Year. Month. Date.

میان ترم: ۸ آذر ـ ۳/۱ پنجشنبه کوئیز ـ [illegible] ـ حضور

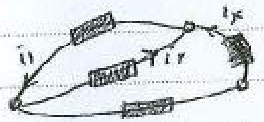
فصل اول: قوانین مدارهای فشرده

فشرده: ابعاد مدار از طول موج متناظر بسیار کوچکتر است. از نظر تئوری الکترومغناطیس ابعاد مدار < نقطه‌ای دارند
گسترده:

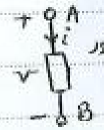
عنصر فشرده: جریان گذرنده از عنصر و ولتاژ دو سر آن کمیت‌های کاملاً معینی هستند.

شاخه: هر عنصر الکتریکی دوسر یک شاخه نامیده می‌شود. ولتاژ / جریان > متغیرهای اساسی هستند.

گره: محل اتصال چند شاخه



یک عنصر دلخواه دو سر مطابق مقابل در نظر می‌گیریم



جهت قراردادی برای ولتاژ با علامت‌های + و − در کنار سرهای A و B مشخص می‌شود

جهت قراردادی برای جریان با یک پیکان (→) نمایش داده می‌شود.

پتانسیل نقطه A نسبت به نقطه B مثبت‌تر (بیشتر) است.

قرارداد: جریان از سر + به سمت سر − جاری شود.

ولتاژ لحظه‌ای

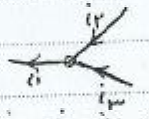
$$v(t) = v_A(t) - v_B(t)$$

با در نظر گرفتن قرارداد بالا حاصلضرب $v(t) \times i(t)$ توانی است که در لحظه‌ی t به شاخه تحویل داده می‌شود.

جریان از سر + وارد و از سر − خارج می‌شود. آهنگ حرکت بار = جریان

قانون جریان (KCL):

در هر لحظه، در هر گره از مدار الکتریکی فشرده مجموع جبری جریان همه شاخه‌هایی که از آن گره خارج می‌شوند صفر است.



$$* \quad i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

- از اصل بقای بار آمده است.
- KCL یک محدودیت خطی روی جریان شاخه‌ها می‌گذارد. یعنی جریان‌های i_1 و i_2 و i_3 هر عددی نمی‌توانند باشند و باید اعدادی باشند که در رابطه * صدق کنند
- KCL به ماهیت اجزاء مدار بستگی ندارد
- مثال نقض: آنتن گسترده است.

Year. Month. Date.

Producers: Amin Raeszadeh & Mohsen Safaee
Producers: Amin Raeszadeh & Mohsen Safaee
Producers: Amin Raeszadeh & Mohsen Safaee
Producers: Amin Raeszadeh & Mohsen Safaee
Producers: Amin Raeszadeh & Mohsen Safaee
Producers: Amin Raeszadeh & Mohsen Safaee
Producers: Amin Raeszadeh & Mohsen Safaee
Producers: Amin Raeszadeh & Mohsen Safaee
Producers: Amin Raeszadeh & Mohsen Safaee
Producers: Amin Raeszadeh & Mohsen Safaee
Producers: Amin Raeszadeh & Mohsen Safaee
Producers: Amin Raeszadeh & Mohsen Safaee
Producers: Amin Raeszadeh & Mohsen Safaee

با استفاده از kcl و kvl :

۶ شاخه و ۳ متغیر جریان مستقل و ۳ تا متغیر ولتاژ مستقل دارد

kcl @ node1 : $-i_1 + i_2 + i_3 = 0$

kcl @ node2 : $i_5 - i_3 - i_4 = 0$

kcl @ node3 : $i_1 + i_4 + i_6 = 0 \Rightarrow i_6 = -i_1 - i_4$

از 1 : $i_3 = i_1 - i_2$ از 2 : $i_5 = i_3 + i_4 \Rightarrow i_5 = i_1 - i_2 + i_4$

$\sum v_k i_k = v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 + v_4 i_4 + v_5 i_5 + v_6 i_6 = 0$

$= v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 (i_1 - i_2) + v_4 i_4 + v_5 (i_1 - i_2 + i_4) +$

$v_6 (-i_1 - i_4) = 0$

از طریق KVL

$= i_1 (v_1 + v_3 + v_5 - v_6) + i_2 (v_2 - v_3 - v_5) +$

$i_4 (v_4 + v_5 - v_6) =$ صفر

از طریق KVL قطعاً می‌شود / این شاخه‌ها

از طریق KVL ۱ و ۳ و ۵ و ۶ یک حلقه را تشکیل می‌دهند جمع جبری

اضلاع تناسل های حلقه صفر است

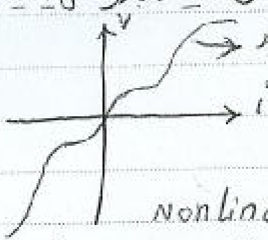
تمرین فصل اول:

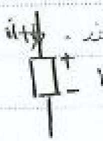
3 ، ۷ ، 6 ـ 9 ، 11 ، 12 ، ۱۴

خلاصه نویسی ۷٫۱۵

مقاومت : از نظر ریاضی عنصری است که در هر لحظه ، جریان و ولتاژ آن در یک رابطه ریاضی یا یک منحنی

در صفحه $v\,i$ صدق می‌کند . به این منحنی ها مشخصه می‌گویند

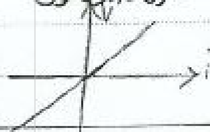




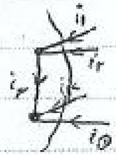
انواع مقاومت : ۱) خطی linear ۲) غیرخطی Nonlinear

۳) تغییرپذیر با زمان ۴) تغییر ناپذیر با زمان Time Invariant

۱) مقاومت خطی تغییر ناپذیر با زمان : یعنی عنصری که در قانون اهم صدق می‌کند $v(t) = R\,i(t)$



: Linear time Invariant (LTI)



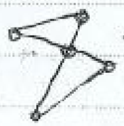
- kcl برای گره های مرکب نیز صادق است
- جریان هایی که به یک گره ساده یا مرکب وصل (وارد یا خارج) می‌شوند متغیرهای مستقل (یا همان مفهوم محدودیت خطی)

فرض کنید n شاخه و m گره داریم چند جریان مستقل خواهیم داشت در هر گره بالاخره یک جریان به جریان های دیگر وابسته می‌شود

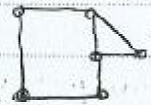
- تعداد متغیرهای مستقل جریان شاخه‌ها در هر مدار برابر با تعداد شاخه ها منهای تعداد گره ها به اضافه یک است چون هر شاخه بالاخره به یک شاخه دیگر متصل می‌شود.

قانون حلقه (KVL) :

- قانون حلقه معادل قانون گره است
- حلقه یک مسیر بسته است که گره ی ابتدا و انتهای آن یکی است و از روی هر گره بیش از یک بار عبور نمی‌کند .



