

بسمه تعالی

جزوه محاسبات عددی

استاد رستمی اردستانی

ترم پاییز ۱۳۸۹

رشته مهندسی برق - مخابرات

مقطع کارشناسی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهر ری



با تشکر و قدردانی فراوان از همت دوست عزیزی که زحمت نوشتن این جزوه را کشیده و آنرا در اختیار ما قرار دادند.

و با همکاری معاونت علمی حوزه بسیج دانشجویی دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهر ری.

وبلاگ دانشجویی مهندسی برق - مخابرات دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهرری

توجه : مطالب مندرج در این جزوه دست نوشته فرد یا گروهی از دوستان هم کلاسی ماست که با کسب اجازه از آنها و به صورت رایگان در اختیار عموم قرار گرفته است لذا هر گونه ایراد در صورت وجود متوجه استاد نیست.



آغاز عددی ۱: پیام نور دکتر اسماعیل بابایی

محاسبه عددی: خطای عددی

موضوع: خطاها

۶. نحوه فعالیت طلاب
۱۴ نفر بابایی ترم
حضور تمام

- ① خطاها
- ② حل عددی معادلات غیر خطی
- ③ روشهای
- ④ مقیاس و انتقالی عددی
- ⑤ حل معادلات تفاضلی

تعریف محاسبه عددی

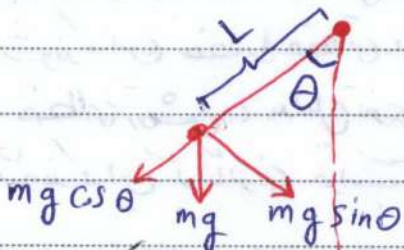
محاسبات عددی علم است که به بررسی، تجزیه و تحلیل و ایجاد روش های محاسبه و پاسخ ها

عدد یک فایده زیادی می آید. بدینسان این علم را به یکی (مراقب) و صرفاً قسم به محاسبه
و به روش های دیگر به روش های دیگر به روش های دیگر به روش های دیگر به روش های دیگر
از طرفی راه حل عددی را به روش های دیگر به روش های دیگر به روش های دیگر به روش های دیگر
حل می کنیم. خطای اوقات حرات های که از خطای یک عدد بدست می آوریم صرفاً و بعضاً
نیز به مقدار دقیق نیستند. علت آن خطاهای باشد که نتیجه آنها را به

در تمام { ۱- خطای مدل ۲- خطای داده } علم نیز

منابع خطا { ۳- خطای ناشی از اعداد ۴- محاسبات ۵- روش } به ریاضی (آمار عددی)

۱- خطای مدل



$$\sin \theta \sim \theta$$

$$\theta'' = \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$T = mg \cos \theta$$

$$F = mg \sin \theta \rightarrow ma = mg \sin \theta$$

$$a = g \sin \theta \rightarrow a = g \theta$$

$$L \theta'' = g \theta \rightarrow \theta'' = \frac{g}{L} \theta$$

$$\theta = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

$$\omega = \sqrt{\frac{L}{g}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$



۱- نیروی اصطکاک

۲- نیروی قواوت هوا

۳- $\sin \theta \approx \theta$

تعریف خطای مدل: خطایی است که در اثر نادیده گرفتن بعضی نیروها و پارامترها (مانند پارامتر μ) در مدل یک رخ می دهد و خطای مدل می نامند.

تعریف خطای داده ها:

خطایی است که در اثر نادیده گرفتن بعضی پارامترها یا خطای انسانی در اندازه گیری ها رخ می دهد و خطای داده ها می نامند.

خطای نمایش اعداد:

اعداد اصراراً به تعداد نامحدود رقم دارند. در محاسبات با کمک معیار اندازه گیری های محدود استفاده می کنند. لذا در محاسبات چهار خطایی می شوند که به این خطا خطای نمایشی اعداد می نامند.

$$\sqrt{2} \approx 1,41421356...$$

$$e \approx 2,71828...$$

$$\sqrt{2} \approx 1,4$$

$$\pi \approx 3,14159...$$

$$\sqrt{2} \approx 1,41$$

$$g \approx 10^{m/5} = 9,8$$

$$\sqrt{2} \approx 1,41$$

خطای محاسبات: در محاسبات با کمک معیار در محاسبات ۴ عمل اصلی در چهار خطا می شوند که این خطاها خطای محاسباتی محاسبات می نامند.

خطای روشی: به دلیل نوع روش ها در محاسبات یک عبارت به طبع جواب ها نیز تنوع می یابند که این تنوعی جواب ها خطای نام خطای روشی را ایجاد می کنند.

نکته: خطایی که در اثر افت رتبه یا تغییر در یک عبارت به طبع جواب ها نیز تنوع می یابند که این تنوعی جواب ها خطای نام خطای روشی را ایجاد می کنند.



شود این نه خطا!

آمار عددی دکتر بابلیان

محاسبات عددی: فصل سوم ۲

منابع خطا

- ۱- خطای مدل
- ۲- " داده ها
- ۳- " تخمین اعداد
- ۴- " محاسبات
- ۵- " روشی

انتخاب نام نور

سیاه اعداد یک عدد

نظریه اعداد اشاره عدد فرضی A در صورت زیر است:

$$A = a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + \dots$$

$$۲۴۹۷ = ۲ \times ۱۰^۳ + ۴ \times ۱۰^۲ + ۹ \times ۱۰ + ۷ \quad (\text{مثال})$$

$$۲۱, ۹۹ = ۲ \times ۱۰ + ۱ \times ۱۰^۰ + ۹ \times ۱۰^{-۱} + ۹ \times ۱۰^{-۲} \quad (۲)$$

$$۲۵۳, ۱/۲, 1/11$$

۱- منقسم

انواع اعداد اعشاری

۲- نامنتوم و نامنتوم

$$1/3 = 0.3333 \dots$$

$$15/237 = 0.06328 \dots$$

نمونه نامنتوم و نامنتوم (رسم)

$$\pi = 3.14159 \dots \quad e = 2.71828 \dots \quad \sqrt{2} = 1.41421 \dots$$

SUBJECT:

Year (۱۹) Month (۷) Date (۱۴)

