepsilon > ۰$ را در نظر بگیرید و فرض کنید ماتریس $n \times n$ بُعدی A فقط دارای مقادیر ویژهٔ ساده‌ای بر محور موهومی است.

(الف) نشان دهید به ازای جمیع مقادیر $t \geq ۰$، $\exp(At)$ و $\exp(-At)$ کراندارند.

(ب) ثابت کنید تغییر متغیر $y = \exp(At) x$، سیستم را به شکل $\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon)$ درمی‌آورد و به کمک آن f را برحسب جملاتی از g و $\exp(At)$ بیان کنید.

تمرین ۸ ـ ۱۳ [۱۵۰] معادلهٔ ماتیو[1]: $\ddot{y} + (۱ + ۲\varepsilon \cos ۲t) y = ۰$, $\varepsilon > ۰$ را به کمک روش متوسط‌گیری بررسی کنید.

راهنمایی: از تمرین ۸ ـ ۱۲ استفاده نمایید.

تمرین ۸ ـ ۱۴ ([۱۵۰]) به کمک روش متوسط‌گیری، معادلهٔ $\ddot{y} + y = ۸\varepsilon (\dot{y})^{۲} \cos t$ را بررسی کنید.

راهنمایی: از تمرین ۸ ـ ۱۲ استفاده نمایید.

1. Mathieu's equation

تمرین ۸ ـ ۱۵ با اعمال روش متوسط‌گیری، وجود چرخهٔ حدّی را در هر یک از سیستمهای مرتبهٔ دوم ذیل بررسی کنید. چنانچه چرخهٔ حدّی وجود داشته باشد، مکان و دورهٔ تناوب نوسان آن را در صفحهٔ حالت تخمین بزنید و مشخص نمایید آیا چرخهٔ حدّی پایدار است یا ناپایدار؟

(۱) $\ddot{y} + y = -\varepsilon \dot{y} (۱ - y^{۲})$ (۲) $\ddot{y} + y = \varepsilon \dot{y} (۱ - y^{۲}) - \varepsilon y^{۳}$

(۳) $\ddot{y} + y = -\varepsilon \left(۱ - \frac{۳\pi}{۴} |y|\right) \dot{y}$ (۴) $\ddot{y} + y = -\varepsilon \left(۱ - \frac{۳\pi}{۴} |\dot{y}|\right) \dot{y}$

(۵) $\ddot{y} + y = -\varepsilon (\dot{y} - y^{۳})$ (۶) $\ddot{y} + y = \varepsilon \dot{y} (۱ - y^{۲} - \dot{y}^{۲})$

تمرین ۸ ـ ۱۶ معادلهٔ رایلی[1] مفروض است:

$$m \frac{d^{۲} u}{dt^{۲}} + ku = \lambda \left[۱ - \alpha \left(\frac{du}{dt} \right)^{۲} \right] \frac{du}{dt}$$

که m، k، λ و α ثابتهای مثبتی هستند.

(الف) به کمک متغیرهای بدون بُعد: $y = u/u^{*}$، $\tau = t/t^{*}$ و $\varepsilon = \lambda/\lambda^{*}$ و با فرض: $\alpha k = m/۳ (u^{*})^{۲}$، $t^{*} = \sqrt{m/k}$ و $\lambda^{*} = \sqrt{km}$، نشان دهید می‌توان معادله را به شکل ذیل نرمالیزه کرد:

$$\ddot{y} + y = \varepsilon (\dot{y} - \frac{۱}{۳} \dot{y}^{۳})$$

که $\dot{y}$ نشاندهندهٔ مشتق y نسبت به τ است.

(ب) با اعمال روش متوسط‌گیری نشان دهید معادلهٔ رایلیِ نرمالیزه، دارای یک چرخهٔ حدّی پایدار است. مکان چرخهٔ حدّی را در صفحهٔ $(y, \dot{y})$ تخمین بزنید.

(ج) با استفاده از الگوریتمی عددی، پیکرهٔ فاز معادلهٔ رایلیِ نرمالیزه را در صفحهٔ $(y, \dot{y})$ و به ازای:

(۱) $\varepsilon = ۱$, (۲) $\varepsilon = ۰/۱$, (۳) $\varepsilon = ۰/۰۱$

به دست آورید و نتایج را با بند (ب) مقایسه کنید.

تمرین ۸ ـ ۱۷ معادلهٔ دافینگ[2] را در نظر بگیرید:

1. Rayleigh's equation 2. Duffing's equation

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + ka^{۲}y^{۳} = A\cos\omega t$$

که A، a، c، k، m و ω ثابتهای مثبتی هستند.

(الف) با فرض $x_{۱} = y$، $x_{۲} = \dot{y}$، $\tau = \omega t$ و $\varepsilon = ۱/\omega$، نشان دهید می‌توان این معادله را به شکل $dx/d\tau = \varepsilon f(\tau, x, \varepsilon)$ نمایش داد.

(ب) ثابت کنید اگر ω به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، سیستم دارای پاسخی متناوب و پایدار نمایی است. فرکانس نوسان و مکان دور متناوب را در صفحهٔ فاز تخمین بزنید.

تمرین ۸ ـ ۱۸ عبارت (۸ ـ ۳۷) را تحقیق کنید.

راهنمایی: از معادلهٔ (۸ ـ ۳۶) آغاز کنید. برای بیشینه کردن $\sigma(t)$ از این نکته استفاده کنید که اگر $t \le ۱/\sqrt{\eta}$ باشد، $\sigma(t)$ کراندار است. اگر $t \ge ۱/\sqrt{\eta}$ باشد از نامساوی $\sigma(t) \le \sigma(۱/\sqrt{\eta})$ استفاده نمایید.

تمرین ۸ ـ ۱۹ به کمک روش متوسط‌گیری عمومی سیستم زیر را بررسی کنید:

$$\dot{x} = \varepsilon\,(\sin^{۲}t + \sin ۱/۵t + e^{-t})x$$

تمرین ۸ ـ ۲۰ ([۱۵۱]) خروجیِ سیستمی تک ورودی ـ تک خروجی، خطی و نامتغیر با زمان از مرتبهٔ n با معادلهٔ $y(t) = \theta^{T} w(t)$ نشان داده می‌شود که θ برداری $(۲n + ۱)$ بُعدی از پارامترهای ثابت و $w(t)$ نیز سیگنالی کمکی است که می‌توان بدون دانستن θ آن را از ترکیب ورودی و خروجی سیستم به دست آورد. فرض کنید بردار θ مجهول است؛ مقدار این بردار را با θ^{*} نشان می‌دهیم. در آزمایشهای شناسایی[1]، پارامتر $\theta(t)$ به کمک قانون تطبیقی بـه شکـل: $\dot{\theta} = -\varepsilon\, e(t)\, w(t)$ بـهنگام[2] مـی‌شود کـه $e(t) = \left[\theta(t) - \theta^{*}\right]^{T} w(t)$ خـطای بـین خروجی واقعی سیستم و خروجی تخمینی ناشی از $\theta(t)$ است. علاوه بر این فرض کنید تابع $\phi(t) = \theta(t - \theta^{*})$ نشاندهندهٔ خطای پارامتر[3] باشد.

(الف) نشان دهید: $\dot{\phi} = \varepsilon A(t)\phi$ که: $A(t) = -w(t)w^{T}(t)$.

(ب) به کمک روش متوسط‌گیری (عمومی)، شرایطی را بر $w(t)$ تحمیل کنید که تضمین نماید برای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک ε می‌توان نوشت: $t \longrightarrow \infty \Rightarrow \theta(t) \longrightarrow \theta^{*}$.

1. Identification experiment 2. Update 3. Parameter error

۹

آشفتگیهای منفرد

در حالی که روش آشفتگیِ بخش ۸ ـ ۱ به معادلات دیفرانسیلی اعمال می‌شود که به طور هموار به پارامتر کوچک ε وابسته‌اند، در این فصل با مسألهٔ آشفتگی پیچیده‌تری مواجه هستیم که با وابستگی ناپیوستهٔ سیستم به پارامتر آشفتگیِ ε شناخته می‌شود. بدین منظور مدل «مرسوم» استاندارد آشفتگی منفرد را به شکل زیر مطالعه خواهیم کرد:

$$\dot{x} = f(t, x, z, \varepsilon)$$

$$\varepsilon\dot{z} = g(t, x, z, \varepsilon)$$

که انتخاب $\varepsilon = ۰$ موجب بروز تغییری ناگهانی و بـنیادی در ویـژگیهای دیـنامیکی سـیستم می‌شود، به‌طوری‌که معادلهٔ دیفرانسیل $\varepsilon\dot{z} = g$ به‌معادلهٔ جبری یا غیرجبری[1] ذیل تبدیل می‌گردد:

$$۰ = g(t, x, z, ۰)$$

نظریهٔ مورد بحث در این فصل بر این پایه استوار است که می‌توان به کمک تحلیل سیستم در مقیاسهای زمانی مختلف، ناپیوستگیهای ناشی از آشفتگیهای منفرد را، که در پاسخهای معادله رخ می‌دهد، مورد بررسی قرار داد. این رویکردِ «چند مقیاس زمانی» اساسی‌ترین ویژگی روشهای آشفتگی منفرد است.

در بخش ۹ ـ ۱ مدل استاندارد آشفتگی منفرد را تعریف و به کمک چند مثال، برخی از منابع فیزیکی پدید آورندهٔ آن را معرفی می‌کنیم. در بخش ۹ ـ ۲ به بررسی ویژگی دو مقیاس زمانی[2] خواهیم پرداخت و نتیجهٔ تقریبی مسیرهای حالت را ـ که مبتنی بر انفکاک مدل به دو مدل تقلیل

1. Transcendental equation 2. Two-time-scale

یافته[1] (آرام) و مدل لایهٔ مرزی[2] (تند) است ـ ارائه می‌کنیم. مفاهیم شهودی پشت تجزیهٔ مقیاس زمانی[3]، از دیدگاه هندسی شفافتر خواهد شد که این موضوع در بخش ۹ ـ ۳ بررسی شده است. تجزیهٔ مقیاس زمانیِ بخش ۹ ـ ۲ در بخش ۹ ـ ۴ به کار گرفته شده تا به کمک آن پایداری نقاط تعادل از طریق روش لیاپانوف تحلیل گردد. بخش ۹ ـ ۵، نتایج تقریب مسیرهای حالت مربوط به بخش ۹ ـ ۲ را به بازه‌های نامحدود زمانی تعمیم می‌دهد. سرانجام به کمک چند مثال نشان خواهیم داد چگونه می‌توان به کمک نتایج بخشهای ۹ ـ ۴ و ۹ ـ ۵ به تحلیل قوامِ پایداری در مسائل آشفتگی منفرد پرداخت.

۹ ـ ۱ مدل استاندارد آشفتگی منفرد

مدل استاندارد آشفتگی منفرد مربوط به سیستمی دینامیکی، مدل فضای حالتی است که در آن مشتق برخی از حالتها در پارامتر مثبت کوچکی به نام ε ضرب شده است؛ یعنی:

$$\dot{x} = f(t, x, z, \varepsilon), \quad x \in R^n \tag{۹ ـ ۱}$$

$$\varepsilon \dot{z} = g(t, x, z, \varepsilon), \quad z \in R^m \tag{۹ ـ ۲}$$

فرض بر این است که توابع f و g به ازای مقادیر $(t, x, z, \varepsilon) \in [0, t_1] \times D_1 \times D_2 \times [0, \varepsilon_0]$ نسبت به آرگومانهایشان پیوسته ـ مشتق‌پذیرند که $D_1 \subset R^n$ و $D_2 \subset R^m$ مجموعه‌هایی همبند و باز هستند. اگر در معادلات (۹ ـ ۱) و (۹ ـ ۲) مقدار ε را برابر با صفر قرار دهیم، ابعاد معادلهٔ حالت از $n+m$ به n تقلیل می‌یابد زیرا معادلهٔ دیفرانسیل (۹ ـ ۲) به معادلهٔ ذیل تبدیل می‌شود:

$$0 = g(t, x, z, 0) \tag{۹ ـ ۳}$$

گوییم مدل (۹ ـ ۱) ـ (۹ ـ ۲) به صورت *استاندارد*[4] است اگر و تنها اگر معادلهٔ (۹ ـ ۳) به ازای هر $(t, x) \in [0, t_1] \times D_1$ دارای $k \geq 1$ ریشهٔ حقیقی مجزّا باشد؛ یعنی:

$$z = h_i(t, x), \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{۹ ـ ۴}$$

این فرض مارا مطمئن می‌سازد که هر مدل خوش تعریف و nبُعدیِ تقلیل یافته، معادل با یکی از

1. Reduced model 2. Boundary - layer model 3. Time-scale decomposition
4. Standard form

ریشه‌های (۹ ـ ۳) است. برای دستیابی به مدل تقلیل یافته، با جایگزینی (۹ ـ ۴) در (۹ ـ ۱) و به ازای $\varepsilon = 0$ داریم:

$$\dot{x} = f(t, x, h(t, x), 0) \tag{۹ ـ ۵}$$

در اینجا از ذکر زیرنویس i برای h صرف‌نظر شده است و از محتوای متن می‌توان تشخیص داد راجع به کدام ریشهٔ معادلهٔ (۹ ـ ۴) بحث می‌کنیم. گاهی این مدل را *مدل حالت شبه مانا*[1] می‌نامند زیرا z (که سرعتش، یعنی: $\dot{z} = g/\varepsilon$، با شرط کوچک بودن ε و مخالف صفر بودن g، ممکن است بسیار بزرگ شود) می‌تواند سریعاً به سمت یکی از ریشه‌های معادلهٔ (۹ ـ ۳) (که نقطهٔ تعادل معادلهٔ (۹ ـ ۲) است) همگرا گردد. ویژگی دو مقیاس زمانیِ معادلات (۹ ـ ۱) ـ (۹ ـ ۲) را در بخش بعدی مورد بحث قرار خواهیم داد. معمولاً مدل (۹ ـ ۵) به نام *مدل آرام*[2] شناخته می‌شود.

مدلسازی سیستمهای فیزیکی به شکل آشفتهٔ منفرد چندان ساده نیست زیرا همیشه واضح نیست کدام پارامتر را باید برگزید تا بتوان آن را کوچک در نظر گرفت؛ لیکن خوشبختانه در بسیاری از موارد، دانش ما نسبت به فرایندهای فیزیکی و اجزای سیستم، راهکار صحیح را نمایان می‌سازد*. سه مثال آتی، سه روش «نمونه‌ای» مختلف را برای انتخاب ε نشان می‌دهد. در مثال اول، ε به عنوان ثابت زمانی کوچک انتخاب می‌شود. این حالت، معمولترین منبع مدلهای آشفتهٔ منفرد است و به لحاظ تاریخی توجه بسیاری را به سمت آشفتگیهای منفرد جلب کرد. ثابتهای زمانی، جرم و خازنهای کوچک و نیز سایر پارامترهای «مزاحم»[3] (که مرتبهٔ مدل دینامیکی را افزایش می‌دهد) در بسیاری از مدلهای سیستمهای فیزیکی وجود دارند لیکن اغلب، با توجه به ساده‌سازی مدل، از این پارامترهای مزاحم صرف‌نظر می‌شود تا مرتبهٔ مدل کاهش یابد. آشفتگیهای منفرد با برحق دانستن این ساده‌سازیهای تخصصی،افزاری را به دست می‌دهد که به کمک آن می‌توان مدلهای ساده شده را بهبود بخشید. در مثال دوم، پارامتر ε، معکوس پارامتری با بهرهٔ زیاد در سیستم پسخور می‌باشد. این مثال یکی از منابع مهم مدلهای آشفتهٔ

* می‌توان اطلاعات بیشتر مربوط به مدلسازی فیزیکی سیستمها به شکل آشفتهٔ منفرد را در [۹۵، فصل اول]، [۹۴، فصل چهارم] و [۳۲] یافت.

1. Quasi-steady-state model 2. Slow model
3. Parasitic Parameters

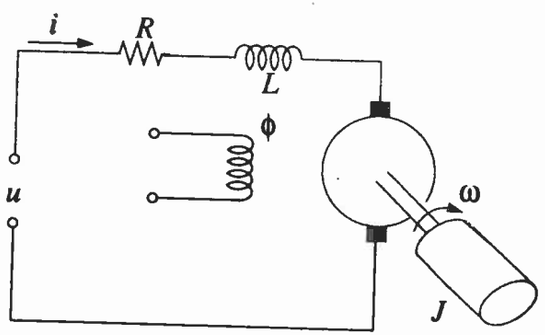
منفرد را نمایش می‌دهد. استفاده از پارامترهای با بهرهٔ زیاد (و یا به طور دقیقتر، پارامترهایی که به طور مجانبی به سمت بینهایت رانده می‌شوند)، در طراحی سیستمهای کنترل پسخور بسیار مرسوم است. یکی از روشهای نمونه‌ای تحلیل و طراحی سیستمهای پسخور با بهرهٔ زیاد[1]، مدلسازی آنها به شکل آشفتهٔ منفرد است. در مثال سوم، پارامتر ε مقاومتی مزاحم در مداری الکتریکی است؛ گرچه چشمپوشی از این مقاومت، مرتبهٔ مدل را کاهش می‌دهد اما می‌توان این مهم را به روشی کاملاً متفاوت با روش چشمپوشی از ثابت زمانیِ مزاحم، محقق نمود. مدلسازی سیستم به شکل استاندارد آشفتهٔ منفرد، متضمن انتخاب دقیق متغیرهای حالت است.

مثال ۹ ـ ۱ می‌توان موتور DC کنترل شده با آرمیچر[2] (شکل ۹ ـ ۱) را با معادلات حالت مرتبهٔ دوم زیر نشان داد:

$$J\frac{d\omega}{dt} = ki$$

$$L\frac{di}{dt} = -k\omega - Ri + u$$

که i، u، R و L بترتیب جریان، ولتاژ، مقاومت و اندوکتانس آرمیچر هستند، J گشتاور لختی، ω سرعت زاویه‌ای و ki و $k\omega$ نیز بترتیب گشتاور $e.m.f$ برگشتی (نیروی الکتروموتوری) ناشی از شار تحریک ثابت ϕ می‌باشد.



شکل ۹ ـ ۱ موتور DC کنترل شده با آرمیچر

1. High-gain feedback system
2. Armature-controlled DC motor

نخستین معادلهٔ حالت، معادلهٔ گشتاور مکانیکی و دومی، معادلهٔ مدار الکتریکی آرمیچر در حالت گذراست. مقدار L، به طور نمونه‌ای «کوچک» است و نقش پارامتر ε را بازی می‌کند. این بدان معناست که با شرط $\omega = x$ و $i = z$ و با فرض $R \neq 0$، مدل موتور به شکل استاندارد معادلهٔ (۹ ـ ۱) ـ (۹ ـ ۲) درمی‌آید. با چشمپوشی از L و حل معادلهٔ:

$$0 = -k\omega - Ri + u$$

نتیجه می‌شود:

$$i = \frac{u - k\omega}{R}$$

که تنها ریشهٔ معادله است، با جایگزینی این مقدار در معادلهٔ گشتاور داریم:

$$J\dot{\omega} = -\frac{k^2}{R}\omega + \frac{k}{R}u$$

این معادله، مدل مرسوم مرتبهٔ اول موتور DC است. همچنانکه در فصل هفتم اشاره شد، در فرمولبندی مدلهای آشفتگی، بهتر است پارامتر آشفتگی (ε) را به عنوان نسبت بدون بُعد دو کمیّت فیزیکی در نظر بگیریم؛ بدین منظور متغیرهای بدون بُعد ذیل را تعریف می‌کنیم:

$$\omega_r = \frac{\omega}{\Omega}; \quad i_r = \frac{iR}{k\Omega}; \quad u_r = \frac{u}{k\Omega}$$

لذا می‌توان معادلهٔ حالت را به شکل زیر بازنوشت:

$$T_m\frac{d\omega_r}{dt} = i_r$$

$$T_e\frac{di_r}{dt} = -\omega_r - i_r + u_r$$

که $T_m = JR/k^2$ ثابت زمانی مکانیکی و $T_e = L/R$ ثابت زمانی الکتریکی است. چون $T_m >> T_e$ است، مقدار T_m رابه عنوان واحد زمان در نظر می‌گیریم، بدین ترتیب متغیر زمانِ بدون بُعد را به شکل $t_r = t/T_m$ تعریف کرده، معادلهٔ حالت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{d\omega_r}{dt_r} = i_r$$

$$\frac{T_e}{T_m}\frac{di_r}{dt_r} = -\omega_r - i_r + u_r$$

این مقیاس‌بندی همراه با پارامتر بدون بُعد و معنادارِ فیزیکی زیر، مدل را به شکل استاندارد درمی‌آورد:

$$\varepsilon = \frac{T_e}{T_m} = \frac{Lk^2}{JR^2}$$ Δ

مثال ۹ ـ ۲ سیستم کنترل پسخور شکل ۹ ـ ۲ را در نظر بگیرید (شکل ۳ ـ ۱ را ملاحظه کنید). حلقهٔ درونی، نشاندهندهٔ کنترل محرّک همراه با پسخور با بهرهٔ زیاد است. پارامتر با بهرهٔ زیاد، ثابت انتگرالگیر k_1 است. دستگاه موردنظر، سیستمی تک‌ورودی ـ تک خروجی از مرتبهٔ n است که با مدل فضای حالت $\{A, B, C\}$ نمایش داده می‌شود. غیرخطی گری $\psi(\cdot)$ در ربع اول و ربع سوم قرار دارد و در شروط زیر صدق می‌کند:

$$\psi(0) = 0 \quad \text{و} \quad y\psi(y) > 0 \quad , \quad \forall y \neq 0$$

معادلهٔ حالت سیستم حلقه ـ بسته به شکل زیر بیان می‌گردد:

$$\dot{x}_p = Ax_p + Bu_p$$

$$\frac{1}{k_1}\dot{u}_p = \psi(u - u_p - k_2 C x_p)$$

اگر $\varepsilon = 1/k_1$، $x_p = x$ و $u_p = z$ باشد، مدل به شکل معادلهٔ (۹ ـ ۱) ـ (۹ ـ ۲) در می‌آید؛ اگر $\varepsilon = 0$ (یا به طور معادل $k_1 = \infty$) باشد، از حل معادلهٔ:

$$\psi(u - u_p - k_2 C x_p) = 0$$

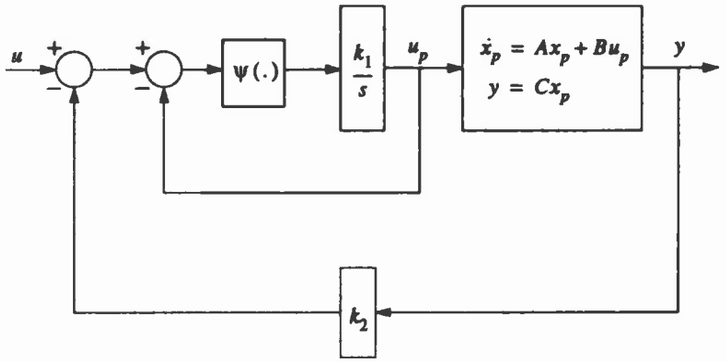
داریم:

$$u_p = u - k_2 C x_p$$

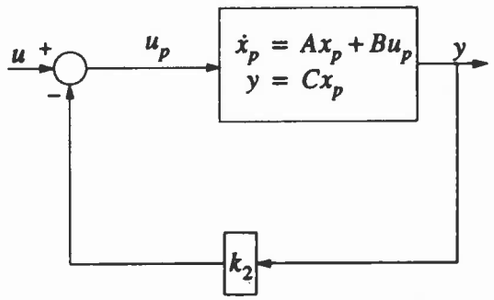
که این ریشه منحصر به فرد است زیرا $\psi(\cdot)$ فقط در مبدأ برابر با صفر می‌باشد. مدل تقلیل یافتهٔ حاصل برابر است با:

$$\dot{x}_p = (A - Bk_2 C)x_p + Bu$$

که با نمودار بلوکی ساده شدهٔ شکل ۹ ـ ۳ نشان داده می‌شود، در این مدل ملاحظه می‌گردد همهٔ حلقهٔ درونیِ شکل ۹ ـ ۲ با خطی مستقیم مدل شده است. Δ



