

فهرست مطالب



صفحه	عنوان
۱	قسمت C : آنالیز فوریه و معادلات با مشتقات جزئی
۳	فصل ۱۰ . سریها، انتگرالها ، و تبدیلات فوریه
۴	۱۰.۱۰ توابع دوره ای ، سریهای مثلثاتی
۷	۱۰.۲ سریهای فوریه
۱۵	۱۰.۳ توابع با دوره دلخواه $p = 2L$
۱۹	۱۰.۴ توابع زوج و فرد
۲۵	۱۰.۵ بسطهای نیم دامنه ای
۲۸	۱۰.۶ سری فوریه مختلط (اختیاری)
۳۲	۱۰.۷ نوسانهای واداشته
۳۶	۱۰.۸ تقریب بوسیله چند جمله ایهای مثلثاتی
۴۰	۱۰.۹ انتگرالهای فوریه
۴۹	۱۰.۱۰ تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه
۵۵	۱۱.۱ تبدیل فوریه
۶۳	۱۲.۱ جداول تبدیلات
۶۶	پرسشها و مسائل دوره ای فصل ۱۰
۶۸	خلاصه مطالب فصل ۱۰

فصل ۱۱ . معادلات با مشتقات جزئی	۷۱
۱.۱۱ مفاهیم بنیادی	۷۲
۲.۱۱ مدل سازی : نخ مرتعش ، معادله موج	۷۵
۳.۱۱ جداسازی متغیرها ، کاربرد سریهای فوریه	۷۷
۴.۱۱ جواب دالامبر معادله موج	۸۶
۵.۱۱ حل معادله گرما به کمک سری فوریه	۹۲
۶.۱۱ معادله گرما : حل مساله گرما به کمک انتگرالهای فوریه	۱۰۷
۷.۱۱ مدل سازی : غشا ، معادله موج دو بعدی	۱۱۲
۸.۱۱ غشای مستطیلی . استفاده از سری فوریه دو گانه	۱۱۴
۹.۱۱ لاپلاسین در مختصات قطبی	۱۲۳
۱۰.۱۱ غشای مستدیر . استفاده از سری بسل - فوریه	۱۲۷
۱۱.۱۱ معادله لاپلاس . پتانسیل	۱۳۴
۱۲.۱۱ لاپلاسین در مختصات کروی . معادله لژاندر	۱۳۹
۱۳.۱۱ حل مسائل معادلات با مشتقات جزئی به کمک تبدیلات لاپلاس	۱۴۵
۱۴.۱۱ حل مسائل معادلات با مشتقات جزئی به کمک تبدیلات فوریه	۱۵۱
مسائل و پرسشهای دوره ای برای فصل ۱۱	۱۵۵
خلاصه فصل ۱۱	۱۵۹
قسمت D : آنالیز مختلط	۱۶۱
فصل ۱۲ . اعداد مختلط . توابع تحلیلی مختلط	۱۶۳
۱.۱۲ اعداد مختلط . صفحه مختلط	۱۶۳
۲.۱۲ شکل قطبی اعداد مختلط . توانها و ریشه ها	۱۶۹
۳.۱۲ منحنی ها و نواحی در صفحه مختلط	۱۷۷
۴.۱۲ حد . مشتق . تابع تحلیلی	۱۸۰
۵.۱۲ معادلات کوشی - ریمان	۱۸۶
۶.۱۲ تابع نمایی	۱۹۳

۱۹۷..... ۱۲. ۷. توابع مثلثاتی ، توابع هیپربولیک

۲۰۱..... ۱۲. ۸. لگاریتم . توان عمومی

۲۰۷..... ۱۲. ۹. نگاهت توسط توابع خاص (اختیاری)

۲۱۳..... مسائل و پرسشهای دوره ای فصل ۱۲

۲۱۵..... خلاصه فصل ۱۲

۲۱۷..... فصل ۱۳ . انتگرالگیری مختلط

۲۱۸..... ۱۳. ۱. انتگرال روی خط در صفحه مختلط

۲۲۲..... ۱۳. ۲. دو روش انتگرالگیری . مثالها

۲۲۹..... ۱۳. ۳. قضیه انتگرال کوشی

۲۳۸..... ۱۳. ۴. وجود انتگرال نامعین

۲۴۰..... ۱۳. ۵. فرمول انتگرال کوشی

۲۴۵..... ۱۳. ۶. مشتقات توابع تحلیلی

۲۵۰..... پرسشها و مسائل دوره ای برای فصل ۱۳

۲۵۳..... خلاصه فصل ۱۳

۲۵۵..... فصل ۱۴ . سریهای توانی ، سریهای تیلور ، سریهای لوران

۲۵۶..... ۱۴. ۱. دنباله ها ، سریها ، آزمونهای همگرایی

۲۶۷..... ۱۴. ۲. سریهای توانی

۲۷۴..... ۱۴. ۳. نمایش توابع به صورت سری توانی

۲۸۰..... ۱۴. ۴. سری تیلور

۲۸۷..... ۱۴. ۵. سریهای توانی : روشهای عملی

۲۹۱..... ۱۴. ۶. همگرایی یکنواخت

۳۰۲..... ۱۴. ۷. سری لوران

۳۱۰..... ۱۴. ۸. تکنیها و صفرها . بینهایت

۳۱۸..... پرسشها و مسائل دوره ای فصل ۱۴

۳۱۹..... خلاصه فصل ۱۴

۳۲۳	فصل ۱۵ . انتگرالگیری به روش مانده ها
۳۲۳	۱ . مانده ها
۳۲۹	۲ . قضیه مانده
۳۳۲	۳ . محاسبه انتگرالهای حقیقی
۳۳۷	۴ . انواع دیگری از انتگرالهای حقیقی
۳۴۳	پرسشها و مسائل دوره ای فصل ۱۵
۳۴۵	خلاصه فصل ۱۵
۳۴۷	فصل ۱۶ . نگاهت همدیس
۳۴۸	۱ . نگاهت همدیس
۳۵۳	۲ . تبدیلات کسری خطی
۳۵۹	۳ . تبدیلات کسری خطی خاص
۳۶۵	۴ . نگاهت با سایر توابع
۳۷۲	۵ . سطوح ریمان
۳۷۷	پرسشها و مسائل دوره ای فصل ۱۶
۳۷۹	خلاصه فصل ۱۶
۳۸۱	فصل ۱۷ . کاربرد آنالیز مختلط در نظریه پتانسیل
۳۸۲	۱ . میدانهای الکترواستاتیک
۳۸۸	۲ . موارد استعمال نگاهت همدیسی
۳۹۳	۳ . مسائل گرما
۳۹۸	۴ . جریان سیال
۴۰۷	۵ . فرمول انتگرال پواسن
۴۱۲	۶ . خواص عمومی توابع همساز
۴۱۷	پرسشها و مسائل دوره ای فصل ۱۷
۴۱۹	خلاصه فصل ۱۷
۴۲۱	سؤالات ریاضیات مهندسی در آزمونهای کارشناسی ارشد

قسمت C

آنالیز فوریه و معادلات با مشتقات جزئی

فصل ۱۰. سریها، انتگرالها، و تبدیلات فصل ۱۱. معادلات با مشتقات جزئی

پدیده های دوره ای در فیزیک و مهندسی دارای کاربردهای متنوع هستند، و در مسائل عملی نمایش توابع دوره ای بر حسب توابع دوره ای ساده، مانند توابع سینوسی و کسینوسی از اهمیت خاصی برخوردار هستند. این موضوع سبب خلق سری فوریه که جملات آن توابع سینوسی و کسینوسی هستند می گردند. شروع این موضوع با فوریه (بعد از فعالیت های اوایلر و دانیل برنولی) بود که یکی از مهمترین رویدادها در توسعه ریاضیات کاربردی می باشد. در فصل ۱۰ به بررسی سریهای فوریه و خواص آنها می پردازیم. موضوع به توابع غیر دوره ای گسترش می یابد و سبب خلق انتگرالها و تبدیلات فوریه می گردند (بخشهای ۹.۱۰ الی ۱۱.۱۰)، و سریها، انتگرالها و تبدیلات فوریه به آنالیز فوریه موسوم اند.

کارهای متنوع از آنالیز فوریه در فصل ۱۱، معادلات با مشتقات جزئی ای که بطور وسیعی در فیزیک و مهندسی کاربرد دارند، ارائه می شوند. آنالیز فوریه نقش کلیدی را در حل مسائل با مقادیر کرانه ای و اولیه ای دارند که در مکانیک، انتقال گرما، الکترواستاتیک و سایر زمینه ها به کار می روند.

موضوع: ...

تاریخ: ...

برای تکمیل کارهای ...

تاریخ: ...
موضوع: ...

با سلام و احترام،
اینجانب در خصوص ...
موضوع ...
تاریخ ...

با تشکر و احترام
...
...
...

فصل ۱۰

سریها، انتگرالها، و تبدیلات فوریه

سریهای فوریه^۱، که سریهایی با جملات سینوسی و کسینوسی می باشند و در مسائل عملی مهم که با توابع دوره ای سرو کار دارند ظاهر می شوند. این سریها ابزار پر قدرتی برای حل مسائل مختلف، از جمله معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات بامشتقات جزئی می باشند.

در این فصل مفاهیم اساسی، حقایقها، و تکنیکهایی را که در ارتباط با سریهای فوریه هستند مورد بحث قرار می دهیم. مثالهای توضیحی و برخی کاربردهای مهم این سریها در مهندسی را نیز در همین فصل خواهیم آورد. کاربردهای بیشتر در فصل بعد که اختصاص به معادلات بامشتقات جزئی و مسائل بامقدار کرانه ای دارد ارائه خواهند شد.

نظریه سریهای فوریه نسبتاً پیچیده است، ولی کاربرد این سریها بسیار ساده است. مطمئناً سریهای فوریه جامعتر از سریهای تیلور می باشند. زیرا بسیاری از توابع دوره ای ناپیوسته را که از نظر عملی دارای اهمیت هستند و قابل نمایش با سری تیلور نیستند می توان به سری فوریه بسط داد.

سه بخش آخر این فصل اختصاص به انتگرال و تبدیلات فوریه دارد، که انگیزه و تکنیکی برای توابع غیر دوره ای که به ازای هر مقدار x تعریف شده باشند هستند. کاربردهای متناظر آنها در معادلات بامشتقات جزئی در فصل بعد (در بخش ۱۱.۱۴) مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۱- ژان بابتیست ژوزف فوریه JEAN - BAPTISTE JOSEPH FOURIER (۱۷۶۸-۱۸۳۰) فیزیکدان و ریاضیدان فرانسوی، در پاریس زندگی و تدریس می کرد، همراه ناپلئون به مصر رفت و بعدها فرمانده شد. او از سریهای فوریه در اثر اصلی اش :

The'orie analytique de la chaleur (Analytic Theory of Heat, 1922)

که در آن نظریه هدایت گرما را بسط داد (معادله گرما، ر.ک. بخش ۱۱.۵) استفاده نمود. این سریهای جدید به صورت مهمترین ابزار در ریاضی فیزیک درآمدند و نیز اثر قابل ملاحظه ای بر پیشرفت ریاضیات داشته اند؛ ر.ک. مرجع [۹] در ضمیمه ۱.

پیشنیاز این فصل : حساب انتگرال مقدماتی .

بخشهایی که در دوره های فشرده تر قابل حذف است : ۶.۱۰ الی ۱۱.۱۰ .

مراجع : ضمیمه ۱، قسمت C .

جواب مسائل : ضمیمه ۲ .

۱.۱۰ توابع دوره ای . سریهای مثلثاتی

تابع $f(x)$ را دوره ای نامند اگر این تابع به ازای هر عدد حقیقی x تعریف شده باشد و عدد مثبتی مانند p موجود باشد، به طوری که به ازای هر x داشته باشیم

$$f(x + p) = f(x) \tag{1}$$

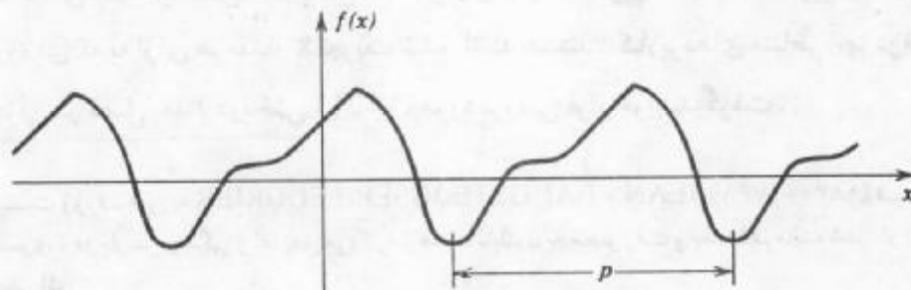
عدد p به دوره $f(x)$ موسوم می باشد. نمودار چنین تابعی از تکرار دوره ای نمودار آن در هر فاصله ای که طول آن p باشد حاصل می شود (شکل ۲۲۹). توابع و پدیده های دوره ای در بیشتر کاربردها ظاهر می شوند.

توابع دوره ای آشنا توابع سینوسی و کسینوسی هستند، و توجه داریم که تابع ثابت $f = c$ نیز دوره ای است، زیرا این تابع به ازای هر p مثبت در (۱) صدق می کند. مثالهایی از توابع غیر دوره ای یا غیر متناوب عبارت اند از x ، x^2 ، x^3 ، e^x و $\ln x$. از (۱) نتیجه می شود

$$f(x + 2p) = f[(x + p) + p] = f(x + p) = f(x)$$

و در حالت کلی، به ازای هر عدد صحیح n و هر عدد حقیقی x داریم

$$f(x + np) = f(x). \tag{2}$$



شکل ۲۲۹. تابع دوره ای

۲- هرگاه تابع متناوب f دارای کوچکترین تناوب $p (> 0)$ باشد، اغلب اوقات این دوره را دوره اولیه $f(x)$ می نامند. به عنوان مثال، دوره اولیه $\sin x$ و $\sin 2x$ به ترتیب 2π و π است. یک تابع دوره ای بدون دوره اولیه تابع ثابت $f =$ است.

بنابراین $2p, 3p, 4p, \dots$ نیز دوره $f(x)$ هستند. علاوه بر آن، هرگاه $f(x)$ و $g(x)$ دارای دوره تناوب p باشند، آنگاه تابع h با ضابطه $h(x) = af(x) + bg(x)$ ، به ازای هر دو عدد ثابت a و b با دوره تناوب p است.

موضوع مورد بحث در چند بخش اول این فصل یافتن نمایش توابع گوناگون با دوره $p = 2\pi$ بر حسب توابع ساده

$$\{ \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \} \quad (3)$$

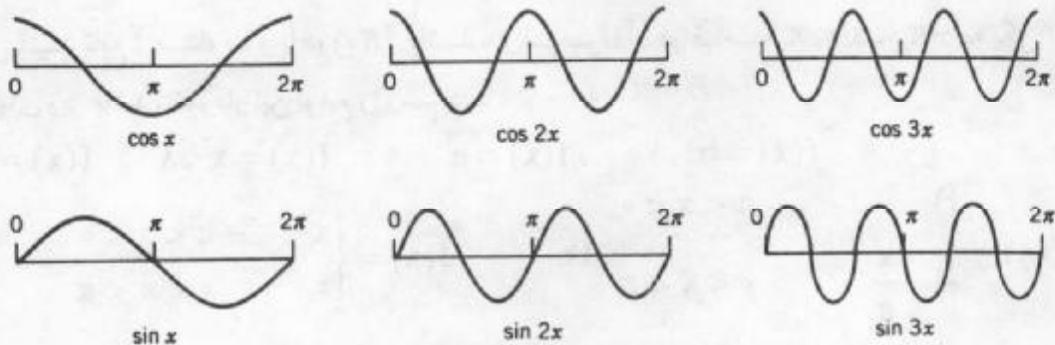
می باشد. که دارای دوره 2π است (ر.ک. شکل ۲۳). سریهایی که در ارتباط با این موضوع مطرح می شوند به صورت

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots \quad (4)$$

هستند، که در آن $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$. ثابتهای حقیقی هستند. چنین سری ای به سری **مثلثاتی** موسوم است، a_n و b_n را ضرایب سری می نامند. با استفاده از نماد مجموع سری \sum ، (۴) را می توان چنین نوشت

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (4)$$

مجموعه ای از توابع (۳) که سری (۴) را می سازند، اغلب اوقات به **دنباله مثلثاتی** موسوم می باشد.



شکل ۲۳. توابع کسینوس و سینوس با دوره 2π

مشاهده می کنیم که هر جمله سری (۴) دارای دوره 2π می باشد. بنابراین هرگاه سری (۴) همگرا باشد، مجموع تابعی با دوره 2π خواهد بود.

توابع دوره ای که در مسائل مهندسی مطرح می شوند اغلب اوقات نسبتاً پیچیده هستند، و بدین جهت نمایش این توابع بر حسب توابع دوره ای ساده مفید است. چنانچه خواهیم دید تقریباً هر تابع

۳- و قراردادن در دو پرانتز؛ از این سری همگرا دوباره یک سری همگرا به همان حاصلجمع قبلی، همانطوری که می توان ثابت کرد، رسید.

دوره ای f با دوره 2π را که در کاربردها - به عنوان مثال، در ارتباط با ارتعاشات - مطرح می شود می توان به صورت یک سری مثلثاتی نمایش داد (که آن را آنگاه سری فوریه تابع f می نامند).

مسائل بخش ۱.۱۰

p ، کوچکترین دوره مثبت (دوره اصلی یا اولیه) توابع زیر را بیابید.

۱. $\sin 2\pi x, \cos 2\pi x, \sin \pi x, \cos \pi x, \sin 2x, \cos 2x, \sin x, \cos x$.

۲. $\sin \frac{2\pi nx}{k}, \cos \frac{2\pi nx}{k}, \sin \frac{2\pi x}{k}, \cos \frac{2\pi x}{k}, \sin nx, \cos nx$.

۳. اگر $f(x)$ و $g(x)$ دارای دوره p باشد، آنگاه نشان دهید که $h = af + bg$ (با ثابت a و b) دارای دوره p است. بنابراین مجموع توابع با دوره p تشکیل یک فضای برداری می دهد.

۴. اگر p یک دوره $f(x)$ باشد، آنگاه نشان دهید که np ، به ازای $n = 2, 3, \dots$ ، نیز یک دوره $f(x)$ است.

۵. نشان دهید که تابع ثابت $f = c$ یک تابع دوره ای به ازای هر عدد مثبت p با دوره p می باشد.

۶. اگر f یک تابع دوره ای از x با دوره p باشد، آنگاه نشان دهید که دوره تابع $f(ax)$ ، $a \neq 0$ از x برابر $\frac{p}{|a|}$ است و همچنین تابع $f(\frac{x}{b})$ ، $b \neq 0$ یک تابع دوره ای از x با دوره bp است. درستی این نتایج را برای $f(x) = \cos x$ به ازای $a = b = 2$ بررسی کنید.

فرض کنید تابع f متناوب و با دوره 2π باشد، و فرمول آن در فاصله $-\pi < x < \pi$ به یکی از صورتهای زیر باشد، نمودار این توابع را رسم کنید.

۷. $f(x) = x$. ۸. $f(x) = x^2$. ۹. $f(x) = e^{|x|}$. ۱۰. $f(x) = |x|$

۱۱. $f(x) = \begin{cases} x^2 & -\pi < x < 0 \\ 0 & 0 < x < \pi \end{cases}$. ۱۲. $f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi < x < 0 \\ -\frac{x}{\pi} & 0 < x < \pi \end{cases}$

۱۳. $f(x) = \begin{cases} \pi + x & -\pi < x < 0 \\ \pi - x & 0 < x < \pi \end{cases}$. ۱۴. $f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi < x < 0 \\ \cos \frac{x}{2} & 0 < x < \pi \end{cases}$

۱۵. $f(x) = \begin{cases} x & -\pi < x < 0 \\ \pi - x & 0 < x < \pi \end{cases}$. ۱۶. $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \sin x & 0 < x < \pi \end{cases}$

انتگرالهای زیر را که در آنها $n = 0, 1, 2, \dots$ محاسبه کنید (اینها مثالهای نوعی از انتگرالهایی هستند که در بخشهای آینده به آنها نیاز داریم).

۱۹. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos nx \, dx$

۱۸. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos nx \, dx$

۱۷. $\int_0^{\pi} \sin nx \, dx$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx \, dx \quad . 22$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx \, dx \quad . 21 \quad \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx \quad . 20$$

$$\int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \quad . 25$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx \quad . 24 \quad \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \quad . 23$$

۲.۱۰ سریهای فوریه

سریهای فوریه ابزاری برای ارائه توابع دوره ای بر حسب توابع کسینوسی و سینوسی می باشند. این سریها، سریهای مثلثاتی هستند (بخش ۱.۱۰) که ضرایب آنها از روی فرمولهای خاص [فرمولهای اویلر] (۶) ارائه شده در ذیل [محاسبه می شوند. هم اکنون در موقعیتی هستیم که به محاسبه ضرایب سری فوریه پرداخته و به ضرایب اویلر برسیم.

فرمولهای اویلر برای ضرایب فوریه

فرض کنید f تابعی دوره ای با دوره 2π باشد که بتوان آن را به صورت سری مثلثاتی

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

نمایش داد؛ یعنی فرض کنیم که سری همگرا و $f(x)$ برابر حاصل جمع آن باشد، می خواهیم ضرایب a_n و b_n برای چنین تابع مفروض f را، در سری (۱) متناظر به آن معین کنیم.

ابتدا a_0 را مشخص می کنیم. با انتگرالگیری از طرفین (۱) از $-\pi$ تا π داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] dx .$$

هرگاه انتگرالگیری جمله به جمله مجاز باشد^۲، به دست می آوریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx) .$$

جمله اول طرف راست برابر $2\pi a_0$ است و با انتگرالگیری مشاهده می کنیم که سایر انتگرالهای طرف راست صفراند. بنابراین نتیجه اول عبارت است از

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx . \quad (2)$$

حال a_1, a_2, \dots را به روشی مشابه مشخص می کنیم. با ضرب (۱) در $\cos mx$ ، که در

آن m عدد صحیح مثبت است، و با انتگرالگیری از $-\pi$ تا π می یابیم

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \cos mx \, dx . \quad (3)$$

^۲ - مثلاً، این موضوع در مورد همگرایی یکنواخت مجاز است (ر.ک. قضیه ۳ واقع در بخش ۱۴.۶).

با انتگرالگیری جمله به جمله طرف راست به صورت زیر در می آید

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx \right]$$

انتگرال اول صفر است. با به کار بردن (۱۱) ضمیمه ۱.۳ به دست می آوریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x \, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x \, dx,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x \, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-m)x \, dx.$$

با انتگرالگیری می توان نشان داد که چهار جمله واقع در طرف راست صفراند، به استثنای جمله آخر

سطر اول، که به ازای $n = m$ برابر π است. نظر به اینکه در (۳) این جمله در a_m ضرب شده است،

طرف راست (۳) برابر πa_m است. بنابراین دومین نتیجه حاصل عبارت است از

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4)$$

درخاتمه ضرایب b_1, b_2, \dots در (۱) را مشخص می کنیم. هرگاه (۱) را در $\sin mx$

ضرب کنیم، که در آن m عدد صحیح مثبت مشخص است، و سپس از $-\pi$ تا π از آن انتگرال بگیریم،

داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \sin mx \, dx. \quad (5)$$

با انتگرالگیری جمله به جمله، طرف راست داریم

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx \right].$$

انتگرال اول صفر است. انتگرال بعدی از نوعی است که پیش از این بررسی شده است، و به ازای همه

مقادیر $n = 1, 2, \dots$ صفر است. برای انتگرال آخر به دست می آوریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x \, dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x \, dx.$$

جمله آخر صفر است. جمله اول طرف راست به ازای $n \neq m$ صفر، و به ازای $n = m$ ، برابر π

است. نظر به اینکه در (۵) این جمله در b_m ضرب شده است، طرف راست (۵) برابر πb_m می باشد،

ازاین رو آخرین نتیجه عبارت است از

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

با جایگزین کردن n به جای m فرمولهای زیر، که به فرمولهای اویلر موسوم می باشند، حاصل

می شوند:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad (\text{الف})$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; n = 1, 2, \dots, \quad (\text{ب}) \quad (۶)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx; n = 1, 2, \dots, \quad (\text{ج})$$

مقادیر مفروض در (۶) به ضرایب فوریه تابع f موسوم اند. سری مثلثاتی

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (۷)$$

با ضرایب داده شده در (۶) را سری فوریه تابع f می نامند (بدون توجه به همگرایی که بعداً بررسی می شود).

مثال ۱. موج مربعی

ضرایب فوریه تابع دوره ای $f(x)$ را که در شکل ۲۳۱ الف داده شده است، بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} -k; & -\pi < x < 0, \\ k; & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

و $f(x + 2\pi) = f(x)$. چنین توابعی به عنوان نیروهای خارجی وارد بر دستگاههای مکانیکی، نیروهای محرکه الکتریکی در مدارهای الکتریکی و غیره مطرح می شوند. مقدار $f(x)$ در یک نقطه منفرد اثری در انتگرال ندارد؛ از این رو می توان $f(x)$ را در نقاط نامعین $x = 0$ و $x = \pm\pi$ نادیده گرفت.

حل. با توجه به (۶ الف) به دست می آوریم $a_0 = 0$. این مقدار را بدون انتگرالگیری نیز می توان به دست آورد. چرا که انتگرال تابع f بین $-\pi$ و π برابر صفر است. بنا به (۶ ب) به دست می آوریم

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-k) \cos nx dx + \int_0^{\pi} k \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-k \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 + k \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right] = 0 \end{aligned}$$

زیرا در $-\pi, 0, \pi$ به ازای هر $n = 1, 2, \dots$ داریم $\sin nx = 0$. مشابهاً از (۶ ج)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-k) \sin nx dx + \int_0^{\pi} k \sin nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[k \frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 - k \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right]. \end{aligned}$$

نظر به اینکه $\cos 0 = 1$ و $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ، می یابیم

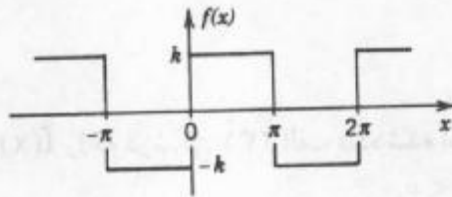
$$b_n = \frac{k}{n\pi} [\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0] = \frac{2k}{n\pi} (1 - \cos n\pi).$$

حال $\cos \pi = -1$ ، $\cos 2\pi = 1$ ، $\cos 3\pi = -1$ و در حالت کلی

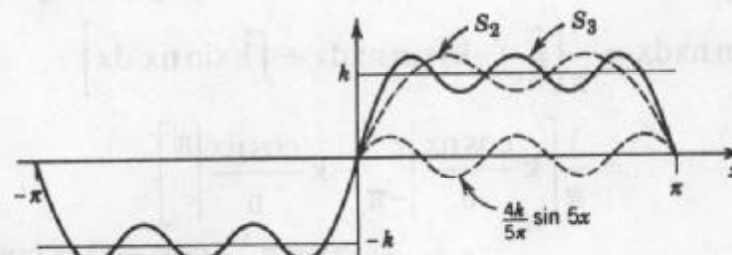
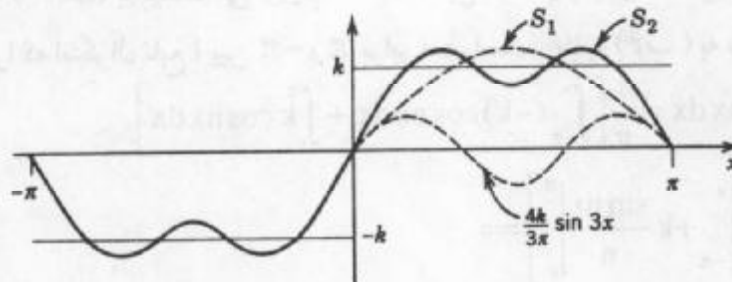
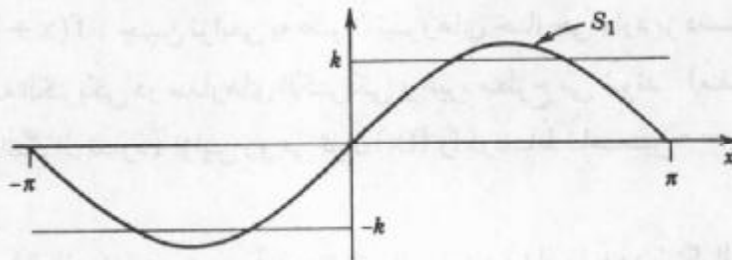
$$\cos n\pi = \begin{cases} -1; & \text{به ازای } n \text{ فرد} \\ 1; & \text{به ازای } n \text{ زوج} \end{cases} \text{ و بنابراین } 1 - \cos n\pi = \begin{cases} 2; & \text{به ازای } n \text{ فرد} \\ 0; & \text{به ازای } n \text{ زوج} \end{cases}$$

از این رو، ضرایب فوریه b_n تابع موردنظر عبارت اند از

$$b_1 = \frac{4k}{\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{4k}{3\pi}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \frac{4k}{5\pi}, \quad \dots$$



الف. تابع مفروض $f(x)$ (موج مربعی متناوب)



ب. سه حاصلجمع جزئی اول سری فوریه متناظر

شکل ۲۳۱. مثال ۱

و از آنجا که a_n ها صفر هستند، سری فوریه $f(x)$ عبارت است از

$$\frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right). \quad (8)$$

حاصل جمع های جزئی عبارت اند از

$$S_1 = \frac{4k}{\pi} \sin x, S_3 = \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x \right), \dots$$

و از نمودارهای شکل ۲۳۱ چنین برمی آید که سری همگرا است و مجموع آن تابع مفروض $f(x)$ است. یادآور می شویم که در $x = \pi$ و $x = 0$ نقاط پیوستگی $f(x)$ ، همه مجموعهای جزئی برابر صفر هستند، یعنی برابر میانگین حسابی مقادیر k و $-k$ می باشد. $f(x)$ تابع است.

به علاوه، با فرض آنکه $f(x)$ مجموع سری است، با قرار دادن $x = \frac{\pi}{2}$ ، می یابیم

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k = \frac{4k}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \right),$$

از این رو داریم

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

این فرمول نتیجه معروفی از لایبنیتز (که در سال ۱۶۷۳ از روی ملاحظات هندسی به دست آورده است) می باشد. این مثال بیان می کند که مقدار سریهای مختلف با جملات ثابت را می توان با محاسبه سری فوریه در نقاط مشخص به دست آورد.

تعامد دنباله های مثلثاتی

دنباله مثلثاتی (۳)، بخش ۱۰.۱

$$\{ \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \}$$

یک دنباله متعامد بر فاصله $-\pi \leq x \leq \pi$ (از این رو یک دنباله متعامد بر هر فاصله به طول 2π است، زیرا 2π طول دوره تناوب آنها است) می باشد. طبق تعریف تعامد دنباله توابع، تعامد دنباله فوق بدان معنی است که انتگرال هر دو عضو مختلف آن در فاصله فوق برابر صفر است، به عبارت دیگر به ازای

هر عدد صحیح m و $n \neq m$ داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0 \quad (m \neq n)$$

و

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0 \quad (m \neq n)$$

و به ازای هر دو عدد صحیح دلخواه m و n (شامل $m = n$) داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0.$$

خاصیت مهم تعامد کلیدی برای دستیابی به فرمولهای اویلر (که در آن این تعامد اثبات شده است) جهت محاسبه ضرایب فوریه است.

همگرایی و حاصلجمع سری فوریه

در سراسر این فصل سری فوریه را از نقطه نظر عملی مورد بررسی قرار می دهیم. در آینده خواهیم دید که کاربرد این سریها بسیار ساده است و حال آنکه بحث در مورد نظریه سریهای فوریه کاری دشوار است. بدین جهت ما خود را درگیر جزئیات مسائل نظری نکرده و بحث مطالب نظری را تنها با ارائه واثبات چند قضیه که در مسائل کاربردی مفید هستند به پایان می بریم.

فرض کنید $f(x)$ یک تابع متناوب با دوره 2π بوده و انتگرالهای (۶) موجود باشند؛ به عنوان مثال $f(x)$ پیوسته یا به طور تکه ای پیوسته (پیوسته به جز برای تعداد متناهی نقاط درفاصله انتگرالگیری) باشد. آنگاه با محاسبه ضرایب فوریه (۶) تابع f و جایگزین کردن آنها در سری فوریه (۷) تابع f به جستجوی شرایطی می پردازیم تا سری حاصل همگرا و در صورت امکان به سمت $f(x)$ همگرا باشد. در هر صورت همگرا بودن سری فوریه به سمت $f(x)$ در اغلب مسائل عملی برقرار است. در چنین مواردی می نویسیم

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

اگر سری فوریه $f(x)$ همگرا ولی به سمت $f(x)$ همگرا نباشد یا اصولاً یک سری واگرا باشد، می نویسند

$$f(x) \approx a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

علامت \approx به معنی تساوی نبوده و دلالت بر آن دارد که ضرایب سری مثلثاتی فوق از روی ضرایب فوریه (۶) محاسبه شده اند و سری حاصل یک سری فوریه $f(x)$ می باشد که ممکن است دارای مقداری غیر برابر با مقدار $f(x)$ داشته یا یک سری واگرا باشد.

دسته توابعی که به صورت سری فوریه قابل نمایش هستند دسته ای وسیع و جالب می باشند. در ذیل شرایطی را برای همگرایی سریهای فوریه ارائه می کنیم.

قضیه ۱ (نمایش با سری فوریه)

هرگاه تابع متناوب $f(x)$ با دوره 2π در فاصله $-\pi \leq x \leq \pi$ پیوسته تکه ای بوده و در هر

۶- تابع f را بر فاصله متناهی $a \leq x \leq b$ پیوسته تکه ای نامند اگر $f(x)$ بر این فاصله تعریف شود و فاصله $[a, b]$ را بتوان به تعدادی متناهی زیر فاصله افراز نمود که به هریک از این زیر فاصله ها $f(x)$ پیوسته و وقتی که x به سمت انتهای هریک از زیر فاصله ها از داخل میل کند دارای حدی متناهی باشد.



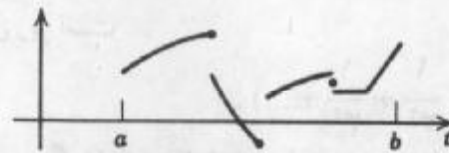
نقطه از فاصله مزبور مشتق چپ و راست داشته باشد، آنگاه سری فوریه (۷) تابع f [با ضرایب (۶)] همگرا است. مجموع آن در هر نقطه، به جز نقطه x_0 که در آن ناپیوسته است برابر $f(x)$ است و در نقطه x_0 مجموع سری برابر میانگین حدهای چپ و راست $f(x)^+$ در این نقطه است.

اثبات همگرایی در قضیه ۱ به ازای تابع پیوسته $f(x)$ که دارای مشتقات جزئی اول و دوم پیوسته است.

با انتگرالگیری جزء به جزء از (۶) می یابیم

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{f(x) \sin nx}{n\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx.$$

جمله اول طرف راست برابر صفر است. با انتگرالگیری مجدد به روش جزء به جزء به دست می آوریم



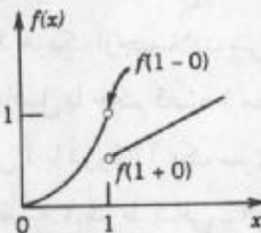
شکل ۸۷. مثالی از یک تابع پیوسته تکه ای $f(t)$

حد چپ $f(x)$ در x_0 به صورت حد تابع f وقتی که x از سمت چپ به x_0 میل می کند تعریف می شود، این حد معمولاً با $f(x_0 - 0)$ نشان داده می شود. بنابراین اگر h با مقادیر مثبت به سمت صفر میل کند $f(x_0 - 0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 - h)$. حد راست را با $f(x_0 + 0)$ نشان می دهند و وقتی که h با مقادیر مثبت به سمت صفر میل کند $f(x_0 + 0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h)$.

مشتقات چپ و راست در نقطه x_0 ، وقتی که h با مقادیر مثبت به سمت صفر میل کند، به ترتیب به صورت حدهای زیر تعریف می شوند:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h} \quad \text{و} \quad \frac{f(x_0 - h) - f(x_0 - 0)}{-h}$$

بدیهی است که اگر $f(x)$ در x_0 پیوسته باشد آنگاه جمله آخر صورت هردو کسر همان $f(x_0)$ می شود.



شکل ۲۳۲. حدهای چپ و راست

به عنوان مثال تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < 1 \\ \frac{x}{2} & ; x > 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ به ترتیب دارای حدود چپ $f(1 - 0) = 1$ و راست

$f(1 + 0) = \frac{1}{2}$ است.

$$a_n = \frac{f'(x) \cos nx}{n^2 \pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx \, dx.$$

به دلیل دوره ای بودن و پیوستگی $f'(x)$ ، جمله اول طرف راست برابر صفر است. به علت پیوسته بودن $f''(x)$ در فاصله $[-\pi, \pi]$ عددی مثل M وجود دارد به طوری که

$$|f''(x)| < M.$$

با توجه به $|\cos nx| \leq 1$ می توان نوشت

$$|a_n| = \frac{1}{n^2 \pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx \, dx \right| < \frac{1}{n^2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} M \, dx = \frac{2M}{n^2}.$$

همین طور، به ازای هر n ، $|b_n| < \frac{2M}{n^2}$. از این رو قدر مطلق هر جمله سری فوریه تابع f حداکثر برابر جمله متناظر در سری همگرایی زیر است

$$|a_n| + \frac{2M}{n^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right).$$

در نتیجه سری فوریه مورد نظر همگرا است و اثبات به پایان می رسد (خوانندگانی که قبلاً با همگرایی یکنوا آشنا شده اند، مشاهده خواهند کرد که بنا بر آزمون ویرشتراس از بخش ۶.۱۴ با مفروضات فوق، سری فوریه به طور یکنوا همگرا است، و بنا به قضیه ۳ از همان بخش برای رسیدن به فرمول (۶) مجاز هستیم که جمله به جمله انتگرال بگیریم).

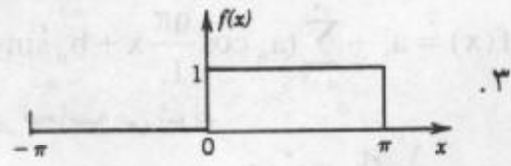
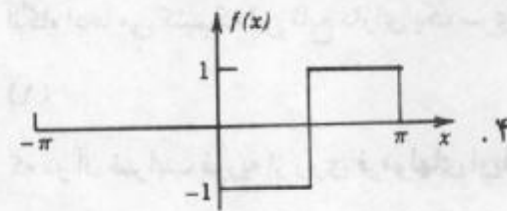
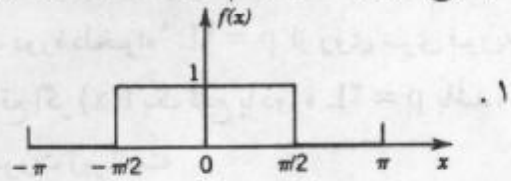
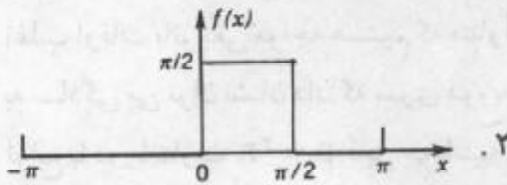
اثبات همگرایی در حالتی که $f(x)$ پیوسته تکه ای باشد و اثبات تحت مفروضات قضیه، سری فوریه (۷) با ضرایب (۶) برای نمایش $f(x)$ را می توان در کتابهای درسی پیشرفته تر، به عنوان مثال در مرجع [C۱۴] یافت.

مثال ۲. همگرایی در نقاطی که تابع دارای پرش است

موج مربعی مثال ۱ یک پرش در $x = 0$ دارد. حد چپ و راست تابع در $x = 0$ به ترتیب k و $-k$ است، میانگین این حدود برابر صفر است (شکل ۲۳۱). سری فوریه (۸) موج مربعی نیز در $x = 0$ صفر است. زیرا به ازای $x = 0$ هر یک از جملات سری صفر می باشد. همین طور می توان در مورد پرشها اظهار نظر نمود. نتایج حاصل با حکم قضیه ۱ مطابقت دارد.

خلاصه: سری فوریه یک تابع مفروض f با دوره 2π یک سری به صورت (۷) است که ضرایب آن از فرمولهای اویلر (۶) به دست می آید. قضیه ۱ شرط کافی برای همگرایی این سری را بیان می کند. به موجب این قضیه سری فوریه مورد نظر در نقاط پیوسته x به سمت $f(x)$ و در نقاط ناپیوسته x به سمت میانگین حدود چپ و راست تابع f یعنی به سمت $\frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\}$ همگرا است.

مجموع جزئی آن را رسم کنید که در آن $f(x)$ برابر است با



$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & ; \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \quad .6$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1 & ; \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad .5$$

$$f(x) = x \quad (0 < x < 2\pi) \quad .8$$

$$f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi) \quad .7$$

$$f(x) = x^2 \quad (0 < x < 2\pi) \quad .10$$

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi < x < \pi) \quad .9$$

$$f(x) = x + |x| \quad (-\pi < x < \pi) \quad .12$$

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi < x < \pi) \quad .11$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; -\pi < x < 0 \\ x & ; 0 < x < \pi \end{cases} \quad .14$$

$$f(x) = \begin{cases} x & ; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & ; \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad .13$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi^2}{4} & ; \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad .16$$

$$f(x) = \begin{cases} x & ; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & ; \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad .15$$

۱۷. درستی قضیه ۱ را در نقاط غیر پیوسته تابع مذکور در مساله ۱ تحقیق کنید.

۱۸. سری فوریه مساله ۳ را از سری فوریه مساله ۱ به دست آورید.

۱۹. نشان دهید که اگر $f(x)$ دارای ضرایب فوریه a_n و b_n و $g(x)$ دارای ضرایب فوریه a_n^* و b_n^* باشند، آنگاه $kf(x) + lg(x)$ دارای ضرایب فوریه $ka_n + la_n^*$ و $kb_n + lb_n^*$ است.

۲۰. با استفاده از مساله ۱۹ و نتایج مسائل ۳ و ۴، سری فوریه مربوط به مساله ۲ را بیابید.

۱۰. ۳. توابع با دوره دلخواه $p = 2L$

توابعی که تاکنون مورد بررسی قرار داده ایم با دوره تناوب 2π بوده اند و حال آنکه در مسائل

$$.8 - \text{یعنی } N = 1, 2, 3 \text{ به ازای } a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

اغلب اوقات باتوابعی مواجه هستیم که متناوب بوده و دوره تناوب آنها برابر 2π نیست. در هر صورت به سادگی می توان نشان داد که سری فوریه توابع با یک دوره دلخواه $p = 2L$ از روی سری فوریه توابع با دوره تناوب $p = 2\pi$ قابل محاسبه است. در واقع اگر $f(x)$ یک تابع با دوره $p = 2L$ باشد، آنگاه ادعا می کنیم که این تابع دارای یک سری فوریه به صورت زیر است

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right) \quad (1)$$

که در آن ضرایب فوریه از روی فرمولهای اویلر به شرح زیر محاسبه می شوند

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad (\text{الف})$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx; \quad n = 1, 2, \dots, \quad (\text{ب}) \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx; \quad n = 1, 2, \dots. \quad (\text{ج})$$

اثبات. چگونگی اثبات از روی مطالب ارائه شده در بخش ۲.۱۰ با یک تغییر متغیر حاصل می شود. فرض $v = \frac{\pi x}{L}$ ، یعنی $x = \frac{Lv}{\pi}$ ، $x = \pm L$ با $v = \pm \pi$ متناظر قرار می گیرد. با این تغییر متغیر تابع f با دوره $2L$ به تابعی از v ، که $g(v)$ نام دارد، با دوره 2π تبدیل می شود. با توجه به (۶) بخش ۲.۱۰ تابع $g(v)$ دارای یک سری فوریه به صورت

$$g(v) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nv + b_n \sin nv) \quad (3)$$

و ضرایب اویلر به شکل

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(v) dv \quad (\text{الف})$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(v) \cos nv dv, \quad (\text{ب}) \quad (4)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(v) \sin nv dv \quad (\text{ج})$$

می باشند. با قراردادن $f(x)$ و $\frac{\pi x}{L}$ به ترتیب به جای $g(v)$ و v در (۳) فرمول (۱) حاصل می شود. همین طور فرمولهای (۲) علاوه بر جایگزینی فوق، با قرار دادن $\frac{\pi}{L} dx$ و $\pm L$ به ترتیب به جای dv و $\pm \pi$ در فرمولهای (۴) حاصل می شوند. بدین طریق اثبات به پایان می رسد.

فاصله انتگرالگیری در (۲) را می توان با هر فاصله به طول $p = 2L$ جایگزین کرد. مثلاً در

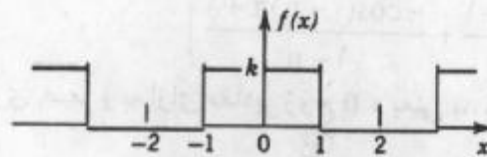
۹- این نماد چون در کاربردها عملی است، L طول یک نخ مرتعش (بخش ۲.۱۱)، یک میله در انتقال گرما (بخش ۵.۱۱) و غیره خواهد بود.

صورت لزوم می توان در فاصله $0 \leq x \leq 2L$ انتگرالگیری کرد.

مثال ۱. موج مربعی دوره ای

سری فوریه موج مربعی زیر را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; -2 < x < -1 \\ k & ; -1 < x < 1 \\ 0 & ; 1 < x < 2 \end{cases} \quad p = 2L = 4, \quad L = 2.$$



شکل ۲۳۳. مثال ۱

نمودار این تابع در شکل ۲۳۳ آمده است.

حل. با توجه به (۲ الف) و (۲ ب) می یابیم

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 k dx = \frac{k}{4},$$

$$a_n = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(x) \cos \frac{n\pi x}{4} dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 k \cos \frac{n\pi x}{4} dx = \frac{2k}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

از این رو به ازای مقادیر زوج n ، $a_n = 0$ ، و به ازای $n = 1, 5, 9, \dots$ داریم $a_n = \frac{2k}{n\pi}$ ، و همین طور به

ازای $n = 3, 7, 11, \dots$ داریم $a_n = -\frac{2k}{n\pi}$.

باتوجه به (۲ ج) به ازای $n = 1, 2, \dots$ داریم $b_n = 0$ و از آنجا سری فوریه تابع موردنظر دارای نمایشی به

صورت زیر است

$$f(x) = \frac{k}{4} + \frac{2k}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{4} x - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{4} x + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi}{4} x - + \dots \right).$$

مثال ۲. یکسو کننده نیم موج

یک ولتاژ سینوسی $E \sin \omega t$ ، که در آن t به معنی زمان است، از یکسو کننده نیم موجی که

قسمت منفی موج را حذف می کند می گذرد (شکل ۲۳۴). سری فوریه تابع متناوب حاصل

$$u(t) = \begin{cases} 0 & ; -L < t < 0 \\ E \sin \omega t & ; 0 < t < L \end{cases}, \quad p = 2L = \frac{2\pi}{\omega}, \quad L = \frac{\pi}{\omega}$$

را بیابید.

حل. نظر به این که به ازای $-L < t < 0$ داریم $u = 0$ ، از (۲ الف)، با جایگذاری t به جای x نتیجه

می شود

$$a_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} E \sin \omega t dt = \frac{E}{\pi}$$

و بنابر (۲) و با استفاده از (۱۱) ضمیمه ۱.۳، به ازای $x = \omega t$ و $y = n\omega t$ می یابیم

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} E \sin \omega t \cos n\omega t dt = \frac{\omega E}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} [\sin(1+n)\omega t + \sin(1-n)\omega t] dt.$$

انتگرال آخر به ازای $n = 1$ مساوی صفر و به ازای $n = 2, 3, \dots$ برابر است با

$$a_n = \frac{\omega E}{2\pi} \left[\frac{-\cos(1+n)\omega t}{(1+n)\omega} - \frac{-\cos(1-n)\omega t}{(1-n)\omega} \right]_0^{\pi/\omega}$$

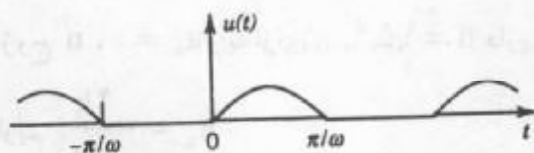
$$= \frac{E}{2\pi} \left(\frac{-\cos(1+n)\pi + 1}{1+n} + \frac{-\cos(1-n)\pi + 1}{1-n} \right).$$

a_n به ازای مقادیر فرد n مساوی صفر و به ازای مقادیر زوج n ، یعنی $n = 2, 4, \dots$ برابر است با

$$a_n = \frac{E}{2\pi} \left(\frac{2}{1+n} + \frac{2}{1-n} \right) = -\frac{2E}{(n-1)(n+1)\pi}$$

به همین ترتیب از (۲) $b_1 = \frac{E}{2}$ و به ازای $n = 2, 3, \dots$ $b_n = 0$. در نتیجه

$$u(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \sin \omega t - \frac{2E}{\pi} \left(\frac{1}{1 \times 3} \cos 2\omega t + \frac{1}{3 \times 5} \cos 4\omega t + \dots \right).$$



شکل ۲۳۴. یکسوکنتله نیم موج

مسائل بخش ۳.۱۰

سری فوریه هریک از توابع زیر را که با دوره تناوب $p = 2L$ می باشند بیابید و نمودار اولین سه مجموع جزئی آنها را رسم کنید.

۱. $f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases}, p = 2L = 2$

۲. $f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 1 \\ 1 & 1 < x < 3 \end{cases}, p = 2L = 4$

۳. $f(x) = \begin{cases} 0 & -2 < x < 0 \\ 2 & 0 < x < 2 \end{cases}, p = 2L = 4$

۴. $f(x) = x(-1 < x < 1), p = 2L = 2$

۵. $f(x) = 1 - x^2(-1 < x < 1), p = 2L = 2$

$$f(x) = 2|x|(-2 < x < 2), \quad p = 2L = 4 \quad .6$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 0 \\ x & 0 < x < 1 \end{cases}, \quad p = 2L = 2 \quad .7$$

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 1-x & 1 < x < 2 \end{cases}, \quad p = 2L = 2 \quad .8$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ 2x & 0 < x < 1 \end{cases}, \quad p = 2L = 2 \quad .9$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + x & -\frac{1}{2} < x < 0 \\ \frac{1}{2} - x & 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}, \quad p = 2L = 1 \quad .10$$

$$f(x) = 3x^2(-1 < x < 1), \quad p = 2L = 2 \quad .11$$

$$f(x) = \frac{\pi x^2}{2}(-1 < x < 1), \quad p = 2L = 2 \quad .12$$

$$f(x) = \pi \sin \pi x(0 < x < 1), \quad p = 2L = 1 \quad .13$$

$$f(x) = \frac{x^2}{4}(0 < x < 2), \quad p = 2L = 2 \quad .14$$

۱۵. سری فوریه مساله ۱ را با توجه به سری فوریه مثال ۱ بخش ۱۰. ۲، مستقیماً به دست آورید.

۱۶. سری فوریه مساله ۱۱ را با توجه به سری فوریه مساله ۹ بخش ۱۰. ۲، مستقیماً به دست آورید.

۱۷. سری فوریه مساله ۳ را با توجه به سری فوریه مثال ۱، مستقیماً به دست آورید.

۱۸. سری فوریه تابع دوره ای که از عبور ولتاژ $v(t) = k \cos 100\pi t$ از یک یکسو کننده نیم موج حاصل می شود را پیدا کنید.

۱۹. نشان دهید که هر جمله سری (۱) دارای دوره $p = 2L$ است.

۲۰. نشان دهید که فاصله انتگرالگیری در (۲) را می توان با هر فاصله به طول $p = 2L$ عوض کرد.

۴.۱۰ توابع زوج و فرد

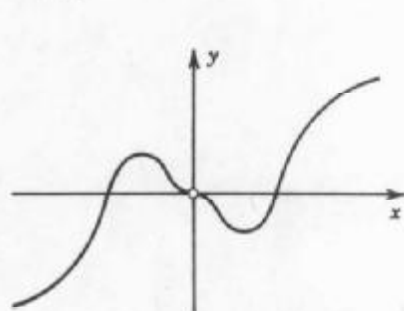
در تعیین ضرایب فوریه یک تابع، اگر تابع فرد یا زوج باشد می توان از محاسبات غیر ضروری اجتناب کرد و سریعتر به نتیجه رسید. مثالی برای تابع فرد، تابع مذکور در مثال ۱ بخش قبل می باشد که چنانچه مشاهده شد تنها دارای جملات سینوسی است.

ابتدا متذکر می شویم که تابع $y = g(x)$ زوج است هرگاه به ازای هر x

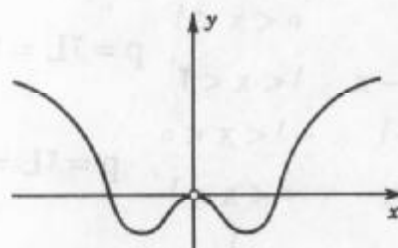
$$g(-x) = g(x).$$

نمودار چنین تابعی نسبت به محور y متقارن است (شکل ۲۳۵). تابع $h(x)$ را فرد نامند، هرگاه به ازای هر x داشته باشیم (ر.ک. شکل ۲۳۶)

$$h(-x) = -h(x).$$



شکل ۲۳۶. تابع فرد



شکل ۲۳۵. تابع زوج

نمودار چنین تابعی نسبت به مبدا مختصات متقارن است. به عنوان مثال $\cos nx$ تابعی زوج و $\sin nx$ تابعی فرد است

اگر g تابعی زوج باشد، آنگاه

$$\int_{-L}^L g(x) dx = 2 \int_0^L g(x) dx \quad (1) \quad (g \text{ زوج})$$

اگر h تابعی فرد باشد، آنگاه

$$\int_{-L}^L h(x) dx = 0 \quad (2) \quad (h \text{ فرد})$$

باتوجه به نمودارهای توابع g و h درستی فرمولهای (۱) و (۲) واضح است، و اثبات غیر نموداری آنها به متعلمین واگذار می شود.

حاصلضرب $q = gh$ از توابع زوج g در توابع فرد h تابعی فرد است. در واقع

$$q(-x) = g(-x)h(-x) = g(x)[-h(x)] = -q(x).$$

از این رو اگر $f(x)$ زوج باشد، آنگاه انتگرالده $f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ در (۲ ج)، بخش ۳.۱۰ فرد است،

و $b_n = 0$. همینطور اگر $f(x)$ فرد باشد، آنگاه انتگرالده $f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ در (۲ ب) از بخش

قبل، فرد است و $a_n = 0$. از آنچه گفته شد و از (۱) قضیه زیر به دست می آید.

قضیه ۱ (سری فوریه توابع زوج و فرد)

سری فوریه تابع زوج f با دوره تناوب $2L$ یک «سری فوریه کسینوسی» است، یعنی

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x \quad (3) \quad (f \text{ زوج})$$

که در آن

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

سری فوریه تابع فرد f با دوره تناوب $2L$ یک «سری فوریه سینوسی» است، یعنی

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (f \text{ فرد}) \quad (5)$$

که در آن

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (6)$$

حالتی از دوره تناوب 2π . سری فوریه یک تابع زوج f با دوره 2π که یک سری فوریه کسینوسی است عبارت است از

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (f \text{ زوج}) \quad (3^*)$$

که در آن

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4^*)$$

و همین طور برای یک تابع فرد f با دوره تناوب 2π که یک سری فوریه سینوسی است داریم

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (f \text{ فرد}) \quad (5^*)$$

که در آن

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6^*)$$

به عنوان مثال، تابع f در مثال ۱، بخش ۲.۱۰، یک تابع فرد است و از این رو با یک سری

فوریه سینوسی قابل نمایش است.

از خاصیت زیر که در مساله ۱۹، بخش ۲.۱۰ به آن اشاره شده بود نیز می توان برای ساده

سازی محاسبات ضرایب فوریه استفاده نمود.

قضیه ۲ (مجموع توابع)

ضرایب فوریه مجموع $f_1 + f_2$ برابر مجموع ضرایب فوریه متناظر توابع f_1 و f_2 است.

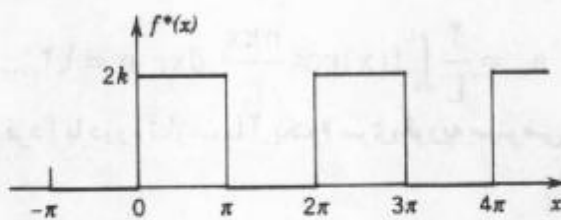
ضرایب فوریه cf ، به ازای هر عدد ثابت c ، برابر ضرایب فوریه تابع f می باشد.

مثال ۱. تپه مستطیلی

تابع f^* در شکل ۲۳۷ از جمع تابع f از مثال ۱، بخش ۲.۱۰ با عدد ثابت k حاصل

می شود. بنابراین، بنابر مثال مذکور و قضیه ۲ می یابیم

$$f^*(x) = k + \frac{2k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right).$$

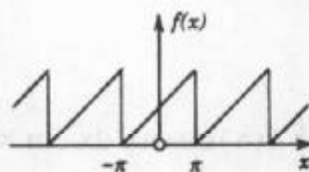


شکل ۲۳۷. مثال ۱

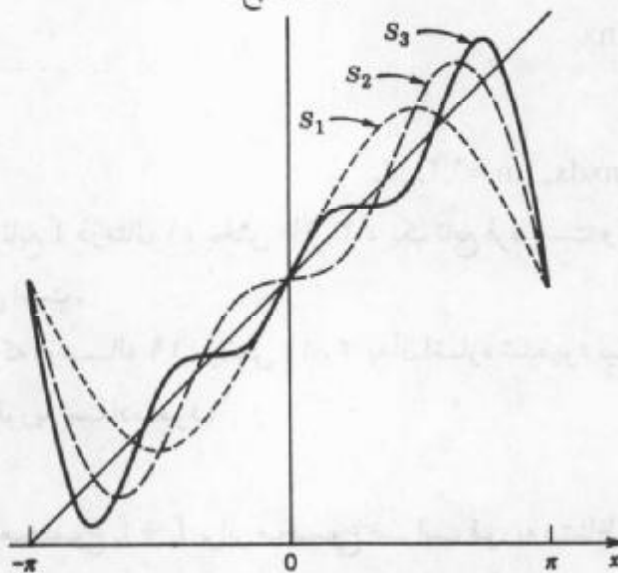
مثال ۲. مجموع دندانه اری

سری فوریه تابع زیر را بیابید (شکل ۲۳۸ الف).

$$f(x) = x + \pi; \quad -\pi < x < \pi \quad \text{و} \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$



الف) تابع f



ب) حاصلجمع های جزئی $S_n(x)$

شکل ۲۳۸. مثال ۲

حل. با فرض $f_1(x) = x$ و $f_2(x) = \pi$ می یابیم $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. ضرایب فوریه $f_1(x)$ ، به غیر از ضریب جمله اول (جمله ثابت) که π برابر است، صفر می باشند. از این رو بنا بر قضیه ۲، ضرایب فوریه a_n ، b_n به جز a_0 که برابر π است، همان ضرایب فوریه $f_1(x)$ است. چون $f_1(x)$ فرد

است، به ازای $n = 1, 2, \dots$ داریم $a_n = 0$ و

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_1(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx.$$

با انتگرالگیری به روش جزء به جزء به دست می آوریم

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \right] = -\frac{2}{n} \cos n\pi.$$

لذا $b_1 = 2$ ، $b_2 = -\frac{2}{2}$ ، $b_3 = \frac{2}{3}$ ، $b_4 = -\frac{2}{4}$ ، $b_5 = \frac{2}{5}$ ، $b_6 = -\frac{2}{6}$ ، ...، نمایش سری فوریه $f(x)$ عبارت است از

$$f(x) = \pi + 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots \right).$$

مسائل بخش ۴.۱۰

کدامیک از توابع زیر فرد، زوج، یا نه فرد و نه زوج هستند؟

۱. $x|x|, \sin x + \cos x, \sinh x, \cosh x, x^t \cos nx, x \cos nx, |x^t|$

۲. $e^{-|x|}, x \cos x, \ln x, x \sin x, \sin^2 x, e^{x^t}, e^x, |x|, x + x^t$

کدامیک از توابع $f(x)$ زیر که متناوب، با دوره تناوب 2π ، فرض می شوند، زوج، فرد یا نه زوج و نه فرد هستند؟

۳. $f(x) = x^t \quad (-\pi < x < \pi)$ ۴. $f(x) = x^t \quad (0 < x < 2\pi)$

۵. $f(x) = x|x| \quad (-\pi < x < \pi)$ ۶. $f(x) = e^{-|x|} \quad (-\pi < x < \pi)$

۷. $f(x) = |\sin x| \quad (-\pi < x < \pi)$ ۸. $f(x) = x^t - x \quad (-\pi < x < \pi)$

۹. $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases}$ ۱۰. $f(x) = \begin{cases} 0 & 1 < x < 2\pi - 1 \\ x & -1 < x < 1 \end{cases}$

۱۱. $f(x) = \begin{cases} \sinh x & -\pi < x < 0 \\ -\cosh x & 0 < x < \pi \end{cases}$ ۱۲. $f(x) = \begin{cases} \cos^2 2x & -\pi < x < 0 \\ \sin^2 2x & 0 < x < \pi \end{cases}$

هریک از توابع زیر را به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد بنویسید:

۱۳. $\frac{1}{1-x}$ ۱۴. $\frac{1}{(1-x)^2}$ ۱۵. e^{kx} ۱۶. $\frac{x}{x+1}$

۱۷. قضیه ۲ را ثابت کنید.

۱۸. توابعی را بیابید که هم زوج و هم فرد باشند.

۱۹. نشان دهید که سری فوریه تابع $f(x) = \sin^2 x$ برابر $\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$ است، یعنی

$\sin^2 x = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$ که یک اتحاد مثلثاتی است و چنین تساوهایی برای سایر اتحادهای

مثلاثی مثلاً برای $\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos^3 x$ نیز برقرار است .
ثابت کنید :

۲۰. حاصلجمع و حاصلضرب دوتابع زوج، تابعی زوج است .
۲۱. حاصلجمع تابعهای فرد، تابعی فرد است . حاصلضرب دوتابع فرد، تابعی زوج است .
۲۲. اگر $f(x)$ فرد باشد، آنگاه $|f(x)|$ و $f^2(x)$ زوج می باشند .
۲۳. اگر $f(x)$ زوج باشد، آنگاه $|f(x)|$ ، $f^2(x)$ ، و $f^2(x)$ زوج می باشند .
۲۴. اگر $g(x)$ به ازای هر x تعریف شده باشد، آنگاه تابع $p(x) = [g(x) + g(-x)]/2$ تابعی زوج است و تابع $q(x) = [g(x) - g(-x)]/2$ تابعی فرد است .
سری فوریه توابع زیر را که دوره تناوب آنها 2π در نظر گرفته شده است تعیین کنید . راهنمایی :
در صورت امکان از خواص زوج یا فرد بودن این توابع استفاده کنید .

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \pi \\ \pi - x & \pi < x < 2\pi \end{cases} \quad . 26 \quad f(x) = \begin{cases} k & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad . 25$$

$$f(x) = \begin{cases} -x & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases} \quad . 28 \quad f(x) = \begin{cases} x & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad . 27$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & -\pi < x < 0 \\ x^2 & 0 < x < \pi \end{cases} \quad . 30 \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad . 29$$

$$f(x) = x(\pi^2 - x^2) \quad (-\pi < x < \pi) \quad . 32 \quad f(x) = \frac{x^2}{4} \quad (-\pi < x < \pi) \quad . 31$$

نشان دهید که

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4} \quad . 33 \quad (\text{از مساله ۲۵ استفاده کنید.})$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \quad . 34 \quad (\text{از مساله ۳۱ استفاده کنید.})$$

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{12} \quad . 35 \quad (\text{از مساله ۳۱ استفاده کنید.})$$

۵. ۱۰ بسطهای نیم دامنه ای

در کاربردهای متنوع نیاز عملی به استفاده سری فوریه برای تابع $f(x)$ ای است که بر یک فاصله مثلاً بر فاصله $0 \leq x \leq L$ همانطور که شکل ۲۳۹ الف نشان می دهد، تعریف می شود. موارد نوعی در فصل بعدی (بخشهای ۱۱. ۳ و ۱۱. ۵) در ارتباط با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مطرح خواهند شد. گسترش $f(x)$ متناوب با دوره تناوب L و در این صورت نمایش تابع گسترش یافته را با یک سری فوریه، که در حالت کلی با جملات کسینوس و سینوس ظاهر می شوند می یابیم. برای این منظور از توابع کمکی می توان استفاده نمود، مثلاً توابعی که از گسترش زوج یا فرد $f(x)$; $0 \leq x \leq L$ حاصل می شوند. تابع

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq L \\ f(-x) & -L \leq x \leq 0 \end{cases}$$

و $f_1(x+2L) = f_1(x)$ ، یک گسترش زوج تابع $f(x)$ است (شکل ۲۳۹ ب). همین طور گسترش فرد تابع را می توان به صورت زیر تعریف نمود

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq L \\ -f(-x) & -L \leq x \leq 0 \end{cases}$$

و $f_2(x+2L) = f_2(x)$ (شکل ۲۳۹ ج). با توجه به قضیه ۱ بخش ۴. ۱۰ تابع $f_1(x)$ دارای سری فوریه کسینوسی و تابع $f_2(x)$ دارای سری فوریه سینوسی است که در فاصله $0 \leq x \leq L$ با $f(x)$ برابر هستند. بدین جهت این سریهای فوریه به بسط نیم دامنه ای تابع $f(x)$; $0 \leq x \leq L$ موسوم می باشند. بنابراین بسط نیم دامنه ای کسینوسی عبارت است از [ر. ک. (۳)، (۴) بخش ۴. ۱۰]

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x \quad (۱)$$

که در آن

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad (۲)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

همین طور بسط نیم دامنه ای سینوسی به صورت زیر است [ر. ک. (۵)، (۶) بخش ۴. ۱۰]

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (۳)$$

که در آن

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx; n = 1, 2, \dots \quad (۴)$$

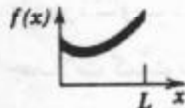
مثال ۱. تپه مثلثی و بسطهای نیم دامنه ای آن

دو بسط نیم دامنه ای تابع زیر را بیابید (شکل ۲۴۰)

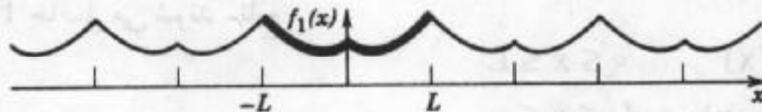


$$f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{L}x & 0 < x < \frac{L}{2}, \\ \frac{2k}{L}(L-x) & \frac{L}{2} < x < L. \end{cases}$$

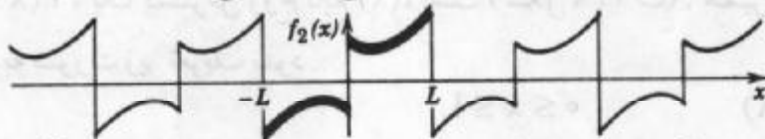
حل. (الف) گسترش زوج دوره ای. با توجه به (۴)، بخش ۴.۱۰ داریم



الف) تابع مفروض $f(x)$



ب) گسترش یافته $f(x)$ به صورت یک تابع متناوب زوج با دوره تناوب $2L$



ج) گسترش یافته $f(x)$ به صورت یک تابع متناوب فرد با دوره تناوب $2L$

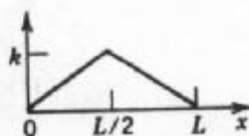
شکل ۲۳۹. الف) تابع مفروض $f(x)$ بر بازه $0 \leq x \leq L$

ب) گسترش زوج در کل «برد» $-L \leq x \leq L$ (منحنی پررنگ) و گسترش دوره ای با دوره تناوب $2L$ بر روی محور x .

ج) گسترش فرد بر $-L \leq x \leq L$ (منحنی پررنگ) و گسترش دوره ای با دوره تناوب $2L$ بر روی محور x .

$$a_0 = \frac{1}{L} \left[\frac{2k}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} x \, dx + \frac{2k}{L} \int_{\frac{L}{2}}^L (L-x) \, dx \right] = \frac{k}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{L} \left[\frac{2k}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} x \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx + \frac{2k}{L} \int_{\frac{L}{2}}^L (L-x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx \right].$$



شکل ۲۴۰. تابع مورد نظر در مثال ۱

حالت با انتگرالگیری جزء به جزء می یابیم

$$\int_0^L x \cos \frac{n\pi}{L} x dx = \frac{Lx}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{L} x \Big|_0^L - \frac{L}{n\pi} \int_0^L \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$= \frac{L^2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2 \pi^2} (\cos \frac{n\pi}{2} - 1).$$

همینطور،

$$\int_0^L (L-x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx = -\frac{L^2}{2n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{L^2}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2}).$$

با جایگزین کردن این نتایج در a_n داریم

$$a_n = \frac{4k}{n^2 \pi^2} (2 \cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1).$$

و از آنجا

$$a_2 = \frac{-16k}{4\pi^2}, \quad a_4 = \frac{-16k}{16\pi^2}, \quad a_6 = \frac{-16k}{36\pi^2}, \dots$$

و به ازای $n = 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$ می یابیم $a_n = 0$. بنابراین اولین بسط نیم دامنه ای تابع f عبارت است از

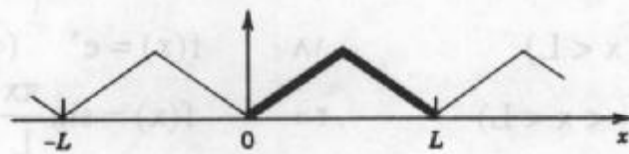
$$f(x) = \frac{k}{2} - \frac{16k}{\pi^2} \left(\frac{1}{2^2} \cos \frac{2\pi}{L} x + \frac{1}{4^2} \cos \frac{4\pi}{L} x + \dots \right).$$

در واقع این سری کسینوسی سری فوریه ای است که از تابع گسترش یافته زوج $f(x)$ با دوره تناوب $2L$ حاصل شده است (شکل ۲۴۱ الف). بدیهی است که این سری در فاصله $0 < x < L$ با $f(x)$ برابر است. (ب) گسترش فرد دوره ای. به طریق مشابه از (۶)، بخش ۱۰.۴ می توان نشان داد که

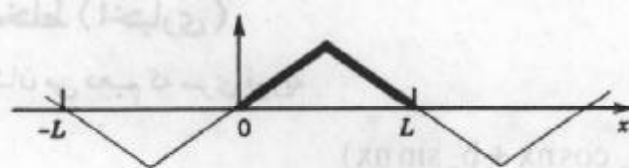
$$b_n = \frac{4k}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}. \tag{5}$$

از این رو بسط نیم دامنه ای تابع f به صورت زیر است

$$f(x) = \frac{4k}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \sin \frac{\pi}{L} x - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi}{L} x + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi}{L} x - \dots \right).$$



الف) گسترش زوج



ب) گسترش فرد

شکل ۲۴۱: گسترشهای دوره ای $f(x)$ در مثال ۱

این سری بیانگر گسترش فرد دوره ای $f(x)$ با دوره تناوب $2L$ می باشد که در شکل ۲۴۱ ب نشان داده شده است.

مسائل بخش ۵.۱۰

هریک از توابع f زیر را با سری سینوسی فوریه نمایش دهید و نمودار گسترش دوره ای متناظر با آن را رسم کنید.

$$f(x) = kx \quad (0 < x < L) \quad .۲ \qquad f(x) = k \quad (0 < x < L) \quad .۱$$

$$f(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad (0 < x < L) \quad .۴ \qquad f(x) = x^2 \quad (0 < x < L) \quad .۳$$

$$f(x) = x^2 \quad (0 < x < L) \quad .۶ \qquad f(x) = L - x \quad (0 < x < L) \quad .۵$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \quad .۸ \qquad f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \quad .۷$$

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & \frac{L}{2} < x < L \end{cases} \quad .۱۰ \qquad f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{L}{2} \\ L - x & \frac{L}{2} < x < L \end{cases} \quad .۹$$

توابع f زیر را با سری کسینوسی فوریه نمایش داده و نمودار گسترش دوره ای متناظر با $f(x)$ را رسم کنید.

$$f(x) = 1 \quad (0 < x < L) \quad .۱۲ \qquad f(x) = x \quad (0 < x < L) \quad .۱۱$$

$$f(x) = \sin^2 3x \quad (0 < x < \pi) \quad .۱۴ \qquad f(x) = x^2 \quad (0 < x < L) \quad .۱۳$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{L}{2} \\ 0 & \frac{L}{2} < x < L \end{cases} \quad .۱۶ \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{L}{2} \\ 1 & \frac{L}{2} < x < L \end{cases} \quad .۱۵$$

$$f(x) = x^2 \quad (0 < x < L) \quad .۱۸ \qquad f(x) = e^x \quad (0 < x < L) \quad .۱۷$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi x}{2L} \quad (0 < x < L) \quad .۲۰ \qquad f(x) = \sin \frac{\pi x}{L} \quad (0 < x < L) \quad .۱۹$$

۶.۱۰ سری فوریه مختلط (اختیاری)

در این بخش نشان می دهیم که سری فوریه

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

با انجام برخی محاسبات ساده قابل بیان به صورت مختلط می باشد (مثال ۱ در ذیل ملاحظه کنید). این

عمل به کمک فرمول اویلر (۸)، بخش ۳.۲

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

و مزدوج آن

$$e^{-it} = \cos t - i \sin t$$

صورت می گیرد. با قرار دادن $t = nx$ داریم

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx, \tag{۲}$$

$$e^{-inx} = \cos nx - i \sin nx. \tag{۳}$$

با جمع دو رابطه و تقسیم بر ۲ داریم

$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}). \tag{۴}$$

با تفریق دو رابطه و تقسیم بر $2i$ و با توجه به تساوی $\frac{1}{i} = -i$ می یابیم

$$\sin nx = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}) = -\frac{i}{2}(e^{inx} - e^{-inx}). \tag{۵}$$

با توجه به (۴) و (۵) می توان نوشت

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{1}{2} a_n (e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{1}{2i} b_n (e^{inx} - e^{-inx})$$

$$= \frac{1}{2} (a_n - i b_n) e^{inx} + \frac{1}{2} (a_n + i b_n) e^{-inx}.$$

و از آنجا، (۱) به صورت زیر درمی آید

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + k_n e^{-inx}) \tag{۶}$$

که در آن $c_0 = a_0$ ، $c_n = \frac{1}{2}(a_n - i b_n)$ ، و $k_n = \frac{1}{2}(a_n + i b_n)$ ، و از آنجا بنا به (۶)، بخش

۲.۱۰ داریم

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - i b_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \tag{۷}$$

$n = 1, 2, \dots$

$$k_n = \frac{1}{2}(a_n + i b_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx,$$

با فرض $k_n = c_{-n}$ فرمولهای (۶) و (۷) به صورت زیر خلاصه می شوند

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{۸}$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$

این سری را صورت مختلط سری فوریه یا به اختصار سری فوریه مختلط و c_n ها را ضرایب مختلط فوریه $f(x)$ می نامند.

باتوجه به مفروضات (۷) می یابیم $a_n = c_n + c_{-n}$ و $b_n = i(c_n - c_{-n})$.

فرمولهای (۸) را به طور مستقل نیز می توان به دست آورد. با ضرب سری (۸) در e^{-imx} ، به ازای یک عدد صحیح m و با انتگرالگیری از آن در فاصله $-\pi$ تا π می یابیم

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx.$$

به ازای $n \neq m$ داریم

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx &= \frac{1}{i(n-m)} (e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}) \\ &= \frac{1}{i(n-m)} 2i \sin(n-m)\pi = 0, \end{aligned}$$

و به ازای $n = m$ می یابیم

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{0i} dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi.$$

با توجه به نتایج فوق داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx} dx = 2\pi c_m. \tag{9}$$

با جایگزین کردن n بجای m در تساوی فوق فرمول ضرایب سری فوریه مذکور در (۸) حاصل می شود.

بهمین طریق یک تابع با دوره تناوب $2L$ دارای یک سری فوریه مختلط به صورت زیر است:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}}; \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx. \tag{10}$$

مثال ۱. سری فوریه مختلط

سری فوریه مختلط تابع $f(x) = e^x$; $-\pi < x < \pi$ و $f(x+2\pi) = f(x)$ را بیابید و با توجه به آن سری فوریه حقیقی آن را محاسبه کنید (کلمه حقیقی در مقابل کلمه مختلط است و منظور سری فوریه (۱) با ضرایب (۲) از بخش ۳.۱۰ به ازای $f(x) = e^x$ و $L = \pi$ است).

حل. باتوجه به (۸) داریم

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-in} e^{(1-in)x} \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

با ضرب صورت و مخرج در $1+in$ و با استفاده از $e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$ می یابیم

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \frac{1+in}{1+n^2} (-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi}).$$

با توجه به اینکه $2 \sinh \pi = e^{\pi} - e^{-\pi}$ ، صورت مختلط سری فوریه تابع مزبور عبارت است از

$$e^x = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2} e^{inx} \quad (-\pi < x < \pi). \quad (11)$$

باتوجه به اینکه $a_0 = c_0$ ، $a_n = c_n + c_{-n}$ ، $b_n = i(c_n - c_{-n})$ و $c_n = \frac{\sinh \pi}{\pi} \frac{1+in}{1+n^2} (-1)^n$ می یابیم

$$a_0 = c_0 = \frac{\sinh \pi}{\pi}$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{\gamma \sinh \pi (-1)^n}{\pi (1+n^2)}$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = -\frac{\gamma n \sinh \pi (-1)^n}{\pi (1+n^2)}$$

باتوجه به نتایج حاصل داریم

$$e^x = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{\gamma \sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos nx - n \sin nx) \quad (12)$$

$$= \frac{\gamma \sinh \pi}{\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1+1^2} (\cos x - \sin x) + \frac{1}{1+2^2} (\cos 2x - 2 \sin 2x) - + \dots \right]$$

که در آن $-\pi < x < \pi$.

مسائل بخش ۱۰. ۶

۱. نشان دهید که ضرایب مختلط فوریه یک تابع فرد، موهومی محض و یک تابع زوج، حقیقی است.
۲. نشان دهید که $a_0 = c_0$ ، و به ازای هر $n = 1, 2, \dots$ ، $a_n = c_n + c_{-n}$ و $b_n = i(c_n - c_{-n})$.
۳. سری فوریه مختلط تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} -1; & -\pi < x < 0, \\ 1; & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

۴. از روی سری فوریه مختلط تابع مذکور در مساله ۳ صورت حقیقی آن را بیابید.
۵. سری فوریه مختلط تابع f با ضابطه $-\pi < x < \pi$ ؛ $f(x) = x$ را بیابید.
۶. سری فوریه مختلط تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} 0; & -\pi < x < 0, \\ 1; & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

۷. سری فوریه مختلط تابع f با ضابطه $0 < x < 2\pi$ ؛ $f(x) = x$ را بیابید.

۸. سری فوریه مختلط تابع مذکور در مساله ۷ را به صورت یک سری فوریه حقیقی بنویسید.

۹. سری فوریه مختلط $f(x) = x^7$; $-\pi < x < \pi$ را بیابید.

۱۰. سری فوریه مختلط تابع مذکور در مساله ۹ را به صورت حقیقی تبدیل کنید.

۷.۱۰ نوسانهای واداشته

سریهای فوریه در ارتباط با معادلات دیفرانسیل دارای کاربردهای مهمی هستند. برای تفهیم این موضوع، یک مساله علمی مهم را که شامل یک معادله دیفرانسیل است مورد بحث و بررسی قرار می دهیم (کاربردهای بیشتر در معادلات دیفرانسیل بامشتقات جزئی که در فصل ۱۱ مطرح می شوند مورد بررسی قرار می گیرند).

در بخش ۱۱.۲ آموختیم که نوسانهای واداشته جسمی به جرم m که متصل به یک فنر به مدول k است در معادله

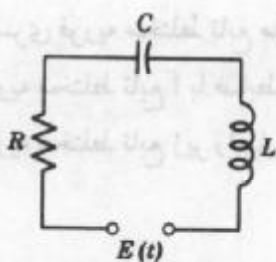
$$my'' + cy' + ky = r(t) \tag{1}$$

صدق می کند، که در آن $y = y(t)$ تغییر مکان از وضعیت تعادل، c ثابت میرایی، و $r(t)$ یک نیروی خارجی وابسته به زمان t است. شکل ۲۴۲ یک مدل را نشان می دهد و شکل ۲۴۳ یک آنالوگ الکتریکی است که یک مدار RLC را بیان می کند و بوسیله رابطه

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t) \tag{1*}$$

بیان می شود (بخش ۱۲.۲ را ملاحظه کنید).

(۱) را در نظر می گیریم. هرگاه نیروی خارجی $r(t)$ تابعی سینوسی یا کسینوسی بوده و ثابت میرایی موجود باشد ($c > 0$)، در آن صورت جواب حالت پایدار نمایش نوسان همسازی است که فرکانس آن برابر فرکانس $r(t)$ است. در هر صورت اگر $r(t)$ تابعی سینوسی یا کسینوسی محض نبوده بلکه تابع دوره ای دلخواه باشد، آنگاه جواب



شکل ۲۴۳. میستم آنالوگ الکتریکی مربوط به شکل ۲۴۲ (مدار - RLC)



شکل ۲۴۲. میستم ارتعاشی مورد بررسی

حالت پایدار ترکیبی از نوسانهای همساز است که فرکانس آنها $r(t)$ و مضارب صحیح $r(t)$ است. و اگر فرکانس یکی از این نوسانها نزدیک به فرکانس حالت تشدید دستگاه ارتعاشی باشد (بخش ۱۱.۲ را ملاحظه کنید)، آنگاه چنین نوسانی بخش عمده پاسخ دستگاه به نیروی خارجی است. البته این نتیجه برای ناظری که با نظریه ریاضی مربوطه که در مطالعه دستگاههای ارتعاش و حالت تشدید بسیار مهم است آشنا نیست شگفت انگیز است. مطالب فوق را با آوردن مثالی روشن می کنیم.

مثال ۱. نوسانهای واداشته حاصل از نیروی موثر دوره ای غیر سینوسی

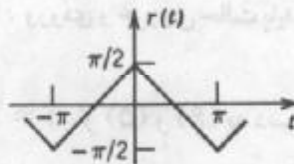
اگر در (۱)، $m = ۱$ (گرم)، $c = ۰/۰۲$ (گرم بر ثانیه) و $k = ۲۵$ (گرم بر ثانیه)، آنگاه (۱) به صورت زیر درمی آید

$$y'' + ۰/۰۲y' + ۲۵y = r(t) \tag{۲}$$

که در آن $r(t)$ با (گرم در سانتیمتر بر مربع ثانیه) اندازه گیری شده است. هرگاه (شکل ۲۴۴)

$$r(t) = \begin{cases} t + \frac{\pi}{۲} & -\pi < t < ۰ \\ -t + \frac{\pi}{۲} & ۰ < t < \pi, \end{cases} \quad r(t + ۲\pi) = r(t)$$

آنگاه جواب حالت پایدار $y(t)$ را بیابید.



شکل ۲۴۴. نیروی مربوط به مثال ۱

حل. هرگاه $r(t)$ را با سری فوری به صورت زیر نمایش دهیم

$$r(t) = \frac{۴}{\pi} \left(\cos t + \frac{۱}{۳} \cos ۳t + \frac{۱}{۵} \cos ۵t + \dots \right) \tag{۳}$$

(در جواب مساله ۱۱ از بخش ۱۰ با $L = \pi$ و از $\frac{\pi}{۲}$ کم کنیم) آنگاه معادله دیفرانسیل

$$y'' + ۰/۰۲y' + ۲۵y = \frac{۴}{n^2\pi} \cos nt \quad (n = ۱, ۳, \dots) \tag{۴}$$

را که طرف راست آن تنها شامل یک جمله از سری (۳) است در نظر می گیریم. در بخش ۱۱.۲ مشاهده کردیم که $y_n(t)$ ، جواب حالت پایدار (۴) به صورت زیر می باشد

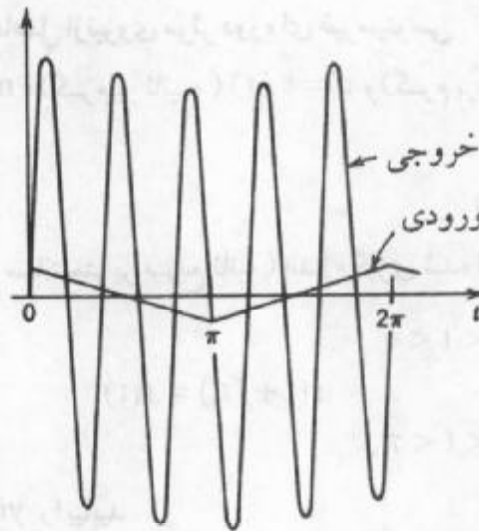
$$y_n = A_n \cos nt + B_n \sin nt. \tag{۵}$$

با جایگزین کردن این y_n در (۴) می یابیم

$$A_n = \frac{4(25 - n^2)}{n^2 \pi D}, \quad B_n = \frac{0.08}{n \pi D} \quad (6)$$

که در آن $D = (25 - n^2)^2 + (0.02n)^2$. چون معادله دیفرانسیل (۲) خطی است، انتظار می رود جواب حالت پایدار به صورت

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + \dots \quad (7)$$



شکل ۲۴۵ . ورودی و خروجی حالت پایدار مربوط به مثال ۱

باشد که در آن y_n به ازای $n = 1, 2, \dots$ از (۵) و (۶) به دست می آید. در واقع درستی این ادعا به سادگی از جایگزینی (۷) در (۲) و استفاده از سری فوریه $\Gamma(t)$ نتیجه می شود، مشروط بر اینکه مشتقگیری جمله به جمله از (۷) مجاز باشد (متعلمینی که قبلاً با مفهوم همگرایی یکنواخت [بخش ۶.۱۴] آشنا شده اند می توانند ثابت کنند که از (۷) می توان جمله به جمله مشتق گرفت).

از (۶) دامنه (۵) به صورت زیر محاسبه می شود:

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = \frac{4}{n^2 \pi \sqrt{D}}$$

برخی از مقادیر عددی آنها عبارت اند از

$$C_1 = 0.0530$$

$$C_2 = 0.0088$$

$$C_3 = 0.5100$$

$$C_4 = 0.0011$$

$$C_5 = 0.0003$$

به ازای $n = 5$ مقدار D بسیار کوچک است، مخرج C_5 کوچک است، و C_5 خیلی بزرگ است، به

طوری که y تنها جمله قابل ملاحظه در (۷) است. این نشان می دهد که حرکت حالت پایدار تقریباً نوسانی همساز با فرکانسی پنج برابر نیروی موثر است (شکل ۲۴۵).

کاربردهای بیشتر سریهای فوریه در ارتباط با سیستمهای ارتعاشی، انتقال گرما، و مسائل دیگر در فصل ۱۱ ارائه می شوند.

مسائل بخش ۷.۱۰

۱. چه تغییری در ضریب C_n ، مثال ۱ ایجاد می شود (همچنین به شکل ارتعاشی دستگاه) اگر مقدار ثابت فنر به ۹ تغییر یابد؟ اگر یک فنر محکمتر با $k = 49$ به کار بریم چه اتفاقی می افتد؟ آیا میرایی افزایش می یابد؟

جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' + \omega^2 y = r(t)$ را طوری بیابید که در آن

$$r(t) = \cos \alpha t + \cos \beta t \quad (\omega^2 \neq \alpha^2, \beta^2) \quad .2$$

$$r(t) = \sin t, \quad \omega = 0/5, 0/7, 0/9, 1/1, 1/5, 2/0, 10/0 \quad .3$$

$$r(t) = \sin t + \frac{1}{9} \sin 3t + \frac{1}{25} \sin 5t, \quad \omega = 0/5, 0/9, 1/1, 2, 2/9, 3/1, 4, 4/9, 5/1, 6, 8 \quad .4$$

$$r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt, \quad |\omega| \neq 1, 2, \dots, N \quad .5$$

$$r(t) = \frac{\pi}{4} |\sin t|; \quad -\pi < t < \pi; r(t + 2\pi) = r(t), \quad |\omega| \neq 0, 2, 4, \dots \quad .6$$

$$r(t) = \begin{cases} t + \pi; & -\pi < t < 0 \\ -t + \pi; & 0 < t < \pi \end{cases}; r(t + 2\pi) = r(t), \quad |\omega| \neq 0, 1, 3, \dots \quad .7$$

$$r(t) = \begin{cases} t; & -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ \pi - t; & \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2} \end{cases}; r(t + 2\pi) = r(t), |\omega| \neq 1, 3, 5, \dots \quad .8$$

نوسان حالت پایدار متناظر با $y'' + cy' + y = r(t)$ را طوری بیابید که در آن $c > 0$ و

$$r(t) = \sin 3t. \quad .11 \quad r(t) = \sum_{n=1}^N b_n \sin nt. \quad .10 \quad r(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cos nt. \quad .9$$

$$r(t) = \begin{cases} \frac{\pi t}{4} & -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi(\pi - t)}{4} & \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2} \end{cases}; r(t + 2\pi) = r(t) \quad .12$$

$$r(t) = \frac{t}{12} (\pi^2 - t^2); \quad -\pi < t < \pi, r(t + 2\pi) = r(t) \quad .13$$

۱۴. (مدار RLC) $I(t)$ ، جریان حالت پایدار در یک مدار RLC شکل ۲۴۳ با فرض $R = 100$

اهم، $L = 10$ هانری، $C = 10^{-2}$ فاراد،

$$E(t) = \begin{cases} 100(\pi t + t^2) & -\pi < t < 0 \\ 100(\pi t - t^2) & 0 < t < \pi \end{cases}; E(t + 2\pi) = E(t),$$

را محاسبه کنید. برای حل مساله به شرح زیر عمل کنید: سری فوریه $E(t)$ را بیابید. با توجه به آن $I(t)$ به صورت سری مثلثاتی درمی آید. فرمولهای عمومی ضرایب این سری را تعیین کنید. مقادیر عددی چند ضریب اول را محاسبه کنید. نمودار مجموع چند جمله اول سری مزبور را رسم کنید.

۱۵. مساله ۱۴ را برای مدار RLC با

$$E(t) = 200(\pi^2 - t^2)t; -\pi < t < \pi$$

و $E(t + 2\pi) = E(t)$ حل کنید.

۸.۱۰ تقریب بوسیله چند جمله ایهای مثلثاتی

همانطور که قبلاً متذکر شدیم یکی از کاربردهای وسیع سریهای فوریه در معادلات دیفرانسیل است. یکی دیگر از کاربردهای جالب سریهای فوریه محاسبه تقریبی یک تابع دلخواه به کمک توابع ساده تر است. این موضوع به نظریه تقریب موسوم است. در ذیل به بررسی آن می پردازیم.

فرض کنید $f(x)$ تابع مفروضی با دوره تناوب 2π باشد که بتوان آن را به صورت یک سری فوریه نمایش داد. آنگاه مجموع جزئی N ام سری فوریه تقریبی برای تابع f است، یعنی

$$f(x) \approx a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (1)$$

طبیعی است پرسیم که آیا (۱) «بهترین» تقریبی برای تابع f توسط یک چند جمله ای مثلثاتی با درجه N (ثابت)، یعنی یافتن یک تابع به صورت

$$F(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) \quad (2)$$

است که به ازای آن «خطای» تقریب می نیمم باشد.

نخست به تعریف E ، خطای مورد نظر، می پردازیم. در این راستا تعریفی را برمی گزینیم که میزان نزدیکی مقادیر توابع f و F را بر فاصله $-\pi \leq x \leq \pi$ بنحو شایسته ای نشان دهد. واضح است که ماکزیمم $|f - F|$ برای این منظور مناسب نیست، در شکل ۲۴۶ نشان داده شده که تابع F تقریب خوبی برای تابع f است، ولی مقدار $|f - F|$ در نقاط نزدیک به x_0 بزرگ است. بدینجهت ما مقدار خطا را مطابق فرمول زیر تعریف می کنیم

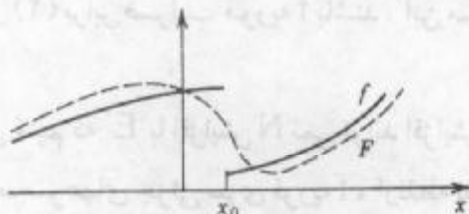
$$E = \int_{-\pi}^{\pi} (f - F)^2 dx. \quad (3)$$

واضح است که $E \geq 0$. E را خطای مربعی تام F نسبت به تابع f بر فاصله $-\pi \leq x \leq \pi$ می نامیم.

به ازای N ثابت و مشخص، ضرایب را در (۲) طوری تعیین می‌کنیم که E می‌نیم شود.

نظر به اینکه $(f - F)^2 = f^2 - 2fF + F^2$ ، داریم

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} fF dx + \int_{-\pi}^{\pi} F^2 dx \quad (4)$$



شکل ۲۴۶. خطای تقریب

با جایگزین کردن (۲) در انتگرال آخر و محاسبه انتگرالهای حاصل (مانند بخش ۲.۱۰) مشاهده می‌کنیم که همه جملات $\cos^2 nx$ و $\sin^2 nx$ به ازای $n \geq 1$ دارای انتگرال π و همه جملات به صورت $(\cos nx)(\sin mx)$ دارای انتگرال صفر است. لذا می‌یابیم

$$\int_{-\pi}^{\pi} F^2 dx = \pi(2\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \dots + \alpha_N^2 + \beta_1^2 + \dots + \beta_N^2).$$

با قراردادن (۲) در انتگرال دوم (۴)، مشاهده می‌کنیم که انتگرالهای حاصل همان انتگرالهای فرمول اوپلر (۶)، بخش ۲.۱۰ هستند و به دست می‌آوریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} fF dx = 2(2\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_N a_N + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_N b_N).$$

و از آنجا (۴) به صورت زیر درمی‌آید

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - 2\pi \left[2\alpha_0 a_0 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n a_n + \beta_n b_n) \right] + \pi \left[2\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \right]. \quad (5)$$

اگر در (۲) فرض کنیم $\alpha_n = a_n$ و $\beta_n = b_n$ ، آنگاه باتوجه به (۵) مشاهده می‌کنیم که خطای مربعی متناظر با چنین انتخابی برای ضرایب F عبارت است از

$$E^* = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - \pi \left[2\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right]. \quad (6)$$

با کم کردن (۶) از (۵) می‌یابیم

$$E - E^* = \pi \left\{ 2(\alpha_0 - a_0)^2 + \sum_{n=1}^N [(\alpha_n - a_n)^2 + (\beta_n - b_n)^2] \right\}.$$

نظر به اینکه هر جمله در طرف راست مربع یک عدد حقیقی و در نتیجه نامنفی است. بنابراین

$E - E^* \geq 0$ از این رو $E \geq E^*$ و اگر فقط اگر $\alpha_0 = a_0, \dots, \beta_N = b_N$

نتایج حاصل را در قضیه ذیل ارائه می کنیم .

قضیه ۱ (خطای مربعی می نیمم)

خطای مربعی تام F در (۲) با N ثابت نسبت به تابع f بر فاصله $-\pi \leq x \leq \pi$ می نیمم است اگر و فقط اگر ضرایب F در (۲) برابر ضرایب فوریه f باشند . این مقدار می نیمم از (۶) به دست می آید .

بنابر (۶) مشاهده می کنیم که E^* با افزایش N نمی تواند افزایش یابد . بلکه ممکن است نزول کند . بنابراین ، با افزایش N ، مجموعه های جزئی سری فوریه f ، از نقطه نظر خطای مربعی تقریبهای بهتر و بهتری از $f(x)$ به دست می دهند .

نظر به اینکه $E^* \geq 0$ و (۶) به ازای هر N برقرار است از (۶) نامساوی مهمی موسوم به

نامساوی بسل^{۱۰}

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \quad (7)$$

در صورت موجود بودن انتگرال طرف راست برای ضرایب فوریه f حاصل می شود .

می توان نشان داد که (مرجع [C۱۴]) را ملاحظه کنید) به ازای هر تابع f ، قضیه پارسوال ،

یعنی فرمول (۷) با علامت تساوی به جای نابیشتری برقرار است ، یعنی همواره داریم

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx. \quad (8)$$

این فرمول به فرمول «اتحاد پارسوال»^{۱۱} موسوم است .

مثال ۱ . خطای مربعی برای موج دندانه اری

خطای مربعی تام تابع F به ازای $N = 3$ برای تابع f با ضابطه

$$f(x) = x + \pi \quad (-\pi < x < \pi)$$

بر فاصله $-\pi \leq x \leq \pi$ موسوم به تابع دندانه اری را بیابید (شکل ۲۳۸ الف ، بخش ۴.۱۰ را ملاحظه کنید) .

حل . باتوجه به مثال ۲ ، بخش ۴.۱۰ داریم $F(x) = \pi + 2 \sin x - \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x$. بخش ۴.۱۰ با توجه به آن و (۶) می یابیم

۱۰- به زیر نویس ۱۲ در بخش ۵.۵ ملاحظه کنید .

۱۱- مارک آنتون پارسوال MARC ANTOINE PARSEVAL (۱۷۵۵-۱۸۳۶) ، یک ریاضیدان فرانسوی است . یک تعبیر فیزیکی از این اتحاد در بخش بعد ارائه می شود .

$$E^* = \int_{-\pi}^{\pi} (x + \pi)^2 dx - \pi \left[2\pi^2 + 2^2 + 1^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right]$$

از این رو

$$E^* = \frac{1}{3} \pi^3 - \pi \left(2\pi^2 + \frac{49}{9} \right) \approx 3/567.$$

$F = S_p$ در شکل ۲۳۸ ب نشان داده شده است، و گرچه $|f(x) - F(x)|$ در نقاط $x = \pm\pi$ بزرگ است (چرا بزرگ؟)، که در آن f ناپیوسته است، F تقریباً با f بر کل فاصله برابر است. در انتهای بحث سریهای فوریه، مجدداً تأکید بر تمرین هرچه بیشتر روی این سریها به منظور استفاده هرچه بیشتر از آنها در مطالب کاربردی داریم. در چهار بخش آینده این فصل به چگونگی تعمیم ایده ها و تکنیکهای سریهای فوریه برای توابع غیر متناوب می پردازیم.

مسائل بخش ۸.۱۰

۱- فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} -1; & -\pi < x < 0 \\ 1; & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

آنگاه تابع F مذکور در (۲) را طوری بیابید که خطای مربعی تام (۳) می نیمم باشد.

۲. خطای مربعی می نیمم مساله ۱ را به ازای $N = 1, 3, 5, 7$ محاسبه کنید. کوچکترین N ای را بیابید که به ازای آن $E^* \leq 0.2$.

۳. نشان دهید که خطای مربعی می نیمم (۶) تابعی نزولی یکنوا از N است.

در هر یک از مسائل زیر، تابع F به صورت (۲) را طوری بیابید که خطای مربعی تام E بر فاصله $-\pi \leq x \leq \pi$ می نیمم باشد و این مقدار می نیمم را به ازای $N = 1, 2, \dots, 5$ و $-\pi < x < \pi$ محاسبه کنید.

۴. $f(x) = x$

۵. $f(x) = |x|$

۶. $f(x) = x^2$

۷. $f(x) = \frac{x(\pi^2 - x^2)}{12}$

۸. $f(x) = \begin{cases} x; & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0; & -\pi < x < \pi \end{cases}$ سایر جاهای

۹. $f(x) = \begin{cases} -\pi - x; & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ x; & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x; & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

۱۰. سرعت کاهش خطای مربعی برای تابع ناپیوسته در مساله ۵ و تابع پیوسته در مساله ۷ را با هم

مقایسه کرده و روی آن بحث کنید.
با استفاده از اتحاد پاراسوال نشان دهید که

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{96} \quad (11) \text{ (از مساله 27، بخش 10.4 استفاده کنید.)}$$

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{8} \quad (12) \text{ (از مساله 5، بخش 10.2 استفاده کنید.)}$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{90} \quad (13) \text{ (از مساله 9، بخش 10.2 استفاده کنید.)}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, dx = \frac{3\pi}{4} \quad (14) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, dx = \frac{3\pi}{4} \quad (15)$$

9.10 انتگرالهای فوریه

سریهای فوریه ابزار پر قدرتی برای حل مسائل گوناگونی است که شامل توابع دوره ای هستند. در بخش 7.10 با چند مورد آنها مواجه شدیم و در فصل 11 کاربردهای بیشتری از آنها را ملاحظه خواهیم کرد. نظر به اینکه حل تعداد زیادی از مسائل عملی به توابع غیر دوره ای برمی گردند، بنابراین بجا است که مطالب ارائه شده در مورد سریهای فوریه را طوری تعمیم دهیم که توابع غیر دوره ای را نیز در بر بگیرند. در مثال 1 سری فوریه یک تابع خاص $f_L(x)$ با دوره تناوب $2L$ را در نظر می گیریم. در این سری فوریه فرض می کنیم $L \rightarrow \infty$ و وضعیت سری را با چنین فرضی بررسی می کنیم. سپس یک تابع دلخواه $f_L(x)$ با دوره $2L$ را در نظر می گیریم و در آن فرض می کنیم $L \rightarrow \infty$ و با توجه به آن به انتگرالی دست می یابیم که اساسی ترین نتایج این بخش است (انتگرال ارائه شده در قضیه 1 در این بخش)

مثال 1. موج مربعی

موج مربعی دوره ای $f_L(x)$ با دوره تناوب $2L > 2$ که به صورت زیر تعریف می شود را

در نظر می گیریم

$$f_L(x) = \begin{cases} 0; & -L < x < -1 \\ 1; & -1 < x < 1 \\ 0; & 1 < x < L. \end{cases}$$

قسمت چپ شکل 247 نشان دهنده تابع $f_L(x)$ به ازای $2L = 4, 8, 16$ است. هرگاه $L \rightarrow \infty$ ،

آنگاه به تابع غیر دوره ای زیر می رسیم

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x) = \begin{cases} 1; & -1 < x < 1, \\ 0; & \text{جاهای دیگر.} \end{cases}$$

هم اکنون ضرایب فوریه تابع f_L را وقتی L افزایش می یابد بررسی می کنیم. هرگاه f_L تابعی

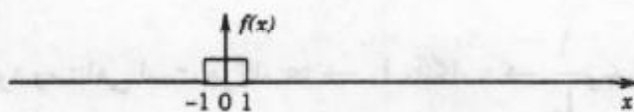
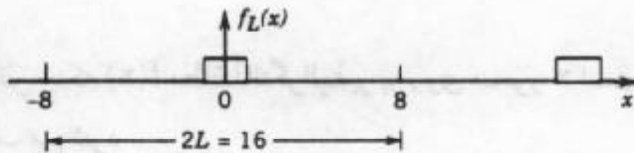
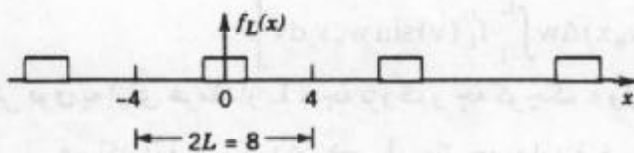
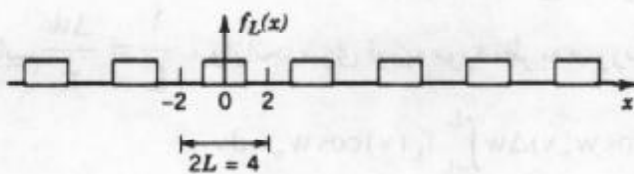
زوج باشد، آنگاه به ازای هر n ، $b_n = 0$. با توجه به فرمولهای اویلر (۲)، بخش ۱۰.۳ می یابیم

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx = \frac{1}{L}, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)}{\frac{n\pi}{L}}$$

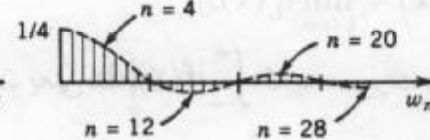
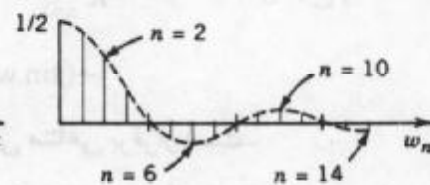
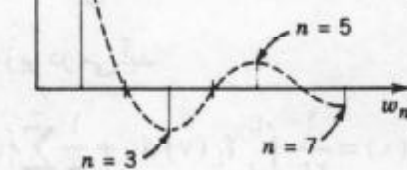
این دنباله از ضرایب سری فوریه طیف دامنه f_L نامیده می شود زیرا $|a_n|$ ماکزیمم دامنه موج این شکل ۲۴۷ طیف برای دوره های $2L = 4, 8, 16$ را نشان می دهد. مشاهده

می کنیم که برای افزایش L دامنه بیشتر متمرکز روی محور w_n می شود جایی که $w_n = \frac{n\pi}{L}$ است. درحقیقت به ازای $2L = 4, 8, 16$ مقادیر ۳، ۷ و ۱ را داریم که مقدار دامنه درنیم موج تابع $\frac{2 \sin w_n}{L w_n}$ است (روی نمودار به صورت خط چین ترسیم شده است). ازاین رو به ازای $2L = 2^k$ مقدار $2^{k-1} - 1$ دامنه برای نیم موج است، این دامنه ها درمقادیر مثبت w_n متمرکز می شوند (و به صفر نزول می کند).

شکل موج $f_L(x)$



طیف دامنه $a_n(w_n)$



شکل ۲۴۷. شکل موج و طیف دامنه در مثال ۱

هم اکنون یک تابع دوره ای دلخواه f_L با دوره تناوب $2L$ را که سری فوریه آن به صورت زیر می باشد، در نظر می گیریم

$$f_L(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos w_n x + b_n \sin w_n x) , \quad w_n = \frac{n\pi}{L} .$$

وضعیت این سری فوریه را وقتی که $L \rightarrow \infty$ مورد بررسی قرار می دهیم . از نتیجه فوق با محاسبات انجام شده در مثال ۱ چنین استنباط می شود که اگر $L \rightarrow \infty$ ما باید انتظار یک انتگرال (به جای یک سری) شامل $\cos wx$ و $\sin wx$ ، که در آن w یک عدد غیر صحیح بوده و کلیه مقادیر را اختیار می کند داشته باشیم ، شکل این انتگرال را نیز می خواهیم بیابیم .

هرگاه متغیر انتگرالگیری در a_n و b_n فرمولهای اویلر (۲) ، بخش ۱۰۳ را به v نمایش داده و سپس آنها را در سری فوریه $f_L(x)$ جایگزین کنیم داریم

$$f_L(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(v) dv + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos w_n x \int_{-L}^L f_L(v) \cos w_n v dv + \sin w_n x \int_{-L}^L f_L(v) \sin w_n v dv \right] .$$

با قرار دادن

$$\Delta w = w_{n+1} - w_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$$

می یابیم $\frac{1}{L} = \frac{\Delta w}{\pi}$ ، و از آنجا سری فوریه مورد نظر به صورت زیر در می آید

$$f_L(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(v) dv + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\cos w_n x) \Delta w \int_{-L}^L f_L(v) \cos w_n v dv + (\sin w_n x) \Delta w \int_{-L}^L f_L(v) \sin w_n v dv \right] . \quad (1)$$

نمایش فوق به ازای هر مقدار L ، چه بزرگ و چه کوچک ، ولی متناهی برقرار است .

هم اکنون فرض کنید $L \rightarrow \infty$. باتوجه به این فرض تابع غیر دوره ای زیر حاصل می شود

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x) .$$

با فرض اینکه $f(x)$ مطلقاً انتگرالپذیر بر روی محور x است ، یعنی $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ که به صورت زیر تعریف می شود

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 |f(x)| dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b |f(x)| dx \quad (2)$$

موجود و متناهی است هرگاه $L \rightarrow \infty$ ، آنگاه $\frac{1}{L} \rightarrow 0$ و جمله اول (۱) به سمت صفر میل می کند و

باتوجه به اینکه $\Delta w = \frac{\pi}{L} \rightarrow 0$ سری فوریه (۱) به صورت انتگرال توسعی (ناسره) از صفر تا ∞ در

می آید، به عبارت دیگر با فرض $L \rightarrow \infty$ می یابیم

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\cos wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv dv + \sin wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv dv \right] dw. \quad (3)$$

با قرار دادن

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv dv, \quad B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv dv \quad (4)$$

می توان نوشت

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] dw. \quad (5)$$

نمایش فوق به انتگرال فوریه تابع مطلقاً انتگرالپذیر $f(x)$ موسوم است. واضح است که نقطه نظرات ما از حدس به بیان (۵) رسیده و هیچ استدلالی بر آن استوار نیست. حد سری (۱) وقتی Δw به سمت صفر میل کند، تعریف انتگرال (۳) نیست. شرایط کافی برای برقراری (۵) در قضیه زیر ارائه شده است.

قضیه ۱ (انتگرال فوریه)

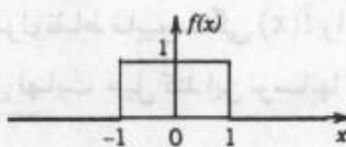
هرگاه $f(x)$ در هر فاصله متناهی به طور تکه ای پیوسته (بخش ۱۰۶ را مشاهده کنید) و در هر نقطه دارای مشتق راست و مشتق چپ باشد (بخش ۲۰۱۰ را ملاحظه کنید) و انتگرال (۲) موجود باشد، آنگاه $f(x)$ را می توان به صورت یک انتگرال فوریه نمایش داد. در نقطه ای که $f(x)$ ناپیوسته باشد مقدار انتگرال فوریه برابر میانگین حدود چپ و راست $f(x)$ در آن نقطه است (۲۰۱۰ را ملاحظه کنید). (اثبات آن را در مرجع [C۱۴]، ضمیمه ۱ مشاهده کنید).

کاربرد اساسی انتگرال فوریه در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است که در بخش ۱۴۰۱۱ ارائه می شوند و از انتگرال فوریه برای محاسبه برخی انتگرالهای توسعه همانند آنچه در مثال زیر ارائه می شود استفاده می کنند.

مثال ۲. تپه منفرد، انتگرال سینوسی

نمایش انتگرال فوریه تابع زیر را بیابید (شکل ۲۴۸)

$$f(x) = \begin{cases} 1; & |x| < 1, \\ 0; & |x| > 1. \end{cases}$$



شکل ۲۴۸. مثال ۲

حل . باتوجه به (۴) می یابیم

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv \, dv = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos wv \, dv = \frac{\sin wv}{\pi w} \Big|_{-1}^1 = \frac{2 \sin w}{\pi w},$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sin wv \, dv = 0.$$

وازانجا (۵) به صورت زیر درمی آید

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} \, dw. \tag{۶}$$

میانگین حدود چپ و راست $f(x)$ در $x = 1$ برابر $\frac{1}{4}(1+0)$ یا مساوی $\frac{1}{4}$ است.

بنابراین از (۶) و قضیه ۱ جواب موردنظر حاصل می شود

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} \, dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2}; & 0 \leq x < 1, \\ \frac{\pi}{4}; & x = 1, \\ 0; & x > 1. \end{cases} \tag{۷^*}$$

یادآوری می کنیم که این انتگرال به عامل ناپیوسته دیریکله^{۱۲} موسوم است. حالت $x = 0$ را که مورد علاقه ویژه ما است بررسی می کنیم. وقتی $x = 0$ ، آنگاه

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin w}{w} \, dw = \frac{\pi}{2}. \tag{۷}$$

مشاهده می کنیم که این انتگرال حد انتگرال سینوسی

$$Si(z) = \int_0^z \frac{\sin w}{w} \, dw \tag{۸}$$

وقتی که $z \rightarrow \infty$ (z حقیقی است) ، می باشد. نمودار $Si(z)$ در شکل ۲۴۹ ترسیم شده است.

در مورد یک سری فوریه، نمودارهای مجموعهای جزئی، منحنیهای تقریبی منحنی تابع دوره ای نمایش داده شده با سری فوریه هستند. همین طور، در مورد انتگرال فوریه (۵)، تقریبا از تعویض ∞ با عدد a به دست می آید. بنابراین انتگرال

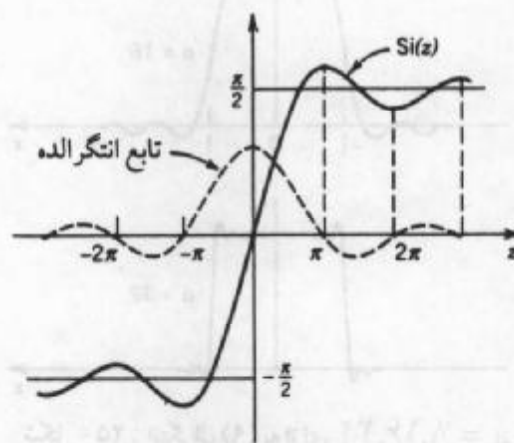
$$\int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w} \, dw \tag{۹}$$

تقریبی برای انتگرال (۶) و در نتیجه تقریبی برای $f(x)$ است (شکل ۲۵۰ را ملاحظه کنید).

شکل ۲۵۰ نوسانات در حول نقاط ناپیوستگی $f(x)$ را نشان می دهد. ممکن است انتظار داشته باشیم وقتی که a به سمت بی نهایت میل کند این نوسانها از بین بروند، ولی چنین نیست، با

افزایش a ، اینها هرچه بیشتر به نقاط $x = \pm 1$ نزدیک می شوند. این رفتار غیرمنتظره، که درارتباط با سری فوریه نیز اتفاق می افتد، به پدیده گیبس^{۱۳} موسوم است. این مطلب را می توان با نمایش (۹) برحسب انتگرال سینوسی به صورت زیر بیان نمود. با استفاده از (۱۱) از ضمیمه ۱.۳ داریم

$$\frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w} dw = \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\sin(w + wx)}{w} dw + \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\sin(w - wx)}{w} dw .$$



شکل ۲۴۹. انتگرال سینوسی، $Si(x)$

با قرار دادن $w + wx = t$ درانتگرال اول می یابیم $\frac{1}{w} dw = \frac{1}{t} dt$ و $0 \leq w \leq a$ با $0 \leq t \leq (x+1)a$ متناظر قرار می گیرد. همین طور درانتگرال آخر تغییر متغیر $w - wx = -t$ داده و با این تغییر متغیر می یابیم $\frac{1}{w} dw = -\frac{1}{t} dt$ و فاصله $0 \leq w \leq a$ به فاصله $0 \leq t \leq (x-1)a$ تبدیل می شود. نظر به اینکه $\sin(-t) = -\sin t$ می یابیم

$$\frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w} dw = \frac{1}{\pi} \int_0^{(x+1)a} \frac{\sin t}{t} dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{(x-1)a} \frac{\sin t}{t} dt.$$

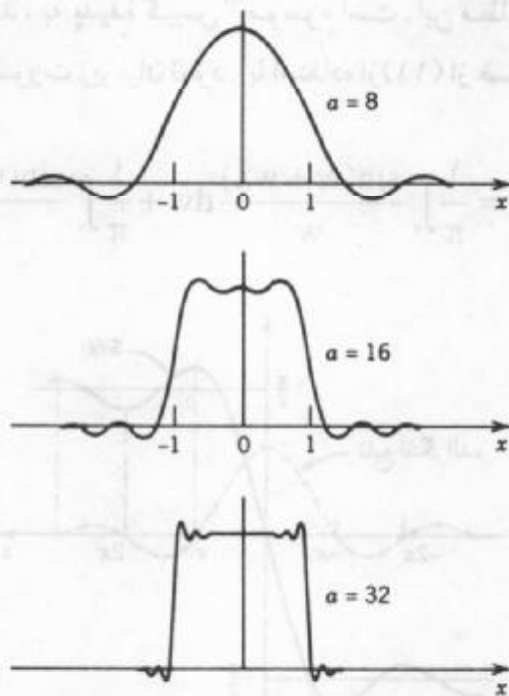
باتوجه به تساوی فوق و (۸) انتگرال مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{\pi} Si(a(x+1)) - \frac{1}{\pi} Si(a(x-1)),$$

ونوسانهای واقع در شکل ۲۵۰ از نوسانهای شکل ۲۴۹ حاصل می شوند. افزایش a می تواند باعث

۱۳- جوسایا ویلارد گیبس JOSIAH WILLARD GIBBS (۱۸۳۹ - ۱۹۰۳)، ریاضیدان آمریکایی است. او پروفیسور ریاضی - فیزیک در دانشگاه Yale از سال ۱۸۷۱ بود یکی از بنیانگذاران حساب برداری، ترمودینامیک ریاضی، و مکانیکهای آماری می باشد. آثارش سبب توسعه ریاضی فیزیک گردید.

تبدیل مقیاسی بر محور شده و سبب انتقال نوسانات گردد.



شکل ۲۵: انتگرال (۹) به ازای $a = ۸, ۱۶, ۳۲$

انتگرالهای سینوسی و کسینوسی فوریه

برای هر تابع زوج یا فرد انتگرال فوریه ساده تر می شود. دقیقاً در این حالت نیز مانند سریهای فوریه (بخش ۴.۱۰) محاسبات کاهش می یابد. در واقع اگر $f(x)$ یک تابع زوج باشد، آنگاه $B(w) = 0$ و در (۴) داریم

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \cos wv \, dv \quad (10)$$

و انتگرال فوریه (۵) به صورت زیر درمی آید که به انتگرال کسینوسی فوریه موسوم است.

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(w) \cos wx \, dw \quad (f \text{ زوج}) \quad (11)$$

به طریق مشابه، اگر $f(x)$ فرد باشد، آنگاه $A(w) = 0$ و در (۴) داریم

$$B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \sin wv \, dv, \quad (12)$$

و انتگرال فوریه (۵) به شکل زیر درمی آید که آن را انتگرال سینوسی فوریه می نامند

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(w) \sin wx \, dw \quad (f \text{ فرد}) \quad (13)$$

کار را با ارائه مثال زیر روشن می کنیم.

مثال ۳. انتگرالهای لاپلاس

انتگرالهای سینوسی و کسینوسی فوری تابع f با ضابطه

$$f(x) = e^{-kx} \quad (x > 0, k > 0)$$

را بیابید.

حل. (الف) باتوجه به (۱۰) داریم

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-kv} \cos wv \, dv.$$

حال با انتگرالگیری جزء به جزء می یابیم

$$\int e^{-kv} \cos wv \, dv = -\frac{k}{k^2 + w^2} e^{-kv} \left(-\frac{w}{k} \sin wv + \cos wv \right).$$

هرگاه $v = 0$ ، آنگاه عبارت طرف راست مساوی $-\frac{k}{k^2 + w^2}$ است و هنگامی v به سمت بی نهایت میل می کند، عبارت فوق به علت وجود عامل نمایی به سمت صفر میل می کند. بنابراین

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \frac{k}{(k^2 + w^2)}. \quad (14)$$

با جایگزینی آن در (۱۱) نمایش انتگرال کسینوسی فوری

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos wx}{k^2 + w^2} \, dw \quad (x > 0, k > 0)$$

حاصل می شود. باتوجه به این نمایش مشاهده می کنیم که

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos wx}{k^2 + w^2} \, dw = \frac{\pi}{2k} e^{-kx} \quad (x > 0, k > 0). \quad (15)$$

(ب) به همین طریق، بنا به (۱۲) داریم

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-kv} \sin wv \, dv.$$

با انتگرالگیری به روش جزء به جزء می یابیم

$$\int e^{-kv} \sin wv \, dv = -\frac{w}{k^2 + w^2} e^{-kv} \left(\frac{k}{w} \sin wv + \cos wv \right).$$

این مقدار به ازای $v = 0$ برابر $-\frac{w}{k^2 + w^2}$ و وقتی که $v \rightarrow \infty$ برابر صفر است. بنابراین

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \frac{w}{(k^2 + w^2)}. \quad (16)$$

با جایگزینی (۱۶) در (۱۳) می یابیم

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{w \sin wx}{k^2 + w^2} \, dw.$$

باتوجه به آن مشاهده می کنیم که

$$\int_0^{\infty} \frac{w \sin wx}{k^2 + w^2} dw = \frac{\pi}{2} e^{-kx} \quad (x > 0, k > 0). \quad (17)$$

انتگرالهای (۱۵) و (۱۷) به انتگرالهای لاپلاس موسوم اند.

مسائل بخش ۹.۱۰

با استفاده از انتگرال فوریه نشان دهید که

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos xw + w \sin xw}{1 + w^2} dw = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & ; x = 0 \\ \pi e^{-x} & ; x > 0 \end{cases} \quad [\text{از (۵) استفاده کنید}] . 1$$

$$\int_0^{\infty} \frac{w^2 \sin xw}{w^2 + 4} dw = \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos x ; x > 0 \quad [\text{از (۱۳) استفاده کنید}] . 2$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos xw}{1 + w^2} dw = \frac{\pi}{2} e^{-x} ; x > 0 \quad [\text{از (۱۱) استفاده کنید}] . 3$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin w \cos xw}{w} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & ; 0 \leq x < 1 \\ \frac{\pi}{4} & ; x = 1 \\ 0 & ; x > 1 \end{cases} \quad [\text{از (۱۱) استفاده کنید}] . 4$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \pi w \sin xw}{1 - w^2} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x & ; 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & ; x > \pi \end{cases} \quad [\text{از (۱۳) استفاده کنید}] . 5$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \pi w}{w} \sin xw dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & ; 0 < x < \pi \\ 0 & ; x > \pi \end{cases} \quad [\text{از (۱۳) استفاده کنید}] . 6$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi w}{2}\right) \cos xw}{1 - w^2} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos x & ; |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & ; |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad [\text{از (۱۱) استفاده کنید}] . 7$$

هریک از توابع f زیر را به صورت (۱۱) نمایش دهید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; x > 1 \end{cases}$$

$$.9 \quad f(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; x > 1 \end{cases} . 8$$

$$f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x < a \\ 0 & ; x > a \end{cases} \quad . ۱۱ \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & ; 0 < x < 1 \\ 1 - \frac{x}{2} & ; 1 < x < 2 \\ 0 & ; x > 2 \end{cases} . ۱۰$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad [ر.ك. (۱۵)] \quad . ۱۳ \quad f(x) = \begin{cases} a^2 - x^2 & ; 0 < x < a \\ 0 & ; x > a \end{cases} . ۱۲$$

$$f(x) = e^{-x} + e^{-2x} (x > 0) . ۱۴$$

اگر $f(x)$ دارای نمایشی به صورت (۱۱) باشد، آنگاه نشان دهید که

$$f(ax) = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} A\left(\frac{w}{a}\right) \cos xw dw \quad (a > 0) . ۱۵$$

$$xf(x) = \int_0^{\infty} B^*(w) \sin xw dw ; B^* = -\frac{dA}{dw}, \quad . ۱۶ \quad A \text{ مطابق (۱۰) تعریف می شود}$$

$$x^2 f(x) = \int_0^{\infty} A^*(w) \cos xw dw ; A^* = -\frac{d^2 A}{dw^2} . ۱۷$$

. ۱۸ . با استفاده از فرمول مساله ۱۷ در نتیجه مساله ۸، به حل مساله ۹ پردازید.

. ۱۹ . درستی فرمول مذکور در مساله ۱۶ را به ازای

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 < x < a \\ 0 & ; x > a \end{cases}$$

تحقیق کنید.

. ۲۰ . نشان دهید که $f(x) = 1 (0 < x < \infty)$ نمی تواند دارای انتگرال فوریه باشد.

۱۰.۱۰ . تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه

یک تبدیل انتگرالی، یک تبدیل از حاصلضرب چند تابع مفروض در چند تابع مفروض دیگر است که بستگی به متغیرهای متفاوت دارند و به شکل یک انتگرال ظاهر می شود. این تبدیلات ابزاری برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات بامشتقات جزئی، و معادلات انتگرالی هستند. تبدیل لاپلاس ارائه شده در فصل ۶ یک نوع تبدیل انتگرالی است که دارای کاربردهای متنوع در مسائلی مهندسی است. تبدیلات فوریه نیز همانند تبدیلات لاپلاس، از نقطه نظر کاربردی، از اهمیت خاصی برخوردار هستند. چنانچه مشاهده خواهیم کرد تبدیلات فوریه را می توان از روی نمایشهای انتگرالیهای فوریه مذکور در بخش ۱۰.۹ به دست آورد. در این بخش به بررسی دینوع تبدیل فوریه می پردازیم. این تبدیلات، تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه هستند که بامقادیر حقیقی می باشند. در بخش بعد

به معرفی تبدیل فوریه ای می پردازیم که با مقادیر مختلط است .

تبدیلات کسینوسی فوریه

هرگاه $f(x)$ تابعی زوج باشد، آنگاه انتگرال فوریه آن به صورت زیر است

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(w) \cos wx \, dw \quad (۱ \text{ الف})$$

که در آن

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \cos wv \, dv \quad (۱ \text{ ب})$$

[(۱۰) و (۱۱) ، بخش ۹ . ۱۰ را ملاحظه کنید]. با فرض $A(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \hat{f}_c(w)$ ، که در آن c اندیس به معنی «کسینوس» است . با این فرض و قرار دادن x به جای v ، (۱ ب) به صورت زیر در می آید

$$\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos wx \, dx \quad (۲)$$

و از (۱ الف) نتیجه می شود

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}_c(w) \cos wx \, dw. \quad (۳)$$

توجه! در (۲) ما نسبت به x و در (۳) ما نسبت به w انتگرال می گیریم . فرمول (۲) از تابع $f(x)$ تابع جدید $\hat{f}_c(w)$ را به دست می دهد که به تبدیل کسینوسی فوریه $f(x)$ موسوم است . در فرمول (۳) که $f(x)$ از روی $\hat{f}_c(w)$ حاصل می شود تبدیل کسینوسی فوریه معکوس $\hat{f}_c(w)$ نامیده می شود .

فرآیند به دست آوردن تبدیل \hat{f}_c از تابع مفروض f را تبدیل کسینوسی فوریه یا روش تبدیل

کسینوسی فوریه می نامند .

تبدیلات سینوسی فوریه

به طریق مشابه، برای یک تابع فرد f ، انتگرال فوریه یک انتگرال سینوسی فوریه است [(۱۲)

و (۱۳) ، بخش ۹ . ۱۰ را مشاهده کنید]

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(w) \sin wx \, dw \quad (۴ \text{ الف})$$

که در آن

$$B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \sin wv \, dv. \quad (۴ \text{ ب})$$

هم اکنون با فرض $B(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \hat{f}_s(w)$ ، که در آن s در اندیس به «سینوس» بر می گردد، آنگاه با تبدیل v به x ، (۴ ب) به صورت زیر در می آید

$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin wx \, dx. \quad (5)$$

$\hat{f}_s(w)$ به تبدیل سینوسی فوری تابع f موسوم است، و با توجه به (۴الف) داریم

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}_s(x) \sin wx \, dw, \quad (6)$$

که تبدیل سینوسی فوری معکوس $\hat{f}_s(w)$ نامیده می شود، فرآیند به دست آوردن $\hat{f}_s(w)$ از $f(x)$ را تبدیل سینوسی فوری یا روش تبدیل سینوسی فوری می نامند.
توجه! نمادهای زیر را نیز برای تبدیلات فوری

$$F_c(f) = \hat{f}_c, \quad F_s(f) = \hat{f}_s$$

و F_c^{-1} و F_s^{-1} به ترتیب برای تبدیلات معکوس F_c و F_s به کار می برند.

مثال ۱. تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوری

تبدیل کسینوسی و سینوسی فوری تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} k & ; 0 < x < a, \\ 0 & ; x > a. \end{cases}$$

حل: با توجه به تعاریف (۲) و (۵) داریم

$$\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \int_0^a \cos wx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \left[\frac{\sin aw}{w} \right],$$

$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \int_0^a \sin wx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \left[\frac{1 - \cos aw}{w} \right].$$

نتایج حاصل با فرمولهای ۱ در دو جدول اول انتهای این فصل به ازای $k=1$ مطابقت دارند.

توجه داشته باشید که به ازای هر عدد ثابت k و $f(x) = k$ ($0 < x < \infty$)، تبدیلات

کسینوسی و سینوسی فوری این تابع موجود نیستند. (چرا؟)

مثال ۲. تبدیل کسینوسی فوری تابع نمایی

$F_c(e^{-x})$ را بیابید.

حل: با انتگرالگیری جزء به جزء و تکرار آن می یابیم

$$F_c(e^{-x}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} \cos wx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-x}}{1+w^2} (-\cos wx + w \sin wx) \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{1+w^2}.$$

این جواب با فرمول ۳ در جدول I، بخش ۱۰.۱۲ به ازای $a=1$ مطابقت دارد.

خطی بودن، تبدیلات مشتقات

اگر $f(x)$ بر روی نیم محور حقیقی مثبت x مطلقاً انتگرالپذیر (بخش ۹.۱۰ را ملاحظه کنید) و بر هر فاصله متناهی به طور تکه ای پیوسته (بخش ۱۰.۶ را ملاحظه کنید) باشد، آنگاه تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه $f(x)$ موجود اند.

هر گاه، a و b دو عدد ثابت بوده و $f(x)$ و $g(x)$ دارای تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه باشند، آنگاه $af(x) + bg(x)$ دارای تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه است و با توجه به (۲) داریم

$$F_c(af + bg) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [af(x) + bg(x)] \cos wx \, dx$$

$$= a \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos wx \, dx + b \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(x) \cos wx \, dx.$$

آخرین عبارت در تساوی فوق برابر $aF_c(f) + bF_c(g)$ می باشد. به طریق مشابه با توجه به (۵) به فرمولی برای F_s می رسمیم. در هر صورت داریم

$$F_c(af + bg) = aF_c(f) + bF_c(g). \quad (\text{الف})$$

(۷)

$$F_s(af + bg) = aF_s(f) + bF_s(g). \quad (\text{ب})$$

قضیه ۱ (تبدیلات کسینوسی و سینوسی مشتقات)

فرض کنید $f(x)$ بر روی نیم محور حقیقی مثبت x پیوسته و مطلقاً انتگرالپذیر و $f'(x)$ بر هر فاصله متناهی به طور تکه ای پیوسته باشد، و وقتی $x \rightarrow \infty$ ، $f(x) \rightarrow 0$ ، آنگاه

$$F_c\{f'(x)\} = wF_s\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0), \quad (\text{الف})$$

(۸)

$$F_s\{f'(x)\} = -wF_c\{f(x)\}. \quad (\text{ب})$$

اثبات. با انتگرالگیری به روش جزء به جزء می یابیم

$$F_c\{f'(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f'(x) \cos wx \, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[f(x) \cos wx \Big|_0^{\infty} + w \int_0^{\infty} f(x) \sin wx \, dx \right]$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) + wF_s\{f(x)\}.$$

$$\begin{aligned} F_s\{f'(x)\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f'(x) \sin wx dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[f(x) \sin wx \Big|_0^{\infty} - w \int_0^{\infty} f(x) \cos wx dx \right] \\ &= 0 - wF_c\{f(x)\}. \end{aligned}$$

از فرمول (۸ الف)، با جایگذاری f' به جای f نتیجه می شود

$$F_c\{f''(x)\} = wF_s\{f'(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0),$$

از این رو با توجه به (۸ ب) داریم

$$F_c\{f''(x)\} = -wF_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0), \quad (9 \text{ الف})$$

به طریق مشابه

$$F_s\{f''(x)\} = -wF_s\{f(x)\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} wf(0). \quad (9 \text{ ب})$$

کاربردی از فرمولهای (۹) در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است که در بخش ۱۱. ۱۴ ارائه شده است. در آینده، نشان می دهیم که چطور از (۹) برای رسیدن به تبدیلات می توان استفاده کرد.

مثال ۲. یک کاربرد عملی از فرمولهای (۹)

تبدیل کسینوسی فوری $f(x) = e^{-ax}$ را به ازای $a > 0$ بیابید.

حل. با مشتگیری می یابیم $(e^{-ax})'' = a^2 e^{-ax}$ ، از این رو $a^2 f(x) = f''(x)$. با توجه به این نتیجه و (۹ الف) داریم

$$a^2 F_c(f) = F_c\{f''\} = -wF_c(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0) = -wF_c(f) + a\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

بنابراین $(a^2 + w^2)F_c(f) = a\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. جواب عبارت است از (جدول I در بخش ۱۰. ۱۲ را ملاحظه کنید)

$$F_c(e^{-ax}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{a}{a^2 + w^2} \right) \quad (a > 0).$$

جداول تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوری در بخش ۱۰. ۱۲ ارائه شده اند. برای جداول بزرگتر می توانید به مرجع [C۴]، ضمیمه ۱ مراجعه کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; 0 < x < 1 \\ 1 & ; 1 < x < 2 \\ 0 & ; x > 2 \end{cases}$$

آنگاه $\hat{f}_c(w)$ را بیابید .

۲. تابع $f(x)$ در مساله ۱ را با توجه به جواب مساله ۱ بیابید . راهنمایی . از مساله ۴ ، بخش ۱۰. ۹ استفاده کنید .

۳. تبدیل کسینوسی فوریه تابع زیر را بیابید .

$$f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x < a, \\ 0 & ; x > a. \end{cases}$$

۴. با انتگرالگیری ، $F_s(e^{-ax})$ را به ازای $a > 0$ بیابید .

۵. فرمول ۳ در جدول I ، بخش ۱۰. ۱۲ را با انتگرالگیری به دست آورید .

۶. جواب مساله ۴ را از (۹ ب) به دست آورید .

۷. مقدار $F_c\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ را از روی مساله ۳ بخش ۱۰. ۹ بیابید .

۸. تبدیل کسینوسی فوریه معکوس e^{-w} را به دست آورید .

۹. تبدیل سینوسی فوریه تابع زیر را بیابید

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; 0 < x < 1, \\ 0 & ; x > 1. \end{cases}$$

۱۰. تبدیل کسینوسی فوریه تابع مذکور در مساله ۹ را بیابید .

۱۱. مطلوب است محاسبه $F_s(x^{-1} - x^{-1} \cos \pi x)$. راهنمایی . از مساله ۶ ، بخش ۱۰. ۹ با جابجایی w و x استفاده کنید .

۱۲. فرمول ۱۰ در جدول I ، بخش ۱۰. ۱۲ را به ازای $a = 1$ از روی مثال ۲ ، بخش ۱۰. ۹ به دست آورید .

۱۳. مطلوب است محاسبه $F_c\left\{\frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1-x^2}\right\}$. راهنمایی . از مساله ۷ ، بخش ۱۰. ۹ استفاده کنید .

۱۴. به کمک (۸ ب) مقدار $F_s(xe^{-\frac{1}{2}x^2})$ را از روی یک فرمول مناسبی از جدول I ، بخش ۱۰. ۱۲ محاسبه کنید .

۱۵. $F_s(e^{-x})$ را از (۸ الف) و فرمول ۳ از جدول I ، بخش ۱۰. ۱۲ بیابید .

۱۶. با توجه به اینکه $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ، فرمول ۲ از جدول II ، بخش ۱۲.۱۰ را از روی فرمول ۴ همان جدول به دست آورید .

۱۷. هرگاه $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4}$ ، آنگاه $\hat{f}_p(w)$ را به ازای $w > 0$ محاسبه کنید . راهنمایی . از مساله ۲ ، بخش ۹.۱۰ استفاده کنید .

۱۸. نشان دهید که $f(x) = 1$ دارای تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه نیست .

۱۹. آیا تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه تابع $f(x) = e^x$ موجود است ؟

۲۰. آیا تبدیل کسینوسی فوریه تابع $\frac{\sin x}{x}$ یا $\frac{\cos x}{x}$ موجود است ؟

۱۱.۱۰ تبدیل فوریه

در بخش قبل دو تبدیل که از انتگرالهای کسینوسی و سینوسی فوریه ، بخش ۹.۱۰ الهام گرفته بود مورد بررسی قرار دادیم . یک تبدیل سومی از تبدیلات فوریه را مد نظر قرار می دهیم که از روی انتگرال فوریه در شکل مختلط تعریف می شود . (برای پیش در آمد این تبدیل مجدداً می توانید به بخش ۱۰.۱۰ مراجعه کنید .) ما در اینجا نخست شکل مختلط انتگرال فوریه را مورد بررسی قرار می دهیم .

صورت مختلط انتگرال فوریه

در فرمولهای (۴) و (۵) واقع در بخش ۹.۱۰ مشاهده کردیم که انتگرال فوریه (حقیقی) تابع f به ازای $-\infty < x < \infty$ عبارت است از

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] dw$$

که در آن

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv dv , B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv dv .$$

با جایگزین کردن ضرایب انتگرال فوریه $A(w)$ و $B(w)$ در انتگرال فوریه f می یابیم

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) [\cos wv \cos wx + \sin wv \sin wx] dv dw .$$

تساوی فوق را به صورت زیر می نویسیم

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(wx - wv) dv \right] dw . \quad (1^*)$$

تابع $f(v) \cos(wx - wv)$ واقع در زیر علامت انتگرال داخل کسره به علت آنکه $\cos(wx - wv)$ یک تابع زوج از w و $f(v)$ تابعی مستقل از w است ، تابعی زوج است ، و چون

انتگرالگیری در داخل کرشه نسبت به w است، بنابراین نتیجه حاصل بعد از انتگرالگیری داخل کرشه تابع زوجی از w است. بنابراین اگر انتگرال داخل کرشه را $G(w)$ بنامیم به علت زوج بودن $G(w)$ ، انتگرال $G(w)$ از $w = 0$ تا ∞ با $\frac{1}{2}$ انتگرال $G(w)$ از $-\infty$ تا ∞ برابر است. در نتیجه

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(wx - wv) dv \right] dw. \quad (1)$$

هرگاه در (۱) تابع کسینوس به سینوس بدل کنیم، آنگاه به علت فرد بودن تابع سینوس نسبت به w می یابیم

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin(wx - wv) dv \right] dw = 0. \quad (2)$$

با جمع طرفین (۱) و (۲) برابر (۲) و استفاده از فرمول اویلر ($i = \sqrt{-1}$)

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \quad (3)$$

و تغییر متغیر $t = wx - wv$ می یابیم

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{i w(x-v)} dv dw \quad (4)$$

انتگرال حاصل به انتگرال فوریه مختلط موسوم است.

بعد از مقدمه کوتاه فوق در وضعیتی هستیم که به معرفی تبدیل فوریه پردازیم.

تبدیلات فوریه

با نوشتن تابع نمایی در (۴) به صورت حاصلضرب دو تابع نمایی، یعنی $e^{i w(x-v)} = e^{-i wv} e^{i wx}$ فرمول (۴) به صورت زیر در می آید

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-i wv} dv \right] e^{i wx} dw. \quad (5)$$

عبارت داخل کرشه که تابعی از w است را با $\hat{f}(w)$ نمایش می دهیم و آن را تبدیل فوریه تابع f می نامیم؛ با قرار دادن x به جای v در $\hat{f}(w)$ می یابیم

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i wx} dx. \quad (6)$$

باتوجه به آن، (۵) به صورت زیر در می آید

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{i wx} dw \quad (7)$$

و طرف دوم (۷) را تبدیل فوریه معکوس $\hat{f}(w)$ می نامیم.

$F(f)$ را برای تبدیل فوریه f و $F^{-1}(\hat{f})$ را برای تبدیل فوریه معکوس نیز به کار می برند.

فرآیند به دست آوردن تبدیل فوریه $F(f) = \hat{f}$ از تابع مفروض f به تبدیل فوریه یا روش تبدیل

فوریه موسوم است .

وجود. هرگاه $f(x)$ بر روی محور x تعریف و

۱. $f(x)$ بر هر فاصله متناهی به طور تکه ای پیوسته باشد.

۲. $f(x)$ بر محور x مطلقاً انتگرالپذیر باشد.

آنگاه بدون اثبات می پذیریم که دو شرط فوق شرایط کافی برای وجود تبدیل فوریه (۶) است. برای تعریف تکه ای پیوسته و مطلقاً انتگرالپذیر به ترتیب به بخشهای ۱.۶ و ۹.۱۰ مراجعه کنید.

مثال ۱. تبدیل فوریه

تبدیل فوریه تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} k; & 0 < x < a, \\ 0; & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

حل. باتوجه به (۶) می یابیم

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a k e^{-iwx} dx = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-iwa} - 1}{-iw} \right) = \frac{k(1 - e^{-iwa})}{iw\sqrt{2\pi}}$$

این نتیجه نشان می دهد که تبدیل فوریه به طور کلی یک تابع مختلط است.

مثال ۲. تبدیل فوریه

تبدیل فوریه تابع e^{-ax} را به ازای $a > 0$ بیابید.

حل. باتوجه به تعریف تبدیل فوریه داریم

$$\begin{aligned} F(e^{-ax'}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-ax' - iwx] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-(\sqrt{ax} + \frac{iw}{2\sqrt{a}})^2 + (\frac{iw}{2\sqrt{a}})^2\right] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{w^2}{4a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-(\sqrt{ax} + \frac{iw}{2\sqrt{a}})^2\right] dx. \end{aligned}$$

بانمایش انتگرال آخر با I نشان می دهیم که $I = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. برای این منظور از تغییر متغیر

$$\sqrt{ax} + \frac{iw}{2\sqrt{a}} = v \quad \text{استفاده می کنیم. باتوجه به این متغیر می یابیم } dx = \frac{dv}{\sqrt{a}} \text{ و از آنجا}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv.$$

برای محاسبه این انتگرال از شگرد زیر استفاده می کنیم. انتگرال را به توان ۲ رسانده و به صورت انتگرال

دوگانه درمی آوریم و سپس با استفاده از مختصات قطبی $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ و θ می یابیم

$$du dv = r dr d\theta$$

$$\begin{aligned} I^r &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^r} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^r} dv = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^r+v^r)} du dv \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^r} r dr d\theta = \frac{2\pi}{a} \left(-\frac{1}{r} e^{-r^r} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{a}, \end{aligned}$$

و از آنجا $I = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. باتوجه به نتیجه حاصل داریم

$$F(e^{-ax^r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-w^r}{ra}\right) \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{w^r}{ra}}.$$

نتیجه حاصل با فرمول ۹ مندرج در جدول III بخش ۱۰.۱۲ مطابقت دارد.

تعریف فیزیکی: طیف

ماهیت نمایش (۷) برای تابع $f(x)$ با فرض آنکه از برهنه‌ی نوسانات سینوسی تمام فرکانسهای ممکن، موسوم به نمایش طیفی حاصل می‌شود روشن می‌گردد. چنین نامگذاری از اینست که در آنجا نور از برهنه‌ی رنگها (فرکانسها) به دست می‌آید الهام گرفته است. در (۷) «چگالی طیفی» $\hat{f}(w)$ شدت $f(x)$ را در فاصله فرکانسی بین w و $w + \Delta w$ (کوچک و ثابت) اندازه‌گیری می‌کند. ارتباط ارتعاشات با انتگرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)|^2 dw$$

می‌تواند بیانگر کل انرژی سیستم فیزیکی باشد. از این رو انتگرال $|\hat{f}(w)|^2$ (از a تا b) مقدار توزیع فرکانسهای w بین a تا b را برای تمام انرژیها به دست می‌دهد.

برای روشن شدن این مطلب یک سیستم ارتعاشی ساده مکانیکی که نوسانگر همساز نامیده می‌شود (جرم یک فنر، بخش ۵.۲) و در معادله زیر صدق می‌کند را بیان می‌کنیم

$$my'' + ky = 0,$$

منظور از x در اینجا به معنی زمان می‌باشد. با ضرب معادله فوق در y' و انتگرالگیری از آن می‌یابیم

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} ky^2 = E_0,$$

که در آن $v = y'$ سرعت ارتعاش، جمله اول انرژی جنبشی، جمله دوم انرژی پتانسیل، و ثابت E_0 کل انرژی سیستم را بیان می‌کند. جواب عمومی معادله فوق با توجه به (۴) و (۵)، بخش ۱۰.۱۰ عبارت است از

$$y = a_1 \cos w_0 x + b_1 \sin w_0 x = c_1 e^{iw_0 x} + c_{-1} e^{-iw_0 x}; w_0^2 = \frac{k}{m},$$

که در آن $c_1 = \frac{1}{2}(a_1 - ib_1)$ و $c_{-1} = \frac{1}{2}(a_1 + ib_1)$. نظریه اینکه $mw_0^2 = k$ و $(iw_0)^2 = -w_0^2$ ، با حل مستقیم و ساده کردن می یابیم

$$E_0 = \frac{1}{2} m (c_1 iw_0 e^{iw_0 x} - c_{-1} iw_0 e^{-iw_0 x})^2 + \frac{1}{2} k (c_1 e^{iw_0 x} + c_{-1} e^{-iw_0 x})^2$$

$$= 2k c_1 c_{-1} = 2k |c_1|^2.$$

از این رو انرژی متناسب با مربع دامنه $|c_1|$ می باشد.

در مرحله بعدی اگر سیستم پیچیده تری منجر به جواب دوره ای $y = f(x)$ ، که قابل نمایش به صورت سری فوریه است شود، آنگاه عبارت انرژی ساده $|c_n|^2$ به صورت مجموع مربعات $|c_n|^2$ بیان می شود c_n که در آن ها ضرایب فوریه داده شده توسط (۸)، بخش ۶.۱۰ است. در این حالت با «طیف گسسته» (یا «طیف نقطه ای») برای فرکانسهای تنها و قابل شمارش (در حالت کلی با تعداد نامتناهی) مواجه هستیم و مقدار $|c_n|^2$ توزیع کل انرژی را بیان می کند.

نهایتاً، یک سیستم که جواب آن توسط انتگرال فوریه (۷) قابل نمایش باشد منجر به انتگرال فوریه برای انرژی می شود و همانند فوق در حالت کلی نیز قابل بررسی است.

خطی بودن . تبدیل فوریه مشتق

باتوجه به قضیه زیر از روی تبدیلات شناخته شده می توان به تبدیلات جدید رسید.

قضیه ۱ (خطی بودن تبدیل فوریه)

تبدیل فوریه یک عملگر خطی است، یعنی هرگاه $f(x)$ و $g(x)$ دارای تبدیلات فوریه بوده و a و b اعداد ثابت باشند، آنگاه

$$F\{af + bg\} = aF(f) + bF(g). \quad (۸)$$

اثبات . باتوجه به (۶) داریم

$$F\{af(x) + bg(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [af(x) + bg(x)] e^{-iwx} dx$$

$$= a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx + b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-iwx} dx$$

$$= aF\{f(x)\} + bF\{g(x)\}.$$

در کاربرد تبدیلات فوریه در معادلات دیفرانسیل، نکته کلیدی در متناظر قرار گرفتن مشتق تابع با ضرب تبدیل در iw است. چگونگی انجام این کار در قضیه زیر ارائه می شود.

قضیه ۲ (تبدیل فوریه مشتق $f(x)$)

هرگاه $f(x)$ بر محور x پیوسته باشد و وقتی $|x| \rightarrow \infty$ ، $f(x) \rightarrow 0$ و علاوه بر آن $f'(x)$ بر محور x مطلقاً انتگرالپذیر باشد، آنگاه

$$F\{f'(x)\} = iwF\{f(x)\}. \tag{9}$$

اثبات. با انتگرالگیری جزء به جزء و استفاده از $f(x) \rightarrow 0$ وقتی $|x| \rightarrow \infty$ می یابیم

$$\begin{aligned} F\{f'(x)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-iwx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x)e^{-iwx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - (-iw) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx} dx \right] \\ &= 0 + iwF\{f(x)\}. \end{aligned}$$

بدین طریق قضیه به اثبات می رسد.

با دو بار تکرار (۹) می یابیم

$$F\{f''(x)\} = iwF\{f'(x)\} = (iw)^2 F\{f(x)\}.$$

نظر به اینکه $(iw)^2 = -w^2$ داریم

$$F\{f''(x)\} = -w^2 F\{f(x)\}. \tag{10}$$

فرمولی شبیه فرمولهای فوق برای مشتقات مرتبه های بالاتر قابل دسترسی است.

کاربردی از (۱۰) در معادلات دیفرانسیل بامشتقات جزئی در بخش ۱۱.۱۴ ارائه می شود.

هم اکنون نشان می دهیم که چطور می توان (۹) را برای دستیابی به تبدیلات جدید به کار گرفت.

مثال ۳. کاربردی از فرمول (۹)

تبدیل فوریه xe^{-x} را با توجه به جدول III ، بخش ۱۰.۱۲ به دست آورید.

حل با استفاده از (۹) و جدول III داریم

$$\begin{aligned} F\{xe^{-x}\} &= F\left\{-\frac{1}{i}(e^{-x})'\right\} = -\frac{1}{i}F\{(e^{-x})'\} \\ &= -\frac{1}{i}iwF\{e^{-x}\} = -\frac{1}{i}iw \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{w^2}{2}} = -\frac{iw}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{w^2}{2}}. \end{aligned}$$

پیچش (کانولوشن)

پیچش $f * g$ از توابع f و g به صورت زیر تعریف می شود

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p) dp = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)g(p) dp. \tag{11}$$

هدف دستیابی به نتایجی شبیه نتایج متناظر در تبدیلات لاپلاس (بخش ۶.۶) است. در بحث پیچش تبدیل فوریه یک تابع از روی چند تابع با تبدیل فوریه مفروض به دست می آید.

قضیه ۳ (قضیه پیچش)

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ بر محور x به طور تکه ای پیوسته، کراندار، و مطلقاً انتگرال پذیر باشند، آنگاه

$$F(f * g) = \sqrt{2\pi} F(f) F(g). \quad (۱۲)$$

اثبات. با توجه به تعریف تبدیل فوری و تعویض ترتیب انتگرال گیری می یابیم

$$\begin{aligned} F(f * g) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(p) g(x-p) e^{-iwx} dp dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(p) g(x-p) e^{-iwx} dx dp. \end{aligned}$$

با فرض $x = p + q$ یا $x - p = q$ می توان نوشت

$$\begin{aligned} F(f * g) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(p) g(q) e^{-i w(p+q)} dq dp \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(p) e^{-iwp} dp \int_{-\infty}^{\infty} g(q) e^{-iwq} dq \\ &= \sqrt{2\pi} F(f) F(g). \end{aligned}$$

بدین طریق قضیه به اثبات می رسد.

با گرفتن تبدیل فوری معکوس از دو طرف (۱۲) و نوشتن $\hat{f} = F(f)$ و $\hat{g} = F(g)$ و با توجه به اینکه $\sqrt{2\pi}$ ، $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ همدیگر را حذف می کنند، داریم

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) \hat{g}(w) e^{iwx} dw, \quad (۱۳)$$

که فرمولی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی است (بخش ۱۱، ۱۴).

جدولی از تبدیلات فوری در بخش بعدی آمده است. برای جداول بزرگتر به مرجع [C۴] ضمیمه ۱ مراجعه کنید.

به انتهای فصل ۱۰ که مربوط به سریهای فوری، انتگرالهای فوری، و تبدیلات فوری بود، رسیدیم. سریهای فوری (و انتگرالهای فوری) که یکی از مهمترین پیشرفتهای در زمینه ریاضی فیزیک است دارای کاربردهای بسیار در مسائل مهندسی می باشد زیرا سریهای فوری (و انتگرالهای فوری) مهمترین ابزار برای حل مسائل با مقادیر کرانه ای می باشند. این مطالب در فصل بعد مورد بررسی قرار می گیرند.

مسائل بخش ۱۰.۱

تبدیلات فوری توابع زیر را بدون استفاده از جدول III، بخش ۱۰.۱۲ به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} e^x; & x < 0 \\ 0; & x > 0 \end{cases} \quad ۲. \quad f(x) = \begin{cases} e^{-x}; & x > 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases} \quad ۱.$$

$$f(x) = \begin{cases} e^x; & -1 < x < 1 \\ 0; & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad .۴$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{ix}; & -1 < x < 1 \\ 0; & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad .۳$$

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}; & x > 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases} \quad .۶$$

$$f(x) = \begin{cases} x; & 0 < x < a \\ 0; & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad .۵$$

$$f(x) = \begin{cases} e^x; & x < 0 \\ e^{-x}; & x > 0 \end{cases} \quad .۸$$

$$f(x) = \begin{cases} -1; & -1 < x < 0 \\ 1; & 0 < x < 1 \\ 0; & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad .۷$$

۹. فرمول ۱ در جدول III، بخش ۱۲.۱۰ را ثابت کنید.

۱۰. از جواب $\hat{f}(w)$ مساله ۹ استفاده کنید و $f(x)$ را از (۷) به دست آورید. **راهنمایی.** (V^*) بخش ۹.۱۰ را مورد استفاده قرار دهید.

۱۱. فرمول ۱ از جدول III، بخش ۱۲.۱۰ را به کمک فرمول ۲ همان جدول به دست آورید.

۱۲. مساله ۶ را به کمک (۹) حل و جواب مساله ۱ را به دست آورید.

۱۳. **(انتقال)** نشان دهید اگر $f(x)$ دارای تبدیل فوریه باشد، آنگاه $f(x-a)$ دارای تبدیل فوریه بوده و

$$F\{f(x-a)\} = e^{-iwa}F\{f(x)\}.$$

۱۴. مساله ۶ را به کمک قضیه پیچش حل کنید. **راهنمایی.** نشان دهید که

$$(x > 0)xe^{-x} = e^{-x} * e^{-x}$$

۱۵. از مساله ۱۳ استفاده کنید و فرمول ۱ از جدول III، بخش ۱۲.۱۰ را از فرمول ۲ (با $c = 3b$) به دست آورید.

۱۶. از جواب مساله ۸ استفاده کنید و انتگرال فوریه تابع $f(x)$ را تبدیل به انتگرال کسینوسی فوریه کنید (بخش ۹.۱۰ را ملاحظه کنید).

۱۷. **(انتقال روی محور w)** نشان دهید که اگر $\hat{f}(w)$ تبدیل فوریه $f(x)$ باشد، آنگاه $\hat{f}(w-a)$ تبدیل فوریه $e^{iax}f(x)$ می باشد.

۱۸. از مساله ۱۷ استفاده کنید و فرمول ۷ از جدول III، بخش ۱۲.۱۰ را از فرمول ۱ همان جدول به دست آورید.

۱۹. از مساله ۱۷ استفاده کنید و فرمول ۸ از جدول III، بخش ۱۲.۱۰ را از فرمول ۲ همان جدول به دست آورید.

۲۰. فرمول ۳ از جدول III بخش ۱۲.۱۰ را به ازای $a = 1$ به دست آورید. **راهنمایی.** از (۱۵)، بخش ۹.۱۰ و (۳) همین بخش استفاده کنید.

۱۲.۱۰ جداول تبدیلات

برای جداول بزرگتر به مرجع [C۴]، ضمیمه ۱ مراجعه کنید.

جدول I. تبدیلات کسینوسی فوریه

فرمول (۲)، بخش ۱۰.۱۰ را ملاحظه کنید.

	$f(x)$	$\hat{f}_c(w) = \mathcal{F}_c(f)$
1	$\begin{cases} 1 & \text{if } 0 < x < a \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin aw}{w}$ $\Gamma(a)$ را در ضمیمه ۱.۳ ملاحظه کنید.
2	$x^{a-1} \quad (0 < a < 1)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(a)}{w^a} \cos \frac{aw}{2}$
3	$e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{a}{a^2 + w^2} \right)$
4	$e^{-x^2/2}$	$e^{-w^2/2}$
5	$e^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/4a}$
6	$x^n e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n!}{(a^2 + w^2)^{n+1}} \operatorname{Re} (a + iw)^{n+1}$ (Re = قسمت حقیقی)
7	$\begin{cases} \cos x & \text{if } 0 < x < a \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin a(1-w)}{1-w} + \frac{\sin a(1+w)}{1+w} \right]$
8	$\cos ax^2 \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos \left(\frac{w^2}{4a} - \frac{\pi}{4} \right)$
9	$\sin ax^2 \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos \left(\frac{w^2}{4a} + \frac{\pi}{4} \right)$
10	$\frac{\sin ax}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} u(a-w)$ (بخش ۳.۶ را ملاحظه کنید.)
11	$\frac{e^{-x} \sin x}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{arc tan} \frac{2}{w^2}$ (بخشهای ۵.۵ و ۳.۶ را ملاحظه کنید.)
12	$J_0(ax) \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{u(a-w)}{\sqrt{a^2 - w^2}}$

جدول II . تبدیلات سینوسی فوریه

فرمول (۵) ، بخش ۱۰.۱۰ را ملاحظه کنید.

	$f(x)$	$\hat{f}_s(w) = \mathfrak{F}_s(f)$
1	$\begin{cases} 1 & \text{if } 0 < x < a \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{1 - \cos aw}{w} \right]$
2	$1/\sqrt{x}$	$1/\sqrt{w}$
3	$1/x^{3/2}$	$2\sqrt{w}$ $\Gamma(a)$ را در بخش ۱.۳ ملاحظه کنید.
4	$x^{a-1} \quad (0 < a < 1)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(a)}{w^a} \sin \frac{a\pi}{2}$
5	e^{-x}	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{w}{1+w^2} \right)$
6	$e^{-ax/x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \arctan \frac{w}{a}$
7	$x^n e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n!}{(a^2 + w^2)^{n+1}} \text{Im} (a + iw)^{n+1}$ (Im = قسمت موهومی)
8	$xe^{-x^2/2}$	$w e^{-w^2/2}$
9	$xe^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\frac{w}{(2a)^{3/2}} e^{-w^2/4a}$
10	$\begin{cases} \sin x & \text{if } 0 < x < a \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin a(1-w)}{1-w} - \frac{\sin a(1+w)}{1+w} \right]$
11	$\frac{\cos ax}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} u(w-a)$ (بخش ۳.۶ را ملاحظه کنید.)
12	$\arctan \frac{2a}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{2\pi} \frac{\sinh aw}{w} e^{-aw}$

جدول III. تبدیلات فوریه

فرمول (۶)، بخش ۱۱.۱۰ را ملاحظه کنید.