نمود تبدیل یک عدد را با مختم متناوب بر سر

$$A = a_1 a_2 a_3 \dots a_m / b_1 b_2 \dots b_n \overline{c_1 c_2 \dots c_k}$$

$$A = a_1 a_2 \dots a_m + \frac{b_1 b_2 \dots b_n \overline{c_1 c_2 \dots c_k}}{b_1 b_2 \dots b_n}$$

$$1) ۲۱, \overline{14} = ۲۱ + \frac{14 \cdot 0}{99} = ۲۱ + \frac{14}{99}$$

$$۲) ۱۲۳۴ = \frac{1234 - 12}{9900} = \frac{1222}{9900}$$

$$۳) ۱, \overline{3} = \frac{3 - 0}{9} = \frac{3}{9}$$

نمایش عدد

فرض کنید A یک عدد را با نمایش عدد A به صورت زیرات

$$A = a \times 10^b$$

$$0 \leq |a| \leq 9$$

$$ش) A = ۲,۳۴ \times 10^{۳۸}, B = ۷۹۱ \times 10^{-۲۳۵}, C = ۲۱۵,۷ \times 10^{۱۳}$$

C باید نمایش داده شود

$$C = ۲,۱۵۷ \times 10^{+۱۴}$$

بدین جهت اعداد را می توان به دو شکل نمایش داد: مقدار رقم های نامحدود و مقدار رقم های نامحدود را انتخاب می کنند

این کار به ۲ صورت انجام می شود:

۱- روش قطع کردن (chopping)

۲- روش گرد کردن (rounding)

SUBJECT:

Year (۱۹) Month (۷) Date (۱۴)

۱- روش قطع کردن: فرض کنید

$$A = a_1 a_2 \dots a_m / b_1 b_2 \dots b_n b_{n+1} \dots$$

برای قطع کردن تا رقم اعشار عدد از b_n به بعد صرف نظر می شود.
(یعنی رقم اعشار قطع شود)

$$۵۲,۳۴۱۳ \xrightarrow{۲D} ۵۲,۳۴$$

(مثال)

۲- روش گرد کردن: فرض کنید

$$A = a_1 a_2 \dots a_m / b_1 b_2 \dots b_n b_{n+1}$$

۱- اگر $b_{n+1} > 5$ ، یک واحد به b_n اضافه می کنیم و عدد را از b_n قطع می کنیم.

۲- اگر $b_{n+1} < 5$ ، عدد را از b_n قطع می کنیم.

۳- اگر $b_{n+1} = 5$ و بعد از b_{n+1} رقم غیر صفر داشته باشیم، یک واحد به b_n اضافه می کنیم و عدد را از b_n قطع می کنیم.

۴- اگر $b_{n+1} = 5$ و رقم غیر صفر بعد از b_{n+1} نداشته باشیم، اگر b_n فرد بود مانند ۱ عمل می کنیم.

اعداد زیر را تا رقم خواسته شده، گرد کنید.

(مثال)

$$۳۵۸ \xrightarrow{۳D} ۳۵۷,۴ \quad \text{مثال ۱}$$

$$۱,۲۶۴ \xrightarrow{۲D} ۱,۲۶ \quad \text{مثال ۲}$$

$$۳۲,۱۹۹۵ \xrightarrow{۳D} ۳۲,۱۹۷ \quad \text{مثال ۳}$$

$$۱۸۵ \xrightarrow{۲D} ۱۸۵ \quad \text{مثال ۴}$$

$$۱۸۵ \xrightarrow{۲D} ۱۸۵ \quad \text{مثال ۵}$$

$$۱,۷۳۲,۵ \xrightarrow{۴D} ۱,۷۳۲,۵۱ \xrightarrow{۵D} ۱,۷۳۲,۵۰۸ \xrightarrow{۶D} ۱,۷۳۲,۵۰۸ \approx \sqrt{۳} \quad \text{(مثال)}$$

$$۱,۷۳۲ \xrightarrow{۳D} ۱,۷۳۲ \xrightarrow{۲D} ۱,۷۳ \xrightarrow{۱D} ۱,۷ \rightarrow ۲$$



SUBJECT:

Year (19) Month (V) Date (15)

$$d\omega) \quad e^r \simeq v, 119.84 \xrightarrow{\partial D} v, 119.4 \xrightarrow{KD} v, 119.1 \xrightarrow{KD}$$
$$v, \varphi \xrightarrow{ID}, v, \varphi \xrightarrow{ID}, v, \varepsilon \xrightarrow{ID}, v$$

* خطای قطع کردن تا برابر خطای برداشتن است

* اگر a بر d نرسد، (a, d) عددی که A باشد، را صورت اعشاری $|A/a|$

$$|A - a| \leq \theta \times 10^{-(n+1)}$$

عشر خطا ۶.۵ → اوقات زبردست

۱۱ ۱۱ ۱۲ → ۱۰۵ ۱۱ ۱۱

۵ ... ۱۰۰ / ۵ ————— ۱ رتم " "

۱ نصف

۵ شش

۱- نواع رقت ۲ }
۱- رقت معمول ۸۷ تا ۸۸ رقم اخبار
۲- رقت مضاعف ۱۷ تا ۱۸ رقم اخبار



فصل ۳: خطای عددی

۱- خطای مطلق

۲- خطای نسبی

انواع خطا

خطای مطلق: فرض کنید A یک عدد اعشاری باشد و a تقریب آن باشد. خطای مطلق a را با $e(a)$ تعریف کرده و بصورت زیر است:

$$e(a) = |A - a|$$

خطای نسبی: فرض کنید A عدد اعشاری و a تقریب آن باشد. خطای نسبی a را با $\delta(a)$ نمایش داده و تعریف می‌کنیم:

$$\delta(a) = \frac{|A - a|}{A} = \frac{e(a)}{A}$$

$$\delta(a) \approx \frac{e(a)}{a}$$

مثال) فرض کنید $A = \sqrt{2}$ خطای مطلق نسبی آنرا تا ۳ رقم اعشاری حساب کنید.

$$\sqrt{2} = 1,41421356$$

$$e(a) = |1,41421356 - 1,414|$$

$$a = 1,414$$

$$e(a) = |0,00021356| = 0,00021356$$

$$\delta(a) = \frac{0,00021356}{1,414} = 1,51 \times 10^{-4}$$

مثال) فرض کنید $A = \pi$ تا ۲ رقم اعشاری خطای مطلق نسبی را حساب کنید.

$$\pi = 3,1415927$$

$$e(a) = |3,1415927 - 3,14| = 0,0015927$$

$$a = 3,14$$

$$\delta(a) = \frac{0,0015927}{3,14} = 5,07 \times 10^{-4}$$

خطای نسبی: مابین آن هر عدد بصورت $a \times 10^b$ باشد، اصاب منبر است.