← ۲ حلقه

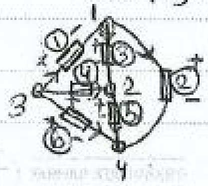


← ۱ حلقه

KVL : در مدارها) در هر حلقه از مدار فشرده مجموع جبری ولتاژ شاخه های حلقه برابر صفر است

نکته : برای به کار بردن KVL یک جهت قرار دادی در حلقه تعریف می‌کنیم و شاخه های که جریان آن ها با این جهت یکی باشد دارای علامت ولتاژ + خواهند بود و معمولاً جهت ساعتگرد به عنوان جهت اختیاری برگزیده می‌شود .

- قانون KVL یک محدودیت خطی روی ولتاژ شاخه ها ایجاد می‌کند و به ماهیت اجزاء مدار بستگی ندارد
- ولتاژها متغیرهای مستقل نیستند
- تعداد متغیرهای مستقل ولتاژهای شاخه برابر است با تعداد گره ها ـ یک
- قانون KVL از قانون بقای انرژی (بقای میدان ها) نشئت گرفته است .



مثال : نشان دهید که در مدار روبه رو بدون توجه به ماهیت شاخه ها رابطه زیر برقرار است : « قضیه تلگان »

$$\sum_{k=1}^{6} v_k i_k = 0$$

جمع جبری توان ها صفر است

Year. Month. Date.

تبدیل v-i به v-i با قرینه کردن نسبت به نیمساز ربع اول و سوم صورت می گیرد.

$$i(t) = I_s\left(e^{\frac{qv(t)}{kT}} - 1\right)$$

q: بار الکترون

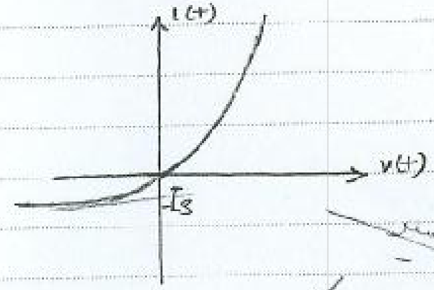
k: ثابت بولتزمن

T: دمای مطلق (k)

v: ولتاژ لحظه‌ای

I_s: جریان اشباع (بسیار کوچک)

$i(t)$: جریان لحظه‌ای



توابع نکنوا را باید در حالت ∞ بررسی کنیم.

ولتاژ منفی ← جریان ناچیز   ولتاژ مثبت ← جریان زیاد

○ مقاومت های غیر خطی هارمونیک های جدیدی تولید می‌کنند:

$v = 50i + 0.5i^3$

هارمونیک: مضاربی از یک فرکانس مبنا

$i = \cos\omega t$

varyabel مشخص کننده کنترل شد

$v(t) = 50(\cos\omega t) + 0.5(\cos^3\omega t)$

$f(\alpha x) = \alpha f(x)$ تابع همگن

$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ تابع جمع پذیر

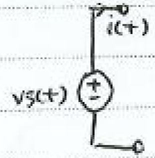
هر تابعی که هم همگن باشد و هم جمع پذیر خطی است.

منابع مستقل: منبع source

منابع: مستقل (ناوابسته) / وابسته

منابع: ولتاژ / جریان

۱) منبع ولتاژ مستقل: منبعی است که ولتاژ دو سر آن مستقل از جریان آن شناخته است.



○ جهت قرارداری برای منابع عکس جهت قرارداری است

چون R مصرف کننده است اما منبع ولتاژ تولید کننده است.

اگر بخواهیم طبق قرارداد قبل جریان را تعیین کنیم باید توان منفی شود که قرارداد را عکس می کنیم تا توان مثبت شود.

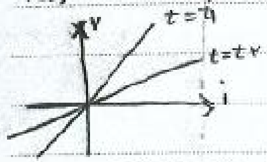
Year. Month. Date.

$R = \rho\frac{L}{A}$

۲) مقاومت خطی تغییر پذیر با زمان (LTV):

$v(t) = R(t)\, i(t)$

شیب با زمان تغییر می کند.

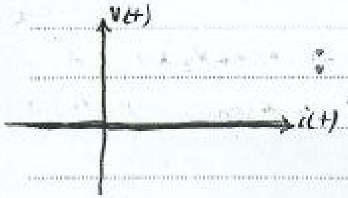


۳) غیر خطی و تغییر ناپذیر با زمان:

$v = f(i)$

۴) غیر خطی و تغییر پذیر با زمان:

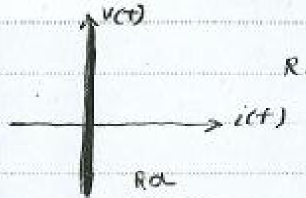
$v(t) = g[t, i(t)]$



مشخصه اتصال کوتاه ((short circuit)):

شاخه‌ای است که به ازای هر $i(t)$، $v(t)$ دو سر آن صفر است.

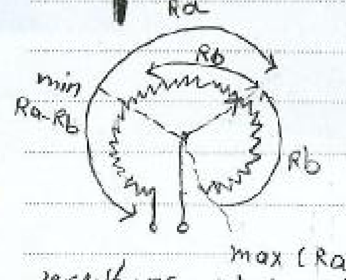
مشخصه مدار باز ((open circuit)):



به ازای هر $v(t)$، $i(t) = 0$

$R = \infty$ $G = 0$ → رسانایی (هدایت الکتریکی) $G = \frac{1}{R}$

پتانسیومتر

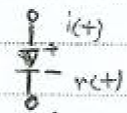


$$v(t) = [R_a + R_b\cos 2\pi f t]\, i(t)$$

دیود: وسیله‌ای است برای یکسو کردن جریان که در مدارهای ac به کار می رود.

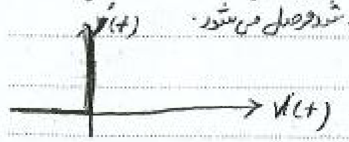
چون مدارهای ac که خودشان جهت مشخصی دارند.

شکل دیود



دیود ایده‌آل

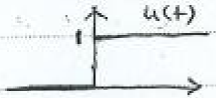
اگر ولتاژ دو سرش منفی شد قطع می شود و اگر ولتاژ دو سرش مثبت شد وصل می شود.



$i(t) > 0 \rightarrow v(t) = 0$

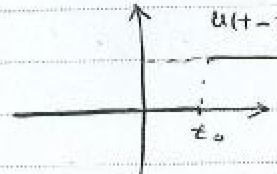
$v(t) < 0 \rightarrow i(t) = 0$

Year. Month. Date.