شکل ۹ ـ ۲ کنترل محرّک همراه با پسخور با بهرهٔ زیاد



شکل ۹ ـ ۳ نمودار بلوکی ساده شدهٔ شکل ۹ ـ ۲

مثال ۹ ـ ۳ دیگر بار مدار الکتریکی مثال ۸ ـ ۴ را در نظر بگیرید (شکل ۸ ـ ۳). معادلات دیفرانسیل ولتاژ دوسر خازنها برابر است با:

$$C\dot{v}_1 = \frac{1}{R}(E - v_1) - \psi(v_1) - \frac{1}{R_c}(v_1 - v_2)$$

$$C\dot{v}_2 = \frac{1}{R}(E - v_2) - \psi(v_2) - \frac{1}{R_c}(v_2 - v_1)$$

در مثال ۸ ـ ۴، این مدار را برای مقادیر «بزرگ» مقاومت R_c تحلیل کردیم که در حالت ایدئال با صفر در نظر گرفتن $1/R_c$ به صورت مدار باز درمی‌آید. این بار می‌خواهیم مدار را برای مقادیر «کوچک» R_c بررسی نماییم. انتخاب $R_c = 0$، به این معناست که مقاومت با مدار اتصال کوتاه جانشین شده و در نتیجه دو خازن با هم موازی شده‌اند؛ لذا در یک مدل خوش‌تعریف برای مدار ساده شده، می‌توان دو خازن موازی را با یک خازن معادل جایگزین نمود و در نتیجه مدار حاصل از مرتبهٔ اول خواهد بود. برای نمایش این مدل تقلیل یافته به شکل آشفتگی منفرد، ابتدا مقدار ε را صفر در نظر گرفته، معادلهٔ حالت را به شکل زیر بازمی‌نویسیم:

$$\varepsilon \dot{v}_1 = \frac{\varepsilon}{CR}(E - v_1) - \frac{\varepsilon}{C}\psi(v_1) - \frac{1}{C}(v_1 - v_2)$$
$$\varepsilon \dot{v}_2 = \frac{\varepsilon}{CR}(E - v_2) - \frac{\varepsilon}{C}\psi(v_2) - \frac{1}{C}(v_2 - v_1)$$

اگر این مدل به شکل معادلات (۹ ـ ۱) ـ (۹ ـ ۲) باشد، می‌توان هر دو متغیر v_1 و v_2 را به عنوان متغیرهای بردار z نمایش داد که در این صورت معادلهٔ (۹ ـ ۳) نیز به شکل زیر درمی‌آید:

$$v_1 - v_2 = 0$$

اما ریشه‌های این معادله مجزّا نیستند و لذا موجب عدول از این فرض اساسی می‌شود که باید ریشه‌های معادلهٔ (۹ ـ ۳) مجزّا از هم باشند، بنابراین با در نظر گرفتن v_1 و v_2 به عنوان متغیرهای بردار z، مدل به شکل استاندارد درنخواهد آمد و باید در انتخاب متغیرهای حالت تجدیدنظر کنیم، اگر داشته باشیم*:

$$x = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \quad ; \quad z = \frac{1}{2}(v_1 - v_2)$$

آنگاه معادلهٔ حالت برای این متغیرهای جدید به شکل ذیل است:

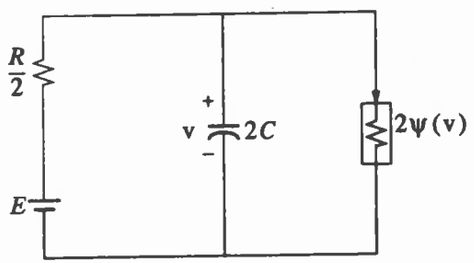
$$\dot{x} = \frac{1}{CR}(E - x) - \frac{1}{2C}[\psi(x + z) + \psi(x - z)]$$
$$\varepsilon \dot{z} = -\left(\frac{\varepsilon}{CR} + \frac{2}{C}\right) - \frac{\varepsilon}{2C}[\psi(x + z) - \psi(x - z)]$$

* انتخاب این متغیرهای حالت بر مبنای روند سیستماتیکی است که در [۳۲] آمده است.

بدین ترتیب $z = 0$ ریشهٔ یکتای معادلهٔ (۹ ـ ۳) است که به مدل تقلیل یافتهٔ زیر منجر می‌گردد:

$$\dot{x} = -\frac{1}{CR}(E - x) - \frac{1}{C}\psi(x)$$

می‌توان این مدل را با مدار ساده شدهٔ شکل ۹ ـ ۴ نمایش داد که در آن هر زوج شاخهٔ موازیِ یکسان، با یک شاخهٔ معادل جایگزین شده است.



شکل ۹ ـ ۴ مدار ساده شده در حالت $R_c = 0$

برای معرفی ε به شکل پارامتری بدون بُعد، x، z و ψ را به شکل زیر نرمالیزه می‌کنیم:

$$x_r = \frac{x}{E} \quad ; \quad z_r = \frac{z}{E} \quad ; \quad \psi_r(v) = \frac{R}{E}\psi(Ev)$$

علاوه بر این با نرمالیزه کردن متغیر زمان به شکل $t_r = t/CR$، به مدل آشفتگی منفرد ذیل دست می‌یابیم:

$$\frac{dx_r}{dt_r} = 1 - x_r - \frac{1}{2}[\psi_r(x_r + z_r) + \psi_r(x_r - z_r)]$$
$$\varepsilon \frac{dz_r}{dt_r} = -(\varepsilon + 2)z_r - \frac{\varepsilon}{2}[\psi_r(x_r + z_r) - \psi_r(x_r - z_r)]$$

که $\varepsilon = R_c/R$ پارامتری بدون بُعد است. Δ

۹ ـ ۲ ویژگیهای مقیاس زمانیِ مدل استاندارد

آشفتگیهای منفرد موجب بروز رفتاری با چند مقیاس زمانی در سیستمهای دینامیکی می‌شود که می‌توان ویژگیهای آن را با بررسی حالتهای گذرای آرام و تند در پاسخ سیستم نسبت به تحریک

خارجی مشخص نمود، به تعبیر دیگر می‌توان پاسخ آرام را با مدل تقلیل‌یافتهٔ (۹ ـ ۵) نمایش داد در این صورت اختلاف میان پاسخ سیستم تقلیل‌یافته و پاسخ مدل کاملِ (۹ ـ ۱) ـ(۹ ـ ۲) بیانگر حالت گذرای تند است. برای تفهیم این نکته، سعی می‌کنیم معادلهٔ حالت ذیل را حل نماییم:

$$\dot{x} = f(t, x, z, \varepsilon), \quad x(t_0) = \xi(\varepsilon) \tag{۹ ـ ۶}$$

$$\varepsilon \dot{z} = g(t, x, z, \varepsilon), \quad z(t_0) = \eta(\varepsilon) \tag{۹ ـ ۷}$$

که $\xi(\varepsilon)$ و $\eta(\varepsilon)$ به‌طور هموار به ε و $t_0 \in [0, t_1]$ وابسته‌اند. فرض کنید $x(t, \varepsilon)$ و $z(t, \varepsilon)$ بیانگر پاسخ مسأله کامل (۹ ـ ۶) ـ(۹ ـ ۷) باشد. اگر بخواهیم مسألهٔ متناظر با مدل تقلیل یافتهٔ (۹ ـ ۵) را تعریف کنیم، فقط می‌توانیم n شرط اولیه را مشخص سازیم زیرا مدل از مرتبهٔ n است. به طور طبیعی با حفظ حالت اولیه برای بردار x به مسألهٔ تقلیل یافتهٔ ذیل می‌رسیم:

$$\dot{x} = (t, x, h(t, x), 0), \quad x(t_0) = \xi_0 \triangleq \xi(0) \tag{۹ ـ ۸}$$

پاسخ این معادله را با $\bar{x}(t)$ نشان می‌دهیم. از آنجا که از متغیر z در مدل تقلیل یافته صرف‌نظر و با «حالت شبه مانا»ی $h(t, x)$ جانشین شده است، تنها اطلاعات مورد نیاز در مورد z، ناشی از حل معادلهٔ (۹ ـ ۸)، محاسبهٔ عبارت ذیل می‌باشد:

$$\bar{z}(t) \triangleq h(t, \bar{x}(t))$$

که نشاندهندهٔ رفتار حالت شبه مانای z با شرط $x = \bar{x}$ است. در مقایسه با متغیر اصلیِ z، که از لحظهٔ t_0 و از وضعیت از پیش تعریف شدهٔ $\eta(\varepsilon)$ آغاز می‌شود، حالت شبه مانای $\bar{z}$ نمی‌تواند از هر مقدار از قبل مشخص شده‌ای آغاز شود و ممکن است اختلاف زیادی میان مقدار اولیه‌اش، یعنی: $\bar{z}(t_0) = h(t_0, \xi_0)$ و حالت اولیهٔ از قبل تعیین شدهٔ $\eta(\varepsilon)$ وجود داشته باشد؛ بنابراین $\bar{z}(t)$ نمی‌تواند تقریب یکنواخت $z(t, \varepsilon)$ باشد و حداکثر انتظار این است که تخمین $z(t, \varepsilon) - \bar{z}(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ بر بازه‌ای که شامل t_0 نیست (یعنی: $\forall t \in [t_b, t_1], t_b > t_0$)، برقرار باشد. از سوی دیگر انتظار معقول این است که تخمین $x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t) = O(\varepsilon)$ به طور یکنواخت و به ازای جمیع مقادیر $t \in [t_0, t_1]$ برقرار باشد، زیرا می‌توان نوشت:

$$x(t_0, \varepsilon) - \bar{x}(t_0) = \xi(\varepsilon) - \xi(0) = O(\varepsilon)$$

چنانچه مقدار خطای $z(t, \varepsilon) - \bar{z}(t)$ بر بازهٔ $[t_b, t_1]$، واقعاً برابر با $O(\varepsilon)$ باشد، آنگاه منطقی است که متغیر z در طیّ بازهٔ زمانی اولیهٔ $[t_0, t_b]$ («لایهٔ مرزی»)، به سمت $\bar{z}$ میل کند؛ می‌دانیم سرعت z زیاد است (زیرا: $\dot{z} = g/\varepsilon$). در حقیقت با انتخاب $\varepsilon = 0$ در معادلهٔ (۹ ـ ۲) و با شرط $g \neq 0$، حالت گذرای z به شکل آنی درمی‌آید، البته با توجه به بررسیهای گذشته می‌دانیم مقدار z به سوی حالت شبه مانای $\bar{z}$ همگرا نمی‌شود مگر اینکه شروط پایداری خاصی برآورده شود.

معمول آن است که در تحلیل خود از تغییر متغیر ذیل استفاده کنیم:

$$y = z - h(t, x) \tag{۹ ـ ۹}$$

زیرا بدین ترتیب حالت شبه مانا به مبدأ انتقال می‌یابد؛ بر اساس متغیرهای جدید (x, y)، مسألهٔ کامل عبارت است از:

$$\dot{x} = f(t, x, y + h(t, x), \varepsilon), \quad x(t_0) = \xi(\varepsilon) \tag{۹ ـ ۱۰}$$

$$\varepsilon \dot{y} = g(t, x, y + h(t, x), \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial t}$$
$$- \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x} f(t, x, y + h(t, x), \varepsilon), \quad y(t_0) = \eta(\varepsilon) - h(t_0, \xi(\varepsilon)) \tag{۹ ـ ۱۱}$$

در این صورت $y = 0$، حالت شبه مانای معادلهٔ (۹ ـ ۱۱) خواهد بود که با جایگزینی در معادلهٔ (۹ ـ ۱۰)، مدل تقلیل یافتهٔ (۹ ـ ۸) را نتیجه می‌دهد. برای تحلیل معادلهٔ (۹ ـ ۱۱) باید به این نکته توجه کرد که اگر ε به سمت صفر و $\dot{y}$ به سمت بینهایت میل کند، آنگاه $\varepsilon \dot{y}$ می‌تواند مقدار محدودی داشته باشد. حال مقادیر ذیل را انتخاب می‌کنیم:

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau} \Longrightarrow \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}$$

و مقدار $\tau = 0$ را به عنوان مقدار اولیه در لحظهٔ $t = t_0$ برمی‌گزینیم؛ در این صورت متغیر جدید زمانی یعنی: $\tau = (t - t_0)/\varepsilon$ منبسط شده است، بدین معنا که اگر ε به سمت صفر میل کند، τ به سمت بینهایت میل خواهد کرد (حتی اگر t مقدار کمی ـ مستقل از ε ـ از t_0 بزرگتر باشد). در مقیاس زمانیِ τ، معادلهٔ (۹ ـ ۱۱) به شکل زیر بیان می‌گردد:

$$\frac{dy}{d\tau} = g(t,x,y+h(t,x),\varepsilon) - \varepsilon\frac{\partial h}{\partial t}$$
$$- \varepsilon\frac{\partial h}{\partial x} f(t,x,y+h(t,x),\varepsilon), \quad y(\circ) = \eta(\varepsilon) - h(t_\circ, \xi(\varepsilon)) \qquad (۹-۱۲)$$

در معادلهٔ پیشین، متغیرهای t و z با سرعت کمی تغییر می‌کنند زیرا در مقیاس زمانی t داریم:

$$t = t_\circ + \varepsilon\tau$$

$$x = x(t_\circ + \varepsilon\tau, \varepsilon)$$

انتخاب $\varepsilon = \circ$ موجب انجماد این متغیرها در $t = t_\circ$ و $x = \xi_\circ$ شده، معادلهٔ (۹-۱۲) را به سیستم خودگردان زیر تقلیل می‌دهد:

$$\frac{dy}{d\tau} = g(t_\circ, \xi_\circ, y+h(t_\circ,\xi_\circ), \circ), \quad y(\circ) = \eta(\circ) - h(t_\circ,\xi_\circ) \qquad (۹-۱۳)$$

که دارای نقطهٔ تعادل $y = \circ$ است*. در این مسأله پارامترهای منجمد شدهٔ $(t_\circ, \xi_\circ)$ در معادلهٔ (۹-۱۳) به زمان و حالت اولیهٔ مشخص بستگی دارد. در تحلیل پایداریِ مبدأ معادلهٔ (۹-۱۳) لازم است اجازه دهیم پارامترهای منجمد شده هر مقداری را در حوزهٔ پارامترهای با تغییرات آرام (t,x) بپذیرند. فرض کنید پاسخ مسألهٔ تقلیل یافتهٔ $\bar{x}(t)$ به ازای مقادیر $t \in [\circ, t_۱]$ و $\|\bar{x}(t)\| \le r_۱$ بر بازهٔ $[\circ, t_۱]$ تعریف شده باشد؛ در این صورت با تعریف مجموعهٔ $B_r = \{x \in R^n \mid \|x\| \le r\}$, $r > r_۱$، معادلهٔ (۹-۱۳) را به شکل زیر باز می‌نویسیم:

$$\frac{dy}{d\tau} = g(t,x,y+h(t,x),\circ) \qquad (۹-۱۴)$$

که می‌توان $(t,x) \in [\circ, t_۱] \times B_r$ را به عنوان پارامترهای مشخص در نظر گرفت. معادلهٔ (۹-۱۴) را مدل لایهٔ مرزی[1] یا سیستم لایهٔ مرزی[2] می‌نامیم. البته گاهی معادله (۹-۱۳) را به عنوان مدل لایهٔ مرزی در نظر می‌گیرند که مشکلی نیز به وجود نمی‌آورد زیرا عبارت (۹-۱۳)،

---

* از بخش ۵-۷ به یاد داریم اگر مبدأ معادلهٔ (۹-۱۳) پایدار نمایی و نسبت به پارامترهای منجمد شدهٔ $(t_\circ, \xi_\circ)$ یکنواخت باشد، آنگاه اگر این پارامترها با متغیرهای آرام (t,x) جایگزین شود باز پایدار نمایی خواهد ماند. این نکته مبنای تحلیل پایداری عبارت (۹-۱۳) است.

1. Boundary-layer model 2. Boundary-layer system

معادله‌ای مستخرج از عبارت (۹-۱۴) به ازای زمان و حالت اولیهٔ مشخصی است. در بررسی ویژگیهای پایداری سیستم لایهٔ مرزی، استفاده از معادلهٔ (۹-۱۴) بسیار مناسب می‌باشد. ویژگی قطعی مورد نیاز برای پایداری این سیستم، پایداری نمایی مبدأ آن است که باید به طور یکنواخت نسبت به پارامترهای منجمد شده‌اش برقرار باشد. تعریف ذیل، این ویژگی را به طور دقیقتر بیان می‌کند:

تعریف ۹-۱ *نقطهٔ تعادل $y = \circ$ مربوط به سیستم لایهٔ مرزی (۹-۱۴) نسبت به $(t,x) \in [\circ, t_۱] \times B_r$ پایدار نمایی یکنواخت است اگر ثابتهای مثبت k، γ و $\rho_\circ$ چنان وجود داشته باشند که پاسخهای معادلهٔ (۹-۱۴) در عبارت ذیل صدق کند:*

$$\|y(\tau)\| \le k\|y(\circ)\| \exp(-\gamma\tau), \quad \forall \|y(\circ)\| < \rho_\circ, \quad \forall (t,x) \in [\circ, t_۱] \times B_r, \quad \forall \tau \ge \circ$$

(۹-۱۵)

نامعادلهٔ (۹-۱۵) بیانگر این مفهوم است که پاسخهای معادلهٔ (۹-۱۴) در شرط $\|y(\tau)\| < k\rho_\circ$ صدق می‌کنند؛ بنابراین لازم است توابع مختلف به ازای جمیع مقادیر: $y \in B_\rho \triangleq \{y \in R^m \mid \|y\| \le \rho\}$ و با شرط $\rho \le \rho_\circ k$ هموار باشند. جدا از حالتهای بدیهی که ممکن است بتوان پاسخ لایهٔ مرزی را به شکل بسته به دست آورد، در حالتهای دیگر برای تحقیق پایداری نمایی مبدأ یا باید از طریق خطی‌سازی و یا یافتن تابع لیاپانوف اقدام نمود. می‌توان نشان داد (تمرین ۹-۵) اگر ماتریس ژاکوبی $[\partial g / \partial y]$ در شرط مقدار ویژهٔ ذیل صدق کند:

$$Re\left[\lambda\left\{\frac{\partial g}{\partial y}(t,x,h(t,x),\circ)\right\}\right] \le -c < \circ, \quad \forall (t,x) \in [\circ, t_۱] \times B_r \qquad (۹-۱۶)$$

آنگاه ثابتهای k، γ و $\rho_\circ$ چنان یافت می‌شود که رابطهٔ (۹-۱۵) برآورده گردد. البته این موضوع نتیجه‌ای محلی است یعنی ممکن است ثابت $\rho_\circ$ خیلی کوچک باشد. علاوه بر این می‌توان ثابت کرد (تمرین ۹-۶) اگر تابع لیاپانوفی مانند $V(t,x,y)$ وجود داشته باشد که به ازای مقادیر $(t,x,y) \in [\circ \text{ و } t_۱] \times B_r \times B_\rho$ در شروط ذیل صادق باشد:

$$c_۱\|x\|^۲ \le V(t,x,y) \le c_۲\|y\|^۲ \qquad (۹-۱۷)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} g(t,x,y+h(t,x),0) \le -c_3 \|y\|^2 \qquad (۹-۱۸)$$

آنگاه عبارت (۹ ـ ۱۵) به ازای تخمینهای ذیل برقرار است:

$$\rho_0 = \rho\sqrt{c_1/c_2}\,, \quad k = \sqrt{c_2/c_1}\,, \quad \gamma = c_3/2c_2 \qquad (۹-۱۹)$$

قضیهٔ ۹ ـ ۱ *مسألهٔ آشفتگی منفرد (۹ ـ ۶) ـ (۹ ـ ۷) را در نظر بگیرید و فرض کنید $z = h(t,x)$ ریشهٔ تنهای معادلهٔ (۹ ـ ۳) باشد، علاوه بر این فرض نمایید به‌ازای جمیع مقادیر ذیل:*

$$[t,x,z-h(t,x),\varepsilon] \in [0,t_1]\times B_r \times B_\rho \times [0,\varepsilon_0]$$

داشته باشیم:

- *توابع f، g و مشتقات جزئی اولشان نسبت به (x,z,ε) پیوسته‌اند. تابع $h(t,x)$ و ماتریس ژاکوبی $\partial g(t,x,z,0)/\partial z$ دارای مشتق جزئی اول پیوسته نسبت به آرگومانهایشان هستند و داده‌های اولیهٔ $\xi(\varepsilon)$ و $\eta(\varepsilon)$ نیز توابعی هموار از ε می‌باشند.*
- *مسألهٔ تقلیل یافتهٔ (۹ ـ ۸) دارای پاسخ یکتای $\bar{x}(t)$ بر بازهٔ $[t_0,t_1]$ است که به ازای جمیع مقادیر $t \in [t_0,t_1]$ در رابطهٔ ذیل صدق می‌کند:*

$$\|\bar{x}(t)\| \le r_1 < r$$

- *مبدأ مدل لایهٔ مرزی (۹ ـ ۱۴) نسبت به (t,x) پایدار نمایی یکنواخت است و پاسخ (۹ ـ ۱۴) به طور مشخص به ازای مقادیر $\rho_0 \le \rho/k$ در عبارت (۹ ـ ۱۵) صدق می‌کند.*

در این صورت ثابتهای مثبت μ و ε^* چنان یافت می‌شوند که به ازای جمیع مقادیر $\|\eta(0)-h(t_0,\xi(0))\| < \mu$ و $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$، مسألهٔ آشفتگی منفرد (۹ ـ ۶) ـ (۹ ـ ۷) دارای پاسخ یکتای $x(t,\varepsilon)$ و $z(t,\varepsilon)$ بر بازهٔ $[t_0,t_1]$ باشد و معادلات ذیل:

$$x(t,\varepsilon) - \bar{x}(t) = O(\varepsilon) \qquad (۹-۲۰)$$

$$z(t,\varepsilon) - h(t,\bar{x}(t)) - \hat{y}(t/\varepsilon) = O(\varepsilon) \qquad (۹-۲۱)$$

نیز به ازای مقادیر $t \in [t_0,t_1]$ به طور یکنواخت برقرار باشد که $\hat{y}(\tau)$ پاسخ مدل لایهٔ مرزی (۹ ـ ۱۳) است. علاوه بر این برای مقدار مشخص $t_b > t_0$، مقدار $\varepsilon^{**} \le \varepsilon^*$ چنان وجود دارد که با شرط $\varepsilon < \varepsilon^{**}$، عبارت:

$$z(t,\varepsilon) - h(t,\bar{x}(t)) = O(\varepsilon) \qquad (۹-۲۲)$$

به ازای مقادیر $t \in [t_b,t_1]$ به طور یکنواخت برقرار باشد. ◇

برهان: پیوست آ ـ ۱۴.

این قضیه به نام قضیهٔ تیخانوف[1] شناخته می‌شود* و در اثباتش از ویژگی پایداری نماییِ مبدأ در مدل لایهٔ مرزی استفاده شده است تا بتوان نشان داد:

$$\|y(t,\varepsilon)\| \le k\exp\left[\frac{-\alpha(t-t_0)}{\varepsilon}\right]\|y(t_0)\| + \varepsilon\delta$$

در معادلهٔ (۹ ـ ۱۰) از این کران برای اثبات (۹ ـ ۲۰) استفاده شده و با توجه به اینکه مقدار $\int_0^t \exp(-\alpha s/\varepsilon)$ از مرتبهٔ $O(\varepsilon)$ است لذا این نتیجه معقول می‌باشد. برهان قضیه با تحلیل خطای (۹ ـ ۱۱) نسبت به مقیاس زمانی (برای اثبات روابط (۹ ـ ۲۱) و (۹ ـ ۲۲)) به پایان می‌رسد.

