بسم الله الرحمن الرحیم

نام جزوه :

الکترومغناطیس

استاد : شاهی

POWEREN.IR

جلسهٔ اول ۸۶/۷/۸

سرفصل های آموزشی :

۱- تجزیه و تحلیل بردار

۲- شدت میدان الکتریکی
- قانون کولن
  - بار نقطه ای
  - بار خطی
  - بار سطحی
- قانون گوس
  - شار الکتریکی
  - نتیجه گیری قانون کولن
  - دیورژانس (واگرایی)

۳- انرژی در میدان الکتریکی - اختلاف پتانسیل الکتریکی

رابطهٔ میدان با پتانسیل $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ (گرادیان)

۴- رسانا
- جریان الکتریکی
- شرایط مرزی
- مقاومت
  - طولی
  - عرضی

عایق
- ظرفیت
- شرایط مرزی

تئوری تصویر

۵- معادلات لاپلاس و پواسون.

لاپلاس $\nabla^2 V = 0$

پواسون $\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2$ (دل، لاپلاسین)

۶- شدت میدان مغناطیسی
- قانون بیوساوار
- قانون آمپر
  - کرل (همگرایی)
  - دستور استوکس
- پتانسیل های مغناطیسی اسکالر و برداری

۷-
- نیرو و گشتاور در میدان مغناطیسی
- مدار مغناطیسی
- القا مغناطیسی
- انرژی در میدان مغناطیسی

۸- معادلات ماکسول ← حالت استاتیک / حالت دینامیک

نکات اولیه:

- انرژی در داخل میدان ذخیره می‌شود. بنابراین ابتدا باید میدان ایجاد شود تا سپس انرژی به وجود آید.

همگرایی: خطوطی که به مرور به یکدیگر نزدیک می‌شوند.

واگرایی: خطوطی که به مرور از یکدیگر فاصله می‌گیرند.

گرادیان مفهوم بردار عمود را دارد (توسط آن می‌توان بردار عمود را به دست آورد).

منابع و مآخذ:

- الکترومغناطیس دانشگاهی (مهندسی) مترجم دیانی - Hayt
- الکترومغناطیس، میدان و موج - مترجم: دکتر جبه‌دار و دکتر قوامی - cheng
- الکترومغناطیس - مسائل حل شده همراه با خلاصه درس ← دکتر ابریشمیان و دکتر کرانپایه - Edminister

انتگرال های کاربردی :

* 1) $\int \frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{1}{y} \operatorname{Arctan} \frac{x}{y} \leftarrow x = y \tan\theta$

2) $\int \frac{x\,dx}{x^2+y^2} = \ln\sqrt{x^2+y^2} \leftarrow x^2+y^2 = u^2$

3) $\int \frac{x^2\,dx}{x^2+y^2} = x - y \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right) \leftarrow x = y \tan\theta$

* 4) $\int \frac{dx}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}\right| = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$

5) $\int \frac{x\,dx}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \sqrt{x^2+y^2}$

6) بی کاربرد

* 7) $\int \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{x}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}$

$\boxed{\sec = \frac{1}{\cos} \qquad \operatorname{cosec} = \frac{1}{\sin}}$

8) $\int \frac{x\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

9) $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

* تغییر متغیرهای به کار رفته در بقیه حالات نیز همانند ۱، ۲ و ۳ است .

اثبات برای نمونه :

$$\left\{\begin{array}{l} x = y\tan\theta \\ x = y\sec^2\theta\, d\theta \\ \tan\theta = \frac{x}{y} \end{array}\right.$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \int \frac{y\sec^2\theta\, d\theta}{(y^2\tan^2\theta + y^2)^{3/2}}$$

$$y^2(\tan^2\theta+1)$$

$$y^2\sec^2\theta$$

(۴)

ادامه $= \int \frac{y\sec^2\theta\, d\theta}{y^3\sec^3\theta} = \frac{1}{y^2}\int \frac{d\theta}{\sec\theta} = \frac{1}{y^2}\int \cos\theta\, d\theta$

$= \frac{1}{y^2}(\sin\theta) = \frac{1}{y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

$$\boxed{\sin^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{x^2/y^2}{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{x^2}{x^2+y^2}}$$

* تجزیه و تحلیل بردارها:

$A(x_1, y_1, z_1) \longrightarrow B(x_2, y_2, z_2)$

$\overrightarrow{AB} = (x_2-x_1)\vec{i} + (y_2-y_1)\vec{j} + (z_2-z_1)\vec{k}$

هر بردار = اندازهٔ بردار × جهت بردار

$$\overrightarrow{AB} = \underbrace{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}_{\text{اندازهٔ بردار}} \times \underbrace{\left\{\frac{(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}\right\}}_{\text{جهت}}$$

تغییر نام برای بردارهای سیر

$\vec{i} = \vec{a}_x$

$\vec{j} = \vec{a}_y$

$\vec{k} = \vec{a}_z$

$\Rightarrow \vec{A} = \underbrace{A}_{\text{اندازه}}\ \underbrace{\vec{a}_A}_{\text{جهت}} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_A = \frac{\vec{A}}{A}}$

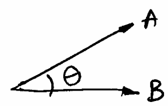
شرط $\rightarrow |\vec{a}_A| = 1 \leftarrow$ اندازهٔ بردار یکه همواره ۱ است

روش نمایش بردار $\Rightarrow$ $\vec{A} = A_x \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y + A_z \vec{a}_z$

$$\vec{B} = B_x \vec{a}_x + B_y \vec{a}_y + \underbrace{B_z \vec{a}_z}_{\text{sub Vector}}$$

بردار $\rightarrow$ Vector

ضرب داخلی (نقطه‌ای یا اسکالر):
dot Product



$$\vec{A} \cdot \vec{B} \triangleq A B \cos\theta$$

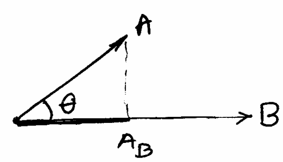
* در ضرب داخلی ترتیب مهم نیست.

* نتیجه:

$$\begin{cases} \vec{a}_x \cdot \vec{a}_x = 1 \\ \vec{a}_y \cdot \vec{a}_y = 1 \\ \vec{a}_z \cdot \vec{a}_z = 1 \end{cases} , \quad \begin{cases} \vec{a}_x \cdot \vec{a}_y = 0 \\ \vec{a}_y \cdot \vec{a}_z = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

* توسط ضرب داخلی می‌توان سایه یک بردار را بر روی بردار دیگر به دست آورد (پیدا کردن نقاط مشترک دو بردار).



$$\cos\theta = \frac{A_B \leftarrow \text{مجاور}}{A \leftarrow \text{وتر}} \Rightarrow A_B = A\cos\theta$$

$$\vec{A} \cdot \vec{a}_B = A\cos\theta$$

$$* \ \boxed{A_B = \vec{A} \cdot \vec{a}_B}$$

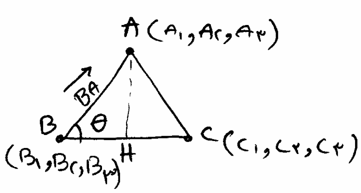
A_B ← تصویر عددی A روی B

$\vec{a}_B$ ← جهت بردار B

$$\Rightarrow \vec{A}_B = (\vec{A} \cdot \vec{a}_B)\, \vec{a}_B$$

$\vec{A}_B$ ← تصویر برداری A روی B

مثال: محاسبهٔ مساحت مثلث به روش ضرب داخلی



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} (AH)(BC)$$

$$BC = \sqrt{(C_1 - B_1)^2 + (C_2 - B_2)^2 + (C_3 - B_3)^2}$$

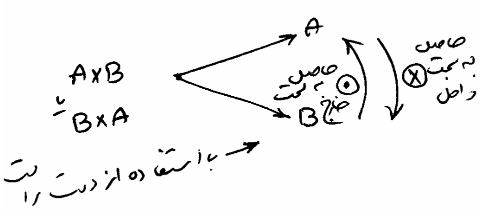
② ادامه

$$\vec{BH} = (\vec{BA} \cdot \vec{a}_{BC})\,\vec{a}_{BC}$$

$$\vec{HA} = \vec{BA} - \vec{BH}$$

ضرب خارجی (برداری) :

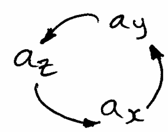
$$\vec{A} \times \vec{B} \triangleq \underbrace{AB\sin\theta}_{\text{اندازه}}\ \underbrace{\vec{a}_n}_{\text{جهت}}$$



نتیجه :

$$\begin{cases} a_x \times a_x = 0 \\ a_y \times a_y = 0 \\ a_z \times a_z = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} a_x \times a_y = a_z \\ \vdots \end{cases}$$

- روش محاسبه جهت :



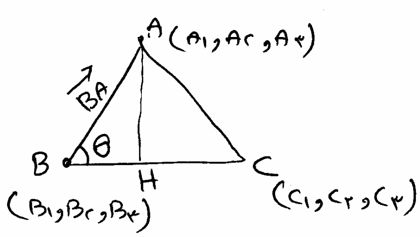
در جهت موافق ← +

در جهت مخالف ← −

$$A \times B = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{a}_x (A_y B_z - A_z B_y) - \vec{a}_y (A_x B_z - A_z B_x) + \vec{a}_z (A_x B_y - A_y B_x)$$

* حاصل درضرب خارجی برهر دو بردار A و B عمود است. (normal = عمود)

مثال :



$$S_{ABC} = \tfrac{1}{2}\,\vec{BA} \times \vec{BC}$$

۷

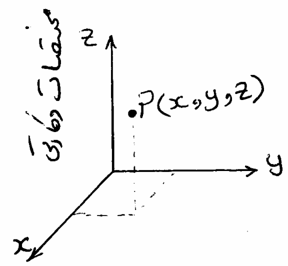
$$\vec{A} = A_x \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y + A_z \vec{a}_z$$
$$\vec{B} = B_x \vec{a}_x + \cancel{B_y \vec{a}_y + B_z \vec{a}_z} \quad \Longrightarrow \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x$$

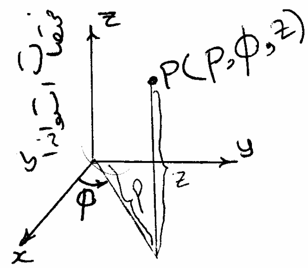
فرض = ۰

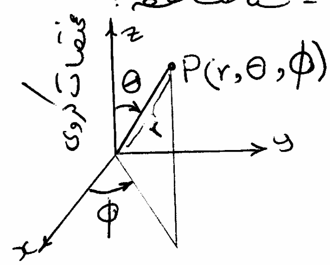
* در ضرب داخلی دو بردار، ابتدا بردار کوچکتر را پیدا کرده (تعداد جملات کمتر) و سپس با توجه به آن می‌توان جملات اضافی بردار بزرگتر را حذف کرد.

سیستم‌های مختصات (متداول):
- دکارتی
- استوانه‌ای
- کروی

- شناخت نقطه:







$-\infty < x, y, z < \infty$

$0 \leqslant \rho < \infty$

$0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$

$-\infty < z < +\infty$

ρ: فاصله از مبدا (بر محور z عمود است)

ϕ: زاویه با محور xها

$0 \leqslant r < \infty$

$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

$0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$

r: فاصله مبدأ تا نقطه (مبدا را به نقطه وصل می‌کند)

θ: زاویه با محور zها

ϕ: زاویه با محور xها

توجه:

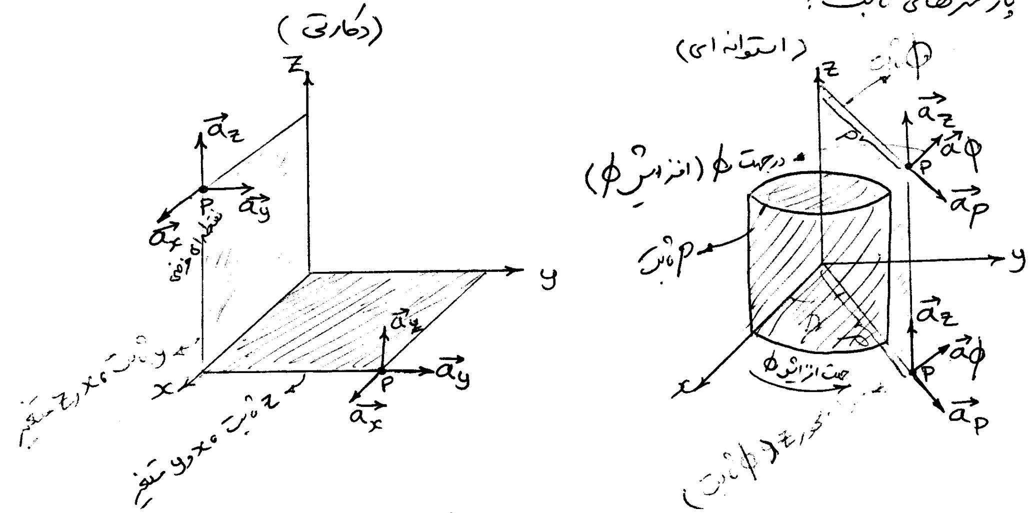
در حالت دکارتی سه سطح x و y و z، دو به دو برهم عمودند.

در حالت استوانه‌ای سه سطح ρ، ϕ و z برهم دو به دو عمودند.

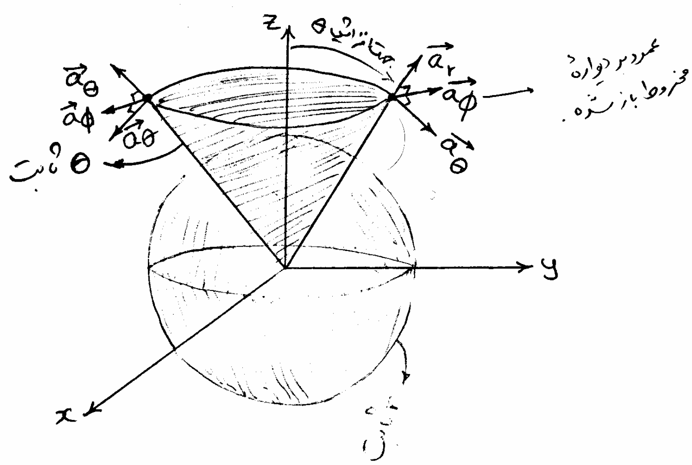
در حالت کروی نیز سه سطح ϕ، θ، r دو به دو برهم عمودند.

۸

پارامترهای ثابت :



* در شکل‌های بالا بردارهای واحد (یکه) نیز بررسی شده اند



* بردارهای یکه :

در شکل‌ها بردارهای یکهٔ مربوط به هر نقطه نشان داده شده است. بردارهای یکه مستقل از موقعیت نقطه هستند. جهت این بردارها همواره در جهت افزایش کمیت مورد نظر است. به طور مثال $\vec{a}_z$، همواره در جهت افزایش محور z است (مثبت محور z).

۹

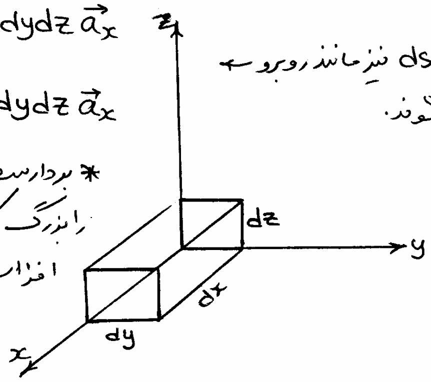
ـ شناخت دیفرانسیل های حجم، سطح و طول :

الف) دکارتی

$dv = dx\,dy\,dz$

$ds_x = dy\,dx \Rightarrow \begin{cases} \vec{ds}_x^{+} = +dy\,dz\,\vec{a}_x \\ \vec{ds}_x^{-} = -dy\,dz\,\vec{a}_x \end{cases}$

ds_y و ds_z نیز مانند روبرو ← محاسبه می شوند.



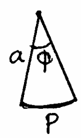
* بردار سطح همیشه به جهتی اشاره می کند که حجم را بزرگ کند. بنابراین نشانهٔ بردار سطح، افزایش سطح است.

$\vec{dl} = dx\,\vec{a}_x + dy\,\vec{a}_y + dz\,\vec{a}_z$

* $\vec{dl}$ همواره به صورت ۳ جمله ای است.

dl (بدون علامت بردار) همواره تک جمله ای است $\begin{cases} dx \\ \text{یا} \\ dy \\ \text{یا} \\ dz \end{cases}$

یادآوری :

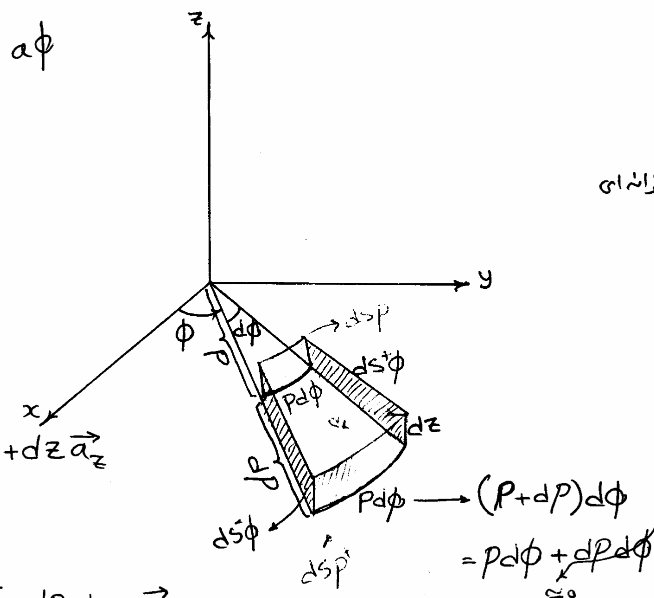


سطح هر کمان P = شعاع × زاویه $= a\phi$

ب) استوانه ای

$dv = \rho\,d\phi\,d\rho\,dz$

دیفرانسیل مربوط به ϕ همواره $\rho\,d\phi$ است (البته تقریباً)



همواره ۳ جمله ای

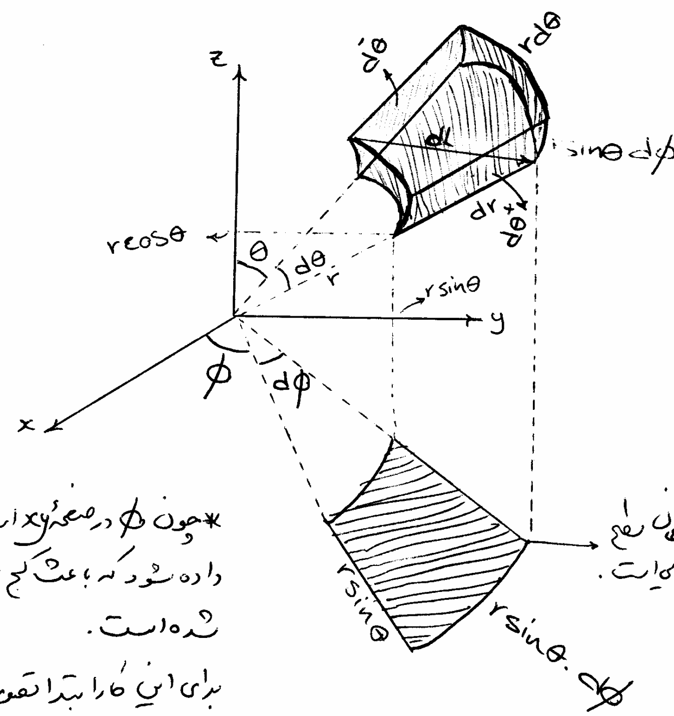
$\vec{dl} = d\rho\,\vec{a}_\rho + \rho\,d\phi\,\vec{a}_\phi + dz\,\vec{a}_z$

$dl = \begin{cases} d\rho \\ \text{یا} \\ \rho\,d\phi \\ \text{یا} \\ dz \end{cases}$

$ds_\phi = d\rho . dz \quad \begin{cases} \vec{ds}_\phi^{+} = d\rho . dz . \vec{a}_\phi \\ \vec{ds}_\phi^{-} = -\,d\rho\,dz . \vec{a}_\phi \end{cases}$

ds_ρ , ds_z نیز همین ترتیب هستند. ←

ج) کروی



*چون φ در صفحه xy است، باید ابتدا به بالا انتقال داده شود که باعث کج شدن و تا حدی دوران شکل شده است.

برای این کار ابتدا تصویر در صفحه xy به دست آورده شده و سپس به بالا انتقال داده شده.

این سطح همان سطح تصویر بالا است.

$$dv = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi \longrightarrow (r d\theta \cdot r \cdot \sin\theta \cdot d\phi \cdot dr)$$

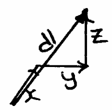
$$ds_\theta = r \sin\theta \, dr \, d\phi \rightarrow \begin{cases} \vec{ds}_{\theta^-} = -r \sin\theta \, dr \, d\phi \, \vec{a}_\theta \\ \vec{ds}_{\theta^+} = +r \sin\theta \, dr \, d\phi \, \vec{a}_\theta \end{cases}$$

$$ds_r = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \rightarrow \begin{cases} \vec{ds}_{r^+} = +r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \vec{a}_r \\ \vec{ds}_{r^-} = -r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \vec{a}_r \end{cases}$$

$$\vec{dl} = dr \, \vec{a}_r + \underbrace{r \, d\theta}_{d\theta} \, \vec{a}_\theta + \underbrace{r \sin\theta \, d\phi}_{d\phi} \, \vec{a}_\phi$$

$$dl = \begin{cases} dr \\ r \, d\theta \\ r \sin\theta \, d\phi \end{cases}$$

نکته‌ای در مورد dL :

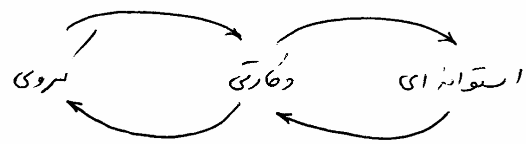


در شکل مقابل برای رسیدن از نقطه‌ی اول به نقطه‌ی دوم، به ترتیب ۳ بردار در جهت های x، y و z طی شده است. اما نتیجه یک بردار مستقیم است که از ابتدا به انتها می رسد و dL نامیده شده است. به عبارت دیگر، بردار dL که دو نقطه را به هم وصل کرده است از ۳ بردار در جهت های x، y و z تشکیل شده است. پس:

$$\vec{dL} = dx\,\vec{a}_x + dy\,\vec{a}_y + dz\,\vec{a}_z$$

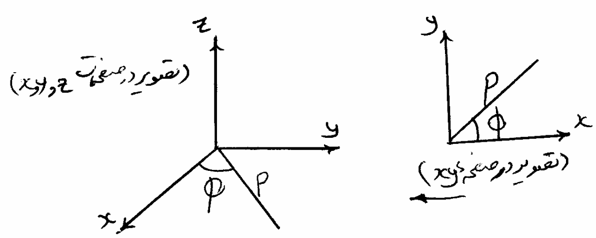
---

* تبدیل سیستم‌های مختصات:



تبدیل:
- تبدیل نقاط
- تبدیل بردارها

الف) استوانه‌ای به دکارتی و برعکس:



تبدیل نقاط استوانه‌ای به دکارتی
$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

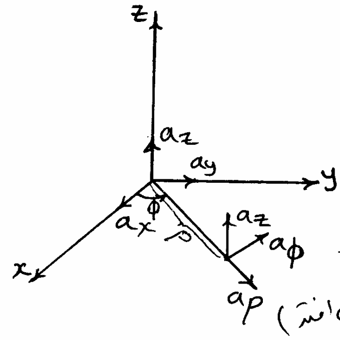
تبدیل نقاط دکارتی به استوانه‌ای
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

$$\left(1, \frac{\pi}{4}, 2\right) \longrightarrow \left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}, 2\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$$

تبدیل بردارها:

$$\vec{A} = A_\rho\,\vec{a}_\rho + A_\phi\,\vec{a}_\phi + A_z\,\vec{a}_z$$

$$\vec{A} = A_x\,\vec{a}_x + A_y\,\vec{a}_y + A_z\,\vec{a}_z$$



$$A_x = \vec{A}\cdot\vec{a}_x = \left(A_\rho \vec{a}_\rho + A_\phi \vec{a}_\phi + A_z \vec{a}_z\right)\cdot\vec{a}_x$$

$$= A_\rho \underbrace{\vec{a}_\rho\cdot\vec{a}_x}_{\cos\phi} + A_\phi \underbrace{\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_x}_{\cos(90+\phi)} + A_z \underbrace{\vec{a}_z\cdot\vec{a}_x}_{0=\cos 90^\circ}$$

$0 = \cos 90^\circ$: زاویه بین x و z

$-\sin\phi = \cos(90+\phi) =$ زاویه بین ϕ و x (۹۰ درجه بچرخد روی x می‌ماند)

$$A_y = A_\rho \underbrace{\vec{a}_\rho\cdot\vec{a}_y}_{\sin\phi} + A_\phi \underbrace{\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_y}_{\sin(90+\phi)=\cos\phi} + A_z \underbrace{\vec{a}_z\cdot\vec{a}_y}_{0}$$

$\sin\phi$ ← همانند A_x اما با این فرق که در محور y ها $\sin$ است.