	$f(x)$	$\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f)$
1	$\begin{cases} 1 & \text{if } -b < x < b \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin bw}{w}$
2	$\begin{cases} 1 & \text{if } b < x < c \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\frac{e^{-ibw} - e^{-icw}}{iw\sqrt{2\pi}}$
3	$\frac{1}{x^2 + a^2} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a w }}{a}$
4	$\begin{cases} x & \text{if } 0 < x < b \\ 2x - a & \text{if } b < x < 2b \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\frac{-1 + 2e^{ibw} - e^{2ibw}}{\sqrt{2\pi} w^2}$
5	$\begin{cases} e^{-ax} & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a + iw)}$
6	$\begin{cases} e^{ax} & \text{if } b < x < c \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\frac{e^{(a-iw)c} - e^{(a-iw)b}}{\sqrt{2\pi}(a - iw)}$
7	$\begin{cases} e^{iax} & \text{if } -b < x < b \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin b(w - a)}{w - a}$
8	$\begin{cases} e^{iax} & \text{if } b < x < c \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$	$\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ib(a-w)} - e^{ic(a-w)}}{a - w}$
9	$e^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/4a}$
10	$\frac{\sin ax}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ if $ w < a$; 0 if $ w > a$

پرسشها و مسائل دوره ای فصل ۱۰

۱. سریهای مثلثاتی و سریهای فوریه چه نوع سریهایی هستند؟
۲. تعامد به چه معنایی می باشد؟ چه نقشی را تعامد در راه رسیدن به فرمولهای اویلر ایفا می کند؟
- ۳- چگونه می توان یک تابع با دوره تناوب 2π را به یک تابع با دوره تناوب دلخواه تبدیل کرد؟
۴. یک تابع فرد متناوب چگونه تعریف می شود؟ شکل سری فوریه آنها به چه صورتی است؟
۵. سوالات مطرح شده درمساله ۴ را برای یک تابع زوج بیان و پاسخ دهید.
۶. بسط نیم دامنه ای چه مفهومی دارد؟
- ۷- آیا یک تابع ناپیوسته می تواند دارای سری فوریه باشد؟ سری تیلور چگونه تعریف می شود؟
۸. اگر یک سری فوریه از تابع f هم دارای جملات سینوسی و هم کسینوسی باشد، مجموع جملات کسینوسی یا سینوسی چگونه تعریف می شود؟
۹. پیوستگی تکه ای چیست؟ به کدام بخش این فصل مرتبط می شود؟
۱۰. چند جمله ای مثلثاتی چیست؟ چرا ما آن را مورد بررسی قرار می دهیم؟
۱۱. خطای مربعی میانگین چیست؟ چرا ما آن را مورد بحث قرار می دهیم؟
۱۲. سری فوریه مختلط چیست؟ ارتباط آن را با سری فوریه حقیقی چگونه تعریف می کنند؟
۱۳. چه اختلافی میان ارتعاش یک فنر جرم مدار با معادله $my'' + cy' + ky = r(t)$ با یک نیروی دوره ای که به صورت سینوسی محض اعمال می شود وجود دارد؟
۱۴. تبدیل فوریه چیست؟ چگونه آن را می توان از انتگرال فوریه نتیجه گرفت؟
۱۵. آیا هر تابع پیوسته تبدیل سینوسی یا کسینوسی فوریه دارد؟ آیا یک تابع ناپیوسته می تواند تبدیل کسینوسی یا سینوسی فوریه داشته باشد؟

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; 0 < x < \pi \\ 1 & ; \pi < x < 2\pi \end{cases} \quad 17$$

$$f(x) = \begin{cases} k & ; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -k & ; \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad 16$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 0 & ; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & ; \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \quad 19$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ -1 & ; -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ 0 & ; 0 < x < \pi \end{cases} \quad 18$$

$$f(x) = |x| \quad (-\pi < x < \pi) \quad .21 \quad f(x) = \frac{1}{\gamma}(\pi - x) \quad (0 < x < \gamma\pi) \quad .20$$

$$f(x) = -\frac{x}{\gamma} \quad (-\pi < x < \pi) \quad .23 \quad f(x) = \frac{1}{\gamma}kx|x| \quad (-\pi < x < \pi) \quad .22$$

$$f(x) = \pi - \gamma|x| \quad (-\pi < x < \pi) \quad .25 \quad f(x) = x^\gamma \quad (-\pi < x < \pi) \quad .24$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^\gamma}{\gamma} ; & -\frac{\pi}{\gamma} < x < \frac{\pi}{\gamma} \\ \frac{\pi^\gamma}{\lambda} ; & \frac{\pi}{\gamma} < x < \frac{\gamma\pi}{\gamma} \end{cases} \quad .27 \quad f(x) = \begin{cases} 0 ; & -\pi < x < 0 \\ \pi x ; & 0 < x < \pi \end{cases} \quad .26$$

$$f(x) = \begin{cases} \pi x + x^\gamma ; & -\pi < x < 0 \\ \pi x - x^\gamma ; & 0 < x < \pi \end{cases} \quad .29 \quad f(x) = \begin{cases} 0 ; & -\pi < x < 0 \\ x^\gamma ; & 0 < x < \pi \end{cases} \quad .28$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} ; & -a < x < a (< \pi) \\ \frac{\pi - x}{\pi - a} ; & a < x < \gamma\pi - a \end{cases} \quad .30$$

سری فوریه توابع زیر را که دوره تناوب آنها $P = \gamma L$ است، به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 ; & -1 < x < 0 \\ -1 ; & 0 < x < 1 \end{cases}, \quad p = \gamma L = \gamma \quad .31$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 ; & -1 < x < 1 \\ 0 ; & 1 < x < 3 \end{cases}, \quad p = \gamma L = 4 \quad .32$$

$$f(x) = x ; \quad -2 < x < 2, \quad p = \gamma L = 4 \quad .33$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 ; & -1 < x < 0 \\ x ; & 0 < x < 1 \end{cases}, \quad p = \gamma L = 2 \quad .34$$

$$f(x) = \begin{cases} -x ; & -1 < x < 0 \\ 0 ; & 0 < x < 1 \end{cases}, \quad p = \gamma L = 2 \quad .35$$

$$f(x) = x ; \quad -4 < x < 4, \quad p = \gamma L = 8 \quad .36$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 ; & -1 < x < 0 \\ \gamma x ; & 0 < x < 1 \end{cases}, \quad p = \gamma L = \gamma \quad .37$$

$$f(x) = 1 - x^\gamma ; \quad 0 < x < 2, \quad p = \gamma L = 1 \quad .38$$

$$f(x) = x - x^\gamma ; \quad -1 < x < 1, \quad p = \gamma L = 2 \quad .39$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 ; & -2 < x < 0 \\ e^{-x} ; & 0 < x < 2 \end{cases}, \quad p = \gamma L = 4 \quad .40$$

- مقدار سریهای زیر را محاسبه کنید.
۴۱. (از مساله ۱۷ استفاده کنید.)
 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$
۴۲. (از مساله ۲۱ استفاده کنید.)
 $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots$
۴۳. (از مساله ۲۹ استفاده کنید.)
 $1 - 3^{-2} + 5^{-2} - 7^{-2} + \dots$
- با استفاده از اتحاد پار سوال نشان دهید که
۴۴. (از مساله ۲۳ استفاده کنید.)
 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$
۴۵. (از مساله ۲۵ استفاده کنید.)
 $1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96}$
۴۶. (از مساله ۲۹ استفاده کنید.)
 $1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \dots = \frac{\pi^6}{960}$

شش خطای مربعی می نیم اول E^+ متناظر با چند حاصلجمع های جزئی اول را برای

۴۷. مساله ۲۱ حساب کنید. ۴۸. مساله ۲۹ حساب کنید.

- جواب عمومی معادله $y'' + \omega^2 y = r(t)$ را در مورد زیر به دست آورید.
۴۹. $r(t) = \frac{t^2}{4}; -\pi < t < \pi, r(t + 2\pi) = r(t), |\omega| \neq 0, 1, 2, \dots$
۵۰. $r(t) = \frac{1}{12} t(\pi^2 - t^2); -\pi < t < \pi, r(t + 2\pi) = r(t), |\omega| \neq 1, 2, \dots$

خلاصه مطالب فصل ۱۰

سریها، انتگرالها، و تبدیلات فوریه

یک سری مثلثاتی (بخش ۱.۱۰) به صورت زیر می باشد

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (1)$$

سری فوریه یک تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب 2π ، یک سری مثلثاتی به صورت (۱) است که ضرایب آن به ضرایب فوریه موسوم می باشد نیز توسط فرمولهای اویلر به شرح زیر محاسبه می شوند (بخش ۲.۱۰)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

برای یک تابع f با دوره تناوب دلخواه $p = 2L$ سری فوریه (بخش ۳.۱۰) به صورت

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right) \quad (3)$$

است که ضرایب فوریه آن از فرمولهای اویلر به شرح زیر به دست می آیند

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (4)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

این سریها اساس کار در ارتباط با پدیده های دوره ای هستند که عموماً در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کاربرد دارند (بخش ۷.۱۰ و فصل ۱۱). اگر $f(x)$ زوج $[f(-x) = f(x)]$ یا فرد $[f(-x) = -f(x)]$ باشد، سری فوریه حاصل به ترتیب سریهای کسینوسی و سینوسی فوریه هستند (بخش ۴.۱۰).

یک تابع مفروض f در فاصله $0 \leq x \leq L$ را می توان به صورت سری کسینوسی یا سینوسی فوریه دوره تناوب $2L$ بسط داد. که بسط نیم دامنه ای $f(x)$ نامیده می شود (بخش ۵.۱۰).

یک مجموعه از توابع کسینوس یا سینوس در (۳) را دنباله مثلثاتی نامیده می شود. اولین خاصیت چنین دستگاهی این است که در یک فاصله به طول $2L$ متعامد هستند، یعنی به ازای هر مقدار صحیح m و $n \neq m$ داریم

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \quad \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0$$

و به ازای هر مقدار صحیح m و n داریم

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0.$$

این تعامد برای محاسبه ضرایب فوریه کاربرد دارد و با توجه به آن به فرمولهای اویلر برای ضرایب فوریه می رسم.

حاصلجمع های جزئی سری فوریه به وسیله خطای مربعی به حداقل می رسد (بخش ۸.۱۰).

ایده و تکنیک سریهای فوریه برای توابع غیر دوره ای $f(x)$ تعریف شده بر محور حقیقی قابل تعمیم می باشد. چنین تعمیمی منجر به ظهور انتگرال فوریه می شود که عبارت است از (بخش ۹.۱۰)

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] dw \quad (5)$$

که در آن

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \cos wv dv, \quad B(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \sin wv dv \quad (6)$$

و یا شکل مختلط (بخش ۱۱.۱۰)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} dw \quad (i = \sqrt{-1}), \quad (7)$$

که در آن

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx. \quad (8)$$

فرمول (۸)، $f(x)$ را به تبدیل فوریه $\hat{f}(w)$ تبدیل می کند.

تبدیل کسینوسی فوریه آن به صورت

$$\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos wx dx \quad (9)$$

و تبدیل سینوسی فوریه آن به صورت

$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin wx dx \quad (10)$$

می باشد (بخش ۱۰.۱۰).



فصل ۱۱

وبلاگ جامع مهندسی برق و الکترونیک

Download4All.rozblog.com

معادلات با مشتقات جزئی

معادلات با مشتقات جزئی در ارتباط با مسائل گوناگون فیزیکی و هندسی که شامل توابعی می باشند که این توابع به دو یا چند متغیر مستقل بستگی دارند مطرح می شوند. بسیاری از مسائل فیزیکی را می توان با معادلات دیفرانسیل معمولی مدل سازی نمود و حال آنکه تعداد زیادی از مسائل مکانیک سیالات و جامدات (دینامیک، الاستیسیته)، انتقال حرارت، نظریه الکترومغناطیس، مکانیک کوانتم، و دیگر زمینه های فیزیکی به معادلات دیفرانسیلی جزئی منجر می شوند. برد کاربردی معادلات دیفرانسیل جزئی در مقایسه با معادلات دیفرانسیل معمولی عظیم ترمی باشد. در معادلات دیفرانسیل جزئی متغیرهای مستقل می توانند زمان و یک یا چند مؤلفه فضایی باشند. فصل اخیر به برخی از مهمترین معادلات با مشتقات جزئی که در کاربردهای مهندسی پیش می آیند اختصاص داده شده است. این معادلات را از مسائل فیزیکی به دست می آوریم و سپس روشهای حل مسائل با مقادیر اولیه و کرانه ای، یعنی روشهای به دست آوردن جواب معادلات متناظر با مساله فیزیکی داده شده را مورد بررسی قرار می دهیم.

در بخش ۱.۱۱ به مفهوم جواب معادلات با مشتقات جزئی می پردازیم. بخشهای ۲.۱۱ تا ۴.۱۱ به معادله موج یک بعدی، که حرکت یک نخ مرتعش را مورد بررسی قرار می دهد، اختصاص می دهیم. در بخشهای ۵.۱۱ و ۶.۱۱ به معادله گرما، در بخشهای ۷.۱۱ تا ۱۰.۱۱ به معادله موج دو بعدی (غشای مرتعش) و در بخشهای ۱۱.۱۱ و ۱۲.۱۱ به معادله لاپلاس می پردازیم.

در بخشهای ۱۳.۱۱ و ۱۴.۱۱ چنانچه مشاهده خواهیم نمود معادلات با مشتقات جزئی را می توان به کمک روشهای تبدیلات لاپلاس یا تبدیلات فوریه حل نمود.

روشهای عددی برای حل معادلات با مشتقات جزئی در بخشهای ۴.۲۰ و ۷.۲۰ ارائه شده اند.

پیشیناز این فصل : معادلات دیفرانسیل خطی معمولی (فصل ۲) و سری فوریه (فصل ۱۰) می باشد .
بخشهایی که در دوره های فشرده قابل حذف اند عبارت اند از : ۱۱.۶ ، ۱۱.۹ ، ۱۱.۱۰ ، ۱۱.۱۳ ، ۱۱.۱۴ .

مراجع : ضمیمه ۱ ، قسمت C .
جواب مسائل : ضمیمه ۲ .

۱.۱۱ مفاهیم بنیادی

معادله ای شامل یک یا چند مشتق جزئی یک تابع (مجهول) از دو یا چند متغیر مستقل به معادله با مشتق جزئی موسوم است . مرتبه بالاترین مشتق را مرتبه معادله می نامند .
همانند معادله دیفرانسیل معمولی ، یک معادله با مشتق جزئی را خطی گوئیم هرگاه نسبت به متغیر وابسته (تابع مجهول) و مشتقات جزئی آن از درجه اول باشد . یک معادله خطی ، همگن است هرگاه هر جمله آن شامل تابع یا یکی از مشتقاتش باشد معادله ای که همگن نباشد به معادله ناهمگن موسوم است .

مثال ۱ . معادلات با مشتقات جزئی خطی مرتبه دوم مهم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (۱) \text{ معادله موج یک بعدی}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (۲) \text{ معادله گرمای یک بعدی}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (۳) \text{ معادله لاپلاس دوبعدی}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (۴) \text{ معادله پواسن دو بعدی}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (۵) \text{ معادله لاپلاس سه بعدی}$$

در این معادلات c ثابت ، t زمان ، x ، y ، z مختصات کارتزین می باشند . معادله (۴) به ازای $f(x, y) \neq 0$ غیر همگن و سایر معادلات همگن می باشند .

جوابی از یک معادله با مشتق جزئی در ناحیه ای مانند R از فضای متغیرهای مستقل تابعی است که در ناحیه ای شامل R همه مشتقات جزئی موجود در معادله را دارا بوده و در همه نقاط R در معادله صدق کند . (اغلب اوقات نیاز داریم که تابع مورد نظر بر کران R پیوسته بوده و دارای همان مشتقات جزئی در درون R بوده و در درون R در معادله صدق کند .)
در حالت کلی ، تعداد جوابهای یک معادله با مشتق جزئی بسیار زیاد است . به عنوان مثال ، هر

یک از توابع

$$u = \ln(x^2 + y^2), \quad u = e^x \cos y, \quad u = x^2 - y^2 \quad (6)$$

که به کلی با هم تفاوت دارند، جواب معادله (۳) می باشند، صحت این مطلب را متعلم با مشتقگیری و جایگزین کردن در معادله می تواند تحقیق کند. بعداً خواهیم دید که جواب منحصر به فرد معادله با مشتق جزئی متناظر با یک مساله فیزیکی مفروض با استفاده از اطلاعات اضافی حاصل از مطالب فیزیکی به دست می آید. مثلاً، در برخی موارد مقادیر جواب مساله مورد نظر بر کران ناحیه ای داده شده اند («شرایط کرانه ای») یا در مواردی که u ، جواب معادله، وابسته به زمان t است، مقادیر u یا $\frac{\partial u}{\partial t}$ یا هر دوی آنها در $t = 0$ مفروض می باشند («شرایط اولیه») می دانیم که هرگاه یک معادله دیفرانسیل معمولی خطی و همگن باشد، آنگاه از ترکیب جوابهای معلوم معادله می توان جوابهای بیشتری برای آن به دست آورد. در مورد معادله بامشتق جزئی خطی همگن نیز چنین می باشد. در واقع قضیه زیر برقرار است.

قضیه بنیادی ۱ (اصل خطی بودن یا برهنه‌ی)

هرگاه u_1 و u_2 دو جواب معادله بامشتق جزئی همگن خطی در ناحیه R باشند، آنگاه

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

که در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواه هستند، نیز جواب معادله در ناحیه R است.

اثبات این قضیه مهم که به متعلم واگذار می شود، ساده و کاملاً شبیه اثبات قضیه ۱، بخش ۱.۲ می باشد.

بررسی جوابهای مسائل ۲ تا ۲۳ همانند معادلات دیفرانسیل معمولی انجام می گیرد. مسائل

۲۴ تا ۳۵ به معادلات بامشتقات جزئی مربوط می شوند که مشابه معادلات دیفرانسیل معمولی قابل حل

هستند. برای این منظور و روشن شدن موضوع دو مثال زیر را ارائه می کنیم.

مثال ۲. $u(x, y)$ ، جواب معادله دیفرانسیل بامشتق جزئی $u_{xx} - u = 0$ را بیابید.

حل. به علت آنکه در معادله بامشتق جزئی فوق مشتق نسبت به y وجود ندارد، این معادله را می توان

به صورت معادله دیفرانسیل $u'' - u = 0$ تصور نمود که دارای جواب عمومی به صورت

$u = Ae^x + Be^{-x}$ بامقادیر ثابت A و B غیر وابسته به x است ولی این مقادیر ثابت می توانند تابعی از

y باشند. بنابراین جواب معادله مورد نظر به صورت زیر است

$$u(x, y) = A(y)e^x + B(y)e^{-x}.$$

مثال ۳. معادله بامشتق جزئی $u_{xy} = -u_x$ را حل کنید.

حل. با قرار دادن $u_x = P$ می یابیم $P_y = -P$ یا $\frac{P_y}{P} = -1$ و از آنجا $\ln P = -y + \tilde{c}(x)$ یا

$P = c(x)e^{-y}$ و با توجه به $u_x = P$ می یابیم $u_x = c(x)e^{-y}$ ، با انتگرالگیری از آن نسبت به x

می یابیم $u(x,y) = f(x)e^{-y} + g(y)$ که در آن $f(x) = \int c(x) dx$ و $g(y)$ به ترتیب تابع دلخواهی از x و y می باشند.

مسائل بخش ۱.۱۱

۱. قضیه بنیادی ۱ را برای معادلات بامشتقات جزئی شامل دو و سه متغیر مستقل ثابت کنید.
 ۲. نشان دهید که توابع مذکور در (۶) در معادله (۳) صدق می کنند.
- تحقیق کنید که توابع زیر جواب معادله لاپلاس (۳) هستند.

$$u = 2xy \quad 3. \quad u = x^2 - 3xy^2 \quad 4. \quad u = x^2 - 6x^2y^2 + y^2 \quad 5.$$

$$u = e^x \sin y \quad 6. \quad u = \sin x \sinh y \quad 7. \quad u = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad 8.$$

تحقیق کنید که توابع زیر به ازای مقادیر مناسبی از c و ω جواب معادله موج (۱) می باشند.

$$u = x^2 + 4t^2 \quad 9. \quad u = x^2 + 3xt^2 \quad 10. \quad u = \sin^2 ct \sin^2 x \quad 11.$$

$$u = \cos^4 t \sin x \quad 12. \quad u = \cos ct \sin x \quad 13. \quad u = \sin \omega ct \sin \omega x \quad 14.$$

تحقیق کنید که توابع زیر به ازای مقادیر مناسبی از c و ω جواب معادله گرما (۲) هستند.

$$u = e^{-t} \cos x \quad 15. \quad u = e^{-2t} \cos x \quad 16. \quad u = e^{-t} \sin^3 x \quad 17.$$

$$u = e^{-\omega^2 c^2 t} \sin \omega x \quad 18. \quad u = e^{-16t} \cos^2 x \quad 19. \quad u = e^{-\omega^2 c^2 t} \sin \omega x \quad 20.$$

$$21. \text{ نشان دهید که } u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \text{ جوابی از معادله لاپلاس (۵) می باشد.}$$

۲۲. تحقیق کنید که $u(x,y) = a \ln(x^2 + y^2) + b$ در معادله لاپلاس (۳) صدق می کند و a و b را

طوری بیابید که u در شرایط کرانه ای $u = 0$ بر دایره $x^2 + y^2 = 1$ و $u = 5$ بر دایره $x^2 + y^2 = 9$ صدق کند.

۲۳. نشان دهید که $u(x,t) = v(x+ct) + w(x-ct)$ جواب معادله موج (۱) است. که در آن v

و w توابع دلخواه مشتقپذیر تا مرتبه ۲ می باشند.

معادلات بامشتقات جزئی هایی که مانند معادلات دیفرانسیل معمولی قابل حل هستند. هرگاه یک

معادله با مشتق جزئی تنها شامل مشتق نسبت به یکی از متغیرهای مستقل باشد، آنگاه چنین معادله ای را

بادر نظر گرفتن سایر متغیرها به صورت پارامتر می توان همانند معادلات دیفرانسیل معمولی حل نمود.

$u(x,y)$ ، جواب هریک از معادلات زیر را بیابید.

$$u_{xx} + 4u = 0 \quad 26. \quad u_y = 0 \quad 25. \quad u_x = 0 \quad 24.$$

$$u_x = 2xyu \quad 29. \quad u_y + 2yu = 0 \quad 28. \quad u_{xx} = 0 \quad 27.$$

با قرار دادن $u_x = p$ هریک از معادلات زیر را حل کنید.

$$u_{xyy} + u_x = 0.32$$

$$u_{xy} = 0.31$$

$$u_{xy} = u_x \cdot 30$$

دستگاه معادلات با مشتقات جزئی زیر را حل کنید.

$$u_{xy} = 0, u_{xx} = 0.35$$

$$u_{yy} = 0, u_{xx} = 0.34$$

$$u_y = 0, u_x = 0.33$$

۲.۱۱ مدل‌سازی: نخ مرتعش، معادله موج

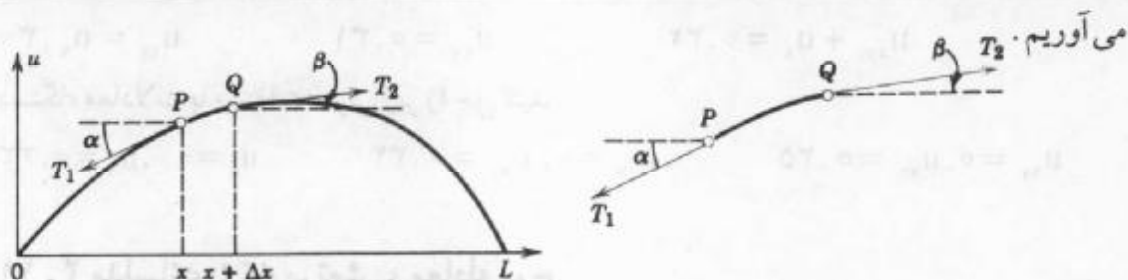
در این قسمت ارتعاشات عرضی کوچک نخ کشسان به طول L که دو انتهای آن ثابت و بدون حرکت است مانند ارتعاش یک تار ویولن را مورد بررسی قرار می‌دهیم. نشان می‌دهیم که معادله حاکم بر چنین حرکتی یک معادله بامشتق جزئی است. برای رسیدن به معادله ارتعاش نخ مورد نظر فرض کنید نخ از وضع تعادل خارج شده و سپس در لحظه‌ای مثلاً لحظه $t = 0$ رها شده و به ارتعاش در آید. مساله مشخص کردن ارتعاش نخ، یعنی تعیین $u(x,t)$ ، انحراف نخ در یک نقطه دلخواه x و در لحظه دلخواه $t > 0$ است؛ شکل ۲۵۱ را ملاحظه کنید.

در معادلات دیفرانسیل بعد از رسیدن به معادله دیفرانسیل متناظر برای یک مساله فیزیکی، نیاز به شناخت برخی مفروضات ساده‌ای داشتیم تا به کمک آنها بتوان به جواب مساله دست یافت. وضع در معادلات با مشتقات جزئی نیز بر همین منوال است.

اطلاعات فیزیکی: ابتدا مفروضات زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. جرم نخ برای واحد طول ثابت می‌باشد، یعنی نخ همگن است. نخ کشسان بوده و هیچ گونه مقاومتی در مقابل خمش از خود نشان نمی‌دهد.
 ۲. نیروی کششی که بر اثر کشیدن نخ قبل از ثابت کردن دو سر آن ایجاد می‌شود بسیار بزرگ بوده و نیروی جاذبه وارد بر نخ در مقابل آن قابل چشم پوشی می‌باشد.
 ۳. حرکت نخ یک ارتعاش کوچک عرضی در صفحه‌ای قائم است، یعنی هر قسمت نخ تنها به صورت قائم حرکت می‌نماید، و قدر مطلق انحراف و شیب نخ در هر نقطه کوچک می‌باشد.
- باتوجه به مفروضات مذکور انتظار می‌رود که جواب $u(x,t)$ معادله دیفرانسیل به دست آمده ارتعاشات کوچک نخ «غیر ایده‌آل» فیزیکی با چگالی همگن کوچک و تحت کشش بزرگ را به طور منطقی توصیف نماید.

برای رسیدن به معادله دیفرانسیل، نیروهایی را که بر قسمت کوچکی از نخ وارد می‌شوند مورد بررسی قرار می‌دهیم (شکل ۲۵۱). چون نخ مقاومتی در مقابل خمش نشان نمی‌دهد، در هر نقطه نیروی وارده نیروی کشش بر منحنی نخ خواهد بود. فرض کنید T_1 و T_2 نیروهای کشش نخ در نقاط انتهایی P و Q قسمت مورد بررسی نخ باشد. به علت اینکه در جهت افقی حرکتی صورت نمی‌گیرد، مؤلفه‌های افقی کشش باید صفر باشند. با استفاده از علائم به کار گرفته شده در شکل ۲۵۱ به دست



شکل ۲۵۱. نخ مرتعش در زمان ثابت

$$T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta = T = \text{ثابت}. \quad (1)$$

در جهت قائم دو نیروی $-T_1 \sin \alpha$ و $T_2 \sin \beta$ را داریم که به ترتیب مولفه های قائم T_1 و T_2 می باشند؛ علامت منها در اینجا بدان جهت است که مؤلفه مربوط در P روبه پائین فرض شده است. برآیند این دو نیرو، با توجه به قانون دوم نیوتن، برابر جرم $\rho \Delta x$ نخ مورد نظر با شتاب $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ، که مقدار آن در نقطه ای بین x و $x + \Delta x$ محاسبه می شود، است؛ در اینجا ρ جرم واحد طول نخ قبل از انحراف، و Δx طول تکه نخ قبل از انحراف آن می باشند. بنابراین

$$T_2 \sin \beta - T_1 \sin \alpha = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

با استفاده از (۱) داریم

$$\frac{T_2 \sin \beta}{T_2 \cos \beta} - \frac{T_1 \sin \alpha}{T_1 \cos \alpha} = \tan \beta - \tan \alpha = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2)$$

$\tan \beta$ و $\tan \alpha$ ضریب زاویه های منحنی نخ در $x + \Delta x$ و x می باشند، یعنی

$$\tan \beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x}, \quad \tan \alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x.$$

در اینجا چون u به t نیز بستگی دارد لذا باید مشتقها را به صورت مشتق جزئی بنویسیم. از تقسیم (۲) بر Δx می یابیم

$$\frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right] = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

چنانچه Δx به سمت صفر میل کند، معادله با مشتق جزئی همگن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3)$$

که در آن $c^2 = \frac{T}{\rho}$ می باشد، حاصل می شود. این معادله، که به معادله موج یک بعدی موسوم

است، معادله حاکم بر مساله ما می باشد. نماد c^2 (به جای c) برای ثابت فیزیکی $\frac{T}{\rho}$ انتخاب شده است

تا نشان دهد که این مقدار ثابت همواره مثبت است. یک بعدی بدان علت است که معادله تنها شامل یک متغیر فضایی x است. در بخش زیر به حل معادله (۳) می پردازیم.

۱۱. ۳. جداسازی متغیرها، کاربرد سریهای فوریه

در بخش قبل نشان دادیم که نوسانهای یک نخ کشسان در معادله موج یک بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

که در آن $u(x, t)$ انحراف نخ است، صدق می کند. باتوجه به این مطلب که در نقاط انتهایی یعنی در نقاط $x = 0$ و $x = L$ نخ ثابت نگهداشته شده است، به ازای هر t دو شرط کرانه ای

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \quad (2)$$

را داریم. مسیر حرکت نخ به انحراف اولیه (انحراف در لحظه $t = 0$) و سرعت اولیه (سرعت در لحظه $t = 0$) بستگی دارد. اگر انحراف اولیه را با $f(x)$ و سرعت اولیه نمایش دهیم، دو شرط اولیه زیر را داریم

$$u(x, 0) = f(x), \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x). \quad (4)$$

حال $u(x, t)$ ، جواب معادله (۱) را طوری می یابیم که در شرایط کرانه ای و اولیه صدق کند. برای رسیدن به چنین جوابی گام به گام به شرح زیر عمل می کنیم.

گام اول. با استفاده از روش ضریبی یا روش جداسازی متغیرها، دو معادله دیفرانسیل معمولی به دست می آوریم.

گام دوم. جوابهایی از این دو معادله را که در شرایط کرانه ای صدق می کنند، مشخص می نمایم.

گام سوم. موارد استعمال سری فوریه، جوابها را طوری باهم ترکیب می کنیم که عبارت حاصل جواب معادله موج (۱) بوده و همچنین در شرایط اولیه مفروض (۳) و (۴) صدق نماید.

گام اول. روش جداسازی متغیر، یا روش ضریبی

جوابهایی از معادله موج (۱) به صورت

$$u(x, t) = F(x)G(t) \quad (5)$$

که به صورت حاصل ضرب دو تابع به طوری که یکی از آنها تنها به x و دیگری تنها به t وابسته می باشد را در نظر می گیریم. چنانچه در آتی مشاهده خواهیم کرد این روش دارای کاربردهای گوناگونی در ریاضیات مهندسی است. بامشتقگیری از (۵) می یابیم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = FG''$$

که در آن نقطه‌ها مشتق تابع u نسبت به t و پریمها مشتق تابع u نسبت به x را نشان می‌دهند. با جایگزین کردن مشتقات حاصل در معادله دیفرانسیل (۱) داریم

$$FG'' = c^2 F''G.$$

باتقسیم طرفین رابطه فوق بر $c^2 FG$ می‌یابیم

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F}.$$

برای برقرار بودن این تساوی دو طرف آن باید برابر مقدار ثابتی مثل k باشند. در واقع، عبارت طرف چپ تابعی است که تنها به t وابسته است و حال آنکه طرف راست شامل تابعی است که تنها به x بستگی دارد و این تنها وقتی امکان دارد که هر کدام ثابت و برابر عدد ثابتی مانند k باشند. در واقع اگر چنین نباشد طرف اول تابعی از t و طرف دوم تابعی از x خواهد بود و بین t و x رابطه‌ای برقرار خواهد بود و معادله با مشتق جزئی (۱) به معادله دیفرانسیل تبدیل خواهد شد که مورد نظر ما نیست. بنابراین لازم است که F و G طوری انتخاب شوند که

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k.$$

از این رابطه بلافاصله دو معادله دیفرانسیل خطی معمولی، یعنی

$$F'' - kF = 0 \quad (6)$$

و

$$\ddot{G} - c^2 kG = 0 \quad (7)$$

نتیجه می‌شود که در آن k عددی دلخواه است.

گام دوم. برقراری شرایط کرانه‌ای

جوابهای F و G را از معادلات (۶) و (۷) طوری می‌یابیم که $u = FG$ در شرایط کرانه‌ای

(۲) صدق کند، یعنی به ازای هر t داشته باشیم

$$u(0, t) = F(0)G(t) = 0 \quad \text{و} \quad u(L, t) = F(L)G(t) = 0$$

حال حل معادله (۶) را پی می‌گیریم. واضح است هرگاه $G \equiv 0$ ، $u \equiv 0$ ، که جواب بدیهی معادله

است. درحالی که هدف از حل مساله، یافتن یک جواب غیر بدیهی است. لذا $G \not\equiv 0$ و از آنجا

$$F(L) = 0 \quad (\text{ب}) \quad , \quad F(0) = 0 \quad (\text{الف}) \quad (8)$$

به ازای $k = 0$ جواب عمومی (۶) به صورت $F = ax + b$ می‌باشد و از (۸) می‌یابیم $a = b = 0$.

لذا $F \equiv 0$ ، که جواب موردنظر ما نیست زیرا در این صورت $u \equiv 0$. به ازای عدد حقیقی مثبت

$k = \mu^2$ جواب عمومی (۶) به صورت

$$F = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

می باشد و از (۸)، مانند قبل، می یابیم $F \equiv 0$. بنابراین تنها حالتی که باقی می ماند انتخاب k منفی است، مثلاً $k = -p^2$ ، آنگاه معادله (۶) به صورت زیر درمی آید

$$F'' + p^2 F = 0$$

که دارای جواب عمومی

$$F(x) = A \cos px + B \sin px$$

است. از این جواب و (۸) می یابیم $F(0) = A = 0$ و آنگاه $F(L) = B \sin pL = 0$ ، باید فرض کنیم $B \neq 0$ زیرا در غیر این صورت $F \equiv 0$. بنابراین $\sin pL = 0$ ، یعنی به ازای عدد صحیح n داریم

$$pL = n\pi \quad \text{و از آنجا} \quad p = \frac{n\pi}{L} \quad (۹)$$

با فرض $B = 1$ ، تعداد نامتناهی جواب $F(x) = F_n(x)$ که در آن

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x \quad ; \quad n = 1, 2, \dots \quad (۱۰)$$

حاصل می شوند. این جوابها در (۸) صدق می کنند. [به ازای اعداد صحیح منفی n ضرورتاً، همان جواب را با انتخاب یک علامت منفی به دست می آوریم، زیرا $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$].

در این مرحله حل (۷) را پی می گیریم. حال ثابت k به مقادیر $k = -p^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ که از (۹) نتیجه شده اند، منجر می گردند. به ازای این k ها، معادله (۷) به صورت

$$\ddot{G} + \lambda_n^2 G = 0$$

که در آن $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$ است، درمی آید. جواب عمومی این معادله عبارت است از

$$G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t.$$

از این توابع $u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t)$ که به صورت

$$u_n(x, t) = (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x \quad ; \quad n = 1, 2, \dots \quad (۱۱)$$

نوشته می شوند جوابهای (۱) هستند، و در شرایط کرانه ای (۲) نیز صدق می کنند. این توابع را توابع ویژه، یا تابع مشخصه و مقادیر $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$ را مقادیر ویژه، یا مقادیر مشخصه نخ مرتعش می نامند. مجموعه $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ را طیف می نامند.

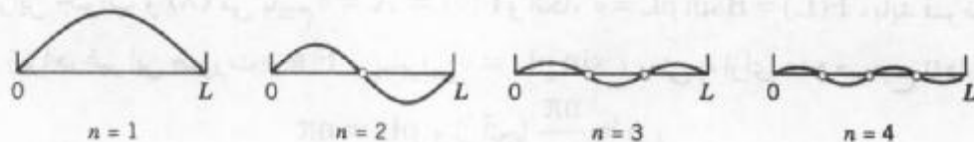
چنانچه مشاهده می کنیم هر u_n حرکت همسازی با فرکانس $\frac{\lambda_n}{2\pi} = \frac{cn}{2L}$ سیکل بر واحد زمان

را نمایش می دهد. این حرکت را مد نرمال n ام نخ نامیده می شود. مد نرمال اول ($n = 1$) به مد

اساسی مشهور می باشد، و سایر مدهای نرمال مافوق تن نامیده می شوند؛ از دیدگاه موسیقی حاصل آنها گام، گام به علاوه یک پنجم والا آخر می باشد. چون از (۱۱) در نقاط $x = \frac{L}{n}, \frac{2L}{n}, \dots, \frac{(n-1)L}{n}$ می یابیم $\sin \frac{n\pi}{L} x = 0$.

مد نرمال n ام دارای $n - 1$ گره است. نقاط گرهی نقاطی از نخ هستند که حرکت نمی کنند. (با نقاط انتهایی ثابت؛ شکل ۲۵۲ را ملاحظه کنید.)

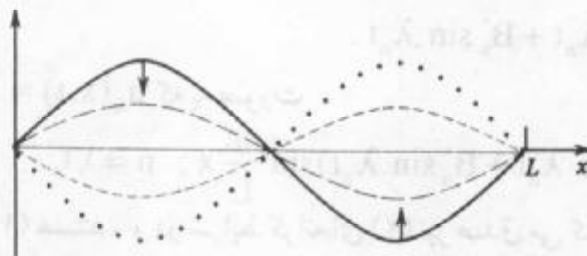
شکل ۲۵۳ مد نرمال دوم را به ازای مقادیر مختلف t نشان می دهد. نخ در هر لحظه به شکل



شکل ۲۵۲. مدهای نرمال نخ مرتعش

یک موج سینوسی می باشد. وقتی سمت چپ نخ به طرف پایین می رود، قسمت راست آن به طرف بالا حرکت می کند و بالعکس. برای سایر مدها وضع به همین منوال می باشد.

تنظیم موج با تغییرات کشش T انجام می گیرد و فرمول فوق برای فرکانس $\frac{\lambda_n}{2\pi} = \frac{cn}{2L}$ از u_n با انتخاب $c = \frac{T}{\rho}$ (بخش ۲.۱۱ فرمول (۳)) بیان می دارد که فرکانس با کشش متناسب است. T را نمی توان به سرعت افزایش داد. آیا چگونگی افزایش مد بنیادی را می توانید بیان کنید؟ (برای L و ρ فکر کنید.)



شکل ۲۵۳. مد نرمال دوم به ازای مقادیر مختلف t

گام سوم. جواب مسأله کلی

بدیهی است که در حالت کلی، یک جواب خاص $u_n(x, t)$ در شرایط اولیه (۳) و (۴) صدق نخواهد کرد. اما، از آنجا که معادله (۱) خطی و همگن می باشد، از قضیه بنیادی ۱.۱۱ پی

می‌بریم که مجموع هر تعداد متناهی از u_n ها، جوابی برای معادله (۱) می‌باشد. برای حصول جوابی که در شرایط (۳) و (۴) صدق نماید، سری نامتناهی زیر را با فرض $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$ مورد بررسی قرار می‌دهیم

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x. \quad (12)$$

ابتدا صدق نمودن شرط اولیه (۳) (تغییر مکان اولیه مفروض) را مد نظر قرار می‌دهیم. از روابط (۳) و (۱۲) می‌یابیم

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x). \quad (13)$$

برای برقرار بودن این تساوی کافی است B_n را برابر ضریب سینوسی فوریه تابع $f(x)$ اختیار کنیم. برای این منظور بنا به (۴) بخش ۵.۱۰ چنین فرض می‌کنیم

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

حال برقراری شرط اولیه (۴) (سرعت اولیه مفروض) را پی می‌گیریم. بامشتغلی از (۱۲) نسبت به t و با استفاده از (۴) می‌یابیم

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-B_n \lambda_n \sin \lambda_n t + B_n^* \lambda_n \cos \lambda_n t) \sin \frac{n\pi x}{L} \right]_{t=0} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin \frac{n\pi x}{L} = g(x). \end{aligned}$$

بنابراین، ضرایب B_n^* را طوری می‌یابیم که به ازای $t = 0$ ، $\frac{\partial u}{\partial t}$ یک بسط نیم دامنه ای $g(x)$ ، سری

سینوسی فوریه $g(x)$ باشد، یعنی B_n^* به صورت زیر اختیار می‌کنیم [ر. ک. (۴) بخش ۵.۱۰]

$$B_n^* \lambda_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

با توجه به $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$ می‌یابیم

$$B_n^* = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (15)$$

نتیجه. با توجه به نتایج فوق پی می‌بریم که $u(x, t)$ ، ارائه شده توسط (۱۲)، با ضرایب (۱۴) و (۱۵) جوابی از (۱) می‌باشد که در شرایط (۲)، (۳) و (۴) صدق می‌کند، مشروط بر اینکه سری (۱۲) و همچنین سریهای که با دو مرتبه مشتغلی نسبت به x و t از (۱۲) حاصل می‌شوند همگرا بوده و مجموع آنها به ترتیب برابر $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ که پیوسته هستند، باشد.

جواب (۱۲) یک جواب صوری برای مساله مورد نظر است و ما نیاز داریم به آن معنی بدهیم. برای نیل

معادلات با مشتقات جزئی

به این هدف مساله را درحالتی بررسی می کنیم که سرعت اولیه $g(x)$ برابر صفر باشد. با توجه به این فرض B_n^0 به ازای هر n برابر صفر است. با توجه به این فرض (۱۲) به صورت

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \lambda_n t \sin \frac{n\pi}{L} x; \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \quad (۱۶)$$

درمی آید. هم اکنون باید دید که این سری دارای معنی است یا نه؟ با توجه به [ر. ک. (۱۱)]، ضمیمه [۱.۳

$$\cos \frac{cn\pi}{L} t \sin \frac{n\pi}{L} x = \frac{1}{2} \left[\sin \left\{ \frac{n\pi}{L} (x - ct) \right\} + \sin \left\{ \frac{n\pi}{L} (x + ct) \right\} \right]$$

می توان نوشت

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \left\{ \frac{n\pi}{L} (x - ct) \right\} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \left\{ \frac{n\pi}{L} (x + ct) \right\}.$$

دو سری موجود در این جواب به ترتیب با جایگذاری $x - ct$ و $x + ct$ به جای متغیر x در سری سینوسی فوریه (۱۳) تابع $f(x)$ به دست آمده اند. ازاینرو می توان نوشت

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [f^*(x - ct) + f^*(x + ct)]. \quad (۱۷)$$

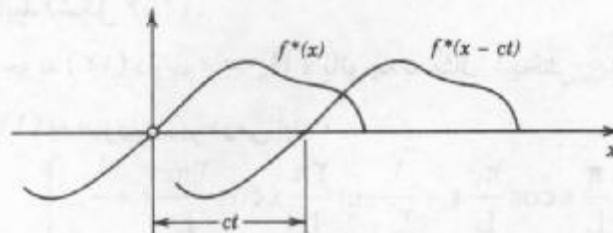
در (۱۷)، f^* بسط نیم دامنه ای فرد f با دوره $2L$ است (شکل ۲۵۴). نظر به اینکه انحراف اولیه $f(x)$ بر بازه $0 \leq x \leq L$ پیوسته و در نقاط انتهایی صفر است، از (۱۷) نتیجه می شود که $u(x,t)$ به ازای هر مقداری از متغیرها تابعی پیوسته از هر دو متغیر x و t می باشد. با مشتقگیری از (۱۷) پی می بریم که $u(x,t)$ جوابی از (۱) است، مشروط بر آنکه $f(x)$ در فاصله $0 < x < L$ دوباره مشتق پذیر بوده و در نقاط انتهایی $x = 0$ و $x = L$ مشتق دوم یک طرفه صفر داشته باشد. تحت این شرایط (۱۷) و از آنجا (۱۶) جوابی از معادله (۱) بوده که در شرایط (۲) الی (۴) صدق می نماید.



شکل ۲۵۴. بسط نیم دامنه ای فرد $f(x)$

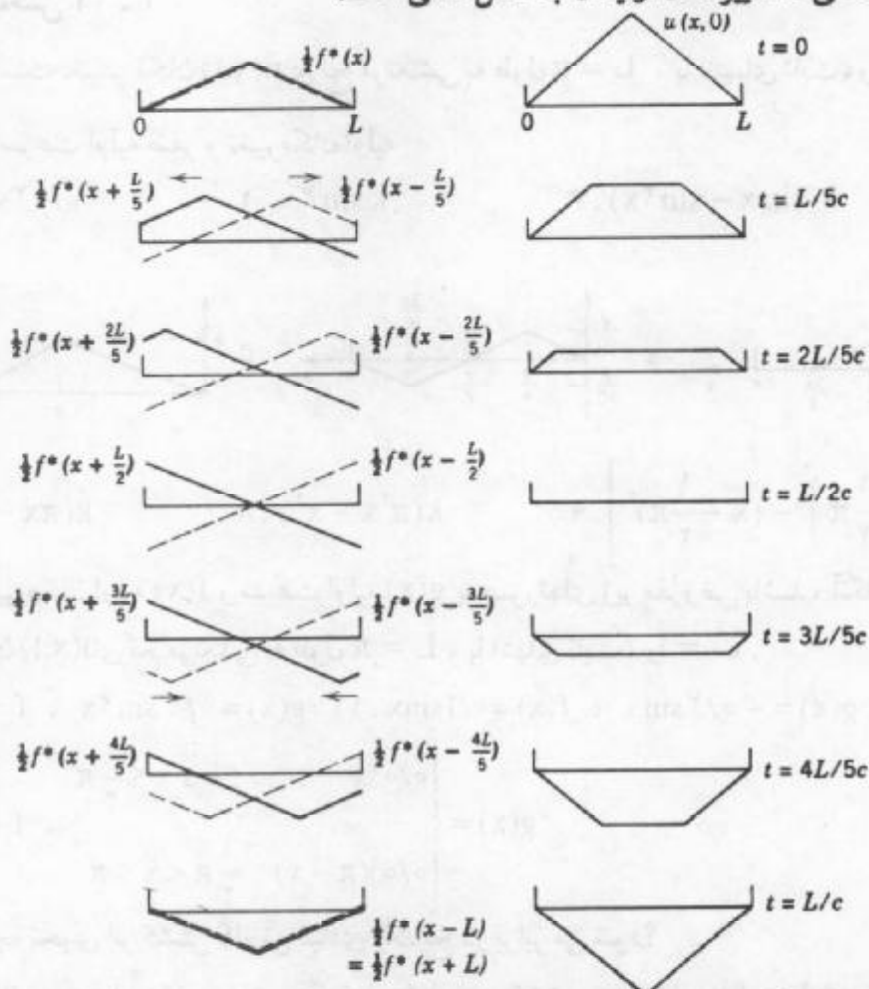
هرگاه $f'(x)$ و $f''(x)$ صرفاً به طور تکه ای پیوسته باشند (ر. ک. بخش ۱.۵)، یا مشتقات یک طرفه آنها صفر نباشند، آنگاه به ازای هر t مقادیر متعدد و متناهی از x موجود است به قسمی که مشتقات دوم u در (۱) موجود نیست. به جز در این نقاط معادله موج همواره برقرار است، و ازاینرو $u(x,t)$ را می توان از یک نقطه نظر مانند جوابی از مساله مورد نظر تصور نمود. مثلاً، حالت تغییر مکان اولیه مثلثی (مثال ۱ ارائه در ذیل این مطالب) به جوابی از این نوع منجر می شوند.

تعبیر فیزیکی جالبی از (۱۷) را ارائه می‌نمائیم. نمودار $f^*(x - ct)$ از انتقال نمودار $f^*(x)$ به اندازه ct واحد به طرف راست حاصل می‌شود (شکل ۲۵۵). این بدان معناست که $f^*(x - ct)$ ($c > 0$) نمایش موجی است که با افزایش t به طرف راست حرکت می‌کند. مشابهاً، $f^*(x + ct)$ موجی است که به طرف چپ حرکت می‌کند، و $u(x, t)$ از ترکیب این دو موج حاصل می‌شود.



شکل ۲۵۵. انتگرالگیری از (۱۷)

مثال ۱. (نخ مرتعشی که تغییر مکان اولیه آن به شکل مثلثی است)



شکل ۲۵۶. جواب $u(x, t)$ در مثال ۱ به ازای مقادیر مختلف (قسمت راست تصویر) که از ترکیب موجی که به سمت راست (خط چین) و موجی که به سمت چپ (قسمت چپ تصویر) حرکت می‌کند حاصل شده است.

جواب متناظر باتغییر مکان اولیه مثلثی معادله موج (۱)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{L}x & ; 0 < x < \frac{L}{2} \\ \frac{2k}{L}(t-x) & ; \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

و سرعت اولیه صفر را بیابید (شکل ۲۵۶).

حل. از $g(x) \equiv 0$ و باتوجه به (۱۲) داریم $B_n^* = 0$ ، باتوجه به مثال ۱ بخش ۱۰ مقدار B_n حاصل می شود. باتوجه به آن (۱۲) به صورت زیر درمی آید

$$u(x,t) = \frac{\Lambda k}{\pi^2} \left[\frac{1}{1^2} \sin \frac{\pi}{L} x \cos \frac{\pi c}{L} t - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi}{L} x \cos \frac{3\pi c}{L} t + \dots \right]$$

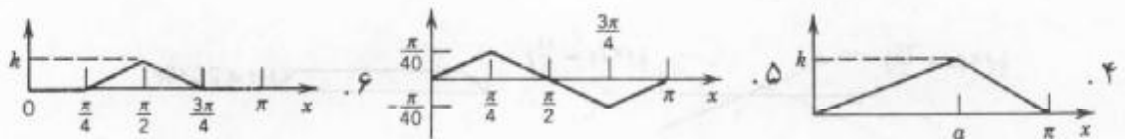
برای رسم نمودار جواب می توان از $u(x,0) = f(x)$ و تعبیر فوق برای دو تابع موجود در نمایش (۱۷) استفاده نمود. با توجه به آن نمودار ترسیم شده در شکل ۲۵۶ حاصل می شود.

مسائل بخش ۳.۱۱

مطلوب است تغییر مکان $u(x,t)$ ی نخ مرتعشی به طول $L = \pi$ ، با انتهای ثابت، و $c^2 = \frac{T}{\rho} = 1$

متناظر با سرعت اولیه صفر و تغییر مکان اولیه

۱. $0/0 \sin x$ ، ۲. $k \sin 3x$ ، ۳. $k(\sin x - \sin 2x)$



۷. $k(\pi x - x^2)$ ، ۸. $k(\pi^2 x - x^2)$ ، ۹. $k \left[\left(\frac{1}{2} \pi \right)^2 - (x - \frac{1}{2} \pi)^2 \right]$

هرگاه تغییر مکان اولیه $f(x)$ و سرعت اولیه $g(x)$ به صورتهای زیر مفروض باشند، آنگاه مطلوب است تغییر مکان $u(x,t)$ ی نخ مرتعشی به طول $L = \pi$ ، با انتهای ثابت، و $c^2 = 1$.

۱۰. $f = 0$ ، $g(x) = 0/1 \sin 2x$ ، ۱۱. $f(x) = 0/1 \sin x$ ، $g(x) = -0/2 \sin x$

$$g(x) = \begin{cases} 0/0 \sin x & ; 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \pi \\ 0/0 \sin(\pi - x) & ; \frac{1}{2} \pi < x \leq \pi \end{cases} , f = 0 . 12$$

۱۳. به چه نحوی اثر کشش گام تن بنیادی یک نخ دو برابر می شود؟

۱۴. فرکانس مدبنیادی نخ مرتعش چگونه به طول نخ، کشش، جرم نخ بر واحد طول بستگی دارد؟

۱۵. نسبت دامنه های نوسان مد بنیادی و مافوق دوم در مساله ۷ چیست؟ نسبت $\frac{a_1^2}{(a_1^2 + a_2^2 + \dots)}$ را بنویسید. از اتحاد پارسوال بخش ۱۰. ۸ استفاده کنید.

به روش جداسازی متغیرها، جوابهای $u(x,t)$ ای معادلات زیر را بیابید.

$$\begin{aligned} xu_x - yu_y = 0 &. 18 & u_x - u_y = 0 &. 17 & u_x + u_y = 0 &. 16 \\ u_x - yu_y = 0 &. 21 & u_{xx} + u_{yy} = 0 &. 20 & yu_x - xu_y = 0 &. 19 \\ x^2 u_{xy} + 3y^2 u = 0 &. 24 & u_{xy} - u = 0 &. 23 & u_x + u_y = 2(x+y)u &. 22 \end{aligned}$$

ارتعاشات واداشته یک نخ کشان

۲۵. نشان دهید که ارتعاشات ایجاد شده نخ کشان تحت تاثیر نیروی خارجی $P(x,t)$ بر واحد طول که به طور قائم بر نخ وارد می شود در معادله

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \frac{P}{\rho} \quad (18)$$

صدق می کند.

۲۶. با فرض سینوسی بودن نیروی خارجی، یعنی $P = A\rho \sin \omega t$ ، نشان دهید که

$$\frac{P}{\rho} = A \sin \omega t = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

که بر آن $k_n(t) = \frac{2A}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \sin \omega t$ ؛ که به ازای n زوج، $k_n = 0$ و به ازای n فرد

در $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$ با جایگزینی $k_n = \frac{2A}{n\pi} \sin \omega t$ علاوه بر آن نشان دهید که معادله (۱) می یابیم

$$\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n = 0 \quad ; \quad \lambda_n = \frac{c n \pi}{L}$$

۲۷. نشان دهید که با جایگزینی عبارات u و $\frac{P}{\rho}$ از مساله ۲۶ در (۱۸) می یابیم

$$\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n = \frac{2A}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \sin \omega t \quad ; \quad \lambda_n = \frac{c n \pi}{L}$$

و همچنین نشان دهید که به ازای $\lambda_n^2 \neq \omega^2$ جواب به صورت زیر است

$$G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t + \frac{2A(1 - \cos n\pi)}{n\pi(\lambda_n^2 - \omega^2)} \sin \omega t$$

۲۸. B_n و B_n^* در مساله ۲۷ را طوری بیابید که u حاصل در شرایط اولیه

$$u(x,0) = f(x) \quad , \quad u_t(x,0) = 0$$

صدق کند.

۲۹. در حالت تشدید ($\lambda_n = \omega$) نشان دهید که

$$G_n(t) = B_n \cos \omega t + B_n^* \sin \omega t - \frac{A}{n\pi\omega} (1 - \cos n\pi)t \cos \omega t .$$

۳۰. نشان دهید که مسائل (۱) الی (۴) با شرایط کرانه ای پیچیده تر، یعنی $u(0, t) = 0$ و

$$u(L, t) = h(t) , \text{ را می توان به یک مساله از یک تابع جدید } v \text{ که یک مساله موج ناهمگن است و در}$$

شرایط کرانه ای

$$v(0, t) = v(L, t) = 0 , v(x, 0) = f_1(x) , v_t(x, 0) = g_1(x)$$

صدق می کنند، تبدیل نمود. راهنمایی. با قراردادن $u = v + w$ مناسب را بیابید.

۴.۱۱ جواب دالامبر معادله موج

جانب است توجه کنیم که جواب (۱۷)، بخش ۳.۱۱، معادله موج

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ; \quad c^2 = \frac{T}{\rho} \tag{۱}$$

با معرفی متغیرهای مستقل جدید

$$v = x + ct , \quad z = x - ct \tag{۲}$$

معادله (۱) به معادله ساده تری بر حسب متغیرهای جدید تبدیل می شود که به روش معادلات دیفرانسیل قابل حل است و جواب مساله مورد نظر سریعاً حاصل می شود.

باتوجه به مفروضات فوق u تابعی از v و z خواهد شد. با به کارگیری قاعده زنجیره ای بخش ۸.۸

مشتقهای موجود در (۱) را می توان بر حسب مشتقها نسبت به v و z ارائه نمود. داریم

$$v_x = 1 \text{ و } z_x = 1 . \text{ برای سادگی در بیان } u(x, t) , \text{ به عنوان تابعی از } v \text{ و } z \text{ را با همان حرف } u \text{ نشان}$$

می دهیم. باتوجه به آن می توان نوشت

$$u_x = u_v v_x + u_z z_x = u_v + u_z .$$

با به کارگیری قاعده زنجیره ای برای طرف راست و با استفاده از $v_x = 1$ و $z_x = 1$ می یابیم

$$u_{xx} = (u_v + u_z)_x = (u_v + u_z)_v v_x + (u_v + u_z)_z z_x = u_{vv} + 2u_{vz} + u_{zz} .$$

مشتق دیگر موجود در (۱) نیز به همین نحو تبدیل شده و نتیجه زیر حاصل می شود

$$u_{tt} = c^2 (u_{vv} - 2u_{vz} + u_{zz}) .$$

با جایگزین کردن این دو نتیجه در (۱) می یابیم [ر.ک. زیر نویس ۲. ضمیمه ۲.۳]

۱- یادآور می شویم که نظریه کلی معادلات با مشتقات جزئی روشی اصولی برای یافتن این تبدیل که معادله را ساده تر می نماید ارائه می دهد (ر.ک. مرجع [C9] در ضمیمه ۱).

$$u_{vz} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} = 0. \quad (3)$$

معادله حاصل، یعنی معادله (۳) را با دوبار انتگرالگیری متوالی به راحتی می توان حل نمود. این موضوع مزیت این روش را نشان می دهد. در واقع با انتگرالگیری نسبت به z ، داریم

$$\frac{\partial u}{\partial v} = h(v)$$

که در آن $h(v)$ تابع دلخواهی از v می باشد. با انتگرالگیری از این عبارت نسبت به v می یابیم

$$u = \int h(v) dv + \psi(z)$$

که در آن $\psi(z)$ تابع دلخواهی از z می باشد. چون انتگرال تابعی از v ، مثلاً $\phi(v)$ می باشد، جواب u به صورت $u = \phi(v) + \psi(z)$ خواهد بود. با توجه به (۲) می توان نوشت

$$u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct). \quad (4)$$

این جواب به جواب دالامبر^۲ معادله موج (۱) مشهور می باشد.

روش ارائه شده در این بخش ظریفتر از روش ارائه شده در بخش ۳.۱۱ است. اما همان طوری که خواهیم دید روش دالامبر در برخی موارد خاص بکار می رود و حال آنکه روش سری فوریه در مسائل مختلف کاربرد دارد.

حال جواب دالامبر را با توجه به شرایط اولیه بخش ۳.۱۱، یعنی

$$u(x, 0) = f(x) \quad (5)$$

و

$$u_t(x, 0) = g(x) \quad (6)$$

به دست می آوریم. با مشتقگیری از (۴) می یابیم

$$u_t(x, t) = c\phi'(x + ct) - c\psi'(x - ct), \quad (7)$$

که در آن پریمها به ترتیب بیانگر مشتق نسبت به کل عبارت $x + ct$ و $x - ct$ می باشند. (۴) الی (۷) داریم

$$u(x, 0) = \phi(x) + \psi(x) = f(x) \quad (8)$$

و

$$u_t(x, 0) = c\phi'(x) - c\psi'(x) = g(x). \quad (9)$$

حال با تقسیم نمودن طرفین رابطه (۹) بر c و انتگرالگیری نسبت به x می یابیم

۲- ژان لورن دالامبر (Jean Le Rond d'Alembert)، ۱۷۱۷ الی ۱۷۸۳، ریاضیدان فرانسوی، که به خاطر آثار مهمش در مکانیک شهرت دارد.

$$\phi(x) - \psi(x) = k(x_0) + \frac{1}{c} \int_{x_0}^x g(s) ds ; k(x_0) = \phi(x_0) - \psi(x_0). \quad (10)$$

هرگاه طرفین روابط (۸) و (۱۰) را باهم جمع کنیم، آنگاه ψ حذف شده و با تقسیم نمودن طرفین رابطه حاصل بر ۲ داریم

$$\phi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(s) ds + \frac{1}{2} k(x_0). \quad (11)$$

مشابهاً، با کم کردن (۱۰) از (۸) و تقسیم نمودن طرفین رابطه حاصل بر ۲ می یابیم

$$\psi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(s) ds - \frac{1}{2} k(x_0). \quad (12)$$

با جاگذاری $x + ct$ به جای x در (۱۱) و انتگرالگیری از x_0 تا $x + ct$ درمی آید. همینطور با جایگذاری $x - ct$ بجای x در (۱۲)، آنگاه انتگرالگیری با حذف علامت منفی، از x_0 تا $x - ct$ خواهد بود یا با در نظر گرفتن علامت منفی انتگرال از $x - ct$ تا x_0 صورت می پذیرد. نهایتاً می یابیم

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds. \quad (13)$$

هرگاه سرعت اولیه صفر باشد، آنگاه (۱۳) به صورت زیر درمی آید

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] \quad (14)$$

که با (۱۷) بخش ۱۱. ۳ مطابقت دارد. باتوجه به شرایط کرانه ای (۲) می توان نشان داد که تابع f باید تابعی فرد با دوره تناوب $2L$ باشد.

این نتیجه نشان می دهد که در شرایط اولیه و کرانه ای جواب را به طور منحصر بفرد مشخص می نماید.

جواب معادله موج به کمک روشهای تبدیل لاپلاس و فوریه در بخشهای ۱۱. ۱۲ و ۱۱. ۱۴ ارائه شده اند.

مسائل بخش ۱۱. ۴

با استفاده از (۱۴) نمودار (ازنوع شکل ۲۵۶ بخش ۱۱. ۳) انحراف $u(x, t)$ ی نخ مرتعش (به طول $L = ۱$ ، با نقاط انتهایی ثابت و $c = ۱$) با سرعت اولیه صفر و انحراف اولیه $f(x)$ ، داده شده در زیر را رسم کنید. در این ترسیمات توجه کنید که k کوچک مثلاً $k = ۰/۰۱$ است.

$$f(x) = kx(1-x). \quad ۱ \quad f(x) = k \sin 2\pi x. \quad ۲ \quad f(x) = k(x-x^2). \quad ۳$$

$$f(x) = k(x^2-x^3). \quad ۶ \quad f(x) = k \sin^2 \pi x. \quad ۵ \quad f(x) = k(x^2-x^4). \quad ۴$$

۷ نشان دهید که c برابر سرعت دو موج مفروض در (۴) می باشد.

۸. هرگاه میله فولادی به طول ۲ متر و به وزن $۰/۸$ نیوتن (حدوداً $۰/۱۸$ پوند) و بوسیله نیروی برابر

با ۲۰۰ نیوتن (حدوداً ۴۵ پوند) کشیده شده باشد، C سرعت موج پیموده شده چقدر است؟

۹. فرکانسهای توابع ویژه مساله ۸ چقدر است؟

۱۰. معادله

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - \gamma^2 u$$

که در آن γ^2 ثابت، را با توجه به اینکه شرط اولیه برابر $f(x)$ و سرعت اولیه برابر صفر باشد حل کنید.
 ۱۱. با توجه به شرایط کرانه ای (۲) بخش ۱۱.۳ نشان دهید که تابع f در رابطه (۱۴) این بخش، باید تابعی فرد و با دوره تناوب $2L$ باشد.

با استفاده از تبدیلات داده شده، هریک از معادلات زیر را حل کنید.

$$u_{xy} - u_{yy} = 0 \quad (v = x, z = x + y) \quad . 12$$

$$xu_{xy} = yu_{yy} + u_y \quad (v = x, z = xy) \quad . 13$$

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \quad (v = x, z = x + y) \quad . 14$$

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \quad (v = x, z = x - y) \quad . 15$$

$$u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} = 0 \quad (v = x + y, z = 2x - y) \quad . 16$$

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0 \quad (v = x + y, z = 3x + y) \quad . 17$$

انواع و صورت متعارف معادلات با مشتقات جزئی خطی

معادله

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \quad (15)$$

رایبضی گون نامند، اگر $AC - B^2 > 0$ ، سهمی گون گویند هرگاه $AC - B^2 = 0$ ، و هذلولی گون می نامند اگر $AC - B^2 < 0$ [در اینجا A, B, C توابعی از x و y می باشند، و همچنین ممکن است معادله (۱۵) در قسمتهای مختلف صفحه xy از انواع مختلف باشد، یعنی از نوع بیبضی گون، سهمی گون و هذلولی گون باشد].

۱۸. نشان دهید که

معادله لاپلاس $u_{xx} + u_{yy} = 0$ یک معادله بیبضی گون است،

معادله گرما $u_t = c^2 u_{xx}$ یک معادله سهمی گون است،

معادله موج $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ یک معادله هذلولی گون است،

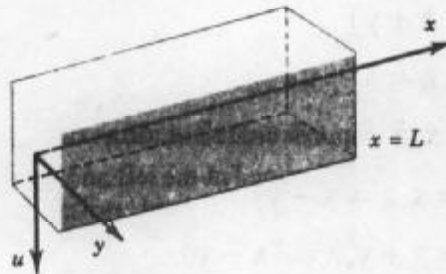
معادله تریکومی $yu_{xx} + u_{yy} = 0$ از نوع آمیخته است (در نیم صفحه فوقانی بیبضی گون، روی محور x ها سهمی گون، و در نیم صفحه تحتانی هذلولی گون است).

۱۹. هرگاه (۱۵) هذلولی گون باشد، می توان آن را با قراردادن $v = \Phi(x, y)$ و $z = \Psi(x, y)$ که در

آن ثابت $\Phi = \text{ثابت}$ و $\Psi = \text{ثابت}$ جوابهای $y = y(x)$ معادله $Ay'' - 2By' + C = 0$ می باشند (ر. ک. مرجع [۹])، به صورت نرمال $u_{vz} = F^*(v, z, u, u_v, u_z)$ تبدیل کرد. نشان دهید که در مورد معادله موج (۱)،

$$\Phi = x + ct, \quad \Psi = x - ct.$$

۲۰. هرگاه (۱۵) سهمی گون باشد، آنگاه با جایگزین کردن $v = x$ ، $z = \Psi(x, y)$ ، با Ψ تعریف شده در مساله ۱۹، معادله به صورت نرمال $u_{vv} = F^*(v, z, u, u_v, u_z)$ در می آید. درستی این نتیجه را برای معادله $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$ تحقیق کنید.



شکل ۲۵۷. میله تغییر شکل نیافته در مساله ۲۱

ارتعاشات میله. می توان نشان داد که ارتعاشات قائم آزاد کوچک یک میله یکنواخت (شکل ۲۵۷) توسط معادله مرتبه چهارم (ر. ک. مرجع [۹])

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \tag{۱۶}$$

بیان می شود. در این معادله $c^2 = \frac{EI}{\rho A}$ ($E = \text{مدویل کشسانی یانگ}$ ، $I = \text{گشتاور ماند مقطع نسبت به محور } y \text{ ها}$ ، $\rho = \text{چگالی}$ و $A = \text{مساحت مقطع}$).

۲۱. با قرار دادن $u = F(x)G(t)$ در (۱۶) به کمک روش جداسازی متغیرها، نشان دهید

$$\frac{F^{(4)}}{F} = -\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \beta^4 = \text{ثابت}$$

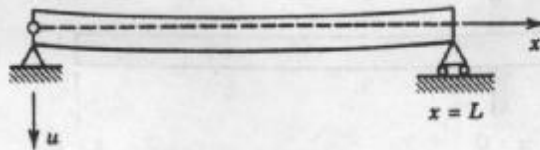
$$F(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x + c \cosh \beta x + D \sinh \beta x,$$

$$G(t) = a \cos c\beta^2 t + b \sin c\beta^2 t.$$

۲۲. جوابهای $u_n = F_n(x) G_n(t)$ معادله (۱۶) متناظر با سرعت اولیه صفر را طوری بیابید که در شرایط کرانه ای زیر صدق کند (ر. ک. شکل ۲۵۸):

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \quad (\text{دو انتهای میله در هر لحظه } t \text{ با تکیه گاه ساده می باشند})$$

$$u_{xx}(0, t) = 0, \quad u_{xx}(L, t) = 0 \quad (\text{گشتاورها صفر اند، در نتیجه انحنا در دو انتهای میله صفر است})$$



شکل ۲۵۸ . میله در مساله ۲۲

۲۳. جوابی از (۱۶) را بیابید که در شرایط مساله (۲۲) و شرط اولیه

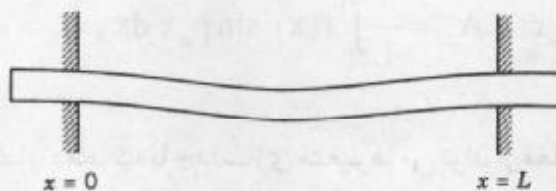
$$u(x, 0) = f(x) = x(L - x)$$

صدق کند.

۲۴. نتایج مساله ۲۳ و مساله ۷ بخش ۱۱.۳ را مقایسه نمایید. اختلاف بنیادی بین فرکانسهای مدهای

نرمال ارتعاشات نخ و ارتعاشات میله برابر چیست؟

۲۵. هرگاه دو انتهای میله گیردار باشد، شرایط کرانه ای برابر چیست؟ (ر. ک. شکل ۲۵۹).



شکل ۲۵۹ . میله در مساله ۲۵

۲۶. نشان دهید که $F(x)$ در مساله ۲۱ در صورتی در شرایط مساله ۲۵ صدق می کند که βL ریشه

معادله

$$\cosh \beta L \cos \beta L = 1 \quad (17)$$

باشد.

۲۷. جواب تقریبی معادله (۱۷) را بیابید.

۲۸. هرگاه میله در انتهای چپ گیردار و انتهای دیگر آزاد (شکل ۲۶) و شرایط کرانه ای به صورت

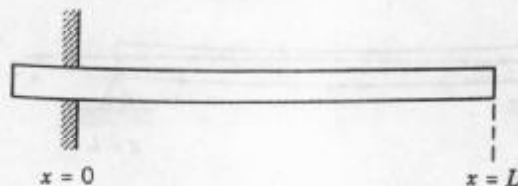
$$u(0, t) = 0, \quad u_x(0, t) = 0, \quad u_{xx}(L, t) = 0, \quad u_{xxx}(L, t) = 0$$

باشد، آنگاه نشان دهید که $F(x)$ در مساله ۲۱ در صورتی در این شرایط صدق می کند که βL ریشه

معادله

$$\cosh \beta L \cos \beta L = -1 \quad (18)$$

باشد.



شکل ۲۶۰. میله در مساله ۲۸.

۲۹. جواب تقریبی معادله (۱۸) را بیابید.

۳۰. ارتعاشات طولی یک میله یا تیر ارتجاعی در جهت محور x ها در معادله موج $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ که آن $c^2 = \frac{E}{\rho}$ ، صدق می کند (ر. ک، Tolstov، [C11]). هرگاه میله در یک انتها، $x = 0$ ، ثابت و در انتهای دیگر، $x = L$ ، آزاد باشد، آنگاه داریم

$$u(0, t) = 0, u_x(L, t) = 0$$

(زیرا نیرو در انتهای آزاد صفر است). نشان دهید که حرکت متناظر با تغییر مکان اولیه $u(x, 0) = f(x)$ و سرعت اولیه صفر به صورت

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin p_n x \cos p_n ct; A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin p_n x dx, p_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L}$$

می باشد.

۳۱. (معادله آیری) نشان دهید که با جداسازی متغیرها می توان از معادله تریکومی (در مساله ۱۸) به معادله آیری $G'' - yG = 0$ رسید. (برای جوابها، ر. ک. مرجع [۱] فهرست شده در ضمیمه ۱. و همچنین ر. ک. به مساله ۳۰ واقع در انتهای فصل ۵.)

۱۱. ۵. حل معادله گرما به کمک سری فوری

بعد از حل معادله موج به حل معادله مهمی می پردازیم که به معادله گرما مشهور است. این

معادله به صورت زیر می باشد

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u; c^2 = \frac{K}{\sigma \rho}$$

که در آن $u(x, y, z, t)$ دمای درون جسم، c^2 ضریب نفوذ، K رسانای گرمایی، σ گرمای ویژه، و ρ چگالی جسم است، $\nabla^2 u$ لاپلاسیان u بوده و در مختصات کارتزین x, y, z چنین تعریف می شود

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

(مساله گرما در بخش ۹. ۸. مدلسازی شده است).

به عنوان کاربرد مهم، دمای یک میله نازک بلند یا سیمی را که با مقطع عرضی ثابت و همگن در طول محور x ها قرار دارد (شکل ۲۶۱) مورد مطالعه قرار می دهیم. علاوه بر آن فرض می کنیم سطح جانبی میله به طور کامل عایق پوش شده است، به قسمی که گرما تنها در جهت محور x ها جریان می یابد، در این صورت u فقط به x و t بستگی دارد، و معادله گرما به شکل معادله گرمای یک بعدی به صورت زیر درمی آید

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

با اینکه تنها تفاوت این معادله با معادله موج در مشتق u نسبت به زمان است ولی چنانچه مشاهده خواهیم کرد رفتار جوابهای معادله (۱) کاملاً متمایز از رفتار جوابهای معادله موج است.

حل معادله (۱) را به ازای برخی شرایط کرانه ای و اولیه مهم مورد بررسی قرار می دهیم. حالتی را در نظر می گیریم که دمای نقاط انتهایی $x = 0$ و $x = L$ میله صفر باشد، در این صورت شرایط کرانه ای به ازای هر t به صورت

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \quad (2)$$

می باشد و اگر دمای اولیه این میله، تابع مفروض $f(x)$ فرض شود آنگاه شرط اولیه عبارت است از

$$u(x, 0) = f(x) \quad (3)$$



شکل ۲۶۱. میله مورد بررسی

جواب $u(x, t)$ معادله (۱) را طوری می یابیم که در (۲) و (۳) صدق کند. در حل معادله گرما یک شرط اولیه کافی است، ولی در حل معادله موج بخش ۱۱.۳ نیاز به دو شرط اولیه داشتیم. برای حل معادله گرما از روش جداسازی متغیرها استفاده می کنیم. انجام این کار طی مراحل زیر صورت می پذیرد.

گام اول: دو معادله دیفرانسیل معمولی

با جایگذاری

$$u(x, t) = F(x) G(t) \quad (4)$$

در (۱) می یابیم $FG = c^2 F''G$ ، که در آن $\dot{G} = \frac{dG}{dt}$ و $F'' = \frac{d^2F}{dx^2}$. معادله حاصل را چنین

می نویسیم

$$\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} \quad (5)$$

عبارت طرف چپ (۵) فقط به t و عبارت طرف راست آن تنها تابعی از x می باشد. بنابراین متغیرها

از هم جدا شده اند. همانند بخش ۳.۱۱ نتیجه می شود که طرفین تساوی (۵) باید برابر مقدار ثابتی، مانند k ، باشند. می توان نشان داد که به ازای $k \geq 0$ تنها جواب $u = FG$ که در معادلات (۲) صدق می کند، $u \equiv 0$ است. به ازای مقدار منفی $k = -p^2$ از (۵) داریم

$$\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = -p^2.$$

با توجه به آن به دو معادله دیفرانسیل زیر می رسیم

$$F'' + p^2 F = 0 \tag{۶}$$

و

$$\dot{G} + c^2 p^2 G = 0. \tag{۷}$$

گام دوم. صدق نمودن شرایط کرانه ای

ابتدا معادله (۶) را در نظر می گیریم. جواب عمومی این معادله به صورت

$$F(x) = A \cos px + B \sin px \tag{۸}$$

می باشد. از شرایط کرانه ای (۲) نتیجه می شود که

$$u(0, t) = F(0) G(t) = 0$$

و

$$U(L, t) = F(L) G(t) = 0.$$

نظر به اینکه از $G \equiv 0$ ، $u \equiv 0$ حاصل می شود، بنابراین لازم است که $F(L) = 0$ ، $F(0) = 0$ و بنابر (۸)، $F(0) = A = 0$ و از آنجا $F(L) = B \sin pL$ ، با فرض $B \neq 0$ (در غیر این صورت $F \equiv 0$ ، و به جواب غیر صفر نمی رسیم) می یابیم $\sin pL = 0$. برای برقرار بودن این تساوی می توان چنین اختیار کرد $p = \frac{n\pi}{L}$ که در آن $n = 1, 2, \dots$. با فرض $B = 1$ ، جوابهای زیر را که در (۲) نیز صدق می کنند برای (۶) حاصل می شود

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}; \quad n = 1, 2, \dots$$

(همانند بخش ۳.۱۱ نیازی به بررسی مقادیر صحیح منفی n نداریم).

حال معادله دیفرانسیل (۷) را در نظر می گیریم. به ازای $p = \frac{n\pi}{L}$ این معادله به صورت

$$\dot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \quad \text{که در آن } \lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \text{ درمی آید. جواب عمومی این معادله به صورت}$$

$$G_n(t) = B_n e^{-\lambda_n^2 t}; \quad n = 1, 2, \dots$$

می باشد که در آن B_n عددی ثابت است. لذا توابع

$$u_n(x, t) = F_n(x) G_n(t) = B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n^2 t}; \quad n = 1, 2, \dots \tag{۹}$$

جوابهای معادله گرمای (۱) می باشند که در (۲) نیز صدق می کنند. این جوابها توابع ویژه مساله، متناظر با مقادیر ویژه $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$ می باشند.

گام سوم. جواب مساله اصلی

تاکنون جوابهای (۹) را برای معادله (۱) که در شرایط کرانه ای (۲) نیز صدق می کنند را یافته ایم. هم اکنون برای رسیدن به جوابی که در شرط اولیه (۳) صدق کند، به بررسی یک سری از این توابع ویژه به صورت

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n^2 t}; \lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \quad (10)$$

می پردازیم. با جایگزین کردن $t = 0$ در (۱۰) و از (۳) می یابیم

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x).$$

بنابراین برای برقرار بودن (۳) کافی است ضرایب B_n را برابر ضرایب سری سینوسی فوریه تابع $f(x)$ ، یعنی به صورت زیر اختیار کنیم [ر. ک. (۴) بخش ۱۰. ۵].

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx; n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

جواب فوق در صورتی که $f(x)$ بر بازه $0 \leq x \leq L$ به طور تکه ای پیوسته (ر. ک. بخش ۱. ۶)، و دارای مشتق یک طرفه^۳ در هر نقطه درونی این بازه باشد، برقرار است؛ یعنی، تحت این مفروضات سری (۱۰) با ضرایب (۱۱) جواب مساله فیزیکی مورد بحث می باشد. اثبات این مطلب که مستلزم دانستن همگرایی یکنواخت سریها می باشد، در آتی، در فرصتهای مناسب ارائه خواهد شد (مسائل ۲۳، ۲۴ پایان بخش ۱۴. ۶).

به علت وجود عامل نمایی، وقتی که t به سمت بینهایت میل کند، تمام جملات (۱۰) به سمت صفر میل می کنند. میزان تلاشی با n افزایش می یابد.

مثال ۱. دمای اولیه سینوسی

دمای $u(x,t)$ یک میله عایق پوش شده مسی به طول ۸۰ سانتیمتر که در دمای اولیه $100 \sin\left(\frac{\pi x}{80}\right)$ درجه سانتیگراد و دوانتهای آن در دمای $0^\circ C$ نگهداری شده است را محاسبه کنید. چه مدتی طول می کشد تا دمای میله به 50 درجه سانتیگراد نزول کند. ابتدا مقدار آنرا حدس بزنید و سپس محاسبه کنید. داده های فیزیکی میله مسی به قرار زیر است:

۳- به زیر نویس ۷، بخش ۲. ۱۰ مراجعه کنید.

چگالی برابر $\frac{gm}{cm^3}$ ۸/۹۲، گرمای ویژه برابر $\frac{cal}{gm \cdot C}$ ۰/۰۹۲ و رسانای گرمایی برابر $\frac{cal}{cm \cdot sec \cdot C}$ ۰/۹۵.

حل. باتوجه به شرط اولیه داریم

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{\lambda_0} = f(x) = 100 \sin \frac{\pi x}{\lambda_0}.$$

باتوجه به آن می یابیم

$$B_1 = 100, B_2 = B_3 = \dots = 0.$$

در (۱۰) نیاز به مقدار $\lambda_1^2 = \frac{c^2 \pi^2}{L^2}$ ، که در آن cm^2/sec $1/158$ ، $c^2 = \frac{K}{\sigma \rho} = \frac{0/95}{0/092} \times 8/92 = 1/158$ می باشد، داریم

$$\lambda_1^2 = 1/158 \times \frac{9/870}{6400} = 0/001785 [sec^{-1}].$$

جواب (۱۰) به صورت

$$u(x, t) = 100 \sin \frac{\pi x}{\lambda_0} e^{-0/001785 t}$$

می باشد. چنانچه

$$\frac{t = (\ln(0/5))}{(-0/001785)} = 388 \text{ (ثانیه)} \approx 6/5 \text{ (دقیقه)},$$

$$100 e^{-0/001785 t} = 50.$$

مثال ۲. سرعت تلاشی

مثال ۱ را در صورتی که دمای اولیه $100 \sin\left(\frac{3\pi x}{\lambda_0}\right)$ درجه سانتیگراد و سایر اطلاعات مانند مثال قبل باشند حل کنید.

حل. با جایگزینی $\lambda_3^2 = 9 \times 0/001785 = 0/01607$ در (۱۰) هم اکنون به جای $n = 1$ ، داریم $n = 3$. بنابراین جواب حاصل عبارت است از

$$u(x, t) = 100 \sin \frac{3\pi x}{\lambda_0} e^{-0/01607 t}.$$

از اینرو دمای ماکزیمم $50^\circ C$ در لحظه 43 رخ می دهد که خیلی سریع نیز می باشد (۹ برابر سریعتر از مثال ۱).

با انتخاب n بزرگتر، بازهم تلاشی سریعتر بوده و در یک مجموع یا سری از چنین جملاتی، هر جمله دارای میزان تلاشی بوده، و جملات به ازای n بزرگ، بعد از هر زمان کوتاه به طور عملی صفر می شوند. مثال بعدی از این نوع می باشد، و منحنی شکل ۲۶۲ متناظر با $t = 0/5$ تقریباً شبیه یک

منحنی سینوسی می باشد، یعنی به طور کاربردی این نمودار اولین جمله جواب می باشد.

مثال ۳. دمای اولیه مثلثی در یک میله

دما در یک میله عایق پوش شده ای را بیابید که دو سر آن در دمای صفر و دمای اولیه به صورت زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x < \frac{L}{2} \\ L-x & ; \quad \frac{L}{2} < x < L. \end{cases}$$

حل. از (۱۱) می یابیم

$$B_n = \frac{2}{L} \left(\int_0^{\frac{L}{2}} x \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \int_{\frac{L}{2}}^L (L-x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right). \quad (11^*)$$

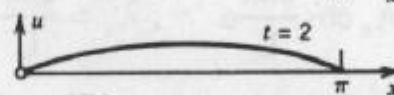
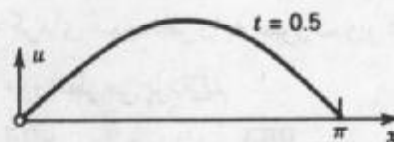
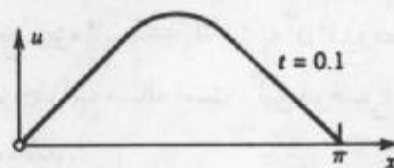
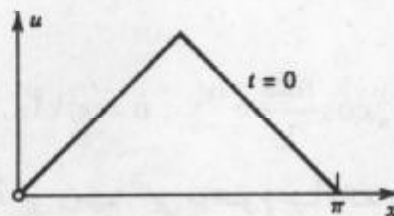
با انتگرالگیری نتیجه می شود که به ازای مقادیر زوج n ، $B_n = 0$ و

$$B_n = \frac{4L}{n^2 \pi^2} \quad (n = 1, 5, 9, \dots),$$

$$B_n = -\frac{4L}{n^2 \pi^2} \quad (n = 3, 7, 11, \dots).$$

ر.ک. مثال ۱ بخش ۱۰. ۵ که در آن $k = \frac{L}{\pi}$ می باشد. در نتیجه جواب عبارت است از

$$u(x,t) = \frac{4L}{\pi^2} \left[\sin \frac{\pi x}{L} \exp \left[-\left(\frac{c\pi}{L} \right)^2 t \right] - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi x}{L} \exp \left[-\left(\frac{3c\pi}{L} \right)^2 t \right] + \dots \right].$$



شکل ۲۶۲ جواب مثال ۳ به ازای $L = \pi$ و $c = 1$ و مقادیر مختلف t

شکل ۲۶۲ نشان می دهد که با افزایش t دما نزول می کند، زیرا حرارت تلف شده ناشی از خنک بودن دو انتها می باشد.

متعلم می تواند شکل ۲۶۲ را با شکل ۲۵۶ بخش ۱۱.۳ مقایسه کند و مشترکات را بیابد.

مثال ۴. میله با دوانتهای عایق پوش شده، مقدار ویژه صفر

جواب مسائل (۱)، (۳) و (۲) را با توجه به این که هر دوانتهای میله عایق پوش شده است

بیابید.

حل. تجارب فیزیکی نشان می دهد که شدت گرما با گرادیان دما متناسب می باشد. بنابراین هرگاه دوانتهای $x = 0$ و $x = L$ میله عایق پوش باشد، بطوریکه هیچگونه گرمایی نتواند از دوانتها عبور کند، شرایط کرانه ای به ازای هر t به صورت زیر درمی آید

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0. \quad (۲۳)$$

با توجه به $u(x, t) = F(x)G(t)$ می یابیم

$$u_x(0, t) = F'(0)G(t) = 0, \quad u_x(L, t) = F'(L)G(t) = 0.$$

با مشتقگیری (۸) می یابیم $F'(x) = -A p \sin px + B p \cos px$ و از آنجا $F'(0) = B p = 0$ همچنین $F'(L) = -A p \sin pL = 0$ از نتیجه نهایی می یابیم

$$p = p_n = \frac{n\pi}{L} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

با توجه به نتیجه حاصل و (۸) با فرض $A = 1$ ، $B = 0$ ، داریم

$$F_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

همانند بخش قبل به توابع ویژه

$$u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n^2 t}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (۱۲)$$

متناظر با مقادیر ویژه $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$ می رسم. این موضوع عیناً مانند بخش قبل است و تنها تفاوت در آن است که مقدار ویژه $\lambda_0 = 0$ و تابع ویژه ثابت u_0 نیز به آن افزوده می شود. هرگاه دمای اولیه $f(x)$ ثابت باشد، آنگاه تابع ثابت u_0 نیز جواب مساله است. این موضوع نشان می دهد که صفرنیزمی تواند یک مقدار ویژه، با تابع ویژه ثابت باشد.

هم اکنون جواب مساله گرمای موردنظر را به صورت زیر در نظر می گیریم و با توجه به شرط

اولیه داده شده به محاسبه ضرایب موردنظر می پردازیم

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n^2 t}; \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}, \quad (۱۳)$$

با توجه به شرط اولیه (۳) داریم

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} = f(x).$$

هم اکنون ضرایب A_0 و A_n را برابر ضرایب کسینوسی $f(x)$ می‌گیریم [ر. ک. (۲) بخش ۱۰. ۵].

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx; \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

مثال ۵. دمای اولیه مثلثی یک میله با دوانتهای عایق پوش شده

دما را در میله مربوط به مثال ۳، با فرض اینکه دوانتهای میله عایق پوش شده باشد (بجای آنکه دوانتها در دمای صفر نگهداشته شده) را بیابید.

حل. برای دمای اولیه مثلثی می‌یابیم $A_0 = \frac{L}{4}$ و [ر. ک. مثال ۱، بخش ۱۰. ۵ که در آن $k = \frac{L}{4}$]

$$A_n = \frac{2}{L} \left[\int_0^{\frac{L}{4}} x \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \int_{\frac{L}{4}}^L (L-x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right]$$

$$= \frac{2L}{n^2 \pi^2} \left(2 \cos \frac{n\pi}{4} - \cos n\pi - 1 \right).$$

از اینرو جواب (۱۳) عبارت است از:

$$u(x, t) = \frac{L}{4} - \frac{\Lambda L}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{2^2} \cos \frac{\pi x}{L} \exp \left[- \left(\frac{\pi c}{L} \right)^2 t \right] + \frac{1}{6^2} \cos \frac{3\pi x}{L} \exp \left[- \left(\frac{3\pi c}{L} \right)^2 t \right] + \dots \right\}.$$

مشاهده می‌کنیم که با افزایش t ، عبارت فوق کاهش می‌یابد و u به سمت $\frac{L}{4}$ ($u \rightarrow \frac{L}{4}$)، مقدار متوسط دمای اولیه میل می‌کند. این مطلب امکان‌پذیر است زیرا هیچگونه گرمایی نمی‌تواند از دوانتهای میله عایق بندی شده خارج شود. برعکس، با سرد نمودن دوانتها در مثال ۳، افت دما را خواهیم داشت و $u \rightarrow 0$ همان دما در دوانتهای میله است.

جریان گرمای دو بعدی در حالت پایدار

معادله گرمای دو بعدی به صورت زیر بیان می‌شود [ر. ک. شروع این فصل]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

اگر جریان گرما پایدار باشد (یعنی، مستقل از زمان باشد)، آنگاه $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ و معادله گرما به معادله

لاپلاس

۴- این معادله مهم در بخش ۸.۶ آمده است و بیشتر در بخشهای ۹.۱۱، ۱۱.۱۱، ۱۲.۱۱، ۱۲.۱۲، ۵.۱۲ و در فصل ۱۷ مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (15)$$

تبدیل می شود. در این صورت، یک مساله گرما شامل معادله گرما (۱۵) در یک ناحیه R واقع در صفحه xy و شرط کرانه ای مفروض بر منحنی C کران R می باشد. چنین مساله ای را یک مساله با مقدار کرانه ای می نامند.

یک مساله با مقدار کرانه ای را مساله دیریکله نامند هرگاه مقدار u بر C مشخص باشد. یک مساله با مقادیر کرانه ای را یک مساله نیومن u در جهت قائم نامیم اگر $u_n = \frac{\partial u}{\partial n}$ بر C مشخص باشد. یک مساله با مقادیر کرانه ای را مساله آمیخته نامند هرگاه بر قسمتی از C ، u و بر قسمت دیگر از C ، u_n مشخص باشد.

مساله دیریکله در یک مستطیل R (شکل ۲۶۳). مساله دیریکله (۱۵) را در مستطیل R (شکل ۲۶۳)، با فرض اینکه دمای $u(x,y)$ بر سمت فوقانی برابر با تابع مفروض $f(x)$ و در سه طرف دیگر مستطیل صفر باشد، حل کنید.

حل این مساله به روش جداسازی متغیرها صورت می پذیرد. با جایگزینی

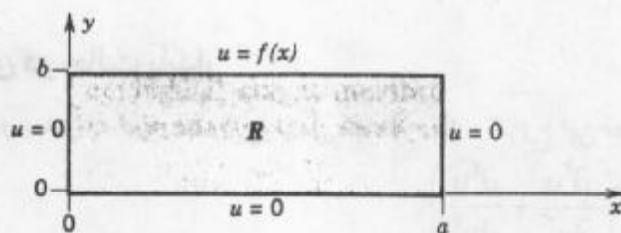
$$u(x,y) = F(x)G(y)$$

در (۱۵) و تقسیم نمودن طرفین آن بر FG می یابیم

$$\frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{1}{G} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = -k.$$

از مطلب فوق و شرایط کرانه ای داریم

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + kF = 0 ; F(0) = 0, F(a) = 0.$$



شکل ۲۶۳. مستطیل R و مقادیر کرانه ای مفروض

این موضوع نشان می دهد که $k = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ و متناظر با آن جوابهای غیر بدیهی زیر را داریم

$$F(x) = F_n(x) = \sin \frac{n\pi}{a} x, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16)$$

معادله مربوط به G به صورت زیر درمی آید

$$\frac{d^2 G}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 G = 0,$$

که دارای جوابی به صورت زیر می باشد

$$G(y) = G_n(y) = A_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + B_n e^{-\frac{n\pi y}{a}}.$$

حال شرط کرانه ای $u = 0$ ، بر قسمت پائینی R ، ایجاب می کند که $G_n(0) = 0$ ، یعنی $G_n(0) = A_n + B_n = 0$ یا $B_n = -A_n$. لذا داریم

$$G_n(y) = A_n (e^{\frac{n\pi y}{a}} - e^{-\frac{n\pi y}{a}}) = 2A_n \sinh \frac{n\pi y}{a}.$$

از این رابطه و (۱۶)، با فرض $2A_n = A_n^*$ ، توابع ویژه به صورت زیر حاصل می شود

$$u_n(x, y) = F_n(x)G_n(y) = A_n^* \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a}. \quad (17)$$

این مطلب در شرط کرانه ای $u = 0$ ، بر قسمتهای چپ، راست و پائینی نیز صدق می کند.

برای نمایش جوابی که در شرط کرانه ای

$$u(x, b) = f(x), \quad (18)$$

بر قسمت بالایی R ، صدق کند، سری نامتناهی زیر را در نظر می گیریم

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y).$$

از سری فوق، (۱۸) و (۱۷) با فرض $y = b$ می یابیم

$$u(x, b) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi b}{a}.$$

این نتیجه را می توان به صورت زیر نوشت

$$u(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* \sinh \frac{n\pi b}{a}) \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

این موضوع نشان می دهد که عبارت داخل پرانتز می تواند ضریب فوریه b_n از $f(x)$ باشد، یعنی

[ر. ک. (۴) بخش ۱۰. ۵]

$$b_n = A_n^* \sinh \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx.$$

باتوجه به رابطه فوق و (۱۷) مشاهده می کنیم که جواب مساله مورد نظر به صورت زیر می باشد

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} \quad (19)$$

که در آن

$$A_n^* = \frac{2}{a \sinh \left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx. \quad (20)$$

این جواب به طور صوری، بدون توجه به همگرایی و مجموع سریهای متناظر با u_{xx} ، u_{yy} و u به دست آمده است و در صورتی می تواند به عنوان جواب مورد استفاده قرار گیرد که f و f' پیوسته و f'' بطور نکه ای پیوسته بر بازه $0 \leq x \leq a$ باشد. اثبات این مطلب تا اندازه ای پیچیده و متکی بر همگرایی یکنواخت می باشد. اثبات این مطلب را می توان در مرجع [C۲] ضمیمه ۱ ملاحظه نمود.

پتانسیل الکترواستاتیکی، غشای کشسان

معادله حاکم بر پتانسیل شارژهای الکتریکی در هرناحیه که آزاد از شارژها است، معادله لاپلاس می باشد. از این رو مساله گرما در حالت پایدار نیز می تواند نوعی مساله پتانسیل الکترواستاتیکی تعبیر شود، که در آن (۱۹)، (۲۰) پتانسیل در مستطیل و پتانسیل بر سطح فوقانی برابر $f(x)$ و بر سایر سطوح پتانسیل برابر صفر باشد.

مساله موج بررسی شده در بخشهای ۷.۱۱ و ۸.۱۱ در حالت پایدار که به صورت (۱۵)، (۱۹) و (۲۰) در می آید. تغییر مکان یک غشای کشسان مستطیلی با سه پهلوئی ثابت واقع در صفحه xy و پهلوئی چهارم با تغییر مکان مفروض $f(x)$ می باشد.

مسائل بخش ۵.۱۱

۱. نمودار u_1 ، u_2 و u_3 [ر.ک. (۹)]، با $B_n = 1$ ، $c = 1$ و $L = \pi$ را به ازای $t = 0, 1, 2, 3$ به عنوان توابعی از x رسم کنید. رفتار این توابع را مقایسه کنید.
۲. چگونگی بستگی میزان تلاشی (۹) به گرمای ویژه، چگالی، و رسانایی گرمایی را، به ازای n ثابت، مشخص کنید.
۳. اگر اولین تابع ویژه (۹) از میله به میزان نصف مقدار اولیه در مدت 10 ثانیه تنزل یابد، میزان نفوذپذیری چقدر خواهد بود؟

مطلوب است دمای $u(x,t)$ میله ای نقره ای (به طول 10 cm ، مقطع ثابت 1 cm^2 ، چگالی $\frac{10}{6} \frac{\text{gm}}{\text{cm}^3}$ ، رسانایی گرمایی $\frac{1}{4} \frac{\text{cal}}{\text{cm sec } ^\circ\text{C}}$ ، گرمای ویژه $\frac{0.56}{\text{gm } ^\circ\text{C}} \frac{\text{cal}}{\text{gm } ^\circ\text{C}}$ که سطح جانبیش به طور کامل عایق پوش شده است، نقاط انتهایی آن در دمای ثابت صفر درجه سانتیگراد قرار گرفته و دمای اولیه برابر (بر حسب درجه سانتیگراد) $f(x)$ می باشد که در آن

$$\begin{array}{ll}
 f(x) = k \sin \frac{\pi x}{L} & .5 \\
 f(x) = \sin \frac{\pi x}{4} & .4 \\
 f(x) = 5 - |x - 5| & .7 \\
 f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x < 5 \\ 0 & ; \text{سایر جاها} \end{cases} & .6 \\
 f(x) = 0.1x(10-x) & .9 \\
 f(x) = 0.1x(100-x^2) & .8
 \end{array}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x < 2/5 \\ 2/5 & ; 2/5 < x < 7/5 \\ 10-x & ; 7/5 < x < 10 \end{cases} \quad . 10$$

۱۱. با فرض اینکه میله در مفروضات متن صدق کند و دو انتهای آن در دمای دائمی متمایز طولانی بیابید (بطور نظری: وقتی که $t \rightarrow \infty$)

۱۲. در مساله ۱۱، فرض کنید دمای اولیه برابر $u(x, 0) = f(x)$ باشد. نشان دهید که دما در هر لحظه $t > 0$ دلخواه به صورت $u(x, t) = u_I(x) + u_{II}(x, t)$ می باشد که در آن u_I همانند قبل تعریف می شود و

$$u_{II} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

که در آن

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - u_I(x)] \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{2}{n\pi} [(-1)^n U_V - U_I]$$

۱۳. (انتهای عایق پوش شده، شرایط کرانه ای عایق گرما) مطلوب است دمای $u(x, t)$ میله ای به طول L که به طور کامل از اطراف در دو انتهای $x = 0$ و $x = L$ عایق پوش شده است. اطلاعات فیزیکی: شار گرمایی که از مقاطع انتهایی می گذرد با مقادیر $\frac{\partial u}{\partial x}$ در همانجا متناسب است. نشان دهید که این موضوع هم با شرایط زیر متناظراند

$$u_x(0, t) = 0, u_x(L, t) = 0, u(x, 0) = f(x).$$

ثابت کنید که از روش ضربی جواب

$$u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

حاصل می شود، که در آن، بنا بر (۲) بخش ۱۰.۵

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

توجه کنید که وقتی $t \rightarrow \infty$ ، $u \rightarrow A_0$. آیا این با مشهودات فیزیکی شما مطابقت دارد؟

۱۴. دمای $u(x, t)$ میله مربوط به مساله ۱۳ را طوری بیابید که انتهای چپ در دمای صفر بوده و انتهای راست عایق پوش شده، و دمای اولیه برابر با ثابت U_0 باشد.

مطلوب است دمای میله توصیف شده در مساله ۱۳، در صورتی که $L = \pi$ ، $c = 1$ ، و

$$f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x \quad ۱۷ \qquad f(x) = x \quad ۱۶ \qquad f(x) = 1 \quad ۱۵$$

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x < \frac{1}{2}\pi \\ \pi - x & ; \quad \frac{1}{2}\pi < x < \pi \end{cases} \quad ۱۹ \qquad f(x) = x^2 \quad ۱۸$$

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x < \frac{1}{2}\pi \\ 0 & ; \quad \frac{1}{2}\pi < x < \pi \end{cases} \quad ۲۱ \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 < x < \frac{1}{2}\pi \\ 0 & ; \quad \frac{1}{2}\pi < x < \pi \end{cases} \quad ۲۰$$

۲۲. میله مورد نظر در مسائل ۴ تا ۱۰ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید که دمای نقاط انتهایی آن برای زمانی طولانی برابر ۱۰۰ درجه سانتیگراد باشد. آنگاه در لحظه، مثلاً در $t = 0$ ، دما در $x = L$ به طور ناگهانی به صفر درجه سانتیگراد تنزل کند و همین مقدار بماند، ضمن آنکه دما در $x = 0$ کماکان ۱۰۰ درجه سانتیگراد باشد. دما در وسط میله در لحظات $t = 1, 2, 3, 10, 50$ ثانیه چقدر است؟

۲۳. (تشعشع در انتهای میله) میله ای به طول π که از پهلو عایق پوش شده و در $(1, c)$ ، که انتهای چپ در دمای صفر درجه سانتیگراد نگهداشته و انتهای راست بطور آزاد در هوای شامل دمای صفر درجه سانتیگراد قرار دارد اطلاعات فیزیکی: شرایط کرانه ای تشعشع عبارت است از

$$-u_x(\pi, t) = k[u(\pi, t) - u_0]$$

که در آن $u_0 = 0$ دمای احاطه شده توسط هوا و k ثابت، مثلاً، برای سادگی $k = 1$ می‌باشند. نشان دهید جوابی که در این شرایط کرانه ای صدق می‌کند، به صورت زیر می‌باشد

$$u(x, t) = \sin px e^{-p^2 t}$$

که در آن p یک جواب معادله $\tan p\pi = -p$ می‌باشد. بطور تریسیمی نشان دهید که این معادله دارای نامتناهی جوابهای مثبت p_1, p_2, p_3, \dots می‌باشد، که در آن $p_n > n - \frac{1}{4}$ و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n - n + \frac{1}{4}) = 0.$$

۲۴. (معادله گرمای غیر همگن) مساله شامل معادله

$$u_t - c^2 u_{xx} = Ne^{-\alpha x}$$

با شرایط (۲) و (۳) را در نظر می‌گیریم. در اینجا عبارت طرف راست ممکن است نمایش تلفات گرمای ناشی از تلاشی رادیواکتیو در میله باشد. نشان دهید که معادله این مساله را می‌توان با قرار دادن $u(x, t) = v(x, t) + w(x)$ و تعیین $w(x)$ به طوری که $v(0, t) = v(L, t) = 0$ ، $v(x, 0) = f(x) - w(x)$ به یک معادله همگن تبدیل نمود.

۲۵. (تشنع) هرگاه میله ذکر شده در متن که دو انتهای آن در محیط اطراف خود که در درجه حرارت صفر است شروع به تشنوع کند، آنگاه معادله حاکم بر چنین پدیده ای به صورت زیر می باشد

$$v_t = c^2 v_{xx} - \beta v.$$

نشان دهید که با قرار دادن $v(x, t) = u(x, t)w(t)$ این معادله را می توان به صورت (۱) درآورد.

۲۶. _____ . $v(L, t) = 0, v(0, t) = 0, v_t = c^2 v_{xx} - v (0 < x < L, t > 0)$

می باشد را در نظر می گیریم. با قرار دادن $v(x, t) = u(x, t)w(t)$ ، w را طوری بیابید که u در $v(x, 0) = f(x)$ را که در آن عبارت $-v$ انتقال گرما در محیط اطراف که با درجه حرارت صفر است (۱۰) و (۱۱) صدق کند.

۲۷. (شار گرمایی) شار گرمایی $\phi(t) = -Ku_x(0, t)$ در $x = 0$ برای جواب (۱۰) برابر چیست؟ توجه کنید که وقتی $t \rightarrow \infty, \phi(t) \rightarrow 0$. آیا بطور فیزیکی این مطلب قابل توجیه است؟

۲۸. مطلوب است حل مساله (۱)، (۲) و (۳) با $L = \pi$

$$f(x) = \begin{cases} U_0 = \text{ثابت} & ; \quad 0 < x < \frac{\pi}{4}, \\ 0 & ; \quad \frac{\pi}{4} < x < \pi. \end{cases}$$

۲۹. هرگاه میله مذکور در مساله ۲۸ شامل دو قسمت آهنی (واحد $c^2 = 0/16$ Cgs) با دمای اولیه 20° درجه سانتیگراد و صفر نسبت به اتصال کامل در $t = 0$ باشد. درجه حرارت تقریبی در وجه مشترک آنها در $t = 10, 20, 30$ ثانیه برابر چیست؟ (تنها جمله اول جواب را به کار برید.)

۳۰. (میله باتولید گرما) هرگاه گرمای تولید شده در یک میزان ثابت در سراسر میله به طول $L = \pi$ با دمای اولیه $f(x)$ و انتهای $x = 0$ و $x = \pi$ که در دمای صفر قرار گرفته اند، باشد معادله گرما به صورت $u_t = c^2 u_{xx} + H$ می باشد که در آن ثابت $H > 0$. این مساله را حل کنید. راهنمایی. قرار دهید $u = v - Hx \frac{(x - \pi)}{2c^2}$.

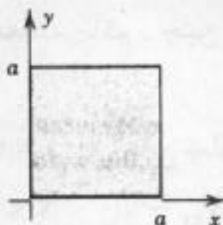
مسائل دوبعدی

۳۱. (معادله لاپلاس) مطلوب است محاسبه پتانسیل در یک مربع $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$ هرگاه قسمت فوقانی آن در پتانسیل $\sin \frac{1}{4} \pi x$ و طرفهای دیگر در پتانسیل صفر قرار گرفته باشند.

۳۲. مطلوب است محاسبه پتانسیل در مستطیل $0 \leq x \leq 20, 0 \leq y \leq 40$ که قسمت فوقانی آن در پتانسیل 22° ولت و پهلوهای دیگر در پتانسیل صفر نگهداشته شده باشند.

۳۳. (جریان گرما در یک صفحه) رویه های یک صفحه مربعی نازک (شکل ۲۶۴، که در آن $a = 24$) به طور کامل عایق پوش شده است. قسمت فوقانی در دمای $20^\circ C$ و دیگر پهلوها در دمای $20^\circ C$

قرار گرفته اند. مطلوب است دمای حالت پایدار $u(x,t)$ در این صفحه مربعی شکل.



شکل ۲۶۴. صفحه مربعی

۳۴. معادله گرمای دوبعدی

$$u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy})$$

برای یک صفحه نازک مربعی شکل ۲۶۴ به ضلع $a = \pi$ به قسمی که پهلوهای قائم آن در درجه حرارت $u = 0$ و دو ضلع افقی آن عایق پوش شده است را بیابید.

۳۵. فرمولهایی مشابه با (۱۹)، (۲۰)، برای توزیع دما در مستطیل R مذکور در متن را وقتی که طرف پائین R در دمای $f(x)$ و سه طرف دیگر در دمای صفر قرار گرفته باشند را بیابید.

۳۶. مطلوب است دمای حالت پایدار صفحه مفروض در مساله ۳۳، هرگاه قسمت پائینی در $U_0^\circ C$ ، بالائی در $U_1^\circ C$ ، و دو طرف دیگر در دمای صفر درجه سانتیگراد نگهداشته شده است. راهنمایی. مساله را به دو مساله که دمای کرانه ای بر سه طرف هر کدام از مسائل برابر با صفر باشد تبدیل کنید.

۳۷. (مساله مقدار کرانه ای آمیخته) مطلوب است دمای حالت پایدار در صفحه مفروض در مساله ۳۳ که در آن طرفهای بالایی و پائینی به طور کامل عایق پوش شده، طرف چپ در دمای صفر درجه سانتیگراد، و طرف چپ در دمای $f(y)^\circ C$ قرار گرفته اند.

۳۸. (تشنع) مطلوب است دمای حالت پایدار در مستطیل مفروض شکل ۲۶۳ که در آن طرفهای بالا و چپ به طور کامل عایق پوش شده و طرف راست در حال تشنع در محیط اطراف با دمای صفر مطابق با $u_x(a,y) + hu(a,y) = 0$ می باشد که در آن $h > 0$. (در حال این مساله به علت آنکه در پهلوئی پائین هیچ شرطی نداریم به جوابهای متعدد می رسیم).

۳۹. (ناحیه نامتناهی) مطلوب است دمای حالت پایدار $u(x,y)$ در نوار $0 < x < \pi$ ، $y > 0$ که در آن طرفهای قائم به طور کامل عایق پوش شده و قسمت پائینی در دمای $f(x)$ نگهداشته شده است (فرض کنید که $|u|$ کراندار است).

۴۰. (مساله نیومن) معادله $\nabla^2 u = 0$ برای مستطیل شکل ۲۶۳ با شرایط کرانه ای نیومن $u_y(x,0) = f(x)$ و برطرف های دیگر $u_n = 0$ حل کنید.

۱۱. ۶ معادله گرما: حل مساله گرما به کمک انتگرالهای فوریه

در ادامه بحث به کمک انتگرالهای فوریه (بخش ۹.۱۰) به حل معادله گرما در یک میله نامتناهی می پردازیم. چنین میله هایی مدل های خوبی برای میله ها یا سیمهای بلند (به طول حدود ۱۰۰ متر) می باشد. به عبارت دیگر در این بخش می خواهیم جواب معادله گرمای

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

را برای میله ای که از هر دو طرف تا بینهایت ادامه داشته باشد و سطح جانبی آن عایق پوش شده است بیابیم. در حل چنین مساله ای شرایط کرانه ای نداریم و تنها شرط موجود شرط اولیه

$$u(x, 0) = f(x); \quad -\infty < x < \infty \quad (2)$$

می باشد که در آن $f(x)$ دمای اولیه مفروض میله در نقطه ای به طول x می باشد.

برای حل این مساله روند را همانند بخش گذشته شروع می کنیم، یعنی در معادله گرمای (۱)

قرار می دهیم $u(x, t) = F(x)G(t)$. با توجه به آن به دو معادله دیفرانسیل زیر می رسم

$$F'' + p^2 F = 0 \quad (3) \text{ ر.ك. (۶) بخش ۵.۱۱}$$

$$G' + c^2 p^2 G = 0. \quad (4) \text{ ر.ك. (۷) بخش ۵.۱۱}$$

جواب معادلات فوق به ترتیب عبارت است از

$$G(t) = e^{-c^2 p^2 t} \text{ و } F(x) = A \cos px + B \sin px$$

که در آن A و B دو عدد ثابت دلخواه هستند. بنابراین یک جواب معادله (۱) عبارت است از

$$u(x, t; p) = FG = (A \cos px + B \sin px) e^{-c^2 p^2 t}. \quad (5)$$

[همانند بخش گذشته، باید ثابت k را منفی اختیار کنیم، یعنی $k = -p^2$ ، زیرا مقادیر مثبت k منجر به حضور یک تابع نمایی صعودی در (۵) می گردد، که دارای معنی فیزیکی نیست.]

به جهت آنکه در (۲) تابع $f(x)$ متناوب فرض نشده است، طبیعی است که در این حالت انتگرال فوریه را به جای سری فوریه به کار می بریم. با توجه به اینکه در (۵) A و B دلخواه می باشند،

می توان این مقادیر را به صورت تابعی از p در نظر گرفت و نوشت $A = A(p)$ و $B = B(p)$. حال، چون معادله گرما خطی و همگن می باشد، در این صورت تابع

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} u(x, t; p) dp = \int_0^{\infty} [A(p) \cos px + B(p) \sin px] e^{-c^2 p^2 t} dp \quad (6)$$

جواب معادله گرمای (۱) می باشد، مشروط بر اینکه این انتگرال موجود بوده و بتوان از آن دوبار نسبت به x و یک بار نسبت به t مشتق گرفت.

حال $A(p)$ و $B(p)$ را با توجه به شرط اولیه مشخص می نمایم. بدین منظور از (۶) و (۲) می یابیم

$$u(x, 0) = \int_0^{\infty} [A(p) \cos px + B(p) \sin px] dp = f(x). \quad (7)$$

از اینرو با استفاده از (۴) و (۵) بخش ۹.۱۰ ضرایب $A(p)$ و $B(p)$ را بر حسب $f(x)$ به صورت زیر به

دست می آوریم

$$A(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos pv \, dv, B(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin pv \, dv. \quad (۸)$$

بنابر (۱*) بخش ۱۰. ۱۱، انتگرال فوریه (۷) را با توجه به (۸) می توان نوشت

$$u(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(px - pv) \, dv \right] dp.$$

از $u(x, 0)$ به سادگی $u(x, t)$ را با جایگزین تابع نمایی در انتگرال به صورت زیر به دست می آید

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(px - pv) e^{-c'p't} \, dv \right] dp.$$

با فرض اینکه می توان ترتیب انتگرالگیری را عوض نمود، می یابیم

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \left[\int_0^{\infty} e^{-c'p't} \cos(px - pv) \, dp \right] dv \quad (۹)$$

در این صورت انتگرال داخل کروشه رامی توان به کمک فرمول

$$\int_0^{\infty} e^{-s't} \cos \psi bs \, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b't} \quad (۱۰)$$

با انتخاب $p = \frac{s}{c\sqrt{t}}$ به عنوان متغیر جدید انتگرالگیری و قراردادن

$$b = \frac{x - v}{2c\sqrt{t}}$$

از (۱۰) انتگرال داخلی حاصل می شود. در این صورت $\psi bs = (x - v)p$ و $ds = c\sqrt{t} \, dp$ پس (۱۰) چنین می شود:

$$\int_0^{\infty} e^{-c'p't} \cos(px - pv) \, dp = \frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{t}} \exp\left\{-\frac{(x - v)^2}{4c't}\right\}.$$

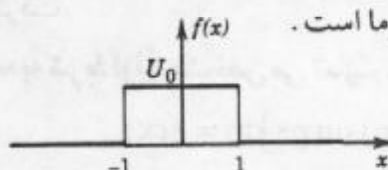
با جایگذاری این نتیجه در (۹) نمایش زیر به دست می آید

$$u(x, t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \exp\left\{-\frac{(x - v)^2}{4c't}\right\} \, dv. \quad (۱۱)$$

با انتخاب $Z = \frac{v - x}{2c\sqrt{t}}$ به عنوان متغیر انتگرالگیری نمایش دیگری به صورت زیر حاصل می شود

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2cz\sqrt{t}) e^{-z^2} \, dz. \quad (۱۲)$$

هرگاه $f(x)$ به ازای همه مقادیر x کراندار و در هر فاصله متناهی انتگرالپذیر باشد، می توان نشان داد (ر. ک. مرجع [C۱۲]) که تابع (۱۱) یا (۱۲) در معادله موج (۱) و شرط اولیه (۲) صدق می نماید. از اینرو جواب فوق مورد نظر ما است.



شکل ۲۶۵. دمای اولیه در مثال ۱

مثال ۱. دما در میله ای نامتناهی

مطلوب است دما در میله ای نامتناهی هر گاه دمای اولیه برابر

$$f(x) = \begin{cases} U_0 = \text{ثابت} & ; |x| < 1, \\ 0 & ; |x| > 1 \end{cases}$$

باشد (شکل ۲۶۵).

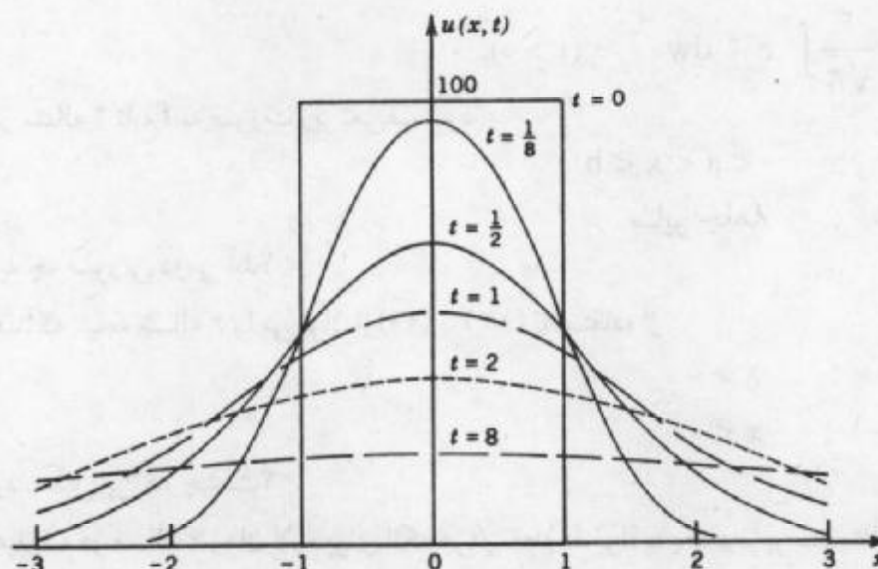
حل. از (۱۱) داریم

$$u(x,t) = \frac{U_0}{\sqrt{c\sqrt{\pi t}}} \int_{-1}^1 \exp\left\{-\frac{(x-v)^2}{4c^2 t}\right\} dv.$$

هر گاه متغیر انتگرالگیری z را که در بالا معرفی شده به کار ببریم، آنگاه انتگرالگیری نسبت به v از -1 تا 1 با انتگرالگیری نسبت به z از $\frac{-1-x}{\sqrt{c\sqrt{t}}}$ تا $\frac{1-x}{\sqrt{c\sqrt{t}}}$ متناظر می گردد، و

$$u(x,t) = \frac{U_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{-1-x}{\sqrt{c\sqrt{t}}}}^{\frac{1-x}{\sqrt{c\sqrt{t}}}} e^{-z^2} dz \quad (t > 0), \quad (13)$$

یادآوری شویم که این انتگرال، یک تابع مقدماتی نیست، اما می توان آن را به سادگی بر حسب تابع خطا، که مقادیر آن در جدول آمده است بیان نمود (جدول A۴ ضمیمه ۵ برخی از این مقادیر را در بردارد، جدولهای بزرگتر در مرجع [۱] ضمیمه ۱ فهرست شده اند. همچنین مسائل ۱۶ تا ۲۵ زیر را مشاهده کنید). شکل ۲۶۶، $u(x,t)$ را به ازای $U_0 = 100$ درجه سانتیگراد، $c^2 = 1 \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}$ و چند مقدار t نشان می دهد.



شکل ۲۶۶. جواب $u(x,t)$ مثال ۱ به ازای $U_0 = 100^\circ\text{C}$ ، $c^2 = 1 \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}$ و بعضی مقادیر t

مسائل بخش ۱۱. ۶

۱. دما در مثال ۱) با $U_0 = 100^\circ C$ و $c^2 = 1 \frac{cm^2}{sec}$ را در نقاط $x = 0/5$ ، $x = 1$ ، و $x = 1/5$ به صورت توابعی از t رسم کنید. آیا نتایج حاصل با مشهودات فیزیکی مطابقت دارد؟
۲. هرگاه

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x < 0, \end{cases}$$

آنگاه نشان دهید که (۱۲) به صورت زیر درمی آید

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{c\sqrt{t}}}^{\frac{x}{c\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz \quad (t > 0).$$

۳. نشان دهید که به ازای $x = 0$ جواب مساله (۲) مستقل از t می باشد. آیا می توان این نتیجه را از دلایل فیزیکی به دست آورد؟

۴. هرگاه میله از یک طرف نامتناهی باشد و از 0 تا ∞ ادامه داشته باشد، و دمای انتهای $x = 0$ ، 0 و دمای اولیه آن $f(x)$ باشد، آنگاه نشان دهید که دمای میله نیمه متناهی عبارت است از

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\frac{x}{c\sqrt{t}}}^{\infty} f(x + \tau w) e^{-w^2} dw - \int_{-\frac{x}{c\sqrt{t}}}^{\infty} f(-x + \tau w) e^{-w^2} dw \right] \quad (14)$$

که در آن $\tau = 2c\sqrt{t}$.

۵. با فرض آنکه $f(v)$ مذکور در (۱۱) فرد است، (۱۴) را از (۱۱) به دست آورید.

۶. هرگاه در مساله ۴، $f(x) = 1$ ، آنگاه نشان دهید که

$$u(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{c\sqrt{t}}} e^{-w^2} dw \quad (t > 0).$$

۷. هرگاه در مساله ۴ تابع f به صورت زیر تعریف شود

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 < a < x < b \\ 0 & ; \text{سایر جاها} \end{cases}$$

آنگاه (۱۴) به چه صورتی درمی آید؟

۸. نشان دهید که نتیجه مساله ۶ را می توان از (۱۱) یا (۱۲) با استفاده از

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$

به دست آورد. دلیل این کار چیست؟

۹. نشان دهید که در مساله ۶ زمان لازم برای آنکه هر دو نقطه دلخواه به یک دما برسند متناسب با مربع فواصل آنها از کرانه $x = 0$ است.

۱۰. (توزیع نرمال) با انتخاب $w = \sqrt{2}z$ به عنوان متغیر انتگرالگیری نشان دهید که (۱۲) به صورت

زیر درمی آید

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+cw\sqrt{2t}) e^{-\frac{w^2}{2t}} dw.$$

دانشجویان آشنا با نظریه احتمالات مشاهده می کنند که این مطلب منتهی به چگالی $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}w^2}$ توزیع نرمال می گردد. (ر.ک. بخش ۲۳. ۷).

مطلوب است جواب معادله گرمای (۱)، با استفاده از (۶) (درنمایش انتگرالی) با شرایط اولیه $u(x,0) = f(x)$ ، که در آن

۱۱. $f(x) = e^{-|x|}$ [با استفاده از مثال ۳ بخش ۱۰. ۹.]

۱۲. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ [با استفاده از (۱۵) بخش ۱۰. ۹.]

۱۳. $f(x) = \begin{cases} 1 & ; |x| < 1 \\ 0 & ; \text{سایر جاها} \end{cases}$ [با استفاده از مثال ۲ بخش ۱۰. ۹.]

۱۴. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ [با استفاده از مساله ۴ بخش ۱۰. ۹.]

۱۵. به کمک انتگرالگیری تحقیق کنید که u مذکور در مساله ۱۴ در شرط اولیه صدق می کند.

تابع خطا. تابع خطا با انتگرال

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-w^2} dw$$

تعریف می شود. این تابع در ریاضیات مهندسی مهم است. برای آشنا شدن با این تابع متعلم می تواند به حل مسائل زیر پردازد. (چند فرمول در ضمیمه ۳. ۱ گنجانده شده اند، (۳۵) تا (۳۷) را ملاحظه کنید.)

۱۶. تابع انتگرالده $\operatorname{erf} x$ را رسم کنید (منحنی حاصل را منحنی توزیع نرمال می نامند).

۱۷. نشان دهید که $\operatorname{erf} x$ فرد است.

۱۸. نشان دهید که (۱۳) را می توان به صورت زیر نوشت

$$u(x,t) = \frac{U_0}{2} \left[\operatorname{erf} \frac{1-x}{2c\sqrt{t}} + \operatorname{erf} \frac{1+x}{2c\sqrt{t}} \right] \quad (t > 0).$$

۱۹. نشان دهید که در مساله ۶ داریم $u(x,t) = \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2c\sqrt{t}} \right)$ که در آن $t > 0$.

۲۰. می توان ثابت کرد که $\operatorname{erf}(\infty) = 1$. با استفاده از این مطلب، نشان دهید که در مساله ۲،

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2c\sqrt{t}} \right).$$

۲۱. نشان دهید که

$$\int_a^b e^{-w^2} dw = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\operatorname{erf} b - \operatorname{erf} a), \quad \int_0^b e^{-w^2} dw = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} b.$$

۲۲. سری مکلورن $\operatorname{erf} x$ را با انتگرالگیری جمله به جمله از سری ملکورن تابع انتگرالده به دست آورید.

۲۳. $\operatorname{erf} x$ را به ازای $x = 0, 0.1, 0.5$ از مساله ۲۲ را محاسبه کنید و نتیجه را با مقادیر زیر که تا سه رقم اعشار حاصل شده اند مقایسه کنید.

$0.000, 0.112, 0.223, 0.329, 0.428, 0.520$

۲۴. نشان دهید که

$$\operatorname{erf} x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-s^2} ds.$$

۲۵. (ربع صفحه) از مساله ۱۹ نتیجه بگیرید که دما در ربع $x > 0$ و $y > 0$ با دمای اولیه ۱، عایق پوش شده، و دمای کرانه ها در 0 ، عبارت است از

$$u(x, y, t) = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{c\sqrt{t}}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{y}{\sqrt{c\sqrt{t}}}\right).$$

۷.۱۱ مدلسازی : غشا، معادله موج دو بعدی

به عنوان یک مساله مهم دیگر از مبحث ارتعاشات، حرکت یک غشای کشیده شده مانند پوسته طبل را مورد بررسی قرار می دهیم. بررسیهای مربوط به غشا مرتعش شبیه ارتعاش نخ است که در بخش های ۲.۱۱ مورد بررسی قرار گرفت است.

مفروضات فیزیکی زیر را در نظر می گیریم:

۱. جرم غشا برای واحد سطح ثابت می باشد («غشای همگن»). غشا بطور کامل انعطاف پذیر بوده و به اندازه ای نازک است که هیچگونه مقاومتی در برابر خمش از خود نشان نمی دهد.

۲. غشا کشیده شده و سپس در سراسر کرانه خود در صفحه xy ثابت نگهداشته شده است. کشش بر واحد طول T که بر اثر کشیدن غشا ایجاد شده، در همه نقاط و در تمام جهتها یکی می باشد و در عین حرکت تغییر نمی کند.

۳. تغییر مکان $u(x, y, t)$ غشا در اثنای حرکت نسبت به اندازه غشا کوچک است، و تمام زوایای میل کوچک می باشند.

گرچه در عمل این مفروضات نمی تواند تحقق یابند، ولی ارتعاشات کوچک عرضی یک غشای نازک به طور نسبتاً دقیقی در این مفروضات صدق می نمایند.

برای رسیدن به معادله دیفرانسیلی که حرکت غشا از آن پیروی می کند، مطابق شکل ۲۶۷

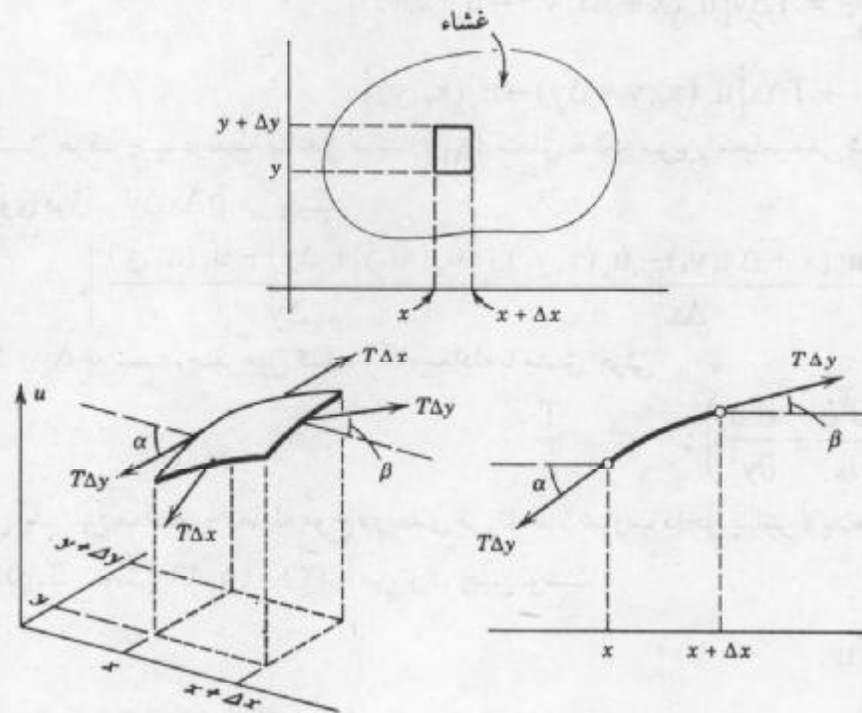
نیروهای وارد بر تکه کوچکی از غشا را مورد بررسی قرار می دهیم چون تغییر مکانهای غشا و زوایای میل کوچک می باشند، کناره های تکه مزبور به تقریب برابر Δx و Δy گرفته می شود. کشش T نیرو بر

واحد طول می باشد. لذا نیروهای وارد بر لبه های این تکه به ترتیب $T\Delta x$ و $T\Delta y$ می باشند. باتوجه به اینکه غشا بطور کامل انعطاف پذیر می باشد، این نیروها برغشا مماس می باشند. ابتدا مؤلفه های افقی نیروها را مورد بررسی قرار می دهیم. این مولفه ها از ضرب نیروها در کسینوس زوایای میل حاصل می شوند. بدلیل کوچک بودن این زوایا، کسینوسهایشان نزدیک ۱ می باشد. از اینرو مولفه های افقی نیروها در لبه های مقابل تقریباً یکسان هستند. لذا، حرکت ذرات غشا در امتداد افقی بسیار کوچک می باشد. باتوجه به این موضوع پی می بریم که حرکت غشا را می توان عرضی در نظر گرفت، یعنی می توان فرض نمود که هر ذره به طور قائم حرکت می نماید.

حال مولفه های قائم نیروها را مورد بررسی قرار می دهیم. این مولفه ها به ترتیب در طول لبه های راست و چپ عبارت است از^۵ (شکل ۲۶۷)

$$T \Delta y \sin \beta \quad \text{و} \quad -T \Delta y \sin \alpha$$

که در آن علامت منها بدان معنا است که جهت نیروی وارد بر لبه چپ به طرف پائین فرض شده است.



شکل ۲۶۷. غشای مرتعش

به دلیل کوچک بودن زوایا، می توان به جای سینوس آنها تانژانت شان را قرار داد. لذا برآیند دو مولفه قائم آنها عبارت اند از

۵- توجه کنید که زاویه میل در طول لبه ها تغییر می کند، و α و β مقادیر آن زاویه در نقطه ای مناسب از لبه های مورد نظر می باشند.

$$\begin{aligned} T\Delta y(\sin\beta - \sin\alpha) &\approx T\Delta y(\tan\beta - \tan\alpha) \\ &= T\Delta y[u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_r)] \end{aligned} \quad (۱)$$

که در آن اندیس x ، مشتق جزئی نسبت به آن متغیر را نشان می‌دهد و y_1 و y_r مقادیری بین y و $y + \Delta y$ می‌باشند. همینطور، برآیند مولفه‌های قائم نیروی وارد بر دولبه دیگر این تکه عبارت اند از

$$T\Delta x[u_y(x_1, y + \Delta y) - u_y(x_r, y)] \quad (۲)$$

که در آن x_1 و x_r مقادیری بین x و $x + \Delta x$ می‌باشند.

در این مرحله قانون دوم نیوتن را برای این معادله به کار می‌گیریم. بنا به قانون دوم نیوتن

(ر.ک. بخش ۵.۲)، مجموع نیروهای وارده بر ناحیه مورد نظر برابر $\rho\Delta A$ ، جرم تکه مزبور، در

شتاب $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ است؛ که در آن ρ چگالی غشای منحرف نشده بر واحد مساحت و $\Delta A = \Delta x\Delta y$ مساحت تکه، قبل از منحرف شدن، می‌باشد. ازاینرو

$$\begin{aligned} \rho\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= T\Delta y[u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_r)] \\ &\quad + T\Delta x[u_y(x_1, y + \Delta y) - u_y(x_r, y)] \end{aligned}$$

که در آن مشتق طرف چپ در نقطه مناسبی مانند (\bar{x}, \bar{y}) متعلق به تکه مزبور محاسبه می‌شود. از تقسیم طرفین تساوی فوق بر $\rho\Delta x\Delta y$ می‌یابیم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \left[\frac{u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_r)}{\Delta x} + \frac{u_y(x_1, y + \Delta y) - u_y(x_r, y)}{\Delta y} \right]$$

چنانچه Δx و Δy به سمت صفر میل کنند، آنگاه معادله با مشتق جزئی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \quad c^2 = \frac{T}{\rho} \quad (۳)$$

به دست می‌آید. این معادله را معادله موج دوبعدی می‌نامند. عبارت داخل پرانتز لاپلاسین $\nabla^2 u$ تابع u می‌باشد (ر.ک. بخش ۵.۱۱). (۳) را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u. \quad (۳')$$

در بخش آتی به حل این معادله خواهیم پرداخت.

۸.۱۱ غشای مستطیلی. استفاده از سری فوریه دوگانه

برای حل مساله غشای مرتعش، باید جوابی مانند $u(x, y, t)$ از معادله موج دوبعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (۱)$$

را که در شرط کرانه ای

$$u = 0 \text{ بر کران غشا به ازای هر } t \geq 0, \quad (2)$$

و شرایط اولیه

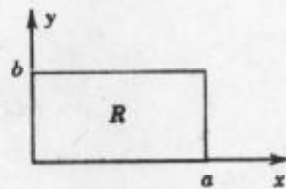
$$u(x, y, 0) = f(x, y) \quad [f(x, y) \text{ تغییر مکان اولیه مفروض}] \quad (3)$$

و

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x, y) \quad [g(x, y) \text{ سرعت اولیه مفروض}] \quad (4)$$

صدق می کند به دست آوریم. $u(x, y, t)$ تغییر مکان نقطه (x, y) را از وضعیت تعادل $u = 0$ در لحظه t را نشان می دهد. مشاهده می کنیم که شرایط (۲) تا (۴) شبیه شرایطی هستند که در مورد نخ مرتعش داشتیم.

غشای مستطیلی R را که در شکل ۲۶۸ نشان داده شده است را به عنوان اولین مورد مهم مورد بررسی قرار می دهیم.



شکل ۲۶۸. غشای مستطیلی

گام اول. سه معادله دیفرانسیل معمولی

با اعمال روش ضربی ابتدا جوابهایی از معادله موج (۱) را که در شرط کرانه ای (۲) صدق می کنند مشخص می نمائیم. بدین منظور فرض کنید

$$u(x, y, t) = F(x, y)G(t). \quad (5)$$

با جایگزینی (۵) در معادله موج (۱) می یابیم

$$F\ddot{G} = c^2(F_{xx}G + F_{yy}G)$$

که در آن زیرنویسها مشتقات جزئی ونقطه ها مشتق نسبت به t را نشان می دهند. با تقسیم طرفین رابطه فوق بر c^2FG ، داریم

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{F}(F_{xx} + F_{yy}).$$

چون توابع طرف چپ وابسته به t می باشند و توابع طرف راست مستقل از t هستند، باید طرفین تساوی فوق برابر با یک مقدار ثابت باشند. با کمی دقت مشاهده می کنیم که تنها مقادیر منفی این مقدار ثابت منجر به جوابهایی می شوند که بدون آنکه همواره صفر باشند در شرط کرانه ای (۲) صدق می نمایند. اثبات درستی این مطلب همانند روشی است که در بخش ۱۱.۳ آمده است. چنانچه این

مقدار ثابت را با نماد v' نمایش دهیم، می یابیم

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{1}{F} (F_{xx} + F_{yy}) = -v'.$$

از رابطه فوق دو معادله دیفرانسیل خطی معمولی

$$\ddot{G} + \lambda^2 G = 0 \quad (6)$$

که در آن $\lambda = cv$ و معادله با مشتق جزئی دو متغیره

$$F_{xx} + F_{yy} + v^2 F = 0 \quad (7)$$

که به معادله هلمولتز^۶ دو بعدی مشهور می باشد، حاصل می شود.

هم اکنون روش ضریبی را برای معادله این هلمولتز به کار میگیریم. برای منظور فرض کنید

$$F(x, y) = H(x)Q(y). \quad (8)$$

با جایگذاری (۸) در (۷) می یابیم

$$\frac{d^2 H}{dx^2} Q = -\left(H \frac{d^2 Q}{dy^2} + v^2 H Q\right).$$

با تقسیم طرفین این تساوی بر HQ داریم

$$\frac{1}{H} \frac{d^2 H}{dx^2} = -\frac{1}{Q} \left(\frac{d^2 Q}{dy^2} + v^2 Q \right).$$

هر دو طرف تساوی فوق باید برابر یک عدد ثابت باشد. این ثابت باید منفی، مثلاً $-k^2$ ، باشد زیرا تنها مقادیر منفی منجر به جوابهایی غیرمتحد با صفر می شوند که در شرایط کرانه ای (۲) صدق می کنند. ازاینرو

$$\frac{1}{H} \frac{d^2 H}{dx^2} = -\frac{1}{Q} \left(\frac{d^2 Q}{dy^2} + v^2 Q \right) = -k^2.$$

ازاین تساوی دو معادله دیفرانسیل معمولی برای H و Q ، به صورت زیر حاصل می شوند

$$\frac{d^2 H}{dx^2} + k^2 H = 0 \quad (9)$$

و

$$\frac{d^2 Q}{dy^2} + p^2 Q = 0; \quad p^2 = v^2 - k^2. \quad (10)$$

گام دوم. صدق نمودن شرایط کرانه ای

جوابهای عمومی (۹) و (۱۰) عبارت است از

$$Q(y) = C \cos py + D \sin py \quad \text{و} \quad H(x) = A \cos kx + B \sin kx$$

۶-هرمان فن هلمولتز (Hermann von Helmholtz)، ۱۸۲۱-۱۸۹۴، فیزیکدان آلمانی که به خاطر آثار مهمش در ترمودینامیک، جریان سیال و اکوستیک معروف می باشد.

که در آن A, B, C, D مقادیر ثابت می باشند. از (۵) و (۲) پی می بریم که $F = HQ$ باید روی کرانه صفر باشد، که با $x = a, x = 0, y = 0, y = b$ متناظر می باشند [شکل ۲۶۸ را ملاحظه کنید]. این مطلب شرایط زیر را نتیجه می دهد

$$H(0) = 0, H(a) = 0, Q(0) = 0, Q(b) = 0.$$

باتوجه به این نتایج $H(0) = A = 0$ ، و بنابراین

$$H(a) = B \sin ka = 0.$$

باید B را مخالف صفر بگیریم، چون در غیر این صورت $H = 0$ و $F = 0$. با توجه به چنین فرضی می یابیم $\sin ka = 0$ یا $ka = m\pi$ ، یعنی به ازای هر عدد صحیح m

$$k = \frac{m\pi}{a}.$$

همینطور می توان استنتاج نمود که $C = 0$ و p باید به مقادیر $p = \frac{n\pi}{b}$ محدود شود که در آن n عددی صحیح است. از اینرو جوابهای زیر حاصل می شوند

$$Q_n(y) = \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \text{و} \quad H_m(x) = \sin \frac{m\pi x}{a}$$

که در آن $m, n = 1, 2, \dots$. (مانند حالت نخ مرتعش، لازم نیست که حالت های $\dots, -2, -1$ را m, n مورد بررسی قرار دهیم، چرا که جوابهای متناظر با این اعداد صرف نظر از یک ضریب -1 الزاماً همان جوابهای مربوط به m و n مثبت می باشند.) از اینرو توابع

$$F_{mn}(x, y) = H_m(x)Q_n(y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad m = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

جوابهایی از معادله (۷) می باشند که بر کرانه غشای مستطیلی برابر صفر هستند.

حال توابع ویژه و مقادیر ویژه را مورد بررسی قرار می دهیم. بدین منظور از (۷)، (۶) را پی

می گیریم. باتوجه به اینکه در (۱۰)، $p^2 = v^2 - k^2$ ، و در (۶)، $\lambda = cv$ می یابیم

$$\lambda = c\sqrt{k^2 + p^2}.$$

از اینرو با $k = \frac{m\pi}{a}$ و $p = \frac{n\pi}{b}$ در معادله دیفرانسیلی (۶) مقدار

$$\lambda = \lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad m = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

متناظر قرار می گیرد. باتوجه به آن جواب عمومی (۶) عبارت است از

$$G_{mn}(t) = B_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B_{mn}^* \sin \lambda_{mn} t.$$

در نتیجه توابع $u_{mn}(x, y, t) = F_{mn}(x, y)G_{mn}(t)$ ، که به صورت

$$u_{mn}(x, y, t) = (B_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B_{mn}^* \sin \lambda_{mn} t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (13)$$

نوشته می شوند با λ_{mn} ی که به (۱۲) بیان شده است، جوابهای معادله موج (۱) می باشند که بر کرانه غشای مستطیلی شکل ۲۶۸ صفر هستند. این توابع را توابع ویژه یا توابع مشخصه می نامند، و اعداد λ_{mn} مقادیر ویژه یا مقادیر مشخصه غشای مرتعش نامیده می شوند. فرکانس u_{mn} با $\frac{\lambda_{mn}}{2\pi}$ برابر می باشد.

در بحث توابع ویژه، جالب است توجه کنیم که بنا به آنکه a و b چه باشند، ممکن است چندین توابع F_{mn} دارای یک مقدار ویژه مشترک باشند. تعبیر فیزیکی این مطلب بدان معنی است که ممکن است ارتعاشاتی با فرکانس یکسان وجود داشته باشند که خطوط گرهی (منحنیهای حاصل از نقاطی بر غشا که فاقد حرکت می باشند) آنها کاملاً متمایز می باشند. این مطلب را با ارائه مثال زیر روشن می کنیم.

مثال ۱. مقادیر ویژه و توابع ویژه در غشای مربعی

غشای مربعی را که برای آن $a = b = 1$ ، در نظر می گیریم. با توجه به (۱۲) ملاحظه می کنیم که مقادیر ویژه عبارت است از

$$\lambda_{mn} = c\pi\sqrt{m^2 + n^2}. \quad (14)$$

از اینرو

$$\lambda_{nm} = \lambda_{mn}$$

ولی به ازای $m \neq n$ توابع ویژه متناظر

$$F_{nm} = \sin m\pi x \sin n\pi y \quad \text{و} \quad F_{mn} = \sin m\pi x \sin n\pi y$$

با یکدیگر تفاوت دارند. مثلاً به ازای $\lambda_{12} = \lambda_{21} = c\pi\sqrt{5}$ دو تابع

$$F_{12} = \sin 2\pi x \sin \pi y \quad \text{و} \quad F_{21} = \sin \pi x \sin 2\pi y$$

متناظر می شوند. بنابراین جوابهای مربوطه

$$u_{12} = (B_{12} \cos c\pi\sqrt{5}t + B_{12}^* \sin c\pi\sqrt{5}t)F_{12}$$

و

$$u_{21} = (B_{21} \cos c\pi\sqrt{5}t + B_{21}^* \sin c\pi\sqrt{5}t)F_{21}$$

به ترتیب دارای خطوط گرهی $y = \frac{1}{2}$ و $x = \frac{1}{2}$ می باشند (شکل ۲۶۹ را ملاحظه کنید). با انتخاب

$$B_{12} = 1 \quad \text{و} \quad B_{21} = B_{12}^* = B_{21}^* = 0 \quad \text{می یابیم}$$

$$u_{12} + u_{21} = \cos c\pi\sqrt{5}t (F_{12} + B_{21}F_{21}), \quad (15)$$

که ارتعاش دیگری متناظر با مقدار ویژه $c\pi\sqrt{5}$ را نشان می دهد. خط گرهی این تابع جواب معادله

$$F_{17} + B_{21}F_{21} = \sin \pi x \sin 2\pi y + B_{21} \sin 2\pi x \sin \pi y = 0$$

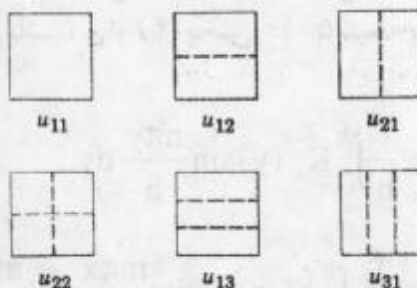
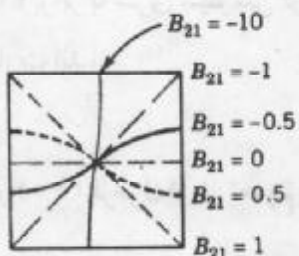
می باشد، یا، چون $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ،

$$\sin \pi x \sin \pi y (\cos \pi y + B_{21} \cos \pi x) = 0. \quad (16)$$

این جواب به مقدار B_{21} بستگی دارد (شکل ۲۷^o را مشاهده کنید).
 با توجه به (۱۴) ملاحظه می کنیم که حتی بیشتر از دو تابع می توانند با یک مقدار عددی λ_{mn} متناظر شوند. مثلاً، چهار تابع F_{17} ، F_{21} ، F_{18} ، F_{22} با مقدار $\lambda_{18} = \lambda_{21} = \lambda_{27} = \lambda_{17} = c\pi\sqrt{65}$ متناظر می باشند، زیرا $1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2 = 65$.

این مطلب از آنجا ناشی می شود که ۶۵ را به روشهای گوناگون می توان به صورت مجموع مربعات دو عدد طبیعی نوشت. طبق قضیه ای از گاوس، برای هر مجموعی از دو مربع که دست کم دو عامل اول آن به صورت $4n + 1$ ، که در آن n عدد صحیح مثبت است، باشد چنین وضعیتی اتفاق می افتاد. دز مورد اخیر،

$$65 = 5 \times 13 = (4 + 1)(12 + 1).$$



شکل ۲۶۹. خطوط گرهی جوابهای u_{11} ، u_{12} ، u_{21} ، u_{22} ، u_{13} ، u_{31} در مورد فضای مربعی
 شکل ۲۷^o. خطوط گرهی جواب (۱۵) به ازای برخی مقادیر B_{21}

گام سوم. جواب مساله اصلی

برای رسیدن به جوابی که در شرایط اولیه (۳) و (۴) نیز صدق نماید، به روشی مشابه بخش ۱۱. ۳ عمل می کنیم. سری دوگانه^۷

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x, y, t) \quad (17)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (B_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B_{mn}^* \sin \lambda_{mn} t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

۷- مسائل همگرایی و یکتایی را بررسی نمی کنیم.

را در نظر می‌گیریم. از (۱۷) و (۳) می‌یابیم

$$u(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = f(x, y). \quad (18)$$

این سری، سری فوریه دوگانه نامیده می‌شود. فرض کنید که $f(x, y)$ را بتوان به چنین سری ای بسط داد. ^۸ در این صورت ضرایب فوریه B_{mn} تابع $f(x, y)$ در (۱۸) را می‌توان به صورت زیر مشخص نمود. با قرار دادن

$$K_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (19)$$

(۱۸) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

به ازای y ثابت این سری، به عنوان تابعی از x ، سری سینوسی فوریه تابع $f(x, y)$ می‌باشد. از (۴) بخش ۵.۱۰ می‌یابیم که ضرایب این بسط عبارت است از

$$K_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx. \quad (20)$$

به علاوه، (۱۹) برابر با سری سینوسی فوریه $K_m(y)$ می‌باشد، و از (۴) بخش ۵.۱۰ نتیجه می‌شود که ضرایب عبارت اند از

$$B_{mn} = \frac{2}{b} \int_0^b K_m(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy.$$

از این فرمول و (۲۰) فرمول اویلر تعمیم یافته

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (21)$$

که در آن $m, n = 1, 2, \dots$ می‌باشند، برای ضرایب فوریه $f(x, y)$ که در سری فوریه دوگانه (۱۸) تعریف شده اند حاصل می‌شود.

B_{mn} های موجود در (۱۷) بر حسب $f(x, y)$ مشخص شده اند. برای تعیین B_{mn}^* ، از (۱۷)

نسبت به t جمله به جمله مشتق گرفته؛ و با استفاده از (۴) می‌یابیم

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}^* \lambda_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = g(x, y).$$

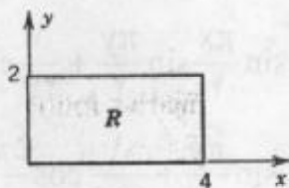
فرض کنید که $g(x, y)$ را بتوان به صورت سری فوریه دوگانه بسط داد. آنگاه با انجام عملیاتی همانند قبل، داریم

۸- شرایط کافی: $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ باید در مستطیل R که مورد بحث می‌باشد پیوسته باشند.

$$B_{mn}^* = \frac{4}{ab\lambda_{mn}} \int_0^b \int_0^a g(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad m = 1, 2, \dots, \quad (22)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

این مطلب بیان می کند، برای آنکه (۱۷) در شرایط اولیه صدق نماید، لازم است که ضرایب B_{mn}^* و B_{mn}^* مطابق (۲۱) و (۲۲) انتخاب شوند.



شکل ۲۷۱. غشادرمثال ۲

مثال ۲. ارتعاش یک غشای مستطیلی

مطلوب است ارتعاش یک غشای مستطیلی به ابعاد $\alpha = 4\text{ft}$ و $b = 2\text{ft}$ (شکل ۲۷۱) در صورتی که کشش $\frac{12}{5} \frac{\text{lb}}{\text{ft}}$ ، چگالی $\frac{2}{5} \frac{\text{slugs}}{\text{ft}^2}$ (همچنین برای لاستیک سبک)، سرعت اولیه صفر، و تغییر مکان اولیه

$$f(x,y) = 0 / \sqrt{(4x - x^2)(2y - y^2)} \text{ ft} \quad (23)$$

باشد.

حل. $c^2 = \frac{T}{\rho} = \frac{12/5}{2/5} = 3 \left[\frac{\text{ft}^2}{\text{sec}^2} \right]$. همچنین، بنابر (۲۲) و (۲۱) از (۲۳) می یابیم

$$B_{mn} = \frac{4}{4 \times 2} \int_0^2 \int_0^4 0 / \sqrt{(4x - x^2)(2y - y^2)} \sin \frac{m\pi x}{4} \sin \frac{n\pi y}{2} dx dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 (4x - x^2) \sin \frac{m\pi x}{4} dx \int_0^2 (2y - y^2) \sin \frac{n\pi y}{2} dy.$$

برای اولین انتگرال سمت راست مقدار

$$\frac{128}{m^2 \pi^2} [1 - (-1)^m] = \frac{256}{m^2 \pi^2} \quad (m \text{ فرد است})$$

و برای دومین انتگرال مقدار

$$\frac{16}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n] = \frac{32}{n^2 \pi^2} \quad (n \text{ فرد است})$$

به دست می آیند. به ازای m یا n زوج این مقادیر صفر هستند. در نتیجه با فاکتورگیری $\frac{1}{2}$ برای m یا n زوج می یابیم $B_{mn} = 0$ و برای m و n فرد داریم

$$B_{mn} = \frac{256 \times 32}{20 m^2 n^2 \pi^2} \approx \frac{0.426050}{m^2 n^2}$$

از رابطه فوق و (۱۷) جواب مورد نظر به صورت زیر در می آید

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= 0.426050 \sum_{m,n} \frac{1}{m^2 n^2} \cos\left(\frac{\Delta\pi}{4} \sqrt{m^2 + 4n^2}\right) t \sin \frac{m\pi x}{4} \sin \frac{n\pi y}{2} \\ &= 0.426050 \left(\cos \frac{\Delta\pi\sqrt{5}}{4} t \sin \frac{\pi x}{4} \sin \frac{\pi y}{2} + \frac{1}{27} \cos \frac{\Delta\pi\sqrt{37}}{4} t \sin \frac{\pi x}{4} \sin \frac{3\pi y}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{27} \cos \frac{\Delta\pi\sqrt{13}}{4} t \sin \frac{3\pi x}{4} \sin \frac{\pi y}{2} + \frac{1}{729} \cos \frac{\Delta\pi\sqrt{45}}{4} t \sin \frac{3\pi x}{4} \sin \frac{3\pi y}{2} + \dots \right). \end{aligned} \quad (24)$$

در بررسی این جواب توجه کنید که اولین جمله خیلی شبیه شکل اولیه غشای می باشد و خطوط گرهی ندارد، و چون ضرایب آن از جملات بعدی کوچک و کوچکتر می شوند، مقدار تعیین کننده همان جمله اول است. جمله دوم دارای دو خط گرهی افقی $(y = \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ ، جمله سوم دو خط گرهی قائم $(x = \frac{4}{3}, \frac{8}{3})$ ، جمله چهارم دو خط گرهی افقی و دو خط گرهی عمودی و الی آخر می باشند.

مسائل بخش ۸.۱۱

- چنانچه کشش غشا افزایش یابد، چگونگی تغییر فرکانس جواب (۱۳) را بیابید.
- خطوط گرهی جوابهای (۱۳) را به ازای $n, m = 1, 2, 3, 4$ در حالت $a = b = 1$ مشخص نموده و نمودار آنها را رسم کنید.
- مساله ۲ را به ازای $a = 3$ و $b = 1$ حل کنید.
- تعداد مقادیر ویژه غشای مربعی به ضلع واحد را طوری تعیین کنید که با هر یک از آنها چهار تابع ویژه متمایز متناظر باشد.
- مقادیر ویژه غشای مستطیلی به اضلاع $a = 2$ و $b = 1$ را طوری تعیین کنید که با هر یک از آنها دو یا تعدادی بیشتر توابع ویژه متناظر قرار گیرد.
- نشان دهید که، در بین تمام غشاهای مستطیلی با مساحت $A = ab$ و c ی یکسان، غشای مربعی می باشد که به ازای آن u_{11} [ر. ک. (۱۳)] دارای پائین ترین فرکانس است.
- نتیجه ای مشابه نتیجه حاصل از مساله ۶ برای فرکانس یکی از جوابهای (۱۳) با m و n ثابت دلخواه بیابید.
- با استفاده از انتگرالگیری جزء به جزء مقدار B_{mn} را در مثال ۲ بیابید.
- B_{mn} در مثال ۲ حاصل دوانتگرال می باشد. تابعی که با این انتگرالها متناظر می باشند را بیابید.

و مقادیر آنها را محاسبه کنید.

سری فوریه دوگانه. هریک از توابع $f(x,y)$ زیر را به صورت یک سری فوریه دوگانه به شکل (۱۸) با فرض $0 < x < \pi$ و $0 < y < \pi$ نمایش دهید.

$$f(x,y) = x \quad . ۱۱ \quad f(x,y) = 1 \quad . ۱۰$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1; & \frac{\pi}{2} < x, y < \pi \\ 0; & \text{سایر جاها} \end{cases} . ۱۳ \quad f(x,y) = \begin{cases} 1; & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0; & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} . ۱۲$$

هریک از توابع $f(x,y)$ زیر را، که در آن $0 < x < a$ و $0 < y < b$ به یک سری فوریه دوگانه به صورت (۱۸) نمایش دهید.

$$f = 0/25 xy \quad . ۱۵ \quad f = k \quad . ۱۴$$

$$f = (x+1)(y+1) \quad . ۱۷ \quad f = 0/125(x+y) \quad . ۱۶$$

$$f = xy(a^x - x^a)(b^y - y^b) \quad . ۱۹ \quad f = xy(a-x)(b-y) \quad . ۱۸$$

مطلوب است تغییر مکان $u(x,y,t)$ غشای مربعی با $a = b = 1$ و $c = 1$ ، در صورتی که سرعت اولیه صفر وانحراف اولیه برابر یکی از توابع زیر باشد

$$f(x,y) = k \sin \pi x \sin 2\pi y \quad . ۲۱ \quad f(x,y) = 0/1 \sin \pi x \sin \pi y \quad . ۲۰$$

$$f(x,y) = k \sin 3\pi x \sin 4\pi y \quad . ۲۳ \quad f(x,y) = 0/0 \sin \pi x \sin \pi y \quad . ۲۲$$

$$f(x,y) = k \sin^2 \pi x \sin^2 \pi y \quad . ۲۴$$

۲۵. (ارتعاشات واداشته یک غشا) نشان دهید که ارتعاشات واداشته غشا در معادله

$$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u + \frac{P}{\rho}$$

صادق است. که در آن نیروی خارجی وارد بر واحد مساحت می باشد که به طور قائم بر صفحه xy وارد می شود.

۹.۱۱ لاپلاسیان در مختصات قطبی

در ارتباط با مسائل مقدار کرانه ای برای معادلات با مشتقات جزئی، به کارگیری مختصاتی که نسبت به آنها کرانه ناحیه مورد نظر دارای نمایش ساده ای باشد یک اصل کلی می باشد. در بخش آتی غشاهای مستدیر (پوسته طبلها) مورد بحث قرار خواهیم داد. از اینرو مختصات قطبی r و θ که با

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

تعریف می شوند، برای این مساله مناسب خواهند بود، زیرا در این مختصات می توان کرانه غشا را توسط معادله ساده ثابت $r = \Gamma$ بیان نمود. وقتی از r و θ استفاده می کنیم، باید لاپلاسیان

$$\nabla^r u = \frac{\partial^r u}{\partial x^r} + \frac{\partial^r u}{\partial y^r}$$

در معادله موج بر حسب مختصات جدید نوشته شود.

تبدیل نمایش دیفرانسیلی از یک دستگاه مختصات به دستگاه دیگر اغلب اوقات در کاربردها مورد استفاده قرار می گیرد، و متعلم باید این مطالب را با دقت بیشتری بررسی نماید.