تفاوت ۵: مابین مطلق و مابین منبر است.

۱- عضو خنثی

۲- مکرر پذیر



۱- حساب معین سار، عضو نشانی منحصراً ندارد.

$$\text{معرفی } a + 0 = a$$

$$۲,۷۵ + ۴ \times ۱۰^{-۳} = ۲,۷۵۴ \approx ۲,۷۵$$

$$۲,۷۵ + ۳ \times ۱۰^{-۳} = ۲,۷۵۳ \approx ۲,۷۵$$

۲- حساب معین سار، عمل کسری نیز ندارد.

$$\text{معرفی } (a+b) + c = a + (b+c)$$

$$(۲,۷۵ + ۴ \times ۱۰^{-۳}) + ۳ \times ۱۰^{-۳} = ۲,۷۵$$

$$۲,۷۵ + (۴ \times ۱۰^{-۳} + ۳ \times ۱۰^{-۳}) = ۲,۷۵ + ۷ \times ۱۰^{-۳} = ۲,۷۵۷ = ۲,۷۶$$

نکته: در حساب معین سار، برای است اعداد از کوچکتر به بزرگتر جمع شوند. به عنوان مثال:

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n} = \frac{1}{100} + \frac{1}{99} + \dots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1$$

جمع و تفریق

برای جمع و تفریق دو عدد در حساب معین سار، ابتدا اعداد را یکسان کرده و سپس عملیات را انجام می‌دهیم. در نهایت عدد را به صورت علمی نمایش می‌دهیم.

$$۳,۱۲ \times ۱۰^1 + ۸,۴۴ \times ۱۰^1$$

$$= ۱۱,۴۶ \times ۱۰^1 = ۱,۱۴۶ \times ۱۰^2 = ۱,۱۵ \times ۱۰^2 \quad (\text{مثال})$$

$$۷,۴۸ \times ۱۰^0 + ۱,۴۵ \times ۱۰^{-1}$$

$$= ۷,۴۸ \times ۱۰^0 + ۰,۱۴۵ \times ۱۰^0$$

$$= ۷,۴۹۴۵ \times ۱۰^0$$

(مثال)

ضرب: در این حالت ابتدا اعداد را با هم جمع کرده و سپس عملیات را انجام می‌دهیم. در نهایت عدد را به صورت علمی نمایش می‌دهیم.

$$۷,۴۸ \times ۱۰^2 \times ۳,۳۷ \times ۱۰^{-2}$$

$$= ۲۵,۴۰۷۶ \times ۱۰^0 = ۲,۵۴۰۷۶ \times ۱۰^1$$

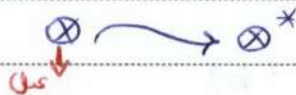
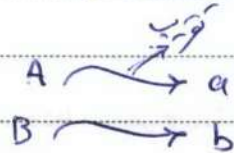
$$= ۲,۵۴ \times ۱۰^1$$



تیم ۱. در حالت تقسیم امتحانها از هم کم شده و پس مانده ها بر هم تقسیم می شوند و عدد به صورت علی و سرده نشان داده می شود.

$$\frac{5,34 \times 10^{-1}}{4,88 \times 10^{-2}} = 1,1734 \times 10^{-1}$$

$$= 1,17 \times 10^{-1}$$



خطای اعمال حسابی :

$$|A \otimes B - \alpha \otimes^* b| = |A \otimes B - \alpha \otimes b + \alpha \otimes b - \alpha \otimes^* b|$$

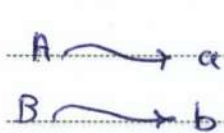
$$\leq |A \otimes B - \alpha \otimes b| + |\alpha \otimes b - \alpha \otimes^* b|$$

نمی آید که مقدار *

خطای تولید شود چون ترتیب خطای متر شده

نمونه خطای تولید در اینجا می دهیم

نکته: معمولاً در عمل به خطای تولید شده، توجه زیادی نمی شود (ناصیبات) ولی خاص اوقات باعث ایجاد جواب های نادرست می شود.



$$e(a) = |A - a|$$

$$e(b) = |B - b|$$

خطای جمع ۲

$$1) e(a+b) \leq e(a) + e(b)$$

$$2) \delta(a+b) \leq \max \{ \delta(a), \delta(b) \}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

تا ۴ رقم اعشار

مثال

$$\sqrt{2} = 1,41421356 \rightarrow 1,414$$

$$\sqrt{3} = 1,7320508 \rightarrow 1,732$$

$$e(a) = |A - a| = 0,0002134$$

$$\delta(a) = \frac{0,0002134}{1,414} = 1,51 \times 10^{-4}$$

$$e(b) = |B - b| = 0,0000508$$

$$\delta(b) = \frac{0,0000508}{1,732} = 2,93 \times 10^{-5}$$

STÄEDTLER®

POWEREN.IR



$$e(1/414 + 1/732) \leq \underbrace{0.0002134 + 0.0000001}_{\text{میان خطای مطلق}}$$

$$\delta(1/414 + 1/732) \leq \underbrace{1.51 \times 10^{-4}}_{\text{میان خطای نسبی}}$$

$$1) e(a-b) \leq e(a) + e(b) \quad \text{خطای تفریق}$$

$$2) \delta(a-b) = e \frac{(a-b)}{a-b}$$

x با توجه به فرمول های بالا، می توان از تفریق اعداد نزدیک هم باید خودداری کرد و در صورت

امکان از وقت مضاعف استفاده می کنیم.