$A_z = A_z$ ← A_z در دکارتی و استوانه ای برابر است

تبدیل برداری استوانه ای به دکارتی

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

(دوران به اندازه $-\phi$)

بردار دکارتی ← بردار استوانه ای

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

(دوران به اندازه ϕ)

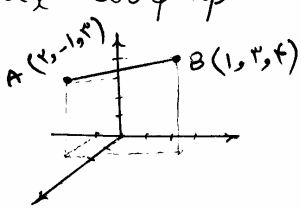
بردار استوانه ای ← بردار دکارتی

* روابط بالا برای بردارهای یکه نیز برقرار است.

$$\vec{a}_\rho = \cos\phi\,\vec{a}_x + \sin\phi\,\vec{a}_y$$

$$\vec{a}_x = \cos\phi\,\vec{a}_\rho - \sin\phi\,\vec{a}_\phi$$

مثال:



$$\vec{AB} = \underbrace{(-1)}_{AB_x}\vec{a}_x + \underbrace{(4)}_{AB_y}\vec{a}_y + \underbrace{(1)}_{AB_z}\vec{a}_z$$

$$\begin{bmatrix} AB\rho \\ AB\phi \\ ABz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

* در پیدا کردن ϕ تنها نقطهٔ ابتدای بردار (A) کافی است.

$$AB\rho = -\cos\phi + 4\sin\phi$$

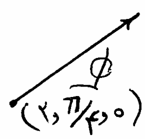
$$AB\phi = \sin\phi + 4\cos\phi$$

$$ABz = 1$$

$$\phi = \text{Arc}\tan\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$\boxed{\vec{AB} = AB\rho\,\vec{a}_\rho + AB\phi\,\vec{a}_\phi + ABz\,\vec{a}_z}$$

مثال مهم: بردار زیر داده شده است. تبدیل زیر را انجام دهید:

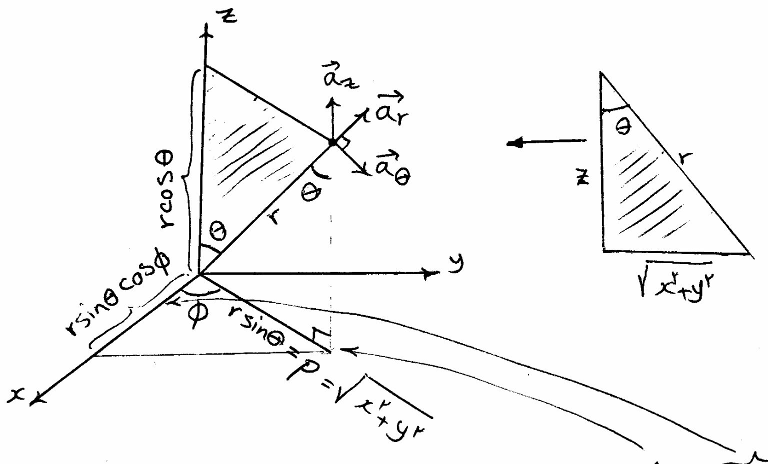


$$\underset{\text{استوانه‌ای}}{\vec{A}} = 2\vec{a}_\rho + 3\vec{a}_\phi + \vec{a}_z \longrightarrow \underset{\text{دکارتی}}{\vec{A}} = ?$$

نکته: در تبدیل بردارها به یکدیگر، ϕ نقطهٔ ابتدای باشد (مختص دوم)، یعنی حتماً باید نقطهٔ ابتدای بردار داده شده باشد.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 5\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underset{\text{دکارتی}}{\vec{A}} = \overset{\frac{\sqrt{2}}{2}}{0.7}\,\vec{a}_x + 3.5\,\vec{a}_y + \vec{a}_z$$



تبدیل نقطه‌ی دکارتی به کروی

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \cos^{-1}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \phi = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

تبدیل نقطه‌ی کروی به دکارتی

$$x = \underbrace{r\sin\theta}\,\underbrace{\cos\phi}$$

ابتدا بر روی صفحه‌ی xy تصویر می‌شود (به صفحه‌ی افق می‌آید) و سپس بر روی محور x ها

$$y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$z = r\cos\theta$$

* تبدیل بردارها:

کروی

$$\vec{A} = A_r\vec{a}_r + A_\theta\vec{a}_\theta + A_\phi\vec{a}_\phi$$

دکارتی

$$A = A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y + A_z\vec{a}_z$$

A تصویر بر روی x ها

کروی

$$A_x = \vec{A}\cdot\vec{a}_x = A_r\underbrace{\vec{a}_r\cdot\vec{a}_x}_{\sin\theta\cos\phi} + A_\theta\underbrace{\vec{a}_\theta\cdot\vec{a}_x}_{\sin(90+\theta)\cos\phi} + A_\phi\underbrace{\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_x}_{\cos(90+\phi)}$$

ابتدا a_θ باید ۹۰ درجه بچرخد تا منطبق با θ شود و سپس در افق تصویر شود.

A تصویر بر روی محور y ها

$$A_y = \vec{A}\cdot\vec{a}_y = A_r\underbrace{a_r\cdot\vec{a}_y}_{\sin\theta\sin\phi} + A_\theta\underbrace{\vec{a}_\theta\cdot\vec{a}_y}_{\sin(90+\theta)\sin\phi} + A_\phi\underbrace{\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_y}_{\sin(90+\phi)}$$

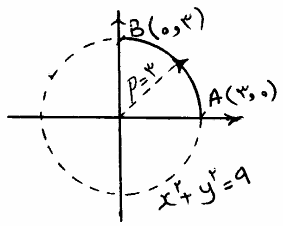
$$A_z = \vec{A}\cdot\vec{a}_z = A_r\underbrace{a_r\cdot\vec{a}_z}_{\cos\theta} + A_\theta\underbrace{\vec{a}_\theta\cdot\vec{a}_z}_{\cos(90+\theta)} + A_\phi\underbrace{\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_z}_{0}$$

۵

ماتریس تبدیل کروی به دکارتی

$$\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_r\\A_\theta\\A_\phi\end{bmatrix}$$

* اگر در ماتریس سطر با ستون عوض شود و $\begin{bmatrix}A_r\\A_\theta\\A_\phi\end{bmatrix}$ با $\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix}$ عوض شود، آنگاه تبدیل دکارتی به کروی است (ترانهاده شود).



مثال: $\vec F = xy\vec a_x - 2x\vec a_y$

مطلوبست: $\int_A^B \vec F\cdot d\vec l$

درامتداد ربع دایرهٔ نشان داده شده.

نکته: F در دکارتی داده شده است، اما مسیر در شکل (الف) استوانه‌ای است.

روش حل ①: حل دکارتی

$$d\vec l = dx\vec a_x + dy\vec a_y + \cancel{dz\vec a_z}$$

چون در ضرب نقطه‌ای بردار دو جهت مدنظر است و چون F مولفهٔ z ندارد، پس $dz\vec a_z$ حذف می‌شود.

$$\vec F\cdot d\vec l = xy\,dx - 2x\,dy$$

$$W_{AB} = \int_{x_A=3}^{x_B=0} x\underbrace{y}_{\sqrt{9-x^2}}\,dx - 2\int_{y_A=0}^{y_B=3} \underbrace{x}_{\sqrt{9-y^2}}\,dy$$

حل ②: حل استوانه‌ای

$$\begin{bmatrix}F_\rho\\F_\phi\\F_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\rho^2\sin\phi\cos\phi\\ -2\rho\cos\phi\\ 0\end{bmatrix}$$

تنها F_ϕ محاسبه می‌شود چون تنها ϕ که وجود دارد (خاصیت ضرب داخلی)

چون در صفحهٔ z نیست، پس $dz=0$
شعاع ثابت است، پس تغییرات ρ $(d\rho)$ صفر است
$\Rightarrow dl = \rho\, d\phi\, \vec a_\phi$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec F\cdot d\vec l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\rho^2\sin^2\phi\cos\phi - 2\rho\cos^2\phi\right)\underbrace{\rho}_{3}\, d\phi =$$

* در بحث زاویه:

$\vec{a}_r . \vec{a}_x$: a_r اول باید $\sin\theta$ شود تا به افق (y) برسد و بعد $\cos\phi$ تا به x برسد.

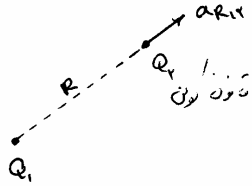
$\vec{a}_\theta . \vec{a}_x$: θ باید ۹۰ درجه بچرخد تا به r برسد (r در واقع خط افق است) و بعد $\cos\phi$ تا به x برسد.

$a_\phi . \vec{a}_x$: فقط کافی است θ $(\phi+90)$ بچرخد یعنی $\cos(90+\phi)$

در محور x و y سنجیده می‌شود.

- فصل دوم:

شدت میدان الکتریکی در اطراف بارهای نقطه‌ای، خطی، سطحی و حجمی:



قانون کولن $F_{12} = \dfrac{K Q_1 Q_2}{R^2}$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$$

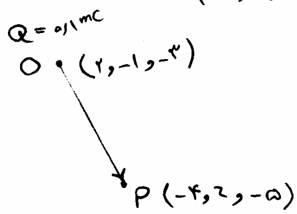
$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R^2} \vec{a}_{12}$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^{9}$$

$$\vec{E}_{12} = \frac{\vec{F}_{12}}{Q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{R^2} \vec{a}_{R_{12}} \Rightarrow E_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{R^2} \vec{a}_R$$

E_i نسبت به Q_i رابطه خطی دارد.

مثال: مطلوب است محاسبه شدت میدان الکتریکی در نقطه $P(-4,6,-5)$ در فضای آزاد که به وسیله بار $0/1^{mC}$ که در نقطه $O(2,-1,-3)$ واقع شده است.



$$\vec{R} = -6\vec{a}_x + 7\vec{a}_y - 2\vec{a}_z$$

$$\vec{E}_{op} = 9\times10^{9} \frac{0/1\times10^{-3}}{89} \times \frac{-6\vec{a}_x + 7\vec{a}_y - 2\vec{a}_z}{\sqrt{89}} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_R = -6\vec{a}_x + 7\vec{a}_y - 2\vec{a}_z \\ R^2 = 89 \end{cases}$$

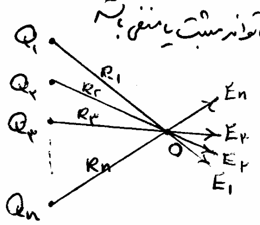
$$= M_1\vec{a}_x + M_2\vec{a}_y + M_3\vec{a}_z$$

$$\boxed{\vec{a}_E = \frac{M_1\vec{a}_x + M_2\vec{a}_y + M_3\vec{a}_z}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}}}$$

جهت

- شدت میدان حاصل از چند بار نقطه‌ای:

* Q می‌تواند مثبت یا منفی باشد.



اگر بخواهیم شدت میدان حاصل از چند بار نقطه‌ای را به دست آوریم:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \cdots + \vec{E}_n \rightarrow E_t = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{R_i^2} \vec{a}_{R_i}$$

فرمول شدت میدان برای n بار نقطه‌ای

(17)

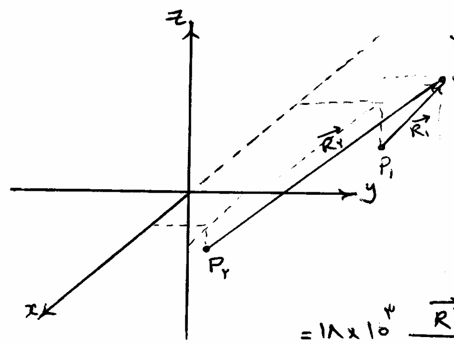
در برخی از منابع آورده شده است $\longrightarrow \vec{a}_R = \dfrac{\vec{R}}{R} \Rightarrow \dfrac{\vec{a}_R}{R^2} = \dfrac{\vec{R}}{R^3} = \dfrac{\vec{R}}{(R^2)^{3/2}}$

اگر $n \to \infty$ ، Q ها به هم چسبیده شده و توده ای از بارهای پیوسته شکل می گیرد.

مثال: بار نقطه ای $Q_1 = 2\,\mu C$ در موقعیت $P_1(-3,7,-4)$ و بار $Q_2 = 5\,\mu C$ در نقطهٔ $P_2(2,4,-1)$ قرار دارد. با در نظر گرفتن $O(12,15,18)$ مطلوبست محاسبهٔ:

الف) $\vec{E}_o$

ب) E_o را به مختصات کروی و استوانه ای تبدیل کنید.



$$\vec{R}_1 = 15\vec{a}_x + 8\vec{a}_y + 22\vec{a}_z$$

$$\vec{R}_2 = 10\vec{a}_x + 11\vec{a}_y + 19\vec{a}_z$$

$$\vec{E}_1 = 9\times10^9 \, \frac{2\times10^{-6}}{R_1^2} \, \vec{a}_{R_1}$$

$$= 18\times10^3 \, \frac{\vec{R}_1}{(R_1^2)^{3/2}} = 18\times10^3 \, \frac{15\vec{a}_x + 8\vec{a}_y + 22\vec{a}_z}{(15^2+8^2+22^2)^{3/2}} = \dots$$

$$E_2 = 9\times10^9 \times (-5\times10^{-6}) \, \frac{10\vec{a}_x + 11\vec{a}_y + 19\vec{a}_z}{(10^2+11^2+19^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}_o = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \dots\vec{a}_x + \dots\vec{a}_y + \dots\vec{a}_z$$

ب) برای بردن E_o به استوانه ای ابتدا باید E_1 و E_2 را به صورت جداگانه به استوانه ای برده و سپس استوانه ای با هم جمع شوند. برای بردن E_o به کروی نیز به همین ترتیب.

$$\vec{E}_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R}}{(R^2)^{3/2}}$$

$$n \longrightarrow \infty \Rightarrow \underbrace{\sum}_{\text{بار گسسته}} \longrightarrow \underbrace{\int}_{\text{بار پیوسته}} \Rightarrow d\vec{E}_1 = \frac{dQ_i}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{R}}{(R^2)^{3/2}}$$

$dQ = \rho_v \, dv$ حجمی

$dQ = \rho_s \, ds$ سطحی

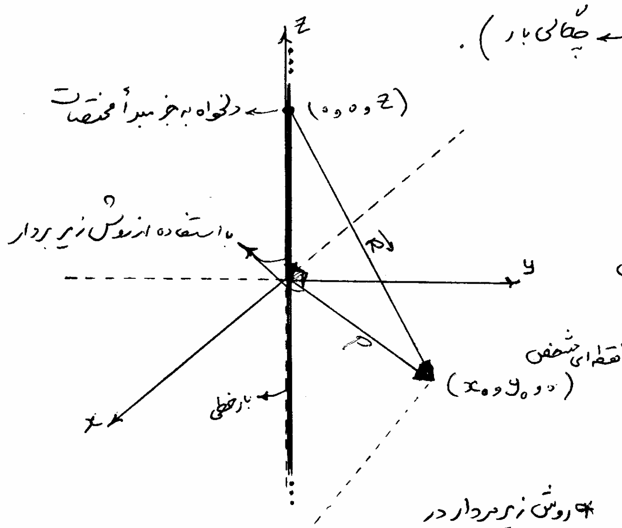
$dQ = \rho_L \, dl$ خطی

$$\Longrightarrow \vec{E}_t = \begin{cases} \iiint \dfrac{\rho_v \, dv}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\vec{R}}{(R^2)^{3/2}} & \text{بارهای حجمی (3 بعدی)} \\ \iint \dfrac{\rho_s \, ds}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\vec{R}}{(R^2)^{3/2}} & \text{بارهای سطحی (2 بعدی)} \\ \int \dfrac{\rho_L \, dl}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\vec{R}}{(R^2)^{3/2}} & \text{بارهای خطی} \end{cases}$$

چگالی ← یکنواخت ← طول محدود / طول نامحدود
چگالی ← غیر یکنواخت ← طول محدود / طول نامحدود

* تنها در دکارتی است که یک بردار را با کم کردن ابتدا از انتها به دست می‌آوریم.

مثال: بار خطی با چگالی ρ_L یکنواخت و با طول نامحدود روی محور z قرار گرفته است. مطلوب است شدت میدان الکتریکی در نقطه‌ی $O(x_0, y_0, 0)$. (ρ_L ← چگالی بار)



$$\frac{\vec R}{(R^2)^{3/2}} = ?$$

چون بار خطی یک نوع بار استوانه‌ای می‌باشد، پس بهتر است مسئله را در سیستم استوانه‌ای بررسی کنیم.

$$\vec R = \overbrace{-z}^{(0-z)}\vec a_z + \rho\vec a_\rho = -z\vec a_z + \sqrt{x_0^2+y_0^2}\,\vec a_\rho$$

(0,0,-z) ← دارای تقارن است. هر باری که در بالا است، متقارن آن در پایین هست و به همین دلیل مولفه‌ی z در میدان خنثی و حذف می‌شود.

* روش زیر بردار در تمامی مسائل استوانه‌ای قابل اجرا است.

هر مسئله‌ای داده شده و شدت میدان الکتریکی خواسته شد، به این صورت عمل می‌شود:

- قدم اول ← نقطه مبدا و مقصد مشخص شود (نقطه‌ی انتها داده می‌شود، نقطه‌ی مبدأ به جز مبدأ مختصات هر نقطه‌ای می‌تواند داده شود).

- قدم دوم ← کسر $\frac{R}{(R^2)^{3/2}}$ تشکیل داده می‌شود:

$$\sqrt{x_0^2+y_0^2} = \rho_0 \Rightarrow \frac{\vec R}{(R^2)^{3/2}} = \frac{-z\vec a_z + \rho_0\vec a_\rho}{(z^2+\rho_0^2)^{3/2}}$$

- قدم سوم ← dE تشکیل داده شود:

به دلیل تقارن بارها

$$\vec{dE} = \frac{\overbrace{\rho_L dl}^{dQ}}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec R}{(R^2)^{3/2}} = \frac{\rho_L dz}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\cancel{-z\vec a_z} + \rho_0\vec a_\rho}{(z^2+\rho_0^2)^{3/2}}$$

* چون خط روی محور z قرار دارد ← $dl = dz$

$0 = dy, dx$

قدم ۴ ← درصورت وجود تقارن آنرا بررسی خواهیم کرد. که معمولا باعث حذف یکی از قسمتهای برداری خواهد شد.

قدم ۵ ← عمل انتگرال گیری انجام می شود. همهٔ مقادیر ثابت (درصورتی که ρ_L یکنواخت نباشد؛ یعنی به z وابسته باشد، از انتگرال بیرون نخواهد رفت) از انتگرال بیرون خواهد رفت.

$$\vec{E} = \int \frac{\rho_L \, dl}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_L \, dz}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overbrace{\cancel{-z\vec{a}_z}}^{\text{بعلت تقارن}} + \rho_0 \vec{a}_\rho}{(z^2+\rho_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\rho_L(\rho_0 \vec{a}_\rho)}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}}_{\text{طول خط}} \frac{dz}{(z^2+\underbrace{\rho_0^2}_{\text{مقدار ثابت}})^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{\text{همواره در این نوع انتگرال}} = \frac{2}{\rho_0^2}$$

عنصری که در اینجا است

$$\frac{z}{\rho_0^2\sqrt{z^2+\rho_0^2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\rho_0^2} - \left(\frac{-1}{\rho_0^2}\right) = \frac{2}{\rho_0^2}$$

$$z \to \infty \Rightarrow \sqrt{z^2+\rho_0^2} \simeq \sqrt{z^2} = |z| = \begin{cases} z & z>0 \\ -z & <0 \end{cases}$$

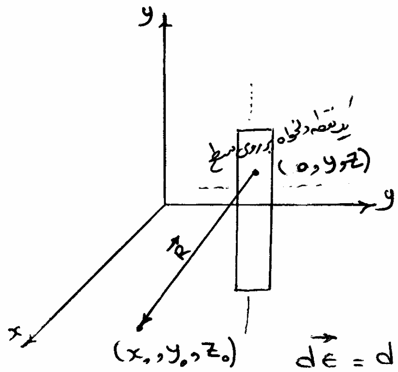
$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho_0}\vec{a}_\rho}$$

نتیجه ← میدان الکتریکی برخط عمود خواهد بود (a_ρ) به فاصله نسبت عکس دارد.

← در اینگونه خطوط بلند (نسبت طول به سطح مقطع خیلی زیاد)

میدان الکتریکی ناشی از بار سطحی :

(فرض : ρ_s یکنواخت و ابعاد نامحدود)



$$\vec R = x_0\vec a_x + (y_0-y)\vec a_y + (z_0-z)\vec a_z$$

$$\frac{\vec R}{(R^2)^{3/2}} = \frac{x_0\vec a_x + (y_0-y)\vec a_y + (z_0-z)\vec a_z}{\left\{x_0^2+(y_0-y)^2+(z_0-z^2)\right\}^{3/2}}$$

$$d\vec E = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec R}{(R^2)^{3/2}} = \frac{\rho_s ds}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec R}{(R^2)^{3/2}} = \frac{\rho_s dydz}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec R}{(R^2)^{3/2}}$$

به دلیل تقارن

$$= \frac{\rho_s dydz}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{x_0\vec a_x + \cancel{(y_0-y)\vec a_y} + \cancel{(z_0-z)\vec a_z}}{\left\{x_0^2+(y_0-y)^2+(z_0-z)^2\right\}^{3/2}}$$

و $ds = dydz$

$$\Rightarrow \vec E = \frac{\rho_s(x_0\vec a_x)}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dydz}{\left\{x_0^2+(y_0-y)^2+(z_0-z)^2\right\}^{3/2}}$$

$$= \frac{\rho_s(x_0\vec a_x)}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\Bigg[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{\left\{x_0^2+(y_0-y)^2+(z_0-z)^2\right\}^{3/2}}}_{\frac{2}{x_0^2+(z_0-z)^2}}\Bigg]dz$$

$$= \frac{\rho_s(x_0\vec a_x)}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{x_0^2+(z_0-z)^2} \qquad z_0-z=u,\quad dz=-du$$

یک منفی برای تغییر جهت انتگرال‌گیری و منفی du از بین می‌رود.

$$= \frac{\rho_s(x_0\vec a_x)}{2\pi\varepsilon_0}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{x_0^2+u^2}}_{\frac{\pi}{\sqrt{x_0^2}}} = \frac{\rho_s(x_0\vec a_x)}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{x_0}\text{Arctan}\,\frac{u}{x_0}\right\}_{-\infty}^{\infty} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\vec a_x$$

تمرین : چگالی بار سطحی روی مربع با ابعاد $-1\le x\le 1$ ، $-1\le y\le 1$ و $z=0$ عبارت است از $\rho_s=|x|\ \frac{nC}{m^2}$. مطلوبست محاسبهٔ $\vec E$ در $P(0,0,1)$.

تمرین ۲: اگر در مسئله قبل، $\rho_s = e^{-|x|} \frac{nC}{m^2}$ باشد، مطلوبست محاسبه میدان در $P(0.5, 0.5, 1)$

* بررسی قانون گوس:

شار الکتریکی: مجموعه خطوط میدان الکتریکی که از یک سطح عبور می‌کند.

چگالی شار الکتریکی: $D = \frac{\Psi_E}{S}$ ← چگالی شار الکتریکی

Ψ_E ← شار الکتریکی کل

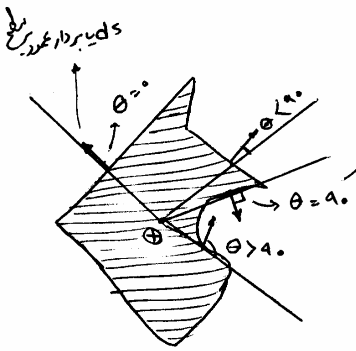
S ← مساحت سطح

سطح بسته: سطحی که یک حجم را در خود احاطه کرده باشد.

قانون گوس.

قضیه دیورژانس

هدف بررسی این ارتباطات → $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v$



θ = زاویه بین میدان و خط عمود بر سطح

$\Delta\Psi_E$ = شاری که از سطح Δs می‌گذرد $= D_s \Delta s \cos\theta$
$= \vec{D_s} \cdot \vec{\Delta s}$

شاری که از n تا Δs عبور می‌کند $= \sum_{i=1}^{n} \vec{D_{s_i}} \cdot \vec{\Delta s_i}$

$n \to \infty \Rightarrow \Psi_E = \iint \vec{D} \cdot \vec{ds}$

شاری که از یک سطح بسته خارج می‌شود $\Psi = \oiint \vec{D} \cdot \vec{ds} = Q_{enc}$ ← با توجه به قانون گوس که در مورد بارهای ساکن است

Q_{enc} ← بار محصور شده در سطح بسته.

$\Rightarrow \Psi_E = Q_{enc}$

Ψ_E ← خروجی سطح بسته

← بارهای ساکن تنها میدان الکتریکی دارند (نه مغناطیسی).

$$\oiint \vec{D} \cdot \vec{ds} = \iiint \rho_v \, dv = Q_{enc}$$

حجمی که سطح بسته احاطه شده

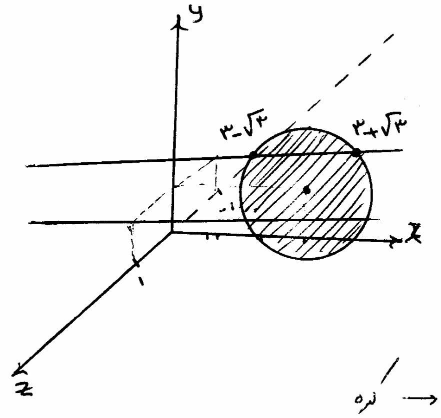
ρ_v ← بار حجمی

مسئلهٔ ۶ - فصل ۳ : دو بار یکنواخت در $y=1$ ، $z=\pm 1m$ قرار دارند.

شار خروجی از کره به شعاع $R=2^m$ و مرکز $\rho_L = 20\ \frac{nC}{m}$

الف) $A(3,1,0)$

ب) $B(3,1,0)$



$$Q = \int \rho_L dl$$

ابتدا باید طول خطوط به دست آید

برای این کار باید معادلهٔ کره با خط قطع داده شود.

$$\text{کره} \rightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$$

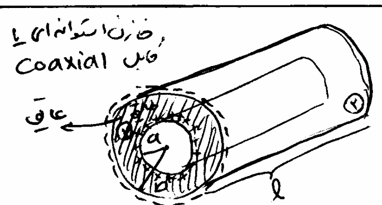
$$\text{خط ۱} \begin{cases} y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} (x-3)^2 + 1 &= 4 \\ x-3 &= \pm\sqrt{3} \\ x &= 3\pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{خط ۲} \begin{cases} y=1 \\ z=-1 \end{cases}$$

$$Q_1 = \int_{3-\sqrt{3}}^{3+\sqrt{3}} 20\times10^{-9}\, dx \rightarrow Q_2 = Q_1 \longrightarrow$$

چون $z^2=1$ و چه $z=1$ و چه $z=-1$ یکی است.

$$Q = 2Q_1 = \text{شار خروجی}$$



- توضیحات تکمیلی برای مثال کتاب

طبق قانون گوس ← در داخل اجسام رسانا و تقریباً میدان صفر است.