برای سادگی، مشتقات جزئی را با زیرنویسها مشخص می کنیم و $u(x, y, t)$ را وقتی که تابعی از r و θ و t در نظر گرفته می شود، با همان حرف u نمایش می دهیم. همانند بخش ۱۱.۴ از قاعده زنجیره ای (بخش ۸.۸)، می یابیم

$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x.$$

با مشتقگیری مجدد از رابطه فوق نسبت به x و به کار بردن قاعده حاصلضرب به دست می آوریم

$$u_{xx} = (u_r r_x)_x + (u_\theta \theta_x)_x \\ = (u_r)_x r_x + u_r r_{xx} + (u_\theta)_x \theta_x + u_\theta \theta_{xx}. \quad (1)$$

حال، با به کارگیری مجدد قاعده زنجیره ای داریم

$$(u_r)_x = u_{rr} r_x + u_{r\theta} \theta_x, \quad (u_\theta)_x = u_{\theta r} r_x + u_{\theta\theta} \theta_x.$$

برای مشخص نمودن مشتقات جزئی r_x و θ_x با عمل مشتقگیری از

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} \quad \text{و} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

می یابیم

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}, \quad \theta_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{r^2}.$$

با مشتقگیری مجدد از دو فرمول فوق، داریم

$$r_{xx} = \frac{r - x r_x}{r^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3}, \quad \theta_{xx} = -y \left(-\frac{2}{r^3}\right) r_x = \frac{2xy}{r^3}.$$

همه این عبارات را در رابطه (۱) قرار می دهیم. با فرض پیوستگی مشتقات جزئی اول و دوم،

می یابیم $u_{r\theta} = u_{\theta r}$ ، و با ساده کردن به دست می آوریم

$$u_{xx} = \frac{x^2}{r^3} u_{rr} - \frac{2xy}{r^3} u_{r\theta} + \frac{y^2}{r^3} u_{\theta\theta} + \frac{y^2}{r^3} u_r + \frac{2xy}{r^3} u_\theta. \quad (2)$$

به طریقی مشابه نتیجه می شود

$$u_{yy} = \frac{y^2}{r^3} u_{rr} + \frac{2xy}{r^3} u_{r\theta} + \frac{x^2}{r^3} u_{\theta\theta} + \frac{x^2}{r^3} u_r - \frac{2xy}{r^3} u_\theta. \quad (3)$$

با جمع نمودن روابط (۲) و (۳) لاپلاسین u در مختصات قطبی به دست می آید

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}. \quad (4)$$

در بخش آتی به مطالعه کاربرد این فرمول در ارتعاش پوسته طبل (غشای مستدیر) می پردازیم.

مسائل بخش ۹.۱۱

۱. محاسبات جزئی در (۲) و (۳) را انجام دهید.

۲. (۴) را به مختصات کارتزین تبدیل کنید.

۳. نشان دهید که (۴) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

۴. هرگاه u مستقل از θ باشد، آنگاه (۴) به صورت $\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r$ درمی آید. این نتیجه را مستقیماً از لاپلاسین در مختصات کارتزین با فرض آنکه u مستقل از θ می باشد به دست آورید.

۵. نشان دهید که تنها جواب $\nabla^2 u = 0$ که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ می باشد، عبارت است از

$$u = a \ln r + b.$$

۶. نشان دهید که $u_n = r^n \cos n\theta$ و $u_n = r^n \sin n\theta$ که در آن $n = 0, 1, \dots$ جوابهای $\nabla^2 u = 0$ با $\nabla^2 u$ مفروض توسط (۴)، هستند.

۷. با فرض اینکه جمله به جمله مشتقگیری مجاز می باشد، نشان دهید که یک جواب معادله لاپلاس در قرص $R < 1$ که به ازای f مفروض در شرط کرانه ای $u(R, \theta) = f(\theta)$ صدق کند، عبارت است از

$$u(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{r}{R} \right)^n \cos n\theta + b_n \left(\frac{r}{R} \right)^n \sin n\theta \right]$$

که در آن a_n و b_n ضرایب فوریه f می باشند (ر. ک. بخش ۳.۱۰).

پتانسیل الکترواستاتیک. مسائل گرما در حالت پایدار

پتانسیل الکترواستاتیک u در ناحیه آزاد از بارها در معادله لاپلاس $\nabla^2 u = 0$ صدق

می کنند. همچنین معادله گرمای $u_t = c^2 \nabla^2 u$ (ر. ک. بخش ۵.۱۱)، در صورتی که دمای u مستقل

از زمان t باشد (حالت پایدار)، به معادله لاپلاس تبدیل می شود. مطلوب است پتانسیل

الکترواستاتیک (به طور هم ارز: توزیع دما در حالت پایدار) در قرص $r < 1$ متناظر با شرایط کرانه ای زیر

$$u(\theta) = 40 \sin^2 \theta \quad . 9 \quad u(\theta) = 10 \cos^2 \theta \quad . 8$$

$$u(\theta) = \begin{cases} -100 & ; \quad -\pi < \theta < 0 \\ 100 & ; \quad 0 < \theta < \pi \end{cases} \quad . 11 \quad u(\theta) = \begin{cases} 110 & ; \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ 0 & ; \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad . 10$$

$$u(\theta) = \begin{cases} \theta; & -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ 0; & \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad ۱۳ \quad u(\theta) = \begin{cases} \theta; & -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ \pi - \theta; & \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad ۱۲$$

$$u(\theta) = |\theta|; \quad -\pi < \theta < \pi \quad ۱۵ \quad u(\theta) = \theta^2; \quad -\pi < \theta < \pi \quad ۱۴$$

۱۶. فرمولی برای پتانسیل u بر محور x ها در مساله ۱۵ بیابید. از چهار جمله اول این سری را برای محاسبه u در نقاط $0/75, 0/5, 0/25, 0, 0/25, 0/5, 0/75$ تا دو رقم اعشار استفاده کنید.

۱۷. فرمولی برای پتانسیل u بر محور y ها در مساله ۱۵ بیابید.

۱۸. پتانسیل الکترواستاتیک را در نیم قرص $0 < \theta < \pi, r < 1$ را طوری بیابید که بر نیم دایره $r = 1$ برابر با $10(\pi - \theta)$ و بر قطعه $-1 < x < 1$ برابر با صفر باشد.

۱۹. مقدار دمای u در حالت پایدار را در یک صفحه نازک نیم استوانه ای $0 < \theta < \pi, r < a$ طوری بیابید که نیم دایره $r = a$ در دمای ثابت u_0 و کران قطعه $-a < x < a$ در $u = 0$ نگهداشته شده باشند.

۲۰. (لاپلاسین در مختصات استوانه ای) نشان دهید که لاپلاسین در مختصات استوانه ای r, θ و z که با $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ و $z = z$ تعریف می شود عبارت است از

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + u_{zz}$$

را بر حسب مختصات x^* و y^* که به صورت زیر تعریف می شوند بیان کنید.

$$x^* = x + y, y^* = x - y \quad ۲۲ \quad x^* = ax + b, y^* = cy + d \quad ۲۱$$

$$x^* = \frac{1}{x}, y^* = \frac{1}{y} \quad ۲۴ \quad x^* = x^r, y^* = y^r \quad ۲۳$$

$$x^* = x \cos \alpha - y \sin \alpha, y^* = x \sin \alpha + y \cos \alpha \quad ۲۵ \quad (\text{دوران به اندازه زاویه } \alpha)$$

۲۶. (مساله نیومن) نشان دهید که جواب مساله نیومن

$$\nabla^2 u = 0; \quad r < R$$

$$u_n(R, \theta) = f(\theta) \quad (n \text{ قائم خارجی})$$

عبارت است از

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

که در آن A_n دلخواه و

$$A_n = \frac{2}{\pi n R^{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad B_n = \frac{2}{\pi n R^{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta.$$

۲۷. نشان دهید که (۹)، بخش ۴.۹ سبب می شود که $f(\theta)$ در مساله ۲۶ در شرط

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = 0,$$

که معروف به «شرط سازگاری» است صدق کند.

۲۸. (مساله نیومن) مطلوب است حل مساله زیر

در طوق $1 < r < 3$; $\nabla^2 u = 0$

$$u_r(1, \theta) = \sin \theta,$$

$$u_r(3, \theta) = 0.$$

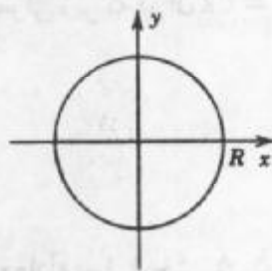
۱۱. ۱۰. غشای مستدیر. استفاده از سری بسل - فوریه

غشاهای مستدیر که در استوانه ها، پمپ ها، میکروفونها، تلفن ها، نظایر آنها وجود دارند از مسائل مهم در مهندسی می باشند. هر چند غشاء مستدیر یک صفحه است و یک جسم کشسان می باشد ولی مقاومتی در مقابل خمش از خود نشان نمی دهد، معادله این ارتعاشات در معادله موج دو بعدی (۳')، بخش ۷.۱۱، صدق می کند و در مختصات قطبی $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ معادله ارتعاش صفحه مستدیر به صورت زیر در می آید [ر. ک (۴) بخش قبل]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right).$$

شکل ۲۷۲ غشای مستدیر به شعاع R را نشان می دهد. تعیین جواب $u(r, \theta)$ که به طور شعاعی متقارن می باشد، یعنی جواب به θ وابسته نیست مورد نظر ما می باشد. در چنین حالتی معادله به صورت زیر در می آید

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (1)$$



شکل ۲۷۲. غشای مستدیر

حال به شرایط کرانه ای و اولیه می پردازیم. چون غشا در طول کرانه $r = R$ ثابت فرض شده است، به ازای هر $t \geq 0$ ، شرط کرانه ای

$$u(R, t) = 0 \quad (۲)$$

می باشد. جوابهایی که به θ بستگی ندارند وقتی پدید می آیند که شرایط اولیه مستقل از θ باشند، یعنی وقتی که این شرایط به صورت زیر باشند

$$u(r, 0) = f(r) \quad [f(r) \text{ انحراف اولیه}] \quad (۳)$$

و

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(r) \quad [g(r) \text{ سرعت اولیه}] \quad (۴)$$

گام اول. معادلات دیفرانسیل معمولی. معادله بسل

با استفاده از روش ضربی، ابتدا جوابهای

$$u(r, t) = W(t)G(t) \quad (۵)$$

را که در شرط کرانه ای (۲) صدق می کند را می یابیم. با مشتقگیری از (۵) و جایگزینی در (۱) و تقسیم نتیجه حاصل بر $c^2 WG$ می یابیم

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{1}{W} (W'' + \frac{1}{r} W')$$

که در آن نقطه ها مشتق نسبت به t و پریمها مشتق نسبت به r را نشان می دهند. طرفین تساوی اخیر باید برابر مقدار ثابتی باشند، و این ثابت باید منفی باشد، مثلاً $-k^2$ ، تا آنکه بتوانیم جوابهایی را که در شرط کرانه ای صدق می نمایند و متحد با صفر نیستند بیابیم.

ازاینرو،

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{1}{W} (W'' + \frac{1}{r} W') = -k^2.$$

از رابطه مذکور دو معادله دیفرانسیل معمولی زیر که در آن $\lambda = ck$ می باشد، حاصل می شوند

$$\ddot{G} + \lambda^2 G = 0 \quad (۶)$$

و

$$W'' + \frac{1}{r} W' + k^2 W = 0. \quad (۷)$$

هرگاه قراردادیم $s = kr$ ، آنگاه (۷) به معادله بسل (بخش ۵.۵) تبدیل می شود. با توجه به $\frac{1}{r} = \frac{k}{s}$ و از قاعده زنجیره ای داریم

$$W' = \frac{dW}{dr} = \frac{dW}{ds} \frac{ds}{dr} = \frac{dW}{ds} k, \quad W'' = \frac{d^2 W}{ds^2} k^2.$$

با جایگذاری این روابط در (۷) و حذف عامل مشترک k^2 می یابیم

$$\frac{d^2 W}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dW}{ds} + W = 0 \quad (۷^*)$$

این معادله بسل (۱)، بخش ۵.۵، با پارامتر $\nu = 0$ می باشد.

گام دوم. صدق نمودن شرط کرانه ای

جوابهای (Y^*) توابع بسل J_0 و Y_0 به ترتیب از نوع اول و دوم هستند [ر.ک. بخشهای ۵.۵ و ۷.۵]، از طرفی Y_0 در صفر بینهایت می شود، لذا از Y_0 نمی توان استفاده کرد زیرا تغییر مکان غشا باید همواره منتهای باقی بماند. در نتیجه

$$W(r) = J_0(s) = J_0(kr) \quad (s = kr) \quad (۸)$$

حال بر کران $r = R$ از (۲) داریم $W(R) = J_0(kR) = 0$ (زیرا $G \equiv 0$ ایجاب می کند که $u \equiv 0$). این شرایط می توانند برقرار باشند زیرا دارای (تعدادی نامتناهی) صفرهای مثبت، $s = \alpha_1, \alpha_2, \dots$ (ر.ک. شکل ۲۸۳)، با مقادیر عددی

$$\alpha_1 = 2/4048, \alpha_2 = 5/5201, \alpha_3 = 8/6537, \alpha_4 = 11/7915, \alpha_5 = 14/9309,$$

و نظایر آنها می باشند (برای جداول جامعتر، ر.ک. مرجع [۱]، ضمیمه ۱). اینها به طور نامنظم از هم فاصله دارند، صفرهای دیگر $\alpha_6, \alpha_7, \dots$ دارای همین وضع هستند. هم اکنون معادله (۸) ایجاب می کند که

$$kR = \alpha_m \quad (۹)$$

از این رو $k = k_m = \frac{\alpha_m}{R}$ ، که در آن $k = 1, 2, \dots, m$. بنابراین توابع

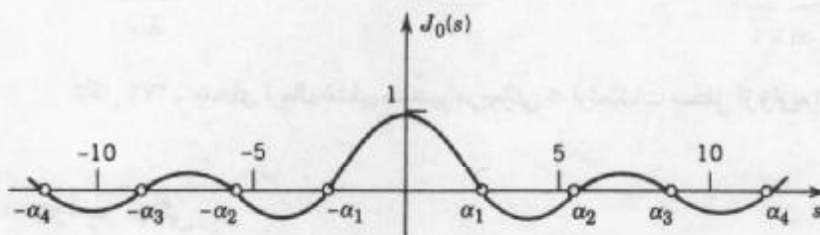
$$W_m(r) = J_0(k_m r) = J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right); \quad m = 1, 2, \dots, \quad (۱۰)$$

جوابهایی از (۷) می باشند که در $r = R$ صفر می شوند.

توابع ویژه و مقادیر ویژه. به ازای W_m مذکور در (۱۰)، جواب عمومی حاصل از (۶) با

$$\lambda = \lambda_m = ck_m \text{ عبارت است از}$$

$$G_m(t) = a_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t.$$



شکل ۲۷۳. تابع بسل $J_0(s)$

از اینرو توابع

$$u_m(r, t) = W_m(r)G_m(t) = (a_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t)J_0(k_m r) \quad (11)$$

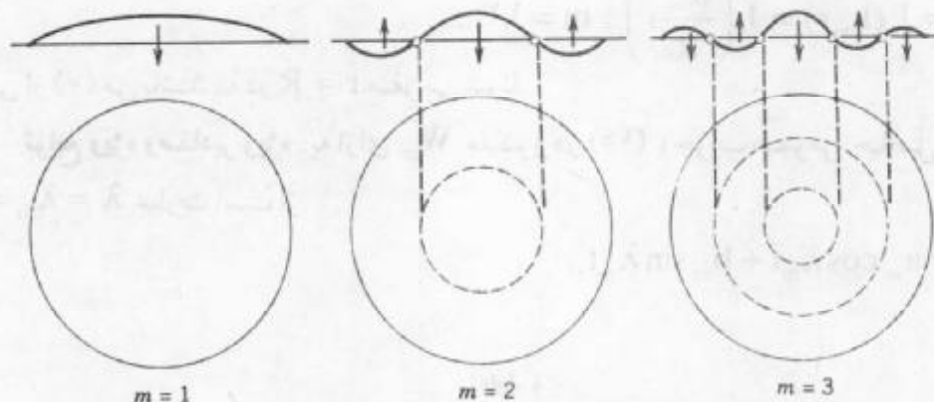
که در آن $m = 1, 2, \dots$ ، جوابهایی از معادله موج (۱) می باشند که در شرط کرانه ای (۲) صدق می نمایند. اینها توابع ویژه مساله مورنظر ما می باشند و مقادیر ویژه متناظر با این توابع λ_m ها هستند.

ارتعاش غشای متناظر با u_m را مد نرمال m ام می نامند؛ فرکانس این ارتعاش $\frac{\lambda_m}{2\pi}$ دور بر واحد زمان است. چون صفرهای J_0 به طور منظم بر روی محور توزیع نشده اند (برخلاف صفرهای توابع سینوسی که در مورد نخ مرتعش پدیدار می شوند)، صدای طبل کاملاً با صدای ویولن تفاوت دارد. شکلهای متمایز مدهای نرمال که در شکل ۲۷۴ نشان داده شده اند به سادگی از شکل ۲۷۳ حاصل می شوند. به ازای $m = 1$ ، همه نقاط غشا همزمان به سمت بالا (یا پائین) حرکت می کنند.

به ازای $m = 2$ ، وضعیت به شرح زیر می باشد. تابع

$$W_r(r) = J_0\left(\frac{\alpha_r}{R}r\right)$$

به ازای $\frac{\alpha_r}{R} = \alpha_1$ ، در نتیجه $r = \frac{\alpha_1 R}{\alpha_r}$ برابر صفر می باشد، از اینرو، دایره $r = \frac{\alpha_1 R}{\alpha_r}$ یک خط گرهی است، و زمانی که در یک لحظه مشخص قسمت مرکزی غشا به سمت بالا حرکت می کند، قسمتهای خارجی ($r > \frac{\alpha_1 R}{\alpha_r}$) به سمت پائین حرکت می نماید، و بالعکس. جواب $u_m(r, t)$ دارای $m - 1$ خطوط گرهی می باشد، که دایره متحد المرکزند (شکل ۲۷۴).



شکل ۲۷۴. مدهای نرمال غشای مستدیر در حالتی که ارتعاشات مستقل از زاویه اند

گام سوم. جواب نهائی

برای رسیدن به جوابی که در شرایط اولیه (۳) و (۴) صدق کنند، می توان همانند نخ مرتعش

عمل کرد، برای این منظور، سری زیر را در نظر می‌گیریم

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(r) G_m(t) = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t) J_0\left(\frac{\alpha_m r}{R}\right). \quad (12)$$

با قرار دادن $t = 0$ و با استفاده از (۳) می‌یابیم

$$u(r, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0\left(\frac{\alpha_m r}{R}\right) = f(r). \quad (13)$$

از اینرو برای آنکه (۱۲) در (۳) صدق نماید، ثابتهای a_m باید ضریب سری بسط - فوریه‌ای باشد که

$$f(r) \text{ را بر حسب } J_0\left(\frac{\alpha_m r}{R}\right) \text{ نمایش می‌دهد؛ یعنی [ر. ک. (۹) بخش ۹.۵ با } n = 0$$

$$a_m = \frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_m)} \int_0^R r f(r) J_0\left(\frac{\alpha_m r}{R}\right) dr; \quad m = 1, 2, \dots \quad (14)$$

مشتق‌پذیری $f(r)$ در بازه $0 \leq r \leq R$ برای وجود جوابی به صورت (۱۳) کفایت می‌نماید (ر. ک. مرجع

[A9]). ضرایب b_m در (۱۲) را می‌توان به طور مشابه از (۴) مشخص نمود. برای به دست آوردن

مقادیر عددی a_m و b_m ، می‌توان یکی از روشهای معمول انتگرالگیری تقریبی را با استفاده از

جداول J_0 و J_1 به کار گرفت. برخی اوقات از انتگرالگیری عددی همانند مثال زیر، می‌توان اجتناب کرد.

مثال ۱. ارتعاشات غشای مستدیر

مطلوب است ارتعاشات غشای مستدیر به شعاع ۱ft و چگالی $\frac{2}{ft^2}$ slugs، چنانچه کشش $\frac{8}{ft}$ lb،

سرعت اولیه صفر و تغییر مکان اولیه برابر است با

$$f(r) = 1 - r^2 [ft].$$

حل. $c^2 = \frac{T}{\rho} = \frac{8}{2} = 4 \left[\frac{ft^2}{sec^2} \right]$. همچنین $b_m = 0$ ، زیرا سرعت اولیه صفر است. از (۱۴) و

مساله ۲۹ در بخش ۹.۵، با توجه به اینکه $R = 1$ ، می‌یابیم

$$a_m = \frac{2}{J_1^2(\alpha_m)} \int_0^1 r(1 - r^2) J_0(\alpha_m r) dr = \frac{4 J_2(\alpha_m)}{\alpha_m^2 J_1^2(\alpha_m)} = \frac{8}{\alpha_m^2 J_1(\alpha_m)}.$$

که در آن آخرین تساوی از (۳)، بخش ۶.۵، با $\nu = 1$ نتیجه شده است، یعنی

$$J_2(\alpha_m) = \frac{2}{\alpha_m} J_1(\alpha_m) - J_0(\alpha_m) = \frac{2}{\alpha_m} J_1(\alpha_m).$$

جدول ۵.۹ از [۱]، با توجه به آن α_m و $J_0'(\alpha_m)$ محاسبه می‌شوند. از این مطلب، بنابر (۲)، بخش

۶.۹، با $\nu = 0$ می‌یابیم $J_1(\alpha_m) = -J_0'(\alpha_m)$ ها محاسبه می‌شوند.

معادلات با مشتقات جزئی

a_m	$J_0(\alpha_m)$	$J_1(\alpha_m)$	α_m	m
۱/۱۰۸۰۱	۰/۴۳۱۷۶	۰/۵۱۹۱۵	۲/۴۰۴۸۳	۱
-۰/۱۳۹۷۸	-۰/۱۲۳۲۸	-۰/۳۴۰۲۶	۵/۵۲۰۰۸	۲
۰/۰۴۵۴۸	۰/۰۶۲۷۴	۰/۲۷۱۴۵	۸/۶۵۳۷۳	۳
-۰/۰۲۰۹۹	-۰/۰۳۹۴۳	-۰/۲۳۲۴۶	۱۱/۷۹۱۵۳	۴
۰/۰۱۱۶۴	۰/۰۲۷۶۷	۰/۲۰۶۵۵	۱۴/۹۳۰۹۲	۵
-۰/۰۰۷۲۲	-۰/۰۲۰۷۸	-۰/۱۸۷۷۳	۱۸/۰۷۱۰۶	۶
۰/۰۰۴۸۴	۰/۰۱۶۳۴	۰/۱۷۳۲۷	۲۱/۲۱۱۶۴	۷
-۰/۰۰۳۴۳	-۰/۰۱۳۲۸	-۰/۱۶۱۷۰	۲۴/۳۵۲۴۷	۸
۰/۰۰۲۵۳	۰/۰۱۱۰۷	۰/۱۵۲۱۸	۲۷/۴۹۳۴۸	۹
-۰/۰۰۱۹۳	-۰/۰۰۹۴۱	-۰/۱۴۴۱۷	۳۰/۶۳۴۶۱	۱۰

پس

$$f(r) = 1/108 J_0(2/4048r) - 0/140 J_0(5/5201r) + 0/045 J_0(8/6537r) - \dots$$

مشاهده می کنیم که ضرایب بطور نسبی تدریجاً کاهش می یابند. مجموع ضرایب بطور صریح مفروض در جدول برابر ۰/۹۹۹۱۵ می باشد. مجموع تمام ضرایب باید واحد باشد. (چرا؟) بنابراین با توجه به آزمون لاینیتز در ضمیمه ۳.۳ مجموع جزئی این جملات با تقریب سه رقم اعشار برای دامنه نوسان $f(r)$ به دست می دهد.

از آنجا که

$$\lambda_m = ck_m = \frac{c\alpha_m}{R} = 2\alpha_m,$$

از (۱۲) جواب به صورت زیر حاصل می شود (با اندازه r در فوت و t در ثانیه)

$$u(r,t) = 1/108 J_0(2/4048r) \cos 4/8097t - 0/140 J_0(5/5201r) \cos 1/0402t \\ + 0/045 J_0(8/6537r) \cos 17/3075t - \dots$$

در شکل ۱، ۲، ۳، m ایده ای از حرکت اولین جمله سری فوق، $m = 2$ جمله دوم، $m = 3$ جمله سوم را به دست می دهد که می توان تقریباً نتایج خوبی برای یک تار ویولن در بخش ۱۱.۳ مشاهده نمود.

۱. دلیل استفاده از مختصات قطبی در بخش حاضر را بیان کنید.
۲. هرگاه کشش غشا افزایش یابد، فرکانس هریک از مدلهای نرمال (۱۱) چگونه تغییر می کند؟
۳. یک طبل کوچک دارای مد بنیادی بالاتراز طبل بزرگتر که دارای کشش و چگالی یکسان هستند می باشد. چگونه درستی این موضوع از فرمولهای ما حاصل می شود؟
۴. با استفاده از مقدار عددی α_1 ، فرمولی برای فرکانس بنیادی طبل مستدیر بیابید.
۵. فرمولی برای کشش T مورد نیاز برای ارائه یک نت بنیادی از یک طبل مستدیر را بیابید.
۶. مقدار عددی شعاعهای خطوط گرهی u_4 ، u_3 ، u_2 ، u_1 [ر.ك. (۱۱)] را، به ازای $R = 1$ مشخص کنید.
۷. نموداری مانند شکل ۲۷۴ برای u_4 ، u_3 ، و u_2 رسم کنید.
۸. به سوالی که در مساله ۶ شده است در مورد u_4 ، u_3 ، و u_2 پاسخ دهید.
۹. آیا ممکن است به ازای c و R مشخص، دو یا تعداد بیشتری از توابع u_m [ر.ك. (۱۱)] که خطوط گرهی متمایزی دارند با یک مقدار ویژه معین متناظر شوند؟
۱۰. برای چه در مثال $11 = a_1 + a_2 + \dots$ پنج حاصلجمع جزئی اول این سری را محاسبه کنید.
۱۱. a_m ارائه شده در مثال ۱ را محاسبه کنید.

۱۲. با استفاده از مقادیر متن، به ازای $m = 1, \dots, 5$ درستی تساوی $\alpha_m = (m - \frac{1}{4})\pi$ را بررسی کنید.

۱۳. نشان دهید برای آنکه (۱۲) در (۴) صدق کند لازم است که

$$b_m = \frac{2}{c\alpha_m R J_1'(\alpha_m)} \int_0^R r g(r) J_0\left(\frac{\alpha_m r}{R}\right) dr, \quad m = 1, 2, \dots \quad (15)$$

۱۴. تغییر مکان $u(x, t)$ غشای مستدیر به شعاع $R = 1$ در صورتی بیابید که $c = 1$ ، سرعت اولیه صفر و تغییر مکان اولیه برابر باشد با

$$f(r) = k(1 - r^2).$$

راهنمایی. مسائل ۲۵ الی ۳۲ بخش ۹.۵ را ملاحظه کنید.

۱۵. مطلوب است حل مساله ۱۴، وقتی که $f(r) = k(1 - r^2)$ و دیگر داده ها همانند قبل باشند.

ارتعاشات غشای مستدیر وابسته به Γ و θ

۱۶. نشان دهید که با جایگزینی $u = F(r, \theta)G(t)$ در معادله موج

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \right) \quad (16)$$

دومعادله زیر حاصل می شود

$$\ddot{G} + \lambda^2 G = 0; \quad \lambda = ck, \quad (17)$$

$$F_{rr} + \frac{1}{r}F_r + \frac{1}{r^2}F_{\theta\theta} + k^2F = 0. \quad (18)$$

۱۷. نشان دهید که با قرار دادن $F = W(r)Q(\theta)$ در (۱۸) نتیجه می شود

$$Q'' + n^2Q = 0, \quad (19)$$

$$r^2W'' + rW' + (k^2r^2 - n^2)W = 0. \quad (20)$$

۱۸. در مساله ۱۷ نشان دهید که $Q(\theta)$ متناوب با دوره 2π است و بنابراین در (۱۹) و (۲۰) $n = 0, 1, \dots$. همچنین نشان دهید که از این جوابهای $Q_n = \cos n\theta$ و $Q_n = \sin n\theta$ ، $W_n = J_n(kr)$ که در آنها $n = 0, 1, \dots$ حاصل می شوند.

۱۹. نشان دهید که شرط کرانه ای

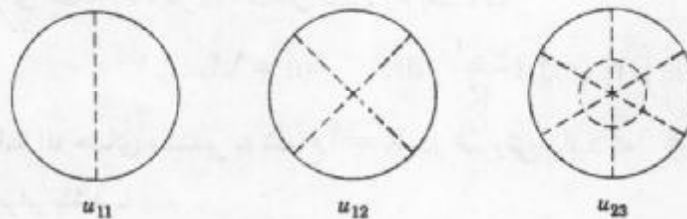
$$u(R, \theta, t) = 0 \quad (21)$$

منجر به مقادیر ویژه $k = k_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R}$ می شوند که در آن $s = \alpha_{mn}$ صفر مثبت m ام $J_n(s)$ می باشد.

۲۰. نشان دهید که جوابهای (۱۶) که در (۲۱) صدق می کنند عبارت اند از (شکل ۲۷۵)

$$u_{mn} = (A_{mn} \cos ck_{mn}t + B_{mn} \sin ck_{mn}t) J_n(k_{mn}r) \cos n\theta, \quad (22)$$

$$u_{mn}^* = (A_{mn}^* \cos ck_{mn}t + B_{mn}^* \sin ck_{mn}t) J_n(k_{mn}r) \sin n\theta.$$



شکل ۲۷۵ خطوط گرهی برخی از جوابهای (۲۲)

۲۱. نشان دهید که شرط اولیه $u_1(r, \theta, 0) = 0$ در (۲۲) منجر به $B_{mn} = 0$ و $B_{mn}^* = 0$ می شوند.

۲۲. نشان دهید که $u_{m0} = 0$ و $u_{m0}^* = 0$ برابر (۱۱)، در بخش حاضر است.

۲۳. نشان دهید که u_{11} بیانگر مد بنیادی غشای نیم دایره ای می باشد و فرکانس متناظر را وقتی

$$c^2 = 1 \text{ و } R = 1, \text{ بیابید.}$$

۱۱.۱۱ معادله لاپلاس . پتانسیل

یکی از معادلات با مشتقات جزئی مهم در فیزیک معادله لاپلاس

$$\nabla^2 u = 0 \quad (1)$$

می باشد. در اینجا $\nabla^2 u$ لاپلاسیان u است. در مختصات کارتزین فضائی x, y, z داریم

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (2)$$

نظریه جوابهای معادله لاپلاس به نظریه پتانسیل موسوم می باشد. جوابهای معادله لاپلاس (۱) که دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشند توابع همساز نامیده می شوند.

قبلاً با این معادله، در حالت سه بعدی، (بخشهای ۸.۹، ۹.۸) مانند دوبعدی (بخش ۵.۱۱) برخورد نداشتیم، و حال این معادله را در مختصات استوانه ای و کروی، تنها از نوع مسائل بامقدار کرانه ای مورد بررسی قرار می دهیم. برای تفهیم اهمیت معادله لاپلاس در ریاضیات مهندسی، برخی کاربردهای اساسی را بیان می کنیم.

کاربردهای اساسی معادله لاپلاس

نیروی جاذبه. معادله حاکم بر نیروی جاذبه معادله لاپلاس می باشد. در مثال ۳، بخش ۹.۸ دیدیم که هرگاه ذره A به جرم M در نقطه ثابت (X, Y, Z) و ذره دیگری مانند B به جرم m در نقطه (x, y, z) قرار داشته باشد، آنگاه ذره A ذره B را جذب می نماید، و نیروی جاذبه بین دو ذره برابر گرادیان تابع عددی زیر است

$$u(x, y, z) = \frac{c}{r}, \quad c = GMm = \text{ثابت},$$

که در آن

$$r = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2} \quad (> 0).$$

این تابع به پتانسیل میدان گرانشی موسوم است، و در معادله لاپلاس صدق می کند. تعمیم این مطلب به پتانسیل و نیروی حاصل از توزیع پیوسته جرم کاملاً واضح می باشد. چنانچه جرمی به چگالی $\rho(X, Y, Z)$ سرتاسریک ناحیه T در فضا توزیع شده باشد، آنگاه پتانسیل متناظر u در نقطه (x, y, z) که خالی از جرم می باشد به صورت زیر تعریف می شود:

$$u(x, y, z) = k \iiint_T \frac{\rho(X, Y, Z)}{r} dX dY dZ \quad (k > 0), \quad (3)$$

که در آن r دارای همان تعریف قبل می باشد. چون $\frac{1}{r}$ ($r > 0$) جواب معادله لاپلاس (۱) می باشد،

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0, \quad \text{و } \rho \text{ مستقل از } x, y, z \text{ می باشد، می یابیم}$$

$$\nabla^2 u = k \iiint_T \rho \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dX dY dZ = 0;$$

یعنی، پتانسیل گرانشی که توسط (۳) تعریف شده در هر نقطه ای که به وسیله ماده اشغال نشده

باشد در معادله لاپلاس صدق می کند.

الکترواستاتیک. نیروی الکتریکی جاذبه یا دافعه بین ذرات از قانون کولن (ر.ک. بخش ۹.۸)، که همان صورت ریاضی قاعده گرانشی نیوتن را دارا است، پیروی می نماید. از این مطلب نتیجه می شود که میدان حاصل از یک توزیع بار الکتریکی از نقطه نظر ریاضی می تواند با تابع پتانسیلی، که در هر نقطه که به وسیله بار اشغال نشده باشد در معادله لاپلاس صدق می کنند، بیان شود.

جریان گرما. معادله حاکم بر جریان گرما به صورت زیر می باشد

$$u_t = c^T \nabla^T u,$$

که در حالت پایدار ($u_t = 0$) این معادله به معادله لاپلاس، چنانکه در بخش ۵.۱۱ برای مسائل دوبعدی آموختیم، و در سه بعدی وضع بر همان منوال می باشد، تبدیل می شود. **هیدرودینامیک.** معادله لاپلاس در رابطه با حالت پایدار جریان سیال تراکم ناپذیر چنانکه در فصل ۱۷ نشان خواهیم داد (که در آن مشاهده می کنیم که مسائل دوبعدی را می توان از روشهای آنالیز مختلط حل نمود) نیز ظاهر می شوند.

لاپلاسین در مختصات استوانه ای و کروی

در اغلب کاربردهایی که به معادله لاپلاس منتهی می گردند، لازم است که مساله با مقدار کرانه ای را حل کنیم، یعنی، جوابی از معادله لاپلاس (۱) را که در شرایط کرانه ای مفروض بر سطح کراندار S از ناحیه T که در معادله در نظر گرفته شده بود، مشخص کنیم که مسائل سه نوع و به شرح زیر می باشند:

(I) اولین مساله با مقدار کرانه ای یا مساله دیریکله مساله ای است که در آن u بر S مشخص

باشد.

(II) دومین مساله با مقدار کرانه ای یا مساله نیومن مساله ای است که در آن مشتق قائم

$$u_n = \frac{\partial u}{\partial n} \text{ بر } S \text{ مشخص باشد.}$$

(III) سومین مساله با مقدار کرانه ای یا مساله با مقدار کرانه ای آمیخته مساله ای است که در

آن u بر قسمتی از S و u_n بر قسمت باقیمانده از S مشخص باشند.

در حل مسائل با مقادیر کرانه ای اغلب اوقات نوع دستگاه مختصات مهم است. بدین جهت

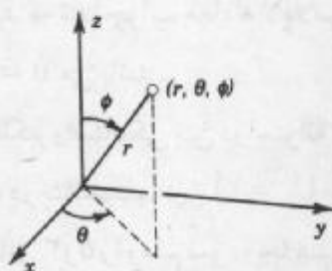
به بررسی نمایش لاپلاسین در دستگاههای مختلف می پردازیم. رفتار لاپلاسین در فضای سه متغیره شبیه لاپلاسین در فضای دو متغیره ارائه شده در بخش ۹.۱۱ است.

برای مختصات استوانه ای r ، θ ، z که به شکل زیر به مختصات کارتزین مربوط می شوند (شکل ۲۷۶)

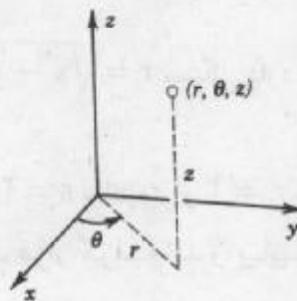
$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z, \quad (4)$$

از (۴) بخش ۹.۱۱، با افزودن u_{zz} به $\nabla^2 u$ می یابیم

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (5)$$



شکل ۲۷۷. مختصات کروی



شکل ۲۷۶. مختصات استوانه ای

یکی از دستگانه‌های مهم دیگر مختصات کروی r ، θ ، و ϕ است که به شکل زیر به مختصات کارتزین مربوط می شوند (شکل ۲۷۷)^{۱۱}

$$x = r \cos \theta \sin \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \phi. \quad (6)$$

لاپلاسین تابع u در مختصات کروی به صورت زیر است

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\cot \phi}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad (7)$$

عبارت (۷) را به صورت زیر نیز می نویسند

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] \quad (7')$$

اثبات درستی (۷) و (۷') را به متعلم واگذار می کنیم. روند کار همانند مطالبی است که در بخش ۱۱.۹ ارائه شده اند.

در بخش آتی نشان می دهیم که روش جداسازی متغیرها در مختصات کروی به معادله لژاندار، که در بخش ۳.۵ توصیف آن آمده است، برمی گردد.

مسائل بخش ۱۱.۱۱

۱. نشان دهید که تابع $u = \frac{C}{r}$ در معادله لاپلاس در مختصات کروی صدق می کند.
۲. نشان دهید که تنها جواب معادله لاپلاس سه بعدی که تنها به $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ بستگی دارد برابر $u = \frac{C}{r} + k$ می باشد، در اینجا C و k مقادیر ثابت هستند.

۱۱- معادلات (۶) در حساب دیفرانسیل وانتگرال و نمادهای مشابه در مختصات قطبی استفاده می شود.

۳. در مساله ۲، ضرایب c و k را طوری بیابید که u نمایش پتانسیل الکترواستاتیک بین دو کره متحد مرکز به شعاعهای $r_1 = 2$ سانتیمتر و $r_2 = 4$ سانتیمتر، که به ترتیب در پتانسیلهای $U_1 = 110$ ولت و $U_2 = 70$ ولت قرار گرفته اند، باشد.

۴. نشان دهید که تنها جواب معادله لاپلاس دوبعدی که فقط به $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ بستگی دارد به صورت $u = c \ln r + k$ می باشد.

۵. پتانسیل الکترواستاتیکی بین دو استوانه هم محور با شعاعهای $r_1 = 2$ سانتیمتر و $r_2 = 4$ سانتیمتر را که به ترتیب در پتانسیلهای $U_1 = 110$ ولت و $U_2 = 70$ ولت قرار گرفته اند را بیابید. نمودار جوابهای مسائل ۳ و ۵ را رسم نموده و با هم مقایسه کنید.

۶. با جایگزینی $u(r)$ ، که در آن r در مساله ۲ تعریف شده است، در $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ ، در مطابقت با (۷)، تحقیق کنید که $u'' + \frac{2}{r}u' = 0$.

۷. از $\nabla^2 u$ در مختصات کارتزین (۷) را به دست آورید.

۸. با تبدیل دوباره $\nabla^2 u$ به مختصات کارتزین درستی (۵) را تحقیق کنید.

نشان دهید که هریک از توابع $u = f(x, y)$ زیر در معادله لاپلاس صدق می کنند. نمودار برخی از خطوط هم پتانسیل ثابت u را رسم کنید.

$$xy. 9 \quad x^2 - y^2. 10$$

$$x^2 - 3xy^2. 11 \quad \frac{x}{(x^2 + y^2)}. 12$$

$$\frac{x}{(x^2 + y^2)}. 13 \quad (x+1)(y-1). 14$$

$$\frac{(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}. 15$$

مطلوب است توزیع دما در حالت پایدار (مستقل از زمان) در هریک از موارد زیر:

۱۶. بین دو صفحه موازی $x = x_0$ و $x = x_1$ که به ترتیب در دمای u_0 و u_1 قرار گرفته اند.

۱۷. بین دو استوانه مستدیر هم محور با شعاعهای r_0 و r_1 که به ترتیب در دمای u_0 و u_1 قرار گرفته اند.

۱۸. بین دو کره متحدالمرکز با شعاعهای r_0 و r_1 که دمای آنها به ترتیب u_0 و u_1 است.

۱۹. هرگاه سطح گوی $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ در دمای صفر نگهداشته شود و دمای اولیه در

داخل گوی $f(r)$ باشد، آنگاه نشان دهید که دمای $u(r, t)$ در گوی دارای جوابی به صورت

$$u_i = c^2 \left(u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right) \text{ می باشد که در شرایط } u(R, t) = 0, u(r, 0) = f(r), \text{ صدق می کند.}$$

۲۰. با قرار دادن $v = ru$ نشان دهید که مساله ۱۹ به صورت $v_t = c^2 v_{rr}$ ، $v(R, t) = 0$ ،

$v(r, 0) = rf(r)$ درمی آید، شرط $v(0, t) = 0$ را اضافه کنید (زیرا که u باید در $r = 0$ کراندار باشد)،

و مساله حاصل را به روش ضربی حل کنید.

۲۱. (معادله هلمهولتز) نشان دهید که با قرار دان $(i = \sqrt{-1})u = U(x, y, z)e^{-i\omega t}$ در معادله موج سه بعدی $u_{\text{ii}} = c^2 \nabla^2 u$ معادله هلمهولتز سه بعدی (ر. ک. بخش ۱۱. ۸)

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}$$

حاصل می شود.

۲۲. فرض کنید r, θ, ϕ و مختصات کروی باشند، هرگاه $u(r, \theta, \phi)$ در $\nabla^2 v = 0$ صدق کند، نشان دهید که $v(r, \theta, \phi) = r^{-1}u(r^{-1}, \theta, \phi)$ در $\nabla^2 v = 0$ صدق می کند.

۲۳. هرگاه $u(r, \theta)$ در $\nabla^2 u = 0$ صدق کند، آنگاه نشان دهید که $v(r, \theta) = u(r^{-1}, \theta)$ در $\nabla^2 v = 0$ صدق می کند (r و θ مختصات قطبی می باشند).

۲۴. با استفاده از روش ضربی مساله با مقدار کرانه ای زیر را حل کنید.

$$\nabla^2 u = 0 \quad (0 < x < \pi, y > 0)$$

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0,$$

$$u(x, 0) = 1,$$

$$|u(x, y)| < \infty.$$

$$y \rightarrow \infty$$

۲۵. آیا جواب مساله ۲۴ به صورت $u = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\sin x}{\sinh y}\right)$ قابل نمایش است؟ نشان دهید که u در همه شرایط مساله ۲۴ صدق می کند.

۱۱. ۱۲. لاپلاسین در مختصات کروی. معادله لژاندار

در این بخش به بررسی یک مساله با مقدار کرانه ای که شامل معادله لاپلاس در مختصات

کروی می باشد، می پردازیم. فرض کنید کره S به شعاع R در توزیع پتانسیل الکتریکی ثابت

$$u(R, \theta, \phi) = f(\phi) \quad (1)$$

قرار داشته باشد، که در آن r, θ, ϕ مختصات کروی می باشند که در بخش ۱۱. ۱۱ تعریف شده اند، مشروط بر آنکه مرکز S بر مبداء مختصات منطبق باشد و تابع $f(\phi)$ مفروض باشد. باتوجه به اینکه

پتانسیل روی S مستقل از θ می باشد، پتانسیل در فضا نیز چنین خواهد بود. در نتیجه $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$ بنا

به (∇^2) از بخش قبل معادله لاپلاس به صورت

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi}\right) = 0 \quad (2)$$

درمی آید. علاوه بر آن، پتانسیل را در بینهایت برابر صفر می گیرند، یعنی باید داشته باشیم

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r, \phi) = 0. \quad (3)$$

هم اکنون می خواهیم مساله با مقدار کرانه ای شامل معادله (۲) با شرط کرانه ای (۱) و شرط در بینهایت

(۳) را به روش ضربی حل کنیم. برای این منظور در (۲) چنین قرار می دهیم

$$u(r, \phi) = G(r)H(\phi).$$

با تقسیم نتیجه حاصل بر تابع GH ، می یابیم

$$\frac{1}{G} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dG}{dr} \right) = - \frac{1}{H \sin \phi} \frac{d}{d\phi} \left(\sin \phi \frac{dH}{d\phi} \right).$$

مطابق معمول، دو ظرف این معادله باید مساوی با مقدار ثابتی، مثلاً k ، باشد، به قسمی که

$$\frac{1}{\sin \phi} \frac{d}{d\phi} \left(\sin \phi \frac{dH}{d\phi} \right) + kH = 0 \quad (4)$$

و

$$\frac{1}{G} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dG}{dr} \right) = k.$$

معادله آخری را می توان به صورت $(r^2 G')' = kG$ یا

$$r^2 G'' + 2rG' - kG = 0$$

نوشت. این معادله یک معادله اویلر-کوشی است. از بخش ۶.۲ داریم که این معادله دارای جوابهایی

به صورت $G = r^n$ می باشد. هرگاه نمادگذاری را عوض کنیم و به جای k ، $n(n+1)$ قرار دهیم،

این جوابها دارای صورت ساده تری خواهد شد. با این نمادگذاری داریم

$$r^2 G'' + 2rG' - n(n+1)G = 0 \quad (5)$$

که در آن n هنوز دلخواه می باشد. با قرار دادن $G = r^\alpha$ در (۵) می یابیم

$$[\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - n(n+1)]r^\alpha = 0.$$

صفرهای عبارت داخل کروشه $\alpha = n$ و $\alpha = -n-1$ می باشند. در نتیجه جوابهای زیر به دست

می آیند:

$$G_n(r) = r^n, \quad G_n^*(r) = \frac{1}{r^{n+1}}. \quad (6)$$

حال تغییر شکل معادله (۴)، با قرار دادن $\cos \phi = w$ می یابیم $\sin^2 \phi = 1 - w^2$ و

$$\frac{d}{d\phi} = \frac{d}{dw} \frac{dw}{d\phi} = -\sin \phi \frac{d}{dw}.$$

در نتیجه، (۴) به ازای $k = n(n+1)$ به صورت زیر درمی آید

$$\frac{d}{dw} \left[(1-w^2) \frac{dH}{dw} \right] + n(n+1)H = 0. \quad (7)$$

این معادله یک معادله لژاندارمی باشد (ر. ک. بخش ۳.۵) که آنرا به صورت زیر می نویسیم

$$(1-w^2) \frac{d^2 H}{dw^2} - 2w \frac{dH}{dw} + n(n+1)H = 0. \quad (7')$$

هم اکنون حل این معادله را با استفاده از سری لژاندار - فوریه پی می گیریم. به ازای عدد صحیح^{۱۲} $n = 0, 1, \dots$ چند جمله ای لژاندار

$$H = P_n(w) = P_n(\cos \phi); \quad n = 0, 1, \dots$$

که جوابهای معادله لژاندار (۷) می باشند حاصل می شوند. از اینرو دو دنباله جوابهای $u = GH$ به صورت زیر برای معادله لاپلاس (۲) به دست می آیند:

$$u_n(r, \phi) = A_n r^n P_n(\cos \phi), \quad u_n^*(r, \phi) = \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \phi) \quad (8^*)$$

که در آن A_n و B_n اعداد ثابت می باشند.

جواب مساله داخلی. این مطلب به معنای جوابی از (۲) می باشد که در نقاط درونی کره برقرار بوده و در (۱) صدق نماید. بدین منظور سری^{۱۳} زیر را در نظر می گیریم

$$u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \phi). \quad (8)$$

برای آنکه (۸) در (۱) صدق کند باید داشته باشیم

$$u(R, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos \phi) = f(\phi); \quad (9)$$

یعنی، (۹) باید برابر سری لژاندار - فوریه باشد. از (۷) بخش ۹.۵ ضرایب به صورت

$$A_n R^n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{f}(w) P_n(w) dw$$

نتیجه می شوند که در آن $\tilde{f}(w)$ مقدار $f(\phi)$ را به صورت تابعی از $w = \cos \phi$ نشان می دهند. چون داریم $dw = -\sin \phi d\phi$ ، و حدود انتگرالگیری -1 و 1 به ترتیب متناظر با $\phi = \pi$ و $\phi = 0$ می باشند، همچنین می یابیم

$$A_n = \frac{2n+1}{2R^n} \int_0^\pi f(\phi) P_n(\cos \phi) \sin \phi d\phi; \quad n = 0, 1, \dots \quad (10)$$

از اینرو سری (۸) با ضرایب (۱۰) جواب مساله فوق به ازای نقاط درونی کره می باشد.

۱۲- تاکنون n دلخواه بود زیرا k دلخواه بود. می توان نشان داد که تحدید n به عدد صحیح برای آنکه جواب (۷) پیوسته، همراه با مشتق آن در بازه $-1 \leq w \leq 1$ یا $0 \leq \phi \leq \pi$ باشد امری ضروری می باشد.

۱۳- همگرایی را مورد بررسی قرار نمی دهیم، می توان نشان داد که هرگاه $f(\phi)$ و $f'(\phi)$ در بازه $0 \leq \phi \leq \pi$ تکه ای پیوسته باشند، از سری (۸) با ضرایب (۱۰) می توان جمله به جمله نسبت به r و ϕ مشتق گرفت و سریهای حاصل همگرا و

به ترتیب با $\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ نمایش می دهند. پس سری (۸) با ضرایب (۱۰) جواب مساله مورد نظر در درون کره می باشد.

جواب مساله خارجی. برای یافتن جواب در خارج کره نمی توان از توابع $u_n(r, \phi)$ استفاده نمود زیرا این توابع در (۳) صدق نمی کنند، ولی می توان از توابع $u_n^+(r, \phi)$ ، که در (۳) صدق می کنند، استفاده کرد و مانند قبل عملی نمود. این موضوع به جواب

$$u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \phi) \quad (r \geq R) \quad (11)$$

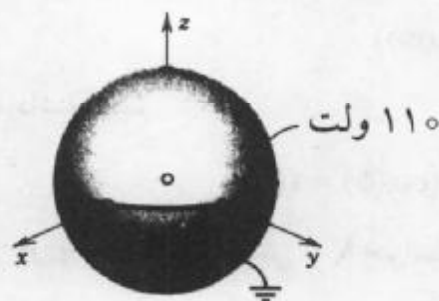
با ضرایب

$$B_n = \frac{2n+1}{2} R^{n+1} \int_0^\pi f(\phi) P_n(\cos \phi) \sin \phi \, d\phi \quad (12)$$

منجر می شوند.

مثال ۱. خازن کروی

مطلوب است پتانسیل در داخل و خارج یک خازن کروی شامل دو نیم کره فلزی به شعاعهای ۱ فوت که توسط یک شکاف عایق از یکدیگر جدا شده است. در صورتی که نیم کره بالایی در دمای ۱۱۰ ولت و پائینی در صفر نگهداشته شده باشد.



شکل ۲۷۸. خازن کروی در مثال ۱

حل. شرط کرانه ای به صورت زیر مفروض می باشد (به شکل ۲۷۷ در بخش ۱۱.۱۱ مراجعه کنید).

$$f(\phi) = \begin{cases} 110 & ; 0 \leq \phi < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & ; \frac{\pi}{2} < \phi \leq \pi. \end{cases}$$

چون $R = 1$ ، از اینرو باتوجه به (۱۱) می یابیم

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \cdot 110 \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_n(\cos \phi) \sin \phi \, d\phi.$$

قرار می دهیم $w = \cos \phi$ ، آنگاه $P_n(\cos \phi) \sin \phi \, d\phi = -P_n(w) \, dw$ و انتگرالگیری از ۱ تا ۰ می باشد. باتوجه به (۱۱) بخش ۳.۵ داریم

$$A_n = 55(2n+1) \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} \int_0^1 w^{n-2m} \, dw$$

که در آن به ازای n زوج، $M = \frac{n}{2}$ و به ازای n فرد، $M = \frac{n-1}{2}$ و مقدار انتگرال برابر $\frac{1}{n-2m+1}$ می باشد. از اینرو

$$A_n = \frac{55(2n+1)}{2^n} \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m+1)!} \quad (13)$$

با قرارداد $n=0$ می یابیم $A_0 = 55$. به ازای $n = 1, 2, 3, \dots$ داریم

$$A_1 = \frac{165}{2} \cdot \frac{2!}{0!1!2!} = \frac{165}{2}$$

$$A_2 = \frac{275}{4} \left(\frac{4!}{0!2!3!} - \frac{2!}{1!1!1!} \right) = 0$$

$$A_3 = \frac{385}{8} \left(\frac{6!}{0!3!4!} - \frac{4!}{1!2!2!} \right) = -\frac{385}{8}$$

والی آخر. چون $P_0 = 1$ لذا پتانسیل (۸) در داخل کره عبارت است از

$$u(r, \phi) = 55 + \frac{165}{2} r P_1(\cos \phi) - \frac{385}{8} r^2 P_2(\cos \phi) + \dots$$

با P_0, P_1, P_2, \dots مفروض در (۱۱)، بخش ۳.۵ چون $R=1$ ، از (۱۰) و (۱۲) این بخش مشاهده می کنیم که $B_n = A_n$ ، و (۱۱) پتانسیل در خارج کره را به صورت زیر به دست می دهد

$$u(r, \phi) = \frac{55}{r} + \frac{165}{2r^2} P_1(\cos \phi) - \frac{385}{8r^3} P_2(\cos \phi) + \dots$$

حاصل جمع جزئی این سری را می توان برای محاسبه مقدار تقریبی پتانسیل مورد استفاده قرار داد. همچنین، جالب است که توجه کنیم که در فواصل دور، پتانسیل کره مانند پتانسیل بار نقطه، تقریباً برابر $\frac{55}{r}$ می باشد. (با مثال ۳ بخش ۹.۸ مقایسه کنید.)

مسائل بخش ۱۲.۱۱

۱. با جایگزینی بررسی کنید که $u_n(r, \phi)$ و $u_n^*(r, \phi)$ در $n = 0, 1, 2$ در (۸*) جوابهای (۲) می باشند.
۲. سطوحی را که توابع u_1 ، u_2 و u_3 بر آنها صفر می باشند بیابید.
۳. نمودار توابع $P_n(\cos \phi)$ را به ازای $n = 0, 1, 2$ رسم کنید [ر. ک. (۱۱) بخش ۳.۵].
۴. نمودار $P_2(\cos \phi)$ و $P_3(\cos \phi)$ را رسم کنید.
- فرض کنید r ، θ و ϕ مختصات کروی که در متن کتاب مورد استفاده قرار گرفته باشند، آنگاه مطلوب است پتانسیل در داخل کره $R=1$ ، با فرض آنکه هیچ باری در داخل کره وجود ندارد و پتانسیل بر سطح برابر $f(\phi)$ است، که در آن
۵. $f(\phi) = 1$. ۶. $f(\phi) = \cos \phi$. ۷. $f(\phi) = \cos 2\phi$

۸. $f(\phi) = 1 - \cos^2 \phi$. ۹. $f(\phi) = \cos^2 \phi$

۱۰. $f(\phi) = \cos^3 \phi + 3 \cos \phi$. ۱۱. $f(\phi) = 10 \cos^2 \phi - 3 \cos^4 \phi - 5 \cos \phi - 1$

۱۲. نشان دهید که در مساله ۵، پتانسیل در خارج کره برابر پتانسیل حاصل از یک بار نقطه ای است که در مبداء قرار دارد.

۱۳. فصل مشترك سطوح هم پتانسیل مساله ۶ با صفحه xz را رسم کنید.

۱۴. پتانسیل در خارج کره ای که در مسائل ۵ تا ۱۱ آمده است را بیابید.

۱۵. مقادیر A_0, A_1, A_2 و A_3 را در مسائل ۱، از فرمول (۱۳) به دست آورید.

۱۶. در مثال ۱، نمودار مجموع سه جمله که بطور واضح مفروض می باشد را به ازای $\tau = 1$ رسم کنید و با رسم آن مشاهده می کنید که این مجموع تقریبی برای تابع کرانه ای مفروض می باشد.

۱۷. دمای گوی همگن به شعاع واحد را طوری بیابید که کران پائینی در دمای صفر درجه سانتیگراد و دمای بالایی در 20° درجه سانتیگراد قرار گرفته باشند.

۱۸. نشان دهید که [ر. ک. مساله ۸ بخش ۳.۵]

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x).$$

۱۹. با استفاده از مساله ۱۸ و مساله ۱۲ بخش ۳.۵ نشان دهید که

$$\int_0^1 P_n(x) dx = \frac{[P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)]}{(2n+1)}$$

با استفاده از این مطلب، عبارات A_1, A_2, A_3 مربوط به مثال ۱ را تحقیق کنید و سپس A_2 را محاسبه نمایید.

۲۰. (معادلات خط انتقال) یک کابل یا سیم تلفن طولانی (شکل ۲۷۹) را که به طور ناقص عایق کاری شده است، به قسمی که سیم تلفن در سراسر طولش نشت می کند، در نظر می گیریم. مبدأ S جریان $i(x,t)$ سیم در $x=0$ و انتهای دریافت کننده T در $x=l$ واقع می باشد. جریان از S به T برقرار می گردد و از داخل مصرف کننده به زمین برمی گردد. فرض کنید R, L, C, G به ترتیب مقاومت، القا، ظرفیت نسبت به زمین و هدایت نسبت به زمین برای واحد کابل باشند. نشان دهید که

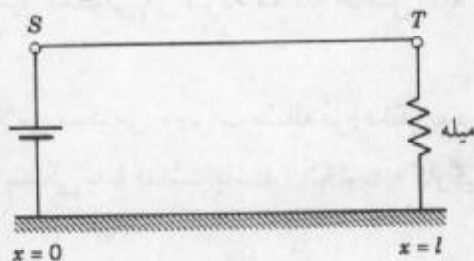
$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} \quad \text{(اولین معادله خط انتقال)}$$

که در آن $u(x,t)$ پتانسیل در کابل می باشد. راهنمایی. قانون ولتاژ کیرشهف را برای تکه کوچکی از کابل که بین x و $x + \Delta x$ واقع است به کار برید (اختلاف پتانسیل در x و $x + \Delta x$ برابر است با افت القایی به علاوه افت مقاومتی).

۲۱. نشان دهید که برای کابل در مساله ۲۰

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + G \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{(دومین معادله خط انتقال)}$$

راهنمایی. از قانون جریان کیرشهف استفاده کنید (اختلاف جریان در x و $x + \Delta x$ برابر است با اتلاف به علت نشست به زمین به علاوه اتلاف ظرفیتی).



شکل ۲۷۹. خط انتقال

۲۲. نشان دهید که حذف i یا u از معادلات خط انتقال منجر به معادلات

$$u_{xx} = LGu_{tt} + (RC + GL)u_t + RGu,$$

$$i_{xx} = LCi_{tt} + (RC + GL)i_t + RGi$$

می شوند.

۲۳. (معادلات تلگراف) برای کابلهای زیر دریایی G قابل چشم پوشی می باشد و فرکانسها پایین می باشند. نشان دهید که این فرضها منجر به معادلاتی که به معادلات کابل زیر دریایی یا معادلات تلگراف موسوم اند می شوند:

$$u_{xx} = RCu_t, \quad i_{xx} = RCi_t.$$

۲۴. پتانسیل در یک کابل زیر دریایی با انتهایی $x = 0$ و $x = l$ صفر و توزیع ولتاژ اولیه ثابت U_0 را بیابید.

۲۵. (معادلات خط فرکانس بالا) نشان دهید که در حالت جریانهای متناوب فرکانس بالا معادلات مذکور در مساله ۲۸ را می توان به طور تقریبی به معادلات زیر که به معادلات خط فرکانس بالا موسوم اند، تبدیل کرد:

$$u_{xx} = LGu_{tt}, \quad i_{xx} = LCi_{tt}.$$

اولین معادله را با فرض اینکه پتانسیل اولیه برابر $U_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ ، $u_t(x, 0) = 0$ و به ازای هر t در نقاط انتهایی $x = 0$ و $x = l$ در $u = 0$ می باشند راحل کنید.

۱۳.۱۱ حل مسائل معادلات بامشتقات جزئی به کمک تبدیلات لاپلاس

متعلمین آشنا به فصل ۶ ممکن است مایل باشند بدانند که آیا روش تبدیلات لاپلاس را

می توان برای حل معادلات بامشتقات جزئی به کار گرفت. پاسخ به این سوال، علی الخصوص اگر متغیرهای مستقل درنیمه مثبت محور قرار گیرند، مثبت است. مراحل حل شبیه مراحل موجود درفصل ۶ می باشد. برای یک معادله دومتغیره این مراحل عبارت اند از

۱. تبدیل لاپلاس را نسبت به یکی از دو متغیرها، معمولاً نسبت به t ، به کار می گیریم. این روش منجر به یک معادله دیفرانسیل معمولی می شود. معادله حاصل را به کمک شرایط کرانه ای و اولیه داده شده حل می کنیم.

۲. باگرفتن تبدیل لاپلاس معکوس، جواب مساله مورد نظر به دست می آید. چنانچه ضرایب معادله مفروض بستگی به t نداشته باشند، آنگاه با به کارگیری تبدیل لاپلاس، مساله به مساله ساده تری تبدیل می شود.

مثال ۱. یک معادله مرتبه اول

مساله

$$\frac{\partial w}{\partial x} + x \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad w(x, 0) = 0, \quad w(0, t) = t \quad (t \geq 0) \quad (1)$$

راحل کنید. دلیل به کارگیری w دراین معادله این است که می خواهیم W را برای نمایش دادن تابع پله ای واحد (بخش ۳.۶) بکار ببریم.

حل. باتبدیل لاپلاس گرفتن نسبت به t از طرفین (۱) وباتوجه به (۱) بخش ۲.۶ می یابیم

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial w}{\partial x}\right\} + x[s\mathcal{L}\{w\} - w(x, 0)] = 0. \quad (2)$$

دراینجا $w(x, 0) = 0$. درجمله اول با تغییر انتگرالگیری ومشتقگیری می یابیم

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial w}{\partial x}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial w}{\partial x} dt = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} e^{-st} w(x, t) dt = \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}\{w(x, t)\}. \quad (3)$$

بانوشتن $W(x, s) = \mathcal{L}\{w(x, t)\}$ ، از (۲) داریم

$$\frac{\partial W}{\partial x} + x s W = 0.$$

این معادله را می توان یک معادله دیفرانسیل معمولی بامتغیر مستقل x درنظر گرفت، زیرا در آن مشتق نسبت به s وجود ندارد. جواب عمومی این معادله عبارت است از (بخش ۷.۱)

$$W(x, s) = c(s) e^{-\frac{sx^2}{2}}.$$

از $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$ و $w(0, t) = t$ می یابیم $W(0, s) = \frac{1}{s^2}$ ، بنابراین

$$W(0, s) = c(s) = \frac{1}{s^2}.$$

در نتیجه

$$W(x,s) = \frac{1}{s^2} e^{-\frac{sx^2}{2}}$$

از $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$ و به کارگیری دومین قضیه انتقال (بخش ۳.۶) به ازای $a = \frac{x^2}{2}$ تبدیل معکوس موردنظر به صورت زیر حاصل می شود

$$w(x,t) = (t - \frac{x^2}{2})u(t - \frac{1}{2}x^2) = \begin{cases} 0 & ; t < \frac{x^2}{2}, \\ t - \frac{1}{2}x^2 & ; t > \frac{x^2}{2}. \end{cases} \quad (4)$$

بدلیل صوری بودن بحث فوق باید ثابت کرد که (۴) در (۱) صدق می کند که ما آنرا به عنوان یک تمرین به متعلم واگذار می کنیم.

مثال ۲. نخ نیمه متناهی

تغییر مکان $w(x,t)$ یک نخ کشسان با شرایط زیر را بیابید.

(i) در ابتدا کار نخ بر محور x از $x = 0$ تا ∞ («نخ نیمه متناهی») قرار دارد.

(ii) در هر لحظه $t > 0$ معادله حرکت انتهای چپ نخ عبارت است از (شکل ۲۸۰)

$$w(0,t) = f(t) = \begin{cases} \sin t & ; 0 < t < 2\pi \\ 0 & ; \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

(iii) علاوه بر آن، به ازای هر $t \geq 0$ ،

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w(x,t) = 0.$$

توجه کنید که نخ با طول بینهایت وجود خارجی ندارد ولی مدل مانخی طولی (با وزنی ناچیز) می باشد که انتهای راست آن در نقطه دوری واقع بر محور x ها ثابت شده است.

حل. برای رسیدن به جواب موردنظر باید معادله موج (بخش ۲.۱۱)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad c^2 = \frac{T}{\rho} \quad (5)$$

را به ازای x و t مثبت، تحت «شرایط کرانه ای»

$$w(0,t) = f(t), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} w(x,t) = 0 \quad (t \geq 0) \quad (6)$$

با f ای که در بالا توصیف شده است، و شرایط اولیه

$$w(x,0) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (8)$$

حل کنیم. با تبدیل لاپلاس گرفتن نسبت به t از طرفین (۵) و با توجه به (۲)، بخش ۲.۶ می یابیم

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^r w}{\partial t^r}\right\} = s^r \mathcal{L}\{w\} - s w(x, 0) - \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = c^r \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^r w}{\partial x^r}\right\}.$$

بنابر (۷) و (۸)، دو جمله در عبارت فوق حذف می شوند. هم اکنون با تعویض ترتیب انتگرالگیری بامشتگیری می یابیم

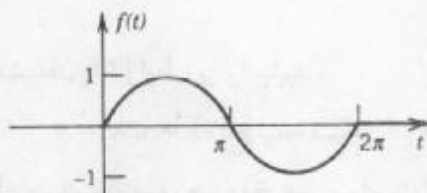
$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^r w}{\partial x^r}\right\} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial^r w}{\partial x^r} dt = \frac{\partial^r}{\partial x^r} \int_0^\infty e^{-st} w(x, t) dt = \frac{\partial^r}{\partial x^r} \mathcal{L}\{w(x, t)\}.$$

بنابراین $W(x, s) = \mathcal{L}\{w(x, t)\}$ می یابیم

$$s^r W = c^r \frac{\partial^r W}{\partial x^r}$$

یا

$$\frac{\partial^r W}{\partial x^r} - \frac{s^r}{c^r} W = 0.$$



شکل ۲۸۰. حرکت انتهای چپ نخ مذکور در مثال ۲ عنوان تابعی از زمان

چون این معادله تنها شامل یک مشتق نسبت به x می باشد، آن را می توان یک معادله دیفرانسیل معمولی برای $W(x, s)$ نسبت به x تصور نمود. جواب عمومی این معادله عبارت است از

$$W(x, s) = A(s)e^{\frac{sx}{c}} + B(s)e^{-\frac{sx}{c}}. \tag{۹}$$

باتوجه به (۶) می یابیم

$$W(0, s) = \mathcal{L}\{w(0, t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

و با فرض آنکه بتوان ترتیب انتگرالگیری نسبت به t و حدگیری وقتی که $x \rightarrow \infty$ را عوض نمود، داریم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} W(x, s) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-st} w(x, t) dt = \int_0^\infty e^{-st} \lim_{x \rightarrow \infty} w(x, t) dt = 0.$$

این مطلب ایجاب می کند که در (۹)، $A(s) = 0$ ، زیرا $c > 0$ ، لذا به ازای هر s ثابت مثبت تابع $e^{\frac{sx}{c}}$ با

افزایش x زیاد می شود. قابل توجه است که می توان فرض کرد $s > 0$ زیرا عموماً تبدیل لاپلاس به ازای

هر s بزرگتر از عدد معینی مانند γ وجود دارد (بخش ۲.۶). از اینرو می یابیم

$$W(0, s) = B(s) = F(s).$$

پس (۹) چنین می شود:

$$W(x,s) = F(s)e^{-\frac{sx}{c}}$$

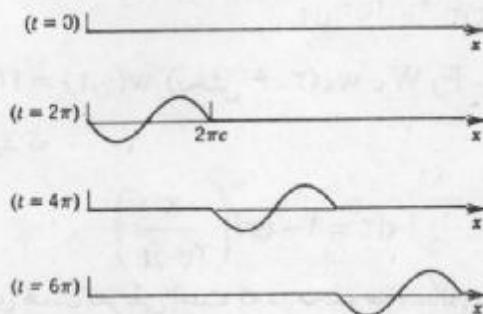
از دومین قضیه انتقال (بخش ۳.۶) به ازای $a = \frac{x}{c}$ تبدیل لاپلاس معکوس تابع فوق عبارت است از (شکل ۲۸۱)

$$w(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)u\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (۱۰)$$

یا

$$w(x,t) = \begin{cases} \sin\left(t - \frac{x}{c}\right); & \frac{x}{c} < t < \frac{x}{c} + 2\pi \text{ یا } ct > x > (t - 2\pi)c \\ 0 & ; \text{ در غیر این صورت} \end{cases}$$

این مطلب یک موج سینوسی تنها است که با سرعت c به طرف راست در حال حرکت می باشد. قابل توجه است که یک نقطه x تا لحظه $t = \frac{x}{c}$ بی حرکت می ماند، $t = \frac{x}{c}$ زمان لازم است تا با حرکت آغازی در $t = 0$ (آغاز حرکت طرف چپ) و با سرعت c به x رسید. نتیجه حاصل با شهود فیزیکی مطابقت دارد. چون اثبات صوری است، باید بررسی کنیم که آیا (۱۰) در شرایط مورد نظر صدق می کند یا نه؟ چگونگی انجام این کار به متعلم واگذار می شود.



شکل ۲۸۱. موج سیار در مثال ۲

مسائل بخش ۱۱. ۱۳

۱. هرگاه $c = 1$ و f مانند تابع مفروض در مثال ۱، بخش ۳.۱۱، به ازای $k = \frac{L}{4}$ «مثلثی» باشد، آنگاه شکلی مانند شکل ۲۸۱ رسم کنید.

۲. سرعت موج مطرح شده در مثال ۲ چطور به کشش و جرم نخ بستگی دارد؟

۳. صحت جواب مثال ۲ را بررسی کنید. چه موج سیاری در مثال ۲ حاصل می شود در صورتی که در

لحظه $t = 0$ شروع به اعمال حرکت سینوسی (بی پایان) به انتهای چپ نخ نمایم.

مسائل زیر با استفاده از تبدیلات لاپلاس حل کنید.

$$u(0, t) = 1, u(x, 0) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + 2x \frac{\partial u}{\partial t} = 2x. \quad ۴$$

$$t \geq 0 \text{ اگر } u(0, t) = 0, \quad x \geq 0 \text{ اگر } u(x, 0) = 0, \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = xt. \quad ۵$$

۶. مساله ۵ را باروشی دیگر حل کنید.

دمای $w(x, t)$ در یک میله نیمه متناهی با سطح جانبی عایق پوش شده که روی محور x ها از 0 تا ∞ قرار گرفته است را با فرض اینکه دمای اولیه صفر بوده و هنگامی که $x \rightarrow \infty$ به ازای هر $t > 0$ ، $w(x, t) \rightarrow 0$ و $w(0, t) = f(t)$ ، تحت فرآیند به شرح ذیل بیابید.

۷. مدلی بسازید و نشان دهید که تبدیل لاپلاس منجر به

$$sW(x, s) = c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; \quad W = \mathcal{L}\{w\}$$

و

$$W(x, s) = F(s)e^{-\frac{\sqrt{sx}}{c}}; \quad F = \mathcal{L}\{f\}$$

می گردد.

۸. با به کارگرفتن قضیه پیچش درمساله ۷، نشان دهید که

$$w(x, t) = \frac{x}{2c\sqrt{\pi}} \int_0^t f(t-\tau) \tau^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4c^2\tau}} d\tau.$$

۹. با قرار دادن $w(0, t) = f(t) = u(t)$ (بخش ۳.۶) w, W, F و متناظر را به ترتیب با w_0, W_0 ،

F و W_0 درمساله ۸ نشان دهید که

$$w_0(x, t) = \frac{x}{2c\sqrt{\pi}} \int_0^t \tau^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4c^2\tau}} d\tau = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right)$$

که در آن تابع خطای erf دارای همان تعریفی است که در مجموعه مسائل بخش ۱۱.۶ آمده است.

۱۰. (فرمول دوهمال)^{۱۴} درمساله ۹ نشان دهید که

$$W_0(x, s) = \frac{1}{s} e^{-\frac{\sqrt{sx}}{c}}$$

و با توجه به قضیه پیچشی فرمول دوهمال

$$w(x, t) = \int_0^t f(t-\tau) \frac{\partial w_0}{\partial \tau} d\tau$$

را نتیجه بگیرید.

۱۴. ۱۱ حل مسائل معادلات با مشتقات جزئی به کمک تبدیلات فوریه

معادلات بامشتقات جزئی راهمچنین می توان بوسیله روشهای عملی دیگری حل نمود. در این بخش به کمک تبدیلات فوریه به حل معادلات با مشتقات جزئی می پردازیم.

هرگاه داده های کرانه ای یا اولیه برنیمه مثبت محور مفروض باشند، آنگاه در حل مسائل از تبدیلات کسینوسی یا سینوسی فوریه (بخش ۱۰. ۱۰) استفاده می کنیم، وچنانچه این داده ها بر سراسر محور مفروض باشند، می توان از تبدیلات فوریه (بخش ۱۱. ۱۰) استفاده نمود. ما اساس انجام این کار را با آوردن کاربردهای نوعی روشن می نمایم.

مثال ۱. مساله گرما بر محور X ها

مطلوب است دمای $u(x,t)$ ی میله همگن با سطح مقطع ثابت به طور کامل عایق پوش شده که در فاصله $-\infty$ تا ∞ بر محور X واقع است را طوری بیابید که دمای اولیه در این میله به صورت زیر باشد

$$u(x,0) = f(x) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1)$$

وچنانچه $|x| \rightarrow \infty$ ، به ازای هر $t \geq 0$ داریم

$$u(x,t) \rightarrow 0, \quad u_x(x,t) \rightarrow 0. \quad (2)$$

مساله فوق را در حالت خاص

$$f(x) = \begin{cases} U_0 = \text{ثابت} & ; |x| < 1 \\ 0 & ; |x| > 1. \end{cases} \quad (3)$$

حل کنید.

حل. می خواهیم معادله گرمای

$$u_t = c^2 u_{xx} \quad (4)$$

را با شرایط (۱) و (۲) حل کنیم. تکنیک راه حل در اینجا به کارگیری تبدیل فوریه نسبت به متغیر X و تبدیل معادله به یک معادله دیفرانسیل معمولی بر حسب t است. جزئیات انجام این کار به شرح زیر می باشد.

فرض کنید $\bar{u} = F(u)$ نمایش تبدیل فوریه u باشد. باتوجه به (۱۰) بخش ۱۱. ۱۰، (۴) به

صورت زیر درمی آید

$$F(u_t) = c^2 F(u_{xx}) = c^2 (-w^2) F(u) = -c^2 w^2 \bar{u}.$$

هم اکنون با فرض قابل تعویض بودن ترتیب انتگرالگیری و مشتقگیری می یابیم

$$F(u_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_t e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-iwx} dx = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}.$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -c^2 w^2 \bar{u}.$$

چون این معادله فقط شامل یک مشتق نسبت به t بوده و نسبت به w مشتقی در معادله موجود نیست. این معادله را می توان به عنوان یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول با متغیر مستقل t و w موجود در آنرا به عنوان یک پارامتر تصور نمود. به روش جداسازی متغیرها (بخش ۱.۲) جواب عمومی به صورت

$$\bar{u}(w, t) = C(w)e^{-c^2 w^2 t},$$

که در آن $C(w)$ ثابت دلخواه وابسته به پارامتر w است که برای معادله موردنظر حاصل می شود. شرط اولیه (۱) ایجاب می کند که $\bar{u}(w, 0) = C(w) = \bar{f}(w) = F(f)$ و از آنجا می یابیم

$$\bar{u}(w, t) = \bar{f}(w)e^{-c^2 w^2 t}.$$

باتوجه به فرمولی (۷) بخش ۱۱.۱۰ می یابیم

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(w) e^{-c^2 w^2 t} e^{iwx} dw. \quad (5)$$

در این فرمول می توان تبدیل فوریه

$$\bar{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-i w v} dv$$

را جایگزین نمود و با فرض قابل جابجا بودن ترتیب انتگرالگیری نتیجه گرفت

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(v) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2 w^2 t} e^{i(wx - wv)} dw \right] dv.$$

بنا به فرمول اوپلر (۳)، بخش ۱۱.۱۰، تابع انتگرالده انتگرال داخلی برابر است با

$$e^{-c^2 w^2 t} \cos(wx - wv) + i e^{-c^2 w^2 t} \sin(wx - wv).$$

که قسمت موهومی آن یک تابع فرد نسبت به w است و بنابراین انتگرال مربوط به آن برابر صفر است.^{۱۵} و قسمت حقیقی آن یک تابع زوج بوده و هر دو حدود انتگرال دوگانه موردنظر از 0 تا ∞ می باشد. بنابراین باتوجه به آن می توان نوشت

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \left[\int_0^{\infty} e^{-c^2 w^2 t} \cos(wx - wv) dw \right] dv.$$

این نتیجه با (۹)، بخش ۱۱.۶ مطابقت دارد. و منجر به فرمولهای دیگری برای (۱۱) و (۱۳) در بخش ۱۱.۶ می شود.

مثال ۲. حل مساله توصیف شده در مثال ۱ به کمک روش پیچشی

مساله گرما در مثال ۱ را به کمک روش پیچشی حل کنید.

حل. شروع کار که مانند گذشته است منجر به (۵) می شود، یعنی

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(w) e^{-c^2 w^2 t} e^{iwx} dw. \quad (5)$$

قبول می کنیم که این موضوع به شکل (۱۳) بخش ۱۱.۱۰ می باشد، یعنی

$$u(x, t) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(w) \tilde{g}(w) e^{iwx} dw \quad (6)$$

که در آن

$$\tilde{g}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-c^2 w^2 t}. \quad (7)$$

چون، بنا به تعریف پیچش [(۱۱)، ر.ک. بخش ۱۱.۱۰]

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x - p) dp, \quad (8)$$

همانند مراحل فعلی و گذشته باید تبدیل فوریه معکوس g را از روی \tilde{g} مشخص کنیم.

برای این منظور می توان از فرمول ۹ جدول III بخش ۱۲.۱۲ استفاده نمود (این فرمولها از مثال ۲ بخش ۱۱.۱۰ حاصل شده اند.)

$$F(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{w^2}{2a}}$$

که در آن a یک ثابت مناسب می باشد. با فرض $c^2 t = \frac{1}{2a}$ یا $a = \frac{1}{2c^2 t}$ ، و با استفاده از (۷) می یابیم

$$F(e^{-\frac{x^2}{2c^2 t}}) = \sqrt{2c^2 t} e^{-c^2 w^2 t} = \sqrt{2c^2 t} \sqrt{2\pi} \tilde{g}(w).$$

بنابراین \tilde{g} دارای تبدیل فوریه معکوس به صورت زیر می باشد

$$\frac{1}{\sqrt{2c^2 t} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2c^2 t}}.$$

با جایگزینی $x - p$ با x قرار دادن آن در (۸)، می یابیم

$$u(x, t) = (f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2c^2 t} \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(p) \exp\left\{-\frac{(x-p)^2}{2c^2 t}\right\} dp. \quad (9)$$

جواب حاصل با (۱۱) بخش ۶.۱۱ مطابقت دارد.

مثال ۳. کاربرد تبدیل سینوسی فوریه در حل مساله گرما

مساله گرما برای یک میله نامتناهی که در فاصله 0 تا ∞ در طول محور x قرار دارد را در صورتی حل کنید که دمای اولیه مساوی

$$u(x, 0) = f(x) \quad (0 \leq x < \infty)$$

ودما در ابتدای میله برابر باشد با

$$u(0, t) = 0 \quad (t \geq 0).$$

حل. به جای تبدیل فوریه می توان تبدیل سینوسی فوریه (ر.ک. بخش ۱۰.۱۰) استفاده نمود، چون

x از ۰ تا ∞ ادامه داده شده است. مراحل حل همانند مثال ۱ می باشد، از معادله گرما و (۹b) بخش

۱۰.۱۰ داریم

$$F_s(u_t) = \frac{\partial \tilde{u}_s}{\partial t} = c^T F_s(u_{xx}) = -c^T w^T F_s(u) = -c^T w^T \tilde{u}_s(w, t).$$

در این مثال توجه کنید که $f(0) = u(0, 0) = 0$.

جواب این معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول عبارت است از

$$\tilde{u}_s(w, t) = C(w)e^{-c^T w^T t}.$$

از شرط اولیه $u(x, 0) = f(x)$ داریم $\tilde{u}_s(w, 0) = \tilde{f}_s(w) = C(w)$. از اینرو

$$\tilde{u}_s(w, t) = \tilde{f}_s(w)e^{-c^T w^T t}.$$

با تبدیل سینوسی معکوس گرفتن و جایگزین کردن

$$\tilde{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(p) \sin wp \, dp$$

جواب زیر برای مساله حاصل می شود

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(p) \sin wp \, e^{-c^T w^T t} \sin wx \, dp \, dw. \quad (10)$$

مثال ۴. معادله موج بریک بازه نیمه متناهی. جواب دالامبر

معادله موج

$$u_{tt} = c^T u_{xx} \quad (-\infty < x < \infty, t > 0)$$

را طوری حل کنید که شرایط زیر حاکم باشند

$$u(x, 0) = f(x) \quad (\text{تغییر مکان اولیه مفروض})$$

$$u_t(x, 0) = 0 \quad (\text{سرعت اولیه صفر})$$

$$u \rightarrow 0, u_x \rightarrow 0 \quad |x| \rightarrow \infty \text{ وقتی } t \text{ هر ا وقتی}$$

که در آن f دارای تبدیل فوریه است.

حل. با تبدیل فوریه گرفتن نسبت به x، قرار دادن $\tilde{u} = F(u)$ و با استفاده از (۱۰)، بخش ۱۱.۱۰

می یابیم

$$F(u_{tt}) = \tilde{u}_{tt} = c^T F(u_{xx}) = -c^T w^T \tilde{u}.$$

از اینرو

$$\tilde{u}_{tt} + c^T w^T \tilde{u} = 0.$$

چون مشتق موجود در معادله به w وابسته نیست، این معادله را می توان یک معادله دیفرانسیل معمولی

مرتبه دوم با ضریب ثابت $c^T w^T$ تصور نمود. جواب عمومی این معادله عبارت است از

$$u(w, t) = A(w) \cos cwt + B(w) \sin cwt.$$

از $F\{u(x, \circ)\} = \bar{u}(w, \circ)$ ، و شرط اولیه داریم

$$\bar{u}(w, \circ) = A(w) = \bar{f}(w),$$

$$\bar{u}_t(w, \circ) = cwB(w) = \circ.$$

بنابراین

$$\bar{u}(w, t) = \bar{f}(w) \cos cwt .$$

برای رسیدن به u نیاز به بسط تابع کسینوس بر حسب توابع نمایی و سپس به کارگیری زیر را داریم

$$F\{f(x - a)\} = e^{-iwa} F\{f(x)\}. \quad (11)$$

که با استفاده از تعریف تبدیل فوریه و با قراردادن $x - a = p$ ، $x = p + a$ ، $dx = dp$ نتیجه می شود. لذا

$$\begin{aligned} F\{f(x - a)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - a) e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(p) e^{-iw(p+a)} dp \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iwa} \int_{-\infty}^{\infty} f(p) e^{-iwp} dp. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\bar{f}(w) \cos cwt = \frac{1}{2} \bar{f}(w) [e^{icwt} + e^{-icwt}]$$

دارای تبدیل فوریه معکوس

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)] \quad (12)$$

می باشد. این جواب به جواب دالامبر (۱۴) بخش ۱۱. ۴ مشهور می باشد.

هم اکنون در پایان فصل ۱۱ قرار داریم. در این فصل با معادلات بامشتقات جزئی بسیار مهم که دارای کاربردهای متنوع در فیزیک و مهندسی است آشنا شدیم. با پایان یافتن این فصل به انتهای بخش C ، آنالیز فوریه و معادلات بامشتقات جزئی رسیدیم که چنین معادلاتی پایه و اساس بسیاری از پروژه های تحقیقاتی هستند.

روشهای عددی معادلات بامشتقات جزئی در بخشهای ۴. ۲۰ الی ۷. ۲۰ به طور مستقل

از قسمتهای دیگر در بخش E ارائه می شود.

در بخش بعدی (بخش D ، فصلهای ۱۲ تا ۱۷) با آنالیز مختلط که بسیار در رشته های

مهندسی با اهمیت هستند خواهیم پرداخت.

مسائل و پرسشهای دوره ای برای فصل ۱۱

۱. از قوانین فیزیکی ، معادله موج یک بعدی چگونه به دست می آید؟

۲. مساله نخ مرتعش دارای چه شرایطی است؟
۳. توابع ویژه و فرکانسهای نخ مرتعش کدام اند؟
۴. جواب دالامبر مربوط به مساله نخ مرتعش چگونه حاصل می شود؟
۵. به چه دلیل جوابهای معادله موج به کمک سری فوریه آنقدر مورد بررسی قرار گرفته است و حال آنکه جواب حاصل از روش دالامبر که سریعتر حاصل می شود زیاد مورد توجه واقع نشده است؟
۶. معادله گرما چه شکلی دارد و چه شرط اضافی در مساله گرما باید در نظر گرفت؟
۷. اصل برهم نهش چیست و برای چه معادلاتی کاربرد دارد؟
۸. معادلات بیضوی، سهموی و هذلولوی کدام اند؟ برای هر کدام یک مثال بیاورید.
۹. توابع ویژه یک غشای مربعی چیست؟ درباره فرکانسهایش چه می دانید؟
۱۰. توابع ویژه یک غشای مستدیر کدام اند؟ چگونه فرکانسهای این توابع با نخ مرتعش اختلاف دارند؟
۱۱. در حل معادله موج به روش جداسازی تنها توابع مثلثاتی به دست می آید، در حالی که در جداسازی معادله گرما نیز توابع نمایی حاصل می شوند. علت این اختلاف در چیست؟
۱۲. برخی معادلات با مشتقات جزئی ساده را می توان با روشهای معادلات دیفرانسیل معمولی حل نمود. با آوردن مثال توضیح دهید.
۱۳. چرا توابع لژاندار و بسل در این فصل مطرح شده اند؟ در کجای این کتاب این توابع ارائه شده اند؟
۱۴. تابع خطا چیست و در چه مساله ای ارائه شده است؟
۱۵. چرا در این فصل این قدر از سری فوریه استفاده کرده ایم و حال آنکه بسیاری از توابع در پدیده های فیزیکی متناوب نیستند؟
۱۶. در حل مساله موج به چند شرط اولیه نیاز داریم؟ در حل مساله گرما چطور؟
۱۷. نشان دهید که توابع $u = x^2 - 6x^2y^2 + y^2$ و $u = \sin x \sinh y$ جوابهای معادله لاپلاس هستند.
۱۸. نشان دهید که توابع $u = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ و $u = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$ جوابهای معادله لاپلاس هستند.
۱۹. به چه دلیل انتگرال فوریه در این فصل مطرح شده است؟
۲۰. در فصل ۶ معادله کمکی یک معادله جبری بود. چرا در حل معادله با مشتق جزئی به کمک روش تبدیلات به معادله دیفرانسیل معمولی می رسیم؟

معادلات زیر را حل کنید:

$$u_{xy} + u_y + x + y + 1 = 0. \quad 22$$

$$u_{yy} + 16u = 0. \quad 21$$

$$u_x(0, y) = g(y), u(0, y) = f(y), u_{xx} + u = 0. \quad 24$$

$$u_{xx} + u_x - 2u = 10. \quad 23$$

$$u_y(x, 0) = g(x), u(x, 0) = f(x), u_{yy} + u_y = 0. ۲۵$$

۲۶. تمامی جوابهای معادله لاپلاس دومتغیره را که به صورت $u(x, y) = F(x)G(y)$ هستند به دست آورید.

با استفاده از تبدیلات داده شده، معادلات مورد نظر را حل کنید.

$$u_{xy} = u_{xx}; v = y, z = x + y. ۲۷$$

$$yu_{xy} = xu_{xx} + u_x; v = y, z = xy. ۲۸$$

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0, v = y, z = x + y. ۲۹$$

$$u_{xx} = u_{yy}; v = y + x, z = y - x. ۳۰$$

$$u_{yy} + u_{xy} - 2u_{xx} = 0; v = x + y, z = 2y - x. ۳۱$$

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0; v = x, z = x - y. ۳۲$$

$$2u_{xx} + 5u_{xy} + 2u_{yy} = 0; v = 2x - y, z = 2y - x. ۳۳$$

مساله ارتعاش نخى به طول π را در صورتى که $c^2 = \frac{T}{\rho} = 1$ ، سرعت اولیه برابر صفر و ارتعاش اولیه برابر یکی از توابع زیر باشد حل کنید.

$$f(x) = -\frac{1}{2} \sin^2 x. ۳۵ \quad f(x) = \sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x. ۳۴$$

$$f(x) = \sin^2 x. ۳۷ \quad f(x) = \frac{\pi}{2} - \left| x - \frac{\pi}{2} \right|. ۳۶$$

$$f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x < \frac{\pi}{3} \\ \frac{(\pi - x)}{2} & ; \frac{\pi}{3} < x < \pi \end{cases}. ۳۸$$

مطلوب است دمای $u(x, t)$ در یک میله به طول $L = \pi$ و $c = 1$ که سطح جانبی و حتی دوانتهای آن در

$x = 0$ و $x = \pi$ عایق پوش شده، و دمای اولیه $u(x, 0) = f(x)$ عبارت است از

$$f(x) = \sin x. ۴۰ \quad f(x) = k = \text{ثابت}. ۳۹$$

$$f(x) = 1 - \frac{x}{\pi}. ۴۲ \quad f(x) = \cos^2 x. ۴۱$$

توزیع دما در یک میله مسی به طول 50 سانتیمتر با مقطع عرضی ثابت را محاسبه کنید، در صورتی که

میله کاملاً از سطح جانبی عایق پوش شده، $c^2 = \frac{K}{\sigma \rho} = 1/158 \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}$ و نقاط پایانی $x = 0$ و

$x = \pi$ در دمای صفر درجه سانتیگراد قرار گرفته و دمای اولیه برابر یکی از مقادیر زیر باشد

$$f(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{10}\right). ۴۵ \quad f(x) = 100 \sin\left(\frac{\pi x}{25}\right). ۴۴ \quad f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{50}\right). ۴۳$$

$$f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x < 25, \\ 50 - x & ; 25 < x < 50. \end{cases} \quad .47 \quad f(x) = x(50 - x). \quad .46$$

در بخش ۱۱.۵ مشاهده کردیم که درجه حرارت $u(x,t)$ در یک میله به طول L که به طور کامل سطح جانبی و دو انتهای آن عایق پوش شده است عبارت است از

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} \exp \left[- \left(\frac{cn\pi}{L} \right)^2 t \right].$$

هم اکنون با فرض $L = \pi$ و $c = 1$ ، جواب مساله را طوری بیابید که دمای اولیه برابر یکی از مقادیر زیر باشد

$$f(x) = 95 \cos 2x \quad .49 \quad f(x) = 30x^2 \quad .48$$

$$f(x) = \begin{cases} 4x & ; 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 4(\pi - x) & ; \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases} \quad .50$$

۵۱. فرض کنید که رویه های صفحه نازک مفروض بین $0 \leq x \leq \pi$ ، $0 \leq y \leq \pi$ به طور کامل عایق پوش شده، لبه ها در دمای صفر قرار گرفته و دمای اولیه برابر با $u(x,y,0) = f(x,y)$ باشد. با به کارگیری روش جداسازی متغیرها، در معادله حرارت دوبعدی $u_t = c^2 \nabla^2 u$ ، نشان دهید که دمای صفحه در نقطه دلخواه (x,y) واقع در صفحه و در لحظه t از فرمول زیر به دست می آید

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin mx \sin ny e^{-c^2(m^2+n^2)t}$$

که در آن

$$B_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x,y) \sin mx \sin ny \, dx \, dy.$$

۵۲. دمای صفحه مربوط به مساله ۵۱ را با شرط $f(x,y) = x(\pi - x)(\pi - y)$ بیابید. نشان دهید که غشاهای به شرح زیر به مساحت واحد با $c^2 = 1$ دارای فرکانسهای مد بنیادی است که در زیر (تا ۴ رقم اعشار) داده شده اند. نتایج را با یکدیگر مقایسه کنید.

$$.53 \quad \text{دایره: } \frac{\alpha_1}{2\sqrt{\pi}} = 0.6784; \quad .54 \quad \text{مربع: } \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071$$

$$.54 \quad \text{ربع دایره: } \frac{\alpha_{12}}{4\sqrt{\pi}} = 0.7244 \quad (\text{اولین صفر مثبت } J_2 = 5.13562 = \alpha_{12}).$$

$$.56 \quad \text{نیم دایره: } \frac{3/832}{\sqrt{8\pi}} = 0.7644$$

$$.57 \quad \text{مستطیل (به ابعاد ۱ و ۲): } \sqrt{\frac{5}{8}} = 0.7906$$

۵۸. مطلوب است تغییر مکان $u(x,y,t)$ ی غشای مربعی واقع در ناحیه $0 \leq x \leq 1$ ، $0 \leq y \leq 1$

- با $c = 1$ ، تغییر مکان اولیه $f(x, y) = kx(1 - x^2)(1 - y^2)$ ، و سرعت اولیه صفر.
۵۹. مطلوب است پتانسیل الکترواستاتیکی بین دو دایره متحد المركز به شعاعهای 2cm و 10cm که به ترتیب در پتانسیلهای 110 ولت و صفر ولت قرار گرفته اند.
۶۰. معادله $x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$ را با جایگزینی $z = y, v = \frac{y}{x}$ حل کنید.

خلاصه فصل ۱۱

معادلات بامشتقات جزئی

در فصول ۱ تا ۶ مشاهده کردیم که مسائل ساده فیزیکی یک متغیره به معادلات دیفرانسیل معمولی منجر می شوند و حال آنکه پدیده های فیزیکی و مهندسی شامل دو یا چند متغیر مستقل منجر به معادلات بامشتقات جزئی می شوند. این نوع مسائل اصولاً از پیچیدگیهای خاصی برخوردارند. در این فصل بامعادلات بامشتقات جزئی مهم فیزیک و ریاضی به شرح زیر مواجهیم.

- (۱) معادله موج یک بعدی (بخشهای ۲.۱۱ تا ۴.۱۱)
 $u_{tt} = c^2 u_{xx}$
- (۲) معادله موج دو بعدی (بخشهای ۷.۱۱ تا ۱۰.۱۱)
 $u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy})$
- (۳) معادله گرمای یک بعدی (بخشهای ۵.۱۱ و ۶.۱۱)
 $u_t = c^2 u_{xx}$
- (۴) معادله لاپلاس دوبعدی (بخشهای ۵.۱۱ و ۹.۱۱)
 $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$
- (۵) معادله لاپلاس سه بعدی (بخشهای ۱۱.۱۱ و ۱۲.۱۱)
 $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$
- معادلات (۱) و (۲) هذلولوی، معادله (۳) سهموی، معادلات (۴) و (۵) بیضوی می باشند. (ر. ک. مجموعه مسال بخش ۴.۱۱).

در عمل، باید جواب معادلات را طوری یافت که بر یک ناحیه مفروض در یک سری شرایط اضافی مفروض، مثل شرایط اولیه (شرایط در لحظه $t = 0$) یا شرایط کرانه ای (مقادیر جواب u یا برخی مشتقاتش بر کران ناحیه که یک منحنی C یا یک سطح S است) صدق کند. برای معادلات (۱) و (۲) دو شرط اولیه (تغییر مکان اولیه و سرعت اولیه) مشخص شده است. برای معادله (۳) توزیع دمای اولیه مشخص شده است. در (۴) یا (۵) شرط کرانه ای تعیین شده و مسائل حاصل شده اند (ر. ک. بخش ۵.۱۱).

مساله دیریکله است هرگاه u بر S تعیین شده است.

مساله نیومن است هرگاه $u_n = \frac{\partial u}{\partial n}$ بر S مشخص شده باشد.

مساله آمیخته است هرگاه u بر قسمتی از S و u_n بر قسمتهای دیگر S مشخص شده باشد.

یک روش عمومی برای حل این قبیل مسائل روش جداسازی متغیرها یا روش ضریبی است که

جوابهای حاصل از حاصلضرب توابعی حاصل می شوند که هر کدام تنها به یک متغیر وابسته اند. معادله (۱) با جایگزینی (ر.ک. بخش ۱۱.۳)

$$u(x, t) = F(s)G(t)$$

حل شده است. حل مساله به صورت فوق برای (۳) در بخش ۱۱.۵ آمده است. با جایگزینی عبارت فوق در معادله مفروض دو معادله دیفرانسیل معمولی برای F و G حاصل می شوند، از این معادلات با شرایط کرانه ای داده شده تعداد نامتناهی جواب $F = F_n$ و $G = G_n$ به دست می آید به طوری که توابع متناظر

$$u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t)$$

جوابهای معادلات با مشتق جزئی می باشند که در شرایط کرانه ای مفروض صدق می کنند. اینها توابع ویژه مساله می باشند، و مقادیر ویژه متناظر فرکانس ارتعاش، مثلاً در مسائل گرما کاهش دما و همینطور برای سایر مسائل راتعیین می کند. برای صدق کردن شرط اولیه (شرایط اولیه)، باید سری نامتناهی از u_n را در نظر بگیریم، که ضرایب آن، ضرایب فوریه توابع f و g متناظر با شرایط اولیه مفروض (بخشهای ۱۱.۳ و ۱۱.۵) باشد. بدین جهت سریهای فوریه (و همینطور انتگرالهای فوریه) در اینجا از اهمیتهای اساسی برخوردارند (ر.ک. بخشهای ۱۱.۳، ۱۱.۵، ۱۱.۶، ۱۱.۸).

مسائل حالت پایدار آنهایی هستند که جواب به زمان t وابسته نباشد. برای اینها، معادله حرارت $u_t = c^2 \nabla^2 u$ به معادله لاپلاس $\nabla^2 u = 0$ (بخش ۱۱.۵) تبدیل می شود.

قبل از حل یک مساله مقدار کرانه ای یا اولیه، اغلب معادله را به دستگاه مختصاتی می برند که کران ناحیه دارای معادله ساده تری است. در مختصات قطبی با فرض $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ ، معادله لاپلاس (ر.ک. بخش ۱۱.۹) به صورت زیر درمی آید

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \quad (6)$$

برای مختصات کروی، بخش ۱۱.۱۱ را ملاحظه کنید. چنانچه از روش تفکیک متغیرها برای آنها استفاده کنیم، از (۲) و (۶) (ارتعاش غشاء مستدیر، بخش ۱۱.۱۰) به معادله بسل و از (۵) (حل مساله لاپلاس برای یک کره) به معادله لژاندار (۱۲.۱۱) می رسمیم.

روشهای عملگر (تبدیلات لاپلاس و تبدیلات فوریه) در حل معادلات با مشتق جزئی در نواحی نامتناهی (ر.ک. بخشهای ۱۱.۱۳ و ۱۴.۱۱)، خصوصاً هرگاه ضرایب معادلات ثابت یا تنها به یک متغیر وابسته باشد، مفید و کمک کننده می باشد.

قسمت D

آنالیز مختلط

فصل ۱۲ . اعداد مختلط . توابع تحلیلی مختلط

فصل ۱۳ . انتگرالگیری مختلط

فصل ۱۴ . سریهای توانی ، سریهای تیلور ، سریهای لوران

فصل ۱۵ . انتگرالگیری به روش مانده ها

فصل ۱۶ . نگاشت همدیس

فصل ۱۷ . کاربرد آنالیز مختلط در نظریه پتانسیل

بسیاری از مسائل مهندسی را می توان با استفاده از روشهای اعداد و توابع مختلط بررسی و حل نمود .

اصولاً دو نوع از این گونه مسائل وجود دارند . نوع اول شامل « مسائل مقدماتی » هستند که برای حل آنها برخی آگاهی از اعداد مختلط فرا گرفته شده کافی است . به عنوان مثال ، بسیاری از مسائل کاربردی مربوط به مدارهای الکتریکی و سیستمهای ارتعاش کننده مکانیکی از این نوع اند .

نوع دوم شامل مسائل پیشرفته تری می باشند که آشنایی بیشتری از نظریه توابع تحلیلی مختلط یا به اختصار ، « نظریه توابع مختلط » یا « آنالیز مختلط » و روشهای دقیق و پر قدرتی را می طلبد . مسائل جالب در هدایت گرما ، جریان سیال ، و الکترواستاتیک از این نوع اند .

شش فصل آتی (فصلهای ۱۲ تا ۱۷) به آنالیز مختلط و کاربرد آنها اختصاص دارد . چنانچه خواهیم دید که اهمیت توابع تحلیلی مختلط در ریاضیات مهندسی ریشه در سه نتیجه اصلی زیر دارد .

۱ . قسمتهای حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی جوابهای معادله لاپلاس نسبت به دو متغیر مستقل می باشند . در نتیجه ، مسائل پتانسیل دو بعدی را می توان به کمک روشهایی که در ارتباط با توابع تحلیلی توسعه یافته اند ، بررسی نمود .

۲. بسیاری از انتگرالهای حقیقی و مختلط پیچیده ای که در کاربردها رخ می دهند را می توان به کمک روشهای انتگرالگیری مختلط ارزیابی و محاسبه نمود.
۳. بخش وسیعی از توابع در ریاضیات مهندسی توابع تحلیلی می باشند و مطالعه مقادیر مختلط از متغیرهای مستقل منجر به تفهیم عمیقتر خواص این توابع می گردند.

تعداد صفحات

تعداد صفحات: ۳۳

تعداد صفحات: ۳۱

تعداد صفحات: ۳۱

تعداد صفحات: ۳۱

تعداد صفحات: ۳۱

تعداد صفحات: ۳۱

تعداد صفحات: ۳۱

تعداد صفحات: ۳۱

تعداد صفحات: ۳۱

تعداد صفحات: ۳۱

تعداد صفحات: ۳۱

تعداد صفحات: ۳۱

تعداد صفحات: ۳۱

تعداد صفحات: ۳۱

تعداد صفحات: ۳۱

تعداد صفحات: ۳۱

تعداد صفحات: ۳۱

تعداد صفحات: ۳۱

فصل ۱۲

اعداد مختلط . توابع تحلیلی مختلط

اعداد و صفحه مختلط در بخشهای ۱۲.۱ تا ۱۲.۳ مورد بحث قرار گرفته اند. آنالیز مختلط مربوط به توابع تحلیلی در بخش ۱۲.۴ مورد بررسی قرار می گیرند. در بخش ۱۲.۵ با معادلاتی موسوم به معادلات کوشی-ریمان مواجه هستیم. این معادلات، معادلاتی بنیادی هستند. اینها منجر به معادله لاپلاس می شوند. در باقیمانده بخش ۱۲ به مطالعه برخی توابع مختلط مقدماتی (تابع نمایی، تابع مثلثاتی و نظایر آنها) می پردازیم. این نوع توابع به صورت حقیقی در حساب دیفرانسیل و انتگرال مورد بررسی قرار گرفته اند. بخش ۱۲.۹ اختصاص به نگاشتهای این نوع توابع دارد. (در فصلهای ۱۶ و ۱۷ این مطالب ارائه شده اند.)

پیشنیاز این فصل: حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی.

مراجع: ضمیمه ۱، قسمت D.

جواب مسائل: ضمیمه ۲.

۱۲.۱ اعداد مختلط . صفحه مختلط

در زمانهای گذشته ریاضیدانان با معادلاتی به صورت $x^2 = -1$ یا $x^2 - 10x + 40 = 0$ مواجه شدند که دارای هیچ ریشه حقیقی نبودند، بررسی چگونگی حل معادلاتی که دارای ریشه های حقیقی نیستند سبب پیدایش اعداد مختلط^۱ گردید.

بنا به تعریف، یک عدد مختلط Z یک زوج مرتب (x, y) از دو عدد حقیقی x و y است. برای

۱- اولین کسی که اعداد مختلط را برای این منظور به کار گرفت، ریاضیدان ایتالیایی جیرولامو کاردانو (Girolamo Cardano) (۱۵۰۱-۱۵۷۶) بود. کاردانو همان کسی است که فرمولی برای حل معادله درجه سوم ارائه داد. اصطلاح «اعداد مختلط» به وسیله ریاضیدان بزرگ آلمانی کارل فردریش گاوس (ر.ک. زیر نویس بخش ۴.۴) وضع شد و هم او بود که راه را برای استفاده عمومی و سیستماتیک از اعداد مختلط باز نمود.

آن می نویسیم

$$z = (x, y).$$

x را قسمت حقیقی و y را قسمت موهومی z می نامند و می نویسند

$$\operatorname{Re} z = x, \operatorname{Im} z = y.$$

دو عدد مختلط مساوی هستند هرگاه قسمت‌های حقیقی و موهومی آنها به ترتیب باهم برابر باشند.

(۰, ۱) را یک موهومی می نامند و چنین قرار می دهند

$$i = (0, 1). \quad (1)$$

هم اکنون جمع و ضرب در اعداد مختلط را طوری تعریف می کنیم که سیستم حاصل تعمیم سیستم اعداد حقیقی باشد. به ازای دو عدد مختلط $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$ جمع و ضرب^۱ به ترتیب چنین تعریف می کنیم

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (2^*)$$

و

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (3^*)$$

باتوجه به تعاریف فوق داریم

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0),$$

$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$$

$(x_1, 0)$ و $(x_2, 0)$ به ترتیب مانند x_1 و x_2 عمل می کنند، یعنی همانطور که گفته شد اعداد مختلط تعمیم اعداد حقیقی هستند. با توجه به این مطالب چنین می نویسیم

$$x = (x, 0).$$

از این تساوی، (۱) و (۳*) به ازای هر عدد حقیقی y داریم

$$iy = (0, 1)(y, 0) = (0, y).$$

نظر به اینکه با توجه به (۲*)، $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y)$ ، از اینرو داریم

$$z = x + iy. \quad (4)$$

چنانچه $x = 0$ ، آنگاه $z = iy$ ، iy را موهومی محض y می نامند. همچنین از (۱) و (۳*) داریم

$$i^2 = -1 \quad (5)$$

$$\text{زیرا } i^2 = ii = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

۲- دانشجویان آشنا با بردارها، مشاهده می کنند که این مطلب با جمع برداری مطابقت دارد و حال آنکه برای ضرب چنین معنی ای وجود ندارد.

نمایش (۴) برای اعداد مختلط در مسائل عملی بیشتر کاربرد دارد.

باتوجه به این نمایش جدید برای جمع داریم [ر. ک. (۲*)]

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \quad (2)$$

برای ضرب نتیجه از دستورالعمل خیلی ساده حاصل می شود. با ضرب کردن جمله به جمله و استفاده از $i^2 = -1$ می یابیم (ر. ک. (۳*))

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned} \quad (3)$$

این نتیجه با (۳*) مطابقت می کند.

مثال ۱. قسمت‌های حقیقی، موهومی و جمع و ضرب اعداد مختلط

فرض کنید $z_1 = 8 + 3i$ ، $z_2 = 9 - 2i$ ، $z_1 = 8 + 3i$ ، $z_2 = 9 - 2i$ ، $Re z_1 = 8$ ، $Im z_1 = 3$ ، $Re z_2 = 9$ ، $Im z_2 = -2$ و

$$z_1 + z_2 = (8 + 3i) + (9 - 2i) = 17 + i,$$

$$z_1 z_2 = (8 + 3i)(9 - 2i) = 72 + 6 + i(-16 + 27) = 78 + 11i.$$

تفریق و تقسیم به عنوان اپراتورهای معکوس جمع و ضرب تعریف می شوند. بنابراین تفاضل

$Z = z_1 - z_2$ عدد مختلط Z می باشد به طوری که $z_1 = Z + z_2$. از اینرو باتوجه به (۲*) داریم

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \quad (4)$$

نسبت $Z = \frac{z_1}{z_2}$ ($z_2 \neq 0$) یک عدد مختلط Z می باشد به طوری که $z_1 = ZZ_2$. در ذیل بعد از مثال ۲ نشان می دهیم که

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = x + iy; \quad x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (5^*)$$

قاعده عملی برای به دست آوردن نتیجه فوق از ضرب صورت و مخرج $\frac{z_1}{z_2}$ در $x_2 - iy_2$ و ساده کردن حاصل می شود

(۷)

$$Z = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

و از آنجا (۷*) به دست می آید.

مثال ۲. تفاضل و تقسیم اعداد مختلط

به ازای $z_1 = 8 + 3i$ و $z_2 = 9 - 2i$ داریم

۳- مهندسين برق اغلب به جای i از j استفاده می کنند و i را به شدت جریان اختصاص می دهند.

$$z_1 - z_2 = (8 + 3i) - (9 - 2i) = -1 + 5i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8 + 3i}{9 - 2i} = \frac{(8 + 3i)(9 + 2i)}{(9 - 2i)(9 + 2i)} = \frac{66 + 43i}{81 + 4} = \frac{66}{85} + \frac{43}{85}i.$$

با ضرب نتیجه فوق در $9 - 2i$ و رسیدن به $8 + 3i$ درستی تقسیم فوق را امتحان کنید.

اثبات (۷*): داریم $z_1 = x_1 + iy_1 = z z_2 = (x + iy)(x_2 + iy_2)$ بنا به تعریف برابری دو عدد

مختلط، قسمت‌های حقیقی را باهم و قسمت‌های موهومی را نیز باهم برابر قرار می‌دهیم و می‌یابیم

$$x_1 = x_2 x - y_2 y,$$

$$y_1 = y_2 x + x_2 y.$$

این یک دستگاه دو معادله با دو مجهول x و y می‌باشد. با فرض آنکه $z_2 \neq 0$ (از اینرو

$x_2^2 + y_2^2 \neq 0$) و حل این دستگاه معادلات نسبت به x و y جواب منحصر بفرد (۷*) حاصل می‌شود.

خواص جمع و ضرب اعداد مختلط همانند جمع و ضرب اعداد حقیقی می‌باشد، برای اعداد مختلط

دلخواه z_1, z_2, z_3 نتایج زیر را داریم (در اینجا $-z = -x - iy$ و $0 = (0, 0)$):

$$\left(\begin{array}{l} \text{قوانین جابجایی} \\ z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \\ z_1 z_2 = z_2 z_1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{قوانین شرکت پذیری} \\ (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \\ (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) \end{array} \right)$$

(۸)

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \quad (\text{قانون توزیع پذیری})$$

$$z + 0 = 0 + z = z$$

$$z + (-z) = (-z) + z = 0$$

$$z \cdot 1 = z$$

صفحه مختلط

بحث فوق در اعداد فوق یک بحث جبری بود. حال به بررسی نمایش هندسی اعداد مختلط

به صورت نقاط یک صفحه می‌پردازیم. این نمایش از نظر کاربردی اهمیت بسیار دارد. ایده این کار

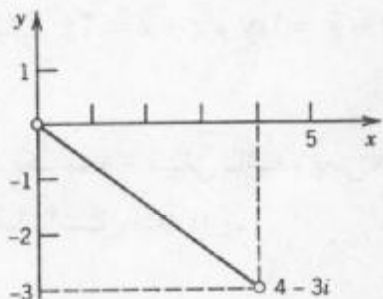
بسیار ساده و طبیعی است. دو محور مختصات عمود برهم انتخاب می‌کنیم، محور افقی x را محور

حقیقی و محور قائم y را محور موهومی می‌نامیم. طول واحد را برای هر دو محور یکسان در نظر

می‌گیریم (شکل ۲۸۲). این دستگاه را دستگاه مختصات کارتزین^۱ می‌نامیم. حال عدد مختلط

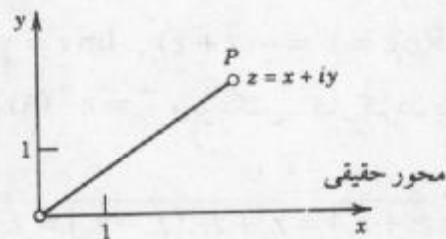
مفروض $z = (x, y) = x + iy$ را به عنوان نقطه P به مختصات x و y مشخص می‌کنیم. صفحه xy ,

که در آن اعداد مختلط بدین طریق نمایش داده می شوند را صفحه مختلط می نامند.^۵ نمایشی از یک عدد مختلط در شکل ۲۸۳ آمده است.



شکل ۲۸۳. عدد $4 - 3i$ در صفحه مختلط

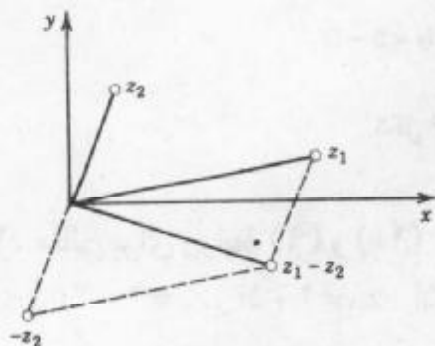
محور موهومی



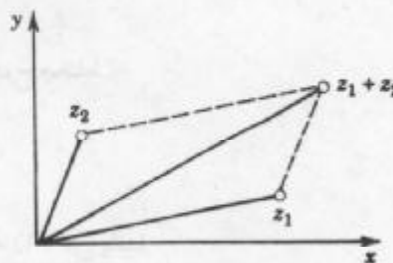
شکل ۲۸۲. صفحه مختلط

به جای آن که بگوئیم «نمایش نقطه Z در صفحه مختلط» بطور خلاصه و ساده می گوئیم «نقطه Z در صفحه مختلط».

جمع و تفریق به نحوی توسط اشکال ۲۸۴ و ۲۸۵ توصیف شده است.



شکل ۲۸۵. تفاضل اعداد مختلط



شکل ۲۸۴. جمع اعداد مختلط

مزدوج اعداد مختلط. مزدوج عدد مختلط $Z = x + iy$ را به صورت نمایش \bar{Z} می دهند و به صورت زیر تعریف می کنند

$$\bar{Z} = x - iy .$$

از نظر هندسی \bar{Z} منعکس Z نسبت به محور حقیقی می باشد. در شکل ۲۸۶ عدد مختلط $Z = 5 + 2i$ و

۵- گاهی اوقات به یاد بود ژان روبرت آرگان (Jean Robert Argand) (۱۷۶۸-۱۸۲۲) ریاضیدان فرانسوی، متولد در ژنو Geneva و بعدها کتابدار در پاریس، نمودار آرگان می نامند. مقاله آرگان درباره صفحه مختلط در ۱۸۰۶، نه سال بعد از انتشار مقاله مشابهی از ریاضیدان نروژی، کاسپار وسل Caspar Wessel (۱۷۴۵-۱۸۱۸) که یک نقشه بردار از دانشگاه علوم دانمارک بود، منتشر شد.

مزدوج آن، یعنی $\bar{z} = 5 - 2i$ نشان داده شده اند.

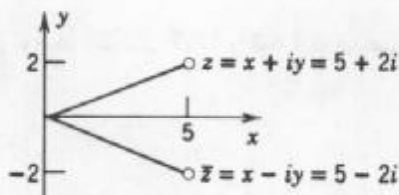
با توجه به تعریف مزدوج یک عدد مختلط داریم $z\bar{z} = x^2 + y^2$ که یک عدد حقیقی است، این خاصیت در بسیاری اوقات مثلاً در تقسیم اعداد مختلط کاربرد دارد. به علاوه، با جمع و تفریق z و \bar{z} می یابیم $z + \bar{z} = 2x$ و $z - \bar{z} = 2iy$. بنابراین می توان نوشت

$$\operatorname{Re} z = x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}). \quad (9)$$

هرگاه z یک عدد حقیقی باشد، یعنی $z = x$ ، آنگاه بنا به (۹)، $\bar{z} = z$ و برعکس. کار کردن با مزدوج آسان است، مثلاً داریم

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{(z_1 - z_2)} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \quad (10)$$

$$\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$



شکل ۲۸۶. مزدوج مختلط

مثال ۳. مثالی برای روابط (۹) و (۱۰)

فرض کنید $z_1 = 4 + 3i$ و $z_2 = 2 + 5i$. آنگاه بنا به (۱) می یابیم

$$\operatorname{Im} z_1 = \frac{1}{2i}[(4 + 3i) - (4 - 3i)] = \frac{3i + 3i}{2i} = 3.$$

هم اکنون درستی (۱۰) بررسی می شود

$$\overline{(z_1 z_2)} = \overline{(4 + 3i)(2 + 5i)} = \overline{-7 + 26i} = -7 - 26i,$$

$$\overline{(z_1 z_2)} = (4 - 3i)(2 - 5i) = -7 - 26i.$$

مسائل بخش ۱.۱۲

۱- (توانهای یکه موهومی) نشان دهید که

$$i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \dots$$

$$\frac{1}{i} = -i, \frac{1}{i^2} = -1, \frac{1}{i^3} = i, \dots$$

هرگاه $z_1 = 4 - 5i$ و $z_2 = 2 + 3i$ ، آنگاه هر یک از اعداد مختلط زیر را به صورت $x + iy$ بنویسید.

$$z_1 z_2 \quad 2. \quad (z_1 + z_2)^2 \quad 3. \quad \frac{1}{z_2} \quad 4. \quad \frac{z_2}{z_1} \quad 5. \quad 3z_1 - 6z_2 \quad 6.$$

$$0/2z_1^2 \quad 7. \quad \frac{z_1}{(z_1 + z_2)} \quad 8. \quad \frac{338}{z_2^2} \quad 9.$$

مطلوب است محاسبه

$$\operatorname{Re} \frac{(2-3i)^2}{2+3i} \quad 12. \quad \operatorname{Im} \frac{3+4i}{7-i} \quad 11. \quad \operatorname{Re} \frac{1}{1+i} \quad 10.$$

$$\operatorname{Re} z^2, (\operatorname{Re} z)^2 \quad 15. \quad (0/3 + 0/4i)^2 \quad 14. \quad \operatorname{Im} \frac{z}{z} \quad 13.$$

$$(1+i)^8 \quad 17. \quad \operatorname{Im} z^2, (\operatorname{Im} z)^2 \quad 16.$$

۱۸. نشان دهید که عدد مختلط z موهومی محض است اگر و فقط اگر $\bar{z} = -z$.

۱۹. درستی فرمولهای (۱۰) را به ازای $z_1 = 31 - 34i$ و $z_2 = 2 - 5i$ بررسی کنید.

۲۰. هرگاه حاصلضرب دو عدد مختلط صفر باشد، آنگاه نشان دهید که لااقل یکی از عاملهای ضرب برابر صفر است.

۲.۱۲ شکل قطبی اعداد مختلط. توانها و ریشه ها

در این بخش به بحث بیشتر در مورد اعداد مختلط و نمایش آنها در صفحه مختلط می پردازیم.

نخست به بررسی اعداد مختلط در صفحه مختصات قطبی r و θ می پردازیم. داریم

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (1)$$

آنگاه شکل قطبی عدد مختلط $z = x + iy$ عبارت است از

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (2)$$

r را قدر مطلق یا مدول z می نامند و بانماد $|z|$ نمایش می دهند. بنابراین

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}. \quad (3)$$

از نظر هندسی، $|z|$ فاصله z از مبدا مختصات می باشد (ر. ک. شکل ۲۸۷). به طور مشابه،

$|z_1 - z_2|$ فاصله بین z_1 و z_2 است (ر. ک. شکل ۲۸۸).

θ را آرگومان z می نامند و بانماد $\arg z$ نمایش می دهند. از اینرو (ر. ک. شکل ۲۸۷)

$$\theta = \arg z = \arctan \frac{y}{x}; \quad z \neq 0. \quad (4)$$

از نظر هندسی، θ زاویه جهت دار بین محور x مثبت و OP در شکل ۲۸۷ می باشد. بنابراین در

محاسبات، تمام زوایا بر حسب رادیان اندازه گیری می شوند و جهت آنها عکس حرکت عقربه های ساعت فرض می شود.

برای $z = 0$ زاویه θ تعریف نمی شود (چرا؟). به ازای $z \neq 0$ مفروض، آرگومان θ با مقادیری که اختلاف آنها از هم مضارب صحیح 2π است تعیین می گردد. مقداری از θ که در بازه $-\pi < x \leq \pi$ قرار دارند را مقدار اصلی آرگومان ($z \neq 0$) می نامند و بانماد $\text{Arg } z$ نمایش می دهند. لذا $\theta = \text{Arg } z$ در تعریف زیر صدق می کند

$$-\pi < \text{Arg } z \leq \pi.$$

مثال ۱. شکل قطبی اعداد مختلط. مقدار اصلی

فرض کنید $z = 1 + i$ (ر.ک. شکل ۲۸۹)، آنگاه

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right); |z| = \sqrt{2}, \arg z = \frac{\pi}{4} \pm 2n\pi, n = 0, 1, \dots$$

مقدار اصلی آرگومان برابر است با $\frac{\pi}{4}$. $\text{Arg } z = \frac{\pi}{4}$. مقادیر دیگر عبارت اند از $\frac{9\pi}{4}$ ، $-\frac{7\pi}{4}$ و نظایر آن.

مثال ۲. شکل قطبی اعداد مختلط. مقدار اصلی

فرض کنید $z = 3 + 3\sqrt{3}i$ ، آنگاه $z = 6 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$. قدر مطلق z برابر است با $|z| = 6$

و مقدار اصلی $\arg z$ برابر است با $\frac{\pi}{3}$.

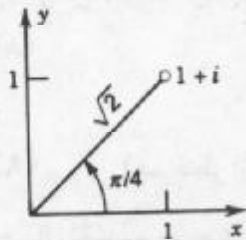
توجه! هنگام استفاده از فرمول (۴) باید دقت کنیم که z در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار دارد. همانطوری که می دانیم $\tan \theta$ دارای دوره تناوب π می باشد. بنابراین آرگومان z و $-z$ دارای تانژانت های یکسان می باشند. به عنوان مثال، اگر $\theta_1 = \arg(1+i)$ و $\theta_2 = \arg(-1-i)$ می یابیم که $\tan \theta_1 = \tan \theta_2 = 1$.

نامساوی مثلثی

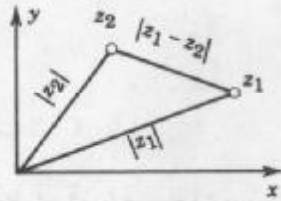
برای هر دو عدد مختلط z_1 و z_2 نامساوی مثلثی مهم

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (5)$$

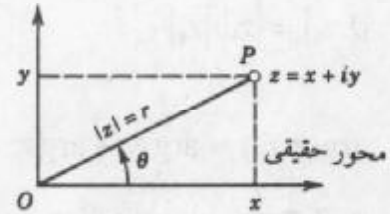
که بکرات از آن استفاده خواهیم کرد را داریم (شکل ۲۹۰). از آنجا که نقاط z_1 ، z_2 و $z_1 + z_2$ رئوس مثلثی به اضلاع $|z_1|$ ، $|z_2|$ و $|z_1 + z_2|$ را تشکیل می دهند، اندازه یک ضلع مثلث از مجموع اندازه دو ضلع دیگر آن نمی تواند بیشتر باشد این نامساوی حاصل می شود. اثبات غیر هندسی آن به خواننده واگذار می شود (مساله ۳۹).



شکل ۲۸۹ . مثال ۱



شکل ۲۸۸ . فاصله بین دو عدد مختلط در صفحه مختلط



شکل ۲۸۷ . صفحه مختلط ، شکل قطبی یک عدد مختلط

مثال ۳ . نامساوی مثلثی

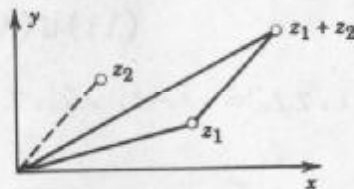
فرض کنید $z_1 = 1 + i$ ، $z_2 = -2 + 3i$ (نمودار آن را رسم کنید!)

$$|z_1 + z_2| = |-1 + 4i| = \sqrt{17} = 4.123 < \sqrt{2} + \sqrt{13} = 5.020.$$

تعمیم نامساوی مثلثی . به استقراء می توان (۵) را به هر مجموع دلخواه به صورت زیر تعمیم داد

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| \quad (6)$$

یعنی قدر مطلق مجموع نایبتر از مجموع قدر مطلقها می باشد .



شکل ۲۹۰ . نامساوی مثلثی

ضرب و تقسیم در مختصات قطبی

شکل قطبی اعداد مختلط در ضرب و تقسیم مفید می باشد . فرض کنید

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad \text{و} \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

حال ضرب اعداد فوق را مورد مطالعه قرار می دهیم . بنا به (۳) ، بخش ۱.۱۲ حاصل ضرب عبارت است از

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)]$$

و از آنجا داریم

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]. \quad (7)$$

۶- هرگاه z_1 و z_2 بر روی خطی که مبدائی می گذرد واقع باشند این مثلث تبهگون می شود .

با گرفتن قدر مطلق و آرگومان از دو طرف رابطه (۷)، نتایج مهم زیر حاصل می شوند

$$|z_1 z_r| = |z_1| |z_r| \quad (۸)$$

و

$$\arg(z_1 z_r) = \arg z_1 + \arg z_r \quad (\text{صرف نظر از مضرب } 2\pi) \quad (۹)$$

حال تقسیم دو عدد مختلط فوق را مورد بررسی قرار می دهیم. عدد مختلط $z = \frac{z_1}{z_r}$ در

تساوی $z z_r = z_1$ صدق می کند. از اینرو $|z z_r| = |z| |z_r| = |z_1|$ ،
 $\arg(z z_r) = \arg z + \arg z_r = \arg z_1$ لذا می یابیم

$$\left| \frac{z_1}{z_r} \right| = \frac{|z_1|}{|z_r|} \quad (z_r \neq 0) \quad (۱۰)$$

و

$$\arg \frac{z_1}{z_r} = \arg z_1 - \arg z_r \quad (\text{صرف نظر از مضارب } 2\pi) \quad (۱۱)$$

با ترکیب دو فرمول (۱۰) و (۱۱) می یابیم

$$\frac{z_1}{z_r} = \frac{r_1}{r_r} [\cos(\theta_1 - \theta_r) + i \sin(\theta_1 - \theta_r)] \quad (۱۲)$$

مثال ۴. مثالی برای فرمولهای (۸) تا (۱۱)

فرض کنید $z_1 = -2 + 2i$ و $z_r = 3i$ ، آنگاه $z_1 z_r = -6 - 6i$ ، بنابراین $\frac{z_1}{z_r} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$ ،

$$\left| \frac{z_1}{z_r} \right| = \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{|z_1|}{|z_r|}, \quad |z_1 z_r| = 6\sqrt{2} = 3\sqrt{8} = |z_1| |z_r|$$

و برای آرگومانها می یابیم $\text{Arg } z_1 = \frac{3\pi}{4}$ ، $\text{Arg } z_r = \frac{\pi}{2}$ ،

$$\text{Arg } z_1 z_r = -\frac{3\pi}{4} = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_r - 2\pi,$$

$$\text{Arg} \left(\frac{z_1}{z_r} \right) = \frac{\pi}{4} = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_r.$$

توانهای صحیح z . با توجه به روابط (۷) و (۱۲) داریم

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta),$$

$$z^{-n} = r^{-n} [\cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)]$$

و به طور کلی، برای هر عدد صحیح n داریم

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta). \quad (۱۳)$$

مثال ۵. فرمول دموآور

به ازای $|z| = r = 1$ ، فرمول (۱۳) به فرمول زیر معروف به فرمول دموآور^۷

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (13^*)$$

منجر می گردد. این فرمول برای بسط $\cos n\theta$ و $\sin n\theta$ بر حسب $\cos \theta$ و $\sin \theta$ مفید می باشد. برای مثال، اگر $n = 2$ و قسمت‌های حقیقی و قسمت‌های موهومی از دو طرف رابطه (۱۳*) را نظیر به نظیر باهم مساوی قرار دهیم، نتایج زیر حاصل می شوند

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta, \quad \sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta,$$

که با این نتایج آشنا بودیم. این مطالب نشان می دهند که روشهای مختلط اغلب ساده تر از روشهای متناظر فرمولهای حقیقی است.

ریشه ها

اگر $z = w^n$ ، که در آن $n = 1, 2, \dots$ ، آنگاه هر مقدار w متناظر با یک مقدار z است. برعکس، به ازای $z \neq 0$ مفروض، n مقدار متمایز از w متناظر با آن وجود دارد. هر یک از این مقادیر را ریشه^۸ n ام z می نامند، و می نویسند

$$w = \sqrt[n]{z}. \quad (14)$$

بنابراین این رابطه چند مقداری، یعنی n مقداری است، برخلاف اعداد حقیقی که در آنجا معمولاً این تابع یک مقدار را اختیار می کند. مقادیر $\sqrt[n]{z}$ را به سادگی می توان به روش زیر مشخص نمود. با توجه به نمایش قطبی برای z و

$$w = R(\cos \phi + i \sin \phi)$$

معادله $w^n = z$ به صورت زیر در می آید

$$w^n = R^n(\cos n\phi + i \sin n\phi) = z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

با مساوی قرار دادن قدر مطلقهای دو طرف می یابیم

$$R^n = r, \quad \text{در نتیجه } R = \sqrt[n]{r}$$

که در آن ریشه مثبت و حقیقی می باشد و از اینرو به طور یکتا مشخص می شود. همینطور با توجه به تساوی آنگومانها می یابیم

$$n\phi = \theta + 2k\pi, \quad \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

۷- آبراهام دموآور Abraham De Moivre (۱۶۶۷-۱۷۵۴)، ریاضیدان فرانسوی است که کمیت‌های موهومی را وارد مثلثات کرد و درباره نظریه احتمال ریاضی تحقیقات نمود (ر. ک. بخش ۲۳، ص. ۷).

که در آن k یک عدد صحیح می باشد. به ازای $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ مقدار متمایز برای w به دست می آید. مقادیر صحیح دیگر k ، مقدار تکراری را برای w به دست می دهد. به عنوان مثال، $k = n$ مقدار $\frac{2k\pi}{n} = 2\pi$ را نتیجه می دهد که متناظر با $k = 0$ می باشد والی آخر. در نتیجه $\sqrt[n]{z}$ به ازای $z \neq 0$ ، دارای n مقدار متمایز

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad (15)$$

که در آن $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ، می باشد. این n مقدار روی دایره ای به شعاع $\sqrt[n]{r}$ و به مرکز مبدا مختصات واقع بوده و رئوس یک n ضلعی منتظم می باشند.

مقداری از $\sqrt[n]{z}$ که با در نظر گرفتن مقدار اصلی $\arg z$ و به ازای $k = 0$ از (۱۵) به دست می آید به مقدار اصلی $w = \sqrt[n]{z}$ موسوم است.

مثال ۶. ریشه دوم

از (۱۵) نتیجه می گیریم که $w = \sqrt{z}$ دارای دو مقدار

$$w_1 = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right), \quad (16 \text{ الف})$$

$$w_2 = \sqrt{r} \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) \right] = -w_1 \quad (16 \text{ ب})$$

است که نسبت به مبدا مختصات متقارن می باشند. به عنوان مثال، ریشه دوم i دارای مقادیر

$$\sqrt{4i} = \pm 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \pm (\sqrt{2} + i\sqrt{2})$$

می باشند. از (۱۶) می توان فرمول کاربردی زیر را به دست آورد

$$\sqrt{z} = \pm \left[\sqrt{\frac{1}{2}(|z| + x)} + (\text{sign } y)i \sqrt{\frac{1}{2}(|z| - x)} \right] \quad (17)$$

که در آن نماد sign تابع علامت است که به صورت زیر تعریف می شود

$$\text{sign } y = \begin{cases} 1 & y \geq 0, \\ -1 & y < 0, \end{cases}$$

و ریشه دوم اعداد حقیقی مثبت را مثبت می گیریم. درستی این موضوع از (۱۶) نتیجه می شود. برای این منظور اتحادهای مثلثاتی زیر را در نظر می گیریم

$$\cos \frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \theta)}, \quad \sin \frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \theta)}.$$

با ضرب طرفین روابط فوق در \sqrt{r} می یابیم

$$\sqrt{r} \cos \frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1}{2}(r + r \cos \theta)}, \quad \sqrt{r} \sin \frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1}{2}(r - r \cos \theta)}.$$

با استفاده از $x = r \cos \theta$ ، و سرانجام با انتخاب علامت $\text{Im} \sqrt{z}$ داریم
 $\text{sign}[(\text{Re} \sqrt{z})(\text{Im} \sqrt{z})] = \text{sign } y$.
 (چرا؟)

مثال ۷. معادله درجه دوم مختلط

مطلوب حل معادله $z^2 - (\omega + i)z + \omega + i = 0$.

حل. داریم

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}(\omega + i) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\omega + i)^2 - \omega - i} = \frac{1}{2}(\omega + i) \pm \sqrt{-2 + \frac{3}{2}i} \\ &= \frac{1}{2}(\omega + i) \pm \left[\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\omega}{2} + (-2)\right)} + i \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\omega}{2} - (-2)\right)} \right] \\ &= \frac{1}{2}(\omega + i) \pm \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \right] = \begin{cases} 3 + 2i, \\ 2 - i. \end{cases} \end{aligned}$$

دایره به شعاع واحد و بامرکز مبداء مختصات که در مثال بعد و کراراً در بخشها و فصلهای

بعدی ظاهر می شود به دایره واحد موسوم است.

مثال ۸. ریشه n ام واحد. دایره واحد

مطلوب است حل معادله $z^n = 1$.

حل. باتوجه به (۱۵) داریم

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}; \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (18)$$

هرگاه مقدار متناظر با $k = 1$ را با ω نمایش دهیم، آنگاه n مقدار $\sqrt[n]{1}$ را می توان به صورت $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ نوشت. این مقادیر رتوس یک n ضلعی منتظمی را تشکیل می دهند که در دایره

واحد محاط بوده و یک راس آن واقع در نقطه ۱ است. هریک از این n مقدار را یک ریشه n ام واحد

می نامند. به عنوان مثال، مقادیر $\sqrt[3]{1}$ عبارت اند از $1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (شکل ۲۹۱) و مقادیر $\sqrt[4]{1}$

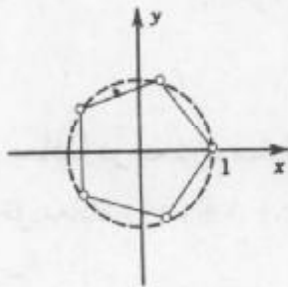
عبارت اند از $1, i, -1, -i$ (شکل ۲۹۲). شکل ۲۹۳ مقادیر $\sqrt[5]{1}$ را نشان می دهد.

هرگاه w_1 یکی از ریشه های n ام عدد مختلط دلخواه z باشد، آنگاه

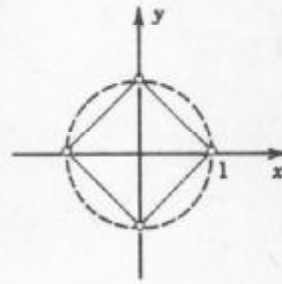
$$w_1, w_1\omega, w_1\omega^2, \dots, w_1\omega^{n-1}$$

n مقدار $\sqrt[n]{z}$ می باشند، زیرا ضرب کردن w_1 در ω^k به معنی افزایش آرگومان به اندازه $\frac{2k\pi}{n}$ است.

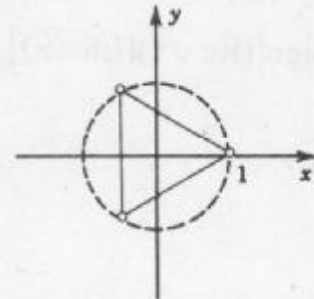
متعلمین می بایست صورت قطبی مسائل را با دقت بیشتری مورد توجه قرار دهند، زیرا در آینده اغلب با



شکل ۲۹۳. $\sqrt[3]{1}$



شکل ۲۹۲. $\sqrt[3]{1}$



شکل ۲۹۱. $\sqrt[3]{1}$

این گونه مسائل سرو کار دارند.

مسائل بخش ۲.۱۲

۱. (ضرب در i) نشان دهید که ضرب یک عدد مختلط در i ، بردار نظیر آن را به اندازه $\frac{\pi}{۲}$ ، در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت، دوران می دهد.

مطلوب است

$$\begin{array}{cccc}
 |\cos\theta + i\sin\theta|.۵ & |z|^۲, |z^۲|.۴ & |۱/۵ + ۲i|.۳ & |-۱ + ۲i|.۲ \\
 \left| \frac{(۱+i)^۶}{i^۲(۱+۴i)^۲} \right|.۹ & \left| \frac{z+۱}{z-۱} \right|.۸ & \left| \frac{۵+۷i}{۷-۵i} \right|.۷ & \left| \frac{\bar{z}}{z} \right|.۶
 \end{array}$$

اعداد مختلط زیر را به صورت قطبی بنویسید.

$$\begin{array}{cccc}
 ۶ + ۸i.۱۳ & -۳.۱۲ & ۱ + i.۱۱ & -۲i, ۲i.۱۰ \\
 \frac{۲+۳i}{۵+۴i}.۱۷ & \frac{۳\sqrt{۲}+۲i}{-\sqrt{۲}+\frac{۲}{۳}i}.۱۶ & \frac{i\sqrt{۲}}{۴+۴i}.۱۵ & \frac{۱+i}{۱-i}.۱۴
 \end{array}$$

مقدار اصلی آرگون اعداد زیر را بیابید.

$$۲ + ۲i.۲۱ \quad -\pi.۲۰ \quad -۱۰ - i.۱۹ \quad -۶ - 6i.۱۸$$

اعداد زیر را به شکل $x + iy$ نمایش دهید.

$$\begin{array}{cc}
 ۲\sqrt{۲}(\cos \frac{۳}{۴}\pi + i\sin \frac{۳}{۴}\pi).۲۳ & ۴(\cos \frac{۱}{۳}\pi + i\sin \frac{۱}{۳}\pi).۲۲ \\
 \cos(-۱/۸) + i\sin(-۱/۸).۲۵ & ۱۰(\cos ۰/۴ + i\sin ۰/۴).۲۴
 \end{array}$$

تمام مقادیر ریشه های زیر را بیابید و نقطه متناظر آنها را در صفحه مختلط مشخص کنید.

$$\sqrt[3]{1}.۲۹ \quad \sqrt{-۷-۲۴i}.۲۸ \quad \sqrt{-۸i}.۲۷ \quad \sqrt{i}.۲۶$$

$$\sqrt[3]{1+i} \cdot ۳۳ \quad \sqrt[3]{-1} \cdot ۳۲ \quad \sqrt[3]{-1} \cdot ۳۱ \quad \sqrt[3]{-7+24i} \cdot ۳۰$$

معادلات زیر را حل کنید.

$$z^2 - (\Delta + i)z + \Delta + i = 0 \cdot ۳۵ \quad z^2 + z + 1 - i = 0 \cdot ۳۴$$

$$z^2 - 3(1+2i)z^2 - \Delta + 6i = 0 \cdot ۳۶$$

۳۷. درستی نامساویهای زیر را ثابت کنید. این نامساویها اغلب اوقات مفید واقع می شوند.

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z| \quad (۱۹)$$

۳۸. درستی نامساوی مثلثی را برای $z_1 = 4 + 5i$ و $z_2 = -2 + 1/5i$ تحقیق کنید.

۳۹. نامساوی مثلثی را ثابت کنید.

۴۰. (تساوی متوازی الاضلاعی) نشان دهید که $2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$ این تساوی را تساوی متوازی الاضلاعی می نامند. علت این نامگذاری را بیان کنید.

۳.۱۲ منحنی ها و نواحی در صفحه مختلط

در این بخش، برخی منحنیها، نواحی مهم و مفاهیم وابسته به آنها را که در بخشهای بعدی به آنها نیاز داریم، مورد بررسی قرار می دهیم. این بحث و بررسی به ما کمک خواهد کرد تا با صفحه مختلط بیشتر آشنا شویم.

دوایر و قرصها. فاصله بین دو نقطه z و a عبارت است از $|z - a|$. بنابراین دایره C به شعاع ρ و به مرکز a (شکل ۲۹۴) را می توان به صورت زیر نمایش داد

$$|z - a| = \rho \quad (۱)$$

در حالت خاص، **دایره واحد**، یعنی دایره ای به شعاع یک و به مرکز $a = 0$ ، عبارت است از (شکل ۲۹۵)

$$|z| = 1.$$

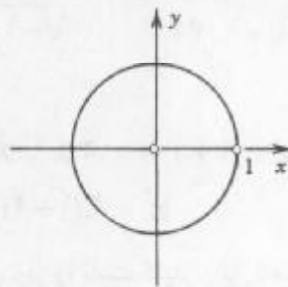
علاوه بر آن، نامساوی

$$|z - a| < \rho \quad (۲)$$

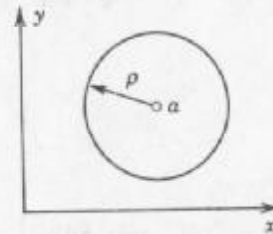
به ازای هر نقطه z در C برقرار می باشد، یعنی (۲) نمایش نقاط درونی C است. این چنین نواحی را **قرص مستدیر**، یا به طور دقیقتر یک قرص مستدیر بازمی نامند، در مقابل یک قرص مستدیر بسته به صورت زیر تعریف می شود

$$|z - a| \leq \rho,$$

این قرص شامل نقاط درونی C و خود C می باشد. قرص مستدیر باز (۲) را یک **همسایگی** نقطه a نیز می نامند. واضح است که a بینهایت از این همسایگیها دارد، که هر یک متناظر با مقدار مشخصی از



شکل ۲۹۵. دایره واحد



شکل ۲۹۴. دایره در صفحه مختلط

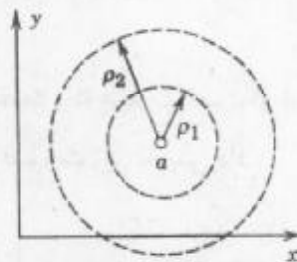
$\rho (> 0)$ است، و a متعلق به همه همسایگی هایش است.
مشابهاً، نامعادله

$$|z - a| > \rho$$

نقاط بیرونی C را نمایش می دهد. به علاوه، ناحیه بین دو دایره متحد‌المركز به شعاعهای $\rho_1, \rho_2 (> \rho_1)$ را می توان به صورت زیر، که در آن a مرکز دایره است، نمایش داد

$$\rho_1 < |z - a| < \rho_2 \quad (۳)$$

چنین نواحی را یک حلقه مستدیر باز یا یک طوق باز می نامند (شکل ۲۹۶).



شکل ۲۹۶. طوق در صفحه مختلط

مثال ۱. قرص مستدیر

ناحیه $|z - 3 + i| \leq 4$ را در صفحه مختلط مشخص کنید.

حل. این نامساوی برای هر مقدار z که فاصله آن از $a = 3 - i$ بیشتر از ۴ نباشد، دقیقاً برقرار است. بنابراین ناحیه مورد نظر قرص دایره ای بسته به شعاع ۴ و به مرکز $3 - i$ می باشد.

مثال ۲. دایره یکه و قرص یکه

هر یک از نواحی زیر را مشخص کنید.

۸- به طور کلی، هر مجموعه که شامل قرص باز (۲) را نیز یک همسایگی a می نامند. به عنوان مثال، قرص (۲) را اغلب یک همسایگی مستدیر باز a می نامند.

$$\text{الف. } |z| < 1 \quad \text{ب. } |z| \leq 1 \quad \text{ج. } |z| > 1$$

- حل. الف. نقاط درونی دایره واحد است. این ناحیه را قرص یکه باز می نامند.
 ب. دایره واحد و نقاط درونی آن است، این ناحیه را قرص یکه بسته می نامند.
 ج. نقاط بیرونی دایره واحد است.

نیم صفحات. منظور از نیم صفحه فوقانی (باز) مجموعه تمام نقاطی به صورت $z = x + iy$ است که در آن $y > 0$. مشابهاً، شرط $y < 0$ نیم صفحه تحتانی، $x > 0$ نیم صفحه راست، و $x < 0$ نیم صفحه چپ را تعریف می کنند.

مفاهیم مربوط به مجموعه ها در صفحه مختلط

سرانجام، به تعریف مفاهیمی می پردازیم که از اهمیت کلی برخوردار می باشند و در کارهای بعدی مورد استفاده قرار می گیرند. این مطالب به صورت مرجع نیز مفید می باشند.

اصطلاح مجموعه نقاط در صفحه مختلط به معنی هر دسته ای از تعداد متناهی یا نامتناهی نقاط می باشد. مثلاً، جوابهای یک معادله درجه دوم، نقاط روی یک خط، و نقاط داخل یک دایره مجموعه می باشند.

مجموعه S را باز گویند اگر هر نقطه S همسایگی ای داشته باشد که هر نقطه از آن متعلق به S باشد. به عنوان مثال، نقاط درونی یک دایره یا یک مربع و همین طور نقاط نیم صفحه راست $\text{Re } z = x > 0$ مجموعه باز را تشکیل می دهند.

مجموعه باز S را همبند گویند هرگاه هر دو نقطه دلخواه آن را بتوان با خط شکسته ای که از تعداد متناهی پاره خط تشکیل شده است، به قسمی که تمام آنها متعلق به S باشد، به هم وصل کرد. یک مجموعه همبند باز را دامنه می نامند. از اینرو قرص باز (۲) و طوق باز (۳) هر کدام یک دامنه می باشند. یک مربع با حذف یک قطر یک دامنه نیست، زیرا این مجموعه همبند نیست (چرا؟).

متمم مجموعه S در صفحه مختلط مجموعه تمام نقاطی از صفحه مختلط می باشد که متعلق به S نیست. مجموعه S را در صفحه مختلط بسته گویند هرگاه متمم آن باز باشد. مثلاً، نقاط داخل و روی دایره یکه یک مجموعه بسته («قرص یکه بسته» ر. ک. مثال ۲) را تشکیل می دهند، زیرا متمم آن، یعنی $|z| > 1$ باز است.

نقطه کرانه ای مجموعه S نقطه ای است که هر همسایگی آن هم شامل نقاطی است که به S متعلق هستند و هم شامل نقاطی است که به S تعلق ندارند. به عنوان مثال، نقاط کرانه ای یک طوق، نقاط واقع بر روی دو دایره کرانه ای آن طوق هستند. واضح است که هرگاه مجموعه S باز باشد، آنگاه هیچ نقطه کرانه ای به S تعلق ندارد؛ چنانچه S بسته باشد در این صورت هر نقطه کرانه ای به S

تعلق دارد.

ناحیه مجموعه ای است که از یک دامنه و برخی یا تمام نقاط کرانه ای آن دامنه تشکیل یافته است. (یادآوری می کنیم که برخی از مؤلفین اصطلاح «ناحیه» را برای آنچه ما دامنه می خوانیم [به تبعیت از اصطلاح متعارف امروزی] استفاده می کنند و دیگران بین این دو اصطلاح تمایزی قائل نیستند.)

تاکنون با مفاهیم اعداد مختلط و صفحه مختلط (درست شبیه شروع حساب دیفرانسیل و انتگرال، بحث درباره اعداد حقیقی و خط حقیقی) آشنا شدیم. در بخشهای آینده به حساب دیفرانسیل مختلط خواهیم پرداخت.

مسائل بخش ۳.۱۲

مجموعه های زیر را مشخص نموده و آنها را رسم کنید.

$$\frac{1}{3} < |z - a| < 6.3 \quad |z + 1| > 2.2 \quad |z - 4i| = 4.1$$

$$\operatorname{Re} z \geq -1.6 \quad 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}.5 \quad -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi.4$$

$$\operatorname{Im} z^2 = 2.9 \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{4}.8 \quad |z - 1| \leq |z + 1|.7$$

$$\left| \frac{2z - i}{-iz - 2} \right| \leq 1.12 \quad \left| \frac{z + 1}{z - 1} \right| = 4.11 \quad \left| \frac{z + i}{z - i} \right| = 1.10$$

۴.۱۲ حد. مشتق. تابع تحلیلی

آنالیز مختلط رابطه نزدیکی با توابع مختلطی دارد که در برخی دامنه مشتق پذیر هستند. بنابراین در ابتدا به توابع مختلط می پردازیم و بعد از آن مفاهیمی چون حد و مشتق در فضای مختلط را بیان می کنیم. این بحث شبیه مفاهیمی است که در حساب دیفرانسیل حقیقی بیان می شوند.

تابع مختلط

در آغاز از حساب دیفرانسیل و انتگرال یادآور می شویم که یک تابع حقیقی f که بر مجموعه S از اعداد حقیقی (معمولاً یک بازه) تعریف شده، قاعده ای است که به هر x در S یک عدد حقیقی $f(x)$ نسبت می دهد. $f(x)$ را مقدار تابع f در x می نامند.

حال در مجموعه اعداد مختلط، S یک مجموعه از اعداد مختلط می باشد. و یک تابع f تعریف شده بر S قانونی است که به هر z در S یک عدد مختلط w نسبت دهد. w را مقدار f در z می نامند.

در این صورت می نویسیم

$$w = f(z).$$

اینجا z در S تغییر می کند و متغیر مختلط نامیده می شود. مجموعه S را دامنه تعریف f^A می نامند.

مثال. $w = f(z) = z^2 + 3z$ یک تابع مختلط می باشد که به ازای هر z تعریف شده است؛

یعنی، دامنه S تمام صفحه مختلط می باشد.

مجموعه همه مقادیر تابع f را برد f می نامند.

w عدد مختلطی است که آن را به صورت $w = u + iv$ می نویسیم، که در آن u و v به

ترتیب قسمتهای حقیقی و موهومی w می باشند. حال w وابسته به $z = x + iy$ است. بنابراین u تابع حقیقی از x و y می شود و همین طور v . از اینرو می توان نوشت

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

این رابطه نشان می دهد که تابع مختلط $f(z)$ با دو تابع حقیقی $u(x, y)$ و $v(x, y)$ ، که هر یک به دو متغیر حقیقی x و y وابسته می باشند، هم ارز است.

مثال ۱. تابع یک متغیر مختلط

هرگاه $w = f(z) = z^2 + 3z$ ، آنگاه u و v را طوری بیابید که $w = u + iv$ و مقدار w را به ازای $z = 1 + 3i$ محاسبه کنید.

حل. $u = \operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + 3x$ و $v = 2xy + 3y$. همچنین،

$$f(1 + 3i) = (1 + 3i)^2 + 3(1 + 3i) = 1 - 9 + 6i + 3 + 9i = -5 + 15i.$$

این مطلب نشان می دهد که $u(1, 3) = -5$ و $v(1, 3) = 15$.

مثال ۲. تابع یک متغیر مختلط

فرض کنید $w = f(z) = 2iz + 6\bar{z}$ ، u و v و مقدار f را در $z = \frac{1}{2} + 4i$ بیابید.

حل. $f(z) = 2i(x + iy) + 6(x - iy)$ ایجاب می کند که $u(x, y) = 6x - 2y$ و

۹- این مطلب یک جمله استاندارد است. در بیشتر موارد، دامنه تعریف یک مجموعه باز و همبند می باشد (طبق آنچه در بخش ۱۲. ۳ تعریف شد): موارد استثنایی بندرت در کاربردها پیش می آید.

در نوشته های مربوط به آنالیز مختلط گاه روابطی به کار می رود که ممکن است به یک مقدار z بیش از یک مقدار w نظیر کنند، و برحسب عادت چنین رابطه ای را تابع می نامند («تابع چند مقداری»). ما این قرارداد را نمی پذیریم بلکه فرض می کنیم تمام توابعی که به کار می بریم روابطی تک مقداری هستند؛ یعنی، توابع درجهت مرسوم: به هر z در S تنها یک مقدار $w = f(z)$ متناظر شود. (اما، البته، چند z ممکن است با یک مقدار $w = f(z)$ متناظر شود، درست شبیه در حساب دیفرانسیل و انتگرال) $f(z)$ به مفهوم مقدار f در z است، اما به غلط مصطلح شده است که به آن تابع $f(z)$ می گویند (به جای تابع f)، بدین طریق نمادی را هم که برای متغیر مستقل به کار می برند معرفی می کنند.

همچنین، $v(x, y) = 2x - 6y$

$$f\left(\frac{1}{4} + 4i\right) = 2i\left(\frac{1}{4} + 4i\right) + 6\overline{\left(\frac{1}{4} + 4i\right)} = i - 8 + 3 - 24i = -5 - 23i.$$

حد، پیوستگی

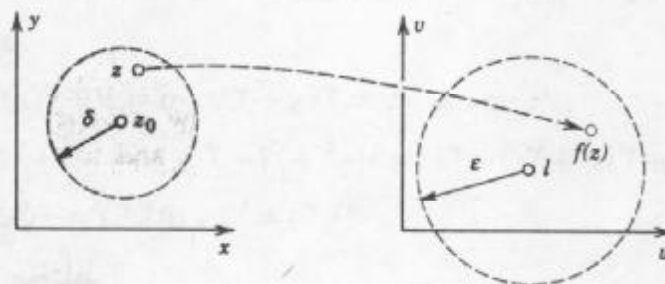
گویند تابع $f(z)$ وقتی z به سمت z_0 میل می کند دارای حد l است و می نویسند

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l. \quad (1)$$

هرگاه $f(z)$ یک همسایگی از z_0 (احتمالاً به جز در خود z_0) تعریف شده باشد و همچنین مقدار $f(z)$ به ازای هر مقداری از z که به اندازه کافی به z_0 نزدیک باشد هر قدر که بخواهیم به l نزدیک شوند؛ یعنی، به طور جامعتی، به ازای هر عدد مثبت حقیقی ϵ بتوان یک عدد حقیقی مثبت δ پیدا کرد به طوری که به ازای تمام مقادیر $z \neq z_0$ واقع در قرص $|z - z_0| < \delta$ داشته باشیم (شکل ۲۹۷)

$$|f(z) - l| < \epsilon; \quad (2)$$

یعنی، به ازای هر $z \neq z_0$ واقع در قرص δ مقدار f در قرص ϵ قرار گیرد.



شکل ۲۹۷. حد

به ظاهر، این تعریف شبیه تعریفی است که در حساب دیفرانسیل و انتگرال اعداد حقیقی داشتیم، ولی یک اختلاف بزرگی وجود دارد. در واقع در حالت حقیقی، x فقط در امتداد خط حقیقی به x_0 میل می کرد، در اینجا، بنا به تعریف حد، z_0 می تواند از هر امتدادی در صفحه مختلط به z_0 میل کند. توجه به این مطلب در محاسبات مربوط به حد بسیار ضروری است.

چنانچه حدی وجود داشته باشد، این حد منحصر به فرد است (ر. ک. مساله ۲۸).

تابع $f(z)$ را در $z = z_0$ پیوسته گویند هرگاه $f(z_0)$ تعریف شده باشد و

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

(۳)

توجه کنید که بنا به تعریف حد از این مطلب لازم می آید که $f(z)$ لافل در یک همسایگی z_0 معین باشد. $f(z)$ را در یک دامنه پیوسته گویند هرگاه در هر نقطه از آن دامنه پیوسته باشد.

مشتق

مشتق تابع مختلط f در نقطه z_0 را با $f'(z_0)$ نمایش می دهیم و تعریف می کنیم

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (4)$$

مشروط بر آنکه این حد موجود باشد. در این صورت تابع f را در نقطه z_0 مشتق پذیر گوئیم. چنانچه قرار دهیم $\Delta z = z - z_0$ ، داریم $z = z_0 + \Delta z$ و می توان نوشت

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (4')$$

حال از این تعاریف به یک نتیجه مهم می رسیم. به خاطر داشته باشیم که تعریف حد ایجاد می کند که $f(z)$ لافلاً در یک همسایگی z_0 تعریف شده باشد و z در (۴') می تواند از هر مسیری در صفحه مختلط به z_0 میل کند. نسبت (۴) همیشه به مقدار معینی میل می کند و تمام این مقادیر مشخص با هم مساوی می باشند. این مطلب در بررسیهای بعدی ما اهمیت زیادی دارد.

مثال ۳. مشتق پذیری. مشتق

تابع $f(z) = z^2$ به ازای تمام مقادیر z مشتق پذیر بوده و دارای مشتق $f'(z) = 2z$ می باشد زیرا

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z.$$

قواعد مشتق پذیری توابع درست شبیه قواعد حساب دیفرانسیل حقیقی است و اثبات قضایای

مربوطه کم و بیش شبیه هم هستند. مثلاً

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad (fg)' = f'g + fg', \quad (f+g)' = f' + g', \quad (cf)' = cf',$$

و قواعد زنجیره ای و توانهای صحیح $(z^n)' = nz^{n-1}$ ، در مورد توابع مختلط نیز برقرارند.

همچنین قضیه ارتباط مشتق پذیری با پیوستگی توابع حقیقی، یعنی هرگاه $f(z)$ در نقطه z_0 مشتق پذیر باشد، آنگاه f در آن نقطه پیوسته است (ر. ک. مساله ۳۰) نیز برقرار است.

مثال ۴. مشتق پذیر نیست.

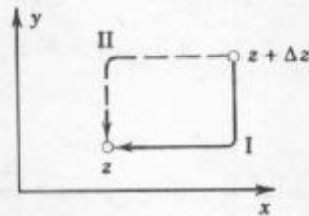
توجه به این مطلب حائز اهمیت است که توابع ساده زیادی وجود دارند که در هیچ نقطه ای مشتق ندارند. به عنوان مثال، تابع $f(z) = \bar{z} = x - iy$ دارای چنین خاصیتی می باشد. در واقع، هرگاه

قرار دهیم $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ ، می یابیم

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{(z + \Delta z)} - \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \quad (5)$$

هرگاه $\Delta y = 0$ ، آنگاه مقدار فوق برابر $+1$ است. اگر $\Delta x = 0$ ، آنگاه نسبت فوق برابر -1 می شود. از اینرو (۵) از مسیر I شکل ۲۹۸ به $+1$ و از مسیر II شکل ۲۹۸ به -1 میل می کند. لذا بنا به تعریف، حد (۵) وقتی که $\Delta z \rightarrow 0$ در هیچ Z ی وجود ندارد.

این مثال ممکن است تعجب آور باشد که یک تابع همواره پیوسته هیچ جامشتپذیر نباشد. ولی این موضوع صرفاً نشان دهنده این مطلب است که مشتقپذیری یک تابع نیاز به بررسی دقیقتر دارد. ایده اثبات (میل کردن مسیرهای متمایز) اساسی است و مجدداً در بخش آتی از آن استفاده می شود.