پله واحد

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases} \qquad u(0)=\frac{1}{2}$$



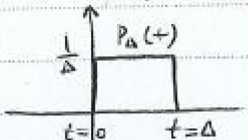
پله تأخیر یافته

$$u(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases}$$

Step Function مفهوم زدن کلید (روشن شدن) و بستن کلید (خاموش کردن)

تابع پالس: شکل موج مستطیلی

طوری تعریف می‌شود که سطح زیر آن برابر واحد گردد و آن تابع پالس واحد گویند.



$$P_\Delta(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{\Delta} & 0<t<\Delta\\ 0 & t>\Delta\end{cases}$$

به سمت صفر   عرض کم و طول زیاد

$\lim_{\Delta\to 0} P_\Delta(t)=\delta(t)$ تابع دلتای دیراک   یک مستطیل با عرض صفر و طول ∞

$$\frac{u(t)-u(t-\Delta)}{\Delta}=P_\Delta(t)$$

ضربه واحد: Impulse

به مفهوم دقیق یک تابع ریاضی نیست.

$$\frac{u(t)-u(t-\Delta)}{\Delta}=P_\Delta(t)$$

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \text{وتیره} & t=0\end{cases}$$

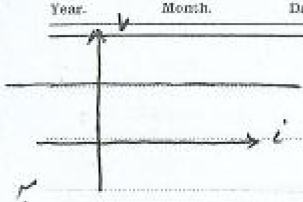
ناپیوستگی - پرش

هر وقت تابعی در یک نقطه ناپیوستگی داشته باشد مشتقش ∞ می‌شود

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta(\tau)\,d\tau=1$$

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt} \qquad \int\delta(\tau)\,d\tau=u(t)$$

Year. Month. Date.



فارغ از اینکه مقدار جریان چه باشد مقدار ولتاژ ثابت است

منبع ولتاژ مستقل

اگر منبع ولتاژ تغییر پذیر با زمان باشد خط $t=t_1$ و $t=t_2$ و ... به دست خواهد آمد

if $V_S=0$ → منبع اتصال کوتاه می‌شود.

منبع ولتاژ سینوسی

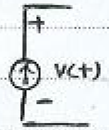
$$V_S(t)=V_m\cos(\omega t+\varphi)$$

دامنه   فرکانس زاویه   فاز

مقدار رادیانش باید بدون بعد باشد

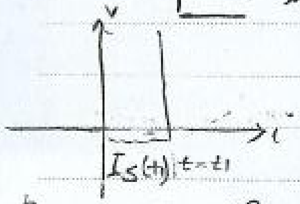
واحد ω باید $\frac{rad}{s}$ باشد

منبع جریان مستقل:



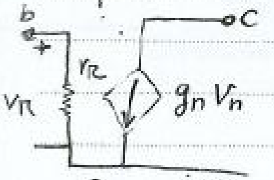
فارغ از اینکه مقدار ولتاژ چه باشد مقدار جریان ثابت است

آیا عنصر دو سر منبع جریان گوییم اگر جریان آن مستقل از ولتاژ باشد



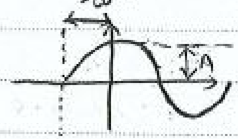
$i_S \to 0$ مدار باز

مدل سیگنال کوچک یک ترانزیستور

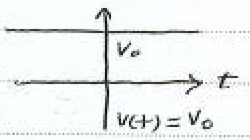


شکل موج ها:

$\frac{\varphi}{\omega}$ باید از جنس زمان باشد



شکل موج سینوسی



شکل موج ثابت:

$$f=\frac{\omega}{2\pi}$$

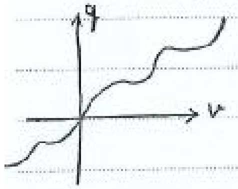
$$P(t)=A\cos(\omega t+\varphi) \qquad v(t)=220\sqrt{2}\cos(2\pi\times 50t)$$

دامنه   فرکانس زاویه‌ای   فاز اولیه

Year. Month. Date.

خازن ها:

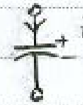
منحنی q برحسب v



عناصر ذخیره کننده ی الکتریکی:

مشخصه است که بار ذخیره شده در آن تابعی از ولتاژ دو سر آن باشد.

مشخصه خازن:

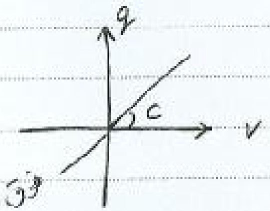


$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

خازن ها: TI, TV, linear, non linear

۱) خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان: $q = C v$ (LTI)

مشخصه خط راستی است که از مبداء می گذرد



ظرفیت capacitance

مقادیر از پیکو تا میکرو فاراد

خازن عدسی (سرامیکی) و مقادیرشان در حد 10pF ....

خازن الکترولیت $>10\mu F$

کتابی

فوق العاده

$$\boxed{I = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv(t)}{dt}}$$

رابطه اساسی خازن خطی

۲) خازن خطی تغییر پذیر با زمان:

$$q(t) = C(t)\, v(t)$$

$$\frac{dq}{dt} = v\frac{dC}{dt} + C\frac{dv}{dt}$$

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} + v\frac{dC(t)}{dt}$$

اگر جریان را بدهند و ولتاژ را بخواهند انتگرال می گیریم.

خازن LTI : $C = 2F$

شرط اولیه:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\, d(t) + v(0)$$

Year. Month. Date.

خاصیت غربالی تابع ضربه — sifting prop.

$$\int_{0^-}^{0^+} f(t)\,\delta(t)\,dt = f(0)$$

تابع دلخواه پیوسته در مبدأ

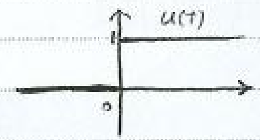
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t)\,dt = f(0)$$

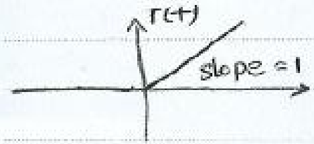
اثبات

$$\int_0^{0^+} f(t)\,\delta(t)\,dt = \lim_{\Delta\to 0}\int_0^{\Delta} f(t)\,P_\Delta(t)\,dt =$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\int_0^{\Delta} f(t)\,\frac{1}{\Delta}\,dt = f(0)\times 1$$

تابع شیب واحد (Ramp): انتگرال پله واحد است.

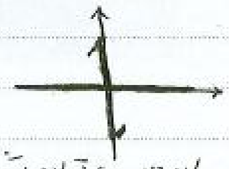




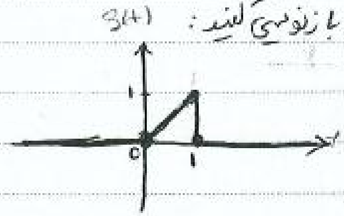
$$r(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ t & t \ge 0 \end{cases}$$

تابع دوبلت: مشتق ضربه واحد

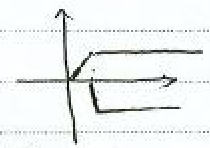
$$\delta'(t) = \frac{d\,\delta(t)}{dt}$$



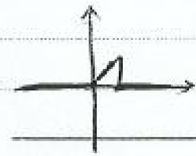
تمرین: تابع روبرو را برحسب توابع شیب و پله بازنویسی کنید:

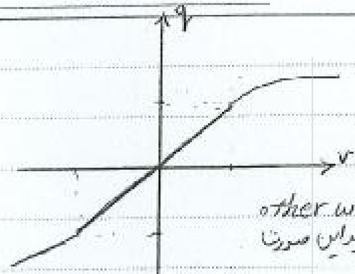


$$s(t) = r(t) - r(t-1) - u(t-1)$$



شکل را کامل کن.