فرض ← بارهای + و - برابرند.

- چون بارهای + به خاطر جذب بارهای - ، بر روی استوانهٔ داخلی جمع می‌شوند، پس $Q_{enc}=0$

و در نتیجه $E=0$ ← در خارج از استوانه‌ها (به جز ناحیهٔ ②)

② تنها در حالت ② وجود دارد $\Rightarrow \oint \vec{D}\cdot\vec{ds} = Q_{encL}$

برای حالتی که هم‌جهت هستند: $\vec{D}\cdot\vec{ds} = D.ds$

$$\iint_{\text{سطح جلو}} 0 + \iint_{\text{سطح جانبی استوانه}} + \iint_{\text{سطح پشت}} 0 = \rho_L 2\pi a l$$

$$D 2\pi \rho L = \rho_s 2\pi a l \Rightarrow D = \rho_s \frac{a}{\rho}$$

معادلات ماکسول:

دیورژانس به معنای واگرایی

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$ ← میدان مغناطیسی واگرایی ندارد

میدان الکتریکی همگرایی ندارد

کرل به معنای همگرایی

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad + \frac{\partial \vec{E}}{dt}$$

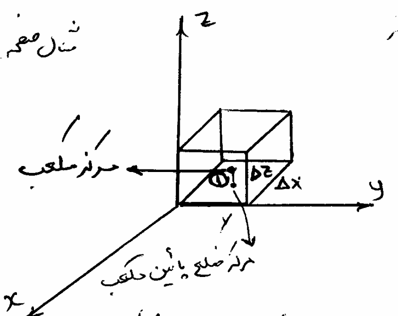
برای حالت استاتیک

برای حالت دینامیک

- کاربرد قانون گوس: مسئله‌ای که تقارن ندارد.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v \quad , \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

شکل صفحه ۳۴



چگالی شار مرکز

$$\vec{D}_0 = D_{x_0} \vec{a}_x + D_{y_0} \vec{a}_y + D_{z_0} \vec{a}_z$$

$$\oiint \vec{D} \cdot \vec{ds} = Q_{enc} \qquad \text{قانون گوس}$$

$$\Rightarrow \iint_{\text{جلو}} + \iint_{\text{پشت}} + \iint_{\text{راست}} + \iint_{\text{چپ}} + \iint_{\text{بالا}} + \iint_{\text{پایین}} = Q_{enc}$$

سری ① جمله‌ای

$$\iint_{\text{جلو}} \vec{D} \cdot \vec{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} D \cdot \vec{\Delta s}_{\text{جلو}} = \lim_{\Delta y, \Delta z \to 0} \left(\left(D_{x_0} + \frac{\frac{\Delta x}{2}}{1!} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \vec{a}_x \right) \cdot \underbrace{\Delta y \, \Delta z \, \vec{a}_x}_{\vec{\Delta s}}$$

با توجه به بسط تیلور

$$= \lim_{\Delta x, \Delta z \to 0} \left(D_{x_0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

چون از زیر x بیشتر به سمت x کمتر رفتیم (منبع جلو و پشت معکوس) و $\varepsilon = x - x_0$

$$\iint_{\text{پشت}} \vec{D} \cdot \vec{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \vec{D} \cdot \vec{\Delta s}_{\text{پشت}} = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \left(\left(D_{x_0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \vec{a}_x \right) \cdot \left(-\Delta y \Delta z \, \vec{a}_x \right)$$

$$= \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \left(-D_{x_0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

$$\iint_{\text{جلو}} + \iint_{\text{پشت}} = \lim \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} \Delta y \Delta z \Delta x \right)$$

می‌تواند حذف شود

$$\iint_{\text{راست}} + \iint_{\text{چپ}} = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \frac{\partial D_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\iint_{\text{بالا}} + \iint_{\text{پایین}} = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\Rightarrow \oiint \vec{D} \cdot \vec{ds} = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \underbrace{\Delta x \Delta y \Delta z}_{\Delta V} = Q_{enc}$$

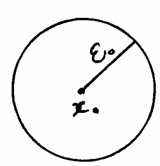
$$\Rightarrow \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{Q_{enc}}{\Delta V} = \rho_v \longrightarrow \text{چگالی بار حجمی}$$

بسط تیلور حول x_0:

$$f_{(x)} = f_{(x_0)} + \frac{\varepsilon}{1!} \frac{\partial f_{(x)}}{\partial x}\bigg|_{x_0} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \frac{\partial^2 f_{(x)}}{\partial x^2}\bigg|_{x_0} + \cdots$$

اگر ε بسیار کوچک باشد

$$\Rightarrow f_{(x)} \simeq f_{(x_0)} + \frac{\varepsilon}{1!} \frac{\partial f_{(x)}}{\partial x}\bigg|_{x_0}$$



بیان به قانون گوس توسط دیورژانس:

$$\text{دل } \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{a}_z$$

$$\vec{D} = D_x\,\vec{a}_x + D_y\,\vec{a}_y + D_z\,\vec{a}_z$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{D}}_{\text{محصول}} = \underbrace{\rho_v}_{\text{منابع}} \qquad \text{قانون گوس}$$

در قوانین ماکسول

قضیه دیورژانس:

$$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{s} = \iiint \rho_v\, dv = \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{D}\, dv \qquad \rho_v = \vec{\nabla}\cdot\vec{D}$$

$$\Rightarrow \boxed{\oiint \vec{D}\cdot d\vec{s} = \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{D}\, dv} = Q_{enc} = \Psi_e$$

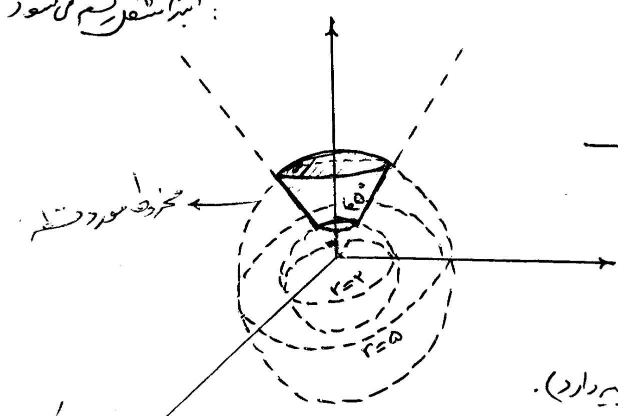
مثال: فرض کنید در میان یک مخروط ناقص به وسیله

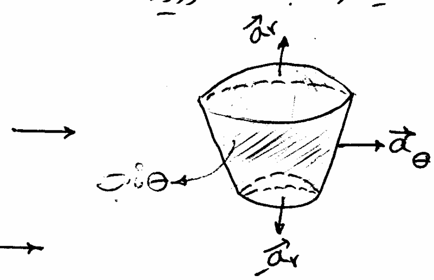
$$\left\{\begin{array}{ll} 2 \leq r \leq 5 & \text{کره های ۲ و ۵ شعاع} \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} & \text{زاویه مخروط با محور z} \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi & \text{دایره مقطع ۰ تا ۲π} \end{array}\right.$$

مشخص شده داشته باشیم

$\vec{D} = \frac{0.1}{r}\cos\theta\,\vec{a}_\theta$، از طریق محاسبه هر دو طرف قضیه دیورژانس، کل بار واقع در میان ناحیه مخروط را به دست آورید:

ابتدا شکل رسم می شود:





چون D نسبت به θ تغییر دارد،

پس ds_θ می گیریم. (در سطح مورد نظر θ تغییر دارد).

به علت اینکه D مولفه ای در جهت $\vec{a}_r$ ندارد.

$$\text{سمت چپ} = \underbrace{\iint_{\text{بالا}}}_{0} + \underbrace{\iint_{\text{پایین}}}_{0} + \iint_{\text{جانب}} = \iint \frac{0.1}{r}\cos\theta\,\vec{a}_\theta \cdot r\sin\theta\, dr\, d\phi\, \vec{a}_\theta$$

(۲۹)

چون در وجه جانبی θ ثابت است، از انتگرال بیرون می‌آید.

$$= 0/1 \underbrace{\sin\theta \cos\theta}_{\theta=\frac{\pi}{4}} \int_2^5 dr \int_0^{2\pi} d\phi = 0/1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(5-2)2\pi$$

$$= \frac{0/1}{2} \times 6\pi = \boxed{0/3\pi}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r\right)}^{\,0} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(D_\theta \sin\theta\right) + \cancel{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}}^{\,0}$$

چون $\rightarrow \vec{D} = \overbrace{\frac{0/1}{r}\cos\theta}^{D_\theta}\, \vec{a}_\theta$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{0/1}{r}\cos\theta \sin\theta\right) \leftarrow (uv)' = u'v + v'u$$

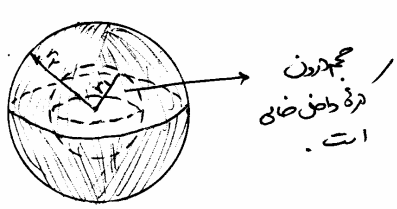
$$= \frac{0/1}{r^2\sin\theta}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

سمت راست $= \iiint \frac{0/1}{r^2 \cancel{\sin\theta}}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \cancel{r^2\sin\theta}\, dr\, d\theta\, d\phi$

$$= 0/1 \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) d\theta}_{\frac{1}{2}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \underbrace{\int_2^5 dr}_{3} = \boxed{0/3\pi}$$

تمرین از چنگ:

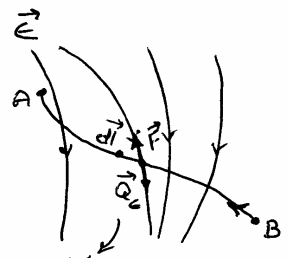
فرض کنید میدان برداری $\vec{D} = k r \vec{a}_r$ داده شده است. مطلوبست بررسی درستی قضیه دیورژانس در حدود ناحیه محصور به سطوح کروی بین $R_1 \leq r \leq R_2$ و مبدأ مختصات.



- کار و انرژی پتانسیل الکتریکی:
- گرادیان پتانسیل
- انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی

بار Q + فرض شود

قصد حرکت بار Q از نقطهٔ B به A را داریم.



بردار نیروی وارده توسط $\vec{E}$ به بار مخالف می‌شود در برای جلوگیری از آن باید نیروی F را وارد کنیم تا Q را جابجا کند.

$$F = -Q\vec{E}$$

$$dw = \vec{F}\cdot\vec{dl} = -Q\vec{E}\cdot\vec{dl}$$

$$w_{AB} = \int_B^A dw \Rightarrow w_{AB} = -Q\int_B^A \vec{E}\cdot\vec{dl} = E_P$$

کار لازم برای حرکت مخالف بار Q در میدان $\vec{E}$

انرژی پتانسیل (کار انجام شده می‌تواند به صورت انرژی پتانسیل در سیستم ذخیره شود)

مثال: فرض کنید یک میدان الکتریکی داریم:

$$\vec{E} = y\vec{a_x} + x\vec{a_y} + 2\vec{a_z}$$

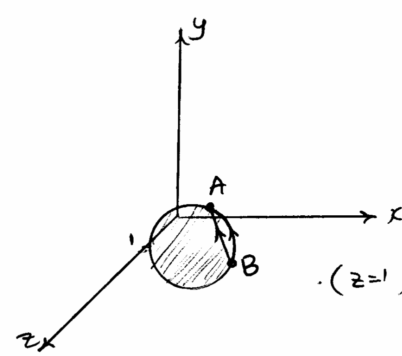
می‌خواهیم از نقطهٔ $B(1,0,1)$ به نقطهٔ $A(0.8,0.6,1)$ برویم.

کار لازم برای انتقال $Q = 2C$ در امتداد

الف) قوس کوچکتر دایره $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$

ب) خط مستقیم بین A و B

ابتدا شکل رسم می‌شود.



$$\vec{dl} = dx\vec{a_x} + dy\vec{a_y}$$

dz برابر ۰ است. زیرا روی دایره z همواره ثابت است ($z=1$).

(۲۸)

$$w_{AB} = -2\int y\,dx + x\,dy = -2\int_{x_B}^{x_A} y\,dx - \int_{y_B}^{y_A} x\,dy =$$

$$= -2\int_{1}^{0.8}\sqrt{1-x^2}\,dx - 2\int_{0}^{0.6}\sqrt{1-y^2}\,dy = -0.96\ J$$ یعنی انرژی آزاد شده است.

که منفی بیانگر این است که B دارای پتانسیل بیشتری نسبت به A بوده است.

ب)

$$\begin{cases} y - y_B = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x - x_B) \rightarrow y = -3(x-1) \rightarrow x = 1 - \dfrac{y}{3} \\ z - z_B = \dfrac{z_A - z_B}{y_A - y_B}(y - y_B) \rightarrow z = 1 \\ x - x_B = \dfrac{x_A - x_B}{z_A - z_B}(z - z_B) \end{cases}$$

برای حل باید مقادیر را برحسب x و y نوشته و در انتگرال های قبلی جایگزین کنیم (همان مقدار قبل به دست خواهد آمد).

ج) به دلیل اینکه کار به مسیر وابسته نیست، پس نیرو کنسرواتیو است.

میدان یک بار خطی در جهت a_ρ است

میدان یک بار دایره‌ای در جهت a_ϕ خواهد بود

$\rightarrow$ اگر یک بار خطی باشد و در دایره های اطراف آن حرکت کنیم، کار انجام شده صفر خواهد بود. به عبارت دیگر در دوایر اطراف بار الکتریکی، پتانسیل برابر و در نتیجه کار صفر است.

اختلاف پتانسیل:

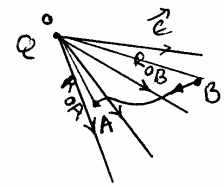
$$V_{AB} \triangleq \frac{W_{AB}}{Q}$$

$$\boxed{V_{AB} = V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E} \cdot \vec{dl}}$$

مثال: مطلوبست محاسبهٔ اختلاف پتانسیل در اطراف بار نقطه‌ای Q

حل:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{a}_r}{R^2}$$



یک روش برای حل:

یک بار آزمون را از A به B حرکت می‌دهیم و سپس مقدار کار را بر بار Q آزمون تقسیم می‌کنیم.

$$\vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{a}_r}{r^2} \cdot (dr\,\vec{a}_r + \cdots)$$

$$\vec{dl} = dr\,\vec{a}_r + \cdots$$

$$\vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2} \Rightarrow V_A - V_B = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_{oB}}^{R_{oA}} \frac{dr}{r^2}$$

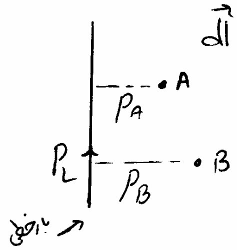
$$\boxed{V_A - V_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_{oA}} - \frac{1}{R_{oB}}\right)}$$

در بار خطی:

$$\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 \rho} \vec{a}_\rho$$

$$\vec{dl} = d\rho\,\vec{a}_\rho + \cdots$$

$$\Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 \rho} d\rho$$



$$V_B - V_A = -\int_{\rho_B}^{\rho_A} \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 \rho} d\rho = \frac{-\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \operatorname{Ln}\rho \Big|_{\rho_B}^{\rho_A}$$

$$\Rightarrow V_{AB} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \operatorname{Ln} \frac{\rho_{oB}}{\rho_{oA}}$$

اگر خط بار روی محور z باشد، $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ یا در حالت کلی‌تر

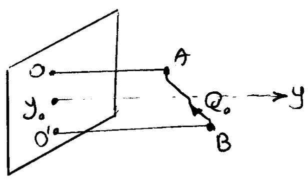
$$\rho_{oB}=\sqrt{(x_B-x_o)^2+(y_B-y_o)^2}$$

$$\rho_{oA}=\sqrt{(x_A-x_o)^2+(y_A-y_o)^2}$$

* بار سطحی:

$$E=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\vec{a_n}$$

مثلاً اگر در صفحهٔ $y=y_0$ باشیم، $\vec{E}=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\vec{a_y}$



o و o' از نظر z متفاوتند، و چون در فرمول x و y ظاهر نمی‌شود، پس می‌توان آن‌ها را با یک نام مشابه (o) نام‌گذاری کرد.

$$\vec{E}\cdot\vec{dl}=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}dy$$

$$V_A-V_B=-\int_{y_{oB}}^{y_{oA}}\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}dy$$

$$V_A-V_B=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left(y_{oB}-y_{oA}\right)$$

* محاسبهٔ V زمانی که به میدان E دسترسی نداریم:
(برای بار نقطه‌گون)

هر بار کروی و... با اطلاق قانون گوس می‌توان نقطه‌ای در نظر گرفت (دور آن یک سطح کروی کشیده و به صورت نقطه‌ای می‌گیریم).

$$V_{AB}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_{oA}}-\frac{1}{R_{oB}}\right)$$

اگر B نقطه‌ای در بی‌نهایت باشد، $(V_B=0)$

در آن‌صورت $V_B\to\infty$ و $\frac{1}{R_{oB}}\to\infty$

$$\Rightarrow V_A-V_B=V_A=\boxed{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_{oA}}}$$

پتانسیل مطلق نقطهٔ A اطراف بار نقطه‌ای

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\Rightarrow dV=\frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

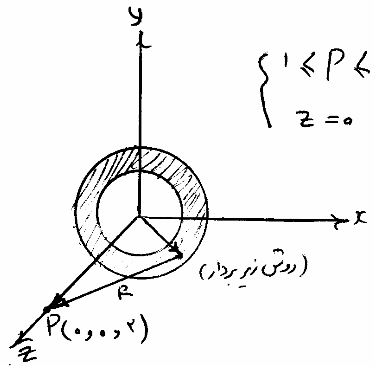
$$dQ=\rho_L\,dl\Rightarrow dV=\frac{\rho_L\,dl}{4\pi\varepsilon_0 R}\Rightarrow V=\int\frac{\rho_L\,dl}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$dQ=\rho_s\,ds\Rightarrow dV=\frac{\rho_s\,ds}{4\pi\varepsilon_0 R}\Rightarrow V=\iint\frac{\rho_s\,ds}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$dQ=\rho_v\,dv\Rightarrow dV=\frac{\rho_v\,dv}{4\pi\varepsilon_0 R}\Rightarrow V=\iiint\frac{\rho_v\,dv}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

* اگر $\in$ معلوم نباشد باید از این فرمولها استفاده شود، اما اگر معلوم بود از فرمولهای قبل.

* بررسی مسئلهٔ ۱۹ - از فصل ۴:



$V_P=?$

$$\begin{cases}1\leqslant\rho\leqslant 3\\ z=0\end{cases}\qquad \rho_s=5\rho\ \frac{nC}{m^2}$$

حل: $V_P=\iint\frac{\rho_s\,ds}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$$\vec{R}=-\rho\vec{a}_\rho+2\vec{a}_z$$

$$ds=\rho\,d\rho\,d\phi$$

$$V_P=\iint\frac{(5\times10^{-9}\rho)\,\rho\,d\rho\,d\phi}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\rho^2+4}}=5\times10^{-9}\times9\times10^{9}\int_0^{2\pi}d\phi\int_1^3\frac{\rho^2\,d\rho}{\sqrt{\rho^2+4}}$$

بررسی یک تست ارشد

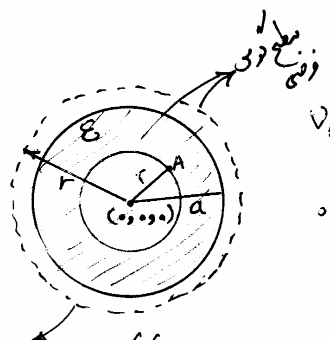
- چگالی بار الکتریکی یکنواخت $\rho_0 \ \frac{C}{m^3}$ در حجم کره‌ای از عایق همگن به شعاع a و ضریب دی‌الکتریک ε حضور دارد. مطلوب است پتانسیل الکتریکی نقطه‌ای در داخل عایق.

۱) $\frac{\rho_0}{6\varepsilon}a^2 - \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}r^2$

۲) $\frac{\rho_0}{6(\varepsilon-\varepsilon_0)}(a^2-r^2)$

۳) $\frac{\rho_0}{6}\left[\frac{a^2}{\varepsilon-\varepsilon_0}+\frac{r^2}{\varepsilon_0}\right]$

۴) $\frac{\rho_0}{6\varepsilon}(a^2-r^2)+\frac{\rho_0 a^2}{3\varepsilon_0}$



$V_A=?$

چون کره عایق است، درون آن هم میدان دارد.

$$0<r<a \Rightarrow \oint \varepsilon \vec{E}\cdot d\vec{s} = \underbrace{Q_{enc}}_{\text{حجم اشغال شده}}$$

$$\varepsilon E(4\pi r^2) = \rho_0\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon}\vec{a}_r}$$

$$r>a : \oint \varepsilon_0 \vec{E}\cdot d\vec{s} = Q_{enc}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 E(4\pi r^2) = \rho_0\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) =$$

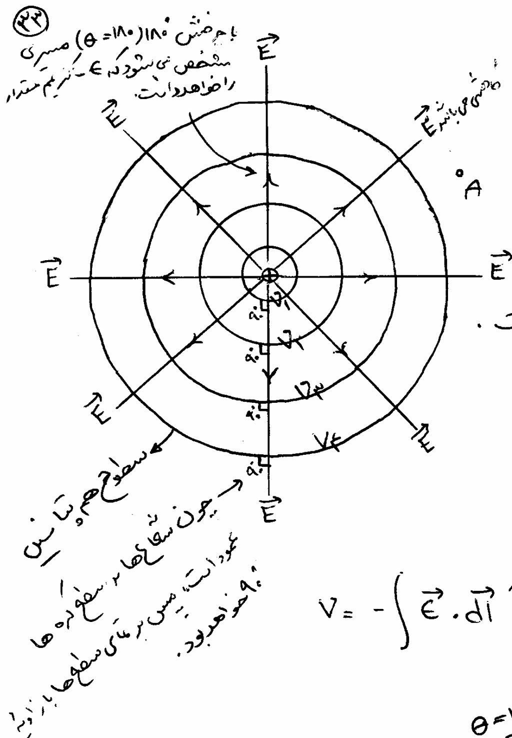
$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{a}_r$$

$$V_A = V_A - V_\infty = \underbrace{(V_A - V_a)}_{\text{داخل کره}} + \underbrace{(V_a - V_\infty)}_{\text{خارج کره}}$$

$$-\int_a^r \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon}dr - \int_\infty^a \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2}dr = -\frac{\rho_0}{3\varepsilon}\left(\frac{r^2}{2}\right)_a^r - \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{r}\right)_\infty^a$$

$$= \frac{-\rho_0}{6\varepsilon}(r^2-a^2)+\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}\right)$$

گزینه ۴ ✓



شیب یا گرادیان پتانسیل:

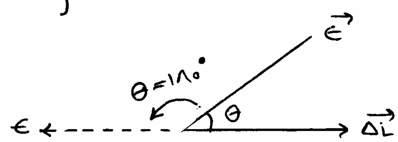
$$V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_{0A}}$$

یک مقدار ثابت = R_{0A} ← نشان دهندهٔ یک پوستهٔ کروی است.

$$V_1 > V_2 > V_3 > V_4$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{a}_R$$ → هرچه از مرکز دور شویم، E کم می‌شود → E کاهشی است.

$$V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l} \xrightarrow{\text{اگر مسیر کوتاه باشد}} \Delta V = -\vec{E}\cdot\Delta\vec{L} = -E\,\Delta L\cos\theta$$



$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta V}{\Delta L} = -E\cos\theta} \qquad \Rightarrow \left.\frac{\Delta V}{\Delta L}\right|_{max,\ \theta=180°} = E$$

* یعنی بیشترین افزایش پتانسیل را داریم و به منبع تولیدکنندهٔ پتانسیل نزدیک خواهیم شد.

$$\left|\frac{\Delta V}{\Delta x}\right| = E_x \rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta x}\vec{a}_x = -E_x\vec{a}_x$$

$$\left|\frac{\Delta V}{\Delta y}\right| = E_y \rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta y}\vec{a}_y = -E_y\vec{a}_y$$

$$\left|\frac{\Delta V}{\Delta z}\right| = E_z \rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta z}\vec{a}_z = -E_z\vec{a}_z$$

* اختلاف پتانسیل تولیدکنندهٔ میدان است.

حال اگر Δx و Δy و Δz به سمت صفر میل کنند تغییرات ΔV نیز به صورت ∂V خواهد بود. پس با لحاظ کردن این موضوع و جمع کردن روابط بالا داریم:

$$\frac{\partial V}{\partial x}\vec{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{a}_z = -\left(E_x\vec{a}_x + E_y\vec{a}_y + E_z\vec{a}_z\right) = \boxed{-\vec{E}}$$

(۳۵)

$$f(x,y,z)=\underset{\text{یک عدد}}{C}$$

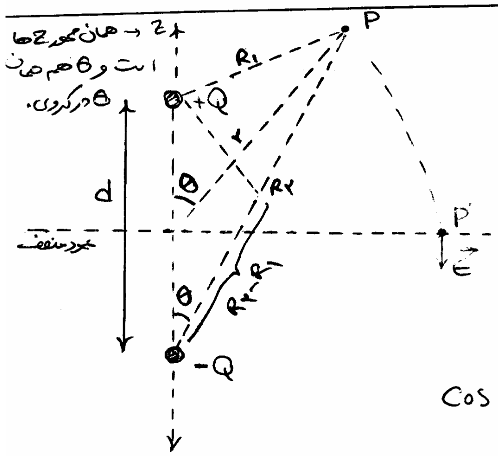
گرادیان — اپراتور دل

$$\vec{\nabla} f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{a_x}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{a_y}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{a_z}$$

چون گرادیان نشان از تابع یک بردار عمود در جهت افزایش می‌دهد، به همین دلیل منفی است.