شکل ۲۹۸. مسیرها در (۵)

توابع تحلیلی

توابع تحلیلی توابعی هستند که در برخی دامنه ها مشتقپذیر هستند، چنین توابعی را در حساب دیفرانسیل و همگرایی مختلط به کار می گیریم. این توابع اساس کار در آنالیز مختلط می باشند. بررسی مقدماتی آنها در این بخش صورت می پذیرد.

تعریف (تحلیلی بودن)

تابع f را در دامنه D تحلیلی نامند هرگاه $f(z)$ در تمام نقاط D تعریف شده و مشتقپذیر باشد. تابع f را در نقطه $z = z_0$ واقع در D تحلیلی نامند هرگاه $f(z)$ در یک همسایگی z_0 تحلیلی باشد. (ر.ک. بخش ۳.۱۲).

از این به بعد وقتی از تابع تحلیلی صحبت می کنیم منظور تابعی است که در دامنه ای مشتقپذیر است.

از اینرو تحلیلی بودن $f(z)$ در نقطه z_0 بدین معنا است که $f(z)$ در هر نقطه از یک همسایگی z_0 (منجمله خود z_0 زیرا، بنا به تعریف، z_0 نقطه ای از تمام همسایگی هایش می باشد) مشتق داشته باشد. انگیزه تعریف مفهوم تحلیلی بودن این واقعیت است که از نظر عملی اینکه تابعی صرفاً در یک نقطه z_0 مشتقپذیر باشد ولی در هیچ همسایگی آن نقطه مشتق نداشته باشد جالب نیست. مساله ۲۶ مثالی از این نوع می باشد.

یک اصطلاح مدرن برای تحلیلی در D ، هلو ریخت در D است.

مثال ۵. چند جمله ایها، توابع گویا

توانهای صحیح $1, z, z^2, \dots$ و کلیتر از آن، چند جمله ایها، یعنی توابعی به صورت

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n$$

که در آنها c_0, c_1, \dots, c_n مقادیر ثابت مختلط هستند. در تمام صفحه مختلط تحلیلی می باشند.

نسبت دو چند جمله ای $g(z)$ و $h(z)$ ، یعنی

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

را تابع گویا می نامند. تابع f مفروض در تمام صفحه مختلط، به جز نقاطی که در معادله $h(z) = 0$

صدق می کنند، تحلیلی است؛ در اینجا فرض بر آن است که عاملهای مشترک توابع g و h را حذف

نموده ایم. کسرهای جزئی

$$\frac{c}{(z - z_0)^m} \quad (c \neq 0)$$

که در آن c و z_0 اعداد مختلط و m عدد صحیح مثبت می باشند، توابع گویای خاص می باشند، این

کسرها بجز در z_0 در تمام صفحه مختلط تحلیلی می باشد. در جبر ثابت شده است که هر تابع گویا را

می توان به صورت یک حاصل جمع از چند جمله ایها (که می تواند صفر هم باشد) و تعداد متناهی توابع

کسری نوشت.

مفاهیمی که در این بخش ارائه شد، بسیار شبیه مفاهیم ارائه شده در حساب دیفرانسیل حقیقی

است، مهمترین موضوع مفهوم تابع تحلیلی است. در واقع، آنالیز مختلط منحصرأ به مفهوم توابع

تحلیلی می پردازد، و اگر چه بسیاری از توابع ساده غیر تحلیلی می باشند، مجموعه متنوع و عظیم توابع

تحلیلی که باقی می ماند شاخه ای از ریاضیات را به وجود می آورد که از جنبه نظری زیباترین و از دیدگاه

عملی مفیدترین شاخه ریاضی می باشد.

مسائل بخش ۴.۱۲

مطلوب است محاسبه $f(3+i)$ ، $f(-i)$ ، $f(-4+2i)$ که در آن $f(z)$ برابر است با

$$z^2 + 2z. 1 \quad \frac{1}{1-z}. 2 \quad \frac{1}{z^2}. 3$$

مطلوب است محاسبه قسمت‌های حقیقی و موهومی هر یک از توابع زیر

$$f(z) = z^2 + 4z - 1. 6 \quad f(z) = 2z^2 - 3z. 5 \quad f(z) = \frac{z}{1+z}. 4$$

فرض کنید که z در ناحیه R واقع در صفحه z تغییر می کند. ناحیه ای را (به طور دقیق) در صفحه w

بباید که مقادیر متناظر $w = f(z)$ در آن قرار گیرد، و این دوناحیه را به طور هندسی نشان دهید.

$$f(z) = z^z, |\arg z| \leq \frac{1}{4}\pi \quad ۹ \quad f(z) = \frac{1}{z}, \operatorname{Re} z > 0 \quad ۸ \quad f(z) = z^z, |z| > 3 \quad ۷$$

در هر یک از مسائل زیر، آیا $f(z)$ در $z = 0$ با فرض $f(0) = 0$ پیوسته است؟

$$\frac{\operatorname{Im} z}{1+|z|} \quad ۱۲$$

$$\frac{\operatorname{Re}(z^z)}{|z^z|} \quad ۱۱$$

$$\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \quad ۱۰$$

مشق هر یک از توابع زیر را بیابید.

$$\frac{i}{(1-z)^z} \quad ۱۵$$

$$\frac{z^z - 4}{z^z + 1} \quad ۱۴$$

$$(z^z + i)^z \quad ۱۳$$

$$\frac{z^z}{(z+i)^z} \quad ۱۸$$

$$\frac{iz+2}{3z-6i} \quad ۱۷$$

$$\frac{z+i}{z-i} \quad ۱۶$$

مشق هر یک از توابع زیر در نقاط داده شده بیابید.

$$\frac{1}{z^z} \text{ در } 3i \quad ۲۱$$

$$(z^z - i)^z \text{ در } 3 - 2i \quad ۲۰$$

$$-i \text{ در } \frac{z+i}{z-i} \quad ۱۹$$

$$2i \text{ در } (2+iz)^z \quad ۲۴$$

$$\frac{1+i}{z^z} \text{ در } 2 \quad ۲۳$$

$$-i \text{ در } z^z - 2z \quad ۲۲$$

۲۵. نشان دهید که $f(z) = \operatorname{Re} z = x$ در هیچ جا مشتقپذیر نیست.

۲۶. نشان دهید که $f(z) = |z|^z$ فقط در $z = 0$ مشتقپذیر است؛ از اینرو در هیچ جا تحلیلی نیست.

راهنمایی. از رابطه $|z + \Delta z|^z = (z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z})$ استفاده کنید.

۲۷. ثابت کنید که (۱) با دو رابطه زیر معادل است:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} l, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} l$$

۲۸. هرگاه $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ موجود باشد، آنگاه نشان دهید که این حد منحصر به فرد است.

۲۹. هرگاه z_1, z_2, \dots اعداد مختلط باشند به طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ ، و همچنین $f(z)$ در $z = a$

پیوسته باشد، آنگاه نشان دهید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(a)$$

۳۰. هرگاه $f(z)$ در z_0 مشتقپذیر باشد، آنگاه نشان دهید که $f(z)$ در z_0 پیوسته است.

۱۲. ۵. معادلات کوشی - ریمن

در این بخش کوشش می کنیم معیار یا آزمون جالبی برای تحلیلی بودن تابع مختلط

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

بیابیم. اگر بخواهیم به طور غیر دقیق صحبت کنیم، تابع f در دامنه D تحلیلی است اگر فقط اگر

مشتقات جزئی مرتبه اول u و v در سراسر D در دو معادله زیر صدق کنند

$$u_x = v_y, u_y = -v_x \quad (۱)$$

در اینجا $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ ، $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ (و مشابهاً برای v) نمادهایی هستند که برای مشتقات جزئی بکار گرفته می شوند. صورت دقیق مطالب فوق در قضایای ۱ و ۲ به شرح زیر ارائه می شوند. معادلات (۱) را معادلات کوشی - ریمن می نامند. این معادلات از معادلات بسیار مهم این فصل هستند.

مثال: $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ به ازای هر z تحلیلی است، و $u = x^2 - y^2$ و $v = 2xy$ در (۱) صدق می کنند؛ یعنی $u_x = 2x = v_y$ و $u_y = -2y = -v_x$ و همینطور. مثالهای بیشتری متعاقباً ارائه خواهند شد.

قضیه ۱ (معادلات کوشی - ریمن)

فرض کنید $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در یک همسایگی نقطه $z = x + iy$ تعریف شده و پیوسته باشد و در خود z مشتقپذیر باشد، آنگاه مشتقات جزئی مرتبه اول u و v در آن نقطه وجود دارد و در معادلات کوشی - ریمن (۱) صدق می کنند.

بنابراین هر گاه $f(z)$ در یک دامنه D تحلیلی باشد، مشتقات جزئی مزبور وجود داشته و در تمام نقاط D در (۱) صدق می کنند.

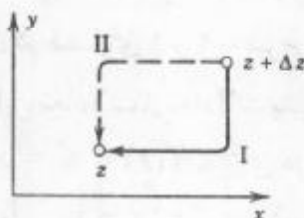
اثبات. بنا به فرض $f'(z)$ موجود می باشد. طبق تعریف مشتق مقدار $f'(z)$ برابر است با

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (۲)$$

ایده اثبات بسیار آسان می باشد. بنا به تعریف حد در صفحه مختلط (ر. ک. بخش ۱۲. ۴) می توان Δz را از هر مسیر دلخواهی واقع در یک همسایگی z به سمت صفر میل داد. از این رو می توان دو مسیر I و II را در شکل ۲۹۹ انتخاب نمود و نتایج یکسان به دست آورد. با مقایسه قسمت‌های حقیقی، اولین معادله کوشی - ریمن و با مقایسه قسمت‌های موهومی، معادله دیگر در (۱) به دست می آید. جزئیات

۱۰- آگوستین لوئیس- کوشی Augustin - Louis Cauchy (ر. ک. بخش ۲. ۶) و ریاضیدانان آلمانی، برنهارد ریمن Bernhard Riemann (۱۸۲۶ - ۱۸۶۶) و کارل ویراشراس Karl Weierstrass (۱۸۱۵ - ۱۸۹۷)؛ همچنین ر. ک. بخش ۱۴. ۶) که بنیانگذار آنالیز مختلط می باشند. ریمن تز دکترای خود (در سال ۱۸۵۱) زیر نظر گاوس (ر. ک. بخش ۴. ۵) در Göttingen گذراند. او از سال ۱۸۵۴ تا زمان مرگش، که تنها ۳۹ سال داشت به امر تدریس در آنجا اشتغال داشت. او انگرال را در کلاس درس خود در ارتباط با کارش روی سری فوریه معرفی کرد. او روشهای جدید در معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی ایجاد نمود و همکاریهای اساسی در تئوری اعداد و فیزیک ریاضی داشته است. او همچنین هندسه ریمنی را که پایه ریاضی نظری نسبیت انیشتین است توسعه بخشید. آثار وی انگیزه ایده های زیادی در ریاضیات نوین (خصوصاً، در توپولوژی و آنالیز تابعی) شد. برای اطلاع بیشتر به مرجع زیر را مراجعه کنید.

تکنیکی به قرار زیر است .



شکل ۲۹۹. مسیرها در (۲)

می توان نوشت $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. با توجه به آن (۲) به صورت زیر در می آید

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y)] - [u(x, y) + iv(x, y)]}{\Delta x + i\Delta y} \quad (۳)$$

با انتخاب مسیر I در شکل ۲۹۹ نخست فرض می کنیم $\Delta y \rightarrow 0$ و سپس $\Delta x \rightarrow 0$. بعد از صفر شدن Δy داریم $\Delta z = \Delta x$ ، آنگاه (۳) ، هرگاه دو جمله را بر حسب u و دو جمله دیگر را بر حسب v بنویسیم ، چنین می شود

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}$$

چون $f'(z)$ موجود می باشد، دو حد حقیقی اخیر وجود دارند. بنا به تعریف، این دو مشتق جزئی u و v بر حسب x می باشند. بنابراین مشتق $f'(z)$ از $f(z)$ را می توان به صورت زیر نوشت

$$f'(z) = u_x + iv_x \quad (۴)$$

مشابهاً، هرگاه مسیر II در شکل ۲۹۹ را انتخاب کنیم . نخست فرض کنیم $\Delta x \rightarrow 0$ و سپس $\Delta y \rightarrow 0$. وقتی Δx صفر شود، داریم $\Delta z = i\Delta y$ ، و از (۳) می یابیم

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y}$$

چون $f'(z)$ موجود است، حدهای طرف راست موجود بوده و مشتقات جزئی u و v بر حسب y می باشد، با توجه به اینکه $\frac{1}{i} = -i$ داریم

$$f'(z) = -iu_y + v_y \quad (۵)$$

بنابراین وجود مشتق $f'(z)$ وجود چهار مشتق جزئی در (۴) و (۵) را نتیجه می دهند. بامساوی قراردادن قسمتهای حقیقی (۴) و (۵) باهم اولین معادله کوشی-ریمان (۱) به دست می آید. وبامساوی قراردادن

قسمتهای موهومی آنها تساوی دیگر حاصل می شود. این اثباتها برای قسمت اول قضیه و توجه به تعریف تحلیلی بودن قسمت دوم را نتیجه می دهد.

چنانچه خواهیم دید فرمولهای (۴) و (۵) فرمولهای عملی برای محاسبه مشتقات می باشند.

مثال ۱. معادلات کوشی - ریمان

تابع با ضابطه $f(z) = z^2$ به ازای تمام مقادیر z تحلیلی است. به آسانی نتیجه می شود که این تابع در معادلات کوشی - ریمان صدق می کنند.

برای $f(z) = \bar{z} = x - iy$ داریم $u = x$ و $v = -y$. مشاهده می کنیم که معادله دوم کوشی - ریمان برقرار است، یعنی $u_y = -v_x = 0$ اما معادله اول برقرار نیست. زیرا $u_x = 1 \neq v_y = -1$ در نتیجه $f(z) = \bar{z}$ تحلیلی نیست.

تحت شرایطی معادلات کوشی - ریمان بنیادی می باشند زیرا آنها نه تنها برای تحلیلی بودن یک تابع لازم بلکه تحت شرایطی کافی نیز می باشند. درارتباط با آن قضیه زیر را داریم.

قضیه ۲ (معادلات کوشی - ریمان)

هرگاه دو تابع پیوسته حقیقی $u(x, y)$ و $v(x, y)$ از دو متغیر حقیقی x و y دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته ای باشند که در دامنه ای مثل D در معادلات کوشی - ریمان صدق کنند، آنگاه تابع مختلط $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در D تحلیلی است.

اثبات شبیه اثبات قضیه ۱ می باشد و ما از اثبات آن صرف نظر می کنیم (ر. ک. ضمیمه ۴).

قضایای ۱ و ۲ در عمل از اهمیت زیادی برخوردار می باشند زیرا به کمک معادلات کوشی - ریمان می تواند دریافت که تابع مختلط تحلیلی است یا نه.

مثال ۲. معادلات کوشی - ریمان

آیا $f(z) = z^2$ تحلیلی است؟

حل. داریم $u = x^2 - 3xy^2$ و $v = 3x^2y - y^3$ و از آنجا

$$u_x = 2x - 3y^2, \quad v_y = 3x^2 - 3y^2$$

$$u_y = -6xy, \quad v_x = 6xy.$$

مشاهده می کنیم که معادلات کوشی - ریمان به ازای هر z برقرار است. لذا بنا به قضیه ۲، $f(z) = z^2$ به ازای تمام مقادیر z تحلیلی است.

مثال ۳. تعیین تابع تحلیلی با قسمت حقیقی مفروض

در اینجا به نوع دیگری از مسائل می پردازیم که با استفاده از معادلات کوشی - ریمان حل می شوند.

تابع تحلیلی f را چنان بیابید که قسمت حقیقی آن $u = x^2 - y^2 - x$ باشد.

حل. بنا به اولین معادله کوشی - ریمان داریم

$$u_x = 2x - 1 = v_y.$$

حال با انتگرالگیری نسبت به y می یابیم

$$v = 2xy - y + k(x).$$

نظر به اینکه انتگرالگیری نسبت به y است، عدد ثابت می تواند حداکثر تابعی از x باشد. (برای اطمینان اگر از v_y ، v را محاسبه کنید به همان نتیجه از انتگرالگیری می رسید.) از v و معادله دوم کوشی - ریمان داریم

$$u_y = -v_x = -2y + \frac{dk}{dx}.$$

از طرفی با توجه به $u = x^2 - y^2 - x$ داریم $u_y = -2y$. با مقایسه، می یابیم $\frac{dk}{dx} = 0$ ، بنابراین k عددی ثابت می باشد که باید حقیقی باشد (چرا؟). در نتیجه داریم

$$f(z) = u + iv = x^2 - y^2 - x + i(2xy - y + k).$$

این مطلب را می توان بر حسب z بیان نمود؛ یعنی $f(z) = z^2 - z + ik$.

مثال ۴. تابع تحلیلی با قدر مطلق ثابت، تابعی است ثابت.

معادلات کوشی - ریمان نیز در به دست آوردن خواص عمومی توابع تحلیلی به ما کمک می کند.

به عنوان مثال، نشان دهید که هرگاه $f(z)$ در دامنه D تحلیلی و در D ،

ثابت $k = |f(z)|$ باشد، آنگاه $f(z)$ در D ثابت است.

حل. با توجه به فرض داریم $u^2 + v^2 = k^2$ با مشتقگیری می یابیم

$$uu_x + vv_x = 0, \quad uu_y + vv_y = 0.$$

حال با به کارگیری $v_x = -u_y$ در معادله اول و $v_y = u_x$ در معادله دوم، داریم

$$(a) uu_x - vu_y = 0, \quad (b) uu_y + vu_x = 0. \quad (۶)$$

با ضرب نمودن طرفین روابط (۶a) در u و (۶b) در v و با جمع نمودن دو رابطه حاصل عبارت u_y حذف می گردد. مشابهاً، برای حذف u_x ، روابط (۶a) را در $-v$ و (۶b) را در u ضرب نموده و روابط حاصل را با هم جمع کرده، می یابیم

$$(u^2 + v^2)u_x = 0, \quad (u^2 + v^2)u_y = 0.$$

هرگاه $k^2 = u^2 + v^2 = 0$ ، آنگاه $u = v = 0$ بنابراین $f = 0$. هرگاه $k \neq 0$ ، آنگاه

$u_x = u_y = 0$ ، هم اکنون بنا به معادلات کوشی - ریمان داریم $v_x = v_y = 0$. با توجه به نتایج

حاصل می یابیم $u = \text{ثابت}$ و $v = \text{ثابت}$ ، در نتیجه f ثابت است.

یادآور می شویم که هرگاه صورت قطبی $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ را به کار ببریم و فرض

کنیم $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ ، آنگاه معادلات کوشی - ریمان به صورت زیر درمی آیند

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta, \quad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta \quad (r > 0). \quad (۷)$$

معادله لاپلاس . توابع همساز

یکی از دلایل اصلی بررسی آنالیز مختلط در ریاضیات مهندسی به این دلیل است که هر دو قسمت حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی در معادله لاپلاس صدق می نمایند. این معادله از معادلات مهم فیزیکی بوده و در نیروی جاذبه، الکترو استاتیک، جریان سیال، معادله گرما و نظایر آن کاربرد دارد (ر. ک. فصلهای ۱۱ و ۱۷).

قضیه ۳ (معادله لاپلاس)

فرض کنید $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در دامنه D تحلیلی باشد، آنگاه u و v در D ، به ترتیب، در معادله لاپلاس

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (۸)$$

(∇^2 را بخوانید مربع نابلا) و

$$\nabla^2 v = v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad (۹)$$

صدق کرده و دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته در D می باشند.

اثبات. بامشتگیری از طرفین $u_x = v_y$ نسبت به x و از $u_y = -v_x$ نسبت y می یابیم

$$u_{xx} = v_{yx}, \quad u_{yy} = -v_{xy}. \quad (۱۰)$$

بعداً ثابت خواهیم کرد (در بخش ۱۳. ۶) که مشتق تابع تحلیلی خود تحلیلی است. این مطلب ایجاب می کند که u و v دارای مشتقات جزئی پیوسته از هر مرتبه باشند. علی الخصوص مشتقات دوم مختلط این توابع باهم برابرند، یعنی

$$v_{yx} = v_{xy}.$$

از جمع طرفین روابط (۱۰) رابطه (۸) به دست می آید. بطور مشابه، رابطه (۹) با مشتگیری از $u_x = v_y$ نسبت به y و از $u_y = -v_x$ نسبت به x و تفریق نتایج حاصل از همدیگر، با استفاده از تساوی $u_{xy} = u_{yx}$ به دست می آید.

جوابهایی از معادله لاپلاس را که مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته داشته باشند، توابع همساز، و نظریه جوابهای معادله لاپلاس را نظریه پتانسیل می نامند (ر. ک. بخش ۱۱. ۱۱). بنابراین قسمتهای حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی توابع همساز می باشند.

چنانچه دو تابع همساز $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در یک دامنه D در معادلات کوشی - ریمان صدق کنند، یعنی u و v قسمتهای حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی f در D باشند، آنگاه v را تابع همساز

مزدوج تابع u در D نامند (البته، اصطلاح « مزدوج » در تعریف مزدوج مختلط عدد مختلط بکار گرفته شده تفاوت دارد).

مزدوج یک تابع همساز را می توان از معادلات کوشی - ریمنان به دست آورد و چگونگی انجام این کار را با ذکر یک مثال روشن می کنیم.

مثال ۵. تابع همساز مزدوج

نشان دهید که $u = x^2 - y^2 - y$ در تمام صفحه مختلط همساز است و تابع همساز مزدوج v را از u بیابید.

با محاسبه مستقیم داریم $\nabla^T u = 0$. از طرفی $u_x = 2x$ و $u_y = -2y - 1$. بنابراین مزدوج v از u باید در معادلات زیر صدق کند

$$v_y = u_x = 2x, \quad v_x = -u_y = 2y + 1.$$

با انتگرالگیری از معادله اول نسبت به y و مشتقگیری از نتیجه حاصل نسبت به x ، می یابیم

$$v = 2xy + h(x), \quad v_x = 2y + \frac{dh}{dx}.$$

با مقایسه مشاهده می کنیم که $\frac{dh}{dx} = 1$. این مطلب نتیجه می دهد که $h(x) = x + c$. از این رو

$v = 2xy + x + c$ (که در آن c عدد حقیقی دلخواه می باشد) تابع همساز مزدوج u مفروض است. تابع تحلیلی متناظر به صورت زیر می باشد

$$f(z) = u + iv = x^2 - y^2 - y + i(2xy + x + c) = z^2 + iz + ic.$$

آیا کار انجام شده شبیه کاری است که در مثال ۳ ارائه شده است؟ مطلب را توضیح دهید.

معادلات کوشی - ریمنان مهمترین معادلات در این فصل می باشند. رابطه آنها با معادله لاپلاس جایگاه ویژه ای را در مهندسی و کاربردهای فیزیکی که در بخش ۱۷ به آن می پردازیم، برای این معادلات باز می کند.

مسائل بخش ۵.۱۲

آیا توابع زیر تحلیلی می باشند؟ [(۱) یا (۷) را به کار برید].

$$f(z) = e^x(\cos y + i \sin y). \quad ۳ \quad f(z) = \operatorname{Re}(z^2). \quad ۲ \quad f(z) = z^{\wedge}. \quad ۱$$

$$f(z) = z - \bar{z}. \quad ۶ \quad f(z) = \frac{1}{1-z}. \quad ۵ \quad f(z) = \frac{i}{z^2}. \quad ۴$$

$$f(z) = \operatorname{Arg} z. \quad ۹ \quad f(z) = \frac{1}{1-z^2}. \quad ۸ \quad f(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z. \quad ۷$$

$$f(z) = e^x(\sin y - i \cos y). \quad ۱۲ \quad f(z) = z^2 - \bar{z}^2. \quad ۱۱ \quad f(z) = z + \frac{1}{z}. \quad ۱۰$$

آیا توابع زیر همساز هستند؟ اگر چنین است، تابع تحلیلی متناظر $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ برای توابع همساز داده شده را بیابید.

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot ۱۵ \quad v = xy \cdot ۱۴ \quad u = xy \cdot ۱۳$$

$$u = \sin x \cosh y \cdot ۱۸ \quad u = x^2 - 3xy^2 \cdot ۱۷ \quad v = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot ۱۶$$

$$v = (x^2 - y^2)^2 \cdot ۲۱ \quad v = i \ln|z| \cdot ۲۰ \quad u = e^x \cos^2 y \cdot ۱۹$$

اعداد a, b, c را طوری بیابید که توابع داده شده زیر همساز باشند و همساز مزدوج آنها را بیابید.

$$u = \sin x \cosh cy \cdot ۲۴ \quad u = \cos bx \cosh y \cdot ۲۳ \quad u = e^{ax} \cos ay \cdot ۲۲$$

۲۵. هرگاه v تابع همساز مزدوج تابع همساز u باشد، آنگاه نشان دهید که u تابع همساز مزدوج v است.

۲۶. نشان دهید که علاوه بر روابط (۴) و (۵) روابط زیر نیز برقرار هستند

$$f'(z) = u_x - iu_y, \quad f'(z) = v_y + iv_x \quad (۱۱)$$

۲۷. فرمولهای (۴)، (۵)، و (۱۱) کاربردهای متنوع دارند. درستی این مطلب را با محاسبه $(z^2)'$ به کمک یکی از فرمولهای فوق نشان دهید.

۲۸. نشان دهید که هرگاه $f(z)$ تحلیلی و $\operatorname{Re} f(z)$ ثابت باشد، آنگاه $f(z)$ ثابت است.

۲۹. (مشتق متحد با صفر) با استفاده از فرمول (۴)، نشان دهید که یک تابع تحلیلی، که مشتق آن متحد با صفر است، تابعی ثابت می باشد.

۳۰. معادلات کوشی - ریمن را در مختصات قطبی (۷) از (۱) به دست آورید.

۱۲. ۶. تابع نمایی

در باقیمانده این بخش به مهمترین توابع مقدماتی مختلط، یعنی توابع نمایی، مثلثاتی، لگاریتم، و نظایر آن می پردازیم. رفتار این توابع به ازای $z = x$ درست همانند رفتارشان برای توابع حقیقی است. این توابع دارای کاربردهای متنوع بوده و متعلمین باید با دقت بیشتری به بررسی آنها پردازند.

مطالب این بخش را با تابع نمایی e^z که به صورت $\exp z$ نوشته می شود شروع می کنیم.

e^z یکی از مهمترین توابع تحلیلی است. تعریف e^z بر حسب توابع حقیقی e^x ، $\cos y$ ، و $\sin y$

به صورت زیر بیان می شود

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (۱)$$

برای تابع نمایی e^z داریم^{۱۱}

الف) اگر $z = x$ ، آنگاه رفتار e^z مانند رفتار e^x است.

ب) e^z تابعی تام، یا به عبارتی دیگر تابع تحلیلی به ازای تمام مقادیر z است.

ج) مشابه حساب و دیفرانسیل حقیقی، مشتق برابر خودش است، یعنی

$$(e^z)' = e^z. \quad (2)$$

در واقع باتوجه به تعریف e^z و فرمول (۴) بخش ۱۲. ۵ به ازای هر z داریم

$$(e^z)' = (e^x \cos y)_x + i(e^x \sin y)_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

برخی خواص دیگر e^z . e^z دارای خواص جالب دیگری نیز می باشد. نخست به ازای هر دو عدد

مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ ، $z_2 = x_2 + iy_2$ ، نشان می دهیم که

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}. \quad (3)$$

در واقع، بنا به (۱) داریم

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2),$$

و از آنجا

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1+x_2} [\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)] = e^{z_1+z_2}.$$

به ازای $z_1 = x$ و $z_2 = iy$ داریم

$$e^z = e^x e^{iy}. \quad (4)$$

به علاوه، به ازای $z = iy$ می یابیم

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \quad (5)$$

این فرمول به فرمول اویلر موسوم است. باتوجه به نتیجه حاصل، صورت قطبی عدد مختلط

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ را می توان به صورت زیر نوشت

$$z = re^{i\theta}. \quad (6)$$

از طرفی باتوجه به (۵) می یابیم

$$|e^{iy}| = |\cos y + i \sin y| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1. \quad (7)$$

یعنی، تابع نمایی به ازای نماهای موهومی محض، قدرمطلقاً برابر یک دارد. این نتیجه را متعلم باید

همواره به خاطر داشته باشد. باتوجه به (۷) و (۱) می یابیم

۱۱- این تعریف به طور نسبی از توصیف ساده ای حاصل می شود. همچنین e^z را می توان با سری آشنای

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ، با تعویض z به جای x تعریف کرد، اما برای نیل به این هدف نخست باید سریهای مختلط بررسی

شوند. که این ارتباط در بخش ۱۴. ۴ مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

$$|e^z| = e^x, \quad \operatorname{arg} e^z = y \pm 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (۸)$$

مثال ۱. توصیف برخی خواص تابع نمایی

محاسبه مقادیر از روی (۱) بدون اشکال صورت می پذیرد. مثلاً

$$e^{1/4 - 0/6i} = e^{1/4} (\cos 0/6 - i \sin 0/6) = 4/0.55(0/825 - 0/565i) = 3/347 - 2/290i$$

و

$$|e^{1/4 - 0/6i}| = e^{1/4} = 4/0.55, \quad \operatorname{Arg} e^{1/4 - 0/6i} = -0/6.$$

نظر به اینکه $\cos 2\pi = 1$ و $\sin 2\pi = 0$ ، با توجه (۵) داریم

$$e^{2\pi i} = 1. \quad (۹)$$

به علاوه، با استفاده (۱)، (۵) و یا (۶) می یابیم

$$e^{\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{\pi} = -1, \quad e^{-\frac{\pi}{2}} = -i, \quad e^{-\pi} = -1. \quad (۱۰)$$

برای توصیف (۳)، با ضرب دو عبارت

$$e^{r+i} = e^r (\cos 1 + i \sin 1), \quad e^{r-i} = e^r (\cos 1 - i \sin 1)$$

می یابیم

$$e^r e^r (\cos^2 1 + \sin^2 1) = e^{2r} = e^{(r+i)+(r-i)}.$$

نهایتاً از $|e^z| = e^x \neq 0$ ، به ازای هر z داریم

$$e^z \neq 0. \quad (۱۱)$$

تابع e^z یک تابع تام است که در هیچ جا صفر نیست. e^z تابعی متناوب با دوره تناوب $2\pi i$ است. در واقع به ازای هر z داریم

$$e^{z+2\pi i} = e^z \quad (۱۲)$$

که این خواص اساسی از (۱) و متناوب بودن $\cos y$ و $\sin y$ نتیجه می شود [این مطلب همچنین از (۳) و (۹) نیز حاصل می شود]. از این رو $w = e^z$ تمام مقادیر خود را در نوار افقی به عرض 2π (شکل ۳۰۰)

$$-\pi < y \leq \pi \quad (۱۳)$$

اختیار می کند. این نوار نامتناهی را ناحیه بنیادی e^z می نامند.

مثال ۲. جوابهای یک معادله

کلید جوابهای معادله زیر را بیابید.

$$e^z = 3 + 4i.$$

حل. $|e^z| = e^x = 5$ و در نتیجه $x = \ln 5 = 1/609$ قسمت حقیقی همه جوابها است. از $e^x = 5$

می یابیم

$$e^x \cos y = 3, \quad e^x \sin y = 4, \quad \cos y = 0/6, \quad \sin y = 0/8, \quad y = 0/927.$$

$$z = 1/609 + 0/927i \pm 2n\pi i; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

بنابر این معادله $e^z = 3 + 4i$ به علت متناوب بودن تابع e^z دارای بینهایت جواب به صورت فوق است. همه این جوابها بر روی خط $x = 1/609$ به فاصله 2π از یکدیگر قرار دارند. خلاصه. توجه متعلمین را به این نکته جلب می کنیم که بسیاری از خواص $e^z = \exp z$ بجز خاصیت متناوب بودن با دوره تناوب $2\pi i$ همانند تابع حقیقی e^x است.

مسائل بخش ۱۲. ۶

۱. با استفاده از معادلات کوشی - ریمان نشان دهید که e^z به ازای تمام مقادیر z تحلیلی است. e^z را در هریک از موارد زیر به صورت $u + iv$ بنویسید و در هر حالت $|e^z|$ را محاسبه کنید.

$$1 + i \quad 3 + \pi i \quad 2 + 5\pi i \quad \sqrt{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\frac{7\pi i}{2} \quad (1+i)\pi \quad -1 + 1/4i \quad -\frac{9\pi i}{2}$$

قسمتهای حقیقی و موهومی هریک از توابع نمایی زیر را محاسبه کنید.

$$e^{-z^2} \quad e^{-z^2} \quad e^{z^2} \quad e^{-z^2}$$

هریک از اعداد مختلط زیر را به صورت قطبی (۶) بنویسید.

$$3 + 4i \quad \sqrt{z} \quad \sqrt{i}, \sqrt{-i} \quad 1 + i$$

مطلوب است محاسبه تمام مقادیر z که به ازای آنها

$$e^z \text{ حقیقی باشد} \quad |e^{-z}| < 1 \quad \operatorname{Re} e^{z^2} = 0 \quad e^z = \overline{e^z}$$

تمام جوابهای معادلات زیر را بیابید و برخی از آنها را در صفحه مختلط مشخص کنید.

$$e^z = 0 \quad e^z = -3 + 4i \quad e^z = -2 \quad e^{z^2} = 3$$

۲۶. نشان دهید که تابع $u = e^{xy} \cos\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right)$ یک تابع همساز است و همساز مزدوج آن را بیابید.

۲۷. تمام مقادیر k را طوری بیابید که به ازای آنها تابع $f(z) = e^x(\cos ky + i \sin ky)$ تحلیلی باشد.

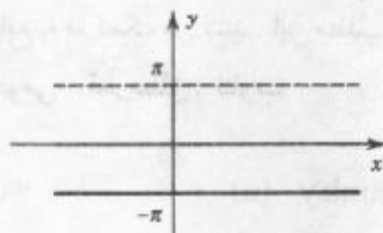
۲۸. نشان دهید که $f(z) = e^z$ در هیچ جا تحلیلی نیست.

۲۹. جالب است بدانیم که $f(z) = e^z$ به طور یکتا با دو خاصیت $f(x + i0) = e^x$ و $f'(z) = f(z)$

مشخص می شود، که در آن f تابعی تام فرض شده است. درستی این مطلب را ثابت کنید. راهنمایی.

$$\left(\frac{g}{f}\right) = 0$$

۳۰. تنها با استفاده از معادلات کوشی - ریمان، قضیه مورد نظر در مساله ۲۹ را اثبات کنید.



شکل ۳۰۰. ناحیه بنیادی تابع نمایی e^z در صفحه Z

۷.۱۲ توابع مثلثاتی، توابع هیپربولیک

درست مانند e^x که از تعمیم e^x به مختلط به دست می آید، توابع مثلثاتی مختلط نیز با بسط توابع مثلثاتی حقیقی حاصل می شوند. برای تفهیم این مطلب، با استفاده از فرمولهای اویلر (بخش ۶.۱۲) داریم

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

با جمع و تفریق روابط فوق، توابع حقیقی کسینوسی و سینوسی به صورت زیر به دست می آیند

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}).$$

باتوجه به نتایج فوق، $\cos z$ و $\sin z$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}); \quad z = x + iy. \quad (1)$$

همینطور تعاریف زیر را می آوریم

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \quad (2)$$

و

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}. \quad (3)$$

چون e^z تام است، لذا $\cos z$ ، $\sin z$ تام می باشند. $\tan z$ و $\sec z$ تام نیستند؛ این توابع جز در نقاطی که $\cos z$ صفر است، و $\cot z$ و $\csc z$ جز در نقاطی که $\sin z$ صفر است تحلیلی می باشند.

مشتقات توابع فوق عبارت اند از

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z, \quad (\tan z)' = \sec^2 z, \dots \quad (4)$$

درستی این مشتقات را می توان از تساوی $(e^z)' = e^z$ و (۱) تا (۳) نتیجه گرفت .

معادلات (۱) درستی فرمول اویلر را به ازای عدد مختلط z نشان می دهد، یعنی داریم

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z . \quad (۵)$$

قسمتهای حقیقی و موهومی $\cos z$ و $\sin z$ در محاسبه مقادیر مورد نیاز می باشند، همچنین

این مقادیر در نمایش خواص توابع به ما کمک می کنند. این مطلب را با یک مثال شرح می دهیم .

مثال ۱ . قسمتهای حقیقی و موهومی . قدرمطلق . تناوب

نشان دهید که

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \quad (a) \quad (۶)$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \quad (b)$$

و

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y \quad (a) \quad (۷)$$

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y \quad (b)$$

و برخی از کاربردهای این فرمولها را بیان کنید .

حل . با توجه به (۱) می یابیم

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}) \\ &= \frac{1}{2}e^{-y}(\cos x + i \sin x) + \frac{1}{2}e^y(\cos x - i \sin x) \\ &= \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})\cos x - \frac{1}{2}i(e^y - e^{-y})\sin x = \cosh y \cos x - i \sinh y \sin x \end{aligned}$$

زیرا

$$\cosh y = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}), \quad \sinh y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}); \quad (۸)$$

و نشان می دهد که (۶a) برقرار است . (۶b) نیز مشابهاً به دست می آید . از (۶a) و

$$\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y \quad \text{می یابیم}$$

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x (1 + \sinh^2 y) + \sin^2 x \sinh^2 y .$$

چون $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ، با توجه به آن (۷ a) به اثبات می رسد . مشابهاً (۷ b) به دست می آید .

به عنوان مثال ، $\cos(2 + 3i) = \cos^2 2 \cosh 3 - i \sin^2 2 \sinh 3 = -4/190 - 9/109i$ ،

با توجه به فرمولهای (۶) ملاحظه می شود که $\cos z$ و $\sin z$ ، درست همانند مباحث حقیقی ،

متناوب با دوره تناوب 2π می باشند . با توجه به نتایج فوق متناوب بودن $\tan z$ و $\cot z$ با دوره تناوب

π حاصل می شوند .

فرمول (۷) نقطه تمایز اساسی بین توابع حقیقی و مختلط کسینوسی و سینوسی می باشد؛ از طرفی در اعداد حقیقی داشتیم که $|\cos x| \leq 1$ و $|\sin x| \leq 1$ در حالی که توابع کسینوس و سینوس مختلط کراندار نیستند و هنگامی که $y \rightarrow \infty$ ، قدر مطلق آنها به سمت بینهایت میل می کند. مثلاً اگر $y \rightarrow \infty$ ، آنگاه با توجه به (۷) می یابیم $\sinh y \rightarrow \infty$.

مثال ۲. جواب معادلات. صفرهای $\sin z$ و $\cos z$

معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $\cos z = 0$ (در حالی که در مجموعه اعداد حقیقی ریشه ندارد!)

(ب) $\cos z = 0$

(ج) $\sin z = 0$

حل. (الف) با ضرب نمودن در e^{iz} ، از (۱) می یابیم $e^{2iz} - 1 = 0$ ، که یک معادله درجه دوم بر حسب e^{iz} می باشد، که جوابهای آن تا سه رقم اعشار عبارت اند از

$$e^{iz} = e^{-y+ix} = 0 \pm \sqrt{25-1} = \begin{cases} 9/899, \\ 0/101. \end{cases}$$

بنابراین $e^{-y} = 9/899$ یا $e^{-y} = 0/101$ ، $e^{ix} = 1$ و از آنجا $y = \pm 2/292$ و $x = 2n\pi$.

لذا جواب به صورت $z = \pm 2n\pi \pm 2/292i$ ، که در آن $n = 0, 1, 2, \dots$ ، حاصل می شود. آیا این جواب را از روی (۶a) می توان به دست آورد؟

(ب) بنا به (۷a) داریم $\cos x = 0$ و $\sinh y = 0$ ، در نتیجه $y = 0$ و جواب عبارت است از

$$z = \pm \frac{1}{2} (2n+1)\pi; n = 0, 1, 2, \dots$$

(ج) بنا به (۷b) داریم $\sin x = 0$ و $\sinh y = 0$ در نتیجه جواب به صورت

$$z = 2n\pi; n = 0, 1, 2, \dots$$

می باشد. از اینرو صفرهای $\cos z$ و $\sin z$ همان صفرهای توابع سینوس و کسینوس حقیقی می باشند.

فرمولهای کلی توابع مثلثاتی پیوسته حقیقی برای مقادیر مختلط نیز برقرارند. این مطلب

فی البداهه از تعاریف نتیجه می شوند. خصوصاً به قواعد مجموع

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2 \quad (9)$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1$$

و فرمول

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \quad (10)$$

اشاره می کنیم. برخی فرمولهای مفیدتر در مجموعه مسائل ارائه می شوند.

توابع هیپربولیک

توابع کسینوس و سینوس هیپربولیک متغیر مختلط z را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}). \quad (11)$$

که با تعاریف متناظر در توابع حقیقی متناظر مطابقت دارد [ر. ک. (۸)]. این توابع در تمامی صفحه تحلیلی هستند. با مشتگیری می یابیم

$$(\cosh z)' = \sinh z, (\sinh z)' = \cosh z. \quad (12)$$

توابع هیپربولیک دیگر به صورت زیر تعریف می شوند

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}, \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}. \quad (13)$$

توابع هیپربولیک و مثلثاتی به هم وابسته اند. هرگاه در (۱۱) iz را جایگزین z کنیم و از (۱) استفاده کنیم، می یابیم

$$\cosh iz = \cos z, \sinh iz = i \sin z. \quad (14)$$

همینطور داریم

$$\cos iz = \cosh z, \sin iz = i \sinh z. \quad (15)$$

مسائل بخش ۷. ۱۲

۱. نشان دهید که $\cosh z, \sinh z, \cos z, \sin z$ توابع تام می باشند.
۲. به کمک مشتگیری نشان دهید که توابع $\operatorname{Re} \cos z$ و $\operatorname{Im} \sin z$ همساز هستند.

هریک از عبارات زیر را به صورت $u + iv$ بنویسید

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| ۳. $\cos(1/\sqrt{7} + 1/5i)$ | ۴. $\sin(1/\sqrt{7} + 1/5i)$ | ۵. $\sin 10i$ |
| ۶. $\cos 10i$ | ۷. $\sin(\sqrt{2} - 4i)$ | ۸. $\cos(\pi + \pi i)$ |
| ۹. $\cos 3\pi i$ | ۱۰. $\sin(3 + 2i)$ | ۱۱. $\cos(2/\sqrt{1} - 0/2i)$ |

نشان دهید که

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y,$$

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y.$$

عبارات زیر را به شکل $u + iv$ محاسبه کنید.

- | | | |
|----------------------|---------------------|--------------------|
| ۱۳. $\cosh(-2 + 3i)$ | ۱۴. $\sinh(4 - 3i)$ | ۱۵. $\sinh(2 + i)$ |
|----------------------|---------------------|--------------------|

تمام جوابهای معادلات زیر را بیابید.

- | | | |
|-------------------|-------------------|---------------------|
| ۱۶. $\cosh z = 0$ | ۱۷. $\cos z = 3i$ | ۱۸. $\sin z = 1000$ |
|-------------------|-------------------|---------------------|

$$\cosh z = \frac{1}{2} \cdot 21 \quad \sin z = \cosh 3 \cdot 20 \quad \sin z = i \sinh 1 \cdot 19$$

۲۲. تمام مقادیر z که به ازای آنها (الف) $\cos z$ ، (ب) $\sin z$ دارای مقادیر حقیقی می‌باشند را بیابید.

۲۳. با استفاده از (۱۵) و پاسخ یکی از مسائل فوق، مقدار $\cosh(-1/5 + 1/7i)$ را به دست آورید.

۲۴. مطلوب است محاسبه $\operatorname{Re} \tan z$ و $\operatorname{Im} \tan z$.

۲۵. ثابت کنید که $\cos z$ یک تابع زوج، یعنی به ازای هر z ، $\cos(-z) = \cos z$ و $\sin z$ یک تابع فرد، یعنی به ازای هر z ، $\sin(-z) = -\sin z$ هستند.

۲۶. نشان دهید که $\cos z = \sin(z + \frac{1}{2}\pi)$ و $\sin(\pi - z) = \sin z$.

۲۷. نشان دهید که $\sinh z$ و $\cosh z$ توابع متناوب با دوره تناوب $2\pi i$ می‌باشند.

۲۸. با استفاده از (۹) و (۱۵) نشان دهید که

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2,$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2.$$

۲۹. درستی هر یک از تساویهای زیر را ثابت کنید.

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1,$$

$$\cos^2 z - \sin^2 z = \cos 2z,$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1,$$

$$\cosh^2 z + \sinh^2 z = \cosh 2z.$$

۳۰. نشان دهید که $|\sinh y| \leq |\cos z| \leq \cosh y$ و $|\sinh y| \leq |\sin z| \leq \cosh y$ و نتیجه بگیرید که توابع کسینوس و سینوس مختلط در تمام صفحه مختلط کراندار نیستند.

۸.۱۲ لگاریتم . توان عمومی

به عنوان آخرین توابع این بخش به معرفی تابع لگاریتمی مختلط می‌پردازیم. این تابع نسبت به از تابع لگاریتم حقیقی بسیار پیچیده تر است. رفتار این تابع در طول تاریخ ریاضیات بسیاری اوقات باعث تعجب ریاضیدانان شده است. اگر شما هم در مطالعه این قسمت با مشکل مواجه شدید حوصله کنید و با دقت بیشتری عمل کنید.

لگاریتم طبیعی عدد مختلط $z = x + iy$ را به صورت $\ln z$ (گاهی اوقات $\log z$) نمایش

داده و به صورت تابع معکوس تابع نمایی تعریف می‌شود، یعنی $w = \ln z$ ، به ازای هر $z \neq 0$ ، با

$$e^w = z$$

تعریف می شود. (قابل توجه است که تساوی فوق به ازای $z = 0$ تعریف نمی شود، زیرا به ازای هر w داریم $e^w \neq 0$ ، ر.ک. بخش ۶.۱۲). چنانچه قرار دهیم $w = u + iv$ و $z = re^{i\theta}$ می یابیم $e^w = e^{u+iv} = re^{i\theta}$.

حال با توجه به بخش ۶.۱۲ ملاحظه می کنیم که e^{u+iv} دارای قدر مطلق e^u و آرگومان v می باشد. که اینها باید با قدر مطلق و آرگومان طرف راست رابطه فوق برابر باشد، یعنی

$$e^u = r, v = \theta.$$

از $e^u = r$ می یابیم $u = \ln r$ ، که در آن $\ln r$ ، لگاریتم طبیعی حقیقی عدد مثبت $r = |z|$ است. از اینرو $w = u + iv = \ln z$ برابر است با

$$\ln z = \ln r + i\theta \quad (r = |z| > 0, \theta = \arg z). \quad (1)$$

حال به قسمت حساس مساله می رسیم. چنین مفاهیمی در حساب دیفرانسیل و انتگرال حقیقی موجود نیست. نظر به اینکه آرگومان تنها با مضارب صحیح 2π مشخص می شوند، لذا لگاریتم طبیعی مختلط $\ln z (z \neq 0)$ بینهایت مقداری است.

مقدار $\ln z$ را که متناظر با مقدار اصلی $\text{Arg } z$ (ر.ک. بخش ۲.۱۲) را با $\text{Ln } z$ نمایش می دهیم و مقدار اصلی $\ln z$ می نامیم. بنابراین به ازای $z \neq 0$ ، داریم

$$\text{Ln } z = \ln|z| + i\text{Arg}z. \quad (2)$$

یکتایی $\text{Arg } z$ به ازای $z (\neq 0)$ ایجاب می کند که $\text{Ln } z$ همانند لگاریتم در دستگاه حقیقی تک مقداری باشد. چون مقادیر دیگر $\arg z$ به اندازه مضارب صحیح 2π اختلاف دارند، در این صورت مقادیر $\ln z$ عبارت اند از

$$\ln z = \text{Ln}z \pm 2n\pi i; \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

قسمتهای حقیقی $\ln z$ و $\text{Ln } z$ یکسان می باشند و تفاوت قسمتهای موهومی آنها مضارب 2π است. چنانچه z حقیقی و مثبت باشد، آنگاه $\text{Arg}z = 0$ و $\text{Ln } z$ با لگاریتم طبیعی حقیقی که در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی آموخته ایم یکی می شود. هرگاه z حقیقی و منفی باشد آنگاه $\text{Arg}z = \pi$ و

$$\text{Ln}z = \ln z + \pi i.$$

یادآوری می کنیم که لگاریتم طبیعی اعداد حقیقی منفی در حساب دیفرانسیل و انتگرال تعریف نمی شود.

مثال ۱. لگاریتم طبیعی. مقدار اصلی

داریم

$$\ln 1 = 0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \dots$$

$$\text{Ln} 1 = 0$$

$$\ln 4 = 1/386294 \pm 2n\pi i$$

$$\text{Ln} 4 = 1/386294$$

$$\ln(-1) = \pm \pi i, \pm 3\pi i, \pm 5\pi i, \dots$$

$$\text{Ln}(-1) = \pi i$$

$$\ln(-4) = 1/386294 \pm (2n+1)\pi i$$

$$\text{Ln}(-4) = 1/386294 + \pi i$$

$$\ln i = \frac{\pi i}{2}, -\frac{3\pi i}{2}, \frac{5\pi i}{2}, \dots$$

$$\text{Lni} = \frac{\pi i}{2}$$

$$\ln(-4i) = 1/386294 - \frac{\pi i}{2} \pm 2n\pi i, \dots$$

$$\text{Ln}(-4i) = 1/386294 - \frac{\pi i}{2}$$

$$\ln 4i = 1/386294 + \frac{\pi i}{2} \pm 2n\pi i$$

$$\text{Ln} 4i = 1/386294 + \frac{\pi i}{2}$$

$$\ln(3-4i) = \ln 5 + i \arg(3-4i)$$

$$\text{Ln}(3-4i) = 1/609438 - 0/927295i$$

$$= 1/609438 - 0/927295i \pm 2n\pi i$$

روابط آشنایی که درباره لگاریتم طبیعی به کار می بردیم برای مقادیر مختلط نیز برقرارند، یعنی

$$(a) \ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2, \quad (b) \ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2. \quad (4)$$

اما این روابط را به این ترتیب باید شناخت که هر مقدار از یک طرف با یکی از مقادیر طرف دیگر برابر است.

مثال ۲. تشریح روابط تابعی (۴) در دستگاه اعداد مختلط

فرض کنید

$$z_1 = z_2 = e^{\pi i} = -1.$$

اگر فرض کنیم

$$\ln z_1 = \ln z_2 = \pi i.$$

آنگاه (۴a) برقرار است، مشروط بر آنکه بنویسیم $\ln(z_1 z_2) = \ln 1 = 2\pi i$ ، این تساوی در مورد مقدار اصلی $\text{Ln}(z_1 z_2) = \ln 1 = 0$ برقرار نیست.

از (۱) و $e^{\ln r} = r$ ، برای r های حقیقی مثبت، همانطوری که انتظار داشتیم، می یابیم $e^{\ln z} = z$. (۵a)

اما، به جهت آنکه $\arg(e^z) = y \pm 2n\pi$ چند مقداری است، داریم $\ln e^z = z \pm 2n\pi i$. (b۵)

فرمول (۳)، به ازای هر عدد صحیح نامنفی ثابت n ، یک تابع را تعریف می کند. ثابت کردیم که هر چنین توابعی، به خصوص مقدار اصلی $\text{Ln } z$ ، به جز در $z = 0$ و محور حقیقی منفی (جایی که در آن قسمت موهومی تابع حتی پیوسته نیست و جهشی به اندازه 2π دارد) تحلیلی است. انجام این کار را با اثبات اینکه

$$(\ln z)' = \frac{1}{z} \quad (۶) \quad (n \text{ در } (۳) \text{ ثابت و } z \text{ عدد حقیقی منفی و صفر را شامل نیست})$$

پی می گیریم. در (۱) داریم $\ln z = u + iv$ ، که در آن

$$u = \ln r = \ln|z| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \quad v = \arg z = \arctan \frac{y}{x} + c,$$

که در آن c یک ثابت (یک مضرب از $2n\pi$) می باشد. حال مشتقات جزئی u و v را محاسبه کرده و می یابیم

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2} = v_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x},$$

$$u_y = \frac{y}{x^2 + y^2} = -v_x = -\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right).$$

بنابراین معادلات کوشی - ریمن بجز در مبداء مختصات برقرارند. حال با به کار بردن فرمول (۴) بخش ۱۲. ۵ به نتیجه موردنظر می رسیم؛ یعنی

$$(\ln z)' = u_x + iv_x = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{z}.$$

توانهای عمومی

توانهای عمومی عدد مختلط $z = x + iy$ با فرمول زیر تعریف می شود

$$z^c = e^{c \ln z} \quad (c \text{ مختلط و } z \neq 0). \quad (۷)$$

چون $\ln z$ بینهایت مقداری است، z^c در حالت کلی، چند مقداری خواهد بود. مقدار خاص

$$z^c = e^{c \text{Ln} z}$$

را مقدار اصلی Z^c می نامند.

چنانچه $c = n = 1, 2, \dots$ ، در آن صورت Z^n تک مقداری است و بتوان n ام معمولی یکی می باشد. همینطور به ازای $c = -1, -2, \dots$ وضعیت مشابهی داریم.

چنانچه $c = \frac{1}{n}$ که در آن $n = 2, 3, \dots$ ، آنگاه

$$Z^c = \sqrt[n]{Z} = e^{\frac{1}{n} \ln Z} \quad (Z \neq 0),$$

به نمایی که مشخص شده، می توان مضارب $\frac{2\pi i}{n}$ را افزود و بدین ترتیب n مقدار متمایز برای ریشه n ام

حاصل می شود که با نتیجه بخش ۲.۱۲ مطابقت می نماید. هرگاه $c = \frac{p}{q}$ ، نسبت دو عدد صحیح

مثبت باشد، وضعیت مشابهی وجود دارد، و Z^c یک تعداد متناهی مقادیر متمایز دارد. به هر حال، هرگاه c اصم یا عدد مختلط محض باشد، آنگاه Z^c به طور نامتناهی چند مقداری است.

مثال ۳. توان عمومی

$$i^i = e^{i \ln i} = \exp(i \ln i) = \exp\left[i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right] = e^{-\frac{\pi}{2} \pm 2n\pi}$$

تمام این مقادیر حقیقی هستند و مقدار اصلی ($n = 0$) برابر است با $e^{-\frac{\pi}{2}}$. به طور مشابه می توان نوشت

$$\begin{aligned} (1+i)^{2-i} &= \exp[(2-i) \ln(1+i)] = \exp\left[(2-i)\left\{\ln\sqrt{2} + \frac{1}{4}\pi i \pm 2n\pi i\right\}\right] \\ &= 2e^{\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi} \left[\sin\left(\frac{1}{4}\ln 2\right) + i \cos\left(\frac{1}{4}\ln 2\right) \right]. \end{aligned}$$

قرارداد چنین است که به ازای عدد حقیقی مثبت $Z = x$ عبارت Z^c به معنی $e^{c \ln x}$ باشد که در

آن لگاریتم طبیعی حقیقی مقدماتی است (یعنی، بنا به تعریف، مقدار اصلی $\text{Ln}z (z = x > 0)$ است). همچنین، هرگاه $Z = e$ ، یعنی پایه لگاریتم طبیعی باشد، $Z^c = e^c$ بنا به قرارداد مقدار یکتای حاصل از (۱) بخش ۶.۱۲ به دست می آید.

با توجه به (۷) مشاهده می کنیم که به ازای هر عدد مختلط a ،

$$a^z = e^{z \ln a}. \quad (8)$$

تاکنون به معرفی توابع مختلط مورد نیاز در کارهای کاربردی پرداختیم که برخی از آنها (e^z)، $\cos z$ ، $\sin z$ ، $\cosh z$ و $\sinh z$ (بخش ۶.۱۲)، برخی از آنها $\tan z$ ، $\cot z$ ، $\tanh z$ و $\coth z$ به جز در برخی نقاط خاص تحلیلی، و یکی از آنها ($\ln z$) یک تابع بینهایت مقداری است و مقدار اصلی آن بجز در مبداء و نیمه محور حقیقی منفی تحلیلی است.

مسائل بخش ۱۲. ۸.

۱. درستی محاسبات در مثال ۱ را تحقیق کنید. برخی از مقادیر $\ln(3 - 4i)$ را در صفحه مختلط مشخص کنید.

۲. درستی تساوی (۴) را به ازای $z_1 = -i$ و $z_2 = -1$ بررسی کنید.

۳. با استفاده از صورت قطبی معادلات کوشی - ریمنان (ر. ک. بخش ۱۲. ۵) ثابت کنید که $\ln z$ تحلیلی است.

۴. درستی روابط (۵a) و (۵b) را ثابت کنید.

مقدار اصلی $\ln z$ را محاسبه کنید چنانچه در آن z برابر باشد با

- ۱ + i . ۵ -۴ . ۶ -۳ - 4i . ۷ ۲/۵ + ۳/۸i . ۹
 -۱۰۰ . ۹ -۱۶/۵ - ۵/۱i . ۱۰ -۱۶/۵ + ۵/۱i . ۱۱ ۵/۶ + ۵/۸i . ۱۲

تمام مقادیر عبارتهای زیر را بیابید و برخی از آنها را در صفحه مختلط مشخص کنید.

- $\ln 1$. ۱۳ $\ln e$. ۱۴ $\ln(-7)$. ۱۵ $\ln(-5/5i)$. ۱۶
 $\ln(1/3 + 2/8i)$. ۲۰ $\ln(-e^{-i})$. ۱۹ $\ln(e^{i})$. ۱۸ $\ln(5/8 - 5/6i)$. ۱۷

مطلوب است حل معادلات زیر

- $\ln z = 2 + \frac{1}{4}\pi i$. ۲۳ $\ln z = -2 - \frac{3}{4}i$. ۲۲ $\ln z = 3 - i$. ۲۱
 $\ln z = \sqrt{2} + \pi i$. ۲۶ $\ln z = 5/3 + 5/7i$. ۲۵ $\ln z = (2 - \frac{1}{4}i)\pi$. ۲۴
 $\ln z = -5 + 5/5i$. ۲۸ $\ln z = 4 - 3i$. ۲۷

مطلوب است مقدار اصلی هر یک از عبارات زیر

- 2^{2i} . ۳۲ 3^{2-i} . ۳۱ $(1+i)^i$. ۳۰ i^i . ۲۹
 $(-5)^{2-2i}$. ۳۶ $(5-2i)^{2+\pi i}$. ۳۵ $(1+i)^{-i}$. ۳۴ $(1-i)^{1+i}$. ۳۳
 $(3+4i)^{\frac{1}{2}}$. ۳۸ $(2-i)^{1+i}$. ۳۷

بنا به تعریف، سینوس معکوس که با نماد $w = \sin^{-1} z$ نمایش داده می شود و به معنی $\sin w = z$ می باشد. کسینوس معکوس را که با نماد $w = \cos^{-1} z$ نمایش می دهند، رابطه ای است که در تساوی

$\cos w = z$ صدق می کنند. تانژانت معکوس، کتانژانت معکوس، سینوس هیپربولیک معکوس و سایر توابع معکوسها به طریقی مشابه تعریف و بیان می شوند (توجه کنید که همه این روابط چند مقداری هستند).

با استفاده از نمایش نمایی $\sin w = \frac{e^{wi} - e^{-wi}}{2i}$ و نمایشهای مشابه برای $\cos w$ و سایر

نسبتهای مثلثاتی، نشان دهید که

$$\cos^{-1} z = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \quad ۴۰ \quad \sin^{-1} z = -i \ln(iz + \sqrt{1 - z^2}) \quad ۳۹$$

$$\sinh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}) \quad ۴۲ \quad \cosh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \quad ۴۱$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} \quad ۴۴ \quad \tan^{-1} z = \frac{i}{2} \ln \frac{i+z}{i-z} \quad ۴۳$$

۴۵. نشان دهید که $w = \sin^{-1} z$ بینهایت مقداری است، و چنانچه w_1 یکی از این مقادیر باشد، بقیه مقادیر به صورت $w_1 \pm 2n\pi$ و $\pi - w_1 \pm 2n\pi$ می باشند که در آن $n = 0, 1, \dots$ (مقدار اصلی $w = u + iv = \sin^{-1} z$ مقداری است که برای آن $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ و $v \geq 0$ هرگاه $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ و $v < 0$ هرگاه).

۹.۱۲ نگاشت توسط توابع خاص. اختیاری

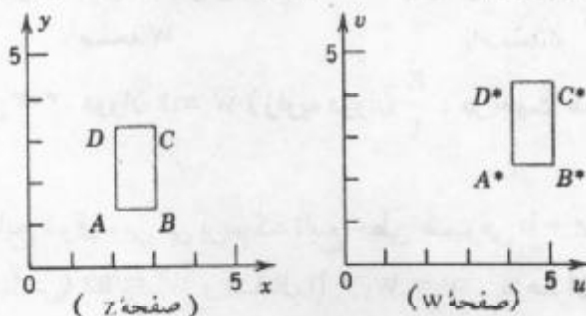
در این بخش، به طور هندسی، توابع مقدماتی تحت عنوان نگاشتها مورد بحث قرار می گیرند. این موضوع سبب تفهیم بیشتر توابع می گردد. خواص کلی نگاشت توابع تحلیلی در فصل ۱۶، و کاربردهای آنها در فصل ۱۷ ارائه می شوند.

در حساب دیفرانسیل و انتگرال آموختیم که نمودار تابع $y = f(x)$ را در صفحه xy می توان ترسیم نمود. برای تابع مختلط

$$w = u + iv = f(z) \quad (z = x + iy)$$

نیاز به دو صفحه است. یکی از این صفحات، صفحه z است، که در آن مقادیر z مشخص می شوند، و دیگری صفحه w که در آن مقادیر متناظر $w = f(z)$ وارد می شوند. در این روش تابع f مفروض به هر نقطه z از دامنه تعریف $w = f(z)$ را از صفحه w مربوط می سازد. f را نگاشت دامنه D به توی صفحه w می نامند. به ازای هر نقطه z_0 در D نقطه $w_0 = f(z_0)$ را نقش z_0 نسبت به تابع f نامند. به طور کلی نقاط منحنی C واقع در D به نقشهای خود واقع بر یک منحنی واقع در صفحه w تبدیل می شوند. برای مجموعه نقاط دیگر D وضعیت مشابهی وجود دارد.

هدف بعدی شرح زیر می باشد. با مشخص کردن تک تک نقاط و تصاویر آنها نمی توان یک



شکل ۳۰۱. انتقال $w = z + 2 + i$

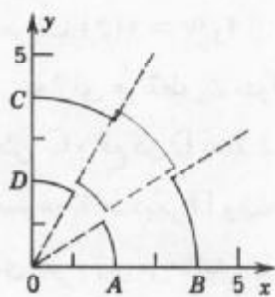
دید کلی نسبت به خواص نگاشت یک تابع مفروض پیدا کرد. برای این منظور بهتر است به مطالعه نمودار و نواحی و تصاویر آنها، بام بحث روی نحی های ساده معروف (برای مثال، خطوط مستقیم موازی یا دوائر متحد المکز) و تصاویر آنها پرداخته شود. این روش برای برخی توابع مقدماتی که از نظر کاربردی با اهمیت هستند با ارائه چند مثال تشریح خواهند شد.

توابع خطی. توانهای صحیح مثبت Z

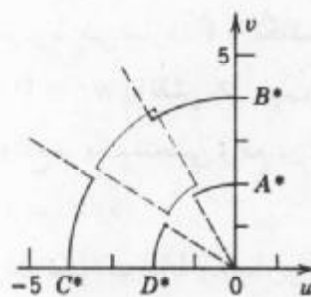
مثال ۱. نگاشت $w = az + b$

به طور هندسی، به بررسی خواص نگاشت تابع خطی $w = az + b$ پردازید. حل. هرگاه $a = 1$ ، نگاشت $w = z + b$ یک انتقال است. این نگاشت هر نقطه را در جهت b به اندازه $|b|$ انتقال می دهد. از اینرو هر شکل و تصویر آن با یکدیگر هم ارز می باشند. شکل ۳۰۱ به عنوان یک مثال ارائه شده است. $b = 0$ نگاشت همانی $w = z$ را نتیجه می دهد که هر نقطه را بر روی خودش می نگارد.

هرگاه $b = 0$ ، می یابیم که $w = az$. به ازای $|a| = 1$ داریم $a = e^{i\alpha}$ و $w = e^{i\alpha}z$ ، که دورانی به اندازه زاویه α می باشد. شکل ۳۰۲ یک مثال در این مورد را نشان می دهد. به ازای a حقیقی، که در آن $0 < a < 1$ ، انقباضی یکنواخت و به ازای $a > 1$ ، انبساطی یکنواخت به دست می آید. (در باره a حقیقی منفی وضع چگونه است؟ شرح دهید!)



صفحه Z

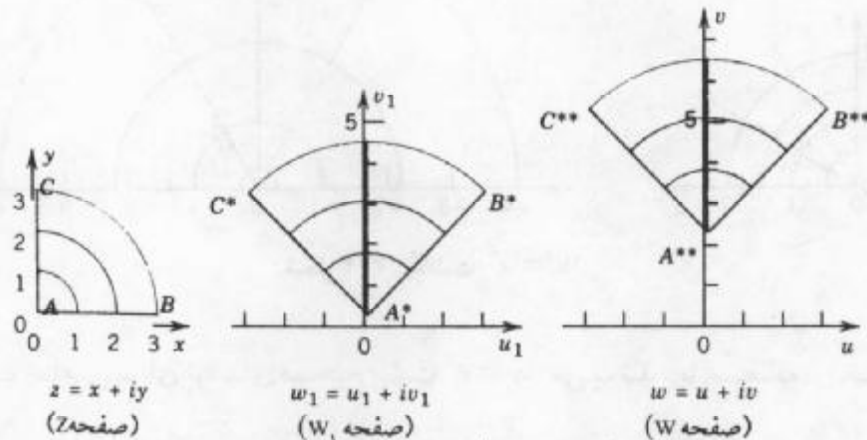


صفحه W

شکل ۳۰۲. دوران $w = iz$ (زاویه دوران $\frac{\pi}{2}$ ، در جهت عکس عقربه های ساعت)

با آمیختن نتایج فوق، پی می بریم که تابع خطی عمومی $w = az + b$ ترکیبی است از دوران، انبساط (یا انقباض) $w_1 = az$ و انتقال $w = w_1 + b$. به عنوان مثال، شکل ۳۰۳، یک

دوران به اندازه $\frac{\pi}{4}$ در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت، انبساطی به اندازه $\sqrt{2}$ و انتقالی قائم به طرف بالا را نشان می دهد.



شکل ۳۰۳. تبدیل خطی $w = u + iv = (1+i)z + 2i$ ، مرکب از دوران و انبساط

$$w = w_1 + 2i \text{ و سپس انتقال } w_1 = u_1 + iv_1 = (1+i)z$$

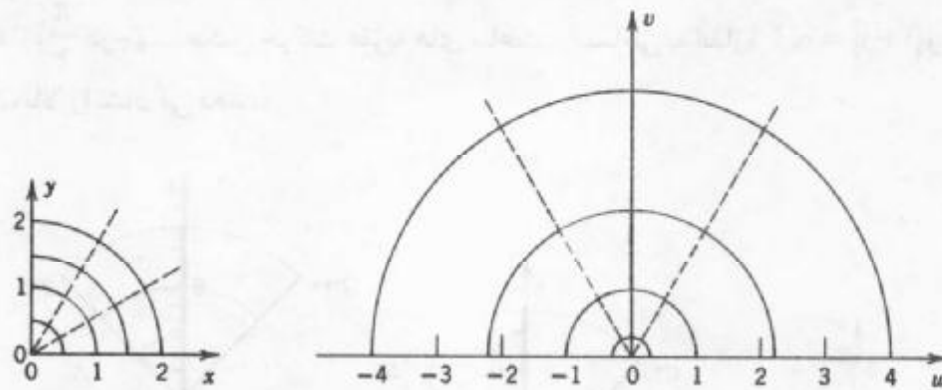
مثال ۲. نگاشت $w = z^2$

نقش دواير ثابت $|z| = r_0$ ، شعاعهای ثابت $\theta = \theta_0$ ، نواحی $\frac{3}{4} \leq |z| \leq 1$ و $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$ را تحت نگاشت $w = z^2$ بیابید.

حل. باتوجه به مختصات قطبی می یابیم

$$w = Re^{i\phi} = z^2 = r^2 e^{2i\theta} \quad (z = re^{i\theta})$$

این مطلب نشان می دهد که هر دایره $|z| = r_0$ بر روی دایره $|w| = r_0^2$ و هر شعاع $\theta = \theta_0$ بر روی شعاع $\phi = 2\theta_0$ و همینطور نواحی مورد نظر بر روی نواحی $\frac{9}{4} \leq |w| \leq 1$ و $\frac{2\pi}{3} < \phi < \frac{2\pi}{6}$ در صفحه w نگاشته می شوند (ر.ک. شکل ۳۰۴). دواير و شعاعها یکدیگر را تحت زوایای قائمه قطع می کنند و نگاشت $w = z^2$ این زوایا را بدون تغییر منتقل می کند، در هر صورت نگاشت $w = z^2$ هر زاویه واقع در صفحه z را که راس آن در مبداء مختصات نباشد بدون تغییر به صفحه w منتقل می کند. یک وضعیت استثنایی وقتی پیش می آید که $f'(z) = 0$ و در مورد $w = z^2$ داریم $w' = 2z$ که در $z = 0$ برابر صفر است. در چنین نقطه ای، یعنی در مبداء مختصات نگاشت $w = z^2$ ، هر زاویه با این راس را به دو برابر افزایش می دهد. این موضوع و قضیه مربوطه در فصل ۱۶ مورد بحث و بررسی قرار می گیرند.



شکل ۳.۴. نگاشت $w = z^n$

مثال ۲ حالت خاصی برای توانهای صحیح مثبت $w = z^n$ می باشد. با استفاده از مختصات قطبی داریم

$$w = Re^{i\phi} = z^n = r^n e^{in\theta}$$

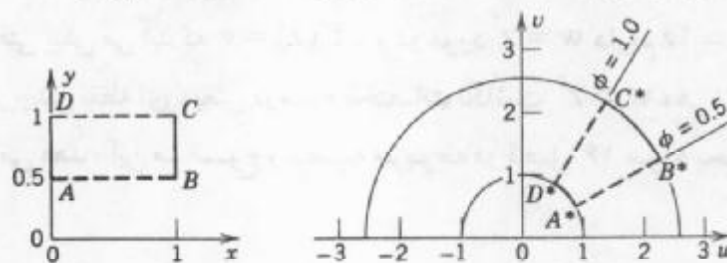
این مطلب نشان می دهد که $w = z^n$ دایره $|z| = r_0$ را بر روی دایره $|w| = r_0^n$ و شعاعهای $\theta = \theta_0$ را بر روی شعاعهای $\phi = n\theta_0$ می نگارد. به عنوان مثال، نگاشت $w = z^2$ اندازه زاویه به راس مبدأ مختصات را ضمن انتقال سه برابر می کند. همینطور $w = z^n$ ناحیه زاویه ای $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{n}$ را بر روی نیمه فوقانی صفحه w می نگارد.



شکل ۳.۵. نگاشت تعریف شده توسط $w = z^n$

توابع نمایی و لگاریتمی

همانطوری که در مثالهای قبل مشاهده شد، خواص مختلف نگاشتها با بررسی منحنیها و نواحی که نقشهای شان را بدون محاسبه بلکه تنها با توجه به خواص تابع مورد نظر به دست آورد، مورد بحث قرار دادیم. این موضوع بحث ما را در سراسر این قسمت نیز تشکیل می دهد.



شکل ۳.۶. تبدیل $w = e^z$ [مثال ۳، قسمت (ب)]

مثال ۳. تابع نمایی $w = e^z$

نقش هریک از منحنیها و نواحی زیر را به کمک نگاشت $w = e^z$ به دست آورید.

(الف) خطوط مستقیم با فاصله ثابت $x = x_0$ و ثابت $y = y_0$ ،

(ب) مستطیل $0 \leq x \leq 1$ ، $\frac{1}{2} < y < 1$ ،

(ج) ناحیه بنیادی $-\pi < y \leq \pi$ ،

(د) نوار افقی $0 \leq y \leq \pi$

حل. (الف) با مراجعه به بخش ۶.۱۲ پی می بریم که $|w| = e^x$ و $\arg w = y$. لذا $x = x_0$ بر روی

دایره $|w| = e^{x_0}$ و $y = y_0$ بر روی شعاع $\arg w = y_0$ نگاشته می شوند.

(ب) باتوجه به قسمت (الف) پی می بریم که هر مستطیل با ابعاد موازی با محورها مختصات

بر روی ناحیه محصور بین شعاعها و دایره نگاشته می شود. شکل ۳۰۶ را ملاحظه کنید.

(ج) ناحیه بنیادی مورد نظر بر روی تمامی صفحه w (که در طول محور حقیقی منفی بریده

شده است) فاقد مبداء 0 ، نگاشته می شود. به طور کلی، هر نوار افقی که بین دو خط موازی $y = c$ و

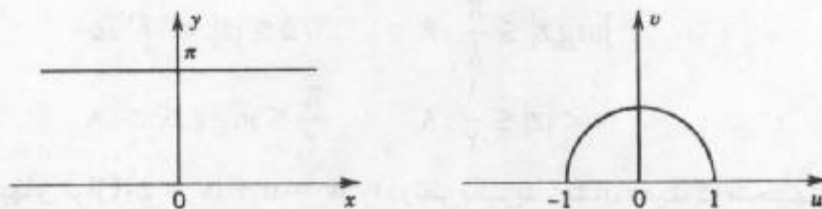
$y = c + 2\pi$ محصور شده است، بر روی تمام صفحه w فاقد مبداء نگاشته می شود. این موضوع

بیانگر این واقعیت است که $w = e^z$ متناوب با دوره تناوب $2\pi i$ می باشد.

(د) نوار $0 \leq y \leq \pi$ بر روی نیمه فوقانی صفحه w نگاشته ، نیمه راست ($x > 0$) بر روی

خارج دایره واحد $|w| = 1$ و نیمه چپ ($x < 0$) بر روی داخل، فاقد صفر، نگاشته می شود (شکل

۳۰۷).



شکل ۳۰۷. نگاشت $w = e^z$ [مثال ۳، بخش (د)]

حال به نگاشت لگاریتم طبیعی می پردازیم. در بحث مربوط به آن اصول و ایده اساسی زیر را به

کاری گیریم. خواص معکوس نگاشت $w = f(z)$ را با تعویض صفحات w و z از روی خود نگاشتها

می توان به دست آورد. چون لگاریتم طبیعی $w = u + iv = \ln z$ رابطه معکوس تابع نمایی است،

از مثال ۳، قسمت (ج) نتیجه می گیریم که $w = \ln z$ به ازای $z \neq 0$ (مقدار اصلی $\ln z$) صفحه z

(که در طول قسمت منفی محور حقیقی بریده شده است و با حذف $z = 0$) را بر روی نوار $-\pi < v \leq \pi$ از صفحه w می نگارد. چون نگاشت

$$w = \text{Ln}z + 2\pi i$$

به اندازه $2\pi i$ (به طور قائم به طرف بالا) با $w = \text{Ln}z$ اختلاف دارند، این نگاشت صفحه z (بریده شده در طول نیم محور حقیقی منفی با حذف مبدا) را بر نوار $\pi < v \leq 3\pi$ می نگارد. به طور مشابه برای هر نگاشت بینهایت مقداری

$$w = \ln z = \text{Ln}z \pm 2n\pi i \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

مطلب فوق برقرار است. نوارهای افقی متناظر به عرض 2π (نقش صفحه z تحت این نگاشتها) کلاً صفحه w را بدون آنکه دارای قسمت مشترک باشد می پوشانند. خواننده می تواند قسمتهای دیگر مثال ۳ را بر حسب نگاشت $w = \text{Ln}z$ ، با تعویض نقش های z و w بررسی کند.

خواص نگاشت توابع دیگر (مثلثاتی، هیپربولیک، توابع کسری خطی و نظایر آنها) در فصل ۱۶ مورد بحث قرار خواهند گرفت.

مسائل بخش ۹.۱۲

نگاشت $w = (1-i)z + 2$ را در نظر بگیرید. تصاویر هریک از منحنیها و نواحی مفروض را یافته و رسم کنید.

$$|z+1| \leq 1.3 \quad y = -2, 0, 2, 4.2 \quad x = 0, 1, 2, 3.1$$

نقش هریک از نواحی زیر را تحت نگاشت $w = z^2$ یافته و رسم کنید.

$$|\arg z| \leq \frac{\pi}{8}.6 \quad 1/5 \leq |z| < 2/1.5 \quad |z| \leq 3.4$$

$$0 < |z| \leq \frac{1}{2}.9 \quad \frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \pi.8 \quad |z| > 4.7$$

۱۰. (منحنیهای تراز) $w = u + iv = z^2$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که منحنیهای تراز u ، یعنی منحنیهای ثابت u در صفحه z هذلولیهای بی مجانبهای $y = \pm x$ هستند برخی از آنها را رسم کنید.

۱۱. منحنیهای تراز ثابت v را در مساله ۱۰ بیابید و برخی از آنها را رسم کنید.

۱۲. نشان دهید که $w = u + iv = z^2$ ، خط $x = c$ را بر روی سهمی $v^2 = 4c^2(c^2 - u)$ می نگارد و نمودار آنها را به ازای $c = 2, 1, \frac{1}{2}, 0$ رسم کنید.

۱۳. مطلوب است نقش خط $y = k$ تحت نگاشت $w = u + iv = z^2$.

نقش منحنیها و نواحی زیر را تحت نگاشت $w = \frac{1}{z}$ ، که در آن $z \neq 0$ یافته و رسم کنید.

$$y > 0.16 \quad |z| = \frac{1}{4} \cdot 15 \quad |z| < 1.14$$

نقش نواحی زیر را تحت نگاشت $w = e^z$ یافته و رسم کنید.

$$0 < y < \pi, \quad x > \frac{1}{4} \cdot 19 \quad x = 0.18 \quad |y| \leq \pi, \quad z \leq 1.17$$

$$|y| < b, \quad |x| < a.20$$

مسائل و پر مشهای دوره ای فصل ۱۲

۱. تعریف ضرب اعداد مختلط در ابتدا عجیب به نظر می رسد. علت این کار برای چیست؟
۲. ضرب یک عدد مختلط در i از نقطه نظر هندسی به چه معنی ای است؟
۳. اگر $|z|$ و $\tan\left(\frac{y}{x}\right)$ مفروض باشند، آیا عدد مختلط $|z|e^{i\theta}$ به طور یکتا مشخص می شود؟
۴. مقدار اصلی آرگومان یک عدد مختلط به چه معنا است؟
۵. نامساوی مثلثی چیست؟ مفهوم هندسی آن چگونه است؟
۶. فرمول دموآور چیست و کاربرد آن در کجا است؟
۷. جمله « $f(z)$ در دامنه D تحلیلی است» به چه معنا است؟ جمله « $f(z)$ در یک نقطه تحلیلی است» به چه مفهوم است؟ یک دامنه چیست؟
۸. آیا $|z|$ ، $\operatorname{Re} z$ ، و $\operatorname{Im} z$ تحلیلی هستند؟ چرا؟
۹. تحلیلی بودن چگونه بررسی می شود؟
۱۰. تعریف مشتق درست مانند تعریف مشتق در حساب حقیقی است، اما یک تفاوت بزرگ وجود دارد. آن تفاوت را شرح دهید.
۱۱. آیا ممکن است یک تابع در یک نقطه مشتق پذیر باشد بدون آنکه در آن نقطه تحلیلی باشد؟
۱۲. تابع تام چیست؟ مثالهای نقض بیاورید؟
۱۳. e^z چگونه تعریف می شود؟ نوار بنیادی چیست؟
۱۴. کدام خواص e^z با e^x مشابه است؟ یک تفاوت عمده کدام است؟ آیا تفاوت دیگری می شناسید؟
۱۵. ارتباط $\cos z$ و $\sin z$ با e^z به چه طریقی است؟
۱۶. آیا معادله $\sin z = -100$ دارای جواب است؟
۱۷. در چه زمینه ای لگاریتم مختلط از لگاریتم حقیقی پیچیده تر است؟
۱۸. $\operatorname{Ln} z$ چگونه تعریف می شود؟
۱۹. درباره $\sqrt[n]{z}$ ، $\sqrt[n]{z}$ ، $\sqrt[n]{z}$ چه مطالبی به خاطر دارید؟
۲۰. هرگاه مقادیر $\sqrt[n]{z}$ را بدانید، چگونه از آنها مقادیر $\sqrt[n]{z}$ را برای هر z به دست می آورید؟

هریک از عبارات زیر را به صورت $x + iy$ محاسبه کنید.

$$\frac{25}{(3+4i)^2} \cdot 24 \quad \frac{6+i}{2-3i} \cdot 23 \quad (1+i)^2 \cdot 22 \quad (-2+6i)^2 \cdot 21$$

$$\frac{23+2i}{2-2/5i} \cdot 28 \quad \frac{(1+i)^6}{(1-i)^6} \cdot 27 \quad \frac{202}{10-i} \cdot 26 \quad \frac{52/5-12/5i}{3-i} \cdot 25$$

هریک از عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$\operatorname{Re} \frac{-4-6i}{(1+i)^2} \cdot 32 \quad \operatorname{Re} \frac{16+2i}{3+2i} \cdot 31 \quad \operatorname{Im} \frac{2-i}{4-3i} \cdot 30 \quad \operatorname{Re} \frac{1}{2+i} \cdot 29$$

$$\frac{4}{|7-\pi i|} \cdot 36 \quad \frac{|13-17i|}{|17+13i|} \cdot 35 \quad \left| \frac{iz}{z} \right| \cdot 34 \quad \left| \frac{(3+4i)^2}{(3-4i)^2} \right| \cdot 33$$

مطلوب است محاسبه هر یک از عبارات زیر

$$\sqrt[6]{-1} \cdot 40 \quad \sqrt{-8-6i} \cdot 39 \quad \sqrt{3+4i} \cdot 38 \quad \sqrt{-i} \cdot 37$$

هریک از اعداد مختلط زیر را در مختصات قطبی بنویسید.

$$2/6+1/7i \cdot 44 \quad \frac{\sqrt{10}}{3+i} \cdot 43 \quad 17+4i \cdot 42 \quad -6+6i \cdot 41$$

منحنیها و نواحی ذیل را در صفحه مختلط مشخص کنید.

$$2 < |z+i| < 3 \cdot 46 \quad |z+1-3i| = \frac{1}{2} \cdot 45$$

$$\operatorname{Re}(z^2) \leq 1 \cdot 48 \quad \operatorname{Re} z \geq \operatorname{Im} z \cdot 47$$

تابع تحلیلی $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ را طوری بیابید که

$$u = e^{x^2-y^2} \cos 2xy \cdot 50 \quad v = \frac{y}{x^2+y^2} \cdot 49$$

$$u = x^2 - 2xy - y^2 \cdot 52 \quad u = \cos x \cosh y \cdot 51$$

آیا توابع زیر همساز هستند؟ چنانچه جواب مثبت باشد، همساز مزدوج آنها را بیابید.

$$\sin x \cosh y \cdot 56 \quad x^2 - 3xy^2 \cdot 55 \quad e^{\frac{x}{y}} \cos \frac{1}{y} \cdot 54 \quad x^2 y^2 \cdot 53$$

مشتق هر یک از توابع داده شده را در نقاط مورد نظر بیابید.

$$i \text{ در } e^z \cdot 58 \quad 1+i \text{ در } \frac{2}{z} \cdot 57$$

$$4-3i \text{ در } \cosh z \cdot 60 \quad 3+2i \text{ در } \sin z \cdot 59$$

خلاصه فصل ۱۲

اعداد مختلط. توابع تحلیلی مختلط

یک عدد مختلط دارای نمایشی به شکل یکی از صورتهای زیر است

$$z = x + iy = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{۱}$$

که در آن $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ ، و بحث مربوط به آنها در بخشهای ۱.۱۲ و ۲.۱۲ ارائه شده است.

تابع مختلط f با ضابطه $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ را در دامنه D تحلیلی گوئیم هرگاه در همه جای D دارای مشتق (بخش ۴.۱۲)

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{۲}$$

باشد. همچنین، $f(z)$ در نقطه $z = z_0$ تحلیلی گوئیم هرگاه در یک همسایگی z_0 (نه تنها در خود z_0) دارای مشتق باشد.

هرگاه $f(z)$ در D تحلیلی باشد، آنگاه $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در همه جای D ، در معادلات کوشی - ریمنان صدق کنند (بخش ۵.۱۲)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{۳}$$

در این صورت u و v نیز به ازای تمام نقاط D ، در معادله لاپلاس

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 \tag{۴}$$

صدق می کنند. هرگاه $u(x,y)$ و $v(x,y)$ پیوسته و دارای مشتقات جزئی پیوسته در D و در این ناحیه در معادلات (۳) صدق کنند، آنگاه $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در D تحلیلی است. بخش ۵.۱۲ را ملاحظه کنید. (توصیف بیشتر معادله لاپلاس و تجزیه و تحلیل در فصل ۱۷ ارائه شده است.)

تابع نمایی مختلط (بخش ۶.۱۲)

$$e^z = \exp z = e^x(\cos y + i\sin y) \tag{۵}$$

تابعی متناوب با دوره تناوب $2\pi i$ است، اگر $z = x + iy$ ، آنگاه تابع نمایی مختلط به e^x تبدیل می شود، و دارای مشتق e^z است.

توابع مثلثاتی عبارت اند از (بخش ۷.۱۲)

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, \tag{۶}$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$

توابع هیپربولیک به صورت زیر می باشند
 $\cot z = \frac{1}{\tan z}$ ، $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ و نظایر آنها.

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \cos iz, \tag{۷}$$

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = -i \sin iz,$$

و برای شناخت سایر توابع به متن درس مراجعه شود. تابع نام تابعی است که در تمام نقاط صفحه مختلط تحلیلی باشد. توابع (۵) تا (۷) نام می باشند.

لگاریتم طبیعی عبارت است از (بخش ۱۲. ۸.)

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z \quad (\arg z = \theta, z \neq 0) \tag{۸}$$

$$= \ln|z| + i \text{Arg} z \pm 2n\pi i \quad (n = 0, 1, \dots),$$

که در آن $\text{Arg} z$ مقدار اصلی $\arg z$ است، یعنی $-\pi < \text{Arg} z \leq \pi$. ملاحظه می کنیم که $\ln z$ بینهایت مقداری است. با انتخاب $n = 0$ مقدار اصلی $\text{Ln} z$ از $\ln z$ به دست می آید؛ که برابر است با

$$\text{Ln} z = \ln|z| + i \text{Arg} z. \tag{۸^*}$$

توانهای عمومی به صورت زیر تعریف می شوند (بخش ۱۲. ۸.)

$$z^c = e^{c \ln z} \quad (z \neq 0, c \text{ مختلط}). \tag{۹}$$

تابع مختلط $w = f(z)$ نگاشتی از ناحیه ای واقع در صفحه z را بتوی ناحیه ای در صفحه w تعریف می کند. نگاشتهای داده شده با (۵)، (۸)، و برخی دیگر در بخش ۹. ۱۲ مورد بحث قرار گرفتند (توصیف بیشتر این نگاشتها با توابع تحلیلی در فصل ۱۶ ارائه خواهند شد).

فصل ۱۳

انتگرالگیری مختلط

انتگرالگیری در صفحه مختلط به دو دلیل با اهمیت است:

۱. در کاربردها با انتگرالهای حقیقی ای مواجه هستیم که محاسبه آنها به روشهای معمولی در حساب انتگرال حقیقی ممکن نیست ولی چنین انتگرالهایی را با انتگرالگیری مختلط می توان محاسبه نمود.

۲. برخی از خواص اساسی توابع تحلیلی که اثبات شان به روشهای دیگر خالی از اشکال نیست می توان با انتگرالگیری اثبات نمود. وجود مشتقات مراتب بالاتر توابع تحلیلی یکی از این خواص می باشد.^۱

در این فصل به تعریف و تشریح انتگرالهای مختلط می پردازیم. مهمترین نتیجه ای که می گیریم قضیه انتگرال کوشی (بخش ۱۳. ۳) است. که فرمول مهم انتگرال کوشی (بخش ۱۳. ۵) از آن نتیجه می شود. در بخش ۱۳. ۶ ثابت می کنیم که اگر تابعی تحلیلی باشد، از هر مرتبه ای دارای مشتق است.

این مطلب بدان معنی است که رفتار توابع تحلیلی مختلط بسیار ساده تر از رفتار توابع حقیقی بامتغیر حقیقی است.

(انتگرالگیری به کمک قضیه مانده ها و کاربرد آن در محاسبه انتگرالهای حقیقی در فصل ۱۵)

۱- در سال ۱۹۶۱ بدون انتگرالگیری پاروشهای معادل توسط

P. Porcelli and E. H. Cannell, Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 76. P. 177- 181]

برای رسیدن به آن از قضیه توپولوژی که توسط جی. تی. وای بوزن G.T. Whyburn ارائه شده استفاده شده است.

مورد بررسی قرار می گیرند.)

پیشنیاز این فصل : فصل ۱۲ .

مراجع : ضمیمه ۱ ، قسمت D .

جواب مسائل : ضمیمه ۲ .

۱۳. ۱. انتگرال روی خط در صفحه مختلط

همانند حساب دیفرانسیل و انتگرال حقیقی ، بین انتگرالهای معین و انتگرالهای نامعین با توابع اولیه فرق می گذاریم . یک **انتگرال نامعین** تابعی است که مشتق آن در یک ناحیه با تابع تحلیلی مفروضی برابر باشد . در بسیاری اوقات برای محاسبه انتگرالهای نامعین مختلط می توان از خواص متناظر در حساب انتگرال حقیقی استفاده نمود .

برای تعریف انتگرالهای معین ، یا انتگرالهای روی خط توابع مختلط $f(z)$ ، که در آن $z = x + iy$ ، آشنایی با منحنیها در صفحه مختلط ضروری به نظر می رسد .

مسیرانتگرالگیری . در حساب دیفرانسیل و انتگرال حقیقی ، بر یک بازه (یک پاره خط) از خط حقیقی انتگرالگیری می شود . در انتگرال معین (انتگرال روی خط) مختلط ، در طول یک منحنی C در صفحه مختلط انتگرال می گیرند . منحنی C را که بر آن انتگرالگیری صورت می پذیرد را **مسیرانتگرالگیری** می نامند .

هر منحنی را می توان به صورت

$$z(t) = x(t) + iy(t) ; a \leq t \leq b \quad (1)$$

نمایش داد که در آن t یک پارامتر حقیقی است . به عنوان مثال ،

$$z(t) = t + 3it \quad (0 \leq t \leq 2)$$

نمایش قسمتی از خط $y = 3x$ می باشد (این قسمت را رسم کنید!) همینطور

$$z(t) = 4 \cos t + 4i \sin t \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

نمایش دایره $|z| = 4$ می باشد ، و مثالهای دیگر متعاقباً ارائه می شوند .

منحنی C را **هموار** گویند هر گاه در هر نقطه دارای مشتقی پیوسته و غیر صفر باشد

$$\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt} = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t) .$$

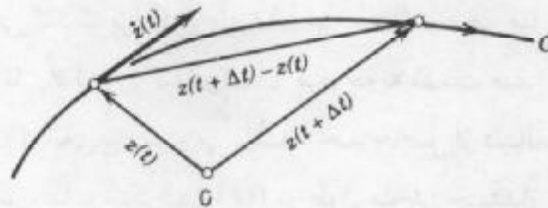
به طریق هندسی این بدان معنی است که C در همه جا به طور پیوسته دارای خط مماس است که به

۲- در واقع در طول یک قسمت (یک قوس) از یک منحنی ، اما برای سادگی کار از لفظ «**منحنی**» به جای هر دوی آنها استفاده می کنیم . دانشجویان آشنا به بخش ۱.۹ توجه خواهند نمود که بحث فعلی شبیه بحثی است که در بخش ۱.۹ آمده است .

صورت

$$\dot{z}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}$$

تعریف می شود (شکل ۳۰۸).



شکل ۳۰۸. بردار سرعت $Z(t)$ یک منحنی C در صفحه مختلط با $z(t)$ مفروض. پیکان مشخص شده بر منحنی جهت مثبت (جهت افزایش t) را نشان می دهد.

تعریف انتگرال روی خط مختلط

مباحث این قسمت مشابه قسمتهای مربوط به حساب دیفرانسیل و انتگرال حقیقی است. منحنی هموار C ، مفروض در شکل (۱) را در صفحه مختلط و تابع پیوسته f با ضابطه $f(z)$ که (دست کم) در تمام نقاط C تعریف شده باشد را در نظر می گیریم. حال فاصله $a \leq t \leq b$ را که در (۱) معرفی شد توسط نقاط

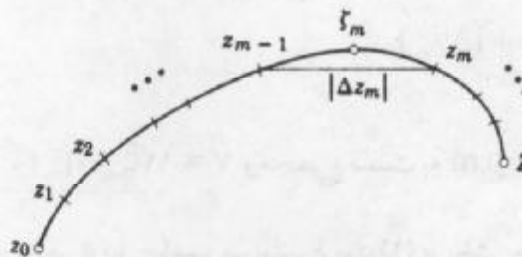
$$t_0 (= a), t_1, \dots, t_{n-1}, t_n (= b),$$

که در آن $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ افراز می کنیم. این افراز سبب افراز C توسط نقاط (شکل ۳۰۹)

$$z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n (= z),$$

که در آن $z_j = z(t_j)$ ، می شود. هر قسمت از منحنی های جزء C یک نقطه دلخواه انتخاب می کنیم. این نقطه را $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ می نامیم که بر منحنی C به ترتیب بین z_1, z_2, \dots, z_r و z_r, z_{n-1}, z_n انتخاب می شوند. هم اکنون مجموع زیر را تشکیل می دهیم

$$S_n = \sum_{m=1}^n f(\zeta_m) \Delta z_m \tag{۲}$$



شکل ۳۰۹. انتگرال روی خط مختلط

که در آن

$$\nabla z_m = z_m - z_{m-1}$$

این مطلب را به ازای هر $n = 2, 3, \dots$ به طور کاملاً مستقل اعمال می‌کنیم، و این کار را طوری انجام می‌دهیم که بزرگترین $|\Delta t_m| = |t_m - t_{m-1}|$ وقتی n به سمت بینهایت میل می‌کند به سمت صفر میل کند؛ این مطلب ایجاب می‌کند که بزرگترین $|\Delta z_m|$ نیز به سمت صفر میل کند زیرا این مقدار نمی‌تواند از طول کمال C از z_{m-1} تا z_m تجاوز کند و کمان مربوطه به سمت صفر میل می‌کند زیرا طول قوس منحنی هموار C بر حسب t تابعی پیوسته می‌باشد. حد حاصل از دنباله اعداد مختلط S_1, S_2, \dots را انتگرال روی خط (یا به طور ساده انتگرال) $f(z)$ در طول منحنی جهت‌دار C (که مسیر انتگرالگیری نامیده می‌شود) می‌نامند و با نماد

$$\int_C f(z) dz \quad (3)$$

نمایش می‌دهند. اگر C یک مسیر بسته باشد (که نقطه انتهایی Z بر نقطه ابتدایی Z_0 منطبق شده باشد، مانند یک دایره یا یک منحنی به شکل 8. ما در بحث خود از نماد استاندارد

$$\oint_C f(z) dz$$

نیز استفاده می‌کنیم.

مثالهای مربوط به این قسمت در بخش آتی ارائه خواهند شد.

مفروضات عمومی. همه مسیرهای انتگرالگیری انتگرالها روی خط مختلط تکه ای هموار می‌باشند، یعنی از تعداد متناهی منحنی هموار که از انتها به همدیگر متصل شده اند، تشکیل شده اند.

وجود انتگرال روی خط مختلط^۳

باتوجه به پیوسته بودن f و به طور تکه ای هموار بودن C وجود انتگرال (۳) حاصل می‌شود.

همانند فصل قبل می‌نویسیم $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ و قرار می‌دهیم

$$\Delta z_m = \Delta x_m + i\Delta y_m \quad \zeta_m = \xi_m + i\eta_m$$

در آن صورت (۲) ممکن است به صورت زیر نوشته شود

$$S_n = \sum (u + iv)(\Delta x_m + i\Delta y_m) \quad (4)$$

که در آن $u = u(\xi_m, \eta_m)$ ، $v = v(\xi_m, \eta_m)$ و مجموع نسبت به m از ۱ تا n انجام می‌پذیرد. حال

۳- اگر نخواهیم به انتگرالهای خط حقیقی توسل جویم، می‌توانیم فرمول (۱) در بخش بعد را تعریف انتگرال خط مختلط بگیریم.

می توان S_n را به صورت چهار مجموع زیر تفکیک نمود:

$$S_n = \sum u \Delta x_m - \sum v \Delta y_m + i \left[\sum u \Delta y_m + \sum v \Delta x_m \right].$$

این مجموعها حقیقی اند. چون f پیوسته است، لذا u و v نیز پیوسته می باشند. بنابراین، اگر n به طریقی که گفته شد به سمت بینهایت میل کند، در آن صورت بزرگترین Δx_m و Δy_m به سمت صفر میل می کنند و هر یک از چهار مجموع فوق یک انتگرال روی خط حقیقی خواهند شد. بنابراین داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_C f(z) dz = \int_C u dx - \int_C v dx + i \left[\int_C u dy + \int_C v dx \right]. \quad (5)$$

این موضوع نشان می دهد که تحت مفروضات فوق (یعنی f بر C پیوسته و C تکه ای هموار) انتگرال روی خط (۳) وجود دارد و مقدار آن مستقل از انتخاب افراز و نقاط میانی ζ_m است.

سه خاصیت اساسی انتگرال روی خط مختلط

فهرست سه ویژگی انتگرال روی خط مختلط کاملاً با ویژگیهای انتگرالهای معین حقیقی (وانتگرالها روی خط حقیقی) مشابه می باشند و بلافاصله از تعریف نتیجه می شوند.

۱. انتگرالگیری یک اپراتور خطی است، یعنی از مجموع دو یا چند تابع می توان جمله به جمله انتگرال گرفت، و ضرایب ثابت را می توان از زیر علامت انتگرال خارج نمود، در واقع

$$\int_C [k_1 f_1(z) + k_2 f_2(z)] dz = k_1 \int_C f_1(z) dz + k_2 \int_C f_2(z) dz. \quad (6)$$

۲. اگر C به دو قسمت C_1 و C_2 تجزیه شود (شکل ۳۱۰)، آنگاه داریم

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz \quad (7)$$



شکل ۳۱۰. تقسیم جزئی مسیر [فرمول (۱۷)]

۳. اگر جهت انتگرالگیری را عوض کنیم، مقدار انتگرال در یک منها ضرب می شود

$$\int_{Z'} f(z) dz = - \int_Z f(z) dz; \quad (8)$$

در اینجا مسیر C با نقاط انتهایی Z_0 و Z_1 همان مسیر قبلی است، در طرف چپ از Z_0 تا Z_1 ، و در طرف راست از Z_1 تا Z_0 انتگرالگیری می شود.

روشهای انتگرالگیری و مثالهایی از نتایج انتگرالها در بخش بعدی ارائه می شوند و مسائل در انتهای آن بخش ارائه خواهند شد.

۱۳. ۲. دو روش انتگرالگیری. مثالها

انتگرالگیری مختلط روشی نیرومند برای محاسبه انتگرالها می باشد. ابتدا به دو روش به انتگرالگیری مختلط پرداخته، و روشهای دیگر در این فصل و فصل ۱۵ ارائه می شوند.
روش اول: استفاده از نمایش مسیر

این روش برای هر تابع مختلط پیوسته قابل استفاده است.

قضیه ۱ (انتگرالگیری با استفاده از مسیر)

هر گاه C یک مسیر نکه ای هموار باشد، که با $z = z(t)$ ، که در آن $a \leq t \leq b$ نمایش داده شده باشد، همچنین $f(z)$ یک تابع پیوسته بر C باشد، آنگاه

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] \dot{z}(t) dt ; \dot{z} = \frac{dz}{dt} \quad (1)$$

اثبات. بنابر (۵) بخش ۱۳. ۱، طرف چپ تساوی (۱) بر حسب انتگرالها روی خط حقیقی مفروض می باشند، و نشان می دهیم که طرف راست (۱) برابر (۵) بخش ۱۳. ۱ است. داریم $z = x + iy$ و $\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y}$. برای سادگی قرار می دهیم $u = u[x(t), y(t)]$ و $v = v[x(t), y(t)]$. از طرفی داریم $dx = \dot{x} dt$ و $dy = \dot{y} dt$. با توجه به این نتایج از (۱) نتیجه می شود

$$\begin{aligned} \int_a^b f[z(t)] \dot{z}(t) dt &= \int_a^b (u + iv)(\dot{x} + i\dot{y}) dt \\ &= \int_C [u dx - v dy + i(u dy + v dx)]. \end{aligned}$$

عبارت آخر در تساوی فوق برابر (۵) بخش ۱۳. ۱ می باشد. این نتیجه مورد نظر ما بوده و بدین طریق اثبات کامل می شود.

گامها در به کارگیری قضیه ۱

(الف) ارائه مسیر C به صورت $z(t)$ ، که در آن $a \leq t \leq b$.

(ب) محاسبه مشتق $\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt}$.

(ج) جایگزینی $z(t)$ به ازای هر z در $f(z)$ (یا $x(t)$ بجای x و $y(t)$ بجای y).

(د) از $f[z(t)] \dot{z}(t)$ بر حسب t از a تا b انتگرال می گیریم.

مثال ۱. یک نتیجه اساسی: انتگرال $\frac{1}{z}$ روی دایره واحد

نشان دهید که

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i \quad (2) \quad (C \text{ دایره واحد، انتگرالگیری خلاف حرکت عقربه های ساعت})$$

نتایج حاصله نتیجه بسیار جالبی است و کاربردهای متعدد دارد.
 حل. دایره واحد C (ر.ک. بخش ۱۲. ۳) را می توان به صورت

$$z(t) = \cos t + i \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

نمایش داد. انتگرالگیری در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت با افزایش t از 0 تا 2π متناظر می باشند. با مشتقگیری می یابیم

$$\dot{z}(t) = -\sin t + i \cos t.$$

از طرفی $f[z(t)] = \frac{1}{z(t)}$ با استفاده از نتایج و جایگزینی کردن آنها در انتگرال می یابیم

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos t + i \sin t} (-\sin t + i \cos t) dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

که همان نتیجه مورد نظر است.

با بکارگیری فرمول اوایلر (بخش ۱۲. ۶) می یابیم $z(t) = e^{it}$ و از آنجا

$$dz = ie^{it} dt \quad \text{و از آنجا} \quad \frac{1}{z(t)} = e^{-it}$$

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} e^{-it} ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

مثال ۲. انتگرال توانهای صحیح

فرض کنید $f(z) = (z - z_0)^m$ که در آن m عددی صحیح و z_0 یک عدد مختلط ثابت است. انتگرال این تابع در طول دایره C که شعاع آن ρ و مرکزش z_0 است (شکل ۳۱۱) را در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت بیابید.

حل. C را می توان به صورت

$$z(t) = z_0 + \rho(\cos t + i \sin t) = z_0 + \rho e^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

ارائه داد. در این صورت می یابیم

$$(z - z_0)^m = \rho^m e^{imt}, \quad dz = i \rho e^{it} dt.$$

و از آنجا

$$\oint_C (z - z_0)^m dz = \int_0^{2\pi} \rho^m e^{imt} i \rho e^{it} dt = i \rho^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt.$$

با استفاده از فرمول اوایلر (۵) بخش ۱۲. ۶ طرف راست فرمول فوق برابر است با

$$i \rho^{m+1} \left[\int_0^{2\pi} \cos(m+1)t dt + i \int_0^{2\pi} \sin(m+1)t dt \right].$$

به ازای $m = -1$ داریم $\rho^{m+1} = 1$ ، $\cos 0 = 1$ ، $\sin 0 = 0$ و حاصل عبارت فوق برابر $2\pi i$ است.

به ازای هر عدد صحیح $m \neq -1$ مقدار هر دو انتگرال فوق برابر صفر می شوند. بنابراین داریم

$$\oint_C (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i & (m = -1), \\ 0 & (m \neq -1 \text{ صحیح}). \end{cases} \quad (3)$$

وابسته به مسیر. حال به مهمترین واقعیت رسیدیم. هرگاه انتگرال تابع f با ضابطه $f(z)$ از یک نقطه z_0 تا نقطه z_1 در طول مسیرهای متمایز مفروض باشند، عموماً انتگرالها دارای مقادیر متمایزی خواهند بود. به بیان دیگر، انتگرال روی خط مختلط نه فقط به نقاط انتهایی مسیر، بلکه عموماً به خود مسیر نیز وابسته است. مثال بعدی این موضوع را روشن می کند.

مثال ۳. انتگرال یک تابع غیرتحلیلی. وابسته به مسیر

انتگرال $f(z) = \operatorname{Re} z = x$ از 0 تا $1+i$ را برای مسیرهای زیر بیابید.

(الف) در طول مسیر C^- ترسیم شده در شکل ۳۱۲.

(ب) در طول مسیر C که از مسیرهای C_1 و C_2 تشکیل شده است.

حل. (الف) C^- را می توان به صورت

$$z(t) = t + it \quad (0 \leq t \leq 1)$$

نمایش داد. با توجه به آن می توان نوشت

$$f[z(t)] = z(t) = t, \quad \dot{z}(t) = 1 + i.$$

و از آنجا

$$\int_{C^-} \operatorname{Re} z \, dz = \int_0^1 t(1+i) \, dt = \frac{1}{2}(1+i).$$

(ب) C_1 را می توان به صورت

$$z(t) = t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

نمایش داد. لذا بر C_1 می یابیم

$$f[z(t)] = x(t) = t, \quad \dot{z}(t) = 1.$$

همچنین C_2 را می توان به شکل

$$z(t) = 1 + it \quad (0 \leq t \leq 1).$$

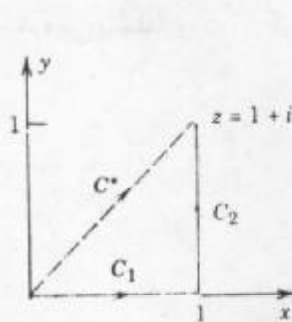
نمایش داد. بنابراین بر C_2 داریم

$$f[z(t)] = x(t) = 1, \quad \dot{z}(t) = i.$$

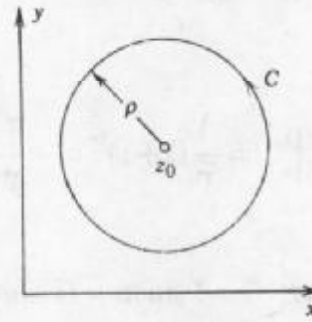
با استفاده از (۷) بخش ۱۳.۱ می یابیم

$$\int_C \operatorname{Re} z \, dz = \int_{C_1} \operatorname{Re} z \, dz + \int_{C_2} \operatorname{Re} z \, dz = \int_0^1 t \, dt + \int_0^1 1 \cdot i \, dt = \frac{1}{2} + i.$$

مشاهده می کنیم که این نتیجه با نتیجه حاصل از (الف) تفاوت دارد.



شکل ۳۱۲. مسیرهای مثال ۳



شکل ۳۱۱. مسیر مثال ۲

روش دوم: انتگرالگیری نامعین

در حساب دیفرانسیل و انتگرالهای حقیقی، چنانچه به ازای یک $f(x)$ پیوسته مفروض، $F(x)$ را طوری بیابیم که $F'(x) = f(x)$ ، در آن صورت بنا به اولین قضیه بنیادی؛ انتگرال به صورت زیر محاسبه می شود

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad [F'(x) = f(x)].$$

این روش را در قضیه بعدی تحت شرایطی برای توابع تحلیلی مختلط تعمیم می دهیم، و دقیقاً مشابه با روش بحث شده در حساب انتگرال حقیقی می باشد. در بحث زیر تابع $F(z)$ را طوری می یابیم که مشتق $F'(z)$ برابر با تابع مفروض $f(z)$ باشد. اغلب فرمولهای مشتقگیری توابع حقیقی در یافتن $F(z)$ به کار گرفته می شود.

قضیه ۲ (انتگرالگیری نامعین توابع تحلیلی)

هرگاه $f(z)$ در دامنه همبند ساده D^+ تحلیلی باشد، آنگاه انتگرال نامعینی از $f(z)$ در دامنه D وجود دارد، یعنی، تابعی تحلیلی ای مانند $f(z)$ وجود دارد به طوری که در D ، $F'(z) = f(z)$ ، و برای هر مسیر در D که دو نقطه z_0 و z_1 از D به هم وصل می کند داریم

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0) \quad [F'(z) = f(z)]. \quad (۴)$$

(توجه کنید که به جای نوشتن منحنی C در زیر علامت انتگرال می توان از z_0 تا z_1 انتگرالگیری کرد زیرا مقدار انتگرال از مسیر انتگرالگیری مستقل است.)

این قضیه در بخش ۱۳. ۴ (با استفاده از قضیه انتگرال کوشی، که در بخش بعدی بحث می شود) اثبات خواهد شد.

۴- D را همبند ساده نامند اگر هر منحنی بسته ساده واقع در D (یعنی، منحنی بسته ای در D که خود را قطع نمی کند) فقط شامل نقاط D باشد.

اگر $f(z)$ نام باشد (ر. ک. بخش ۱۲. ۶)، می توان بجای ناحیه D صفحه مختلط (که مطمئناً همبند ساده می باشد) را به کار گرفت.

مثال ۴.

$$\int_0^{1+i} z^r dz = \frac{1}{r+1} z^{r+1} \Big|_0^{1+i} = \frac{1}{r+1} (1+i)^{r+1} = -\frac{2}{r+1} + \frac{2}{r+1} i.$$

مثال ۵.

$$\int_{-\pi i}^{\pi i} \cos z dz = \sin z \Big|_{-\pi i}^{\pi i} = 2 \sin \pi i = 2i \sinh \pi = 23/097i.$$

مثال ۶.

$$\int_{\lambda+\pi i}^{\lambda-2\pi i} e^z dz = 2e^z \Big|_{\lambda+\pi i}^{\lambda-2\pi i} = 2(e^{\lambda-2\pi i} - e^{\lambda+\pi i}) = 0.$$

زیرا e^z متناوب با دوره تناوب $2\pi i$ می باشد.

مثال ۷.

$$\int_{-1}^1 \frac{dz}{z} = \text{Ln} i - \text{Ln}(-i) = \frac{i\pi}{2} - \left(-\frac{i\pi}{2}\right) = i\pi.$$

در اینجا D ، صفحه مختلط بجز صفر و محور حقیقی منفی (که در این نقاط $\text{Ln} z$ تحلیلی نیست)، که به وضوح یک دامنه همبند ساده است، می باشد.

مثال ۸. همبند ساده بودن دامنه در قضیه ۲ ضروری است.

در معادله (۴) با قرار دادن $z_1 = z_0$ می یابیم $F(z_0) - F(z_0) = 0$ ؛ یعنی انتگرال در طول هر منحنی بسته صفر است اما (ر. ک. مثال ۱)

$$\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i \quad (\text{روی دایره واحد در جهت عکس عقربه های ساعت})$$

گرچه $\frac{1}{z}$ در طوق $\frac{1}{2} < z < \frac{3}{2}$ تحلیلی است؛ ولی این دامنه همبند ساده نیست.

کرانی برای قدر مطلق انتگرالها

اغلب اوقات لازم است که قدر مطلق انتگرال روی خط مختلط را تخمین بزنیم. فرمول اساسی عبارت است از

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML \quad (5) \quad (\text{نامساوی ML})$$

که در آن L طول مسیر C و M عدد ثابتی است که در هر نقطه z از C ، $|f(z)| \leq M$.

اثبات. بنا به (۲) بخش ۱۳. ۱ مجموع S_n را در نظر می گیریم. بنا به نامساوی مثلثی تعمیم یافته (۶)

بخش ۲۰۱۲ می یابیم

$$|S_n| = \left| \sum_{m=1}^n f(\zeta_m) \Delta z_m \right| \leq \sum_{m=1}^n |f(\zeta_m)| |\Delta z_m| \leq M \sum_{m=1}^n |\Delta z_m|.$$

که در آن $|\Delta z_m|$ طول وتری است که نقاط انتهایی آن z_m و z_{m-1} می باشند، به شکل ۳۰۹ بخش ۱.۱۳ مراجعه کنید. از اینرو، L° ، مجموع طرف راست طول خط شکسته ای مرکب از پاره خطهایی است که نقاط انتهایی آنها z_0, z_1, \dots, z_n می باشند. هرگاه n طوری به سمت بینهایت میل کند که بزرگترین $|\Delta z_m|$ به سمت صفر میل کند (مانند بخش ۱.۱۳). آنگاه بنا به تعریف طول منحنی، L° به سمت L طول منحنی C ، میل می کند. از این موضوع نامساوی (۵) نتیجه می شود.

از روی (۵) نمی توان گفت که قدر مطلق انتگرال چقدر به ML نزدیک است و مقدار واقعی آن چقدر است. اما این موضوع سبب نمی شود که در کاربردهایی از (۵) چنانچه خواهیم دید استفاده نکنیم، در هر صورت چگونگی انجام کار را با ارائه یک مثال روشن می کنیم.

مثال ۹. تخمین یک انتگرال

مطلوب است محاسبه کران بالای قدر مطلق انتگرال

$$\int_C z^2 dz$$

که در آن C یک پاره خط از 0 تا $1+i$ می باشد.

حل. باتوجه به اینکه $L = \sqrt{2}$ و بر C ، $|f(z)| = |z^2| \leq 2$ و بنابر (۵) می یابیم

$$\left| \int_C z^2 dz \right| \leq 2\sqrt{2} = 2/8284.$$

قدر مطلق انتگرال برابر است با (ر. ک. مثال ۴)

$$\left| -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i \right| = \frac{2}{3}\sqrt{2} = 0/9428.$$

مسائل بخشهای ۱.۱۳ و ۲.۱۳

مطلوب است نمایش $Z = Z(t)$ از پاره خط با نقاط انتهایی

۱. $z = 0$ و $z = 1 + 2i$

۲. $z = -3 + 2i$ و $z = -4 + 5i$

۳. $z = 4 + 2i$ و $z = 3 + 5i$

۴. $z = 0$ و $z = 5 + 10i$

۵. $z = -4i$ و $z = -7 + 38i$

۶. $z = 1 - i$ و $z = 9 - 5i$

۷. $(1 + 2i)t$; $0 \leq t \leq 3$

۸. $3 - it$; $-1 \leq t \leq 1$

چه منحنیهایی با توابع زیر نشان داده می شوند؟

$$2+i+3e^{it}; 0 \leq t < 2\pi. 10$$

$$1-i-2e^{it}; 0 \leq t \leq \pi. 9$$

$$t+2it^2; -2 \leq t \leq 2. 12$$

$$t+3t^2i; -1 \leq t \leq 2. 11$$

$$t+t^{-1}i; \frac{1}{2} \leq t \leq 5. 14$$

$$\cos t + 2i \sin t; -\pi < t < \pi. 13$$

منحنیهای زیر را به شکل $z = z(t)$ نمایش دهید.

$$|z-i| = 2. 16$$

$$|z-3+4i| = 4. 15$$

$$y = x^2 \text{ از } (0,0) \text{ تا } (2,4). 18$$

$$y = \frac{1}{x} \text{ از } (1,1) \text{ تا } (3, \frac{1}{3}). 17$$

$$4(x-1)^2 + 9(y+2)^2 = 36. 20$$

$$x^2 + 4y^2 = 4. 19$$

با استفاده از قضیه ۱، $\int_C f(z) dz$ را محاسبه کنید و با استفاده از قضیه ۲، نتیجه حاصل را مطابقت دهید.

$$21. f(z) = az + b, C \text{ پاره خطی است که از } -1-i \text{ تا } 1+i \text{ ادامه دارد.}$$

$$22. f(z) = e^{z^2}, C \text{ پاره خط مساله ۱.}$$

$$23. f(z) = z^2, C \text{ نیم دایره } |z| = 2 \text{ که از } -2i \text{ تا } 2i \text{ در نیمه صفحه راست واقع است.}$$

$$24. f(z) = 5z^2, C \text{ کران مثلثی با رئوس } 0, 1, i \text{ (در جهت حرکت عقربه های ساعت).}$$

$$\text{مطلوب است محاسبه } \int_C f(z) dz, \text{ که در آن}$$

$$25. f(z) = 2z^2 - z^{-2}, C \text{ دایره واحد (در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت).}$$

$$26. f(z) = \operatorname{Re} z, C \text{ سهمی } y = x^2 \text{ از } 0 \text{ تا } 1+i.$$

$$27. f(z) = \operatorname{Im} z, C \text{ دایره } |z| = r \text{ (در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت).}$$

$$28. f(z) = 4z - 3, C \text{ پاره خطی از } i \text{ تا } 1+i.$$

$$29. f(z) = (z-1)^{-1} + 2(z-1)^{-2}, C \text{ دایره } |z-1| = 4 \text{ (در جهت حرکت عقربه های ساعت).}$$

$$30. f(z) = \sin z, C \text{ پاره خطی از } 0 \text{ تا } i.$$

$$31. f(z) = e^{z^2}, C \text{ پاره خط قائم از } \pi i \text{ تا } 2\pi i.$$

$$32. f(z) = z \cos z, C \text{ هر مسیر از } 0 \text{ تا } \pi i.$$

$$33. f(z) = \cosh 3z, C \text{ هر مسیر از } \frac{\pi i}{6} \text{ تا } 0.$$

$$34. f(z) = e^z, C \text{ کران مربعی به رئوس } 0, 1, 1+i, i \text{ (در جهت حرکت عقربه های ساعت).}$$

$$35. f(z) = \operatorname{Re}(z^2), C \text{ مربع مذکور در مساله ۳۴.}$$

$$36. f(z) = \operatorname{Im}(z^2), C \text{ مربع مذکور در مساله ۳۴.}$$

$$37. f(z) = \bar{z}, C \text{ سهمی } y = x^2 \text{ از } 0 \text{ تا } 1+i.$$

۳۸. $f(z) = (z-1)^{-1} - (z-1)^{-2}$ ، C دایره $|z-1| = \frac{1}{4}$ (در جهت حرکت عقربه های ساعت)

۳۹. $f(z) = \sin^2 z$ ، C نیم دایره $|z| = \pi$ از $-\pi i$ تا πi واقع در نیمه صفحه راست.

۴۰. $f(z) = \sec^2 z$ ، C هر مسیر از $\frac{\pi i}{4}$ تا $\frac{\pi i}{4}$ در قرص واحد.

۴۱. مطلوب است محاسبه $\int_C \text{Im}(z^2) dz$ از 0 تا $2 + 4i$ در طول (الف) پاره خط، (ب) محور x تا

$2 + 4i$ و سپس به طور قائم تا $2 + 4i$ ، (ج) سهمی $y = x^2$.

۴۲. مطلوب است محاسبه $\int_C (z^{-2} + z^2) dz$ از 1 تا -1 در طول (الف) نیم دایره واحد فوقانی (ب)

نیم دایره واحد تحتانی.

۴۳. مطلوب است محاسبه $\int_C |z| dz$ از $A: z = -i$ تا $B: z = i$ در طول (الف) پاره خط AB ، (ب)

دایره واحدی که در نیمه صفحه چپ واقع است، (ج) دایره واحدی که در نیمه صفحه راست واقع است.

۴۴. فرمول (۶) بخش ۱۰.۱۳ را ثابت کنید.

۴۵. درستی فرمول (۶) بخش ۱۰.۱۳ را به ازای $3z - z^2 = k_1 f_1 + k_2 f_2$ ، که در آن C نیمه فوقانی دایره یکه از 1 تا -1 است، تحقیق کنید.

۴۶. درستی فرمول (۷) بخش ۱۰.۱۳ را در مورد $f(z) = \frac{1}{z}$ تحقیق کنید، که در آن C دایره واحد، C_1 نیمه فوقانی، و C_2 نیمه تحتانی آن می باشند.

۴۷. درستی (۸) بخش ۱۰.۱۳ را به ازای $f(z) = z^2$ در حالتی که C پاره خطی از $-1-i$ تا $1+i$ است تحقیق کنید.

با استفاده از نامساوی ML (۵)، کرانهای بالای انتگرالهای زیرین را بیابید، که در آنها C پاره خطی است که از 0 تا $3 + 4i$ ادامه دارد.

$$48. \int_C \text{Ln}(z+1) dz \quad 49. \int_C e^z dz$$

۵۰. در مساله ۴۹ با تجزیه C به دو قوس، کران بهتری برای انتگرال بیابید.

۳.۱۳ قضیه انتگرال کوشی

انتگرال روی خط تابع f نه تنها به نقاط انتهایی بلکه معمولاً به انتخاب مسیر انتگرالگیری هم بستگی دارد (ر. ک. بخش ۲.۱۳). ولی ما در این بخش با ارائه قضیه بسیار جالبی (قضیه ۲) به بررسی انتگرالهایی می پردازیم که به مسیر انتگرالگیری بستگی ندارند. یکی از قضایای مهم این بخش قضیه

انتگرال کوشی (قضیه ۱) است که بر طبق آن انتگرال برخی از توابع بر روی هر مسیر بسته، صفر است. برای بیان قضیه کوشی به دو مفهوم زیر نیاز داریم:

۱. **مسیر بسته ساده**، مسیر بسته ای است (شکل ۱۳. ۱) که خودش را قطع نکرده یا بر خودش مماس نباشد (شکل ۳۱۳). برای مثال دایره یک منحنی ساده و منحنی به شکل ۸ یک منحنی غیر ساده می باشد.



شکل ۳۱۳. مسیرهای بسته

۲. دامنه D واقع در صفحه مختلط را **دامنه همبند ساده** نامند (بخش ۱۲. ۳) اگر هر مسیر بسته ساده در D فقط شامل نقاط D باشد. دامنه ای که همبند ساده نباشد به یک ناحیه **همبند چندگانه** موسوم است. به عنوان مثال، داخل یک دایره («قرص مستدیر»)، بیضی، یا مربع همبند ساده هستند. به طور کلی داخل یک منحنی بسته ساده همبند ساده است. یک طوق (بخش ۱۲. ۳) همبند چندگانه (به بیان دقیقتر، همبند دوگانه^۵) است. در شکل ۳۱۴ مثالهای بیشتری ارائه شده اند.

یادآوری می کنیم که بنا به تعریف، تابع یک رابطه تک مقدار است (ر. ک. بخش ۱۲. ۴)، حال قضیه انتگرال کوشی را در ذیل ارائه می گردد. این قضیه را گاهی اوقات **قضیه کوشی-گورسا** نیز می نامند.

قضیه ۱. قضیه انتگرال کوشی

هرگاه $f(z)$ در دامنه کراندار همبند ساده D تحلیلی باشد، آنگاه به ازای هر مسیر بسته ساده C واقع در D (ر. ک. شکل ۳۱۵)،

$$\oint_C f(z) dz = 0. \quad (1)$$

۵- یک دامنه کراندار (یعنی، ناحیه به طور کامل در داخل دایره ای قرار داشته باشد) را همبند p گانه نامند هرگاه کران آن مرکب از p مجموعه همبند بسته که با هم هیچ نقطه مشترکی ندارند باشد. در مورد طوق داریم $p = 2$ ، زیرا کران آن از دو دایره که دارای نقطه مشترکی نیستند تشکیل شده است.

قبل از اثبات قضیه، به ارائه چند مثال برای تفهیم بهتر مطلب می پردازیم. یک مسیر بسته ساده رابعضی اوقات کانتور و انتگرال روی چنین مسیری را **انتگرال کانتور** می نامند. بنابراین، در (۱) و مثالهای زیر مسیرهای آنها کانتور می باشند.

مثال ۱. برای هر مسیر بسته C داریم

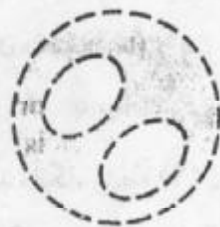
$$\oint_C e^z dz = 0, \quad \oint_C \cos z dz = 0, \quad \oint_C z^n dz = 0 \quad (n = 0, 1, \dots)$$

زیرا توابع انتگرالده انتگرالهای فوق به ازای هر z ، تحلیلی می باشند.

مثال ۲.

$$\oint_C \sec z dz = 0, \quad \oint_C \frac{dz}{z^2 + 4} = 0$$

که در آنها C دایره واحد، $\sec z = \frac{1}{\cos z}$ در نقاط $z = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$ تحلیلی نیست، اما همه این نقاط در خارج C قرار دارند؛ یعنی روی C یا داخل C قرار ندارند. برای انتگرال دوم وضعیت مشابهی وجود دارد، که تابع زیر علامت انتگرال در $z = \pm 2i$ خارج C تحلیلی نیست.



همبند سه گانه



همبند دو گانه

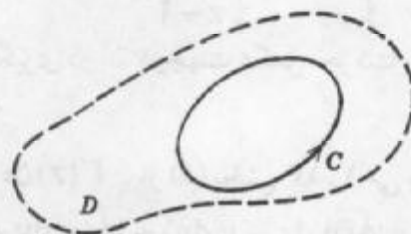


همبند ساده



همبند ساده

شکل ۳۱۴. نواحی همبند ساده و همبند چندگانه



شکل ۳۱۵. قضیه انتگرال کوشی

مثال ۳.

$$\oint_C \bar{z} dz = 2\pi i$$

(که در آن C دایره واحد و مسیر انتگرالگیری بر آن در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت است). البته نتیجه فوق دلیل بر نادرست بودن قضیه انتگرال کوشی نیست زیرا تابع $f(z) = \bar{z}$ یک تابع غیر تحلیلی است و قضیه انتگرال کوشی برای توابع تحلیلی برقرار بود و در اینجا نمی توان این قضیه را

به کار گرفت.

مثال ۴.

$$\oint_C \frac{dz}{z^2} = 0,$$

که در آن C دایره واحد است. این نتیجه از قضیه کوشی نتیجه نمی شود، زیرا $f(z) = \frac{1}{z^2}$ در $z = 0$ تحلیلی نیست. بنابراین شرط این که f در D تحلیلی باشد یک شرط کافی برای برقراری (۱) است و یک شرط لازم نیست.

مثال ۵.

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

که در آن انتگرالگیری روی دایره واحد در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت انجام گرفته است (ر. ک. بخش ۱۳. ۲). C درون طوق $\frac{3}{4} < |z| < \frac{1}{4}$ ، که در آن $\frac{1}{z}$ تحلیلی است، قرار دارد، اما این دامنه همبند ساده نیست، بنابراین از قضیه کوشی نمی توان استفاده نمود. در نتیجه شرط همبند ساده بودن دامنه D کاملاً ضروری است.

به بیان دیگر، بنا به قضیه کوشی، اگر $f(z)$ روی مسیر بسته ساده C و درون آن تحلیلی باشد، آنگاه رابطه (۱) برقرار است. مشکل در اینجا نقطه $z = 0$ است که $\frac{1}{z}$ در این نقطه تحلیلی نیست. مثال ۶. در محاسبه انتگرال زیر نخست تابع انتگرالده را به کسرهای جزئی تجزیه کرده و سپس از قضیه انتگرال کوشی استفاده کنید.

$$\oint_C \frac{\sqrt{z-6}}{z^2-2z} dz = \oint_C \frac{3}{z} dz + \oint_C \frac{4}{z-2} dz = 3 \times 2\pi i + 0 = 6\pi i$$

که در آن C دایره واحد و انتگرالگیری در آن در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت صورت پذیرفته است.

اثبات کوشی با فرض پیوسته بودن $f'(z)$. از (۵) بخش ۱۳. ۱ می یابیم

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (u dy + v dz).$$

چون $f(z)$ در D تحلیلی است، مشتق آن $f'(z)$ در D موجود می باشد. پیوسته بودن $f'(z)$ ، (۴) و (۵) بخش ۱۲. ۵ ایجاب می کنند که u و v دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته در D باشند. بنابراین

می توان از قضیه گرین (بخش ۹. ۴) (با u و $-v$ به جای F_1 و F_2) استفاده کرد و نتیجه گرفت

$$\oint_C (u dx - v dy) = \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

که در آن R ناحیه ای است که با C محصور شده است. معادله دوم کوشی - ریمان (بخش ۱۲. ۵).

نشان می دهد که انتگرال طرف راست همواره صفر است. در نتیجه انتگرال طرف چپ صفر است. به همین روش با استفاده از معادله اول کوشی - ریمان نتیجه می شود که انتگرال آخر در فرمول فوق صفر است، و بدین ترتیب اثبات کوشی به اتمام می رسد.

اثبات گورسا بدون در نظر گرفتن پیوستگی $f'(z)$ کارنسبتاً پیچیده ای است. اثبات گورسا را به متعلم واگذار می کنیم. این اثبات در ضمیمه ۴ ارائه شده است.

مستقل از مسیر، تغییر شکل مسیر

در بخش ۱۳. ۱. آموختیم که اگر انتگرال تابع f از z_1 تا z_2 را به دست آوریم. عموماً جواب حاصل نه فقط به z_1 و z_2 ، بلکه به شکل هندسی مسیر وابسته است. ولی برای توابع تحلیلی وضع چنین نیست، یعنی اگر $f(z)$ در D تحلیلی و C یک مسیر دلخواه از z_1 تا z_2 واقع در D باشد، آنگاه انتگرال $f(z)$ از z_1 تا z_2 در مسیر D وابسته نبوده بلکه تنها به z_1 و z_2 وابسته است. درستی این موضوع در قضیه زیر مورد بررسی قرار می گیرد.

قضیه ۲ (مستقل از مسیر)

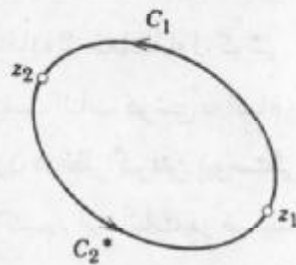
هرگاه $f(z)$ در دامنه همبند ساده D تحلیلی باشد، آنگاه انتگرال $f(z)$ مستقل از مسیر در D است.

اثبات. فرض کنید z_1 و z_2 دو نقطه دلخواه در D باشند. همانند شکل ۳۱۶، دو مسیر C_1 و C_2 در D را از z_1 تا z_2 که هیچ نقطه مشترک دیگری ندارند در نظر می گیریم. خلاف جهت مسیر C_2 را با نماد C_2^+ نمایش می دهیم (شکل ۳۱۷). انتگرال از z_1 روی C_1 تا z_2 روی C_2^+ برگشت به z_1 به دست می آوریم. مجموع دو مسیر C_1 و C_2^+ یک مسیر بسته ساده است و قضیه کوشی را می توان تحت مفروضات قضیه پیشین به کار گرفت و نتیجه گرفت

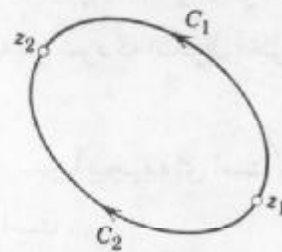
$$\oint_{C_1} f dz = -\oint_{C_2^+} f dz \quad \text{وازا آنجا} \quad \oint_{C_1} f dz + \oint_{C_2^+} f dz = 0 \quad (2')$$

۶- ادوارد گورسا EDOUARD GOURSAT (۱۸۵۸ - ۱۹۳۶)، ریاضیدان فرانسوی است. کوشی قضیه خود را در سال ۱۸۲۵ منتشر کرد. رفع این شرط توسط گورسا کاملاً مهم است (مقاله زیر را ببینید).

(Transactions Amer. Math. Soc., Vol. 1, 1900)، به عنوان مثال، در ارتباط با این واقعیت که مشتقات توابع تحلیلی نیز تحلیلی است، که در آینده بحث خواهد شد. گورسا همچنین کار بسیار اساسی در معادلات با مشتقات جزئی انجام داده است.



شکل ۳۱۷. فرمول (۲)

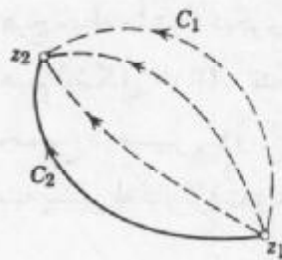


شکل ۳۱۶. فرمول (۲)

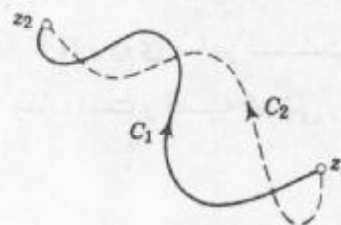
هرگاه جهت انتگرالگیری در طول z_1 تا z_2 را عوض کنیم، آنگاه مقدار انتگرال در -1 ضرب می شود که بنابراین انتگرال $f(z)$ بر C_1 و بر C_2 باهم برابرند، یعنی (شکل ۳۱۹)

$$\oint_{C_1} f dz = \oint_{C_2} f dz . \tag{۲}$$

توجه کنید که اثبات قضیه فوق برای مسیرهایی ارائه شده است که تنها در نقاط انتهایی مشترک هستند. برای مسیرهایی که دارای تعداد متناهی نقاط مشترک باشند، قضیه را می توان برای هر حلقه به کار گرفت و نتیجه گرفت که قضیه برای چنین مسیرهایی نیز برقرار است (شکل ۳۱۸). ولی برای مسیرهایی که دارای بینهایت نقطه مشترک هستند اثبات به سادگی صورت نمی پذیرد و برای اثبات قضیه نیاز به مفروضات اضافی دارند که از بحث ما بیرون است.



شکل ۳۱۹. تغییر شکل پیوسته مسیر



شکل ۳۱۸. مسیرهایی با تعدادی نقاط مشترک

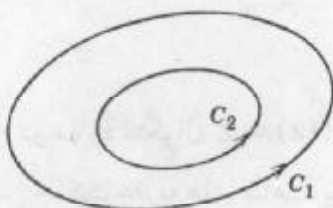
اصل تغییر شکل مسیر. انگیزه مستقل از مرز بودن نتیجه زیر را به دست می دهد. می توان تصور کرد که مسیر C_2 در (۲) از روی مسیر C_1 با یک تغییر شکل پیوسته به دست آمده است. (شکل ۳۱۹) دو تا از این مسیرهایی مابین تعداد نامتناهی مسیر را نشان می دهد. نتیجه می گیریم که در یک انتگرال می توانیم تغییر شکل پیوسته ای به مسیر انتگرالگیری بدهیم (نقاط انتهایی را ثابت نگه می داریم)؛ تا زمانی مسیر تغییر شکل یافته از نقطه ای که در آن $f(z)$ تحلیلی نیست نگذرد، مقدار انتگرال روی خط تحت تغییر شکل تغییر نمی کند. این مطلب به اصل تغییر شکل مسیر موسوم می باشد.

قضیه کوشی برای دامنه های همبند چندگانه

قضیه کوشی را می توان برای دامنه های همبند چندگانه نیز به کار گرفت . ابتدا این قضیه را برای دامنه همبند دوگانه D که با منحنی بیرونی C_1 و داخلی C_2 (شکل ۳۲۰) محصور می باشد را شرح می دهیم . هرگاه $f(z)$ در هر دامنه D^* ، که شامل D به عنوان منحنیهای کرانه ای است تحلیلی باشد، آنگاه داریم که (شکل ۳۲۰)

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz, \tag{۳}$$

که هر دو انتگرال در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت محاسبه می شوند . اثبات . بنابر برشهای \tilde{C}_1 و \tilde{C}_2 (شکل ۳۲۱) ، D را به دو دامنه همبند ساده D_1 و D_2 که در آنها و بر کرانه هایشان تحلیلی است . بنا به قضیه انتگرال کوشی روی سراسر کران D_1 (درجهتی که در شکل ۳۲۱ با پیکان نشان داده شده است) ، و همچنین روی کران D_2 ، همین طور جمع آنها برابر صفر است . در این مجموع ، انتگرالها روی برشهای \tilde{C}_1 و \tilde{C}_2 با هم حذف می شود زیرا انتگرال روی آنها

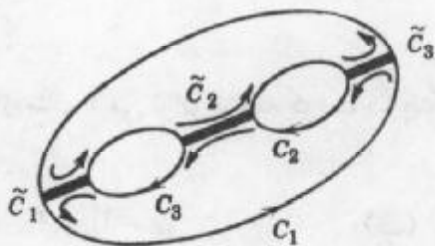


شکل ۳۲۰. مسیرها در (۳)

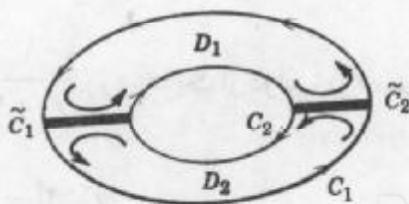
در هر دو جهت مختلف محاسبه شده است و انتگرالگیری روی C_1 در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت و بر C_2 در جهت حرکت عقربه های ساعت (ر.ک. شکل ۳۲۱) صورت می پذیرد . از اینرو با تغییر جهت انتگرالگیری روی C_2 داریم

$$\oint_{C_1} f dz - \oint_{C_2} f dz = 0$$

و (۳) نتیجه می شود و بدین طریق قضیه به پایان می رسد .



شکل ۳۲۲. دامنه همبند سه گانه



شکل ۳۲۱. دامنه همبند دوگانه

در مورد دامنه های همبند بالاتر اثبات قضیه بر همین منوال می باشد. مثلاً برای دامنه همبند سه گانه از سه برش \tilde{C}_1 ، \tilde{C}_2 ، و \tilde{C}_3 استفاده می شود (شکل ۳۲۲). با جمع کردن انتگرالها، انتگرالها روی برشها، همانند قبل، حذف می شود و مجموع انتگرالها روی C_1 (در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت) و C_2 ، C_3 (در جهت حرکت عقربه های ساعت) صفر می باشند. لذا انتگرال روی C_1 با مجموع انتگرالها روی C_2 و C_3 برابر است، که در آنها هر سه جهت منحنی در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت در نظر گرفته شده اند.

مثال ۷. یک نتیجه اساسی: انتگرال توانهای صحیح

از (۳) و مثال (۲) بخش ۲.۱۳، نتیجه می گیریم که

$$\oint_C (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i & (m = -1) \\ 0 & (m \neq -1 \text{ و عدد صحیح}) \end{cases}$$

در اینجا C مسیر بسته ساده ای است که نقطه z_0 درون آن قرار دارد و انتگرالگیری در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت صورت می پذیرد.

مسائل بخش ۳.۱۳

۱. درستی قضیه انتگرال کوشی را در مورد انتگرال $f(z) = z^2$ روی کران مستطیلی بارئوس -1 ، $1+i$ ، $1+i$ ، $-1+i$ که در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت پیموده می شود، تحقیق کنید.
۲. درستی قضیه (۲) را با انتگرالگیری از $\sin z$ از 0 تا $(1+i)\pi$ در موارد زیر اثبات کنید. (الف) روی قطعه ای از 0 تا $(1+i)\pi$ تحقیق کنید. (ب) روی محور x ها تا π و آنگاه مستقیم بالا تا $(1+i)\pi$.
۳. درستی نتیجه مثال ۳ را تحقیق کنید.
۴. برای کدام کانتور C درستی تساویهای زیر از قضیه کوشی حاصل می شود.

$$\oint_C \frac{e^z}{z^2 + 9} dz = 0 \quad (\text{پ}) \quad \oint_C \frac{\cos z}{z^2 - z^2} dz = 0 \quad (\text{ب}) \quad \oint_C \frac{dz}{z} = 0 \quad (\text{الف})$$

۵. آیا از صفر بودن انتگرال در مثال ۴ می توان نتیجه گرفت که این انتگرال روی کانتور مساله ۱ نیز صفر است؟

۶. آیا از مثال ۲ می توان نتیجه گرفت که انتگرال $\frac{1}{z^2 + 4}$ روی هر یک از دوائر زیر صفر است؟ دلیل بیاورید.

$$|z - 2| = 3 \quad (\text{ب}) \quad |z - 2| = 2 \quad (\text{الف})$$

در هر مورد مقدار انتگرال $f(z)$ را روی یک دایره واحد در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت

بیاید. آیا قضیه کوشی را می توان برای آنها به کار گرفت؟ چرا؟

$$f(z) = \operatorname{Im} z \quad .9 \quad f(z) = e^{z^2} \quad .8 \quad f(z) = |z| \quad .7$$

$$f(z) = \frac{1}{\pi z - 3} \quad .12 \quad f(z) = \frac{1}{z} \quad .11 \quad f(z) = \frac{1}{2z - 5} \quad .10$$

$$f(z) = \bar{z}^2 \quad .15 \quad f(z) = \bar{z} \quad .14 \quad f(z) = \tan z \quad .13$$

$$f(z) = z^2 \sec z \quad .18 \quad f(z) = \frac{1}{z^2 + 2} \quad .17 \quad f(z) = \frac{1}{|z|^2} \quad .16$$

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید (راهنمایی: در صورت لزوم، تابع زیر علامت انتگرال را به صورت کسرهای جزئی بنویسید).

$$C, \oint_C \frac{dz}{z-i} \quad .19 \quad (|z|=2 \text{ دایره } |z|=2 \text{ در جهت عکس عقربه های ساعت})$$

$$C, \oint_C \frac{dz}{\sinh z} \quad .20 \quad (|z - \frac{1}{2}\pi i| = 1 \text{ دایره } |z - \frac{1}{2}\pi i| = 1 \text{ در جهت عکس عقربه های ساعت})$$

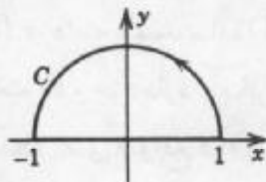
$$C, \oint_C \frac{\cos z}{z} dz \quad .21 \quad (C \text{ مرکب از } |z|=1 \text{ در جهت عکس عقربه های ساعت و } |z|=3)$$

در جهت حرکت عقربه های ساعت)

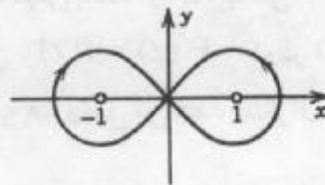
$$C, \oint_C \frac{2z-1}{z^2-z} dz \quad .22 \quad C \text{ کانتور در شکل ۳۲۳}$$

$$C, \oint_C \frac{dz}{z^2-1} \quad .23 \quad C \text{ کانتور در شکل ۳۲۴}$$

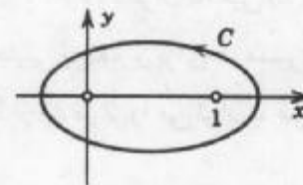
$$C, \oint_C \operatorname{Re} z dz \quad .24 \quad C \text{ کانتور در شکل ۳۲۵}$$



شکل ۳۲۵. مساله ۲۴



شکل ۳۲۴. مساله ۲۳



شکل ۳۲۳. مساله ۲۲

$$C, \oint_C \frac{dz}{z^2+1} \quad .25 \quad \text{عبارت است از دایره } (الف) |z+i|=1, (ب) |z-i|=1 \text{ در جهت عکس}$$

عقربه های ساعت)

$$C, \oint_C \frac{\sin z}{z+3i} dz \quad .26 \quad (C \text{ عبارت است از دایره } |z-2+3i|=1 \text{ در جهت عکس عقربه های}$$

ساعت)

۲۷. $\oint_C \frac{2z+1}{z^2+z} dz$ عبارت است از (الف) $|z| = \frac{1}{4}$ ، (ب) $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{4}$ (ج) $|z| = 2$ (در جهت حرکت عقربه های ساعت)

۲۸. $\oint_C \frac{dz}{1+z^2}$ عبارت است از دایره $|z+1|=1$ (در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت)

۲۹. $\oint_C \frac{3z+1}{z^2-z} dz$ عبارت است از دایره (الف) $|z| = \frac{1}{4}$ ، (ب) $|z| = 2$ (در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت)

۳۰. $\oint_C \operatorname{Re}(z^2) dz$ کران مثلثی با رئوس $0, 2, 1+i$ می باشد (در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت)

۴.۱۳ وجود انتگرال نامعین

در این بخش مختصر با استفاده از قضیه انتگرال کوشی وجود انتگرال نامعین $F(z)$ از تابع تحلیلی مفروض $f(z)$ را ثابت می کنیم. به موجب این قضیه می توان انتگرالهای روی خط را با انتگرالهای نامعین محاسبه کرد و با جایگذاری حدود انتگرالگیری می یابیم (ر. ک. بخش ۱۳. ۲)

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0) \quad [F'(z) = f(z)] \quad (۱)$$

که در آن $F(z)$ انتگرال نامعین $f(z)$ است، یعنی، همانطوری که اشاره شد $F'(z) = f(z)$. در اغلب کاربردها تابع $F(z)$ را می توان از روی فرمولهای مشتقگیری به دست آورد.

قضیه ۱ (وجود انتگرال نامعین)

هرگاه $f(z)$ در دامنه همبند ساده D تحلیلی باشد (ر. ک. بخش ۱۳. ۳)، آنگاه انتگرال نامعین $F(z)$ از $f(z)$ در دامنه D وجود دارد - بنابراین، $F'(z) = f(z)$ - که در D تحلیلی بوده، و برای هر مسیری در D که دو نقطه z_0 و z_1 واقع در D را به هم وصل می کند، انتگرال $f(z)$ از z_0 تا z_1 را می توان با فرمول (۱) محاسبه نمود.

اثبات. اگر شرایط قضیه انتگرال کوشی برقرار می باشند، آنگاه انتگرال روی خط تابع f از z_0 تا هر z مستقل از مسیر واقع در D می باشد. اگر z_0 را ثابت فرض کنیم، آنگاه این انتگرال که تابعی از z است به $F(z)$ نمایش می دهیم

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z^*) dz^* \quad (۲)$$

این انتگرال به طور یکتا مشخص می شود. نشان می دهیم که $F(z)$ در D تحلیلی است و $F'(z) = f(z)$. چگونگی انجام این کار به شرح زیر می باشد. نخست نسبت تفاضلی زیر را تشکیل

می دهیم

$$\begin{aligned} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z} \left[\int_{z_0}^{z + \Delta z} f(z^*) dz^* - \int_{z_0}^z f(z^*) dz^* \right] \\ &= \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(z^*) dz^*. \end{aligned} \quad (3)$$

سپس با کم کردن $f(z)$ از طرفین (۳) نشان می دهیم که عبارت حاصل وقتی $\Delta z \rightarrow 0$ ، به سمت صفر میل می کند. جزئیات کار در زیر ارائه شده اند.

z را ثابت فرض می کنیم. با این فرض $z + \Delta z$ در D طوری انتخاب می کنیم که پاره خطی که نقاط انتهایی آن z و $z + \Delta z$ است در D قرار داشته باشد (شکل ۳۲۶). این مطلب شدنی است زیرا D یک دامنه است، بنابراین شامل یک همسایگی از z می باشد. این پاره خط را به عنوان یک مسیر انتگرالگیری در (۳) در نظر می گیریم. به علت ثابت بودن z و از آنجا $f(z)$ می توان نوشت

$$\int_z^{z + \Delta z} f(z) dz^* = f(z) \int_z^{z + \Delta z} dz^* = f(z) \Delta z.$$

از اینرو

$$f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(z) dz^*.$$

بنا به این لم و از (۳) انتگرال یکتای زیر به دست می آید

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} [f(z^*) - f(z)] dz^*.$$

چون $f(z)$ تحلیلی است، پس پیوسته است. در نتیجه به ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض، عددی مانند $\delta > 0$ می توان یافت به طوری که از $|z^* - z| < \delta$ نامساوی $|f(z^*) - f(z)| < \varepsilon$ حاصل شود.

بنابراین، با فرض $|\Delta z| < \delta$ ، مشاهده می کنیم که نامساوی ML (بخش ۲.۱۳) به صورت زیر در می آید

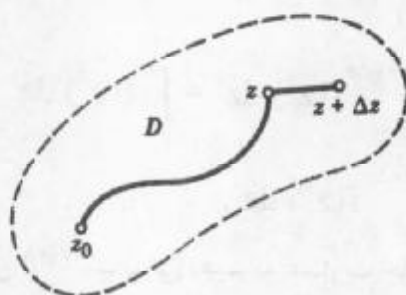
$$\left| \frac{f(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_z^{z + \Delta z} [f(z^*) - f(z)] dz^* \right| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \varepsilon |\Delta z| = \varepsilon.$$

بنا به تعریف حد و مشتق، این موضوع نشان می دهد که

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z).$$

چون z در D یک نقطه دلخواه می باشد، بنابراین $F(z)$ در D تحلیلی بوده، و انتگرال نامعین یا تابع اولیه $f(z)$ در D می باشد. این انتگرال نامعین چنین نوشته می شود

$$F(z) = \int f(z) dz.$$



شکل ۳۲۶. مسیر انتگرالگیری

همچنین، هرگاه $G'(z) = f(z)$ ، آنگاه در D ، $F'(z) - G'(z) = 0$ ؛ در نتیجه $F(z) - G(z)$ در D ثابت است (ر. ک. مساله ۲۹ در مسائل بخش ۱۲. ۵). یعنی، دو انتگرال نامعین تابع $f(z)$ تنها یک مقدار ثابت باهم تفاوت دارند. بنابراین در (۱) می توان از هر انتگرال نامعین $f(z)$ استفاده کرد. بدین طریق قضیه به اثبات می رسد.

مثالهای انتگرال نامعین و مسائل اضافی در بخش ۱۳. ۲ ارائه شده اند.

مسائل بخش ۱۳. ۴

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$\int_0^{\pi} e^z dz$. ۳	$\int_0^{1+i} z^2 dz$. ۲	$\int_i^{2+i} z dz$. ۱
$\int_{-i}^i \sin z dz$. ۶	$\int_{-\pi}^{\pi} e^{z^2} dz$. ۵	$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 z dz$. ۴
$\int_0^i \sinh \pi z dz$. ۹	$\int_{-\pi}^{\pi} \cos z dz$. ۸	$\int_{\frac{\pi}{6}}^0 \cosh^3 z dz$. ۷
$\int_{\pi i}^0 z \cos z dz$. ۱۲	$\int_{-1}^1 z \cosh z^2 dz$. ۱۱	$\int_{\pi}^{\pi i} \sin^2 z dz$. ۱۰
$\int_i^{\pi i} (z^2 - 1)^2 dz$. ۱۵	$\int_{1+i}^1 z^2 e^{z^2} dz$. ۱۴	$\int_1^i ze^{z^2} dz$. ۱۳

۵. ۱۳ فرمول انتگرال کوشی

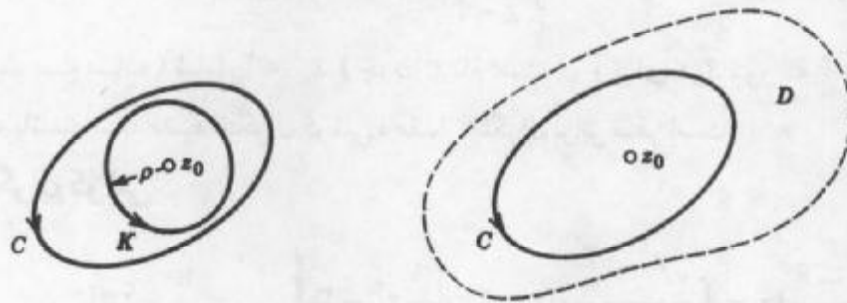
مهمترین نتیجه قضیه انتگرال کوشی فرمول انتگرال کوشی است. این فرمول برای محاسبه انتگرالها (مثالهای ذیل) مفید است. نکته حائز اهمیت آن است که از فرمول انتگرال کوشی یکی از جالبترین نتایج در توابع تحلیلی حاصل می شود. بر طبق این قضیه می توان نشان داد که یک تابع تحلیلی از هر مرتبه دارای مشتق است (۱۳. ۶). این نتیجه در اثبات نمایش به صورت سری تیلور (بخش ۱۴. ۴) و سایر موارد مفید است. فرمول انتگرال کوشی و اثبات آن به شرح زیر ارائه می گردد.

قضیه ۱ (فرمول انتگرال کوشی)

فرض کنید $f(z)$ در دامنه همبند ساده D تحلیلی باشد. آنگاه به ازای هر نقطه z_0 و هر مسیر بسته ساده C واقع در D که z_0 را شامل باشد (شکل ۳۲۷)،

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \quad (۱) \text{ و (فرمول انتگرال کوشی)}$$

که در آن انتگرالگیری در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت انجام می گیرد.



شکل ۳۲۷ . فرمول انتگرال کوشی

شکل ۳۲۸ . اثبات فرمول انتگرال کوشی

اثبات. با نوشتن $f(z) = f(z_0) + [f(z) - f(z_0)]$ و با جایگزینی در طرف چپ فرمول (۱) و با توجه به اینکه ضریب ثابت $f(z_0)$ را می توان از زیر علامت انتگرال خارج کرد، می یابیم

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \oint_C \frac{dz}{z - z_0} + \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz. \quad (۲)$$

از مثال ۷ بخش ۱۳. ۳، با $m = -1$ ، می یابیم که جمله اول طرف راست برابر $2\pi i f(z_0)$ است. بنابراین (۱) وقتی برقرار است که انتگرال دوم در (۲) صفر باشد. حال چگونگی صفر شدن آن را نشان می دهیم. تابع زیر علامت این انتگرال، بجز در z_0 ، تحلیلی است. لذا بنا به اصل تغییر شکل مسیر (بخش ۱۳. ۳) می توان C را با دایره کوچک K به شعاع ρ و به مرکز z_0 بدون آنکه مقدار انتگرال تغییر کند، عوض کرد (شکل ۳۲۸)، چون $f(z)$ تحلیلی است، لذا پیوسته است. بنابراین به ازای هر $\epsilon > 0$ مفروض، عددی مانند $\sigma > 0$ موجود است به طوری که به ازای هر z از قرص $|z - z_0| < \delta$ داشته باشیم $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. اگر ρ ، شعاع دایره K را کوچکتر از δ انتخاب کنیم، آنگاه در هر نقطه از K نامساوی

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{\epsilon}{\rho}$$

را داریم. محیط دایره K برابر $2\pi\rho$ است. از اینرو، بنا بر نامساوی ML از بخش ۱۳. ۲ به صورت

$$\left| \oint_K \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| < \frac{\epsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = 2\pi\epsilon.$$

چون می‌توانیم $\epsilon (> 0)$ را هر قدر که بخواهیم کوچک اختیار کنیم، نتیجه می‌گیریم که آخرین انتگرال در طرف راست (۲) دارای مقدار صفر است. و بدین‌طریق قضیه به اثبات می‌رسد.

مثال ۱. فرمول انتگرال کوشی

$$\oint_C \frac{e^z}{z-2} dz = 2\pi i e^z \Big|_{z=2} = 2\pi i e^2$$

برای هر کانتور (مسیر بسته ساده) شامل $z_0 = 2$ (چون e^z تام است)، و برای هر کانتور که $z_0 = 2$ در خارج آن قرار گرفته باشد، بنا به قضیه انتگرال کوشی، مقدار انتگرال برابر صفر است.

مثال ۲. فرمول انتگرال کوشی

$$\oint_C \frac{z^2 - 6}{z - i} dz = \oint_C \frac{\frac{1}{2}z^2 - 3}{z - \frac{1}{2}i} dz = 2\pi i \left[\frac{1}{2}z^2 - 3 \right]_{z=\frac{1}{2}i} = \frac{\pi}{8} - 6\pi i$$

(نقطه $z_0 = \frac{1}{2}i$ در داخل C قرار دارد).

مثال ۳. انتگرالگیری روی کانتورهای مختلف

انتگرال

$$g(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}$$

در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی دایره‌ای به شعاع ۱ و به مرکز هریک از نقاط زیر را بیابید.

(الف) $z = 1$ (ب) $z = \frac{1}{2}$

(ج) $z = -1 + \frac{1}{2}i$ (د) $z = i$

حل. برای تفهیم بهتر مساله، نقاطی که در آن $g(z)$ تحلیلی نیست مشخص می‌کنیم و آنها را در داخل کانتورها مشخص می‌کنیم (شکل ۳۲۹). این نقاط -1 و 1 می‌باشند مشاهده می‌کنیم که (ب) همانند (الف) بنا به اصل تغییر شکل مسیر، یک نتیجه یکسان به دست می‌دهد. و (د)، بنا به قضیه انتگرال کوشی، برابر صفر است. ابتدا (الف) و بعد از آن (ج) را مورد بررسی قرار می‌دهیم

(الف) در اینجا $z_0 = 1$ ، در نتیجه در (۱) داریم $z - z_0 = z - 1$. بنابراین می‌نویسیم

$$g(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} = \frac{z^2 + 1}{z + 1} \frac{1}{z - 1};$$

لذا

$$f(z) = \frac{z^{\nu} + 1}{z + 1}$$

واز (۱) می یابیم

$$\oint_C \frac{z^{\nu} + 1}{z^{\nu} - 1} dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i \left[\frac{z^{\nu} + 1}{z + 1} \right]_{z=1} = 2\pi i$$

 (ج) $g(z)$ همانند قبل است، ولی $f(z)$ تغییر می کند، زیرا در اینجا باید $z_0 = -1$ (به جای

 (۱) را اختیار کرد. این مطلب ضریب $z - z_0 = z + 1$ را در (۱) نتیجه می دهد. لذا باید نوشت

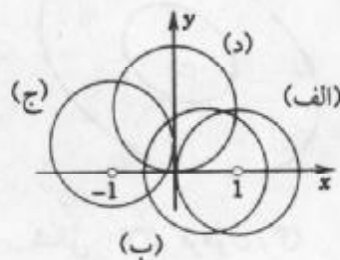
$$g(z) = \frac{z^{\nu} + 1}{z - 1} \frac{1}{z + 1}$$

بنابراین

$$f(z) = \frac{z^{\nu} + 1}{z - 1}$$

در نتیجه

$$\oint_C \frac{z^{\nu} + 1}{z^{\nu} - 1} dz = 2\pi i f(-1) = 2\pi i \left[\frac{z^{\nu} + 1}{z - 1} \right]_{z=-1} = -2\pi i$$



شکل ۳۲۹. مثال ۳

مثال ۴. استفاده از کسرهای جزئی

انتگرال $g(z) = (z^2 - 1)^{-1} \tan z$ را روی دایره $C: |z| = \frac{3}{4}$ (در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت) بیابید.