محاسبه عددی و عملی و محاسبات

PowerEn.ir

SUBJECT:

Year ۸۹, Month ۷, Date ۲۸

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow b$$

$$e(ab) \leq a e(b) + b e(a)$$

$$\delta(a.b) \leq \delta(a) + \delta(b)$$

نکته: با توجه به فرمول داده شده می‌باید از ضرب اعداد بزرگ خودداری کرد و در صورت اجبار از دقت مضاعف استفاده کرد.

$$e\left(\frac{a}{b}\right) = e\left(a \times \frac{1}{b}\right) \leq a e\left(\frac{1}{b}\right) + \frac{1}{b} e(a)$$

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) \leq \delta(a) + \delta(b)$$

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{3 - 2}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

* در اینجا ضرب را می‌کنیم تا مخرج
برای جمع صاف شود.

$$= \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

چون ۲ را به توان ۲ می‌رسانیم به هم می‌انند
توی آنجا عطا دارند و می‌کنند.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

$$b^2 \gg 4ac$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\sqrt{\Delta} \approx \sqrt{b^2 - 4ac} = \tilde{b}$$

فراوانی می‌شود ط تقریب
یعنی خیلی نزدیک به b و $\tilde{b}$ است

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \tilde{b}}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

اگر مقدار b به هم دور بود
بزرگتر از $4ac$ باشد برای صحت

عمل می‌کنیم.

$$x_1 = \frac{-b + \tilde{b}}{2a} = \frac{\tilde{b} - b}{2a}$$

چون دو عدد نزدیک به هم جمع می‌شوند

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \times \left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{c}{a} \rightarrow x_1 = -\frac{c}{b}$$

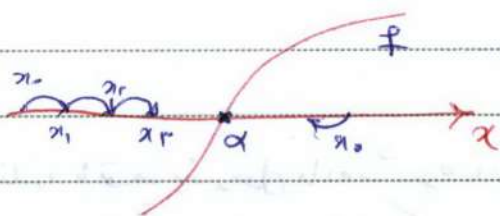
STAEDTLER

POWEREN.IR



حل عددی معادلات غیر خطی ($f(x) = 0$)

حل معادلات از معادلات درجه یک تا معادلات غیر خطی، معادلات غیر خطی به شکل کلی $f(x) = 0$ می شود که منظور یافتن اعدادی مانند α است که در آن $f(\alpha) = 0$ می باشد.



خود را می توان به روش های مختلف به آن پیوست.

روش های برای یافتن ریشه های تابع وجود دارد:
۱. رسم تابع ۲. جدول بندی مقادیر

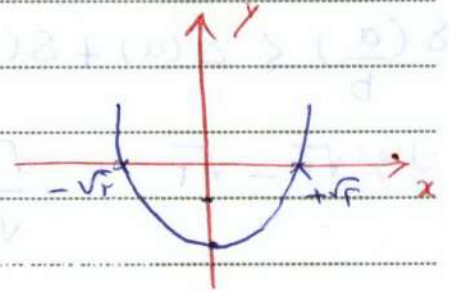
① مثال / $f(x) = x^2 - 2$

$$x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

* از تابع $f(x) = k$ می توانیم $f(x) = k$ را داریم.

$$f(x) = k$$

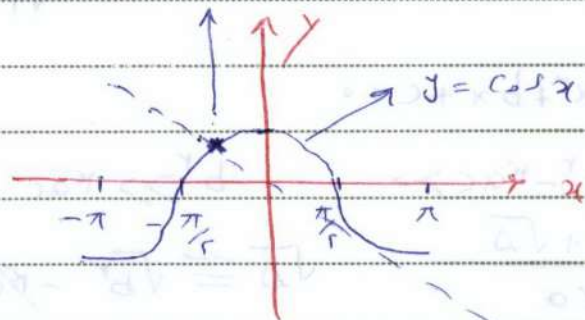
$$h(x) = f(x - k) = 0 \quad \text{حل نقاط دو نمودار $f(x) = 0$ و $y = k$ است.}$$



② مثال / $f(x) = x + \cos x = 0$

$$\cos x = -x$$

$$\begin{cases} y_1 = \cos x \\ y_2 = -x \end{cases}$$

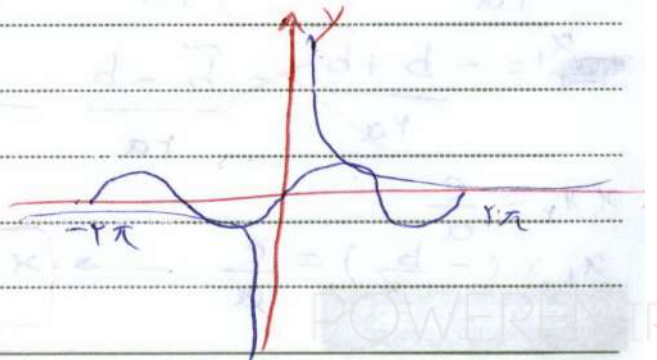


③ مثال / $f(x) = x \sin x - 1$

$$x \sin x = 1$$

$$\sin x = \frac{1}{x}$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{x} \\ y_2 = \sin x \end{cases}$$





ممکن است $f(x) = 0$ وجود نداشته باشد. $f(x) = e^x + 1 = 0 \rightarrow e^x = -1$ x

$$f(x) = x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1$$

تعریف: دنباله $\{x_n\}$ را به α همگرا می‌گویند، اگر $x_n \rightarrow \alpha$ باشد.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \quad n > N ; |x_n - \alpha| < \varepsilon$$

مثال ۱) $\varepsilon = 1/1$ $N = 10$ $\frac{1}{n} < \frac{1}{10}$

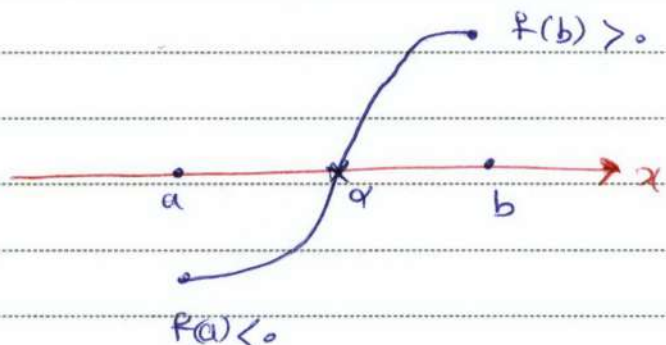
۲) $\varepsilon = 1/100$ $N = 100$ $\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$

قضیه واریانت راس (بولواو): فرض کنید f تابعی پیوسته و در فاصله $[a, b]$ باشد.

$$f(a) \times f(b) < 0$$

آنگاه وجود دارد $\alpha \in [a, b]$ بطوریکه

$$f(\alpha) = 0$$



مثال: یک تابع پیوسته بولواو، وجود دارد. راندهای زیر بررسی کنید.