که برداری عمود بر رویه در نقطه (x,y,z) می‌باشد. $\Rightarrow \boxed{\vec{E}=-\vec{\nabla} V}$

$$\vec{\nabla} V=\frac{\partial V}{\partial x}\vec{a_x}+\frac{\partial V}{\partial y}\vec{a_y}+\frac{\partial V}{\partial z}\vec{a_z}$$



دوقطبی: دو بار + و − که با یک عایق به هم وصل شده‌اند.

$$V_P=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}$$

$$\cos\theta=\frac{R_2-R_1}{d}$$

به خصوص برای نقاط دور دست: $R_2-R_1=d\cos\theta\ ,\ R_1R_2\simeq r^2$

$r>>d$

$$\Rightarrow V_P=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2}=\frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 \underset{\text{در دستگاه کروی}}{r^2}}=\overset{\text{گشتاور دوقطبی}}{\vec{P}}\cdot\vec{a_r}$$

$$\vec{P}=Q\vec{d}$$

روی عمود منصف $\underbrace{R_2-R_1=0}_{\theta=90}$ یعنی $R_2=R_1$ پس: $V_P=0$ یعنی سطح شامل عمود منصف سطحی هم‌پتانسیل با $V=0$ می‌باشد.

چون در شکل بالا به ϕ وابستگی ندارد.

$$\vec{E}=-\vec{\nabla} V=-\left(\frac{\partial V}{\partial r}\vec{a_r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{a_\theta}+\cancel{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{a_\phi}}\right)$$

$$=-\left(\frac{-Qd\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{a_r}-\frac{Qd\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{a_\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E}=\frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\vec{a_r}+\sin\theta\,\vec{a_\theta}\right)$$

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow \vec{E} = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\vec{a}_\theta$$

دوبرابر شدن فاصله ← تنها مولفه‌ای که در حالت کلی وجود دارد، نقطه‌ای است که پتانسیل میدان را بیشینه می‌کند.

- انرژی پتانسیل در میدان الکترواستاتیک:

هدف:

$$E_p = \frac{1}{2}\iiint \varepsilon_0 E^2\, dv$$

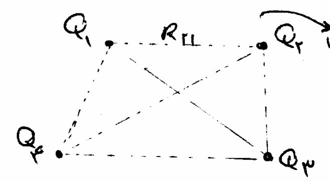
محیط — شدت میدان — حجم

که نشان دهنده این است که: انرژی در میدان ذخیره می‌شود.

$$\boxed{V_{12} \triangleq \frac{W_{12}}{Q_0}}$$

W_{12}: کار لازم برای آوردن بار ۲ به نزدیکی بار ۱

* در محیط خالی از بار، برای آوردن یک بار به داخل آن کاری انجام نمی‌شود.



$W_{21} = V_{21} Q_2$ و $V_{21} = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{21}}$ که

پتانسیلی که بار ۱ در محل ۲ ایجاد کرده است.

کار لازم برای آوردن Q_3 به نزدیکی Q_1 و Q_2 → $W_{31} + W_{32} = V_{31}Q_3 + V_{32}Q_3$

کار لازم برای آوردن n تا بار Q_1، Q_2، ... و Q_n:

$$W_E = V_{21}Q_2 + V_{31}Q_3 + V_{32}Q_3 + V_{41}Q_4 + V_{42}Q_4 + V_{43}Q_4 + \cdots$$

← به جای اینکه اول بار ۱ را آورده و سپس بار دیگری را به آن نزدیک کنیم، می‌توانستیم ابتدا آن یکی بار را بیاوریم و سپس بار ۱ و ... را به آن نزدیک کنیم. پس:

$$V_{12}Q_2 = V_{21}Q_1$$

نتیجه می‌شود:

$$W_E = V_{12}Q_1 + V_{13}Q_1 + V_{23}Q_2 + V_{14}Q_1 + V_{24}Q_2 + V_{34}Q_3 + \cdots$$

← حال دو طرف را با هم جمع می‌کنیم (W_Eهای به دست آمده)

$$2W_E = Q_1\big(\overbrace{V_{12} + V_{13} + V_{14} + \cdots}^{V_1\,:\,\text{پتانسیل بقیه بارها در محل } Q_1}\big) + Q_2\big(\underbrace{V_{21} + V_{23} + V_{24} + \cdots}_{V_2}\big) + Q_3\big(\underbrace{V_{31} + V_{32} + V_{34} + \cdots}_{V_3}\big) + \cdots$$

$$W_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i \overset{\text{پتانسیل}}{V_i} = E_p$$

← فرم کلی‌تر گسسته

انرژی پتانسیلی که در n بار Q ذخیره خواهد شد.

$$\text{if} \quad n\to\infty \quad \begin{cases} Q_i \longrightarrow dQ=\rho_v\,dv \\ \sum \longrightarrow \iiint \end{cases} \Rightarrow \boxed{w_E=\frac{1}{2}\iiint \rho_v V\,dv} = E_p$$

فرم ماکروسکوپی

پتانسیل

اگر ∞←n آنگاه R، شعاع کره هم به سمت ∞ میل می‌کند.

$$w_E=\frac{1}{2}\iiint (\vec\nabla\cdot\vec D)\,V\,dv$$

$$\underbrace{\vec\nabla\cdot(V\vec D)}_{\text{دیورژانس یک گرادیان}} \equiv V(\vec\nabla\cdot\vec D)+\vec D\cdot(\vec\nabla V)$$

$$\Rightarrow w_E=\frac{1}{2}\iiint\left\{\vec\nabla\cdot(V\vec D)-\vec D\cdot\vec\nabla V\right\}dv$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}\iiint\vec\nabla\cdot(V\vec D)\,dv}_{\text{براساس قضیه دیورژانس :}}-\frac{1}{2}\iiint\vec D\cdot\underbrace{\vec\nabla V}_{-\vec E}\,dv$$

$$\cancel{\frac{1}{2}\oint V\vec D\cdot d\vec s} \longrightarrow 0 \longrightarrow \text{چون } R\to\infty$$

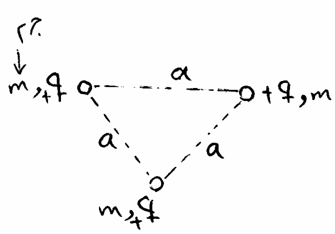
$$V=\frac{1}{R} \qquad \alpha\,\frac{1}{R^2} \qquad \alpha R^2$$

متناسب

این دو همدیگر را خنثی می‌کنند

$$\Rightarrow w_E=\frac{1}{2}\iiint\underbrace{\vec D}_{\varepsilon_0\vec E}\cdot\vec E\,dv=\boxed{\frac{1}{2}\iiint\varepsilon_0E^2\,dv=E_p}$$

بررسی یک تست:



اگر یکی از بارهای q مجاز به حرکت باشد و فقط نیروهای کولنی حضور داشته باشند (اصطکاک و ... = ۰)، سرعت ذره q در نقاط بی‌نهایت دور کدام گزینه است.

۱) $\dfrac{\sqrt{3}\,q}{\sqrt{ma\pi\varepsilon_0}}$

۲) $\dfrac{q}{\sqrt{ma\pi\varepsilon_0}}$

۳) $\dfrac{q}{\sqrt{2ma\pi\varepsilon_0}}$

۴) $\dfrac{q}{\sqrt{3ma\pi\varepsilon_0}}$

(۲۷)

* چون برای قرار دادن بارها کنار هم باید کار انجام شود، پس دارای انرژی پتانسیل ذخیره شده هستند.

انرژی پتانسیل اول = انرژی جنبشی بار آزاد شده + انرژی پتانسیل باقیمانده

حالت ۱ اول ← هر ۳ بار حضور دارند. جنبشی

$E_{c_1} = 0$

$$E_{p_1} = 3\left(\frac{1}{2} Q v_1\right)$$

$$= \frac{3}{2} q \underbrace{\left(v_{12} + v_{13}\right)}_{2v_{12}}$$

$$= 3q\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\right) = \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

حالت دوم ۲ ← یکی از بارها آزاد شده (دور شده) و ۲ بار دیگر حضور دارند.

$$E_{p_2} = qv = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$E_{c_2} = \frac{1}{2} m v^2$$

با مقایسه ۱ و ۲ $\Rightarrow E_{p_1} + E_{c_1} = E_{p_2} + E_{c_2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

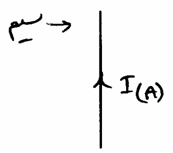
$$\Rightarrow v^2 = \frac{q^2 / \pi\varepsilon_0 a}{m}$$

$$v = \frac{q}{\sqrt{m\pi\varepsilon_0 a}}$$

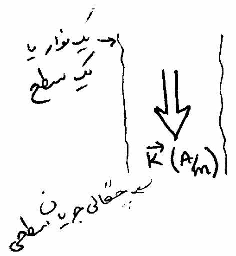
$\boxed{\text{گزینه ۲ } \checkmark}$

فصل ۵

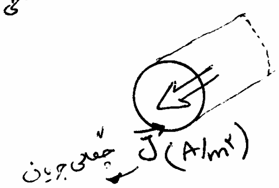
شدت جریان، هادی ها، مقاومت الکتریکی:



$$I \triangleq \frac{dQ}{dt}$$

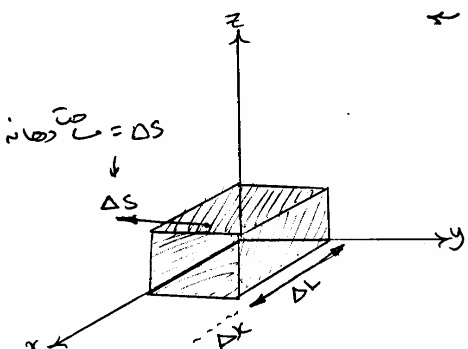


$$\rightarrow \quad I = \int K\,dy$$



$$\rightarrow \quad I = \iint \vec{J}\cdot\vec{ds}$$

قصد حرکت حجم به اندازه Δx را داریم ←



$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho_v\,\Delta s\,\Delta x}{\Delta t}$$

سرعت متوسط روی محور x ها

$$\Delta I = \rho_v\,\Delta s\,v_x$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\Delta I}{\Delta s}}_{J_x} = \rho_v\,v_x$$

$$\rightarrow J_y = \rho_v\,v_y$$

$$J_z = \rho_v\,v_z$$

اگر J یک بردار ۳ بعدی باشد → $\vec{J} = J_x\vec{a}_x + J_y\vec{a}_y + J_z\vec{a}_z$

$$V = V_x\vec{a}_x + V_y\vec{a}_y + V_z\vec{a}_z$$

$$\Rightarrow \vec{J} = \rho_v\vec{V}$$ → سرعت

پیوستگی شدت جریان : طبق اصل بقای بارهای الکتریکی می‌توان گفت بار الکتریکی نه به وجود می‌آید و نه از بین می‌رود و اینکه اگر زمانی تعداد مساوی بار منفی و مثبت به وجود بیایند، از طریق جدا شدن از یکدیگر به دست آمده‌اند و با ملحق شدن به یکدیگر از بین می‌روند. معادله‌ی پیوستگی نتیجه‌ی این اصل است و می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$I = \oint\!\!\oint \vec{J}\cdot\vec{ds} = -\frac{d\underbrace{Q_i}_{\text{موجودی بار اولیه}}}{dt}$$

انتگرال بسته به این معنا که جریان وارد می‌شود و از همه‌ی سطوح می‌گذرد و سپس خارج می‌شود (نه اینکه فقط خارج شود)

$$\oint\!\!\oint \underbrace{\vec{J}\cdot\vec{ds}}_{\text{با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس}} = \frac{-d}{dt}\underbrace{\iiint \rho_v \, dv}_{\text{که جای انتگرال و مشتق عوض شود}}$$

$$\iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\,dv = \iiint -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}\,dv$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

اگر جریان از نوع dc باشد، پس $\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$ یعنی ρ_v ثابت (ct) است.

و $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$ یعنی $\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0$

اگر جریان از نوع Ac باشد، پس $\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \neq 0$ و $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} \neq 0$

توضیح بیشتر:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

رابطه‌ی $\vec{J} = \underbrace{\sigma}_{\text{هدایت ویژه (رسانایی)}} \vec{E}$ را نیز داریم و نیز، $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\left(\sigma \frac{\vec{D}}{\varepsilon}\right) = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

با فرض اینکه $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ = ثابت ، پس :

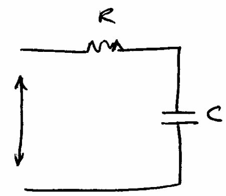
$$\Big(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{D}}_{\rho_v}\Big)\frac{\sigma}{\varepsilon} = -\frac{\partial \rho_v}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho_v = 0$$

با فرض اینکه $\rho_v\Big|_{t=0} = \rho_0$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_v = \rho_0\, e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}}$$

که $\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ ثابت زمانی مدار :



$$I = \frac{\varepsilon}{R}\, e^{-t/RC}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{1}{RC}$$

$$\Rightarrow \boxed{RC = \frac{\varepsilon}{\sigma}}$$

عمق نفوذ :

$$-z\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma} \leftarrow \delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}}$$

← از جنس مسافت است .

← فرض شکل موج

$$J_x = \sigma E_x e^{-z\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}} \cos\left(\omega t - z\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}\right)$$

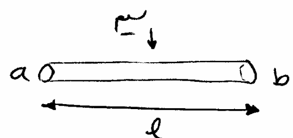
مس : $\sigma = 5.8 \times 10^{7}\ \frac{\mho}{m}$

۴۲

$$\Rightarrow \delta_{cm} = \frac{0/066}{\sqrt{f}}$$

$$f = 60 \ \text{Hz} \longrightarrow \delta_{cm} = 8/53 \ \text{mm}$$

$$f = 10 \ \text{GHz} \longrightarrow \delta_{cm} = 6/61 \times 10^{-4} \ \text{mm}$$



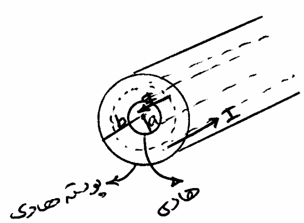
$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{-\int_b^a \underbrace{\vec{E}\cdot\vec{dl}}_{\text{طول سیم}}}{\iint \sigma \underbrace{\vec{E}\cdot\vec{ds}}_{\text{دهانه سیم}}}$$

شکل از چنگ
ص ۲۵۹ ۵-۵
ص ۲۶۱ ۶-۵

مقاومت طولی سیم :

$$R = \frac{L}{\sigma S}$$

مقاومت عرضی کابل کواکسیال (coaxial) :



$$R^* = \frac{V_{ab}}{I^*} =$$

$$\oiint \vec{D}\cdot\vec{ds} = Q_{enc}$$

$$\Rightarrow \varepsilon E (2\pi \rho L) Q$$

$$V_{ab} = -\int_b^a \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \vec{a}_\rho \cdot \underbrace{d\rho \vec{a}_\rho}_{dl} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2\pi\rho \ell \varepsilon} = \frac{\rho_L L}{2\pi\rho L \varepsilon} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon\rho}\vec{a}_\rho$$

۴۲

$$I^* = \iint \sigma^* \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon\rho}\vec{a_\rho}\cdot\rho\, d\phi\, dz\, \vec{a_\rho}$$

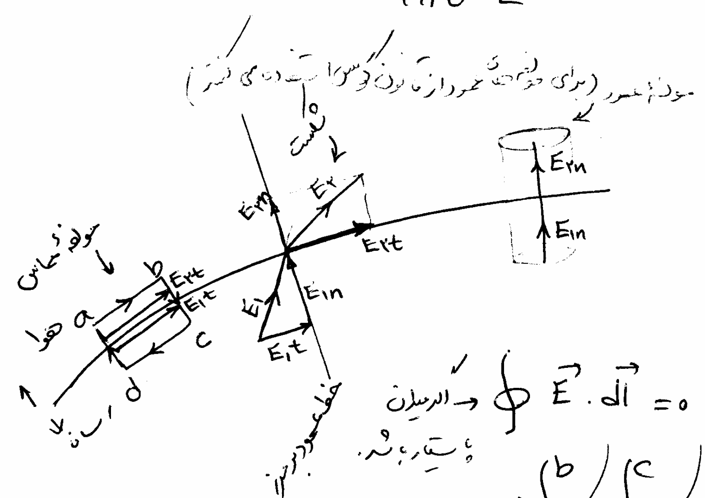
$$= \sigma^* \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\times 2\pi l = \frac{\sigma \rho_L l}{\varepsilon} \Rightarrow R^* = \frac{\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b}{a}}{\frac{\sigma^*\rho_L L}{\varepsilon}}$$

برای عایق ها با * و برای هادی ها بدون * است.

$$\Rightarrow R^* = \frac{\ln\frac{b}{a}}{2\pi\sigma^* L}$$

$$\boxed{RC^* = \frac{\varepsilon}{\sigma^*}}$$

رسانا و شرایط مرزی:



الزاماً → $\oint \vec{E}\cdot\vec{dl} = 0$
باید بسته باشد.

$$\Rightarrow \int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a = 0$$

چون w از انتگرال دیگر است، ... کنار هم باید بسته باشد.
عمودند
۰ چون داخل رسانا هستیم
چون عمود است

$$\Rightarrow E_{2t} = 0$$

برای مولفهٔ عمودی → $\oint \vec{D}\cdot\vec{ds} = Q_{enc} \Rightarrow \iint_{\text{هوا}} + \underbrace{\iint_{\text{هادی}}}_{0} + \underbrace{\iint_{\text{جانبی}}}_{0} = Q_{enc}$

$$\Rightarrow D_{2n}\Delta s = \rho_s \Delta s$$

$$\Rightarrow D_{2n} = \rho_s \quad \text{یا} \quad \boxed{E_{2n} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}}$$

← بر طبق این مطالب، میدان‌های بازتاب شده از سطوح یک رسانا، بر سطح آن عمود خواهد بود.
(همانند آینه‌ها (تخت، محدب و...) می‌توانند خطوط بازتاب شده را به همان صورت، به طور محدب و یا... منعکس کنند. به عبارت دیگر سطوح یک رسانا در برابر خطوط میدان همانند آینه‌ها عمل می‌کند).

* روش تصویر:

$$D_n = \rho_s \quad \Rightarrow \quad \rho_s = \varepsilon_0 E_n$$

← اگر E_n متغیر با زمان باشد، ρ_s هم متغیر با زمان خواهد بود که در این حالت جریانی در هادی القا خواهد شد.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

توسط معادله لاپلاس

$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

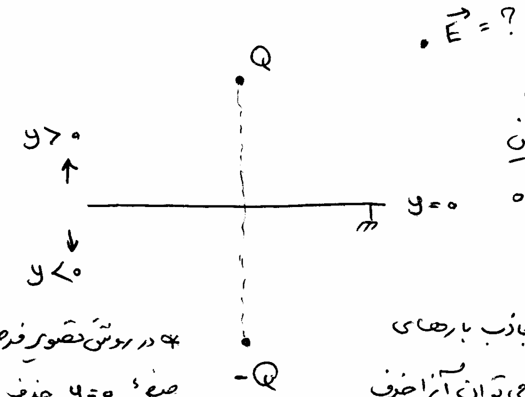
← هدف پیدا کردن پتانسیل است

$$V = V(x, y, z)$$

چون حل معادله لاپلاس منتهی به معادلات دیفرانسیل پیچیده می‌شود، از روش جایگزینی (روش تصویر) استفاده می‌شود.

روش تصویر: این روش جایگزینی برای پیدا کردن پتانسیل مثلاً در تمام نقاط بالای صفحهٔ رسانای $y > 0$ می‌باشد. همان طور که گفته شد، روش رسمی برای انجام این کار حل معادلهٔ لاپلاس است. ولی روش تصویر برای $y > 0$، به جز در محل بار نقطه‌ای تحت شرایط زیر قابل استفاده است.

۱- در تمام نقاط روی صفحهٔ رسانا، پتانسیل صفر باشد (صفحه به زمین وصل شود)
۲- در نقاط بسیار نزدیک به Q، پتانسیل به سمت پتانسیل یک بار نقطه‌ای تنها میل می‌کند.
۳- در نقاط بسیار دور از Q پتانسیل صفر باشد.
۴- تابع پتانسیل نسبت به x و z تابعی زوج باشد.



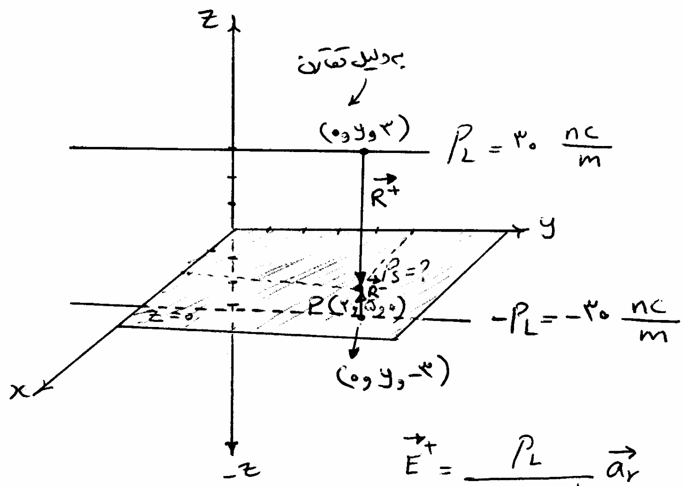
* Q علاوه بر ایجاد میدان E، یک ρ_s القایی نیز بر روی ورق y=0 ایجاد می‌کند. در این حالت دیگر نمی‌توان گفت میدان ایجاد شده تنها ناشی از بار Q است.

* چون صفحهٔ y=0 جاذب بارهای منفی خواهد بود، پس می‌توان آن را حذف و جای آن Q- را جایگزین نمود.

* در روش تصویر فرض می‌شود صفحهٔ y=0 حذف شده و به جای آن بار قرینهٔ Q- قرار گرفته است. حال با این فرض میدان را محاسبه می‌کنیم.

* مثال از هیت :

(در رساناها میدان لزوماً عمودی است)



$$\vec{E}^+ = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 R^+}\,\vec{a}_r$$

$$\vec{R}^+ = (2-0)\,\vec{a}_x + (0-3)\,\vec{a}_z$$

$$\vec{E}^+ = \frac{30\times10^{-9}\times18\times10^{9}\,(2\vec{a}_x - 3\vec{a}_z)}{(2^2+3^2)}$$

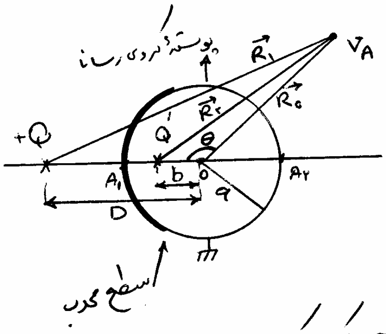
$$\vec{E}^- = \frac{-30\times10^{-9}\times18\times10^{9}\,(2\vec{a}_x + 3\vec{a}_z)}{(2^2+3^2)}$$

$$\vec{E}_n = \vec{E}^+ + \vec{E}^- = -249\,\vec{a}_z$$

چون بر صفحه عمود است، پس همان نرمال می‌گیریم.

$$\rho_s = \varepsilon_0 \vec{E}_n = -۲۴۹(\varepsilon_0) \quad \frac{C}{m^2}$$

- مثال از چنگ



الف) تصویر بار +Q که به فاصلهٔ d از مرکز کره قرار دارد؟

ب) پتانسیل یک نقطه در خارج از کره به چه صورت خواهد بود؟

$b = ?$

$Q' = ?$

* فرض می‌کنیم قسمتی از کره که روبروی بار Q است،
همانند آینهٔ محدب عمل می‌کند، پس تصویر Q در فاصلهٔ
کانونی آینه تشکیل می‌شود. در این حالت Q با قرینه‌اش
یعنی Q' برابر نخواهد بود و چون سطح محدب است پس: $Q' < Q$

$$V_{A_1} = 0 \Rightarrow \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(D-a)} + \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0(a-b)} = 0$$

$$V_{A_2} = 0 \Rightarrow \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(D+a)} + \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0(a+b)} = 0$$

$\Rightarrow$ b و Q' مجهول است.

$$\times 4\pi\varepsilon_0 \longrightarrow \text{مخرج مشترک} \rightarrow \begin{cases} Q(a-b) + Q'(D-a) = 0 \\ Q(a+b) + Q'(D+a) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ با حل

$$\Rightarrow \begin{cases} Q' = -Q\dfrac{a}{D} \\ b = \dfrac{a^2}{D} \end{cases}$$

$\longleftarrow$ مشاهده می‌شود که Q' منفی است و اندازهٔ آن از Q کوچکتر است.

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{Q\frac{a}{D}}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$R_1 = \left(D^2 + R_0^2 - 2R_0 D\cos\theta\right)^{1/2}$$

$$R_2 = \left(b^2 + R_0^2 - 2bR_0\cos\theta\right)^{1/2}$$

(۲۹)

فرض می‌کنیم $R_0 \to 0$

این قضیه را بررسی می‌کنیم که $\lim_{R \to a} V_A = 0$ صحیح است یا خیر؟

$$\Rightarrow \lim_{R_0 \to a} \frac{a}{4\pi\varepsilon_0 (D^2+a^2-2aD\cos\theta)^{1/2}} - \frac{Q\frac{a}{D}}{4\pi\varepsilon_0 (b^2+a^2-2ab\cos\theta)^{1/2}}$$

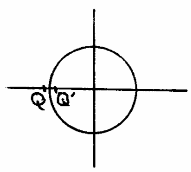
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (D^2+a^2-2aD\cos\theta)^{1/2}} - \frac{Q\frac{a}{D}}{4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{a^4}{D^2}+a^2-2a\frac{a^2}{D}\cos\theta\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (D^2+a^2-2aD\cos\theta)^{1/2}} - \frac{Q\alpha}{\frac{\cancel{D}4\pi\varepsilon_0\alpha}{\cancel{D}} (a^2+D^2-2aD\cos\theta)^{1/2}}$$

$$= 0$$

اثبات شد ✓

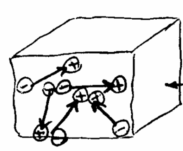
- اگر D به سمت بی‌نهایت میل کند، Q' به سمت مرکز کره میل خواهد کرد که در این حالت Q' به سمت صفر میل می‌کند و اگر D به سمت نقطه‌ی A_1 میل کند، Q' در آن سوی کره و در بیشترین مقدار خود یعنی میل به سمت مساوی شدن با Q خواهد بود ←



* بررسی عایق‌ها:

یک جسم دی الکتریک در میدان الکتریکی می‌تواند به صورت آرایشی از Dipole های الکتریکی (دوقطبی‌های الکتریکی) در فضای آزاد و متشکل از بارهای الکتریکی + و - که مراکزشان کاملاً بر هم منطبق نیستند، باشد. ضمناً این بارها به صورت آزاد نبوده و نمی‌توانند نقشی در هدایت الکتریکی داشته باشند.