غیرخطی است یا تکه‌ای خطی است

$if\ -\frac{1}{2} < v \le +\frac{1}{2} \Rightarrow c = 1$

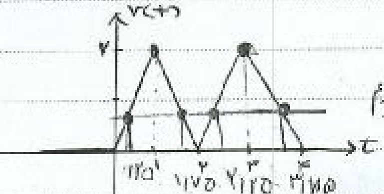
otherwise ، o.w. → $c = \frac{1}{2}$

درغیراین صورت

$0 < t < 0.25$
$1.75 < t < 2.25$ } $c = 1$
$3.75 < t$

o.w. $c = \frac{1}{2}$

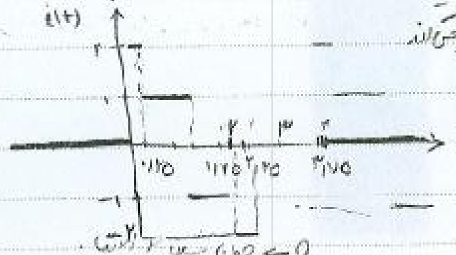
عبور



زمان نقاط عبوری از $\frac{1}{2}$ را بدست می‌آوریم

نقاطی که شیب در آن ها تغییر می‌کند اهمیت دارند

نقاطی که مقدار خازن در آن نقاط تغییر می‌کند



① $0 < t < \frac{1}{4}$ $\quad i = c\frac{dv}{dt} = 1 \times 2 = 2$

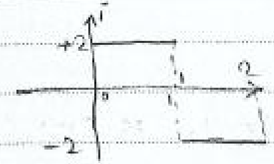
چون دوره تکرار می‌شود از لحظات ۲ تا ۴

تأثیر در حال ① تا ④ دوباره تکرار می‌شود

② $\frac{1}{4} < t < 1$ $\quad i = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

③ $1 \le t \le 1.75$ $\quad i = 0.5 \times (-2) = -1$

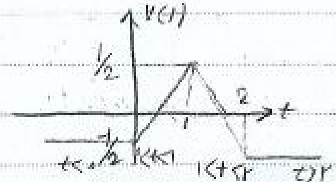
④ $1.75 \le t < 2$ $\quad i = 1 \times (-2) = -2$



$c = 2F$

$v(0) = -\frac{1}{2} V$ $\quad v(t) = ?$ $\quad t \ge 0$

$$v(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t i(\tau)\, d\tau = \begin{cases} -\frac{1}{2} + t & 0 < t \le 1 \\ -\frac{1}{2} + 1 - (t - \frac{1}{2}) \end{cases}$$



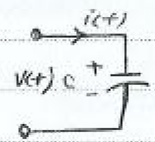
جواب

سوال: مقدار فعلی جریان یا از مقدار قبلی ولتاژ مستقل است یا نیست؟

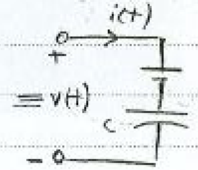
نکته: خازن عنصری حافظه‌دار است

• رابطه ولتاژ با جریان غیرخطی استاتیک اگر $v(0)=0$ آنگاه رابطه مذکور خطی می‌شود

ثابت کنید: دقیقا اگر $v(0) = 0$ باشد v تابعی خطی از زمان است.



$v(0) = V_0 \equiv$



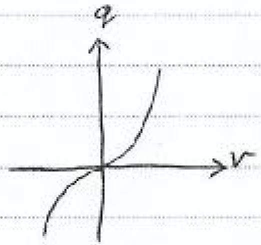
$E = V_0$

بی‌بار در $t = 0$

نکته: مادامی که جریان عبوری از یک خازن کراندار باشد ولتاژ دو سر آن نمی‌تواند پرش کند

کاربرد این نکته

خازن غیرخطی:



$q = f(v)$

رابطه اساسی خازن

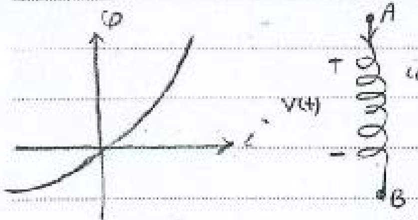
$c = \frac{dq}{dv} = \frac{df}{dv}$ $\quad i = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dv} \cdot \frac{dv}{dt}$

$i = c\frac{dv}{dt}$

سلف: Inductors القاکننده

ذخیره‌کننده انرژی در میدان مغناطیسی خود «تعاریف محض»

عنصری است که در هر لحظه t شار $\phi(t)$ و جریان آن $i(t)$ در یک رابطه ریاضی صدق می‌کنند



$$v = \frac{d\phi}{dt}$$

قانون آمپر ← شار

شار عبوری از یک سطح = جریان خالص خروجی از آن

$i(t) = cte \rightarrow \phi(t) = cte \rightarrow v(t) = 0$

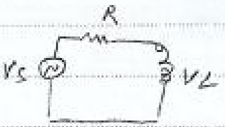
در حالت پایدار (عدم تغییر متغیرها) سلف مثل اتصال کوتاه عمل می‌کند.

" " خازن مثل مدار باز عمل می‌کند.

منظور از حالت پایدار در این جا سطح DC ثابت است.

فیزیکی قانون لنز در جهت قراردادی تعبیه شده است $i\uparrow \Rightarrow \frac{di}{dt}\uparrow \Rightarrow \phi\uparrow \Rightarrow \frac{d\phi}{dt}\uparrow \Rightarrow v\uparrow$

وقتی v زیاد شود پتانسیل A از B بیشتر می‌شود ⇐ جریان کاهش می‌یابد و قانون لنز ارضا می‌شود



$$I = \frac{V_S - V_L}{R}$$

سلف خطی:

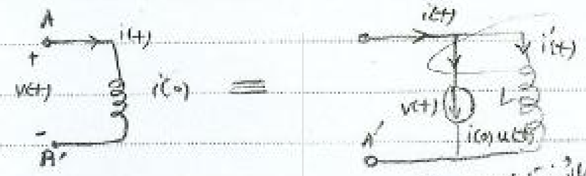
$\phi = Li \qquad L = cte$

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \qquad i(t) = i(0) + \underbrace{\frac{1}{L}\int_0^t v(t)\,dt}_{i'(t)}$$

شرط اولیه یا جریان اولیه

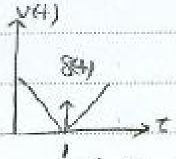
◦ سلف عنصری است حافظه‌دار

◦ تنها اگر $i(0)=0$ آنگاه جریان تابع خطی از ولتاژ است



بدون شرط اولیه

طبق قرارداد باید در یک جهت باشند تا با هم جمع شوند



منحنی که ولتاژ از تغییرات در منحنی‌ها دقت کنید.