مثال ۹ ـ ۴ مسألهٔ آشفتگی منفرد ذیل را برای موتور DC مربوط به مثال ۹ ـ ۱ در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = z, \quad x(0) = \xi_0$$

$$\varepsilon\dot{z} = -x - z + u(t), \quad z(0) = \eta_0$$

فرض کنید $u(t) = t, t \ge 0$ باشد و بخواهیم معادلهٔ حالت را بر بازهٔ $[0,1]$ حل کنیم. ریشهٔ یکتای (۹ ـ ۳) برابر است با: $h(t,x) = -x + t$ ضمن اینکه مدل لایهٔ مرزی (۹ ـ ۱۴) به شکل زیر بیان می‌شود:

---

* می‌توان صورتهای دیگری از این قضیه را ـ با کمی اختلاف در فرضیات آن ـ بیان نمود؛ برای مثال [۹۵، فصل اول، قضیهٔ ۳ـ ۱] را ملاحظه کنید.

1. Tikhonov's theorem

$$\frac{dy}{d\tau} = -y$$

واضح است مبدأ سیستم لایهٔ مرزی، پایدار نمایی جامع است. مسألهٔ تقلیل یافتهٔ زیر:

$$\dot{x} = -x + t, \quad x(0) = \xi_0$$

دارای پاسخ یکتای ذیل می‌باشد:

$$\bar{x}(t) = t - 1 + (1 + \xi_0)\exp(-t)$$

پاسخ مسألهٔ لایهٔ مرزی زیر نیز:

$$\frac{dy}{d\tau} = -y, \quad y(0) = \eta_0 + \xi_0$$

عبارت است از:

$$\hat{y}(\tau) = (\eta_0 + \xi_0)\exp(-\tau)$$

طبق قضیهٔ ۹ ـ ۱ به ازای جمیع مقادیر $t \in [0, 1]$ می‌توان نوشت:

$$x - [t - 1 + (1 + \xi_0)\exp(-t)] = O(\varepsilon)$$

$$z - \left[(\eta_0 + \xi_0)\exp\left(\frac{-t}{\varepsilon}\right) + 1 - (1 + \xi_0)\exp(-t)\right] = O(\varepsilon)$$

تقریب $O(\varepsilon)$ مربوط به z، به طور مشخص نشاندهندهٔ رفتاری با دو مقیاس زمانی است. این پاسخ با حالت گذرای تند $(\eta_0 + \xi_0)\exp(-t/\varepsilon)$ آغاز می‌شود که در واقع همان بخش «لایهٔ مرزی» پاسخ می‌باشد. پس از استهلاک این حالت گذرا، z در نزدیکی $[(1+\xi_0)\exp(-t) - 1]$ قرار می‌گیرد که بخش آرام («حالت شبه مانای») پاسخ است. این رفتار دو مقیاس زمانی فقط نسبت به z وجود دارد و پاسخ غالبِ x آرام است؛ در حقیقت x دارای حالت گذرایی تند (لایهٔ مرزی) اما از مرتبهٔ $O(\varepsilon)$ می‌باشد. چون این سیستم، خطی است می‌توان رفتار دو مقیاس زمانی آن را از طریق تحلیل مدل بررسی کرد: بسادگی می‌توان نشان داد سیستم موردنظر دارای یک مقدار ویژهٔ آرام λ_1، که در نزدیکی از مرتبهٔ $O(\varepsilon)$ حول مقدار ویژهٔ مدل تقلیل یافته یعنی: $\lambda_1 = -1 + O(\varepsilon)$ قرارگرفته، و یک مقدار ویژهٔ تند به شکل $\lambda_2 = \lambda/\varepsilon$ است که λ در نزدیکی

از مرتبهٔ $O(\varepsilon)$ حول مقدار ویژهٔ مدل لایهٔ مرزی، یعنی: $\lambda_2 = [-1 + O(\varepsilon)]/\varepsilon$، قرارگرفته است. می‌توان پاسخ دقیق x و z را به شکل ترکیب خطی مُد آرام: $\exp(\lambda_1 t)$، مُد تند $\exp(\lambda t/\varepsilon)$ و مؤلفهٔ حالت مانای ناشی از ورودی $u(t) = t$ بیان کرد. به کمک محاسبهٔ واقعی تجزیهٔ مُدال، می‌توان تحقیق نمود ضریب مُد تند در پاسخ x از مرتبهٔ $O(\varepsilon)$ است، البته می‌توان این کار را در حالت کلّی برای سیستمهای خطی انجام داد؛ تمرین ۹ ـ ۱۳ را ملاحظه کنید. Δ

مثال ۹ ـ ۵ مسألهٔ آشفتگی منفرد ذیل را برای سیستم پسخور با بهرهٔ زیاد مربوط به مثال ۹ـ۲ در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = Ax + Bz, \qquad x(0) = \xi_0$$

$$\varepsilon\dot{z} = \psi(u(t) - z - k_2 Cx), \quad z(0) = \eta_0$$

فرض کنید داشته باشیم: $u(t) = 1,\ t \geq 0$ و $\psi(0) = \tan^{-1}(0)$. ریشهٔ یکتای معادلهٔ (۹ ـ ۳) برابر است با: $h(t,x) = 1 - k_2 Cx$؛ مدل لایهٔ مرزی (۹ ـ ۱۴) نیز به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\frac{dy}{d\tau} = \tan^{-1}(-y) = -\tan^{-1}(y)$$

ماتریس ژاکوبی:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.-\frac{1}{1+y^2}\right|_{y=0} = -1$$

هرویتز است، بنابراین مبدأ مدل لایهٔ مرزی، پایدار نمایی می‌باشد. برای تخمین ثابتهای k، γ و ρ_0 در معادلهٔ (۹ ـ ۱۵)، لازم است تابع لیاپانوف مناسبی را بیابیم؛ با انتخاب $V(y) = \frac{1}{2}y^2$ داریم:

$$\frac{dV}{dy}g = -y\tan^{-1}y \leq -\frac{\tan^{-1}\rho}{\rho}y^2, \quad \forall\ |y| \leq \rho$$

بنابراین عبارت (۹ ـ ۱۵) به ازای مقادیر ذیل برقرار است:

$$k = 1; \quad \gamma = \frac{\tan^{-1}\rho}{\rho} \quad ; \rho_0 = \rho$$

چون مسألهٔ تقلیل یافتهٔ:

$$\dot{x} = (A - Bk_2C)x + B, \quad x(0) = \xi_0$$

خطی است، لذا همهٔ فرضیات قضیهٔ ۹ ـ ۱ برآورده می‌شود و می‌توان پاسخهای x و z را برحسب جمله‌های پاسخهای مسأله‌های تقلیل یافته و لایهٔ مرزی بیان کرد. Δ

مثال ۹ ـ ۶ مسألهٔ آشفتگی منفرد ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = x^2(1+t)/z, \qquad x(0) = 1$$

$$\varepsilon\dot{z} = -[z + (1+t)x]z[z - (1+t)], \quad z(0) = \eta_0$$

در این حالت، عبارت (۹ ـ ۳) به شکل زیر درمی‌آید:

$$0 = -[z + (1+t)x]z[z - (1+t)]$$

که دارای سه ریشهٔ تنهای ذیل در ناحیهٔ $\{t > 0, \quad x > k > 0\}$ می‌باشد:

$$z = -(1+t)x; \quad z = 0; \quad z = 1 + t$$

ابتدا ریشهٔ $z = -(1+t)x$ را در نظر می‌گیریم؛ در این حالت مدل لایهٔ مرزی (۹ ـ ۱۴) برابر است با:

$$\frac{dy}{d\tau} = -y[y - (1+t)x][y - (1+t)x - (1+t)]$$

نمودار تابع سمت راست (شکل ۹ ـ ۵ (الف))، نشان می‌دهد مبدأ پایدار مجانبی است و $x(1+t) < y$ نیز ناحیهٔ جذابیت آن است. با انتخاب $V(y) = \frac{1}{2}y^2$، بسادگی می‌توان تحقیق کرد V به ازای $x(1+t) < \rho < y$ در نامساویهای (۹ ـ ۱۷) ـ (۹ ـ ۱۸) صدق می‌کند. مسألهٔ تقلیل یافتهٔ:

$$\dot{x} = -x, \quad x(0) = 1$$

نیز دارای پاسخ یکتای $\bar{x}(t) = exp(-t)$ برای تمامی مقادیر $t \geq 0$ است. مسألهٔ لایهٔ مرزی به ازای مقادیر $t = 0$ و $x = 1$ به شکل زیر بیان می‌شود:

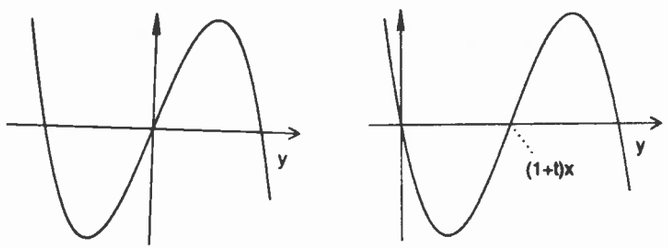
$$\frac{dy}{d\tau} = -y(y-1)(y-2), \quad y(0) = \eta_0 + 1$$

که به ازای مقادیر $\eta_0 + 1 \leq 1 - a$، دارای پاسخ یکتای نمایی کاهنده به شکل $\hat{y}(t)$ است که به ازای مقادیر $\eta_0 < -a < 0$ (و برای $a > 0$) مقدار بسیار کوچکی خواهد بود. اکنون حالت $z=0$ را در نظر بگیرید؛ در این صورت مدل لایهٔ مرزی (۹ ـ ۱۴) به شکل زیر بیان می‌گردد:

$$\frac{dy}{d\tau} = -[y + (1+t)x]y[y - (1+t)]$$

نمودار تابع سمت راست (شکل ۹ ـ ۵ (ب)) نشان می‌دهد مبدأ ناپایدار است. در نهایت مدل لایهٔ مرزی برای ریشهٔ $z = 1 + t$ برابر است با:

$$\frac{dy}{d\tau} = -[y + (1+t) + (1+t)x][y + (1+t)]y$$



(ب) (الف)

شکل ۹ ـ ۵ سمت راست مدل لایهٔ مرزی: (الف) $z = -(1+t)x$، (ب) $z = 0$

مشابه حالت اول می‌توان ثابت کرد در این حالت نیز مبدأ پایدار نمایی و نسبت به (t, x) یکنواخت است. مسأله تقلیل یافتهٔ:

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = 1$$

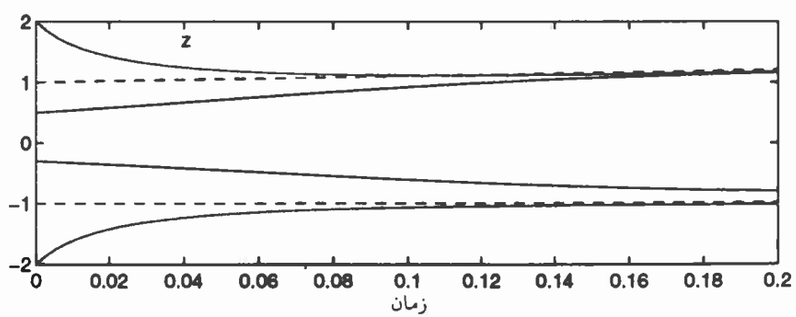
به ازای جمیع مقادیر $t \in [0, 1]$، دارای پاسخ یکتای $\bar{x}(t) = 1/(1-t)$ می‌باشد، باید دقت

کرد که $\bar{x}(t)$ دارای زمان رهایی محدود در لحظهٔ $t = ۱$ است، اما قضیهٔ ۹ ـ ۱ برای مقادیر $t \in [۰, t_۱]$ و با شرط $t_۱ < ۱$ صادق است. مسألهٔ لایهٔ مرزی زیر:

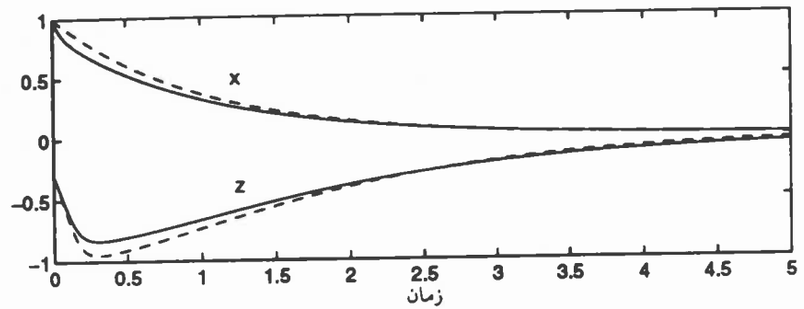
$$\frac{dy}{d\tau} = -(y+۲)(y+۱)y, \quad y(۰) = \eta_۰ - ۱$$

به ازای $۰ < a < \eta_۰$ و با شرط $t = ۰$ و $x = ۱$، دارای پاسخ یکتای نمایی و کاهندهٔ $\hat{y}(\tau)$ می‌باشد. از سه ریشهٔ (۹ ـ ۱۳)، فقط دو ریشهٔ $h = -(۱+t)x$ و $h = ۱ + t$ به مدلهای تقلیل یافتهٔ معتبر منجر می‌شود. قضیهٔ ۹ ـ ۱ در حالت $۰ < \eta_۰$، به ریشهٔ $h = -(۱+t)x$ و در حالت $۰ > \eta_۰$، به ریشهٔ $h = ۱ + t$ اعمال می‌گردد. شکلهای ۹ ـ ۶ و ۹ ـ ۷ نشاندهندهٔ نتایج شبیه‌سازی به ازای $\varepsilon = ۰/۱$ است؛ شکل ۹ ـ ۶ z را برای چهار مقدار مختلف $\eta_۰$ (دو مقدار برای هریک از مدلهای تقلیل یافته) نشان می‌دهد. شکل ۹ ـ ۷ نیز پاسخهای دقیق و تقریبی x و z را به ازای مقدار $\eta_۰ = -۰/۳$ نشان می‌دهد. مسیرهای شکل ۹ ـ ۶ بخوبی رفتار دو مقیاس زمانی پاسخها را نمایش می‌دهد: این مسیرها با حالت گذرای تندِ $z(t, \varepsilon)$ از $\eta_۰$ تا $\bar{z}(t)$ آغاز می‌شود و پس از استهلاک این حالت گذرا، در نزدیکی $\bar{z}(t)$ باقی می‌ماند. در حالت $\eta_۰ = -۰/۳$ همگرایی به سمت $\bar{z}(t)$، در بازهٔ زمانی $[۰, ۰/۲]$ حاصل نمی‌شود. همین حالت در شکل ۹ ـ ۷ برای بازهٔ زمانی طولانی‌تری رسم شده است که نشاندهندهٔ نزدیک‌شدن $z(t, \varepsilon)$ به $\bar{z}(t)$ می‌باشد. علاوه بر این، شکل ۹ ـ ۷ نتیجهٔ تقریب مجانبیِ $O(\varepsilon)$ ناشی از قضیهٔ تیخانوف را نشان می‌دهد.

Δ



شکل ۹ ـ ۶ نتایج شبیه‌سازی برای متغیر z مربوط به مثال ۹ ـ ۶ به ازای $\varepsilon = ۰/۱$: پاسخ تقلیل یافته (خط‌چین)؛ پاسخ دقیق (توپُر)



شکل ۹ ـ ۷ پاسخهای دقیق (توپُر) و تقریبی (خط‌چین) برای مثال ۹ ـ ۶ به ازای $\varepsilon = ۰/۱$

۹ ـ ۳ خمینه‌های آرام و تند

در این بخش به تشریح دیدگاه هندسیِ رفتار دو مقیاس زمانی در پاسخهای معادلهٔ (۹ ـ ۱) ـ (۹ ـ ۲) به عنوان مسیرهایی در R^{n+m} می‌پردازیم. به منظور بهره‌گیری از مفهوم خمینه‌های پایا*، بحث خود را به سیستمهای خودگردان محدود می‌کنیم. ضمناً برای سادگی نمادگذاری، f و g را مستقل از ε در نظر می‌گیریم؛ بنابراین می‌توان شکل ساده‌تر زیر را برای سیستم آشفتهٔ منفرد (۹ ـ ۱) ـ (۹ ـ ۲) در نظر گرفت:

$$\dot{x} = f(x, z) \qquad (۹-۲۳)$$

$$\varepsilon \dot{z} = g(x, z) \qquad (۹-۲۴)$$

فرض کنید $z = h(x)$ ریشهٔ تنهای $g(x, z) = ۰$ باشد که به ازای آن، فرضیات قضیهٔ ۹ ـ ۱ صادق است. معادلهٔ $\dot{z} = h(x)$ بیانگر خمینه‌ای nبُعدی در فضای حالت $(n+m)$ بُعدی نسبت به (x, z) می‌باشد. این معادله خمینهٔ پایای سیستمِ:

$$\dot{x} = f(x, z) \qquad (۹-۲۵)$$

* خمینه‌های پایا در بخش ۴ ـ ۱ معرفی شده است.

$$0 = g(x, z) \qquad (۹-۲۶)$$

برای مسیر حالتی از این سیستم است که از خمینهٔ $z = h(x)$ آغاز شده، تا ابد، به ازای زمانهایی که پاسخ برای آنها تعریف می‌شود، در آن باقی می‌ماند. حرکت در این خمینه با مدل تقلیل یافتهٔ ذیل توصیف می‌گردد:

$$\dot{x} = f(x, h(x))$$

یکی از نتایج قضیهٔ ۹ ـ ۱ این است که مسیرهای حالت معادلهٔ (۹ ـ ۲۳) ـ (۹ ـ ۲۴) که از همسایگیِ مرتبهٔ $O(\varepsilon)$ حول $z = h(x)$ آغاز می‌شود در همان همسایگیِ مرتبهٔ $O(\varepsilon)$ حول $z = h(x)$ باقی می‌ماند؛ لذا این سؤال پیش می‌آید که آیا در حالت $\varepsilon > 0$ نیز خمینهٔ پایایی مشابه با $z = h(x)$ وجود دارد؟ در پاسخ می‌توان گفت تحت فرضیات قضیهٔ ۹ ـ ۱، خمینهٔ پایای مشابهی برای معادلات (۹ ـ ۲۳) ـ (۹ ـ ۲۴) در همسایگیِ مرتبهٔ $O(\varepsilon)$ حول $z = h(x)$ موجود است؛ از این رو به دنبال خمینه‌ای پایا برای معادلات (۹ ـ ۲۳) ـ (۹ ـ ۲۴) به شکل زیر هستیم:

$$z = H(x, \varepsilon) \qquad (۹-۲۷)$$

که H نسبت به x و ε به اندازهٔ کافی هموار است (یعنی به تعداد مورد نیاز پیوسته ـ مشتق‌پذیر می‌باشد). معادلهٔ (۹ ـ ۲۷) بیانگر خمینه‌ای nبُعدی و وابسته به ε در فضای حالتِ $(n+m)$ بُعدی نسبت به (x, z) می‌باشد. برای اینکه $z = H(x, \varepsilon)$ خمینهٔ پایای معادلات (۹ ـ ۲۳) ـ (۹ ـ ۲۴) باشد، باید عبارت ذیل برقرار گردد:

$$z(0, \varepsilon) - H(x(0, \varepsilon), \varepsilon) = 0 \Rightarrow z(t, \varepsilon) - H(x(t, \varepsilon), \varepsilon) \equiv 0, \quad \forall t \in J \subset [0, \infty)$$

که J بازهٔ زمانی دلخواهی است که روی آن، پاسخ $[x(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)]$ وجود داشته باشد. با مشتقگیری از هر دو طرف معادلهٔ (۹ ـ ۲۷) نسبت به t، ضرب کردن در ε و با جایگزینی $\varepsilon\dot{z}$ ، $\dot{x}$ و z بترتیب از معادلات (۹ ـ ۲۳)، (۹ ـ ۲۴) و (۹ ـ ۲۷)، به شرط خمینه[1] دست می‌یابیم:

$$0 = g(x, H(x, \varepsilon)) - \varepsilon \frac{\partial H}{\partial x} f(x, H(x, \varepsilon)) \qquad (۹-۲۸)$$

1. Manifold condition

که باید $H(x, \varepsilon)$، به ازای جمیع مقادیر x در ناحیهٔ موردنظر و همهٔ مقادیر $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ در این رابطه صدق کند. در نقطهٔ $\varepsilon = 0$ معادلهٔ دیفرانسیل جزئی (۹ ـ ۲۸) به شکل ذیل ساده می‌شود:

$$0 = g(x, H(x, 0))$$

که نشاندهندهٔ $H(x, 0) = h(x)$ است. از آنجاکه ممکن است معادلهٔ $0 = g(x, z)$ بیش از یک ریشهٔ تنها داشته باشد، باید به جستجوی خمینهٔ پایای معادلات (۹ ـ ۲۳) ـ (۹ ـ ۲۴) در همسایگی هریک از ریشه‌ها پرداخت. می‌توان نشان داد مقدار $\varepsilon^* > 0$ و تابع $H(x, \varepsilon)$ چنان یافت می‌شود که به ازای جمیع مقادیر $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ شرط خمینهٔ (۹ ـ ۲۸) را برآورده کند و عبارت ذیل نیز به ازای همهٔ مقادیر $\|x\| < r$ برقرار باشد*:

$$h(x, \varepsilon) - h(x) = O(\varepsilon)$$

خمینهٔ پایای $z = H(x, \varepsilon)$، خمینهٔ *آرام*[1] معادله‌های (۹ ـ ۲۳) ـ (۹ ـ ۲۴) نامیده می‌شود. هر خمینهٔ آرام معادل با مدل آرام ذیل است:

$$\dot{x} = f(x, H(x, \varepsilon)) \qquad (۹-۲۹)$$

که حرکت خمینه را به *طور دقیق* توصیف می‌کند.

در بیشتر حالتها نمی‌توان معادلهٔ خمینهٔ (۹ ـ ۲۸) را به طور دقیق حل کرد اما می‌توان به کمک بسط سری تیلور در نقطهٔ $\varepsilon = 0$، به تقریب مناسبی از $H(x, \varepsilon)$ دست یافت: روند تقریب با جایگزینی سری تیلور $H(x, \varepsilon)$ در معادلهٔ (۹ ـ ۲۸) آغاز می‌شود:

$$H(x, \varepsilon) = H_0(x) + \varepsilon H_1(x) + \varepsilon^2 H_2(x) + \ldots$$

پس از آن می‌توان با معادل قراردادن جمله‌های همتوان ε، جملات $H_0(x)$، $H_1(x)$ و غیره را

* در اینجا وجود خمینهٔ پایا را اثبات نمی‌کنیم، اما برای اثبات آن باید برهان قضیهٔ ۴ ـ ۱ (خمینهٔ مرکزی) را، که در پیوست آ ـ ۷ آمده، کمی تغییر داد، [۲۸، بخش ۲ ـ ۷] را ملاحظه کنید. در [۹۳] برهانی مبتنی بر فرضیات اصلی قضیهٔ ۹ ـ ۱ ذکر شده است.

1. Slow manifold

محاسبه کرد؛ بدین منظور لازم است توابع f و g نسبت به آرگومانهایشان به تعداد مورد نیاز پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشند. واضح است که: $H_0(x) = H(x, 0) = h(x)$. معادلهٔ $H_1(x)$ برابر است با:

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x, h(x))\, H_1(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x, h(x))$$

اگر ماتریس ژاکوبیِ $[\partial g/\partial z]$ در نقطهٔ $z = h(x)$ غیرمنفرد باشد، معادلهٔ فوق دارای پاسخی یکتاست. غیرمنفردبودن ماتریس ژاکوبی از شرط مقدار ویژهٔ (۹ ـ ۱۶) حاصل می‌شود. مشابه H_1، چنانچه ماتریس ژاکوبیِ $[\partial g/\partial z]$ غیرمنفرد باشد، سایر معادلات مراتب بالاتر نیز خطی و قابل حل هستند.