حل. $\tan z$ در نقاط $\pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}, \dots$ تحلیلی نیست، اما همه این نقاط در خارج کانتور قرار

دارند. $(z^2 - 1)^{-1} = \frac{1}{(z - 1)(z + 1)}$ نیز در نقاط ۱ و -۱ تحلیلی نیست. برای به دست آوردن

انتگرالها از صورت (۱)، با تنها یک نقطه تکین در داخل C که تابع زیر علامت انتگرال در آنجا تحلیلی نیست، از کسرهای جزئی

$$\frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right)$$

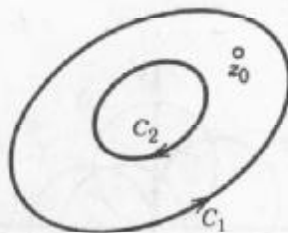
استفاده می کنیم. از این مطلب و (۱) می یابیم

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{\tan z}{z^2 - 1} dz &= \frac{1}{2} \left[\oint_C \frac{\tan z}{z-1} dz - \oint_C \frac{\tan z}{z+1} dz \right] \\ &= \frac{2\pi i}{2} [\tan 1 - \tan(-1)] = 2\pi i \tan 1 \approx 9.785i. \end{aligned}$$

در مورد دامنه های همبند چندگانه می توان مانند بخش ۱۳.۳ عمل نمود. به عنوان مثال، اگر $f(z)$ روی C_1 و C_2 و در دامنه حلقه ای شکل محصور به C_1 و C_2 (شکل ۳۳۰) تحلیلی و z_0 نقطه دلخواهی از این دامنه باشد، آنگاه

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-z_0} dz, \quad (3)$$

که در آن انتگرال خارجی (C_1 روی) در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت و داخلی در جهت حرکت عقربه های ساعت، همانطور که در شکل ۳۳۰ آمده، انجام می گیرند.



شکل ۳۳۰. فرمول (۳)

مسائل بخش ۱۳.۵

از تابع $\frac{1}{z^2 - 1}$ در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت روی هر یک از دوائر زیر انتگرال بگیرید.

$$|z+3|=1.4 \quad |z+1|=1.3 \quad |z-1|=1.2 \quad |z-i|=1.1$$

از تابع $\frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$ در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت روی هر یک از دوائر زیر انتگرال بگیرید.

$$|z+i|=1.8 \quad |z|=1.7 \quad |z-i|=1.6 \quad |z-2i|=2.5$$

از توابع زیر در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت روی دایره واحد انتگرال بگیرید.

$$\frac{e^z - 1}{z} \cdot 12$$

$$\frac{z+2}{z-2} \cdot 11$$

$$\frac{e^z}{z} \cdot 10$$

$$\frac{\cos z}{2z} \cdot 9$$

۱۳. $\frac{z^2}{2z-i}$ ، ۱۴. $\frac{\sin z}{2z}$ ، ۱۵. $(x-\pi)^{-1} \cos z$ ، ۱۶. $\frac{e^{z^2}}{3z-i}$

از توابع زیر روی کانتور داده شده C (در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت یا در جهت مشخص شده) انتگرال بگیرید.

۱۷. $C, \frac{z^2-i}{2z}$ عبارت است از دایره $|z|=3$

۱۸. $C, \frac{e^{-2\pi z}}{2z+i}$ عبارت است از کرانه مثلثی با رئوس $-1, 1, -i$

۱۹. $C, \frac{\tan z}{z-i}$ عبارت است از کرانه مثلثی با رئوس $-1, 1, 2i$

۲۰. $C, \frac{\cosh(z^2-\pi i)}{z-\pi i}$ عبارت است از بیضی دلخواهی به کانونهای 0 و πi

۲۱. $C, \frac{\text{Ln}(z-1)}{z-5}$ عبارت است از دایره $|z-4|=2$

۲۲. $C, \frac{\text{Ln}(z+1)}{z^2+1}$ مرکب از کرانه مثلثی با رئوس $1-\frac{1}{2}i, 1+\frac{1}{2}i, -1$ و $2i$ (در جهت عکس

حرکت عقربه های ساعت) و $|z|=\frac{1}{2}$ (در جهت حرکت عقربه های ساعت)

۲۳. $C, \frac{e^{z^2}}{(z-1-i)z^2}$ مرکب از $|z|=3$ (در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت) و

$|z|=1$ (در جهت حرکت عقربه های ساعت)

۲۴. $C, \frac{\sin z}{4z^2-8iz}$ مرکب از کرانه مربعی به رئوس $\pm 3, \pm 3i$ (در جهت عکس حرکت عقربه های

ساعت) و $\pm 1, \pm i$ (در جهت حرکت عقربه های ساعت)

۲۵. نشان دهید که برای هر مسیر بسته ساده C شامل z_1 و z_2 ، که نقاط دلخواه می باشند، داریم

$$\oint_C (z-z_1)^{-1}(z-z_2)^{-1} dz = 0$$

۱۳. ۶ مشتقات توابع تحلیلی

در این بخش با استفاده از فرمول انتگرال کوشی، می خواهیم نشان دهیم که یک تابع تحلیلی از هر مرتبه دارای مشتق است. این موضوع خیلی شگفت انگیز است، چنین قضیه ای در توابع حقیقی موجود نیست. در واقع، اگر یک تابع حقیقی مشتق پذیر باشد، در مورد وجود مشتقات مرتبه دوم و بالاتر نمی توان نتیجه ای گرفت. بنابراین توابع تحلیلی مختلط رفتاری ساده تر از توابع حقیقی که مشتق پذیر هستند، دارند.

قضیه ۱ (مشتقات یک تابع تحلیلی)

اگر $f(z)$ در دامنه D تحلیلی باشد، آنگاه f در D از هر مرتبه ای دارای مشتق است. همه این مشتقات نیز در D تحلیلی می باشند. مشتقات تابع $f(z)$ در نقطه ای مانند z_0 از D برابر است با

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz, \tag{۱'}$$

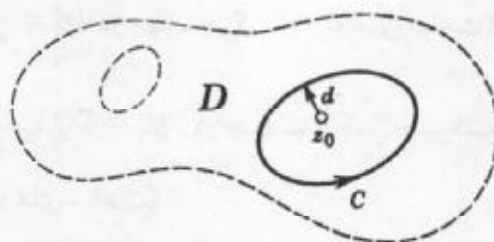
$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} dz, \tag{۱''}$$

و در حالت کلی

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \tag{۱}$$

که در آن $n = 1, 2, \dots$ ، C مسیر بسته ساده دلخواهی واقع در D است که z_0 را در بر می گیرد و منحنی C در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت پیموده می شود (شکل ۳۳۱).

تیسره: برای به خاطر سپردن (۱) بد نیست در نظر داشته باشید که این فرمول بامشتفگیری از فرمول کوشی (۱)، بخش ۱۳. ۵، در زیر علامت انتگرال نسبت به z_0 به دست می آید.



شکل ۳۳۱. قضیه ۱ و اثبات آن

اثبات قضیه ۱. (۱') را ثابت می کنیم. از تعریف زیر شروع می کنیم

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

در طرف راست رابطه فوق، با به کار بردن فرمول انتگرال کوشی برای $f(z_0 + \Delta z)$ و $f(z_0)$ عبارت فوق به صورت زیر درمی آیند

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i \Delta z} \left[\oint_C \frac{f(z)}{z - (z_0 + \Delta z)} dz - \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right]$$

با یکی کردن دو انتگرال واقع در کروشه و مخرج مشترك گرفتن تابع زیر علامت انتگرال کسر حاصل به صورت $f(z) \{ z - z_0 - [z - (z_0 + \Delta z)] \} = f(z) \Delta z$ حذف شده و می یابیم

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz.$$

حال نشان می‌دهیم که چنانچه Δz به سمت صفر میل کند (۲) حاصل می‌شود. برای انجام این کار، چنین می‌نویسیم

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz - \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz = \oint_C \frac{f(z)\Delta z}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2} dz$$

با استفاده از نامساوی ML (بخش ۱۳. ۲) نشان می‌دهیم که انتگرال طرف راست، وقتی $\Delta z \rightarrow 0$ ، به سمت صفر میل می‌کند.

برای این منظور توجه می‌کنیم که به دلیل تحلیلی بودن، تابع f بر C پیوسته است، لذا قدر مطلق آن کراندار است، یعنی عددی مثل K موجود است به طوری که به ازای هر z ، $|f(z)| \leq K$. هم اکنون فرض کنید d کوتاه‌ترین فاصله z_0 تا منحنی C باشد (ر.ک. شکل ۳۳۱)، در این صورت به ازای هر z واقع بر C داریم

$$\frac{1}{|z - z_0|^2} \leq \frac{1}{d^2} \quad \text{و از آنجا } |z - z_0| \geq d$$

علاوه بر آن، اگر $|\Delta z| \leq \frac{d}{4}$ ، آنگاه به ازای هر z از C نامساوی زیر را داریم

$$\frac{1}{|z - z_0 - \Delta z|^2} \leq \frac{1}{d^2} \quad \text{و از آنجا } |z - z_0 - \Delta z| \geq \frac{d}{4}$$

فرض کنید L طول منحنی C باشد. آنگاه بنا به نامساوی ML، اگر $|\Delta z| \leq \frac{d}{4}$ ، آنگاه

$$\left| \oint_C \frac{f(z)\Delta z}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2} dz \right| \leq K |\Delta z| \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{d^2}.$$

هرگاه $\Delta z \rightarrow 0$ ، آنگاه عبارت فوق به سمت صفر میل می‌کند و بدین طریق (۲) به اثبات می‌رسد. توجه کنید که ما از فرمول انتگرال کوشی (۱) بخش ۱۳. ۵ استفاده کرده ایم، اما اگر همه دانسته‌های ما درباره $f(z_0)$ این بود که می‌توان $f(z_0)$ را به صورت (۱)، بخش ۱۳. ۵ نمایش داد، آنگاه با توجه به آنچه گفته شد وجود مشتق $f'(z_0)$ از $f(z)$ به اثبات می‌رسید. این مطلب بنا بر پیوستگی و اتمام این اثبات ضروری است. زیرا این مطلب ایجاب می‌کند که (۱'') را می‌توان با برهان مشابه با f' به جای f ثابت کرد و فرمول کلی (۱) را به استقراء به دست آورد.

مثال ۱. محاسبه انتگرال‌های روی خط

از (۲)، به ازای هر کانتور که نقطه πi را در بر بگیرد (در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت) داریم

$$\oint_C \frac{\cos z}{(z - \pi i)^2} dz = 2\pi i (\cos z)'|_{z=\pi i} = -2\pi i \sin \pi i = 2\pi \sinh \pi .$$

مثال ۲. از (۱۳)، به ازای هر کانتور شامل نقطه i (در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت) داریم

$$\oint_C \frac{z^2 - 3z^2 + 6}{(z + i)^2} dz = \pi i (z^2 - 3z^2 + 6)'|_{z=-i} = \pi i [12z^2 - 6]|_{z=-i} = -18\pi i .$$

مثال ۳. بنابر (۱۲)، به ازای هر مسیر بسته ساده (کانتور) که نقطه 1 در داخل و نقاط $\pm 2i$ در خارج آن قرار دارند (در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت) داریم

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-1)^2(z^2+4)} dz = 2\pi i \left(\frac{e^z}{z^2+4} \right)' \Big|_{z=1} = 2\pi i \frac{e^z(z^2+4) - e^z 2z}{(z^2+4)^2} \Big|_{z=1} = \frac{6e\pi}{25} \approx i2.050i .$$

قضیه ۱ در رسیدن به نتایج کلی از توابع تحلیلی حائز اهمیت است. با استفاده از آن به اثبات عکس قضیه انتگرال کوشی می پردازیم.

قضیه مررا^۲

هر گاه $f(z)$ در دامنه همبند ساده D پیوسته باشد و همچنین به ازای هر مسیر بسته در D

$$\oint_C f(z) dz = 0, \tag{۲}$$

آنگاه $f(z)$ در D تحلیلی است.

اثبات. در بخش ۱۳. ۴ نشان دادیم که اگر $f(z)$ در D تحلیلی باشد، آنگاه

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z^*) dz^*$$

در D تحلیلی است و $F'(z) = f(z)$. برای اثبات این قضیه فقط از پیوستگی $f(z)$ و این خاصیت که انتگرال آن روی هر مسیر بسته در D صفر است استفاده کردیم و از این مفروضات نتیجه گرفتیم که $F(z)$ تحلیلی است. بنا به قضیه ۱، مشتق $F(z)$ تحلیلی است، یعنی $f(z)$ در D تحلیلی است، و قضیه مررا به اثبات می رسد.

نامساوی کوشی. قضیه ۱ نیز به نامساوی مهمی که دارای کاربردهای متنوع است منجر می گردد. برای به دست آوردن این نامساوی، در (۱) فرض می کنیم که C دایره ای به شعاع r و مرکز z_0 باشد. با بکارگیری نامساوی ML (بخش ۱۳. ۲)؛ با $|f(z)| \leq M$ بر C ، با توجه به (۱) می یابیم

۷- جیاچینتو مررا (GIACINTO MORERA) (۱۸۵۶-۱۹۰۹)، ریاضیدان ایتالیایی، که در ژنوا و تورین کار کرده است.

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} M \frac{1}{r^{n+1}} 2\pi r.$$

از نامساوی بالا نامساوی کوشی به دست می آید.

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n}. \quad (۳)$$

به عنوان اولین کاربرد مهم از این نامساوی، به اثبات یک قضیه مشهور از توابع تحلیلی (تعریف شده در بخش ۱۲. ۶) می پردازیم.

قضیه لیوویل^۸

اگر تابع تام $f(z)$ همواره به ازای هر z مطلقاً کراندار باشد، آنگاه $f(z)$ تابعی ثابت است. اثبات. با توجه به مفروضات قضیه، $|f(z)|$ کراندار است، یعنی به ازای هر z ، $|f(z)| < K$. با استفاده از (۳) داریم $|f'(z_0)| < \frac{K}{r}$. چون $f(z)$ تام است، لذا می توان r را به هر اندازه که بخواهیم بزرگ اختیار نمود و نتیجه گرفت که $f'(z_0) = 0$. چون z_0 دلخواه است، پس به ازای هر z داریم $f'(z) = 0$ ، و از آنجا $f(z)$ ثابت است (ر.ک. مساله ۲۹ در مسائل بخش ۱۲. ۵). بدین طریق قضیه به اثبات می رسد.

با ارائه قضیه فوق به پایان فصل ۱۳ می رسیم در این فصل به بحث در مورد انتگرالگیری مختلط پرداختیم. در انتگرالگیری به روش مختلط با مطالبی مواجه شدیم که متناظر با آنها در توابع حقیقی موجود نبودند. بحث بیشتر در مورد انتگرالگیری در فصل ۱۵، که فصل ۱۴ پایه و اساس برای آن است، ارائه می شود.

مسائل بخش ۱۳. ۶

از توابع زیر در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت روی دایره $|z| = ۲$ انتگرال بگیرید. (n در مسائل ۱۰ و ۱۲ تا ۱۵ عددی صحیح و مثبت است. a در مسائل ۱۲ و ۱۶ یک عدد دلخواه می باشد.

$\frac{\cos z}{z^2}$. ۴	$\frac{e^{\pi z}}{z^2}$. ۳	$\frac{z^2}{(z-i)^2}$. ۲	$\frac{z^2}{(z-3i)^2}$. ۱
$\frac{\sin \pi z}{z^2}$. ۸	$\frac{z^2}{(z+1)^2}$. ۷	$\frac{e^{z^2}}{(z-1)^2}$. ۶	$\frac{\cos z}{z^2}$. ۵
$\frac{e^{az}}{z^{n+1}}$. ۱۲	$\frac{e^{z^2}}{z^2}$. ۱۱	$\frac{e^z}{z^n}$. ۱۰	$\frac{e^z \sin z}{z^2}$. ۹

$$\frac{\sinh z}{z^r} \cdot ۱۶ \quad \frac{\cos z}{z^{2n}} \cdot ۱۵ \quad \frac{\sin z}{z^{2n}} \cdot ۱۴ \quad \frac{z^n}{(z+1)^{n+1}} \cdot ۱۳$$

از $f(z)$ روی کانتور C (در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت یا در جهت مشخص شده) انتگرال بگیرید.

$$۱۷. f(z) = z^{-r} \tan \pi z \text{ ، } C \text{ بیضی دلخواه با کانونهای } \pm i$$

$$۱۸. f(z) = z^{-r} e^{\frac{z}{2}} \text{ ، } C \text{ دایره } |z-1-i| = ۲$$

$$۱۹. f(z) = \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^{-r} \cot z \text{ ، } C \text{ کرانه مثلثی با رئوس } \pm i \text{ و } ۲$$

$$۲۰. f(z) = (z-4)^{-r} \operatorname{Ln} z \text{ ، } C \text{ دایره } |z-5| = ۳$$

$$۲۱. f(z) = \frac{e^{z^r}}{z(z-2i)^r} \text{ ، } C \text{ کرانه مربعی با رئوس } \pm 3 \pm 3i \text{ (در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت) و } |z|=۱$$

$$۲۲. f(z) = \frac{\operatorname{Ln}(z+3) + \cos z}{(z+1)^r} \text{ ، } C \text{ کرانه مربعی با رئوس } \pm 2i \text{ ، } \pm 2$$

۲۳. هرگاه $f(z)$ ثابت نبوده و به ازای هر مقدار z (متناهی) تحلیلی باشد، و R و M اعداد حقیقی مثبت دلخواه باشند (صرفنظر از اینکه چقدر بزرگ باشند). نشان دهید که مقادیری از Z وجود دارند به قسمی که $|f(z)| > M$ و $|z| > R$. **راهنمایی.** از قضیه لیوویل استفاده کنید.

۲۴. اگر $f(z)$ یک چند جمله ای از درجه $n > 0$ و M یک عدد حقیقی مثبت دلخواه باشد (صرفنظر از اینکه چقدر بزرگ باشد)، نشان دهید که عدد حقیقی مثبت R موجود است به قسمی که به ازای هر $|f(z)| > M$ ، $|z| > R$.

۲۵. نشان دهید که $f(z) = e^z$ خاصیتی را که در مساله ۲۳ بیان شد دارا می باشد، اما دارای خاصیتی که در مساله ۲۴ ذکر شد نیست.

۲۶. **قضیه بنیادی جبر** را ثابت کنید: اگر $f(z)$ که ثابت نیست یک چند جمله ای بر حسب z باشد، آنگاه لاقبل یک عدد مختلط Z موجود است، به طوری که $f(z) = 0$. **راهنمایی.** فرض کنید که به ازای هر z ، $f(z) \neq 0$ ، و نتیجه حاصل از مساله ۲۳ را در مورد $\frac{1}{f}$ به کار برید.

پرمشها و مسائل دوره ای برای فصل ۱۳

۱. اگر منحنی C به صورت $z = z(t)$ نمایش داده شده باشد، تعبیر هندسی $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ چیست؟

۲. در تمام این فصل چه مفروضاتی درباره مسیرهای انتگرالگیری در نظر گرفته شده است؟

۳. اگر از $\frac{1}{z}$ در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت انتگرال بگیرید به چه نتیجه ای می رسید؟
در مورد $\frac{1}{z^m}$ ، که در آن $m = 2, 3, \dots$ ، چگونه؟
۴. روشهای انتگرالگیری در این فصل را بیان نموده و برای هر کدام یک مثال ارائه کنید.
۵. کدام روش انتگرالگیری از این فصل، فقط برای توابع تحلیلی به کار گرفته شد؟ و در حالت کلی در مورد توابع مختلط پیوسته کدام روش به کار رفته است؟
۶. کدامیک از قضایای این بخش از بقیه مهمتر است؟ چرا؟ از حافظه خود برای بیان آن استفاده کنید.
۷. منظور از مستقل از مسیر چیست؟
۸. اصل تغییر شکل مسیر چیست؟ یک مثال بیاورید.
۹. ناحیه همبند دو گانه چیست؟ ارتباط آن با قضیه کوشی چقدر است؟
۱۰. قضیه کوشی و فرمول کوشی را باهم اشتباه نگیرید. هر دو را توضیح دهید. کدامیک نتیجه ای از دیگری است؟
۱۱. اگر انتگرال تابع f روی دایره واحد برابر ۲ و روی دایره $|z| = 2$ برابر ۱ باشد، چرا $f(z)$ در تمام نقاط واقع در طوق محصور شده بین این دوایر می تواند تحلیلی نباشد؟
۱۲. نامساوی ای را که از کران بالایی برای قدر مطلق یک انتگرال به دست آمد، توضیح دهید. آیا این مساله فقط برای توابع تحلیلی به کار گرفته می شود یا در حالت کلی برقرار است؟
۱۳. تابع تحلیلی f در دامنه D یک تابع مشتقپذیر در D است. آیا این تابع دارای مشتقات مراتب بالاتر در D است؟ همین سوال را برای تابع حقیقی $f(x)$ یعنی مشتقپذیر بر بازه ای از محور حقیقی پاسخ دهید.
۱۴. آیا تساوی $\operatorname{Re} \int_C f(z) dz = \int_C \operatorname{Re} f(z) dz$ همواره برقرار است؟
۱۵. با استفاده از قضیه لیوویل، نشان دهید که e^z و $\cos z$ در صفحه مختلط کراندار نیستند. از توابع زیر بر روی مسیرهای داده شده انتگرال بگیرید.
۱۶. z^2 از $3i - it$ روی هر مسیر دلخواه
۱۷. $z + \frac{1}{z}$ در جهت حرکت عقربه های ساعت روی دایره واحد
۱۸. $\operatorname{Im} z$ در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت روی دایره $|z| = r$
۱۹. $|z|$ از i تا $-i$ روی دایره واحد در نیم صفحه راست
۲۰. $\frac{\operatorname{Ln} z}{(z - 2i)^2}$ در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت روی دایره $|z - 2i| = \frac{\pi}{4}$

۲۱. e^{z^2} از $14 + 3\pi i$ تا $14 - \pi i$ در امتداد مسیر دلخواه
۲۲. $\frac{e^z}{z^2}$ در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت روی دایره $|z| = \frac{1}{4}$
۲۳. $\frac{z}{|z|}$ در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت روی دایره $|z| = 4$
۲۴. $\frac{z}{z^2 + 1}$ در جهت حرکت عقربه های ساعت روی دایره $|z + i| = 1$
۲۵. $z^{-2} \tan z$ در جهت حرکت عقربه های ساعت روی هر کانتور شامل مبدا مختصات
۲۶. $\cos iz$ در امتداد محور حقیقی از $-\pi$ تا π
۲۷. $\cosh z$ از 0 تا i در امتداد محور موهومی
۲۸. $(z + i)^{-1} e^z \tan z$ در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت روی دایره $|z - i| = 1$
۲۹. $|z| + z$ در جهت حرکت عقربه های ساعت روی دایره واحد
۳۰. $\frac{z^2 + 5}{z^2 + z}$ در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت روی بیضی دلخواه با کانونهای ± 1
۳۱. $e^z \cos(e^z)$ از $-\pi i$ تا $2\pi i$ در امتداد هر مسیر دلخواه
۳۲. $\frac{e^z}{z}$ در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت روی $|z| = 1$ و در جهت عقربه های ساعت روی دایره $|z| = 0/1$
۳۳. $z \cos z^2$ از 0 تا πi روی هر مسیر دلخواه
۳۴. $(2z - 1)^{-2} (1 + z) \sin z$ در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت روی دایره $|z - i| = 2$
۳۵. $\frac{1}{z^2 + 4}$ در جهت حرکت عقربه های ساعت روی بیضی $x^2 + 4(y - 2)^2 = 4$
۳۶. $z^{-2} \cosh z$ در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت روی دایره واحد
۳۷. $\frac{2z^2 - 3}{z(z - 1 - i)^2}$ در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت روی $|z| = 2$ و در جهت حرکت عقربه های ساعت روی دایره $|z| = 1$
۳۸. $(z - i)^{-2} (z^2 + \sin z)$ در جهت حرکت عقربه های ساعت روی هر بیضی با کانونها $\pm 2i$
۳۹. $\frac{\tan \pi z}{(z - 1)^2}$ در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت روی دایره $|z - 1| = 0/1$
۴۰. $\frac{\sin 2\pi z}{(z - i)^2}$ در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت روی دایره $|z| = 2$

خلاصه فصل ۱۳ انتگرالگیری مختلط

انتگرال روی خط مختلط تابع f روی مسیر C به صورت زیر نمایش داده می شود (بخش ۱۳. ۱).

$$\int_C f(z) dz$$

یا اگر C بسته باشد با $\oint_C f(z) dz$.

هر انتگرال را می توان با استفاده از معادله $z = z(t)$ از C ، که در آن $a \leq t \leq b$ (بخش ۱۳. ۲) محاسبه نمود:

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \dot{z}(t) dt \quad \left(\dot{z} = \frac{dz}{dt} \right). \quad (۱)$$

به عنوان روشی دیگر، اگر $f(z)$ در دامنه همبند ساده D تحلیلی باشد (بخش ۱۳. ۳)، آنگاه یک تابع $F(z)$ در D وجود دارد به طوری که $F'(z) = f(z)$ و به ازای هر مسیر C در D از نقطه z_0 تا نقطه z_1 داریم (بخشهای ۱۳. ۲ و ۱۳. ۴)

$$\int_C f(z) dz = F(z_1) - F(z_0) \quad [F'(z) = f(z)] \quad (۲)$$

بر طبق قضیه انتگرال کوشی، اگر $f(z)$ در دامنه همبند ساده D تحلیلی باشد، آنگاه به ازای هر مسیر بسته C واقع در D (بخش ۱۳. ۳) داریم

$$\oint_C f(z) dz = 0. \quad (۳)$$

تحت مفروضات یکسان و به ازای هر z_0 از D و یک مسیر بسته C واقع در D شامل z_0 که زیر مجموعه D می باشد، فرمول انتگرال کوشی

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (۴)$$

را داریم. علاوه بر آن $f(z)$ در D از هر مرتبه دارای مشتق است و همه این مشتقات در D توابع تحلیلی هستند و (بخش ۱۳. ۶)

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz; \quad n = 1, 2, \dots \quad (۵)$$

این قضایا، قضیه مررا (عکس قضیه انتگرال کوشی) و نامساوی کوشی رانتیجه می دهند (بخش ۱۳. ۶).

Handwritten mathematical notes, likely related to the study of functions and their properties. The text is written in Persian and includes several paragraphs and mathematical expressions. The handwriting is somewhat faint and difficult to read in detail, but it appears to be a student's work or a lecture note. The page is numbered 101 in the top right corner.

فصل ۱۴

سریهای توانی، سریهای تیلور، سریهای لوران

بخش ۱.۱۴ شامل مفاهیم اساسی و آزمونهای همگرایی سریهای مختلط می باشد. مطالب ارائه شده شبیه نتایج متناظر در سریها حقیقی هستند که در حساب دیفرانسیل و انتگرال درباره آنها بحث شده است. متعلمینی که با موضوع بخش ۱.۱۴ آشنا هستند، می توانند از این بخش به عنوان مرجع استفاده کنند و کار را با بخش ۲.۱۴ شروع نمایند که یک بحث کلی از سری توانی را به دست می دهد. در شروع بخش ۳.۱۴ توضیح این مطلب که چرا سری توانی نقش اساسی در آنالیز مختلط و کاربرد آن دارد، می پردازیم. دلیل این اهمیت آن است که هر سری توانی نمایش دهنده یک تابع تحلیلی (قضیه ۵، بخش ۳.۱۴) است و بالعکس، هر تابع تحلیلی را می توان با سری توانی، که به سری تیلور مشهور می باشد، نمایش داد (درست مانند سری در حساب دیفرانسیل و انتگرال؛ ر.ک. بخش ۴.۱۴). بخش ۵.۱۴ به روشهای عملی برای به دست آوردن این سریها اختصاص دارد. در بخش ۶.۱۴ به همگرایی یکنواخت این سری و دیگر سریها می پردازیم.

سری لوران (بخش ۷.۱۴) یک سری از توانهای صحیح مثبت و منفی Z (یا $Z - Z_0$) می باشد. این سریها در دسته بندی نقاط تکین (بخش ۸.۱۴) به ما کمک می کند و منجر به یک روش انتگرالگیری عمومی ظریف می گردند («انتگرالگیری به روش مانده ها» در فصل بعدی به توضیح آن خواهیم پرداخت).

پیشنیازهای این فصل: فصلهای ۱۲ و ۱۳.

بخشهایی که برای دوره های فشرده تر قابل حذف است: بخشهای ۵.۱۴، ۶.۱۴، و ۸.۱۴ (و از بخش ۱.۱۴ فقط به عنوان مرجع استفاده شود).

مراجع: ضمیمه ۱، قسمت D.

جواب مسائل: ضمیمه ۲.

۱.۱۴ دنباله ها، سریها، آزمونهای همگرایی

در این بخش به تعریف مفاهیم اساسی مربوط به دنباله ها و سریهای مختلط می پردازیم و درباره آزمونهای همگرایی و واگرایی بحث خواهیم کرد. این مطلب خیلی شبیه تعاریف و قضایای مربوط به دنباله و سریهای حقیقی هستند که در حساب دیفرانسیل و انتگرال با آنها آشنا شده ایم. چنانچه با این مطالب بیشتر آشنایی دارید و این طور فکر می کنید که آزمون نسبت در اعداد مختلط هم برقرار است، از این بخش صرف نظر کنید و به سراغ بخش ۲.۱۴ بروید.

دنباله ها

تعاریف بنیادی شبیه تعاریف پایه ای در حساب دیفرانسیل و انتگرال می باشند. یک دنباله نامتناهی یا، به اختصار یک Z_n دنباله با متناظر قرار دادن هر عدد صحیح مثبت با یک Z_n ، موسوم به یک جمله دنباله حاصل می شود و به صورت Z_1, Z_2, \dots یا $\{Z_1, Z_2, \dots\}$ یا به اختصار $\{Z_n\}$ نمایش داده می شود. بعضی اوقات ممکن است دنباله با صفر، یعنی با اعداد صحیح دیگر آغاز شود، مثلاً هر یک از Z_0, Z_1, \dots و Z_2, Z_3, \dots یک دنباله هستند.

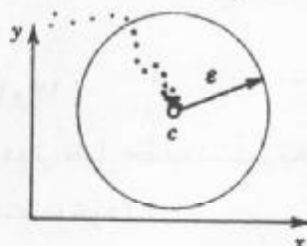
دنباله حقیقی، دنباله ای است که جملاتش حقیقی باشند.

همگرایی. دنباله همگرایی Z_1, Z_2, \dots دنباله ای است که دارای حد C باشد و برای آن می نویسند $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = C$ یا به اختصار $Z_n \rightarrow C$. بنا به تعریف حد دنباله، این بدان معنی است که به ازای هر $\epsilon > 0$ عددی مانند N موجود باشد به طوری که به ازای هر $n > N$ داشته باشیم

$$|Z_n - C| < \epsilon; \tag{1}$$

به طریق هندسی می توان گفت که هر جمله Z_n با $n > N$ درون قرص بازی به شعاع ϵ و به مرکز C قرار داشته (شکل ۳۳۲) و تنها تعدادی متناهی از جمله های Z_n درون قرص قرار نمی گیرند در مورد دنباله حقیقی، تعبیر هندسی (۱)، بدین مضمون است که هر جمله Z_n با $n > N$ درون بازه بازی به طول 2ϵ و یک نقطه میانی حقیقی C روی خط حقیقی قرار دارد؛ ر.ک. شکل ۳۳۳].

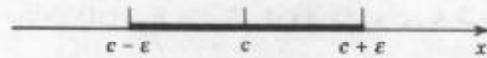
دنباله واگرا دنباله ای است که همگرا نباشد.



شکل ۳۳۲. دنباله مختلط همگرا

مثال ۱. دنباله های همگرا و واگرا

دنباله $\left\{ \frac{i^n}{n} \right\} = \left\{ i, -\frac{1}{2}, \frac{-i}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$ همگرا به سمت صفر است. دنباله های $\{z_n\}$ و $\{i^n\} = \{i, -1, -i, 1, \dots\}$ با جمله عمومی $z_n = (1+i)^n$ واگرا هستند.



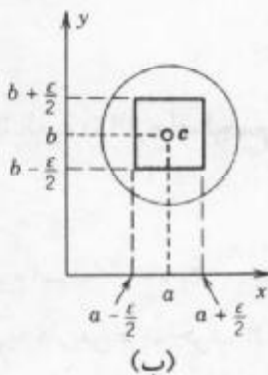
شکل ۳۳۳. دنباله حقیقی همگرا

مثال ۲. دنباله همگرا

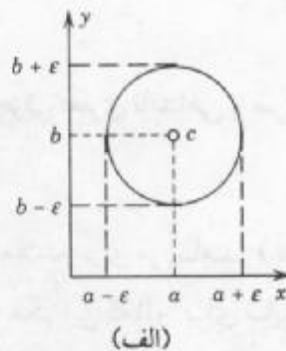
دنباله $\{z_n\}$ با $z_n = x_n + iy_n = 2 - \frac{1}{n} + i(1 + \frac{2}{n})$ عبارت است از (ر.ک. شکل ۳۳۴)
 $1 + 3i, \frac{3}{2} + 2i, \frac{5}{3} + \frac{5}{3}i, \frac{7}{4} + \frac{3}{2}i, \dots$
 این دنباله همگرا است و حد آن برابر $c = 2 + i$ است. در واقع، در (۱)، وقتی $n > \frac{\sqrt{5}}{\epsilon}$ داریم

$$|z_n - c| = \left| \frac{2n-1}{n} + i \frac{n+2}{n} - (2+i) \right| = \left| -\frac{1}{n} + \frac{2i}{n} \right| = \frac{\sqrt{5}}{n} < \epsilon.$$

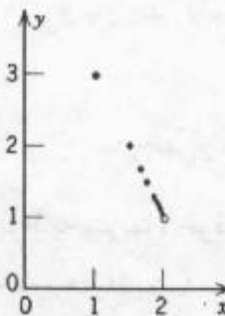
علاوه بر آن مشاهده می کنیم که دنباله $\{x_n\}$ ، قسمت حقیقی دنباله مختلط، به $\text{Re } c = 2$ و دنباله $\{y_n\}$ ، قسمت موهومی، یعنی به سمت $\text{Im } c = 1$ همگرا است. این مطلب گویای این واقعیت است که همگرایی یک دنباله مختلط می تواند از روی دو دنباله حقیقی قسمت های حقیقی و موهومی حاصل شود. این موضوع در قضیه زیر ارائه می شود.



(ب)



(الف)



شکل ۳۳۴. مثال ۲

شکل ۳۳۵. اثبات قضیه ۱

قضیه ۱ (دنباله قسمتهای حقیقی و موهومی)

دنباله $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ از اعداد مختلط $z_n = x_n + iy_n$ (که در آن $n = 1, 2, \dots$) به $c = a + ib$ همگرا است اگر و فقط اگر دنباله قسمتهای حقیقی x_1, x_2, \dots به a و دنباله قسمتهای موهومی y_1, y_2, \dots به b همگرا باشد.

اثبات . اگر $|z_n - c| < \epsilon$ ، آنگاه $z_n = x_n + iy_n$ درون دایره ای به شعاع ϵ و به مرکز $c = a + ib$ قرار دارد به طوری که داریم (شکل ۳۳۵ الف)

$$|x_n - a| < \epsilon, |y_n - b| < \epsilon.$$

از اینرو همگرایی $z_n \rightarrow c$ همگرایی $x_n \rightarrow a$ و $y_n \rightarrow b$ را ایجاب می کند.

بر عکس، اگر $x_n \rightarrow a$ و $y_n \rightarrow b$ ، آنگاه وقتی $n \rightarrow \infty$ ، آنگاه به ازای $\epsilon > 0$ مفروض می توان N را به اندازه ای بزرگ انتخاب کرد که، به ازای هر $n > N$ ، داشته باشیم

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}, |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}.$$

این دو نامساوی ایجاب می کنند که $z_n = x_n + iy_n$ در مربعی به مرکز c و به ضلع ϵ قرار دارد. بنابراین z_n باید در داخل دایره ای به شعاع ϵ و به مرکز c قرار گیرد (شکل ۳۳۵ ب). بدین طریق قضیه به اثبات می رسد.

سریها

به ازای یک دنباله مفروض $z_1, z_2, \dots, z_m, \dots$ دنباله ای به صورت یک مجموع به شکل زیر تعریف می کنیم

$$\begin{aligned} S_1 &= z_1 \\ S_2 &= z_1 + z_2 \\ &\vdots \\ S_n &= z_1 + z_2 + \dots + z_n \end{aligned} \tag{۲}$$

این دنباله به دنباله حاصلجمع های جزئی سری نامتهای یا سری

$$\sum_{m=1}^{\infty} z_m = z_1 + z_2 + \dots \tag{۳}$$

موسوم است . z_1, z_2, \dots را جملات سری می نامند. (در بحث مربوط به سریها، حرفی که برای جمع به کار می بریم حرف n است، مگر این که n را برای سایر مقاصد به کار برده باشیم).

سری همگرا سری ای است که دنباله حاصل از حاصلجمع های جزئی آن همگرا باشد، یعنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

عدد S را مجموع یا مقدار سری می نامند و به صورت زیر می نویسند

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} z_m = z_1 + z_2 + \dots$$

سری واگرا سری ای است که همگرا نباشد.

اگر جملات S_n را از (۳) حذف کنیم، عبارت باقیمانده به صورت زیر است

$$R_n = z_{n+1} + z_{n+2} + z_{n+3} + \dots \quad (4)$$

این عبارت را باقیمانده سری (۳) بعد از جمله z_n می نامند. به وضوح، اگر سری (۳) همگرا و دارای مجموع S می باشد، آنگاه

$$S = S_n + R_n \quad \text{در نتیجه } R_n = S - S_n$$

حال بنا به تعریف همگرایی داریم $S_n \rightarrow S$ ، بنابراین $R_n \rightarrow 0$. در کاربردها، وقتی S مجهول باشد و یک تقریب S_n از S را محاسبه می کنیم، در آن صورت $|R_n|$ برابر قدر مطلق خطا است، و $R_n \rightarrow 0$ بدان معنی است که می توان با انتخاب n به قدر کافی بزرگ، تا هر اندازه که مایل باشیم R_n را کوچک اختیار کنیم.

یک کاربرد از قضیه ۱ برای مجموعه‌های جزئی بلافاصله از ارتباط همگرایی سری مختلط و دو سری حقیقی از قسمتهای حقیقی و موهومی از روی نتیجه زیر حاصل می شود.

قضیه ۲ (قسمتهای حقیقی و موهومی)

سری (۳) با $z_m = x_m + iy_m$ همگرا به $S = u + iv$ است اگر و فقط اگر $x_1 + x_2 + \dots$ به مقدار u و $y_1 + y_2 + \dots$ به مقدار v همگرا باشند.

آزمونهای برای همگرایی و واگرایی سریها

آزمونهای همگرایی در مجموعه اعداد مختلط دقیقاً شبیه آزمونهای همگرایی در حساب دیفرانسیل و انتگرال می باشند. قبل از آنکه یک سری را مورد استفاده قرار دهیم باید مطمئن شویم که آن سری همگرا است، بدین منظور آزمونهای را به کار می گیریم تا به همگرا بودن و یا واگرا بودن سری اطمینان حاصل کنیم.

واگرایی را اغلب می توان خیلی ساده به کمک قضیه زیر نشان داد.

قضیه ۳ (واگرایی)

هرگاه سری $z_1 + z_2 + \dots$ همگرا نباشد، آنگاه $\lim_{m \rightarrow \infty} z_m \neq 0$. از این رو هر سری که در آن این رابطه برقرار نباشد، واگرا است

اثبات. اگر $z_1 + z_2 + \dots$ همگرا به S باشد، آنگاه، از $z_m = S_n - S_{m-1}$ ، داریم

$$\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = \lim_{m \rightarrow \infty} (S_m - S_{m-1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m - \lim_{m \rightarrow \infty} S_{m-1} = S - S = 0.$$

توجه! $z_m \rightarrow 0$ شرط لازم برای همگرایی است اما کافی نیست، مثلاً سری همساز $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ در شرط فوق صدق می‌کند، اما با توجه به آنچه در حساب دیفرانسیل و انتگرال آموختیم واگرا می‌باشد (ر.ک.، برای مثال مرجع [۱۲] در ضمیمه ۱).

قضیه ۴ (اصل همگرایی کوشی برای سریها)

سری $z_1 + z_2 + \dots$ همگرا است اگر و فقط اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض بتوان N را (که در حالت کلی به ε بستگی دارد) طوری یافت که به ازای هر $n > N$ و $p = 1, 2, \dots$ داشته باشیم

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_{n+p}| < \varepsilon. \quad (5)$$

اثبات این قضیه را به خواننده واگذار می‌کنیم (اثبات در ضمیمه ۴ آمده است).

همگرایی مطلق. سری $z_1 + z_2 + \dots$ را همگرایی مطلق نامند هرگاه سری حاصل از قدرمطلق جملات آن، یعنی سری

$$\sum_{m=1}^{\infty} |z_m| = |z_1| + |z_2| + \dots$$

همگرا باشد.

اگر سری $z_1 + z_2 + \dots$ همگرا باشد و سری $|z_1| + |z_2| + \dots$ واگرا باشد، آنگاه سری $z_1 + z_2 + \dots$ را همگرایی مشروط می‌نامند.

مثال ۳. سری همگرایی مشروط

سری $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ همگرا، ولی سری حاصل از سری قدرمطلق جملات آن که سری همساز است واگرا می‌باشد. بنابراین سری مورد نظر یک سری مشروط است.

هرگاه یک سری همگرایی مطلق باشد، آن سری همگرا است.

این مطلب به سادگی از اصل کوشی (مساله ۱۴) نتیجه می‌شود. اصل کوشی آزمون همگرایی عمومی زیر را نیز نتیجه می‌دهد.

قضیه ۵ (آزمون مقایسه)

اگر به ازای سری مفروض $z_1 + z_2 + \dots$ بتوان سری همگرایی $b_1 + b_2 + \dots$ که جملات آن اعداد حقیقی نامنفی هستند طوری یافت که به ازای هر $n = 1, 2, \dots$ داشته باشیم

$$|z_n| \leq b_n$$

آنگاه سری مفروض مطلقاً همگرا و در نتیجه همگرا است.

اثبات. چون سری $b_1 + b_2 + \dots$ همگرا است، بنا به اصل کوشی، به ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض N را طوری می‌توان یافت که به ازای هر $n > N$ و $p = 1, 2, \dots$ داشته باشیم

$$b_{n+1} + \dots + b_{n+p} < \varepsilon.$$

از این نامساوی، $|z_1| \leq b_1$ ، $|z_2| \leq b_2$ ، ... نتیجه می شود که به ازای همان n و p ها
 $|z_{n+1}| + \dots + |z_{n+p}| \leq b_{n+1} + \dots + b_{n+p} < \varepsilon$.
 بنابراین، مجدداً بنا به اصل کوشی، سری $|z_1| + |z_2| + \dots$ همگرا است، در نتیجه سری $z_1 + z_2 + \dots$ مطلقاً همگرا است.

کاربرد خوبی از این روش در سری هندسی است که به شرح زیر ارائه می گردد.

قضیه ۶ (سری هندسی)

سری هندسی

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^m = 1 + q + q^2 + \dots$$

به ازای $|q| < 1$ همگرا به مجموع $\frac{1}{1-q}$ و به ازای $|q| \geq 1$ واگرا می باشد.

اثبات. اگر $|q| \geq 1$ ، آنگاه $|q^m| \geq 1$ و از قضیه ۳ واگرایی در این حالت حاصل می شود.

حال اگر فرض کنیم $|q| < 1$ ، آنگاه n امین حاصلجمع جزئی عبارت است از

$$S_n = 1 + q + \dots + q^n.$$

باتوجه به این مطلب داریم

$$qS_n = q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1}.$$

از تفریق دو رابطه، بیشتر جملات سمت راست دو به دو حذف می شوند، و از طرف چپ داریم

$$S_n - qS_n = (1 - q)S_n = 1 - q^{n+1}.$$

حال $1 - q \neq 0$ زیرا $q \neq 1$ ، و می توان از رابطه فوق S_n را پیدا کرد:

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{n+1}}{1 - q}. \quad (6)$$

حال اگر $n \rightarrow \infty$ ، آنگاه به ازای $|q| < 1$ داریم $q^{n+1} \rightarrow 0$ و در نتیجه جمله آخر وقتی

$n \rightarrow \infty$ ، حذف می شود. لذا سری همگرا و دارای حاصلجمع $\frac{1}{1 - q}$ است. بدین ترتیب قضیه به

اثبات می رسد.

آزمون نسبت

ما بین آزمونهای موجود برای تشخیص همگرایی و واگرایی سریها آزمون نسبت بیشتر از همه

کاربرد دارد. این آزمون با مقایسه با سری هندسی حاصل می شود.

قضیه ۷ (آزمون نسبت)

سری $z_1 + z_2 + \dots$ با $z_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) را در نظر می‌گیریم. هرگاه عددی طبیعی مثل N موجود باشد به طوری که به ازای هر $n > N$

$$\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \leq q < 1 \quad (n > N) \quad (۷)$$

(که در آن $q < 1$ یک عدد ثابت است)، آنگاه سری مورد نظر مطلقاً همگرا است و اگر به ازای هر $n > N$

$$\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \geq 1 \quad (n > N), \quad (۸)$$

آنگاه سری مزبور واگرا است.

اثبات. اگر نامساوی (۸) برقرار باشد، آنگاه به ازای هر $n > N$ داریم $|z_{n+1}| \geq |z_n|$ ، باتوجه به آن واگرایی سری از قضیه ۳ نتیجه می‌شود.

اگر نامساوی (۷) برقرار باشد، آنگاه به ازای هر $n > N$ ، $|z_{n+1}| \leq |z_n|$ در حالت خاص،

$$|z_{N+2}| \leq |z_{N+1}|q, \quad |z_{N+3}| \leq |z_{N+2}|q \leq |z_{N+1}|q^2$$

و در حالت کلی، $|z_{N+p}| \leq |z_{N+1}|q^{p-1}$ ، از این رو

$$|z_{N+1}| + |z_{N+2}| + |z_{N+3}| + \dots \leq |z_{N+1}|(1 + q + q^2 + \dots).$$

هم اکنون مطلقاً همگرا بودن سری $z_1 + z_2 + \dots$ از آزمون مقایسه و سری هندسی، به دلیل آنکه $q < 1$ است، حاصل می‌شود.

توجه! نامساوی (۷) ایجاب می‌کند که $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1$ ، ولی از این نامساوی همگرایی نتیجه نمی‌شود. به

عنوان یک مثال نقص یک سری همساز را بخاطر می‌آوریم و باتوجه به آن داریم $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \frac{n}{n+1} < 1$.

مشاهده می‌کنیم که نامساوی فوق برقرار است ولی می‌دانیم که سری همساز واگرا است. بنابراین

شرط وجود $q < 1$ و $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < q$ برای همگرایی یک شرط لازم است.

قضیه ۸ (آزمون نسبت)

اگر سری $z_1 + z_2 + \dots$ با $z_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) طوری باشد که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = L, \quad (۹)$$

آنگاه

(الف) سری مطلقاً همگرا است اگر $L < 1$.

(ب) سری واگرا است اگر $L > 1$.

(ج) به ازای $L = 1$ این آزمون همگرایی و یا واگرایی سری را نتیجه نمی دهد.

اثبات. (الف) در (۹) قرار می دهیم $k_n = \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$. فرض می کنیم $L = 1 - b < 1$. با توجه به تعریف حد، k_n باید به $1 - b$ میل کند. یعنی عددی مثل N موجود است به طوری که به ازای هر $n > N$ ، $k_n \leq q = 1 - \frac{b}{2} < 1$. با توجه به این مفروضات همگرایی $z_1 + z_2 + \dots$ به سادگی از قضیه ۷ نتیجه می شود.

(ب) به طور مشابه، به ازای $L = 1 + c > 1$ و به ازای هر $n > N^*$ (به قدر کافی بزرگ) داریم $k_n \geq 1 + \frac{c}{2} > 1$ ، که واگرایی سری $z_1 + z_2 + \dots$ از روی قضیه ۷ نتیجه می شود.

(ج) از سری همساز نسبت $\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{n}{n+1}$ و از آنجا $L = 1$ و سری واگرا است. و حال آنکه

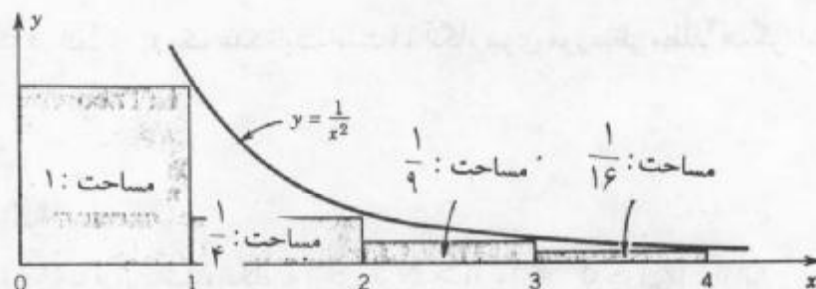
به ازای سری

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots$$

داریم $\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$ ، (مجدداً $L = 1$ ولی این سری با توجه به مطالب زیر یک سری همگرا است. در واقع

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^2} = 2 - \frac{1}{n}$$

در نتیجه دنباله S_1, S_2, \dots یک دنباله کراندار و صعودی یکنوا است (چون جملات سری همگی مثبت هستند). دو خاصیت حاصل برای همگرایی دنباله حقیقی S_1, S_2, \dots کافی می باشند.



شکل ۳۳۶. همگرایی سری $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots$

این موضوع نباید گفته های ما است که به ازای $L = 1$ ممکن است سری همگرا یا واگرا باشد.

مثال ۴. آزمون نسبت

آیا سری زیر همگرا است یا واگرا؟

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(100 + 75i)^n}{n!} = 1 + (100 + 75i) + \frac{1}{2!}(100 + 75i)^2 + \dots$$

حل. بنا به قضیه ۸، سری مورد نظر همگرا است، زیرا

$$\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \frac{|100 + 75i|^{n+1} n!}{|100 + 75i|^n (n+1)!} = \frac{|100 + 75i|}{n+1} = \frac{125}{n+1} \rightarrow L = 0.$$

مثال ۵. قضیه ۷ کلی تر از قضیه ۸ است.

آیا سری زیر همگرا است یا واگرا؟

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n+1}} \right) = i + \frac{1}{2} + \frac{i}{8} + \frac{1}{16} + \frac{i}{64} + \frac{1}{128} + \dots$$

حل. نسبت قدر مطلقهای جملات متوالی سری برابر $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots$ می باشد. از این رو همگرایی از قضیه ۷ نتیجه می شود. چون دنباله این نسبتها دارای حد نمی باشد، لذا قضیه ۸ را نمی توان به کار گرفت و برای همگرایی باید از قضیه ۷ استفاده کرد.

آزمون ریشه

آزمون ریشه یکی دیگر از آزمونهایی است که در تشخیص همگرایی و یا واگرایی سریها کاربردهای متنوع دارد. آزمون نسبت ساده تر و آزمون ریشه عمومی تر است.

قضیه ۹ (آزمون ریشه)

سری $z_1 + z_2 + \dots$ را در نظر می گیریم. هرگاه عددی طبیعی مانند N موجود باشد به طوری که به ازای هر $n > N$

$$\sqrt[n]{|z_n|} \leq q < 1 \quad (10)$$

(که در آن $q < 1$ یک عدد ثابت است)، آنگاه سری مورد نظر مطلقاً همگرا است. اگر به ازای

هر $n > N$

$$\sqrt[n]{|z_n|} \geq 1, \quad (11)$$

آنگاه سری واگرا است.

اثبات. اگر (۱۰) برقرار باشد، آنگاه به ازای هر $n > N$ ، $|z_n| \leq q^n < 1$. از این رو با مقایسه با سری هندسی نتیجه می شود که سری $|z_1| + |z_2| + \dots$ همگرا است. بنابراین سری $z_1 + z_2 + \dots$ مطلقاً همگرا است. اگر (۱۱) برقرار باشد، آنگاه به ازای تعدادی نامتناهی n ، $|z_n| \geq 1$. هم اکنون واگرایی سری $z_1 + z_2 + \dots$ از قضیه ۳ نتیجه می شود. بدین ترتیب قضیه به اثبات می رسد.

توجه! معادله (۱۰) ایجاب می کند $\sqrt[n]{|z_n|} < 1$ ، اما همگرایی را ایجاب نمی کند، مثلاً سری همساز در

نامساوی $1 < \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ صدق می کند ولی واگرا می باشد.

اگر دنباله حاصل از ریشه ها در (۱۰) و (۱۱) همگرا باشند، قضیه زیر را داریم

قضیه ۱۰ (آزمون ریشه)

اگر سری $z_1 + z_2 + \dots$ طوری باشد که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L, \quad (12)$$

آنگاه

(الف) به ازای $L < 1$ ، سری مطلقاً همگرا است.

(ب) به ازای $L > 1$ ، سری واگرا است.

(ج) به ازای $L = 1$ همگرایی یا واگرایی سری از روی این آزمون حاصل نمی شود.

اثبات. اثبات این قضیه شبیه اثبات قضیه (۸) است.

(الف) فرض کنید $L = 1 - a^0 < 1$. آنگاه بنا به تعریف حد، عددی مثل N^* موجود است به

طوری که به ازای هر $n > N^*$ داریم $1 - \frac{1}{4}a^0 < \sqrt[n]{|z_n|} < q = 1 - \frac{1}{4}a^0$. بنابراین به ازای هر $n > N^*$ ،

$|z_n| < q^n < 1$. حال بامقایسه با سری هندسی نتیجه می شود که سری $z_1 + z_2 + \dots$ مطلقاً همگرا است.

(ب) اگر $L > 1$ ، همچنین به ازای هر n به قدر کافی بزرگ داریم $\sqrt[n]{|z_n|} > 1$. بنابراین

به ازای این n ها، $|z_n| > 1$. حال قضیه ۳ ایجاب می کند که سری $z_1 + z_2 + \dots$ واگرا باشد.

(ج) برای سری واگرایی همساز و همچنین سری همگرایی $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots$

می یابیم $L = 1$. درستی این ادعا را می توان از $\frac{(Ln)}{n} \rightarrow 0$ و

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{n} \ln n}} \rightarrow \frac{1}{e^0}, \quad \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{n}}} = \frac{1}{e^{\frac{2}{n} \ln n}} \rightarrow \frac{1}{e^0}$$

مشاهده نمود.

مثال ۶. آزمون ریشه

آیا سری زیر همگرا است یا واگرا؟

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} + 3} (4-i)^n = \frac{1}{4} - \frac{1}{7}(4-i) + \frac{1}{19}(4-i)^2 - \dots$$

حل. بنا به قضیه ۱۰، سری فوق واگرا است، زیرا

$$\sqrt[n]{\frac{|(4-i)^n|}{4^{2n}+3}} = \frac{|4-i|}{\sqrt[n]{4^{2n}+3}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt[n]{4^{2n}+3}} \rightarrow L = \frac{\sqrt{17}}{4} > 1.$$

در اینجا به پایان بحث مفاهیم اساسی و حقایق مربوط به سریهای مختلط و آزمونهای همگرایی می‌رسیم. اساس کار در مورد سریها در بخشهای بعدی ارائه خواهند شد.

مسائل بخش ۱.۱۴ دنباله‌ها

آیا دنباله‌های داده شده زیر کراندار هستند؟ همگرا چطور؟ نقاط حدی آنها را بیابید.

$$z_n = \frac{(-1)^n}{n+i} \cdot 3 \quad z_n = e^{\frac{i n \pi}{2}} \cdot 2 \quad z_n = (-1)^n + 2i \cdot 1$$

$$z_n = \frac{\pi}{2} + \frac{e^{\frac{i n \pi}{2}}}{n \pi} \cdot 6 \quad z_n = (3i)^n - (1+i)^n \cdot 5 \quad z_n = \frac{(3+4i)^n}{n!} \cdot 4$$

$$z_n = i^n \cos n\pi \cdot 9 \quad z_n = \frac{n\pi}{1+2in} \cdot 8 \quad z_n = (-1)^n + \frac{i}{n} \cdot 7$$

۱۰. (یکتایی حد) نشان دهید که اگر دنباله‌ای همگرا باشد، حد آن یکتا است.

۱۱. اگر دنباله z_1, z_2, \dots همگرا و حد آن l و دنباله z_1^*, z_2^*, \dots همگرا به حد l^* باشد، آنگاه نشان دهید که دنباله $z_1 + z_1^*, z_2 + z_2^*, \dots$ همگراست و دارای حد $l + l^*$ می‌باشد.

۱۲. نشان دهید که تحت مفروضات مساله ۱۱ دنباله $z_1 z_1^*, z_2 z_2^*, \dots$ همگراست و حد آن برابر با $l l^*$ است.

۱۳. نشان دهید که دنباله مختلط z_1, z_2, \dots کراندار است اگر و فقط اگر دودنباله متناظر قسمتهای حقیقی و قسمتهای موهومی آن کراندار باشند.

سریها

۱۴. (همگرایی مطلق) نشان دهید که اگر یک سری همگرایی مطلق باشد، آنگاه سری مفروض همگرا است.

آیا سریهای زیر همگرا هستند یا واگرا؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} \cdot 17 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-i}{3n+2i} \cdot 16 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(100+200i)^n}{n!} \cdot 15$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n} + i^{2n}}{n!} \cdot 20 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda i}{9}\right)^n n^n \cdot 19 \quad \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1+i}{2}\right)^n \cdot 18$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n n} \quad . ۲۳$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(10+7i)^{2n}}{(2n)!} \quad . ۲۲$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i)^n n!}{n^n} \quad . ۲۱$$

۲۴. فرض کنید که $1 < q \leq \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$ ، در نتیجه بنا به آزمون نسبت (قضیه ۷) سری $z_1 + z_2 + \dots$ همگرا

است. نشان دهید که باقیمانده $R_n = z_{n+1} + z_{n+2} + \dots$ در نامساوی $|R_n| \leq \frac{|z_{n+1}|}{1-q}$ صدق می‌کند. (راهنمایی: از این حقیقت استفاده کنید که آزمون نسبت مقایسه ای بین سری $z_1 + z_2 + \dots$ با سری هندسی است.)

۲۵. با استفاده از مساله ۲۴، تعداد جمله هایی را که برای محاسبه مجموع S سری مساله ۲۳ با خطایی نه بیش از $0/05$ کفایت می‌کنند به دست آورید و S را با چنین دقتی محاسبه کنید.

۲.۱۴ سریهای توانی

سری توانی، که مختصراً در مورد آن در ابتدای فصل صحبت شد یکی از مهمترین سریها در آنالیز مختلط است.

یک سری توانی بر حسب توانهای $z - z_0$ یک سری به صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (۱)$$

می‌باشد که در آن z متغیر است، a_0, a_1, \dots ثابتهای هستند که به ضرایب سری موسوم اند و z_0 عدد مختلط ثابتی است که مرکز سری نامیده می‌شود.

حالت $z_0 = 0$ ، حالت خاصی از سری توانی بر حسب توانهای z می‌باشد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad (۲)$$

رفتار همگرایی سری توانی

در بخش قبل در مورد سری با جملات ثابت مطالبی ارائه شد. وهم اکنون اگر جمله های یک سری متغیر باشند، یعنی توابعی از متغیر z (مثلاً یک سری توانی از z باشند)، آنگاه چنانچه مقدار مشخصی را اختیار کند، جملات سری نیز مقادیر معینی اختیار می‌کنند، و در آن صورت همه تعاریف و مطالب بخش قبل در این حالت قابل به کارگیری هستند. واضح است که به ازای چنین سریهایی که جملاتشان توابعی از z هستند حاصلجمع های جزئی باقیمانده ها، و مقدار سری توابعی از z خواهند بود. معمولاً چنین سری ای به ازای برخی مقادیر z ، مثلاً به ازای مقادیر z واقع در درون یک

ناحیه، همگرا و به ازای دیگر مقادیر z و اگر است. در حالت کلی، چنین نواحی ای می توانند پیچیده باشند برای یک سری توانی این مطلب ساده است. در واقع، با توجه به قضیه زیر مشاهده می کنیم که (۱) در تمام نقاط یک قرص به مرکز z_0 یا در تمام صفحه یا فقط در مرکز z_0 که در چنین حالتی (۱) عملاً بلا استفاده است می تواند همگرا باشد. موضوع را با ارائه سه مثال روشن می کنیم.

مثال ۱. همگرایی در یک قرص. سری هندسی

سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots$$

به ازای $|z| < 1$ همگرا و به ازای $|z| \geq 1$ واگرا است. (قضیه ۶، بخش ۱۴.۱ را ملاحظه کنید.)

مثال ۲. همگرایی به ازای هر z

سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

به ازای هر z مطلقاً همگرا است. در واقع، با توجه به آزمون نسبت، به ازای هر z مشخص، اگر $n \rightarrow \infty$ ، آنگاه داریم

$$\left| \frac{z^{n+1} n!}{z^n (n+1)!} \right| = \frac{|z|}{n+1} \rightarrow 0.$$

مثال ۳. همگرا فقط در مرکز (سری پوچ)

سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n = 1 + z + 2z^2 + 6z^3 + \dots$$

فقط در $z = 0$ همگرا است و به ازای هر $z \neq 0$ واگرا است. در واقع با توجه به آزمون نسبت، به ازای هر $z \neq 0$ می یابیم

$$\left| \frac{(n+1)! z^{n+1}}{n! z^n} \right| = (n+1)|z|$$

که تنها به ازای $z = 0$ برابر صفر و در نتیجه سری همگرا و به ازای سایر z ها به بینهایت واگرا است. و از آنجا سری مورد نظر واگرا است.

هر سری توانی به صورت (۱) در مرکز خود همگرا است زیرا یک سری توانی به ازای $z = z_0$ به تک جمله a تبدیل می شود. اگر این نقطه، تنها نقطه همگرایی نباشد، در نتیجه (۱) لااقل در یک نقطه دیگر مانند $z_1 \neq z_0$ نیز همگرا است، آنگاه (۱) به ازای هر z که فاصله اش از z_0 کمتر از z_1 باشد همگرا است.

قضیه ۱ (همگرایی سری توانی)

اگر سری توانی (۱) در نقطه $z = z_0 \neq z_1$ همگرا باشد، این سری به ازای هر z که فاصله اش از z_0 کمتر از z_1 باشد، یعنی به ازای هر z که $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ مطلقاً همگرا است (ر.ک. شکل ۳۳۷).
اگر (۱) در یک نقطه $z = z_2$ واگرا باشد، آنگاه این سری به ازای هر z که فاصله اش از z_0 بیشتر از z_2 باشد، یعنی به ازای هر z که $|z - z_0| \geq |z_2 - z_0|$ واگرا است (ر.ک. شکل ۳۳۷).



شکل ۳۳۷. قضیه ۱

اثبات. چون سری (۱) به ازای z_1 همگرا است. قضیه ۳ بخش ۱.۱۴ نشان می دهد که $a_n(z_1 - z_0)^n \rightarrow 0$ وقتی که $n \rightarrow \infty$.

این مطلب ایجاب می کند که به ازای $z = z_1$ جملات سری (۱) کراندار باشند، یعنی به ازای هر $n = 0, 1, \dots$ داریم

$$|a_n(z_1 - z_0)^n| < M.$$

با ضرب و تقسیم نمودن عبارت داخل قدر مطلق واقع در طرف چپ بر $(z_1 - z_0)^n$ می یابیم

$$|a_n(z - z_0)^n| = \left| a_n(z_1 - z_0)^n \left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right)^n \right| \leq M \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n. \quad (3)$$

حال باتوجه به فرض نتیجه $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ می شود که $\left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right| < 1$. از اینرو سری

$M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n$ یک سری هندسی همگرا است (ر.ک. قضیه ۶ بخش ۱.۱۴). حال از (۳) و

آزمون مقایسه بخش ۱.۱۴ نتیجه می شود که سری (۱) وقتی که $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ همگرا است.

اگر گزاره دوم از قضیه فوق نادرست باشد، آنگاه سری در یک z_2 ای همگرا می شود به طوری

که z_2 در نامساوی $|z_2 - z_0| > |z_2 - z_0|$ صدق می کند. لذا همگرایی در z_2 متناقض با فرض واگرایی در z_2 است.

شعاع همگرایی سری توانی

مثالهای ۲ و ۳ بیان می کنند که سری توانی ممکن است به ازای تمام مقادیر z یا فقط به ازای $z = z_0$ همگرا باشد. فعلاً این دو مورد را کنار می گذاریم. بنابراین، اگر سری توانی (۱) مفروض باشد، می توانیم کلیه z های واقع در صفحه مختلط را که به ازای آنها سری همگرا است مورد بررسی قرار دهیم. فرض کنید R کوچکترین عدد حقیقی ای باشد که حداکثر فاصله هر یک از نقاط مذکور از z_0 باشد، به عبارت دیگر، شعاع کوچکترین دایره ای به مرکز باشد که شامل همه نقاطی است که سری در آنها همگرا است، آنگاه قضیه ۱ همگرایی سری، به ازای تمام z واقع در این دایره را ایجاب می نماید، یعنی به ازای تمام z هایی که در نامساوی

$$|z - z_0| < R \quad (۴)$$

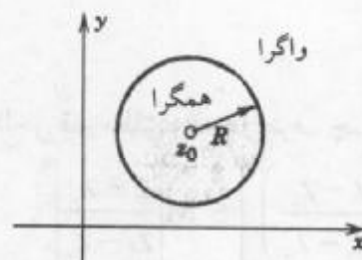
صدق کنند سری همگرا است. و چون R کوچکترین عدد ممکن است، سری به ازای تمام z هایی را که در رابطه

$$|z - z_0| > R$$

صدق می کنند، واگرا است. دایره

$$|z - z_0| = R$$

را دایره همگرایی و شعاع R را شعاع همگرایی (۱) می نامند (ر. ک. شکل ۳۳۸).



شکل ۳۳۸. دایره همگرایی

برای وارد کردن موارد $R = \infty$ و $R = 0$ به شرح زیر قرار می گذاریم:
 $R = \infty$ بدان معنی می گیریم که سری به ازای هر z یا برکل صفحه مختلط همگرا است (مانند مثال ۲).

$R = 0$ به آن معنی است که سری تنها در $z = z_0$ همگرا است (مانند مثال ۳).

اینها تنها نمادگذاریهای مفید هستند و معنی دیگری ندارند.

به ازای سری توانی حقیقی (۱) برحسب توانهای $x - x_0$ با ضرایب و مرکز حقیقی، فرمول

(۴) دارای بازه همگرایی $|x - x_0| < R$ به طول $2R$ بر روی محور حقیقی می باشد.

به منظور پرهیز از درک نادرست، هیچ قاعده کلی برای همگرایی سری توانی (۱) بر روی دایره همگرایی در دست نیست. چون یک سری توانی (۱) ممکن است در برخی نقاط واقع بر دایره همگرایی همگرا و در برخی نقاط دیگر واگرا باشد. با ارائه یک مثال موضوع را روشن می سازیم.

مثال ۴. رفتار بر روی دایره همگرایی

بر روی دایره همگرایی (در هر سه سری ذیل شعاع همگرایی برابر $R = 1$ می باشد)

$$\sum \frac{z^n}{n^2} \quad \text{در همه جا همگرا است زیرا } \sum \frac{1}{n^2} \text{ همگرا است.}$$

$$\sum \frac{z^n}{n} \quad \text{بنا به آزمون لایبنتز، در } -1 \text{ همگرا است ولی در } 1 \text{ واگرا است.}$$

$$\sum z^n \quad \text{در همه جا واگرا است.}$$

شعاع همگرایی R سری توانی (۱) را می توان از روی ضرایب سری به صورت زیر تعیین نمود.

قضیه ۲ (شعاع همگرایی R)

فرض کنید دنباله $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ ، که در آن $n = 1, 2, \dots$ همگرا بوده و حد آن برابر L^* باشد.

اگر $L^* = 0$ ، آنگاه $R = \infty$ ، یعنی سری توانی (۱) به ازای هر z همگرا است.

اگر $L^* \neq 0$ (از اینرو $L^* > 0$)، آنگاه

$$R = \frac{1}{L^*} \quad (5) \text{ (فرمول کوشی - آدامار)}$$

اگر $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow \infty$ ، آنگاه $R = 0$ (یعنی سری فقط در مرکز z_0 همگرا است).

اثبات. جملات سری (۱) به شکل $Z_n = a_n(z - z_0)^n$ می باشند. از این رو با توجه به آزمون نسبت (قضیه ۸ بخش ۱۰.۱۴) داریم

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{Z_{n+1}}{Z_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(z - z_0)^{n+1}}{a_n(z - z_0)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z - z_0|;$$

یعنی

$$L = L^* |z - z_0|.$$

اگر $L^* = 0$ ، آنگاه به ازای هر z داریم $L = 0$ ، و آزمون نسبت همگرایی را به ازای هر z تضمین

۱- به نام ریاضیدان فرانسوی، ا. ل. کوشی A. L. CAUCHY (ر. ک. زیرنویس بخش ۶.۲) و ژاک آدامار JACQUES HADAMARD (۱۸۶۵-۱۹۶۳). آدامار توزیعهای بنیادی را در قضایای سری توانی بنا نهاد و تا آخر عمر روی معادلات با مشتقات جزئی کار کرد.

می‌کند. فرض کنیم $L^0 > 0$. اگر $|z - z_0| < \frac{1}{L^0}$ ، آنگاه $|z - z_0| < \frac{1}{L} = L^0 |z - z_0|$ و سری بنا به آزمون نسبت همگرا است. بنا به تعریف، این موضوع نشان می‌دهد که $\frac{1}{L^0}$ برابر R ، شعاع همگرایی سری (۱) است و بدین طریق (۵) به اثبات می‌رسد. اگر $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow \infty$ ، آنگاه به ازای هر $z \neq z_0$ و هر n به

قدر کافی بزرگی داریم $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \geq 1$ و در نتیجه واگرایی سری (۱)، به ازای هر $z \neq z_0$ از قضیه ۷ بخش ۱.۱۴ نتیجه می‌شود. بدین طریق اثبات به پایان می‌رسد.

تبصره: اگر $L^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \neq 0$ ، آنگاه از (۵) می‌یابیم

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \quad (۶)$$

این مطلب پذیرفتنی است، زیرا اگر a_n به سرعت به سمت صفر میل کند، آنگاه $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ از نظر میانگین بزرگ خواهد شد (چرا؟) و سری در یک قرص بزرگ همگرا می‌گردد. اگر a_n به کندی به سمت صفر میل کند، آنگاه $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ بطور نسبی کوچک خواهد شد. سری در یک قرص نسبتاً کوچک همگرا می‌گردد.

اگر L^0 موجود نباشد، فرمولهای (۵) و (۶) کارائی نخواهند داشت، اما بسط قضیه ۲ هنوز امکان پذیر است، همانطوری که در مثال ۶ (در ذیل) توصیف خواهیم نمود.

مثال ۵. شعاع همگرایی

R ، شعاع همگرایی سری توانی زیر را بیابید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} (z - 3i)^n.$$

حل. از (۵) داریم

$$L^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!(n!)^2}{(2n)![n+1]!^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4, R = \frac{1}{L^0} = \frac{1}{4}.$$

لذا سری فوق در قرص باز $|z - 3i| < \frac{1}{4}$ به شعاع $\frac{1}{4}$ و به مرکز $3i$ همگرا است.

مثال ۶. تممیم قضیه ۲

R ، شعاع همگرایی سری توانی زیر را بیابید

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + (-1)^n + \frac{1}{2^n} \right] z^n = 3 + 2^{-1}z + (2 + 2^{-2})z^2 + 2^{-2}z^2 + (2 + 2^{-2})z^3 + \dots$$

حل. چون دنباله نسبت‌های $\frac{1}{2}, 2(2 + 2^{-2}), \frac{1}{2^2(2 - 2^{-2})}, \dots$ همگرا نیست، از قضیه ۲ نمی‌توان نتیجه گرفت. می‌توان نشان داد

$$R = \frac{1}{L}, \quad \bar{L} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (5^*)$$

این موضوع نیز در اینجا کمکی به ما نخواهد کرد، زیرا $\left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\}$ همگرا نیست. چون شواهد نشان می‌دهند که این سری دارای دو نقطه حدی $\frac{1}{2}$ و ۱ است. علاوه بر آن می‌توان نشان داد که

$$R = \frac{1}{1} \quad (5^{**})$$

که در آن \bar{L} بزرگترین نقطه حدی دنباله $\left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\}$ است. در اینجا $\bar{L} = 1$ ، در نتیجه $R = 1$ و سری به ازای $|z| < 1$ همگرا است.

مسائل بخش ۲.۱۴

مرکز و شعاع همگرایی هر یک از سریهای توانی زیر را بیابید.

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n z^{2n} \cdot 3 & \sum_{n=1}^{\infty} n\pi^n (z-i)^n \cdot 2 & \sum_{n=0}^{\infty} (z+4i)^n \cdot 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n^2} \cdot 6 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{5^n} \cdot 5 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} \cdot 4 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (3z-2i)^n \cdot 9 & \sum_{n=1}^{\infty} n^n (z+1)^n \cdot 8 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n!} (z+i)^n \cdot 7 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} (z+\pi i)^n \cdot 12 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n n^n}{2^n} z^{2n} \cdot 11 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} z^{2n} \cdot 10 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \cdot 15 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n^n} \cdot 14 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot 13 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} (z-1)^{2n} \cdot 18 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n - 1} z^{2n} \cdot 17 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (z+2)^n \cdot 16 \end{array}$$

۱۹. نشان دهید که اگر سری توانی $\sum a_n z^n$ دارای شعاع همگرایی R (که متناهی فرض شده است) باشد، آنگاه سری توانی $\sum a_n z^{2n}$ دارای شعاع همگرایی \sqrt{R} است.

۲۰. آیا سری توانی بر حسب توانهای Z وجود دارد که در $Z = 30 + 10i$ همگرا و در $Z = 31 - 6i$ واگرا باشد؟ (دلیل بیاورید).

۱۴. ۳. نمایش توابع به صورت سری توانی

در این بخش بنا داریم که به نمایش توابع به صورت سری توانی پردازیم (قضیه ۵). خواهیم دید که سری توانی نسبت به اعمال جمع و ضرب، مشتقگیری و انتگرالگیری که کاربردهای متنوع در آنالیز مختلط دارند رفتار مناسبی دارند.

برای ساده تر کردن مطالب این بخش فرض می‌کنیم $Z_0 = 0$ و می‌نویسیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (1)$$

چنین فرضی هیچ مشکلی ایجاد نخواهد کرد زیرا اگر بسط بر حسب $Z_0 - Z^*$ مورد نظر باشد، آنگاه با فرض $Z = Z^* - Z_0$ به (۱) می‌رسیم.

اگر یک سری توانی دلخواه (۱) دارای شعاع همگرایی غیر صفر باشد، آنگاه مجموع چنین سری ای تابعی از Z ، یعنی به صورت $f(Z)$ است. در این صورت می‌نویسیم

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad (|z| < R) \quad (2)$$

وگوئیم که $f(z)$ به صورت یک سری توانی نمایش داده شده است و یا به صورت یک سری توانی بسط داده شده است. به عنوان مثال، سری هندسی بسط تابع $f(z) = \frac{1}{1-z}$ است که در داخل دایره واحد $|z| = 1$ همگرا است (مثال ۱ بخش ۲.۱۴ را ملاحظه کنید).

کاربعدی نشان دادن یکتایی چنین نمایش است، یعنی نشان می‌دهیم که یک تابع f را نمی‌توان با دو سری متمایز که مرکزشان یکی است نمایش داد. اگر $f(z)$ را به یک سری توانی با مرکز Z_0 بسط دهیم، این بسط یکتا است. این واقعیت مهم غالباً در آنالیز حقیقی و مختلط به کار می‌رود. این نتیجه را به صورت زیر (قضیه ۲، در ذیل) می‌آوریم.

قضیه ۱ (پیوستگی مجموع یک سری توانی)

تابع f که با (۲) معرفی شده به ازای $R > 0$ در $Z = 0$ پیوسته است.

اثبات. بنا به تعریف پیوستگی باید نشان دهیم که

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = f(0) = a_0$$

یعنی باید نشان دهیم که به ازای هر $\epsilon > 0$ مفروض یک $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که از

$|z| < \delta$ نامساوی $|f(z) - a_0| < \varepsilon$ نتیجه می شود. بنا به قضیه ۱ بخش ۱۴. ۲، سری (۲) به ازای $|z| \leq r < R$ به طور مطلق همگرا است. لذا سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^{n-1} = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n \quad (r > 0)$$

همگرا است. فرض کنید مقدار سری برابر S باشد. آنگاه به ازای $|z| \leq r < R$ می یابیم

$$|f(z) - a_0| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right| \leq |z| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |z|^{n-1} \leq |z| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^{n-1} = |z| S.$$

نتیجه حاصله به ازای $|z| < \delta$ کمتر از ε است، که در آن $\delta > 0$ هم از r و هم از $\frac{\varepsilon}{S}$ کوچکتر است. بدین طریق قضیه به اثبات می رسد.

حال از این قضیه به راحتی می توان قضیه یکتایی مورد نظر را به دست آورد (مجدداً بدون آنکه

به کلیت موضوع خللی وارد شود فرض می کنیم $z_0 = 0$)

قضیه ۲ (قضیه همانی سری توانی)

هرگاه سریهای توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

به ازای $|z| < R$ ، که R مثبت است، همگرا بوده و به ازای هر z دارای مقادیر یکسان باشند، آنگاه سریهای مزبور یکسان هستند، یعنی به ازای هر $n = 0, 1, \dots$ داریم

$$a_n = b_n.$$

اثبات. روش استقراء را به کار می بریم. بنا به مفروضات قضیه داریم

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots \quad (|z| < R).$$

بنا به قضیه ۱ مجموع این دو سری توانی در $z = 0$ پیوسته هستند. بنابراین $a_0 = b_0$ ، یعنی روش استقراء به ازای $n = 0$ برقرار است. حال فرض می کنیم که $a_n = b_n$ به ازای $n = 0, 1, \dots, m$ برقرار باشد، و نشان می دهیم که به ازای به جای m نیز برقرار است. برای اثبات از طرفین تساوی فوق $(m+1)$ جمله اول را که با توجه به فرض استقراء برابر هستند نیز حذف می کنیم و حاصل را بعد از تقسیم بر z^{m+1} می یابیم

$$a_{m+1} + a_{m+2} z + a_{m+3} z^2 + \dots = b_{m+1} + b_{m+2} z + b_{m+3} z^2 + \dots$$

مجدداً با توجه به قضیه ۱ هر یک از این سریهای توانی تابعی را نمایش می دهند که در $z = 0$ پیوسته است. بنابراین $a_{m+1} = b_{m+1}$ و بدین طریق استقراء به پایان رسیده و قضیه به اثبات می رسد.

هر سری توانی نمایش یک تابع تحلیلی است. این مطلب، بعد از یک مقدمه سازی کوتاه، به

عنوان هدف اصلی در این بخش مطرح می شود. در بخش بعدی خواهیم دید که، برعکس، هر تابع تحلیلی را می توان با یک سری توانی (موسوم به سری تیلور) نمایش داد. این موضوع کاملاً شگفت انگیز است و این دو نتیجه نشان دهنده اهمیت سری توانی در آنالیز مختلط می باشند.

جمع و تفریق جمله به جمله دو سری توانی به شعاعهای همگرایی R_1 و R_2 یک سری توانی با شعاع همگرایی حداقل برابر می نیم R_1 و R_2 را نتیجه می دهد. **اثبات.** با جمع (یا تفریق) جمله به جمله حاصل جمع های جزئی S_n و S_n^* و با استفاده از فرمول $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n \pm S_n^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^*$ نتیجه حاصل می شود.

ضرب جمله به جمله دو سری توانی

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \dots$$

و

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m = b_0 + b_1 z + \dots$$

به معنی ضرب هر جمله از سری اول در هر جمله سری دوم است و برای به دست آوردن نتیجه ضرب حاصل ضربها را باهم جمع کرده برحسب توانهای z مرتب می کنیم. این نتیجه یک سری توانی است، که به حاصل ضرب کوشی دو سری موسوم می باشد و به صورت زیر نمایش داده می شود

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0)z^n.$$

بدون اثبات خاطر نشان می کنیم که این سری توانی به ازای هر z ای که در داخل دایره های همگرایی هر دو سری مفروض باشد، به طور مطلق همگرا است و مجموع ضرب کوشی آنها برابر با $S(z) = f(z)g(z)$ است. برای اثبات، به مرجع [DV] که در ضمیمه ۱ آمده است، مراجعه کنید.

مشتقگیری و انتگرالگیری جمله به جمله از سری توانی، همانظوری که بعداً نشان خواهیم داد، مجاز می باشد. سری مشتق سری توانی (۱) را می توان با مشتقگیری جمله به جمله از (۱) به دست آورد، یعنی

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots \tag{۳}$$

قضیه ۳) مشتقگیری جمله به جمله از یک سری توانی)

شعاع همگرایی سری مشتق یک سری توانی همان شعاع همگرایی سری اصلی است.

اثبات. این مطلب از (۵) بخش ۱۴. ۲ نتیجه می شود. در واقع

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

اگر حد عبارت آخر موجود نباشد، با توجه به این مطلب که وقتی $n \rightarrow \infty$ داریم $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ ، نتیجه از (**۵) بخش ۱۴.۲ حاصل می شود. بدین طریق قضیه به اثبات می رسد.

مثال ۱. کاربردی از قضیه ۳

R ، شعاع همگرایی، سری داده شده را با به کارگیری قضیه ۳ بیابید.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{2} z^n = z^2 + 3z^3 + 6z^4 + 10z^5 + \dots$$

حل. با دوبار مشتقگیری جمله به جمله از سری هندسی و با ضرب $\frac{z^2}{4}$ در نتیجه حاصل، سری مفروض به دست می آید. بنابراین بنا به قضیه ۳ داریم $R = 1$.

قضیه ۴ (انتگرالگیری جمله به جمله از یک سری توانی)

سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = a_0 z + \frac{a_1}{2} z^2 + \frac{a_2}{3} z^3 + \dots$$

که از انتگرالگیری جمله به جمله سری $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ حاصل می شود دارای همان شعاع همگرایی سری اصلی است.

اثبات این قضیه مشابه اثبات قضیه ۳ می باشد.

حال با استفاده از قضیه ۳ به عنوان یک ابزار، می توان نتیجه اصلی این بخش را بنا نهاد:

قضیه ۵ (توابع تحلیلی. مشتقات توابع تحلیلی)

هر سری توانی با شعاع همگرایی غیر صفر R در تمام نقاط داخلی دایره همگرایی خود تابع تحلیلی را بیان می کند. مشتقات این تابع با مشتقگیری جمله به جمله از سری اصلی حاصل می شود. تمام سریهایی که بدین طریق حاصل می شوند دارای همان شعاع همگرایی سری اصلی می باشند. بنابراین، با توجه به عبارت اول، هر یک از آنها یک تابع تحلیلی را نمایش می دهد.

اثبات. (الف) سری توانی دلخواه (۱) را با شعاع همگرایی مثبت R در نظر می گیریم. فرض می کنیم $f(z)$ حاصلجمع سری مفروض و $f_1(z)$ حاصلجمع سری مشتق آن باشد؛ از این رو

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \quad \text{و} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (4)$$

نشان می دهیم که $f(z)$ تحلیلی و دارای مشتق $f_1(z)$ در داخل دایره همگرایی است. این عمل را با توجه

به اینکه به ازای هر z ثابت که $|z| < R$ و $\Delta z \rightarrow 0$ نسبت تفاضلی $\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ به سمت

$f_1(z)$ میل می کند، انجام می دهیم. ابتدا با جمع جمله به جمله از (۴) داریم

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - f_1(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[\frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} - n z^{n-1} \right]. \quad (5)$$

توجه می کنیم که جمع با اندیس ۲ شروع می شود، چون جمله ثابت از محاسبه تفاضل $f(z + \Delta z) - f(z)$ به دست می آید و جمله خطی وقتی که $f_1(z)$ را از نسبت تفاضلی کم کنیم حاصل می شود.

(ب) ادعا می کنیم که سری واقع در (۵) رامی توان به صورت زیر نوشت

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \Delta z \left[(z + \Delta z)^{n-2} + 2z(z + \Delta z)^{n-3} + \dots + (n-1)z^{n-2} \right]. \quad (6)$$

اثباتی از آن در ضمیمه ۴ آمده است.

(ج) (۶) را در نظر می گیریم. در داخل کرشه $n-1$ جمله وجود دارد که بزرگترین ضریب در بین آنها $n-1$ است. چون $(n-1)^2 < n(n-1)$ ، مشاهده می کنیم که به ازای $|z| \leq R_0$ و $|z + \Delta z| \leq R_0$ ، $R_0 < R$ ، قدر مطلق این سری نمی تواند از

$$|\Delta z| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n(n-1) R_0^{n-2}$$

تجاوز کند. این سری با a_n به جای $|a_n|$ سری مشتق دوم (۲) در $z = R_0$ است و بنابر قضیه ۳ و قضیه ۱ بخش ۱۴، ۲ نیز مطلقاً همگرا است. بنابراین سری اخیر همگرا است. فرض کنید $K(R_0)$ حاصل جمع آن باشد. آنگاه می توان نتیجه را به صورت زیر نوشت

$$\left| \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - f_1(z) \right| \leq |\Delta z| K(R_0).$$

با فرض $\Delta z \rightarrow 0$ و با توجه به اینکه $R_0 < R$ دلخواه است، نتیجه می گیریم که $f(z)$ در هر نقطه ای واقع در داخل دایره همگرایی تحلیلی است و مشتق آن با سری مشتق نشان داده می شود. همین حکم در مورد مشتقات بالاتر به روش استقرا ثابت می شود. بدین طریق قضیه به اثبات می رسد.

خلاصه. نتایج به دست آمده در این بخش نشان می دهند که سریهای توانی بسیار مفید هستند. از سریهای توانی می توان جمله به جمله مشتقگیری یا انتگرالگیری نمود (قضایای ۳ و ۴). قضیه ۵، یکی از قضایای بسیار مهم در مورد سریهای توانی در آنالیز مختلط می باشد: حاصل جمع یک چنین سری ای (با شعاع همگرایی مثبت) که یک تابع تحلیلی است و از هر مرتبه دارای مشتق است و همه این مشتقها توابع تحلیلی هستند. ولی این تنها قسمتی از مطلب است.

در بخش آتی خواهیم دید، برعکس، هر تابع تحلیلی مفروض $f(z)$ رامی توان با سری توانی

نمایش داد.

مسائل بخش ۱۴. ۳

شعاع همگرایی سریهای داده شده زیر را به دو روش (الف) مستقیماً از فرمول کوشی - آدامار (بخش ۱۴. ۲)، (ب) با استفاده از قضیه ۳ یا قضیه ۴ و یک سری با ضرایب ساده تر بیابید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} (z+1)^{2n} \quad ۳ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)} z^n \quad ۲ \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2^n} (z-i)^n \quad ۱$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{m} z^n \quad ۶ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n(n+1)}{7^n} z^{2n} \quad ۵ \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{z}{\pi}\right)^{2n+1} \quad ۴$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n+1)(n!)^2} z^{n+1} \quad ۹ \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left[\binom{n+k}{n} \right]^{-1} z^{n+k} \quad ۸ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^n}{n(n+1)(n+2)} z^n \quad ۷$$

۱۰. در اثبات قضیه ۳، ادعا کردیم که وقتی $n \rightarrow \infty$ داریم $\sqrt[n]{n} = 1$. این مطلب را ثابت کنید. راهنمایی. قرار دهید $\sqrt[n]{n} = 1 + c_n$ ، که در آن $c_n > 0$ ، و نشان دهید که وقتی $n \rightarrow \infty$ داریم $c_n \rightarrow 0$.

۱۱. با استفاده از (الف) حاصلضرب کوشی، (ب) عمل مشتگیری یک سری مناسب نشان دهید که

$$(1-z)^{-r} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n.$$

۱۲. با به کارگیری قضیه ۲ برای $(1+z)^p(1+z)^q = (1+z)^{p+q}$ (برای p و q اعداد صحیح مثبت هستند) نشان دهید که

$$\sum_{n=0}^r \binom{p}{n} \binom{q}{r-n} = \binom{p+q}{r}.$$

۱۳. اگر در (۱)، $f(z)$ زوج باشد، نشان دهید که به ازای همه n های فرد داریم $a_n = 0$ (از قضیه ۲ استفاده کنید).

۱۴. (اعداد فیبوناچی) اعداد فیبوناچی با فرمول بازگشتی زیر تعریف می شوند.

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}; \quad n \geq 2, a_0 = a_1 = 1$$

تابع $F(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$ به صورت سری توانی باشد، آنگاه ضرایب این سری توانی اعداد فیبوناچی هستند و برعکس. راهنمایی: از $f(z)(1-z-z^2) = 1$ شروع کنید و قضیه ۲ را به کار برید.

۱۵. اثبات حاصل جمع و تفریق جمله به جمله سری توانی مشخص شده در متن را بنویسید.

۱۴-۴ سری تیلور

همانطوری که در قضیه ۵ بخش ۳.۱۴ دیدیم، حاصلجمع هر سری توانی (با شعاع همگرایی مثبت) یک تابع تحلیلی است. حال برعکس می‌خواهیم نشان دهیم که هرتابع تحلیلی f را می‌توان با سری توانی نمایش داد، که این سری توانی، معروف به سری تیلور $f(z)$ می‌باشد و وضعیت آن به همان شکلی است که در حساب دیفرانسیل و انتگرال به دست آمده است. برای رسیدن کافی است به جای x ، z جایگزین شود.

با قرار دادن z و z^* به ترتیب به جای z_0 و z در فرمول انتگرال کوشی می‌یابیم

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{z^* - z} dz^* \quad (1)$$

در داخل C قرار دارد، برای آن که یک دایره به شعاع r و به مرکز z_0 در آن همسایگی در نظر گرفته ایم.

z^* متغیر مختلط انتگرالگیری است (شکل ۳۳۹). هدف بعدی ما بسط $\frac{1}{z^* - z}$ واقع در (۱) بر حسب توانهای $z - z_0$ می‌باشد، برای این منظور چنین می‌نویسیم

$$\frac{1}{z^* - z} = \frac{1}{(z^* - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(z^* - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{z^* - z_0}\right)} \quad (2)$$

برای استفاده بعدی توجه می‌کنیم که چون z^* روی C قرار دارد، درحالی که z در داخل C است، داریم

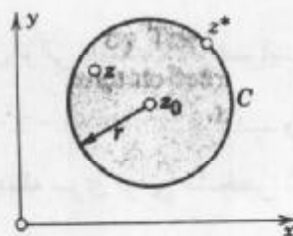
$$\left| \frac{z - z_0}{z^* - z_0} \right| < 1. \quad (2^*)$$

بنابراین می‌توان سری هندسی به کار گرفت. لذا داریم

$$1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1), \quad (3^*)$$

و از آنجا می‌یابیم

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + q + \dots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1 - q}. \quad (3)$$



شکل ۳۳۹. فرمول کوشی (۱)

با به کار بردن (۳) به ازای $q = \frac{z - z_0}{z^* - z_0}$ در طرف راست (۲) می یابیم

$$\frac{1}{z^* - z} = \frac{1}{z^* - z_0} \left[1 + \frac{z - z_0}{z^* - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{z^* - z_0} \right)^2 + \dots + \left(\frac{z - z_0}{z^* - z_0} \right)^n + \frac{1}{z^* - z} \left(\frac{z - z_0}{z^* - z_0} \right)^{n+1} \right]$$

این مقدار را در (۱) قرار می دهیم. از آنجا که توانهای $z - z_0$ وابسته به متغیر انتگرالگیری z^* نمی باشند، در نتیجه می توان آنها را از زیر علامت انتگرال خارج نمود، بنابراین به دست می آوریم

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{z^* - z_0} dz^* + \frac{z - z_0}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^2} dz^* + \dots \quad (4)$$

$$\dots + \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}} dz^* + R_n(z),$$

که در آن جمله آخر طبق فرمول

$$R_n(z) = \frac{(z - z_0)^{n+1}}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}(z^* - z)} dz^* \quad (5)$$

مفروض می باشد. با استفاده از فرمولهای انتگرال کوشی (۱) بخش ۱۳. ۶ برای مشتقات، می یابیم

$$f(z) = f(z_0) + \frac{z - z_0}{1!} f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!} f''(z_0) + \dots \quad (6)$$

$$\dots + \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + R_n(z).$$

این نمایش به فرمول تیلور^۳ موسوم می باشد. $R_n(z)$ را باقیمانده می نامند. چون تابع تحلیلی $f(z)$ مشتق از تمام مراتب دارد، می توان n را در (۶) به دلخواه بزرگ گرفت. اگر n به سمت بینهایت میل کند، از (۶) سری توانی

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^m \quad (7)$$

حاصل می شود. این سری را سری تیلور $f(z)$ با مرکز z_0 می نامند. حالت خاصی از (۷) با مرکز $z_0 = 0$ به سری مکلاورن $f(z)$ مشهور می باشد.

۳- بروک تیلور BROOK TAYLOR (۱۶۸۵-۱۷۳۱)، ریاضیدان انگلیسی است که فرمول بالا را برای توابع یک متغیره حقیقی کشف کرد.

۴- کالین مکلاورن COLIN MACLAURIN (۱۶۹۸-۱۷۴۸)، ریاضیدان اسکاتلندی استاد دانشگاه ایدنبورو بود.

بدیهی است، سری (۷) همگرا بوده و $f(z)$ را نمایش خواهد داد اگر و فقط اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0. \tag{۸}$$

برای اثبات (۸) از (۵) استفاده می‌کنیم. چون z^* بر روی C قرار دارد، درحالی که z در داخل C است (شکل ۳۳۹) داریم $|z^* - z| > 0$. چون $f(z)$ در داخل C و روی C تحلیلی است،

نتیجه می‌شود که قدر مطلق $\frac{f(z^*)}{z^* - z}$ کراندار است، مثلاً به ازای هر z^* واقع بر C داریم

$$\left| \frac{f(z^*)}{z^* - z} \right| \leq \tilde{M}.$$

همچنین، $|z^* - z_0| = r$ شعاع C ، و C دارای طولی برابر $2\pi r$ است. بنابراین با به کار بردن نامساوی ML (بخش ۱۳. ۲) در مورد (۵) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} |R_n| &= \frac{|z - z_0|^{n+1}}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1} (z^* - z)} dz^* \right| \\ &\leq \frac{|z - z_0|^{n+1}}{2\pi} \tilde{M} \frac{1}{r^{n+1}} 2\pi r = \tilde{M} r \left| \frac{z - z_0}{r} \right|^{n+1}. \end{aligned}$$

چون z در داخل C واقع است، در طرف راست رابطه فوق داریم، $|z - z_0| < r$. بنابراین $\frac{|z - z_0|}{r} < 1$ در نتیجه طرف راست رابطه فوق وقتی $n \rightarrow \infty$ ، به سمت صفر میل می‌کند. بدین طریق برای هر z ای که در داخل C باشد (۸) به اثبات می‌رسد. بنا به قضیه ۲ از بخش قبل، نمایش $f(z)$ به صورت (۷) یکتا است، به این معنی که (۷) تنها سری توانی به مرکز z_0 است که تابع مفروض f را نمایش می‌دهد، نتایج حاصل را می‌توان به شرح زیر جمع بندی کرد:

قضیه ۱ (قضیه تیلور)

فرض کنید $f(z)$ در یک دامنه D تحلیلی و همچنین $z = z_0$ نقطه دلخواهی واقع در D باشد. آنگاه تنها یک سری توانی به مرکز z_0 وجود دارد که $f(z)$ را نمایش می‌دهد. این سری به صورت

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n; \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \tag{۹}$$

می‌باشد. این نمایش در بزرگترین قرص بازاری که مرکز آن z_0 است و در D واقع می‌باشد معتبر است. $R_n(z)$ باقیمانده (۹)، را می‌توان به صورت (۵) نمایش داد. ضرایب (۹) در نامساوی

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n} \tag{۱۰}$$

صدق می‌کند که در آن M ماکزیمم $|f(z)|$ روی دایره $|z - z_0| = r$ است.

نامساوی (۱۰) از نامساوی کوشی (۳)، بخش ۱۳. ۶، نتیجه می‌شود. با توجه به فرمول

(۱) بخش ۱۳. ۶ فرمول زیر برای محاسبه ضرایب a_n مذکور در (۹) حاصل می شود

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad (9^*)$$

که در آن انتگرال در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت روی مسیری بسته ساده که شامل z_0 به عنوان یک نقطه درونی صورت می پذیرد.

علاوه، (۸) بدان معنی است که به ازای همه z هایی که (۹) به ازای آنها همگرا باشد، Π امین مجموع جزئی (۹)، $f(z)$ را با هر دقت دلخواهی تقریب خواهد زد؛ تنها کاری که ما باید انجام دهیم این است که Π را به هر اندازه که می خواهیم بزرگ اختیار کنیم.

نقاط تکین تابع تحلیلی f نقاطی است که در آن $f(z)$ خاصیت تحلیلی بودن خود را از دست می دهد. به عبارت دقیقتر، نقطه $z = c$ را **نقطه تکین** $f(z)$ نامند اگر $f(z)$ در $z = c$ مشتق پذیر نباشد، ولی در هر فرص به مرکز c شامل نقاطی باشد که $f(z)$ در آنها مشتق پذیر است. همچنین گوئیم $f(z)$ در نقطه $z = c$ **تکینی** دارد. مثالها: $\frac{1}{1-z}$ در $z = 1$ ، $\tan z$ ، $z = \frac{\pi}{2}$ و $\pm \frac{3\pi}{2}$ ، ... در $\pm \frac{\pi}{2}$ تکینی دارند.

با استفاده از این مفهوم می توان گفت که $f(z)$ حداقل یک نقطه تکین روی دایره همگرایی^۵ بسط (۹) دارد.

سری تیلور برخی توابع مهم

این مطالب از روی خواص مشابه با جابجایی x با z مختلط مانند حساب دیفرانسیل و انتگرال حاصل می شوند. می توانید بگوئید چرا؟ (جواب. ضریب فرمولها یکسان هستند.)

مثال ۱. سری هندسی

فرض کنید $f(z) = \frac{1}{1-z}$. آنگاه داریم $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$ ، $f^{(n)}(0) = n!$. بنابراین بسط

مکلورن $\frac{1}{1-z}$ یک سری هندسی به صورت زیر می باشد

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots \quad (|z| < 1). \quad (11)$$

$z=1$ یک نقطه تکین برای $f(x)$ و این نقطه روی دایره ای که به شعاع واحد می باشد قرار دارد.

مثال ۲. توابع نمایی

۵- شعاع همگرایی (۹) در حالت کلی برابر است با فاصله z_0 از نزدیکترین نقطه تکین $f(z)$ ، اما ممکن است این شعاع بزرگتر باشد، به عنوان مثال برای $L_n z$ کلیه نقاط نیم محور حقیقی منفی نقاط تکین هستند، و فاصله $z_0 = -1 + i$ از آن محور برابر ۱ است، در حالی که شعاع همگرایی سری تیلور $L_n z$ با مرکز $z_0 = -1 + i$ برابر $\sqrt{2}$ است.

چنانچه آموختیم تابع نمایی e^z (بخش ۶.۱۲) به ازای تمام مقادیر z تحلیلی است، و $(e^z)' = e^z$. بنابراین در (۹) با قراردادن $z_0 = 0$ سری مکلاورن تابع نمایی e^z به صورت زیر حاصل می شود

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (12)$$

سری مزبور از جایگزین کردن z به جای x در سری ملکورن e^x نیز حاصل می شود. علاوه بر آن، با قراردادن $z = iy$ در (۲) و با جداسازی قسمتهای حقیقی و موهومی سری (ر. ک. قضیه ۲. بخش ۱.۱۴) به دست می آوریم

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

چون سریهای سمت راست سریهای مکلاورن توابع حقیقی $\cos y$ و $\sin y$ هستند، می یابیم

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad (13)$$

که همان فرمول معروف اوپلر می باشد. در واقع، می توان (۱۲) را برای تعریف e^z به کار برد و از (۱۲) پی به خواص اساسی e^z برد. به عنوان مثال، فرمول دیفرانسیلی $(e^z)' = e^z$ به راحتی از مشتگیری جمله به جمله (۱۲) به دست می آید.

مثال ۳. توابع مثلثاتی و هذلولوی

با قرار دادن (۱۲) در (۱)، بخش ۷.۱۲ به دست می آوریم

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots, \quad (14)$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

به طور مشابه داریم

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots, \quad (15)$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

مثال ۴. لگاریتم

از (۹) نتیجه می شود

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots \quad (|z| < 1). \quad (16)$$

با قرار دادن $-z$ به جای z و ضرب کردن دو طرف نتیجه حاصل در -1 می یابیم

$$-\ln(1-z) = \ln \frac{1}{1-z} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots \quad (|z| < 1). \quad (17)$$

با جمع کردن دو سری می یابیم

$$\ln \frac{1+z}{1-z} = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots\right) \quad (|z| < 1). \quad (18)$$

در بخش بعدی برخی روشهای عملی برای به دست آوردن سری تیلور که از محاسبات پیچیده مشتقات در (۹) اجتناب می شود، را بیان خواهیم کرد.

در رابطه با بخش قبلی

بحثهای مطرح شده در بخش قبل به خوبی با بخش حاضر به صورت زیر در ارتباط هستند:

قضیه ۲.

هر سری توانی با شعاع همگرایی غیر صفر، سری تیلور تابعی است که با آن سری توانی نمایش داده می شود.

اثبات. سری توانی دلخواهی با شعاع همگرایی مثبت R را در نظر می گیریم و مجموع آن را $f(z)$ می نامیم. بنابراین

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

از قضیه ۵، بخش قبل می یابیم

$$f'(z) = a_1 + 2a_2(z-z_0) + \dots$$

و به طور کلی

$$f^{(n)}(z) = n!a_n + (n+1)n \dots 3 \cdot 2 a_{n+1}(z-z_0) + \dots; \quad |z-z_0| < R$$

همه این سریها در قرص $|z-z_0| < R$ همگرا می باشند و توابع تحلیلی را نمایش می دهند. بنابراین این توابع، بنا به قضیه ۱ از بخش قبل، در $Z = Z_0$ پیوسته می باشند. اگر قرار دهیم $Z = Z_0$ ، آنگاه می یابیم

$$f(z_0) = a_0, \quad f'(z_0) = a_1, \dots, f^{(n)}(z_0) = n!a_n, \dots$$

چون این فرمولها همانند فرمولهای قضیه تیلور می باشند، اثبات کامل است.

توضیح. مقایسه با توابع تحلیلی

یک خاصیت شگفت انگیز توابع تحلیلی مختلط این بود که آنها از هر مرتبه دارای مشتق بودند، در این قسمت به خاصیت جالب دیگری برخوردیم و آن این است که همواره آنها را می توان به صورت (۹) نمایش داد و چنین خواصی معمولاً در توابع حقیقی برقرار نیستند. توابع حقیقی ای موجود اند که از

هر مرتبه دارای مشتق بوده ولی قابل نمایش به صورت توانی نیستند. برای این منظور تابع زیر را ارائه می‌کنیم.

تابع $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. این تابع را نمی‌توان با سری مکلاورن نمایش داد زیرا تمام مشتقات آن در 0 برابر صفر هستند.

مسائل بخش ۴.۱۴

سری تیلور هر یک از توابع زیر را در نقاط داده شده به عنوان مرکز بیابید. شعاع همگرایی آنها را تعیین کنید. (مسائل بیشتری از این در بخش بعد، بعد از بحث روشهای عملی ارائه خواهند شد.)

۱. e^{-z} ، ۲. e^{z^2} ، ۳. $\sin \pi z$ ،

۴. $\cos z$ ، $-\frac{\pi}{2}$ ، ۵. $\sin z$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، ۶. $\frac{1}{z}$ ، ۱

۷. $\frac{1}{1-z}$ ، -1 ، ۸. $\frac{1}{1-z}$ ، i ، ۹. $\text{Ln} z$ ، ۱

۱۰. $\sinh(z-2i)$ ، $2i$ ، ۱۱. z^2 ، -1 ، ۱۲. $z^2 - z^3 + 1$ ، ۱

۱۳. $\sin^2 z$ ، ۱۴. $\cos^2 z$ ، ۱۵. $\cos(z - \frac{\pi}{2})$ ، $\frac{\pi}{2}$ ،

مسائل ۱۶ تا ۲۶ بیان می‌کنند که چگونه می‌توان خواص توابع را از روی خواص سری مکلاورن آنها به دست آورد.

۱۶. با استفاده از (۱۲)، ثابت کنید $(e^z)' = e^z$.

۱۷. (۱۴) و (۱۵) را از (۱۲) به دست آورید. از قضیه تیلور، (۱۶) را نتیجه بگیرید.

۱۸. با استفاده از (۱۴)، نشان دهید که $\cos z$ زوج و $\sin z$ فرد است.

۱۹. با استفاده از (۱۵) نشان دهید که به ازای هر $z = x$ که در آن x عددی حقیقی است، $\cosh z \neq 0$.

۲۰. با استفاده از (۱۴) نشان دهید که به ازای هر $z = iy \neq 0$ موهومی محض، $\sin z \neq 0$.

۲۱. با استفاده از (۱۴) نشان دهید که $(\sin z)' = \cos z$ و $(\cos z)' = -\sin z$.

۲۲. با استفاده از (۱۴) نشان دهید که $\cos z + i \sin z$ به سری مکلاورن e^{iz} منجر می‌شود.

۲۳. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ در $z = 0$ تعریف نشده است. $f(0)$ را طوری تعریف کنید که $f(z)$ تابعی تام شود (دلیل بیاورید).

۲۴. با مشتقگیری از (۱۶)، مشتق $\text{Ln}(1+z)$ را بیابید.

۲۵. روابط (۱۴) و (۱۵)، بخش ۷.۱۲ را بین توابع سینوس و کسینوس مثلثاتی و هذلولوی از نمایش (۱۴) و (۱۵) را به دست آورید.

۲۶. سری ملکورن $\cosh^2 z$ را از مساله ۱۴ به دست آورید.

مسائل ۲۷ تا ۳۰ مربوط به تابع خطا $\operatorname{erf} z$ (وابسته به توزیع نرمال در بخشهای ۲۳ و ۲۴)، انتگرال سینوسی $\operatorname{Si}(z)$ و انتگرالهای فرنل $S(z)$ و $C(z)$ می باشند. این توابع خاص غیرمقدماتی به صورت انتگرال تعریف می شوند. این توابع را نمی توان با روشهای معمولی حساب دیفرانسیل و انتگرال ارزیابی کرد. این انتگرالها ندرتاً در کارهای ما کاربرد دارند بدینجهت آنها را در اینجا متذکر می شویم. سری ملکورن توابع زیر را با انتگرالگیری جمله به جمله از سری ملکورن تابع زیر علامت انتگرال محاسبه کنید.

$$\operatorname{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt \quad . 28 \qquad \operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \quad . 27$$

$$C(z) = \int_0^z \cos t^2 dt \quad . 30 \qquad S(z) = \int_0^z \sin t^2 dt \quad . 29$$

۵.۱۴ سریهای توانی : روشهای عملی

در بیشتر موارد، محاسبه ضرایب سری تیلور به کمک فرمول قضیه تیلور پیچیده و وقت گیر است. روشهای بهتر و سریعتری برای تعیین ضرایب سری تیلور وجود دارند. چگونگی به کارگیری این روشها را با ارائه چند مثال روشن می کنیم.

مثال ۱. جایگزینی

سری ملکورن تابع $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ را بیابید.

حل. با قراردادن $-z^2$ به جای z در (۱۱)، بخش ۴.۱۴ می یابیم

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z^2} &= \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \\ &= 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots \end{aligned} \qquad (|z| < 1). \qquad (1)$$

مثال ۲. انتگرالگیری

سری ملکورن تابع $f(z) = \tan^{-1} z$ را بیابید.

حل. داریم $f'(z) = \frac{1}{1+z^2}$ ، با انتگرالگیری جمله به جمله از (۱) و با استفاده از $f(0) = 0$ می یابیم

۶- آگوستن فرنل AUGUSTIN FRESNEL (۱۷۸۸-۱۸۲۷)، فیزیکدان فرانسوی، که به بخاطر کارهایش در اپتیک معروف است.

$$\tan^{-1} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - + \dots \quad (|z| < 1);$$

این سری مقدار اصلی $z = \tan^{-1} z$ را $w = u + iv$ می‌دهد، که به ازای آن داریم $|u| < \frac{\pi}{4}$ ، نمایش می‌دهد.

مثال ۳. بسط توابع با استفاده از سری هندسی

تابع $\frac{1}{c-bz}$ را، که در آن $c-ab \neq 0$ و $b \neq 0$ ، برحسب توانهای $z-a$ بسط دهید.

حل. به منظور به دست آوردن توانهای $z-a$ ، ابتدا از عبارت جبری ساده زیر استفاده می‌کنیم

$$\frac{1}{c-bz} = \frac{1}{c-ab-b(z-a)} = \frac{1}{(c-ab) \left[1 - \frac{b(z-a)}{c-ab} \right]}$$

هم اکنون با توجه به فرمول (۱۱) بخش ۱۴.۴ می‌توان نوشت

$$\frac{1}{c-bz} = \frac{1}{c-ab} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{b(z-a)}{c-ab} \right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{(c-ab)^{n+1}} (z-a)^n$$

$$= \frac{1}{c-ab} + \frac{b}{(c-ab)^2} (z-a) + \frac{b^2}{(c-ab)^3} (z-a)^2 + \dots$$

این سری به ازای $1 > \left| \frac{b(z-a)}{c-ab} \right| = \left| \frac{c-ab}{b} \right|^{-1} > \left| \frac{c-ab}{b} \right|^{-1} > \left| \frac{c-ab}{b} \right|^{-1}$ همگرا است.

مثال ۴. سری دو جمله‌ای، تحویل به کسرهای جزئی

سری تیلور تابع زیر را به مرکز $z_0 = 1$ بیابید

$$f(z) = \frac{2z^2 + 9z + 5}{z^2 + z^2 - 8z - 12}$$

حل. تابع گویای مورد نظر را نخست به صورت مجموع کسرهای جزئی نمایش می‌دهیم و سپس سری

دو جمله‌ای

$$\frac{1}{(1+z)^m} = (1+z)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-m}{n} z^n \quad (2)$$

$$= 1 - mz + \frac{m(m+1)}{2!} z^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{3!} z^3 + \dots$$

را به کار می‌بریم. چون تابع سمت چپ در $z = -1$ تکینگی دارد، سری در قرص $|z| < 1$ همگرا

است. تابع $f(z)$ را به صورت

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{2}{z-3} = \frac{1}{[3+(z-1)]^2} - \frac{2}{2-(z-1)}$$

$$f(z) = \frac{1}{9 \left[1 + \frac{1}{3}(z-1) \right]^2} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}(z-1)}$$

می نویسیم. هم اکنون با استفاده از سری دو جمله ای می یابیم

$$f(z) = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} \left(\frac{z-1}{3} \right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{2} \right)^n.$$

دو سری سمت راست را می توان جمله به جمله جمع نمود. چون ضریب دو جمله ای در سری اول

$$\text{برابر با } (-1)^n (n+1) = \frac{(-2)(-3)\dots(-[n+1])}{n!} \text{ است، می یابیم}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n (n+1)}{3^{n+2}} - \frac{1}{2^n} \right] (z-1)^n = -\frac{1}{9} - \frac{31}{54} (z-1) - \frac{23}{108} (z-1)^2 - \dots$$

چون $z = 3$ نزدیکترین نقطه تکین $f(z)$ به مرکز $z = 1$ است، سری در قرص $|z-1| < 2$ همگرا است.

مثال ۵. موارد استعمال معادلات دیفرانسیل

سری مکلورن $f(z) = \tan z$ را بیابید.

حل. داریم $f'(z) = \sec^2 z$ و بنابراین، چون $f(0) = 0$ ، داریم

$$f'(z) = 1 + f^2(z), \quad f'(0) = 1.$$

نظر به اینکه $f(0) = 0$ ، با مشتگیری متوالی می یابیم

$$f'' = 2ff', \quad f''(0) = 0,$$

$$f''' = 2f'^2 + 2ff'', \quad f'''(0) = 2, \quad \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{3},$$

$$f^{(4)} = 6f'f'' + 2ff''', \quad f^{(4)}(0) = 0,$$

$$f^{(5)} = 6f'^3 + 8f'f''^2 + 2ff^{(4)}, \quad f^{(5)}(0) = 16, \quad \frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{2}{15},$$

و نظایر آن. از این رو نتیجه می گیریم

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \dots \quad (|z| < \frac{\pi}{2}). \quad (3)$$

مثال ۶. ضرایب نامشخص

سری مکلورن $\tan z$ را با استفاده از سریهای مکلورن $\cos z$ و $\sin z$ (بخش ۴. ۱۴) بیابید.

حل. چون $\tan z$ تابعی فرد است، بسط موردنظر به صورت زیر می باشد

$$\tan z = a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \dots$$

با استفاده از $\sin z = \tan z \cos z$ و وارد کردن بسطهای آنها می یابیم

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots = (a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots) \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \dots \right).$$

چون $\tan z$ در همه جا، به جز در $z = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$ ، تحلیلی است، سری ملکورن آن در

قرص $|z| < \frac{\pi}{2}$ همگرا است، و برای این z ها می توان حاصلضرب کوشی را برای دو سری سمت راست تشکیل داد (ر.ک. بخش ۱۴.۳)، یعنی دو سری را جمله به جمله در هم ضرب می کنیم و سری حاصل را بر حسب توانهای z مرتب می کنیم. بنا به قضیه ۲ بخش ۱۴.۳، ضرایب هر توان z در دو طرف باهم مساوی هستند. این مطلب به

$$1 = a_1, \quad \frac{1}{3!} = -\frac{a_1}{2!} + a_2, \quad \frac{1}{5!} = \frac{a_1}{4!} - \frac{a_2}{2!} + a_3,$$

و غیره منجر می گردد. از این رو مانند قبل داریم $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{1}{15}$ و الی آخر.

مسائل بخش ۱۴.۵

سری ملکورن توابع زیر را بیابید و شعاع همگرایی آنها را تعیین کنید.

$$\begin{array}{lll} ۱. \frac{1}{1+z^2} & ۲. \frac{1}{1-z^2} & ۳. \frac{z+2}{1-z^2} \\ ۴. \frac{4-3z}{(1-z)^2} & ۵. \sin 2z^2 & ۶. \frac{1}{(z+3-4i)^2} \\ ۷. \frac{e^{z^2}-1}{z^2} & ۸. e^{z^2} \int_0^z e^{-t^2} dt & ۹. \frac{2z^2+15z+34}{(z+4)^2(z-2)} \end{array}$$

سری تیلور هر یک از توابع زیر را در نقطه داده شده به عنوان مرکز بیابید و شعاع همگرایی آنها را مشخص کنید.

$$\begin{array}{lll} ۱۰. 1, \frac{1}{z} & ۱۱. 1+i, \frac{1}{z} & ۱۲. -2i, \frac{1}{(z+i)^2} \\ ۱۳. i, z^2+z^2-z & ۱۴. 1-i, (z+i)^2 & ۱۵. -1, \frac{1+z-\sin(z+1)}{(z+1)^2} \\ ۱۶. -\pi i, e^z & ۱۷. \frac{\pi i}{2}, \cosh z & ۱۸. \frac{1}{2}, \sin \pi z \end{array}$$

سه جمله اول غیر صفر سری تیلور هر یک از توابع زیر را در نقطه داده شده به عنوان مرکز بیابید و شعاع همگرایی آنها را تعیین نمایید.

$$\begin{array}{lll} ۱۹. e^{z^2} \sin z^2 & ۲۰. \frac{\cos 2z}{1-4z^2} & ۲۱. \frac{\pi}{4}, \tan z \end{array}$$

$$-۱, \frac{۴-۶z}{۲z^۲-۳z+۱} \quad ۰, \cos\left(\frac{z}{۳-z}\right) \quad ۰, \frac{e^{z^۲}}{\cos z}$$

۲۲. $\frac{e^{z^۲}}{\cos z}$ ۲۳. $\cos\left(\frac{z}{۳-z}\right)$ ۲۴. $\frac{۴-۶z}{۲z^۲-۳z+۱}$

۲۵. (اعداد اویلر) سری مکلورن

$$\sec z = E_0 - \frac{E_1}{۲!}z^۲ + \frac{E_2}{۴!}z^۴ - + \dots \quad (۴)$$

معرف اعداد اویلر E_n است. نشان دهید که $E_0 = ۱, E_1 = -۱, E_2 = ۵, E_3 = -۶۱$.

۲۶. (اعداد برنولی) سری مکلورن

$$\frac{z}{e^z - 1} = ۱ + B_1 z + \frac{B_2}{۲!} z^۲ + \frac{B_3}{۳!} z^۳ + \dots \quad (۵)$$

اعداد برنولی B_n را تعریف می کند. با استفاده از روش ضرایب نامعین نشان دهید که

$$B_1 = -\frac{۱}{۲}, B_2 = \frac{۱}{۶}, B_3 = ۰, B_4 = -\frac{۱}{۳۰}, B_5 = ۰, B_6 = \frac{۱}{۴۲}, \dots \quad (۶)$$

۲۷. با استفاده از (۱)، (۲)، بخش ۱۲. ۷، و (۵) نشان دهید که

$$\tan z = \frac{۲i}{e^{۲iz} - 1} - \frac{۴i}{e^{۴iz} - 1} - i = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{۲^{۲n}(۲^{۲n} - 1)}{(۲n)!} B_{۲n} z^{۲n-1} \quad (۷)$$

۲۸. با بسط $\frac{۱}{\sqrt{۱-z^۲}}$ و انتگرالگیری، نشان دهید که

$$\sin^{-1} z = z + \left(\frac{۱}{۲}\right) \frac{z^۳}{۳} + \left(\frac{۱.۳}{۲.۴}\right) \frac{z^۵}{۵} + \left(\frac{۱.۳.۵}{۲.۴.۶}\right) \frac{z^۷}{۷} + \dots \quad (|z| < ۱)$$

نشان دهید که این سری مقدار اصلی $\sin^{-1} z$ را نمایش می دهد (تعریف مقدار اصلی در مساله ۴۵، بخش ۱۲. ۸ آمده است).

۲۹. آیا شعاع همگرایی در مثال ۳ همان است که از صورت تابع داده شده انتظار داریم؟

۳۰. سری مکلورنی بیابید که تابع متناظر بیش از یک نقطه تکین روی دایره همگرایی داشته باشد.

۱۴. ۶ همگرایی یکنواخت

می دانیم که سریهای توانی به طور مطلق همگرا می باشند (بخش ۲. ۱۴، قضیه ۱) و، به عنوان یک خاصیت اساسی دیگر، اینکه نشان می دهیم که آنها همگرای یکنواخت می باشند. چون همگرایی یکنوا از اهمیت عمومیتری برخوردار است، برای مثال، در ارتباط با انتگرالگیری جمله به جمله سریها، به طور کامل آن را توضیح خواهیم داد.

برای تعریف همگرایی یکنواخت یک سری، فرض می کنیم که جملات سری توابع $f_0(z), f_1(z), \dots$ باشند، یعنی

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m(z) = f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \dots \quad (1)$$

برای حالت خاص $f_m(z) = a_m(z - z_0)^m$ سری (۱) یک سری توانی است. فرض کنیم که این سری به ازای هر z واقع در ناحیه G همگرا باشد. حاصلجمع این سری را $S(z)$ می نامیم و n امین مجموع جزئی آن را با $S_n(z)$ نمایش می دهیم؛ باتوجه به این مفروضات می یابیم

$$S_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z).$$

همگرایی در G بدان معنی است که اگر $z = z_1$ یک نقطه واقع در G باشد، آنگاه بنا به تعریف همگرایی به ازای هر عدد مثبت ϵ عددی مثل $N_1(\epsilon)$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $n > N_1(\epsilon)$ داشته باشیم

$$|S(z_1) - S_n(z_1)| < \epsilon.$$

همینطور اگر z_2 یک نقطه دیگر در G باشد، آنگاه به ازای همان ϵ مفروض برای z_1 عددی مانند $N_2(\epsilon)$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $n > N_2(\epsilon)$ داشته باشیم

$$|S(z_2) - S_n(z_2)| < \epsilon$$

و همینطور برای بقیه نقاط واقع در G از این رو، به ازای یک $\epsilon > 0$ مفروض، با هر z واقع در G یک عدد $N_z(\epsilon)$ متناظر قرار می گیرد. این عدد به ما می گوید که چه تعداد جمله (به کدام S_n نیاز داریم) برای یک z نیاز داریم تا $|S(z) - S_n(z)|$ را کوچکتر از ϵ کنیم. این موضوع سرعت همگرایی را می سنجد.

$N_z(\epsilon)$ کوچک به معنی همگرایی سریع و $N_z(\epsilon)$ بزرگ به معنی همگرایی کند می باشند. حال اگر بتوانیم یک $N(\epsilon)$ بزرگتر از تمام این $N_z(\epsilon)$ ها پیدا کنیم، گوئیم که همگرایی سری (۱) در G یکنوا است.

تعریف (همگرایی یکنواخت)

سری (۱) با مجموع $S(z)$ را به طور یکنواخت همگرا در ناحیه G نامند هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ یک عدد $N = N(\epsilon)$ ، مستقل از z موجود باشد، به طوری که به ازای هر $n > N$ و هر z در واقع در G داشته باشیم

$$|S(z) - S_n(z)| < \epsilon.$$

همگرایی یکنوا خاصیتی است که همیشه به مجموعه ای نامتناهی از صفحه z مربوط می باشند.

مثال ۱. سری هندسی

نشان دهید که سری هندسی $1 + z + z^2 + \dots$ (الف) در هر قرص بسته $|z| \leq r < 1$ همگرای یکنواخت

است، (ب) درکل قرص همگرایی $|z| < 1$ همگرایی یکنواخت نیست.
 حل. (الف) به ازای z واقع در قرص بسته داریم $|1 - z| \geq 1 - r$. با توجه به این موضوع داریم که

$$\frac{1}{|1 - z|} \leq \frac{1}{1 - r}$$
 از این رو (3^*) یا (3) از بخش ۱۴. ۴ با $q = z$ را به خاطر بیاورید)

$$|S(z) - S_n(z)| = \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} z^m \right| = \left| \frac{z^{n+1}}{1 - z} \right| \leq \frac{r^{n+1}}{1 - r}$$

چون $r < 1$ ، می توان طرف راست را با انتخاب n به قدر کافی بزرگ، کوچک نمود، و چون طرف راست به z (واقع در قرص بسته موردنظر) بستگی ندارد. بنابراین همگرایی یک همگرایی یکنوا است.

(ب) به ازای عدد حقیقی K (مهم نیست که چقدر بزرگ باشد) و n مفروض همواره می توان

یک z در قرص $|z| < 1$ ، برای سادگی با انتخاب z به اندازه کافی نزدیک به ۱، طوری یافت که

$$\frac{|z^{n+1}|}{|1 - z|} = \frac{|z|^{n+1}}{|1 - z|} > K.$$

بنابراین هیچ $N(\varepsilon)$ ای نمی توان یافت که $|S(z) - S_n(z)|$ بر سراسر قرص موردنظر از $\varepsilon > 0$ کوچکتر باشد. بنا به تعریف، این مطلب نشان می دهد که همگرایی سری هندسی در $|z| < 1$ یکنواخت نیست.

این مثال اذعان می دارد که برای یک سری توانی، همگرایی یکنوا ممکن است در نزدیکی دایره

همگرایی آشفته شود که درستی این مطلب را قضیه زیر تایید می کند.

قضیه ۱ (همگرایی یکنواخت سری توانی)

سری توانی

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^m \quad (2)$$

با شعاع همگرایی غیر صفر R ، در هر قرص مستدیر $|z - z_0| \leq r$ به شعاع $r < R$ همگرایی یکنواخت است.

اثبات. به ازای $r \leq |z - z_0|$ و هر عدد صحیح مثبت n و p داریم

$$|a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots + a_{n+p}(z - z_0)^{n+p}| \leq |a_{n+1}|r^{n+1} + \dots + |a_{n+p}|r^{n+p}. \quad (3)$$

حال، بنا به قضیه ۱ بخش ۱۴. ۲، اگر $|z - z_0| = r < R$ ، آنگاه (۲) به طور مطلق همگرا است. بنابراین از اصل همگرایی کوشی (بخش ۱۴. ۱) نتیجه می شود که، به ازای یک $\varepsilon > 0$ مفروض،

می توان $N(\varepsilon)$ ای یافت به قسمی که به ازای هر $n > N(\varepsilon)$ و $p = 1, 2, \dots$ داشته باشیم

$$|a_{n+1}|r^{n+1} + \dots + |a_{n+p}|r^{n+p} < \varepsilon.$$

از این نامساوی و (۳) می یابیم

$$|a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots + a_{n+p}(z - z_0)^{n+p}| < \varepsilon$$

که به ازای هر z ای واقع در قرص $|z - z_0| \leq r$ ، هر $n > N(\epsilon)$ و هر $p = 1, 2, \dots$ برقرار است. چون $N(\epsilon)$ مستقل از z است، این مطلب همگرایی یکنواخت را نشان می دهد، و قضیه به اثبات می رسد. قضیه ۱ به نیاز فوری ما که مربوط به یک سری توانی است، ارزش می دهد. مابقی این بخش را می توان برای تفهیم عمیق تر از مفهوم همگرایی مطلق، به شرح زیر فراهم نمود.

خواص سریهای به طور یکنواخت همگرا (اختیاری)

همگرایی یکنواخت اهمیت اصلی خود را از دو واقعیت زیر به دست می آورد.

۱. اگر یک سری از جملات پیوسته، به طور یکنواخت همگرا باشد، حاصل جمع آن نیز پیوسته است (قضیه ۲، به شرح زیر).

۲. تحت همان مفروضات، انتگرالگیری جمله به جمله مجاز است (قضیه ۳).

این مطالب نتایج دو سوال زیر است:

۱. چگونه ممکن است یک سری همگرا با جملات پیوسته دارای یک حاصل جمع ناپیوسته باشد؟ (مثال ۲).

۲. در انتگرالگیری جمله به جمله کجا اشکال پیش می آید؟ (مثال ۳).

یک سوال طبیعی دیگر عبارت است از:

۳. رابطه بین همگرایی مطلق و همگرایی یکنواخت چیست؟ جواب شگفت آور این است که هیچ رابطه ای بین شان نیست (مثال ۴).

در ذیل به شرح و توضیح سؤالات فوق پرداخته و برای آنها پاسخی می یابیم.

چنانچه آموختیم مجموع هر تعداد متناهی از توابع پیوسته یک تابع پیوسته است. ولی مثال ۳ نشان می دهد که این موضوع برای یک سری نامتناهی نادرست است حتی اگر همگرایی مطلق برقرار باشد و حال آنکه اگر یک سری حاصل از توابع پیوسته به طور یکنواخت همگرا باشد، حاصل جمع سری نیز پیوسته است. در این ارتباط قضیه زیر را داریم.

قضیه ۲ (پیوستگی حاصلجمع)

فرض کنید سری

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots$$

در یک ناحیه G همگرای یکنواخت بوده و حاصلجمع آن برابر $F(z)$ باشد و همچنین فرض کنید هر جمله $f_m(z)$ در نقطه ای مانند z_0 واقع در G پیوسته باشد، آنگاه تابع $F(z)$ نیز در z_0 پیوسته است.

اثبات. فرض کنید $S_n(z)$ ، n حاصلجمع جزئی سری و $R_n(z)$ باقیمانده متناظر به آن باشد، یعنی

$$S_n = f_0 + f_1 + \dots + f_n, \quad R_n = f_{n+1} + f_{n+2} + \dots$$

از آنجایی که سری همگرای یکنواخت است، به ازای یک $\varepsilon > 0$ مفروض می توان یک $n = N(\varepsilon)$ پیدا کرد به طوری که به ازای تمام Z های متعلق به G داشته باشیم

$$|R_N(z)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

چون $S_N(z)$ مجموع تعداد متناهی تابع است که همگی در Z_1 پیوسته می باشند، این مجموع در Z_1 پیوسته است. از این رو می توان یک $\delta > 0$ ای پیدا کرد به طوری که به ازای تمام Z های متعلق به G که در $|z - z_1| < \delta$ واقع می باشند، داشته باشیم

$$|S_N(z) - S_N(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

با استفاده از $F = S_N + R_N$ و نامساوی مثلثی (بخش ۱۲. ۲۰)، به ازای چنین Z هایی داریم

$$|F(z) - F(z_1)| = |S_N(z) + R_N(z) - [S_N(z_1) + R_N(z_1)]|$$

$$\leq |S_N(z) - S_N(z_1)| + |R_N(z)| + |R_N(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

این مطلب بیانگر این واقعیت است که $f(z)$ در Z_1 پیوسته است، و بدین طریق قضیه به اثبات میرسد.

مثال ۲. سری ای از جملات پیوسته با مجموع ناپیوسته

سری زیر را در نظر بگیرید

$$x^r + \frac{x^r}{1+x^r} + \frac{x^r}{(1+x^r)^2} + \frac{x^r}{(1+x^r)^3} + \dots \quad (x \text{ حقیقی است}).$$

از فرمول (۳*)، بخش ۱۴. ۴، برای یک حاصلجمع هندسی متناهی با $q = \frac{1}{1+x^r}$ استفاده می کنیم،

در نتیجه $\frac{1}{1-q} = \frac{1+x^r}{x^r}$ و برای n امین مجموع جزئی می یابیم

$$S_n(x) = 1 + x^r - \frac{1}{(1+x^r)^n}.$$

شکل جالب ۳۴* نشان می دهد که چه اتفاقی در حال رخ دادن است. مشاهده می کنیم که اگر $x \neq 0$ ، مجموع سری عبارت است از

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 1 + x^r,$$

اما به ازای $x = 0$ و به ازای هر n داریم

$$S_n(0) = 1 - 1 = 0,$$

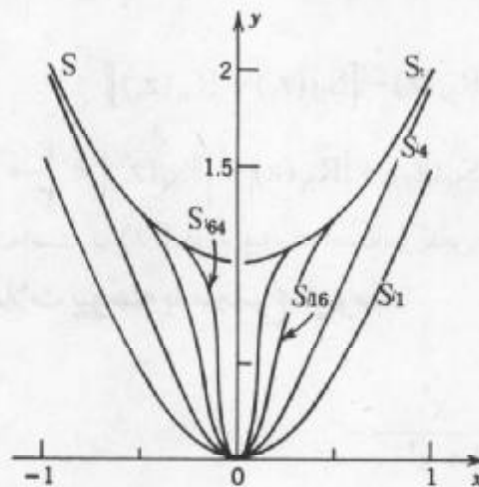
$$S(0) = 0.$$

بنابراین نتیجه تعجب آور این است که هرچند تمام جملات سری توابع پیوسته اند مجموع آنها (در $x = 0$) ناپیوسته است و حتی همگرایی سری به طور مطلق است (چون جملات نامنفی هستند، بنابراین این جملات با قدر مطلق خودشان برابرند!)

حال قضیه ۲ بیان می کند که همگرایی نمی تواند در یک فاصله شامل نقطه $x = 0$ ، همگرایی یکنواخت باشد. می توان درستی این مطلب را نیز به طور مستقیم تحقیق کرد. در واقع، به ازای $x \neq 0$ باقیمانده دارای قدر مطلق

$$|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

می باشد و مشاهده می کنیم که به ازای یک $\epsilon (< 1)$ مفروض نمی توان یک N تنها وابسته به ϵ یافت می شود به طوری که به ازای هر $n > N(\epsilon)$ و هر x ، یعنی در بازه $0 \leq x \leq 1$ ، داشته باشیم $|R_n| < \epsilon$.



شکل ۳۴۰. مجموعه های جزئی مثال ۲

انتگرالگیری جمله به جمله (اختیاری)

این دومین موضوع در ارتباط با همگرایی یکنواخت است، و برای احتیاط موضوع را با یک مثال شروع می کنیم.

مثال ۳. سری ای که انتگرالگیری جمله به جمله برای آن امکان پذیر نیست فرض کنید

$$u_m(x) = mx e^{-mx^2}$$

و سری زیر را در بازه $0 \leq x \leq 1$ در نظر می گیریم

$$f_m(x) = u_m(x) - u_{m-1}(x) \quad \text{که در آن} \quad \sum_{m=1}^{\infty} f_m(x)$$

n امین حاصل جمع جزئی عبارت است از

$$S_n = u_1 - u_0 + u_1 - u_1 + \dots + u_n - u_{n-1} = u_n - u_0 = u_n .$$

بنابراین سری دارای حاصلجمع

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1).$$

با توجه به آن می یابیم

$$\int_0^1 F(x) dx = 0 .$$

از طرفی، با انتگرالگیری جمله به جمله و با استفاده از $S_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ داریم

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 f_m(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \int_0^1 f_m(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(x) dx .$$

حال $S_n = u_n$ و عبارت سمت راست به صورت زیر درمی آید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 u_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n x e^{-nx} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (1 - e^{-n}) = \frac{1}{n} ,$$

که برابر صفر نیست. این موضوع نشان می دهد که اگر از سری جمله به جمله از $x = 0$ تا $x = 1$ انتگرال بگیریم مقدار حاصل با انتگرال مجموع حاصل برابر نیست.

سری ای را که در مثال ۳ آمده است درباره انتگرالگیری همگرای یکنواخت نیست، و اکنون

ثابت می کنیم که از یک سری همگرای مطلق از توابع پیوسته می توان جمله به جمله انتگرال گرفت.

قضیه ۳ (انتگرالگیری جمله به جمله)

فرض کنید

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots$$

یک سری همگرای یکنواخت از توابع پیوسته در ناحیه G باشد و همچنین فرض کنید C یک مسیر دلخواه واقع در G باشد. آنگاه سری

$$\sum_{m=0}^{\infty} \int_C f_m(z) dz = \int_C f_0(z) dz + \int_C f_1(z) dz + \dots \quad (4)$$

همگرا است و حاصلجمع آن برابر $\int_C F(z) dz$ می باشد.

اثبات. از قضیه ۲ نتیجه می شود که $F(z)$ پیوسته است. فرض کنید $S_n(z)$ ، n امین حاصلجمع جزئی سری مفروض و $R_n(z)$ باقیمانده متناظر با آن باشد. آنگاه $F = S_n + R_n$ و با انتگرالگیری،

$$\int_C F(z) dz = \int_C S_n(z) dz + \int_C R_n(z) dz .$$

فرض کنید L طول مسیر C باشد. چون سری مفروض همگرای یکنواخت است، به ازای هر $\epsilon > 0$

مفروض عددی مانند N می توان طوری پیدا کرد که به ازای هر $n > N$ و هر z واقع در G داشته باشیم

$$|R_n(z)| < \frac{\epsilon}{L} .$$

با به کارگیری نامساوی ML (بخش ۱۳، ۲۰)، به ازای هر $n > N$ می یابیم

$$\left| \int_C R_n(z) dz \right| < \frac{\varepsilon}{L} \cdot L = \varepsilon.$$

چون $R_n = F - S_n$ ، این بدین معنی است که به ازای هر $n > N$ داریم

$$\left| \int_C F(z) dz - \int_C S_n(z) dz \right| < \varepsilon.$$

بنابراین، سری (۴) همگرا است و مجموعی برابر آنچه در قضیه بیان شد دارد و بدین طریق قضیه به اثبات می رسد.

قضایای ۲ و ۳ مشخصه دوتا از مهمترین خاصیت‌های سریهای همگرای یکنواخت می باشند. نظر به اینکه روند مشتقگیری و انتگرالگیری معکوس یکدیگر می باشند، از قضیه ۳ به سادگی می یابیم که از یک سری همگرا می توان جمله به جمله مشتقگیری کرد، مشروط بر اینکه جملات سری مفروض مشتقات پیوسته داشته باشند و سری حاصل همگرای یکنواخت باشد، به طور دقیقتر، قضیه زیر برقرار است:

قضیه ۴ (مشتقگیری جمله به جمله)

فرض کنید سری $f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \dots$ در ناحیه G همگرا بوده و $F(z)$ مجموع این سری باشد. همچنین فرض کنید که سری $f'_0(z) + f'_1(z) + f'_2(z) + \dots$ در G همگرای یکنواخت بوده و جملات این سری در G پیوسته باشند. آنگاه به ازای هر z واقع در G داریم

$$F'(z) = f'_0(z) + f'_1(z) + f'_2(z) + \dots$$

اثبات این قضیه چندان دشوار نیست و به عنوان یک تمرین به متعلم واگذار می شود (مساله ۱۸).

آزمونی برای همگرایی یکنواخت (اختیاری)

معمولاً همگرایی یکنواخت را بنا به آزمون مقایسه ذیل اثبات می کنند.

قضیه ۵ (آزمون M و ایراشتراس^۸ برای همگرایی یکنواخت)

سری ای به صورت (۱)، در ناحیه G از صفحه Z را در نظر می گیریم. فرض می کنیم که یک سری همگرا با جملات ثابت،

۸- کارل وایرشراس KARL WEIERSTRASS (۱۸۱۵ - ۱۸۹۷)، ریاضیدان بزرگ آلمانی، که آنالیز مختلط را بر پایه سری توانی بنا نهاد (ر. ک. زیرنویس بخش ۱۲، ۵). همچنین، او تحقیقات جالبی در زمینه های حساب دیفرانسیل و انتگرال، حساب تغییرات، نظریه تقریب، هندسه دیفرانسیل انجام داده است. اگر وایرشراس در سال ۱۸۴۱ (منشر شده در سال ۱۹۸۴) مفهومی همگرایی یکنواخت را ارائه نموده اند، اولین موضوع منتشر شده در این ارتباط توسط ج. ج. استوکس G.G. STOKES (ر. ک. بخش ۹، ۹) در سال ۱۸۴۷ و فیلیپ لودویگ فون سایدل PHILIPP LUDWIG VON SEIDEL صورت پذیرفت.

$$M_0 + M_1 + M_2 + \dots \quad (5)$$

موجود باشد که به ازای هر z متعلق به G و هر $m = 0, 1, \dots$ داشته باشیم

$$|f_m(z)| \leq M_m$$

آنگاه سری (۱) در G همگرایی یکنواخت است.

اثبات این قضیه به عنوان یک تمرین در مساله ۱۷ از متعلم خواسته شده است.

مثال ۴. آزمون M و ایرشتراس

آیا سری زیر در هر قرص $|z| \leq 1$ همگرایی یکنواخت است؟

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m + 1}{m^2 + \cosh m|z|}$$

حل. بنا به آزمون M و ایرشتراس و همگرایی سری عددی $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m^2}$ (ر.ک. بخش ۱۴.۱، در اثبات قضیه ۸) نتیجه می شود که سری مفروض همگرایی یکنواخت است زیرا

$$\left| \frac{z^m + 1}{m^2 + \cosh m|z|} \right| \leq \frac{|z|^m + 1}{m^2} \leq \frac{2}{m^2}$$

عدم وجود ارتباط بین همگرایی مطلق و یکنواخت

در پایان حقایق تعجب آوری را نشان می دهیم که سری ای وجود دارد که همگرایی مطلق است ولی همگرایی یکنواخت نیست، و دیگر آنکه سری ای وجود دارد که همگرایی یکنواخت است ولی همگرایی مطلق نیست و در نتیجه هیچ رابطه ای بین این دو مفهوم وجود ندارد.

مثال ۵. عدم وجود ارتباط بین همگرایی مطلق و همگرایی یکنواخت

همانطوری که نشان دادیم، سری مثال ۲ همگرایی مطلق است ولی همگرایی یکنواخت نیست. از طرفی دیگر، سری

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{x^2 + m} = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 2} + \frac{1}{x^2 + 3} - \dots$$

که در آن x یک عدد حقیقی است، روی خط حقیقی، همگرایی یکنواخت است ولی همگرایی مطلق نیست.

اثبات. بنا به آزمون معروف لایبنیتز حساب دیفرانسیل و انتگرال (ر.ک. ضمیمه ۳. A۳)

باقیمانده R_n از قدر مطلق اولین جمله اش تجاوز نمی کند، چون یک سری با جملات متناوب داریم که قدر مطلقهای آن یک دنباله صعودی یکنواخت با حد صفر را تشکیل می دهند. بنابراین، به ازای $\varepsilon > 0$

مفروض و برای تمام x ها، داریم که اگر $n > N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ ، آنگاه

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{x^r + n + 1} < \frac{1}{n} < \epsilon.$$

این موضوع به علت اینکه $N(\epsilon)$ از x مستقل است همگرایی یکنواخت را نشان می دهد. همگرایی مطلق نیست زیرا

$$\left| \frac{(-1)^{m-1}}{x^r + m} \right| = \frac{1}{x^r + m} > \frac{k}{m}$$

(k یک ثابت مناسب) و $\sum \frac{1}{m}$ واگرا است.

مسائل بخش ۱۴ . ۶

ثابت کنید که سریهای زیر در نواحی داده شده به طور یکنواخت همگرا می باشند.

۱. $|z| \leq 0.999, \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ ۲. $|z| \leq 10^6, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^{n+1}}}{(2n+1)!}$

۳. $|z| \leq 0.56, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{n^2} z^{2^n}$ ۴. $|z| \leq 1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$

۵. تمام z ها، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n|z|}{n^2}$ ۶. تمام z ها، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n |\pi z|}{n(n+1)}$

۷. $|z| \leq 1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^n}{n^2 + |z|}$ ۸. $|z| \leq 1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 \cosh n|z|}$

۹. تمام z ها، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh^n |z|}{n(n+1)}$ ۱۰. $2 \leq |z| \leq 3, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{|z|^{2^n} + 2}$

سریهای توانی ذیل به ازای چه مقادیر z همگرای یکنواخت هستند؟

۱۱. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^{2^n}}{3^n}$ ۱۲. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1+i)^n}{n!}$

۱۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n} z^n$ ۱۴. $\sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{2} (2z+i)^n$

۱۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2} (z-i)^n$ ۱۶. $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n \tanh n) z^{2^n}$

۱۷. آزمون M و ایرشتراس (قضیه ۵) را ثابت کنید.

۱۸. قضیه ۴ را با استفاده از قضیه ۳ نتیجه بگیرید.

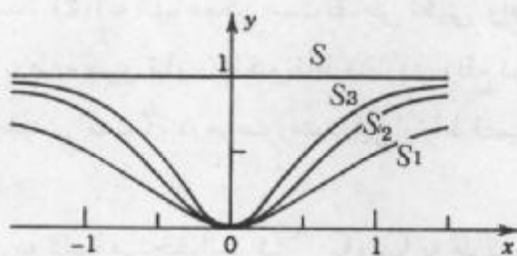
۱۹. اگر سری (۱) در ناحیه G همگرای یکنواخت باشد، نشان دهید که در هر قسمتی از G همگرایی

یکنواخت است. آیا عکس این مطلب درست است؟

۲۰. ناحیه همگرایی سری مثال ۲ را وقتی که جای x متغیر مختلط z قرار گیرد به طور دقیق بیابید.

۲۱. کوچکترین عدد صحیح n را طوری مشخص کنید که به ازای آن در مثال ۱، اگر $z = x = 0/5, 0/6, 0/7, 0/8, 0/9$ داشته باشیم $|R_n| < 0/01$. از نقطه نظر هندسی محاسبه $\frac{1}{1-x}$ به کمک سری هندسی با خطای مطلق کمتر از $0/01$ به چه معنایی است؟

۲۲. نشان دهید که مقدار سری $\sum_{m=1}^{\infty} (1+x^2)^{-m}$ به ازای $x \neq 0$ برابر ۱ و به ازای $x = 1$ برابر صفر است. با محاسبات حاصلجمع های جزئی S_1, S_2, S_3 تحقیق کنید که آنها دارای نمودارهایی هستند که در شکل ۳۴۱ آمده اند. و S_1, S_2, S_3 را محاسبه و نمودار آنها را نیز رسم کنید.



شکل ۳۴۱. حاصلجمع S و حاصلجمع های جزئی در مساله ۲۲

معادله گرما. نشان دهید که (۱۰)، بخش ۱۱. ۵، با ضرایب (۱۱)، به ازای هر $t > 0$ جواب معادله گرما است، فرض کنید $f(x)$ در بازه $0 \leq x \leq L$ پیوسته بوده و همچنین در تمام نقاط داخلی آن بازه از یک طرف مشتق داشته باشد. برای پاسخ به سوال فوق به شرح زیر عمل کنید.

۲۳. نشان دهید که $|B_n|$ کراندار است، یعنی به ازای هر n ، $|B_n| < K$ و از آنجا نتیجه بگیرید که به ازای $t_0 > 0$ داریم $|u_n| < Ke^{-\lambda_n t_0}$. و سپس به کمک آزمون ویرشتراس، ثابت کنید سری (۱۰) نسبت به x و t وقتی که $t \geq t_0$ و $0 \leq x \leq L$ همگرای یکنواخت است. با استفاده از قضیه ۲ نشان دهید که $u(x, t)$ ، وقتی $t \geq t_0$ ، پیوسته است و بنابراین به ازای $t \geq t_0$ ، در شرایط کرانه ای (۲) صدق می کند.

۲۵. نشان دهید که اگر $t \geq t_0$ ، آنگاه داریم $\left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| < \lambda_n^2 Ke^{-\lambda_n t_0}$ و سری عبارات سمت راست، بنا به آزمون نسبت، همگرا است. با استفاده از این موضوع، آزمون ویرشتراس، و قضیه ۴ نتیجه بگیرید که از سری (۱۰) می توان جمله به جمله نسبت به t مشتق گرفت و مجموع سری حاصل برابر $\frac{\partial u}{\partial t}$ است. نشان دهید که از (۱۰) می توان دومرتبه نسبت به x مشتق گرفت و مجموع سری حاصل

برابر $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ است. به کمک این موضوع و نتیجه مساله ۲۳ نتیجه بگیرید که (۱۰) به ازای هر $t \geq t_0$ جوابی برای معادله گرما است. (اثبات اینکه (۱۰) در شرایط اولیه مفروض صدق می کند را می توان در

مرجع [C۱۲] ضمیمه ۱ یافت.

۷.۱۴ سری لوران

در کاربردها لازم است که تابع $f(z)$ حول نقاطی که در آنها تحلیلی نیست، اما در آنها تکین (همانند تعریف بخش ۴.۱۴) است بسط داد. قضیه تیلور را در چنین مواردی نمی توان به کار برد و در اینجا نیاز به سری جدیدی داریم که به سری لوران موسوم است. این سری شامل توانهای صحیح مثبت و منفی بر حسب $z - z_0$ و در یک طوق (محصور بین دو دایره به مرکز z_0) $f(z)$ تحلیلی است، یک سری همگرا می باشد. $f(z)$ نه تنها ممکن است نقاطی تکینی واقع در خارج دایره بزرگتر داشته باشد (همانند حالت مربوط به سری تیلور) بلکه نقاط منفردی واقع در داخل دایره کوچکتر نیز داشته باشد (که این خاصیت جدیدی است). در هر صورت در این ارتباط قضیه زیر را داریم.

قضیه ۱. قضیه لوران

اگر $f(z)$ روی دو دایره متحد المرکز C_1 و C_2 به مرکز z_0 و در طوق بین آنها تحلیلی باشد، آنگاه $f(z)$ را می توان با سری لوران

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (1)$$

$$= a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots$$

نمایش داد. ضرایب سری لوران فوق به صورت انتگرال^۱ بوده و عبارت اند از

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}} dz^*, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (z^* - z_0)^{n-1} f(z^*) dz^*, \quad (2)$$

هریک از این انتگرالها روی مسیر بسته ساده دلخواهی مانند C که در طوق قرار دارد و دایره داخلی را در میان می گیرد در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت گرفته می شود (شکل ۳۴۲).

این سریها همگرا است و $f(z)$ را در طوقی باز نمایش می دهد که از طوق داده شده به دست می آید اگر دایره C_1 را آنقدر بزرگ کنیم و دایره C_2 را آنقدر کوچک کنیم که هر یک از دو دایره به نقطه ای که در آن $f(z)$ تکین است برسند.

۹- یادآوری می کنیم که بنا به تعریف تحلیلی بودن، این بدان معناست که $f(z)$ در دامنه ای شامل طوق محصور به دو دایره کرانه ای تحلیلی است.

این قضیه به یاد ریاضیدان و مهندس فرانسوی، پیر آلفونس لوران FIERRE ALPHONSH LAURENT (۱۸۱۳-۱۸۵۴)، که در سال ۱۸۴۳ این مطلب را انتشار داد به نام او نامگذاری شده است.

۱۰- متغیر انتگرالگیری را با Z^* نشان دادیم زیرا z در $F(z)$ به کار گرفته شده است.

در یک حالت خاص مهم که z_0 تنها نقطه تکین $f(z)$ در داخل C_1 است، آنگاه همگرایی بر کل قرص به جز در z_0 حاکم است.

تبصره. بدیهی است که به جای (۱) و (۲) می توان نوشت (نمایش b_n با a_n)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (1')$$

که در آن

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}} dz^* \quad (2')$$

اثبات قضیه لوران. فرض کنید z نقطه ای دلخواه در طوق موردنظر باشد. آنگاه از فرمول انتگرال کوشی [۳] در بخش ۱۳. ۵] نتیجه می شود

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z^*)}{z^* - z} dz^* - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z^*)}{z^* - z} dz^* \quad (3)$$

که جهت انتگرالگیری روی C_1 و همچنین روی C_2 در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت است. حال این انتگرالها را به روشی شبیه آنچه در بخش ۱۴. ۴ مشاهده کردیم تبدیل می کنیم. انتگرال اول دقیقاً از همان نوع انتگرال (۱)، بخش ۱۴. ۴ می باشد، در نتیجه دقیقاً همان نتیجه را به صورت

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z^*)}{z^* - z} dz^* = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (4)$$

با ضرایب [ر. ک. (۹۰)، بخش ۱۴. ۱۴ انتگرالگیری در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت]

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}} dz^* \quad (5)$$

به دست می دهد. در اینجا می توان C را جایگزین C_1 نمود (ر. ک. شکل ۳۴۲)، بنا به اصل تغییر شکل مسیر، چون z_0 نقطه ای است که در آن تابع زیر علامت انتگرال (۵) تحلیلی نیست، و نقطه ای از طوق نیست. این مطلب فرمول a_n از (۲) را ثابت می کند.

حال نوبت به انتگرال دوم در (۳) می رسد و فرمول برای b_n را از آن به دست خواهیم آورد. چون z در طوق واقع است، این نقطه در خارج مسیر C_2 قرار دارد. بنابراین وضعیت متفاوتی نسبت به انتگرال اول وجود دارد. حال نکته اساسی این است که به جای (۲*) در بخش ۱۴. ۴ داریم

$$\left| \frac{z^* - z_0}{z - z_0} \right| < 1; \quad (6)$$

در نتیجه، باید $1/(z^* - z)$ را بر حسب توانهای $\frac{(z^* - z_0)}{(z^* - z_0)}$ بسط دهیم تا سری حاصل همگرا باشد.

سریهای توانی، سریهای تیلور، سریهای لوران

$$\frac{1}{z^* - z} = \frac{1}{z^* - z_0 - (z - z_0)} = \frac{-1}{(z - z_0) \left(1 - \frac{z^* - z_0}{z - z_0}\right)}$$

با مقایسه این فرمول با (۲) در بخش ۴.۱۴ تفاوت راحقیقتاً در می یابیم. آنگاه در مورد این عبارت و با استفاده از فرمول (۳)، بخش ۴.۱۴، برای یک سری هندسی متناهی به دست می آوریم

$$\frac{1}{z^* - z} = \frac{1}{z - z_0} \left\{ 1 + \frac{z^* - z_0}{z - z_0} + \left(\frac{z^* - z_0}{z - z_0}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z^* - z_0}{z - z_0}\right)^n \right\} - \frac{1}{z - z_0} \left(\frac{z^* - z_0}{z - z_0}\right)^{n+1}$$

برای آنکه آخرین انتگرال (۳) به دست آید این بسط را در $\frac{-f(z^*)}{(2\pi i)}$ ضرب می کنیم و روی C_r از آن انتگرال می گیریم. حال این مطلب به فرمول زیر منجر می گردد

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(z^*)}{z^* - z} dz = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{z - z_0} \oint_{C_r} f(z^*) dz^* + \frac{1}{(z - z_0)^2} \oint_{C_r} (z^* - z_0) f(z^*) dz^* + \dots + \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \oint_{C_r} (z^* - z_0)^n f(z^*) dz^* \right\} + R_n^*(z)$$

که در آن جمله آخر از طرف راست به صورت زیر می باشد

$$R_n^*(z) = \frac{1}{2\pi i (z - z_0)^{n+1}} \oint_{C_r} \frac{(z^* - z_0)^{n+1}}{z - z^*} f(z^*) dz^* \tag{۷}$$

همانند قبل انتگرال فوق را می توان به جای روی دایره C_r روی مسیر C گرفت. مشاهده می کنیم که در طرف راست، $\frac{1}{(z - z_0)^n}$ ، همانطوری که در (۲) فرض شده است، در b_n ضرب شده است. بدین طریق قضیه لوران، مشروط بر آنکه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^*(z) = 0, \tag{۸}$$

به اثبات می رسد. حال (۸) را اثبات می کنیم. قدرمطلق عبارت $\frac{f(z^*)}{(z - z^*)}$ در (۷) کراندار است، مثلاً

به ازای هر z^* روی C_r ، $\left| \frac{f(z^*)}{z - z_0} \right| < \tilde{M}$ ، زیرا $f(z^*)$ در طوق و روی C_r تحلیلی است، و z^* روی C_r و z در خارج آن قرار دارد، در نتیجه $z - z^* \neq 0$. از اینجا و با استفاده از نامساوی ML (بخش

۲.۱۳) در (۷) می یابیم (طول مسیر $C_r = L$)

$$|R_n^*(z)| \leq \frac{1}{2\pi |z - z_0|^{n+1}} |z^* - z_0|^{n+1} \bar{M}L = \frac{\bar{M}L}{2\pi} \left| \frac{z^* - z_0}{z - z_0} \right|^{n+1}$$

از (۶) می یابیم که عبارت سمت راست وقتی n به سمت بینهایت میل می کند به سمت صفر میل می کند. بدین طریق (۸) به اثبات می رسد. بنابراین نمایش (۱) با ضرایب (۲) در طوق مفروض برقرار است.

در نهایت همگرایی (۱) را در طوق مورد نظر که در پایان قضیه مشخص شده است ثابت می کنیم.

مجموع دو سری (۱) را به ترتیب با $g(z)$ و $h(z)$ ، و شعاعهای C_1 و C_2 را به ترتیب با r_1 و r_2 نمایش می دهیم، در این صورت $f = g + h$. سری اول یک سری توانی است. چون این سری در طوق همگرا است، لذا باید در سراسر قرص محصور به C_1 همگرا بوده و g آن قرص تحلیلی باشد.

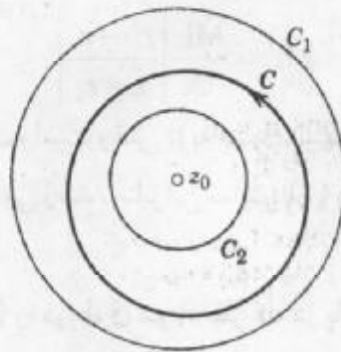
اگر قرار دهیم $Z = \frac{z-1}{z-z_0}$ ، در این صورت سری آخر به یک سری توانی بر حسب Z تبدیل

می شود. آنگاه طوق $r_1 < |z - z_0| < r_2$ با طوق $\frac{1}{r_2} < |Z| < \frac{1}{r_1}$ متناظر شده، سری جدید در این طوق

همگرا می باشد و بنابراین، در سراسر قرص $|Z| < \frac{1}{r_2}$ نیز همگرا می باشد. چون این قرص با $r_2 > |z - z_0|$ ، خارج C_2 ، متناظر است، سری مفروض به ازای تمام z های خارج C_2 همگرا است و h به ازای تمام z ها تحلیلی است.

چون $f = g + h$ ، از این رو در تمام نقاط خارج C_1 که f در آنها تکینی دارد g باید تکینی داشته باشد و در تمام نقاط داخل C_2 که f در آنها تکینی دارد h باید تکینی داشته باشد. در نتیجه، اولین سری به ازای تمام z های واقع در درون دایره ای به مرکز z_0 که شعاعش برابر با فاصله کوچکترین تکینی f در z_0 خارج C_1 است، همگرا می باشد. به روشی مشابه، سری دوم به ازای تمام z های واقع در خارج از دایره ای به مرکز z_0 که شعاعش برابر است با بزرگترین فاصله تکینی f در داخل C_2 ، همگرا است. دامنه مشترک این دو دامنه همگرایی طوق بازی است که در پایان قضیه مشخص شده است، و بدین طریق، قضیه لوران به اثبات می رسد.