هر جا که ولتاژ دو سر سلف کران‌دار باشد جریان آن پرش نمی‌کند.

جریان در $t=1$ پرش می‌کند.

سلف خطی تغییرپذیر با زمان:

$\phi(t) = L(t)i(t)$

$v(t) = L(t)\frac{di}{dt} + i(t)\frac{dL}{dt}$

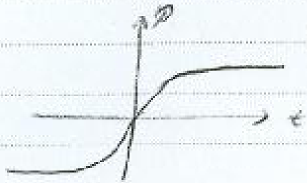
سلف غیرخطی

$\phi = f(i)$ f تابعی غیرخطی است.

چرا اغلب سلف‌ها غیرخطی‌اند

چون اگر خطی باشد هر قدر i زیاد شود ϕ هم باید زیاد شود چون طبق پدیده اشباع

وقتی ϕ را برحسب i رسم می‌کنیم تغییراتش خیلی کم می‌شود



تمرین:

$\phi(t) = \tanh(i) \qquad \frac{di}{dt} = -A\omega \sin\omega t$

$v(t) = ?$

$i(t) = A\cos\omega t \qquad \frac{d\phi}{di} = \frac{d\tanh(i)}{di}\Big|_{i(t)} = \frac{1}{\cosh^2(i)}$

$v(t) = \frac{d\phi}{di} \times \frac{di}{dt}$

$$v(t) = \frac{1}{\cosh^2(A\cos\omega t)} \times (-A\omega \sin\omega t)$$

مش: حلقه‌ای را که شاخه درونی نداشته باشد مش گویند.

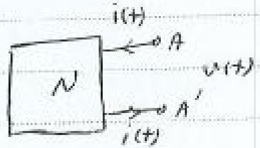
Year. Month. Date.

فصل سوم: مدارهای ساده

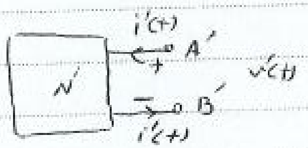
فصل اول: محدودیت توپولوژیکی (طریقه ارتباط شاخه‌ها محل گره‌ها) فقط به گراف مدار بستگی داشت.

فصل دوم: ماهیت اجزاء مدار

مدار معادل:



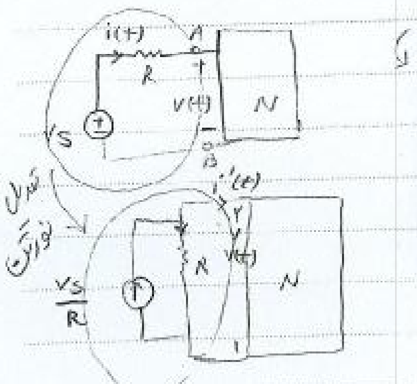
یک قطبی (دوسر) دو سر دارد



شرط لازم و کافی برای اینکه N و N' معادل هم باشند

$i(t) = i'(t)$

$v(t) = v'(t)$

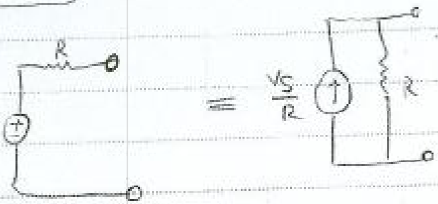


$v_S = Ri(t) + v(t)$

$i(t) = \frac{v_S - v(t)}{R}$

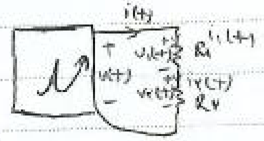
$i'(t) = \frac{v_S(t)}{R} - \frac{v'(t)}{R}$

$v(t) = v'(t) \to i(t) = i'(t)$



معادل تونن - نورتن

اتصال سری مقاومت‌ها:



KCL @ B $\to i_1(t) = i_2(t) = i(t)$

KVL $\longrightarrow v(t) = v_1(t) + v_2(t)$

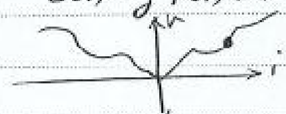
R_1 و R_2 به صورت سری متصل شده اند.

Year. Month. Date.

توان و انرژی:

با رعایت جهت قراردادی $p(t) = v(t)\,i(t)$

$$\mathcal{E}(t) = \int p(t')\,dt' = \int_0^t v(t')\,i(t')\,dt'$$



پسیو و اکتیو: $t = t_0$

نقطه کار: $(i(t_0), v(t_0))$

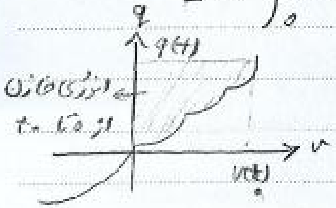
اگر نقطه کار در ربع اول و سوم باشد ← توان > 0 ← عنصر پسیو (مصرف کننده) است.

" " " دوم و چهارم " ← توان < 0 ← " اکتیو (تولید کننده)؛ مثل ژنراتور، مولد

$$\mathcal{E}_C(t) = \int_0^t v(t')\,i(t')\,dt' = \int v(t')\,\frac{[C\,dv(t')]}{\cancel{dt'}}\,\cancel{dt'}$$

$$= C\int_0^t v(t')\,dv$$

$$= C\int_0^{v(t)} v(t')\,dv$$



$$\mathcal{E}_C(t) = \int_0^{q(t)} v(q')\,dq'$$

مثال:

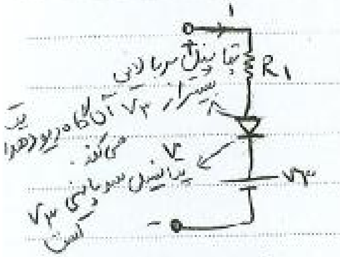
$q = Cv$ (LTI) خازن خطی تغییرناپذیر با زمان

$$\mathcal{E}_C(t) = \int_0^{q(t)} v(q')\,dq' = \int_0^{q(t)} \frac{q'}{C}\,dq' = \frac{1}{2}\,\frac{q^2(t)}{C}$$

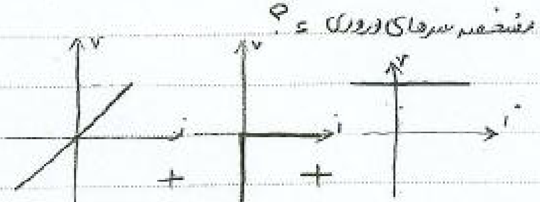
تمرینات فصل 2 : تاریخ تحویل ۷/۲۴

۱، ۵، ۶، ۹، ۱۳، ۱۵، ۱۷، ۲۲(ب)، ۲۵، خلاصه‌نویسی

Year. Month. Date.