برای تبیین مفهوم خمینهٔ تند، معادلات (۹ ـ ۲۳) ـ (۹ ـ ۲۴) را در مقیاس زمانی $\tau = t/\varepsilon$ بررسی می‌کنیم: در نقطهٔ $\varepsilon = 0$، اگر $z(\tau)$ از معادلهٔ:

$$\frac{dz}{d\tau} = g(x(0), z)$$

و با این شرط که به سمت نقطهٔ تعادل $z = h(x(0))$ میل کند، به دست آمده باشد، آنگاه خواهیم داشت: $x(\tau) \equiv x(0)$. این حرکت، مسیرهای حالت (x, z) را در R^{n+m} توصیف می‌کند که به ازای هر مقدار مشخص $x(0)$ در خمینهٔ تند F_x قرار دارد، این خمینه با رابطهٔ ثابت $x = x(0)$ تعریف می‌شود و بسرعت به خمینهٔ $z = h(x)$ تقلیل می‌یابد. اگر ε بزرگتر از صفر ولی کوچک باشد، خمینه‌های تند در واقع نوعی «ورق شماری»[1] پاسخهایی است که بتندی به سوی خمینهٔ آرام سوق می‌یابند. این مفهوم را طیّ دو مثال مرتبهٔ دوم ذیل تشریح می‌کنیم:

مثال ۹ ـ ۷ سیستم آشفتهٔ منفرد زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = -x + z$$

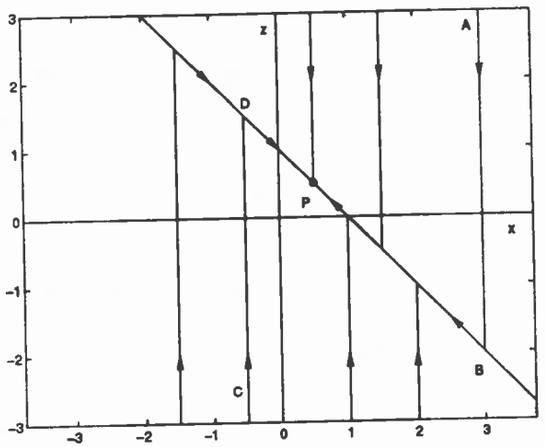
$$\varepsilon \dot{z} = \tan^{-1}(1 - z - x)$$

1. Foliation

در $\varepsilon = 0$، خمینهٔ آرام به شکل $z = h(x) = 1 - x$ می‌باشد. مدل آرامِ متناظر برابر است با:

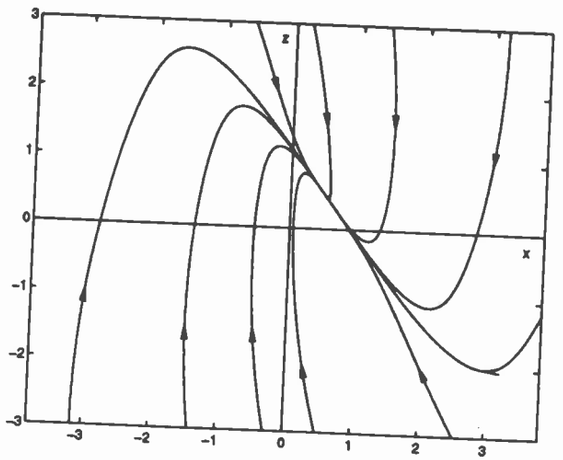
$$\dot{x} = -2x + 1$$

که دارای نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی در $x = \frac{1}{2}$ می‌باشد. بنابراین مسیرهای حالت روی خمینهٔ $z = 1 - x$ به سمت نقطهٔ $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ حرکت می‌کند (این نکته با پیکانهای شکل ۹ ـ ۸ نشان داده شده است). باید توجه داشت نقطهٔ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ نقطهٔ تعادل کلّ سیستم است.



شکل ۹ ـ ۸ پیکرهٔ تقریبی فاز مربوط به مثال ۹ ـ ۷

خمینه‌های تند در $\varepsilon = 0$ موازی با محور z هستند که پیکانهای مسیرهای حالت آنها به سمت خمینهٔ آرام $z = 1 - x$ می‌باشد. با این اطلاعات می‌توان پیکرهٔ فاز سیستم را ترسیم نمود، برای مثال، مسیری که از نقطهٔ A آغاز می‌شود به طور قائم به سمت پایین حرکت می‌کند تا خمینهٔ $z = 1 - x$ را در نقطهٔ B قطع کند؛ از این نقطه به بعد، مسیر حالت در امتداد خمینه به سوی نقطهٔ تعادل P سوق می‌یابد. به طور مشابه مسیری که از نقطهٔ C آغاز می‌شود به طور قائم به سمت بالا حرکت می‌کند تا در نقطهٔ D به خمینهٔ $z = 1 - x$ برسد و از آنجا در امتداد خمینه به سمت نقطهٔ تعادل حرکت نماید. برای مقادیر کوچک $\varepsilon > 0$، پیکرهٔ فاز سیستم بسیار نزدیک به تصویری است که برای حالت $\varepsilon = 0$ به دست آورده‌ایم. شکل ۹ ـ ۹، پیکرهٔ فاز را به ازای $\varepsilon = 0/1$ نشان می‌دهد. میزان نزدیکی دو پیکرهٔ فاز، قابل تأمل است. Δ



شکل ۹ ـ ۹ پیکرهٔ فاز مربوط به مثال ۹ ـ ۷ به ازای $\varepsilon = ۰/۱$

مثال ۹ ـ ۸ معادلهٔ وان دِرپُل را در نظر بگیرید:

$$\frac{d^۲v}{ds^۲} - \mu(۱ - v^۲)\frac{dv}{ds} + v = ۰$$

و فرض کنید $\mu >> ۱$ است. با انتخاب:

$$x = -\frac{۱}{\mu}\frac{dv}{ds} + v - \frac{۱}{۳}v^۳; \quad z = v$$

به عنوان متغیرهای حالت، $t = s/\mu$ به عنوان متغیر زمان و $\varepsilon = ۱/\mu^۲$، می‌توان سیستم را با مدل استاندارد آشفتهٔ منفرد ذیل نمایش داد:

$$\dot{x} = z$$

$$\varepsilon \dot{z} = -x + z - \frac{۱}{۳}z^۳$$

پیشتر به کمک قضیهٔ پوانکاره ـ بِن‌دیکسون (مثال ۷ ـ ۲) نشان دادیم معادله وان دِرپُل دارای یک چرخهٔ حدّی پایدار است. در اینجا می‌خواهیم به کمک آشفتگیهای منفرد، تخمین بهتری از مکان چرخهٔ حدّی را به دست آوریم. در نقطهٔ $\varepsilon = ۰$ لازم است معادلهٔ ذیل را برای به دست

آوردن $z = h(x)$ حل کنیم:

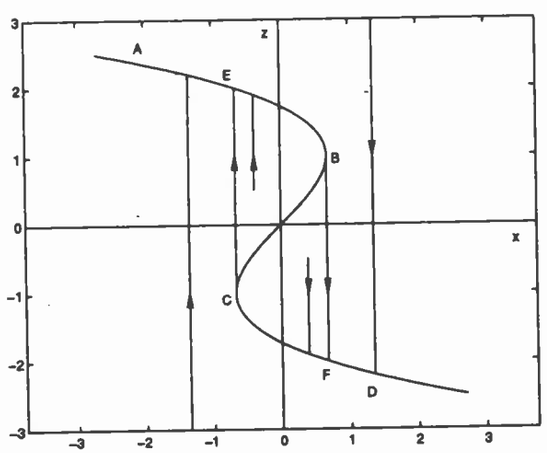
$$۰ = -x + z - \frac{۱}{۳}z^۳$$

در شکل ۹ ـ ۱۰ منحنی $-x + z - \frac{۱}{۳}z^۳ = ۰$، خمینهٔ آرام در حالت $\varepsilon = ۰$، رسم شده است و ملاحظه می‌شود به ازای مقادیر $x < -\frac{۲}{۳}$ یک ریشهٔ منحصر به فرد در شاخهٔ AB، به ازای مقادیر $-\frac{۲}{۳} < x < \frac{۲}{۳}$، سه ریشه، که هریک بر یکی از شاخه‌های AB، BC و CD قرار گرفته‌اند و به ازای $x > \frac{۲}{۳}$ نیز تنها یک ریشه بر شاخهٔ CD وجود دارد. به ازای ریشه‌های روی شاخهٔ AB، برای ماتریس ژاکوبی داریم:

$$\frac{\partial g}{\partial z} = ۱ - z^۲ < ۰ \qquad \text{برای: } z^۲ > ۱$$

بنابراین ریشه‌های روی شاخهٔ AB (به استثنای همسایگی نقطهٔ B)، پایدار نمایی است. همین نتیجه برای ریشه‌های روی شاخهٔ CD (به استثنای همسایگی نقطهٔ C) نیز برقرار است. از سوی دیگر ریشه‌های روی شاخهٔ BC، ناپایدارند زیرا این ریشه‌ها در ناحیهٔ $z^۲ < ۱$ قرار دارند. اکنون سعی می‌کنیم به کمک نظریهٔ آشفتگیهای منفرد، پیکرهٔ فاز تقریبی سیستم را رسم نماییم؛ بدین منظور صفحهٔ فاز را برحسب مقادیر x به سه ناحیه تقسیم می‌کنیم: مسیرهای حالتی که از ناحیهٔ $x < -\frac{۲}{۳}$ آغاز می‌شود به صورت موازی با محور z به سمت شاخهٔ AB سوق می‌یابد. مسیرهای حالتی که از ناحیهٔ $-\frac{۲}{۳} < x < \frac{۲}{۳}$ شروع می‌گردد باز موازی با محور z، به سوی شاخهٔ AB یا شاخهٔ CD (بسته به مقدار اولیهٔ z) سوق می‌یابد: چنانچه نقطهٔ اولیه بالای شاخهٔ BC باشد، مسیر به سوی شاخهٔ AB و در غیر این صورت به سمت شاخهٔ CD میل می‌کند. در نهایت مسیرهایی که از ناحیهٔ $x > \frac{۲}{۳}$ آغاز می‌شود به سمت شاخهٔ CD میل می‌کند. مسیرهایی که روی خود خمینهٔ آرام قرار دارند، در امتداد خمینه حرکت می‌کنند و جهت حرکت آنها را می‌توان با بررسی علامت میدان برداری (مشابه شکل ۹ ـ ۱۰) تعیین نمود. به طور مشخص، اگر $\dot{x} = z$ باشد، مسیرهای روی شاخهٔ AB به سمت پایین می‌لغزند در صورتی که مسیرهای روی شاخهٔ CD به سمت بالا حرکت می‌کنند. روی شاخهٔ BC نقطه‌ای وجود ندارد که بخواهیم راجع به آن بحث کنیم زیرا هیچ مدل تقلیل یافته‌ای متناظر با ریشه‌های ناپایدار روی آن شاخه وجود ندارد. تا اینجا توانسته‌ایم تقریبی از پیکرهٔ فاز را در هر نقطه (بجز روی شاخهٔ BC و نیز در همسایگی نقاط B و C) رسم کنیم، لیکن نظریهٔ آشفتگی منفرد نمی‌تواند پیکرهٔ فاز را در این نواحی

پیش‌بینی کند. حال به بررسی این موضوع می‌پردازیم که اگر ε بزرگتر از صفر (ولی کوچک) باشد در همسایگی نقطهٔ B چه رخ می‌دهد. مسیرهایی که در امتداد شاخهٔ AB به سوی B می‌لغزند در واقع در امتداد خمینهٔ کاملاً آرام $z = H(x, \varepsilon)$ در حال لغزش هستند. چون مسیر حالت به سمت B حرکت می‌کند، باید داشته باشیم: $g < 0$؛ در نتیجه خمینهٔ کاملاً آرام باید بالای شاخهٔ AB واقع باشد، با بررسی نمودار میدان برداری در همسایگی B مشخص می‌شود مسیر حالت در نقطه‌ای بالای B، خط قائم گذرنده بر B (یعنی خط $x = \frac{2}{3}$) را قطع می‌کند، هنگامی که مسیر، این خط را قطع کند در واقع به ناحیهٔ جذابیت ریشه‌ای پایدار بر شاخهٔ CD تعلق خواهد داشت، بنابراین مسیر بسرعت به صورت خطی قائم به سمت شاخهٔ CD حرکت می‌کند. با استدلالی مشابه می‌توان نشان داد مسیری که در امتداد شاخهٔ CD حرکت می‌کند در نقطهٔ زیر C، خط عمود گذرنده بر C را قطع و سپس به طور قائم به سمت شاخهٔ AB حرکت می‌کند. این نکته تصویر تقریبی پیکره را تکمیل می‌سازد. بدین ترتیب ملاحظه می‌شود مسیرهایی که از هر نقطه آغاز می‌گردد به صورت قائم به سوی یکی از دو شاخهٔ AB یا CD جذب می‌شود. علاوه بر این مسیرهای حالت روی خمینهٔ آرام، به سوی منحنی بستهٔ $E\text{-}B\text{-}F\text{-}C\text{-}E$ حرکت می‌کند (مشروط به اینکه قبلاً روی آن نبوده باشد) و حول آن چرخ می‌زند. چرخهٔ حدّی دقیق نوسانساز وان دِرپُل، در همسایگیِ مرتبهٔ $O(\varepsilon)$ این منحنی بسته قرار دارد. پیکرهٔ فاز رسم شده در شکل ۹ ـ ۱۱ (به ازای $\varepsilon = 0/1$) این پیش‌بینی را تأیید می‌کند.



شکل ۹ ـ ۱۰ پیکرهٔ تقریبی فاز برای نوسانساز وان دِرپُل

علاوه بر این می‌توان دورهٔ تناوب نوسانِ پاسخ متناوب را نیز تخمین زد. منحنی بستهٔ $E\text{-}B\text{-}F\text{-}C\text{-}E$ دارای دو سمت آرام و دو سمت تند است. با چشمپوشی از حالتهای گذرای تند (از B تا F و از C تا E)، دورهٔ تناوب نوسان را به شکل $t_{EB} + t_{FC}$ تخمین می‌زنیم که زمان t_{EB} از مدل تقلیل یافتهٔ ذیل به دست می‌آید:

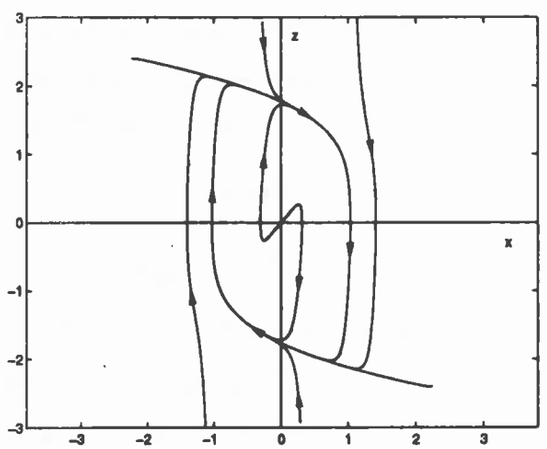
$$\dot{x} = z$$

$$0 = -x + z - \frac{1}{3}z^3$$

با مشتقگیری از معادلهٔ دوم نسبت به t و معادل قراردادن عبارتهای حاصل از دو معادله برای $\dot{x}$، به معادلهٔ ذیل دست می‌یابیم:

$$\dot{z} = \frac{z}{1 - z^2}$$

با انتگرالگیری از E تا B نتیجه می‌شود: $t_{EB} = \frac{3}{2} - Ln\ 2$. می‌توان زمان t_{FC} را نیز به روشی مشابه تخمین زد زیرا به دلیل تقارن داریم: $t_{EB} = t_{FC}$، بنابراین برای مقادیر کوچک ε، دورهٔ تناوب نوسان تقریباً برابر است با: $2\ Ln\ 2 - 3$. Δ



شکل ۹ ـ ۱۱ پیکرهٔ فاز نوسانساز وان دِرپُل به ازای $\varepsilon = 0/1$

۹ ـ ۴ تحلیل پایداری

سیستم آشفتهٔ منفرد و خودگردان ذیل را در نظر می‌گیریم:

$$\dot{x} = f(x,z) \qquad (۹ ـ ۳۰)$$

$$\varepsilon \dot{z} = g(x,z) \qquad (۹ ـ ۳۱)$$

و فرض می‌کنیم مبدأ $(x = ۰, z = ۰)$ یک نقطهٔ تعادل تنهاست و توابع f و g نیز در مجموعه‌ای همبند، باز و شامل مبدأ، لیپ شیتز محلی است، در نتیجه داریم:

$$f(۰,۰) = ۰ \quad \text{و} \quad g(۰,۰) = ۰$$

می‌خواهیم پایداری مبدأ را به کمک بررسی مدل تقلیل یافته و نیز مدل لایهٔ مرزی تحلیل کنیم. فرض کنید $z = h(x)$، ریشهٔ تنهای معادلهٔ $g(x,z) = ۰$ است که به ازای جمیع مقادیر $x \in D_۱ \subset R^n$ تعریف شده باشد ($D_۱$ مجموعه‌ای همبند، باز و شامل $x = ۰$ است). فرض کنید $h(۰) = ۰$ است، در این صورت اگر $z = h(x)$ تنها ریشهٔ معادلهٔ $g = ۰$ باشد آنگاه باید در مبدأ صفر شود زیرا می‌دانیم: $g(۰,۰) = ۰$. چنانچه دو یا چند ریشهٔ تنها داشته باشیم، آنگاه باید یکی از آنها در $x = ۰$ برابر با صفر باشد و این همان ریشه‌ای است که با آن سروکار داریم. ساده‌تر است در مختصات (x,y) (با تعریف $y = z - h(x)$) محاسبات را انجام دهیم؛ زیرا در این صورت نقطهٔ تعادلِ مدل لایهٔ مرزی، به مبدأ مختصات منتقل می‌شود. در مختصات جدید، سیستم آشفتهٔ منفرد به شکل ذیل بیان می‌شود:

$$\dot{x} = f(x, y + h(x)) \qquad (۹ ـ ۳۲)$$

$$\varepsilon \dot{y} = g(x, y + h(x)) - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x} f(x, y + h(x)) \qquad (۹ ـ ۳۳)$$

با فرض اینکه: $\forall x \in D_۲,\ \|h(x)\| \le \xi(\|x\|)$ که ξ تابعی متعلق به کلاس $\mathcal{K}$ است، نگاشت $y = z - h(x)$ حافظ پایداری است؛ به تعبیر دیگر مبدأ معادله‌های (۹ ـ ۳۰) ـ (۹ ـ ۳۱) پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر مبدأ معادله‌های (۹ ـ ۳۲) ـ (۹ ـ ۳۳) پایدار مجانبی باشد. سیستم تقلیل یافتهٔ:

$$\dot{x} = f(x, h(x)) \qquad (۹ ـ ۳۴)$$

دارای نقطهٔ تعادلی در $x = ۰$ است، در صورتی که سیستم لایهٔ مرزی:

$$\frac{dy}{d\tau} = g(x, y + h(x)) \qquad (۹ ـ ۳۵)$$

(که $\tau = t/\varepsilon$ و x به عنوان پارامترهای ثابتی در نظر گرفته می‌شوند) دارای نقطهٔ تعادلی در $y = ۰$ می‌باشد. مبنای اصلی تحلیل این است که برای هر دو سیستم فرض کنیم مبدأ پایدار مجانبی است و تابع لیاپانوفی وجود دارد که شروط قضیهٔ لیاپانوف را برآورده می‌کند. در مورد سیستم لایهٔ مرزی لازم است مبدأ نسبت به پارامتر منجمد شدهٔ x پایدار مجانبی یکنواخت باشد، پیشتر در تعریف ۹ ـ ۱ مفهوم پایداری مجانبی یکنواخت را در این حالت بیان کرده‌ایم. به طور کلّی مبدأ معادلهٔ (۹ ـ ۳۵) را نسبت به x پایدار مجانبی یکنواخت گوییم اگر پاسخهای این معادله در رابطهٔ ذیل صدق کنند:

$$\|y(\tau)\| \le \beta(y(۰), \tau), \quad \forall \tau \ge ۰, \forall x \in D_۱$$

که β تابعی متعلق به کلاس $\mathcal{KL}$ می‌باشد. البته می‌توان این شرایط را از شروط تحمیل شده به تابع لیاپانوف معادلهٔ (۹ ـ ۳۵) نیز به دست آورد: بدین منظور با ملاحظهٔ کلّ سیستم آشفتهٔ منفردِ با معادلات (۹ ـ ۳۲) ـ (۹ ـ ۳۳) به عنوان اتصال سیستمهای تقلیل یافته و لایهٔ مرزی، می‌توان تابع مرکّب لیاپانوف[1] را به شکل ترکیب خطی توابع لیاپانوف متناظر با سیستم تقلیل یافته و سیستم لایهٔ مرزی تعریف کرد؛ سپس با محاسبهٔ مشتق تابع مرکّب لیاپانوف در امتداد مسیرهای حالت کلّ سیستم، شرایطی را می‌یابیم که تحت آن، تابع مرکّب می‌تواند برای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک ε، شروط قضیهٔ لیاپانوف را برآورده کند.

فرض کنید $V(x)$ تابع لیاپانوف سیستم تقلیل یافتهٔ (۹ ـ ۳۴) باشد که به ازای جمیع مقادیر $x \in D_۱$ در رابطهٔ ذیل صدق نماید:

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x, h(x)) \le -\alpha_۱ \psi_۱^۲(x) \qquad (۹ ـ ۳۶)$$

که $\psi_۱ : R^n \longrightarrow R$ تابعی معیّن مثبت است (یعنی: $\psi_۱(۰) = ۰$ و $\psi_۱(x) > ۰ \ \{\forall x \in D_۱ - \{۰\}\}$).