یکتایی. سری لوران تابع تحلیلی داده شده $f(z)$ در طوق همگرایی خود منحصر به فرد است (ر. ک. مساله ۳۵). گرچه $f(z)$ ممکن است در دو طوق متحد المركز سریهای لوران متمایز داشته باشد؛ مثال زیر را مشاهده کنید. یکتایی مهم است، همانطوری که برای یک سری تیلور با به دست آوردن ضرایب سری حاصل می شود، معمولاً از فرمولهای انتگرال (۲) استفاده نمی شود بلکه از روشهای متعدد دیگری نتیجه می شود، برخی از این روشها در مثالهای زیر تشریح شده اند. اگر سری لورانی با چنین



شکل ۳۴۲. قضیه لوران

فرآیندی حاصل شود باید سری لوران تابع مفروض در طوق داده شده ای باشد.

مثال ۱. استفاده از سری مکلورن

سری لوران $\sin z$ z^{-1} به مرکز صفر را بیابید.

حل. بنا به (۱۴) بخش ۴.۱۴ می یابیم

$$z^{-1} \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} z^2 + \dots \quad (|z| > 0).$$

در اینجا «طوق» همگرایی سراسر صفحه مختلط بدون مبدا مختصات است.

مثال ۲. جایگزینی

سری لوران $e^{\frac{1}{z}}$ به مرکز صفر را بیابید.

حل. با استفاده از (۱۲)، بخش ۴.۱۴ با قرار دادن $\frac{1}{z}$ به جای z به دست می آوریم

$$z^{\frac{1}{z}} e^{\frac{1}{z}} = z^{\frac{1}{z}} \left(1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots \right) = z^{\frac{1}{z}} + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} + \dots \quad (|z| > 0).$$

مثال ۳. عبارت $\frac{1}{1-z}$ را (الف) بر حسب توانهای نامنفی z بسط دهید، (ب) همین تابع را بر حسب توانهای منفی z بسط دهید.

حل.

(الف) $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ، این تساوی به ازای $|z| < 1$ برقرار است.

(ب) $\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z(1-z^{-1})} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \dots$ این تساوی به ازای $|z| > 1$ برقرار است.

مثال ۴. بسطهای لوران در طوقهای متحد المركز متفاوت

بسطهای لوران $\frac{1}{z^2 - z}$ به مرکز صفر را بیابید.

حل. با ضرب کردن $\frac{1}{z^2}$ در طرفین روابط موجود در مثال ۳، می یابیم

$$\frac{1}{z^2 - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + \dots \quad (0 < |z| < 1), \quad (I)$$

$$\frac{1}{z^2 - z^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+2}} = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \dots \quad (|z| > 1). \quad (II)$$

مثال ۵. استفاده از کسرهای جزئی

سریهای تیلور ولوران $f(z) = \frac{-2z + 3}{z^2 - 3z + 2}$ به مرکز صفر را بیابید.

حل. نخست چنین می نویسیم

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}.$$

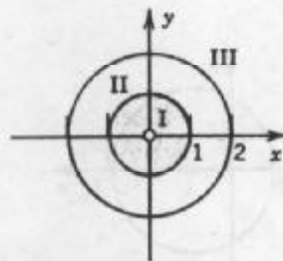
قسمتهای (الف) و (ب) از مثال ۳ به کسر اول مربوط می شود. برای کسر دوم داریم

$$-\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2(1 - \frac{1}{2}z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n \quad (|z| < 2), \quad (ج)$$

$$-\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z(1 - \frac{2}{z})} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} \quad (|z| > 2). \quad (د)$$

(I) از (الف) و (ج)، به ازای $|z| < 1$ معتبر است (ر.ک. شکل ۳۴۳):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \frac{1}{2^{n+1}}) z^n = \frac{3}{2} + \frac{5}{4}z + \frac{9}{8}z^2 + \dots$$



شکل ۳۴۳. نواحی همگرایی مثال ۵



(II) از (ب) و (ج)، به ازای $1 < |z| < 2$ داریم

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}z^2 + \dots - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \dots$$

(III) مطابق (د) و (ب)، به ازای $|z| > 2$ به دست می آوریم

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 1) \frac{1}{z^{n+1}} = -\frac{2}{z} - \frac{3}{z^2} - \frac{5}{z^3} - \frac{9}{z^4} - \dots$$

مثال ۶. سری لوران $\frac{1}{1-z^2}$ را طوری بیابید که در طوق $\frac{1}{4} < |z-1| < \frac{1}{2}$ همگرا باشد و ناحیه دقیق همگرایی را مشخص کنید.

حل. طوق دارای مرکز ۱ می باشد، در نتیجه باید

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z+1)}$$

را بر حسب توانهای $z-1$ بسط دهیم، داریم

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - \left(-\frac{z-1}{2}\right)} \right]$$

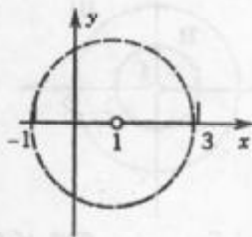
$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-1)^n;$$

این سری در قرص $\left| \frac{z-1}{2} \right| < 1$ ، یعنی $|z-1| < 2$ همگرا می باشد. با ضرب کردن طرفین تساوی فوق

در $-\frac{1}{z-1}$ ، سری مورد نظر به صورت زیر حاصل می شود

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (z-1)^{n-1} = \frac{-1}{2(z-1)} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}(z-1) + \frac{1}{16}(z-1)^2 - + \dots$$

ناحیه دقیق همگرایی ناحیه $0 < |z-1| < 2$ می باشد، شکل ۳۴۴ را ملاحظه کنید. این موضوع با توجه به اینکه $\frac{1}{z+1}$ از $f(z)$ در -1 ، در فاصله ۲ از مرکز نقطه تکین سری است، به اثبات می رسد.



شکل ۳۴۴. ناحیه همگرایی مثال ۶

اگر $f(z)$ در قضیه لوران در داخل C_r تحلیلی باشد، آنگاه بنا به قضیه انتگرال کوشی، ضرایب b_n در (۲) صفر هستند، در نتیجه سری لوران به سری تیلور تبدیل می شود. مثالهای ۳(الف) و ۵ (I) این مطلب را روشن می سازد.

مسائل بخش ۷.۱۴

توابع زیر را به سریهای لورانی که به ازای $0 < |z| < R$ همگرا باشند بسط دهید و ناحیه دقیق همگرایی را مشخص کنید.

$\frac{\cosh 2z}{z}$.۳	$\frac{\sin^4 z}{z^7}$.۲	$\frac{e^z}{z^7}$.۱
$\frac{1-2z}{4z-z^2}$.۶	$\frac{1}{z(1+z^2)}$.۵	$\frac{1}{z^2(1-z)}$.۴
$\frac{1}{z^6(1+z)^2}$.۹	$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^5}$.۸	$z \cos \frac{1}{z}$.۷

توابع زیر را به سریهای لورانی که به ازای $0 < |z - z_0| < R$ همگرا باشند بسط دهید و ناحیه دقیق همگرایی را معین کنید.

$z_0 = i, \frac{1}{z^2+1}$.۱۱	$z_0 = 1, \frac{e^z}{z-1}$.۱۰
$z_0 = \pi, \frac{\cos z}{(z-\pi)^2}$.۱۳	$z_0 = 0, z^2 \sinh \frac{1}{z}$.۱۲
$z_0 = 1, \frac{z^2-4}{z-1}$.۱۵	$z_0 = -2i, \frac{z^2}{(z+2i)^2}$.۱۴
$z_0 = -i, \frac{1}{(z+i)^2 - (z+i)}$.۱۷	$z_0 = \frac{\pi}{4}, \frac{\sin z}{(z-\frac{1}{4}\pi)^2}$.۱۶
	$z_0 = -1, \frac{1}{1-z^2}$.۱۸

سری تیلور یا لوران $\frac{1}{1-z^2}$ به مرکز داده شده را بیابید.

$0 < |z-1| < 2$.۲۱ $|z| > 1$.۲۰ $0 \leq |z| < 1$.۱۹

با استفاده از کسرهای جزئی، سری لوران $\frac{3z^2-6z+2}{z^2-3z^2+2z}$ به مرکز داده شده را بیابید.

$|z| > 2$.۲۴ $1 < |z| < 2$.۲۳ $0 < |z| < 1$.۲۲

سریهای تیلور و لوران هر یک از توابع زیر به مرکز $z = z_0$ را بیابید و ناحیه دقیق همگرایی را مشخص کنید.

$z_0 = 1, \frac{2}{1-z^2}$.۲۶	$z_0 = 0, \frac{1}{1-z^2}$.۲۵
$z_0 = i, \frac{1}{z}$.۲۸	$z_0 = 0, \frac{z^2}{1-z^2}$.۲۷

$$z_0 = 1, \frac{\sinh z}{(z-1)^2} \quad ۳۰$$

$$z_0 = 1, \frac{1}{z} \quad ۲۹$$

$$z_0 = i, \frac{z^2 - 2iz^2}{(z-i)^2} \quad ۳۲$$

$$z_0 = -\frac{1}{2}\pi, \frac{\sin z}{z + \frac{1}{2}\pi} \quad ۳۱$$

$$z_0 = 0, \frac{4z-1}{z^2-1} \quad ۳۳$$

۳۴. آیا $\tan\left(\frac{1}{z}\right)$ سری لورانی دارد که در ناحیه $0 < |z| < R$ همگرا باشد؟

۳۵. ثابت کنید که بسط لوران یک تابع تحلیلی داده شده در طوقی مفروض منحصر به فرد است.

۸.۱۴ تکینها و صفرها . بینهایت

به زبان عادی، نقطه تکین تابع تحلیلی $f(z)$ نقطه ای مانند z است که $f(z)$ در آن نقطه خاصیت تحلیلی بودن خود را از دست می دهد، و صفر تابع تحلیلی $f(z)$ نقطه ای مانند z است که در آن $f(z) = 0$. تعاریف دقیقتر در ذیل ارائه می شوند. تکینها را به کمک سری لوران می توان مورد بحث و بررسی قرارداد. این کاری است که در آغاز به آن می پردازیم. آنگاه نشان می دهیم که صفرها را به کمک سری تیلور می توان بررسی کرد.

گوئیم نقطه $z = z_0$ یک نقطه تکین یا یک نقطه منفرد تابع f^{-1} است اگر $f(z)$ در $z = z_0$ تحلیلی نباشد (احتمالاً حتی در آن نقطه تعریف نشده)، اما هر همسایگی $z = z_0$ شامل نقاطی باشد که $f(z)$ در آن نقاط تحلیلی باشد.

نقطه $z = z_0$ را نقطه تکین تنها $f(z)$ نامند اگر $z = z_0$ دارای یک همسایگی بدون تکینهای دیگر از $f(z)$ را در بر داشته باشد. مثال: $\tan z$ دارای تکینهای تنها در نقاط $\pm \frac{\pi}{2}$ ، $\pm \frac{3\pi}{2}$ و غیره

است؛ $\tan\left(\frac{1}{z}\right)$ دارای یک نقطه تکین غیر تنها در صفر است. (توضیح دهید!) نقاط تکین تنهای $f(z)$ در $z = z_0$ را می توان با سری لوران (بخش ۱۴. ۷)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (۱)$$

که در سراسر یک همسایگی نقطه تکین $z = z_0$ ، به جز در خود z_0 ، یعنی در ناحیه ای به صورت $0 < |z - z_0| < R$

برقرار است دسته بندی کرد همانطوری که از بخشهای قبل می دانیم، مجموع سری اول در $Z = Z_0$ تحلیلی است. سری دوم، که از توانهای منفی تشکیل شده است، را قسمت اصلی (۱) می نامند. اگر این قسمت فقط از تعدادمتهای جمله تشکیل شده باشد. یعنی قسمت اصلی به صورت

$$\frac{b_1}{z - z_0} + \dots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} \quad (b_m \neq 0), \quad (2)$$

باشد، آنگاه نقطه منفرد $f(z)$ در $Z = Z_0$ را قطب، و m را مرتبه قطب می نامند. قطبهای مرتبه اول به قطبهای ساده نیز موسوم اند.

اگر قسمت اصلی (۱) تعداد نامتهای جمله داشته باشد، گوئیم که $f(z)$ در $Z = Z_0$ دارای تکین اساسی تنها است.

نقاط تکین غیرتها را در اینجا رها می کنیم (ر. ک. مثال فوق).

مثال ۱. قطبها. تکینهای اساسی

تابع

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)^2} + \frac{3}{(z-2)^2}$$

در $Z = 0$ دارای یک قطب ساده و در $Z = 2$ دارای قطبی از مرتبه پنجم است. دو تابع زیر دارای تکین اساسی تنها در $Z = 0$ هستند

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots$$

$$\sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-(2n+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots$$

در بخش ۷.۱۴ مثالهای بیشتری ارائه می شود. به عنوان یک نمونه، مثال ۱ نشان می دهد

که $\sin z^{-2}$ دارای قطب مرتبه چهار در $Z = 0$ است و مثال ۴ نشان می دهد که $\frac{1}{z^2 - z}$ دارای قطب مرتبه سه در $Z = 0$ و یک سری لوران که دارای تعداد نامتهای توانهای منفی دارد. این یک تناقض نیست، چون این سری به ازای $|z| > 1$ اعتبار دارد؛ که بیان می کند که این مطلب کاملاً با اهمیت است که فرض کنیم سری لوران در سراسر همسایگی نقطه منفرد معتبر است.

این دسته بندی تکینها به قطبها و نقاط تکین اساسی صرفاً کاری صوری نیست، زیرا رفتار یک تابع تحلیلی در همسایگی یک نقطه تکین اساسی کاملاً با رفتار آن در همسایگی یک قطب متفاوت است.

مثال ۲. رفتار در نزدیکی قطب

تابع $f(z) = \frac{1}{z^2}$ دارای قطب $Z = 0$ است و هرگاه به هر طریق $z \rightarrow 0$ ، آنگاه $|f(z)| \rightarrow \infty$

باتوجه به این مثال داریم

قضیه ۱ (قطبها)

اگر $f(z)$ تحلیلی بوده و در $z = z_0$ دارای قطب باشد و هرگاه به هر طریقی $z \rightarrow z_0$ ، داریم $|f(z)| \rightarrow \infty$ (ر.ک. مساله ۱۶).

مثال ۳. رفتار در نزدیکی نقطه تکین اساسی

تابع $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ دارای یک نقطه تکین اساسی در $z = 0$ است. این تابع محدودیتی حول محور موهومی ندارد و وقتی از طریق مقادیر حقیقی مثبت به صفر میل می کند به بینهایت میل می کند، ولی وقتی z از طریق مقادیر حقیقی منفی به صفر میل می کند، به سمت صفر میل می کند. این تابع در یک همسایگی به دلخواه کوچک $z = 0$ هر مقدار داده شده ای مانند $c = c_0 e^{i\alpha} \neq 0$ را به خود نسبت می دهد. درحقیقت، با قراردادن $z = re^{i\theta}$ ، معادله

$$e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{\cos \theta - i \sin \theta}{r}} = c_0 e^{i\alpha}$$

را بر حسب r و θ باید حل نمود. با مساوی قرار دادن قدر مطلقها و آرگومانها، می یابیم که $e^{\frac{\cos \theta}{r}} = c_0$ ، یعنی

$$\cos \theta = r \ln c_0,$$

و

$$\sin \theta = -\alpha r.$$

از این دو معادله و $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ فرمولهای زیر حاصل می شوند

$$r^2 = \frac{1}{(\ln c_0)^2 + \alpha^2}$$

و

$$\tan \theta = -\frac{\alpha}{\ln c_0}.$$

بنابراین r را می توان با اضافه کردن مضارب 2π به α به دلخواه، بدون آنکه c تغییر کند، کوچک کرد. این مثال ایده ای برای ارائه قضیه مهم زیر است.

قضیه ۲ (قضیه پیکارد)^{۱۲}

اگر $f(z)$ تحلیلی بوده و در نقطه z_0 یک تکینی اساسی تنها داشته باشد، آنگاه در هر همسایگی کوچک از z_0 بجز یک مقدار استثنایی، هر مقدار را می تواند اختیار کند.

در مثال ۳، این مقدار استثنایی $z = 0$ است. اثبات قضیه پیکارد نسبتاً پیچیده است و در مرجع [D ۱۰] می توان این اثبات را یافت.

تکینهای برداشتنی. گوئیم که تابع f یک نقطه تکین برداشتنی در $z = z_0$ دارد اگر این تابع در $z = z_0$ تحلیلی نباشد، اما بتوان با نسبت دادن یک مقدار مناسب $f(z_0)$ آن را به یک تابع تحلیلی تبدیل کرد. این نوع نقاط تکین مورد توجه نیستند زیرا همانطور که گفته شد قابل برداشتنی هستند. مثال: $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ در $z = 0$ تحلیلی نیست ولی اگر تعریف کنیم $f(0) = 1$ ، آنگاه به یک تابع تحلیلی در $z = 0$ تبدیل می شود. بنابراین برای $z = 0$ یک نقطه تکین برداشتنی برای این تابع است.

صفرهای توابع تحلیلی

گوئیم که تابع $f(z)$ ، که در دامنه D تحلیلی است، یک صفر در نقطه $z = z_0$ واقع در D دارد اگر $f(z_0) = 0$ و همچنین گوئیم که $f(z)$ صفری از مرتبه n در نقطه $z = z_0$ دارد اگر $z = z_0$ نه فقط صفر f بلکه صفر مشتقات f' ، f'' ، \dots ، $f^{(n-1)}$ نیز باشد و $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. صفر مرتبه اول را صفر ساده نیز می نامند؛ مثلاً اگر $f(z_0) = 0$ ولی $f'(z_0) \neq 0$ آنگاه z_0 یک صفر ساده برای $f(z)$ است. برای یک صفر مرتبه دو داریم $f(z_0) = 0$ ، $f'(z_0) = 0$ ولی $f''(z_0) \neq 0$ ، همینطور برای سایر صفرها.

مثال ۴. صفرها

تابع $1 + z^2$ صفرهای ساده ای در $\pm i$ دارد. تابع $(1 - z^2)^2$ صفرهای مرتبه دوم در ± 1 و $\pm i$ دارد. تابع $(z - a)^2$ صفری از مرتبه سوم در $z = a$ دارد. تابع e^z صفری ندارد (ر.ک. بخش ۱۲. ۶). تابع $\sin z$ صفری ساده ای در $\dots, \pm 2\pi, \pm \pi, 0$ و صفرهای مرتبه دوم در همین نقاط دارند. تابع $1 - \cos z$ صفرهای مرتبه دوم در $\dots, \pm 4\pi, \pm 2\pi, 0$ و $(1 - \cos z)^2$ صفرهای مرتبه چهارم در همین نقاط دارند.

سری تیلور در یک صفر. بنا به تعریف، تمام مشتقات $f'(z_0)$ ، \dots ، $f^{(n-1)}(z_0)$ در صفری از مرتبه n نقطه $z = z_0$ از $f(z)$ برابر صفراند. بنابراین ضرایب a_0, \dots, a_{n-1} در سری تیلور (۹)، بخش ۱۴. ۴، همگی برابر صفر می باشند، از آنجایی که $a_n \neq 0$ ، سری زیر حاصل می شود

$$f(z) = a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots$$

$$= (z - z_0)^n [a_n + a_{n+1}(z - z_0) + a_{n+2}(z - z_0)^2 + \dots] \quad (a_n \neq 0). \quad (3)$$

این مطلب مشخص کننده چنین صفری است، زیرا $f(z)$ دارای چنین سری تیلوری است. همانطوری که از مشتقگیری نتیجه می شود، این سری دارای صفری از مرتبه n در $z = z_0$ است.

از آنجایی که نقاط تکین غیر تنها می تواند اتفاق بیفتد، برای صفرها قضیه زیر را داریم.

قضیه ۳ (صفرها)

صفرهای یک تابع تحلیلی $f(z) (\neq 0)$ تنها می باشند؛ یعنی، هریک از آنها یک همسایگی دارند که شامل صفرهای دیگری از $f(z)$ نیست.

اثبات. در (۳)، ضریب $(z - z_0)^n$ تنها در $z = z_0$ صفر است. سری توانی درکروشه های $[\dots]$ (بنا به قضیه ۵، بخش ۳.۱۴) یک تابع تحلیلی را نشان می دهد که آن را $g(z)$ می نامیم. حال $g(z_0) = a_n \neq 0$ ، نظر به اینکه یک تابع تحلیلی پیوسته است، و از طرفی $g(z)$ پیوسته است، همچنین در یک همسایگی $z = z_0$ ، $g(z) \neq 0$. بنابراین این موضوع برای $f(z)$ نیز برقرار است. بدین طریق قضیه به اثبات می رسد.

این قضیه با توابع موجود در مثال ۴ تشریح شده است.

قطبها معمولاً از صفرهای مخرج پدید می آیند. (مثال: $\tan z$: قطبهایی دارد که $\cos z$ در آن صفر است.) این مطلب یک دلیل خوبی برای اهمیت صفرها است، کلید این ارتباط عبارت است از

قضیه ۴ (قطبها و صفرها)

هرگاه $f(z)$ در $z = z_0$ تحلیلی بوده و دارای یک صفر مرتبه n در $z = z_0$ باشد، آنگاه $\frac{1}{f(z)}$ قطبی از مرتبه n در $z = z_0$ دارد.

همچنین موضوع برای $\frac{h(z)}{f(z)}$ نیز صادق است اگر $h(z)$ در $z = z_0$ تحلیلی باشد و $h(z_0) \neq 0$.

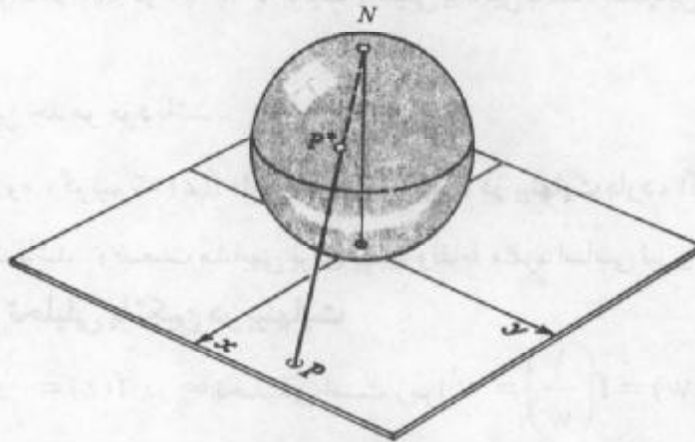
اثبات از (۳) نتیجه می شود (ر. ک مساله ۲۷).

کره عددی ریمان . بینهایت

مطالعه رفتار توابع تحلیلی $f(z)$ برای $|z|$ های بزرگ یک امر مهم طبیعی با اهمیت عملی است. اگر بزرگ باشد، صفحه مختلط برای نمایش چنین z ای مناسب نیست و ما در این حالت ترجیح می دهیم که اعداد مختلط را روی کره ای نمایش دهیم که به وسیله ریمان پیشنهاد شده و به ترتیب زیر به دست می آید.

فرض کنیم S کره ای به قطر ۱ باشد که در مبداء بر صفحه مختلط z مماس است (شکل ۳۴۵). همچنین فرض کنیم N « قطب شمال » S (این نقطه مقابل قطری است که از نقطه تماس می گذرد) باشد. P را نقطه دلخواهی در صفحه مختلط در نظر می گیریم. آنگاه پاره خط مستقیمی که دو سرش P و N هستند S را در نقطه P^* قطع می کند. فرض کنیم P و P^* با هم متناظر باشند. بدین طریق نگاشتی بین نقاط صفحه مختلط و نقاط کره S برقرار می گردد و در این تناظر P^* تصویر نقطه P

نسبت به این نگاشت است. اعداد مختلط که تاکنون در صفحه مختلط نمایش داده می شدند حالا قابل نمایش بر کره S هستند. به هر Z واقع در صفحه مختلط، نقطه ای روی کره S متناظر قرار می گیرد.



شکل ۳۳۵. کره عددی ریمان

برعکس، به هر نقطه ای روی S عدد مختلطی مانند Z متناظر می گیرد به جز نقطه N که متناظر با هیچ نقطه ای از صفحه مختلط نیست. این مطلب به ما امکان می دهد که یک نقطه اضافی را تعریف کنیم که به آن نقطه در بینهایت می نامیم و با نماد ∞ (بینهایت) نمایش می دهیم. صفحه مختلط همراه با نقطه ∞ به صفحه مختلط توسعه یافته موسوم می باشد. صفحه مختلط بدون نقطه ∞ را معمولاً صفحه مختلط متناهی می نامند، یا برخی اوقات برای سادگی یک صفحه مختلط می نامند. حال، اگر نقطه $Z = \infty$ را متناظر با N قرار دهیم، آنگاه نگاشتی یک به یک از صفحه مختلط توسعه یافته بر روی S خواهیم داشت. کره S به کره عددی ریمان مشهور است. نگاشت خاص به کار گرفته شده را تصویر گنجگاشتی می نامند.

به وضوح، دایره واحد روی «استوا» S نگاشته می شود. درون دایره واحد با «نیمکره جنوبی» و بیرون آن با «نیمکره شمالی» متناظر است. اعداد Z ای که با قدر مطلقهای بزرگ نزدیک به قطب شمال N تصویر دارند. محورهای x و y (و به طور کلی تمام خطوط مستقیمی که از مبدا می گذرند) روی «نصف النهار» ها نگاشته می شوند، در حالی که دایره ای که مرکزشان در مبدا است روی «مدار» ها تصویر می شوند. می توان نشان داد که هر دایره یا یک خط مستقیم واقع در صفحه Z روی دایره ای واقع بر S نگاشته می شود.

تحلیلی بودن یا تکینگی در بینهایت

هر گاه بخواهیم تابع f را به ازای $|z|$ های بزرگ بررسی کنیم، می توانیم قرار دهیم $Z = \frac{1}{w}$ و

را در یک همسایگی $w = 0$ مطالعه کنیم. گوئیم $f(z)$ **تحلیلی یا تکین در بینهایت** است هرگاه $g(w)$ در $w = 0$ به ترتیب تحلیلی یا تکین باشد. همچنین تعریف می کنیم

$$g(0) = \lim_{w \rightarrow 0} g(w), \quad (4)$$

در صورتی که این حد موجود باشد.

به علاوه، گوئیم که $f(z)$ دارای **صفر از مرتبه n در بینهایت** دارد، اگر $f\left(\frac{1}{w}\right)$ چنین صفری در $w = 0$ داشته باشد. وضعیت مشابهی برای قطبها و نقاط منفرد اساسی نیز وجود دارد.

مثال ۵. توابع تحلیلی یا تکین در بینهایت

تابع $f(z) = \frac{1}{z^r}$ در ∞ تحلیلی است زیرا $g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = w^r$ در $w = 0$ تحلیلی است، و $f(z)$ صفری از مرتبه دوم در ∞ دارد. تابع $f(z) = z^r$ در تکین ∞ است و قطبی از مرتبه سه دارد زیرا $g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^r}$ چنان قطبی در $w = 0$ دارد. تابع نمایی e^z نقطه منفرد اساسی در ∞ دارد. زیرا $e^{\frac{1}{w}}$ چنین نقطه منفردی در $w = 0$ دارد. به همین طریق، توابع مثلثاتی $\sin z$ و $\cos z$ نقطه منفرد اساسی در ∞ دارند.

یادآوری می کنیم که تابع **تام** تابعی است که در سراسر صفحه مختلط (متناهی) تحلیلی باشد. از قضیه لیوویل (بخش ۱۳. ۶) نتیجه می شود که تنها توابع تام کراندار، توابع ثابت هستند، از اینرو هر تابع تام غیر ثابت باید بی کران باشد. در نتیجه هر تابع بی کران یک نقطه تکینی در ∞ دارد، و این نقطه تکینی در صورتی که تابع یک چند جمله ای باشد از نوع قطب و در غیر این صورت یک نقطه اساسی است. توابع ارائه شده در فوق از این نوع هستند.

یک **تابع برخه ریخت**، تابع تحلیلی ای است که تنها نقاط منفردشان در صفحه متناهی از نوع قطب هستند.

مثال ۶. توابع برخه ریخت

توابع گویا با مخرج غیر ثابت همانند توابع $\tan z$ ، $\cot z$ ، $\sec z$ و $\csc z$ از نوع توابع برخه ریخت هستند.

در اینجا به پایان فصل ۱۴ می رسیم. در این فصل به سری توانی علی الخصوص سری تیلور که در حساب دیفرانسیل و انتگرال نیز دارای نقش اساسی بوده اند پرداختیم. سری لوران نیز در این فصل مورد بررسی قرار گرفتند. این سریها دارای کاربردهایی جالب و قوی در انتگرالگیری از توابع مختلط دارند.

مسائل بخش ۱۴. ۸.

تکینها . مکان و نوع نقاط منفرد توابع زیر را ، شامل آنهایی که در بینهایت هستند را تعیین کنید (در مواردی که تکینی از نوع قطب باشند مرتبه آنها را تعیین کنید) .

$z + \frac{1}{z}$. ۳	$\frac{1}{(z+a)^r}$. ۲	$\cot z$. ۱
$\frac{\sin^r z}{z^r \cos^r z}$. ۶	$\frac{\cos^4 z}{(z^r - 1)^r}$. ۵	$\frac{3}{z} - \frac{1}{z^r} - \frac{2}{z^r}$. ۴
$\frac{e^z - 1 - z}{z^r}$. ۹	$e^{z+i} + z^r$. ۸	$\frac{e^{\pi z}}{(z^r - iz + 2)^r}$. ۷
$(\cos z - \sin z)^{-1}$. ۱۲	$\tan\left(\frac{1}{z}\right)$. ۱۱	$\cosh\left(\frac{1}{z^r + 1}\right)$. ۱۰
$\frac{e^{z-1}}{e^z - 1}$. ۱۵	$\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$. ۱۴	$\cos z - \sin z$. ۱۳

۱۶ . درستی قضیه ۱ را به ازای $f(z) = z^{-r} - z^{-1}$ تحقیق کنید . این قضیه را ثابت کنید .
 صفرها . مکان و مرتبه صفرهای هر یک از توابع زیر را مشخص کنید .

$z \sin^r \pi z$. ۱۹	$(z-1)^n$. ۱۸	$(z^r - 1)^r$. ۱۷
$\cosh^r z$. ۲۲	$z^{-r} \cos^r \pi z$. ۲۱	$e^z - e^{rz}$. ۲۰
$(1 - \cos z)^r$. ۲۵	$(z^r - 1)^r (e^{z^r} - 1)$. ۲۴	$\frac{3z^r - 1}{(z^r - 2iz + 3)^r}$. ۲۳

۲۶ . هرگاه $f(z)$ صفری از مرتبه n در $z = z_0$ داشته باشد ، آنگاه نشان دهید که $f'(z)$ صفری از مرتبه $2n$ ، و $f'(z)$ به ازای $1 > n$ صفری از مرتبه $n-1$ در $z = z_0$ دارد .
 ۲۷ . قضیه ۴ را ثابت کنید .

۲۸ . اگر $f_1(z)$ و $f_r(z)$ در دامنه D تحلیلی بوده و در دنباله ای از نقاط z_n واقع در D همگرا در D ، یکی باشند ، آنگاه در D نشان دهید که $f_1(z) = f_r(z)$.

۲۹ . نشان دهید نقاطی که در آنها تابع تحلیلی غیر ثابت مقدار مفروض k را به خود می گیرد نقاط تنها هستند .

کره عددی ریمان . با فرض اینکه تصویر محور x نصف النهار 0° و 180° فرض می شود ، تصاویر نواحی داده شده زیر بر کره عددی ریمان را توصیف و مشخص کنید .

$$\begin{array}{lll}
 |z| \leq 1.30 & 31. \text{ ربع اول} & \\
 |z| > 100.33 & 34. \text{ نیم صفحه تحتانی} & \\
 32. \text{ ربع دوم} & & \\
 \frac{1}{2} \leq |z| \leq 2.35 & &
 \end{array}$$

پرسشها و مسائل دوره ای فصل ۱۴

۱. سری توانی چیست؟ چرا این سری در آنالیز مختلط بسیار با اهمیت است؟
 ۲. با استفاده از حافظه خود آزمون نسب، آزمون ریشه، و فرمول کوشی - آدامار را برای شعاع همگرایی بیان کنید.
 ۳. همگرایی مطلق، همگرایی شرطی، و همگرایی یکنواخت چیست؟
 ۴. در مورد همگرایی سری توانی چه می دانید؟
 ۵. آیا مشتقگیری جمله به جمله از یک سری توانی مجاز است؟ در مورد انتگرالگیری چطور؟
 ۶. سری تیلور چیست؟ ایده به دست آوردن این سری از فرمول انتگرال کوشی چیست؟
 ۷. سری مکلاورن e^z ، $\cos z$ ، $\sin z$ ، $\cosh z$ ، و $\sinh z$ را بنویسید.
 ۸. آیا $\ln z$ سری مکلاورن دارند؟ توضیح دهید.
 ۹. آیا با جایگزینی z به جای x در سری مکلاورن تابع حقیقی $f(x)$ یک تابع تحلیلی حاصل می شود؟
 ۱۰. چند مثالی برای تشریح روشهای عملی به دست آوردن سری تیلور ارائه کنید.
 ۱۱. سری لوران چیست؟ درباره همگرایی آن چه می دانید.
 ۱۲. آیا سری تیلور تابع مفروض با مرکز داده شده یکتا است؟ همین سوال را در مورد سری لوران پاسخ دهید.
 ۱۳. یک نقطه تکینی چیست؟ چه نقشی در ارتباط با همگرایی سری تیلور و سری لوران دارد؟
 ۱۴. چگونه سری لوران در طبقه بندی نقاط تکینی مورد استفاده قرار می گیرد؟
 ۱۵. قطب چیست؟ یک نقطه تکین اساسی تنها چیست؟
 ۱۶. آیا یک تابع تام قطب دارد؟ نقاط تکین اساسی چطور؟
 ۱۷. صفر یک تابع تحلیلی چیست؟ درباره صفرهای توابع تحلیلی چه می دانید؟
 ۱۸. آیا یک تابع تحلیلی غیر ثابت بدون صفر را می شناسید؟
 ۱۹. تابع برخه ریخت چیست؟ چند مثال بیاورید؟
 ۲۰. کره عددی ریمان چیست؟ چه وقت از آن استفاده می شود؟
- شعاع همگرایی هر یک از سریهای توانی زیر را بیابید. آیا می توانید مقدار آنها را به صورت یک تابع شناخته شده مشخص کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{2n} z^n \quad . ۲۳$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad . ۲۲$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z-2)^{2n+1} \quad . ۲۱$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(3+4i)^n} \quad . ۲۶$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^{100}} z^n \quad . ۲۵$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{10}}{n!} (z-1+2i)^n \quad . ۲۴$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2n)!} \quad . ۲۹$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi^n (z-2i)^{2n} \quad . ۲۸$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{2n} \quad . ۲۷$$

سری تیلور هر یک از توابع زیر با نقطه داده شده را به عنوان مرکز بیابید و شعاعهای همگرایی آنها را نیز تعیین کنید.

$$z, \text{Ln}z \quad . ۳۲$$

$$0, e^{-2z} \quad . ۳۱$$

$$\pi i, e^z \quad . ۳۰$$

$$2+3i, \frac{1}{z} \quad . ۳۵$$

$$-1, \frac{1}{2z-i} \quad . ۳۴$$

$$-1, \frac{1}{1-z} \quad . ۳۳$$

$$1+i, \frac{1}{4-3z} \quad . ۳۸$$

$$0, \frac{1}{(1-z)^2} \quad . ۳۷$$

$$0, \sin \pi z^2 \quad . ۳۶$$

توابع زیر را به سریهای لورانی که به ازای $0 < |z - z_0| < R$ همگرا باشند بسط دهید و ناحیه دقیق همگرایی و نوع تکینگی تابع داده شده در z_0 مورد نظر را مشخص کنید.

$$z_0 = 0, \frac{1}{z^2 - z^3} \quad . ۴۱$$

$$z_0 = 0, \frac{1-z^2}{z^2} \quad . ۴۰$$

$$z_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{\cos z}{(z - \frac{1}{2}\pi)^2} \quad . ۳۹$$

$$z_0 = -i, \frac{z+1+i}{(z+i)^2} \quad . ۴۴$$

$$z_0 = 0, z^2 \cosh \frac{1}{z} \quad . ۴۳$$

$$z_0 = 1, \frac{e^z}{(z-1)^2} \quad . ۴۲$$

$$z_0 = 0, \frac{1}{z^2} \sin 2z^2 \quad . ۴۶$$

$$z_0 = 1, (z-1)^{-2} \text{Ln}z \quad . ۴۵$$

$$z_0 = 0, \frac{\sinh z + \sin z}{z^2} \quad . ۴۸$$

$$z_0 = 0, \frac{1}{z^2} \int_0^z \frac{e^t - 1}{t} dt \quad . ۴۷$$

$$z_0 = -i, (z+i)^2 \sin \frac{1}{2z+2i} \quad . ۵۰$$

$$z_0 = i, \frac{e^z}{(z-i)^2} \quad . ۴۹$$

خلاصه فصل ۱۴

سریهای توانی، تیلور، و لوران

دنباله ها، سریها، و آزمونهای همگرایی در بخش ۱۴.۱ تشریح شده اند. منظور از یک سری توانی

سری ای به صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (1)$$

می باشد، که در آن z_0 مرکز این سری است (بخش ۱۴. ۲). سری (۱) به ازای $|z - z_0| < R$ همگرا و به ازای $|z - z_0| > R$ واگرا است. برخی سریهای توانی به ازای مقادیر z همگرا می باشند (در این صورت می نویسیم $R = \infty$). R شعاع همگرایی است. همچنین $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ در صورتی که این حد موجود باشد. سری (۱) همگرای مطلق (بخش ۱۴. ۲) و در هر قرص بسته $|z - z_0| \leq r < R$ همگرای یکنواخت (بخش ۱۴. ۶) است. اگر $R > 0$ ، سری توانی به ازای $|z - z_0| < R$ یک تابع تحلیلی را نمایش می دهد. مشتقات $f'(z), f''(z), \dots$ با مشتقگیری جمله به جمله از (۱) به دست می آیند، و سریهای حاصل از این مشتقات دارای همان شعاع همگرایی R سری (۱) می باشند. (ر. ک. بخش ۱۴. ۳).

برعکس، هر تابع تحلیلی $f(z)$ را می توان بوسیله سری توانی بیان نمود. سری تیلور $f(z)$ همانند سری تیلور در حساب دیفرانسیل و انتگرال به صورت زیر می باشد (بخش ۱۴. ۴)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n \quad (|z - z_0| < R) \quad (2)$$

اگر $f(z)$ تام (= به ازای تمام مقادیر z تحلیلی است) یا در قرص بازی به مرکز z_0 و شعاع برابر با فاصله z_0 تا نزدیکترین نقطه منفرد $f(z)$ (= نقطه ای که $f(z)$ تحلیلی خود را در آن نقطه از دست می دهد، ر. ک. بخش ۱۴. ۸) باشد، آنگاه این سریها به ازای تمام مقادیر z همگرا است. توابع e^z ، $\sin z$ ، $\cos z$ ، و غیره، مشابه با اینها در حساب دیفرانسیل و انتگرال، دارای سری مکلورن و سری تیلور می باشند (بخش ۱۴. ۴).

سری لوران به صورت زیر می باشد (بخش ۱۴. ۷)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (3)$$

یا به طور خلاصه تر

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n ; a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}} dz^* \quad (3^*)$$

این سری در یک طوق باز A به مرکز z_0 همگرا است. تابع f در A تحلیلی است. وجود نقاط تکینی در خارج A بلامانع است. نخستین سری در (۳) یک سری توانی است. سری دوم به قسمت اصلی سری لوران موسوم می باشد. سری لوران $f(z)$ در طوق داده شده یکتا است، اما $f(z)$ می تواند سریهای لوران متمایزی در طوقهای متفاوت و با یک مرکز داشته باشد.

اگر $f(z)$ یک نقطه تکین تنها (بخش ۸.۱۴) در $z = z_0$ داشته باشد، سری لوران $f(z)$ که به ازای $0 < |z - z_0| < R$ (مناسب) همگرا است، می تواند در دسته بندی این نقاط تکین مورد استفاده قرار گیرد. چنین نقاطی **قطب** هستند اگر قسمت اصلی از این سری لوران از تعدادی متناهی جمله تشکیل شده باشد، در غیر این صورت آنها را **نقاط تکین اساسی** (تنها) می نامند.

یک قطب را از مرتبه n نامند هرگاه $\frac{1}{(z - z_0)^n}$ بزرگترین توان منفی قسمت اصلی واقع در (۳) باشد. قطب مرتبه اول را **قطب ساده** نیز می نامند.

به همین طریق، سری تیلور (۲) می تواند برای دسته بندی صفرهای $f(z)$ مورد استفاده قرار گیرد. تابع مفروض به صورت (۲) دارای صفری از مرتبه n در z_0 است اگر f و مشتقات $f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ همگی در z_0 صفر باشند، و $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. یک صفر مرتبه اول را **صفر ساده** نیز می نامند. (ر. ک. بخش ۸.۱۴).

بخش ۸.۱۴ بحثی در مورد یک **صفحه مختلط توسعه یافته** می باشد، که با ضمیمه کردن نقطه ناسره ∞ («بینهایت») به صفحه مختلط به دست می آید.

فصل ۱۵

انتگرالگیری به روش مانده ها

نظر به اینکه روشهای مختلفی برای تعیین ضرایب سری لوران (۱)، بخش ۷.۱۴، بدون استفاده از فرمولهای انتگرال (۲)، بخش ۷.۱۴ موجود است، از فرمول b_1 می توان برای محاسبه انتگرالهای مختلط به نحو بسیار ساده و ظریفی استفاده کرد. b_1 به مانده $f(z)$ در $z = z_0$ موسوم می باشد. این روش کارآمد را می توان برای محاسبه انتگرالهای حقیقی معین برخی توابع، همانطور که بعداً در بخشهای ۳.۱۵ و ۴.۱۵ مشاهده خواهیم کرد به کار گرفت.

پیشنیاز این فصل: فصول ۱۲، ۱۳، ۱۴.

مراجع: ۱. ضمیمه ۱، قسمت D.

جواب مسائل: ضمیمه ۲.

۱.۱۵ مانده ها

ابتدا بیان می کنیم که مانده چیست و چگونه برای محاسبه انتگرال زیر مورد استفاده قرار می گیرد.

$$\oint_C f(z) dz.$$

این انتگرال یک انتگرال کانتور بر روی مسیر بسته ساده C می باشد.

اگر $f(z)$ همه جا بر C و درون C تحلیلی باشد، آنگاه چنین انتگرالی باتوجه به قضیه انتگرال کوشی (بخش ۳.۱۳)، همانطور که مشاهده کردیم برابر صفر است.

اگر $f(z)$ دارای یک نقطه تکین در نقطه $z = z_0$ و در سایر نقاط واقع بر C و داخل آن تحلیلی باشد، آنگاه $f(z)$ دارای سری لورانی به صورت

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots$$

انتگرالگیری به روش مانده ها

می باشد که به ازای تمام نقاط نزدیک $z = z_0$ (به جز خود $z = z_0$)، در دامنه ای به صورت $0 < |z - z_0| < R$ همگرا است. حال انگیزه کلیدی را پی می گیریم. ضریب b_1 اولین توان منفی $\frac{1}{z - z_0}$ این سری لوران با فرمول انتگرالی (۲)، بخش ۱۴. ۷، به ازای $n = 1$ به دست می آید، یعنی

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz,$$

اما از آنجا که سری لوران را می توان به روشهای گوناگون به دست آورد، بدون آنکه لازم باشد برای تعیین ضرایب آن از فرمولهای انتگرالی استفاده کرد (ر. ک. مثالهای بخش ۱۴. ۷). بنابراین برای محاسبه انتگرال $\oint_C f(z) dz$ کافی است به یکی از روشهای b_1 را محاسبه کرده و با توجه به تساوی زیر به محاسبه این انتگرال پردازیم

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i b_1. \tag{1}$$

انتگرالگیری در آن درجهت عکس حرکت عقربه های ساعت روی مسیر بسته ساده C که نقطه $z = z_0$ یک نقطه داخلی آن است صورت می گیرد.

ضریب b_1 به مانده $f(z)$ در $z = z_0$ موسوم می باشد و آن را با نماد

$$b_1 = \text{Res}_{z=z_0} f(z) \tag{2}$$

نمایش می دهند.

مثال ۱. محاسبه یک انتگرال به کمک مفهوم مانده

انتگرال تابع $f(z) = z^{-2} \sin z$ روی دایره واحد C ، درجهت عکس حرکت عقربه های ساعت را به دست آورید.

حل. از (۱۴) بخش ۱۴. ۴ سری لوران

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \dots$$

را به دست می آوریم که به ازای $0 < |z| < \infty$ (یعنی، به ازای تمام مقادیر $z \neq 0$) همگرا است. سری فوق نشان می دهد که $f(z)$ در $z = 0$ دارای یک قطب مرتبه سوم است و مانده متناظر برابر است با

$$b_1 = -\frac{1}{3!}.$$

با توجه به (۱) داریم

$$\oint_C \frac{\sin z}{z^2} dz = 2\pi i b_1 = -\frac{\pi i}{3}.$$

مثال ۲. از تابع $f(z) = \frac{1}{z^2 - z^2}$ روی دایره $C: |z| = \frac{1}{2}$ ، درجهت عکس حرکت عقربه های ساعت، انتگرال بگیرد.

حل. عبارت $z^r - z^r = z^r(1-z)$ نشان می دهد که $f(z)$ در $z=0$ و $z=1$ تکینگی دارد. $z=1$ در خارج دایره C و $z=0$ در داخل دایره قرار دارد. بنابراین مانده $f(z)$ در $z=0$ را باید محاسبه کنیم. به محاسبه سری لوران در $z=0$ می پردازیم. این سری در $0 < |z| < 1$ همگرا است. داریم

$$\frac{1}{z^r - z^r} = \frac{1}{z^r} + \frac{1}{z^r} + \frac{1}{z} + 1 + z + \dots \quad (0 < |z| < 1).$$

این سری همان سری (D) مثال ۴ بخش ۷.۱۴ می باشد. باتوجه به بسط فوق مشاهده می کنیم که مانده تابع مورد نظر در $z=0$ برابر ۱ است. با انتگرالگیری در جهت حرکت عقربه های ساعت می یابیم

$$\oint \frac{dz}{z^r - z^r} = -2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = -2\pi i.$$

تصوره! اگر به اشتباه از سری (II) واقع در مثال ۴، بخش ۷.۱۴، یعنی

$$\frac{1}{z^r - z^r} = -\frac{1}{z^r} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4} - \dots \quad (|z| > 1)$$

استفاده کنیم، جواب اشتباه صفر را به دست خواهیم آورد، زیرا این سری، جمله $\frac{1}{z}$ ندارد.

دو فرمول برای محاسبه مانده ها در قطبهای ساده

قبل از اینکه محاسبه انتگرالها را ادامه دهیم، سؤال زیر را مطرح می کنیم. به منظور به دست آوردن مانده ها، آیا باید کل سری را به دست آورد یا راه ساده تری وجود دارد؟ درحالتی که با قطب مواجه باشیم راه خوبی برای محاسبه مانده موجود است. برای قطبها یک فرمول کلی برای محاسبه مانده ها ارائه می کنیم.

چگونه محاسبه مانده را با قطب ساده آغاز می کنیم. برای این منظور فرض کنید $f(z)$ دارای یک قطب ساده در نقطه $z = z_0$ باشد. باتوجه به این فرض سری لوران متناظر به صورت زیر درمی آید [ر.ک. (۲) با $n=1$ از بخش ۸.۱۴]

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (0 < |z - z_0| < R).$$

در اینجا $b_1 \neq 0$ (چرا؟) با ضرب طرفین رابطه فوق در $z - z_0$ می یابیم

$$(z - z_0)f(z) = b_1 + (z - z_0)[a_0 + a_1(z - z_0) + \dots].$$

حال فرض کنیم $z \rightarrow z_0$. در این صورت طرف راست به سمت b_1 میل می کند. باتوجه به آن می یابیم

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) \quad (۳)$$

مثال ۳. مانده در قطب ساده

$$\operatorname{Res}_{z=i} \frac{z+i}{z(z^2+1)} = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{z+i}{z(z+i)(z-i)} = \left[\frac{z+i}{z(z+i)} \right]_{z=i} = \frac{1+i}{-2} = -\frac{1+i}{2}.$$

برخی اوقات می توان از فرمول دیگری برای محاسبه مانده در قطب ساده استفاده نمود. این فرمول

خیلی اوقات مفید و ساده تر عمل می کند. برای رسیدن به فرمول دوم فرض کنید

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

که در آن $p(z)$ و $q(z)$ توابع تحلیلی هستند، و $p(z_0) \neq 0$ و $q(z)$ دارای یک صفر ساده در $z = z_0$ است. با توجه به این مفروضات و بر طبق قضیه ۴ بخش ۱۴.۸ تابع $f(z)$ دارای یک قطب ساده

در $z = z_0$ است. بنا به تعریف صفر ساده، $q(z)$ دارای سری تیلور به صورت

$$q(z) = (z - z_0)q'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2}q''(z_0) + \dots$$

است. با جایگزینی آن در $f = \frac{p}{q}$ و سپس با قراردادن f در (۳)، می یابیم

$$\begin{aligned} \text{Res } f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{p(z)}{q(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)p(z)}{(z - z_0) \left[q'(z_0) + (z - z_0) \frac{q''(z_0)}{2} + \dots \right]} \end{aligned}$$

حال مشاهده می کنیم که در سمت راست، عامل $z - z_0$ حذف می شود و عبارت حاصل درمخرج کسر فوق دارای حد $q'(z_0)$ است. از این رو فرمول دوم محاسبه مانده در قطب ساده عبارت است از

$$\text{Res } f(z) = \text{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \quad (4)$$

مثال ۴. محاسبه مانده در یک قطب ساده با استفاده از فرمول (۴)

$$\text{Res}_{z=i} \frac{9z+i}{z(z^2+1)} = \left[\frac{9z+i}{3z^2+1} \right]_{z=i} = \frac{10i}{-2} = -5i \quad (\text{مثال ۳ را ملاحظه کنید.})$$

مثال ۵. کاربرد دیگری از فرمول (۴)

قطبها و مانده های متناظر تابع زیر را بیابید.

$$f(z) = \frac{\cosh \pi z}{z^2 - 1}$$

حل. تابع $p(z) = \cosh \pi z$ تابعی تام بوده و $q(z) = z^2 - 1$ دارای صفرهای ساده در نقاط $1, i, -1, -i$ می باشد. از این رو در این نقاط دارای قطبی ساده است (و قطبهای دیگری ندارد). چون $q'(z) = 2z$ ، از (۴) مشاهده می شود که مانده ها برابر مقادیر $\frac{\cosh \pi z}{2z}$ در این نقاط می باشند،

یعنی

$$\frac{\cosh \pi}{2} \approx 2.898, \quad \frac{\cosh \pi i}{2i} = \frac{\cos \pi}{-2i} = \frac{-1}{-2i} = \frac{i}{2}, \quad \frac{-\cosh \pi}{2} = -\frac{\cosh \pi}{2}, \quad \frac{\cosh(-\pi i)}{2(-i)} = \frac{i}{2}$$

فرمولی برای مانده در یک قطب از مرتبه بالا

فرض کنید تابع $f(z)$ در نقطه $z = z_0$ که در آن دارای یک قطب مرتبه $m > 1$ در نقطه $z = z_0$ است، تحلیلی است. بنا به تعریف قطب (بخش ۱۴. ۸) سری لوران $f(z)$ که در یک همسایگی از $z = z_0$ (به جز در $z = z_0$) همگرا است، عبارت است از

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{b_r}{(z-z_0)^r} + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots,$$

که در آن $b_m \neq 0$. با ضرب طرفین معادله فوق در $(z-z_0)^m$ می یابیم

$$(z-z_0)^m f(z) = b_m + b_{m-1}(z-z_0) + \dots + b_r(z-z_0)^{m-r} + b_1(z-z_0)^{m-1} + a_0(z-z_0)^m + a_1(z-z_0)^{m+1} + \dots$$

مشاهده می شود که b_1 ، مانده $f(z)$ در $z = z_0$ ، اکنون ضریب جمله $(z-z_0)^{m-1}$ در سری تیلور تابع $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$

به مرکز $z = z_0$ است. بنابراین، بنا به قضیه تیلور (بخش ۱۴. ۴)،

$$b_1 = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0).$$

از این رو اگر $f(z)$ دارای یک قطب مرتبه m در $z = z_0$ باشد، آنگاه مانده از فرمول زیر به دست می آید

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)] \right\}. \quad (5)$$

در حالت خاص، برای قطب مرتبه دو ($m=2$)، داریم

$$\text{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z-z_0)' f(z) \right]'. \quad (5^*)$$

مثال ۶. مانده در یک قطب از مرتبه بالا

تابع f با ضابطه

$$f(z) = \frac{\Delta \circ z}{(z+4)(z-1)^2}$$

دارای یک قطب مرتبه دوم در $z = 1$ است، و از (5^*) مانده متناظر عبارت است از

$$\text{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} [(z-1)' f(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left(\frac{\Delta \circ z}{z+4} \right) = 8.$$

مثال ۷. مانده ها از کسرهای جزئی

اگر $f(z)$ تابعی گویا باشد، آنگاه مانده را از نمایش $f(z)$ بر حسب کسرهای جزئی نیز می توان به دست آورد. با توجه به مثال ۶ داریم

$$f(z) = \frac{\Delta \circ z}{(z+4)(z-1)^2} = \frac{-8}{z+4} + \frac{8}{z-1} + \frac{10}{(z-1)^2}.$$

مشاهده می کنیم که مانده در $z = 1$ همانند قبل برابر ۸ است، و هیمنطور مانده در قطب ساده $z = -4$ برابر ۸- است.

ممکن است از خود سؤال کنیم که علت این کار چیست؟ برای این منظور نقطه $z = 1$ را در نظر می گیریم. عبارت در $z = 1$ تحلیلی است و دارای بسط تیلور در $z = 1$ است و درحقیقت قسمتی از بسط لوران تابع مورد نظر که دارای توانهای نامنفی هستند از این بسط تیلور حاصل می شود و قسمت اصلی بسط لوران تابع دارای دو جمله است که در طرف راست آمده است که دارای قطب مرتبه اول در $z = 1$ است. به همین طریق موضوع در $z = -4$ قابل بررسی است.

مثال ۸. انتگرالگیری حول قطب مرتبه دوم

از $f(z)$ در مثالهای ۶ و ۷ روی هر مسیر بسته ساده C که $z = 1$ در داخل C و $z = -4$ در خارج آن است، در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت، انتگرالگیری کنید (ر. ک. مثالهای ۶ یا ۷). حل داریم.

$$\oint_C \frac{50z}{(z+4)(z-1)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=1} \frac{50z}{(z+4)(z-1)^2} = 2\pi i \cdot 8 = 16\pi i = 50 \cdot 2\pi i.$$

مسائل بخش ۱.۱۵

مانده های هریک از توابع زیر را در نقاط تکین شان بیابید.

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|
| $\frac{\sin z}{z^2}$. ۳ | $\frac{4}{z^2} - \frac{1}{z^2}$. ۲ | $\frac{3}{1-z}$. ۱ |
| $\frac{e^z}{(z-\pi i)^2}$. ۶ | $\frac{z^2}{z^2 - iz + 2}$. ۵ | $\frac{z^2 + 1}{z^2 - z}$. ۴ |
| $\frac{2}{(z^2 - 1)^2}$. ۹ | $\sec z$. ۸ | $\cot z$. ۷ |

در هریک از مسائل زیر مانده را در نقاط تکینی که درون دایره $|z| = 2$ قرار دارند بیابید.

- | | | |
|-----------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| $\frac{z-23}{z^2-4z-5}$. ۱۲ | $\frac{2z-3}{z^2+3z^2}$. ۱۱ | $\frac{z^2}{z^2-1}$. ۱۰ |
| $\frac{3z+6}{(z+1)(z^2+16)}$. ۱۵ | $\frac{-z^2-22z+8}{z^2-5z^2+4z}$. ۱۴ | $\frac{3}{(z^2-1)^2}$. ۱۳ |

انتگرالهای زیر را با این فرض که C دایره واحد است (در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت) محاسبه کنید.

- | | | |
|---------------------------|--------------------------|-----------------------|
| $\oint_C \csc 2z dz$. ۱۸ | $\oint_C \tan z dz$. ۱۷ | $\oint_C e^z dz$. ۱۶ |
|---------------------------|--------------------------|-----------------------|

$$\oint_C \cot z \, dz \quad . 19 \qquad \oint_C \frac{dz}{\sinh \frac{1}{\gamma} \pi z} \quad . 20 \qquad \oint_C \frac{z^4 + 6}{z^7 - 2z} \, dz \quad . 21$$

$$\oint_C \frac{\sin \pi z}{z^6} \, dz \quad . 22 \qquad \oint_C \frac{z^7 + 2}{z + \pi} \, dz \quad . 23 \qquad \oint_C \frac{\tanh(z+1)}{e^z \sin z} \, dz \quad . 24$$

۲۵. راه دیگر برای به دست آوردن (۵). رابطه (۵) را بدون استفاده از قضیه تیلور، با $m-1$ مرتبه مشتقگیری از فرمول $(z-z_0)^m f(z)$ به دست آورید.

۱۵. ۲. قضیه مانده

تا اینجا می توان انتگرال توابع تحلیلی $f(z)$ را روی منحنی های بسته C وقتی که $f(z)$ فقط یک نقطه تکین در داخل C دارد، محاسبه کرد. اکنون خواهیم دید که انتگرالگیری به روش مانده را می توان به حالتی که $f(z)$ دارای چند نقطه تکین تنها در داخل C است تعمیم داد. انجام این کار به سادگی به شرح زیر صورت می پذیرد.

قضیه ۱. قضیه مانده

فرض کنید $f(z)$ تابعی باشد که در داخل مسیر بسته C و روی آن، به جز تعدادی متناهی نقاط تکین z_1, z_2, \dots, z_k واقع در داخل C ، تحلیلی باشد، آنگاه

$$\oint_C f(z) \, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res} f(z), \quad (1)$$

که در آن انتگرالگیری روی مسیر C در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت صورت می پذیرد. اثبات. هر یک از نقاط تکین z_j را درون دایره ای مانند C_j قرار می دهیم؛ شعاع این دایره را طوری اختیار می کنیم که تمام k دایره و C از هم مجزا باشد (شکل ۳۴۶). در این صورت $f(z)$ در دامنه همبند چندگانه D که با C_1, \dots, C_k محدود می شود و روی تمام کرانه D تحلیلی است. با توجه به قضیه انتگرال کوشی می یابیم

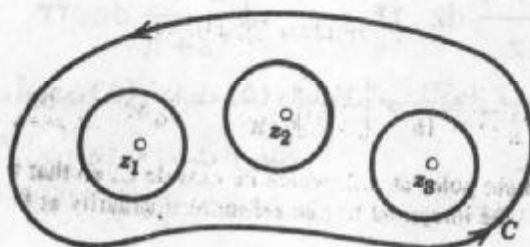
$$\oint_C f(z) \, dz + \oint_{C_1} f(z) \, dz + \oint_{C_2} f(z) \, dz + \dots + \oint_{C_k} f(z) \, dz = 0, \quad (2)$$

که در آن انتگرال روی C در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت و سایر انتگرالها در جهت حرکت عقربه های ساعت گرفته می شود (ر.ک. بخش ۱۳.۳). حال جهت انتگرالگیری روی C_1, \dots, C_k را عوض کرده و با توجه به آن علامت مقادیر این انتگرالها عوض می شود، و با توجه به (۲) می یابیم

$$\oint_C f(z) \, dz = \oint_{C_1} f(z) \, dz + \oint_{C_2} f(z) \, dz + \dots + \oint_{C_k} f(z) \, dz. \quad (3)$$

که در آن همه انتگرالها در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت گرفته می شوند. در نتیجه، با توجه به (۱) بخش قبل داریم

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{z=z_j} \text{Res} f(z),$$



شکل ۳۴۶. قضیه مانده

فرمول (۳) منجر به (۱) می گردد، و بدین طریق قضیه به اثبات می رسد. این قضیه مهم در ارتباط با انتگرالهای موهومی و حقیقی کاربردهای متنوعی دارد. نخست به بررسی چند انتگرال مختلط می پردازیم.

مثال ۱. انتگرالگیری به کمک قضیه مانده

انتگرال زیر را در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت روی هر مسیر بسته ساده C ای که (الف) و ۱ در داخل آن هستند، (ب) ۰ در داخل و ۱ در خارج آن قرار دارند، (ج) ۱ در داخل و ۰ در خارج آن هستند، (د) ۰ و ۱ در خارج آن هستند، محاسبه کنید.

$$\oint_C \frac{4-3z}{z^2-z} dz$$

حل. تابع زیر علامت انتگرال دارای قطبهای ساده در ۰ و ۱، با مانده های [بنا به (۳)، بخش ۱۵. ۱]

$$\text{Res}_{z=0} \frac{4-3z}{z(z-1)} = \left[\frac{4-3z}{z-1} \right]_{z=0} = -4, \quad \text{Res}_{z=1} \frac{4-3z}{z(z-1)} = \left[\frac{4-3z}{z} \right]_{z=1} = 1$$

می باشد. [این مانده ها با (۴)، بخش ۱۵. ۱ مطابقت دارد.] در نتیجه جوابها عبارت اند از (الف) $2\pi i(-4+1) = -6\pi i$ ، (ب) $-8\pi i$ ، (ج) $2\pi i$ ، و (د) صفر.

مثال ۲. قطبها و تکنیهای اساسی

انتگرال زیر را در حالتی که C بیضی $x^2 + y^2 = 9$ است (در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت) محاسبه کنید.

$$\oint_C \left(\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} + ze^{\frac{\pi}{z}} \right) dz$$

حل. از آنجا که $z^2 - 16 = 0$ در نقاط $\pm 2i$ و ± 2 برقرار بوده، نخستین جمله از تابع زیر علامت انتگرال دارای قطبهای ساده در $\pm 2i$ است که در داخل C واقع هستند. مانده ها در این نقاط عبارت اند از [بنا به (۴)، بخش ۱.۱۵ با توجه به اینکه $e^{2\pi i} = 1$]

$$\operatorname{Res}_{z=2i} \frac{ze^{\pi z}}{z^2 - 16} = \left[\frac{ze^{\pi z}}{2z} \right]_{z=2i} = -\frac{1}{16}, \quad \operatorname{Res}_{z=-2i} \frac{ze^{\pi z}}{z^2 - 16} = \left[\frac{ze^{\pi z}}{2z} \right]_{z=-2i} = -\frac{1}{16}$$

و همچنین تابع موردنظر دارای قطبهای ساده در ± 2 است که در خارج C واقع هستند، و در نتیجه به آنها در اینجا نیاز نداریم. دومین جمله از تابع انتگرالده دارای یک نقطه تکین اساسی در 0 ، با مانده $\frac{\pi^2}{4}$ است که از نتیجه زیر حاصل می شود

$$ze^{\frac{\pi}{z}} = z \left(1 + \frac{\pi}{z} + \frac{\pi^2}{2!z^2} + \frac{\pi^3}{3!z^3} + \dots \right) = z + \pi + \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{1}{z} + \dots$$

در نتیجه جواب بنا به قضیه مانده عبارت است از

$$2\pi i \left(-\frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \frac{\pi^2}{2} \right) = \pi \left(\pi^2 - \frac{1}{4} \right) i = 30.221 i.$$

مثال ۳. تاییدی بر یک نتیجه اساسی که قبلاً به دست آمده است.

از $\frac{1}{(z - z_0)^m}$ (عدد صحیح مثبت m) در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت روی مسیر بسته ساده دلخواه C که نقطه $z = z_0$ را در بردارد انتگرال بگیرید.

حل. عبارت $\frac{1}{(z - z_0)^m}$ سری لوران خودش به مرکز $z = z_0$ است که قسمت اصلی این جمله را شامل است، و

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{1}{z - z_0} = 1,$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{1}{(z - z_0)^m} = 0 \quad (m = 2, 3, \dots).$$

که با مثال ۲، بخش ۲.۱۳ مطابقت دارد، با توجه به آن می یابیم

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^m} = \begin{cases} 2\pi i & m = 1, \\ 0 & m = 2, 3, \dots \end{cases}$$

مسائل بخش ۲.۱۵

از $\frac{15z + 9}{z^2 - 9z}$ در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت روی مسیرهای داده شده زیر انتگرال بگیرید.

$$|z + 2 + i| = 3 \quad |z| = 4 \quad |z| = 1$$

$$|z - 1| = 3 \quad \left| z - \frac{3}{2} + 2i \right| = 2 \quad |z - 3| = 2$$

هریک از انتگرالهای زیر را در حالتی که C مسیر بسته ساده دلخواه است به طوری که تمام نقاط منفرد در

داخل C قرار دارند (در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت) محاسبه کنید .

$$\oint_C \frac{z \cosh \pi z}{z^2 + 13z^2 + 36} dz \cdot 9 \quad \oint_C \frac{z}{1+9z^2} dz \cdot 8 \quad \oint_C \frac{\Delta z}{z^2 + 4} dz \cdot 7$$

$$\oint_C \frac{z^2 \sin z}{4z^2 - 1} dz \cdot 12 \quad \oint_C \frac{z + e^z}{z^2 - z} dz \cdot 11 \quad \oint_C \frac{\sinh z}{z - i} dz \cdot 10$$

هریک از انتگرالهای زیر را درحالتی که C دایره واحد است (در جهت عکس عقربه های ساعت) محاسبه کنید .

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 + 6iz} \cdot 15 \quad \oint_C \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 9} dz \cdot 14 \quad \oint_C \frac{z}{z^2 - \frac{1}{4}} dz \cdot 13$$

$$\oint_C \frac{3 \circ z^2 - 23z + 5}{(z-1)^2(z-3)} dz \cdot 18 \quad \oint_C \frac{e^{-z^2}}{\sin^2 z} dz \cdot 17 \quad \oint_C \frac{e^{-z^2}}{\sin^4 z} dz \cdot 16$$

$$\oint_C \frac{\sinh z}{4z^2 + 1} dz \cdot 21 \quad \oint_C e^z \cot^2 z dz \cdot 20 \quad \oint_C \cot \frac{z}{4} dz \cdot 19$$

$$\oint_C \frac{1 - 4z + 6z^2}{(z^2 + \frac{1}{4})(z-2)} dz \cdot 24 \quad \oint_C \tan^2 \pi z dz \cdot 23 \quad \oint_C \frac{e^z}{z(z - \frac{\pi i}{4})^2} dz \cdot 22$$

$$\oint_C \frac{\tan \pi z}{z^2} dz \cdot 27 \quad \oint_C \coth z dz \cdot 26 \quad \oint_C \tan \pi z dz \cdot 25$$

$$\oint_C \frac{(z+4)^2}{z^2 + 5z^2 + 6z^2} dz \cdot 30 \quad \oint_C \frac{e^z}{\cos \pi z} dz \cdot 29 \quad \oint_C \frac{\cosh z}{z^2 - 3iz} dz \cdot 28$$

۱۵. ۳ محاسبه انتگرالهای حقیقی

دراین قسمت به محاسبه برخی از انتگرالهای حقیقی مورد توجه و پیچیده به کمک قضیه مانده می پردازیم .

انتگرالهای توابعی گویا از $\cos \theta$ و $\sin \theta$

ابتدا انتگرالهایی از نوع

$$I = \int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta \tag{1}$$

را که در آن $F(\cos \theta, \sin \theta)$ یک تابع گویای حقیقی از $\cos \theta$ و $\sin \theta$ [به عنوان مثال، $\frac{\sin^2 \theta}{\Delta - 4 \cos \theta}$]

و بر فاصله انتگرالگیری متناهی است، در نظر می گیریم . با قرار دادن $z = e^{i\theta}$ می یابیم

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad (2)$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right).$$

هم اکنون مشاهده می کنیم که تابع انتگرالده تابعی گویا از z به صورت $f(z)$ است. وقتی θ از 0 تا 2π تغییر می کند، متغیر z یک بار روی دایره واحد $|z|=1$ را در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت حرکت می کند. از آنجا که $\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta}$ ، داریم $d\theta = \frac{dz}{iz}$ و انتگرال مفروض به صورت زیر درمی آید

$$I = \oint_C f(z) \frac{dz}{iz}, \quad (3)$$

انتگرالگیری روی دایره واحد در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت صورت می پذیرد.

مثال ۱. انتگرالی از نوع (۱)

باتوجه به روش مذکور، نشان دهید که

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos \theta} = 2\pi.$$

حل. با استفاده از روابط $\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ و $d\theta = \frac{dz}{iz}$ می یابیم

$$\oint_C \frac{\frac{dz}{iz}}{\sqrt{2} - \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)} = \oint_C \frac{dz}{i \left(z^2 - 2\sqrt{2}z + 1 \right)} = -\frac{2}{i} \oint_C \frac{dz}{(z - \sqrt{2} - 1)(z - \sqrt{2} + 1)}.$$

مشاهده می کنیم که تابع انتگرالده دارای دو قطب ساده، یکی در $z_1 = \sqrt{2} + 1$ ، که در خارج دایره واحد $|z|=1$ واقع است و از این رو مورد توجه ما نیست و دیگر برابر $z_2 = \sqrt{2} - 1$ است. که در داخل C قرار داشته و مقدار مانده در این نقطه برابر است با [بنا به (۳) از بخش ۱.۱۵]

$$\text{Res}_{z=z_2} \frac{1}{(z - \sqrt{2} - 1)(z - \sqrt{2} + 1)} = \left[\frac{1}{z - \sqrt{2} - 1} \right]_{z=\sqrt{2}-1} = -\frac{1}{2}.$$

باتوجه به ضریب $-\frac{2}{i}$ در کنار انتگرال نتیجه موردنظر به صورت به دست می آید

$$2\pi i \left(-\frac{1}{i} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) = 2\pi.$$

انتگرالهای توسعی یا نامسرّه توابع گویا

حال انتگرالهای حقیقی از نوع

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (4)$$

را مورد بررسی قرار می دهیم. چنین انتگرالی، که فاصله انتگرالگیری در آن متناهی نیست، به انتگرال

نامبره (توسعی) موسوم می باشد و چنین تعریف می شود

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) dx. \quad (5)$$

هرگاه هر دو حد در طرف راست موجود باشند ، آنگاه می توان میل کردن به ∞ و $-\infty$ را درهم ادغام کرده و چنین نوشت^۱

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx. \quad (5)$$

فرض کنید تابع $f(x)$ که در (۴) ظاهر شده است یک تابع گویای حقیقی باشد که مخرجش به ازای هر مقدار حقیقی x مخالف صفر است و درجه آن لااقل دو درجه بیشتر از درجه صورت است . آنگاه حدودهایی که در (۵) آمده اند وجود دارند ، و می توان انتگرالگیری را از (۵) شروع کرد . انتگرال کانتورمتناظر

$$\oint_C f(z) dz \quad (5^*)$$

روی مسیر C ، مطابق شکل ۳۴۷ ، را در نظر می گیریم . از آنجا که $f(x)$ گویا است ، $f(x)$ دارای تعدادی منتهای قطب در نیم صفحه فوقانی است ، و اگر R را به قدر کافی بزرگ اختیار کنیم ، در آن صورت C این قطبها را دربر می گیرد . آنگاه بنا به قضیه مانده می یابیم

$$\oint_C f(x) dz = \int_S f(z) dz + \int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \sum \text{Res } f(z)$$

که در آن مجموع فوق همه مانده های $f(z)$ را در نقاطی از نیم صفحه فوقانی که در آن $f(z)$ دارای قطب است دربر می گیرد . باتوجه به آن می یابیم

$$\int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \sum \text{Res } f(x) - \int_S f(z) dz. \quad (6)$$

هم اکنون ثابت می کنیم که هرگاه $R \rightarrow \infty$ ، مقدار انتگرال روی نیم دایره S به سمت صفر میل می کند . اگر قراردسیم $z = Re^{i\theta}$ ، آنگاه S با ثابت R نمایش داده می شود ، و هنگامی که z روی S حرکت می کند متغیر θ از 0 تا π تغییر می کند . نظر به اینکه ، باتوجه به مفروضات ، درجه مخرج $f(z)$ لااقل دو واحد از درجه صورت بیشتر است ، به ازای مقادیر ثابت و بزرگ k و R_0 داریم

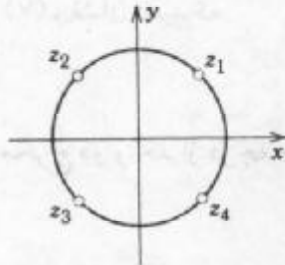
$$|f(z)| < \frac{k}{|z|^2} \quad (|z| = R > R_0).$$

بنابه نامساوی ML از بخش ۱۳ . ۲ نتیجه می گیریم

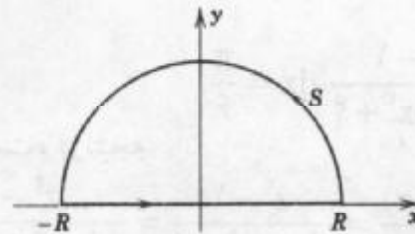
۱- عبارت طرف راست (۵) را مقدار اصلی کوشی انتگرال می نامند . این مقدار ممکن است حتی در صورت عدم وجود حدودی که در (۵') آمده اند موجود باشد . به عنوان مثال

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x dx = \infty \text{ ولی } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R x dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{2} \right) = 0$$

$$\left| \int_S f(z) dz \right| < \frac{k}{R^r} \pi R = \frac{k\pi}{R} \quad (R > R_0).$$



شکل ۳۴۸. مثال ۲



شکل ۳۴۷. مسیر C از انتگرال کانتور در (۵*)

از این رو، وقتی R به سمت بینهایت میل می کند، مقدار انتگرال روی S به سمت صفر میل می کند، (۵) و (۶) به نتیجه

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum \text{Res } f(z) \quad (7)$$

منجر می گردند که در آن مجموع روی همه مانده های $f(z)$ که با قطبهای $f(z)$ در نیم صفحه فوقانی متناظر اند محاسبه می شود.

مثال ۲. یک انتگرال نامرئه از ۰ تا ∞

با استفاده از (۷)، نشان دهید که

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

حل. در واقع $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ دارای چهار قطب در نقاط

$$z_1 = e^{\frac{\pi i}{4}}, z_2 = e^{\frac{3\pi i}{4}}, z_3 = e^{\frac{5\pi i}{4}}, z_4 = e^{\frac{7\pi i}{4}}$$

است. دو قطب اول در نیم صفحه فوقانی واقع اند (شکل ۳۴۸) از (۴) بخش ۱.۱۵ می یابیم

$$\text{Res } f(z) \Big|_{z=z_1} = \left[\frac{1}{(1+z^2)'} \right]_{z=z_1} = \left[\frac{1}{2z} \right]_{z=z_1} = \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi i}{4}} = -\frac{1}{2} e^{\frac{\pi i}{4}},$$

$$\text{Res } f(z) \Big|_{z=z_2} = \left[\frac{1}{(1+z^2)'} \right]_{z=z_2} = \left[\frac{1}{2z} \right]_{z=z_2} = \frac{1}{2} e^{-\frac{3\pi i}{4}} = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi i}{4}}.$$

باتوجه به (۱) از بخش ۷.۱۲ و (۷) از این بخش می یابیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{2\pi i}{2} \left(-e^{\frac{\pi i}{4}} + e^{\frac{\pi i}{4}} \right) = \pi \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

نظر به اینکه $\frac{1}{1+x^2}$ تابعی زوج است، می توان نوشت

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

مثال ۳. یک انتگرال ناسره دیگر

با استفاده از (۷)، نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x^2 + 4} dx = \frac{\pi}{6}$$

حل. درجه مخرج دو واحد از درجه صورت بیشتر است، در نتیجه

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 5z^2 + 4} = \frac{z^2 - 1}{(z^2 + 4)(z^2 + 1)}$$

دارای قطبهای ساده $2i$ و i در نیم صفحه فوقانی و $-2i$ و $-i$ در نیم صفحه تحتانی است که در اینجا به آنها نیاز نداریم. با توجه به $q'(z) = 4z^2 + 10z$ و $q'(z)$ بخش ۱.۱۵ داریم

$$\text{Res}_{z=2i} f(z) = \left[\frac{z^2 - 1}{4z^2 + 10z} \right]_{z=2i} = \frac{5}{12i}, \quad \text{Res}_{z=i} f(z) = \left[\frac{z^2 - 1}{4z^2 + 10z} \right]_{z=i} = \frac{-2}{6i}$$

در نتیجه جواب نهایی عبارت است از

$$2\pi i \left(\frac{5}{12i} - \frac{1}{3i} \right) = \frac{\pi}{6}$$

مسائل بخش ۳.۱۵

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \frac{1}{2} \cos \theta} \quad ۱. \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\pi + \cos \theta} \quad ۲. \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{37 - 12 \cos \theta} \quad ۳.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 3 \sin \theta} \quad ۴. \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{3 + \sin \theta} d\theta \quad ۶. \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4} - \sin \theta} \quad ۵.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{17 - 8 \cos \theta} d\theta \quad ۷. \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta \quad ۸. \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{13 - 12 \cos 2\theta} d\theta \quad ۹.$$

راهنمایی. از فرمول زیر استفاده شود:

$$\cos 2\theta = \frac{1}{2}(z^2 + z^{-2})$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 + 4 \cos \theta}{17 - 8 \cos \theta} d\theta \quad ۱۰.$$

هریک از انتگرالهای توسعهی زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^2} dx \quad ۱۳.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} \quad ۱۲.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad ۱۱.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 16} \cdot 16 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^6} \cdot 15 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^4 + 1} dx \cdot 14$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} \cdot 18 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx \cdot 17$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 2x + 5)^2} \cdot 20 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(4 + x^2)^2} \cdot 19$$

۱۵. ۴ انواع دیگری از انتگرالهای حقیقی

دسته های دیگری از انتگرالهای حقیقی وجود دارند که با بکارگیری قضیه مانده و انتخاب یک تابع و یک مسیر مناسب قابل محاسبه هستند. در عمل چنین انتگرالهایی در رابطه با تبدیلات انتگرالی یا نمایش توابع خاص ظاهر می شوند. در این بخش دو دسته از این انتگرالها را مورد بررسی قرار می دهیم. یکی از این دو دسته در مسائلی که شامل نمایش انتگرال فوریه هستند، به کار می رود (بخش ۹.۱۰). دسته دیگر از انتگرالهای حقیقی ای تشکیل شده است که تابع انتگرالده آنها در نقاطی واقع در فاصله انتگرالگیری نامتناهی است.

انتگرالهای فوریه

انتگرالهای حقیقی که به شکل

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin sx \, dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos sx \, dx \quad (s \text{ حقیقی}) \quad (1)$$

می باشند در ارتباط با انتگرال فوریه روی می دهند (شکل ۹.۱۰).

هرگاه $f(x)$ تابعی گویا باشد که در مفروضاتی که در رابطه با (۴)، بخش ۳.۱۵ بیان شده است صدق کند، آنگاه می توان انتگرالهای (۱) را با روشی مشابه با روش محاسبه انتگرالهای (۴) بخش قبل محاسبه نمود. در حقیقت می توان انتگرال متناظر را به صورت

$$\oint_C f(z) e^{isz} dz \quad (s \text{ حقیقی و مثبت})$$

روی کانتور C از شکل ۳۴۷ در نظر گرفت (بخش ۳.۱۵). با جایگزینی (۷)، بخش ۳.۱۵، به دست می آوریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx} dx = 2\pi i \sum \text{Res} [f(z) e^{isz}] \quad (s > 0), (2)$$

که در آن جمع روی مانده های $f(z) e^{isz}$ در قطبهای آن در نیم صفحه فوقانی محاسبه می شود. با مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی و موهومی در طرفین (۲) می یابیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos sx \, dx = -2\pi \sum \text{Im Res} [f(z)e^{isz}], \quad (s > 0) \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin sx \, dx = 2\pi \sum \text{Re Res} [f(z)e^{isz}].$$

یادآوری می کنیم که (۷) از بخش ۱۵. ۳ با اثبات اینکه مقدار انتگرال بر روی نیمدایره S شکل ۳۴۷ وقتی $R \rightarrow \infty$ به سمت صفر میل می کند، به دست آمده است. برای برقراری (۲)، باید همان موضوع را در مورد انتگرال کانتوری موجود اثبات نمود. نظر به اینکه $s > 0$ و S در نیم صفحه فوقانی $y \geq 0$ قرار دارد، داریم

$$|e^{isz}| = |e^{isx}| |e^{-sy}| = e^{-sy} \leq 1 \quad (s > 0, y \geq 0).$$

باتوجه به آن نامساوی زیر حاصل می شود

$$|f(z)e^{isz}| = |f(z)| |e^{isz}| \leq |f(z)| \quad (s > 0, y \geq 0).$$

این موضوع مساله اخیر را به همان مساله بخش قبل تبدیل می کند و به همین ترتیب مشاهده می کنیم که مقدار انتگرال روی S وقتی که R به سمت بینهایت میل می کند به سمت صفر میل خواهد کرد. باتوجه به آن (۲) به اثبات می رسد و (۳) حاصل می شود.

مثال ۱. کاربردی از (۳)

نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx}{k^2 + x^2} \, dx = \frac{\pi}{k} e^{-ks}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin sx}{k^2 + x^2} \, dx = 0 \quad (s > 0, k > 0).$$

حل: فقط یک قطب در نیم صفحه فوقانی یعنی یک قطب ساده در $z = ik$ دارد. باتوجه به (۴) بخش ۱۵. ۱ به دست می آوریم

$$\text{Res}_{z=ik} \frac{e^{isz}}{k^2 + z^2} = \left[\frac{e^{isz}}{2z} \right]_{z=ik} = \frac{e^{-ks}}{2ik}.$$

از این رو،

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isx}}{k^2 + x^2} \, dx = 2\pi i \frac{e^{-ks}}{2ik} = \frac{\pi}{k} e^{-ks}.$$

از $e^{isx} = \cos sx + i \sin sx$ نتایج فوق حاصل شده است [همچنین ر. ک. (۱۵) بخش ۱۰. ۹].

انواع دیگری از انتگرالهای ناسره حقیقی

نوع دیگری از انتگرال ناسره انتگرال معین

$$\int_A^B f(x) \, dx$$

(۴)

است که در آن تابع انتگرالده در نقطه ای مانند a واقع در فاصله انتگرالگیری به بینهایت میل می کند، یعنی

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty.$$

در چنین حالتی انتگرال (۴) به صورت زیر تعریف می شود

$$\int_A^B f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_A^{a-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{a+\eta}^B f(x) dx. \quad (5)$$

که در آن ε و η به طور مستقل و با مقادیر مثبت به سمت صفر میل می کنند. ممکن است وقتی که ε و η مستقلاً به سمت صفر میل می کنند، هیچیک از این انتگرالها موجود نباشد ولی

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_A^{a-\varepsilon} f(x) dx + \int_{a+\varepsilon}^B f(x) dx \right] \quad (6)$$

موجود باشد. این حد به مقدار اصلی کوشی انتگرال موسوم بوده و چنین نوشته می شود

$$\text{Pr.v.} \int_A^B f(x) dx.$$

به عنوان مثال،

$$\text{Pr.v.} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2} \right] = 0;$$

مقدار اصلی وجود دارد، اگر چه خود انتگرال بی معنی است. کل موضوع کاملاً شبیه موضوعاتی است که در قسمت دوم بخش ۳.۱۵ مورد بحث قرار گرفته است.

برای محاسبه انتگرالهای ناسره ای که تابع انتگرالده آنها قطبهایی روی محور حقیقی دارد، از مسیری استفاده می نمایم که با نیمدایره های کوچکی به مرکز نقاط تکینگی ها را دور می زند، این موضوع را با ارائه یک مثال روشن می کنیم.

مثال ۲. تابع انتگرالده ای که دارای یک قطب روی محور حقیقی است. انتگرال سینوسی
 نشان دهید که

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

(این حد انتگرال سینوسی $\text{Si}(x)$ است وقتی که $x \rightarrow \infty$ ؛ ر.ک. بخش ۹.۱۰).

حل. (الف) عبارت $\frac{\sin z}{z}$ را مورد بررسی قرار می دهیم زیرا این تابع رفتار مناسبی در بینهایت ندارد.

بدین جهت $\frac{e^{iz}}{z}$ را، که قطب ساده ای در $z = 0$ دارد در نظر می گیریم، و از آن روی کانتوری که

در شکل ۳۴۹ نشان داده شده است انتگرال می گیریم. از آنجایی که $\frac{e^{iz}}{z}$ در داخل و روی دایره C

تحلیلی است، از قضیه انتگرال کوشی به دست می آوریم

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz = 0. \quad (7)$$

(ب) ثابت می کنیم که وقتی R به سمت بینهایت میل کند، مقدار انتگرال بر روی نیمدایره بزرگ C_1 به سمت صفر میل می کند. با قرارداد $z = Re^{i\theta}$ داریم $dz = iRe^{i\theta} d\theta$ ، $\frac{dz}{z} = id\theta$ و از این رو

$$\left| \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| = \left| \int_0^\pi e^{iz} id\theta \right| \leq \int_0^\pi |e^{iz}| d\theta \quad (z = Re^{i\theta}).$$

در تابع انتگرالده طرف راست داریم $|e^{iz}| = |e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)}| = |e^{iR\cos\theta}| |e^{-R\sin\theta}| = e^{-R\sin\theta}$.

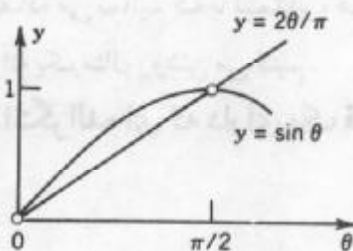
با جایگزینی عبارت فوق در انتگرال و با استفاده $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ برای به دست آوردن انتگرال از 0 تا $\frac{\pi}{2}$ می یابیم

$$\int_0^\pi |e^{iz}| d\theta = \int_0^\pi e^{-R\sin\theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta} d\theta.$$

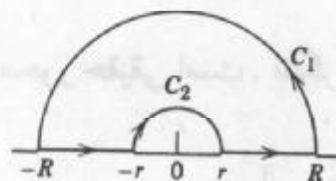
اکنون شکل ۳۵۰ نشان می دهد که $\theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$ اگر $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. بنابراین $-\sin\theta \leq \frac{-2\theta}{\pi}$. از اینجا و با انتگرالگیری داریم

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta} d\theta \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R\theta}{\pi}} d\theta = \frac{\pi}{R} (1 - e^{-R}) \rightarrow 0 \quad \text{وقتی که } R \rightarrow \infty.$$

از این رو وقتی که $R \rightarrow \infty$ ، مقدار انتگرال روی C_1 به سمت صفر میل می کند.



شکل ۳۵۰. نامساوی در مثال ۲



شکل ۳۴۹. کانتور در مثال ۲

(ج) در مورد انتگرال بر روی نیمدایره کوچک C_2 در شکل ۳۴۹ داریم

$$\int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{C_2} \frac{dz}{z} + \int_{C_2} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz.$$

مقدار انتگرال اول در طرف راست برابر $-\pi i$ است. تابع انتگرالده دوم تحلیلی و بنابراین کراندار است، یعنی قدرمطلق آن به ازای تمام مقادیر z بر C_2 و بین C_2 و محور x ها از عدد ثابتی مانند M کوچکتر است. بنابراین بنا به نامساوی ML (بخش ۱۳. ۲)، قدرمطلق این انتگرال نمی تواند

از $M\pi r$ تجاوز کند. این مقدار وقتی که $r \rightarrow 0$ به سمت صفر میل می کند. زیرا بنا به قسمت (ب) از (۷) به دست می آوریم

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z} dz = \text{Pr.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \text{Pr.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx - \pi i = 0.$$

بنابراین مقدار اصلی برابر πi است؛ که قسمت حقیقی آن ۰ و قسمت موهومی آن عبارت است از

$$\text{Pr.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi. \quad (۸)$$

(د) حال تابع انتگرالده (۸) در $x = 0$ تکین نیست. به علاوه، چون به ازای x های مثبت تابع

$\frac{1}{x}$ نزولی است، مساحت زیر منحنی تابع انتگرالده بین دو صفر مثبت متوالی به طریقی یکنوا نزول می کند، یعنی قدر مطلقهای انتگرالهای

$$I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx \quad (n = 0, 1, \dots)$$

تشکیل دنباله نزولی یکنوای $|I_0|, |I_1|, \dots$ را می دهد، و وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، $I_n \rightarrow 0$. چون این انتگرالها یک در میان مثبت و منفی هستند (چرا؟) از آزمون لایبنیتز (در ضمیمه ۳) نتیجه می شود که

سری نامتناهی $I_0 + I_1 + I_2 + \dots$ همگرا است. به وضوح، مجموع سری برابر انتگرال

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x} dx$$

است که به دلیل آن موجود می باشد. مشابهاً، انتگرال از 0 تا $-\infty$ وجود دارد. بنابراین لازم نیست که در (۸) مقدار اصلی را در نظر بگیریم، و

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

نظر به اینکه تابع انتگرالده تابعی زوج است، نتیجه مورد نظر به دست می آید.

در قسمت (ج) از مثال ۲ از قطب ساده بوسیله انتگرالگیری در امتداد نیمدایره C_r اجتناب شده

است، و سپس فرض کردیم C_r کوچک شده و به سمت صفر میل کند. با توجه به آن قضیه زیر حاصل می شود.

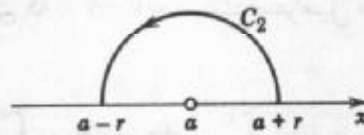
قضیه ۱. قطبهای ساده روی محور حقیقی

اگر $f(z)$ دارای یک قطب ساده در $z = a$ واقع بر محور حقیقی باشد، آنگاه (شکل ۳۵۱)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = \pi i \text{Res}_{z=a} f(z).$$

اثبات. بنا به تعریف یک قطب ساده (بخش ۱۴. ۸) تابع انتگرالده $f(z)$ در $z = a$ دارای سری لوران

$$f(z) = \frac{b_1}{z-a} + g(z); \quad b_1 = \text{Res}_{z=a} f(z)$$



شکل ۳۵۱. قضیه ۱

است که در آن $g(z)$ برنیمدایره انتگرالگیری (شکل ۳۵۱)

$$C_r : z = a + re^{i\theta}; \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

و به ازای تمام مقادیر z بین C_r و محور x ها تحلیلی است. با انتگرالگیری، داریم

$$\int_{C_r} f(z) dz = \int_0^\pi \frac{b_1}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta + \int_{C_r} g(z) dz.$$

مقدار انتگرال اول طرف راست برابر $b_1\pi i$ است. بنا به نامساوی ML (بخش ۱۳. ۲) قدرمطلق انتگرال دوم نمی تواند از $M\pi r$ تجاوز کند و $M\pi r \rightarrow 0$ وقتی که $r \rightarrow 0$. بدین ترتیب قضیه به اثبات می رسد.

این قضیه را می توان با رابطه (۷) از بخش ۱۵. ۳ با رابطه (۳) از این بخش ترکیب نمود. از

این رو [ر. ک. (۷) بخش ۱۵. ۳]

$$\text{Pr. v. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum \text{Res } f(z) + \pi i \sum \text{Res } f(z) \quad (9)$$

(با جمع روی همه قطبها در نیم صفحه فوقانی و در دومی روی محور x ها محاسبه می شوند)، برای

توابع گویای $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ با این جمع که $2 + p$ درجه $\geq q$ ، که دارای قطبهای ساده روی

محور x ها باشد، معتبر است.

مسائل بخش ۱۵. ۴

۱. (۳) را از (۲) به دست آورید.

هر یک از انتگرالهای حقیقی زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + x + 1} dx \quad . 4 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1 + x^2} dx \quad . 3 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx \quad . 2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx \quad . 7 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2 + x + 1} dx \quad . 6 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + x + 1} dx \quad . 5$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 4x}{x^2 + 5x^2 + 4} dx \quad . 10 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin nx}{1 + x^2} dx \quad . 9 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + 1)^2} dx \quad . 8$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{4x^2 + 12x + 9} dx \cdot 13 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + 4)^2} dx \cdot 12 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 2x + 4} dx \cdot 11$$

۱۴. با انتگرالگیری از e^{-z} روی کرانه مستطیلی که رئوس آن $-a$ ، a ، $a + ib$ ، $-a + ib$ است، وقتی که $a \rightarrow \infty$ ، و با استفاده از

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cos 2bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2} \quad \text{نشان دهید که} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

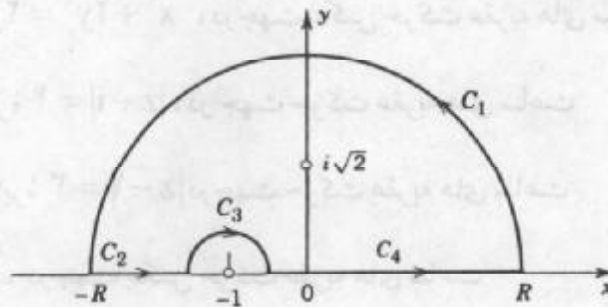
قطبها روی محور حقیقی. مقدار اصلی کوشی انتگرالهای زیر را بیابید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\lambda - x^2} dx \cdot 17 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x+1)(x^2+2)} dx \cdot 16 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - ix} \cdot 15$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 1} \cdot 20 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)} \cdot 19 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ix} \cdot 18$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x}{x - x^2} dx \cdot 23 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \frac{1}{2} \pi x}{x^2 - 1} dx \cdot 22 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{4} \pi x}{2x - x^2} dx \cdot 21$$

۲۴. نشان دهید که اگر در مثال ۲، به جای نیمدایره C_1 نیمدایره تحتانی متناظرش را قرار دهیم، نتیجه به جای خود باقی می ماند.



شکل ۳۵۲. مساله ۱۶

پرسشها و مسائل دوره ای فصل ۱۵

۱. تکین یکی تابع تحلیلی $f(z)$ و همچنین مانده $f(z)$ در یک نقطه تکین چیست؟
۲. انگیزه انتگرالگیری مانده چیست؟
۳. چرا در انتگرالگیری به روش مانده استفاده از سری لورانی که در یک همسایگی نقطه تکین z_0 (جز در خود z_0) از اهمیت خاصی برخوردار است؟
۴. آیا برخی از روشهایی که مانده را تعیین کرده ایم، می توانید یادآوری کنید؟
۵. آیا مانده در یک نقطه تکین می تواند صفر باشد؟ دلیل بیاورید.
۶. آیا مانده در یک قطب ساده می تواند صفر باشد؟

۷. آیا درحالتی که یک تابع تحلیلی نیست ولی فقط پیوسته است، می توان انتگرالگیری مانده را بکار برد؟

۸. آیا برای محاسبه انتگرال $\tan\left(\frac{1}{z}\right)$ روی کانتور بسته ای که نقطه $z = 0$ را در بر می گیرد، می توان

از انتگرالگیری مانده استفاده کرد؟ جواب این پرسش را به ازای $e^{\frac{1}{z}}$ بیابید.

۹. در انتگرال گیری به روش مانده به مسیرهای بسته نیازمندیم. علیرغم توانایی در مورد محاسبه انتگرالها (ی حقیقی) روی بازه ها چگونه بود؟

۱۰. مقدار اصلی کوشی یک انتگرال چیست و چرا در این فصل آمده است؟

انتگرالهای زیر را روی مسیر مفروض C با استفاده از انتگرالگیری به روش مانده یا یکی از روشهای بحث شده در فصل ۱۳ محاسبه کنید. و نشان دهید که انتگرالگیری به روش مانده را می توان برای آنها به کار برد.

۱۱. $C, z^{-1} \cos 2z$ ، دایره دلخواه ثابت $|z| = 1$ ، در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت

۱۲. $C, z^{-1} \sin 2z$ ، دایره واحد در جهت حرکت عقربه های ساعت

۱۳. $C, \frac{dz}{z+i}$ ، دایره $|z-2i| = 3$ ، در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت

۱۴. $C, \frac{z^2+1}{z^2-2z}$ ، بیضی $x^2+2y^2=2$ ، در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت

۱۵. $C, \frac{z-8}{z^2+z-6}$ ، دایره $|z-i|=4$ ، در جهت حرکت عقربه های ساعت

۱۶. $C, \frac{iz+1}{z^2-iz+2}$ ، دایره $|z-1|=3$ ، در جهت حرکت عقربه های ساعت

۱۷. $C, \frac{z}{|z|^2}$ ، دایره واحد، در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت

۱۸. $C, z^2 \exp z^2$ ، مسیر دلخواهی از $1+i$ تا 1 .

۱۹. $C, z^n e^{\frac{1}{z}}$ ، دایره واحد (در جهت حرکت عقربه های ساعت)، $n = 1, 2, \dots$

۲۰. $C, \frac{z}{\sin^2 z}$ ، دایره $|z|=1$ ، در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت

۲۱. $C, \operatorname{Re} z$ ، مثلثی به رئوس $0, 1, 1+i$ ، در جهت حرکت عقربه های ساعت

۲۲. $C, \frac{z \cosh z^2}{(z-2i)^2}$ ، دایره $|z-2i|=1$ ، در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت

۲۳. $C, (z-\frac{\pi}{4})^{-2} \cos 8z$ ، دایره واحد، در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت

۲۴. $C, \frac{4z^2+7z}{\cos z}$ ، دایره $|z+1|=1$ ، در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت

۲۵. C ، دایره $|z| = 3$ ، در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت

با استفاده از روشهای موجود در این فصل، انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{13 - 5\sin\theta} \quad .28 \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{25 - 24\cos\theta} \quad .27 \quad \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{k + \cos\theta} \quad (k > 1) \quad .26$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{34 - 16\sin\theta} d\theta \quad .31 \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{3 + \cos\theta} d\theta \quad .30 \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - \frac{1}{2}\sin\theta} \quad .29$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + 4x^2} \quad .34 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + 4x^2} \quad .33 \quad \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2} + 2\sin\theta}{17 - 8\sin\theta} d\theta \quad .32$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + 5x^2 + 4} dx \quad .37 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^2} \quad .36 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1 + x^2)^2} dx \quad .35$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 10x^2 + 9} \quad .40 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + 2x^2}{1 + 4x^2} dx \quad .39 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + 13x^2 + 36} dx \quad .38$$

خلاصه فصل ۱۵

روش انتگرالگیری مانده

مانده یک تابع تحلیلی $f(z)$ در یک نقطه $z = z_0$ ضریب b_1 جمله $\frac{1}{z - z_0}$ در سری لوران

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots$$

تابع $f(z)$ است که در همسایگی z_0 (جزء در خود z_0) همگرا است. این مانده با انتگرال (بخش

(۱.۱۵)

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz \quad (1)$$

داده شده است ولی این ضریب را از راههای مختلف دیگری نیز می توان به دست آورد، در نتیجه برای

محاسبه انتگرالها روی منحنی های بسته از (۱) می توان استفاده کرد. به طور کلی، قضیه مانده (بخش

۲.۱۵) بیان می کند که هرگاه $f(z)$ در دامنه D ، به جز تعدادی متناهی نقاط z_j تحلیلی بوده و C یک

مسیر بسته ساده ای در D باشد که هیچیک از z_j در C قرار نگیرند و تمام داخل C متعلق به D

باشد، آنگاه

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_j \text{Res } f(z) \quad (2)$$

(جمع تنها روی z_j هایی صورت می گیرد که در داخل C قرار دارند).

این روش انتگرالگیری بسیار ساده و ظریف می باشد. فرمولهای مانده در **قطبها** عبارت است از m مرتبه قطب است (بخش ۱.۱۵)

$$\text{Res } f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)] \right), \quad (3)$$

که در آن $m = 1, 2, \dots$. از این رو برای قطب ساده ($m = 1$) داریم

$$\text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (3^*)$$

فرمول دیگر برای مانده در یک قطب ساده $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ عبارت است از

$$\text{Res } f(z) = \frac{P(z_0)}{q'(z_0)}. \quad (3^{**})$$

انتگرالگیری به روش مانده به منحنی های بسته مربوط می شوند، ولی بازه حقیقی انتگرالگیری $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ، با قرار دادن $z = e^{i\theta}$ به دایره واحد تبدیل می شود. در نتیجه بنا به انتگرالگیری به روش مانده می توان انتگرالهای حقیقی به شکل (بخش ۱.۱۵)

$$\int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

را انتگرال گرفت، که در آن F تابع گویایی از $\cos \theta$ و $\sin \theta$ است، مثلاً تابع $\frac{\sin^4 \theta}{5 - 4 \cos \theta}$ و غیره یک تابع گویای مورد نظر است.

روش دیگر انتگرالگیری، انتگرالهای حقیقی بوسیله مانده، استفاده یک کانتور بسته مرکب از بازه $-R \leq x \leq R$ بر محور حقیقی و نیمدایره $|z| = R$ است. با توجه به قضیه مانده، هرگاه فرض کنیم $R \rightarrow \infty$ ، برای تابع گویا $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ (با $q(z) \neq 0$ و q درجه $\geq p$ درجه q) به دست می آوریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum \text{Res } f(z), \quad (\text{بخش } 3.15)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos sx dx = -2\pi \sum \text{Im Res } [f(z)e^{isz}], \quad (\text{بخش } 4.15)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin sx dx = 2\pi \sum \text{Re Res } [f(z)e^{isz}]$$

(جمع روی همه مانده ها در قطبهای واقع در نیم صفحه فوقانی انجام می شود). در بخش ۴.۱۵ این روش را برای انتگرالهای حقیقی که تابع انتگرالده در نقطه ای واقع در فاصله انتگرالگیری بینهایت می شود تعمیم داده شده است.

فصل ۱۶

نگاشت همدیس

اگر تابع f با ضابطه $w = f(z)$ در دامنه D از صفحه z تعریف شود، آنگاه به ازای هر نقطه از D نقطه ای از صفحه w متناظر قرار می گیرد. به این ترتیب **نگاشتی** از D بر روی برد مقادیر $f(z)$ در صفحه w خواهیم داشت. این «راهیافت هندسی» در آنالیز مختلط به ما کمک می کند تا خصلت یک تابع مختلط را با بررسی این که آن تابع منحنیها و نواحی معین را چگونه می نگارد را «تجسم کنیم» ما این خاصیت را برای توابع خاصی در بخش ۹.۱۲ ملاحظه کردیم که متعلمین برای شروع بحث می توانند آنها را دوباره مطالعه نمایند.

این فصل در ارتباط با یک روش سیستماتیک از نگاشتهایی با توابع تحلیلی دلخواه $w = f(z)$ است. مشاهده خواهیم کرد (در بخش ۱۰.۱۶) که چنین **نگاشتی همدیس** است، یعنی زوایا را چه از نظر اندازه و چه از نظر جهت بجز در «نقاط بحرانی» (نقاطی که در آنجا $f'(z)$ صفر است) بدون تغییر منتقل می کند.

نگاشت همدیس در ریاضیات مهندسی مهم است، چرا که این نگاشت روشی متعارف برای حل مسائل با مقدار کرانه ای در نظریه پتانسیل دوبعدی با تبدیل یک ناحیه پیچیده مفروض به ناحیه ای ساده تر (جزئیات در فصل ۱۷ آمده است) می باشد. در این قسمت از نگاشت، تبدیلات کسری خطی (بخشهای ۲.۱۶، ۳.۱۶) که دارای یک نقش کلیدی است، و توابع خاص دیگر (بخش ۴.۱۶) می توان استفاده نمود. در بخش آخر (بخش ۵.۱۶) سطح ریمان مورد بحث قرار می گیرد. کاربردهای نظریه پتانسیل در فصل ۱۷ ارائه خواهد شد.

پیشنیازهای این فصل: فصل ۱۲.

بخشهایی که برای دوره فشرده تر قابل حذف است: بخشهای ۳.۱۶ و ۴.۱۶.

مراجع: ضمیمه ۱، قسمت D.

جواب مسائل: ضمیمه ۲.

۱.۱۶ نگاشت همدیس

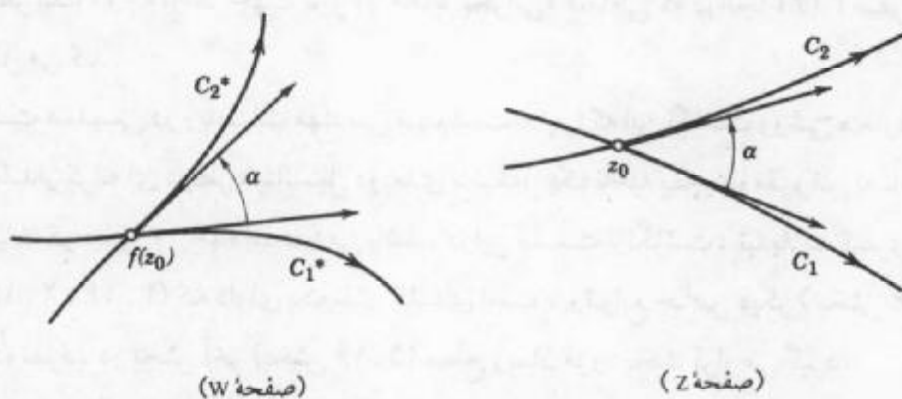
تابع با مقدار مختلط

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (z = x + iy)$$

از متغیر مختلط z ، نگاشتی از دامنه تعریفش در صفحه مختلط Z بر روی w برد مقادیر در صفحه W تخصیص می دهد. مثالهایی در بخش ۹.۱۲ نشان داده شده اند، که متعلمین می توانند آنها را قبل از این بخش مطالعه نمایند. چنانچه $f(z)$ تحلیلی باشد، آنگاه مهمترین خاصیت نگاشت همدیس بودن نگاشت است. یک نگاشت همدیس به صورت زیر تعریف می شود.

نگاشت $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ را همدیس نامند هرگاه زوایای بین منحنیهای جهتدار را از نظر اندازه و جهت حفظ کند.

شکل ۳۵۳ چگونگی انجام این کار را نشان می دهد: تصاویر C_1^* و C_2^* از دو منحنی جهتدار همان زاویه α (که این زاویه $0 \leq \alpha \leq \pi$) بین مماسهای جهتدار در نقطه تقاطع می باشد) را به عنوان زاویه بین C_1 و C_2 ، با توجه به جهت آنها، چه از نظر اندازه و چه از نظر جهت پدید می آورد. ثابت می کنیم که همدیسی برای یک تابع تحلیلی $f(z)$ ، جز در نقطه بحرانی، یعنی نقطه ای که مشتق $f'(z)$ در آن صفر است، ارائه می شود. به عنوان مثال تابع $f(z) = z^2$ دارای نقطه بحرانی $z = 0$ است، که در آن $f'(z) = 2z = 0$ و در $z = 0$ هر زاویه دو برابر می شود (ر.ک. مثال ۲، بخش ۹.۱۲)، در نتیجه این نگاشت مسلماً در $z = 0$ همدیس نیست. نقاط $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ نقاط بحرانی تابع $f(z) = \cos z$ می باشند.



شکل ۳۵۳. منحنیهای C_1 و C_2 تصاویر مربوط به آنها یعنی C_1^* و C_2^* تحت یک نگاشت همدیس

- ۱- اصطلاحات عمومی به شرح زیر اند. نگاشتی از مجموعه A به توی مجموعه B را پوششی یا نگاشتی از A بر روی B گویند. هرگاه هر عضو B تصویر لااقل یکی از اعضای A باشد. نگاشتی را انژکتیو یا یک به یک نامند اگر اعضای مختلف A دارای تصاویر مختلف در B باشند. نگاشتی را دوسویی نامند اگر هم پوششی وهم یک به یک باشد.

قضیه ۱ (نگاشت همدیس)

نگاشتی که با تابع تحلیلی $f(z)$ تعریف می شود، جز در نقاط بحرانی، یعنی در نقاطی که مشتق $f'(z)$ صفر است، همدیس است.

اثبات. برای نیل به هدف، منحنی

$$C: z(t) = x(t) + iy(t) \quad (1)$$

واقع در دامنه $f(z)$ را در نظر می گیریم و نشان می دهیم که نگاشت $w = f(z)$ هر خط مماس بر C را در یک نقطه دلخواه z_0 واقع بر C (با فرض $f'(z_0) \neq 0$) به طور مستقل از منحنی C دوران می دهد. خطوط مماس بر دو منحنی دلخواه C_1 و C_2 که از نقطه z_0 می گذرند (شکل ۳۵۳) تحت یک زاویه دوران می کنند، زاویه بین دو منحنی تصویر چه از نظر اندازه و چه از نظر جهت برابر وضعیت زاویه بین دو منحنی C_1 و C_2 است و این باتوجه به تعریف، به معنی همدیسی است. جزئیات کار به شرح زیر می باشد.

فرض کنید C یک منحنی هموار باشد، یعنی $z(t)$ در (۱) مشتق پذیر بوده و مشتق

$\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt}$ پیوسته و هیچ جا صفر نباشد. هم اکنون ادعا می کنیم که خط مماس بر C به طور پیوسته یکتا تغییر می کند. در واقع بنا، به تعریف (شکل ۳۵۴)

$$\dot{z}(t) = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z_1 - z_0}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} \quad (2)$$

در تساوی (۲) $z_1 - z_0$ نمایش وتری از منحنی C بوده (ر.ک. شکل ۳۵۴)، و $\frac{z_1 - z_0}{\Delta t}$ با Δt مثبت دارای همان جهت است. هم اکنون اگر $\Delta t \rightarrow 0$ آنگاه نقطه z_1 در طول منحنی C به سمت z_0 میل می کند، و

$$\frac{z_1 - z_0}{\Delta t} \rightarrow \dot{z}(t_0).$$

از این رو $\dot{z}(t_0)$ در z_0 بر C مماس است، که به اختصار به بردار مماسی بر منحنی C در نقطه z_0 موسوم است، با توجه به آن درستی ادعای مورد نظر به اثبات می رسد.

هم اکنون هر خط مماس جهتدار می گردد: جهت مثبت هر خط مماس و همینطور بر منحنی

همان جهت افزایش t در (۱) است که در آن جهت بردار نیز نشان می دهد.

حال به منحنی C^* نقش منحنی C تحت نگاشت $w = f(z)$ (غیر ثابت) برمی گردیم. منحنی

C^* دارای نمایش به صورت زیر است

$$w = f[z(t)]$$

زیرا $z(t)$ نمایش منحنی C است و f آن را به C^* می برد. به $z_0 = z(t_0)$ واقع بر C نقطه

$w_0 = w(t_0)$ واقع بر C^* و یک بردار مماس در آن متناظر قرار می گیرد. هم اکنون بنا به قاعده زنجیره ای داریم

$$\dot{w}(t) = f'[z(t)] \dot{z}(t) \quad \text{و یا به اختصار} \quad \frac{dw}{dt} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \quad (۳)$$

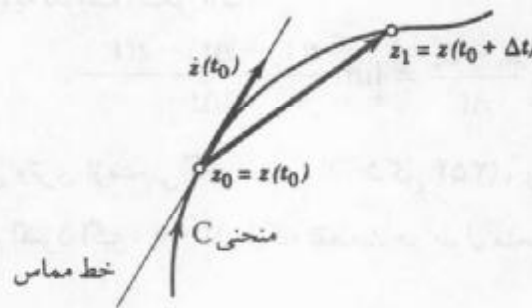
با فرض $f'(z_0) \neq 0$ ، $\arg f'(z_0)$ ، تعریف شده و با توجه به (۳) [بنا به (۹)، بخش ۱۲. ۲] می یابیم

$$\arg \dot{w}(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \dot{z}(t_0). \quad (۴)$$

بنابراین زاویه بین مماس بر C در z_0 و مماس بر C^* در w_0 ، یعنی زاویه α که خط مماس به اندازه آن دوران می کند عبارت است از

$$\alpha = \arg \dot{w}(t_0) - \arg \dot{z}(t_0) = \arg f'(z_0).$$

حال به نقطه کلیدی برمی گردیم: چون عبارت طرف راست مستقل از انتخاب C است (و تنها به نقطه z_0 بستگی دارد)، این زاویه مستقل از C است؛ یعنی نگاشت مورد نظر هر منحنی مار بر z_0 را به اندازه همان زاویه دوران می دهد، در نتیجه تصاویر دو منحنی C_1^* و C_2^* همان زاویه دو منحنی اصلی C_1 و C_2 پدید می آورند و بنا به تعریف این مطلب به معنی همدیس بودن است و قضیه به اثبات می رسد.



شکل ۳۵۴. فرمول (۲)

مثال ۱. همدیسی $w = z^n$ و $w = e^z$

نگاشت $w = z^n$ ، که در آن $n = ۲, ۳, \dots$ به جز در $z = 0$ ، که در آن $w' = nz^{n-1} = 0$ است، همدیس می باشد. به ازای $w = z^2$ در شکل ۳۰۴ (بخش ۹. ۱۲) نشان داده شده است، که در این شکل منحنیهای تصویر یکدیگر را با زاویه قائمه قطع می کنند و تنها در نقطه $z = 0$ زوایا تحت این نگاشت دو برابر می شوند. و دلیل این کار آن است که هر شعاع ثابت $\arg z = c$ به شعاع $\arg w = 2c$ تبدیل می شود.

نگاشت $w = e^z$ به ازای تمام مقادیر z همدیس است زیرا به ازای تمام مقادیر z ، $w' = e^z$

مخالف صفر است.

نسبت بزرگنمایی. بنا به تعریف مشتق داریم

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = |f'(z_0)|.$$

در نتیجه، نگاشت $w = f(z)$ طول پاره خطهای کوتاه را تقریباً $|f'(z_0)|$ برابر بزرگ یا کوچکتر می کند. تصویر یک شکل هندسی کوچک با شکل اصلی همدیس می باشد به این معنی که تقریباً دارای همان شکل است. گرچه، از آنجا که $f'(z)$ از هر نقطه به نقطه دیگر تغییر می کند، یک شکل هندسی بزرگ ممکن است دارای تصویری باشد که شکل آن کاملاً با شکل اصلی تفاوت داشته باشد.

توضیح بیشتر درباره شرط $f'(z) \neq 0$. از (۴) بخش ۱۲. ۵. و معادلات کوشی - ریمان به

دست می آوریم

$$|f'(z)|^2 = \left| \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5')$$

یعنی

$$|f'(z)|^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}. \quad (5)$$

این دترمینان به ژاکوبی (ر. ک. بخش ۹. ۳) تبدیل $w = f(z)$ موسوم می باشد که به شکل حقیقی زیر نوشته می شود

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

از این رو، شرط $f'(z_0) \neq 0$ ایجاب می کند که ژاکوبی در z_0 صفر نباشد. این شرط کفایت می کند که تحدید نگاشت $w = f(z)$ به همسایگی N_0 از z_0 که به اندازه کافی کوچک است یک به یک یا انژکتیو باشد، یعنی نقاط متفاوت در N_0 دارای تصویرهای متفاوت باشند؛ مرجع [۵] را که در ضمیمه ۱ فهرست شده، ملاحظه کنید.

مثال ۲.

نگاشت $w = z^2$ در هر همسایگی از نقطه دلخواه $z \neq 0$ ، که به اندازه کافی کوچک باشد، یک به یک است. این نگاشت در همسایگی $z = 0$ یک به یک نیست. تمامی صفحه z بر روی صفحه w نگاشته می شود به قسمی که هر نقطه $w \neq 0$ تصویر دو نقطه از صفحه z باشد. به عنوان نمونه، نقاط $z = 1$ و $z = -1$ بر روی $w = 1$ نگاشته می شوند، و به طور کلی دو نقطه z_1 و $-z_1$ دارای یک

تصویر $w = z^2$ می باشند.

برخی نگاشتها در بخش ۹.۱۲ تشریح شده اند و تعدادی بیشتر نیز در بخشهای بعدی به صورت سیستماتیک ارائه خواهند شد.

مسائل بخش ۱.۱۶

تصویر هریک از منحنیهای زیر را تحت نگاشت $w = u + iv = z^2$ بیابید و آنها را رسم کنید.

$$x = 1, 2, 3, 4 \quad y = 1, 2, 3, 4 \quad xy = 10 \quad 3$$

$$y = x + 1 \quad y = -x, y = x \quad y^2 = x^2 - 1 \quad 6$$

$$|z| < \frac{1}{3} \quad |z| \geq 5 \quad |\arg z| < \frac{\pi}{3} \quad 9$$

$$\operatorname{Re} z > 0 \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2} \quad 0 < y < 1 \quad 12 \quad 11$$

هریک از منحنیهای زیر را که در صفحه $z = x + iy$ قرار دارند، به صورت $z = z(t)$ نمایش دهید و بردار مماسی $\dot{z}(t)$ متناظر را تعیین کنید. منحنی و برخی از بردارها را رسم کنید.

$$x^2 + y^2 = 16 \quad (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25 \quad x^2 + 9y^2 = 9 \quad 13 \quad 14 \quad 15$$

$$x^2 - y^2 = 4 \quad y = \frac{1}{x} \quad y = 12 - 3x^2 \quad 16 \quad 17 \quad 18$$

نقاطی را در صفحه z تعیین کنید که در آن نقاط نگاشت $w = f(z)$ تعریف شده به یکی از صورتهای زیر همدیس نباشد.

$$z^2 + az + b \quad \cos \pi z \quad \exp(z^3 - 80z) \quad 19 \quad 20 \quad 21$$

$$\exp(z^3 - 9z) \quad \cosh 2z \quad z + z^{-1} (z \neq 0) \quad 22 \quad 23 \quad 24$$

۲۵. چرا تصاویر منحنیهای ثابت $|z| = \text{ثابت}$ و $\arg z = \text{ثابت}$ یک تابع تحلیلی تحت یک زاویه قائمه یکدیگر را قطع می کنند؟

۲۶. به چه علتی منحنیهای تراز ثابت $u = \text{ثابت}$ و $v = \text{ثابت}$ یک تابع تحلیلی $w = u + iv = f(z)$ در هر نقطه ای که در آن $f'(z) \neq 0$ تحت یک زاویه قائمه همدیگر را قطع می کنند؟

۲۷. آیا نگاشت $w = \bar{z} = x - iy$ زوایا را از نظر اندازه و از نظر جهت حفظ می کند؟

۲۸. درستی (۵) را به ازای $f(z) = e^z$ بررسی کنید.

۲۹. (بزرگنمایی زوایا) فرض کنید تابع $f(z)$ در z_0 تحلیلی و $f'(z_0) = 0$

و $f^{(k-1)}(z_0) = 0, \dots, f^{(k)}(z_0) \neq 0$. آنگاه نگاشت $w = f(z)$ هر زاویه به راس z_0 را k برابر می کند. درستی این موضوع را با ارائه سه مثال به ازای $k = 2, 3, 4$ نشان دهید.

۳۰. مساله ۲۹ را به ازای یک k دلخواه ثابت کنید. **راهنمایی.** از سری تیلور استفاده کنید.

۲.۱۶ تبدیلات کسری خطی

تبدیلات همدیس دارای کاربردهای متنوع فیزیکی است. درستی این ادعا را در فصل ۱۷ مشاهده خواهید نمود. ولی آنچه در عمل مهم است آن است که در مسائل عملی چه تبدیلی را باید انتخاب نمود تا یک ناحیه پیچیده را به یک ناحیه ساده مثلاً به یک قرص تبدیل کند. برای نیل به این هدف نیاز به مطالعه خواص تبدیلات همدیس داریم. برای این منظور موضوع را با یک دسته خیلی مهم از این تبدیلات به شرح زیر آغاز می کنیم. **تبدیلات کسری خطی (یا تبدیلهای مویوس)** نگاشتهایی به صورت

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0) \quad (1)$$

می باشند که در آن ثابتهای a, b, c, d اعداد حقیقی یا مختلط هستند. این نگاشتهای دارای کاربردهای عملی مهم در حل مسائل با مقادیر کرانه ای هستند زیرا در حل چنین مسائل بسیاری اوقات نیاز داریم که یک قرص را به روی یک نیمدایره یا بر روی قرص و بالعکس بنگاریم. این نوع تبدیلات باعث گسترش صفحه مختلط نیز می گردند (بخش ۱۴. ۸) و در جریان مسائل سیالات و کاربردهای دیگر نقش اساسی دارند.

باتوجه به شرط $ad - bc \neq 0$ و

$$w' = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

مشاهده می کنیم که مشتق تابع موردنظر همواره مخالف صفر است، بنابراین نگاشت (۱) در همه جا همدیس است. به ازای $ad - bc = 0$ به $w' = 0$ می رسیم که در مسائل چندان با اهمیت نیستند. بحث را باحالتهای خاصی از (۱) شروع می کنیم.

مثال. انتقال، دوران، انبساط، انقباض

هریک از موارد زیر حالت خاصی از (۱) هستند.

(۲) انتقال) $w = z + b$ انتقال z به اندازه b است.

و

(۳) $w = az$

به ازای $|a| = 1$ از یک دوران حاصل می شود، یعنی اگر بنویسیم $a = e^{i\alpha}$ آنگاه α زاویه این دوران است به ازای $\alpha > 1$ حقیقی با یک انبساط و به ازای $\alpha < 1$ با یک انقباض مواجه هستیم. تبدیلات

(۲) و (۳) موارد خاصی از تبدیل خطی

$$w = az + b$$

می باشند، که از (۱)، به ازای $c = 0$ و $d = 1$ حاصل می شود.

مثال ۲. نگاشت $w = \frac{1}{z}$. انعکاس

نگاشت

$$w = \frac{1}{z} \tag{۴}$$

حالت خاص مهمی از (۱) می باشد. در مطالعه آن با بهترین کاربرد مختصات قطبی $z = re^{i\theta}$ و $w = Re^{i\phi}$ مواجه هستیم. با توجه به این فرض داریم

$$Re^{i\phi} = \frac{1}{re^{i\theta}}$$

و با مساوی قرار دادن قدر مطلقها با هم و آرگومانها با هم در طرفین تساوی فوق می یابیم

$$R = \frac{1}{r}, \quad \phi = -\theta.$$

با توجه به این موضوع نتیجه می شود که نقش $w = \frac{1}{z}$ ($z \neq 0$) روی شعاعی که مبداء را به \bar{z} وصل می کند، در فاصله $\frac{1}{|z|}$ از مبداء قرار دارد. علی الخصوص $z = e^{i\theta}$ واقع بر دایره واحد $|z| = 1$ بر روی نقطه $w = e^{i\phi} = e^{-i\theta}$ واقع بر دایره واحد $|w| = 1$ نگاشته می شود.

متذکر می شویم که به طریق هندسی نقش z با نگاشت $w = \frac{1}{z}$ با انعکاس نسبت به دایره واحد (شکل ۳۵۵) و سپس قرینه یابی نسبت به محور x حاصل می شود. متعلم می تواند این مطلب را با استفاده از مثلثهای متشابه ثابت کند.

شکل ۳۵۶ نشان می دهد که $w = \frac{1}{z}$ خطهای راست افقی و قائم را بر روی دایره ها یا خطهای راست می نگارد.

هر خط راست یا دایره را بر روی یک دایره یا خط راست می نگارد.

اثبات. هر خط راست یا دایره واقع در صفحه z را می توان به صورت زیر نوشت

$$A(x' + y') + Bx + Cy + D = 0 \quad (A, B, C, D \text{ حقیقی}).$$

اگر $A = 0$ این معادله نمایش خط راست و اگر $A \neq 0$ ، نمایش یک دایره است، معادله فوق بر حسب z و \bar{z} می توان چنین نوشت

$$Az\bar{z} + B\frac{z+\bar{z}}{2} + C\frac{z-\bar{z}}{2i} + D = 0.$$

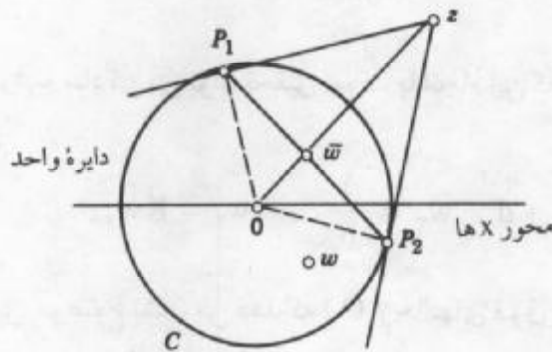
حال با جایگزینی $w = \frac{1}{z}$ و ضرب کردن معادله در $w\bar{w}$ می یابیم

$$A + B \frac{\bar{w} + w}{2} + C \frac{\bar{w} - w}{2i} + Dw\bar{w} = 0$$

یا

$$A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2) = 0$$

این نمایش یک دایره (اگر $D \neq 0$) یا نمایش یک خط راست (اگر $D = 0$) در صفحه w است

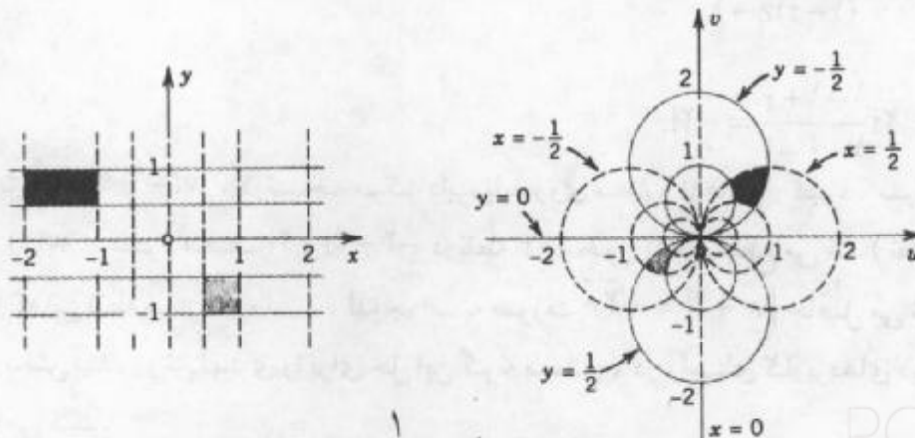


شکل ۳۵۵. تعبیر هندسی $w = \frac{1}{z}$. در اینجا، \bar{w} نقطه تقاطع Oz ، P_1P_2 است، که در آن P_1 و P_2 نقاط تماس خطوطی است که از نقطه z بر دایره واحد مماس شده اند.

اثبات این مثال اشاره بر استفاده از \bar{z} به جای x و y دارد، که یک موضوع مهم است که اغلب در عمل مفید واقع می شود. شگفت انگیز آنکه توجه کنیم که هر تبدیل کسری خطی دارای خاصیت ذکر شده فوق است.

قضیه ۱ (دوایر و خطوط راست)

هر تبدیل کسری خطی (۱) یک دایره یا یک خط راست واقع بر صفحه z را بر روی یک دایره یا یک خط راست واقع در صفحه w می نگارد.



شکل ۳۵۶. نگاشت $w = \frac{1}{z}$

اثبات. صحت این ادعا در انتقال یا دوران بدیهی، و همین طور در مورد انبساط و انقباض یکنواخت واضح است، و بنابراین قضیه به ازای $w = \frac{1}{z}$ ، همانطوری که ثابت شد، برقرار است. در نتیجه این قضیه در مورد ترکیب این نگاشتهای خاص نیز برقرار است. حال به انگیزه کلیدی اثبات می‌رسیم و آن نمایش (۱) بر حسب نگاشتهای خاص فوق‌الذکر است. به ازای $c = 0$ ، قضیه به آسانی به اثبات می‌رسد. به ازای $c \neq 0$ ، نمایش (۱) به صورت $w = K \frac{1}{cz+d} + \frac{a}{c}$ که در آن $K = -\frac{ad-bc}{c}$ درمی‌آید.

درستی این مطلب را به سادگی می‌توان تحقیق نمود. با انجام این کار به (۱) خواهیم رسید.

هم اکنون چنین قرار می‌دهیم

$$w_1 = cz, \quad w_r = w_1 + d, \quad w_r = \frac{1}{w_r}, \quad w_r = Kw_r,$$

و از آنجا $w = w_r + \frac{a}{c}$ و این موضوع نشان می‌دهد که (۱) از حالت‌های فوق است و بدین طریق قضیه به اثبات می‌رسد.

مثال ۳. تصویر یک دایره

با استفاده از قضیه ۱، نقش دایره واحد $|z|=1$ را تحت تبدیل سری خطی

$$w(z) = \frac{2iz - 2 - 2i}{(1-i)z - 1}$$

بیابید.

حل. بنا به قضیه ۱، نقش دایره مورد نظر یک دایره (یا یک خط راست) است، از این رو با تصویر کردن سه نقطه $1, -1, i$ ، و ابر روی دایره $|z|=1$ تعیین می‌شود. با محاسبه این تصاویر، $w(z)$ را می‌توان به صورت ساده تری همانند

$$w(z) = 2i \frac{z-1+i}{(1-i)z-1}$$

نوشت، لذا

$$w(1) = 2i \frac{1-1+i}{1-i-1} = -2i,$$

به همین طریق، $w(-1) = 2i$ ، در نتیجه مرکز دایره باید روی محور u قرار گیرد. سرانجام، $w(i) = -2 + 4i$. عمود منصف $2i$ و $-2 + 4i$ در نقطه -4 محور u ها را قطع می‌کند (نظیر آن را رسم کنید)؛ که این نقطه مرکز دایره است. لذا جواب به صورت $|w+4| = \sqrt{2}$ حاصل می‌شود.

در بخش آینده روش بهتری را برای حل این گونه مسائل، در راستای کاربردهای دیگری از

صفحه مختلط توسعه یافته در بخش ۸.۱۴ شرح می شود. این صفحه از صفحه مختلط به انضمام نقطه ∞ (بینهایت) شکل می گیرد. حال می توان این مطلب را حتی با یک انگیزش طبیعی تر بر حسب تبدیلات کسری خطی به دست آورد.

باتوجه به (۱) مشاهده می شود که با هر Z ای که به ازای آن $CZ + d \neq 0$ ، دقیقاً یک عدد مختلط w متناظر است فرض کنید که $C \neq 0$ آنگاه با مقدار $Z = -\frac{d}{C}$ که به ازای آن $w = \infty$ متناظر نمی شود. این موضوع اشاره بر آن دارد که $w = \infty$ را نقش $Z = -\frac{d}{C}$ ($C \neq 0$) قرار دهیم. به علاوه، وقتی که $C = 0$ ، باید داشته باشیم $a \neq 0$ ، $d \neq 0$ (چرا؟) و در این صورت فرض کنید که $w = \infty$ تصویر نقطه $Z = \infty$ باشد.

سرانجام، نگاشت معکوس (۱) از حل (۱) بر حسب Z حاصل می شود، که این نگاشت معکوس خود یک تبدیل کسری خطی است:

$$w = \frac{-dw + b}{cw - a} \quad (5)$$

وقتی $C \neq 0$ ، آنگاه به ازای $w = \frac{a}{C}$ ، $CW - a = 0$ ، و فرض می کنیم $\frac{a}{C}$ تصویر $Z = \infty$ باشد. حال با این مفروضات، تبدیل کسری خطی (۱) نگاشت همدیس یک به یک از صفحه Z توسعه یافته بر روی صفحه w توسعه یافته است. همچنین گوئیم هر تبدیل کسری خطی (۱) «صفحه توسعه یافته را به طور یک به یک بر روی خودش» می نگارد.

باتوجه به آنچه بحث شد می توان نتیجه گرفت:

تبصره کلی. اگر $Z = \infty$ ، در این صورت طرف راست (۱) به صورت عبارت بی معنی $\frac{a \cdot \infty + b}{c \cdot \infty + d}$ ظاهر می شود، هنگامی که $C \neq 0$ ، مقدار $w = \frac{a}{C}$ و وقتی که $C = 0$ ، مقدار $w = \infty$ را به این عبارت نسبت می دهیم.

نقاط ثابت

نقاط ثابت نگاشتی مانند $w = f(Z)$ نقاطی هستند که این نگاشت آنها را بر روی خودش می نگارند، به عبارت دیگر تحت این نگاشت «ثابت نگهداشته می شوند». نقاط ثابت از رابطه

$$w = f(Z) = Z$$

به دست می آیند. برای نگاشت همانی

$$w = Z$$

هر نقطه یک نقطه ثابت است. نگاشت $w = \bar{Z}$ دارای تعدادی نامتناهی نقاط ثابت $w = \frac{1}{Z}$ ، دارای

دو نقطه ثابت، یک دوران دارای یک نقطه ثابت و یک انتقال هیچ نقطه ثابتی در صفحه منتهای ندارد. (در هر حالت آنها را بیابید.) با توجه به (۱) نقطه ثابت مقید به $w = z$ عبارت است از

$$z = \frac{az + b}{cz + d}$$

یا

$$cz^2 - (a - d)z - b = 0. \quad (۶)$$

این یک معادله درجه دو بر حسب z است که ضرایب آن فقط و فقط وقتی صفر هستند که نگاشت همانی $w = z$ باشد (در این حالت، $a = d \neq 0$ ، $b = c = 0$). از این رو داریم:

قضیه ۲ (نقاط ثابت)

هر تبدیل کسری خطی، غیرهمانی، حداکثر دو نقطه ثابت دارد. اگر تبدیل کسری خطی دارای سه یا تعداد بیشتری نقاط ثابت باشد، آنگاه این تبدیل یک نگاشت همانی است. برای عمومیت بخشیدن به بحث قبلی از تبدیلات کسری خطی از نقطه نظر عملی بااهمیت می باشند. که به ارائه مثالهای متعدد در مورد آنها در بخش مسائل این بخش می پردازیم.

مسائل بخش ۲.۱۶

نقاط ثابت هریک از نگاشتهای زیر را بیابید.

$$w = z^5. ۳ \quad w = (z + 3i). ۲ \quad w = (2 + i)z. ۱$$

$$w = z^5 + 10z^2 + 10z. ۶ \quad w = (z + 1)^2. ۵ \quad w = (z - i)^2. ۴$$

$$w = \frac{z - 1}{z + 1}. ۹ \quad w = \frac{3z + 2}{z - 1}. ۸ \quad w = \frac{2iz - 1}{z + 2i}. ۷$$

تبدیل کسری خطی ای را بیابید که (تنها) نقاط ثابت آن نقاط داده شده زیر باشند.

$$0. ۱۲ \quad 2, -2. ۱۱ \quad 1, 0. ۱۰$$

تمام تبدیلات کسری خطی ای را بیابید که (تنها) نقاط ثابت آنها نقاط داده شده زیر باشند.

$$i, -i. ۱۵ \quad 1, -1. ۱۴ \quad \infty, 0. ۱۳$$

۱۶. تمام تبدیلات کسری خطی ای را که در صفحه منتهای نقاط ثابتی ندارند، بیابید.

۱۷. معکوس تبدیل $\frac{3z + 4i}{z + 2i}$ را به طور مستقیم و بدون استفاده از (۵) بیابید.

۱۸. چنانچه z_1 نقطه ثابتی از تبدیل کسری خطی $w = f(z)$ باشد، آنگاه واضح است که z_1 باید یک نقطه ثابت تبدیل معکوس $z = g(w)$ باشد. درستی این حکم را ثابت کنید.

۱۹. با محاسبات (۵) را از (۱) نتیجه بگیرید. (۵) را با جایگزینی در (۱) بررسی کنید.

۲۰. قضیه ۱ را با جاگذاری (۱) در معادله یک دایره یا خط راست داده شده ثابت کنید. راهنمایی.

نشان دهید که معادله آخر را می توان به صورت $w = u + iv$ ؛ $A = 0$ یک خط راست را به دست می دهد)

$$Aw\bar{w} + Bw^* + \bar{B}\bar{w} + C = 0$$

نوشت.

۳.۱۶ تبدیلات کسری خطی خاص

حال توضیح می دهیم که چگونه می توان تبدیلات کسری خطی

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0) \quad (1)$$

را که برای نگاشتن دامنه های ساده معین بر روی سایر دامنه ها به کار می روند مشخص کرد، و چطور می توان خواص (۱) را مورد بحث قرار داد.

چهار عدد مفروض a, b, c, d و یک نگاشت یکتا را مشخص می کند، اما می توان آن را مسکوت گذاشت یا بدون تغییر دادن نگاشت مفروض (۱) آن را به سه عدد وابسته نمود. نشان می دهیم که تنها یک تبدیل به صورت (۱) موجود است که سه نقطه مجزای داده شده از صفحه Z تبدیل می کند. مهمتر اینکه فرمولی به دست می آوریم که منجر به نگاشت زیر می گردد.

قضیه ۱ (سه نقطه و تصاویر مفروض آنها)

سه نقطه مجزای داده شده Z_1, Z_2, Z_3 را همواره می توان با یک w ، و تنها یک، تبدیل کسری خطی $w = f(z)$ بر روی سه نقطه مجزای مشخص w_1, w_2, w_3 نگاشت. این نگاشت به طور ضمنی با معادله زیر داده می شود

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \quad (2)$$

(اگر یکی از این نقاط نقطه ∞ باشد، نسبت دوتفاضلی که شامل این نقطه هستند باید برابر ۱ فرض شود)

اثبات. معادله (۲) به صورت $F(w) = G(z)$ است، که در آن F و G توابع کسری خطی متغیرهای مربوط به خود می باشند. از اینجا به سهولت به دست می آوریم $w = f(z) = F^{-1}[G(z)]$ ، که در آن F^{-1} به معنی تابع معکوس F است. از آنجا که معکوس تبدیل کسری خطی و ترکیب تبدیلات کسری خطی تبدیلات کسری خطی می باشند [ر. ک (۵) از بخش ۲.۱۶ و مساله ۱۷ آخر این بخش]،

$w = f(z)$ تبدیل کسری خطی است. به علاوه، با توجه به (۲) با محاسبه مستقیم مشاهده می کنیم که

$$F(w_1) = 0, \quad F(w_2) = 1, \quad F(w_3) = \infty,$$

$$G(z_1) = 0, \quad G(z_2) = 1, \quad G(z_3) = \infty$$

[چنانچه در طرف راست قرار دهیم $w = w_1, w = w_2, w = w_3$ آنگاه برای برقرار بودن (۲)

نگاشت همدیس

باید در طرف دوم آن چنین کاری را انجام دهیم. [از این رو $w_1 = f(z_1)$ ، $w_2 = f(z_2)$ ، و $w_3 = f(z_3)$]. این مطلب وجود تبدیل کسری خطی $w = f(z)$ را که z_1 ، z_2 ، و z_3 را به ترتیب بر روی w_1 ، w_2 ، و w_3 می نگارد ثابت می کند.

حال ثابت می کنیم که $w = f(z)$ به طور یکتا معین می شود. فرض کنید که $w = g(z)$ تبدیل کسری خطی دیگری باشد که z_1 ، z_2 ، و z_3 را به ترتیب بر روی w_1 ، w_2 ، و w_3 می نگارد. آنگاه معکوس آن، یعنی $g^{-1}(w)$ را بر روی w_1 ، w_2 ، و w_3 را بر روی z_1 ، z_2 ، و z_3 خواهد نگاشت. در نتیجه، نگاشت مرکب $H = g^{-1}[f(z)]$ هر یک از نقاط z_1 ، z_2 ، و z_3 و را بر روی خودش می نگارد؛ یعنی دارای سه نقطه ثابت مجزای z_1 ، z_2 ، و z_3 می باشد. با توجه به قضیه ۲ از بخش قبل نتیجه می گیریم که H نگاشتی همانی است، و بنابراین $g(z) = f(z)$.
آخرین گزاره قضیه فوق از تبصره کلی بخش قبل نتیجه می شود. بدین ترتیب قضیه اثبات می رسد.

نگاشت نیم صفحه ها بر روی قرصها

این نگاشت به عنوان مثال در مسائل مربوط به پتانسیل از لحاظ عملی جالب است. بدون آنکه به کلیت موضوع خللی وارد شود، فرض کنیم که می خواهیم نیم صفحه فوقانی $y \geq 0$ را بر روی قرص واحد $|w| \leq 1$ بنگاریم. کران نیم صفحه محور x ها است؛ واضح است که این کران باید بر روی دایره واحد $|w| = 1$ نگاشته شود. از این مطلب الهام می گیریم که برای یافتن نگاشت، سه نقطه روی محور x ها انتخاب کنیم. تصاویر این نقاط را باید بر روی دایره مشخص نماییم و سپس قضیه ۱ را به کار ببریم. باید اطمینان حاصل کنیم که نیم صفحه $y \geq 0$ بر روی داخل و نه بر روی خارج دایره مزبور نگاشته شده است.

مثال ۱. نگاشت نیم صفحه بر روی قرص

تبدیل کسری خطی (۱) را طوری بیابید که $z_1 = -1$ ، $z_2 = 0$ ، و $z_3 = 1$ را به ترتیب بر روی $w_1 = -1$ ، $w_2 = -i$ ، و $w_3 = 1$ بنگارد.

حل. از (۲) می یابیم

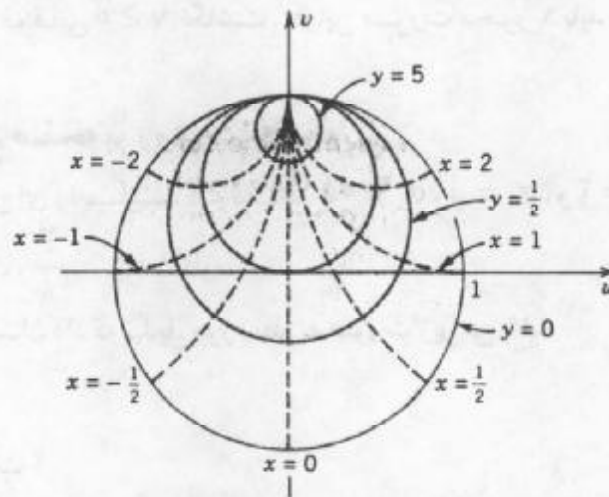
$$\frac{w - (-1)}{w - 1} \cdot \frac{-i - 1}{-i - (-1)} = \frac{z - (-1)}{z - 1} \cdot \frac{0 - 1}{0 - (-1)}$$

لذا

$$w = \frac{z - i}{-iz + 1} \quad (3)$$

اکتون نشان می دهیم که خواص ویژه چنین نگاشتی را بدون انجام محاسبات مشکل می توان

مشخص نمود. به ازای $z = x$ داریم $w = \frac{x-i}{(-ix+1)}$ ، لذا $|w| = 1$. در نتیجه محور x ها بر روی دایره واحد نگاشته می شود. از آنجا که $z = i$ مقدار $w = 0$ را به دست می دهد، در این صورت نیم صفحه فوقانی بر روی داخل دایره و نیم صفحه تحتانی بر روی بیرون دایره نگاشته می شوند. نقاط $z = 0, i, \infty$ با نقاط $w = -i, 0, i$ متناظر می باشند، در نتیجه محور موهومی مثبت بر روی پاره خط $S: u = 0, -1 \leq v \leq 1$ نگاشته می شود. خطوط قائم ثابت $x = 1$ (بنا به قضیه ۱، بخش ۲.۱۶) بر روی دایره‌ای که از $w = i$ (تصویر $z = \infty$) می گذرند و بر $|w| = 1$ عمودند (بنا به همدیسی؛ ر.ک. شکل ۳۵۷) نگاشته می شوند. به همین ترتیب، خطوط افقی ثابت $y = 0$ بر روی دایره‌ای که از $w = i$ می گذرند و بر S عمودند (بنا به همدیسی) نگاشته می شوند. شکل ۳۵۷ این دایره را به ازای $y \geq 0$ نشان می دهد، و به ازای $y < 0$ آنها در بیرون قرص واحد نشان داده شده قرار دارند.



شکل ۳۵۷. تبدیل کسری خطی مثال ۱

مثال ۲. رخداد ∞

تبدیل کسری خطی ای را مشخص کنید که $z_1 = 0$ ، $z_2 = 1$ ، و $z_3 = \infty$ را به ترتیب بر روی $w_1 = -i$ ، $w_2 = -1$ ، و $w_3 = 1$ بنگارد.

حل. از (۲) نگاشت مطلوب به صورت زیر درمی آید

$$w = \frac{z-i}{z+i} \quad (4)$$

این نگاشت را گاهی اوقات تبدیل کیلی^۱ می نامند. در این حالت، ابتدا از (۲) نسبت $\frac{1-\infty}{z-\infty}$ حاصل

۲- آرتور کیلی ARTHUR CAYLEY (۱۸۲۱-۱۸۹۵)، ریاضیدان انگلیسی، استاد دانشگاه کمبریج، که بخاطر کارهای مهمش در جبر، نظریه ماتریسها، و معادلات دیفرانسیل مشهور می باشد.

می شود که به جای آن ۱ قرار می دهیم .

نگاشت قرصها بر روی نیم صفحه ها . این کار کاملاً شبیه سؤال پاسخ داده شده در فوق است .

مثال ۳ . نگاشت قرص واحد بر روی نیمه راست صفحه

تبدیل کسری خطی ای را بیابید که نقاط $z_1 = -1$ ، $z_2 = i$ ، و $z_3 = 1$ را به ترتیب بر روی

$w_1 = 0$ ، $w_2 = i$ ، و $w_3 = \infty$ بنگارد . (یک شکل از قرص و نیم صفحه رسم کنید .)

حل . باتوجه به (۲) ، بعد از جایگزینی $\frac{i-\infty}{w-\infty}$ با ۱ به دست می آوریم

$$w = -\frac{z+1}{z-1}$$

نگاشت نیم صفحه بر روی نیم صفحه

این نگاشت از نظر علمی نیز جالب است . به عنوان مثال ، می توان نیم صفحه فوقانی $y \geq 0$

را بر روی نیم صفحه فوقانی $v \geq 0$ نگاشت . در این صورت محور x باید بر روی محور u نگاشته شود .

مثال ۴ . نگاشت نیم صفحه بر روی نیم صفحه

تبدیل کسری خطی ای را بیابید که نقاط $z_1 = -2$ ، $z_2 = 0$ ، و $z_3 = 2$ را به ترتیب بر روی

$w_1 = \infty$ ، $w_2 = \frac{1}{4}$ ، و $w_3 = \frac{3}{8}$ بنگارد .

حل . از (۲) می توان نشان داد که تبدیل مورد نظر به صورت زیر می باشد

$$w = \frac{z+1}{2z+4} \tag{5}$$

نقش محور x کدام است ؟

نگاشت قرصها بر روی قرصها

این نگاشت دسته سوم از مسائل عملی است . می توان قرص واحد صفحه z بر روی قرص

واحد صفحه w نگاشت . به آسانی می توان تحقیق کرد که تبدیل

$$w = \frac{z-z_0}{cz-1} ; c = \bar{z}_0 , |z_0| < 1 \tag{6}$$

نگاشتی از نوع مورد نظر می باشد و این نگاشت نقطه z_0 را بر روی مرکز $w = 0$ می نگارد (ر.ک. مساله ۱۴) .

مثال ۵ . نگاشت قرص واحد بر روی قرص واحد

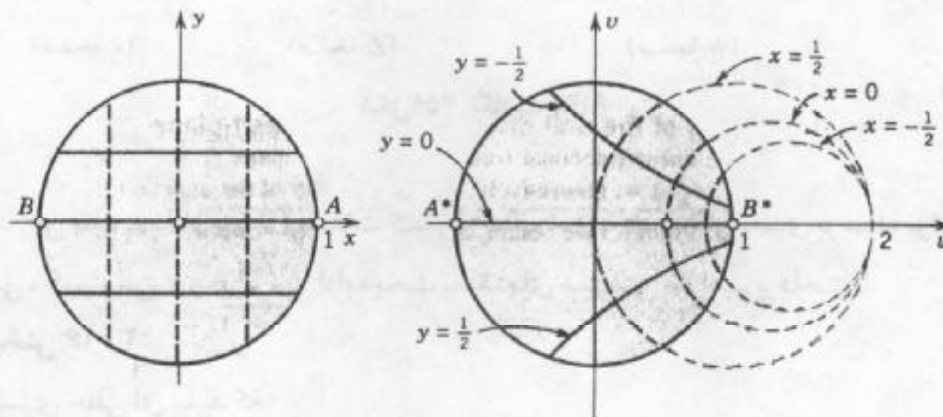
چنانچه فرض کنیم که $z_0 = \frac{1}{4}$ بر روی $w = 0$ نگاشته شده است ، آنگاه باتوجه به (۶) می یابیم

$$w(z) = \frac{2z-1}{z-2}$$

محورهای حقیقی با همدیگر متناظراند؛ بخصوص

$$w(-1) = 1, \quad w(0) = \frac{1}{2}, \quad w(1) = -1.$$

از آنجا که نگاشت همدیسی است و خطوط راست بر روی دایره یا خطوط راست نگاشته می شوند و $w(\infty) = 2$ ، تصاویر خطوط ثابت x دایره‌ای هستند که از $w = 2$ می گذرند و مراکز آنها روی محور u قرار دارد؛ خطوط ثابت y بر روی دایره‌ای نگاشته می شوند که به دایره فوق الذکر عموداند (ر.ک. شکل ۳۵۸).



شکل ۳۵۸. نگاشت مثال ۵

نگاشت نواحی زاویه‌ای بر روی قرص واحد را می توان از ترکیب تبدیلات کسری خطی با تبدیلهایی از نوع $w = z^n$ ، که در آن n عددی صحیح و بزرگتر از ۱ است، به دست آورد.

مثال ۶. نگاشت ناحیه زاویه‌ای بر روی قرص واحد

ناحیه زاویه‌ای $D: -\frac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{6}$ را بر روی قرص واحد $|w| \leq 1$ بنگارید.

حل. بدین منظور به روش زیر عمل می کنیم. نگاشت

$$Z = z^2$$

ناحیه D را بر روی نیمه راست صفحه Z می نگارد. هم اکنون می توان از یک تبدیل کسری خطی ای استفاده کرد که این نیم صفحه را بر روی قرص واحد بنگارد، این تبدیل، مثلاً، می تواند به صورت زیر باشد

$$w = i \frac{Z-1}{Z+1}$$

با جایگزینی $Z = z^2$ در این نگاشت می یابیم

$$w = i \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1};$$

این نگاشت دارای خواص موردنظر است (ر. ک. شکل ۳۵۹).



شکل ۳۵۹. نگاشت مثال ۶

این مطلب پایان بحث تبدیلات کسری خطی است. در بخش بعدی بوسیله توابع تحلیلی (سینوسی، کسینوسی، و غیره) به ادامه بحث نگاشتهای همپسی خواهیم پرداخت.

مسائل بخش ۳.۱۶

تبدیل کسری خطی ای بیابید که

۱. ۰، ۱، ۲ و ۲ را بر روی ۵، ۲ و ۸ بنگارد.
۲. ۰، -i، ۱ و i را بر روی ۰، -۱، ۰ و ∞ بنگارد.
۳. ۰، -۱، ۰ و ۱ را بر روی ۰، ۱، ۰ و -۱ بنگارد.
۴. ∞، ۰، ۱ و -۱ را بر روی ۱، ۰، ۰ و $\frac{1+i}{2}$ بنگارد.
۵. ∞، ۱، ۰ و ∞ را بر روی ∞، ۱، ۰ و ۰ بنگارد.
۶. ۰، ۲i، ۰ و -۲i را بر روی ۰، ۰، -۱ و ∞ بنگارد.
۷. ۰، ۲i، ۰ و i را بر روی $\frac{\Delta i}{2}$ ، ۲i، ∞ و ۰ بنگارد.
۸. ۰، i، ۰ و $-\frac{i}{2}$ را بر روی ∞، i، ۰ و ۰ بنگارد.
۹. ۱، i، ۰ و -۱ را بر روی i، -۱، ۰ و -i بنگارد.
۱۰. ۰، -i، ۰ و ۱ را بر روی i، ۲i، ۱+i و ۱ بنگارد.
۱۱. (۴) را از (۲) نتیجه بگیرید.
۱۲. معکوس (۳) را بیابید. نشان دهید که (۳) خطوط ثابت $x = c =$ را بر روی دایره‌ای که مراکزشان بر خط $v = 1$ قرار دارند، می‌نگارد.

۱۳. (۵) را از (۲) نتیجه بگیرید. معکوس (۵) را بیابید و منحنیهای متناظر با ثابت $u =$ و ثابت $v =$ را یافته و رسم کنید.

۱۴. حکم مربوط به (۶) را ثابت کنید.

۱۵. تبدیل کسری خطی ای بیابید که $|z| \leq 1$ را بر روی $|w| \leq 1$ بنگارد به طوری که $z = \frac{i}{4}$ بر روی $w = 0$ نگاشته شود و تصاویر خطوط ثابت $x =$ و ثابت $y =$ را رسم کنید.

۱۶. تمام تبدیلات کسری خطی $w(z)$ ای که محور x را بر روی محور u می نگارند بیابید.

۱۷. نشان دهید که ترکیب دو تبدیل کسری خطی یک تبدیل کسری خطی است.

۱۸. تابع تحلیلی ای بیابید که ربع دوم صفحه z را بر روی داخل دایره واحد صفحه w بنگارد.

۱۹. تابع تحلیلی $w = f(z)$ را که ناحیه زاویه ای $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$ را بر روی قرص واحد $|w| \leq 1$ می نگارد پیدا کنید.

۲۰. تابع تحلیلی $w = f(z)$ را طوری بیابید که ناحیه $1 \leq x \leq y \leq 2$ را بر روی قرص واحد $|w| \leq 1$ بنگارد.

۴.۱۶ نگاشت با سایر توابع

نگاشتهای z^n ، e^z ، و $\ln z$ در بخش ۹.۱۲ مورد بحث قرار گرفته اند. متعلم می تواند قبل از شروع این بخش برای یادآوری به مطالعه این نگاشتها بپردازد.

تابع سینوسی

نگاشت زیر را در نظر می گیریم (بخش ۷.۱۲)

$$w = u + iv = \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \quad (1)$$

که در آن

$$u = \sin x \cosh y, \quad v = \cos x \sinh y. \quad (2)$$

نگاشت $\sin z$ متناوب و با دوره تناوب 2π است، نگاشت (۱) در تمام صفحه z یک به یک نیست، z را به نوار $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ محدود می کنیم (شکل ۳۶۰). از آنجا که $f'(z) = \cos z$ در $z = \pm \frac{\pi}{4}$ صفر است، نگاشت در این دو نقطه بحرانی همدیسی نیست. حال می توان خواص نگاشت را با مشخص نمودن تصاویر خطوط قائم ثابت $x =$ و خطوط افقی ثابت $y =$ مورد بررسی قرار داد.

اگر $x = 0$ ، آنگاه از (۲) نتیجه می شود که $u = 0$ و $v = \sinh y$. از این رو محور $(x = 0)$ بر روی محور v نگاشته می شود.

اگر $x = \pm \frac{\pi}{4}$ ، آنگاه با توجه به (۲) داریم $u = \pm \cosh y$ و $v = 0$ ، نظر به اینکه $\cosh y \geq 1$ ، کرانه های خطوط قائم $x = \pm \frac{\pi}{4}$ بر روی قطعات $u \geq 1$ و $u \leq -1$ همانطوری که در شکل ۳۶۰ نشان داده شده است، بر روی محور u نگاشته می شود.

اگر $x \neq 0, \pm \frac{\pi}{4}$ ، آنگاه با توجه به تساوی $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ و (۲) داریم

$$\frac{u^2}{\sin^2 x} - \frac{v^2}{\cos^2 x} = 1. \quad (3)$$

نمایش (۳) به ازای هر ثابت $x \neq 0$ یک هذلولی است. بنابراین نقش هر خط ثابت $x \neq 0$ یک هذلولی است.

اگر $y = 0$ ، آنگاه $\sinh y = 0$ ، بنابراین با توجه به (۲) داریم $v = 0$ و $u = \sin x$ ، در نتیجه محور x ($y = 0$) بر روی پاره خط $-1 \leq u \leq 1$ از محور u نگاشته می شود.

اگر $y \neq 0$ ، آنگاه با توجه به اینکه $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ و (۲) می یابیم

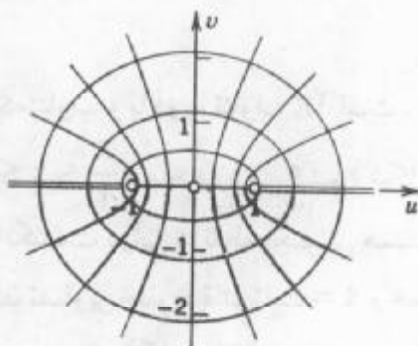
$$\frac{u^2}{\cosh^2 y} + \frac{v^2}{\sinh^2 y} = 1. \quad (4)$$

نمایش (۴) به ازای هر ثابت $y \neq 0$ یک بیضی با کانونهای ± 1 می باشند. بنابراین نقش هر خط افقی ثابت $y \neq 0$ یک بیضی است.

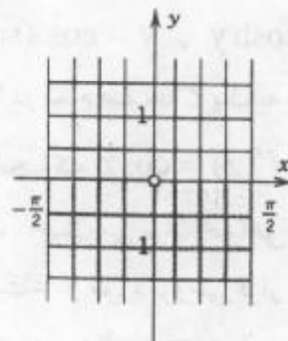
تصاویر منحنیهای ثابت x و ثابت y متعامد می باشند. (تحت زوایای قائمه یکدیگر را قطع می کنند) زیرا نگاشت $w = \sin z$ در همه نقاط بجز نقاط بحرانی $z = \pm \frac{\pi}{4}$ همدیس است. شکل ۳۶۰ را ملاحظه کنید.