یک قطعه عایق ←



← دارای آرایش‌های متفاوت هستند و به همین دلیل، همدیگر را خنثی می‌کنند.

همراز ≡ $\uparrow P$

$$\vec{P_i} = Q\,\vec{d_i}$$

پلاریزاسیون → $\vec{P} \triangleq \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} \vec{P}_i$

n ← تعداد P_i ها در واحد حجم

Δv ← حجم مورد نظر

$n\Delta v$ ← تعداد P_i ها در حجم مورد نظر

* چون در حالت عادی برآیند P_i ها صفر خواهد بود، پس پلاریزاسیون صفر خواهد شد. مگر در حالت‌های خاص مانند قرار گرفتن در بین صفحات خازن، تا تأثیر میدان حاصله از آن که پلاریزاسیون را صفر نخواهد کرد.

کل بارهای داخل حجم

$$Q_T = Q_b + Q_{\text{free}}$$

(Q_{free}: بار آزاد) — Q_b ← بار مقید (جمع بارهای مثبت)

قانون گوس برای بار آزاد → $\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{enc}$ آزاد ①

پس ⇒ $\oint \vec{P} \cdot d\vec{s} = -Q_b$ ②

$\oint \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q_T$ ③

$Q_T = Q_b + Q$ بار آزاد $\xRightarrow{③②①}$ $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v \Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_b \\ \nabla \cdot \varepsilon_0 \vec{E} = \rho_T \end{cases}$$

وقتی بارهای مثبت به صورت واگرا به بیرون از ناحیه حرکت کند، بار درون به صورت قرینه منفی خواهد بود.

معادلهٔ واگرایی طبق قانون گوس →

$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ ← گذردهی عایق

$\vec{P}$ ← دیورژانس

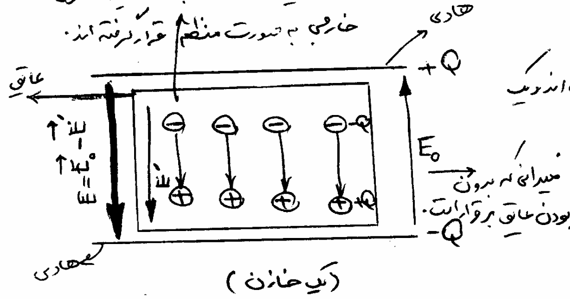
بار مقید دو نوع است:
- ρ_b - بار مقید با چگالی
- ρ_{sb} - بار سطحی مقید با چگالی

بردار سطح

$\boxed{\rho_{sb} = \vec{P} \cdot \vec{a}_n}$ ⇐

* اگر جمع P_i ها را در بردار سطح ضرب کنیم، ρ_{sb} بدست می‌آید ←

(۴۹)



(یک خازن)

توضیحات بیشتر:

Q = بارهایی است که روی سطح عایق آمده اند و یک بار سطحی با چگالی ρ_{sb} تشکیل شده است.

⇐ هرچه E قوی‌تر باشد، $\vec{P}$ هم قوی‌تر خواهد بود.

$$\vec{P} \triangleq \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \quad , \quad \chi_e = \varepsilon_r - 1$$

$$\boxed{\vec{P} = (\varepsilon_r - 1)\,\varepsilon_0 \vec{E}}$$

* $\vec{P}$ برای هوا، صفر است و هوا تنها عایقی است که پلاریزاسیون آن صفر است.

$$\vec{P} = \rho_0 \vec{a}_r$$
$$V_0 = ?$$

* بررسی یک تست ارشد:

۱) $V_0 = \dfrac{\rho_0 a}{2\varepsilon}$

۲) $V_0 = \dfrac{-\rho_0 a}{2\varepsilon}$

۳) $V_0 = \dfrac{\rho_0 a}{\varepsilon}$

۴) $V_0 = \dfrac{-\rho_0 a}{\varepsilon}$

$$\rho_b = \nabla \cdot \vec{P} = -\frac{2\rho_0}{r}$$ ← فقط برای r را در نظر می‌گیریم.

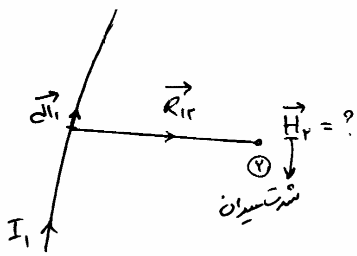
$$\rho_{sb} = \vec{P} \cdot \vec{a}_r = \rho_0$$

$$V_0 = \iint \frac{\rho_{sb}\, ds}{4\pi\varepsilon_0 R} + \iiint \frac{\rho_b\, dv}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

ρ_{sb} و ρ_b $\xrightarrow[\text{و انتگرال گیری}]{\text{جایگذاری}}$ $= -\dfrac{\rho_0 a}{2\varepsilon}$

* فصل ۸ - میدان مغناطیسی ناشی از جریان یکنواخت :

طبق قانون بیوساوار :



$$d\vec{H_2} = \frac{I_1 \vec{dl_1}}{4\pi R_{12}^2} \times \vec{a_{12}}$$

$$\Rightarrow \vec{H_2} = \int dH_2$$

چون

$$I\vec{dl} = \vec{K}ds = \vec{J}dv$$

$\vec{K}$ بردار جریان

$$\Rightarrow d\vec{H} = \frac{\vec{K} \times \vec{a_R}}{4\pi R^2} ds$$

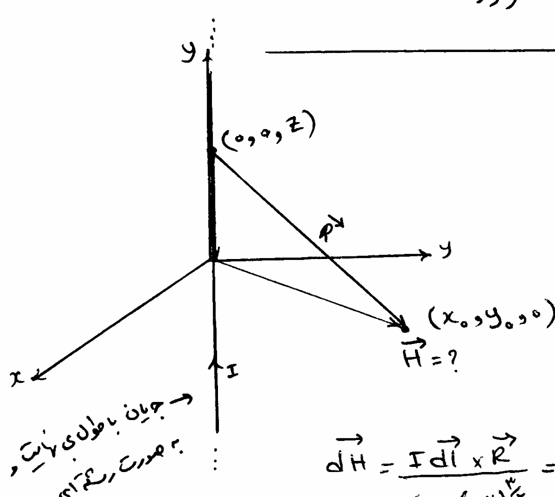
$\vec{J}$ بردار جریان

$$\Rightarrow d\vec{H} = \frac{\vec{J} \times \vec{a_R}}{4\pi R^2} dv$$

$$\vec{H} = \iint \frac{\vec{K} \times \vec{a_R}}{4\pi R^2} ds$$

$$\vec{H} = \iiint \frac{\vec{J} \times \vec{a_R}}{4\pi R^2} dv$$

مثال :



$$\vec{R} = -z\vec{a_z} + \rho\vec{a_\rho}$$

$$\rho = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

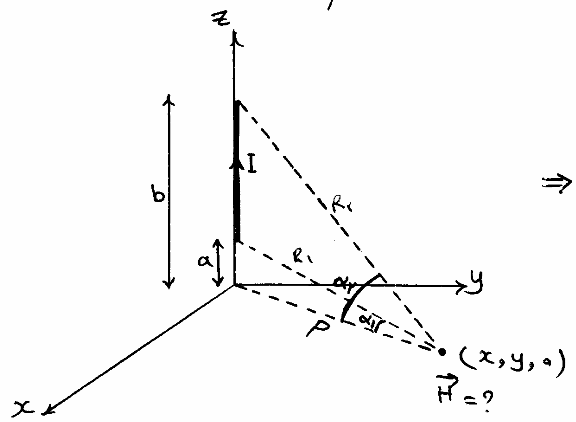
$$\vec{dl} = dz\,\vec{a_z}$$

$$d\vec{H} = \frac{I\vec{dl} \times \vec{R}}{4\pi (R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{I\,dz\,\vec{a_z} \times (-z\vec{a_z} + \rho\vec{a_\rho})}{4\pi (z^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{I\,dz\,(\rho\,\vec{a_\phi})}{4\pi (z^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$\vec{a_\phi}$ $\vec{a_z}$ $\vec{a_\rho}$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{I(\rho \vec{a}_\phi)}{4\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}}_{\frac{2}{\rho^2}} \Rightarrow \vec{H}=\frac{I}{2\pi\rho}\vec{a}_\phi$$



* بررسی مثال قبل برای طول محدود :

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{I}{4\pi\rho}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)\vec{a}_\phi$$

$$\frac{b}{R_2} - \frac{a}{R_1} \to R_1R_2 = R^2$$

$$\vec{R} = \rho\vec{a}_\rho - z\vec{a}_z$$

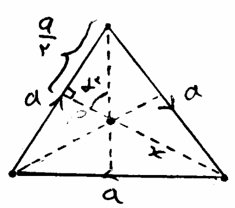
$$\vec{dl} = dz\,\vec{a}_z$$

اثبات : $\vec{H} = \frac{I(\rho\vec{a}_\phi)}{4\pi}\int_a^b \frac{dz}{(z^2+\rho^2)^{3/2}} = \frac{I(\rho\vec{a}_\phi)}{4\pi}\left\{\frac{z}{\rho^2\sqrt{z^2+\rho^2}}\right\}_a^b$

$$= \frac{I(\vec{a}_\phi)}{\rho 4\pi}\left\{\underbrace{\frac{b}{\sqrt{b^2+\rho^2}}}_{\sin\alpha_2} - \underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+\rho^2}}}_{\sin\alpha_1}\right\}$$

* بررسی یک تست ارشد :

هادی فیلامانی به صورت یک مثلث متساوی الاضلاع داده شده است. طول هر ضلع این مثلث برابر با یک متر $(a=1^m)$ و جریان $I=1^A$ در این فیلامان روان است. مطلوبست محاسبه $|\vec{H}|$ در مرکز مثلث.



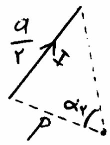
۱) $0/72\ \frac{A}{m}$ ۲) $1/18\ \frac{A}{m}$

۳) $1/43\ \frac{A}{m}$ ۴) $2/34\ \frac{A}{m}$

$a = 1^m$

$I = 1^A$

۵۱



$\alpha_1 = 0$
$\alpha_2 = 60$
$\rho = \frac{\sqrt{3}}{6} a$

* ابتدا میدان مغناطیسی را برای نیمی از یک ضلع می‌یابیم می‌کنیم وسپس در ۶ ضرب می‌کنیم .

$$\vec{H}_1 = \frac{1}{4\pi \frac{\sqrt{3}}{6} \times 1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right) = \frac{3}{4\pi}$$

$$\Rightarrow \vec{H} = 6\vec{H}_1 = \frac{6\times 3}{4\pi} \times \frac{18}{4\pi}$$

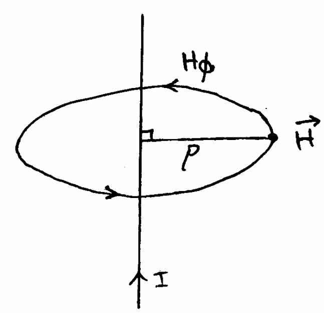
* راه ساده‌تر این بود که مثلث را به ۳ قسمت تبدیل کنیم ودر آخر در ۳ ضرب می‌کردیم .

← طبق قانون دست راست، در مرکز تمامی میدان‌ها با هم جمع می‌شوند .

* قانون مداری آمپر :

محدودیت های قانون آمپر
- مسیر همواره باید به صورت مستقیم باشد (اگر نبود، باید به تکه‌های مستقیم و چند تقسیم کنیم) .
- طول سیم نسبت به فاصله باید زیاد باشد .

$$\oint \vec{H}\cdot\vec{dl} = I_{enc}$$

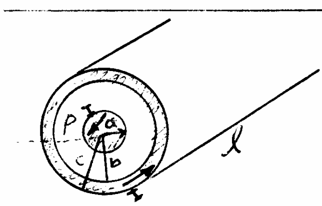


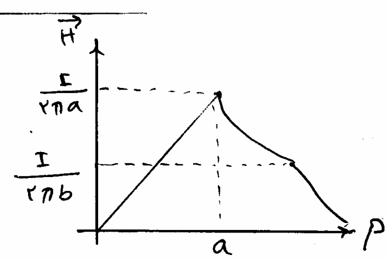
$$\Rightarrow \oint H_\phi \cancel{\vec{a}_\phi} \cdot \rho d\phi \cancel{\vec{a}_\phi} = I$$

$$\Rightarrow H_\phi(\rho) \oint d\phi = I_{enc}$$

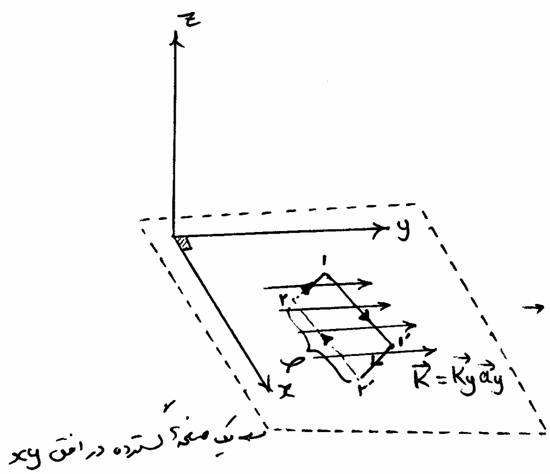
$$H_\phi = \frac{I_{enc}}{2\pi\rho}$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{I_{enc}}{2\pi\rho}\vec{a}_\phi$$





صفحه ۱۱۳
(در کتاب خوانده شود)



$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = I_{enc}$$

$$\rightarrow \int_{1}^{1'} + \int_{1'}^{2'} + \int_{2'}^{2} + \int_{2}^{1} = I_{enc}$$

$$\Rightarrow H_{x_1} \ell + H_{x_2}(-\ell) = K_y \ell$$

$$H_{x_2} \equiv H_{x_1}$$

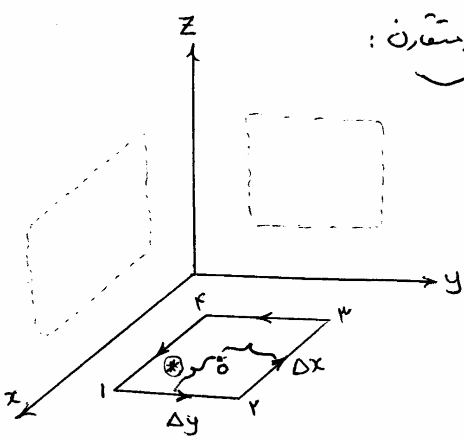
$$\Rightarrow 2H_{x_1} \ell = K_y \ell$$

$$H_{x_1} = \frac{1}{2} K_y$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{1}{2} \vec{K} \times \vec{a}_n}$$

بردار عمود بر سطح

* کرل (curl): کاربرد آمپر برای مسیرهای غیرمتقارن :



$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = I_{enc}$$

$$\vec{H}_0 = H_{x_0} \vec{a}_x + H_{y_0} \vec{a}_y + H_{z_0} \vec{a}_z$$

$$\int_{1}^{2} + \int_{2}^{3} + \int_{3}^{4} + \int_{4}^{1} = I_{enc}$$

$$\int_{1}^{2} \vec{H} \cdot \vec{dl} = \vec{H} \cdot \vec{\Delta L}_{1-2} = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \left(\left(H_{y_0} + \frac{\frac{\Delta x}{2}}{1!} \frac{\partial H_y}{\partial x} + \cdots \right) \cancel{\vec{a}_y} \right) \cdot \Delta y \cancel{\vec{a}_y}$$

زمانی می توان این کار را کرد که مسیرها کوتاه باشد.

نسبت به x تغییر دارد ⊛

$$= \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \left(H_{y_0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial H_y}{2} \frac{\partial H_y}{\partial x} + (\cdots) \right) \Delta y$$

برای حذف این قسمت‌ها از لیمیت استفاده شده است.

$$\int_{2}^{3} \vec{H}\cdot d\vec{l} = \vec{H}\cdot \Delta L_{2-3} = \lim_{\Delta x,\Delta y \to 0} \left(\left(H_{x_0} + \frac{\frac{\Delta y}{2}}{1!}\frac{\partial H_x}{\partial y} + \cdots \right)\vec{a}_x \right)\cdot\left(-\Delta x\, \vec{a}_x\right)$$

$$= \lim_{\Delta x,\Delta y \to 0} \left(-H_{x_0} - \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial H_y}{\partial y} + \cdots \right)\Delta x$$

$$\int_{3}^{4} \vec{H}\cdot d\vec{l} = \vec{H}\cdot \Delta\vec{L}_{3-4} = \lim_{\Delta x,\Delta y \to 0} \left(\left(H_{y_0} + \frac{\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)}{1!}\frac{\partial H_y}{\partial x} + \cdots \right)\vec{a}_y \right)\cdot\left(-\Delta y\, \vec{a}_y\right)$$

$$= \lim_{\Delta x,\Delta y \to 0} \left(-H_{y_0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial H_y}{\partial x} + \cdots \right)\Delta y$$

$$\int_{4}^{1} \cdots \quad \xrightarrow{\text{ادامه}}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x,\Delta y \to 0} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} + \cancel{\cdots} \right)\Delta x\,\Delta y = I_{enc}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \lim_{\Delta x,\Delta y \to 0} \frac{I_{enc}}{\Delta x\,\Delta y} = J_z$$

تعمیم مسئله:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y$$

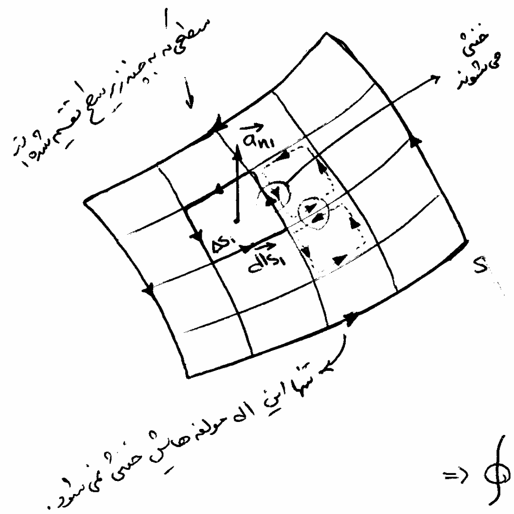
$$\vec{J} = J_x\vec{a}_x + J_y\vec{a}_y + J_z\vec{a}_z \quad \leftarrow \text{در حالت کلی}$$

$$\vec{H} = H_x \vec{a}_x + H_y \vec{a}_y + H_z \vec{a}_z$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

$$= \vec{a}_x \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) + \cdots \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}}$$

قانون آمپر یا قانون سوم ماکسول



* قضیهٔ استوکس : $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$

$\vec{dl}_{\Delta s}$: مسیری که Δs را احاطه کند.

$$\frac{\oint \vec{H} \cdot \vec{dl}_{\Delta s_1}}{\Delta s_1} = (\vec{\nabla} \times \vec{H})_{n_1} = (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{a}_{n_1}$$

I

$$\Rightarrow \oint \vec{H} \cdot \vec{dl}_{\Delta s_1} = (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \Delta s_1 a_{n_1} \quad \vec{\Delta s}_1$$

- از جمع کردن dl ها، برخی از جملات با معادلهای خود حذف می‌شوند. در نتیجه :

$$\vec{I} = \oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = \iint \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{H})}_{\vec{J}} \cdot \vec{ds}$$

$$I = \iint \vec{J} \cdot \vec{ds}$$

$$I_{enc} = \oint \vec{H} \cdot \vec{dl} \qquad \text{آمپر}$$

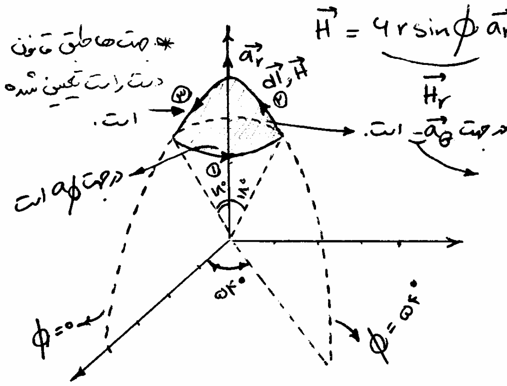
در مورد توابع sin و cos اگر بخواهیم dl بگیریم، باید دورهٔ تناوب 2π باشد. (اگر 4π بود، ۲ بار می‌گیریم...)

** تمرین :

صلوبت بررسی دو طرف قضیهٔ استوکس برای

$$\vec H = \underbrace{6 r \sin\phi \, \vec a_r}_{\vec H_r} + \underbrace{18 r \sin\theta \cos\phi \, \vec a_\phi}_{\vec H_\phi}$$

$$\begin{cases} r = 4 \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \underset{18^\circ}{0.1\pi} \\ 0 \leqslant \phi \leqslant \underset{54^\circ}{0.3\pi} \end{cases}$$



این منفی در حدود انتگرال اثر می‌کند که به جای اینکه از ۰ تا به پایین حرکت کنیم، از پایین به بالا حرکت می‌کنیم تا $-a_\theta$، $-(-a_\theta)$ شود و — حذف شود.

طرف اول :

چون مولفهٔ $\vec H_\theta$ نداریم.

$$\oint \vec H \cdot d\vec l = \int_{①} \vec H \cdot \underbrace{d\vec l}_{r\sin\theta\, d\phi\, \vec a_\phi} + \cancel{\int_{②} \vec H \cdot \underbrace{d\vec l}_{r\, d\theta\, \vec a_\theta} + \int_{③} \vec H \cdot \underbrace{d\vec l}_{r\, d\theta\, \vec a_\theta}} = 0$$

$$= \int H_\phi \, r \sin\theta \, d\phi = \int (18 r \sin\theta \cos\phi) \, r \sin\theta \, d\phi$$

$$= 18 \underbrace{r}_{4}{}^2 \sin^2 \underbrace{\theta}_{0.1\pi} \int_0^{0.3\pi} \cos\phi \, d\phi = 22.2^A$$

طرف دوم :

$$\iint (\vec\nabla \times \vec H) \cdot \underbrace{d\vec s}_{r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \vec a_r}$$

پس تنها مولفهٔ a_r کرل را محاسبه می‌کنیم.

$$\vec\nabla \times \vec H = \frac{1}{r\sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} (H_\phi \sin\theta) - \cancelto{0}{\frac{\partial H_\theta}{\partial\phi}} \right] \vec a_r + \cdots$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (18 r \sin^2\theta \cos\phi) \, \vec a_r$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta} (36 r \sin\theta \cos\theta \cos\phi) \, \vec a_r = 36 \cos\theta \cos\phi \, \vec a_r$$

$$\Rightarrow \iint 36\cos\theta\cos\phi\,\cancel{\vec{a}_r}\cdot r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,\cancel{\vec{a}_r}$$

$$=36r^2\int_0^{0.1\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^{0.3\pi}\cos\phi\,d\phi=22.2^A$$

* مسئله‌های ۲۶ تا ۲۸ از هیت حل شود (۲۸ و ۲۷ و ۲۵ مهم) .

* پتانسیل مغناطیسی اسکالر :

یادآوری :

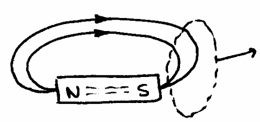
$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}V_m)=0$$

V_m → مغناطیس

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$$

$$\vec{B}\triangleq\mu_0\vec{H}\;\rightarrow\;\varphi_B=\iint\vec{B}\cdot\vec{ds}$$

$\vec{B}$ ← چگالی شار مغناطیسی



سطح بسته فرضی

$$\Rightarrow \oiint\vec{B}\cdot\vec{ds}=0=\iiint\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\,dv=0\;\rightarrow\;\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0}$$

طبق قانون گاوس

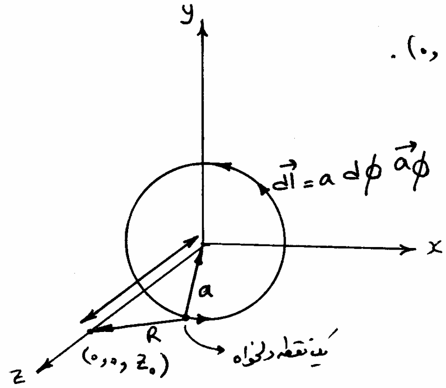
طبق قضیه دیورژانس

قانون گاوس در مغناطیس

مثال از چنگ :

شدت چگالی شار مغناطیسی میدان مغناطیسی در نقطه $(0,0,z_0)$.

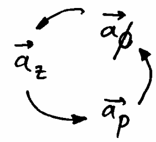
- از قانون بیوساوار استفاده می‌کنیم:



$$\vec{dB} = \mu_0 \left(\frac{I\vec{dl} \times \vec{R}}{4\pi (R^2)^{3/2}} \right)$$

$$\vec{R} = -a\vec{a}_\rho + z_0 \vec{a}_z$$

$$\rightarrow \vec{dB} = \frac{\mu_0 I a\, d\phi\, a_\phi \times (-a\vec{a}_\rho + z_0 \vec{a}_z)}{4\pi (a^2+z_0^2)^{3/2}}$$



$$= \frac{\mu_0 I a\, d\phi\, (+a\vec{a}_z + \cancel{z_0 \vec{a}_\rho})}{4\pi (a^2+z_0^2)^{3/2}}$$ به علت تقارن

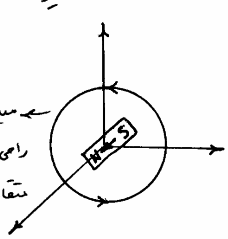
تقارن را بررسی می‌کنیم.