1. Composite Lyapunov function

ضمناً فرض کنید $W(x,y)$ تابع لیاپانوف سیستم لایهٔ مرزی (۹ ـ ۳۵) باشد که به ازای جمیع مقادیر $(x,y)\in D_1\times D_2$ ($D_2\subset R^m$ مجموعه‌ای همبند، باز و شامل $y=0$ می‌باشد)، در رابطهٔ ذیل صدق می‌کند:

$$\frac{\partial W}{\partial y}g(x,y+h(x))\le -\alpha_2\psi_2^2(y) \qquad (۹-۳۷)$$

که $\psi_2: R^m\longrightarrow R$، تابعی معیّن مثبت است (یعنی $\psi_2(0)=0$ و $\psi_2(y)>0$ $(\forall y\in D_2-\{0\})$). تابع لیاپانوف W می‌تواند به x وابسته باشد زیرا x یکی از پارامترهای سیستم است و تابع لیاپانوف در حالت کلّی تابعی از همهٔ پارامترهای سیستم می‌باشد. از آنجا که x پارامتر ثابتی نیست باید تأثیر وابستگی W به x را مدّنظر قرار دهیم. برای اینکه مطمئن شویم مبدأ معادلهٔ (۹ ـ ۳۵) پایدار مجانبی و نسبت به x یکنواخت است، فرض می‌کنیم تابع $W(x,y)$ در شرط ذیل صادق باشد:

$$W_1(y)\le W(x,y)\le W_2(y)\,,\quad \forall (x,y)\in D_1\times D_2 \qquad (۹-۳۸)$$

که W_1 و W_2 توابعی پیوسته و معیّن مثبت هستند. اکنون نامزد تابع مرکّب لیاپانوف را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$v(x,y)=(1-d)V(x)+dW(x,y),\qquad 0<d<1 \qquad (۹-۳۹)$$

که باید ثابت d را انتخاب کرد. با محاسبهٔ مشتق v در امتداد مسیرهای حالت کلّ سیستمِ (۹ ـ ۳۲) ـ (۹ ـ ۳۳) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}\dot v &= (1-d)\frac{\partial V}{\partial x}f(x,y+h(x))+\frac{d}{\varepsilon}\frac{\partial W}{\partial y}g(x,y+h(x))\\ &\quad -d\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}f(x,y+h(x))+d\frac{\partial W}{\partial x}f(x,y+h(x))\\ &=(1-d)\frac{\partial V}{\partial x}f(x,h(x))+\frac{d}{\varepsilon}\frac{\partial W}{\partial y}g(x,y+h(x))\\ &\quad +(1-d)\frac{\partial V}{\partial x}[f(x,y+h(x))-f(x,h(x))]\\ &\quad +d\left[\frac{\partial W}{\partial x}-\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right]f(x,y+h(x))\end{aligned}$$

بدین ترتیب تابع مشتق $\dot v$ را به صورت حاصل جمع چهار جمله بیان کرده‌ایم؛ دو جملهٔ اول، مشتق V و W در امتداد مسیرهای حالت سیستمهای تقلیل یافته و لایهٔ مرزی است. این دو جمله طبق نامعادلات (۹ ـ ۳۶) و (۹ ـ ۳۷) بترتیب نسبت به x و y معیّن منفی‌اند. دو جملهٔ دیگر بیانگر تأثیر اتصال میان دینامیکهای آرام و تند است که در $\varepsilon=0$ مورد اغماض قرار گرفته‌اند. این دو جمله در حالت کلّی نامعیّن هستند. نخستین جملهٔ این دو عبارت:

$$\frac{\partial V}{\partial x}[f(x,y+h(x))-f(x,h(x))]$$

نشاندهندهٔ اثر میزان انحراف معادلهٔ (۹ ـ ۳۲) از سیستم تقلیل یافتهٔ (۹ ـ ۳۴) است و جملهٔ دیگر:

$$\left[\frac{\partial W}{\partial x}-\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right]f(x,y+h(x))$$

بیانگر میزان انحراف معادلهٔ (۹ ـ ۳۳) از سیستم لایهٔ مرزی (۹ ـ ۳۴) می‌باشد، ضمن اینکه اثر منجمدکردن x را در حین تحلیل لایهٔ مرزی نشان می‌دهد. فرض کنید این جمله‌های آشفتگی در روابط ذیل صدق کنند:

$$\frac{\partial V}{\partial x}[f(x,y+h(x))-f(x,h(x))]\le\beta_1\psi_1(x)\psi_2(y) \qquad (۹-۴۰)$$

$$\left[\frac{\partial W}{\partial x}-\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right]f(x,y+h(x))\le\beta_2\psi_1(x)\psi_2(y)+\gamma\psi_2^2(y) \qquad (۹-۴۱)$$

که β_1، β_2 و γ ثابتهایی غیرمنفی هستند، در این صورت از نامعادلات (۹ ـ ۳۶) ، (۹ ـ ۳۷)، (۹ ـ ۳۸) و (۹ ـ ۴۱) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}\dot v &\le -(1-d)\alpha_1\psi_1^2(x)-\frac{d}{\varepsilon}\alpha_2\psi_2^2(y)+(1-d)\beta_1\psi_1(x)\psi_2(y)\\ &\quad +d\beta_2\psi_1(x)\psi_2(y)+d\gamma\psi_2^2(y)\\ &=-\psi^T(x,y)\,\Lambda\,\psi(x,y)\end{aligned}$$

که:

$$\psi(x,y)=\begin{bmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(y)\end{bmatrix}$$

و:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} (1-d)\alpha_1 & -\frac{1}{2}(1-d)\beta_1 - \frac{1}{2}d\beta_2 \\ -\frac{1}{2}(1-d)\beta_1 - \frac{1}{2}d\beta_2 & d\left(\frac{\alpha_2}{\varepsilon} - \gamma\right) \end{bmatrix}$$

سمت راست آخرین نامعادله، نسبت به ψ به صورت مجذوری است. این عبارت با شرط ذیل، معیّن منفی است:

$$d(1-d)\alpha_1\left(\frac{\alpha_2}{\varepsilon} - \gamma\right) > \frac{1}{4}[(1-d)\beta_1 + d\beta_2]^2$$

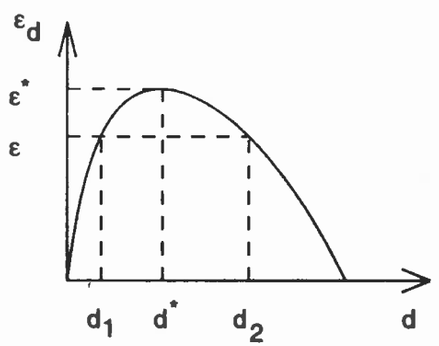
که هم ارز عبارت ذیل است:

$$\varepsilon < \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1\gamma + \frac{1}{4d(1-d)}[(1-d)\beta_1 + d\beta_2]^2} \triangleq \varepsilon_d \qquad (۹-۴۲)$$

وابستگی ε_d به d در شکل ۹ ـ ۱۲ نشان داده شده است و ملاحظه می‌شود مقدار بیشینهٔ ε_d در $d^* = \beta_1/(\beta_1+\beta_2)$ حاصل می‌آید که برابر است با:

$$\varepsilon^* = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1\gamma + \beta_1\beta_2} \qquad (۹-۴۳)$$

بنابراین نتیجه می‌شود مبدأ سیستم (۹ ـ ۳۲) ـ (۹ ـ ۳۳) به ازای جمیع مقادیر $\varepsilon < \varepsilon^*$، پایدار مجانبی است. قضیهٔ ۹ ـ ۲ این یافته‌ها را خلاصه می‌کند.



شکل ۹ ـ ۱۲ کران بالایی ε

قضیهٔ ۹ ـ ۲ *سیستم آشفتهٔ منفرد (۹ ـ ۳۲) ـ (۹ ـ ۳۳) را در نظر بگیرید و فرض کنید توابع لیاپانوف $V(x)$ و $W(x,y)$ چنان وجود دارند که بترتیب در روابط (۹ ـ ۳۶) ـ (۹ ـ ۳۸) و (۹ ـ ۴۰) ـ (۹ ـ ۴۱) صدق می‌کنند. در این صورت اگر ε_d و ε^* با عبارتهای (۹ ـ ۴۲) و (۹ ـ ۴۳) تعریف شوند، آنگاه مبدأ معادلات (۹ ـ ۳۲) ـ (۹ ـ ۳۳) به ازای جمیع مقادیر $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ پایدار مجانبی است، علاوه بر این $v(x,y)$ (که با معادلهٔ (۹ ـ ۳۹) تعریف می‌شود) به ازای $\varepsilon \in (0, \varepsilon_d)$، یک تابع لیاپانوف است.* ◇

تحلیل پایداریِ منتهی به قضیهٔ ۹ ـ ۲، روند مشخصی را برای تعیین تابع لیاپانوفِ مناسب برای سیستم آشفتهٔ منفرد (۹ ـ ۳۲) ـ (۹ ـ ۳۳) تبیین می‌کند. بدین منظور ابتدا با بررسی مبدأ سیستمهای تقلیل یافته و لایهٔ مرزی، به دنبال توابع لیاپانوف $V(x)$ و $W(x,y)$ می‌گردیم که در روابط (۹ ـ ۳۶) ـ (۹ ـ ۳۸) صدق کنند، پس از آن نامساویهای (۹ ـ ۴۰) ـ (۹ ـ ۴۱) (که از آنها به عنوان شروط اتصال[1] یاد می‌شود) بررسی می‌گردند، بدیهی است ممکن است پیش از یافتن توابع مناسب لیاپانوف، توابع زیادی به عنوان V و W انتخاب شوند، به عنوان رهنمودی در این جستجو باید دقت کرد که برای برآوردن شروط اتصال باید داشته باشیم:

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \le k_1\psi_1(x); \quad \|f(x,h(x))\| \le k_2\psi_1(x)$$

$$\|f(x,y+h(x)) - f(x,h(x))\| \le k_3\psi_2(y)$$

$$\left\| \frac{\partial W}{\partial y} \right\| \le k_4\psi_2(y); \quad \left\| \frac{\partial W}{\partial x} \right\| \le k_5\psi_2(y)$$

تابع لیاپانوف $V(x)$ که در رابطهٔ (۹ ـ ۳۶) صدق کند و برای آن داشته باشیم: $\|\partial V/\partial x\| \le k_1\psi_1(x)$، تابع لیاپانوف نوع مجذوری[2] و ψ_1 تابع قیاس[3] نامیده می‌شود. بنابراین جستجویی موفقیت‌آمیز است که بتواند توابع لیاپانوف نوع مجذوری V و W را به همراه توابع قیاس ψ_1 و ψ_2 چنان به دست دهد که $f(x,h(x))$ به ازای $\psi_1(x)$ و $[f(x,y+h(x)) - f(x,h(x))]$ نیز به ازای $\psi_2(y)$ بیشینه شود. چنانچه بتوانیم V و W را بیابیم می‌توان نتیجه گرفت مبدأ برای مقادیر $\varepsilon < \varepsilon^*$، پایدار مجانبی است. ضمناً به‌ازای مقدار

1. Interconnection conditions
2. Quadratic-type Lyapunov function
3. Comparison function

معلوم $\varepsilon < \varepsilon^*$ محدودهٔ (d_1, d_2)، مطابق شکل ۹ ـ ۱۲، چنان یافت می‌شود که به ازای هر مقدار $d \in (d_1, d_2)$، تابع $v(x,y) = (1-d)V(x) + dW(x,y)$، تابع لیاپانوف مناسبی باشد. آزادی در انتخاب d، راهکار خوبی برای دستیابی به سایر خواسته‌ها (مثلاً بهبود تخمین ناحیهٔ جذابیت) است.

مثال ۹ ـ ۹ سیستم مرتبهٔ دوم ذیل:

$$\dot{x} = f(x,z) = x - x^3 + z$$

$$\varepsilon \dot{z} = g(x,z) = -x - z$$

دارای یک نقطهٔ تعادل یکتا در مبدأ است. با در نظر گرفتن $y = z - h(x) = z + x$، سیستم را به شکل زیر بازمی‌نویسیم:

$$\dot{x} = -x^3 + y$$

$$\varepsilon \dot{y} = -y + \varepsilon(-x^3 + y)$$

برای سیستم تقلیل یافتهٔ:

$$\dot{x} = -x^3$$

تابع $V(x) = \frac{1}{4}x^4$ را انتخاب می‌کنیم که عبارت (۹ ـ ۳۶) را به ازای $\psi_1(x) = |x|^3$ و $\alpha_1 = 1$ برآورده می‌نماید. علاوه براین برای سیستم لایهٔ مرزی: $dy/d\tau = -y$، تابع $W(y) = \frac{1}{2}y^2$ را انتخاب می‌کنیم، این تابع به ازای مقادیر $\psi_2(y) = |y|$ و $\alpha_2 = 1$ در عبارت (۹ ـ ۳۸) صدق می‌نماید؛ با توجه به شروط اتصال (۹ ـ ۴۰) ـ (۹ ـ ۴۱) داریم:

$$\frac{\partial V}{\partial x}[f(x,y+h(x)) - f(x,h(x))] = x^3 y \le \psi_1 \psi_2$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} f(x,y+h(x)) = y(-x^3 + y) \le \psi_1 \psi_2 + \psi_2^2$$

باید دقت کرد که $\partial W/\partial x = 0$ است، بنابراین عبارتهای (۹ ـ ۴۰) ـ (۹ ـ ۴۱) به ازای مقادیر

$\beta_1 = \beta_2 = \gamma = 1$ برقرار و در نتیجه مبدأ به ازای مقادیر $\varepsilon < \varepsilon^* = 0/5$ پایدار مجانبی است. در حقیقت چون همهٔ شروط به‌طور جامع برآورده می‌شود و تابع $v(x,y) = (1-d)V(x) + dW(y)$ نیز بیکران شعاعی است لذا مبدأ به ازای $\varepsilon < 0/5$، پایدار مجانبی جامع می‌باشد. برای تعیین میزان محافظه‌کاری این کران، معادله مشخصهٔ[1] سیستمِ خطی شده در مبدأ را در نظر می‌گیریم:

$$\lambda^2 + (\frac{1}{\varepsilon} - 1)\lambda = 0$$

که نشان می‌دهد مبدأ به ازای مقادیر $\varepsilon > 1$ ناپایدار است. چون سیستم مورد بحث، سیستم ساده‌ای از مرتبهٔ دوم می‌باشد می‌توان مشتق تابع لیاپانوف ذیل را:

$$v(x,y) = \frac{1-d}{4}x^4 + \frac{d}{2}y^2$$

در امتداد مسیرهای حالت کلّ سیستم آشفتهٔ منفرد محاسبه کرد و ملاحظه نمود آیا می‌توان کران بالای کمتر محافظه‌کارانه‌ای را (نسبت به مقدار حاصل از قضیهٔ ۹ ـ ۲) برای ε به دست آورد:

$$\dot{v} = (1-d)x^3(-x^3+y) - \frac{d}{\varepsilon}y^2 + dy(-x^3+y)$$

$$= -(1-d)x^6 + (1-2d)x^3 y - d\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)y^2$$

واضح است انتخاب $d = \frac{1}{2}$، جملهٔ دوم عبارت فوق را صفر می‌کند و در نتیجه داریم:

$$\dot{v} = -\frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)y^2$$

که به ازای جمیع مقادیر $\varepsilon > 1$، معیّن منفی است. این تخمین نسبت به نتیجهٔ حاصل از قضیهٔ ۹ ـ ۲ کمتر محافظه‌کارانه است، در حقیقت این مقدار، محدودهٔ واقعی ε را نشان می‌دهد که به ازای آن، مبدأ پایدار مجانبی است. Δ

مثال ۹ ـ ۱۰ سیستم ذیل:

$$\dot{x} = -x + z$$

$$\varepsilon \dot{z} = \tan^{-1}(1 - x - z)$$

1. Charactristic equation

دارای یک نقطهٔ تعادل در $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ می‌باشد. تغییر متغیر:

$$\tilde{x} = x - \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \tilde{z} = z - \frac{1}{2}$$

این نقطهٔ تعادل را به مبدأ مختصات انتقال می‌دهد. برای سادگی، از علامت مَد (~) چشمپوشی می‌کنیم و معادلهٔ حالت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\dot{x} = -x + z$$

$$\varepsilon \dot{z} = -\tan^{-1}(x + z)$$

معادلهٔ $z = h(x) = -x$ است. در این $-\tan^{-1}(x+z) = 0$ دارای ریشهٔ منحصر به فرد صورت با اعمال تغییر متغیر $y = z + x$ نتیجه می‌شود:

$$\dot{x} = -2x + y$$

$$\varepsilon \dot{y} = -\tan^{-1} y + \varepsilon(-2x + y)$$

برای سیستم تقلیل یافته، تابع $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ را انتخاب می‌کنیم که به ازای مقادیر $\alpha_1 = 2$ و $\psi_1(x) = |x|$ در عبارت (۹ ـ ۳۶) صدق می‌کند. برای سیستم لایهٔ مرزی نیز تابع $W(y) = \frac{1}{2}y^2$ را برمی‌گزینیم، در این صورت عبارت (۹ ـ ۳۸) به ازای جمیع مقادیر $y \in D_2 = \{y \mid |y| < \rho\}$ به شکل زیر درمی‌آید:

$$\frac{dW}{dy}[-\tan^{-1} y] = -y \tan^{-1} y \leq -\frac{\tan^{-1}\rho}{\rho} y^2$$

بنابراین نامعادلهٔ (۹ ـ ۳۸) به ازای $\alpha_2 = (\tan^{-1}\rho)/\rho$ و $\psi_2(y) = |y|$ برقرار خواهد بود. شروط اتصال (۹ ـ ۴۰) ـ (۹ ـ ۴۱) به ازای مقادیر $\beta_1 = 1$، $\beta_2 = 2$ و $\gamma = 1$ برآورده می‌شود، در نتیجه مبدأ به ازای جمیع مقادیر $\varepsilon < \varepsilon^* = (\tan^{-1}\rho)/2\rho$، پایدار مجانبی است. در واقع مبدأ پایدار نمایی است زیرا v نسبت به (x, y) مجذوری است ضمن اینکه کران بالای معیّن منفی $\dot{v}$ نیز نسبت به (x, y) مجذوری می‌باشد. Δ

می‌توان تحلیل لیاپانوف ارائه شده در این بخش را به سیستمهای ناخودگردان نیز تعمیم داد.

در اینجا موضوع را بیشتر باز نمی‌کنیم* و به جای آن با در نظر گرفتن حالت پایداری نمایی و استفاده از قضایای معکوس لیاپانوف، نتیجه‌ای را اثبات می‌کنیم که از اهمیت مفهومی فراوانی برخوردار است.

قضیهٔ ۹ ـ ۳ سیستم آشفتهٔ منفرد ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(t, x, z, \varepsilon) \qquad (۹ ـ ۴۴)$$

$$\varepsilon \dot{z} = g(t, x, z, \varepsilon) \qquad (۹ ـ ۴۵)$$

و فرض کنید شروط زیر به ازای جمیع مقادیر $(t, x, \varepsilon) \in [0, \infty) \times B_2 \times [0, \varepsilon_0]$ *برقرار باشد:*

- $f(t, 0, 0, \varepsilon) = 0$ و $g(t, 0, 0, \varepsilon) = 0$؛
- *معادلهٔ* $g(t, x, z, 0) = 0$ *دارای ریشهٔ تنهای* $z = h(t, x)$ *است که:* $h(t, 0) = 0$؛
- *توابع* f، g و h *و مشتقات جزئی‌شان تا مرتبهٔ دوم و به ازای مقادیر* $z - h(t, x) \in \beta_\rho$ *کراندارند؛*
- *مبدأ سیستم تقلیل یافتهٔ* $\dot{x} = f(t, x, h(t, x), 0)$، *پایدار نمایی است؛*
- *مبدأ سیستم لایهٔ مرزی* $dy/d\tau = g(t, x, y + h(t, x), 0)$ *نسبت به* (t, x) *پایدارنمایی یکنواخت است.*

در این صورت مقدار $\varepsilon^* > 0$ *چنان وجود دارد که به ازای جمیع مقادیر* $\varepsilon < \varepsilon^*$، *مبدأ سیستم* (۹ ـ ۴۴) ـ (۹ ـ ۴۵) *پایدار نمایی است.* $\diamond$

برهان: طبق قضیهٔ ۳ ـ ۱۲، می‌توان برای سیستم تقلیل یافته، تابع لیاپانوف $V(t, x)$ را چنان یافت که به ازای مقادیر $x \in B_{r_0}$ $(r_0 < r)$ داشته باشیم:

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, h(t, x), 0) \leq -c_3 \|x\|^2$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4 \|x\|$$

که c_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ ثابتهای مثبتی هستند. طبق لم ۵ ـ ۱۱، می‌توان برای سیستم لایهٔ مرزی،

---

* برای بررسی مشروح حالت ناخودگردان به [۹۵، بخش ۷ ـ ۵] مراجعه کنید.

تابع لیاپانوف $W(t,x,y)$ را چنان یافت که به ازای مقادیر $y \in B_{\rho_0}$ $(\rho_0 \le \rho)$ در شروط ذیل صدق نماید:

$$b_1 \|y\|^2 \le W(t,x,y) \le b_2 \|y\|^2$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} g(t,x,y+h(t,x),0) \le -b_3 \|y\|^2$$

$$\left\| \frac{\partial W}{\partial y} \right\| \le b_4 \|y\|$$

$$\left\| \frac{\partial W}{\partial t} \right\| \le b_5 \|y\|^2 ; \quad \left\| \frac{\partial W}{\partial x} \right\| \le b_6 \|y\|^2$$

که b_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ ثابتهای مثبتی است. با اعمال تغییر متغیر $y = z - h(t,x)$، معادلات (۹ ـ ۴۴) ـ (۹ ـ ۴۵) به شکل ذیل درمی‌آید:

$$\dot{x} = f(t,x,y+h(t,x),\varepsilon) \qquad (۹ ـ ۴۶)$$

$$\varepsilon \dot{y} = g(t,x,y+h(t,x),\varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x} f(t,x,y+h(t,x),\varepsilon) \qquad (۹ ـ ۴۷)$$

هدف این است که از تابع $v(t,x,y) = V(t,x) + W(t,x,y)$ به عنوان نامزد لیاپانوف برای سیستم (۹ ـ ۴۶) ـ (۹ ـ ۴۷) استفاده کنیم. بدین منظور تخمین زیر را در همسایگی مبدأ در نظر می‌گیریم: چون f و g به ازای جمیع مقادیر $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$، در مبدأ صفر می‌شوند لذا نسبت به ε و به طور خطی نسبت به حالت (x,y)، لیپ شیتز هستند. به طور مشخص می‌توان نوشت:

$$\|f(t,x,y+h(t,x),\varepsilon) - f(t,x,y+h(t,x),0)\| \le \varepsilon L_1 (\|x\| + \|y\|)$$

$$\|g(t,x,y+h(t,x),\varepsilon) - g(t,x,y+h(t,x),0)\| \le \varepsilon L_2 (\|x\| + \|y\|)$$

همچنین:

$$\|f(t,x,y+h(t,x),0) - f(t,x,h(t,x),0)\| \le L_3 \|y\|$$

$$\|f(t,x,h(t,x),0)\| \le L_4 \|x\|$$

$$\left\| \frac{\partial h}{\partial t} \right\| \le k_1 \|x\| ; \quad \left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\| \le k_2$$

در این عبارت از این نکته استفاده شده که به ازای جمیع مقادیر t، توابع $f(t,x,h(t,x),0)$ و $h(t,x)$ در نقطهٔ $x = 0$، برابر با صفر است. با استفاده از این تخمینها و ویژگیهای توابع V و W می‌توان تحقیق کرد که مشتق تابع v در امتداد مسیرهای حالت معادلات (۹ ـ ۴۶) ـ (۹ ـ ۴۷) به ازای جمیع مقادیر $\|y\| \le \rho_0$ در نامساوی ذیل صدق می‌نماید:

$$\dot{v} \le -a_1 \|x\|^2 + \varepsilon a_2 \|x\|^2 - \frac{a_3}{\varepsilon} \|y\|^2 + a_4 \|y\|^2$$

$$+ a_5 \|x\| \|y\| + a_6 \|x\| \|y\|^2 + a_7 \|y\|^3$$

این نامساوی را می‌توان به شکل زیر ساده کرد:

$$\dot{v} \le -a_1 \|x\|^2 + \varepsilon a_2 \|x\|^2 - \frac{a_3}{\varepsilon} \|y\|^2 + a_8 \|y\|^2 + 2a_9 \|x\| \|y\|$$

$$= -\begin{bmatrix} \|x\| \\ \|y\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_1 - \varepsilon a_2 & -a_9 \\ -a_9 & (a_3/\varepsilon) - a_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|x\| \\ \|y\| \end{bmatrix}$$

بنابراین مقدار $\varepsilon^* > 0$ چنان وجود دارد که به ازای $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ بتوان نوشت:

$$\dot{v} \le -2\gamma v, \quad \gamma > 0$$

در نتیجه:

$$v(t,x(t),y(t)) \le \exp[-2\gamma(t-t_0)] v(t_0,x(t_0),y(t_0))$$

و از ویژگیهای V و W نتیجه می‌شود:

$$\left\| \begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix} \right\| \le K_1 \exp[-\gamma(t-t_0)] \left\| \begin{matrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{matrix} \right\|$$

چون $y = z - h(t,x)$ و $\|h(t,x)\| \le k_2 \|x\|$ است لذا داریم:

$$\left\| \begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix} \right\| \leq K_2 \exp\left[-\gamma (t - t_0)\right] \left\| \begin{matrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{matrix} \right\|$$

و بدین ترتیب برهان کامل می‌شود. □

قضیهٔ ۹ ـ ۳ به لحاظ مفهومی مهم است زیرا بیانگر قوام پایداری نمایی نسبت به دینامیکهای مدل نشدهٔ سریع (فرکانس زیاد) می‌باشد. معمولاً در تحلیل سیستمهای دینامیکی از مدلهای با مرتبهٔ تقلیل یافته استفاده می‌شود که با چشمپوشی از پارامترهای کوچک «مزاحم» (که موجب افزایش مرتبهٔ مدل می‌گردد) حاصل آمده است. می‌توان این کاهش مدل را به شکل مسألهٔ آشفتگی منفرد در نظر گرفت به طوری که مدل کامل آشفتهٔ منفرد، نشاندهندهٔ سیستم واقعی (همراه با پارامترهای مزاحم) و مدل تقلیل یافته؛ همان مدل ساده شدهٔ مورد استفاده در تحلیل؛ باشد. بدین ترتیب کاملاً معقول است که فرض کنیم مدل لایهٔ مرزی دارای مبدئی با پایداری نمایی می‌باشد، در حقیقت چنانچه دینامیک متناظر با عناصر مزاحم، ناپایدار باشد نباید آنها را در اولین گام حذف کنیم. در بیشتر مسائلِ کاربردی، فرض پایداری نمایی به جای پایداری مجانبیِ صرف، و یا در نظرگرفتن فرض پایداری نمایی یکنواخت، فرضی منطقی است و کافی است اشاره شود این فرضیات در حالتی که دینامیک سریع، خطی است به طور خود به خود برآورده می‌شود. فرض کنید از تحلیل پایداری سیستمِ با مرتبهٔ تقلیل یافته نتیجه شود مبدأ آن پایدار نمایی است، در این صورت قضیهٔ ۹ ـ ۳ ما را مطمئن می‌سازد اگر دینامیکِ محذوف سیستم به اندازهٔ کافی سریع باشد، آنگاه مبدأ سیستم اصلی نیز پایدار نمایی است. مثال ذیل نشان می‌دهد چگونه می‌توان از این ویژگیِ قوام در طراحی کنترل بهره جُست.