باتوجه به بررسیهای به عمل آمده مشاهده می شود که $w = \sin z$ نوار قائم نامتناهی

$$v = 0, u \geq 1 \text{ و } u \leq -1 \text{ بر روی صفحه } w \text{ بریده شده در امتداد شعاعهای } -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$$



(صفحه w)



(صفحه z)

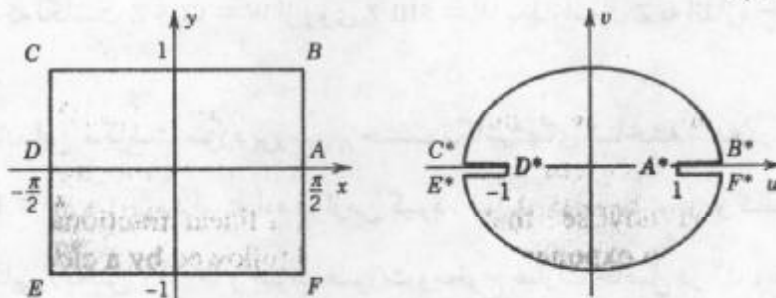
شکل ۳۶۰. نگاشت $w = u + iv = \sin z$

می نگارد، و این نگاشت یک به یک و همدیسی است.

مثال ۱. نگاشت مستطیل بر روی قرص بیضوی

مطلوب است تصویر مستطیل در شکل ۳۶۱ تحت نگاشت $w = \sin z$.

حل. کرانه مستطیل با $x = \pm \frac{\pi}{2}$ و $y = \pm 1$ متناظراند. بنابراین لبه های فوقانی و تحتانی این مستطیل به ترتیب بر روی نیمه فوقانی و نیمه تحتانی بیضی (۴) که نیمه محورهای آن $\cosh 1 = 1/54$ و $\sinh 1 = 1/18$ می باشند نگاشته می شود. لبه چپ بر روی پاره خط $-1 \leq u \leq -\cosh 1$ و لبه راست بر روی قطعه خط $1 \leq u \leq \cosh 1$ از محور u نگاشته می شوند. توجه کنید که هر دو نقطه $\pm y$ از این لبه ها دارای همان تصویر $\cosh y$ (لبه چپ) یا $-\cosh y$ (لبه راست) بر محور u هستند (ر.ک. شکل ۳۶۱).



شکل ۳۶۱. نگاشت با $w = \sin z$ مربوط به مثال ۱

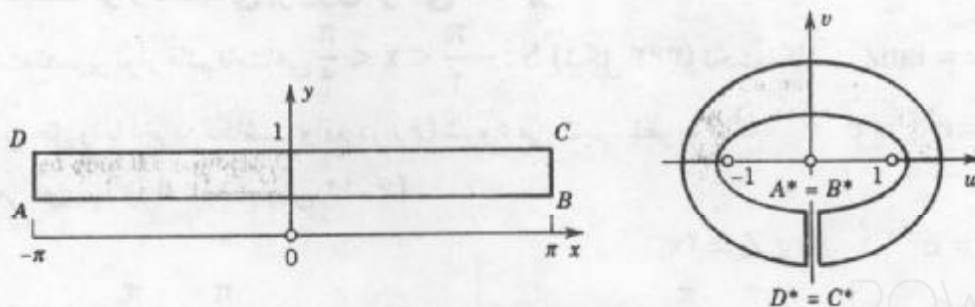
مثال ۲. تصویر مستطیل بر روی حلقه ای بیضوی

مطلوب است تصویر مستطیل

$$R: -\pi < x < \pi, \frac{1}{2} < y < 1$$

تحت نگاشت $w = \sin z$ (ر.ک. شکل ۳۶۲).

حل. لبه فوقانی مستطیل $y = 1$ است و بر روی بیضی (۴) با نیمه محورهای $\cosh 1$ و $\sinh 1$ (شکل



شکل ۳۶۲. نگاشت با $w = \sin z$ مربوط به مثال ۲

(۳۶۲)، لبه تحتانی بر روی (۴) با نیمه محورهای $\cosh \frac{1}{4} = 1/13$ و $\sinh \frac{1}{4} = 0/52$ نگاشته می‌شوند. یالهای جانبی $x = \pm\pi$ بر روی قطعه مفروض با $-\sinh \frac{1}{4} \leq v \leq \sinh \frac{1}{4}$ از محور v ، که مستقیماً از (۲) و $\sin(\pm\pi) = 0$ ، $\cos(\pm\pi) = -1$ نتیجه شده‌اند، نگاشته می‌شوند. شکل ۳۶۲ نتیجه حاصل را نشان می‌دهد.

توابع کسینوس و تانژانت

کسینوس. نگاشت $w = \cos z$ می‌تواند به طور مستقل مورد بررسی قرار گیرد، ولی نظریه اینکه

$$w = \cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right), \quad (5)$$

مشاهده می‌شود که نگاشت $w = \cos z$ از روی $w = \sin z$ بعد از انتقال z به اندازه $\frac{\pi}{2}$ واحد به راست حاصل می‌شود.

تانژانت. ایده بیان این نگاشت مورد بررسی بر حسب نگاشتهای شناخته شده در بررسی نگاشت $w = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. نمایش توابع سینوس و کسینوس در $\tan z$

بر حسب توابع نمایی (بخش ۱۲.۷) و ضرب صورت و مخرج عبارت حاصل در e^{iz} ، می‌یابیم

$$w = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = \frac{e^{2iz} - 1}{i(e^{2iz} + 1)}$$

بنابراین اگر با قراردادن $Z = e^{2iz}$ و با استفاده از تساوی $\frac{1}{i} = -i$ ، داریم

$$w = \tan z = -i \frac{Z-1}{Z+1}, \quad Z = e^{2iz}. \quad (6)$$

بدین طریق نگاشت $w = \tan z$ از روی یک نگاشت کسری خطی و دورانی به اندازه $\frac{\pi}{4}$ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حاصل می‌شود.

مثال ۳. نگاشت نوار نامتناهی بر روی قرصی مستدیر

مطلوب است تصویر نوار قائم نامتناهی $S: -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ (شکل ۳۶۳) تحت نگاشت $w = \tan z$ حل. مراحل حل را با آخرین نگاشت واقع در (۶) شروع می‌کنیم. نظر به اینکه $Z = e^{2iz} = e^{-2y+2ix}$ ، به دست می‌آوریم [ر.ک. (۸) بخش ۱۲.۶]

$$|Z| = e^{-2y}, \quad \text{Arg } Z = 2x.$$

بنابراین خطوط قائم $\frac{\pi}{4}$ ، 0 ، $-\frac{\pi}{4}$ به ترتیب بر روی شعاعهای $\text{Arg } Z = -\frac{\pi}{4}$ ، 0 ، $\frac{\pi}{4}$ نگاشته

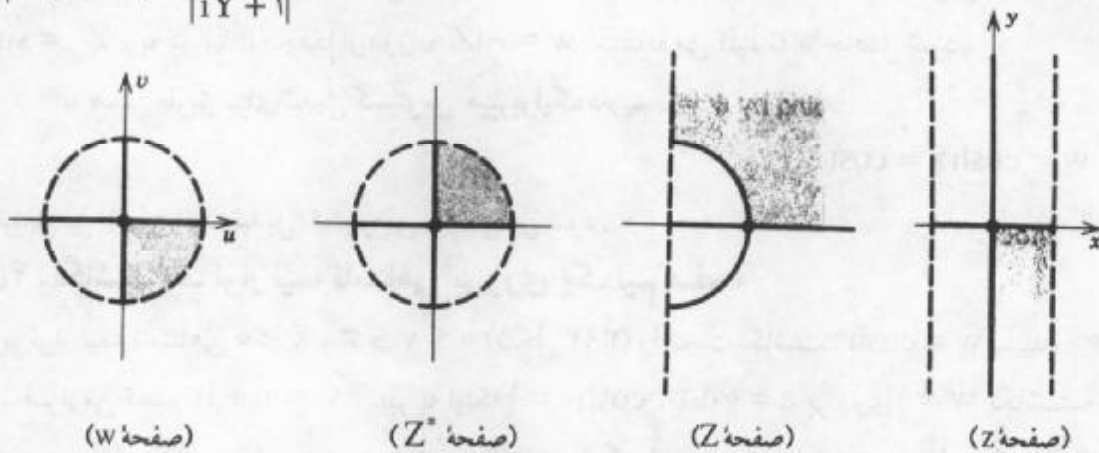
می شوند. در نتیجه S بر روی نیم صفحه راست Z نگاشته می شوند. همچنین اگر $y > 0$ ، آنگاه $|Z| = e^{-2y} < 1$ و اگر $y < 0$ ، آنگاه $|Z| > 1$ از این رو نیمه فوقانی S در داخل دایره واحد $|Z| = 1$ و نیمه تحتانی S به خارج $|Z| = 1$ نگاشته می شوند (شکل ۳۶۳).

اکنون تبدیل کسری خطی مذکور در (۶)، که بانماد گذاری با $g(Z)$ ، به صورت زیر درمی آید

$$Z^* = g(Z) = \frac{Z-1}{Z+1} \quad (۷)$$

به ازای Z حقیقی، عبارت فوق حقیقی است. در نتیجه محور حقیقی Z بر روی محور حقیقی Z^* نگاشته می شود. علاوه بر آن، محور موهومی Z بر روی دایره واحد $|Z^*| = 1$ نگاشته می شود زیرا به ازای مقدار موهومی محض $Z = iY$ از (۷) می یابیم

$$|Z^*| = |g(iY)| = \left| \frac{iY-1}{iY+1} \right| = 1.$$



شکل ۳۶۳. نگاشت مربوط به مثال ۳

نیمه راست صفحه Z در داخل دایره واحد $|Z^*| = 1$ نه در خارج آن نگاشته می شود، زیرا $Z = 1$ دارای تصویر $g(1) = 0$ در داخل این دایره است. سرانجام، دایره واحد $|Z| = 1$ بر روی محور موهومی Z^* نگاشته می شود، زیرا این دایره عبارت است از $Z = e^{i\phi}$ ، در نتیجه (۷) به صورت یک مقدار موهومی محض درمی آید، یعنی

$$g(e^{i\phi}) = \frac{e^{i\phi} - 1}{e^{i\phi} + 1} = \frac{e^{\frac{i\phi}{2}} - e^{-\frac{i\phi}{2}}}{e^{\frac{i\phi}{2}} + e^{-\frac{i\phi}{2}}} = \frac{i \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)}.$$

با توجه به صفحه Z^* صفحه w با دورانی به اندازه $\frac{\pi}{4}$ در جهت حرکت عقربه های ساعت به دست می آید (ر. ک. (۶)).

با توجه به مطالب بالا می توان گفت که نگاشت $w = \tan z$ نوار $S: -\frac{\pi}{4} < \text{Re} z < \frac{\pi}{4}$ را بر روی قرص واحد $|w| = 1$ می نگارد، که چهار ربع S نگاشته شده در شکل ۳۶۳ نمایش داده شده است. این نگاشت همدیس و یک به یک است.

توابع هذلولی (هیپربولیک)

توابع هذلولی را می توان به طور مستقل یا به کمک توابع مثلثاتی مورد بحث و بررسی قرار داد، مثلاً به ازای $w = \sinh z$ می توان نوشت

$$w = \sinh z = -i \sin(iz) . \tag{۸}$$

برای رسیدن به نقش z به کمک تبدیل $w = \sinh z$ نخست از دوران $Z = iz$ و سپس از نگاشت $Z^* = \sin Z$ و به دنبال آن مجدداً از دوران $w = -iZ^*$ استفاده می کنیم تا w حاصل شود.

به همین طریق برای تبدیل کسینوس هیپربولیک داریم

$$w = \cosh z = \cos(iz) . \tag{۹}$$

این تبدیل نیز از روی یک تبدیل کسینوسی حاصل می شود.

مثال ۴. نگاشت یک نوار نیمه نامتناهی بر روی یک نیم صفحه

تصویر نوار نیمه نامتناهی $0 \leq y \leq \pi, x \geq 0$ (شکل ۳۹۴) را تحت نگاشت $w = \cosh z$ بیابید. حل. قرار می دهیم $w = u + iv$. نظر به اینکه $\cosh 0 = 1$ ، نقطه $z = 0$ بر روی $w = 1$ نگاشته می شود. به ازای عدد حقیقی $z = x \geq 0$ ، $\cosh z$ حقیقی است و با افزایش x ، به طور یکنوا از ۱ صعود می کند. بنابراین محور x مثبت بر روی قسمت $u \geq 1$ از محور u نگاشته می شود.

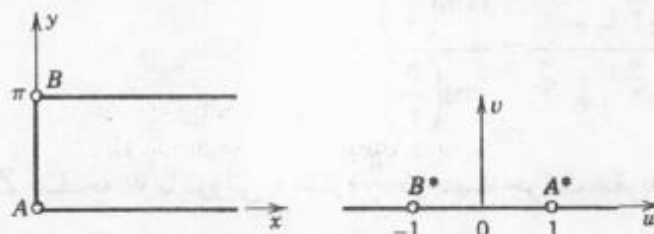
به ازای مقدار موهومی محض $z = iy$ داریم $\cosh iy = \cos y$. در نتیجه کران چپ نوار

بر روی قطعه $-1 \leq u \leq 1$ از محور u نگاشته می شود، ضمن آنکه نقطه $z = \pi i$ متناظر است با

$$w = \cosh i\pi = \cos \pi = -1 .$$

روی کران فوقانی نوار، $y = \pi$ ، و چون $\sin \pi = 0$ ، $\cos \pi = -1$ ، نتیجه می شود که این قسمت

کران بر روی قسمت $u \leq -1$ از محور u نگاشته می شود. بنابر این کران نوار بر روی محور u نگاشته



شکل ۳۹۴. نگاشت مربوط به مثال ۴

می شود. بررسی این مطلب که داخل نوار بر روی نیمه فوقانی صفحه w نگاشته می شود و نگاشت یک به یک است کار دشواری نیست.

مسائل بخش ۴.۱۶

تصاویر نواحی زیر را تحت نگاشت $w = e^z$ بیابید و نمودارشان را رسم کنید.

$$0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1.1 \quad \frac{\pi}{4} < y < \frac{3\pi}{4}, \quad -1 < x < 1.2$$

$$0 < y < \pi, \quad -2 < x < -1.4 \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}, \quad 1 < x < 2.3$$

تصاویر نواحی زیر را تحت نگاشت $w = \sin z$ بیابید و نمودار آنها را رسم کنید.

$$0 < y < 2, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.5 \quad 0 < x < \frac{\pi}{6}.6 \quad y \text{ دلخواه}$$

$$0 < y < 3, \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}.8 \quad 1 < y < 2, \quad 0 < x < 2\pi.7$$

۹. تابع تحلیلی ای که ناحیه محصور به محورهای مثبت x و y و هذلولی $xy = \frac{\pi}{4}$ ، واقع در ربع اول، را بر روی نیم صفحه فوقانی می نگارد، بیابید. راهنمایی. ابتدا ناحیه مورد نظر را بر روی یک نوار افقی بنگارید.

۱۰. نقش خطوط $x = 0, \pm \frac{\pi}{6}, \pm \frac{\pi}{3}, \pm \frac{\pi}{4}$ را تحت نگاشت $w = \sin z$ بیابید و آنها را رسم کنید.

۱۱. تمام نقاطی که نگاشت $w = \sin z$ در آنها همدیسی نیست را تعیین کنید.

۱۲. تبدیل $w = \cosh z$ را بر حسب تبدیل $w = \sin z$ و دوران و انتقال بیان کنید.

۱۳. نقاطی که نگاشت $w = \cosh z$ در آنها همدیسی نیست را مشخص کنید.

۱۴. تصاویر خطوط ثابت $y =$ را تحت نگاشت $w = \cos z$ بیابید.

تصاویر نواحی زیر را تحت نگاشت $w = \cos z$ بیابید و نمودار آنها را رسم کنید.

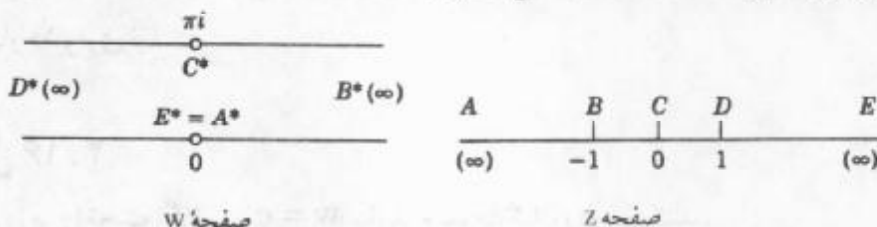
$$y < 0, \quad 0 < x < \pi.15 \quad 0 < y < 1, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.16$$

$$y < 0, \quad \pi < x < 2\pi.17 \quad \frac{1}{4} < y < 1, \quad 0 < x < 2\pi.18$$

۱۹. نقش ناحیه $2 \leq |z| \leq 3, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ را تحت نگاشت $w = \ln z$ بیابید.

۲۰. نشان دهید که $w = \ln \frac{z-1}{z+1}$ نیم صفحه فوقانی را به ترتیبی که در شکل ۳۶۵ نشان داده شده

است بر روی نوار افقی $0 \leq \text{Im } w \leq \pi$ می نگارد.



شکل ۳۶۵. مساله ۲۰

۵.۱۶ سطوح ریمان

سطوح ریمان سطوحی هستند که بر آن روابط چند مقداری، همانند $w = \sqrt{z}$ یا $w = \ln z$ ، تک مقداری می شوند. یعنی توابعی که در این جهت مفید قرار می گیرند، مربوط می شوند. در اینجا به بررسی این توابع به «طریقه هندسی» بر حسب نگاشتهای بر روی کره ریمان می پردازیم چون به کمک آن تفهیم مطالب مورد نظر بهتر صورت می پذیرد. برای شروع نگاشت مفروضی را که با

$$w = u + iv = z^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

تعریف می شود در نظر می گیریم (بخش ۹.۱۲). این نگاشت، به جز در $z = 0$ که در این نقطه مشتق آن $w' = \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}$ ، برابر صفر است، همدیس است. زوایا تحت این نگاشت در $z = 0$ دو برابر می شوند. نیمه راست صفحه z (که شامل قسمت مثبت محور z نیز می باشد) بر روی تمامی صفحه w که در طول نیمه منفی محور u بریده شده است نگاشته می شود، این نگاشت یک به یک است. همینطور، نیمه چپ صفحه z (که شامل قسمت منفی محور z می باشد) به طور یک به یک بر روی صفحه w ای که بریده شده است نگاشته می شود.

بدیهی است که این نگاشت در تمامی صفحه z یک به یک نیست، زیرا هر نقطه $w \neq 0$ دقیقاً با دو نقطه از z متناظر است، درحقیقت، هرگاه z_1 یکی از این نقاط باشد آنگاه نقطه دیگر $-z_1$ است. به عنوان مثال نقاط $z = i$ و $z = -i$ دارای یک تصویر $w = -i$ می باشند و در نتیجه صفحه w توسط تصویر صفحه z با نگاشت $w = z^{\frac{1}{2}}$ «دوبار پوشانده» می شود. گوئیم که تمامی صفحه z بر روی صفحه w دو لایه نگاشته می شود. لازم است تصویری را که از این نگاشت داریم با توصیف زیر تقویت نمود.

این طور تصور کنیم که یک نمونه از صفحه w ی بریده شده روی نمونه دیگری از این صفحه قرار گیرد به قسمی که ورقه بالایی تصویر نیمه راست صفحه z و ورقه زیرین تصویر نیمه چپ صفحه z باشد؛ این نیم صفحه ها را به ترتیب با R و L نمایش می دهیم. وقتی که از R به L می رویم، نقطه

تصویر متناظر باید از ورقه بالایی به ورقه زیرین برود. بدین جهت دو ورقه را در طول قسمت بریده شده، یعنی در طول محور حقیقی منفی، به طور ضربدری به هم وصل می‌کنیم (این تنها یک تصویر خیالی است، زیرا عبور دو صفحه مادی از داخل هم هرگز بطور کامل امکان پذیر نیست). دو مبداء به هم متصل هستند. شکلی که به این ترتیب حاصل می‌شود به **سطح ریمان** موسوم می‌باشد. روی این سطح هر نقطه $w \neq 0$ دوبار، بر روی هم، و مبداء فقط یک بار ظاهر می‌شود. اکنون تابع $w = z^{\frac{1}{2}}$ تمامی صفحه Z را به طور یک به یک بر روی سطح ریمان می‌نگارد، و این نگاهت جز در مورد «نقطه پیچشی» یا **نقطه شاخه‌ای** در $w = 0$ (شکل ۳۶۶) هم‌دیس است. هر نقطه شاخه‌ای از این نوع که دو ورقه را به هم وصل می‌کند، نقطه شاخه‌ای از مرتبه اول نامیده می‌شود. (در حالت کلیتر، هر نقطه شاخه‌ای که n ورقه را به هم وصل کند، نقطه شاخه‌ای از مرتبه $n - 1$ نامیده می‌شود).


 شکل ۳۶۶. سطح ریمان \sqrt{z}

اکنون رابطه دو مقداری

$$w = \sqrt{z} \quad (2)$$

را در نظر می‌گیریم (بخش ۲.۱۲). به ازای هر $z \neq 0$ دو مقدار w نظیر می‌شود، که یکی از آنها مقدار اصلی است. چنانچه جای صفحه Z را با سطح ریمان دو ورقه‌ای، که هم اکنون بررسی شد، عوض کنیم در این صورت هر عدد مختلط $z \neq 0$ با دو نقطه از سطح، که بر روی هم قرار دارند، نمایش داده می‌شود. فرض کنیم یکی از این نقاط - مثلاً، نقطه‌ای که در ورقه فوقانی واقع شده است - نظیر مقدار اصلی و نقطه دوم نظیر مقدار دیگر باشد آنگاه (۲) یک مقداری می‌شود، یعنی (۲) تابعی از نقاط سطح ریمان است و به هر حرکت پیوسته Z در سطح حرکتی پیوسته از نقطه متناظر آن در صفحه w نظیر می‌شود. تابع ورقه متناظر با مقدار اصلی را بر روی نیمه راست صفحه w و ورقه دیگر را بر روی نیمه چپ صفحه w می‌نگارد. اکنون چند مثال مهم دیگر را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

 مثال ۱. سطح ریمان $\sqrt[n]{z}$

در مورد رابطه

$$w = \sqrt[n]{z}; \quad n = 3, 4, \dots \quad (3)$$

نیاز به سطح ریمانی با n ورقه داریم که دارای یک نقطه شاخه ای از مرتبه $n - 1$ در $z = 0$ باشد. یکی از این ورقه ها متناظر با مقدار اصلی است و $n - 1$ ورقه دیگر با $n - 1$ مقدار دیگر متناظر می باشند. شکل ۳۶۷ سطح ریمان $w = \sqrt[n]{z}$ را نشان می دهد.



شکل ۳۶۷. سطح ریمان $\sqrt[n]{z}$

مثال ۲. سطح ریمان لگاریتم طبیعی

به ازای هر $z \neq 0$ رابطه

$$w = \ln z = \text{Ln } z + 2n\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, z \neq 0) \quad (4)$$

بینهایت مقداری است. از این رو (۴) یک تابع بر سطح ریمانی که مرکب از تعدادی نامتناهی ورقه است تعریف می کند. تابع $w = \text{Ln } z$ با یکی از این ورقه ها متناظر می باشد. بر این ورقه θ آرگومان z ، در فاصله $-\pi < \theta \leq \pi$ تغییر می کند (ر.ک. بخش ۱۲.۸). ورقه در امتداد منفی محور حقیقی بریده شده است و چاک لبه بالایی به لبه پایینی ورقه دیگری، که متناظر با فاصله $\pi < \theta \leq 3\pi$ ، یعنی متناظر با تابع $w = \text{Ln } z + 2\pi i$ است وصل شده است. به این روش هر مقدار n ی که در (۴) بگذاریم نظیر تنها یکی از این بینهایت ورقه می شود. تابع $w = \ln z$ ورقه مربوط به خود را بر روی نوار افقی $-\pi < v \leq \pi$ در صفحه w می نگارد. ورقه بعدی بر روی نوار مجاور یعنی $\pi < v \leq 3\pi$ نگاشته می شود و همین طور الی آخر. در نتیجه تابع $w = \ln z$ تمام ورقه های سطح ریمان نظیر خود را بر روی همه صفحه w می نگارد، تناظر بین نقاط $z \neq 0$ از سطح ریمان و نقاط صفحه w یک به یک می باشد.

مثال ۳. نگاشت $w = z + z^{-1}$. هو ابر

نگاشت تعریف شده با

$$w = z + \frac{1}{z} \quad (z \neq 0) \quad (5)$$

را که در آئرو دینامیک مهم می باشد در نظر می گیریم. چون این تابع دارای مشتقی به صورت زیر می باشد

$$w' = 1 - \frac{1}{z^2} = \frac{(z+1)(z-1)}{z^2}$$

نگاشت آن به جز در نقاط $z = 1$ و $z = -1$ همدیس است؛ این نقاط به ترتیب با $w = 2$ و $w = -2$

متناظر هستند. از (۵) می‌یابیم

$$z = \frac{w}{2} \pm \sqrt{\frac{w^2}{4} - 1} = \frac{w}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(w+2)(w-2)}. \quad (6)$$

در نتیجه، نقاط $w=2$ و $w=-2$ نقاط شاخه‌ای مرتبه اول $Z = Z(w)$ می‌باشند. برای هر مقدار $w (w \neq 2 \text{ و } w \neq -2)$ دو مقدار نظیر Z وجود دارد. در نتیجه، (۵) صفحه Z را بر روی یک سطح ریمان دو ورقه‌ای می‌نگارد، که این دو ورقه به طور ضربداری از $w = -2$ تا $w = 2$ (شکل ۳۶۸) به هم مرتبط می‌شوند، و این نگاشت یک به یک است. با قرار دادن $Z = re^{i\theta}$ تصویر منحنیهای ثابت $r =$ ثابت θ را مشخص می‌کنیم. از (۵) به دست می‌آوریم

$$w = u + iv = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta.$$

با مساوی قرار دادن قسمت‌های حقیقی و موهومی طرفین معادله بالا داریم

$$u = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta, \quad v = \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta. \quad (7)$$

از اینجا می‌یابیم

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

که در آن $a = r + \frac{1}{r}$ و $b = \left|r - \frac{1}{r}\right|$.

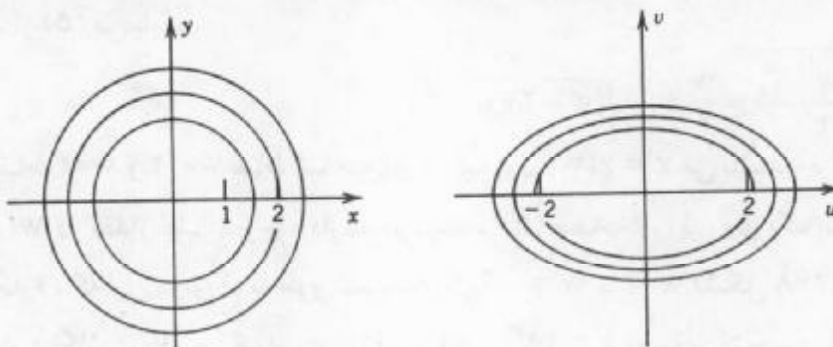
در نتیجه دوایر ثابت $r = 1$ بر روی بیضیهایی نگاشته می‌شوند که محورهای اصلی آنها بر محورهای u و v منطبق و طول آنها به ترتیب $2a$ و $2b$ باشند. نظر به اینکه $a^2 - b^2 = 4$ مستقل از r می‌باشد، این بیضیه‌ها هم‌کانون هستند و کانونهای آنها نقاط $w=2$ و $w=-2$ می‌باشند. دایره واحد $r=1$ بر روی پاره خطی که به $w=2$ و $w=-2$ محدود است نگاشته می‌شود. به ازای هر $r \neq 1$ دو دایره‌ای که شعاعهایشان r و $\frac{1}{r}$ است بر روی یک بیضی در صفحه w ، که متناظر با دو ورقه از سطح ریمان است، نگاشته می‌شوند. در نتیجه، داخل دایره واحد $|z|=1$ با یکی از این ورقه‌ها و خارج آن با ورقه دیگر متناظر می‌باشد.

به علاوه، با توجه به (۷) به دست می‌آوریم

$$\frac{u^2}{\cos^2\theta} - \frac{v^2}{\sin^2\theta} = 4. \quad (8)$$

از این دو خطوط ثابت θ بر روی هذلولیهایی که مسیرهای متعامد این بیضیه‌ها می‌باشند نگاشته می‌شوند. محور حقیقی (یعنی شعاعهای $\theta = 0$ و $\theta = \pi$) بر روی قسمتی از محور حقیقی از $w=2$ از طریق ∞ تا $w=-2$ نگاشته می‌شود. محور v بر روی محور v نگاشته می‌شود. هر قسمت دیگر از شعاعهای $\theta = \theta_0$ و $\theta = \theta_0 + \pi$ بر روی دو شاخه همان هذلولی نگاشته می‌شود.

ناحیه خارجی یکی از بیضیه‌های فوق عاری از نقطه شاخه‌ای است و با داخل یا خارج دایره متناظر در صفحه Z ، بسته به ورقه‌ای از سطح ریمان که ناحیه به آن تعلق دارد، متناظر است. به

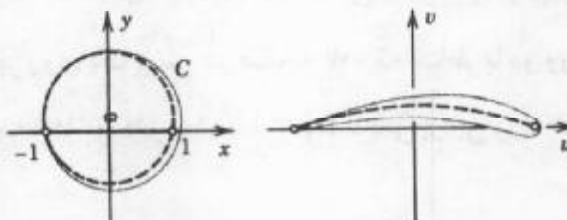


شکل ۳۶۸. مربوط به مثال ۳

خصوصاً، تمامی صفحه w همانطوری که قبلاً متذکر شدیم با داخل یا خارج دایره واحد $|z| = 1$ متناظر است.

نگاشت (۵) دوایر مناسب را به هوابرهایی انتقال می دهد که لبه عقبی تیز دارند و زاویه داخلی آنها صفر است؛ این هوابرها به هوابرهای ژوکوفسکی^۳ موسوم می باشند. چون هوابر دارای لبه تیزی است، واضح است دوایری که نگاشته می شود باید از یکی از دو نقطه $z = \pm 1$ که نگاشت در آنها همدیسی است بگذرد.

در شکل ۳۶۹ دایره بزرگتری که از -1 می گذرد بر روی کانتوری از هوابر و دایره با خط چین مشخص شده (که دایره واحد نیست!) بر روی خط چین واقع در درون یک پروفیل، نگاشته می شود. تفصیل این موضوع در مرجع [D۸] ضمیمه ۱ آمده است.



شکل ۳۶۹. هوابر ژوکوفسکی

بدین طریق به پایان فصل ۱۶ می رسیم. کاربردهای بیشتری از نگاشتهای همدیس در فصل ۱۷ ارائه می شوند.

مسائل بخش ۵. ۱۶

۱. $w = \sqrt{z}$ را در نظر بگیرید. مسیر w ، تصویر نقطه z ، را که از وضع اولیه $z = 1$ شروع کرده دوبار

۳- نیکلای گورویچ ژوکوفسکی NIKOLAI JEGOROVICH JOUKOWSKI (۱۸۴۷ - ۱۹۲۱)، ریاضیدان روس.

- روی دایره واحد دور می زند بیاید.
۲. نشان دهید که سطح ریمان $w = \sqrt{z}$ مرکب از سه ورقه است و در نقطه $z = 0$ دارای نقطه شاخه ای مرتبه دوم است. مسیر w ، تصویر نقطه z را که از وضع اولیه $z = 1$ شروع کرده سه بار روی دایره واحد دور می زند پیدا کنید.
۳. نموداری مشابه شکل ۳۶۶ از سطح ریمان $\sqrt[4]{z}$ رسم کنید.
۴. سطوح ریمان $w = \sqrt[3]{z}$ و $w = \sqrt[4]{z}$ را به طریقی مشابه با مساله ۲ بررسی کنید.
۵. مسیر تصویر نقطه z را تحت نگاشت $w = \ln z$ وقتی که z چندین بار روی دایره واحد در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت دور می زند تعیین کنید.
۶. نشان دهید که سطح ریمان $w = \sqrt{(z-1)(z-2)}$ که در $z = 1$ و $z = 2$ دارای نقاط شاخه ای است مرکب است از دو ورقه که می توان آنها را در طول قطعه خطی که از ۱ تا ۲ ادامه دارد برید و به طور ضربدری به هم وصل کرد. راهنمایی. مختصات قطبی $z-1 = r_1 e^{i\theta_1}$ و $z-2 = r_2 e^{i\theta_2}$ را به کار برید.
۷. نقاط شاخه ای و تعداد ورقه های سطح ریمان $w = \sqrt{z^2 - 1}$ را بیابید.
۸. نشان دهید که سطح ریمان $\sqrt{(1-z^2)(4-z^2)}$ دارای چهار نقطه شاخه ای است و دو ورقه دارد که می توان آنها را در طول قطعات $-2 \leq x \leq -1$ و $1 \leq x \leq 2$ از محور x به طور ضربدری به هم وصل کرد.
- مکان نقاط شاخه ای و تعداد ورقه های سطوح ریمان توابع زیر را تعیین کنید.
- | | | |
|---------------------------|-----------------------|--------------------|
| $\sqrt{z-a}$. ۱۱ | $\sqrt{i+z}$. ۱۰ | $i + \sqrt{z}$. ۹ |
| $3 + 2z - \sqrt{2z}$. ۱۴ | $\sqrt{z^2 - z}$. ۱۳ | $\sqrt{3z+4}$. ۱۲ |
| $3 + \sqrt{2z+i}$. ۱۷ | $\sqrt[4]{z-16}$. ۱۶ | $\ln(z+1)$. ۱۵ |
| $\sqrt{e^z}$. ۲۰ | $e^{\sqrt{z}}$. ۱۹ | $\ln(4z-3i)$. ۱۸ |

پرسشها و مسائل دوره ای فصل ۱۶

۱. زاویه دو منحنی جهتدار متقاطع چگونه تعریف می شود و معنی جمله «نگاشتی همدیس است» چیست؟
۲. در چه نقاطی نگاشت $w = f(z)$ با یک تابع تحلیلی همدیس نیست؟ مثال بیاورید.
۳. هرگاه $f'(z_0) = 0$ ، $f''(z_0) = 0$ ، و $f'''(z_0) \neq 0$ ، آنگاه چه اتفاقی برای زوایا در z_0 تحت نگاشت $w = f(z)$ رخ می دهد؟
۴. تبدیل کسری خطی چیست؟ چرا این نگاشتها از نقطه نظر عملی بسیار مورد توجه هستند؟

۵. چرا نیاز داریم که ضرایب تبدیل کسری خطی در نامساوی $ad - bc \neq 0$ صدق کنند؟
۶. صفحه مختلط وسعت یافته چیست، و چرا این مطلب در این فصل آمده است؟
۷. نقطه ثابت یک نگاشت چیست؟ مثالهایی از نگاشتها با توابع تحلیلی بیاورید که دارای هیچ نقطه ثابت، دقیقاً یک نقطه ثابت، تعداد نامتناهی نقطه ثابت باشند.
۸. سطح ریمان چیست، و به چه منظوری به کار گرفته می شود؟
۹. سطح ریمان $w = \sqrt{z}$ شامل چند ورقه است؟ در اینجا منظور از نقطه شاخه ای چیست؟
۱۰. چرا نگاشت $w = z + \frac{1}{z}$ از نقطه نظر علمی با اهمیت است؟ چه تعداد ورقه های سطح ریمان معکوس این نگاشت دارا می باشد؟
- تصاویر منحنیها و نواحی زیر را تحت نگاشت $w = u + iv = z^2$ بیابید و نمودار آنها را رسم کنید.
- $y = -1, 1$. ۱۱ $x = -1, 1, 2$. ۱۲ $|z| = 2/5$. ۱۳ $|\arg z| < \frac{\pi}{8}$
- $xy = -4$. ۱۴ $y = \frac{x}{2}$. ۱۵ $\text{Im} z > 0$. ۱۶
- $\frac{\pi}{8} < \arg z \leq \frac{\pi}{4}$. ۱۷ $0 < y < 2$. ۱۸ $\frac{1}{2} < x < 1$. ۱۹
- هریک از منحنیها ویا نواحی زیر را تحت نگاشت $w = \frac{1}{z}$ بیابید و آنها را رسم کنید.
- $y < 0, |z| < \frac{1}{2}$. ۲۰ $|\arg z| < \frac{\pi}{8}$. ۲۱ $|z| < 1, y > 0, x < 0$. ۲۲
- $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$. ۲۳ $y = 1$. ۲۴ $x = -1$. ۲۵
- برای هر یک از نگاشتهای $\tilde{w} = f(z)$ زیر نقاطی را بیابید که در آنها همدیس نباشند.
- $\cosh 2z$. ۲۸ $3z^2 + 5z^2$. ۲۷ $\cos \pi z^2$. ۲۶
- $\sin z + \cos z$. ۳۱ $z + \frac{1}{z} (z \neq 0)$. ۳۰ $\exp(z^2 + z)$. ۲۹
- مطلوب است تبدیل کسری خطی ای که به ترتیب
۳۲. $1, -1, 1, -1$ را بر روی $1, -1, 1, -1$ نگارد.
۳۳. $1, 0, 1, 0$ را بر روی $i, 0, i, 0$ نگارد.
۳۴. $i, 0, i, 0$ و ∞ را بر روی $1, 1+i, 1, \infty$ نگارد.
۳۵. $\infty, 0, \infty, 0$ و -2 را بر روی $1, 0, 1, \infty$ نگارد.
۳۶. $\infty, 0, \infty, 0$ و 1 را بر روی $0, -2i, 0, 1-i$ نگارد.
۳۷. $1, i, 1, i$ و ∞ را بر روی $5, 5i, 5, \infty$ نگارد.

۳۸. $-۱، ۱، ۲$ را بر روی $۲، ۰، ۲۰۰$ و $\frac{۳}{۴}$ می نگارد.

۳۹. $۱، ۰، ۱$ و -۱ را بر روی $۰، ۰، ۰، ۰$ و ۱ می نگارد.

۴۰. $i، ۰، ۰$ و i را بر روی $۰، ۰، ۰، ۰$ و $2i$ می نگارد.

مطلوب است تابع تحلیلی $w = u + iv = f(z)$ که

۴۱. ناحیه $0 < \arg z < \frac{\pi}{۳}$ را بر روی ناحیه $u < ۱$ بنگارد.

۴۲. نیم صفحه $x \geq ۰$ را بر روی ناحیه $u \geq ۲$ طوری بنگارد که در ۰ دارای تصویر $i + ۲$ باشد.

۴۳. نیم صفحه راست را بر روی نیم صفحه فوقانی بنگارد.

۴۴. داخل دایره واحد $|z| = ۱$ را بر روی خارج دایره $|w + ۱| = ۵$ بنگارد.

۴۵. نوار نامتناهی $0 < y < \frac{\pi}{۳}$ را بر روی نیم صفحه فوقانی $v > ۰$ بنگارد.

۴۶. نیم قرص $|z| < ۱، x > ۰$ را بر روی خارج دایره واحد $|w| = ۱$ بنگارد.

۴۷. ناحیه $0 < x < k، y > ۰، xy < k$ را بر روی نوار $0 < v < ۱$ بنگارد.

هرگاه $w = f(z)$ برابر یکی از توابع زیر باشد، آنگاه نقاط ثابت آنها را بیابید.

$$z^2 + z - ۱۱. ۴۸ \quad \frac{z+2}{z-1}. ۴۹ \quad \frac{2iz-1}{z+2i}. ۵۰$$

خلاصه فصل ۱۶

نگاشت همبسی

تابع مختلط $w = f(z)$ نگاشتی از دامنه تعریف خود واقع در صفحه Z بر روی مقادیر $f(z)$ در صفحه w به دست می دهد. هرگاه $f(z)$ تحلیلی باشد، این نگاشت همبسی است، یعنی حفظ کننده زاویه است: زاویه بین تصاویر هر دو منحنی متقاطع، چه از نظر اندازه و چه از نظر جهت همان زاویه بین دو منحنی را تشکیل می دهند (بخش ۱۶.۱).

برای خواص نگاشتهای $e^z، \cos z، \sin z$ و غیره به بخشهای ۱۲.۹ و ۱۶.۴ مراجعه

شود.

تبدیلات کسری خطی، همچنین به تبدیلات موبیوس موسوم می باشند (ر.ک. بخشهای

۱۶.۲، ۱۶.۳)

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0). \quad (۱)$$

این تبدیل صفحه مختلط توسعه یافته (بخش ۱۶.۲) را به طور همبسی بر روی خودش می نگارد. این نگاشتها چگونگی نگاشت نیم صفحه ها بر روی نیم صفحه ها یا قرصها، و قرصها بر روی قرصها یا نیم

نگاشت همپیس

صفحه ها را پاسخ می دهد. تصاویر سه نقطه توسط (۱) به طور یکتا مشخص می شود (بخش ۱۶. ۳).
سطوح ریمان (بخش ۱۶. ۵) از چند ورقه مرتب شده در نقاط بحرانی که به نقاط شاخه ای معروف می باشند، تشکیل یافته است. روی این سطوح، روابط چندمقداری به روابط تک مقداری تبدیل می شوند. این سطوح برای توجیه چنین توابعی مفید واقع می شوند. به عنوان مثال برای $w = \sqrt{z}$ به دو ورقه نیاز داریم زیرا این رابطه دومقداری است. و برای $w = \ln z$ نیاز به تعدادی نامتناهی ورقه داریم زیرا این رابطه به طور نامتناهی چندمقداری است (ر. ک. بخش ۱۲. ۸).

عبارت $z = x + iy$ را در $w = u + iv$ قرار می دهیم. در این صورت $z = (u + iv)^2 = u^2 - v^2 + i(2uv)$ خواهیم داشت. پس $x = u^2 - v^2$ و $y = 2uv$.
 اگر $z = re^{i\theta}$ را در $w = \rho e^{i\phi}$ قرار دهیم، داریم $re^{i\theta} = \rho^2 e^{i2\phi}$. پس $\rho = \sqrt{r}$ و $2\phi = \theta + 2k\pi$ که k عدد صحیح است. این نشان می دهد که هر دو برگه در w صفحه z را پوشش می دهد.
 برای $w = \ln z$ نیز می توانیم روابطی مشابهی پیدا کنیم. اگر $z = re^{i\theta}$ و $w = u + iv$ را در $e^w = z$ قرار دهیم، داریم $e^{u+iv} = re^{i\theta}$. پس $e^u = r$ و $e^{iv} = e^{i\theta}$. این روابط را می توان به صورت $u = \ln r$ و $v = \theta + 2k\pi$ نوشت. این نشان می دهد که هر دو برگه در w صفحه z را پوشش می دهد.

۱) رابطه همپیس
 همپیس دایره ای
 دایره $|z| = 1$ را در $w = u + iv$ قرار می دهیم. در این صورت $z = e^{i\theta}$ و $w = \ln e^{i\theta} = i\theta$ خواهیم داشت. این نشان می دهد که دایره $|z| = 1$ در w به خط $u = 0$ تبدیل می شود.
 همچنین می توانیم دایره $|z - 1| = 1$ را در $w = u + iv$ قرار دهیم. در این صورت $z = 1 + e^{i\theta}$ و $w = \ln(1 + e^{i\theta})$ خواهیم داشت. این نشان می دهد که دایره $|z - 1| = 1$ در w به خط $v = 0$ تبدیل می شود.
 این روابط را می توانیم به صورت $u = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}$ و $v = \frac{1}{2} \theta$ نیز بنویسیم.

۲) $w = \sqrt{z}$
 اگر $z = re^{i\theta}$ و $w = \rho e^{i\phi}$ را در $w^2 = z$ قرار دهیم، داریم $\rho^2 e^{i2\phi} = re^{i\theta}$. پس $\rho = \sqrt{r}$ و $2\phi = \theta + 2k\pi$. این نشان می دهد که هر دو برگه در w صفحه z را پوشش می دهد.
 همچنین می توانیم $w = \sqrt{z}$ را به صورت $w = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$ بنویسیم. این نشان می دهد که هر دو برگه در w صفحه z را پوشش می دهد.

فصل ۱۷

کاربرد آنالیز مختلط در نظریه پتانسیل

معادله لاپلاس $\nabla^2 \Phi = 0$ یکی از مهمترین معادلات بامشتق جزئی در ریاضیات مهندسی می باشد، زیرا این معادله در مباحث مربوط به میدانهای گرانشی (بخش ۹.۸) میدانهای الکترواستاتیکی (بخش ۱۱.۱۱)، انتقال گرما در حالت پایدار (بخشهای ۸.۹، ۱۱.۵) جریان سیال تراکم ناپذیر، و غیره ظاهر می شود. نظریه جوابهای معادله لاپلاس به نظریه پتانسیل موسوم می باشد و جوابهایی از معادله لاپلاس که دارای مشتق دوم پیوسته داشته باشند به توابع همساز موسوم می باشند. در «حالت دو بعدی» وقتی که Φ فقط به دو مولفه کارتیزین x و y بستگی دارد، معادله لاپلاس به صورت زیر درمی آید

$$\nabla^2 \Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0. \quad (1)$$

چنانکه می دانیم جوابهای این معادله ارتباط نزدیکی با توابع تحلیلی مختلط دارند (ر. ک. بخش ۵.۱۲). در این بخش این ارتباط و نتایج آن را با تفصیل بیشتر مورد بررسی قرار می دهیم و برحسب مثالهای عملی ناشی از الکترواستاتیک (بخشهای ۱۰.۱۷، ۱۲.۱۷)، انتقال گرما (بخش ۳.۱۷)، و هیدرودینامیک (بخش ۴.۱۷) موضوع را توضیح می دهیم. در بیشتر موارد این موضوع در حل مساله مقدار کرانه ای، که به مسائل دیریکله (یا اولین مساله مقدار کرانه ای) موسوم می باشند، برای معادله لاپلاس مورد نیاز می باشند، یعنی، در دامنه مفروض D جوابی برای معادله لاپلاس باید بیابیم که بر کران D مقادیر مفروضی را اختیار کند. چنین مساله ای را اغلب می توان با روش نگاشت همدمی (بخش ۲.۱۷)، یعنی، توسط نگاشتی D را به طور همدمی بر روی ناحیه ساده تر (قرص، نیم صفحه، و غیره) برای ناحیه ای که جواب معلوم باشد یا بتوان از فرمولی، همانند فرمول انتگرال پواسن

۱- در حالت سه بعدی چنین ارتباط نزدیکی وجود ندارد.

نکته. ابتدا Φ و سپس $\Psi + i\Phi$ را می نویسیم چرا که $u + iv$ در نگاشت همدمی در بخش ۲.۱۷ مورد نیاز می باشند.

(بخش ۱۷. ۵) به دست آورد، حل کرد. برای مسائل بامقدار کرانه ای آمیخته وضعیت مشابهی وجود دارد.

در بخش آخر (بخش ۱۷. ۶) چند خواص عمومی توابع همساز حاصل از نتایج بر روی توابع تحلیلی را مورد بررسی قرار می دهیم. پیشنهاد این فصل: فصلهای ۱۲، ۱۳، و ۱۶. مراجع: ضمیمه ۱، قسمت D. جواب مسائل: ضمیمه ۲.

۱۷. ۱ میدانهای الکترواستاتیک

نیروی الکتریکی جاذبه یا دافعه بین ذرات باردار از قانون کولن پیروی می کند. این نیرو برابر گرادیان تابعی مانند Φ ، موسوم به پتانسیل الکترواستاتیک می باشد. در نقاطی که بار وجود ندارد، Φ جواب معادله لاپلاس

$$\nabla^2 \Phi = 0.$$

است. سطوح ثابت Φ به سطوح هم پتانسیل موسوم می باشد. در هر نقطه P ، گرادیان Φ به سطح ثابت Φ که از آن نقطه عبور می کند عمود است؛ یعنی نیروی الکتریکی امتدادی متعامد با سطح هم پتانسیل دارد. (ر. ک. بخشهای ۹.۸ و ۱۱.۱۱).

مسائل مورد بحث در این فصل در حالت دو بعدی می باشند، زیرا آنها در ارتباط با سیستمهای فیزیکی ای هستند که در فضای سه بعدی مورد بحث قرار می گیرند، اما چنین توابع پتانسیل Φ مستقل از یکی از مولفه های فضا هستند، در نتیجه Φ تنها به دو مولفه، که موسوم به x و y می باشند، وابسته است. با توجه به این مفروضات معادله لاپلاس به صورت زیر می باشد

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

اکنون سطوح هم پتانسیل به صورت خطوط هم پتانسیل (منحنیهای هم پتانسیل) در صفحه xy ظاهر می شوند.

مثال ۱. پتانسیل بین دو صفحه موازی

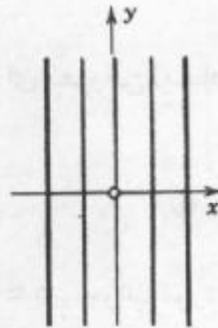
پتانسیل Φ از میدان بین دو صفحه هادی موازی نامتناهی (شکل ۳۷۰) را که به ترتیب در پتانسیلهای Φ_1 و Φ_2 نگهداشته شده اند بیابید.

حل. از شکل صفحات نتیجه می شود که Φ تنها به x وابسته است، و معادله لاپلاس به صورت $\Phi'' = 0$ در می آید، با دو بار انتگرالگیری به دست می آوریم $\Phi = ax + b$. که در آن ثابتهای

a و b به کمک مقادیر کرانه ای Φ در روی صفحات تعیین می گردند. به عنوان مثال، اگر صفحات با $x = -1$ و $x = 1$ متناظر باشند، جواب عبارت است از

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}(\Phi_r - \Phi_l)x + \frac{1}{2}(\Phi_r + \Phi_l).$$

سطوح هم پتانسیل صفحات موازی هستند.



شکل ۳۷. پتانسیل در مثال ۱

مثال ۲. پتانسیل بین استوانه های هم محور

پتانسیل Φ بین دو استوانه هادی هم محور که از دو طرف تا بینهایت ادامه دارد (شکل ۳۷۱) و به ترتیب در پتانسیلهای Φ_1 و Φ_2 قرار گرفته اند را بیابید.

حل. در اینجا به دلیل تقارن، Φ فقط به $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ بستگی دارد و معادله لاپلاس به صورت زیر درمی آید [ر. ک. (۴) بخش ۹.۱۱]

$$r\Phi'' + \Phi' = 0.$$

با جداسازی متغیرها و انتگرالگیری به دست می آوریم

$$\frac{\Phi''}{\Phi'} = -\frac{1}{r}, \quad \ln \Phi' = -\ln r + \bar{a}, \quad \Phi' = \frac{a}{r}, \quad \Phi = a \ln r + b,$$

ثابت های a و b با مقادیر مفروض Φ بر روی استوانه ها تعیین می شوند. گرچه هادی نامتناهی وجود ندارد، اما میدان حاصل از یک هادی ایده آل که در اینجا مورد بحث قرار گرفت به طور تقریبی میدان حاصل از یک هادی متناهی طولانی را در نقاطی که از دوانتهای استوانه بسیار دور است به دست می دهد.

مثال ۳. پتانسیل در یک ناحیه زاویه ای

مطلوب است پتانسیل Φ بین صفحات هادی در شکل ۳۷۲، که در پتانسیلهای Φ_1 (صفحه تحتانی) و Φ_2 قرار گرفته اند، و با یکدیگر زاویه α ، که در آن $0 < \alpha \leq \pi$ می سازند (در شکل داریم

$$(\alpha = 120^\circ = \frac{2\pi}{3})$$

حل. $\theta = \text{Arg } z (z = x + iy \neq 0)$ بر روی شعاعهای ثابت θ ثابت هستند. θ یک تابع همساز است زیرا قسمت موهومی یک تابع تحلیلی، یعنی $\text{Ln } z$ (بخش ۱۲. ۸) هستند. از این رو جواب عبارت است از

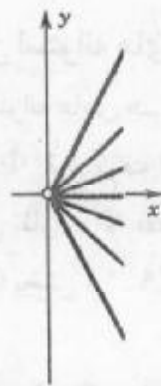
$$\Phi(x, y) = a + b \text{Arg } z$$

که در آن a و b باتوجه به دو شرط کرانه ای مفروض (مقادیر مفروض بر صفحات) به صورت زیر مشخص می شوند

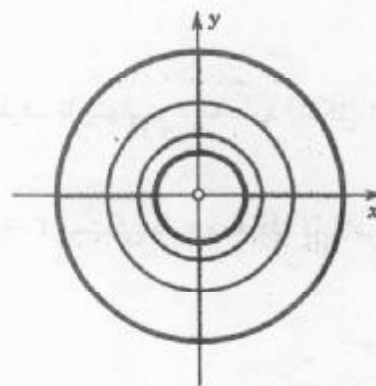
$$a + b(-\frac{1}{\alpha}\alpha) = \Phi_1, \quad a + b(\frac{1}{\alpha}\alpha) = \Phi_2.$$

در نتیجه $a = \frac{(\Phi_2 + \Phi_1)}{2}$ و $b = \frac{(\Phi_2 - \Phi_1)}{\alpha}$. جواب مورد نظر عبارت است از

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\alpha}(\Phi_2 + \Phi_1) + \frac{1}{\alpha}(\Phi_2 - \Phi_1)\theta, \quad \theta = \text{arc tan } \frac{y}{x}.$$



شکل ۳۷۲. پتانسیل در مثال ۳



شکل ۳۷۱. پتانسیل در مثال ۲

پتانسیل مختلط

فرض کنید $\Phi(x, y)$ در دامنه D همساز و $\Psi(x, y)$ تابع همساز مزدوج Φ در D باشد. ^۲ آنگاه

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

تابع تحلیلی از $x + iy$ می باشد. تابع F را پتانسیل مختلط متناظر با پتانسیل حقیقی Φ می نامند. از بخش ۱۲. ۵ یادآوری می کنیم که به ازای Φ مفروض، یک مزدوج Ψ ، صرفنظر از یک مقدار ثابت

^۲ - می نویسیم $F = \Phi + i\Psi$ ، زیرا $f = u + iv$ را برای نگاشت همبسی، که در بخش بعد به آن نیاز داریم اختصا ص داده ایم.

به طور یکتا تعیین می شوند. بنابراین می توان آنرا، بدون هیچ سوء تفاهمی پتانسیل محلی نامید. به کارگیری F دارای دو مزیت تکنیکی و فیزیکی است. به جهت تکنیکی F در ارتباط با روشهای آنالیز مختلط نسبت به قسمتهای حقیقی و موهومی بهتر عمل می کند. از نقطه نظر فیزیکی، Ψ دارای معنی است. بنا به همدیسی، منحنی های ثابت $\Psi = \text{خطوط هم پتانسیل ثابت}$ Φ را تحت زاویه قائمه قطع می کنند [جز در نقاطی که $F'(z)$ در آنها صفر است]. از این رو آنها با نیروی الکتریکی هم جهت هستند و بدین جهت خطوط نیرو نامیده می شوند. این خطوط مسیرهای ذرات باردار متحرك (الکترونها در یک میکروسکوپ الکترونی) می باشند.

مثال ۴. پتانسیل مختلط

در مثال ۱، $\Psi = ay$ یک مزدوج Φ مختلط است. در نتیجه پتانسیل مختلط عبارت است از

$$F(z) = az + b = ax + b + iay$$
و خطوط نیرو خطوط مستقیم ثابت $y = \text{ثابت}$ هستند که با محور x موازی هستند.

مثال ۵. پتانسیل مختلط

در مثال ۲ داریم $\Phi = a \ln r + b = a \ln |z| + b$. یک مزدوج مختلط برای آن $\Psi = a \text{Arg} z$ است. و پتانسیل مختلط عبارت است از

$$F(z) = a \text{Ln} z + b$$

و خطوط نیرو خطوط مستقیمی هستند که از مبدا می گذرند. همچنین می توان $F(z)$ را به پتانسیل مختلط یک خط منبع که نقطه برخورد آن با صفحه xy مبدا است تعبیر کرد.

مثال ۶. پتانسیل مختلط

در مثال ۳ با توجه به اینکه $i \text{Ln} z = i \ln |z| - \text{Arg} z$ ، با ضرب طرفین این رابطه در $-b$ ، و جمع آن با $F(z)$ ، a به صورت زیر حاصل می شود

$$F(z) = a - ib \text{Ln} z = a + b \text{Arg} z - ib \ln |z|.$$

با توجه به آن مشاهده می شود که خطوط نیرو دوائر متحد المركز ثابت $|z| = \text{ثابت}$ هستند.

انطباق

اغلب می توان پتانسیلهای پیچیده تری را با انطباق پتانسیلهای به دست آورد.

مثال ۷. پتانسیل مختلط یک جفت خط منبع

پتانسیل مختلط یک جفت خط منبع هم توان را که بارشان با هم مخالف بوده و در نقاط $z = c$ و $z = -c$ واقع بر محور حقیقی قرار دارند مشخص کنید.

حل. از مثالهای ۲ و ۵ نتیجه می شود که پتانسیل هر یک از خطهای منبع به ترتیب به صورتهای زیر هستند

$$\Phi_r = -K \ln|z + c| \quad \text{و} \quad \Phi_l = K \ln|z - c|$$

در اینجا ثابت حقیقی K قدرت (میزان بار) می باشد. توابع فوق قسمتهای حقیقی پتانسیلهای مختلط

$$F_r(z) = -K \ln(z + c) \quad \text{و} \quad F_l(z) = K \ln(z - c)$$

هستند. از این رو پتانسیل مختلط حاصل از ترکیب دو خط منبع عبارت است از

$$F(z) = F_l(z) + F_r(z) = K[\ln(z - c) - \ln(z + c)]. \quad (۲)$$

خطوط هم پتانسیل منحنیهای زیر می باشند

$$\Phi = \text{Re} F(z) = K \ln \left| \frac{z - c}{z + c} \right| = \text{ثابت}$$

، در نتیجه ثابت $\left| \frac{z - c}{z + c} \right| = \text{ثابت}$

که متعلم با یک محاسبه مستقیم می تواند نشان دهد که این منحنیها دایرهها هستند. خطوط نیرو عبارت اند از

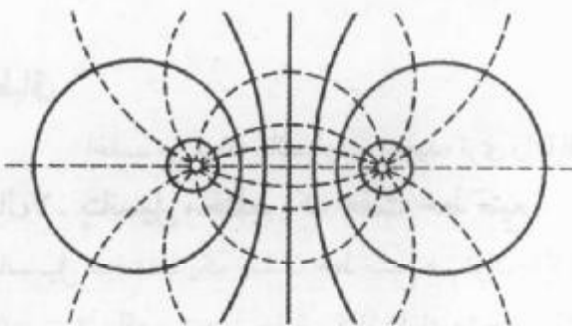
$$\Psi = \text{Im} F(z) = K[\text{Arg}(z - c) - \text{Arg}(z + c)] = \text{ثابت}.$$

این فرمول را می توان چنین نوشت (شکل ۳۷۳)

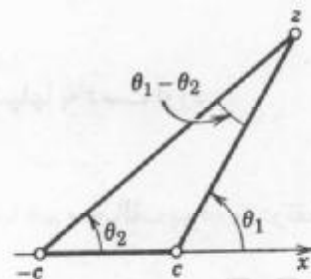
$$\Psi = K(\theta_l - \theta_r) = \text{ثابت}.$$

حال $\theta_l - \theta_r$ زاویه بین پاره خطهایی است که z را به c و $-c$ وصل می کند (شکل ۳۷۳). از این رو خطوط نیرو و منحنیهای هستند که در طول هر یک از آنها پاره خط $-c \leq x \leq c$ تحت زاویه ثابت ظاهر می شود. این منحنیها، همان طوری که از هندسه مقدماتی می دانیم تمام قوسهای مستدیری هستند که بر روی S ساخته می شوند. بنابراین خطوط نیرو دایره می باشند. در شکل ۳۷۴ برخی از این نتایج با برخی خطوط هم پتانسیل نمایش داده شده اند.

در مجموع برای تعبیر پتانسیل دوخط منبع، این پتانسیل نیز می تواند به پتانسیل بین دو استوانه مستدیر که دارای محورهای موازی ولی مختلف، یا به پتانسیل بین دو استوانه هم تراز که یکی در خارج دیگری قرار دارد، یا به پتانسیل بین یک استوانه و یک جدار مسطح تصور نمود. توصیف این مطالب، در شکل ۳۷۴ آمده است.



شکل ۳۷۴. خطوط هم پتانسیل و خطوط نیرو در مثال ۷



شکل ۳۷۳. آرگومانها در مثال ۷

ایده پتانسیل مختلط، همان طوری که توصیف شد، کلیدی برای نزدیکی نظریه پتانسیل با آنالیز مختلط است و در جریان حرارت و جریان سیال به کار می رود.

مسائل بخش ۱۷

۱. سطوح هم پتانسیل بین دو صفحه موازی در $x = -3$ و $x = 3$ که به ترتیب دارای پتانسیلهای 140° و 260° ولت می باشند را بیابید و رسم کنید.

۲. پتانسیل مختلط در مسأله ۱ را پیدا کنید.

۳. سطوح هم پتانسیل بین دو صفحه موازی در $y = 0$ و $y = d$ که به ترتیب دارای پتانسیلهای (ولت $U_1 = 20 \text{ kV} (= 20000)$ و $U_2 = 0$ ولت می باشند را بیابید و آنها را رسم کنید.

۴. پتانسیل Φ و پتانسیل مختلط F بین صفحات $y = x + k$ و $y = x$ که به ترتیب دارای پتانسیلهای 100° و 0° ولت می باشند را بیابید.

۵. پتانسیل در ربع اول از صفحه xy بین محورها (دارای پتانسیل 110° ولت) و هذلولی $xy = 1$ (دارای پتانسیل 60° ولت) را بیابید.

مطلوب است پتانسیل Φ بین دو استوانه هم محور نامتناهی که شعاعهای آنها $r_1, r_2 (> r_1)$ بوده و به ترتیب دارای پتانسیلهای U_1 و U_2 می باشند، که در آن

$$U_1 = 100 \text{ V}, U_2 = 1000 \text{ V}, r_1 = 1, r_2 = 1.6$$

$$U_1 = -110 \text{ V}, U_2 = 110 \text{ V}, r_1 = 0.5, r_2 = 2$$

$$U_1 = 1 \text{ kV}, U_2 = 2 \text{ kV}, r_1 = 2.8, r_2 = 8$$

$$U_1 = 200 \text{ V}, U_2 = 0, r_1 = 1, r_2 = 4$$

$$U_1 = 50 \text{ V}, U_2 = 150 \text{ V}, r_1 = 0.1, r_2 = 10$$

مطلوب است خطوط هم پتانسیل از پتانسیل مختلط $F(z)$ در هر یک از موارد زیر. این خطوط را به طور نموداری نشان دهید.

$$F(z) = z^2 \cdot 13 \quad F(z) = -iz^2 \cdot 12 \quad F(z) = (1+2i)z \cdot 11$$

$$F(z) = i \text{Ln} z \cdot 16 \quad F(z) = \frac{1}{z} \cdot 15 \quad F(z) = \frac{1+i}{z} \cdot 14$$

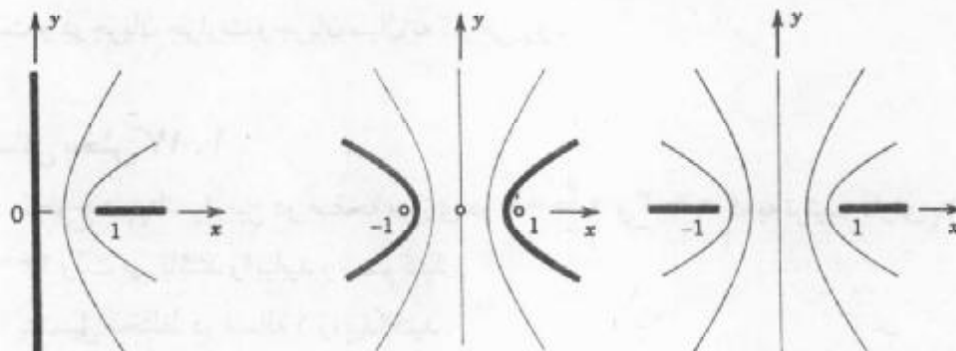
۱۷. پتانسیل دو خط منبع $z = a$ و $z = -a$ که بارشان یکسان است را بیابید.

۱۸. نزدیکی هر دو خط منبع واقع در شکل ۳۷۴ دایره ثابت $\Phi = \text{تقریباً متحد المركز هستند}$. آیا این مطلب به طور فیزیکی قابل درک است؟

۱۹. نشان دهید که خطوط هم پتانسیل در مثال ۷ دایره هستند.

۲۰. نشان دهید که $F(z) = \cos^{-1} z$ را می توان به پتانسیل مختلط مربوط به شکل های ۳۷۵ و ۳۷۶

تعبیر کرد.



شکل ۳۷۶. روزنه های دیگر

شکل ۳۷۵. شکاف

۱۷. ۲ موارد استعمال نگاشت همدیسی

همانطوری که دیدیم پتانسیلهای مختلط مرتبط به نظریه پتانسیل رابطه نزدیکی با آنالیز مختلط دارند. ارتباط نزدیک دیگر نتایجی از استفاده نگاشت همدیسی در حل مسائل مقدار کرانه ای برای معادله لاپلاس، یعنی دریافتن جوابی از معادله در برخی دامنه داده شده مقادیر مفروض بر کرانه (مساله دیریکله؛ ر.ک. بخش ۵.۱۱) می باشد. در این صورت نگاشت همدیسی برای نگاشتن یک دامنه پیچیده مفروض بر روی دامنه ساده تری که در آن جواب معلوم است یا جواب را آسانتر می توان یافت، استفاده می شود. هدف این است که جواب را در دامنه تصویر یافته و از روی آن به جواب متناظر در ناحیه مورد نظر برسیم. اهمیت عملی نگاشت همدیسی از این واقعیت ناشی می شود که توابع همساز تحت نگاشت همدیسی همساز باقی می مانند.

قضیه ۱ (توابع همساز تحت نگاشت همدیسی)

اگر $\Phi^*(u, v)$ در دامنه D^* واقع در صفحه w همساز، و همچنین تابع تحلیلی $w = u + iv = f(z)$ ، دامنه D واقع در صفحه z را به طور همدیسی بر روی D^* بنگارد، آنگاه

$$\Phi(x, y) = \Phi^*(u(x, y), v(x, y)) \quad (1)$$

در D همساز است.

اثبات. باتوجه به قاعده زنجیره ای، ترکیب توابع تحلیلی تابعی تحلیلی می باشد. از این رو، با در نظر گرفتن مزدوج همساز $\Psi^*(u, v)$ از Φ^* و تشکیل تابع تحلیلی $F^*(w) = \Phi^*(u, v) + i\Psi^*(u, v)$ نتیجه می گیریم که $F(z) = F^*(f(z))$ در D تحلیلی و قسمت حقیقی آن یعنی $\Phi(x, y) = \text{Re } F(z)$

۳- ر.ک. بخش ۵.۱۲. بدون اثبات متذکر می شویم که اگر D^* همبند ساده (بخش ۳.۱۳) باشد، آنگاه مزدوج همساز Φ^* وجود دارد. اثبات دیگری از آن بدون استفاده از مزدوج همساز در ضمیمه ۴ آمده است.

در D همساز است. بدین طریق اثبات قضیه به پایان می‌رسد.

مثال ۱. پتانسیل بین استوانه های غیر هم محور

مطلوب است پتانسیل بین استوانه های $C_1: |z| = 1$ دارای پتانسیل $U_1 = 0$ و $C_2: \left|z - \frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5}$ دارای پتانسیل $U_2 = 110$ ولت.

حل. برای حل مساله قرص واحد $|z| = 1$ را روی قرص واحد $|w| = 1$ طوری می‌نگاریم که C_2 بر روی استوانه $C_1^*: |w| = r_0$ نگاشته شود. بنابر (۶) بخش ۳.۱۶، تبدیل کسری خطی ای کسری خطی ای که قرص واحد را بر روی قرص واحد بنگارد عبارت است از

$$w = \frac{z - b}{bz - 1} \quad (2)$$

که در آن بدون هیچ محدودیتی $b = z_0$ را حقیقی انتخاب می‌کنیم. z_0 بلافاصله در اینجا به ما کمک نمی‌کند زیرا مرکز دایره بر روی مرکز تصاویر نگاشته نمی‌شوند. به هر حال، اکنون دو ثابت آزاد b و r_0 داریم و با اضافه نمودن دو شرط مناسب که $\frac{4}{5}$ (شکل ۳۷۷) را به ترتیب بر روی r_0 و $-r_0$ بنگارد، به هدفمان خواهیم رسید. از این موضوع و از (۲) می‌یابیم

$$r_0 = \frac{-b}{-1}, \quad -r_0 = \frac{\frac{4}{5} - b}{\frac{4}{5}b - 1} = \frac{\frac{4}{5} - r_0}{\frac{4}{5}r_0 - 1}$$

که یک معادله درجه دوم نسبت به r_0 با جوابهای ۲ (نامناسب زیرا $r_0 < 1$) و $\frac{1}{4}$ می‌باشد. نگاشت تابع (۲) به ازای $b = \frac{1}{4}$ چنین می‌شود

$$w = f(z) = \frac{2z - 1}{z - 2} \quad (3)$$

از مثال ۵ بخش ۱.۱۷، با نوشتن w بر حسب z همان پتانسیل مختلط در صفحه w را داریم و با توجه به این موضوع پتانسیل حقیقی برابر است با

$$\Phi^*(u, v) = \operatorname{Re} F^*(w) = a \ln|w| + k.$$

ضرایب a و k با توجه به شرایط کرانه ای تعیین می‌شوند. اگر $|w| = 1$ ، آنگاه $\Phi^* = a \ln 1 + k = 0$ ، از این رو $k = 0$. اگر $|w| = \frac{1}{4}$ ، آنگاه $\Phi^* = a \ln\left(\frac{1}{4}\right) = 110$ ، از

این رو $a = \frac{110}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} = -158.7$. اکنون با جایگزینی (۳) جواب مطلوب در دامنه مفروض واقع در

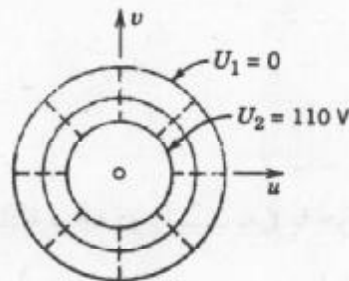
صفحه z به صورت زیر درمی‌آید

$$F(z) = F^*(f(z)) = a \operatorname{Ln} \frac{2z-1}{z-2}$$

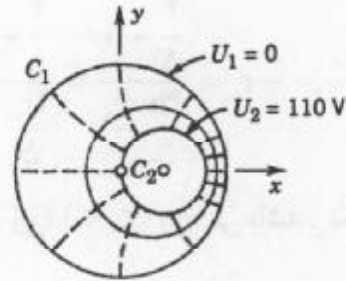
پتانسیل حقیقی عبارت است از

$$\Phi(x, y) = \operatorname{Re} F(z) = a \ln \left| \frac{2z-1}{z-2} \right| ; a = -158/7$$

داریم ثابت $\Phi(x, y)$ اگر فقط اگر ثابت $\left| \frac{2z-1}{z-2} \right| = \text{ثابت}$ ، یعنی، بنا بر (۵)، ثابت $|w|$. این دایره متناظر با دایره در صفحه z است، همانطوری که از قضیه ۱ بخش ۲.۱۶ نتیجه می شود. با این وجود معکوس یک تبدیل کسری خطی خود نیز یک تبدیل کسری خطی است [ر. ک. (۵) بخش ۲.۱۶]. به همین طریق وضعیت مشابهی برای شعاعهای ثابت $\arg w$ وجود دارد. از این رو خطوط هم پتانسیل ثابت $\Phi(x, y)$ دایره بوده، و خطوط نیرو و قوسهای مستدیر (خط چین در شکل ۳۷۷). اینها دو خانواده از منحنیهای متعامد متقاطع هستند، یعنی همانطوری که در شکل ۳۷۷ نشان داده شده است، آنها همدیگر را تحت زاویه قائمه قطع می کنند.



شکل (ب) صفحه w



شکل (الف) صفحه z

شکل ۳۷۷. مثال ۱

مثال ۲. پتانسیل بین دو صفحه نیم دایره ای

مطلوب است پتانسیل بین دو صفحه نیم دایره ای P_1 و P_2 واقع در شکل ۳۷۸ (الف) که به ترتیب در پتانسیلها 3000 و -3000 ولت قرار گرفته اند. از مثال ۳ بخش ۱.۱۷ و نگاشت همدیسی استفاده کنید.

حل. گام اول. با استفاده از تبدیل کسری خطی مثال ۳ بخش ۳.۱۶، قرص واحد واقع در شکل ۳۷۸ (الف) را بر روی نیمه راست صفحه w (شکل ۳۷۸ (ب)) می نگاریم:

$$w = f(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

کران $|z| = 1$ بر روی کران $u = 0$ (محور v)، همچنین نقاط $1, i, -1$ به ترتیب بر روی

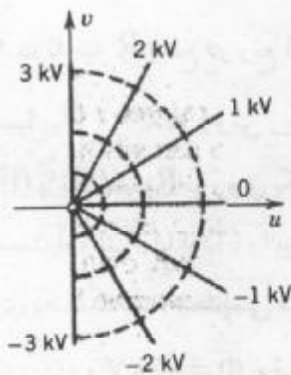
روی نیمه فوقانی، و نیمدایره تحتانی بر روی نیمه تحتانی محور v نگاشته می شوند، در نتیجه شرایط کرانه ای در صفحه w مطابق شکل ۳۷۸ (ب) می باشند.

گام دوم. پتانسیل $\Phi^*(u, v)$ را در نیم صفحه راست صفحه w مشخص می کنیم. در مثال ۳ بخش

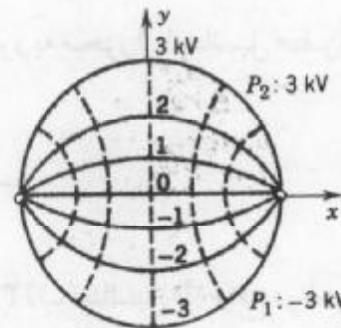
۱.۱۷ با $U_1 = -3000$ ، $U_2 = 3000$ ، $\alpha = \pi$ [$\Phi(x, y)$ به جای $\Phi^*(u, v)$]

$$\Phi^*(u, v) = \frac{6000}{\pi} \varphi ; \varphi = \arctan \frac{v}{u}$$

منجر می شود.



(ب) صفحه w



(الف) صفحه z

شکل ۳۷۸. مثال ۲

بر نیمه مثبت محور موهومی $(\varphi = \frac{\pi}{4})$ ، این مقدار برابر 3000 و بر نیمه منفی محور موهومی برابر

-3000 ، همانطوری که باید باشد، است. Φ^* قسمت حقیقی پتانسیل مختلط

$$F^*(w) = -\frac{6000i}{\pi} \text{Ln } w$$

می باشد.

گام سوم. با جایگزینی تابع نگاشت در F^* ، پتانسیل مختلط واقع در شکل ۳۷۸ (الف) به صورت زیر

درمی آید

$$\Phi(x, y) = \text{Re } F(z) = \frac{6000}{\pi} \text{Im } \text{Ln} \frac{1+z}{1-z} = \frac{6000}{\pi} \text{Arg} \frac{1+z}{1-z}$$

همانند مثال ۱ نتیجه می گیریم که خطوط هم پتانسیل ثابت $\Phi(x, y) = \text{Arg} w$ قوسهای مستدیر هستند زیرا آنها

با ثابت $\text{Arg} w = \text{Arg} \frac{1+z}{1-z}$ ، بنابراین با ثابت $\text{Arg} w$ متناظراند. همچنین، ثابت $\text{Arg} w$

= شعاعهایی از 0 تا ∞ که به ترتیب تصاویر $z = 1$ و $z = -1$ هستند، می باشند. از این رو تمام خطوط

هم پتانسیل شامل -1 و 1 (نقاطی که در آنها پتانسیل کرانه ای پرش دارند) همانند این نقاط انتهایی

(شکل ۳۷۸ الف)) هستند. خطوط نیرو نیز قوسهای مستدیر می باشند، و نظر به اینکه این خطوط نیرو باید بر خطوط هم پتانسیل متعامد باشند، مرکز شان را می توان از تقاطع خطوط مماس بر دایره واحد یا محور x به دست آورد. (توضیح دهید!)

مسائل بخش ۱۷. ۲

۱. درستی قضیه ۱ را به ازای $\Phi^*(u, v) = u^2 - v^2$ و $w = f(z) = e^z$ تحقیق کنید.
 ۲. همه فرمولهای اثبات دوم قضیه ۱ (مفروض در ضمیمه ۴) را بنویسید و مراحل اثبات را به تفصیل بیان کنید.

۳. پتانسیل Φ در ناحیه R واقع در ربع اول صف z محصور به محور (با پتانسیل صفر) و هذلولی $y = \frac{1}{x}$ (با پتانسیل U_1) را به دوروش زیر بیاید:
 (i) مستقیماً، (ii) با نگاشتن R بر روی یک نوار نامتناهی مناسب.
 ۴. مراحل به دست آوردن (۳) از (۲) را بیان کنید.

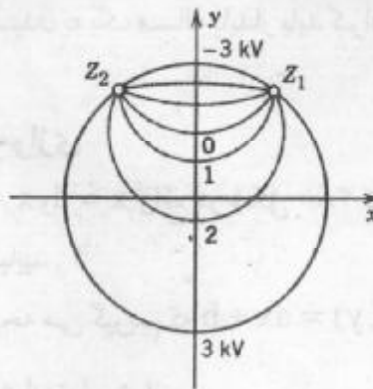
۵. با به کارگیری یک نگاشت همبسی مناسب، از شکل ۳۷۸ (ب) پتانسیل Φ واقع در ناحیه زاویه ای $-\frac{\pi}{4} < \text{Arg} z < \frac{\pi}{4}$ ، $\Phi = -3kV$ وقتی که $\text{Arg} z = -\frac{\pi}{4}$ و $\Phi = -3kV$ وقتی که $\text{Arg} z = \frac{\pi}{4}$ باشند را به دست آورید.

۶. در مثال ۲ نشان دهید که محور y بر روی دایره واحد واقع در صفحه w نگاشته می شود.
 ۷. در نقاط $z = \pm 1$ واقع در شکل ۳۷۸ الف) مماسها با خطوط هم پتانسیل نشان داده شده، زاویه $\frac{\pi}{6}$ می سازند. چرا؟

۸. با قرار دادن $z = Z^2$ ($Z = X + iY$) در مثال ۲، نشان دهید که پتانسیل حاصل از $\Phi(X, Y) = \text{Re} F(Z^2)$ پتانسیل در قسمتی از قرص واحد $|Z| \leq 1$ واقع بر ربع اول دارای مقادیر کرانه ای صفر بر محور ها و ۳ بر $|Z| = 1$ می باشد.

۹. تبدیل کسری خطی ای مانند $z = g(Z)$ را طوری بیاید که $|Z| \leq 1$ را بر روی $|z| \leq 1$ و $Z = \frac{i}{4}$ بر روی $z = 0$ ، بنگارد. نشان دهید که $Z_1 = \frac{3+4i}{5}$ بر روی $z = -1$ و $Z_2 = \frac{-3+4i}{5}$ بر روی $z = 1$ نگاشته می شوند، در نتیجه خطوط هم پتانسیل مربوط به مثال ۲، همانطوری که در شکل ۳۷۹ نشان داده شده است، در $|Z| \leq 1$ ظاهر می شوند.

۱۰. چرا خطوط هم پتانسیل مربوط به مساله ۹ دایره هستند؟



شکل ۳۷۹. مساله ۹

۱۷. ۳ مسائل گرما

معادله لاپلاس بر مسائل جریان گرمایی که پایدار هستند، یعنی مستقل از زمان می باشند، نیز حاکم است. در واقع، انتقال گرما در یک جسم ماده همگن با معادله گرما

$$T_t = c^2 \nabla^2 T$$

مدلسازی می شود که در آن تابع T برابر درجه گرما، $T_t = \frac{\partial T}{\partial t}$ ، t زمان، و c^2 یک ثابت مثبت (وابسته به جنس ماده) می باشند. در حالت پایدار داریم $T_t = 0$ و معادله به یک معادله لاپلاس دو بعدی به صورت زیر تبدیل می شود

$$\nabla^2 T = T_{xx} + T_{yy} = 0. \tag{۱}$$

بنابراین مساله گرما در حالت پایدار را می توان به روشهای پیشین بررسی نمود.

$T(x, y)$ ، موسوم به پتانسیل گرما، قسمت حقیقی پتانسیل گرمای مختلط

$$F(z) = T(x, y) + i\Psi(x, y)$$

است. منحنیهای ثابت $T(x, y)$ را خطوط هم دما (= خطوط گرما با درجه حرارت ثابت) و منحنیهای ثابت $\Psi(x, y)$ را خطوط جریان گرما می نامند، زیرا در امتداد آنها، جریان های گرما از دمای بالاتر به دمای پایین تر جریان دارد.

اکنون می یابیم که تمام مثالهای موردنظر در بخشهای ۱۷. ۱ و ۱۷. ۲ را می توان به عنوان مثالهایی از جریان گرما دوباره تفسیر نمود. خطوط هم پتانسیل الکترواستاتیک ثابت $\Phi(x, y)$ در اینجا خطوط هم دما ثابت $T(x, y)$ می باشند، و خطوط نیروی الکتریکی به خطوطی از جریان گرما تبدیل می شوند. از دیدگاه ریاضی، محاسبات به همان وضع سابق است. مسائل جدید شامل شرایط کرانه ای ممکن است در اینجا مطرح شود که دارای کاربرد فیزیکی در الکترواستاتیک نیستند یا از نقطه نظر عملی در آنجا مورد توجه نیستند. مثالهای ۳ و ۴ (به شرح زیر) این مطلب را روشن می سازد.

به طور فیزیکی برای رسیدن به یک مساله پایدار باید کران ناحیه جریان گرما با گرم کردن یا سرد شدن در دمای ثابت باشد.

مثال ۱. دمای بین صفحات موازی

دمای بین دو صفحه موازی $x = d$ و $x = 0$ واقع در شکل 380° که به ترتیب در دماهای صفر و 100° درجه سانتیگراد قرار گرفته اند را بیابید.

حل. با توجه به بخش ۱.۱۷ نتیجه می گیریم که $T(x, y) = ax + b$. از شرایط کرانه ای می یابیم که $b = 0$ و $a = \frac{100}{d}$ و جواب عبارت است از

$$T(x, y) = \frac{100}{d}x [^\circ\text{C}].$$

پتانسیل مختلط متناظر برابر $F(z) = \frac{100}{d}z$ است. جریانهای گرما به طور افقی، در جهت منفی محور x ، در امتداد خطوط ثابت y است.

مثال ۲. توزیع دما بین یک مفتول و یک استوانه.

میدان دما حول یک مفتول نازک و بلند به شعاع $r_1 = 1 \text{ mm}$ که با گرمای الکتریکی تا $T_1 = 500^\circ\text{F}$ گرم شده محصور بین یک استوانه مستدیر به شعاع $r_2 = 100 \text{ mm}$ ، که با خنک کردن با هوا درجه حرارت آن را $T_2 = 60^\circ\text{F}$ ثابت نگهداشته شده است را بیابید. شکل 381 را ملاحظه کنید.

حل. T به دلیل متقارن بودن، تنها به r وابسته است. از این رو، مطابق بخش ۱.۱۷ (مثال ۲) داریم

$$T(x, y) = a \ln r + b.$$

شرایط کرانه ای عبارت اند از

$$T_1 = 500 = a \ln 1 + b, T_2 = 60 = a \ln 100 + b.$$

از این رو $b = 500$ (زیرا $\ln 1 = 0$) و $a = \frac{60 - 500}{\ln 100}$. جواب عبارت است از

$$T(x, y) = 500 - 95/54 \ln r [^\circ\text{F}].$$

خطوط هم دما دوائر متحد المركز هستند. جریان گرما از مفتول به طور شعشی به خارج استوانه صورت می پذیرد.

مثال ۳. یک مساله مقدار کرانه ای آمیخته.

توزیع دما در ناحیه واقع در شکل 382 (مقطع یک استوانه صلب)، که قسمت قائم کرانه در 20° درجه سانتیگراد، قسمت افقی در 50° درجه سانتیگراد، قسمت مستدیر عایق پوش شده است را بیابید.

حل. نظر به اینکه با عایق پوش شدن، گرما از قسمت مقطع عبور نمی کند. از این رو گرما باید در امتداد جریان باشد، لذا خطوط جریان باید این منحنیها را تحت زاویه قائمه قطع کنند. نظر به اینکه در طول

یک خط جریان T ثابت است در امتداد قسمت عایق پوش شده کران داریم

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad (2)$$

که در آن $\frac{\partial T}{\partial n}$ مشتق قائم T ، یعنی مشتق سویی (بخش ۹.۸) T در جهت قائم بر کران عایق پوش شده (یعنی، جهت قائم بر این کران) است. هر مساله ای که T بر یک قسمت از کران و $\frac{\partial T}{\partial n}$ بر قسمت دیگر کران مشخص شده باشد را یک مساله مقدار کرانه ای آمیخته می نامند.

در حالت مورد نظر، جهت قائم به منحنی کران عایق پوش شده در جهت شعاعی به سمت مبدا

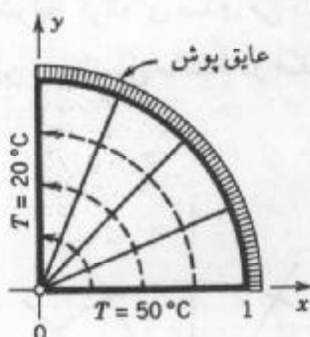
است. از این رو (۲) چنین می شود $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$ ، این بدان معنی است که در امتداد این منحنی جواب نباید وابسته به r باشد. اکنون $\text{Arg}z = \theta$ در (۱) صدق می کند همانطوری که این شرط برقرار است و مقدار آن بر قسمتهای مستقیم کران ثابت است $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$. از این رو جواب عبارت است از

$$T(x, y) = a\theta + b.$$

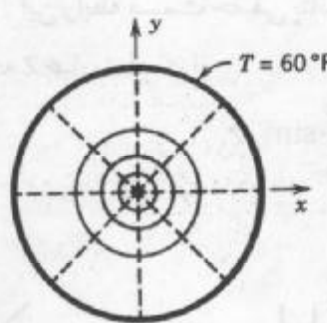
شرایط کرانه ای به $a\left(\frac{\pi}{4}\right) + b = 20$ و $a \cdot 0 + b = 50$ منجر می شوند. با توجه به این نتایج به دست می آوریم

$$T(x, y) = 50 - \frac{60}{\pi} \theta; \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}.$$

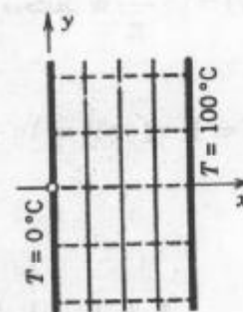
خطوط هم دما قسمتهایی از شعاعهای ثابت θ هستند. جریان گرما از محور x در امتداد دایره ثابت r (خط چین در شکل ۳۸۲) بر طرف محور y می باشد.



شکل ۳۸۲. مثال ۳



شکل ۳۸۱. مثال ۲



شکل ۳۸۰. مثال ۱

مثال ۴. مساله مقدار کرانه ای آمیخته دیگر در انتقال گرما

میدان دمای نیم صفحه فوقانی وقتی که محور x به ازای $x < -1$ در $T = 0^\circ\text{C}$ ، به ازای $-1 < x < 1$ عایق پوش شده، و به ازای $x > 1$ در $T = 2^\circ\text{C}$ قرار گرفته اند را بیابید (شکل ۳۸۳ الف).

حل. نیم صفحه واقع در شکل ۳۸۳ (الف) را بر روی نمودار قائم شکل ۳۸۳ (ب) می نگاریم، دمای $T^*(u, v)$ موجود را می یابیم، و این نگاهت مجدداً دمای $T(x, y)$ واقع در نیم صفحه را به دست می دهد.

انگیزه استفاده با توجه به شکل ۳۶۰ در بخش ۴.۱۶ با $z = x + iy$ و $w = u + iv$ جابجا می شود. با توجه به آن $Z = \sin w$ نوار مورد نظر را روی نیم صفحه شکل ۳۸۳ (الف) می نگارد. از این رو تابع معکوس

$$w = f(z) = \sin^{-1} z$$

نیم صفحه را بر روی نوار واقع در صفحه w می نگارد. این تابع نگاهتی است که بر طبق قضیه ۱ بخش ۱۷. ۲ به آن نیاز داریم.

پاره خط عایق پوش شده $-1 < x < 1$ از محور x بر روی پاره خط $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ از محور

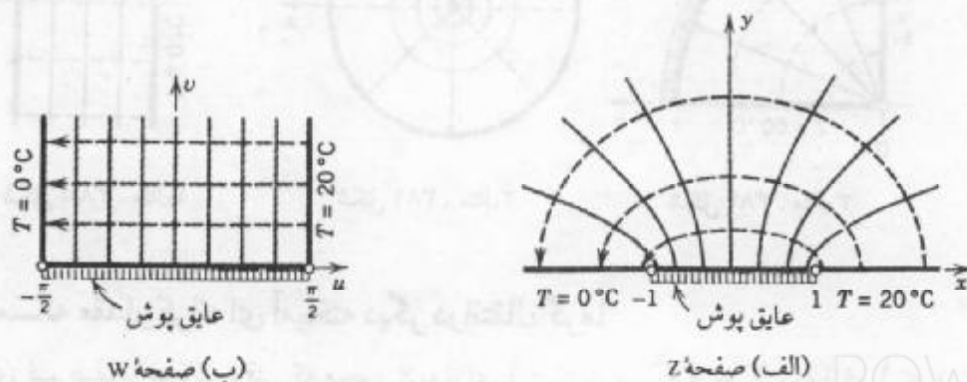
u نگاهته می شوند. مابقی از محور x بر روی دو قسمت کرانه های قائم u برابر با $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ ، $v > 0$ ، از نوار نگاهته می شوند. این موضوع شرایط کرانه ای تبدیل شده در شکل ۳۸۳ (ب) را بر حسب $T^*(u, v)$ به دست می دهد، که در آن روی کران افقی عایق پوش شده $\frac{\partial T^*}{\partial n} = \frac{\partial T^*}{\partial v} = 0$ زیرا v محور قائم است که بر پاره خط مورد نظر عمود است.

به همین طریق از مثال ۱ به دست می آوریم

$$T^*(u, v) = 10 + \frac{20}{\pi} u$$

که در همه شرایط کرانه ای صدق می کند. این رابطه قسمت حقیقی پتانسیل مختلط $F^*(w) = 10 + \frac{20}{\pi} w$ است. از این رو پتانسیل مختلط در صفحه Z عبارت است از

$$F(z) = F^*(f(z)) = 10 + \frac{20}{\pi} \sin^{-1} z,$$



شکل ۳۸۳. مثال ۴

و $T(x, y) = \operatorname{Re} F(z)$ جواب است. خطوط هم دما ثابت u در نوار و هذلولی در صفحه Z ، عمود بر این جریانهای گرما در امتداد بیضی های خط چین از 20° درجه قسمت به خنکترین یعنی صفر درجه قسمت کران، که یک دلیل فیزیک خوبی است، هستند.

مثالهای فوق فایده نگاشت همدیسی و پتانسیل مختلط را نشان می دهد. بحثی در این مورد در مطالعه جریان سیال ارائه خواهد شد.

مسائل بخش ۱۷. ۳

۱. دمای بین دو صفحه موازی $y = d$ و $y = 0$ که به ترتیب در دمای 0° و 100° درجه سانتیگراد قرار گرفته را به دو روش زیر بیابید.

(i). پرداختن به روش مستقیم. (ii). با استفاده از مثال ۱ و یک نگاشت مناسب.

۲. دما و پتانسیل در یک صفحه نامتناهی را که لبه های $y = x - 2$ و $y = x + 2$ به ترتیب در $10^\circ -$ درجه سانتیگراد و 20° درجه سانتیگراد قرار گرفته اند را بیابید.

۳. دمای واقع در شکل ۳۸۲ را در صورتی بیابید که بر محور y ، $T = -20^\circ C$ و بر محور x $T = 100^\circ C$ ، و بر قسمت مستدیر همانند قبل عایق پوش شده باشد.

۴. دمای T واقع در ناحیه زاویه ای $0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{3}$ ، $|z| \leq 1$ ، طوری بیابید که بر محور x دمای T برابر 20° درجه سانتیگراد و بر $y = \sqrt{3}x$ دمای T برابر 50° درجه سانتیگراد، و قسمت منحنی شکل کران عایق پوش شده باشد.

۵. مطلوب است دما و پتانسیل مختلط در ربع اول صفحه Z وقتی که محور y در 100° درجه سانتیگراد قرار گرفته، پاره خط $0 < x < 1$ از محور x عایق پوش شده، و قسمت $x > 1$ از محور x در 200° درجه سانتیگراد نگهداشته شده باشد. راهنمایی. از مثال ۴ استفاده کنید.

۶. مساله ۹ در انتهای بخش ۱۷. ۲ را به عنوان یک مساله جریان گرما (با دماهای کرانه ای، یعنی 20° درجه سانتیگراد و 300° درجه سانتیگراد) مورد بررسی قرار دهید. جریان گرما در امتداد چه منحنیهایی هستند؟

۷. دما در نیم صفحه فوقانی شکل ۳۸۴ صادق در شرایط کرانه ای مفروض را بیابید.

۸. پتانسیل مختلط مربوط به مساله ۷ را بیابید.

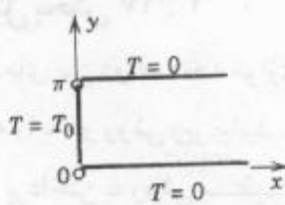
۹. دمای T واقع در نیم صفحه فوقانی با شرایط کرانه ای نشان داده شده در شکل ۳۸۵ را بیابید.

۱۰. پتانسیل مختلط مربوط به مساله ۹ را بیابید.

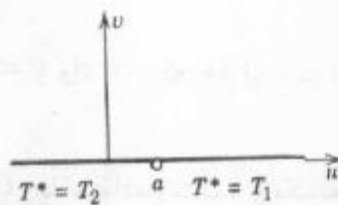
۱۱. نتیجه مساله ۹ را از مساله ۷ بنا بر قاعده انطباق به دست آورید.

۱۲. دما در ربع اول صفحه Z از مساله ۷ با توجه به نگاشت $w = a + Z^2$ چگونه به دست می آید، و شرایط کرانه ای تغییر یافته کدام هستند؟
 ۱۳. با استفاده از مساله ۹ و نگاشت $w = \cosh z$ (ر. ک. مثال ۴ بخش ۱۶. ۴)، نشان دهید که دما در نوار نامتناهی از شکل ۳۸۶ به صورت زیر است:

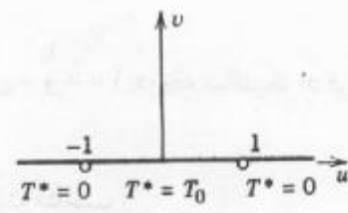
$$T(x, y) = \frac{T_0}{\pi} \operatorname{Arg} \frac{\cosh z - 1}{\cosh z + 1} = \frac{2T_0}{\pi} \operatorname{Arg} \left(\tanh \frac{z}{2} \right).$$



شکل ۳۸۶. مساله ۱۳



شکل ۳۸۵. مساله ۹



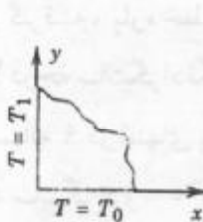
شکل ۳۸۴. مساله ۷

۱۴. با محاسبات مستقیم نشان دهید که

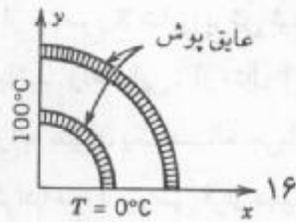
$$T(x, y) = \frac{2T_0}{\pi} \operatorname{Arg} \left(\tanh \frac{z}{2} \right), \quad \frac{\operatorname{Im} \tanh \frac{z}{2}}{\operatorname{Re} \tanh \frac{z}{2}} = \frac{\sin y}{\sinh x}$$

قوس $\tan = \left[\frac{\sin y}{\sinh x} \right]$ در مساله ۱۳ ارائه شده است.

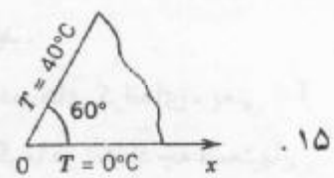
دمای $T(x, y)$ در ورقه نازک فلزی مفروضی که رویه های آن عایق پوش شده و لبه های آن در دماهایی قرار گرفته اند که در اشکال زیر نشان داده شده اند را بیابید.



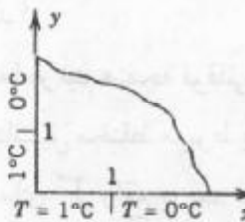
۱۷



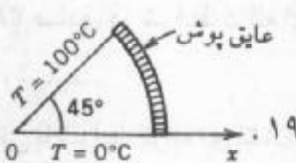
۱۶



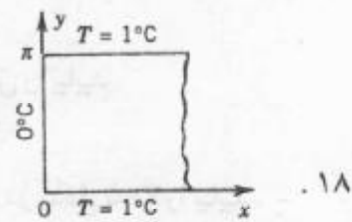
۱۵



۲۰



۱۹



۱۸

۴. ۱۷ جریان میال

معادله لاپلاس در هیدرودینامیک، در جریان میال غیر چسبنده پایدار تحت شرایط فیزیکی

بحث شده در این بخش نقش مهمی نیز دارد. برای حفظ این مطلب در آنالیز مختلط، مساله ما دو بعدی خواهد بود، در نتیجه با توجه به حرکت سیال، بردار سرعت مفروض V می تواند تنها به دو متغیر فضایی x و y وابسته باشد و حرکت سیال در تمام صفحات موازی با صفحه xy یکسان است. در این صورت برای استفاده از تابع برداری مختلط V که

$$V = V_x + iV_y \quad (1)$$

می توان اندازه و امتداد سرعت را در هر نقطه $z = x + iy$ به دست آورد. در اینجا V_x و V_y مولفه های سرعت در امتداد محورهای x و y هستند. V مماس بر مسیر حرکت ذرات سیال است. چنین مسیری به خط جریان موسوم می باشد (ر. ک. شکل ۳۸۷).

نشان می دهیم که تحت مفروضات مناسب (که به تفصیل در مثالهای زیر ارائه می شوند)، برای یک جریان مفروض یک تابع تحلیلی

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y), \quad (2)$$

وجود دارد، که این تابع به پتانسیل مختلط جریان مشهور می باشد، چنین خطوط جریانی با ثابت $\Psi(x, y) = \text{ثابت}$ مفروض می باشند، و سرعت جریان با رابطه زیر مفروض می باشد

$$V = V_x + iV_y = \overline{F'(z)} \quad (3)$$

که در آن بار بیانگر مزدوج مختلط است. تابع Ψ به تابع جریان موسوم می باشد. تابع Φ را پتانسیل سرعت^۴ می نامند. منحنیهای ثابت $\Phi(x, y) = \text{ثابت}$ به خطوط هم پتانسیل مشهور می باشند. V ، برابر گرادیان Φ است، این بدان معنی است که

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (4)$$

در واقع، بنا به (۴) بخش ۱۲، ۵، و استفاده از معادله دوم کوشی - ریمان، با انتخاب $f = F$ و $u = \Phi$ و $v = \Psi$ می یابیم

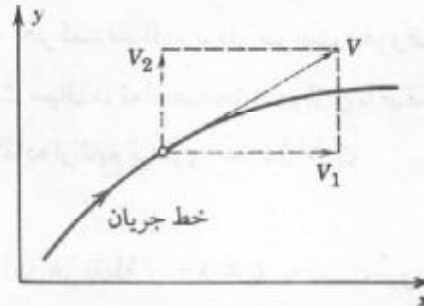
$$\overline{F'(z)} = \Phi_x - i\Psi_x = \Phi_x + i\Phi_y = V_x + iV_y = V.$$

علاوه بر آن، چون $F(z)$ تحلیلی است، لذا Φ و Ψ در معادله لاپلاس صدق می کنند:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0. \quad (5)$$

در حالیکه کرانه های داده شده در الکترواستاتیک (صفحات هادی) خطوط هم پتانسیل هستند، در جریان سیال در طول یک کران که سیال نمی تواند جریان پیدا کند باید یک خط جریان باشد.

۴- برخی مولفین (به جای Φ) از Φ - برای نشان دادن پتانسیل سرعت استفاده می کنند.



شکل ۳۸۷. سرعت

قبل از بحث شرایط برای برقراری مطالب شامل (۲) تا (۵) به بررسی دو جریان می پردازیم که در مسائل کاربردی مورد توجه هستند، به طوری که نخست مشاهده می کنیم که موضوع از نقطه نظر عملی چیست. مسائل بیشتر از جریان سیال در بخش مسائل آمده اند.

مثال ۱. جریان حول یک گوشه

پتانسیل مختلط

$$F(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

جریانی را توصیف می کند که خطوط هم پتانسیل آن هذلولیهای

$$\Phi = x^2 - y^2 = \text{ثابت}$$

وخطوط جریانش هذلولیهای

$$\Psi = 2xy = \text{ثابت}$$

هستند. از (۳) بردار سرعت به دست می آید

$$V = 2\bar{z} = 2(x - iy) \text{ یعنی } V_1 = 2x, V_2 = -2y.$$

تندی (اندازه سرعت) عبارت است از

$$|V| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

این جریان را می توان به جریان در کانالی که به محورهای مختصات مثبت ویک هذلولی، مثلاً، $xy = 1$ (شکل ۳۸۸) محصور شده تعبیر کرد. توجه کنید که در طول خط جریان S تندی در نقطه P که در آن مقطع کانال بزرگ است دارای مقدار می نیمم است.

مثال ۲. جریان در نزدیکی یک استوانه

پتانسیل مختلط زیر را در نظر بگیرید

$$F(z) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y) = z + \frac{1}{z}.$$

با استفاده از صورت قطبی $z = re^{i\theta}$ ، به دست می آوریم

$$F(z) = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta.$$

بنابراین خطوط جریان عبارت اند از

$$\Psi(x, y) = \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta = \text{ثابت}.$$

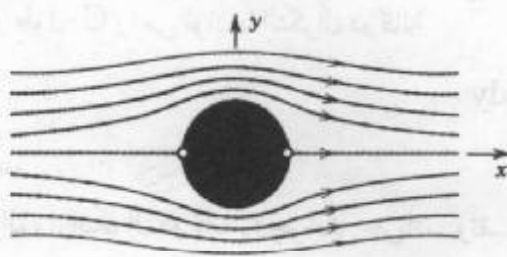
خصوصاً، $\Psi(x, y) = 0$ ، نتیجه می دهد که $r - \frac{1}{r} = 0$ یا $\sin\theta = 0$. بنابراین این خط جریان مرکب

از دایره واحد ($r = 1$) نتیجه می دهد که $r = 1$ و محور x ($\theta = 0$ و $\theta = \pi$) می باشد. به ازای

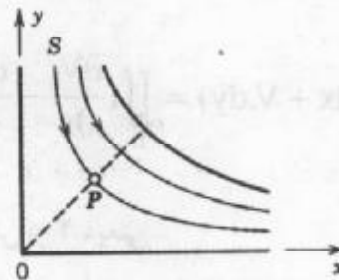
مقادیر بزرگ $|z|$ جمله $\frac{1}{z}$ در $F(z)$ با قدر مطلق کوچک است، در نتیجه برای این z ها جریان تقریباً یکنواخت و موازی با محور x است. بنابراین، این موضوع را می توان همانند یک جریان در حول یک استوانه مستدیر بلندی که شعاع آن برابر واحد است تعبیر کرد. جریان دارای دو نقطه ایستائی (یعنی نقاطی که سرعت V در آنها صفر است)، در $z = \pm 1$ است. این نقاط از

$$F'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}$$

و (۳) نتیجه می شوند. ر. ک. شکل ۳۸۹.



شکل ۳۸۹. جریان در اطراف یک استوانه (مثال ۲)



شکل ۳۸۸. جریان در اطراف یک گوشه (مثال ۱)

مفروضات و نظریه اساسی (۲) الی (۵)

هرگاه دامنه جریان همبند ساده و جریان غیر دورانی و تراکم ناپذیر باشد، آنگاه گزاره های مربوط به روابط (۲) الی (۵) برقرارند. بخصوص جریان دارای یک پتانسیل مختلط $F(z)$ است، که تابعی تحلیلی می باشد. (توضیحات مربوطه در زیر آمده اند)

اثبات این موضوع، در راستای بحث بازگو شده مفاهیم اساسی از جریان سیال انجام می شود. منحنی هموار دلخواه C از صفحه Z ، که با $z(s) = x(s) + iy(s)$ نمایش داده می شود را در نظر می گیریم، که در آن s طول قوس C است. فرض کنیم متغیر حقیقی V_1 مولفه سرعت V

مماس بر C باشد (شکل ۳۹۰). آنگاه مقدار انتگرال روی خط حقیقی

$$\int_C V_t ds \tag{۶}$$

که در طول C و در جهت افزایش مقادیر s محاسبه می شود، به گردش سیال در طول C موسوم می باشد. از تقسیم گردش بر طول C سرعت میانگین^۵ جریان در طول منحنی C به دست می آید. حال (شکل ۳۹۰)

$$V_t = |V| \cos \alpha.$$

بنابراین V_t برابر حاصل ضرب عددی (بخش ۲.۸) V و بردار مماس $\frac{dz}{ds}$ از C است (بخش ۱.۱۶)؛ از این رو از (۶) داریم

$$V_t ds = (V_t \frac{dx}{ds} + V_r \frac{dy}{ds}) ds = V_t dx + V_r dy.$$

هم اکنون گردش (۶) در طول C عبارت است از

$$\int_C V_t ds = \int_C (V_t dx + V_r dy). \tag{۷}$$

به عنوان ایده بعدی، فرض کنید C یک منحنی بسته باشد، در واقع فرض کنید C منحنی کران یک دامنه همبند ساده D باشد، و همچنین فرض کنید که V در دامنه ای که شامل D و C است دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد. در این صورت با استفاده از قضیه گرین (بخش ۴.۹) نتیجه می گیریم که گردش در طول C را می توان با انتگرال دوگانه

$$\oint_C (V_t dx + V_r dy) = \iint_D \left(\frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{\partial V_t}{\partial y} \right) dx dy \tag{۸}$$

نمایش داد.

تابع انتگرالده از انتگرال دوگانه را چرخش جریان، و تقسیم چرخش بر 2 ، یعنی

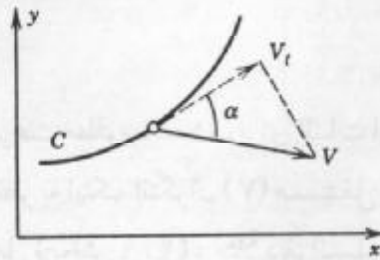
$$\omega(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{\partial V_t}{\partial y} \right) \tag{۹}$$

۵- تعاریف:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \text{مقدار میانگین } f \text{ بر فاصله } a \leq x \leq b$$

$$\frac{1}{L} \int_C f(s) ds = \text{مقدار میانگین } f \text{ روی } C \text{ (طول } L = C)$$

$$\frac{1}{A} \iint_D f(x, y) dx dy = \text{مقدار میانگین } f \text{ روی } D \text{ (مساحت } A = D)$$



شکل ۳۹۰. مؤلفه مماسی سرعت نسبت به منحنی C

را دوران می نامند. فرض کنیم جریان غیر دورانی باشد، یعنی جریانهایی که $\omega(x, y)$ ی آنها سرتاسر جریان صفر باشد، در این حالت

$$\frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{\partial V_t}{\partial y} = 0. \quad (10)$$

برای تفهیم معنای فیزیکی چرخش و دوران، در C در (A) یک دایره ای به شعاع r می گیریم، آنگاه حاصل تقسیم گردش بر طول $2\pi r$ از منحنی C سرعت متوسط سیال در طول C می باشد. از این رو از تقسیم سرعت میانگین بر r سرعت زاویه ای متوسط ω_0 سیال نسبت به محور دایره به دست می آید:

$$\omega_0 = \frac{1}{2\pi r^2} \iint_D \left(\frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{\partial V_t}{\partial y} \right) dx dy = \frac{1}{\pi r^2} \iint_D \omega(x, y) dx dy .$$

هرگاه فرض کنیم $r \rightarrow 0$ ، آنگاه حد ω_0 برابر مقدار ω در مرکز C است. بنابراین، $\omega(x, y)$ برابر سرعت زاویه ای حادی یک جزء دایره ای سیال است وقتی که دایره منقبض شده به نقطه (x, y) بدل می شود. به بیان عامیانه، اگر یک جزء کروی از سیال ناگهان منجمد شود و همزمان سیالی که آن را احاطه کرده از بین برود، در این صورت جزء کروی با سرعت زاویه ω دوران خواهد کرد.

فرض دوم آنکه سیال تراکم ناپذیر است. (آب و نفت مثالهایی از این نوع هستند، و حال آنکه هوا تراکم پذیر است.) آنگاه

$$\frac{\partial V_t}{\partial x} + \frac{\partial V_r}{\partial y} = 0 \quad [10.8 \text{ ر.ك. (7), بخش 10.8}]$$

در هر ناحیه ای آزاد از چشمه یا چاهک، یعنی نقاطی که از آن نقاط سیال وارد یا خارج می شود، است [عبارت (11) به دیورژانس V مشهور می باشد که با نماد $\text{div } V$ نمایش می دهیم].

چنانچه دامنه D از سیال همبند ساده بوده و جریان غیر دورانی باشد، آنگاه انتگرال روی خط (7) بنا به قضیه 3 بخش 2.9 که در آن $F_r = 0$ ، $F_r = V_r$ ، $F_t = V_t$ ، و Z مختص سوم فضا باشد و شامل هیچ نمایش Z قبلی نباشد] در D مستقل از مسیراست. بنابراین هرگاه از نقطه ثابت (a, b) واقع در D بر نقطه متغیر (x, y) از D انتگرال بگیریم، انتگرال تابعی مانند $\Phi(x, y)$ از نقطه (x, y) خواهد

شد:

$$\Phi(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} (V_x dx + V_y dy). \tag{۱۲}$$

ادعا می کنیم که Φ پتانسیل سرعت مطلوب است. برای اثبات این ادعا، تمام گار نشان دادن این است که (۴) برقرار است. حال نظر به اینکه انتگرال (۷) مستقل از مسیر می باشد، در این صورت $V_x dx + V_y dy$ دیفرانسیل کامل (بخش ۲.۹)، مثلاً دیفرانسیل Φ ، یعنی دیفرانسیل

$$V_x dx + V_y dy = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy$$

است. باتوجه به آن می یابیم که $V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ و $V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ ، که (۴) را نتیجه می دهد.

با جایگزینی (۴) در (۱۱) نتیجه می گیریم که Φ همساز است، که اولین معادله لاپلاس مربوط به رابطه (۵) به دست می آید.

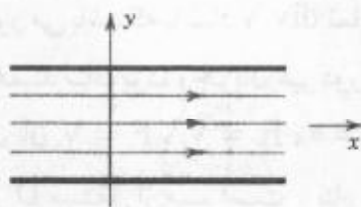
سرانجام مزدوج همساز Ψ از Φ را اختیار می کنیم. در این صورت معادله دوم رابطه (۵) برقرار است. همچنین فرض کنیم که Φ و Ψ هم دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشند، آنگاه تابع مختلط

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

در D تحلیلی است. نظر به اینکه منحنیهای ثابت $\Psi(x, y) = \text{ثابت}$ به منحنیهای هم پتانسیل ثابت $\Phi(x, y) = \text{ثابت}$ (جز در نقاطی که در آنها $F'(z) = 0$) عمود است، نتیجه می گیریم که منحنیهای ثابت $\Psi(x, y) = \text{ثابت}$ خطوط جریان هستند. بنابراین Ψ تابع جریان و $F(z)$ پتانسیل مختلط جریان هستند.

مسائل بخش ۴.۱۷

۱. (جریان موازی) نشان دهید که $F(z) = Kz$ (عدد حقیقی مثبت) بیانگر جریانی یکنواخت به طرف راست است، که می تواند به جریان یکنواختی بین دو خط موازی (بین دو صفحه موازی در فضای سه بعدی) تعبیر شود، به شکل ۳۹۱ مراجعه کنید. بردار سرعت، خطوط جریان و خطوط هم پتانسیل را بیابید.



شکل ۳۹۱. جریان موازی در مثال ۱

۲. نشان دهید که $F(z) = iz^2$ بیانگر جریانی حول یک گوشه است. خطوط جریان و خطوط هم پتانسیل را پیدا کرده و آنها را رسم کنید. بردار سرعت V را بیابید.

۳. جریان در مثال ۱ را به کمک مساله ۱ از طریق نگاشت همدیسی از ربع اول بر روی نیم صفحه فوقانی به دست آورید.

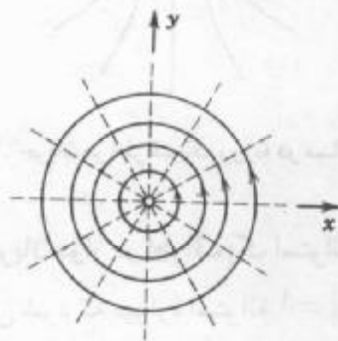
۴. یک تغییر جزئی از $F(z)$ در مثال ۲ طوری ایجاد کنید که یک جریان حول یک استوانه به شعاع r_0 به دست آید، که به جریان واقع بر مساله ۱، وقتی که $r_0 \rightarrow 1$ منجر شود.

جریان متناظر با پتانسیل مختلط مفروض $F(z)$ را در نظر بگیرید. برخی از خطوط جریان و خطوط هم پتانسیل را با رسم نشان دهید. بردار سرعت V را بیابید. همه نقاطی را که در آنها V موازی با محور x است تعیین کنید.

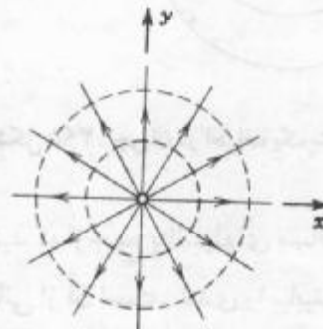
$$iz \cdot 5 \quad (1-2i)z \cdot 6 \quad (1+i)z \cdot 7 \quad z^2 + 2z \cdot 8 \quad z^2 \cdot 9 \quad iz^2 \cdot 10$$

۱۱. (چشمه و چاهک) پتانسیل مختلط $F(z) = \left(\frac{c}{2\pi}\right) \ln z$ را که در آن c عدد حقیقی مثبتی است

در نظر بگیرید. نشان دهید که $V = \left(\frac{c}{2\pi r}\right)(x + iy)$ ، که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ است، و از این رابطه چنین بر می آید که جریان شعاعی و جهت آن به طرف خارج است (ر.ک. شکل ۳۹۲)، در نتیجه این پتانسیل با یک چشمه نقطه ای در $z = 0$ (یعنی با یک خط چشمه $y = 0, x = 0$ در فضا) متناظر است. (ثابت c قدرت یا تخلیه چشمه نامیده می شود. اگر c حقیقی منفی باشد، گویند جریان در $z = 0$ دارای یک چاهک است، این جریان شعاعی و جهت آن به طرف داخل می باشد، و سیال در نقطه منفرد $z = 0$ پتانسیل مختلط ناپدید می شود.)



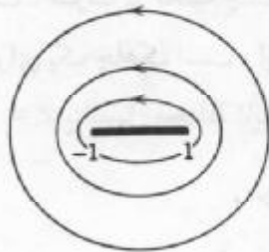
شکل ۳۹۲. جریان گردابی در مساله ۱۲



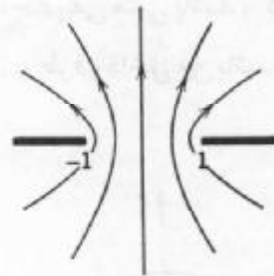
شکل ۳۹۳. نقطه چشمه در مساله ۱۱

۱۲. (خط گردابی) نشان دهید که $F(z) = \frac{iK}{2\pi} \ln z$ ، که در آن K عدد حقیقی مثبتی است، بیانگر جریانی است که در حول مبدا در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت دور می زند؛ شکل ۳۹۳ را ملاحظه کنید (نقطه $z = 0$ را نقطه گردابی می نامند؛ به ازای هر بار گردش به دور نقطه گردابی پتانسیل

- به اندازه K افزایش می یابد).
۱۳. پتانسیل مختلط جریانی که در $z = -a$ یک چشمه نقطه ای به قدرت ۱ دارد را بیابید.
۱۴. مطلوب است پتانسیل مختلط جریانی که در $z = a$ یک چاهک نقطه ای به قدرت ۱ دارد.
۱۵. نشان دهید که جمع برداری بردارهای سرعت دو جریان منجر به جریانی می شود که پتانسیل مختلط آن از جمع پتانسیل مختلط مربوط به دو جریان حاصل می شود.
۱۶. پتانسیلهای مذکور در مسائل ۱۳ و ۱۴ را جمع و خطوط جریان پتانسیل حاصل را رسم کنید.
۱۷. مطلوب است خطوط جریان متناظر با جریا: $F(z) = \frac{1}{z}$. نشان دهید که به ازای مقادیر کوچک $|a|$ خطوط جریان مساله ۱۶ شبیه جریان این مساله به نظر می آید.
۱۸. نشان دهید که $F(z) = \cosh^{-1} z$ با جریانی که خطوط جریان آن هذلولیهای هم کانون با کانونهای $z = \pm 1$ هستند متناظر است، و جریان را می توان به جریانی تعبیر کرد که از یک روزنه می گذرد. به شکل ۳۹۴ مراجعه کنید.
۱۹. نشان دهید $F(z) = \cos^{-1} z$ را که می توان به پتانسیل مختلط جریانی که یک استوانه بیضوی یا یک بشقاب (خط راستی که از $z = -1$ تا $z = 1$ کشیده شده است) را دور می زند تعبیر کرد. نشان دهید که خطوط جریان بیضیهای هم کانونی هستند که کانونهای آنها در $z = \pm 1$ است. شکل ۳۹۵ را ملاحظه کنید.



شکل ۳۹۵. جریان در اطراف یک بشقاب در مساله ۱۹

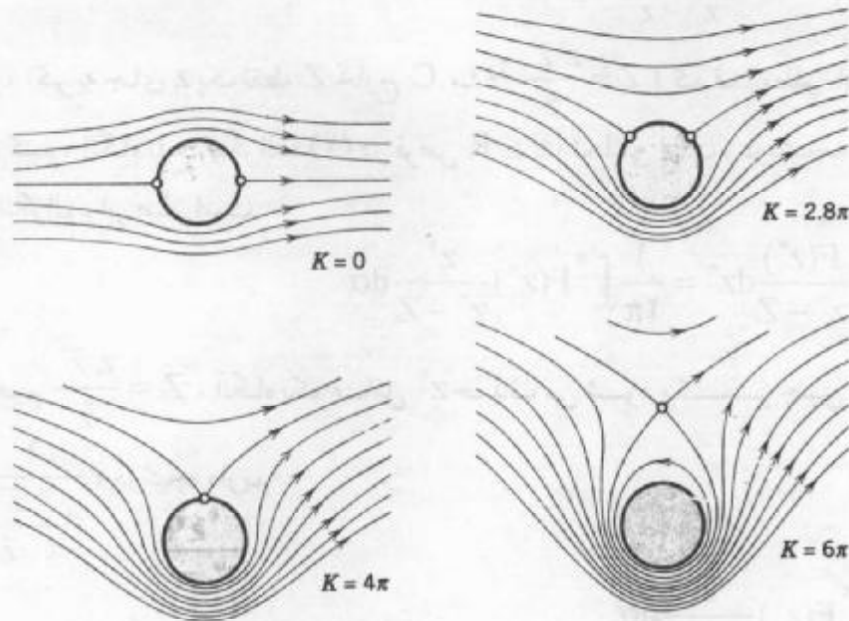


شکل ۳۹۴. جریان در اطراف یک روزنه در مساله ۱۸

۲۰. (جریان دوار در اطراف یک استوانه) نشان دهید که از جمع پتانسیلهای مساله ۱۲ و مثال ۲ جریانی حاصل می شود که دیواره استوانه $|z| = 1$ خط جریانی از آن است. تندی را بیابید و نشان دهید که نقاط ایستائی عبارت اند از

$$z = \frac{iK}{4\pi} \pm \sqrt{\frac{-K^2}{16\pi^2} + 1};$$

اگر K برابر صفر باشد، این نقاط عبارت اند از ± 1 ، با افزایش K این نقاط روی دایره واحد حرکت می کنند تا آنکه در $z = i$ برسند ($K = 4\pi$ ، به شکل ۳۹۶ مراجعه کنید)، و اگر K



شکل ۳۹۶. جریان در اطراف یک استوانه بدون گردش ($K = 0$) و با گردش (مساله ۲۰)

بزرگتر از 2π باشد نقاط ایستائی روی محور موهمومی قرار می گیرند. (یکی از نقاط در میدان جریان قرار می گیرد و نقطه دیگر که درون استوانه واقع می شود فاقد معنی فیزیکی است.

۱۷. ۵ فرمول انتگرال پواسن

تاکنون در این فصل مشاهده کردیم که آنالیز مختلط روشی کارآمد برای تشریح و حل مسائل پتانسیل دو بعدی بر اساس نگاشت همدیسی و پتانسیلهای مختلط ارائه می دهد. یک روش دیگر، از انتگرال گیری مختلط نتیجه می شود. از فرمول انتگرال کوشی به فرمول انتگرال پواسن برای حل مساله دیریکله (ر. ک. بخش ۱۷. ۲) برای یک قرص (همان طور که جوابها در دامنه ها، همانطوری که دیدیم، با نگاشت همدیسی به دست می آید) می رسمیم.

برای به دست آوردن این فرمول موضوع را از فرمول انتگرال کوشی

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z^*)}{z^* - z} dz^* \quad (1)$$

آغاز می کنیم. که در آن انتگرال گیری در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت روی دایره $C: z^* = Re^{i\alpha} (0 \leq \alpha \leq 2\pi)$ انجام می گیرد و فرض می کنیم که $F(z^*)$ در یک دامنه ای که C درون آن قرار دارد تحلیلی باشد.

نظر به اینکه $dz^* = iRe^{i\alpha} d\alpha = iz^* d\alpha$ ، از (۱) به دست می آوریم

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z^*) \frac{z^*}{z^* - z} d\alpha \quad (z^* = Re^{i\alpha}, z = re^{i\theta}). \quad (2)$$

از طرف دیگر، اگر به جای z یک نقطه Z خارج C ، مثلاً $Z = \frac{z^* \bar{z}^*}{\bar{z}}$ (که قدرمطلق آن $R > \frac{R^r}{r}$ است) اختیار کنیم، آنگاه تابع انتگرالده (۱) در قرص $|z| \leq R$ تحلیلی است، در نتیجه بنا به قضیه کوشی مقدار انتگرال برابر صفر است:

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(z^*)}{z^* - Z} dz^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z^*) \frac{z^*}{z^* - Z} d\alpha.$$

اگر قرار دهیم $Z = \frac{z^* \bar{z}^*}{\bar{z}}$ ، آنگاه یک عامل z^* حذف می شود و کسر چنین می شود:

$$\frac{1}{(1 - \frac{\bar{z}^*}{\bar{z}})} = \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}^*}$$

در نتیجه داریم

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z^*) \frac{\bar{z}}{z - \bar{z}^*} d\alpha.$$

با کم کردن این رابطه از (۲) و استفاده از

$$\frac{z^*}{z^* - z} - \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}^*} = \frac{z^* \bar{z}^* - z \bar{z}}{(z^* - z)(\bar{z}^* - \bar{z})} \quad (3)$$

می یابیم

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z^*) \frac{z^* \bar{z}^* - z \bar{z}}{(z^* - z)(\bar{z}^* - \bar{z})} d\alpha. \quad (4)$$

باتوجه به نمایش قطبی z و z^* مشاهده می کنیم که نسبت موجود در انتگرال برابر است با

$$\frac{R^r - r^r}{(Re^{i\alpha} - re^{i\theta})(Re^{-i\alpha} - re^{-i\theta})} = \frac{R^r - r^r}{R^r - 2Rr \cos(\theta - \alpha) + r^r}.$$

در نتیجه، با نوشتن

$$F(z) = \Phi(r, \theta) + i\Psi(r, \theta)$$

و با مساوی قرار دادن قسمت‌های حقیقی دو طرف فرمول (۴) فرمول انتگرال پواسن^۶

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(R, \alpha) \frac{R^r - r^r}{R^r - 2Rr \cos(\theta - \alpha) + r^r} d\alpha. \quad (5)$$

رابطه دست می آوریم، که نمایش تابع همساز Φ در قرص $|z| \leq R$ بر حسب مقادیر $\Phi(R, \alpha)$ بر روی کران دایره $|z| = R$ است.

۶- سیمئون دونی پواسن SIMEON DENIS POISSON (۱۷۸۱-۱۸۴۰)، ریاضیدان و فیزیکدان فرانسوی، پروفیسوری در پاریس از سال ۱۸۰۹. کارهای او در زمینه های نظریه پتانسیل، معادلات دیفرانسیل جزئی (معادله پواسن، بخش ۱.۱۱)، و احتمال می باشد.

اگر تابع کرانه ای $\Phi(R, \alpha)$ فقط بطور تکه ای پیوسته باشد، باز فرمول (۵) معتبر است. همانطوری که اغلب در موارد کاربردی اتفاق می افتد؛ (ر. ک. به عنوان مثال به شکل ۳۹۹). در این صورت فرمول (۵) تابعی مانند $\Phi(r, \theta)$ را تعریف می کند که در قرص باز $|z| < R$ همساز، و بردایره $|z| = R$ ، جز در نقاطی که تابع کرانه ای در آنها ناپیوسته است، تابع مذکور برابر تابع کرانه ای مفروض است. اثبات این موضوع را می توان در مرجع [D۱] یافت.

نمایش به صورت سری پتانسیل در یک قرص

از (۵) می توان بسط سری مهمی از Φ بر حسب توابع همساز ساده را به دست آورد. یادآوری می کنیم که نسبت موجود در تابع انتگرالده (۵) از (۳) حاصل شده است. ادعا می کنیم که طرف راست رابطه (۳) برابر قسمت حقیقی

$$\frac{z^* + z}{z^* - z} = \frac{(z^* + z)(\bar{z}^* - \bar{z})}{(z^* - z)(\bar{z}^* - \bar{z})} = \frac{z^*\bar{z}^* - z\bar{z} - z^*\bar{z} + z\bar{z}^*}{|z^* - z|^2}$$

است. در واقع، مخرج حقیقی بوده و صورت برابر $z^*\bar{z}^* - z\bar{z}$ است، گرچه در $(z^*\bar{z} + z\bar{z}^*) = 2i \operatorname{Im}(z\bar{z}^*)$ صورت موهومی محض است. این مطلب درستی ادعای ما را تایید می کند. حال با استفاده از سری هندسی به دست می آوریم

$$\frac{z^* + z}{z^* - z} = \frac{1 + \left(\frac{z}{z^*}\right)}{1 - \left(\frac{z}{z^*}\right)} = \left(1 + \frac{z}{z^*}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z^*}\right)^n = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z^*}\right)^n \quad (6)$$

نظر به اینکه $z = re^{i\theta}$ و $z^* = Re^{i\alpha}$ داریم

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z^*}\right)^n = \operatorname{Re}\left(\frac{r^n}{R^n} e^{in\theta - in\alpha}\right) = \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos(n\theta - n\alpha).$$

از طرفی دیگر، $\cos(n\theta - n\alpha) = \cos n\theta \cos n\alpha + \sin n\theta \sin n\alpha$ ، در نتیجه از (۶) به دست می آوریم

$$\operatorname{Re} \frac{z^* + z}{z^* - z} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (\cos n\theta \cos n\alpha + \sin n\theta \sin n\alpha).$$

این عبارت، همانطوری که قبلاً متذکر شدیم، برابر نسبت موجود در (۵) است، و با قراردادن این سری در (۵) وانتگرالگیری جمله به جمله می یابیم

$$\Phi(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (7)$$

که در آن ضرایب عبارت اند از ضرایب فوریه $\Phi(R, \alpha)$ (ر. ک. بخش ۱۰.۲)؛

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(R, \alpha) d\alpha, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(R, \alpha) \cos n\alpha d\alpha, \quad (۸)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(R, \alpha) \sin n\alpha d\alpha; n = 1, 2, \dots$$

اکنون به ازای $r = R$ سری (۷) به سری فوریه $\Phi(R, \alpha)$ تبدیل می شود، بنابراین نمایش (۷) وقتی که بتوان $\Phi(R, \alpha)$ را با سری فوریه نمایش داد معتبر است.

مثال ۱. مساله دیریکله در مورد قرص واحد

مطلوب است پتانسیل الکترواستاتیک $\Phi(r, \theta)$ در قرص واحد $r < 1$ با مقادیر کرانه ای (شکل ۳۹۷)

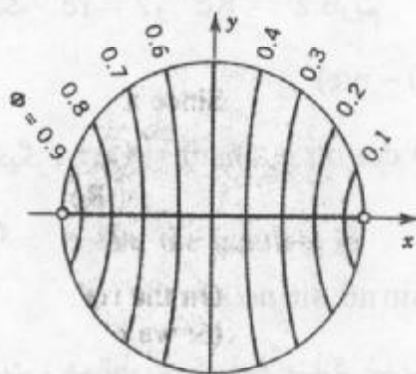
$$\Phi(1, \alpha) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{\pi} & ; \quad -\pi < \alpha < 0 \\ \frac{\alpha}{\pi} & ; \quad 0 < \alpha < \pi. \end{cases}$$

حل. نظر به اینکه $\Phi(1, \alpha)$ زوج است، $b_n = 0$ و از (۸) به دست می آوریم $a_n = \frac{1}{\pi} \left[-\int_{-\pi}^0 \frac{\alpha}{\pi} \cos n\alpha d\alpha + \int_0^{\pi} \frac{\alpha}{\pi} \cos n\alpha d\alpha \right] = \frac{2}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1)$.

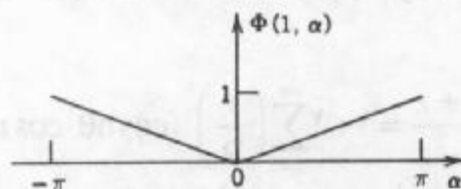
بنابراین، اگر n فرد باشد $a_n = \frac{-4}{n^2 \pi^2}$ ، و اگر $n = 2, 4, \dots$ ، $a_n = 0$ و پتانسیل عبارت است از

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left[r \cos \theta + \frac{r^2}{3} \cos 3\theta + \frac{r^4}{5} \cos 5\theta + \dots \right]$$

شکل ۳۹۸ قرص واحد و برخی خطوط هم پتانسیل (منحنیهای ثابت Φ) را نشان می دهد.



شکل ۳۹۸. پتانسیل در مثال ۱



شکل ۳۹۷. مقادیر کرانه ای در مثال ۱

مسائل بخش ۱۷. ۵

۱. صحت برقراری (۳) را بررسی کنید.

۲. نشان دهید که هر جمله (۷) در قرص $r^2 < R^2$ تابعی همساز است. با استفاده از (۷)، پتانسیل $\Phi(r, \theta)$ در داخل قرص واحد $r < 1$ را طوری بیابید که دارای مقادیر کرانه‌ای مفروض $\Phi(1, \theta)$ باشد. با استفاده از چند جمله اول سری، برخی مقادیر Φ را محاسبه کنید و نمودار خطوط هم پتانسیل را رسم کنید.

$$\Phi(1, \theta) = \sin \theta \quad ۳. \quad \Phi(1, \theta) = \sin 3\theta \quad ۴.$$

$$\Phi(1, \theta) = 2 - \cos \theta \quad ۵. \quad \Phi(1, \theta) = 1 + \cos 2\theta \quad ۶.$$

$$\Phi(1, \theta) = \frac{1}{2} \sin 5\theta \quad ۷. \quad \Phi(1, \theta) = \cos 2\theta - \cos 4\theta \quad ۸.$$

$$\Phi(1, \theta) = \sin^2 \theta \quad ۹. \quad \Phi(1, \theta) = \cos^2 \theta \quad ۱۰.$$

$$\Phi(1, \theta) = \theta; -\pi < \theta < \pi \quad ۱۱. \quad \Phi(1, \theta) = \theta; 0 < \theta < 2\pi \quad ۱۲.$$

$$\Phi(1, \theta) = \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{اگر} \quad \Phi(1, \theta) = \pi - \theta, \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \quad \text{و اگر} \quad ۱۳.$$

۱۴. هرگاه $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، $\Phi(1, \theta) = 1$ ، هرگاه $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ، $\Phi(1, \theta) = -1$ ، و در غیر آن صورت $\Phi(1, \theta) = 0$.

۱۵. با استفاده از (۱۸) بخش ۱۴. ۴ نشان دهید که نتیجه مساله ۱۴ را می توان چنین نوشت

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \operatorname{Ln} \frac{(1+iz)(1+z^2)}{(1-iz)(1-z^2)}$$

۱۶. نشان دهید که پتانسیل مساله ۱۱ را می توان چنین نوشت

$$\Phi(r, \theta) = 2 \operatorname{Im} \operatorname{Ln}(1+z)$$

۱۷. با استفاده از (۷) و (۸)، نشان دهید که پتانسیل $\Phi(r, \theta)$ در داخل قرص واحد $r < 1$ با مقادیر کرانه ای

$$\Phi(1, \theta) = \begin{cases} -1 & ; \quad -\pi < \theta < 0 \\ 1 & ; \quad 0 < \theta < \pi \end{cases}$$

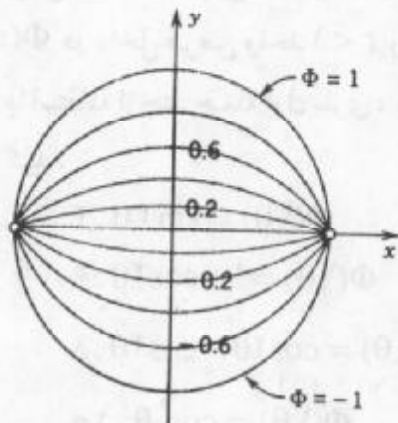
از سری زیر به دست می آید

$$\Phi(r, \theta) = \frac{4}{\pi} \left(r \sin \theta + \frac{r^3}{3} \sin 3\theta + \frac{r^5}{5} \sin 5\theta + \dots \right)$$

برخی از مقادیر Φ را با استفاده از چند جمله اول این سری به دست آورید و چند خط هم پتانسیل را رسم کنید. نتیجه را با شکل ۳۹۹ مقایسه کنید. نمودار خطوط نیرو (مسیرهای متعامد) را رسم کنید.

۱۸. با استفاده از (۱۸)، بخش ۱۴. ۴، نشان دهید که در مساله ۱۷

$$\Phi(r, \theta) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z} = \frac{2}{\pi} [\operatorname{Arg}(1+z) - \operatorname{Arg}(1-z)]$$



شکل ۳۹۹. پتانسیل در مثال ۱۷

۱۹. نشان دهید که

$$\Phi^*(w) = 1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \operatorname{Ln} \frac{w+1}{w-1} \quad (w = u + iv)$$

در نیم صفحه فوقانی $v > 0$ همساز است و مقدار آن به ازای $-1 < u < 1$ برابر -1 و روی بقیه قسمتهای محور u برابر $+1$ است.

۲۰. نشان دهید که تبدیل کسری خطی ای که $w_1 = -1$ ، $w_2 = 0$ ، $w_3 = 1$ را به ترتیب، بر $z_1 = -1$ ، $z_2 = -i$ ، $z_3 = 1$ می نگارد عبارت است از

$$z = \frac{w - i}{-iw + 1}$$

تبدیل معکوس $w = w(z)$ را یافته، و با قرار دادن آن در Φ^* ، مساله ۱۹، نشان دهید که تابع همساز حاصل همان است که در مساله ۱۸ دیدیم. این مطلب را با مثال ۲، بخش ۱۷. ۲ نیز مقایسه کنید.

۱۷. ۶. خواص عمومی توابع همساز

آنالیز مختلط نه تنها در حل مسائل پتانسیل دو بعدی مفید واقع می شود بلکه، همانطوری که در این بخش نشان می دهیم، برای به دست آوردن خواص عمومی توابع همساز از اهمیت زیادی برخوردار است.

اگر $\Phi(x, y)$ تابعی باشد که در یک دامنه همبند ساده D همساز باشد، آنگاه تابع Φ دارای تابع همساز مزدوجی مانند Ψ در D می باشد و تابع

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

در D تحلیلی است. (ر.ک. بخش ۵. ۱۲ و ر.ک. زیرنویس ۳، بخش ۱۷. ۲) ابتدا، چون توابع تحلیلی دارای مشتق از هر مرتبه هستند، نتیجه می گیریم که

قضیه ۱ (مشتقات جزئی)

تابع $\Phi(x, y)$ که در دامنه همبند ساده D همساز است در D از هر مرتبه دارای مشتقات جزئی است. به علاوه اگر $F(z)$ در دامنه همبند ساده D تحلیلی باشد، آنگاه بنا به فرمول انتگرال کوشی

(بخش ۱۳. ۵) داریم

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(z)}{z - z_0} dz \quad (1)$$

که در آن C یک مسیر بسته ساده D و z_0 نقطه ای در درون C است. هرگاه C را یک دایره به صورت زیر در D انتخاب می کنیم

$$z = z_0 + re^{i\alpha},$$

داریم $z - z_0 = re^{i\alpha}$ و $dz = ire^{i\alpha} d\alpha$ ، در نتیجه (۱) به صورت زیر در می آید

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z_0 + re^{i\alpha}) d\alpha. \quad (2)$$

طرف راست برابر مقدار متوسط F بر روی دایره است (= مقدار انتگرال تقسیم بر طول بازه انتگرالگیری). واثبات قضیه زیر کامل می شود.

قضیه ۲ (خاصیت مقدار متوسط توابع تحلیلی)

فرض کنید $F(z)$ در یک دامنه همبند ساده D تحلیلی باشد. آنگاه مقدار $F(z)$ در نقطه z_0 از D برابر است با مقدار متوسط $F(z)$ بر روی هر دایره ای که در D قرار دارد و مرکز آن z_0 است.

این قضیه و قضیه بعدی، مشخصه بارز خواص توابع تحلیلی است، در نتیجه برای به دست

آوردن خواص اساسی توابع همساز مورد استفاده قرار می گیرند.

قضیه ۳ (قضیه قدر مطلق ماکزیمم در مورد توابع تحلیلی)

فرض کنید D ناحیه ای کراندار^۷ باشد که $F(z)$ در درون D و بر کران D تحلیلی و غیر ثابت باشد. آنگاه $|F(z)|$ نمی تواند در یک نقطه درونی D ماکزیممی داشته باشد. در نتیجه، ماکزیمم $|F(z)|$ به ازای نقطه ای واقع بر کرانه D به دست می آید. هرگاه در D ، $F(z) \neq 0$ ، در این صورت این ادعا در مورد می نیمم بودن $|F(z)|$ نیز درست است.

اثبات. فرض کنید $|F(z)|$ در یک نقطه درونی z_0 از D دارای ماکزیمم باشد و نشان می دهیم که این فرض منجر به تناقض می شود. فرض کنید $|F(z_0)| = M$ مقدار ماکزیمم باشد. چون $F(z)$ ثابت نیست، $|F(z)|$ نیز مانند نتیجه ای از مثال ۴، بخش ۱۲. ۵، ثابت نیست. در نتیجه می توان دایره ای مانند C به شعاع r و مرکز z_0 یافت به طوری که درون C در D باشد و $|F(z)|$ در نقطه ای از C مانند P ،

از M کوچکتر باشد. چون $|F(z)|$ پیوسته است، روی قوسی مانند C_1 از C که شامل P است کوچکتر خواهد بود، مثلاً به ازای هر Z روی C_1 داریم (شکل ۴۰۰)

$$|F(z)| \leq M - k \quad (k > 0).$$

اگر طول C_1 برابر L_1 باشد، طول C_2 ، قوس مکمل C_1 برابر $2\pi r - L_1$ خواهد بود. با به کار بردن نامساوی ML (بخش ۱۳، ۲) در مورد (۱) و با توجه به آنکه $|z - z_0| = r$ می یابیم

$$M = |F(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_1} \frac{F(z)}{z - z_0} dz \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_2} \frac{F(z)}{z - z_0} dz \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{M - k}{r} \right) L_1 + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{M}{r} \right) (2\pi r - L_1) = M - \frac{kL_1}{2\pi r} < M,$$

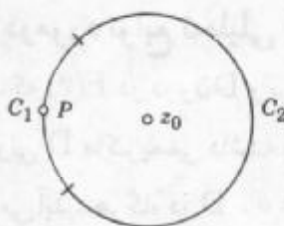
یعنی

$$M < M,$$

که غیرممکن است. بنابراین، فرض ما باطل است و گزاره اول قضیه به اثبات می رسد.

حال به اثبات گزاره دوم قضیه می پردازیم. اگر در D ، $F(z) \neq 0$ در این صورت $\frac{1}{F(z)}$ در

D تحلیلی است. از آنچه تاکنون ثابت شد می یابیم که ماکزیمم $\frac{1}{|F(z)|}$ بر کرانه D واقع است. اما این ماکزیمم با می نیمم $|F(z)|$ متناظر است. بدین طریق قضیه به اثبات می رسد.



شکل ۴۰۰. اثبات قضیه ۳

حال نتایج پایه ای قضایای ۲ و ۳ را می توان در مورد توابع همساز بیان نمود و به نتایج زیر

دست یافت.

قضیه ۴ (توابع هارمونیک)

فرض کنیم D یک دامنه کراندار همبند ساده و C مرز D باشد. در این صورت اگر $\Phi(x, y)$ در دامنه ای که شامل D و C است همساز باشد، دارای خواص زیر است:

I. مقدار $\Phi(x, y)$ در نقطه ای مانند (x_0, y_0) از دامنه D با مقدار میانگین $\Phi(x, y)$ روی هر دایره درون D که مرکز آن (x_0, y_0) باشد برابر است.

II مقدار $\Phi(x, y)$ در نقطه (x_0, y_0) از D با مقدار میانگین $\Phi(x, y)$ در هر قرص مستدیری که در D قرار گرفته و مرکز آن (x_0, y_0) است برابر است [ر.ک. زیرنویس ۵، بخش ۱۷. ۴].

III. (اصل ماکزیمم) اگر $\Phi(x, y)$ غیر ثابت باشد، ماکزیمم یا می نیمم در D ندارد، بلکه ماکزیمم یا می نیمم خود را بر روی کران D اختیار می کند.

IV. اگر $\Phi(x, y)$ بر C ثابت باشد، آنگاه $\Phi(x, y)$ ثابت است.

V. هرگاه $h(x, y)$ در D و بر C همساز باشد و اگر بر C ، $h(x, y) = \Phi(x, y)$ آنگاه در تمام نقاط D ، $h(x, y) = \Phi(x, y)$.

اثبات. گزاره I از مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی طرفین (۲) نتیجه می شود، یعنی

$$\Phi(x_0, y_0) = \operatorname{Re} F(x_0 + iy_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(x_0 + r \cos \alpha, y_0 + r \sin \alpha) d\alpha.$$

اگر طرفین رابطه را در r ضرب کنیم و نسبت به r از ۰ تا r_0 ، که در آن شعاع قرص مستدیری در D با مرکز (x_0, y_0) است، انتگرال بگیریم، آنگاه در طرف چپ می یابیم $\frac{1}{r} \int_0^{r_0} \Phi(x_0, y_0) r dr$ و بنابراین

$$\Phi(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \Phi(x_0 + r \cos \alpha, y_0 + r \sin \alpha) r d\alpha dr.$$

بدین طریق گزاره دوم به اثبات می رسد

گزاره III را ثابت می کنیم. فرض کنید $\Psi(x, y)$ یک تابع همساز مزدوج $\Phi(x, y)$ در D باشد، آنگاه $F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$ و

$$G(z) = e^{F(z)}$$

در D تحلیلی هستند. قدرمطلق $G(z)$ عبارت است از

$$|G(z)| = e^{\operatorname{Re} F(z)} = e^{\Phi(x, y)}.$$

از قضیه ۳ نتیجه می شود که $|G(z)|$ نمی تواند دارای ماکزیممی در یک نقطه درونی D باشد. نظر به اینکه e^Φ تابعی صعودی یکنوا از متغیر حقیقی Φ است. گزاره III درباره ماکزیمم Φ به اثبات می رسد. از این موضوع گزاره مربوط به می نیمم با جایگزین کردن Φ با $-\Phi$ نتیجه می شود.

هم اکنون به اثبات IV می پردازیم. باتوجه به III تابع $\Phi(x, y)$ ماکزیمم و می نیمم خود را بر C اختیار می کند. بنابراین، اگر $\Phi(x, y)$ روی C ثابت باشد، این می نیمم باید با مقدار ماکزیمم Φ برابر باشد، در نتیجه $\Phi(x, y)$ باید ثابت باشد.

سرانجام، هرگاه h و Φ در درون D و بر روی C همساز باشد، آنگاه $h - \Phi$ نیز در درون D و بر

روی C همساز است، و بنا به فرض در تمام نقاط C ، $h - \Phi = 0$. بنابراین، بنا به IV ، در تمام نقاط D داریم $h - \Phi = 0$ ، و گزاره V به اثبات می رسد. به این طریق اثبات قضیه ۴ کامل می شود.

گزاره آخر قضیه ۴ بسیار مهم است. بنا به این گزاره هر تابع همساز به کمک مقادیرش بر کرانه D به طور یکتا مشخص می شود. معمولاً، لازم است که $\Phi(x, y)$ در D همساز بر کرانه D پیوسته باشد.

تحت این شرایط، هنوز هم می توان اصل ماکزیمم (قضیه ۴، III) را به کار برد. مساله مشخص کردن $\Phi(x, y)$ وقتی که مقادیر کرانه ای $\Phi(x, y)$ مفروض باشند، همانطوری که می دانیم، مساله دیریکله در مورد معادله لاپلاس دو متغیره نامیده می شود. هم اکنون قضیه زیر را ارائه می کنیم.

قضیه ۵ (مساله دیریکله)

اگر به ازای یک ناحیه مفروض و مقادیر کرانه ای داده شده مساله دیریکله برای معادله لاپلاس دو متغیره دارای جواب باشد، آنگاه این جواب منحصر به فرد است.

این پایان فصل ۱۷ و قسمت D از آنالیز مختلط است. امیدواریم که متعلمین از آنالیز مختلط و چگونگی کاربرد این قسمت در حل برخی مسائل مهندسی و فیزیکی لذت برده باشند.

مسائل بخش ۱۷. ۶

۱. درستی قضیه ۲ را در مورد $F(z) = (z+2)^2$ ، $z_0 = 1$ ، و دایره ای به شعاع ۱ و به مرکز z_0 بررسی کنید.
 ۲. درستی قضیه ۲ را در مورد $F(z) = 5z^2$ ، $z_0 = 0$ ، و دایره ای به شعاع واحد نسبت به مبداء تحقیق کنید.
 ۳. از $F(z) = |z|$ روی یک دایره واحد انتگرال بگیرید. آیا نتیجه حاصل با قضیه ۲ تناقض دارد؟
 ۴. درستی قضیه ۳ را در مورد $F(z) = z^2$ و مستطیل $1 < x < 9$ ، $3 < y < 5$ تحقیق کنید.
 ۵. درستی قضیه ۳ را در مورد $F(z) = e^z$ و یک دامنه کراندار دلخواه تحقیق کنید.
- مطلوب است ماکزیمم $|F(z)|$ در درون قرص $|z| \leq 1$ و z متناظر، که در آن
۶. $F(z) = az + b$
 ۷. $F(z) = z^2 - 1$
 ۸. $F(z) = \cos z$
۹. تابع $F(z) = 1 + 3|z|^2$ در درون قرص $|z| \leq 2$ صفر نمی شود و در یک نقطه درونی این قرص دارای می نیمم است. آیا این مطلب با قضیه ۳ تناقض دارد؟
۱۰. تابع حقیقی $F(x) = \sin x$ در $x = \frac{\pi}{4}$ ماکزیمم است. با استفاده از قضیه ۳، نتیجه بگیرید که این تابع

۸- یعنی $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \Phi(x, y) = \Phi(x_0, y_0)$ ، که در آن (x_0, y_0) بر کرانه و (x, y) در D واقع اند.

- نمی تواند ماکزیممی از قدر مطلق تابع مختلط $F(z) = \sin z$ در دامنه ای شامل $z = \frac{\pi}{4}$ باشد.
۱۱. فرض کنید $F(z)$ در قرص بسته $|z| \leq 1$ تحلیلی (غیر ثابت) بوده و همچنین فرض کنید که روی دایره $|z| = 1$ ، ثابت $|F(z)| = c$ نشان دهید که در این صورت $F(z)$ باید یک صفر در این قرص داشته باشد.
۱۲. اگر $F(z)$ در دامنه همبند ساده D تحلیلی (غیر ثابت) باشد، و منحنی مفروض $|F(z)| = c$ (عدد ثابت دلخواه) در D واقع بوده و بسته باشد، آنگاه نشان دهید که در یک نقطه درونی از منحنی $F(z) = 0$ چند مثال ارائه دهید.
۱۳. درستی گزاره I از قضیه ۴ را در مورد $\Phi(x, y) = x^2 - y^2$ و دایره ای به شعاع ۱ و به مرکز $(x_0, y_0) = (1, 0)$ تحقیق کنید.
۱۴. درستی اصل ماکزیمم واقع در قضیه ۴ را در مورد $\Phi(x, y) = xy$ و قرص $x^2 + y^2 \leq 8$ تحقیق کنید. مقادیر ماکزیمم و می نیمم Φ واقع در قرص و نقاطی را که Φ این مقدار را اختیار می کند تعیین کنید.
۱۵. گزاره I از قضیه ۴ را با به کارگیری فرمول انتگرال کوشی اثبات کنید.

پرسشها و تمرینات دوره ای فصل ۱۷

۱. چرا توابع تحلیلی مختلط را می توان برای حل مسائل پتانسیل دوبعدی مورد استفاده قرار داد؟ جمله یک مساله «دوبعدی» به چه معنی است؟
۲. پتانسیل مختلط چیست؟ و چه مزیتی دارد؟
۳. مساله دیریکله به چه معنی است؟
۴. به چه علت نگاهت همدیسی در حل مساله دیریکله به کاررفته است؟
۵. مساله مقدار کرانه ای آمیخته چیست؟ و در کجای این فصل مطرح شده است؟
۶. خط جریان چیست؟
۷. اگر جریانی مربوط به روشهایی از آنالیز مختلط باشد، شرایط جریانی که باید برقرار باشند را تعیین کنید.
۸. توضیح دهید که چرا جریان گرما در حالت پایدار در مورد نظریه پتانسیل بازگو شده است.
۹. معنی پتانسیل انطباقی چیست؟
۱۰. برخی از خواص مشترک قابل توجه در مورد تمام توابع همساز را نام ببرید.
۱۱. پتانسیل بین استوانه های $|z| = 1$ با پتانسیل صفر و $|z| = 5$ با پتانسیل ۱۰۰ ولت را بیابید.
۱۲. پتانسیل مختلط مربوط به مساله ۱۱ را بیابید.
۱۳. پتانسیل بین استوانه های $|z| = 10$ و $|z| = 100$ ، که به ترتیب دارای پتانسیلهای ۱۰ کیلووات و صفر قرار گرفته اند را بیابید.

۱۴. خطوط هم پتانسیل $U = 0$ بین استوانه های $|z| = 0.25$ و $|z| = 4$ که در 220° -ولت و 220° -ولت قرار گرفته اند را بیابید.
۱۵. پتانسیل Φ در ربع اول از صفحه xy را طوری بیابید که محور x دارای پتانسیل 110° ولت و محور y با پتانسیل صفر باشند.
۱۶. پتانسیل بین صفحات $Argz = \frac{\pi}{6}$ که در 4 کیلو وات و $Argz = \frac{\pi}{3}$ که در 3 کیلو وات قرار گرفته اند را بیابید.
۱۷. اگر قسمت منفی محور x دارای پتانسیل 400° ولت و قسمت مثبت محور x دارای پتانسیل صفر باشند، آنگاه پتانسیل مختلط صفحه فوقانی چیست؟
۱۸. پتانسیل بر شعاع $x, y = x, x > 0$ ، و بر قسمت مثبت محور x را طوری بیابید که قسمت مثبت محور y در 1200° ولت و قسمت منفی محور y در صفر قرار گرفته باشد.
۱۹. پتانسیل بین صفحات $y = \frac{x}{4}$ که در 100° ولت، و $y = \frac{x}{4} + 4$ که در 420° ولت قرار گرفته اند را بیابید.
۲۰. در مساله ۱۸، فرمولی را برای پتانسیل بر خط $x = 1$ بیابید. پتانسیل در نقطه $x = 1, y = 2$ را پیدا کنید.
۲۱. خطوط هم دمای $F(z) = 10(1+i)z$ را بیابید و نشان دهید که $F(z)$ را می توان به عنوان پتانسیل مختلط جریان گرمای بین دو صفحه موازی تعبیر کرد.
۲۲. دما در نیم صفحه فوقانی را در صورتی بیابید که قسمت $x > 4$ از محور x در دمای 100° درجه سانتیگراد و قسمت های دیگر در دمای صفر قرار گرفته باشند.
۲۳. نشان دهید که خطوط هم دمای $F(z) = -iz^2 + 2z$ هذلولی هستند.
۲۴. اگر ناحیه بین دو استوانه متحد المركز به شعاع های 2 سانتیمتر و 10 سانتیمتر شامل آب باشد و خارج استوانه در دمای 20° درجه سانتیگراد قرار گرفته باشد، تا چه درجه حرارتی باید استوانه داخلی را گرم کنید تا در فاصله 5 سانتیمتری محور آن درجه حرارتی برابر 30° درجه سانتیگراد داشته باشیم.
۲۵. خطوط هم دمای $F(z) = k \ln(z-1-i)$ ، که در آن k عدد حقیقی است را بیابید و نشان دهید که این مقدار پتانسیل مختلط بین استوانه های هم محور با محور در $1+i$ می باشد.
۲۶. دما در قرص واحد $|z| \leq 1$ به صورت یک سری نامتناهی را طوری بیابید که نیم دایره سمت چپ $|z| = 1$ دارای دمای 100° درجه سانتیگراد و نیم دایره سمت راست در دمای صفر باشند.
۲۷. مساله ۲۶ را در حالتی پاسخ دهید که نیم دایره فوقانی در دمای 20° درجه سانتیگراد و تحتانی در دمای صفر باشند.

۲۸. پتانسیل مختلط مربوط به مساله ۲۷ را به صورت یک سری بیابید. حاصلجمع این سری چیست؟ راهنمایی. از مثال ۴، بخش ۱۴. ۴ استفاده کنید.

۲۹. مساله ۲۶ را در صورتی پاسخ دهید که بر روی دایره واحد

$$T(\lambda, \theta) = 3 \circ \theta^2 \quad (-\pi < \theta \leq \pi).$$

۳۰. خطوط هم پتانسیل $F(z) = \frac{1}{1-z}$ را یافته و آنها را رسم کنید.

مطلوب است خطوط جریان و سرعت جریان با پتانسیل مختلط

$$z^2 + z. 32 \quad -ikz \text{ (عدد حقیقی است)} \quad z + \frac{4}{z}. 33 \quad z^2 + \frac{1}{z^2}. 34$$

۳۵. نشان دهید که جریان مربوط به مساله ۳۴ دارای نقاط ایستایی در ± 1 و $\pm i$ هستند. آیا ارتباطی با مثال ۲ بخش ۱۷. ۴ می توان مشاهده کرد؟

خلاصه فصل ۱۷

کاربرد آنالیز مختلط در نظریه پتانسیل

نظریه پتانسیل، نظریه جوابهای معادله لاپلاس

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (1)$$

است. جوابهایی از معادله (۱) که مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته دارند را جوابهای همساز می نامند. معادله (۱) معادله با مشتقات جزئی مهمی در فیزیک می باشد، که در حالت دو و سه بعدی بسیار جالب می باشد. این معادله در الکترواستاتیک (بخش ۱۷. ۱)، مساله گرما در حالت پایدار (بخش ۱۷. ۳)، جریان سیال (۱۷. ۴)، جاذبه زمین، و غیره ظاهر می شود. گرچه در حالت سه بعدی نیاز به روشهای دیگر داریم (ر. ک. فصل ۱۱)، نظریه پتانسیلی دو بعدی را می توان به کمک آنالیز مختلط مورد مطالعه قرار داد و بکار گرفت، چون قسمتهای حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی همساز هستند (بخش ۱۲. ۵). این توابع تحت نگاشت همدمی همساز باقی می مانند (بخش ۱۷. ۲)، در نتیجه نگاشت همدمی به یک ابزار نیرومند در حل مسائل مقدار کرانه ای برای (۱)، همانطوری که در این فصل تشریح شده است، تبدیل می شود. با یک پتانسیل حقیقی Φ می توان یک پتانسیل مختلط

$$F(z) = \Phi + i\Psi \quad (2)$$

را با آن مرتبط ساخت. در این صورت هر دو منحنی معروف ثابت Φ و ثابت Ψ دارای یک معنی فیزیکی است. در الکترواستاتیک، این منحنیها خطوط هم پتانسیل و خطوط نیروی دافعه یا جاذبه (۱۷. ۱) هستند. در مسائل گرما این منحنیها خطوط هم دما (منحنیهای با دمای ثابت) و خطوط جریان گرما (۱۷. ۳) هستند. در جریان سیال، این منحنیها خطوط هم پتانسیل از پتانسیل سرعت و خطوط جریان (بخش ۱۷. ۴)

هستند.