میدان های نیم دایره سمت راست، میدان‌های نیم دایره چپ را خنثی می‌کنند و فقط میدان‌های ناشی از جمع میدان ها در مرکز که به سمت a_z اشاره دارد، باقی می‌مانند و با هم جمع می‌شوند.

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I a (a\vec{a}_z)}{4\pi (a^2+z_0^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\mu_0 I a^2 \vec{a}_z}{2 (a^2+z_0^2)^{3/2}}$$

$$\text{if } z=0 \rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I \vec{a}_z}{\underbrace{2a}_{\text{قطر دایره}}} = \mu_0 \underbrace{\frac{I}{D}\vec{a}_z}_{\vec{H}}$$

← نتیجه: میدان مغناطیسی در مرکز دایره یک میدان یکنواخت است و جهت آن به سمت بیرون است.



← میدان معادل یک حلقه سیم را می‌توان با یک آهن ربای متقارن معادل گزاری کنیم.

← نتیجه: هر حلقه جریان مانند یک آهن ربا عمل می‌کند و برعکس.

* نکته :

سیم‌های مستقیم در راستای خودشان میدانی تولید نمی‌کنند.

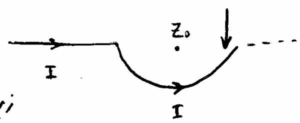
چون هم راستا هستند و دو بردار هم جهت تولید می‌شود، در ضرب خارجی صفر خواهد شد.

$$d\vec{H} = \frac{I\,\vec{dl} \times \vec{a_R}}{4\pi R^2}$$

طبق بیوساوار

میدان حاصل از این نصف میدان دایره کامل است یعنی:

$$\vec{H} = \left(\frac{I}{D}\vec{a_z}\right)\frac{1}{2}$$



زیرا $\frac{1}{2}$ محیط کل را در بر گرفته است.

---

* در یک ناحیهٔ بدون جریان الکتریکی (مثلاً در داخل یک آهن‌ربا)، $J=0$ بوده پس:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

ــ چگالی B بدون کرل بوده یعنی قابل بیان به صورت گرادیان یک میدان عددی است:

$$\vec{B} \triangleq -\mu_0 \vec{\nabla} V_m \qquad \text{یا} \qquad \vec{H} = -\vec{\nabla} V_m$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$
$$\vec{D} = -\varepsilon_0 \vec{\nabla} V$$

* گرچه بارهای مغناطیسی مجزا وجود ندارند، ولی مثلاً با مشاهدهٔ مسیر براده‌های آهن در اطراف یک آهن‌ربا می‌توان چنان تصور کرد که:

قطب‌های شمال و جنوب (N و S) به ترتیب محل استقرار بارهای مغناطیسی + و - هستند.

ــ میدان داخل آهن‌ربا ناشی از یک پتانسیل اسکالر است و به همین دلیل بدون جریان، میدان وجود دارد.

* اما نکته‌ای که می‌توان به آن اشاره کرد آن است که گرچه پتانسیل مغناطیسی اسکالر بسیار شبیه به پتانسیل الکتریکی اسکالری باشد، اما با آن تفاوت‌های مهمی دارد. مهمترین تفاوت آن است که تابع اسکالر V_m تابعی تک مقداری نیست، درحالی که پتانسیل الکتریکی تابعی تک مقداری است.

برای مطالعهٔ بیشتر به صفحهٔ ۱۳۲ کتاب مراجعه شود.

* پتانسیل مغناطیسی برداری:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \longrightarrow \vec{B}=\vec{\nabla}\times\underbrace{\vec{A}}_{\text{پتانسیل مغناطیسی برداری}}$$

$$\Rightarrow d\vec{B}=\vec{\nabla}\times d\vec{A}$$

طبق بیوساوار

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0 I d\vec{l}\times\vec{a}_R}{4\pi R^2} \qquad d\vec{A}=\frac{\mu_0 I d\vec{l}}{4\pi R}$$

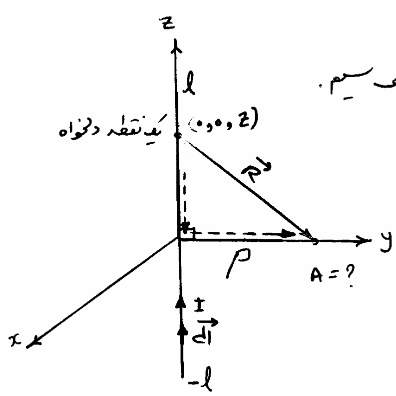
$$d\vec{A}=\frac{\mu_0 I d\vec{l}}{4\pi R} \rightarrow \vec{A}=\int\frac{\mu_0 I d\vec{l}}{4\pi R}$$

A برداری است که در جهت جریان تولید می شود، اما مقدار آن ضعیف تر است. یعنی A نسخهٔ ضعیف شده ای از I خواهد بود. همین طور می توان گفت:

$$\vec{A}=\iint\frac{\mu_0\vec{K}ds}{4\pi R}$$

$$\vec{A}=\iiint\frac{\mu_0\vec{J}dv}{4\pi R}$$

*** مثال از چنگ



مطلوبست چگالی مغناطیسی B در نقطه ای به فاصلهٔ ρ روی عمود منصف سیم.

الف) با استفاده از محاسبهٔ بردار A و سپس تعیین B

ب) با کاربرد مستقیم بیوساوار در مورد B

$$\vec{R} = -z\vec{a}_z + \rho\vec{a}_\rho$$

$$\vec{A} = \int \frac{\mu_0 I \vec{dl}}{4\pi \underbrace{R}_{\vec{dl}}}$$

$$= \int \frac{\mu_0 I dz\, \vec{a}_z}{4\pi\sqrt{z^2+\rho^2}} = \frac{\mu_0 I \vec{a}_z}{4\pi}\int_{-\ell}^{\ell} \frac{dz}{\sqrt{z^2+\rho^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I \vec{a}_z}{4\pi} \operatorname{Ln}\left\{\frac{z+\sqrt{\rho^2+z^2}}{\rho}\right\}_{-\ell}^{\ell} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \operatorname{Ln} \frac{\sqrt{\rho^2+L^2}+L}{\sqrt{\rho^2+L^2}-L}\,\vec{a}_z$$

برای محاسبهٔ B مشتق از کرل را به کار می‌بریم که در جهت z باشد.

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \overset{}{\underset{\text{در استوانه‌ای}}{=\!=\!=}} \qquad \vec{\nabla}\times(A_z\vec{a}_z) = \frac{1}{\rho}\cancel{\frac{\partial A_z}{\partial\phi}}\vec{a}_\rho - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\vec{a}_\phi$$

چون A تابعی از ρ است و مشتق نسبت به ϕ صفر می‌شود.

$$= \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi\rho\sqrt{\ell^2+\rho^2}}\,\vec{a}_\phi$$

$$\text{if} \quad L\to\infty \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{a}_\phi}$$

همانند قانون بیوساوار ← برای سیم با طول بی‌نهایت.

$$\vec{dl} = dz\,\vec{a}_z \quad , \vec{R} = \rho\vec{a}_\rho - z\vec{a}_z$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I \vec{dl}\times\vec{R}}{4\pi(R^2)^{3/2}} \rightarrow \vec{B} = \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\mu_0 I dz\vec{a}_z \times(\rho\vec{a}_\rho - z\vec{a}_z)}{4\pi(\rho^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I \rho\vec{a}_\phi}{4\pi}\int_{-\ell}^{\ell}\frac{dz}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I \rho\vec{a}_\phi}{4\pi}\left(\frac{z}{\rho^2\sqrt{\rho^2+z^2}}\right)_{-\ell}^{\ell} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi}\left(\frac{\ell}{\rho^2\sqrt{\rho^2+\ell^2}}\right)\vec{a}_\phi$$

* فصل نهم : نیرو و گشتاور در میدان مغناطیسی :

معادله نیروی لورنس $\rightarrow \quad \vec{F} = Q\,(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \leftarrow$ بیانگر این است که به یک ذره‌ی Q هم نیروی مغناطیسی وارد می‌شود و هم الکتریکی. نیروی مغناطیسی هم با این شرط وارد می‌شود که ذره دارای سرعت باشد.

$$\vec{F} = Q\vec{V} \times \vec{B}$$

$$d\vec{F} = dQ\,\vec{V} \times \vec{B} = \rho_v \vec{V} \times \vec{B}\,dv = \vec{J} \times \vec{B}\,dv$$

$$dQ = \rho_v\,dv$$

$$\vec{J} = \rho_v \vec{V}$$

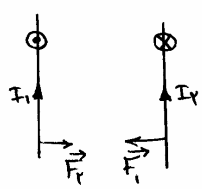
چون $\vec{J}dv = \vec{K}ds \equiv I\,d\vec{l}$

پس :

$$d\vec{F} = \vec{J} \times \underbrace{\vec{B}}_{\text{میدان خارجی}}\,dv$$

$$d\vec{F} = \vec{K} \times \vec{B}\,ds$$

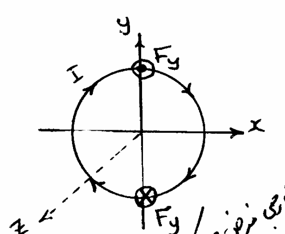
$$d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B}$$



شکل :

انگشتان دست راست در جهت جریان، کف دست میدان، شست جهت نیرو را نشان می‌دهد.

- نیرو و گشتاور در میدان مغناطیسی وارد بر حلقه‌ی جریان :



یک میدان خارجی فرض می‌کنیم.

$$\vec{B} = \underbrace{B_x \vec{a}_x + B_y \vec{a}_y}_{B_\parallel \text{ موازی}} + \underbrace{B_z \vec{a}_z}_{B_\perp \text{ عمود}}$$

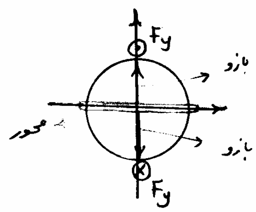
(چون حلقه موازی محور x و y است).

(چون حلقه عمود بر محور z است).

در این شکل، این قسمت نیروی حلقه در سمت فشرده شدن وارد می‌کند، که اگر جهت جریان برعکس بود، نیرو در جهت گشاد شدن حلقه ایجاد می‌شود.

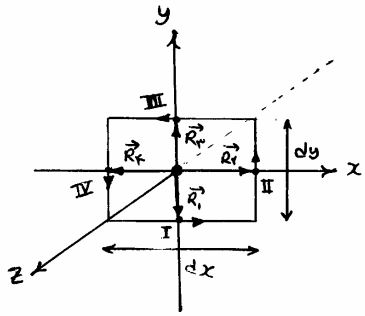
F_y برای نیمه بالایی به سمت بیرون است و برای نیمه پایینی به سمت داخل است. بنابراین برآیند F_y ها خنثی و صفر می‌شود (x ها هم به همین ترتیب).

$\Leftarrow$ برآیند نیروهای وارد بر یک حلقه برابر صفر است.



- در حالت گشتاور، چون سمت بالا به سمت بیرون و سمت پائین به سمت درون است، پس هردو نیرو تقویت گشتاور و حلقه به تمایل حول محور دارد.

* گشتاورها همدیگر را تقویت می کنند.



- نیرو و گشتاور در میدان مغناطیسی وارد بر حلقه مستطیلی جریان:

$$\vec{B} = B_x \vec{a_x} + B_y \vec{a_y} + B_z \vec{a_z}$$

چون عنصر دیفرانسیلی است، می توان وسط های اضلاع را به عنوان شاخص در نظر گرفت و محور حلقه به یک نقطه خواهد بود، محور در نظر گرفته شده وسط هر ضلع تا محور را بازو فرض می کنیم.

$$d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B}$$

نیروی وارد بر ضلع I $\quad d\vec{F_1} = I\,d\vec{l_I} \times \vec{B} = I\,dx\,\vec{a_x} \times (B_x \vec{a_x} + B_y \vec{a_y} + B_z \vec{a_z})$

$$d\vec{\tau} = \vec{R} \times d\vec{F} \qquad \rightarrow \quad d\vec{F_I} = I\,dx\,(B_y \vec{a_z} - B_z \vec{a_y})$$

بازوی گشتاور

$$d\vec{\tau_1} = -\frac{1}{2}\,dy\,\vec{a_y} \times \left(I\,dx\,(B_y \vec{a_z} - B_z \vec{a_y})\right) = -\frac{1}{2} I B_y\,dx\,dy\,\vec{a_x}$$

* نیروهایی که مستقیماً وارد محور می شوند، اثری در گشتاور نخواهند داشت.
* اگر انگشتان دست راست در جهت گشتاور باشد، کف دست در جهت نیرو، شست شاخص گشتاور را نشان می دهد.

(محوری که نسبت به آن دوران می کند.)

$$d\vec{F_{II}} = I\,d\vec{l_{II}} \times \vec{B} = I\,dy\,\vec{a_y} \times (B_x \vec{a_x} + B_y \vec{a_y} + B_z \vec{a_z})$$

$$= I\,dy\,(-B_x \vec{a_z} + B_z \vec{a_x})$$

$$d\vec{\tau_{II}} = \frac{1}{2}\,dx\,\vec{a_x} \times I\,dy\,(-B_x \vec{a_z} + B_z \vec{a_x})$$

$$= \frac{1}{2} I\,dx\,dy\,B_x \vec{a_y}$$

شست را در جهت ay می گذاریم، پس دوران به سمت داخل است.

$$d\vec{T}_{III} = d\vec{T}_{I}$$

$$d\vec{T}_{IV} = d\vec{T}_{II} \Rightarrow d\vec{T} = I\underbrace{dx\,dy}_{d\vec{s}_z}\underbrace{(B_x\vec{a}_y - B_y\vec{a}_x)}_{\vec{a}_z \times \vec{B}}$$

$$\Rightarrow d\vec{T} = I\underbrace{d\vec{s}}\times\vec{B} \rightarrow \vec{T} = I\vec{S}\times\vec{B}$$

گشتاور دوقطبی مغناطیسی $d\vec{m}$

$$\boxed{\vec{T} = \vec{m}\times\vec{B}}$$

قرارداد { تولیدکنندهٔ گشتاور با ① شماره گذاری می‌شود. تولیدکنندهٔ دوران با ② شماره گذاری می‌شود.

* گشتاور نیرو یا عاملی است که باعث دوران نیرو حول یک محور می‌شود.

برای محاسبهٔ گشتاور نیروی وارد بر عنصر جریان شمارهٔ ۲ در اثر میدان ناشی از جریان شمارهٔ ۱ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱- به کمک قانون بیوساوار (یا آمپر)، $d\vec{w}_1$ $(d\vec{B}_1)$ و نهایتاً $\vec{B}_1$ را که توسط جریان شمارهٔ ۱ در نقطهٔ دلخواهی از عنصر شمارهٔ ۲ ایجاد می‌شود را محاسبه می‌کنیم.

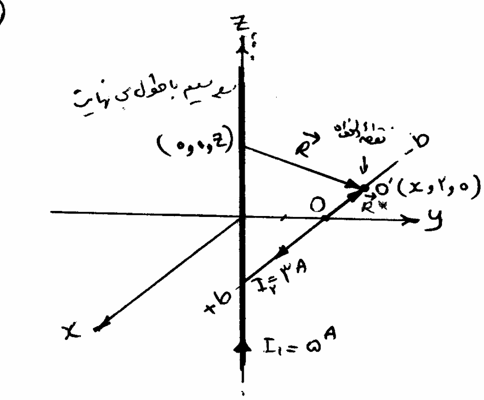
۲- توسط فرمول $d\vec{F} = \begin{cases} I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 \\ \vec{K}_2\times\vec{B}_1 ds_2 \\ \vec{J}_2\times\vec{B}_1 dv_2 \end{cases}$ را تشکیل می‌دهیم.

۳- $\cancel{F = \int d\vec{F}}$ ← راه اشتباه و مردود است.

← ۳- با استفاده از فرمول $d\vec{T} = \vec{R}\times d\vec{F}$ ، dT را تشکیل می‌دهیم.

۴- با فرمول $\vec{T} = \int_{\text{حدود ابعاد عنصر شمارهٔ ②}} d\vec{T}$ یعنی $\vec{T} = \int \vec{R}\times d\vec{F}$ نهایتاً $\vec{T}$ محاسبه می‌شود.

مثال ۹-۱۵
صفحه ۱۵۰



$O(0,2,0) \Rightarrow \vec{T} = ?$

مرحله ①:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\vec{a}_R = \frac{\mu_0 I_1 \vec{R}}{2\pi R^2}$$

تولیدکننده گشتاور (شماره ۱) موازی هر محوری باشد آن را در نظر نمی‌گیریم که در اینجا z است. $\longrightarrow \vec{R} = +x\vec{a}_x + 2\vec{a}_y$

$$\Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{\mu_0(5)(x\vec{a}_x + 2\vec{a}_y)}{2\pi(4+x^2)}$$

مرحله ②:

تولیدکننده دوران از نوع سیم (L) است $\xrightarrow{\text{پس}} d\vec{F} = I_2\, d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = 3dx\vec{a}_x \times \frac{5\mu_0(x\vec{a}_x + 2\vec{a}_y)}{2\pi(4+x^2)}$

$$= \frac{15\mu_0\, dx\,\vec{a}_z}{\pi(4+x^2)}$$

مرحله ③:

$$d\vec{T} = \vec{R}^* \times d\vec{F} = x\vec{a}_x \times \frac{15\mu_0\, dx\,\vec{a}_z}{\pi(4+x^2)}$$

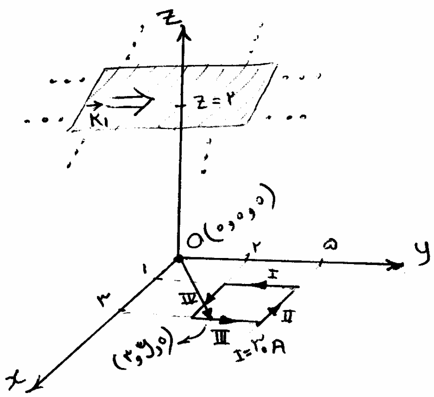
$$= \frac{-15x\,\cancel{\mu_0}^{4\pi\times10^{-7}}\,dx\,\vec{a}_y}{\pi(4+x^2)}$$

$$= \frac{-6\times10^{-6}\,x\,dx\,\vec{a}_y}{4+x^2} \xrightarrow{\text{مرحله ④}} \vec{T} = -6\times10^{-6}\vec{a}_y\int_{-b}^{b}\frac{x\,dx}{4+x^2}$$

* در این مثال اگر یک حلقه مستطیلی بوده باید برای هر ضلع تک تک محاسبه می‌کردیم.

(۶۵)

مثال $\frac{۱۴-۹}{\text{صفحه } ۱۵۰}$



صفحه $z=2$, $\vec{K}_1 = 400\,\vec{a}_y$

صفحه $y=0$, $\vec{K}_2 = 300\,\vec{a}_z$

گشتاور حاصل از $Z=2$ خواسته شده است :
(در مبدأ)

$$\vec{B} = \frac{1}{2}\mu_0 \vec{K} \times \vec{a}_r$$

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{1}{2}\left(400\vec{a}_y\right) \times \left(-\vec{a}_z\right) = -200\,\mu_0 \vec{a}_x$$

$$d\vec{F}_x = 30\,dy\,\vec{a}_y \times \left(-200\,\mu_0\,\vec{a}_x\right) = \mu_0\,6000\,dy\,\vec{a}_z$$

$$d\vec{\tau}_I = \left(3\vec{a}_x + y\vec{a}_y\right) \times \mu_0 6000\,dy\,\vec{a}_z = \mu_0\left(-18000\,\vec{a}_y + 60y\,\vec{a}_x\right)dy$$

$$\vec{\tau}_I = -18000\,\vec{a}_y \int_1^3 dy + 6000\,\vec{a}_x \int_2^5 y\,dy = -54000\,\mu_0 \vec{a}_y + 63000\,\mu_0 \vec{a}_x$$

* مدارهای مغناطیسی :

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{enc} = \underbrace{N}_{\text{تعداد دور}}I = V_m \qquad (KVL)$$

در مدار مغناطیسی

نیروی محرکه مغناطیسی (mmf)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\,dv = 0 \quad \Rightarrow \underbrace{\oint\!\!\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0}_{} \qquad (KCL)$$

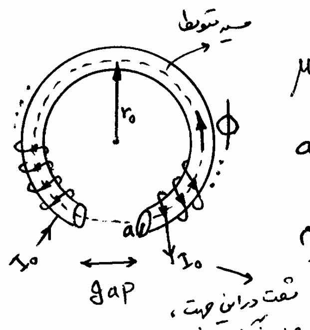
شار مغناطیسی خروجی از هر سطح بسته (کره)، صفر است .

$$V_m = R\,\phi$$

رلوکتانس (مقاومت مغناطیسی)

شار

- مثال از چنگ :



با انگشت دست راست جهت میدان مغناطیسی یا ϕ را نشان می‌دهد.

فرض کنید N دور سیم به دور یک هستهٔ چنبره‌ای از مادهٔ فرومغناطیس با نفوذپذیری μ پیچیده شده است. هسته دارای شعاع متوسط r_0، سطح مقطع دایره‌ای به شعاع a $(a \ll r_0)$ و یک شکاف هوای باریک با ضخامت L_g است. جریان I_0 از سیم می‌گذرد.

الف) چگالی شار مغناطیسی B_f در هستهٔ فرومغناطیس چقدر است؟

ب) H_f چقدر است؟ ج) H_g در شکاف هوا را تعیین کنید.

$$\phi = \iint \vec{B}\cdot\vec{ds} \triangleq B.S$$

$$\underbrace{\phi_f}_{\text{شار عبوری از هسته}} \simeq \overbrace{\phi_g}^{\text{شار عبوری از فاصله هوایی}} \Rightarrow B_f S_f = B_g S_g$$

$$\boxed{B_g = \frac{S_f}{S_g} B_f} \leftarrow S_g \neq S_f \text{ اگر}$$

$$B_g = \mu_0 H_g$$
$$B_f = \mu_0 \mu_r H_f$$
$$\Rightarrow \mu_0 H_g = \frac{S_f}{S_g}\mu_0\mu_r H_f \Rightarrow \boxed{H_g = \frac{S_f}{S_g}\mu_r H_f}$$

$$\begin{cases} B_g = B_f \\ H_g = \mu_r H_f \end{cases} \leftarrow S_g \simeq S_f \text{ اگر}$$

$$\text{KVL مغناطیسی} \rightarrow \oint \vec{H}\cdot\vec{dl} = NI_0 \Rightarrow \int_f \vec{H}\cdot\vec{dl} + \int_g \vec{H}\cdot\vec{dl} = NI_0$$

$$\rightarrow H_f L_f + H_g L_g = NI_0$$

$$H_f(2\pi r_0 - L_g) + H_g L_g = NI_0$$

$$H_f(2\pi r_0 - L_g) + \mu_r L_g H_f = NI_0 \qquad \text{با فرض } S_g \simeq S_f$$

۵۷

$$H_f = \frac{NI_0}{(2\pi r_0 - L_g) + \mu_r L_g} \Rightarrow B_f = \frac{\mu_0 \mu_r N I_0}{(2\pi r_0 - L_g) + \mu_r L_g}$$

$$\phi = \phi_f = \phi_g = B.S = \frac{\mu_0 \mu_r N I_0 S}{(2\pi r_0 - L_g) + \mu_r L_g}$$

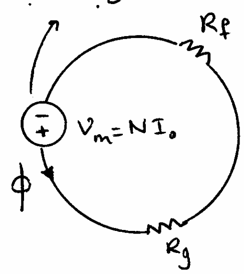
تقسیم بر $\mu_0 \mu_r S$ $\longrightarrow$

$$\phi = \frac{NI_0}{\dfrac{\overbrace{2\pi r_0}^{L_f} - L_g}{\underbrace{\mu_0 \mu_r}_{\mu} S_f} + \dfrac{\mu_r L_g}{\mu_0 \mu_r S_g}}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{NI_0}{\underbrace{\dfrac{L_f}{\mu S_f}}_{R_f} + \underbrace{\dfrac{L_g}{\mu_0 S_g}}_{R_g}}$$

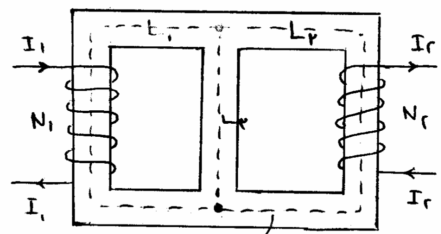
$$\Rightarrow \boxed{NI_0 = \phi (R_f + R_g)}$$

علامت + همیشه در جهت خروج شار است.

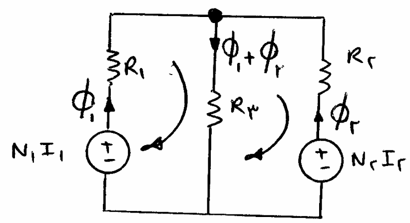


$$\sum_{i=1}^{n} R_i \phi = \sum_{j=1}^{m} N_j I_j \longrightarrow \text{KVL}$$

- مثال از چنگ :



یک مسیر بسته در نظر می‌گیریم.