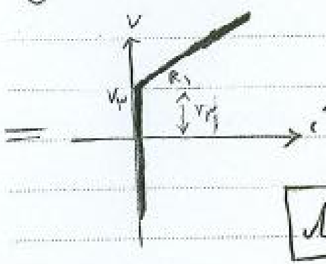


منحنی مشخصه سرهای ورودی ؟

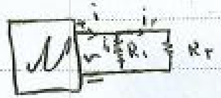


تا وقتی که $v < v_3$ آنگاه دیود به صورت off

on $\qquad v > v_3$



اتصال موازی مقاومت‌ها:



مقاومت کنترل شونده با ولتاژ = اگر $i_1 = g_1(v_1)$

$i_2 = g_2(v_2)$

جریان تابعی از ولتاژ

KCL: $i = i_1 + i_2$

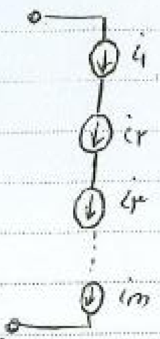
KVL: $v = v_1 = v_2$

$\Rightarrow i = g_1(v) + g_2(v)$

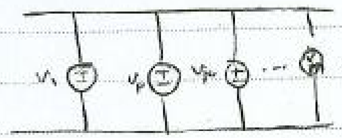
نکته:

اتصال سری منابع جریان فقط در صورتی ممکن است که

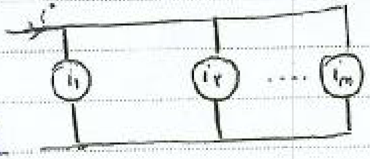
$i_1 = i_2 = i_3 = \dots = i_m$



دوگان نکته:

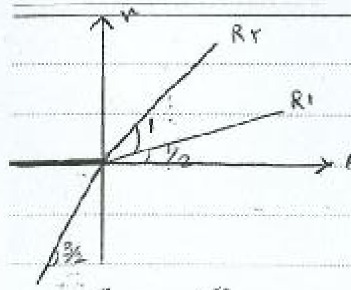


$v_1 = v_2 = v_3 \dots = v_m$



$i = \sum_{k=1}^{m} i_k$

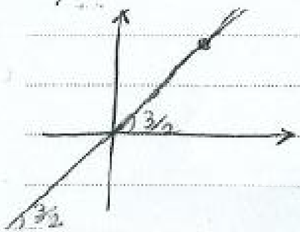
Year. Month. Date.



منحنی مشخصه معادل R1 و R2

$v(t)$ برحسب $i(t)$

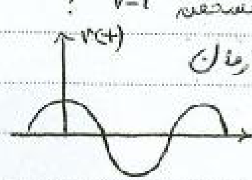
روی نمودار ولتاژها با هم جمع می‌شوند.

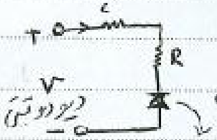


دیود = عنصر غیرخطی

تمرین: نمودار مشخصه v-i ؟

روی v برحسب زمان





دیود وقتی عمل می‌کند که جریان در جهت خلاف نشان داده شده عمل کند.

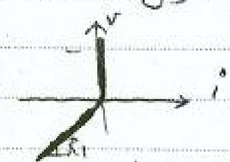
برعکس است

دیود ایده‌آل مقاومت ندارد < اتصال کوتاه / مدار باز

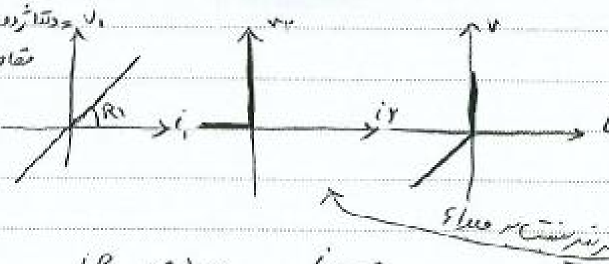
اگر $i > 0 \to v > 0 \Rightarrow$ دیود off

اگر $v < 0 \to$ دیود on

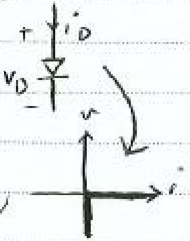
تحلیل معکوس



v_1 ولتاژ دو سر مقاومت

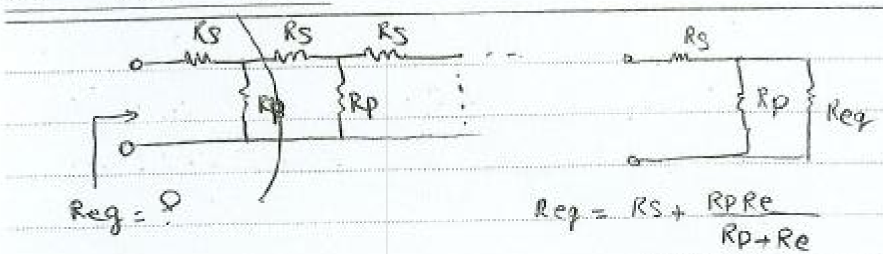


قرینه نسبت به مبدأ



اگر $v > 0 \qquad i = 0$

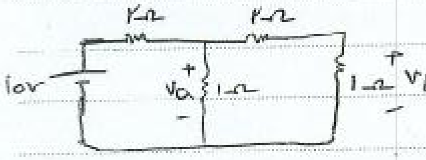
اگر $v < 0 \qquad i \neq 0$



$Req = ?$

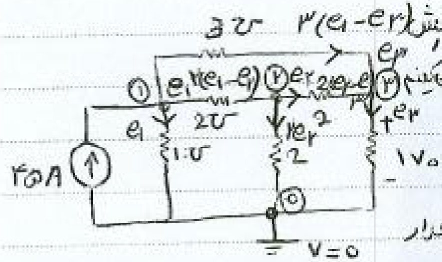
$$Req = Rs + \frac{RpRe}{Rp+Re}$$

با استفاده از معادله درجه ۲



$v_b = v_a/3$

روش های تجزیه و تحلیل مدارهای مقاومتی: روش گره / روش مش



۱) ابتدا گره ای را به عنوان گره مبنا (زمین) انتخاب می کنیم

۲) همه گره های مدار را شماره گذاری کنید.

۳) ولتاژ هر گره نسبت به گره مبنا را به عنوان متغیر مدار (مجهول) اختیار می کنیم.

e_3 ولتاژ گره ۳ نسبت به زمین (گره مبنا)

۴) قانون kcl را برحسب ولتاژ گره ها برای هر گره بنویسید.

$v = Ri$

$i = Gv$

kcl ① node 1: $2(e_1-e_2)+3(e_1-e_3)+e_1 = 45$

kcl ② node 2: $2(e_1-e_2) = 2(e_2-e_3)+2e_2$

kcl ③ node 3: $e_3 = 2(e_2-e_3)+3(e_1-e_3)$

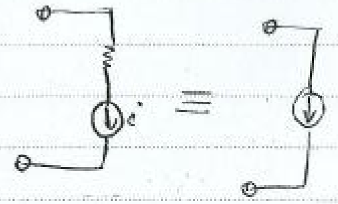
نتیجه: ولتاژ گره سوم را خواسته است.