مثال ۹ ـ ۱۱ مسألهٔ پایدارسازی پسخور سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(t, x, v)$$

$$\varepsilon \dot{z} = Az + Bu$$

$$v = Cz$$

که $f(t, 0, 0) = 0$ ماتریس هرویتز است. این سیستم در حالت حلقه ـ باز دارای یک نقطهٔ تعادل

در مبدأ است و هدف آن است که با طراحی قانون کنترل پسخور حالت، مبدأ را پایدار کند. بخش خطی این مدل نشاندهندهٔ دینامیک محرّک است که به طور معمول بسیار سریعتر از دینامیک دستگاه (که با معادلهٔ غیرخطی $\dot{x} = f$ نمایش داده می‌شود) عمل می‌کند. برای ساده‌کردن مسألهٔ طراحی، با انتخاب مقدار $\varepsilon = 0$ و جایگزینی $v = -CA^{-1}Bu$ در معادلهٔ دستگاه، از دینامیک محرّک چشمپوشی می‌کنیم. برای سادگی با استفاده از نماد $CA^{-1}B = I$ – مدل تقلیل یافته را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$

به کمک این مدل، قانون کنترل پسخور حالت $u = \gamma(t, x)$ را چنان طرح می‌کنیم که مبدأ مدل حلقه ـ بستهٔ زیر:

$$\dot{x} = f(t, x, \gamma(t, x))$$

پایدار نمایی باشد. این مدل را به عنوان سیستم حلقه ـ بستهٔ نامی در نظر می‌گیریم. فرض کنید چنین قانون کنترلی را طراحی کرده باشیم، سؤال این است که آیا این کنترل، سیستم واقعی (شامل دینامیک محرّک) را نیز پایدار می‌سازد؟ با اعمال قانون کنترل به سیستم واقعی، معادلهٔ حلقه ـ بسته برابر خواهد شد با:

$$\dot{x} = f(t, x, Cz)$$

$$\varepsilon \dot{z} = Az + B\gamma(t, x)$$

ملاحظه می‌شود که با نوعی مسألهٔ آشفتگی منفرد سروکار داریم که مدل آشفتهٔ منفرد کامل، همان سیستم حلقه ـ بستهٔ واقعی و مدل تقلیل یافته، پایدار نمایی است؛ مدل لایهٔ مرزی: $dy/d\tau = Ay$، مستقل از (t, x) و مبدأ آن نیز پایدار نمایی است زیرا A ماتریس هرویتز می‌باشد. اگر f و γ آنقدر هموار باشند که شروط قضیهٔ ۹ ـ ۳ را برآورده سازند آنگاه مبدأ سیستم حلقه ـ بستهٔ واقعی نیز به ازای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک ε، پایدار نمایی خواهد بود. این نتیجه مشروعیت روند ویژهٔ ساده‌سازی مدل (حذف دینامیک محرّک) را بخوبی نشان می‌دهد. Δ

۹ ـ ۵ آشفتگی منفرد بر بازهٔ نامحدود زمانی

قضیهٔ ۹ ـ ۱ فقط بر بازه‌های زمانی از مرتبهٔ (۱) O اعتبار دارد، این موضوع بوضوح از برهان آن قضیه نتیجه می‌شود. به طور مشخص، طبق رابطهٔ (آ ـ ۳۶) می‌توان نوشت:

$$\| x(t,\varepsilon) - \bar{x}(t) \| \le \varepsilon k_{۳} [۱ + t_{۱} - t_{۰}] \exp [L_{۶} (t_{۱} - t_{۰})]$$

به ازای هر مقدار محدود $t_{۱}$، تخمین فوق از مرتبهٔ $O(\varepsilon)$ است اما برای مقادیر $t \ge t_{۰}$ این تخمین به‌طور یکنواخت نسبت به t از مرتبهٔ $O(\varepsilon)$ نیست. برای اینکه عبارت اخیر نیز برقرار باشد باید نشان دهیم:

$$\| x(t,\varepsilon) - \bar{x}(t) \| \le \varepsilon k, \quad \forall t \in [t_{۰}, \infty)$$

چنانچه شرطهای اضافی دیگری برای تضمین پایداری نمایی پاسخهای مسألهٔ تقلیل یافته در نظر گرفته شود می‌توان به عبارت فوق دست یافت. قضیهٔ ذیل، قضیهٔ ۹ ـ ۱ را بر بازه‌های نامحدود زمانی تعمیم می‌دهد:

قضیهٔ ۹ ـ ۴ *مسألهٔ آشفتگی منفرد (۹ ـ ۶) ـ (۹ ـ ۷) را در نظر بگیرید و فرض کنید $z = h(t,x)$ یکی از ریشه‌های تنهای معادلهٔ (۹ ـ ۳) باشد. علاوه بر این فرض نمایید شروط ذیل به ازای جمیع مقادیر $[۰, \varepsilon_{۰}] \times [۰, \rho_{۰}] \times B_{r} \times B_{\rho} \times [۰, \infty)$ $(t, x, z - h(t,x), \varepsilon)$ برقرار باشد:*

- *توابع f، g و مشتقات جزئی اولشان نسبت به (x, z, ε)، پیوسته و کراندارند. تابع $h(t,x)$ و ماتریس ژاکوبیِ $[\partial g(t,x,z,۰)/\partial z]$ نیز دارای مشتقات جزئی اول کراندار نسبت به آرگومانهایشان است. علاوه بر این مشتق جزئی اول ماتریس ژاکوبیِ $[\partial f(t,x,h(t,x),۰)/\partial x]$ نسبت به x کراندار می‌باشد. داده‌های اولیهٔ $\xi(\varepsilon)$ و $\eta(\varepsilon)$ نیز توابعی هموار از ε هستند.*
- *مبدأ سیستم تقلیل یافتهٔ معادلهٔ (۹ ـ ۵)، پایدار نمایی است.*
- *مبدأ مدل لایهٔ مرزی معادلهٔ (۹ ـ ۱۴) نسبت به (t,x)، پایدار نمایی یکنواخت است. به طور مشخص، پاسخهای معادلهٔ (۹ ـ ۱۴) به ازای مقدار $\rho/k \le \rho_{۰}$ در عبارت (۹ ـ ۱۵) صدق می‌کند.*

در این صورت ثابتهای مثبت $\mu_{۱}$، $\mu_{۲}$ و ε^{*} چنان وجود دارد که به ازای جمیع مقادیر:

$$\| \xi(۰) \| < \mu_{۱}, \quad \| \eta(۰) - h(t_{۰}, \xi(۰)) \| < \mu_{۲}, \quad ۰ < \varepsilon < \varepsilon^{*}$$

مسألهٔ آشفتگی منفرد (۹ ـ ۶) ـ (۹ ـ ۷) برای همهٔ مقادیر $t \le t_{۰}$، دارای پاسخ یکتای $x(t,\varepsilon)$ و $z(t,\varepsilon)$ است و روابط ذیل به ازای مقادیر $t \in [t_{۰}, \infty)$ به طور یکنواخت برقرار می‌باشد:

$$x(t,\varepsilon) - \bar{x}(t) = O(\varepsilon) \qquad (۹ ـ ۴۸)$$

$$z(t,\varepsilon) - h(t, \bar{x}(t)) - \hat{y}(t/\varepsilon) = O(\varepsilon) \qquad (۹ ـ ۴۹)$$

که $\bar{x}(t)$ و $\hat{y}(t)$ پاسخهای مسألهٔ تقلیل یافته و لایهٔ مرزی (۹ ـ ۸) و (۹ ـ ۱۳) است. علاوه بر این برای هر مقدار مشخص $t_{b} > t_{۰}$، می‌توان مقدار $\varepsilon^{**} \le \varepsilon^{*}$ را چنان یافت که عبارت:

$$z(t,\varepsilon) - h(t, \bar{x}(t)) = O(\varepsilon) \qquad (۹ ـ ۵۰)$$

با شرط $\varepsilon < \varepsilon^{**}$ به طور یکنواخت برای $t \in [t_{b}, \infty)$ برقرار باشد. ◇

برهان: پیوست آ ـ ۱۵.

مثال ۹ ـ ۱۲ مسألهٔ آشفتگی منفرد ذیل را برای مدار الکتریکی مربوط به مثال ۹ ـ ۳ در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = ۱ - x - \frac{۱}{۲}[\psi(x+z) + \psi(x-z)], \quad x(۰) = \xi_{۰}$$

$$\varepsilon \dot{z} = -(\varepsilon + ۲) z - \frac{\varepsilon}{۲}[\psi(x+z) - \psi(x-z)], \quad z(۰) = \eta_{۰}$$

و فرض کنید داشته باشیم:

$$\psi(v) = a\left[\exp\left(\frac{v}{b}\right) - ۱\right], \quad a > ۰, \quad b > ۰$$

در بازنویسی این معادله از مثال ۹ ـ ۳، از ذکر زیرنویس r صرف‌نظر کرده‌ایم. فرضیات مشتق‌پذیری و کرانمندی قضیهٔ ۹ ـ ۴ روی هر مجموعهٔ فشرده‌ای از (x,z) برآورده می‌شود. در این صورت مدل تقلیل یافتهٔ:

$$\dot{x} = ۱ - x - a\left[\exp\left(\frac{x}{b}\right) - ۱\right]$$

دارای نقطهٔ تعادل یکتایی در $x = p^*$ است که p^* نیز ریشهٔ منحصر به فرد معادلهٔ ذیل می‌باشد:

$$۰ = ۱ - p^* - a\left[exp\left(\frac{p^*}{b}\right) - ۱\right]$$

واضح است که $۰ < p^* < ۱$ است. مقدار ژاکوبیِ:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=p^*} = -۱ - \frac{a}{b} exp\left(\frac{p^*}{b}\right) < -۱$$

منفی است، بنابراین نقطهٔ تعادل $x = p^*$، پایدار نمایی است. تغییر متغیر $\tilde{x} = x - p^*$، نقطهٔ تعادل را به مبدأ انتقال می‌دهد. مدل لایهٔ مرزیِ $dz/d\tau = -۲z$ مستقل از x و مبدأ آن پایدار نمایی است در نتیجه همهٔ شروط قضیهٔ ۹ ـ ۴ تأمین می‌شود و تخمینهای (۹ ـ ۴۸) ـ (۹ ـ ۵۰) به ازای $h = ۰$ برای تمامی مقادیر $t \geq ۰$ برقرار است. Δ

مثال ۹ ـ ۱۳ کنترل تطبیقی دستگاه مشخص شده با تابع تبدیل مرتبهٔ دوم ذیل را در نظر بگیرید:

$$\tilde{P}(s) = \frac{k_p}{(s - a_p)(\varepsilon s + ۱)}$$

که a_p، $k_p > ۰$ و $\varepsilon > ۰$ پارامترهای مجهول هستند؛ ε نیز نشاندهندهٔ ثابت زمانی «مزاحم» و کوچکی است. فرض کنید از مقدار ε چشمپوشی کرده و به تابع تبدیل زیر رسیده‌ایم:

$$P(s) = \frac{k_p}{s - a_p}$$

می‌خواهیم کنترلگر تطبیقی مناسبی برای این تابع تبدیل مرتبهٔ اول طراحی کنیم. در بخش ۱ ـ ۱ ـ ۶ نشان دادیم کنترلگر تطبیقی مدل مرجع با معادلات ذیل معرفی می‌شود:

$$u(t) = \theta_۱(t) r(t) + \theta_۲(t) y_p(t)$$

$$\dot{\theta}_۱ = -\gamma [y_p(t) - y_m(t)] r(t)$$

$$\dot{\theta}_۲ = -\gamma [y_p(t) - y_m(t)] y_p(t)$$

که y_p، u، r و y_m بترتیب خروجی دستگاه، ورودی کنترل، ورودی مرجع و خروجی مدل مرجع می‌باشد. در بخش ۱ ـ ۱ ـ ۶ نشان داده شد با مدل مرتبهٔ اول دستگاه و مدل مرجع به شکل ذیل:

$$\dot{y}_p = a_p y_p + k_p u$$

و:

$$\dot{y}_m = a_m y_m + k_m r \ , \quad k_m > ۰$$

سیستم کنترل تطبیقی حلقه ـ بسته به شکل معادلهٔ حالت مرتبهٔ سوم زیر درمی‌آید:

$$\dot{e}_۰ = a_m e_۰ + k_p \phi_۱ r(t) + k_p \phi_۲ (e_۰ + y_m(t))$$

$$\dot{\phi}_۱ = -\gamma e_۰ r(t)$$

$$\dot{\phi}_۲ = -\gamma e_۰ (e_۰ + y_m(t))$$

که:

$$e_۰ = y_p - y_m \ , \ \phi_۱ = \theta_۱ - \theta_۱^* \ , \ \phi_۲ = \theta_۲ - \theta_۲^*$$

و: $\theta_۱^* = k_m/k_p$ و $\theta_۲^* = (a_m - a_p)/k_p$. با تعریف: $x = [e_۰ \ \phi_۱ \ \phi_۲]^T$ به عنوان بردار حالت، معادلهٔ حالت را به صورت $\dot{x} = f_۰(t, x)$ باز می‌نویسیم که: $f_۰(t, ۰) = ۰$. این معادلهٔ مرتبهٔ سوم حالت را سیستم کنترل تطبیقی نامی می‌نامند و برای تحلیل پایداری از آن استفاده می‌کنیم. فرض نمایید مبدأ این مدل پایدار نمایی باشد*، در این صورت با اعمال کنترلگر تطبیقی به

---

* در بخش ۱۳ ـ ۴ نشان داده خواهد شد که این حالت تحت شرط تداوم تحریک[1] بروز می‌کند؛ به طور مشخص، مثال ۱۳ ـ ۱۵ را ملاحظه کنید که در آن نشان داده شده اگر داشته باشیم: $r(t) = ۱ + a \sin \omega t$، آنگاه مبدأ پایدار نمایی خواهد بود. نکتهٔ شایان توجه آن است که تحلیل ما در این مثال مبتنی بر ثابت بودن $r(t)$ است و بر این اساس رفتار مجانبیِ سیستم برای مقادیر کوچک ε بررسی شده است. چنانچه مقدار کوچک ثابتی را برای ε برگزینیم فرضیات پیشگفته، قید دیگری را بر $r(t)$ تحمیل می‌کند که به صورت شرطی بر فرکانس ورودی ω ظاهر می‌شود. با افزایش فرکانس ورودی ω به نقطه‌ای می‌رسیم که دیگر نتایج این مثال معتبر نیست زیرا ورودیِ با فرکانس زیاد، موجب تخریب طبیعت متغیر آرام x می‌شود. برای مثال ممکن است سیگنال $\dot{r}(t)$ (که از مرتبهٔ $O(\omega)$ است) این فرض را که r نسبت به ε از مرتبهٔ $O(۱)$ است، مخدوش کند.

1. Persistence of excitation

سیستم واقعی، سیستم حلقه ـ بسته با این مدل نامی متفاوت خواهد بود؛ بدین منظور سیستم را به شکل مسألهٔ آشفتگی منفرد در نظر می‌گیریم: مدل مرتبهٔ دوم واقعیِ دستگاه به صورت مدل آشفتهٔ منفرد ذیل بیان می‌شود:

$$\dot{y_p} = a_p y_p + k_p z$$

$$\varepsilon \dot{z} = -z + u$$

با تکرار روال مشتقگیری بخش ۱ ـ ۱ ـ ۶، ملاحظه می‌شود سیستم کنترل تطبیقیِ واقعی با مدل آشفتهٔ منفرد زیر نمایانده می‌شود:

$$\dot{x} = f_0(t,x) + K(z - h(t,x))$$

$$\varepsilon \dot{z} = -z + h(t,x)$$

که:

$$h(t,x) = u = (\theta_1^* + \phi_1) r(t) + (\theta_2^* + \phi_2)(e_0 + y_m(t)), \quad K = [k_p, 0, 0]^T$$

سیگنال $y_m(t)$ خروجی یک تابع تبدیل هرویتز است که ورودی آن $r(t)$ می‌باشد. بنابراین $y_m(t)$ همان ویژگیهای هموارى و کرانمندیِ $r(t)$ را داراست. به طور مشخص، چنانچه مشتقهای تا مرتبهٔ Nام مربوط به $r(t)$ پیوسته و کراندار باشد آنگاه همین خاصیت نیز برای $y_m(t)$ برقرار است. حال می‌خواهیم این سیستم آشفتهٔ منفرد را تحلیل کنیم؛ در نقطهٔ $\varepsilon = 0$ داریم: $z = h(t,x)$، مدل تقلیل یافته نیز برابر است با:

$$\dot{x} = f_0(t,x)$$

که همان مدل حلقه ـ بستهٔ مربوط به کنترل تطبیقیِ نامی می‌باشد. فرض کرده‌ایم که مبدأ این مدل، پایدار نمایی است. مدل لایهٔ مرزی:

$$\frac{dy}{d\tau} = -y$$

مستقل از (t,x) و مبدأ آن پایدار نمایی می‌باشد، چنانچه ورودی مرجع $r(t)$ و مشتقش $(\dot{r}(t))$

کراندار باشد، آنگاه همهٔ فرضیات قضیهٔ ۹ ـ ۴ روی هر مجموعهٔ فشرده‌ای از (x,z) برآورده می‌شود. فرض کنید $\bar{x}$ نشاندهندهٔ پاسخ سیستم کنترل تطبیقیِ نامی و $x(t,\varepsilon)$ نیز بیانگر پاسخ سیستم کنترل تطبیقیِ واقعی باشد که هر دو از یک حالت اولیه آغاز شده‌اند، در این صورت با توجه به قضیهٔ ۹ ـ ۴ نتیجه می‌شود مقدار $\varepsilon^* > 0$ چنان وجود دارد که به ازای جمیع مقادیر $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ بتوان نوشت:

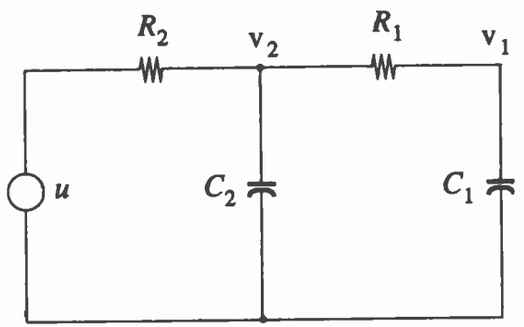
$$x(t,\varepsilon) - \bar{x}(t) = O(\varepsilon)$$

که $O(\varepsilon)$ برای همهٔ مقادیر $t \geq t_0$، نسبت به t به طور یکنواخت برقرار است. این نتیجه دیگربار نشاندهندهٔ قوام نسبت به دینامیکهای مدل نشدهٔ سریع می‌باشد، اما با نتیجهٔ قوام مثال ۹ ـ ۱۱ تفاوت دارد. زیرا در آن مثال، مبدأ $(x = 0, z = 0)$، نقطهٔ تعادل کلّ سیستم آشفتهٔ منفرد بود (طبق فرضیات قضیهٔ ۹ ـ ۳) و نشان دادیم که این نقطه به ازای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک ε، پایدار نمایی است؛ اما در این مثال، مبدأ $(x = 0, z = 0)$ نقطهٔ تعادل کلّ سیستم آشفتهٔ منفرد نیست (گرچه $x = 0$ نقطهٔ تعادل سیستم تقلیل یافته می‌باشد). در این حالت حداکثر توقع از سیستم تطبیقیِ واقعی، اولاً نزدیکی پاسخ سیستم واقعی به سیستم نامی و ثانیاً کرانمندی غایی یکنواخت پاسخ است که به هر دو این خواسته‌ها رسیده‌ایم. البته باید دقت کرد چون با افزایش t به سمت بینهایت، $\bar{x}(t)$ به سمت صفر میل می‌کند، لذا پاسخهای سیستم تطبیقیِ واقعی همراه با کران غایی $O(\varepsilon)$، کراندار غاییِ یکنواخت است. Δ

۹ ـ ۶ تمرینها

تمرین ۹ ـ ۱ مدار RC شکل ۹ ـ ۱۳ را در نظر بگیرید و فرض کنید مقدار ظرفیت خازن $C_۲$ نسبت به $C_۱$ کم است و داریم: $R_۱ = R_۲ = R$. این سیستم را به شکل استاندارد آشفتهٔ منفرد نمایش دهید.

تمرین ۹ ـ ۲ مدار RC شکل ۹ ـ ۱۳ را در نظر بگیرید و فرض کنید مقدار مقاومت $R_۱$ نسبت به $R_۲$ کوچک است و داریم: $C_۱ = C_۲ = C$. این سیستم را به شکل استاندارد آشفتهٔ منفرد نمایش دهید.

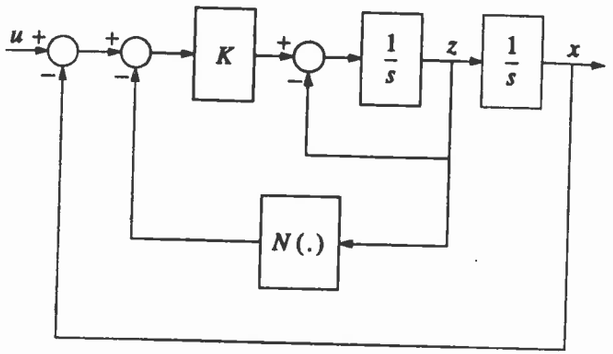


شکل ۹ ـ ۱۳ تمرینهای ۹ ـ ۱ و ۹ ـ ۲

تمرین ۹ ـ ۳ مدار دیود تونلی بخش ۱ ـ ۱ ـ ۲ را در نظر بگیرید و فرض کنید مقدار اندوکتانس L آنقدر کوچک باشد که ثابت زمانی L/R بسیار کوچکتر از ثابت زمانی CR گردد. با در نظر گرفتن $\varepsilon = L/CR^۲$، این سیستم را به شکل استاندارد آشفتهٔ منفرد نمایش دهید.

تمرین ۹ ـ ۴ ([۹۵]) سیستم پسخور شکل ۹ ـ ۱۴ دارای تقویت‌کنندهٔ با بهرهٔ زیاد K و عنصر غیرخطی $N(\cdot)$ است. با فرض $\varepsilon = ۱/K$، این سیستم را به شکل استاندارد آشفتهٔ منفرد بیان کنید.

تمرین ۹ ـ ۵ نشان دهید اگر ماتریس ژاکوبی $[\partial g / \partial y]$ در شرط مقدار ویژهٔ عبارت (۹ ـ ۱۶) صدق کند، آنگاه ثابتهای k، γ و $\rho_۰$ چنان وجود دارد که به ازای آنها رابطهٔ (۹ ـ ۱۵) برآورده می‌شود.



شکل ۹ ـ ۱۴ تمرین ۹ ـ ۴

تمرین ۹ ـ ۶ نشان دهید اگر تابع لیاپانوفی وجود داشته باشد که در روابط (۹ ـ ۱۷) ـ (۹ ـ ۱۸) صدق کند آنگاه نامعادلهٔ (۹ ـ ۱۵) به ازای تخمینهای (۹ ـ ۱۹) برآورده می‌شود.