برای قرص، جواب مساله دیریکله بنا به فرمول پواسن (بخش ۵.۱۷) یا با یک سری که روی دایره کرانه ای به سری فوریه مقادیر کرانه ای (بخش ۵.۱۷) تبدیل می شود، به دست می آید. توابع همساز شبیه توابع تحلیلی، دارای تعدادی خواص عمومی می باشد؛ مهمترین کاربردها، خاصیت مقدار میانگین و خاصیت قدر مطلق ماگزیمم (بخش ۶.۱۷) هستند، که یکتایی جواب مساله دیریکله را نتیجه می دهند (قضیه ۵، بخش ۶.۱۷).

۷۱. رابطه میان u و v در ناحیه D را بدست آورید. $u(x,y) = x^2 - y^2$ و $v(x,y) = 2xy$ را در نظر بگیرید. $z = x + iy$ را در نظر بگیرید. $f(z) = u + iv$ را بدست آورید. $f(z)$ را در $z = 1 + i$ محاسبه کنید.

۷۱. رابطه میان u و v

رابطه میان u و v در ناحیه D را بدست آورید. $u(x,y) = x^2 - y^2$ و $v(x,y) = 2xy$ را در نظر بگیرید. $z = x + iy$ را در نظر بگیرید. $f(z) = u + iv$ را بدست آورید. $f(z)$ را در $z = 1 + i$ محاسبه کنید.

(۱) $f(z) = u + iv$ را در $z = 1 + i$ محاسبه کنید. $f(1+i) = (1-i)^2 + i(1+i) = 1 - 2i + i^2 + i + i^2 = 1 - 2i - 1 + i - 1 = -1 - i$

(۲) $f(z) = u + iv$ را در $z = 1 + i$ محاسبه کنید. $f(1+i) = (1-i)^2 + i(1+i) = 1 - 2i + i^2 + i + i^2 = 1 - 2i - 1 + i - 1 = -1 - i$

سؤالات ریاضیات مهندسی در آزمونهای کارشناسی ارشد

مهندسی برق ۶۸-۶۷

۱. جواب معادله دیفرانسیل $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$ با شرایط اولیه و کرانه ای

$$u_x(x, 0) = p, \quad u_y(0, y) = q, \quad u(0, 0) = p + q$$

عبارت است از

۱. $u(x, y) = xy + p + q$

۲. $u(x, y) = xy + px + qy + p + q$

۳. $u(x, y) = xy + (p + q)x + (p + q)y + p + q$

۴. $u(x, y) = (p + q)xy + p + q$

حل. از $u_{xy} = 1$ نتیجه می شود $u_x = y + f(x)$. هم اکنون از $u_x(x, 0) = p$ می یابیم $f(x) = p$

و در نتیجه $u_x = y + p$ و از آنجا $u = xy + px + g(y)$. با توجه $u_y(0, y) = q$ و از

طرفی $u_y(0, y) = g'(y)$ و در نتیجه $g'(y) = q$ و از آنجا $g(y) = qy + c$ بنابراین

$u = xy + px + qy + c$. هم اکنون از $u(0, 0) = p + q$ می یابیم $c = a + b$ و از آنجا

$u = xy + px + qy + p + q$ و در نتیجه جواب درست مساله گزینه (۲) است.

۲. کدامیک از روابط زیر در معادله لاپلاس $u_{xx} + u_{yy} = 0$ صدق نمی کند.

۱. $u = \text{Ln}[(x - a)^2 + (y - b)^2]$

۲. $u = [(x - a)^2 + (y - b)^2]^{-1/2}$

۳. $u = (x - a)^2 - (y - b)^2$

۴. $u = \Delta(x - a)(y - b)$

حل. بدیهی است که در فضای دوبعدی لگاریتم فاصله جواب معادله لاپلاس است، یعنی u در پاسخ

اول جواب معادله لاپلاس است. همینطور u در پاسخهای ۳ و ۴ جواب معادله لاپلاس هستند و تنها

جوابی که در معادله لاپلاس صدق نمی کند جواب (۲) است. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۳. انتگرال $\oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z - 1)(z - 2)} dz$ که در آن $|z| = 3$ برابر است با

۱. $-4\pi i$ ۲. $4\pi i$ ۳. $2\pi i$ ۴. هیچکدام

حل. هرگاه $f(z) = \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)}$ ، آنگاه

$$\oint_{|z|=2} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z=1,2} \text{Res } f(z) = 2\pi i \left\{ \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-2} + \lim_{z \rightarrow 2} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-1} \right\}$$

$$= 2\pi i(1+1) = 4\pi i.$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

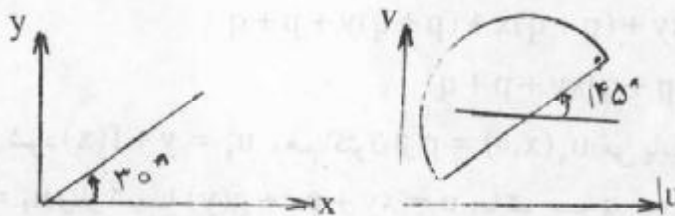
۴. کدام یک از تبدیلات همدیس (همشکل) زیر ناحیه هاشور خورده در صفحه z را به یک نیمه قرص به شعاع واحد در صفحه w (مطابق شکل) تصویر می کند.

$$w(z) = +e^{\frac{i\pi}{2} \frac{z^2 - i}{z^2 + i}} + 2 + 2i \quad ۲.$$

$$w(z) = -e^{\frac{i\pi}{2} \frac{z^2 - i}{z^2 + i}} + 2 + 2i \quad ۱.$$

$$w(z) = -e^{\frac{i\pi}{2} \frac{z^2 - i}{z^2 + i}} + 2 + 2i \quad ۴.$$

$$w(z) = +e^{\frac{i\pi}{2} \frac{z^2 - i}{z^2 + i}} + 2 + 2i \quad ۳.$$



حل. تبدیل $w_1 = z^2$ زاویه 30° را به ربع اول تبدیل می کند و تبدیل $w = \frac{z^2 - i}{z^2 + i}$ آن را بر روی

نیم قرص فوقانی واحد می نگارد و $w = e^{i\frac{\pi}{2} \frac{z^2 - i}{z^2 + i}}$ آن را 45° درجه دوران می دهد و نهایتاً نگاشت

$w = e^{\frac{i\pi}{2} \frac{z^2 - i}{z^2 + i}} + 2 + 2i$ مرکز نیم قرص را به نقطه $2 + 2i$ برد و شکل داده شده حاصل می شود.

بنابراین پاسخ صحیح گزینه (۲) است.

۵. تبدیل $w = \frac{az+b}{cz+d}$ که نقاط $1, i, -1$ از صفحه z را به ترتیب روی نقاط $i, 0, -i$ واقع در

صفحه w می نگارد، ناحیه $|z| < 1$ را به کدام یک از نواحی زیر تبدیل می کند.

۱. $u > 0$ ۲. $u < 0$ ۳. $v > 0$ ۴. $v < 0$

حل. تبدیلی کسری خطی ای که سه نقطه $1, i, -1$ را به ترتیب بر روی نقاط $i, 0, -i$ می نگارد عبارت

است از $\frac{(w-i)(0+i)}{(w+i)(0-i)} = \frac{(z-1)(i+1)}{(z+1)(i-1)}$ و از آنجا بعد از یک محاسبه مختصر می یابیم

$$z = \frac{(1-i)(w-1)}{(1+i)(w+1)}$$

از $|z| < 1$ می یابیم

$$\left| \frac{(1-i)(w-1)}{(1+i)(w+1)} \right| = \left| \frac{w-1}{w+1} \right| < 1$$

یا $|w-1| < |w+1|$ و از آنجا $u > 0$. بنابراین جواب صحیح گزینه (۱) است .

۶ . تابع v در تابع تحلیلی $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ که در آن $u(x,y) = x^2 - 3xy^2$ و $w(0) = 0$ برابر است با

$$v(x,y) = x^2 - 3x^2y \quad ۱.$$

$$v(x,y) = 3x^2y - y^2 \quad ۲.$$

$$v(x,y) = x^2 - 3xy^2 \quad ۳.$$

۴ . هیچکدام

حل . تابع $u(x,y) = x^2 - 3xy^2$ همساز است . در اینجا باید مزدوج همساز آن را بیابیم ، یعنی v را باید طوری بیابیم که $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy$ و $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x^2 - 3y^2$ ، از $\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy$ می یابیم $v(x,y) = 3x^2y + h(y)$. از طرفی

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 + h'(y) = 2x^2 - 3y^2$$

و از آنجا $h'(y) = -3y^2$. بنابراین $h(y) = -y^3$ ، از این رو $v(x,y) = 3x^2y - y^3$ و در نتیجه گزینه (۲) صحیح است .

مساله فوق را می توان با توجه به اینکه $u(x,y) = x^2 - 3xy^2$ برابر قسمت حقیقی z^2 است باید $v(x,y)$ برابر قسمت موهومی آن باشد ، یعنی $v(x,y) = 3x^2y - y^3$ و در نتیجه همانطور که متذکر شدیم گزینه (۲) درست است .

مهندسی برق ۶۹-۶۸

۷ . جوابی از معادله $u_x + u_y = 2(x+y)u$ عبارت است از

$$u = ke^{x^2 - y^2 + c(x+y)} \quad ۲.$$

$$u = ke^{x^2 + y^2 + c(x-y)} \quad ۱.$$

$$u = ke^{x^2 - y^2 + c(x-y)} \quad ۴.$$

$$u = ke^{x^2 + y^2 + c(x+y)} \quad ۳.$$

حل . به جستجوی جوابی به صورت $u(x,y) = F(x)G(y)$ برای معادله می پردازیم . با قراردادن آن در معادله می یابیم

$$F'G + FG' = 2(x+y)FG \quad \text{یا} \quad \frac{F'}{F} + \frac{G'}{G} = 2x + 2y \quad \text{یا} \quad \frac{F'}{F} - 2x = 2y - \frac{G'}{G} = c$$

توجه به آن به دو معادله دیفرانسیل زیر می رسیم

$$\frac{G'}{G} = 2y - c \quad \text{و} \quad \frac{F'}{F} = 2x + c$$

که به ترتیب دارای جوابهایی به صورت $F = k_1 e^{x^2 + cx}$ و $G = k_2 e^{y^2 - cy}$ است . با توجه به آن $u(x,y) = F(x)G(y) = ke^{x^2 + y^2 + c(x+y)}$; $k = k_1 k_2$

و در نتیجه گزینه (۱) صحیح است.

۸. تابع $w = f(y - z, z - x, x - y)$ جواب کدام یک از معادلات با مشتقات جزئی زیر است.

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad ۲ \qquad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = ۱ \quad ۱$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = ۰ \quad ۴ \qquad \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = ۰ \quad ۳$$

حل. با فرض $r = x - y$ و $q = z - x$ ، $p = y - z$ می یابیم

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial q} + \frac{\partial w}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial p} - \frac{\partial w}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial q}$$

و از آنجا

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = ۰$$

و در نتیجه گزینه (۴) صحیح است.

۹. بسط فوریه تابع دلتای دیراک $\delta(t)$ عبارت است از

$$\delta(t) = ۱ + \sum_{n=1}^{\infty} \sin nt \quad ۲ \qquad \delta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos nt \quad ۱$$

$$\delta(t) = \frac{۱}{\pi} \left(\frac{۱}{۲} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nt \right) \quad ۴ \qquad \delta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin nt \quad ۳$$

حل. داریم

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(t) dt = \frac{1}{2\pi}, a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(t) \cos ntdt = \frac{1}{\pi}, b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(t) \sin ntdt = ۰$$

بنابراین $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \cos nt$ از این رو گزاره (۴) درست است.

۱۰. اگر سری فوری تابع $f(x) = x^2$; $-\pi \leq x \leq \pi$ به صورت

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

$$\frac{x^2}{3} = \frac{\pi^2}{3} x + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin nx \quad ۱$$

$$\frac{x^2}{3} = \frac{\pi^2}{3}x + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx \quad ۲$$

۳. بسط فوریه $\int_0^x f(u)du$ با انتگرالگیری از بسط فوریه $f(x) = x^2$ به دست نمی آید.

$$\frac{x^2}{3} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx \quad ۴$$

حل. تابع $f(x) = x^2$ در شرایط قضیه انتگرال فوریه صدق می کند، چون به طور تکه ای هموار است. بنابراین

$$\int_0^x u^2 du = \frac{x^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}x + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin nx$$

بنابراین گزینه (۱) درست است.

۱۱. جوابی از معادله موج $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ را به ازای $0 < x < \infty$ ، $t > 0$ که در شرایط اولیه $u(x, 0) = 0$ و $u_t(x, 0) = 0$ و شرط کرانه ای $u(0, t) = \mu(t)$ صدق می کند عبارت است از

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & ; t < x \\ \mu(t-x) & ; t > x \end{cases} \quad ۱. \quad u(x, t) = \mu(t-x)$$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & ; t < \frac{x}{a} \\ \mu(t - \frac{x}{a}) & ; t > \frac{x}{a} \end{cases} \quad ۳. \quad u(x, t) = \begin{cases} 0 & ; t < \frac{x}{a} \\ \mu(t - \frac{x}{a}) & ; t > \frac{x}{a} \end{cases}$$

حل. پاسخهای ۱، ۲، و ۴ در شرایط صدق نمی کند و حال آنکه پاسخ ۳ در معادله و در کلیه شرایط صدق می کند. بنابراین (۳) گزینه صحیح است.

۱۲. رابطه $xyz = \phi(x + y + z)$ جواب کدام یک از معادلات زیر است.

$$x \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 2z \quad ۲. \quad y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = z \quad ۱.$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad ۴. \quad xy \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) = z(x - y) \quad ۳.$$

حل. با فرض $v = x + y + z$ می یابیم $xyz = \phi(v)$. با مشتقگیری از طرفین این معادله به ترتیب نسبت به x و y داریم

$$yz + xy \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial v}$$

$$xz + xy \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial v}$$

$$(x - y)z + \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)xy = 0.$$

بنابراین گزینه (۳) درست است.

۱۳. انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x^2 + 4} dx$ برابر است با

۱. ۱. $\frac{5\pi}{6}$ ۲. $\frac{\pi}{6}$ ۳. $\frac{\pi}{6}$ ۴. صفر

حل.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x^2 + 4} dx = 2\pi i \sum \text{Res}_{\text{در نیم صفحه فوقانی}} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 5z^2 + 4} = 2\pi i \sum_{z=i, 2i} \text{Res} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 5z^2 + 4}$$

$$= 2\pi i \left\{ \left. \frac{z^2 - 1}{4z^2 + 10z} \right|_{z=i} + \left. \frac{z^2 - 1}{4z^2 + 10z} \right|_{z=2i} \right\} = 2\pi i \left\{ \frac{5}{12i} - \frac{1}{3i} \right\} = \frac{\pi}{6}.$$

بنابراین جواب (۳) درست است.

۱۴. تابع $f(z) = \begin{cases} \frac{(\bar{z})^2}{z} & ; z \neq 0 \\ 0 & ; z = 0 \end{cases}$

۱. در $z = 0$ پیوسته نیست.

۲. در $z = 0$ مشتق دارد ولی معادلات کوشی - ریمن برقرار نیستند.

۳. در $z = 0$ پیوسته و معادلات کوشی - ریمن برقرار هستند.

۴. در $z = 0$ مشتق ندارد و معادلات کوشی - ریمن برقرار نیستند.

حل. با قرار دادن $z = re^{i\theta}$ و $\bar{z} = re^{-i\theta}$ می یابیم $f(z) = re^{-2i\theta}$. چنانچه z به سمت صفر میل کند، r و از آنجا $f(z)$ نیز به سمت صفر میل می کند. بنابراین $f(z)$ در $z = 0$ پیوسته است. $f(z)$ در $z = 0$

دارای مشتق نیست زیرا

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{(\bar{z})^2}{z} = \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2 = \left(\frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}}\right)^2 = e^{-2i\theta}$$

وابسته به θ است و اگر $z \rightarrow 0$ دارای حد نیست. ولی شرایط کوشی - ریمن برقرارند. در واقع

$$\frac{\partial u(0,0)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x,0) - u(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Re } f(x+0i)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\frac{\partial v(0,0)}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{v(0,y) - v(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\text{Im } f(0+iy)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y} = 1.$$

از این رو $\frac{\partial u(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial v(0,0)}{\partial y}$. از طرفی

$$\frac{\partial u(0,0)}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u(0,y) - u(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} f(0 + iy)}{y} = 0,$$

$$\frac{\partial v(0,0)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{v(x,0) - v(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Im} f(x + 0i)}{x} = 0.$$

بنابراین $\frac{\partial u(0,0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(0,0)}{\partial x}$. در نتیجه معادلات کوشی - ریمان برقرار هستند . بنابراین گزینه (۳) صحیح است .

۱۵ . مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط z که در آنها قطعه خطهای بینهایت کوچک تحت

تبدیل $w = \frac{az + b}{cz + d}$ که در آن a, b, c, d ضرایب ثابت و $ad - bc \neq 0$ و $c \neq 0$ دوران نمی کنند

۱ . یک دایره است . ۲ . یک بیضی است .

۳ . یک خط راست می باشد . ۴ . در حالت کلی مشخص نیست .

حل . از $w = \frac{az + b}{cz + d}$ می یابیم $\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$ و با توجه به خواص نگاشت همدیس باید

$\operatorname{Arg}\left(\frac{dw}{dz}\right)$ صفر باشد . این موضوع با ثابت بودن $\operatorname{Arg}(cz + d)$ یا $\operatorname{Arg}\left(z + \frac{d}{c}\right)$ معادل است .

بنابراین مکان هندسی یک خط راست است . زیرا انتقال آن به اندازه بردار ثابت $\frac{d}{c}$ خط مستقیم

ثابت $\operatorname{Arg}\left(z + \frac{d}{c}\right)$ را به دست می دهد . بنابراین گزینه (۳) صحیح است .

۱۶ . نقش ناحیه زاویه ای $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ با تبدیل $w = -\frac{i}{z}$ عبارت است از

$$\frac{\pi}{2} < \phi < \pi . ۱$$

$$\pi < \phi < \frac{3\pi}{2} . ۲$$

$$0 < \phi < \frac{\pi}{2} . ۳$$

$$\frac{3\pi}{2} < \phi < 2\pi . ۴$$

حل . z^2 ناحیه $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ را به ناحیه $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ تبدیل می کند . این ناحیه را به روی ربع

چهار می نگارد و $-i$ آن را به اندازه $-\frac{\pi}{4}$ دوران می دهد و به ربع سوم می برد . بنابراین ناحیه مورد نظر با

نگاشت داده شده بر روی ربع سوم $\pi < \phi < \frac{3\pi}{2}$ نگاشته می شود و در نتیجه گزینه (۲) درست است .

۱۷ . مبدا مختصات چه نوع نقطه تکین (ویژگی) برای تابع $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ است و مانده تابع در این

نقطه کدام است .

۱. قطب ساده و $\text{Res}(0) = 1$

۲. قطب مرتبه دوم و $\text{Res}(0) = 1$

۳. صفر ساده و $\text{Res}(0) = 0$

۴. قطب برداشتنی و $\text{Res}(0) = 1$

حل. بدیهی است که نقطه $z = 0$ یک قطب ساده تابع است زیرا در همسایگی $z = 0$ تابع $\frac{\sin z}{z^2}$ با

$\frac{1}{z}$ معادل است و چون تنها در پاسخ اول با قطب ساده مواجه هستیم. بنابراین گزینه (۱) درست است.

۱۸. هرگاه C کران مربعی با رئوس $\pm\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$ باشد، آنگاه $\int_C \frac{\cosh \pi z}{z(z^2+1)} dz$ که در آن انتگرالگیری

در جهت مثلثاتی است عبارت است از

۱. $-2\pi i$ ۲. $4\pi i$ ۳. $2\pi i$ ۴. $-4\pi i$

حل. تابع $f(z) = \frac{\cosh \pi z}{z(z^2+1)}$ دارای قطبهای $z = 0$ و $z = \pm i$ در درون ناحیه مورد نظر است.

بنابراین

$$\int_C \frac{\cosh \pi z}{z(z^2+1)} dz = 2\pi i \left\{ \text{Res} f(z)_{z=0} + \text{Res} f(z)_{z=i} + \text{Res} f(z)_{z=-i} \right\}$$

$$= 2\pi i \left\{ \frac{\cosh \pi z}{z^2+1} \Big|_{z=0} + \frac{\cosh \pi z}{z^2+1} \Big|_{z=i} + \frac{\cosh \pi z}{z^2+1} \Big|_{z=-i} \right\}$$

$$= 2\pi i \left\{ 1 + \frac{\cosh \pi i}{-2} + \frac{\cosh \pi i}{-2} \right\} = 2\pi i \left\{ 1 - \frac{\cos \pi}{2} - \frac{\cos \pi}{2} \right\} = 4\pi i.$$

بنابراین گزینه (۲) درست است.

مهندسی برق ۷۰-۶۹

۱۹. هرگاه $f(t) = \begin{cases} t & ; 0 \leq t < 1 \\ 2-t & ; 1 \leq t < 2 \end{cases}$ و $f(t+2) = f(t)$ ، آنگاه سری فوریه تابع $f(t)$ عبارت است

از

۱. $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi}{2} t$

۲. $\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2 \pi^2} \cos(2n-1)\pi t$

۳. $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2 \sin \frac{n\pi}{2}) \cos n\pi t$

۴. $\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi}{2} \right) \cos \frac{n\pi}{2} t$

حل. یک راه حل برای مساله محاسبه مستقیم a_n و b_n است. راه حل کوتاهتر از آن در این مساله از طریق سعی و خطا حاصل می شود. نخست توجه می کنیم که تابع همه جا پیوسته است. بنابراین سری فوریه آن همواره با مقدار تابع برابر است. به ازای $t = 0$ مقدار تابع برابر صفر و حال آنکه مقدار سری در پاسخ (۱) بیشتر از $\frac{1}{4}$ است، در واقع به ازای $t = 0$ داریم $\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi^2} > \frac{1}{4}$ در پاسخ

(۳) به ازای $t = 0$ به سری واگرای $\frac{1}{4} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ می‌رسیم. همینطور به ازای $t = 1$ به نتیجه $\frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi^2} \cos^2 \frac{n\pi}{2} < \frac{1}{4}$ می‌رسیم و حال آنکه مقدار تابع در $t = 1$ برابر ۱ است. بنابراین پاسخ صحیح گزینه (۲) است.

۲۰. هرگاه $f(x) = \begin{cases} \sin x & ; 0 \leq x < 2\pi \\ -\sin x & ; -2\pi \leq x < 0 \end{cases}$ و $f(x + 4\pi) = f(x)$ ، آنگاه در سری فوریه $f(x)$ فقط ضرایب جملات زیر ممکن است غیر صفر باشند.

۱. زوج کسینوسی ۲. فرد کسینوسی ۳. زوج سینوسی ۴. فرد سینوسی

حل. نظر به اینکه $f(x)$ زوج است $b_n = 0$ و گزینه های ۳ و ۴ نادرست هستند از طرفی

$$a_0 = \frac{2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin x \cos \frac{n}{2} x dx.$$

اگر $n = 2k$ ، آنگاه

$$a_{2k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin x \cos kx dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ \sin(1-k)x + \sin(1+k)x \} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ -\frac{1}{1-k} \cos(1-k)x \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{1+k} \cos(1+k)x \Big|_0^{2\pi} \right\} = 0.$$

بنابراین گزینه (۲) درست است.

۲۱. مقدار انتگرال ناسره (توسعی) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2 + 1} dx$ برابر است با

$$\frac{\pi}{e^2} \cdot 1 \quad \pi \cdot 2 \quad \frac{\pi}{2e^2} \cdot 3 \quad -\pi \cdot 4$$

حل.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2 + 1} dx = \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{e^{2iz}}{z^2 + 1} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \frac{e^{2iz}}{2z} \Big|_{z=i} \right\} = \pi e^{-2}.$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۲۲. تبدیل $w = f(z) = z^2 + 2\alpha z + 1$ ، که در آن α یک پارامتر حقیقی است، مرز (کران) C

دایره واحد واقع در صفحه مختلط z را به مرز Γ واقع در صفحه w تبدیل می‌کند. با توجه به آن حوزه

تعریف و حوزه مقادیر تابع

$$\phi(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

۱. حوزه تعریف مجموعه اعداد حقیقی و حوزه مقادیر $\phi(\alpha) = 1$

$$\phi(\alpha) = \begin{cases} 1 & ; |\alpha| > 1 \\ 0 & ; |\alpha| < 1 \end{cases}$$

۲. حوزه تعریف مجموعه اعداد حقیقی به جز ± 1 و حوزه مقادیر

$$\phi(\alpha) = 1 ; |\alpha| \neq 1$$

۳. حوزه تعریف مجموعه اعداد حقیقی به جز ± 1 و حوزه مقادیر

$$\phi(\alpha) = 1 ; |\alpha| > 1$$

۴. حوزه تعریف مجموعه $|\alpha| > 1$ از اعداد حقیقی و حوزه مقادیر

حل. داریم

$$\phi(\alpha) = \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{z + \alpha}{z^2 + 2\alpha z + 1} dz.$$

ریشه های $z^2 + 2\alpha z + 1 = 0$ به ازای $|\alpha| \leq 1$ برابر $z = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} = -\alpha \pm i\sqrt{1 - \alpha^2}$ با $|z| = 1$ است که واقع بر محیط دایره است و $\phi(\alpha)$ تعریف نمی شود. به ازای $|\alpha| > 1$ معادله مورد نظر دارای دو ریشه $z = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}$ است که یکی واقع دایره واحد و دیگری واقع در خارج آن است و

$$\phi(\alpha) = \frac{1}{\pi i} \int \frac{z + \alpha}{z^2 + 2\alpha z + 1} dz = \frac{1}{\pi i} \times 2\pi i \frac{z + \alpha}{2z + 2\alpha} \Big|_{z=z_1} = 1$$

که در آن z_1 آن ریشه مخرج تابع انتگرالده است که واقع در داخل دایره واحد است. بنابراین گزینه (۴) درست است.

۲۲. برای معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی

$$e^{rx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xe^{x+y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + e^{ry} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

کدام گزاره زیر درست است؟

۱. به ازای هر x و y از نوع هذلولی گون است. ۲. به ازای $y = 1$ از نوع سهمی گون است.

۳. به ازای $1 < x < -1$ و هر y از نوع بیضی گون است.

۴. به ازای $x = y$ از نوع هذلولی گون است.

حل. با فرض $A = e^{rx}$ ، $B = 2xe^{x+y}$ ، و $C = e^{ry}$ می یابیم

$$\Delta = 4AC - B^2 = 4e^{r(x+y)} - 4x^2 e^{2(x+y)} = 4(1 - x^2) e^{2(x+y)}.$$

Δ به ازای $1 < x < -1$ مثبت است و این مقدار از y نیز مستقل است. بنابراین گزینه (۳) درست است.

۲۴. هرگاه پتانسیلهای الکترواستاتیکی موجود بر روی بدنه دو استوانه هم محور و به شعاع ۱ و e به

ترتیب برابر 110 و 220 و معادله لاپلاس به صورت $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ باشد،

آنگاه پتانسیل موجود بین دو استوانه برابر است با

$$110r + 220. 1 \quad 2. (Lnr + 1) 110$$

$$\frac{110}{e-1}(r+e-2) \cdot 4 \quad 110 \operatorname{Ln} r + 220 \cdot 3$$

حل. به علت وجود استوانه های هم پتانسیل، پتانسیل موجود واقع در داخل دو استوانه تنها به r وابسته

بوده و از θ مستقل است. بنابراین برای حل مساله کافی است نخست به حل معادله $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0$

پردازیم. این معادله را به صورت $\frac{u''}{u'} = -\frac{1}{r}$ می نویسیم و با توجه به آن می یابیم $u' = \frac{c}{r}$ و از

انجا $u = c \operatorname{Ln} r + d$ و با توجه به $u(1) = 110$ و $u(e) = 220$ داریم $u(r) = 110(\operatorname{Ln} r + 1)$.

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۲۵. جواب مساله

$$u_{tt} = u_{xx}; \quad 0 < x < \pi, t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 2 \sin x; \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0; \quad t \geq 0$$

عبارت است از

$$u(x, t) = 2 \sin x \cos t \cdot 2 \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \sin nx \sin nt \cdot 1$$

$$u(x, t) = 2 \sin x \sin t \cdot 4 \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \cos nx \sin nt \cdot 3$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$\text{که در آن } \lambda_n = \frac{cn\pi}{l} = n \text{ و}$$

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\lambda_n \pi} \int_0^{\pi} 2 \sin x \sin nx \, dx = \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin x \sin nx \, dx = 0; \quad n \neq 1$$

و به ازای $n = 1$ داریم

$$b_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = 2.$$

بنابراین

$$u(x, t) = b_1 \sin t \sin x = 2 \sin t \sin x.$$

از این رو گزینه (۴) درست است.

مهندسی برق ۷۰-۷۱

۲۶. انتگرال فوریه تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; |x| < 1 \\ 0 & ; |x| > 1 \end{cases}$$

عبارت است از

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\pi} \sin n\pi x \quad ۲ \quad -\frac{۲}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} dw \quad ۱$$

$$\frac{۲}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} dw \quad ۴ \quad \frac{۲}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos w \sin wx}{w} dw \quad ۳$$

حل. چون تابع زوج است $b(w) = 0$ و

$$a(w) = \frac{۲}{\pi} \int_0^{\pi} \cos wx dx = \frac{۲}{\pi w} \sin w$$

بنا این

$$f(x) = \frac{۲}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin w}{w} \sin wx dw$$

از اینرو گزینه (۴) درست است.

۲۷. اگر سری فوریه تابع $f(x) = \frac{1}{4}x$; $-\pi < x < \pi$ عبارت باشد با

$$f(x) = \sin x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots, \quad p = 2\pi,$$

آنگاه سری فوریه تابع $g(x) = x^2$; $-\pi < x < \pi, \quad p = 2\pi$ برابر است با

$$g(x) = 4 \left(\frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x - \dots \right) \quad ۲ \quad g(x) = 2(\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + \dots) \quad ۱$$

$$g(x) = -\sin x + \frac{1}{4} \sin 2x - \dots \quad ۴ \quad g(x) = 4(-\sin x + \frac{1}{4} \sin 2x - \dots) \quad ۳$$

حل. با انتگرالگیری از $\frac{1}{4}x = \sin x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots$ می یابیم

$$\frac{x^2}{4} + c = -\cos x + \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{3} \cos 3x + \dots$$

$$x^2 + 4c = 4(-\cos x + \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{3} \cos 3x + \dots) \quad \text{یا}$$

و با انتگرالگیری از طرفین آن در فاصله $-\pi$ تا π می یابیم $c = -\frac{\pi^2}{4}$. از اینرو

$$x^2 = 4 \left(\frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x - \dots \right)$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۲۸. داریم

$$\frac{\pi}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = 2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1 + \cos nx)^2}{(n^2 - 1)^2}$$

$$\frac{1}{1^2 \times 3^2} + \frac{1}{3^2 \times 5^2} + \frac{1}{5^2 \times 7^2} + \dots$$

برابر است با

$$\pi^2 \cdot 4 \quad \frac{\pi^2 + 8}{12} \cdot 3 \quad \frac{\pi^2}{12} \cdot 2 \quad \frac{\pi^2 - 8}{16} \cdot 1$$

 حل. با قرار دادن $x = \pi$ در تساوی داده شده می یابیم

$$2 + 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2 (n+1)^2} = \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi^2}{4}$$

و n زوج

و از آنجا

$$\frac{1}{1^2 \times 3^2} + \frac{1}{3^2 \times 5^2} + \dots = \frac{\pi^2 - 8}{16}$$

بنابراین گزینه (۱) درست است.

۲۹. انتگرال $\oint_C \frac{e^z}{z^2(z+2)} dz$ که در آن C کران مربع $-1 \leq x \leq 1$ و $-1 \leq y \leq 1$ در جهت مثلاًشی

است برابر است با

$$\frac{\pi i}{2} \cdot 4 \quad \frac{\pi i}{4} \cdot 3 \quad \frac{\pi i}{8} \cdot 2 \quad \text{صفر} \cdot 1$$

 حل. تنها قطب مرتبه دوم $z = 0$ واقع در داخل مربع مورد نظر است. بنابراین

$$\begin{aligned} \int_C \frac{e^z}{z^2(z+2)} dz &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^z}{z^2(z+2)} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \frac{e^z}{z+2} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z+2)e^z - e^z}{(z+2)^2} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi i}{2} \end{aligned}$$

در نتیجه گزینه (۴) درست است.

۳۰. هرگاه $z = x + iy$ و $w = u + iv$ ، آنگاه تحت نگاشت $w = \sin z$ خط $x = \frac{\pi}{4}$ به کدامیک

از منحنیهای زیر تبدیل می شود.

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{4} \cdot 2 \quad u^2 + v^2 = \frac{1}{4} \cdot 1$$

$$u^2 - v^2 = \frac{1}{4} \cdot 4 \quad u^2 - v^2 = \frac{1}{4} \cdot 3$$

 حل. $w = \sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$ و $u = \sin x \operatorname{ch} y$ و $v = \cos x \operatorname{sh} y$ و به

 ازای $x = \frac{\pi}{4}$ می یابیم $u^2 = \frac{1}{4} \operatorname{ch}^2 y$ و $v^2 = \frac{1}{4} \operatorname{sh}^2 y$. در نتیجه $u^2 - v^2 = \frac{1}{4}$ بنابراین گزینه (۳)

درست است.

۳۱. تابع $w = \operatorname{Ln} z$ را به ازای عدد مختصات $z = re^{i\theta}$ ، $r > 0$ ، $-\pi < \theta \leq \pi$ چنین تعریف

 می کنیم $\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} r + i\theta$ ، اکنون اگر $z = e^{\frac{2\pi}{T}}$ آنگاه $\operatorname{Ln} z$ برابر است با

$$-i\pi \cdot 4 \quad i\pi \cdot 3 \quad i\frac{3\pi}{2} \cdot 2 \quad -i\frac{\pi}{2} \cdot 1$$

حل. داریم $z^r = e^{i\frac{r\pi}{2}}$ ، نظر به اینکه $\theta = \frac{r\pi}{2}$ بین $-\pi$ و π نیست، چنین می نویسیم

$z^r = e^{i(-2\pi + \frac{r\pi}{2})} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ و از آنجا $\text{Ln}z^r = \text{Lne}^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\frac{\pi}{2}$ بنا بر این گزینه (۱) صحیح است.

۳۲. انتگرال $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos\theta}$ برابر است با

$$1 \cdot 4 \quad 2\pi \cdot 3 \quad -\frac{1}{2} \cdot 2 \quad \frac{1}{4} \cdot 1$$

حل.
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos\theta} = \int_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{\sqrt{2} - \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})} = \frac{2}{i} \int \frac{dz}{-z^2 + 2\sqrt{2}z - 1}$$

$$= \frac{4\pi i}{i} \text{Res}_{z=\sqrt{2}-1} \frac{1}{-z^2 + 2\sqrt{2}z - 1} = 4\pi \lim_{z \rightarrow \sqrt{2}-1} \frac{1}{-2z + 2\sqrt{2}} = 2\pi.$$

بنابراین گزینه (۳) درست است.

۳۳. ضریب $\frac{1}{z-1}$ در بسط لوران تابع $\frac{1}{z(z-5)}$ در ناحیه $2 < |z-1| < 3$ برابر است با

$$-1/5 \cdot 4 \quad 1/8 \cdot 3 \quad 1/2 \cdot 2 \quad \text{صفر} \cdot 1$$

حل. چنین می نویسیم

$$\frac{1}{z(z-5)} = \frac{-1/5}{z} + \frac{1/5}{z-5} = -\frac{1}{5} \left\{ \frac{1}{(z-1)+1} - \frac{1}{(z-1)-4} \right\}$$

$$= -\frac{1}{5} \left\{ \frac{1}{z-1} [1 - (z-1)^{-1} + (z-1)^{-2} - (z-1)^{-3} + \dots] + \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{z-1}{4}} \right\}$$

$$= -\frac{1}{5} \left\{ \frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} - \dots + \frac{1}{4} \left[1 + \frac{z-1}{4} + \left(\frac{z-1}{4}\right)^2 + \dots \right] \right\}$$

بنابراین ضریب $\frac{1}{z-1}$ در بسط لوران تابع در ناحیه $2 < |z-1| < 4$ برابر $-\frac{1}{5}$ است. در نتیجه گزینه (۴) درست است.

۳۴. جواب مساله

$$u_{tt} = u_{xx}; \quad 0 < x < \pi, t > 0$$

$$u(x, 0) = 1, \quad u_t(x, 0) = 0; \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0; \quad t \geq 0$$

عبارت است از

$$u(x, t) = 1 + \sin t \cos t \quad . 1$$

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cos((2n-1)x) \sin((2n-1)t) \quad . 2$$

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cos((2n-1)t) \sin((2n-1)x) \quad . 3$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cos((2n-1)t) \sin((2n-1)x) \quad . 4$$

حل. معادله دارای جوابی به صورت زیر است

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \sin nx$$

که در آن

$$b_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} u_t(x, 0) \sin nx \, dx = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x, 0) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{2}{n\pi} ((-1)^{n+1} + 1).$$

باتوجه به اینکه a_n به ازای مقادیر زوج n صفر است، بافرض $n = 2k - 1$ می یابیم

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin nx \sin nt = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \cos((2k-1)t) \sin((2k-1)x).$$

بنابراین گزینه (۳) درست است.

۳۵. معادله $u_{tt} - u_{xx} = 0$ با تغییر متغیر $\tau = x + t$ و $s = x - t$ به کدامیک از صورتهای زیر تبدیل

می شود.

$$u_{ss} = 0 \quad . 4 \quad u_{\tau s} + u_{\tau} = 0 \quad . 3 \quad u_{\tau s} = 0 \quad . 2 \quad u_{\tau\tau} = 0 \quad . 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial u}{\partial s} \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial s} \quad . \text{حل}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \tau} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \tau} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \quad \text{و همینطور}$$

با قراردادن آنها در $u_{tt} - u_{xx} = 0$ می یابیم $\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial s} = 0$ بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

مهندسی برق ۷۱-۷۲

۳۶. اگر $v(x,y)$ یک مزدوج همساز $v(x,y) = (x^2 - y^2 + 1)^2 - 4x^2y^2$ باشد و داشته باشیم $v(0,0) = 0$ ، آنگاه مقدار $v(1,1)$ برابر است با

۱. ۱ ۲. ۴ ۳. صفر ۴. -۲

حل. داریم

$$u(x,y) = (\operatorname{Re}(z^2 + 1))^2 - (\operatorname{Im}(z^2))^2 = (\operatorname{Re}(z^2 + 1))^2 - (\operatorname{Im}(z^2 + 1))^2.$$

بنابراین تابع تحلیلی مورد نظر یعنی تابع $f(z) = u + iv$ باید برابر باشد با $f(z) = (z^2 + 1)^2 + c$.
 بنابراین $v(x,y) = \operatorname{Im}(z^2 + 1)^2 + c$. از $v(0,0) = 0$ نتیجه می شود $c = 0$ و از آنجا $v(x,y) = \operatorname{Im}(z^2 + 1)^2$ و $v(1,1) = \operatorname{Im}((1+i)^2 + 1)^2 = \operatorname{Im}(1+2i)^2 = 4$ بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۳۷. مانده تابع $ze^{-\frac{1}{z-1}}$ برابر است با

۱. $-\frac{1}{2}$ ۲. $\frac{1}{2}$ ۳. ۱ ۴. -۱

حل. تابع تنها در $z = 1$ تحلیل نیست. بنابراین باید مانده این تابع را در $z = 1$ بیابیم. برای این منظور چنین می نویسیم

$$ze^{-\frac{1}{z-1}} = (z-1)e^{-\frac{1}{z-1}} + e^{-\frac{1}{z-1}}$$

$$= (z-1)\left(1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} - + \dots\right) + \left(1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} - + \dots\right)$$

$$= ((z-1) - 1 + \frac{1}{2(z-1)} - + \dots) + \left(1 - \frac{1}{z-1} + - \dots\right).$$

مانده تابع برابر ضریب $\frac{1}{z-1}$ در بسط فوق است. بنابراین

$$\operatorname{Re}(ze^{-\frac{1}{z-1}}) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

در نتیجه گزینه (۱) درست است.

۳۸. مقدار انتگرال $\int_C (z^2 + 1) dz$ در طول منحنی به معادله پارامتری $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ از نقطه $t = 0$ تا $t = 2\pi$ برابر است با

۱. $\frac{2\pi a}{15}(48\pi^2 a^2 + 40\pi^2 a^2)$ ۲. $\frac{2\pi a}{15}(48\pi^2 a^2 + 40\pi^2 a^2 - 15)$

۳. $\frac{2\pi a}{15}(48\pi^2 a^2 + 40\pi^2 a^2 + 15)$ ۴. $\frac{2\pi a}{15}(48\pi^2 a^2 + 40\pi^2 a^2 - 25)$

حل. تابع $w = (z^2 + 1)^2$ همه جا تحلیلی است. پس انتگرال مورد نظر به مسیر انتگرالگیری بستگی نداشته و تنها به نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر وابسته است. بنابراین انتگرال مورد نظر عبارت است از

$$\int_0^{2\pi} (z^2 + 1)^2 dz = \int_0^{2\pi} (z^4 + 2z^2 + 1) dz = \left(\frac{z^5}{5} + \frac{2}{3} z^3 + z \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{32}{5} a^5 \pi^5 + \frac{16}{3} a^3 \pi^3 + 2a\pi.$$

در نتیجه گزینه (۳) درست است.

۳۹. تصویر ناحیه $\{z : |z - 1| < 1, \text{Im } z > 0\}$ تحت تبدیل $w = \frac{z}{z - 2}$ کدام یک از نواحی زیر است؟

۱. ربع اول ۲. ربع دوم ۳. ربع سوم ۴. ربع چهارم

حل. از $w = \frac{z}{z - 2}$ می یابیم $z = \frac{2w}{w - 1}$ و از آنجا $z - 1 = \frac{w + 1}{w - 1}$ و $|z - 1| < 1 \Rightarrow \left| \frac{w + 1}{w - 1} \right| < 1$ بنابراین $|w + 1| < |w - 1|$. اگر داشتیم $|w + 1| = |w - 1|$ آنگاه w روی عمود منصف پاره خط از -1 تا 1 بود یعنی محور y بود و وجود نامساوی نشان می دهد که مکان واقع در طرف چپ محور y است. از طرفی $\text{Im } z > 0$ از می یابیم $\text{Im} \frac{2w}{w - 1} > 0$ یا $\text{Im} \frac{2w(\bar{w} - 1)}{|w - 1|^2} > 0$ و یا $\text{Im}(|w|^2 - 1) > 0$ و این به معنی $\text{Im } w < 0$ است. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

به این سوال می توان به روش سعی و خطا نیز پاسخ داد. برای این منظور نقطه $z = 1 + \frac{1}{2}i$

واقع در ناحیه مورد نظر را انتخاب کرده و در $w = \frac{z}{z - 2}$ قرار داده، می یابیم

$$w = \frac{1 + \frac{1}{2}i}{1 + \frac{1}{2}i - 2} = \frac{2 + i}{-2 + i} = -\frac{2 + i}{2 - i} = -\frac{(2 + i)^2}{5} = -\frac{3 + 4i}{5}$$

که نقطه ای واقع در ربع سوم است. بنابراین گزینه (۳) درست است.

۴۰. اگر تابع $u(x, t)$ جواب مساله

$$u_{tt} - u_{xx} = 0; \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x(1 - x); \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0; \quad t \geq 0$$

باشد، آنگاه $u\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ عبارت است از

$$\frac{1}{24} \cdot 1 \quad -\frac{1}{24} \cdot 2 \quad \text{صفر} \cdot 3 \quad \frac{1}{8} \cdot 4$$

حل. با تغییر متغیر $u = x + t$ و $Z = x - t$ معادله $u_{tt} - u_{xx} = 0$ به معادله $u_{vz} = 0$ تبدیل می شود که دارای جواب عمومی $u(v, Z) = \phi(v) + \psi(Z)$ است و در نتیجه معادله $u_{tt} - u_{xx} = 0$ دارای جواب عمومی $u(x, t) = \phi(x + t) + \psi(x - t)$ است. با توجه به شرایط اولیه داده شده

$$u_t(x, 0) = \phi'(x) - \psi'(x) = x - x^2 \quad \text{و} \quad u(x, 0) = \phi(x) + \psi(x) = 0$$

یا $\phi(x) - \psi(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{3} + k$ با فرض $g(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{3}$ می یابیم

$$\phi(x) - \psi(x) = g(x) + k \quad \text{و با حل این معادله و} \quad \phi(x) + \psi(x) = 0 \quad \text{می یابیم}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{4}(-g(x) + k) \quad \text{و} \quad \phi(x) = \frac{1}{4}(g(x) + k)$$

$$u(x, t) = \phi(x + t) + \psi(x - t) = \frac{1}{4}\{g(x + t) - g(x - t)\}.$$

با توجه به شرایط کرانه ای داده شده $u_x(0, t) = g_x(t) - g_x(-t) = g'(t) - g'(-t) = 0$ و از آنجا $g'(t) = g'(-t)$ بنابراین $g'(x)$ تابعی زوج و $g(x)$ تابعی فرد است و از $u(1, t) = 0$ نتیجه می شود $g(x + 2) = g(x)$ در نتیجه

$$u(x, t) = \frac{1}{4}\{g^*(x + t) - g^*(x - t)\}$$

که در آن g^* گسترش زوج تابع $g(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{3}$ است. با توجه به این جواب می یابیم

$$u\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\left\{g^*\left(1\right) - g^*\left(-\frac{1}{2}\right)\right\} = \frac{1}{4}\left\{g^*\left(1\right) - g^*\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right)\right\} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{48}$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۴۱. دمای حالت پایدار کراندار برای ناحیه ربع اول و شرایط داده شده بر روی نمودار زیر برابر است با

$$T(x, y) = T_0 - \frac{2T_0}{\pi} \tan^{-1} \frac{y}{x} \cdot 2 \quad T(x, y) = T_0 - \frac{T_0}{\pi} \tan^{-1} \frac{y}{x} \cdot 1$$

$$T(x, y) = T_0 - \frac{T_0}{\pi} \tan^{-1} \frac{2xy}{x^2 + y^2} \cdot 4 \quad T(x, y) = T_0 - \frac{2T_0}{\pi} \tan^{-1} \frac{2xy}{x^2 - y^2} \cdot 3$$

حل. به روش سعی و خطا فی البداهه پی می بریم که جواب درست گزینه (۲) است. زیرا تنها به ازای این جواب است که $T(x, 0) = T_0$ و $T(0, y) = 0$.

۴۲. معادله $(y+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x+y$ ، آنگاه

۱. این معادله از نوع بیضوی و بعضی جاها هذلولوی است.
 ۲. این معادله در برخی ناحیه سهموی است و در برخی ناحیه هذلولوی است.
 ۳. این معادله در برخی ناحیه بیضوی و در برخی ناحیه سهموی است.
 ۴. این معادله در برخی ناحیه بیضوی و در برخی ناحیه هذلولوی و در برخی نقاط سهموی است.
- حل.

$$\Delta = 4AC - B^2 = 4(y+1) - 4x^2 = 4(y - x^2 + 1).$$

بدیهی است که Δ بر صفحه xy مقادیر مثبت و منفی و صفر را با توجه به تغییرات x و y می تواند اختیار کند. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۴۳. اگر بسط به سری فوریه کسینوسی تابع $f(x) = \sin x ; 0 < x < \pi$ به صورت

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + \cos n\pi}{n^2 - 1} \cos nx$$

باشد، آنگاه مقدار سری عددی $\frac{1}{1^2 \times 3^2} + \frac{1}{3^2 \times 5^2} + \frac{1}{5^2 \times 7^2} + \dots$ برابر است با

$$\frac{\pi^2 - 8}{2} \cdot 4 \quad \frac{\pi^2 - 8}{16} \cdot 3 \quad \frac{\pi^2 - 8}{4} \cdot 2 \quad \frac{\pi^2 - 8}{8} \cdot 1$$

حل. طبق فرمول پارسوال داریم

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{4}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 (n^2 - 1)^2}$$

و n زوج

واز آنجا

$$\frac{1}{1^2 \times 3^2} + \frac{1}{3^2 \times 5^2} + \dots = \frac{\pi^2 - 8}{16}$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

مهندسی برق ۷۲ - ۷۳

۴۴. هرگاه سری فوریه مثلثاتی تابع $p = 2\pi$ ، $-\pi < x < \pi$ ، $y = f(x)$ به صورت

$$f(x) = (\sin x + \cos 2x)^2$$

آنگاه برای $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

مقدار b_2 برابر است با

$$1.4 \quad \frac{1}{3} \cdot 3 \quad 10.2 \quad \frac{1}{2} \cdot 1$$

حل.

$$b_r = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin x + \cos 2x)^2 \sin 3x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos 2x - \cos 4x) \cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 + \cos 4x) dx = 1.$$

بنابراین گزینه (۴) درست است.

۴۵. پتانسیل الکترو استاتیک بر روی نیمدایره های فوقانی و تحتانی یک دایره به مرکز مبدا و شعاع واحد به ترتیب برابر صفر و ۱ است. اگر مقدار پتانسیل در نقاط درونی دایره برابر باشد با

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) ; 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

آنگاه به ازای هر $n > 0$ داریم

$$B_n = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \text{ و } A_n = 1.2 \quad B_n = \frac{-1 + (-1)^n}{n\pi} \text{ و } A_n = 0.1$$

$$B_n = \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi^2} \text{ و } A_n = 1.4 \quad B_n = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2} \text{ و } A_n = 0.3$$

حل.

$$u(1, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = f(\theta) = \begin{cases} 0; & \text{بر نیمدایره فوقانی} \\ 1; & \text{بر نیمدایره تحتانی} \end{cases}$$

که در آن

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \cos n\theta d\theta = 0,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin n\theta d\theta = \frac{1}{n\pi} ((-1)^n - 1).$$

بنابراین گزینه (۱) درست است.

۴۶. اگر مساله مقدار اولیه و کرانه ای

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = t$$

$$u(0, t) = 2t, \quad u(1, t) = t; \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 2; \quad 0 \leq x \leq 1$$

با تغییر متغیر $u(x, t) = v(x, t) + a(t)x + b(t)$ به صورت زیر درمی آید

$$v_{xx} - \frac{1}{c^2} v_{tt} = t$$

$$v(x, 0) = f_1(x), \quad v_t(x, 0) = f_2(x)$$

$$v(0, t) = v(1, t) = 0$$

$$a = -1, b = -2t, f_1(x) = x, f_r(x) = 2 \quad .1$$

$$a = t, b = -2, f_1(x) = x, f_r(x) = 1 \quad .2$$

$$a = 1, b = -2t, f_1(x) = x^2, f_r(x) = 2x \quad .3$$

$$a = -t, b = 2t, f_1(x) = x, f_r(x) = x \quad .4$$

حل . داریم

۴۷. فرض کنید، یک میله به طول ۱۰ که دو سر آن در دمای صفر است در لحظه اولیه $u(x, 0) = v(x, 0) = x$ با توجه به آن می یابیم $u(x, t) = v(x, t) - tx + 2t$ و $u_1(x, 0) = v_1(x, 0) - x + 2 = 0$ و در نتیجه $v_1(x, 0) = x$. بنابراین جواب صحیح گزینه (۴) است.

۴۷. فرض کنید، یک میله به طول ۱۰ که دو سر آن در دمای صفر است در لحظه اولیه در دمای $u(x, 0) = x(10-x)$ قرار گیرد. اگر در نقطه x در لحظه t دما به صورت زیر باشد

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x e^{-\lambda_n^2 c^2 t}$$

که در آن $c^2 = 1$ و $\lambda_n = \frac{n\pi}{10}$ آنگاه دما در وسط میله برابر است با

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{100}{(2k)^2 \pi^2} (-1)^{k-1} e^{-\frac{(2k)^2 \pi^2 t}{100}} \quad .2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{100}{(2k-1)^2 \pi^2} (-1)^{k-1} e^{-\frac{(2k-1)^2 \pi^2 t}{100}} \quad .1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{100}{(2k)^2 \pi^2} e^{-\frac{(2k)^2 \pi^2 t}{100}} \quad .4$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{100}{(2k-1)^2 \pi^2} e^{-\frac{(2k-1)^2 \pi^2 t}{100}} \quad .3$$

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{10} x = x(10-x)$$

حل . داریم

و از آنجا

$$A_n = \frac{2}{10} \int_0^{10} x(10-x) \sin \frac{n\pi}{10} x dx$$

$$= \frac{2}{n\pi} \int_0^{10} (10-2x) \cos \frac{n\pi}{10} x dx + \frac{20}{(n\pi)^2} \int_0^{10} \sin \frac{n\pi}{10} x dx = \frac{200}{(n\pi)^2} \left[-\cos \frac{n\pi x}{10} \right]_0^{10}$$

$$= \frac{200}{(n\pi)^2} (1 + (-1)^{n+1}).$$

بنابراین

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{200(-1)^{k-1}}{\pi^2 (2k-1)^2} e^{-\frac{(2k-1)^2 \pi^2 t}{100}} \sin \frac{(2k-1)\pi}{10} x.$$

با قرار دادن $x = 5$ می یابیم

$$u(\omega, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda \circ \alpha (-1)^{k-1} \left(\frac{\gamma k-1}{\gamma}\right)^{\gamma} \pi^{\gamma} t}{\pi^{\gamma} (\gamma k-1)^{\gamma} e}$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۴۸. تابع $f(z) = \frac{z^{\gamma}}{(z^{\gamma} - 4)^{\gamma} \exp \frac{1}{z-2}}$ مفروض است. کدام یک از گزاره های زیر صحیح است.

۱. $z = 0$ صفر مرتبه γ و $z = 2$ قطب ساده تابع است.

۲. $z = 0$ صفر مرتبه γ و $z = 2$ قطب مرتبه دوم تابع است.

۳. $z = 2$ نقطه تکین (ویژه) تنها نیست.

۴. $z = 2$ نقطه تکین اساسی و $z = -2$ قطب مرتبه دوم تابع است.

حل. تابع $\exp \frac{1}{z-2}$ همواره مخالف صفر است و نقطه $z = 2$ یک نقطه تکین اساسی برای آن است. و $z = -2$ یک قطب مرتبه دوم است. بنابراین گزینه (۴) درست است.

۴۹. اگر مقدار انتگرال $\oint_C \frac{e^z dz}{(z^2 + 4)(z - 4)}$ برابر $2\pi i M$ باشد، که در آن M مجموع مانده های تابع

در قطبهای واقع در درون دایره $C: |z| = 3$ بوده جهت انتگرالگیری مثبت است، آنگاه مقدار این

انتگرال بر روی $C_1: |z+1| + |z-1| = 4\sqrt{3}$ در جهت مثبت برابر است با

۱. $2\pi i (M + \frac{1}{2} e^2)$. ۲. $2\pi i (M + \frac{1}{2} e^{-2})$.

۳. $2\pi i (M - \frac{1}{2} e^2)$. ۴. $2\pi i M$.

حل. نقاط $z = 4$ و $z = \pm 2i$ قطبهای ساده تابع انتگرالده هستند. نقاط $z = \pm 2i$ واقع در درون C و

$z = 4$ واقع در خارج آن است. از طرفی با توجه به اینکه

$$|4+1| + |4-1| = 8 > 4\sqrt{3}, \quad |\pm 2i+1| + |\pm 2i-1| = \sqrt{5} < 4\sqrt{3}.$$

بنابراین از قطبهای تابع تنها نقاط $z = \pm 2i$ داخل C_1 است. از این رو مقدار انتگرال بر C و بر C_1 با هم برابرند و در نتیجه پاسخ (۴) صحیح است.

۵۰. نقش ناحیه محصور بین دایره $|z-1| = 1$ و $|z-i| = 1$ توسط $w = \frac{1}{z}$ عبارت است از

۱. $u > \frac{1}{4}$ و $v > \frac{1}{4}$. ۲. $u > \frac{1}{4}$ و $v < -\frac{1}{4}$.

۳. $u < \frac{1}{4}$ و $v < -\frac{1}{4}$. ۴. $u < \frac{1}{4}$ و $v > -\frac{1}{4}$.

حل. از $w = \frac{1}{z}$ می یابیم $z = \frac{1}{w}$ و از آنجا $z-1 = \frac{1-w}{w}$ و $z-i = \frac{1-iw}{w}$. بنابراین داریم

از نامساوی اول نامساوی $u > \frac{1}{\rho}$ و از نامساوی دوم نامساوی $v < -\frac{1}{\rho}$ حاصل می شود. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۵۱. اگر تابع $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$; $z \neq 0$ و $f(0) = \frac{1}{2}$ ، آنگاه $f^{(n)}(0)$ برابر است با

$$\begin{cases} 0 & ; n = 2k \\ \frac{1}{(2k+2)(2k+1)} & ; n = 2k+1 \end{cases} \cdot 2 \quad \begin{cases} 0 & ; n = 2k+1 \\ \frac{1}{(2k+2)(2k+1)} & ; n = 2k \end{cases} \cdot 1$$

$$\begin{cases} 0 & ; n = 2k \\ \frac{(-1)^k}{(2k+2)(2k+1)} & ; n = 2k+1 \end{cases} \cdot 4 \quad \begin{cases} 0 & ; n = 2k-1 \\ \frac{(-1)^k}{(2k+2)(2k+1)} & ; n = 2k \end{cases} \cdot 3$$

حل. نظر به اینکه

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{z}{2}}{z^2} = \frac{1}{2}$$

و برابر مقدار تابع در نقطه $z = 0$ است. بنابراین $z = 0$ یک نقطه برداشتنی تابع است و تابع $f(z)$ تابعی

است تام و سری تیلور آن در حول نقطه $z = 0$ عبارت است از

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z^2} \left(1 - 1 + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \dots \right) \\ & = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots + (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+2)!} + \dots; |z| < \infty. \end{aligned}$$

بنابراین

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & ; n = 2k-1 \\ \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)} & ; n = 2k \end{cases}$$

از این رو گزینه (۳) صحیح است.

مهندسی برق ۷۳-۷۴

۵۲. مقدار انتگرال $\oint_C \frac{\text{Ln}(1+z)^2}{(2z-i)^2} dz$ که در آن C منحنی $|z - \frac{i}{2}| = \frac{1}{3}$ و جهت انتگرالگیری جهت

مثبت است، برابر است با

$$\frac{4\pi}{3} \cdot 2 \quad \frac{16\pi}{3} \cdot 3 \quad -\frac{2\pi}{3} \cdot 4 \quad \frac{\pi}{3} \cdot 1$$

حل. تابع انتگرالده در درون و روی C بجز در $z = \frac{i}{\sqrt{r}}$ که یک قطب مرتبه دوم است تحلیلی است. نقطه شاخه ای $\text{Ln}(1+z^r)$ واقع در خارج C است زیرا فاصله آن تا $\frac{i}{\sqrt{r}}$ برابر $\frac{1}{\sqrt{r}}$ است که از شعاع دایره C بیشتر است. بنابراین

$$\int_C \frac{\text{Ln}(1+z^r)}{(rz-i)^r} dz = 2\pi i \text{Res}_{z=\frac{i}{\sqrt{r}}} \frac{\text{Ln}(1+z^r)}{(rz-i)^r} = \frac{2\pi i}{r} \left(\frac{rz}{1+z^r} \right)_{z=\frac{i}{\sqrt{r}}} = -\frac{2\pi}{r}$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۵۳. اگر تبدیل فوریه تابع $f(t) = \frac{t}{t^2+a^2}$ به صورت زیر تعریف شود

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt} f(t) dt$$

که در آن w عددی است حقیقی، آنگاه داریم

۱. $F(w) = 2\pi i e^{-wa}$ ۲. $F(w) = \pi i e^{-wa}$

۳. $F(w) = \begin{cases} -\pi i e^{-wa} & ; w > 0 \\ \pi i e^{wa} & ; w < 0 \end{cases}$ ۴. $F(w) = -\pi i e^{-wa}$

حل. داریم

$$\begin{aligned} F(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{te^{-iwt}}{t^2+a^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos wt - i \sin wt)t}{t^2+a^2} dt = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t \sin wt}{t^2+a^2} dt \\ &= -i \text{Im} \left(2\pi i \text{Res}_{z=ai} \frac{ze^{i wz}}{z^2+a^2} \right) = -i \text{Im} \left(2\pi i \frac{ze^{i wz}}{2z} \Big|_{z=ai} \right) = -i \text{Im} \left(2\pi i \frac{aie^{-wa}}{2ai} \right) \\ &= \begin{cases} -\pi i e^{-wa} & ; w > 0 \\ \pi i e^{wa} & ; w < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۵۴. اگر توابع $u(x,t)$ و $v(x,t)$ به ترتیب جواب مسائل با مقادیر کرانه ای و اولیه زیر باشند

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}; & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = a \cos \frac{x}{\sqrt{r}} + b \sin \frac{x}{\sqrt{r}} = f(x) \\ u(0,t) = at \\ u(\pi,t) = bt \end{cases} \quad \begin{cases} v_{tt} = v_{xx}; & 0 < x < \pi, t > 0 \\ v(x,0) = 0 \\ v_t(x,0) = f(x) - \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)a - \frac{x}{\pi}b \\ v(0,t) = 0 \\ v(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

آنگاه $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$ برابر است با

۱. $\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)a + \frac{x}{\pi}b$ ۲. $at\left(1 - \frac{x}{\pi}\right) + bt\frac{x}{\pi}$

$$at(\pi - x) + btx \quad . ۴ \quad \left(at \cos \frac{x}{\pi} + bt \sin \frac{x}{\pi} \right) \quad . ۳$$

حل. تابع $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$ جوابی از مساله زیر است

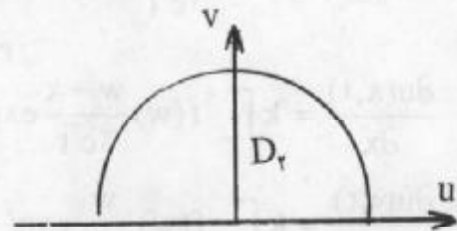
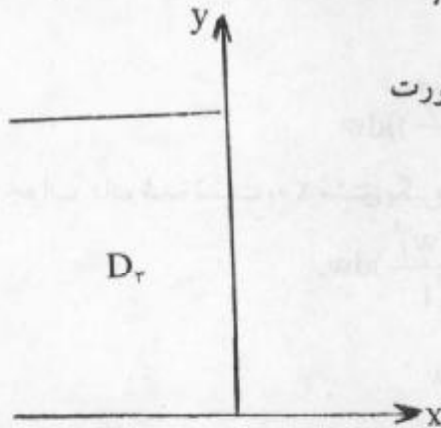
$$w_{tt} - w_{xx} = 0 \quad ; \quad 0 < x < \pi, t > 0$$

$$w(x, 0) = 0 \quad , \quad w_t(x, 0) = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)a + \frac{x}{\pi}b \quad ; \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$w(0, t) = at \quad , \quad w(\pi, t) = bt \quad ; \quad t \geq 0$$

بنابراین w را می توان به صورت $w(x, t) = \left(\frac{x}{\pi}b + a\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\right)t$ اختیار نمود. از این رو گزینه (۲) درست است.

۵۵. تبدیلی که حوزه D_1 را بر روی حوزه D_2 به صورت



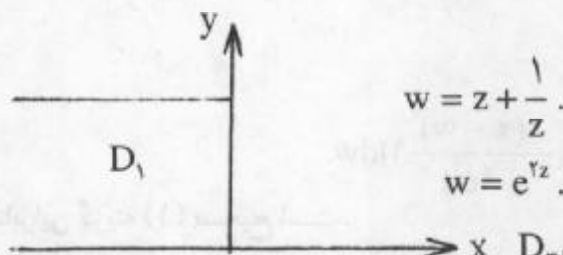
می نگارد عبارت است از

$$w = z + \frac{1}{z} \quad . ۲$$

$$w = e^z \quad . ۱$$

$$w = e^{iz} \quad . ۴$$

$$w = \frac{\pi i}{\pi i - iz} \quad . ۳$$



حل. نخست با تبدیل $w_1 = iz$ ناحیه D_1 را به ناحیه D_2 تبدیل می کند و سپس $w = e^{iz}$ آن را به داخل و روی نیم قرص D_2 می نگارد.

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۵۶. اگر درجه حرارت در یک میله از دو طرف نامتناهی با شرط اولیه $u(x, 0) = f(x)$ در نقطه x و

در لحظه t از روی انتگرال

$$u(x, t) = k \int_{-\infty}^{\infty} f(w) e^{-\frac{(x-w)^2}{4c^2 t}} dw$$

که در آن $k = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}$ حاصل شود، آنگاه جواب مساله با مقدار اولیه و کرانه ای

$$u_t = c^2 u_{xx}; x > 0, t > 0$$

$$u(x, 0) = m; x \geq 0$$

$$u_x(0, t) = 0; t \geq 0$$

برابر است با

$$km \int_0^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x+w)^2}{4c^2 t}\right) + \exp\left(-\frac{(x-w)^2}{4c^2 t}\right) \right) dw \quad .1$$

$$km \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-w)^2}{4c^2 t}\right) dw \quad .2$$

$$km \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x+w)^2}{4c^2 t}\right) dw \quad .3$$

$$km \int_{-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x+w)^2}{4c^2 t}\right) + \exp\left(-\frac{(x-w)^2}{4c^2 t}\right) \right) dw \quad .4$$

حل. اگر از جواب داده شده نسبت به x مشتق بگیریم، می یابیم

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = k \int_{-\infty}^{\infty} f(w) \frac{w-x}{2c^2 t} \exp\left(-\frac{(x-w)^2}{4c^2 t}\right) dw,$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = k \int_{-\infty}^{\infty} f(w) \frac{w}{2c^2 t} \exp\left(-\frac{w^2}{4c^2 t}\right) dw$$

که با فرض زوج بودن f برابر صفر است و به ازای $f(x) = m$ می یابیم

$$u(x,t) = km \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-w)^2}{4c^2 t}\right) dw$$

$$= km \int_0^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x+w)^2}{4c^2 t}\right) + \exp\left(-\frac{(x-w)^2}{4c^2 t}\right) \right) dw.$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۵۷. کدامیک از توابع زیر تحلیلی است.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1 - \cos z}{\sin^2 z} & ; z \neq 0 \\ \frac{1}{2} & ; z = 0 \end{cases} \quad .1 \text{ به ازای } |z| < 3$$

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}} \quad (k \neq 0 \text{ یک عدد صحیح است}) \quad z \neq \frac{1}{k} \quad .2$$

$$f(z) = \text{Ln} z; z \neq 0 \quad .3$$

$$f(z) = x^y + iy^x; x = y \quad .4$$

حل. گزینه (۲) صحیح نیست زیرا $z = 0$ نیز یک نقطه تکین است. $\text{Ln} z$ دارای خط شاخه ای است

و غیر تحلیلی است. تابع $f(z) = x^2 + iy^2$ تنها بر روی خط $y = x$ دارای مشتق است و تحلیلی نیست. بنابراین گزینه (۱) صحیح است. در واقع در همسایگی $z = 0$ داریم

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\sin^2 z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{z}{2}}{\sin^2 z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \times \frac{z^2}{4}}{z^2} = \frac{1}{2}$$

در نتیجه تابع مورد نظر در گزینه (۱) در $z = 0$ پیوسته است و تابع در سراسر حوزه $|z| < 2$ تحلیلی است.

۵۸. اگر تابع $f(z)$ در تمام صفحه مختلط تحلیلی و در شرط $|f''(z)| \leq c$ (ثابت) صدق کند آنگاه $f(z)$ برابر است با

۱. $Az + B$ ۲. $A_1 z^2 + A_2 z + A_3 ; |A_1| < \frac{c}{2}$

۳. $\frac{c}{2} z^2 + Az + B$ ۴. در حالت کلی نمی توان شکل تابع $f(z)$ را نوشت.

که در آنها A, B, A_1, A_2, A_3 اعداد ثابت هستند.

حل. نظر به اینکه f تابعی تام است، $f''(z)$ نیز تابعی تام می باشد و چون کراندار است پس تابعی ثابت است، یعنی $f''(z) = A_1$. با دوبار انتگرالگیری از آن می یابیم $f(z) = \frac{1}{2} A_1 z^2 + A_2 z + A_3$. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۵۹. کلیه توابع تحلیل به صورت $f(z) = u(x) + iv(y)$ عبارت اند از

۱. $f(z) = z^2 + a$ (ثابت a) ۲. $f(z) = \frac{1}{z}$

۳. $f(z) = z$ ۴. $f(z) = cz + a$ (ثابت a و c ثابت حقیقی)

حل. داریم

$u_y = -v_x = 0$ و $u'(x) = v'(y)$ برای برقرار بودن این تساوی لازم است که $u'(x) = v'(y) = c$ و از آنجا $u(x) = cx + d$ و $v(y) = cy + b$ در نتیجه

$$f(z) = u(x) + iv(y) = (cx + d) + i(cy + b) = cz + d + ib$$

بنابراین گزینه (۴) درست است.

مهندسی برق ۷۴-۷۵

۶۰. در حل معادله موج در مختصات قطبی $u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = \frac{1}{c^2} u_{tt}$

به روش تفکیک متغیرها به کدامیک از معادلات زیر مواجه می شویم.

۱. معادلات خطی با ضرایب ثابت و معادله از خانواده بسل

۲. معادلات خطی با ضرایب ثابت و معادله از نوع برنولی

۳. معادلات خطی با ضرایب ثابت و معادله از خانواده لژاندر

۴. معادلات خطی با ضرایب ثابت و معادله از نوع اویلر

حل. بدیهی است که گزینه (۱) صحیح است.

۶۱. می دانیم که جواب مساله

$$u_t = u_{xx}; \quad 0 < x < 1, t > 0$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0; \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = f(x); \quad 0 \leq x \leq 1$$

به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp(-(\frac{n\pi}{l})^2 t) \sin \frac{n\pi}{l} x$ است. باتوجه به آن جواب مساله

$$u_t - u_{xx} = \sin(\frac{\pi}{l} x); \quad 0 < x < 1, t > 0$$

$$u(0, t) = b, \quad u(1, t) = a$$

$$u(x, 0) = b + \frac{a-b}{l} x$$

که در آن a و b مقادیر ثابت هستند در $x = \frac{l}{\gamma}$ عبارت است از

$$u(\frac{l}{\gamma}, t) = b + \frac{a-b}{\gamma} + (\frac{l}{\pi})^{\gamma} (1 - \exp(-\frac{\pi^{\gamma}}{l^{\gamma}} t)) \quad .1$$

$$u(\frac{l}{\gamma}, t) = b + \frac{a-b}{\gamma} \quad .2$$

$$u(\frac{l}{\gamma}, t) = b + \frac{a-b}{\gamma} + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\frac{n^{\gamma} \pi^{\gamma}}{l^{\gamma}} t) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad .3$$

$$u(\frac{l}{\gamma}, t) = \frac{l^{\gamma}}{\pi^{\gamma}} (1 - \exp(-\frac{\pi^{\gamma}}{l^{\gamma}} t)) \quad .4$$

حل. گزینه (۴) در شرط $u(\frac{l}{\gamma}, 0) = b + \frac{a-b}{\gamma}$ صدق نمی کند. گزینه (۲) در معادله صدق

نمی کند. به جهت وجود $\sin(\frac{\pi}{l} x)$ در معادله جواب خصوصی آن تک جمله ای خواهد بود و گزینه

(۳) نادرست است. بنابراین گزینه (۱) درست است.

۶۲. نوع نقاط ویژه (تکین) تابع $f(z) = \frac{1}{1 - \cos z}$ و مقدار انتگرال $I = \int_C \frac{dz}{1 - \cos z}$ که در آن

$C: |z| = 1$ و جهت انتگرالگیری جهت مثبت است عبارت است از

$$I = 0 \quad .1 \quad \text{از نوع قطب} \quad I = \frac{\pi}{\gamma} \quad .2 \quad \text{از نوع قطب}$$

۳. $I = 0$ ، از نوع اساسی $I = 1 + \frac{\pi}{2}$ ، از نوع برداشتنی

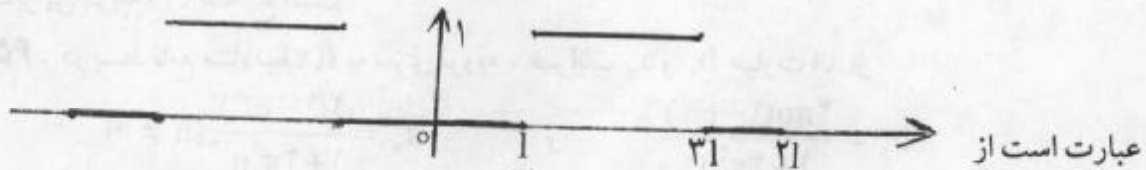
حل. $1 - \cos z = 2 \sin^2 \frac{z}{2}$ با $\frac{z}{2}$ معادل است، بنابراین تابع انتگرالده دارای قطب مرتبه دوم و

$$I = \int_C \frac{dz}{1 - \cos z} = 2 \int_C \frac{dz}{z^2} = 0.$$

بنابراین گزینه (۱) درست است.

۶۳. سری فوریه مثلثاتی تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب 2 و

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 0 & ; 0 \leq x < \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \frac{3}{2} < x < \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$1. \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m-1)\pi} \cos \frac{(2m-1)\pi}{1} x$$

$$2. \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{m+1}}{(2m-1)\pi} \cos \frac{(2m-1)\pi}{1} x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sin \frac{2m\pi}{1} x$$

$$3. \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sin \frac{2m\pi}{1} x$$

$$4. \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m}{(2m-1)\pi} \cos \frac{(2m-1)\pi}{1} x$$

حل. می توان سری فوریه تابع را در فاصله $-1 < x < 1$ محاسبه نمود. این تابع زوج است و

$$a_n = \frac{2}{1} \int_0^1 f(x) \cos \frac{n\pi}{1} x dx = \frac{2}{1} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} 1 \cos \frac{n\pi}{1} x dx = -\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$= \begin{cases} 0 & ; n = 2m \\ \frac{2(-1)^m}{(2m-1)\pi} & ; n = 2m-1 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{1} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{2}.$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

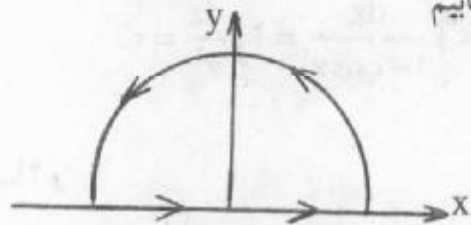
۶۴. انتگرال غیرعادی (ناسره یا توسعی) $\int_0^{\infty} \frac{w \sin wx}{1+w^2} dw$ برابر است با

۱. $\frac{1}{\pi} e^{-x}$. ۲. $\frac{\pi}{2} e^{-x}$. ۳. πe^{-x} . ۴. انتگرال مزبور واگرا است .

حل . با انتگرالگیری از تابع $f(w) = \frac{we^{iwx}}{1+w^2}$ بر روی C کران فوقانی نیمدایره $|z| = R$ و قطر آن می یابیم

$$\oint_C f(w)dw = 2\pi i \operatorname{Res} f(w) = 2\pi i \lim_{w=i} \frac{we^{iwx}}{2w}$$

$$= 2\pi i \frac{e^{-x}}{2i} = \pi e^{-x}$$



$$\int_0^{\infty} \frac{w \sin wx}{1+w^2} dw = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w \sin wx}{1+w^2} dw = \frac{\pi}{2} e^{-x} .$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است .

۶۵ . در بسط تابع متناوب $f(x)$ به سری فوریه ، ضرایب a_n و b_n عبارت اند از

$$b_n = \frac{4\pi n(1-e^{-1})}{1+4\pi^2 n^2} \quad \text{و} \quad a_n = \frac{2(1-e^{-1})}{1+4\pi^2 n^2} \quad (n \neq 0)$$

۱ . تابع $f(x)$ و مشتقات مرتبه اول و مرتبه دوم آن پیوسته بوده ولی مشتقات مراتب بالاتر ناپیوسته می باشند .

۲ . عبارات داده شده برای a_n و b_n نمی توانند بیانگر ضرایب فوریه برای تابع $f(x)$ باشند .

۳ . تابع $f(x)$ حداقل دارای یک نقطه انفصال در تناوب اصلی خود می باشد .

۴ . ضرایب فوریه به تنهایی نمی توانند پیوسته یا ناپیوسته بودن تابع متناوب را مشخص نمایند .

حل . بدیهی است که گزینه (۴) درست است .

۶۶ . با تغییر متغیر $u = v - tx + 2t$ مسأله

$$u_{tt} - u_{xx} = t ; \quad 0 < x < 1 , \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = x , \quad u_t(x, 0) = 2 - x ; \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0, t) = 2t , \quad u(1, t) = t ; \quad t \geq 0$$

به کدامیک از مسائل زیر تبدیل می شود .

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{tt} - v_{xx} = t ; \quad 0 < x < 1, t > 0 \\ v(x, 0) = x , \quad v_t(x, 0) = x , \quad v(0, t) = 0 , \quad v(1, t) = 0 \end{array} \right. \quad ۱ .$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{tt} - v_{xx} = t ; \quad 0 < x < 1, t > 0 \\ v(x, 0) = x , \quad v_t(x, 0) = x , \quad v(0, t) = 0 , \quad v(1, t) = 0 \end{array} \right. \quad ۲ .$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{tt} - v_{xx} = t ; \quad 0 < x < 1, t > 0 \\ v(x, 0) = x , \quad v_t(x, 0) = v(0, t) = 0 , \quad v(1, t) = 0 \end{array} \right. \quad ۳ .$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{tt} - v_{xx} = t ; \quad 0 < x < 1, t > 0 \\ v(x, 0) = x , \quad v_t(x, 0) = v(0, t) = 0 , \quad v(1, t) = 0 \end{array} \right. \quad ۴ .$$

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = t; 0 < x < 1, t > 0 \\ v(x, 0) = x, v_t(x, 0) = 0, v(0, t) = 0, v(1, t) = 0 \end{cases} \quad ۳$$

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = t; 0 < x < 1, t > 0 \\ v(x, 0) = 0, v_t(x, 0) = x, v(0, t) = 0, v(1, t) = 0 \end{cases} \quad ۴$$

حل. با جایگزین کردن $u = v - tx + 2t$ در مساله و تبدیل مساله مورد نظر به یک مساله برای v می یابیم

$$v_{tt} - v_{xx} = t; 0 < x < 1, t > 0$$

$$v(x, 0) = x, v_t(x, 0) = 0, v(0, t) = 0, v(1, t) = 0$$

بنابراین گزینه (۲) درست است.

۶۷. تابع $f(z) = x^2 + iy^2$ مفروض است، کدامیک از گزاره های زیر نادرست است.

۱. تابع $f(z)$ بر $x=y$ تحلیلی است. ۲. تابع $f(z)$ بر $x=y$ مشتق پذیر است.

۳. روابط کوشی - ریمنان در $x=y$ برقرار است. ۴. $f(z)$ پیوسته است.

حل. بدیهی است که گزینه (۱) صحیح است چون تابع پیوسته $f(z) = x^2 + iy^2$ تنها بر $x=y$ مشتق پذیر و بر آن غیر تحلیلی است.

۶۸. نگاشت $f(z) = e^z$ ناحیه $D = \{(x, y) : x \leq 0, 0 \leq y \leq \pi\}$ بر روی کدامیک از نواحی زیر می نگارد.

$$۱. \{(u, v) | u^2 + v^2 \geq 1, u \geq 0\} \quad ۲. \{(u, v) | u^2 + v^2 \leq 1, v \geq 0\}$$

$$۳. \{(u, v) | u^2 + v^2 \leq 1, u \leq 0\} \quad ۴. \{(u, v) | u^2 + v^2 \geq 1, v \geq 0\}$$

حل. باتوجه به این که $\rho = e^x, v = \phi, -\infty < x \leq 0$ به توی قرص واحد $\rho \leq 1$ نگاشته می شود و چون $0 \leq y \leq \pi$ می یابیم $0 \leq \phi \leq \pi$. بنابراین ناحیه نیم قرص فوقانی جواب مساله است و گزینه (۲) صحیح است.

مهندسی برق ۷۶-۷۵

۶۹. هرگاه با توجه به تغییر متغیر $v = x$ و $z = xy$ معادله $xu_{xy} = yu_{yy} + u_y$ را حل کنیم، آنگاه جواب این معادله عبارت است از

$$۱. u(x, y) = \phi(y) + \psi(x^2 y^2) \quad ۲. u(x, y) = \phi(y^2) + \psi(xy)$$

$$۳. u(x, y) = \phi(y) + \psi(xy) \quad ۴. u(x, y) = \psi(xy) + \phi(x)$$

حل. بدیهی است که گزینه (۴) صحیح است. در واقع

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} y + \frac{\partial u}{\partial v}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} xy + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} x + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} x^2$$

بنابراین

$$x a_{xy} - y u_{yy} - u_y = x^2 y \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} + x \frac{\partial u}{\partial z} - x^2 y \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - x \frac{\partial u}{\partial z} = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} = 0$$

و از آنجا $u = \phi(v) + \psi(z)$ یا $u(x, y) = \phi(xy) + \psi(z)$ از این رو گزینه (۴) صحیح است.
 ۷۰. اگر $v_t = c^2 v_{xx} - \beta v$ و $v(x, t) = u(x, t)w(t)$ ، آنگاه w را برابر کدامیک از عبارات زیر انتخاب کنیم تا معادله فوق به معادله گرما $u_t = c^2 u_{xx}$ تبدیل شود. در این مساله c و β مقادیر ثابت هستند.

۱. $w = \sin \beta t$ ۲. $w = \cos \beta t$ ۳. $w = e^{-\beta t}$ ۴. $w = e^{\beta t}$

حل. داریم $v_t = u_t w + u w'$ و $v_{xx} = u_{xx} w$. با قرار دادن آنها در معادله $v_t - c^2 v_{xx} + \beta v = 0$ می یابیم

$u_t w + u w' - c^2 u_{xx} w + \beta u w = 0$ یا $u_t w + u w' - c^2 u_{xx} w + \beta u w = 0$ حال اگر w را طوری انتخاب کنیم که $w' + \beta w = 0$ یا $w = e^{-\beta t}$ آنگاه می یابیم $u_t = c^2 u_{xx}$. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۷۱. جواب مساله

$$y_{tt} = 4y_{xx}; \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0$$

$$y(0, t) = f(t), \quad y(x, 0) = 0, \quad y_t|_{t=0} = 0$$

و $y(x, t)$ وقتی $x \rightarrow \infty$ کراندار است عبارت است از

۱. $y(x, t) = f(t - \frac{x}{4})u(t - \frac{x}{4})$ ۲. $y(x, t) = f(t - \frac{x}{4})$

۳. $y(x, t) = f(\frac{x}{4} - t)$ ۴. $y(x, t) = f(\frac{x}{4} + t)u(-\frac{x}{4} + t)$

حل. مساله دارای جوابی به صورت $y(x, t) = \phi(x - 2t)$ است. که از روش دالامبر حاصل می شود. ϕ در آن دلخواه و مشتقپذیر است. به ازای $x = 0$ می یابیم

$$y(0, t) = \phi(-2t) = f(t)$$

با فرض $-2t = u$ داریم $\phi(u) = f(-\frac{u}{2})$ و با توجه به $y(x, t) = \phi(x - 2t)$ داریم

$y(x, t) = f(t - \frac{x}{2})$. به ازای $t = 0$ داریم $y(x, 0) = f(0 - \frac{x}{2}) = f(-\frac{x}{2}) = 0$. تابع به

ازای $x > 0$ تعریف شده است. هم اکنون تابع f را به ازای $x < 0$ به ازای $f(x) = 0$ گسترش

می‌دهیم. با توجه به آن $y(x, 0) = f(-\frac{x}{\gamma}) = 0$ نیز برقرار می‌ماند. و تساوی $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0$ به ازای $x > 0$ نیز برقرار است. بنابراین

$$y = f(t - \frac{x}{\gamma})u(t - \frac{x}{\gamma}) \quad \text{یا} \quad y(x, t) = \begin{cases} f(t - \frac{x}{\gamma}); t > \frac{x}{\gamma} \\ 0 & ; t < \frac{x}{\gamma} \end{cases}$$

از این رو گزینه (۱) صحیح است.

۷۲. مقدار انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ برابر است با

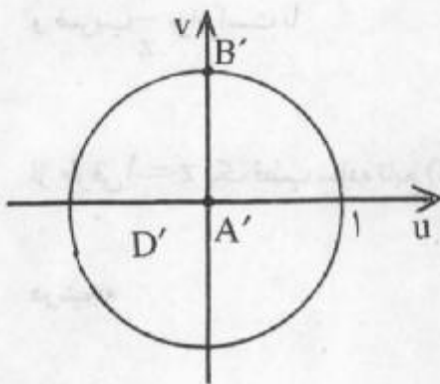
- ۱. $\frac{\pi}{8}$
- ۲. $\frac{\pi}{4}$
- ۳. $\frac{\pi}{2}$
- ۴. π

حل. با انتگرالگیری به روش جزء به جزء و با توجه به اینکه انتگرال دیریکله $\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du$ برابر $\frac{\pi}{2}$ است می‌یابیم

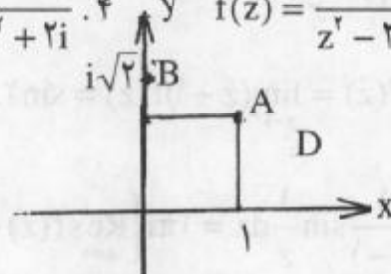
$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx &= \left\{ -\frac{1}{x} \sin^2 x \right\}_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{2 \sin x \cos x}{x} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

که در آن $u = 2x$. بنابراین گزینه (۳) درست است.

۷۳. تبدیلی که ناحیه D را بر روی D' و نقاط A و B را به ترتیب روی نقاط A' و B' مطابق شکل زیر می‌نگارد عبارت است از



$$\begin{aligned} f(z) &= e^{ix} \frac{z^2 - 2i}{z^2 + 2i} \quad . 2 \quad f(z) = e^{-ix} \frac{z^2 + 2i}{z^2 - 2i} \quad . 1 \\ f(z) &= \frac{z^2 - 2i}{z^2 + 2i} \quad . 4 \quad f(z) = \frac{z^2 + 2i}{z^2 - 2i} \quad . 3 \end{aligned}$$



حل. نخست با تبدیل $w_1 = z^2$ ناحیه اول بر روی نیم صفحه فوقانی می‌نگاریم و سپس کلیه تبدیلاتی به صورت $f(z) = e^{i\theta} \frac{z^2 - z_0}{z^2 - \bar{z}_0}$ یا $f(z) = e^{i\theta} \frac{w_1 - z_0}{w_1 - \bar{z}_0}$ را در نظر می‌گیریم که نیم صفحه فوقانی را به توی دایره واحد می‌نگارند. با جایگزین کردن $z = 1 + i$ در $f(z)$ می‌یابیم

$$f(1+i) = e^{i\theta} \frac{2i - z_0}{zi - z_0}$$

و اگر نقطه $1+i$ بخواید به مبدا مختصات A' ، تبدیل شود لازم است $z_0 = 2i$ و از آنجا

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z^2 - 2i}{z^2 + 2i}$$

از طرفی داریم $f(i\sqrt{2}) = i$. بنابراین

$$i = e^{i\theta} \frac{-2 - 2i}{-2 + 2i} = \frac{\lambda i e^{i\theta}}{\lambda} = i e^{i\theta}$$

و در نتیجه $e^{i\theta} = 1$ و از آنجا $\theta = 0$. از این رو $f(z) = \frac{z^2 - 2i}{z^2 + 2i}$. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۷۴. مقدار انتگرال $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$ برابر است با

۱. صفر ۲. $\sin 1$ ۳. $2\pi i \sin 1$ ۴. $4\pi i \sin 1$

حل. تابع انتگرالده دارای دو نقطه تکین $z=0$ و $z=1$ در داخل ناحیه $|z|=2$ است. داریم

$$\int_{|z|=2} f(z) dz = \int_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \sum_{z=0,1} \text{Res } f(z)$$

برای پیدا کردن مانده $f(z)$ در $z=0$ ضریب $\frac{1}{z}$ را در بسط لوران تابع $f(z)$ در حول $z=0$

می یابیم. داریم

$$f(z) = -\frac{1}{1-z} \sin\left(\frac{1}{z}\right) = -\{1+z+z^2+\dots\} \left\{ \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \dots \right\}$$

و ضریب $\frac{1}{z}$ برابر است با

$$-1 + \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!} + \dots = -\sin 1$$

از طرفی $z=1$ یک قطب ساده تابع $f(z)$ است. بنابراین

$$\text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = \sin 1$$

در نتیجه

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \left\{ \text{Res } f(z)_{z=0} + \text{Res } f(z)_{z=1} \right\} = 0$$

از این رو گزینه (۱) صحیح است.

۷۵. انتگرال $\int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right) e^{\frac{1}{z}} dz$ برابر است با

۱. $-\pi i$ ۲. صفر ۳. $2\pi i$ ۴. $3\pi i$

حل. تابع انتگرالده $f(z)$ تنها دارای یک نقطه تکین $z = 0$ است. داریم

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = \oint_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right) e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} f(z).$$

از طرفی

$$f(z) = \left(z + \frac{1}{z}\right) \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots\right)$$

و ضریب $\frac{1}{z}$ برابر $\frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$ است. بنابراین

$$\int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right) e^{\frac{1}{z}} dz = \frac{5}{2} \times 2\pi i = 5\pi i.$$

در نتیجه گزینه (۴) صحیح است.

۷۶. اگر z_1 و z_2 دو نقطه دلخواه از صفحه مختلط باشند، آنگاه مکان هندسی نقاط $z = \alpha z_1 + \beta z_2$ فرض $\alpha + \beta = 1$ عبارت است از

۱. پاره خطی که نقطه αz_1 را به نقطه βz_2 متصل می کند.
۲. پاره خطی که مبدا را به نقطه $\alpha z_1 + \beta z_2$ متصل می کند.
۳. پاره خطی که نقاط z_1 و z_2 را به هم متصل می کند.
۴. پاره خطی که مبدا را به نقطه $z_1 + z_2$ متصل می کند.

حل. بدیهی است که تنها گزینه (۳) با فرض $\alpha \geq 0$ و $\beta \geq 0$ برقرار است. در نتیجه گزینه (۳) صحیح است.

۷۷. مقدار انتگرال $I = \oint_{|z|=2n} \frac{dz}{\operatorname{ch}^2 \pi z + \operatorname{sh}^2 \pi z}$ که در آن m و $n = 1, 2, \dots$ عدد معلوم است و

مثبت و صحیح) برابر است با

۱. صفر
۲. $\frac{\pi}{2}$
۳. π
۴. 2π

حل. داریم $\operatorname{ch}^2 \pi z + \operatorname{sh}^2 \pi z = \operatorname{ch} 2\pi z$. بنابراین $I = \int_{|z|=2n} \frac{dz}{\operatorname{ch}(2\pi z)}$. از طرفی از $\operatorname{ch} 2\pi z = 0$

نتیجه می شود $2\pi z = (k\pi - \frac{\pi}{2})i$ و از آنجا $z_k = (k - \frac{1}{2})\frac{i}{2}$ و یا $z_0 = -\frac{i}{4}$ ، $z_1 = \frac{i}{4}$

و در نتیجه $z_2 = \frac{3i}{4}$ ، $z_{-1} = -\frac{3i}{4}$

$$I = \int_{|z|=2n} \frac{dz}{\operatorname{ch} 2\pi z} = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res} f(z)$$

ولی تعداد نقاط z_k واقع در درون دایره $|z| = 2n$ زوج است و z_k یک قطب ساده است. پس

$$\operatorname{Res}f(z) = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{z - z_k}{\operatorname{ch} \pi z} = \frac{1}{2\pi \operatorname{sh}(\pi z_k)}$$

که تابعی فرد است، لذا مقدار انتگرال مورد نظر صفر است و گزینه (۱) درست است.

مهندسی مکانیک (برخی سوالات مهم)

مهندسی مکانیک ۶۸ - ۶۷

۷۸. کدامیک از معادلات زیر را می توان به روش جداسازی متغیرها حل نمود.

$$a \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} + bu = 0 \quad ۱ \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad ۲ \quad ۳. \text{ هیچکدام} \quad ۴. \text{ هر دو}$$

حل. واضح است که هر دو را می توان به روش جداسازی متغیرها حل نمود. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۷۹. اگر $u(x, y) + iv(x, y)$ تحلیلی باشد، آنگاه تحت چه شرایطی تابع $v(x, y) + iu(x, y)$ هم تحلیلی است.

۱. اگر u فقط تابعی از x و v فقط تابعی از y باشد.

۲. اگر u فقط تابعی از y و v فقط تابعی از x باشد.

۳. اگر هم u و هم v مقادیر ثابتی باشد.

۴. همواره تحلیلی باشد.

حل. به علت تحلیلی بودن $u + iv$ و $v + iu$ داریم $u_x = v_y$ ، $v_x = -u_y$ ، $v_x = u_y$ ، $v_x = -u_y$

و از آنجا $u_x = 0$ و $u_y = 0$. بنابراین $u = c_1$ و همچنین $v = c_2$. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۸۰. هرگاه $z = re^{i\theta}$ ؛ $0 \leq \theta < 2\pi$ ؛ آنگاه کدامیک از روابط زیر نادرست هستند.

$$\overline{\cos z} = \cos \bar{z} \quad ۱ \quad \overline{\sin z} = \sin \bar{z} \quad ۲$$

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}} \quad ۳ \quad \overline{\operatorname{Ln} z} = \operatorname{Ln} \bar{z} \quad ۴$$

حل. بدیهی است که گزینه های ۱، ۲، و ۳ درست هستند و تنها گزینه (۴) نادرست است زیرا

$$\overline{\operatorname{Ln} z} = \operatorname{Ln} r - i\theta \quad \text{و} \quad \operatorname{Ln} \bar{z} = \operatorname{Ln} r + i(2\pi - \theta)$$

مهندسی مکانیک ۷۰ - ۶۹

۸۱. تابع $f(z) = z^2 \bar{z} \cos z$ مفروض است. آنگاه کدامیک از گزاره های زیر درست است.

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi \quad ۲ \quad \int_{|z|=1} f(z) d\bar{z} = -2\pi i \quad ۱$$

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \quad ۴ \quad \int_{|z|=1} f(z) d\bar{z} = 0 \quad ۳$$

حل. داریم $z^r \bar{z} = |z|^r$ و بر دایره $|z|=1$ ، بنابراین $z^r \bar{z} = |z|^r = 1$.

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = \int_{|z|=1} z^r \bar{z} \cos z dz = \int_0^{2\pi} z^r \cos z dz = 0$$

$$\int_{|z|=1} f(z) d\bar{z} = \int_{|z|=1} z^r \cos z d\bar{z} = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} (-ie^{i\theta} d\theta) = 0.$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۸۲. اگر قسمت حقیقی تابع تحلیلی $f(z)$ باشد، آنگاه کدامیک از عبارات زیر صحیح است.

۱. تابع $\exp\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \cos\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ همواره همساز است.

۲. تابع $f(z)$ منحصر بفرد است.

۳. همواره می توان عدد $M > 0$ را یافت به طوری که $|f(z)| \leq M$.

۴. هیچکدام

حل گزینه (۱) درست است زیرا

$$e^{u_x} \cos u_y = e^{u_x} \cos(-u_y) = \operatorname{Re}\{e^{u_x - i u_y}\} = \operatorname{Re}\{e^{u_x + i v_y}\}.$$

چون $f(z)$ تحلیلی است، داریم $f'(z) = u_x + i v_x$ و از طرفی از تحلیلی بودن $f(z)$ تحلیلی بودن

$f'(z)$ نیز نتیجه می شود. و از آنجا $e^{u_x + i v_x} = e^{f'(z)}$ نیز یک تابع تحلیلی است. و نظر به اینکه

$e^{u_x} \cos u_y$ برابر قسمت حقیقی $e^{f'(z)}$ است. پس این قسمت حقیقی همساز است.

۸۳. مقدار انتگرال $I = \int_{|z|=1} z^v \cos \frac{1}{z} dz$ برابر است با

۱. $2\pi i$ ۲. $-\pi i$ ۳. $-\frac{\pi}{12i}$ ۴. $\frac{2\pi i}{8!}$

حل.

$$I = \int_{|z|=1} z^v \cos \frac{1}{z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} z^v \cos \frac{1}{z}$$

از طرفی

$$f(z) = z^v \cos \frac{1}{z} = z^v \left(1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \dots\right) = z^v - \frac{z^v}{2!} + \frac{1}{4!z^2} - \dots$$

در نتیجه $I = 2\pi i \times \frac{1}{4!} = \frac{\pi i}{12}$ و گزینه (۳) صحیح است.

۸۴. ناحیه $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \pi, x \in \mathbb{R}\}$ توسط $f(z) = e^z$ به کدامیک از نواحی زیر تبدیل

۱. نیم صفحه تحتانی
 ۲. نیم صفحه فوقانی
 ۳. نیمدایره واحد فوقانی
 ۴. نیمدایره واحد تحتانی
- حل. داریم $\rho = e^x$ و از $x \in \mathbb{R}$ نتیجه می شود که $0 \leq \rho < \infty$. و از طرفی $\phi = y$ و $0 \leq \phi \leq \pi$. بنابراین نیم صفحه جواب مساله است و گزینه (۲) درست است.

مهندسی مکانیک ۷۱-۷۰

۸۵. هرگاه پتانسیل موجود در روی بدنه دو استوانه طویل وهم محور به شعاعهای قاعده ۱ و e به ترتیب 110° و 220° ولت باشد و معادله لاپلاس در مختصات قطبی به صورت

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$$

باشد، آنگاه پتانسیل موجود بین دو استوانه برابر است با

۱. $110(1 + \text{Lnr})$
 ۲. $\frac{1}{1-e} \left(\frac{110}{r} - 220e + 110 \right)$

۴. هیچکدام

۳. $\frac{110}{e-1}(r+e-2)$

حل. در این مساله با استوانه های هم پتانسیل مواجه هستیم. بنابراین پتانسیل از θ مستقل است و معادله لاپلاس به صورت $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = 0$ در می آید که دارای جواب عمومی $u = c_1 \text{Lnr} + c_2$ است. با توجه به شرایط $u(1) = 110$ ، $u(e) = 220$ می یابیم $c_1 = c_2 = 110$ و از آنجا $u = 110(1 + \text{Lnr})$ بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۸۶. تصویر خط $y = x + \frac{1}{z}$ بوسیله نگاشت $w = \frac{1}{z}$ عبارت است از

۱. خطی که از مبدا می گذرد.
 ۲. خطی که از مبدا نمی گذرد.
 ۳. دایره ای که از مبدا می گذرد.
 ۴. دایره ای که از مبدا نمی گذرد.

حل. داریم $x = \frac{u}{u^2 + v^2}$ و $y = -\frac{v}{u^2 + v^2}$. با قراردادن آنها در $y = x + \frac{1}{z}$ می یابیم

$u^2 + u^2 + 2u + 2v = 0$ که معادله دایره ای است که از مبدا می گذرد. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

مهندسی مکانیک ۷۲-۷۱

۷۸. اگر v مزدوج همساز تابع $u(x, y) = 2x(1-y)$ باشد و $f(z) = u + iv$ ، آنگاه

۱. $f'(z) = 2iz$
 ۲. $f'(z) = -y + ix$

۳. $f'(z) = 2(1-y) + 2ix$
 ۴. $f'(z) = 2(1-y) + 2i(x-1)$

حل. داریم

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = 2(1-y) + 2ix$$

از این رو گزینه (۳) صحیح است .
 ۸۸. $\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{(x^2+1)^r} dx ; m > 0$ برابر است با

۱. $\frac{\pi e^m(1+m)}{4}$
 ۲. $\frac{\pi e^{-m}(1+m)}{4}$
 ۳. $\frac{\pi e^m(1+m^r)}{2}$
 ۴. $\frac{\pi e^{-m}(m^r-1)}{2}$

حل. هرگاه $f(z) = \frac{e^{imz}}{(z^2+1)^r}$ ، آنگاه

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{(x^2+1)^r} dx = \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{e^{imz}}{(z^2+1)^r} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{imz}}{(z+1)^r} \right) \right\}_{z=i} = \frac{\pi m+1}{4} e^m$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است .

مهندسی مکانیک ۷۲-۷۳

۸۹. سری لوران تابع $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ در ناحیه $|z-1| > 2$ عبارت است از

۱. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+2}}$
 ۲. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+1}}$
 ۳. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{(z-1)^{n+1}}$
 ۴. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{(z-1)^{n+2}}$

حل.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{z+1} = \frac{1}{2} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{2+z-1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{(z-1) \left(1 + \frac{2}{z-1} \right)} = \frac{1}{2} \frac{1}{z-1} \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{z-1} \right)^n \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{z-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2}{z-1} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+2}} \end{aligned}$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است .

۹۰. $\int_{|z|=2} \tan z dz$ در جهت مثبت مثلثاتی برابر است با

۱. $4\pi i$ ۲. $2\pi i$ ۳. $-4\pi i$ ۴. $-2\pi i$

حل. تابع $\tan z$ در نقاط $z = \pm \frac{\pi}{2}$ واقع در $|z|=2$ تحلیلی نیست. بنابراین

$$\int_{|z|=2} \tan z \, dz = 2\pi \left\{ \operatorname{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} \tan z + \operatorname{Res}_{z=-\frac{\pi}{2}} \tan z \right\} = 2\pi i \{-1-1\} = -4\pi i.$$

از این رو گزینه (۳) صحیح است.

مهندسی مکانیک ۷۳-۷۴

۹۱. فرض کنید $f(z)$ تابعی تحلیلی با قسمت حقیقی $u = e^{x^2-y^2} \cos(2xy)$ باشد، آنگاه $f'(1)$ برابر

است با

- ۱. $-e$
- ۲. e
- ۳. $-2e$
- ۴. $2e$

حل.

$$f'(z) = u_x - iu_y = 2xe^{x^2-y^2} \cos(2xy) - 2ye^{x^2-y^2} \sin(2xy)$$

$$-i \left[-2ye^{x^2-y^2} \cos(2xy) - 2x \sin(2xy) e^{-x^2-y^2} \right]$$

و $f'(1) = 2e$ بنابراین گزینه (۴) درست است.

۹۲. هرگاه C دایره $|z-1-2i|=2$ باشد، آنگاه $\oint_C \frac{z+1}{z^2-2z^2} dz$ برابر است با

- ۱. $-\frac{3}{4}\pi i$
- ۲. $\frac{3}{4}\pi i$
- ۳. صفر
- ۴. πi

حل. تابع $f(z) = \frac{z+1}{z^2-2z^2}$ دارای دو قطب $z=0$ و $z=2$ است که هیچکدام از آنها داخل دایره C

نیستند. بنابراین $\int_C f(z) dz = 0$ و گزینه (۳) درست است.

۴۶۱

جواب مسائل با شماره های فرد

بخش ۱.۱۰ صفحه ۶

- | | |
|--|--|
| 1. $2\pi, 2\pi, \pi, \pi, 2, 2, 1, 1$ | 17. 0 (n even), $2/n$ (n odd) |
| 19. 0 | 21. $n[(-1)^n e^{-\pi} - 1]/(1 + n^2)$ |
| 23. $[(-1)^n e^{-\pi} - 1]/(1 + n^2)$ | |
| 25. 0 ($n = 0$), π/n ($n = 1, 3, \dots$), $-\pi/n$ ($n = 2, 4, \dots$) | |

بخش ۲.۱۰ صفحه ۱۴

1. $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - + \dots \right)$
3. $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$
5. $\frac{4}{\pi} \left(\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - + \dots \right)$
7. $2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + - \dots \right)$
9. $\frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{9} \cos 3x - \frac{1}{16} \cos 4x + - \dots \right)$
11. $2 \left[\left(\frac{\pi^2}{1} - \frac{6}{1^3} \right) \sin x - \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{6}{2^3} \right) \sin 2x + \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{6}{3^3} \right) \sin 3x - + \dots \right]$
13. $\frac{2}{\pi} \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{2}{9\pi} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{2}{25\pi} \sin 5x + \dots$
15. $\frac{4}{\pi} \left(\sin x - \frac{1}{9} \sin 3x + \frac{1}{25} \sin 5x - + \dots \right)$

بخش ۱۰. ۳ صفحه ۱۸

1. $\frac{4}{\pi} \left(\sin \pi x + \frac{1}{3} \sin 3\pi x + \frac{1}{5} \sin 5\pi x + \dots \right)$
3. $1 + \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{2} + \dots \right)$
5. $\frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2} \left(\cos \pi x - \frac{1}{4} \cos 2\pi x + \frac{1}{9} \cos 3\pi x - + \dots \right)$
7. $\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \left(\cos \pi x + \frac{1}{9} \cos 3\pi x + \dots \right) + \frac{1}{\pi} \left(\sin \pi x - \frac{1}{2} \sin 2\pi x + - \dots \right)$
9. $-\frac{4}{\pi^2} \left(\cos \pi x + \frac{1}{9} \cos 3\pi x + \dots \right) + \frac{2}{\pi} \left(2 \sin \pi x - \frac{1}{2} \sin 2\pi x + - \dots \right)$
11. $1 - \frac{12}{\pi^2} \left(\cos \pi x - \frac{1}{4} \cos 2\pi x + \frac{1}{9} \cos 3\pi x - \frac{1}{16} \cos 4\pi x + - \dots \right)$
13. $4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\pi x - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\pi x - \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\pi x - \dots \right)$
17. Write τ for x in Example 1 and set $\tau = x - 1$.

بخش ۱۰. ۴ صفحه ۲۳

1. Even: $|x^2|, x^2 \cos nx, \cosh x$. Odd: $x \cos nx, \sinh x, x|x|$.
3. Odd 5. Odd 7. Even 9. Neither 11. Neither
13. $1/(1-x^2) + x/(1-x^2)$ 15. $\cosh kx + \sinh kx$
25. $\frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi} \left(\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - + \dots \right)$
27. $\frac{4}{\pi} \left(\sin x - \frac{1}{9} \sin 3x + \frac{1}{25} \sin 5x - + \dots \right)$
29. $\frac{\pi^2}{6} - \frac{4}{\pi} \cos x - \frac{2}{2^2} \cos 2x + \frac{4}{3^2\pi} \cos 3x + \frac{2}{4^2} \cos 4x - \frac{4}{5^2\pi} \cos 5x + \dots$
31. $\frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{16} \cos 4x - + \dots$

بخش ۱۰. ۵ صفحه ۲۸

1. $\frac{4k}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{L} + \dots \right)$
3. $\frac{2L^2}{\pi} \left[\left(1 - \frac{4}{\pi^2} \right) \sin \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{L} + \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3^2\pi^2} \right) \sin \frac{3\pi x}{L} - \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi x}{L} + \dots \right]$
5. $\frac{2L}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{L} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{L} + \dots \right)$
7. $\left(1 + \frac{2}{\pi} \right) \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9\pi} \right) \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots$
9. $\frac{4L}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \sin \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi x}{L} - + \dots \right)$
11. $\frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{25} \cos \frac{5\pi x}{L} + \dots \right)$
13. $\frac{L^2}{3} - \frac{4L^2}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi x}{L} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{L} - \frac{1}{16} \cos \frac{4\pi x}{L} + - \dots \right)$
15. $\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\cos \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi x}{L} - + \dots \right)$

۴۶۳

$$17. a_0 = \frac{1}{L}(e^L - 1), \quad a_n = \frac{2L}{L^2 + n^2\pi^2} [(-1)^n e^L - 1]$$

$$19. \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} \cos \frac{2\pi x}{L} + \frac{1}{3 \cdot 5} \cos \frac{4\pi x}{L} + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos \frac{6\pi x}{L} + \dots \right)$$

بخش ۱۰. ۶ صفحه ۳۱

1. Use (7).

$$5. i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{inx}$$

$$9. \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{inx}$$

$$3. -\frac{2i}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{(2n+1)ix}$$

$$7. \pi + i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} e^{inx}$$

بخش ۱۰. ۷ صفحه ۳۱

$$3. y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + A(\omega) \sin t, \quad A(\omega) = 1/(\omega^2 - 1), \\ A(0.5) = -1.33, \quad A(0.7) = -1.96, \quad A(0.9) = -5.3, \quad A(1.1) = 4.8, \\ A(1.5) = 0.8, \quad A(2) = 0.33, \quad A(10) = 0.01$$

$$5. y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{\omega^2 - n^2} \cos nt$$

$$7. y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{\pi}{2\omega^2} + \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{\omega^2 - 1} \cos t + \frac{1}{9(\omega^2 - 9)} \cos 3t + \dots \right)$$

$$9. y = \frac{1 - n^2}{D} a_n \cos nt + \frac{nC}{D} a_n \sin nt, \quad D = (1 - n^2)^2 + n^2 c^2$$

$$11. y = -\frac{3c}{64 + 9c^2} \cos 3t - \frac{8}{64 + 9c^2} \sin 3t$$

$$13. y = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n c}{n^2 D_n} \cos nt - \frac{(-1)^n (1 - n^2)}{n^3 D_n} \sin nt \right], \quad D_n = (1 - n^2)^2 + n^2 c^2$$

$$15. I = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt), \quad A_n = (-1)^{n+1} \frac{240(10 - n^2)}{n^2 D_n},$$

$$B_n = \frac{(-1)^{n+1} 2400}{n D_n}, \quad D_n = (10 - n^2)^2 + 100n^2$$

بخش ۱۰. ۸ صفحه ۳۹

$$1. F = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots + \frac{1}{N} \sin Nx \right] \quad (N \text{ odd})$$

$$5. F = 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \dots + \frac{(-1)^{N+1}}{N} \sin Nx \right),$$

$$E^* \approx 8, 5, 3.6, 2.8, 2.3$$

$$7. F = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{9} \cos 3x - \dots + \frac{(-1)^{N+1}}{N^2} \cos Nx \right),$$

$$E^* \approx 4.14, 1.00, 0.38, 0.18, 0.10$$

$$9. F = \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{2}{9\pi} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{2}{25\pi} \sin 5x + \dots,$$

$$E^* = \frac{\pi^3}{12} - \pi \left[\frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{4} + \frac{4}{81\pi^2} - \frac{1}{16} + \frac{4}{625\pi^2} + \dots \right]; \quad 1.311, 0.525, 0.509, 0.313, 0.311$$

15. Use the Fourier series $\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x$.

بخش ۹.۱۰ صفحه ۴۸

9. $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\left(1 - \frac{2}{w^2}\right) \sin w + \frac{2}{w} \cos w \right] \frac{\cos wx}{w} dw$

11. $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{a \sin aw}{w} + \frac{\cos aw - 1}{w^2} \right] \cos xw dw$

13. $A = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos wv}{1+v^2} dv = e^{-w} (w > 0), \quad f(x) = \int_0^{\infty} e^{-w} \cos wx dw$

15. $f(ax) = \int_0^{\infty} A(w) \cos axw dw = \int_0^{\infty} A\left(\frac{p}{a}\right) \cos xp \frac{dp}{a}, \text{ where } wa = p.$

If we write again w instead of p , the result follows.

17. Differentiating (10) we have $\frac{d^2 A}{dw^2} = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f^*(v) \cos wv dv, \quad f^*(v) = v^2 f(v),$ and

the result follows.

بخش ۱۰.۱۰ صفحه ۵۳

1. $\sqrt{2/\pi} (\sin 2w - 2 \sin w)/w$

3. $\sqrt{2/\pi} (aw \sin aw + \cos aw - 1) / w^2$

7. $e^{-w} \sqrt{\pi/2}$

9. $\sqrt{2/\pi} [(2 - w^2) \cos w + 2w \sin w - 2]/w^3$

11. $\sqrt{\pi/2}$ if $0 < w < \pi, \quad 0$ if $w > \pi$

13. $\sqrt{\pi/2} \cos w$ if $|w| < \pi/2, \quad 0$ if $|w| > \pi/2$

17. $\sqrt{\pi/2} e^{-w} \cos w$

19. No

بخش ۱۱.۱۰ صفحه ۶۱

1. $1/(1+iw)\sqrt{2\pi}$

3. $\sqrt{2/\pi} (2-w)^{-1} \sin(2-w)$

5. $[-1 + (1+iaw)e^{-iaw}]/w^2 \sqrt{2\pi}$

7. $i\sqrt{2/\pi} (\cos w - 1)/w$

مسائل دوره ای فصل ۱۰ صفحه ۶۶

17. $\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$

19. $\frac{2}{\pi} \left(\sin x - \frac{2}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x - \frac{2}{6} \sin 6x + \dots \right)$

21. $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \dots \right)$

23. $-\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{4} \sin 4x - + \dots$

25. $\frac{8}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \dots \right)$

27. $\frac{\pi^2}{12} - \frac{2}{\pi} \cos x - \frac{1}{2^2} \cos 2x + \frac{2}{3^2\pi} \cos 3x + \frac{1}{4^2} \cos 4x - \dots$
29. $\frac{8}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3^3} \sin 3x + \frac{1}{5^3} \sin 5x + \dots \right)$
31. $-\frac{4}{\pi} \left(\sin \pi x + \frac{1}{3} \sin 3\pi x + \frac{1}{5} \sin 5\pi x + \dots \right)$
33. $\frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{2} x - \frac{1}{2} \sin \pi x + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} x - + \dots \right)$
35. $\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \left(\cos \pi x + \frac{1}{9} \cos 3\pi x + \dots \right) - \frac{1}{\pi} \left(\sin \pi x - \frac{1}{2} \sin 2\pi x + - \dots \right)$
37. $-\frac{4}{\pi^2} \left(\cos \pi x + \frac{1}{9} \cos 3\pi x + \dots \right) + \frac{2}{\pi} \left(2 \sin \pi x - \frac{1}{2} \sin 2\pi x + - \dots \right)$
39. $-\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \left(\cos \pi x - \frac{1}{4} \cos 2\pi x + \frac{1}{9} \cos 3\pi x - + \dots \right) + \frac{2}{\pi} \left(\sin \pi x - \frac{1}{2} \sin 2\pi x + - \dots \right)$
41. $\pi/4$ 43. $\pi^3/32$ 47. 5.168, 0.075, 0.075, 0.012, 0.012, 0.004
49. $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{\pi^2}{12\omega^2} - \frac{1}{\omega^2 - 1} \cos t + \frac{1}{4(\omega^2 - 4)} \cos 2t - + \dots$

بخش ۱.۱۱ صفحه ۷۴

25. $u = f(x)$ 27. $u_x = f(y), u = xf(y) + g(y)$
29. $u = c(y)e^{x^2y}$ 31. $u = v(x) + w(y)$
33. $u = c = const$ 35. $u = cx + g(y)$

بخش ۳.۱۱ صفحه ۸۴

1. $u = 0.02 \cos t \sin x$ 3. $u = k(\cos t \sin x - \cos 2t \sin 2x)$
5. $u = \frac{4}{5\pi} \left(\frac{1}{4} \cos 2t \sin 2x - \frac{1}{36} \cos 6t \sin 6x + \frac{1}{100} \cos 10t \sin 10x - + \dots \right)$
7. $u = \frac{8k}{\pi} \left(\cos t \sin x + \frac{1}{3^3} \cos 3t \sin 3x + \frac{1}{5^3} \cos 5t \sin 5x + \dots \right)$
9. $u = 12k \left[\left(\frac{\pi}{1^3} - \frac{8}{1^5\pi} \right) \cos t \sin x + \left(\frac{\pi}{3^3} - \frac{8}{3^5\pi} \right) \cos 3t \sin 3x + \dots \right]$
11. $u = 0.1 \sin x (\cos t - 2 \sin t)$ 15. $27, 960/\pi^8 \approx 0.9986$
17. $u = ke^{cx+y}$ 19. $u = k \exp [c(x^2 + y^2)]$
21. $u = ky^ce^{cx}$ 23. $u = k \exp (cx + y/c)$

بخش ۴.۱۱ صفحه ۸۸

9. 17.5n cycles/sec 13. $u = f_1(x) + f_2(xy)$
15. $u = xf_1(x-y) + f_2(x-y)$ 17. $u = f_1(x+y) + f_2(3x+y)$
23. $u = \frac{8L^2}{\pi^3} \left(\cos c \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 t \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3^3} \cos c \left(\frac{3\pi}{L} \right)^2 t \sin \frac{3\pi x}{L} + \dots \right)$

25. $u(0, t) = 0, u(L, t) = 0, u_x(0, t) = 0, u_x(L, t) = 0$
 27. $\beta L \approx \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \dots$ (more exactly 4.730, 7.853, 10.996, \dots)
 29. $\beta L \approx \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \dots$ (more exactly 1.875, 4.694, 7.855, \dots)

بخش ۱۱. صفحه ۱۰۲

3. $\lambda_1^2 = (\ln 2)/10, c^2 = 0.00702L^2$
 5. $u = \sin 0.1\pi x e^{-1.752\pi^2 t/100}$
 7. $u = \frac{40}{\pi^2} \left(\sin 0.1\pi x e^{-0.01752\pi^2 t} - \frac{1}{9} \sin 0.3\pi x e^{-0.01752(3\pi)^2 t} + \dots \right)$
 9. $u = \frac{8}{\pi^3} \left(\sin 0.1\pi x e^{-0.01752\pi^2 t} + \frac{1}{3^3} \sin 0.3\pi x e^{-0.01752(3\pi)^2 t} + \dots \right)$
 11. Since the temperatures at the ends are kept constant, the temperature will approach a steady-state (time-independent) distribution $u_t(x)$ as $t \rightarrow \infty$, and $u_t = U_1 + (U_2 - U_1)x/L$, the solution of (1) with $\partial u/\partial t = 0$ satisfying the boundary conditions.
 15. $u = 1$
 17. $u = 0.5 \cos 2x e^{-4t}$
 19. $u = \frac{\pi}{4} - \frac{8}{\pi} \left(\frac{1}{4} \cos 2x e^{-4t} + \frac{1}{36} \cos 6x e^{-36t} + \dots \right)$
 21. $u = \frac{\pi}{8} + \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \cos x e^{-t} - \frac{1}{\pi} \cos 2x e^{-4t} - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9\pi} \right) \cos 3x e^{-9t} + \dots$
 25. $w = e^{-\beta t}$
 27. $-\frac{K\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} nB_n e^{-\lambda_n^2 t}$
 29. 2.57, 0.52, 0.10°C
 31. $u = (\sin \frac{1}{2}\pi x \sinh \frac{1}{2}\pi y)/\sinh \pi$
 33. $u = \frac{80}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{24} \frac{\sinh [(2n-1)\pi y/24]}{\sinh (2n-1)\pi}$
 35. $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi(b-y)}{a}$,
 $A_n = \frac{2}{a \sinh (n\pi b/a)} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$
 37. $u(x, y) = \frac{A_0}{24} x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sinh (n\pi x/24)}{\sinh n\pi} \cos \frac{n\pi y}{24}$,
 $A_0 = \frac{1}{24} \int_0^{24} f(y) dy, A_n = \frac{1}{12} \int_0^{24} f(y) \cos \frac{n\pi y}{24} dy$
 39. $u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nx e^{-ny}, A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx,$
 $A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, n = 1, 2, \dots$

بخش ۱۱. صفحه ۱۱۰

$$7. \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(a-x)/r}^{(b-x)/r} e^{-w^2} dw - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(a+x)/r}^{(b+x)/r} e^{-w^2} dw$$

11. $A(p) = \frac{2}{\pi(1+p^2)}, B(p) = 0, u = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{1+p^2} \cos px e^{-c^2 p^2} dp$

13. $A(p) = \frac{2 \sin p}{\pi p}, B(p) = 0, u = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin p}{p} \cos px e^{-c^2 p^2} dp$

بخش ۸.۱۱ صفحه ۱۲۲

1. c increases and so does the frequency.
5. $c\pi\sqrt{260}$ (corresponding eigenfunctions $F_{4,10}, F_{10,14}$), etc.
7. $A = ab, b = A/a, (ma^{-2} + na^2A^{-2})' = 0$ gives $a^2/b^2 = m/n$.
9. $f_1(x) = 2(4x - x^2), f_2(y) = 2y - y^2$
11. $B_{mn} = (-1)^{m+1}8/mn\pi$ (n odd), 0 (n even)
13. $4(\cos m\pi/2 - (-1)^m)(\cos n\pi/2 - (-1)^n)/mn\pi^2$
15. $B_{mn} = (-1)^{m+n}ab/mn\pi^2$
17. $B_{mn} = 4[1 - (-1)^n(b+1)][1 - (-1)^m(a+1)]/mn\pi^2$
19. $B_{mn} = (-1)^{m+n} \frac{144a^3b^3}{m^3n^3\pi^6}$
21. $u = k \cos \pi\sqrt{5}t \sin \pi x \sin 2\pi y$
23. $u = k \cos 5\pi t \sin 3\pi x \sin 4\pi y$

بخش ۹.۱۱ صفحه ۱۲۵

9. $u = 30r \sin \theta - 10r^3 \sin 3\theta$
11. $u = \frac{400}{\pi} \left(r \sin \theta + \frac{1}{3} r^3 \sin 3\theta + \frac{1}{5} r^5 \sin 5\theta + \dots \right)$
13. $u = \frac{2}{\pi} r \sin \theta + \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta - \frac{2}{9\pi} r^3 \sin 3\theta - \frac{1}{4} r^4 \sin 4\theta + \dots$
15. $u = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(r \cos \theta + \frac{1}{9} r^3 \cos 3\theta + \frac{1}{25} r^5 \cos 5\theta + \dots \right)$
17. $u = \pi/2$
19. $u = \frac{4u_0}{\pi} \left(\frac{r}{a} \sin \theta + \frac{1}{3a^3} r^3 \sin 3\theta + \frac{1}{5a^5} r^5 \sin 5\theta + \dots \right)$
21. $a^2 u_{xx} + c^2 u_{yy}$
23. $4x^* u_{xx} + 4y^* u_{yy} + 2u_x + 2u_y$
25. $u_{xx} + u_{yy}$
27. Use $\nabla^2 u = 0$ and $u_n = u_r$.

بخش ۱۰.۱۱ صفحه ۱۳۲

5. $T = 6.828\rho R^2 f_1^2, f_1$ the fundamental frequency
9. No
15. $u = 4k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_2(\alpha_m)}{\alpha_m^2 J_1^2(\alpha_m)} \cos \alpha_m t J_0(\alpha_m r)$
23. $\alpha_{11}/2\pi \approx 0.6099$ (see Table A1 in Appendix 5)

بخش ۱۱.۱۱ صفحه ۱۳۷

3. $u = 160/r + 30$ 5. $u = -40 \ln r / (\ln 2) + 150$
 17. $u = (u_1 - u_0)(\ln r) / \ln(r_1/r_0) + (u_0 \ln r_1 - u_1 \ln r_0) / \ln(r_1/r_0)$

بخش ۱۲. ۱۱ صفحه ۱۴۳

5. $u = 1$
 7. $\cos 2\phi = 2 \cos^2 \phi - 1$, $2x^2 - 1 = \frac{2}{3}P_2(x) - \frac{1}{3}$, $u = \frac{2}{3}r^2P_2(\cos \phi) - \frac{1}{3}$
 9. $x^3 = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}P_1(x)$, $u = \frac{2}{5}r^3P_3(\cos \phi) + \frac{3}{5}rP_1(\cos \phi)$
 11. $u = 4r^3P_3(\cos \phi) - 2r^2P_2(\cos \phi) + rP_1(\cos \phi) - 2$
 17. This is the analog of Example 1 with 55 replaced by 10.
 19. $55(3/8 + 5/16) \approx 37.8$
 25. $u = U_0 \cos(\pi t / \sqrt{LC}) \sin(\pi x / l)$

بخش ۱۳. ۱۱ صفحه ۱۴۹

5. $U(x, s) = \frac{c(s)}{x^2} + \frac{x}{s^2(s+1)}$, $U(0, s) = 0$, $c(s) = 0$,
 $u(x, t) = x(t - 1 + e^{-t})$
 9. Set $x^2/4c^2t = z^2$. Use z as a new variable of integration. Use $\operatorname{erf}(\infty) = 1$.

مسائل دوره ای فصل ۱۱ صفحه ۱۵۵

21. $u = A(x) \cos 4y + B(x) \sin 4y$ 23. $u = A(y)e^{-2x} + B(y)e^x - 5$
 25. $u = g(x)(1 - e^{-y}) + f(x)$ 27. $u = f_1(y) + f_2(x + y)$
 29. $u = yf_1(x + y) + f_2(x + y)$ 31. $u = f_1(x + y) + f_2(2y - x)$
 33. $u = f_1(2x - y) + f_2(2y - x)$ 35. $-0.1 \cos 3t \sin 3x$
 37. $\frac{3}{4} \cos t \sin x - \frac{1}{4} \cos 3t \sin 3x$ 39. $u = k$
 41. $u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x e^{-4t}$ 43. $u = \sin 0.02\pi x e^{-0.004572t}$
 45. $u = \frac{3}{4} \sin \frac{\pi x}{10} e^{-0.1143t} - \frac{1}{4} \sin \frac{3\pi x}{10} e^{-1.029t}$
 47. $u = \frac{200}{\pi^2} \left(\sin \frac{\pi x}{50} e^{-0.004572t} - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi x}{50} e^{-0.04115t} + \dots \right)$
 49. $u = 95 \cos 2x e^{-4t}$ 59. $u = 275/r - 27.5$

بخش ۱. ۱۲ صفحه ۱۶۸

3. $32 - 24i$ 5. $-\frac{7}{41} + \frac{22}{41}i$ 7. $-47.2 - 23i$ 9. $-10 - 24i$
 11. $31/50$ 13. $2xy/(x^2 + y^2)$ 15. $x^2 - y^2, x^2$ 17. 16

بخش ۲. ۱۲ صفحه ۱۷۶

3. 2.5 5. 1 7. 1 9. $8/17$
 11. $\sqrt{2}(\cos \frac{1}{4}\pi + i \sin \frac{1}{4}\pi)$ 13. $10(\cos 0.927 + i \sin 0.927)$
 15. $\frac{1}{4}(\cos \frac{1}{4}\pi + i \sin \frac{1}{4}\pi)$ 17. $0.563(\cos 0.308 + i \sin 0.308)$
 19. -3.042 21. $\pi/4$ 23. $-2 + 2i$
 25. $-0.227 - 0.974i$ 27. $\pm(2 - 2i)$
 29. $\pm 1, \pm i, \pm(1 \pm i)/\sqrt{2}$ 31. $\pm(1 \pm i)/\sqrt{2}$
 33. $\sqrt[5]{2} \left(\cos \frac{k\pi}{12} + i \sin \frac{k\pi}{12} \right)$, $k = 1, 9, 17$

35. $3 + 2i, 2 - i$

37. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq |x|$, etc.

39. Equation (5) holds when $z_1 + z_2 = 0$. Let $z_1 + z_2 \neq 0$ and $c = a + ib = z_1/(z_1 + z_2)$. By (19) in Prob. 37, $|a| \leq |c|$, $|a - 1| \leq |c - 1|$. Thus $|a| + |a - 1| \leq |c| + |c - 1|$. Clearly $|a| + |a - 1| \geq 1$. Together we have the inequality below; multiply by $|z_1 + z_2|$ to get (5).

$$1 \leq |c| + |c - 1| = \left| \frac{z_1}{z_1 + z_2} \right| + \left| \frac{z_2}{z_1 + z_2} \right|$$

بخش ۱۲. صفحه ۱۸۰

1. Circle, radius 4, center $4i$
3. Annulus with center a
5. Vertical infinite strip
7. Right half-plane
9. Region between the two branches of the hyperbola $xy = 1$
11. Circle $(x - 17/15)^2 + y^2 = (8/15)^2$

بخش ۱۲. صفحه ۱۸۵

1. $14 + 8i, -1 - 2i, 4 - 12i$
3. $(9 - 13i)/500, -i, (-2 - 11i)/1000$
5. $2(x^3 - 3xy^2) - 3x, 2(3x^2y - y^3) - 3y$
7. $|w| > 9$
9. $|\arg w| \leq 3\pi/4$
11. $\operatorname{Re}(z^2/|z|^2) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2) = 1$ if $y = 0$ and -1 if $x = 0$. Ans. No.
13. $6z(z^2 + i)^2$
15. $2i/(1 - z)^2$
17. 0
19. $i/2$
21. $-1/27$
23. $-\frac{1}{2}(1 + i)$
25. The quotient in (4) is $\Delta x/\Delta z$, which is 0 if $\Delta x = 0$ but 1 if $\Delta y = 0$, so that it has no limit as $\Delta z \rightarrow 0$.
27. Use $\operatorname{Re} f(z) = [f(z) + \overline{f(z)}]/2$, $\operatorname{Im} f(z) = [f(z) - \overline{f(z)}]/2i$.
29. By continuity, for any $\epsilon > 0$ there is a $\delta > 0$ so that $|f(z) - f(a)| < \epsilon$ when $|z - a| < \delta$. Now $|z_n - a| < \delta$ for all sufficiently large n since $\lim z_n = a$. Thus $|f(z_n) - f(a)| < \epsilon$ for these n .

بخش ۱۲. صفحه ۱۹۲

1. Yes
3. Yes
5. For $z \neq 1$
7. Yes
9. No
11. No
13. $f(z) = -iz^2/2$
15. $f(z) = 1/z$
17. $f(z) = z^3$
19. No
21. No
23. $b = 1, v = -\sin x \sinh y$
29. $f'(z) = u_x = iv_x = 0, u_z = v_x = 0$, hence $v_y = u_y = 0$ by (1), $u = \text{const}, v = \text{const}, f = u + iv = \text{const}$.

بخش ۱۲. صفحه ۱۹۶

3. $1.469 + 2.287i, 2.718$
5. $3.610 - 1.972i, 4.113$
7. $-23.141, 23.141$
9. $-i, 1$
11. $\exp(x^3 - 3xy^2) \cos(3x^2y - y^3), \exp(x^3 - 3xy^2) \sin(3x^2y - y^3)$
13. $e^{-2x} \cos 2y, -e^{-2x} \sin 2y$
15. $e^{ni^4}, e^{-3ni^4}, e^{-ni^4}, e^{3ni^4}$
17. $5 \exp(i \arctan \frac{3}{4})$
19. $x > 0$
21. $y = (2n + 1)\pi/4, n = 0, \pm 1, \dots$
23. $z = \ln 2 + (2n + 1)\pi i, n = 0, \pm 1, \dots$
25. No solutions
27. $k = 1$
29. $(g/f)' = (g'f - gf')/g^2 = 0$, since $g' = g, f' = f; g/f = k = \text{const}$ by Prob. 29, Sec. 12.5. $g(0) = f(0) = e^0 = 1$ gives $k = 1, g = f$.

بخش ۱۲. ۷ صفحه ۲۰۰

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 3. $-0.303 - 2.112i$ | 5. $11013i$ |
| 7. $26.974 - 4.256i$ | 9. $\cosh 3\pi = 6195.8$ |
| 11. $-0.5150 + 0.1738i$ | 13. $-3.725 - 0.512i$ |
| 15. $1.960 + 3.166i$ | 17. $\frac{1}{2}(2n+1)\pi - (-1)^n 1.818i$ |
| 19. $\pm 2n\pi + i, \pm(2n+1)\pi - i$ | 21. $\pm(\pi/3)i \pm 2n\pi i, n = 0, 1, \dots$ |
23. Use Prob. 3.

بخش ۱۲. ۸ صفحه ۲۰۶

- | | |
|---|--|
| 5. $\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{4}\pi i = 0.347 + 0.785i$ | 7. $1.609 - 2.214i$ |
| 9. $4.605 + 3.142i$ | 11. $2.773 + 3.135i$ |
| 13. $\pm 2n\pi i, n = 0, 1, \dots$ | 15. $1.946 + (1 \pm 2n)\pi i, n = 0, 1, \dots$ |
| 17. $(-0.644 \pm 2n\pi)i, n = 0, 1, \dots$ | 19. $(\pi - 1 \pm 2n\pi)i, n = 0, 1, \dots$ |
| 21. $10.85 - 16.90i$ | 23. $(1+i)e^{2/\sqrt{2}}$ |
| 25. $1.032 + 0.870i$ | 27. $-54.05 - 7.70i$ |
| 29. $(1+i)/\sqrt{2}$ | 31. $27[\cos(\ln 3) - i \sin(\ln 3)]$ |
| 33. $\sqrt{2} e^{i\pi/4} [\cos(\ln \sqrt{2} - \frac{1}{4}\pi) + i \sin(\ln \sqrt{2} - \frac{1}{4}\pi)]$ | |
| 35. $\exp[(3+\pi i)(\ln \sqrt{29} - i \arctan 0.4)] = -276.2 - 436.0i$ | |
| 37. $3.350 + 1.189i$ | |
| 41. $\cosh w = \frac{1}{2}(e^w + e^{-w}) = z, (e^w)^2 - 2ze^w + 1 = 0, e^w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ | |

بخش ۱۲. ۹ صفحه ۲۱۲

- | | | |
|---------------------------|--------------------------------|----------------------------|
| 1. $v = u - 2x - 2$ | 3. $ w - 1 - i \leq \sqrt{2}$ | 5. $2.25 \leq w < 4.41$ |
| 7. $ w > 16$ | 9. $0 \leq w \leq 1/4$ | 11. $2xy = \text{const}$ |
| 13. $v^2 = 4k^2(k^2 + u)$ | 15. $ w = 2$ | 17. $ w \leq e, w \neq 0$ |
19. $|w| > \sqrt{e}, 0 < \arg w < \pi$

مسائل دوره ای فصل ۱۲ صفحه ۲۱۳

- | | | | |
|---|-------------------------------------|------------------------------|--------------------|
| 21. $-32 - 24i$ | 23. $\frac{9}{13} + \frac{29}{13}i$ | 25. $17 + 1.5i$ | 27. 4 |
| 29. $2/5$ | 31. 4 | 33. 5 | 35. 1 |
| 37. $\pm(1-i)/\sqrt{2}$ | 39. $\pm(1-3i)$ | 41. $6\sqrt{2} e^{3\pi i/4}$ | 43. $e^{-0.3218i}$ |
| 45. Circle, radius $\frac{1}{2}$, center $-1 + 3i$ | 47. Half-plane below $y = x$ | | |
| 49. $-1/z$ | 51. $\cos z$ | 53. No | 55. $3x^2y - y^3$ |
| 57. $1 - i$ | 59. $-3.725 - 0.512i$ | | |

بخشهای ۱۳ و ۱۳. ۲ صفحه ۲۲۷

- | | |
|---|--|
| 1. $z = (1 + 2i)t, 0 \leq t \leq 1$ | |
| 3. $z = 4 + 2i + (-1 + 3i)t, 0 \leq t \leq 1$ | |
| 5. $z = -4i + (-1 + 6i)t, 0 \leq t \leq 7$ | 7. Straight segment from 0 to $3 + 6i$ |

۴۷۱

9. Lower semicircle (radius 2, center $1 - i$)
 11. Parabola $y = 3x^2$ from $(-1, 3)$ to $(2, 12)$
 13. Ellipse $4x^2 + y^2 = 4$
 17. $t + i/t, 1 \leq t \leq 3$
 21. $2b(1 + i)$ 23. 0
 29. $-2\pi i$ 31. 0
 37. $1 + i/3$
 41. $32/3 + 64i/3, 32i, 8 + 128i/5$
 15. $3 - 4i + 4e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$
 19. $2 \cos t + i \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$
 25. 0 27. $-\pi^2$
 33. $-i/3$ 35. $-1 - i$
 39. $(\pi - \frac{1}{2} \sinh 2\pi)i$
 43. $i, 2i, 2i$ 49. $5e^3$

بخش ۱۳. صفحه ۲۳۶

5. Yes, by the deformation principle
 7. 0, no 9. $-\pi$, no 11. 0, no 13. 0, yes 15. 0, no
 17. 0, yes 19. $2\pi i$ 21. 0 23. $2\pi i$ 25. $-\pi, \pi$
 27. $-2\pi i, 0, -4\pi i$ 29. $-2\pi i, 0$

بخش ۱۳. صفحه ۲۴۰

1. $2 + 2i$ 3. -2 5. 0 7. $-i/3$ 9. $-2/\pi$
 11. 0 13. $-\sinh 1$ 15. $-1566i/35$

بخش ۱۳. صفحه ۲۴۴

1. $-\pi/2$ 3. $-\pi i/2$ 5. -2π 7. 0 9. πi
 11. 0 13. $\pi/8$ 15. 0 17. 2 19. $-2\pi \tanh 1$
 21. $2\pi i \ln 4 = 8.710i$ 23. $\pi e^{-2+2i} = -0.1769 + 0.3866i$
 25. Use partial fractions.

بخش ۱۳. صفحه ۲۴۹

1. 0 3. $2\pi^2 i$ 5. 0 7. $-6\pi i$ 9. $2\pi i$ 11. 0
 13. $2\pi i$ 15. 0 17. $2\pi^2 i$ 19. $-2\pi i$ 21. $\frac{2}{3}\pi e^{-4i}$

مسائل دوره ای فصل ۱۳ صفحه ۲۵۰

17. $-2\pi i$ 19. $2i$ 21. 0 23. $2\pi i$
 25. $-2\pi i$ 27. $i \sin 1$ 29. 0 31. $2 \sin 1$
 33. $-\frac{1}{2} \sin \pi^2$ 35. $-\pi/2$ 37. $-5 + 8\pi i$ 39. $2\pi^2 i$

بخش ۱۴. صفحه ۲۶۶

1. Yes, no, $\pm 1 + 2i$ 3. Yes, yes, 0 5. No, no, none
 7. Yes, no, ± 1 9. Yes, no, $\pm 1, \pm i$ 15. Convergent
 17. Convergent 19. Convergent 21. Divergent
 23. Convergent

25. $\frac{(n+2)n}{2(n+1)^2} < \frac{1}{2}, |R_n| \cong \frac{|w_{n+1}|}{1-q} = \frac{n+2}{2^n(n+1)} < 0.05, n=5, s=1.657$

بخش ۱۴. صفحه ۲۷۳

1. $-4i, 1$ 3. $0, 2/\sqrt{\pi}$ 5. $2i, 5$ 7. $-i, \infty$
 9. $2i/3, 1/3$ 11. $0, \sqrt{2}$ 13. $0, \infty$ 15. $0, 1$
 17. $0, \sqrt{2/3}$ 19. $\sum a_n z^{2n} = \sum a_n (z^2)^n, |z^2| < R, \text{ etc.}$

بخش ۱۴. صفحه ۲۷۹

1. 2 3. $\sqrt{5}$ 5. $\sqrt{7/2}$ 7. $1/6$ 9. $1/4$

بخش ۱۴. صفحه ۲۸۶

1. $1 - z + z^2/2! - z^3/3! + \dots, R = \infty$
 3. $\pi z - \pi^3 z^3/3! + \pi^5 z^5/5! - \dots, R = \infty$
 5. $1 - (z - \frac{1}{2}\pi)^2/2! + (z - \frac{1}{2}\pi)^4/4! - \dots, R = \infty$
 7. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(z+1) + \frac{1}{8}(z+1)^2 + \frac{1}{16}(z+1)^3 + \dots, R = 2$
 9. $(z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 - \dots, R = 1$
 11. $-1 + 5(z+1) - 10(z+1)^2 + 10(z+1)^3 - 5(z+1)^4 + (z+1)^5$
 13. $\sin^2 z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2z = z^2 - 2^3 z^4/4! + 2^5 z^6/6! - \dots, R = \infty$
 15. $1 - (z - \frac{1}{2}\pi)^2/2! + (z - \frac{1}{2}\pi)^4/4! - \dots, R = \infty$
 27. $(2/\sqrt{\pi})(z - z^3/3 + z^5/2!5 - z^7/3!7 + \dots), R = \infty$
 29. $z^3/1!3 - z^7/3!7 + z^{11}/5!11 - \dots, R = \infty$

بخش ۱۴. صفحه ۲۹۰

1. $1 - z^4 + z^8 - z^{12} + \dots, R = 1$
 3. $2 + z + 2z^2 + z^3 + 2z^4 + \dots, R = 1$
 5. $2z^2 - 2^3 z^6/3! + 2^5 z^{10}/5! - \dots, R = \infty$
 7. $z + z^5/2! + z^9/3! + \dots, R = \infty$
 9. $2/(z-2) - 1/(z+4)^2 = -17/16 - (15/32)z - (67/256)z^2 + \dots, R = 2$
 11. $(1-i)/2 - [(1-i)^2/4](z-1-i) + [(1-i)^3/8](z-1-i)^2 - \dots, R = \sqrt{2}$
 13. $-i + (z-i) - 7i(z-i)^2 - 9(z-i)^3 + 5i(z-i)^4 + (z-i)^5$
 15. $1/3! - (z+1)^2/5! + (z+1)^4/7! - \dots, R = \infty$
 17. $i(z - \frac{1}{2}\pi) + i(z - \frac{1}{2}\pi)^3/3! + i(z - \frac{1}{2}\pi)^5/5! + \dots, R = \infty$
 19. $z^2 + z^4 + z^6/3 + \dots, R = \infty$
 21. $1 + 2(z - \frac{1}{4}\pi) + 2(z - \frac{1}{4}\pi)^2 + \frac{8}{3}(z - \frac{1}{4}\pi)^3 + \dots, R = \frac{1}{4}\pi$
 23. $1 - z^2/18 - z^3/27 + \dots, R = 3$

بخش ۱۴. صفحه ۳۰۰

1. Use Theorem 1. 3. $R = 1/\sqrt{\pi} > 0.56$
 5. $|\sin n|z|| \leq 1; \sum 1/n^2$ converges. 7. $|z|^n \leq 1; \sum n/(n^3 + |z|) \leq \sum 1/n^2$
 9. $|\tanh^n x| \leq 1, 1/n(n+1) < 1/n^2$ 11. $|z+2i| \leq \sqrt{3} - \delta, \delta > 0$
 13. $|z| \leq 4 - \delta, \delta > 0$ 15. Nowhere
 17. Convergence follows from the comparison test (Sec. 14.1). Let $R_n(z)$ and R_n^* be the remainders of (1) and (5), respectively. Since (5) converges, for given $\epsilon > 0$ we can find an $N(\epsilon)$ such that $R_n^* < \epsilon$ for all $n > N(\epsilon)$. Since $|f_n(z)| \leq M_n$ for all z in the region G , we also have $|R_n(z)| \leq R_n^*$ and therefore $|R_n(z)| < \epsilon$ for all $n > N(\epsilon)$ and all z in the region G . This proves that the convergence of (1) in G is uniform.

19. No. Why?

21. $n = 7, 10, 16, 27, 65$

بخش ۱۴. صفحه ۳۰۹

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{n!} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \dots, R = \infty$$

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} z^{2n-1} = \frac{1}{z} + 2z + \frac{2}{3} z^3 + \dots, R = \infty$$

$$5. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n-1} = \frac{1}{z} - z + z^3 - z^5 + \dots, R = 1$$

$$7. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{1-2n} = z - \frac{1}{2z} + \frac{1}{24z^3} - \dots, R = \infty$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^{n-7} = \frac{1}{z^6} - \frac{2}{z^5} + \frac{3}{z^4} - \frac{4}{z^3} + \dots, R = 1$$

$$11. - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^{n+1} (z-i)^{n-1} = -\frac{i/2}{z-i} + \frac{1}{4} + \frac{i}{8}(z-i) + \dots, R = 2$$

$$13. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} (z-\pi)^{2n-3} = -\frac{1}{(z-\pi)^3} + \frac{1}{2!(z-\pi)} - \frac{1}{4!}(z-\pi) + \dots, R = \infty$$

$$15. (z-1) + 2 - 3(z-1)$$

$$17. - \sum_{n=0}^{\infty} (z+i)^{n-1} = -(z+i)^{-1} - 1 - (z+i) - \dots, R = 1$$

$$19. \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$$

$$21. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (z-1)^{n-1}$$

$$23. \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

$$25. \sum_{n=0}^{\infty} z^{3n}, |z| < 1; - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{3n+3}}, |z| > 1$$

$$27. \sum_{n=0}^{\infty} z^{4n+2}, |z| < 1, - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{4n+2}}, |z| > 1$$

$$29. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n, 0 < |z-1| < 1; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}, |z-1| > 1$$

$$31. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (z + \frac{1}{2}\pi)^{2n-1}}{(2n)!}, |z + \frac{1}{2}\pi| > 0$$

$$33. (1-4z) \sum_{n=0}^{\infty} z^{4n}, |z| < 1, \left(\frac{4}{z^3} - \frac{1}{z^4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{4n}}, |z| > 1$$

35. Let $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ and $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ be two Laurent series of the same function

$f(z)$ in the same annulus. We multiply both series by $(z-z_0)^{-k-1}$ and integrate along a circle with center at z_0 in the interior of the annulus. Since the series converge uniformly, we may integrate term by term. This yields $2\pi i a_k = 2\pi i c_k$. Thus, $a_k = c_k$ for all $k = 0, \pm 1, \dots$.

بخش ۱۴. صفحه ۳۱۷

1. $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ (simple poles), ∞ (essential singularity)
3. $0, \infty$ (simple poles)
5. $\pm 1, \pm i$ (third-order poles), ∞ (essential singularity)
7. $-i, 2i$ (second-order poles), ∞ (essential singularity)
9. 0 (simple pole), ∞ (essential singularity)
11. 0 (essential singularity), $\pm 2/\pi, \pm 2/3\pi, \dots$ (simple poles)
13. ∞ (essential singularity)
15. $1, \infty$ (essential singularities), $\pm 2n\pi i$ ($n = 0, 1, \dots$, simple poles)
17. $\pm 2, \pm 2i$ (second order)
19. 0 (third order), $\pm 1, \pm 2, \dots$ (second order)
21. $(2n + 1)/2$ (third order) 23. $\pm 1/\sqrt{3}$ (simple)
25. $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ (fourth order), by (6), Sec. 12.7
27. $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ by (3), and $g(z_0) \neq 0$. Hence $1/g(z_0)$ is analytic at $z = z_0$. Let its Taylor series be

$$\frac{1}{g(z)} = c_0 + c_1(z - z_0) + \dots$$
 Then
$$\frac{1}{f(z)} = \frac{c_0 + c_1(z - z_0) + \dots}{(z - z_0)^n}$$
 which proves the first statement. Multiplication of $h(z)$ does not change this.
29. Apply Theorem 3 to $f(z) - k$.
31. Region between the 0° and 90° meridians
33. Small spherical disk centered at the North Pole
35. Belt between two parallels that includes the equator

مسائل دوره ای فصل ۱۴ صفحه ۳۱۸

21. $\infty, \sin(z - 2)$ 23. $1/2, \operatorname{Ln}(1 + 2z)$ 25. $1/3$
27. ∞, e^{-z^2} 29. $\infty, \cosh \sqrt{z}$
31. $1 - 2z + (2z)^2/2! - (2z)^3/3! + \dots, R = \infty$
33. $1/2 + (z + 1)/4 + (z + 1)^2/8 + (z + 1)^3/16 + \dots, R = 2$
35. $k - k^2(z - 2 - 3i) + k^3(z - 2 - 3i)^2 - \dots, k = (2 - 3i)/13, R = \sqrt{13}$
37. $1 + 3z + 6z^2 + 10z^3 + \dots, R = 1$
39. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n + 1)!} \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^{2n-2}, \left|z - \frac{\pi}{2}\right| > 0$, pole of second order
41. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-4}, 0 < |z| < 1$, pole of fourth order
43. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!z^{2n-3}}, |z| > 0$, essential singularity
45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z - 1)^{n-3}, 0 < |z - 1| < 1$, pole of second order
47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!n} z^{n-2}, |z| > 0$, simple pole
49. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^i}{n!} (z - i)^{n-5}, |z - i| > 0$, pole of fifth order

مسائل بخش ۱.۱۵ صفحه ۳۳۸

1. -3 (at $z = 1$) 3. $-1/3!$ (at $z = 0$)

- ۴۷۵
- | | |
|---|----------------------------|
| 5. $i/3$ (at $-i$), $-16i/3$ (at $2i$) | 7. 1 (at $z = \pm n\pi$) |
| 9. $\mp \frac{1}{2}$ (at ± 1) by (5) | 11. 1 (at $z = 0$) |
| 13. $-9/16, 9/16, -9i/16, 9i/16$ (poles of second order at $z = 1, -1, i, -i$) | |
| 15. $3/17$ (at $z = -1$) | 17. 0 |
| 21. $-6\pi i$ | 19. $2\pi i$ |
| | 23. $(1 - \pi^3/128)\pi i$ |

مسائل بخش ۱۵. صفحه ۳۳۱

- | | | | | |
|------------------------------------|--------------|---------------------------------------|--------------|---------------|
| 1. $-2\pi i$ | 3. $-6\pi i$ | 5. 0 | 7. $10\pi i$ | 9. $4\pi i/5$ |
| 11. $2\pi i(\cosh 1 - 1) = 3.412i$ | | | 13. $2\pi i$ | 15. $\pi/3$ |
| 17. πi | 19. $8\pi i$ | 21. $\pi i \sin \frac{1}{2} = 1.506i$ | | 23. $-4i$ |
| 25. $-4i$ | 27. 0 | 29. $-4i \sinh \frac{1}{2} = -2.084i$ | | |

مسائل بخش ۱۵. صفحه ۳۳۶

- | | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------|-------------|--------------|
| 1. $4\pi/\sqrt{3}$ | 3. $2\pi/35$ | 5. $8\pi/3$ | 7. $\pi/30$ | 9. 0 |
| 11. π | 13. $\pi/\sqrt{2}$ | 15. $2\pi/3$ | 17. $\pi/2$ | 19. $\pi/16$ |

مسائل بخش ۱۵. صفحه ۳۴۲

- | | | |
|------------------------------|---|-----------------------------------|
| 3. 0 | 5. $(2\pi/\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}i} \cos \frac{1}{2} = 1.339$ | 7. πe |
| 9. 0 | 11. $-\pi(\sin 1)/\sqrt{3}e^{\sqrt{3}} = -0.2700$ | |
| 13. $\pi/10e^2 - 2\pi/30e^3$ | 15. π | 17. $-\sqrt{3}\pi/6$ |
| 19. $-\pi/2$ | 21. $\pi/2$ | 23. $(3 - e^{-\pi})\pi/2 = 4.645$ |

مسائل دوره ای فصل ۱۵ صفحه ۳۴۳

- | | | | |
|----------------------------|--------------------|----------------------|----------------------|
| 11. 0, yes | 13. $5\pi/2$, yes | 15. $-18\pi i$, yes | 17. 0, no |
| 19. $-2\pi i/(n+1)!$, yes | | 21. $-i/2$, no | 23. $-64\pi i$, yes |
| 25. $\pi/4$, yes | 27. $2\pi/7$ | 29. $4\pi/\sqrt{3}$ | 31. $\pi/60$ |
| 33. $\pi/2$ | 35. 0 | 37. $\pi/3$ | 39. $\pi/2$ |

مسائل بخش ۱۶. صفحه ۳۵۲

- | | |
|---|----------------------------|
| 1. $u = 1 - \frac{1}{4}v^2, 4 - \frac{1}{16}v^2, 9 - \frac{1}{36}v^2, 16 - \frac{1}{64}v^2$ | 3. $v = 20$ |
| 5. The positive and the negative v -axis, respectively | 7. $ w < \frac{1}{2}$ |
| 9. $ \arg w < 2\pi/3$ | 11. $\pi/2 < \arg w < \pi$ |
| 13. $4e^{it}, 4ie^{it}$ | |
| 15. $3 \cos t + i \sin t, -3 \sin t + i \cos t$ | |
| 17. $t + it^{-1}, 1 - it^2$ | 19. $-a/2$ |
| 21. $\pm 2, \pm 2i$ | |
| 23. 0, $\pm \pi i/2, \pm \pi i, \dots$ | 25. By conformality |
| | 27. Only in size |

مسائل بخش ۱۶. صفحه ۳۵۸

- | | | | |
|-------------------------|---------------------------------------|--|------------|
| 1. $z = 0$ | 3. 0, $\pm 1, \pm i$ | 5. $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ | 7. $\pm i$ |
| 9. $\pm i$ | 11. $w = 4/z, w = (z+4)/(z+1)$, etc. | 13. $w = az/d$ | |
| 15. $w = (az+b)/(a-bz)$ | | 17. $z = (2iw - 4i)/(-w + 3)$ | |

مسائل بخش ۱۶. صفحه ۳۶۴

- | | |
|------------------------------|---------------------------------|
| 1. $w = 3z + 2$ | 3. $w = (z+1)/(-3z+1)$ |
| 5. $w = 1/z$ | 7. $w = (3iz+1)/z$ |
| 9. $w = iz$ | 13. $z = (-4w+1)/(2w-1)$ |
| 15. $w = (2z - i)/(-iz - 2)$ | 19. $w = (z^4 - i)/(-iz^4 + 1)$ |



مسائل بخش ۱۶. ۴ صفحه ۳۷۱

1. $1 \leq |w| \leq e, 0 \leq \arg w \leq \frac{1}{2}\pi$
3. $e < |w| < e^2, -\frac{1}{2}\pi < \arg w < \frac{1}{2}\pi$
5. Interior of the ellipse $u^2/(\cosh^2 2) + v^2/(\sinh^2 2) = 1$ in the first quadrant
7. Elliptical annulus bounded by $u^2/\cosh^2 1 + v^2/\sinh^2 1 = 1$ and $u^2/\cosh^2 2 + v^2/\sinh^2 2 = 1$ and cut along the positive imaginary axis
9. $v = z^2$ maps the given region onto the strip $0 < \text{Im } t < \pi$, and $w = e^t$ maps this strip onto the upper half-plane. Ans. $w = e^{z^2}$.
11. $w' = \cos z = 0$ at $z = \pm(2n + 1)\pi/2, n = 0, 1, \dots$
13. $\pm n\pi, n = 0, 1, \dots$
15. Upper half-plane $v > 0$
17. Lower half-plane $v < 0$
19. $\ln 2 \leq u \leq \ln 3, \pi/4 \leq v \leq \pi/2$

مسائل بخش ۱۶: ۵ صفحه ۳۷۶

1. w moves once around the unit circle $|w| = 1$.
5. $|z| = 1; \ln z = \ln |z| + i\theta = i\theta$ moves up the v -axis by 2π each time.
7. ± 1 (first order), 2 sheets
9. 0, 2 sheets
11. a , 3 sheets
13. 0, ± 1 , 2 sheets
15. -1 , infinitely many sheets
17. $-\frac{1}{2}i$, 3 sheets
19. 0, 2 sheets

مسائل دوره ای فصل ۱۶ صفحه ۳۷۷

11. $u = \frac{1}{4}v^2 - 1, \frac{1}{4}v^2 - 1$
13. $|w| = 6.25, |\arg w| < \pi/4$
15. $v = 4u/3$
17. $\pi/4 < \arg w \leq \pi/2$
19. The domain between the parabolas $u = \frac{1}{4} - v^2$ and $u = 1 - \frac{1}{4}v^2$
21. $|\arg w| < \pi/8$
23. $u = 1$
25. $|w + \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$
27. 0, $\pm i$
29. $\pm i/\sqrt{3}$
31. $(\pm n + \frac{1}{4})\pi$
33. iz
35. $z/(z + 2)$
37. $5z$
39. $2z/(z - 1)$
41. $w = iz^2 + 1$
43. $w = iz$
45. $w = e^{3z}$
47. $w = z^2/2k$
49. $2 \pm \sqrt{6}$

بخش ۱۷. ۱ صفحه ۳۸۷

1. $\Phi = 20x + 200$
3. $\Phi = 20(1 - y/d)$
5. $\Phi = 110 - 50xy$
7. $(110 \ln r)/\ln 2$
9. $200 - (100 \ln r)/\ln 2$
11. $y = x/2 + c$
13. $x^2 - y^2 = \text{const}$
15. $(x - 1/2c)^2 + y^2 = 1/4c^2$
17. $u = c \text{ Re } [\text{Ln}(z - a) + \text{Ln}(z + a)] = c \ln |z^2 - a^2|$

بخش ۱۷. ۲ صفحه ۳۹۲

3. $\Phi(x, y) = U_2xy, w = u + iv = iz^2$ maps R onto $-2 \leq u \leq 0$.
5. Apply $w = z^2$.
7. Corresponding rays in the w -plane make equal angles, and the mapping is conformal.

9. $z = (2Z - i)/(-iZ - 2)$

بخش ۱۷. ۳ صفحه ۳۹۷

1. $(100/d)y$. Rotate through $\pi/2$.
3. $100 - 240\theta/\pi$
5. $\text{Re } F(z) = 100 + (200/\pi) \text{Re}(\sin^{-1} z)$
7. $T_1 + \pi^{-1}(T_2 - T_1) \text{Arg}(w - a)$
9. $T_0[\text{Arg}(w - 1) - \text{Arg}(w + 1)]/\pi$
15. $120\pi^{-1} \text{Arg } z$
17. $T_0 + 2\pi^{-1}(T_1 - T_0) \text{Arg } z$
19. $400(\text{Arg } z)/\pi$