Node 1: $6e_1 - 2e_2 - 3e_3 = 45$

Node 2: $e_1 - 3e_2 + e_3 = 0$

Node 3: $3e_1 + 2e_2 - 6e_3 = 0$

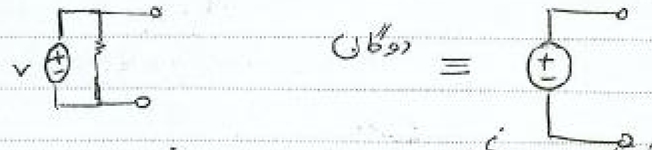
$$e_3 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -2 & 45 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & \cdots & \cdots \end{vmatrix}} = 11\ V$$



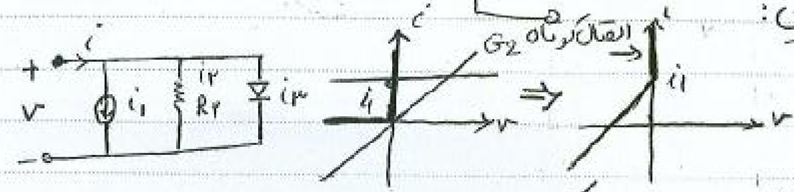
اگر عنصری با منبع جریان سری شود، ساقط می شود.

ولتاژ و جریان عنصر وابسته می شود به منبع جریان

و در تحلیل مدار اهمیتی ندارد



تمرین:

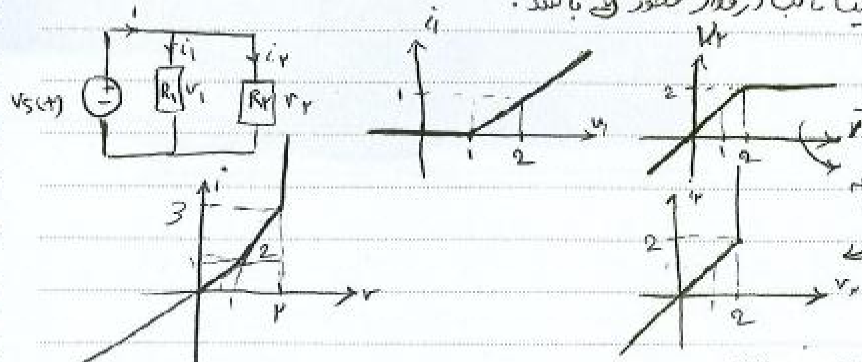


۱) نمودار $v-i$ رسم کنید.

° تا ولتاژ مثبت شود مدار اتصال کوتاه می شود.

° باید کمیت ثابت در مدار محور y ها باشد.

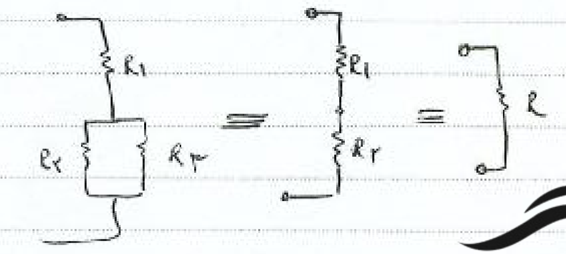
مثال:



تمرین ۸ کتاب

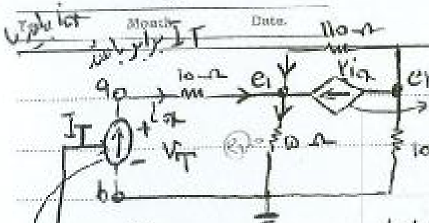
قرینه نسبت به $y=x$

اتصال سری - موازی



Month. Date.

kcl ①



یک منبع جریان دلخواه را وصل می کنیم

منبع جریان وابسته $\qquad I_T = 10\,A \rightarrow i_x = 10A$

kcl ① node 1: $i_x + 2i_x + \dfrac{e_2 - e_1}{110} = \dfrac{e_1}{5}$

kcl ② node 2: $\dfrac{e_2}{100} + \dfrac{e_2 - e_1}{110} + 2i_x = 0$

$\Rightarrow e_1, e_2$ به دست می آیند

$-V_T + 10\,i_x + e_1 = 0 \rightarrow V_T = 100 + e_1$

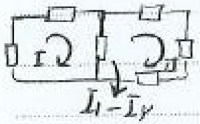
گره مرکب برای وقتی است که منبع ولتاژ وابسته داشته باشیم.

$Rin = \dfrac{V_T}{R_T} = 10 + \dfrac{e_1}{10}$

روش تجزیه و تحلیل مش (mesh)

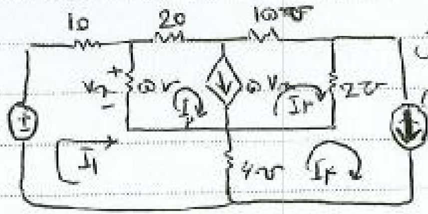
۱) ابتدا منابع جریان موازی با مقاومت ها را با کمک تبدیل تونن به منابع ولتاژ سری تبدیل کنید:

۲) مش ها را شماره گذاری کرده جهت عقربه ساعت را به عنوان جهت قراردادی جریان مش در نظر بگیرید:



۳) جریان شاخه های مشترک برابر با تفاضل جریان مش های مشترک است.

۴) KVL را اعمال کنید.



جریان گذرنده از این شاخه مشخص است

مقدار جریان مش است

یکی اول را نمی توانیم اعمال کنیم

$I_4 = 40\,A$

$I_2 - I_3 = 5\,V_x \qquad I_2 - I_3 = 5\,\dfrac{I_1 - I_2}{5}$

$V_x = \dfrac{I_1 - I_2}{5} \qquad I_2 - I_3 = I_1 - I_2$

$2I_2 = I_1 + I_3$

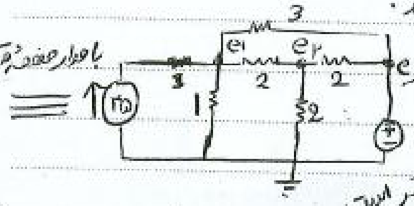
$\boxed{I_3 = 2I_2 - I_1}$

Year. Month. Date.

از منبع ولتاژ هر جریانی عبور می کند

اگر به جای مقاومت یک منبع ۱۱ ولتی قرار دهیم فرقی نمی کند.

قضیه جانشینی: اگر پس از تحلیل یک مدار هر شاخه آن را با یک منبع ولتاژ یا منبع جریان مستقل که ولتاژ یا جریان آن برابر با ولتاژ یا جریان آن شاخه است جایگزین کنیم هیچ نوع تغییری در مقادیر ولتاژ و جریان شاخه ها حاصل نخواهد شد.