$$f(x) = x + \cos x \quad [-\pi/2, 0]$$

$$f(-\pi/2) = -\pi/2 + \cos(-\pi/2) = -\pi/2 < 0$$

$$f(0) = 0 + \cos 0 = 1 > 0$$

$$\exists \alpha \in [-\pi/2, 0] \quad f(\alpha) = 0 \rightarrow \alpha + \cos \alpha = 0$$

$$f(x) = x^2 - 1 \quad [-2, 0]$$

$$f(-2) = 4 - 1 = 3 > 0$$

$$f(0) = 0 - 1 = -1 < 0$$

$$\exists \alpha \in [-2, 0] \quad f(\alpha) = 0 \rightarrow \alpha^2 - 1 = 0$$

ایستادگی عددی و محاسبات عددی



PowerEn.ir

SUBJECT:

Year (۱۳۸۹) Month (۱) Date (۵)

روش دو بخش (تلفیف)

فرض کنیم f دفاصلی $[a, b]$ بوده و $f(a)f(b) < 0$

$$1- \quad c = \frac{a+b}{2}$$

۲- اگر $f(a)f(c) < 0$ باشد، $[a, c]$ قرار دارد و قرار می دهیم $b = c$ و به $\pm$ برسیم.

۳- اگر $f(a)f(c) > 0$ باشد، $[c, b]$ قرار دارد و قرار می دهیم $a = c$ و به $\pm$ برسیم.

۴- اگر $f(a)f(c) = 0$ باشد، c ریشه است.

$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$

همین روش دو بخشی؟

$$\begin{cases} |x_1 - \alpha| < \frac{b-a}{2} \\ |x_2 - \alpha| < \frac{b-a}{2^2} \\ \vdots \\ |x_n - \alpha| < \frac{b-a}{2^n} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \alpha| < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$$

$$n \rightarrow \infty$$



SUBJECT:

Year (۱۹) Month (۸) Date (۵)

مثال) به کمک روش دوتجیبی تقریبی از ریشه $f(x) = x^2 - 2$ را بیابیم.

$$|x_n - \alpha| < 10^{-2} \rightarrow \epsilon$$

$$f(x) = x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm \sqrt{2}$$

بازه را خودمان می‌گیریم، طول یک نزدیک هم
در رابطه بران دو عبارت مختلف علامت

$$[1, 2] \rightarrow \begin{cases} f(1) = -1 < 0 \\ f(2) = 2 > 0 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1,5 \rightarrow \text{اولین تقریب ریشه}$$

$$f(x_1) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4} > 0$$

$$[1, \frac{3}{2}] \rightarrow \begin{cases} f(1) = -1 < 0 \\ f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{4} > 0 \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{1 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4} = 1,25$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 2 = \frac{25}{16} - 2 = \frac{25-32}{16} = -\frac{7}{16} < 0$$

$$[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}] \rightarrow \begin{cases} f(\frac{5}{4}) < 0 \\ f(\frac{3}{2}) > 0 \end{cases}$$

$$x_3 = \frac{\frac{5}{4} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{5+6}{8} = \frac{11}{8} = 1,375$$

$$\frac{b-a}{2^n} < 10^{-2} \rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{100}$$

$$\rightarrow 2^n > 100$$

$$\rightarrow n = 7$$

$$|x_n - \alpha| < \epsilon$$

$$|f(x_n)| < \epsilon$$

$$|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$$

- ϵ دلخواه

با $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ سر کار داریم



PowerEn.ir

SUBJECT:

Year (۱۳۸۹) Month (۱) Date (۵)

مثال: روش بایس از ریشه $f(x) = x + \cos x$ را با دقت $\epsilon = 10^{-4}$ در بازه $[-\pi, 0]$ بیابیم.

$$x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{-\pi + 0}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$f(-\pi/2) = -\pi/2 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-\pi + \sqrt{2}}{2} < 0$$

$$\cos x = \sqrt{1 + \cos 2x}$$

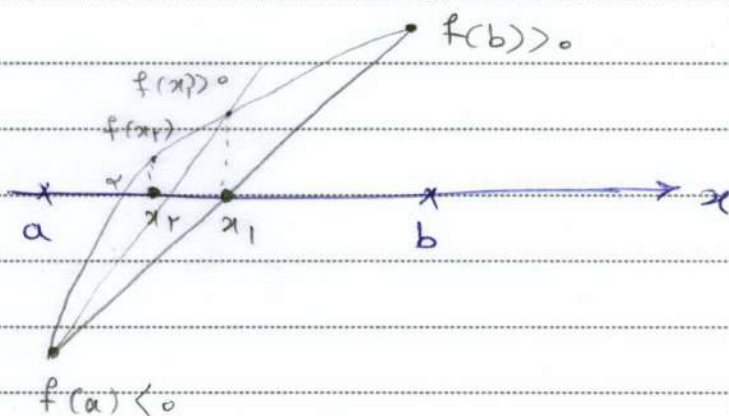
$$\cos \pi/2 = \sqrt{1 + \cos \pi} = \sqrt{1 - 1} = 0$$

$$[x_1, b] = [-\pi/2, 0]$$

$$x_2 = \frac{-\pi/2 + 0}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

$$f(x_2) = -\pi/4 + \cos(-\pi/4) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

روش بایس



مقادیر $f(b)$ و $f(a)$ از ریشه $f(x) = 0$ می شود.

$$f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x_1 - a)$$

فرض x_1 را در $f(x) = 0$ قرار می دهیم.

$$\rightarrow x_1 = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$f(b) - f(a)$$

۲- اگر $f(a) f(x_1) < 0$ باشد، ریشه در $[a, x_1]$ قرار دارد و قرار می دهیم $b = x_1$ و دوباره تکرار می کنیم.

۳- اگر $f(a) f(x_1) > 0$ باشد، ریشه در $[x_1, b]$ قرار دارد و قرار می دهیم $a = x_1$ و دوباره تکرار می کنیم.

STAEDTLER®

۴- اگر $f(a) f(x_1) = 0$ باشد، ریشه x_1 است.



PowerEn.ir

SUBJECT:

Year (۱۹) Month (۱) Date (۵)

مثال ۱: یک روش نیلوی و با ۲ مرتبه تقریبی از ریشه $f(x) = x^2 - 2$ بیابید.