تمرین ۹ ـ ۷ مسألهٔ آشفتگی منفرد ذیل مفروض است:

$$\dot{x} = x^۲ + z, \qquad x(۰) = \xi$$

$$\varepsilon \dot{z} = x^۲ - z + ۱, \qquad z(۰) = \eta$$

(الف) تقریبی از مرتبهٔ $O(\varepsilon)$ برای x و z در بازهٔ زمانی $[۰, ۱]$ بیابید.
(ب) اگر $\xi = \eta = ۰$ باشد، مقادیر x و z را به ازای: (۱) $\varepsilon = ۰/۱$ و (۲) $\varepsilon = ۰/۰۵$ شبیه‌سازی و با نتایج تقریب بند (الف) مقایسه کنید. در اجرای شبیه‌سازی کامپیوتری به این نکته توجه کنید که سیستم دارای زمان رهایی محدود کوتاهی پس از $t = ۱$ می‌باشد.

تمرین ۹ ـ ۸ مسألهٔ آشفتگی منفرد ذیل مفروض است:

$$\dot{x} = x + z, \quad x(۰) = \xi,$$

$$\varepsilon \dot{z} = -\frac{۲}{\pi} tan^{-۱}\left(\frac{\pi}{۲}(۲x+z)\right),\quad z(۰)=\eta$$

(الف) در بازهٔ زمانی $[۰, ۱]$ تقریبی از مرتبهٔ $O(\varepsilon)$ برای x و z بیابید.

(ب) با فرض $\xi = \eta = ۱$، x و z را به ازای مقادیر: (۱) $\varepsilon = ۰/۲$ و (۲) $\varepsilon = ۰/۱$ شبیه‌سازی و با نتایج تقریب بند (الف) مقایسه کنید.

تمرین ۹ ـ ۹ سیستم آشفتهٔ منفرد زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = z$$

$$\varepsilon \dot{z} = -x - \varepsilon z - exp(z) + ۱ + u(t)$$

مدلهای تقلیل یافته و لایهٔ مرزی را بیابید و ویژگیهای پایداری مدل لایهٔ مرزی را بررسی کنید.

تمرین ۹ ـ ۱۰ ([۹۵]) سیستم آشفتهٔ منفرد ذیل مفروض است:

$$\dot{x} = \frac{x^{۲}t}{z}$$

$$\varepsilon \dot{z} = -(z+xt)(z-۲)(z-۴)$$

(الف) این سیستم چند مدل تقلیل یافته می‌تواند داشته باشد؟

(ب) پایداری لایهٔ مرزی را برای هریک از مدلهای تقلیل یافته بررسی کنید.

(ج) با فرض $x(۰) = ۱$ و $z(۰) = a$، تقریبی از مرتبهٔ $O(\varepsilon)$ برای x و z در بازهٔ زمانی $[۰, ۱]$ و برای همهٔ مقادیر a در بازهٔ $[-۲, ۶]$ ارائه دهید.

تمرین ۹ ـ ۱۱ ([۹۵]) خمینهٔ کاملاً آرام سیستم آشفتهٔ منفرد زیر را به دست آورید:

$$\dot{x} = xz^{۳}$$

$$\varepsilon \dot{z} = -z - x^{\frac{۴}{۳}} + \frac{۴}{۳}\varepsilon x^{\frac{۱۶}{۳}}$$

تمرین ۹ ـ ۱۲ ([۹۵]) سیستم ذیل چند خمینهٔ آرام می‌تواند داشته باشد؟ کدامیک از این خمینه‌ها مسیرهای حالت سیستم را جذب می‌کند؟

$$\dot{x} = -xz$$

$$\varepsilon \dot{z} = -(z - sin^{۲}x)(z - e^{ax})(z - ۲e^{۲ax}),\quad a > ۰$$

تمرین ۹ ـ ۱۳ ([۹۵]) سیستم خطی، خودگردان و آشفتهٔ منفرد زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = A_{۱۱}x + A_{۱۲}z$$

$$\varepsilon \dot{z} = A_{۲۱}x + A_{۲۲}z$$

که $x \in R^n$ و $z \in R^m$ است و $A_{۲۲}$ نیز ماتریس هرویتز است.

(الف) نشان دهید به ازای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک ε، سیستم دارای خمینهٔ کاملاً آرام $z = -L(\varepsilon)x$ می‌باشد که L در معادلهٔ جبری ذیل صدق می‌کند:

$$-\varepsilon L(A_{۱۱} - A_{۱۲}L) = A_{۲۱} - A_{۲۲}L$$

(ب) ثابت کنید تغییر متغیر $\eta = z + L(\varepsilon)x$، سیستم را به شکل بلوکی ـ مثلثی درمی‌آورد.

(ج) نشان دهید مقادیر ویژهٔ سیستم به دو دستهٔ: n مقدار آرام از مرتبهٔ $O(۱)$ و m مقدار تند از مرتبهٔ $O(۱/\varepsilon)$ تقسیم می‌شود.

(د) اگر $H(\varepsilon)$ پاسخ معادلهٔ خطی ذیل باشد:

$$\varepsilon(A_{۱۱} - A_{۱۲}L)H - H(A_{۲۲} + \varepsilon L A_{۱۲}) + A_{۱۲} = ۰$$

نشان دهید تبدیل تشابهی زیر:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - \varepsilon HL & -\varepsilon H \\ L & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

سیستم را به شکل بلوکیِ مُدال ذیل درمی‌آورد:

$$\dot{\xi} = A_s(\varepsilon)\xi;\quad \varepsilon\dot{\eta} = A_f(\varepsilon)\eta$$

که مقادیر ویژهٔ A_s و A_f/ε بترتیب مقادیر ویژهٔ آرام و تند کلّ سیستم آشفتهٔ منفرد می‌باشد.

(ه) ثابت کنید مؤلفهٔ مُد سریع در x، $O(\varepsilon)$ است.

(و) در این حالت، برهان مستقل دیگری برای قضیهٔ تیخانوف ارائه دهید.

تمرین ۹ ـ ۱۴ سیستم خطی و آشفتهٔ منفرد زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = A_{11}x + A_{12}z + B_1 u(t), \quad x(0) = \xi$$

$$\varepsilon \dot{z} = A_{21}x + A_{22}z + B_2 u(t), \quad z(0) = \eta$$

که $x \in R^n$، $z \in R^m$، $u \in R^p$ و A_{22} ماتریس هرویتز است، $u(t)$ نیز به ازای جمیع مقادیر $t \geq 0$، کراندار یکنواخت است. فرض کنید $\bar{x}(t)$ پاسخ سیستم تقلیل یافتهٔ ذیل باشد:

$$\dot{x} = A_0 x + B_0 u(t), \quad x(0) = \xi$$

که $A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ و $B_0 = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2$ می‌باشد.

(الف) نشان دهید در بازهٔ فشردهٔ $[0, t_1]$ داریم: $x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t) = O(\varepsilon)$.

(ب) نشان دهید اگر A_0 هرویتز باشد، به ازای جمیع مقادیر $t \geq 0$ داریم: $x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t) = O(\varepsilon)$.

راهنمایی: از تبدیل تشابهی تمرین قبلی استفاده کنید.

تمرین ۹ ـ ۱۵ سیستم آشفتهٔ منفرد ذیل مفروض است:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + z$$

$$\varepsilon \dot{z} = \tan^{-1}(1 - x_1 - z)$$

(الف) مدلهای تقلیل یافته و لایهٔ مرزی را بیابید.

(ب) ویژگیهای پایداری مدل لایهٔ مرزی را بررسی کنید.

(ج) اگر $x_1(0) = x_2(0) = z(0) = 0$ باشد، تقریبی از مرتبهٔ $O(\varepsilon)$ برای پاسخ بیابید. با

استفاده از یک الگوریتم عددی، پاسخهای تقریبی و دقیق را به ازای $\varepsilon = 0/1$ بر بازهٔ زمانی $[0, 10]$ محاسبه کنید.

(د) نشان دهید سیستم دارای یک نقطهٔ تعادل یکتاست و با استفاده از روش آشفتگیهای منفرد راجع به پایداری آن بحث کنید. آیا نقطهٔ تعادل، پایدار مجانبی است؟ آیا پایدار مجانبی جامع است؟ آیا پایدار نمایی است؟ مقدار کران بالای ε (یعنی ε^*) را چنان بیابید که به ازای آن، تحلیل پایداری ارائه شده معتبر باشد.

(ه) اعتبار تقریب را بر بازهٔ نامحدود زمانی بررسی کنید.

تمرین ۹ ـ ۱۶ تمرین ۹ ـ ۱۵ را برای سیستم آشفتهٔ منفرد ذیل تکرار کنید:

$$\dot{x} = -2x + x^2 + z$$

$$\varepsilon \dot{z} = x - x^2 - z$$

برای بند (ج)، مقدار عددی $x(0) = z(0) = 1$ و بازهٔ زمانی $[0, 5]$ را در نظر بگیرید.

تمرین ۹ ـ ۱۷ تمرین ۹ ـ ۱۵ را برای سیستم آشفتهٔ منفرد ذیل تکرار کنید:

$$\dot{x} = xz^3$$

$$\varepsilon \dot{z} = -2x^{\frac{4}{3}} - 2z$$

برای بند (ج) مقدار عددی $x(0) = z(0) = 1$ و بازهٔ زمانی $[0, 1]$ را در نظر بگیرید:

تمرین ۹ ـ ۱۸ تمرین ۹ ـ ۱۵ را برای سیستم آشفتهٔ منفرد زیر تکرار کنید:

$$\dot{x} = -x^3 + \tan^{-1}(z)$$

$$\varepsilon \dot{z} = -x - z$$

برای بند (ج)، مقادیر عددی $x(0) = -1$ و $z(0) = 2$ و بازهٔ زمانی $[0, 2]$ را در نظر بگیرید.

تمرین ۹ ـ ۱۹ تمرین ۹ ـ ۱۵ را برای سیستم آشفتهٔ منفرد ذیل تکرار کنید.

$$\dot{x} = -x + z_1 + z_2 + z_1 z_2$$

$$\varepsilon \dot{z}_1 = -z_1$$

$$\varepsilon \dot{z}_2 = -z_2 - (x + z_1 + x z_1)$$

برای بند (ج)، مقادیر عددی $x(0) = z_1(0) = z_2(0) = 1$ و بازهٔ زمانی $[0, 2]$ را در نظر بگیرید.

تمرین ۹ ـ ۲۰ موتور DC کنترل شده با میدان مربوط به تمرین ۱ ـ ۱۲ را در نظر بگیرید و فرض کنید داشته باشیم: ثابت $= v_a = V_a$ و ثابت $= v_f = U$.

(الف) نشان دهید سیستم دارای یک نقطهٔ تعادل یکتا به شکل ذیل است:

$$I_f = \frac{U}{R_f}, \quad I_a = \frac{c_3 V_a}{c_3 R_a + c_1 c_2 U^2 / R_f^2}, \quad \Omega = \frac{c_2 V_a U / R_f}{c_3 R_a + c_1 c_2 U^2 / R_f^2}$$

در بندهای بعدی از (I_f, I_a, Ω) به عنوان نقطهٔ کار نامی استفاده خواهیم کرد.

(ب) معمولاً ثابت زمانی مدار آرمیچر $(T_a = L_a / R_a)$ بسیار کوچکتر از ثابت زمانی مدار میدان $(T_f = L_f / R_f)$ و نیز ثابت زمانی مکانیکی است. بنابراین می‌توان با انتخاب i_f و Ω به عنوان متغیرهای آرام و i_a به عنوان متغیر تند، سیستم را به شکل آشفتهٔ منفرد مدل کرد. با انتخاب: $x_1 = i_f / I_f$، $x_2 = \omega / \Omega$، $z = i_a / I_a$، $u = v_f / U$ و $\varepsilon = T_a / T_f$ و با استفاده از $t' = t / T_f$ به عنوان متغیر زمان، نشان دهید مدل آشفتهٔ منفرد به شکل ذیل بیان می‌گردد:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = a(x_1 z - x_2)$$

$$\varepsilon \dot{z} = -z - b x_1 x_2 + c$$

که داریم: $a = L_f c_3 / R_f J$، $b = c_1 c_2 U^2 / c_3 R_a R_f^2$ و $c = V_a / I_a R_a$. نماد $(\dot{\cdot})$ نشاندهندهٔ مشتق نسبت به t' می‌باشد.

(ج) مدلهای تقلیل یافته و لایهٔ مرزی را بیابید.

(د) ویژگیهای پایداری مدل لایهٔ مرزی را تحلیل کنید.

(ه) تقریبی از مرتبهٔ $O(\varepsilon)$ برای x و z پیدا کنید.

(و) اعتبار تقریب را بر بازهٔ نامحدود زمانی بررسی کنید.

(ز) با استفاده از یک الگوریتم عددی، پاسخهای دقیق و تقریبی را برای ورودی پلهٔ واحد (u) و حالتهای اولیهٔ صفر بر بازهٔ زمانی $[0, 10]$ و به ازای $\varepsilon = 0/2$ و $\varepsilon = 0/1$ محاسبه کنید. بدین منظور از داده‌های عددی زیر استفاده کنید:

$$J = 10^{-6}\ N\text{-}m\text{-}s^2/rad \ ،\ c_3 = 6 \times 10^{-6}\ N\text{-}m\text{-}s/rad \ ،\ c_1 = c_2 = \sqrt{2} \times 10^{-2}\ N\text{-}m/A$$

$$V_f = 0/2\ V \ ،\ V_a = 1\ V \ ،\ L_f = 0/2\ H \ ،\ R_a = R_f = 1\ \Omega .$$

تمرین ۹ ـ ۲۱ ([۹۵]) سیستم آشفتهٔ منفرد ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = -\eta(x) + az$$

$$\varepsilon \dot{z} = -\frac{x}{a} - z$$

که a ثابت مثبتی است و $\eta(\cdot)$ نیز تابعی هموار و غیرخطی است که در شروط ذیل صدق می‌کند:

$$\eta(0) = 0 \ ,\ x\eta(x) > 0 \ ,\ \forall x \in (-\infty, b) - \{0\} \ ,\ b > 0$$

با استفاده از روش آشفتگیهای منفرد، پایداری مبدأ را به ازای مقادیر کوچک ε بررسی کنید.

تمرین ۹ ـ ۲۲ ([۹۵]) سیستم آشفتهٔ منفرد زیر:

$$\dot{x} = -2x^3 + z^2$$

$$\varepsilon \dot{z} = x^3 - \tan z$$

دارای نقطهٔ تعادل تنهایی در مبدأ می‌باشد.

(الف) ثابت کنید نمی‌توان از طریق خطی‌سازی به پایداری مجانبی مبدأ رسید.

(ب) به کمک روش آشفتگیهای منفرد، نشان دهید مبدأ به ازای مقادیر و $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$، پایدار مجانبی است. مقدار ε^* نیز ناحیهٔ جذابیت را تخمین بزنید.

تمرین ۹ ـ ۲۳ ([۹۵]) فرض کنید مفروضات قضیهٔ ۹ ـ ۲ به ازای $\psi_1(x) = \|x\|$ و $\psi_2(y) = \|y\|$ برقرار باشد و $V(x)$ و $W(x,y)$ نیز به ازای جمیع مقادیر $(x,y) \in D_1 \times D_2$ در روابط ذیل صدق نماید:

$$k_1 \|x\|^2 \le V(x) \le k_2 \|x\|^2$$

$$k_3 \|y\|^2 \le W(x,y) \le k_4 \|y\|^2$$

که k_1 تا k_4 ثابتهای مثبتی هستند. ثابت کنید نتایج قضیهٔ ۹ ـ ۲ همچنان برقرار است جز آنکه باید به جای پایداری مجانبی از پایداری نمایی استفاده کرد.

تمرین ۹ ـ ۲۴ ([۱۷۲]) سیستم آشفتهٔ منفرد ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x,y)$$

$$\varepsilon \dot{y} = Ay + \varepsilon g_1(x,y)$$

که A ماتریس هرویتز و f و g_1 نیز توابعی به اندازهٔ کافی هموار هستند که در مبدأ صفر می‌شوند. فرض کنید تابع لیاپانوف $V(x)$ چنان وجود دارد که در قلمرو مورد نظر داشته باشیم: $\frac{\partial V}{\partial x} f(x,0) \le -\alpha_1 \phi(x)$ که $\alpha_1 > 0$ و $\phi(x)$ نیز معیّن مثبت می‌باشد. علاوه بر این فرض کنید P پاسخ معادلهٔ لیاپانوف $PA + A^T P = -I$ باشد و داشته باشیم: $W(y) = y^T P y$.

(الف) فرض کنید f و g_1 در قلمرو موردنظر در روابط ذیل صدق کنند:

$$\|g_1(x,0)\|_2 \le k_1 \phi^{\frac{1}{2}}(x), \quad k_1 \ge 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}[f(x,y) - f(x,0)] \le k_2 \phi^{\frac{1}{2}}(x) \|y\|_2, \quad k_2 \ge 0$$

به کمک $0 < d < 1$ و $v(x,y) = (1-d)V(x) + dW(y)$ به عنوان نامزد تابع لیاپانوف و استدلال قضیهٔ ۹ ـ ۲، نشان دهید مبدأ به ازای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک ε، پایدار مجانبی است.

(ب) به عنوان جایگزینی برای قضیهٔ ۹ ـ ۲، فرض کنید f و g_1 در قلمرو مورد بحث در نامساویهای زیر صدق کنند:

$$\|g_1(x,0)\|_2 \le k_3 \phi^a(x), \quad k_3 \ge 0, \quad 0 < a \le \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}[f(x,y) - f(x,0)] \le k_4 \phi^b(x) \|y\|_2^c, \quad k_4 \ge 0, \quad 0 < b < 1, \quad c = \frac{1-b}{a}$$

با استفاده از تابع $\gamma = \frac{1}{2a}$ و $v(x,y) = V(x) + (y^T P y)^\gamma$ به عنوان نامزد تابع لیاپانوف، ثابت کنید مبدأ به ازای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک ε، پایدار مجانبی است.

راهنمایی: با استفاده از نامعادلهٔ یانگ[1]:

$$uW \le \frac{1}{\mu}|u|^p + \mu^{\frac{1}{p-1}}|W|^{\frac{p}{p-1}} \quad \forall u \ge 0, \quad W \ge 0, \quad \mu \ge 0, \quad p > 1$$

نشان دهید: $\dot{v} \le c_1 \phi - c_2 \|y\|_2^{2\gamma}$. آنگاه ثابت کنید می‌توان ضرایب c_1 و c_2 را برای مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک ε، مثبت اختیار نمود.

(ج) مثالی بزنید که در آن شروط اتصال بند (ب) برقرار باشد ولی شروط بند (الف) برقرار نباشد.

تمرین ۹ ـ ۲۵ ([۹۱]) سیستم چند پارامتری آشفتهٔ منفرد ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x, z_1, \ldots, z_m)$$

$$\varepsilon_i \dot{z}_i = \eta_i(x) + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} z_j, \quad i = 1, \ldots, m$$

که x بردار n بُعدی، z_iها متغیرهایی عددی و ε_iها نیز پارامترهایی مثبت و کوچک هستند. ضمناً فرض کنید: $\varepsilon = \max_i \varepsilon_i$؛ در این صورت می‌توان معادله را به شکل زیر بازنوشت:

$$\dot{x} = f(x,z)$$

$$\varepsilon D \dot{z} = \eta(x) + Az$$

که z و η بردارهایی m بُعدی هستند که بترتیب دارای مؤلفه‌های z_i و η_i می‌باشند. A نیز ماتریسی، مثبت $m \times m$ با درایه‌های a_{ij} و D ماتریس $m \times m$ قطری با درایهٔ قطری $\varepsilon_i / \varepsilon$ است. درایه‌های قطری ماتریس D و با مقدار یک کراندارند. فرض کنید مبدأ سیستم تقلیل‌یافتهٔ:

1. Young's inequality

$$\dot{x} = f(x, -A^{-1}\eta(x))$$

پایدار مجانبی باشد و تابع لیاپانوف $V(x)$ نیز چنان وجود داشته باشد که شروط قضیهٔ ۹ ـ ۲ را برآورده سازد. ضمناً فرض نمایید ماتریس قطریِ P با درایه‌های مثبت چنان وجود داشته باشد که بتوان نوشت:

$$PA + A^T P = -Q, \qquad Q > 0$$

با استفاده از:

$$v(x,z) = (1-d)V(x) + d(z + A^{-1}\eta(x))^T PD(z + A^{-1}\eta(x)), \qquad 0 < d < 1$$

به عنوان نامزد تابع لیاپانوف، پایداری مبدأ را تحلیل کنید. برای حالت چند پارامتری، مشابه قضیهٔ ۹ ـ ۲، قضیه‌ای را بیان و اثبات کنید. نتایج این قضیه باید به ε_iها اجازه دهد هر مقدار اختیاری، اما به اندازهٔ کافی کوچک، را بپذیرند.

تمرین ۹ ـ ۲۶ ([۹۵]) سیستم آشفتهٔ منفرد ذیل:

$$\dot{x}_1 = (a + x_2)x_1 + 2z, \qquad a > 0$$

$$\dot{x}_2 = bx_1^2, \qquad b > 0$$

$$\varepsilon\dot{z} = -x_1 x_2 - z$$

دارای مجموعهٔ تعادل $\{x_1 = 0, z = 0\}$ می‌باشد. با استفاده از اصل پایایی لاسَل، رفتار مجانبی پاسخ را برای مقادیر کوچک ε بررسی کنید.

راهنمایی: در مثال ۳ ـ ۱۰ رفتار مجانبیِ مدل تقلیل یافته مطالعه شده است. تابع مرکّب لیاپانوف را تشکیل و مشابه بخش ۹ ـ ۴ روال را ادامه دهید ولی توجه داشته باشید که نمی‌توان قضیهٔ ۹ ـ ۲ را به این مسأله اعمال کرد.

تمرین ۹ ـ ۲۷ ([۹۰]) سیستم خطی، خودگردان و آشفتهٔ منفرد ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = A_{11}x + A_{12}z + B_1 u$$

$$\varepsilon\dot{z} = A_{21}x + A_{22}z + B_2 u$$

$$y = C_1 x + C_2 z + Du$$

که u و y بترتیب بردارهای ورودی و خروجی هستند. فرض کنید ماتریس A_{22} هرویتز باشد. می‌توان از معادلهٔ تقلیل یافته (حاصل از انتخاب $\varepsilon = 0$) به عنوان مدل ساده‌ای برای طراحی کنترلگر پسخور خروجیِ پایدارساز استفاده کرد. بدین منظور فرض کنید مدل تقلیل یافته به شکل ذیل بیان شود:

$$\dot{x} = A_0 x + B_0 u, \quad y = C_0 x + D_0 u$$

نیز فرض نمایید عبارتهای:

$$\dot{v} = Fv + Gy, \quad u = Hv + Jy$$

کنترلگر پسخور خروجی پایدارساز باشد؛ یعنی سیستم حلقه ـ بستهٔ حاصل از مدل تقلیل یافته و کنترلگر، دارای نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی است. قوام پایداری را نسبت به آشفتگی منفرد در دو حالت: (۱) $J = 0$ و (۲) $J \neq 0$ بررسی کنید. در حالت دوم، مثال ذیل را:

$$\dot{x} = x + z + u$$

$$\varepsilon\dot{z} = x - z + u$$

$$y = x + z$$

به همراه کنترلگر $u = 2y$ در نظر بگیرید.