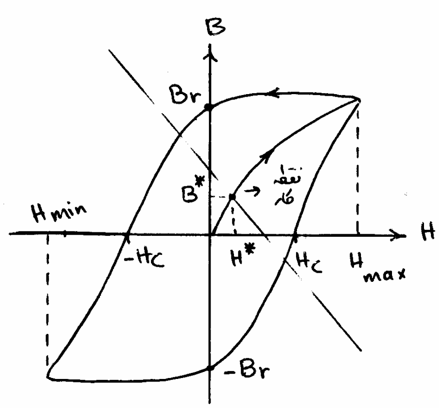
$KCL: \sum \phi_k = 0$ روی گره k ام

$$-N_1 I_1 + \phi_1 R_1 + R_3(\phi_1+\phi_2) = 0$$

$$-N_2 I_2 + R_2 \phi_2 + R_3(\phi_1+\phi_2) = 0 \Rightarrow \phi_1 = \cdots \;,\; \phi_2 = \cdots$$

---

* هیسترزیس یا پس‌ماند :



$$H_f L_f + H_g L_g = N I_0$$

خط $y = -ax + b$

$$H_f L_f + \frac{B_g}{\mu_0} L_g = N I_0 \Rightarrow B_f = -\mu_0 \frac{L_f}{L_g} H_f + \frac{\mu_0}{L_g} N I_0$$

$$\Rightarrow H_f L_f + \frac{B_f}{\mu_0} L_g = N I_0 \Rightarrow B_f + \mu_0 \frac{L_f}{L_g} H_f = \frac{\mu_0}{L_g} N I_0$$

$$\boxed{\frac{B^*}{H^*} = \mu}$$

ادامه

* خلاصه مطالب و فرمول های مهم :

همگرای = کرل

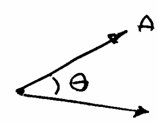
واگرای = دیورژانس

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\,\vec{a}_x + (y_2 - y_1)\,\vec{a}_y + (z_2 - z_1)\,\vec{a}_z$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

جهت بردار A $\quad \vec{a}_{AB} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|AB|}$

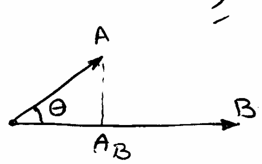
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |A|\,|B| \cos\theta$$



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\begin{cases} \vec{a}_x \cdot \vec{a}_x = 1 \\ \vec{a}_y \cdot \vec{a}_y = 1 \\ \vec{a}_z \cdot \vec{a}_z = 1 \end{cases} \quad , \quad \begin{matrix} a_x \cdot a_y = 0 \\ a_y \cdot a_z = 0 \\ a_x \cdot a_z = 0 \end{matrix}$$

* کاربرد ضرب داخلی ، پیدا کردن سایه یک بردار بر روی بردار دیگر است.

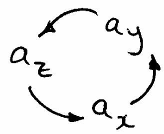


$$\cos\theta = \frac{\vec{A}_B}{\vec{A}} \Rightarrow A_B = A\cos\theta = A \cdot a_B$$

بردار = اندازه * جهت $\Rightarrow \vec{A}_B = (\vec{A} \cdot \vec{a}_B)\,\vec{a}_B$

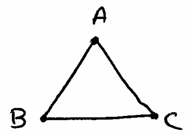
تصویر برداری A روی B

$$\vec{A}\times\vec{B} = \underbrace{|A||B|\sin\theta}_{\text{اندازه}} \; \underbrace{\vec{a_n}}_{\text{جهت}}$$



+ = موافق

− = مخالف

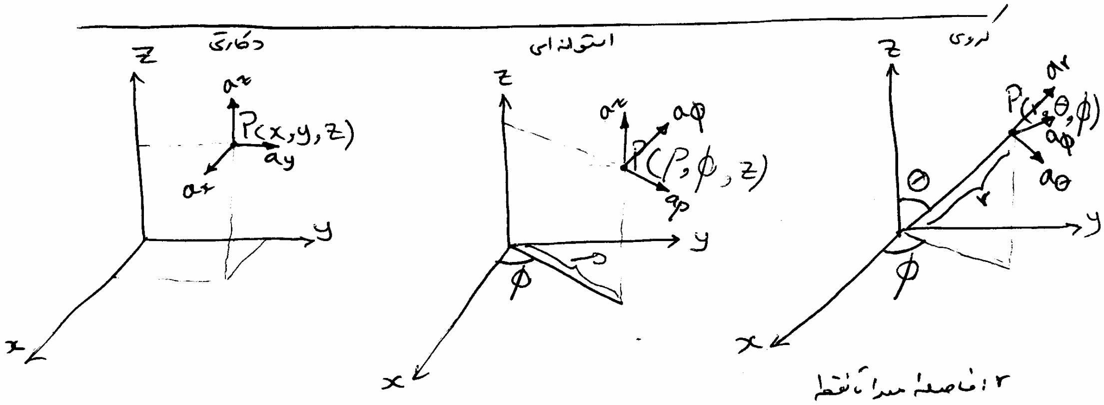


$$S_{ABC} = \frac{1}{۲}\,\vec{BA}\times\vec{BC}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

* حاصلضرب خارجی دو بردار بر هر دو عمود است.

* در ضرب داخلی دو بردار، ابتدا بردار کوچکتر را تعیین می کنیم و سپس با توجه به آن می توان جملات اضافی بردار بزرگتر را حذف نمود.



r: فاصله مبدا تا نقطه

θ: زاویه r با محور z

ϕ: زاویه در افق با محور x

* بردارهای یکه همواره در جهت افزایش اشاره می کنند.

2

دیفرانسیل های طول:

دیفرانسیل طول

دکارتی → $\vec{dl} = dx\,\vec{a}_x + dy\,\vec{a}_y + dz\,\vec{a}_z$ و دیفرانسیل حجم $dv = dx\,dy\,dz$

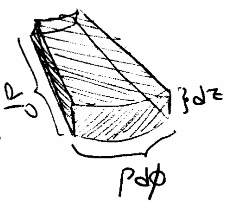
$$ds_x = dy\,dx \;\begin{cases} \nearrow ds_{x^+} = +dy\,dz\;\vec{a}_x \\ \searrow ds_{x^-} = -dy\,dz\;\vec{a}_x \end{cases}$$

$d\phi = \rho\, d\phi$

$$\vec{dl} = d\rho\,\vec{a}_\rho + \rho d\phi\,\vec{a}_\phi + dz\,\vec{a}_z$$

استوانه‌ای ↗

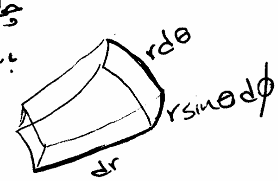
$$ds_\phi = d\rho . dz \begin{cases} \vec{ds}_{\phi^+} = +d\rho\, dz . \vec{a}_\phi \\ \vec{ds}_{\phi^-} = -d\rho\, dz . \vec{a}_\phi \end{cases}$$



$dv = d\rho\;\rho d\phi\; dz$

$d\phi \rightarrow = r\sin\theta\, d\phi$ → چون ϕ در صفحه xy واقع است و باید به r sin منتقل شود.

$d\theta \rightarrow = r\,d\theta$



کروی → $\vec{dl} = dr\,\vec{a}_r + r d\theta\,\vec{a}_\theta + r\sin\theta\, d\phi\,\vec{a}_\phi$

بردار سطح

$$ds_r = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi \;\begin{cases} \nearrow ds_{r^+} = +r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi\;\vec{a}_r \\ \searrow ds_{r^-} = -r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi\;\vec{a}_r \end{cases}$$

برای بدست آوردن هر کدام کافی است دو تای دیگر را در سمت ds مورد نظر ضرب کنیم

$dv = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$

$\cos = \dfrac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$

$\sin = \dfrac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$

$\sec = \dfrac{1}{\cos}$

$\text{cosec} = \dfrac{1}{\sin}$

تبدیل‌ها:

استوانه‌ای به دکارتی

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

دکارتی به استوانه‌ای

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

* مقدار صحیح زاویه ϕ با توجه به x و y تعیین می‌شود که در کدام ناحیه باشند.

$$A_x = A\cdot a_x = (A_\rho \vec{a}_\rho + A_\phi \vec{a}_\phi + A_z \vec{a}_z)$$

$$= A_\rho \underbrace{\vec{a}_\rho\cdot\vec{a}_x}_{\cos\phi} + A_\phi \underbrace{\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_x}_{\cos(90+\phi)} + A_z \underbrace{\vec{a}_z\cdot\vec{a}_x}_{0}$$

$$\cos(90+\phi) = -\sin\phi$$

$$\sin(90+\phi) = \cos\phi$$

$$A_y = A\cdot a_y = (A_\rho \vec{a}_\rho + A_\phi \vec{a}_\phi + A_z \vec{a}_z)$$

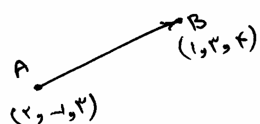
$$= A_\rho \underbrace{\vec{a}_\rho\cdot\vec{a}_y}_{\sin\phi} + A_\phi \underbrace{\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_y}_{\sin(90+\phi)} + A_z \underbrace{\vec{a}_z\cdot\vec{a}_y}_{0}$$

$$A_z = A\cdot a_z = (A_\rho \vec{a}_\rho + A_\phi \vec{a}_\phi + A_z \vec{a}_z)$$

$$= A_\rho \underbrace{\vec{a}_\rho\cdot\vec{a}_z}_{0} + A_\phi \underbrace{\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_z}_{0} + A_z \underbrace{\vec{a}_z\cdot\vec{a}_z}_{1} \quad \Rightarrow A_z = A_z$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$



* برای به دست آوردن ϕ تنها نقطه‌ی ابتدای بردار مهم است:

$$\phi = \tan\left(\frac{-1}{2}\right)$$

③

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \cos^{-1}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$$A_x = \vec{A}\cdot\vec{a}_x = A_r\underbrace{\vec{a}_r\cdot\vec{a}_x}_{\sin\theta\cos\phi} + A_\theta\underbrace{\vec{a}_\theta\cdot\vec{a}_x}_{\sin(90^\circ+\theta)\cos\phi} + A_\phi\underbrace{\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_x}_{\cos(90^\circ+\phi)}$$

$$A_y = \vec{A}\cdot\vec{a}_y = A_r\underbrace{\vec{a}_r\cdot\vec{a}_y}_{\sin\theta\sin\phi} + A_\theta\underbrace{\vec{a}_\theta\cdot\vec{a}_y}_{\sin(90^\circ+\theta)\sin\phi} + A_\phi\underbrace{\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_y}_{\sin(90^\circ+\phi)}$$

$$A_z = \vec{A}\cdot\vec{a}_z = A_r\underbrace{\vec{a}_r\cdot\vec{a}_z}_{\cos\theta} + A_\theta\underbrace{\vec{a}_\theta\cdot\vec{a}_z}_{\cos(90^\circ+\theta)} + A_\phi\underbrace{\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_z}_{0}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}\times 10^{-9}$$

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times 10^{9}$$

* برای بدست آوردن E_t در استوانه‌ای، ابتدا باید E_1 ، E_2 و ... به طور جداگانه به استوانه‌ای برده شود. سپس در استوانه‌ای با هم جمع شوند.

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_1Q_2}{R^2}\,\vec{a}_{12}$$

$$E_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_i}{R_2}\,\vec{a}_R$$

شدت بار حاصل از چند بار نقطه‌ای

$$\longrightarrow \vec{E}_t = \sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_i}{R_i^2}\,\vec{a}_{Ri}$$

اگر تعداد بارها به بی‌نهایت میل کند، یک بار پیوسته توده‌ای تشکیل می‌شود. در این حالت ناچار به استفاده از انتگرال هستیم.

$$\vec{a}_R = \frac{\vec{R}}{|R|},\quad |R| = (R^2)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow \frac{\vec{a}_R}{R^2} = \frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{3}{2} = 1+\frac{1}{2}$$

تضعیف در فرمول F

$$\Rightarrow \vec{F}_{12} = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{R}_{12}}{(R_{12}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad \vec{E}_i = \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{R}_i}{|R_i^2|^{\frac{3}{2}}}$$

$\vec{E}_t$ در بار پیوسته

$$\longrightarrow \int \overbrace{\frac{dQ_i}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}}}^{d\vec{E}}$$

بار خطی $dQ = \rho_L\, dl$

بار سطحی $dQ = \rho_s\, ds$

بار حجمی $dr = \rho_r\, dr$

$$\Rightarrow E_t = \begin{cases} \displaystyle\iiint \frac{\rho_r\, dr}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \displaystyle\iint \frac{\rho_s\, ds}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \displaystyle\int \frac{\rho_L\, dl}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

مراحل کار در رسم شدت میدان الکتریکی :

۱ - تعیین نقطهٔ شروع و انتها (انتها داده می‌شود و نقطهٔ ابتدا نیز هر نقطه‌ای جز مبدأ می‌تواند باشد).

۲ - تشکیل کسر $\frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}}$

۳ - تشکیل dE

$$\vec{dE} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

۴ - بررسی وجود تقارن که معمولاً باعث حذف یکی از قسمت‌های برداری می‌شود.

۵ - انجام عمل انتگرال‌گیری (مقادیر ثابت و یکنواخت از انتگرال بیرون می‌آیند)

* بار خطی نیز یک نوع بار استوانه‌ای است.   * میدان الکتریکی بر سطح عمود است.

* در تعیین dQ (دیفرانسیل‌های dl، ds و یا dv) دقت شود که این دیفرانسیل‌ها مربوط به بار هستند نه به بردار فاصله تا بار. به عنوان مثال یک بار خطی که در روی محور zها است، دارای $dl = dz$ می‌باشد. به عبارت دیگر dQ بیانگر تغییرات بار خطی یا سطحی و ... در جهت‌های مختلف است.

* تقارنی که گفته شد، در قسمت $\frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}}$ وجود خواهد داشت که مربوط به نوع بار است. مثلاً در یک بار خطی که روی محور zها است، چون در یک فاصلهٔ متقارن و مساوی، بارهایی که در سمت + و بارهایی که در سمت − محور zها قرار دارند، با هم برابرند. پس در $\frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}}$ اگر قسمت z وجود داشته باشد حذف می‌شود، چون مولفهٔ z میدان خنثی و صفر خواهد شد.

↑ این مسئله خود به خود با به دست آوردن R معلوم می‌شود.

یک مقدار ثابت

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(z^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{x^2}$$

* اگر صفحه‌ای باردار (بار سطحی) در صفحهٔ yz قرار داشته باشد، $(z, y, 0)$، مولفه‌های dz, dy باقی می‌مانند یعنی

$$dQ = \rho_s\, ds = \rho_s\, dy\, dz$$

بیانگر این است که بار در کدام جهت‌ها قرار دارد.

حال اگر بخواهیم میدان را در نقطه‌ای دلخواه (x_0, y_0, z_0) اندازه بگیریم، مولفه‌های y و z میدان به دلیل تقارن صفحه در صفحهٔ yz، از فرمول $\frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}}$ حذف خواهند شد.

شار الکتریکی عبوری از سطح

نتیجه قضیهٔ دیورژانس $\Rightarrow$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_v$ بار حجمی و $D = \frac{\varphi_E}{S}$

دل: چگالی شار الکتریکی — مساحت سطح

$$\mathrm{div}\,F = \nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

دیورژانس هر بردار عددی ثابت است.

$$\vec{F} = F_1(x,y,z)\vec{a}_x + F_2(x,y,z)\vec{a}_y + F_3(x,y,z)\vec{a}_z$$

شار عبوری از سطح Δs: $\Delta\varphi_E = D_s \Delta s \cos\theta = \vec{D}_s\cdot\vec{\Delta s}$

θ : زاویهٔ بین میدان و خط عمود بر سطح،

شار کل که از n تا Δs می‌گذرد $= \sum_{i=1}^{n} \vec{D}_{si}\cdot\vec{\Delta S}_i$

$n\to\infty \Rightarrow \varphi_E = \iint \vec{D}\cdot\vec{ds}$ بردار عمود بر سطح

قانون گوس $\Rightarrow$ $\psi = Q_{enc}$

شار عبوری از یک سطح بسته

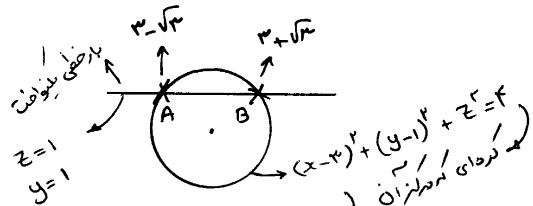
$$\Rightarrow \psi = \oiint \vec{D}\cdot\vec{ds} = Q_{enc}$$

$$\oiint \vec{D}\cdot\vec{ds} = \iiint \rho_v\,dv = Q_{enc}$$

حجمی که در سطح بسته احاطه شده است.

دیفرانسیل سطح کروی $= r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\;\vec{a}_r$

5



* برای به دست آوردن طول AB ، باید معادلهٔ خط را با معادلهٔ دایره صدق دهیم (تقاطع دهیم).

$$\Rightarrow (x-3)^2+1=4$$

$$x-3=\pm\sqrt{3}$$

$$x=3\pm\sqrt{3}$$

* در این شان اگر بخواهیم بار درون کره و در نتیجه شار خروجی از آن را اندازه بگیریم،

$Q=\int \rho_L \, dl$ است چون در سمت y و z ثابت است. می‌شود $dl = dx$

---

* طبق قانون گوس در داخل اجسام رسانا و توپر میدان صفر است.

- معادلات ماکسول:
در حالت استاتیک

دیورژانس به معنای واگرایی
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_v$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \leftarrow \text{میدان مغناطیسی واگرایی ندارد}$$

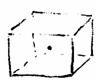
کرل به معنای همگرایی
$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0 \leftarrow \text{میدان الکتریکی همگرایی ندارد}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$$

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\vec{a}_r$$

زیرا خطوط شار به طور متقارن به سمت بیرون نقطه امتداد دارند و از یک سطح کروی فرضی $4\pi r^2$ عبور می‌کنند

پس در فضای آزاد $\rightarrow$ $D = \varepsilon_0 E$

$$D = \int_{\text{حجم}} \frac{\rho_v \, dv}{4\pi R^2} a_R$$



کاربرد قانون گوس در عنصر دیفرانسیلی حجم :

$$\iint_{\text{جلو}} \vec{D}\cdot\vec{ds} = \vec{D}\cdot\vec{\Delta s}_{\text{جلو}} = \left(\left(D_{x_0} + \frac{\frac{\Delta x}{2}}{1!}\frac{\partial D_x}{\partial t}\right)\vec{a}_x\right)\cdot\underbrace{D_y D_z \vec{a}_x}_{\Delta s}$$

$$= \left(D_{x_0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y \Delta z$$

$$\iint_{\text{پشت}} \vec{D}\cdot\vec{ds} = \vec{D}\cdot\vec{\Delta s}_{\text{پشت}} = \left(\left(D_{x_0} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\vec{a}_x\right)\cdot\left(-\Delta y \Delta z \vec{a}_z\right)$$

البته در حالتی است که سطح بسیار کوچک باشد و ما به صورت محدود باز خارج شود

$$= \left(-D_{x_0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y \Delta z$$

$$\rightarrow \iint_{\text{جلو}} + \iint_{\text{پشت}} = \frac{\partial \Delta x}{\partial x}\Delta y \Delta z \Delta x$$

به همین ترتیب $\rightarrow$

$$\iint_{\text{راست}} + \iint_{\text{چپ}} = \frac{\partial \Delta y}{\partial y}\underbrace{\Delta x \Delta y \Delta z}_{\Delta V}$$

⑥

$$\iint_{\text{بالا}} + \iint_{\text{پایین}} = \frac{\partial \Delta z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\Rightarrow \oiint \vec{D} \cdot \vec{ds} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = Q_{enc}$$

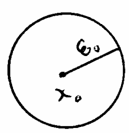
به دلیل اینکه D_x و ... به طور خطی با x و y و z تغییر نمی‌کنند، از مشتق جزئی استفاده شده است.

چگالی بار حجمی

$$\Rightarrow \frac{\partial \Delta x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{Q_{enc}}{\Delta v} = \rho_v$$

سری تیلور $\rightarrow$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\varepsilon}{1!} \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x_0} + \underbrace{\frac{\varepsilon^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \right|_{x_0} + \cdots}_{}$$



اگر ε خیلی کوچک باشد این جمله‌ها حذف می‌شوند.

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{a_x} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{a_y} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{a_z}$$

$$\vec{D} = D_x \vec{a_x} + D_y \vec{a_y} + D_z \vec{a_z}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v} \quad **$$

قضیه دیورژانس

$$\Rightarrow \oiint \vec{D} \cdot \vec{ds} = \iiint \rho_v \, dv = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \, dv = Q_{enc} = \psi_e$$

در قانون گوس بررسی شود:
- میدان با چه مختصاتی تغییر می‌کند (یا D تابع چه متغیری است)
- D چه مولفه‌هایی دارد

$$F = -Q\vec{E}$$

$$dw = \vec{F}\cdot\vec{dl} = -Q\vec{E}\cdot\vec{dl}$$

نیرو — جابجایی

$$W_{AB} = \int_B^A dw \longrightarrow W_{AB} = -Q\int_B^A \vec{E}\cdot\vec{dl} = E_P$$

کار لازم برای حرکت دادن Q در میدان $\vec{E}$

انرژی پتانسیل

$$V_{AB} \triangleq \frac{W_{AB}}{Q}$$

$$V_{AB} = V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}\cdot\vec{dl}$$

سطحی : $\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \rightarrow V_A - V_B = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}(y_B - y_A)$

بار خطی : $\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 \rho} \rightarrow V_A - V_B = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\rho_B}{\rho_A}$

در بار نقطه‌ای :

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)$$

محاسبه V وقتی به ϵ دسترسی نداریم.

$$(V_B = 0) \rightarrow V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_A}$$

در حالتی که ϵ معلوم نباشد از اینها استفاده می‌شود

در حالت کلی‌تر $\rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow dV = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R}$

خطی $dQ = \rho_L dl$

سطحی $dQ = \rho_s ds$

حجمی $dQ = \rho_v dv \rightarrow V = \int dV$

قضیه‌ها:
و قوانین

قضیه دیورژانس → $\iint \vec{J}\cdot d\vec{s} = \iiint \nabla\cdot\vec{J}\,dv = I_{enc}$

قانون گوس → $\underset{\text{شار}}{\psi} = \oiint \vec{D}_s\cdot d\vec{s} = Q_{enc} = \iiint \rho_v\,dv$

انرژی یا پتانسیل الکتریکی $W_E = \mathcal{E}_P = \frac{1}{2}\iiint \varepsilon|E|^2\,dv$

($\frac{dw_E}{dv}$ = چگالی انرژی الکتریکی)

$$V_{AB} = V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

قانون مداری آمپر → $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{enc}$

قانون آمپر → $\vec{J} = \vec{\nabla}\times\vec{H}$

$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ گرادیان گرفتن از یک تابع، بردار عمود در جهت افزایش بر سطح را خواهد داد.

$\vec{J} = \underset{\text{هدایت ویژه}}{\sigma}\vec{E}$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \int K\,dy = \iint \vec{J}\cdot d\vec{s}$$

پلاریزاسیون $P = (\varepsilon_R - 1)\varepsilon_0\vec{E}$

قضیه استوکس → $\oint H\cdot d\vec{l} = \int (\overbrace{\vec{\nabla}\times\vec{H}}^{\vec{J}})\cdot d\vec{s} = I_{enc}$

قانون بیوساوار → $d\vec{H} = \frac{I\,d\vec{l}}{4\pi R^2}\vec{a}_R = \frac{I\,dl\times\vec{R}}{4\pi (R^2)^{3/2}}$

چگالی شار مغناطیسی $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\varphi_B = \iint \vec{B} \cdot \vec{ds}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\oiint \vec{B} \cdot \vec{ds}}_{\text{طبق گوس}} = \underbrace{\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \, dv}_{\text{طبق دیورژانس}} = 0 \rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

$$\vec{J} = \rho_v \underbrace{\vec{v}}_{\text{سرعت}}$$

$$\vec{D} = \rho_s \quad , \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

جهت D در هر نقطه همان جهت خطوط شار در آن نقطه است.

انواع بارها

$Q = \sum Q_n$ ← نقطه‌ای

$Q = \int \rho_L \, dL$ ← خطی

$Q = \int \rho_s \, ds$ ← سطحی

$Q = \iiint \rho_v \, dv$ ← حجمی

عمق نفوذ $\Rightarrow \delta = \dfrac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}}$

$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$

8

حجم کره $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$R = \frac{L}{\sigma S}$$ ← مقاومت طولی سیم

$$R^* = \frac{\ln \frac{b}{a}}{2\pi \sigma^* L}$$ ← مقاومت عرضی سیم

ثابت زمانی $\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$

گشتاور دوقطبی ← $\vec{P} = Q\vec{d}$

$$\vec{F} = -Q\vec{E}$$

$$dw = \vec{F}\cdot d\vec{l} = -Q\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\rightarrow W_{AB} = \int_B^A dw = -Q\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l} = E_p$$

$$V_{AB} = \frac{W_{AB}}{Q}$$

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \Longrightarrow V = \int \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$2W_E = Q_1(\underbrace{V_{12} + V_{13} + V_{14} + \cdots}_{V_1}) + Q_2(\underbrace{V_{21} + V_{23} + V_{24} + \cdots}_{V_2}) + \cdots$$

$$\rightarrow W_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i V_i = E_p$$

$$n \to \infty \qquad W_E = \frac{1}{2}\iiint \rho_v V\,dv = \frac{1}{2}\iiint \varepsilon_0 |E|^2\,dv$$

طبق بیوساوار → $\vec{H} = \int \dfrac{I\,d\vec{l} \times \vec{R}}{4\pi (R)^{3/2}}$

$$\vec{H} = \iint \frac{\vec{K} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2}\, ds = \iint \frac{\vec{K} \times \vec{R}}{4\pi (R)^{3/2}}$$

$$\vec{H} = \iiint \frac{\vec{J} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2}\, dv = \iiint \frac{\vec{J} \times \vec{R}}{4\pi (R)^{3/2}}\, dv$$

در نام گذاری:
۱ ← تولیدکنندهٔ گشتاور
۲ ← تولیدکنندهٔ دوران

روش محاسبهٔ گشتاور:

- تعیین $\vec{B}_1$ که توسط جریان شمارهٔ ۱ در نقطه‌ای دلخواه از عنصر ۲ ایجاد می‌شود.
- تشکیل $d\vec{F}$

$$d\vec{F} = \begin{cases} I_2\, \overrightarrow{dl_2} \times \vec{B} \\ \vec{K}_2 \times \vec{B}_1\, ds_1 \\ \vec{J}_2 \times \vec{B}_1\, dV_1 \end{cases}$$

→ اگر فقط نیرو خواسته شده بود، از dF انتگرال می‌گیریم. در غیر این صورت مرحله بعد.