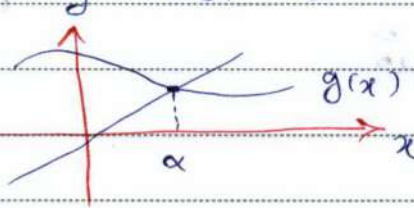
نمایند (دور) و طبعاً نشانه

روش نقطه ثابت (fixed point)

$$f(x) = 0 \rightarrow x - g(x) = f(x) = 0$$

$$x - g(x) = 0 \rightarrow x = g(x)$$

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = g(x) \end{cases}$$



$$\alpha = g(\alpha)$$

$$\alpha - g(\alpha) = 0$$

$$f(\alpha) = 0$$

$$x - g(x) = f(x)$$

$$x - g(x) = 0$$

$$x = g(x)$$

نقطه شروع $\leftarrow x_0$

$$x_1 = g(x_0)$$

$$x_2 = g(x_1)$$

$$x_3 = g(x_2)$$

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

$$\begin{cases} x_{1..} = g(x_{1..}) \\ \alpha = g(\alpha) \end{cases}$$

مثال: $f(x) = x^2 + x - 1$ (روش نقطه ثابت)

$$(1) \quad x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow x_{n+1} = 1 - x_n^2 = g(x)$$

$$(2) \quad x^2 = 1 - x \rightarrow x_{n+1} = \sqrt{1 - x_n} = g(x)$$

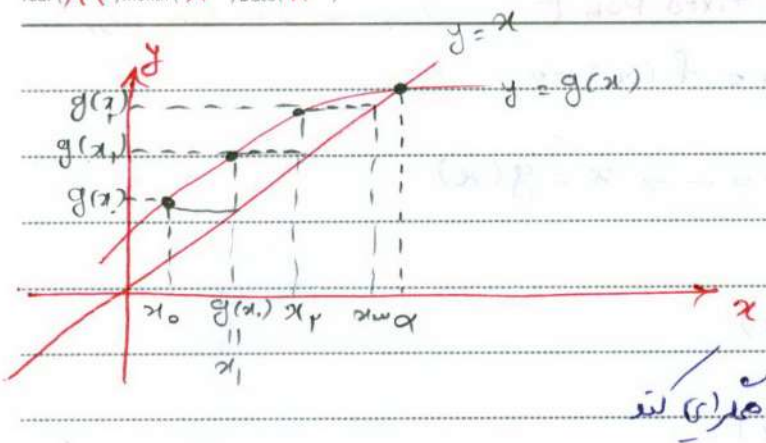
$$(3) \quad x(x+1) = 1 \rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} = g(x)$$

$$(4) \quad x+1 = \frac{1}{x} \rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{x_n} - 1 = \frac{1-x_n}{x_n} = g(x)$$



SUBJECT:

Year (۱۹) , Month (۱) , Date (۱۲)

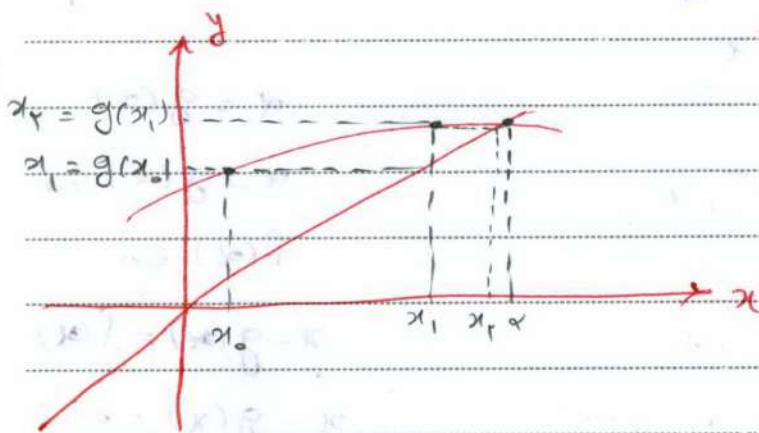


$$x_{n+1} = g(x_n)$$

$$x_1 = g(x_0)$$

$$x_2 = g(x_1)$$

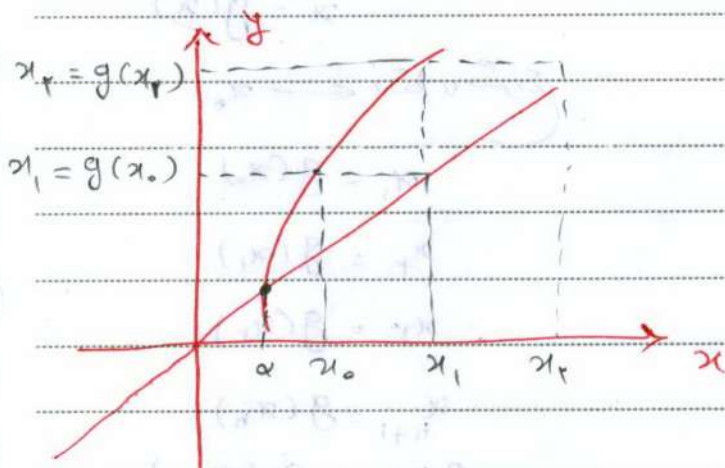
$$x_3 = g(x_2)$$



$$x_1 = g(x_0)$$

$$x_2 = g(x_1)$$

تکراری



$$x_1 = g(x_0)$$

$$x_2 = g(x_1)$$

تکراری

فرض کنیم $g(x)$ تابعی از $[a, b]$ به $[a, b]$ باشد. اگر $|g'(x)| < 1$ در $[a, b]$ برقرار باشد، آنگاه $x = g(x)$ یک ریشه یکتا دارد. اگر x_n یک دنباله از نقاط در $[a, b]$ باشد که $x_{n+1} = g(x_n)$ و $\alpha = g(\alpha)$ باشد، آنگاه x_n به α همگرا می‌شود.

$$① \quad g: [a, b] \rightarrow [a, b] \rightarrow \forall x \in [a, b] \quad a \leq g(x) \leq b$$

STAEDTLER

$$① \quad |g'(x)| < 1$$

↓
تکراری



نکته: میزان خطای روش نقطه ثابت به λ خیلی بستگی دارد.
هر چه λ به صفر نزدیکتر باشد، خطای تدریجی و هر چه به یک نزدیکتر باشد، خطای کمتر است.

مثال) تقریب از روش $3xe^x = 1$ را به کمک روش نقطه ثابت بنویسید.