تمرین ۹ ـ ۲۸ سیستم آشفتهٔ منفرد زیر مفروض است:

$$\dot{x} = f(x, u(t)) + B(u(t))[z - g(x, u(t))]$$

$$\varepsilon\dot{z} = -z + g(x, u(t)), \quad x \in R^n, \quad z \in R^m, \quad u \in R^q$$

که $B(u)$ و $G(x,u)$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر و $f(x,u)$ نیز در قلمرو $D_x \times D_u \subset R^n \times R^q$ تا مرتبهٔ دوم پیوسته ـ مشتق‌پذیر است. فرض کنید تابع پیوسته ـ مشتق‌پذیر $h: D_u \longrightarrow D_x$ چنان وجود داشته باشد که به ازای جمیع مقادیر $\alpha \in D_u$ بتوان نوشت: $f(h(\alpha), \alpha) = 0$ و ماتریس

$A(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial x}(h(\alpha), \alpha)$ نیز نسبت به α و به ازای جمیع مقادیر $\alpha \in \Gamma$ (که $\Gamma \subset D_u$ مجموعه‌ای فشرده است) به طور یکنواخت هرویتز باشد. علاوه بر این فرض نمایید $u(t)$ برای همهٔ مقادیر $t \geq 0$، پیوسته ـ مشتق‌پذیر، $u(t) \in \Gamma$ و $\| \dot{u}(t) \| \leq \mu$ باشد.

(الف) تحقیق کنید تغییر متغیرهای $w = x - h(u(t))$ و $y = z - g(x, u(t))$، سیستم را به شکل زیر درمی‌آورد:

$$\dot{w} = f(w + h(u), u) + B(u)y - \frac{\partial h}{\partial u}\dot{u}$$

$$\varepsilon \dot{y} = -y - \varepsilon \frac{\partial g}{\partial x}[f(w + h(u), u) + B(u)y] - \varepsilon \frac{\partial g}{\partial u}\dot{u}$$

(ب) اگر $P(\alpha)$ پاسخ یکتا و معیّن مثبت معادلهٔ لیاپانوف: $P(\alpha)A(\alpha) + A^T(\alpha)P(\alpha) = -I$ باشد، تحقیق کنید $V(w, \alpha) = w^T P(\alpha)$ در همسایگی $w = 0$ در نامعادلات (۵ ـ ۶۶) ـ (۵ ـ ۶۹) صدق می‌کند.

(ج) فرض کنید: $v(w, y, u) = V(w, u) + \frac{1}{2}y^T y$. تحقیق نمایید مقادیر $\varepsilon^* > 0$ و $\mu^* > 0$ چنان یافت می‌شوند که به ازای جمیع مقادیر $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ و $0 \leq \mu < \mu^*$، نامعادلهٔ:

$$\dot{v} \leq -\alpha v + \beta \sqrt{v} \| \dot{u} \|, \quad \alpha > 0, \quad \beta \geq 0$$

در همسایگی $(w, y) = (0, 0)$ برقرار باشد.

(د) نشان دهید ثابتهای مثبت ρ_1، ρ_2، ρ_3 و ρ_4 چنان وجود دارند که با شرط $0 < \varepsilon < \rho_1$، $\mu < \rho_2$، $\| x(0) - h(u(0)) \| < \rho_3$ و $\| z(0) - g(x(0), u(0)) \| < \rho_4$، $x(t)$ و $z(t)$ به ازای مقادیر $t \geq 0$ کراندار یکنواخت و $x(t) - h(u(t))$ نیز با مقدار $k\mu$ $(k > 0)$ کراندار نمایی یکنواخت می‌باشد.

(ه) نشان دهید اگر علاوه بر فرضیات قبلی داشته باشیم: $t \to \infty \Rightarrow u(t) \longrightarrow u_\infty$ و $t \to \infty \Rightarrow \dot{u}(t) \longrightarrow 0$ آنگاه داریم: $t \to \infty \Rightarrow x(t) \longrightarrow h(u_\infty)$.

راهنمایی: در بند (ب)، از لم ۵ ـ ۱۲ و در بندهای (د) و (ه)، از لم قیاس استفاده کنید.

تمرین ۹ ـ ۲۹ با اعمال قضیهٔ ۹ ـ ۴، رفتار مجانبی سیستم ذیل را در حالت $t \longrightarrow \infty$ بررسی کنید.

$$\dot{x} = -x + z - \sin t$$

$$\varepsilon \dot{z} = -z + \sin t$$

پیوست آ

ملاحظات و مراجع

مرجع اصلی آماده‌سازی این کتاب عبارت است از: هیرش[1] و *اسمیل*[2] [۷۰]، *هال*[3] [۶۵] و *میلر*[4] و *مایکل*[5] [۱۱۸] برای معادلات دیفرانسیل معمولی؛ *هان*[6] [۶۲]، *کراسوسکی*[7] [۹۶] و روشه[8]، *هَبتز*[9] و *لالوی*[10] [۱۳۷] برای نظریهٔ پایداری و کتابهای *ویدیاساگار*[11] [۱۸۱] (چاپ اول) و *سو*[12] و *میر*[13] [۷۶]. مراجع مربوط به مباحث خاصِ فصلهای چهارم تا نهم، ذیل فصل متناظر فهرست شده است.

فصل اول مدار دیود تونلی و نوسانساز با مقاومت منفی از *چوآ*[14]، *دِسور*[15] و *کوه*[16] [۳۳] اقتباس شده است. نمایش سیستم جرم ـ فنر مبتنی بر *میکنز*[17] [۱۱۷] و *ساوت‌وارد*[18] [۱۶۵] می‌باشد. شبکهٔ عصبی هاپفیلد بر اساس *هاپفیلد* [۷۱] و *مایکل*، *فارل*[19] و *پُرود*[20] [۱۱۴] توصیف شده است. مثال کنترل تطبیقی از *سَستری*[21] و *بُدسون*[22] [۱۵۱] اقتباس گردیده است. می‌توان مفاهیم کلاسیک سیستمهای مرتبهٔ دوم را در هر کتاب درسیِ سیستمهای غیرخطی ملاحظه نمود، اما نحوهٔ ارائهٔ این کتاب بسیار شبیه به مطالب *چوآ*، *دِسور* و *کوه* [۳۳] می‌باشد. بخش ۱ ـ ۲ ـ ۵ بر اساس *پارکر*[23] و *چوآ* [۱۳۲] تنظیم شده است.

---

1. Hirsch
2. Smale
3. Hale
4. Miller
5. Michel
6. Hahn
7. Krasovskii
8. Rouche
9. Habets
10. Laloy
11. Vidyasagar
12. Hsu
13. Meyer
14. Chua
15. Desoer
16. Kuh
17. Michens
18. Southward
19. Farrel
20. Porod
21. Sastry
22. Bodson
23. Parker

فصل دوم بخش مربوط به پیشنیازهای ریاضی، پس از بخشهای مشابهی در برت ـ سکاس[1] [۲۱] و لیون برگر[2] [۱۰۶] طرح شده است. خواننده می‌تواند برای تکمیل مباحث این بخش به کتابهای آنالیز ریاضی مراجعه کند؛ در این کتاب از *آپوستل*[3] [۷] استفاده شده است. کتابهای استاندارد دیگر عبارت است از: رودین[4] [۱۴۰] و رویدن[5] [۱۳۹]. مفاهیم بخشهای ۲ ـ ۲ تا ۲ ـ ۴ مطالب استانداردی هستند که می‌توان آنها را در هر کتاب درسی تحصیلات تکمیلی دربارهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی یافت. بخش ۲ ـ ۲ بسیار شبیه به مطالب *ویدیاساگار* [۱۸۱] است در صورتی که بخشهای ۲ ـ ۳ و ۲ ـ ۴ مبتنی بر *هیرش و اسمیل* [۷۰] و نیز *کاپل*[6] [۳۶] می‌باشد. اصل قیاس از *هال* [۶۵]، *میلر و مایکل* [۱۱۸] و *یوشی زاوا*[7] [۱۸۹] اقتباس شده است.

فصل سوم *هان* [۶۲]، *کراسوسکی* [۹۶] و روشه، *هَبتز و لالوی* [۱۳۷] مراجع معتبری در مورد پایداری لیاپانوف هستند. نحوهٔ ارائهٔ مطالب بخش ۳ ـ ۱ متأثر از *هیرش و اسمیل* [۷۰] است. برهان قضیهٔ ۳ ـ ۱ از *هیرش و اسمیل* [۷۰، بخش ۹ ـ ۳] گرفته شده در صورتی که قضیهٔ ۳ ـ ۳ مبتنی بر *هان* [۶۲، بخش ۲۵]، *هال* [۶۵] و *میلر و مایکل*[۱۱۸] است. مطالب مربوط به اصل پایایی در بخش ۳ ـ ۲ برگرفته از کار اصیل *لاسَل* [۹۹] می‌باشد. برهان لم ۳ ـ ۱ از روشه، *هَبتز و لالوی* [۱۳۷، پیوست ۳] استخراج شده است. کاربرد اصل پایایی در شبکه‌های عصبی روشی استاندارد است که می‌توان آن را در *هاپفیلد* [۷۱] یافت، اما نحوهٔ بیان این کتاب متأثر از سلام[8] [۱۴۹] می‌باشد. ضمناً می‌توان برای ملاحظهٔ تعمیم مثال ۳ ـ ۱۱ به کوهن[9] و *گراسبرگ*[10] [۳۵] مراجعه کرد. مطالب مربوط به سیستمهای خطی نامتغیر با زمان در بخش ۳ ـ ۳ از چِن[11] [۲۹] گرفته شده در حالی که برهان قضیهٔ ۳ ـ ۶ متعلق به *کِیلَت*[12] [۸۶] است. برهان قضیهٔ ۳ ـ ۷ دربارهٔ خطی‌سازی بر اساس راهنماییهای روشه و *ماوین*[13] [۱۳۸، بخشهای ۱ ـ ۶ و ۱ ـ ۷] تدوین شده که شامل بحث دقیقی در این خصوص در حالتی است که خطی‌سازی دارای حداقل یک مقدار ویژه در نیم صفحهٔ سمت راست و بقیه روی محور موهومی می‌باشد. برهان

1. Bertsekas
2. Luenberger
3. Apostol
4. Rudin
5. Royden
6. Coppel
7. Yoshizawa
8. Salam
9. Kohen
10. Grossberg
11. Chen
12. Kailath
13. Mawhin

لم ۳ ـ ۳ از *هان* [۶۲، بخش ۳۵] (در حالت محلی) و از *لین*[1]، *سانتاگ*[2] و *ونگ*[3] [۱۰۴] (در حالت جامع) اقتباس شده است. حکم و برهان لم ۳ ـ ۴ از *هان* [۶۲ بخش ث ـ ۲۴] و *سانتاگ* [۱۶۲، لم ۶ ـ ۱] گرفته شده است. برهان لم ۳ ـ ۵ بر اساس *هان* [۶۲، بخش آ ـ ۲۴] می‌باشد. در اثبات قضیهٔ ۳ ـ ۸، دیدگاههای *هان* [۶۲، بخش ۲۵] و روشه، *هَبتز و لالوی* [۱۳۷، بخش ۱ ـ ۶] در هم آمیخته شده‌اند. بخش ۳ ـ ۵ مبتنی بر *ویدیاساگار* [۱۸۱] است. برهان قضیهٔ ۳ ـ ۱۲ از *کراسوسکی* [۹۶، قضیهٔ ۱۱ ـ ۱] و برهان قضیهٔ ۳ ـ ۱۴ از *میلر و مایکل* [۱۱۸، بخش ۵ ـ ۱۳] و *هان* [۶۲، بخش ۴۹] و نیز از برخی دیدگاههای *هاپن استات*[4] [۷۲] استخراج شده است.

فصل چهارم بخش ۴ ـ ۱ به طور عمده از *کار*[5] [۲۸] و نیز برخی رهنمودهای *گوکن هایمر*[6] و *هولمز*[7] [۵۹] گرفته شده است. برهان قضایای ۴ ـ ۱ و ۴ ـ ۳ مبتنی بر *کار* [۲۸، فصل دوم] می‌باشد. برهان قضیهٔ ۴ ـ ۲ با استفاده از تحلیل لیاپانوف بسیار ساده‌تر از برهانی است که در *کار* [۲۸] ارائه شده است. ما در بیان قضیهٔ تقلیل از ذکر حالت متناظر با پایداربودن مبدأ سیستم تقلیل‌یافته صرف‌نظر کرده‌ایم، زیرا هنگام اعمال این قضیه تقریباً همیشه از تقریبهای خمینهٔ مرکزی استفاده می‌نماییم. تنها ویژگی پایداریِ مبدأ که لازم است از مدل تقریبی نتیجه شود، پایداری مجانبی و ناپایداری است زیرا این دو، نسبت به آشفتگی مقاومند. نسخه‌ای از قضیهٔ خمینهٔ مرکزی نیز که در *گوکن هایمر و هولمز* [۵۹] بیان شده، از بیان حالت مربوط به مبدأ پایدار چشمپوشی کرده است. قضیهٔ فرعی ۴ ـ ۱، در مورد مبدأ پایدار در حالتی خاص می‌باشد، این قضیه را *میروسلاو کِرستیک*[8] به نگارنده پیشنهاد کرده است. برهان لم ۴ ـ ۱ مبتنی بر *هان* [۶۲، بخش ۳۳] است. مثال ۴ ـ ۱۱ از *ویلمز*[9] [۱۸۶] گرفته شده است. روش مسیرهای معکوس حالت در *جنسیو*[10]، *تارتاگلیا*[11] و *ویسینو*[12] [۵۵] توصیف شده است؛ سایر روشهای تخمین ناحیهٔ جذابیت در [۳۱، ۵۵، ۱۱۶، ۱۲۷] توصیف یا مرور شده‌اند. برهان لم ۴ ـ ۲ مبتنی بر *پوپوف* [۱۳۵، صفحهٔ ۲۱۱] و برهان قضیهٔ ۴ ـ ۵ بر اساس *سَستری* و *بُدسون* [۱۵۱، قضیهٔ ۱ ـ ۵ ـ ۲] می‌باشد.

1. Lin
2. Sontag
3. Wang
4. Hoppensteadt
5. Carr
6. Guckenheimer
7. Holmes
8. Miroslav Kristic
9. Willems
10. Genesio
11. Tartaglia
12. Vicino

فصل پنجم مطالب بخشهای ۵ ـ ۱ و ۵ ـ ۲ بر اساس منابع گوناگون موجود در تحلیل قوام در نظریهٔ کنترل تدوین شده است. اما می‌توان گفت مراجع اصلی، *هان* [۶۲، بخش ۵۶] و *کراسوسکی* [۹۶، بخشهای ۱۹ و ۲۴] هستند. نتایج مشابهی در *کاپل* [۳۶، بخش ۳ ـ ۳] بیان شده که در آن سیستم نامی، خطی است اما در تحلیل روابط از نظریهٔ لیاپانوف استفاده نشده بلکه از ویژگیهای ماتریسهای پایه بهره گرفته شده است. برهان قضیهٔ ۵ ـ ۱ بر اساس راهنماییهای *میلر و مایکل* [۱۱۸، قضیهٔ ۹ ـ ۱۴] و *کورلس*[1] و *لیت من*[2] [۳۸] می‌باشد. در *هان* [۶۲] و *کراسوسکی* [۹۶] از موضوع آشفتگیهای صفرشونده به عنوان حالتی از «اغتشاش مداوم»[3] یاد شده، اما در این کتاب به منظور جلوگیری از خلط موضوع با مفهوم «تحریک مداوم»؛ که در منابع کنترل تطبیقی بسیار به کار می‌رود؛ از آن استفاده نشده است. نتایج مربوط به آشفتگیهای غیرصفر شونده با مفهوم پایداری کلّی نیز ارتباط دارد برای بررسی این موضوع *هان* [۶۲، بخش ۵۶] را ملاحظه کنید. مفهوم پایداری ورودی به حالت را *سانتاگ* [۱۶۲] معرفی و برخی از نتایج آن را اثبات کرد؛ [۱۶۳] را ملاحظه نمایید. بیان این کتاب مبتنی بر ارائهٔ زیبای کِرستیک، *کانلاکوپولوس*[4] و *کوکوتوویک*[5] [۹۷] می‌باشد. روش قیاسِ مطرح در بخش ۵ ـ ۴، یکی از کاربردهای لم قیاس در منابع کنترل است. قضیهٔ ۵ ـ ۳ در خصوص پیوستگی پاسخها بر بازه‌های نامحدود زمانی نکتهٔ بدیعی است زیرا معمولاً نتایج پیوستگی بر بازه‌های فشردهٔ زمانی، همانند بخش ۲ ـ ۳، بیان می‌شود. لیکن با توجه به اینکه در بیشتر مسائل مهندسی به دنبال پاسخهای حالت مانا هستیم، بحث راجع به بازه‌های نامحدود زمانی در این فصل طرح شده است. در اصل، این قضیه نتیجهٔ مستقیمی از مباحث بخش ۵ ـ ۴ می‌باشد. مبحث پایداری سیستمهای به هم پیوسته در بخش ۵ ـ ۶ به طور عمده از مقالهٔ مروری *اراکی*[6] [۸] و نیز از برخی نکات مطرح در گزارش تحقیق *سیلجک*[7] [۱۵۶] و *مایکل و میلر* [۱۱۵] اقتباس شده است. مثال شبکهٔ عصبی برگرفته از *مایکل، فارل و پُرود* [۱۱۴] می‌باشد. مطالعهٔ سیستمهای با تغییرات آرام مبتنی بر *دِسور و ویدیاساگار* [۴۳، بخش ۴ ـ ۸]، *ویدیاساگار* [۱۸۱]، *کوکوتوویک، خلیل*[8] و *اوریلی*[9] [۹۵، بخش ۵ ـ ۲] و *هاپ استات* [۷۲] است. لم ۵ ـ ۱۱ کاربرد خاصی از لم دوم *هاپ استات* [۷۲] در پایدار نمایی است.

1. Corless
2. Leitmann
3. Persistent disturbance
4. Kanellakopolous
5. Kokotovic
6. Araki
7. Siljak
8. Khalil
9. O'Reilly

فصل ششم بحث راجع به پایداری $\mathcal{L}$ در پخشهای ۶ ـ ۱ و ۶ ـ ۲ بر اساس *دِسور و ویدیاساگار* [۱۴۳] و *ویدیاساگار* [۱۸۱] و مفهوم پایداری ورودی به خروجی مبتنی بر *سانتاگ* [۱۶۲] می‌باشد. بهرهٔ $\mathcal{L}_2$ در بخش ۶ ـ ۴ بر اساس *وان دِر شفت*[1] [۱۷۸] و نیز با کمک مقالات *ویلمز* [۱۸۵] و *هیل*[2] و *مویلان*[3] [۶۷، ۶۹] در مورد سیستمهای باتلف تدوین شده است. برهان قضیهٔ ۶ ـ ۴ از [۴۳، بخش ۲ ـ ۶]، [۱۸۰، بخش ۳ ـ ۱ ـ ۲] و [۱۹۵، بخش ۴ ـ ۳] استخراج شده است.

فصل هفتم بخش سیستمهای مرتبهٔ دوم مبتنی بر *هیرش و اسمیل* [۷۰، فصلهای دهم و یازدهم] و *گوکن هایمر و هولمز* [۵۹، بخش ۱ ـ ۸] و برهان قضیهٔ ۷ ـ ۱ نیز بر اساس *هیرش و اسمیل* [۷۰، فصل دهم] و *میلر و مایکل* [۱۱۸، بخش ۷ ـ ۲] تنظیم شده است. بحث راجع به پایداری پاسخهای متناوب در بخش ۷ ـ ۲ از *هان* [۶۲، بخش ۸۱]، *میلر و مایکل* [۱۱۸، بخش ۶ ـ ۴] و *هال* [۶۵، بخش ۶ ـ ۲] اقتباس شده است. مطالب مربوط به نگاشت پوانکاره نیز از *هیرش و اسمیل* [۷۰، فصل سیزدهم] و *گوکن هایمر و هولمز* [۵۹، بخش ۱ ـ ۵] گرفته شده است.

فصل هشتم روش آشفتگی مطرح در بخش ۸ ـ ۱ موضوعی کلاسیک است و می‌توان آن را در مراجع بسیاری یافت، اما بحث مفصّل آن در *کورکیان*[4] و *کول*[5] [۸۹] و *نایفه*[6] [۱۲۴] وجود دارد. نتایج مجانبی قضیهٔ ۸ ـ ۱ و ۸ ـ ۲ برگرفته از پژوهشهای *هاپ استات* در آشفتگیهای منفرد است؛ *هاپ استات* [۷۳] را ملاحظه کنید. مطالب مربوط به روش متوسط‌گیری در بخش ۸ ـ ۳ مبنی بر *ساندرز*[7]، *ورهولست*[8] [۱۵۰]، *هال* [۶۵، بخش ۵ ـ ۳]، *هالانی*[9] [۶۳، بخش ۳ ـ ۵] و *گوکن هایمر و هولمز* [۵۹، بخشهای ۴ ـ ۱ و ۴ ـ ۲] می‌باشد. مثال پاندول ارتعاش کننده برگرفته از *تیخانوف، واسیلوا*[10] و *وُلوسوف*[11] [۱۷۴] است. کاربرد روش متوسط‌گیری در نوسانسازهای غیرخطی ضعیف، بخش ۸ ـ ۴، از *هال* [۶۵، صص. ۱۸۳ ـ ۱۸۶] و مطالب مربوط به

1. Vander Schaft
2. Hill
3. Moylan
4. Kevorkian
5. Cole
6. Nayfeh
7. Sanders
8. Verhulst
9. Halanay
10. Vasileva
11. Volosov

پیوست ب

کتابشناسی

[۱] J. K. Aggarwal. *Notes on Nonlinear Systems.* Van Nostrand Reinhold, New York, 1972.

[۲] B. D. O. Anderson. A system theory criterion for positive real matrices. *SIAM J. Control*, 5(2):171–182, 1967.

[۳] B. D. O. Anderson. Exponential stability of linear equations arising in adaptive identification. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-22:83–88, February 1977.

[۴] B. D. O. Anderson, R. R. Bitmead, C. R. Johnson, Jr., P. V. Kokotovic, R. L. Kosut, I. M. Y. Mareels, L. Praly, and B. D. Riedle. *Stability of Adaptive Systems.* MIT Press, Cambridge, Mass., 1986.

[۵] B. D. O. Anderson and S. Vongpanitlerd. *Network Analysis and Synthesis: A Modern Systems Theory Approach.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.

[۶] A. M. Annaswamy. On the input-output behavior of a class of second-order nonlinear adaptive systems. In *American Control Conference*, pages 731–732, June 1989.

[۷] T. M. Apostol. *Mathematical Analysis.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1957.

[۸] M. Araki. Stability of large-scale nonlinear systems–quadratic-order theory of composite-system method using M-matrices. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-23(2):129–141, April 1978.

[۹] D. K. Arrowsmith and C. M. Place. *Ordinary Differential Equations.* Chapman and Hall, London, 1982.

[۱۰] R. B. Ash. *Real Analysis and Probability.* Academic Press, New York, 1972.

متوسط‌گیری عمومی مربوط به بخش ۸ ـ ۵ از *ساندرز و ورهولست* [۱۵۰]، هال [۶۵، بخش ۵ ـ ۳] و *سَستری و بُدسون* [۱۵۱، بخش ۴ ـ ۲] اقتباس شده است.

فصل نهم مطالب مربوط به روش آشفتگی منفرد بسیار به *کوکوتوویک، خلیل و اُوریلی* [۹۵] نزدیک است. برهانهای قضایای ۹ ـ ۱ و ۹ ـ ۴ از *هاپ استات* [۷۲] گرفته شده است. در این فصل تقریبهای مرتبهٔ بالاتر مورد بحث قرار نگرفته، از این رو خواننده می‌تواند مطالب بیشتری را در *هاپ استات* [۷۳]، *بوتوزوف*[1]، *واسیلوا*، *فدوریک*[2] [۲۴] یا *اومالی*[3] [۱۲۸] بیابد. مقالات [۷۲]، [۷۳] و [۲۴] در *کوکوتوویک و خلیل* [۹۴] نیز حضور دارند. مثال ۹ ـ ۸ برگرفته از *تیخانوف، واسیلوا و وُسولوف* [۱۷۴] است؛ برای تعمیم این مثال *گراسمن*[4] [۵۸] را ملاحظه کنید. برهان قضایای ۹ ـ ۲ و ۹ ـ ۳ بر اساس *صابری*[5] و *خلیل* [۱۴۴] می‌باشد.



1. Butuzov
2. Fedoryuk
3. O'Malley
4. Grossman
5. Saberi