- تشکیل $d\tau$ ← $d\tau = \underbrace{\vec{R}}_{\text{بازوی گشتاور}} \times dF$

- انتگرال گیری از $d\tau$

$$\vec{J}\, dv = K\, \vec{ds} = I\, \vec{dl} \quad , \quad \vec{J} = \rho_v \underbrace{\vec{V}}_{\text{سرعت}}$$

معادله نیروی لورنتس $\rightarrow \vec{F} = Q(\vec{E} + \underbrace{\vec{V}}_{\text{سرعت}} \times \vec{B})$

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{enc} = NI = \underbrace{V_m}_{mmf} \qquad \text{(KVL)}$$

$$\iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\, dv = 0 \Rightarrow \oiint \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0 \qquad \text{(KCL)}$$

$V_m = \underbrace{R}_{\text{رلوکتانس}}\phi \quad , \quad \phi = BS$

قانون گوس
فقط دیورژانس
$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_v$

$V_m = H\cdot L = NI$

$Q_T = Q_b + Q_{\text{آزاد}}$

$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q_{enc,\text{آزاد}}$

$\oiint \vec{P}\cdot d\vec{s} = -Q_b$

$\oiint \varepsilon_0\vec{E}\cdot d\vec{s} = Q_T \quad \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$

$\underbrace{\rho_{sb}}_{\text{چگالی سطحی}} = \vec{P}\times\vec{a_n}$

کروی $C = \dfrac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$

استوانه‌ای $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_R}{\ln\frac{b}{a}}$

a ← شعاع درونی ، b ← شعاع بیرونی

ص۳ تفاضلی

$$I = \oiint \vec{J} \cdot \vec{ds} = -\frac{dQ_i}{dt}$$

$$\oiint \vec{J} \cdot \vec{ds} = -\frac{d}{dt} \iiint \rho_v \, dv$$

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \, dv = \iiint -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \, dv$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}} \qquad \nabla \cdot \vec{J} = \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{-\int_b^a \vec{E} \cdot \vec{dl}}{\iint \sigma \cdot \vec{E} \cdot \vec{ds}}$$

دهانه سیم

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} V_m \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\vec{B} = -\mu_0 \vec{\nabla} V_m \longrightarrow \vec{D} = -\varepsilon_0 \vec{\nabla} V$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \rightarrow d\vec{B} = \vec{\nabla} \times d\vec{A}$$

$$\frac{\mu_0 I \vec{dl} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2}$$

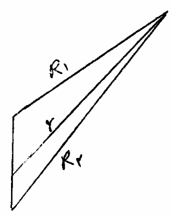
$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 I \vec{dl}}{4\pi R} \quad , \quad \vec{A} = \int \frac{\mu_0 I \vec{dl}}{4\pi R}$$

A بردار ضعیف‌تر نسبت به I است که در جهت جریان تولید می‌شود

15

$$\vec{A} = \iint \frac{\mu_0 \vec{K}\, ds}{4\pi R}$$

$$\vec{A} = \iiint \frac{\mu_0 \vec{J}\, dv}{4\pi R}$$



$\rightarrow \quad r^2 \cong R_1 R_2$

MIDTERM FORMULA SHEET

VECTOR IDENTITIES

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$

$\nabla(\Phi+\Psi)=\nabla\Phi+\nabla\Psi$

$\nabla\cdot(\vec{A}+\vec{B})=\nabla\cdot\vec{A}+\nabla\cdot\vec{B}$

$\nabla\times(\vec{A}+\vec{B})=\nabla\times\vec{A}+\nabla\times\vec{B}$

$\nabla(\Phi\Psi)=\Phi\nabla\Psi+\Psi\nabla\Phi$

$\nabla\left(\frac{\Phi}{\Psi}\right)=\frac{\Psi\nabla\Phi-\Phi\nabla\Psi}{\Psi^2}$

$\nabla\Phi^n=n\Phi^{n-1}\nabla\Phi$

$\nabla\cdot(\Phi\vec{A})=\vec{A}\cdot\nabla\Phi+\Phi\nabla\cdot\vec{A}$

$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A}-\vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B}$

$\nabla\times(\Phi\vec{A})=\nabla\Phi\times\vec{A}+\Phi\nabla\times\vec{A}$

$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}\nabla\cdot\vec{B}-\vec{B}\nabla\cdot\vec{A}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$

$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})+(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}$

$\nabla\cdot\nabla\Phi=\nabla^2\Phi$

$\nabla\cdot\nabla\times\vec{A}=0$

$\nabla\times\nabla\Phi=0$

$\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla\nabla\cdot\vec{A}-\nabla^2\vec{A}$

VECTOR INTEGRAL THEOREMS

$\iiint_v(\nabla\cdot\vec{A})dv=\oint\!\!\oint_{S_{[v]}}\vec{A}\cdot d\vec{s}$ (Divergence theorem, Gauss identity)

$\iint_S(\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{s}=\oint_{C_{[s]}}\vec{A}\cdot d\vec{l}$ (Curl theorem 1, Stokes' theorem)

$\iiint_v(\nabla\times\vec{A})dv=\oint\!\!\oint_{S_{[v]}}d\vec{s}\times\vec{A}\equiv\oint\!\!\oint_{S_{[v]}}(\hat{n}\times\vec{A})ds$ (Curl theorem 2)

$\int \sin^2\theta\, d\theta=\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}=$

SOME INTEGRALS OFTEN MET IN EM PROBLEMS

$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

$\int\frac{1}{(a^2\pm x^2)^{3/2}}dx=\pm\frac{x}{a^2\sqrt{a^2\pm x^2}}+C$

$\int\frac{x}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx=-\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}+C$

$\int\frac{x^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx=-\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$

$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

$\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\begin{cases}\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right)=-\frac{1}{a}\operatorname{arctanh}\left(\frac{x}{a}\right), & |x|<a\\ -\frac{1}{a}\operatorname{arccoth}\left(\frac{x}{a}\right), & |x|>a\end{cases}$

$\int\frac{x}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\left(a^2+x^2\right)+C$

$\int\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=\sqrt{a^2+x^2}+C$

$\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=2\ln\sqrt{a^2}$

$\int\frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}dx=-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right)+C$

$\int x\sin(ax)dx=\frac{1}{a^2}[\sin(ax)-ax\cos(ax)]$

$\int x\cos(ax)dx=\frac{1}{a^2}[\cos(ax)+ax\sin(ax)]$

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2}}$, $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}=\frac{2}{a^2}$

$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$

$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

MIDTERM FORMULA SHEET

Cylindrical Components↔ Spherical Components

$a_r = a_R \sin\theta + a_\theta \cos\theta$ | $a_R = a_r \sin\theta + a_z \cos\theta$
$a_\phi = a_\phi$ | $a_\theta = a_r \cos\theta - a_z \sin\theta$
$a_z = a_R \cos\theta - a_\theta \sin\theta$ | $a_\phi = a_\phi$

Note: θ is the position angle of the point at which the vector exists.

DERIVATIVES OF ELEMENTARY FUNCTIONS

$(const.)' = 0$

$(x)' = 1$

$(x^k)' = kx^{k-1}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}, a \neq 1, x > 0$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \neq (2k+1)\pi$

$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, x \neq k\pi$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x|<1$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x|<1$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$(\sinh x)' = \cosh x$

$(\cosh x)' = \sinh x$

$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$

$(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$

$(\operatorname{arcsinh}\ x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$(\operatorname{arccosh}\ x)' = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x > 1$

$(\operatorname{arctanh}\ x)' = \frac{1}{1-x^2}, |x|<1$

$(\operatorname{arccoth}\ x)' = \frac{1}{1-x^2}, |x|>1$

DIFFERENTIAL OPERATORS

Rectangular Coordinates

$$\nabla\Phi = \hat{x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\vec{F} = \hat{x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

$$\nabla\cdot(\nabla\Phi) \equiv \nabla^2\Phi \equiv \Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\vec{F} = \hat{x}\nabla^2 F_x + \hat{y}\nabla^2 F_y + \hat{z}\nabla^2 F_z$$

Cylindrical Coordinates

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\hat{\phi} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{z}$$

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\vec{F} = \hat{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial\phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right) + \hat{\phi}\left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right) + \hat{z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial\phi}\right)$$

$$\nabla\cdot(\nabla\Phi) \equiv \nabla^2\Phi \equiv \Delta\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\vec{A} = \hat{r}\left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{A_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_r}{\partial\phi^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2}\right) +$$
$$\hat{\phi}\left(\frac{\partial^2 A_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial r} - \frac{A_\phi}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_\phi}{\partial\phi^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} + \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial z^2}\right) +$$
$$\hat{z}\left(\frac{\partial^2 A_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)$$

Spherical Coordinates

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial R}\hat{R} + \frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\hat{\phi}$$

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2 F_R) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta\sin\theta) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$$

MIDTERM FORMULA SHEET

$$\nabla\times\vec{A}=\hat{R}\frac{1}{R\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi\sin\theta)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]+$$
$$\hat{\theta}\frac{1}{R}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_R}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial R}(RA_\varphi)\right]+$$
$$\hat{\varphi}\frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}(RA_\theta)-\frac{\partial A_R}{\partial\theta}\right]$$

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

$$\nabla^2\vec{A}=\hat{R}\left(\frac{\partial^2A_R}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial A_R}{\partial R}-\frac{2}{R^2}A_R+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2A_R}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{R^2}\frac{\partial A_R}{\partial\theta}+\right.$$
$$\left.\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2A_R}{\partial\varphi^2}-\frac{2}{R^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}-\frac{2\cot\theta}{R^2}A_\theta-\frac{2}{R^2\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)+$$
$$\hat{\theta}\left(\frac{\partial^2A_\theta}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial A_\theta}{\partial R}-\frac{A_\theta}{R^2\sin^2\theta}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2A_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{R^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}+\right.$$
$$\left.\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2A_\theta}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{R^2}\frac{\partial A_R}{\partial\theta}-\frac{2\cot\theta}{R^2\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)+$$
$$\hat{\varphi}\left(\frac{\partial^2A_\varphi}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial A_\varphi}{\partial R}-\frac{A_\varphi}{R^2\sin^2\theta}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2A_\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{R^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}+\right.$$
$$\left.\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2A_\varphi}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{R^2\sin\theta}\frac{\partial A_R}{\partial\varphi}+\frac{2\cot\theta}{R^2\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)$$

DIFFERENTIAL ELEMENTS

Cartesian coordinates

$d\vec{l}=\hat{x}dx+\hat{y}dy+\hat{z}dz$; $d\vec{s}=\hat{x}dydz+\hat{y}dxdz+\hat{z}dxdy$; $dv=dxdydz$

Cylindrical coordinates

$d\vec{l}=\hat{r}dr+\hat{\varphi}rd\varphi+\hat{z}dz$; $d\vec{s}=\hat{r}rd\varphi dz+\hat{\varphi}drdz+\hat{z}rdrd\varphi$; $dv=rdrd\varphi dz$

Spherical coordinates

$d\vec{l}=\hat{R}dR+\hat{\theta}Rd\theta+\hat{\varphi}R\sin\theta d\varphi$;

$d\vec{s}=\hat{R}R^2\sin\theta d\theta d\varphi+\hat{\theta}R\sin\theta dRd\varphi+\hat{\varphi}RdRd\theta$;

$dv=R^2\sin\theta dRd\theta d\varphi$

ELECTROMAGNETIC EQUATIONS

Coaxial line

$$C_1=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)},\ \text{F/m};\ L_1=\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)+\frac{\mu_0}{8\pi},\ \text{H/m}$$

Twin-lead line

$$C_1=\frac{\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{h}{r}+\sqrt{\left(\frac{h}{r}\right)^2-1}\right)}\ \text{F/m};\ L_1=\frac{\mu}{\pi}\ln\left(\frac{h}{r}+\sqrt{\left(\frac{h}{r}\right)^2-1}\right)\ \text{H/m}$$

MIDTERM FORMULA SHEET

$$\int \frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{fx^2+g}} = \frac{1}{\sqrt{b}\sqrt{ag-bf}}\arctan\left(\frac{x\sqrt{ag-bf}}{\sqrt{b}\sqrt{fx^2+g}}\right), (ag>bf)$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C, x \neq 2k\pi$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

SOME USEFUL DEFINITE INTGERALS

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ \pi, & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ \pi, & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

$$\int_0^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ \pi/2, & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ \pi/2, & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & , \quad m+n = \text{even number} \\ \dfrac{2m}{m^2-n^2}, & m+n = \text{odd number} \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{(a-b\cos x)}{(a^2+b^2-2ab\cos x)} dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{a}, & a>b>0 \\ 0, & b>a>0 \end{cases}$$

COORDINATE TRANSFORMATIONS

Rectangular ↔ Cylindrical

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \\ z &= z \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z &= z \end{aligned}$$

Rectangular ↔ Spherical

$$\begin{aligned} x &= R\sin\theta\cos\phi \\ y &= R\sin\theta\sin\phi \\ z &= R\cos\theta \end{aligned} \qquad \begin{aligned} R &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= \arccos\left(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \\ \phi &= \arctan(y/x) \end{aligned}$$

Cylindrical ↔ Spherical

$$\begin{aligned} r &= R\sin\theta \\ \phi &= \phi \\ z &= R\cos\theta \end{aligned} \qquad \begin{aligned} R &= \sqrt{r^2+z^2} \\ \phi &= \phi \\ \theta &= \arccos\left(z/\sqrt{r^2+z^2}\right) \end{aligned}$$

VECTOR TRANSFORMATIONS

Rectangular Components ↔ Cylindrical Components

$$\begin{aligned} a_x &= a_r\cos\phi - a_\phi\sin\phi \\ a_y &= a_r\sin\phi + a_\phi\cos\phi \\ a_z &= a_z \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_r &= a_x\cos\phi + a_y\sin\phi \\ a_\phi &= -a_x\sin\phi + a_y\cos\phi \\ a_z &= a_z \end{aligned}$$

Note: ϕ is the position angle of the point at which the vector exists.

Rectangular Components ↔ Spherical Components

$$\begin{aligned} a_x &= a_R\sin\theta\cos\phi + a_\theta\cos\theta\cos\phi - a_\phi\sin\phi \\ a_y &= a_R\sin\theta\sin\phi + a_\theta\cos\theta\sin\phi + a_\phi\cos\phi \\ a_z &= a_R\cos\theta - a_\theta\sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_R &= a_x\sin\theta\cos\phi + a_y\sin\theta\sin\phi + a_z\cos\theta \\ a_\theta &= a_x\cos\theta\cos\phi + a_y\cos\theta\sin\phi - a_z\cos\theta \\ a_\phi &= -a_x\sin\phi + a_y\cos\phi \end{aligned}$$

Note: ϕ and θ are the position angles of the point at which the vector exists.

بسمه تعالی

موضوع : تحقیق درستی ماتریس ضرایب تبدیل بردار $\overrightarrow{AB}$ از دستگاه کروی به کارتزین و بالعکس و همچنین تحقیق صحت کاربرد زوایای φ_1 , θ_1 از مختصات کروی مبدا بردار در این ماتریس , و نیز تحقیق صحت کاربرد این ماتریس در مورد بردارهای یکه در هر دستگاه کروی و کارتزین

فرض : فرض کنیم بردار $\overrightarrow{AB}$ در دستگاه کروی با نقاط $A(\rho_1, \theta_1, \varphi_1)$ و $B(\rho_2, \theta_2, \varphi_2)$ به عنوان ابتدا و انتهای بردار , به صورت زیر نمایش داده میشود:

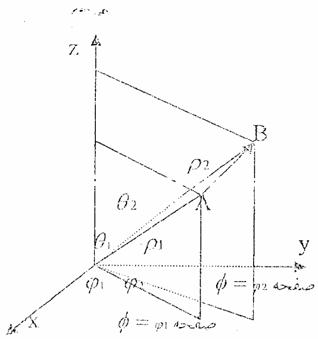


Fig.1

$$\overrightarrow{AB} = A_\rho\,\hat{u}_\rho + A_\theta\,\hat{u}_\theta + A_\varphi\,\hat{u}_\varphi \qquad (1)$$

که بردارهای $\hat{u}_\rho, \hat{u}_\theta, \hat{u}_\varphi$ بردارهای یکه نقطه ابتدای بردار میباشند .

تذکر : با توجه به متعامد بودن بردارهای یکه در مختصات کروی و اینکه این بردارها بردارهایی مستقل خطی در فضای (R^3) میباشند پس میتوان هر بردار دلخواه $\overrightarrow{AB}$ را بصورت ترکیب خطی از این سه بردار یکه نوشت , پس رابطه (1) در مورد هر بردار دلخواه صحت دارد.

رویکرد حل : با توجه به اینکه بردارهای یکه دستگاه کارتزین نیز بردارهای پایه برای هر بردار در دستگاه کروی و کارتزین میباشد , (فضای R^3) پس میتوان با تجزیه هر یک از بردارهای مولف AB در دستگاه کروی یعنی $A_\rho\hat{u}_\rho$ و $A_\theta\hat{u}_\theta$ و $A_\varphi\hat{u}_\varphi$ به بردارهای در دستگاه کارتزین و استفاده از خواص جمع برداری مولفه های A_x, A_y, A_z بردار $\overrightarrow{AB}$ را در دستگاه کارتزین بدست آورد به صورتیکه :

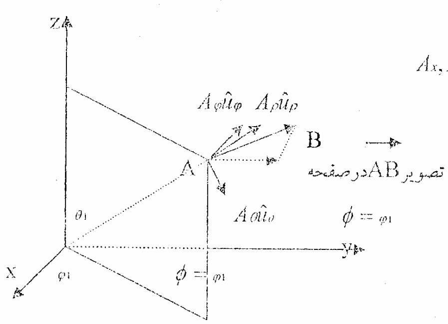


Fig.2

$$\overrightarrow{AB} = A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z \qquad (2)$$

تذکر مهم : میتوانستیم بردار $\overrightarrow{AB}$ را بر حسب بردارهای پایه نقطه B یعنی $\hat{u}_{\rho 2}, \hat{u}_{\theta 2}, \hat{u}_{\varphi 2}$ تجزیه کنیم که در این صورت اندازهای $A'_\varphi, A'_\theta, A'_\rho$ بدست می آمد وماتریس ضرایب نیز بر حسب زوایای φ_2, θ_2 حاصل می شد بنا بر این با فرض φ_2, θ_2 واندازهای $A'_\rho, A'_\theta, A'_\rho$ بر حسب نقطه انتهای بردار, نیز همین نتیجه معتبر است .

تجزیه $A_\rho\hat{u}_\rho$ به مولفه هاي كارتزين :

با توجه به شكل شماره 3 از آنجا كه امتداد $A_\rho\hat{u}_\rho$ در صفحه $\phi=\varphi_1$ است و با محور z زاويه θ_1 را ميسازد پس تصوير آن بر محور z برابر $A_\rho Cos\theta_1$ و تصوير آن درصفحه xy برابر $A_\rho Sin\theta_1$ ميباشد پس :

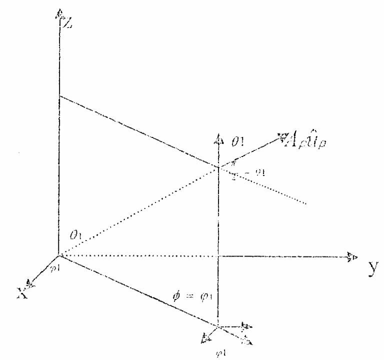


Fig.3

$$A_\rho\hat{u}_\rho = A_\rho(Sin\theta_1 Cos\varphi_1\hat{i} + Sin\theta_1 Sin\varphi_1\hat{j} + Cos\theta_1\hat{k}) \qquad (3)$$

تجزیه $A_\theta\hat{u}_\theta$ به مولفه هاي كارتزين :

با توجه به شكل شماره 4 از آنجا كه صفحه $\phi=\varphi_1$ شامل هر دو بردار z $\hat{u}_\rho,\hat{u}_\theta$ مي باشد بنابراين بردار $A_\theta\hat{u}_\theta$ نيز با دو بردار يكي در امتداد محور منفي z با زاويه $\frac{\pi}{2}-\theta_1$ و ديگري در صفحه xy تجزيه مي شود. پس :

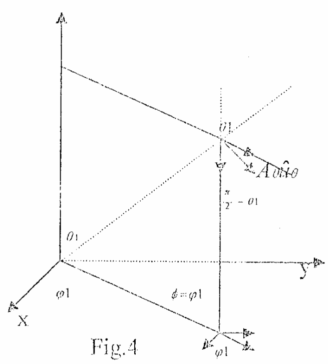


Fig.4

$$A_\theta\hat{u}_\theta = A_\theta Cos\theta_1 Cos\varphi_1\hat{i} + A_\theta Cos\theta_1 Sin\varphi_1\hat{j} - A_\theta Sin\theta_1\hat{k} \qquad (4)$$

تجزیه $A_\varphi\hat{u}_\varphi$ به مولفه هاي كارتزين :

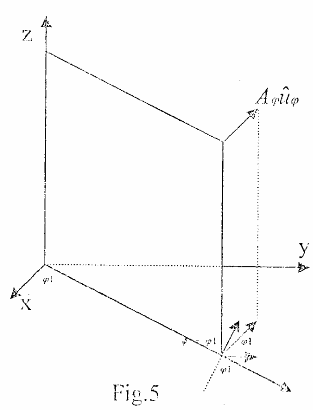


Fig.5

با توجه به متعامد بودن بردارهاي $\hat{u}_\rho,\hat{u}_\theta,\hat{u}_\varphi$ بنابراين بردار $A_\varphi\hat{u}_\varphi$ بر صفحه شامل دو دو بردار ديگر يعني صفحه $\phi=\varphi_1$ عمود است بنابراين بر محور z نيز كه در اين صفحه قرار دارد عمود ميباشد يعني :

$$\left.\begin{array}{l}\hat{u}_\varphi \perp \hat{u}_\theta \\ \hat{u}_\varphi \perp \hat{u}_\rho\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{u}_\varphi \perp (\text{صفحه } \phi=\varphi_1)$$

$$oz \in \phi=\varphi_1 \Rightarrow \hat{u}_\varphi \perp oz$$

بنابراين :

$\hat{u}_\varphi$ در راستاي z مولفه ندارد وتماما" در صفحه موازي صفحه xy قرار ميگيرد پس:

$$A_\varphi\hat{u}_\varphi = A_\varphi(-Sin\varphi_1\hat{i} + Cos\varphi_1\hat{j} + 0\hat{k}) \qquad (5)$$

از طرفي مي توان با جمع بندي سه قسمت پيشين نتيجه گرفت:

$$(1),(3),(4),(5) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} = {} & (A_\rho Sin_{\theta_1} Cos_{\varphi_1} + A_\theta Cos_{\theta_1} Cos_{\varphi_1} - A_\varphi Sin_{\varphi_1})\,\hat{i} \quad + \\ & (A_\rho \sin_{\theta_1} Sin_{\varphi_1} + A_\theta Cos_{\theta_1} Sin_{\varphi_1} + A_\varphi Cos_{\varphi_1})\,\hat{j} \quad + \\ & (A_\rho Cos_{\theta_1} - A_\theta Sin_{\theta_1} + 0)\,\hat{k}\end{aligned}$$

$$= A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

که مي توان اين نتايج را در ماتريس زير خلاصه كرد:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sin_{\theta_1} Cos_{\varphi_1} & Cos_{\theta_1} Cos_{\varphi_1} & -Sin_{\varphi_1} \\ Sin_{\theta_1} Sin_{\varphi_1} & Cos_{\theta_1} Sin_{\varphi_1} & Cos_{\varphi_1} \\ Cos_{\theta_1} & -Sin_{\theta_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} \qquad (6)$$

براي بدست آوردن ماتريس معكوس نيزكافي است جاي عناصر سطر و ستون را عوض كرد(نسبت به قطر اصلي)

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sin_{\theta_1} Cos_{\varphi_1} & Sin_{\theta_1} Sin_{\varphi_1} & Cos_{\theta_1} \\ Cos_{\theta_1} Cos_{\varphi_1} & Cos_{\theta_1} Sin_{\varphi_1} & -Sin_{\theta_1} \\ -Sin_{\varphi_1} & Cos_{\varphi_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \qquad (7)$$

اگر سه بردار يكه $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_\rho$ را با استفاده از همان روش اثبات رابطه هاي (3),(4),(5) به بردار هاي كارتزين تجزيه كنيم خواهيم داشت :

$$\hat{u}_\rho = Sin_{\theta_1} Cos_{\varphi_1}\hat{i} + Sin_{\theta_1} Sin_{\varphi_1}\hat{j} + Cos_{\theta_1}\hat{k}$$

$$\hat{u}_\theta = Cos_{\theta_1} Cos_{\varphi_1}\hat{i} + Cos_{\theta_1} Sin_{\varphi_1}\hat{j} - Sin_{\theta_1}\hat{k}$$

$$\hat{u}_\varphi = -Sin_{\varphi_1}\hat{i} + Cos_{\varphi_1}\hat{j} + 0\hat{k}$$

كه با مرتب كردن روابط فوق بصورت ماتريسي, با در نظر گرفتن ماتريس رابطه(6) بنام A خواهيم داشت :

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_\rho \\ \hat{u}_\varphi \\ \hat{u}_\theta \end{bmatrix} = A^{-1} * \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix}$$

و همچنين با ضرب طرفين رابطه اخير در ماتريس A داريم:

$$\begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix} = A * \begin{bmatrix} \hat{u}_\rho \\ \hat{u}_\theta \\ \hat{u}_\varphi \end{bmatrix}$$

بنابراين ميتوان در روابط (6),(7) بجاي ماتريسهاي $\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$ به ترتيب ماتريسهاي يكه مختصات كروي و كارتزين را قرار داد و روابط همچنان برقرار است .

GRADIENT

CARTESIAN $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$

CYLINDRICAL $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$

SPHERICAL $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi$

DIVERGENCE

CARTESIAN $\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$

CYLINDRICAL $\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$

SPHERICAL $\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(D_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}$

CURL

CARTESIAN $\nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\mathbf{a}_z$

CYLINDRICAL
$$\nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right)\mathbf{a}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)\mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right]\mathbf{a}_z$$

SPHERICAL
$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(H_\phi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi}\right]\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r}\right]\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta}\right]\mathbf{a}_\phi$$

LAPLACIAN

CARTESIAN $\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

CYLINDRICAL $\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

SPHERICAL $\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$