* ما باید دو شرط قضیه قبل را دارا باشیم

$$f(x) = 3xe^x - 1 = 0$$

$$f(x) = x - g(x)$$

$$[0, 1] \rightarrow \begin{cases} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 3e - 1 > 0 \end{cases}$$

بازه ای که فاصله از هم
شمار معادله

$$3xe^x - 1 = 0 \rightarrow 3xe^x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3e^x}$$

$$g(x) = \frac{1}{3e^x} \quad [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$g(x) = \frac{1}{3e^x} \rightarrow g(x) = -\frac{1}{3}e^{-x} = -\frac{1}{3e^x}$$

$$0 \leq x \leq 1 \rightarrow e^0 \leq e^x \leq e^1$$

$$\rightarrow 1 \leq e^x \leq e$$

$$\rightarrow \frac{1}{e} \leq \frac{1}{e^x} \leq 1$$

$$\rightarrow 0 < \frac{1}{3e} \leq \underbrace{\frac{1}{3e^x}}_{g(x)} \leq \frac{1}{3} < 1$$

$$\text{شرط ۱) برقرار است} \quad 0 < g(x) < 1$$

$$\text{شرط ۲) } g'(x) = -\frac{1}{3e^x}$$

$$|g'(x)| = \left| -\frac{1}{3e^x} \right| < 1$$



SUBJECT:

Year ۱۹, Month ۸, Date ۱۲

$$x_0 = 1/5$$

$$x = g(x)$$

$$x = \frac{1}{3e^x}$$

$$x_1 = \frac{1}{3e^{x_0}} = \frac{1}{3e^{1/5}} = 0.2722$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{3e^{x_n}}$$

$$x_1 = 0.2574$$

$$x_1 = \frac{1}{3e^{x_0}} = \frac{1}{3e^{1/5}}$$

$$x_1 = 0.2022$$

مثال یک: $g(x)$ نام برای $f(x) = x^2 + x - 1$ با این.

$$0 < x < 1$$

$$x(x+1) = 1$$

ترتیب ۱

$$1 < x+1 < 2$$

$$x = \frac{1}{x+1}$$

$$0 < g(x) < 1$$

$$f(0) = -1 \rightarrow f(0)f(1) > 0 \rightarrow f(1) = 1$$

$$0 < \frac{1}{x+1} < 1$$

$$\text{ترتیب ۲} \quad |g'(x)| = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$0 < x < 1$$

$$1 < x+1 < 2$$

$$1 < (x+1)^2 < 4$$

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{(x+1)^2} < 1$$

$$\text{ترتیب ۳} \rightarrow \left| \frac{1}{(x+1)^2} \right| < 1$$



POWEREN.IR



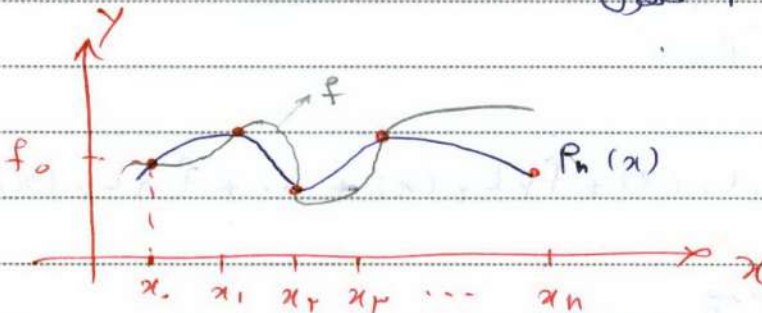
محاسبات عددی ۱

درونیابی ۲

x_i	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
f_i	f_0	f_1	f_2	$\dots$	f_n

$$f_0 = f(x_0) \quad f_1 = f(x_1) \quad \dots \quad f_n = f(x_n)$$

f جدول



$P_n(x_i) = f_i$ در چند ضلعی $P_n(x)$ صابر n است.

هدف از درونیابی یافتن چند ضلعی $P_n(x)$ است.

$x \in [x_0, x_n]$ درونیابی

$x \notin [x_0, x_n]$ بیرونیابی

نقاط $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ نقاط مستطین می گویند.

مادرای درسی با ۱ و ۲ و ۳ و ۴ داریم.

- ۱- لاگرانژ ✓
- ۲- نیوتن ✓
- ۳- هریت ✓

- ۱- چند ضلعی
- ۲- تابی
- ۳- مثلثاتی (برق)
- ۴- کسری
- ۵- اسپلاین * (برکاربرد)

انواع
درونیابی

$$P(x) = x^0 + x^2 - x^2 + 1$$

$$f(x) = \log(x-1)$$

۱- بی سری آسان شاد:

۲- بی سری اشتراک و تقوآن

۳- منصرف فرمودن

مادرای چند ضلعی



SUBJECT:

Year (۱۴) Month (۹) Date (۱۷)

درونیابی لائرنس =

$$\begin{cases} P_n(x_i) = f_i & \text{شرط اول} \\ P_n \text{ در } n \text{ صدارت } n \text{ است} & \text{شرط دوم} \end{cases}$$

تابع جدولی زیر موجود است:

x_i	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_{n-1}	x_n
f_i	f_0	f_1	f_2	$\dots$	f_{n-1}	f_n

$$P_n(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) + \dots + f_n L_n(x)$$

$L_i(x)$ چند صدارت لائرنس

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_1)\dots(x_1-x_{i-1})(x_1-x_{i+1})\dots(x_1-x_n)}$$

نصف ضرب چند صدارت

$$L_i(x) = \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x-x_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i-x_j)} \quad (i \neq j)$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i L_i(x)$$

مثال) بزرگ تابع جدولی زیر، چند صدارت لائرنس تابع f را بسازید.

x_i	x_0	x_1	x_2
f_i	f_0	f_1	f_2
	-1	0	1
	1	1	3

* هر انتر درم چند صدارت لائرنس را با مقدار نقاط منطقی یک

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

STAEDTLER

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x^2 - x}{2}$$



$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-(-1))(x-1)}{(0-(-1))(0-1)} = \frac{(x+1)(x-1)}{-1} = \frac{x^2-1}{-1} = 1-x^2$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)x}{(1+1)x} = \frac{x^2+x}{2}$$

$$P_2(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x)$$

$$= \frac{x^2-x}{2} + (1-x^2) + 3\left(\frac{x^2+x}{2}\right)$$

$$P_2(x) = x^2 + x + 1$$

ت درستی بودن چندمیان، نقاط x_0, x_1, x_2 را در $P_2(x)$ قرار می‌دهیم، باید f_0, f_1, f_2 را بگیرد.

۲۵۰) جدول زیر میزان تولید محصول است (تولید روزی) را در سال‌های مختلف در یک منطقه مشخص است. مقدار محصول را در سال چهارم پیش‌بینی کنید.

	x_0	x_1	x_2	x_3
سال	۱	۲	۳	۴
میزان تولید (تن)	۱۵	۲۰	۳۰	۴۵

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{x^2-5x+6}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -x^2+4x-3$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{x^2-3x+2}{2}$$

$$P_2(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x)$$

$$= 15\left(\frac{x^2-5x+6}{2}\right) + 20(-x^2+4x-3) + 30\left(\frac{x^2-3x+2}{2}\right)$$



PowerEn.ir

SUBJECT:

Year (۱۹) Month (۹) Date (۱۷)

$$P_n(\varepsilon) = 15 \left(\frac{12 - 20 + 2}{2} \right) + 20 \left(\frac{-12 + 16 - 3}{2} \right) + 30 \left(\frac{17 - 12 + 2}{2} \right)$$

$$= 15 - 90 + 90 = 15$$

مطالب روشی لاگرانژ:

۱- محاسبات طولانی است.

۲- درجهی چند جمله ای بعد از انجام محاسبات تعیین می شود.

۳- با اضافه شدن یک نقطه به جدول محاسبات از نو از سر گرفته می شود.

x_{n-1}, x_n





رونیایی } تارانشه
نوشته - تفاضلات قسم شده

$$\begin{array}{l} x_0 \quad f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \\ x_1 \quad f[x_1, x_2] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} \\ \quad \quad \quad \vdots \\ x_i \quad f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{تفاضلات قسم شده} \\ \text{نقطه ای} \end{array} \right\}$$

x_i	f_i
x_0	f_0
x_1	f_1
x_2	f_2
$\vdots$	$\vdots$
x_{n-1}	f_{n-1}
x_n	f_n

تفاضلات قسم شده - نقطه ای :

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\ f[x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} \\ \vdots \\ f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] &= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} \\ f[x_0, x_1, \dots, x_n] &= \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \end{aligned}$$

* جای تفاضلات تارانشه در مقدار تفاضلات قسم شده قرار.

خنده صدای درونی ب نوشتن

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \\ &+ f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n] \\ &\quad (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$



(مثال) چند جمله‌ای درونیاب نوعین تابع جدولی زیر را بسازید.

x_i	f_i
۱	۲
۲	۵
۳	۱۰
۴	۱۷
۵	۲۶

$$\frac{5-2}{2-1} = 3$$

$$\frac{10-5}{3-2} = 5$$

$$\frac{17-10}{4-3} = 7$$

$$\frac{26-17}{5-4} = 9$$

$$\frac{2-1}{1-0} = 1$$

$$\frac{5-2}{2-1} = 3$$

$$\frac{10-5}{3-2} = 5$$

$$\frac{17-10}{4-3} = 7$$

$$\frac{26-17}{5-4} = 9$$

$$P_n(x) = 2 + 3(x-1) + 1(x-1)(x-2) = 2 + 3x - 3 + x^2 - 3x + 2 = x^2 + 1$$

* در روش درونیابی نوعین، درجهی چند جمله‌ای بعد از هر مرتبه، فواصل تقسیم شده، تغییر می‌شود.

(مثال) نمودار زیر میزان تولید محصول یک کارخانه‌ی صنعتی را نشان می‌دهد. میزان تولید این کارخانه را در سال چهارم بیابید.

سال	۱	۲	۳	۴
میزان تولید (تن)	۱۵۰۰	۱۴۰۰	۲۱۰۰	۳۰۰۰

سال	محصول
۱	۱۵۰۰
۲	۱۴۰۰
۳	۲۱۰۰

$$\frac{1700 - 1500}{2 - 1} = 200$$

$$\frac{2100 - 1700}{3 - 2} = 400$$

$$P_2(x) = 1500 + 100(x-1) + 200(x-1)(x-2) =$$

$$= 1500 + 100x - 100 + 200x^2 - 400x + 400 = 200x^2 - 300x + 1800$$

$$P_2(x) = 200x^2 - 300x + 1800$$

$$P_2(4) = 200(14) - 300(4) + 1800 = 3200 - 1200 + 1800 = 3800$$



عکس Δ

$$\Delta = (E - I)$$

$$E f_i = f_{i+1}$$

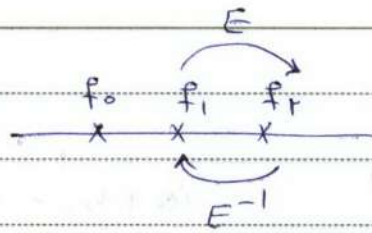
$$E f_p = f_\Sigma$$

$$E^r f_i = E(E f_i)$$

$$= E(f_{i+1}) = f_{i+2}$$

$$E^K f_i = f_{i+K}$$

$$E^q f_p = f_q$$



$$\Delta = E - I$$

$$\Delta f_i = (E - I) f_i = E f_i - f_i = f_{i+1} - f_i$$

$$\Delta f_1 = f_2 - f_1$$

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0$$

$$\Delta^r f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i)$$

$$= \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$$

$$= f_{i+2} - f_{i+1} - (f_{i+1} - f_i)$$

$$\Delta^r f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

$$\Delta^r f_r = \Delta(\Delta f_r) = \Delta(f_\Sigma - f_r) = \Delta f_\Sigma - \Delta f_r = f_\Sigma - f_r - (f_\Sigma - f_r) = f_\Sigma - 2f_r + f_r$$

$$\Delta^3 f_r = (E - I)^3 f_r = (E^3 - 3E^2 + 3E - I) f_r = f_\Delta - 3f_\Sigma + 3f_r - f_r$$

$$\Delta^3 f_r - \Delta^2 f_r = f_\Delta - 3f_\Sigma + 3f_r - f_r - (f_\Sigma - 2f_r + f_r) =$$

$$= f_\Delta - 4f_\Sigma + 4f_r - f_r$$



SUBJECT:

Year (۱۹) Month (۱۰) Date (۱)

$$\Delta^K f_0 = (E-1)^K f_0$$

$$(a+b)^K \rightarrow \begin{cases} a = E \\ b = -1 \end{cases}$$

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^n = ?$$

مشتطوع

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