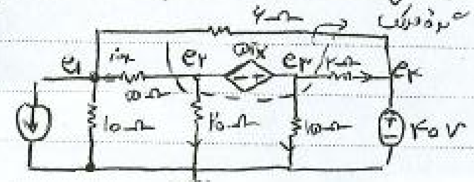


در این قسمت ولتاژ ۱۱ ولت از ولتاژ مبنا بیشتر است

نکته: روش گره: نوشتن kcl:

نوشتن kcl در گره هایی که منبع ولتاژ به آن وصل است معادله جدیدی ایجاد نمی کند مثل گره 3 در شکل بالا e_3

2 معادله کافی است. $\Rightarrow$ 2 مجهول (e_1, e_2) داریم



$e_4 = 40\,V$

$e_2 - e_3 = -5i_x \Rightarrow e_3 - e_2 = 5i_x$

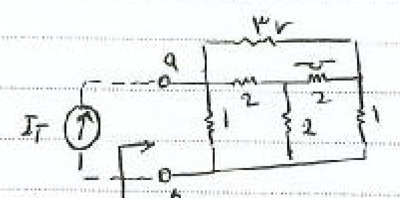
$\rightarrow e_3 - e_2 = e_2 - e_1$

$e_3 = 2e_2 - e_1$

۱) منبع جریان یا ولتاژی را به دو سر a و b وصل می کنیم (I_T هر مقداری می تواند داشته باشد)

۲) با روش های ذکر شده V_T را به دست می آوریم

۳) $Rin = \dfrac{V_T}{I_T}$



$I_T = 40\,A$

Rin = ?

با توجه به مسئله اول و روش گره

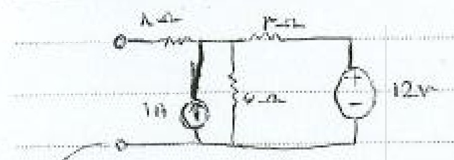
$e_3 = 12V$

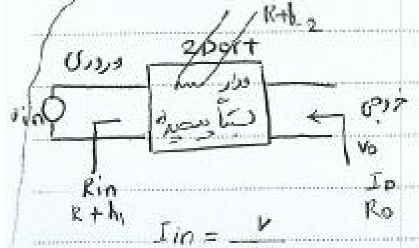
$e_1 = 14\,V$

$Rin = \dfrac{14}{45}\,\Omega$

Year. Month. Date.

روش محاسبهٔ Rth





مدار دلخواهی که ۴ سر دارد (دو قطب ورودی و خروجی دارد).
برای راه‌اندازی مدار باید جریان تنظیم شده باشد ⇐ لازم است R ورودی را محاسبه کنیم.

Ro Rth2

$I_{in} = \frac{V}{R_{in}}$

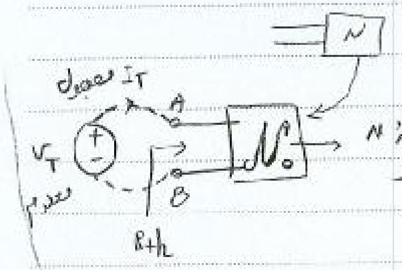
• Ro و Rin معیاری از مقاومت‌های دیده شده به ما می‌دهند.

۱) ابتدا منابع مستقل را صفر می‌کنیم:
منبع ولتاژ ⟵ اتصال کوتاه $V=0$
منبع جریان ⟵ مدار باز $I=0$

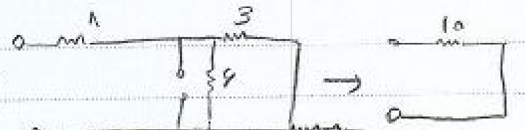
۲) سپس یک منبع ولتاژ فرضی V_T در دو سر مدار قرار می‌دهیم و I_T (جریان عبوری آن) را محاسبه می‌کنیم.
منبع جریان " I_T " " " " V_T (ولتاژ دو سر آن را) "

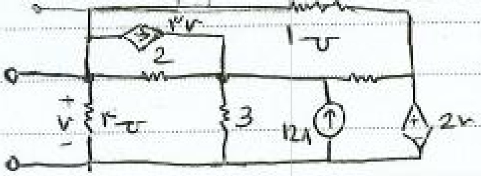
$R_{th} = \frac{V_T}{I_T}$

۳)



با قرار دادن صفر تمام منابع شبکهٔ N صفر می‌شود





فقط منبع جریان 12 A حذف می‌شود

روش دوم:

Year. Month. Date.

KVL in Mesh I: $-6 + \frac{1}{10}I_1 + \frac{1}{5}(I_1 - I_2) + \frac{1}{6}(I_1 - I_2) = 0$

$I_2 - I_2$

KVL in Mesh (II + III): $\frac{1}{20}I_2 + \frac{1}{15}(2I_2 - I_1) + \frac{1}{2}(2I_2 - I_1 - I_2$

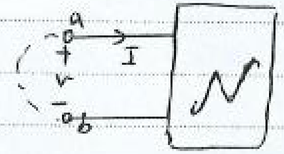
$\frac{1}{5}(I_1 - I_2) = 0$

• جریانی که به مش نسبت می‌دهیم جریانی است که از شاخهٔ خالص می‌گذرد.

هر وقت تعداد گره بیشتر از تعداد حلقه باشد از روش مش و هر گاه تعداد گره کمتر از تعداد حلقه از روش گره

قضیه تونن:

برای هر مدار شامل مقاومت‌های خطی و منابع رابطهٔ میان ولتاژ دو سر آن و جریان عبوری I را می‌توان به صورت $V = \alpha I + B$ بیان کرد

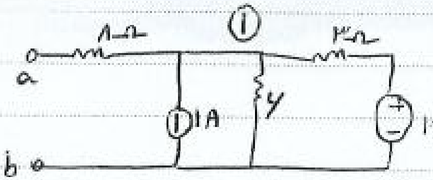


α = مقاومت دیده شده در سرهای a و b

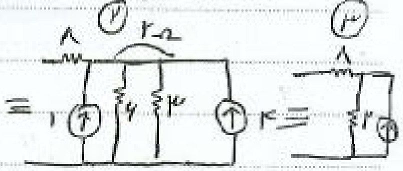
B = ولتاژ مدار باز یا e_{oc}

$\alpha = R_{th}$ ⟶ مقاومت معادل تونن

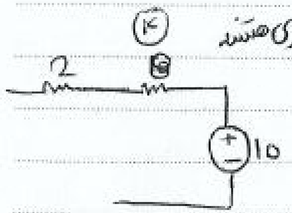
$\alpha = R_{in}$ مقاومت ورودی

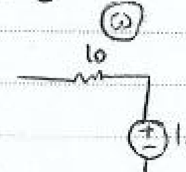


$\equiv$



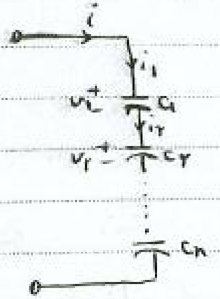
مقاومت و منبع ولتاژ سری هستند $\equiv$ منبع جریان = عدد منبع / عدد مقاومت





$e_{oc} = 10V$
$R_{th} = 10\Omega$

اتصال سری خازن ها:



$i_1 = i_2 = \cdots = i_n = i$

$v_k(t) = v_k(0) + \frac{1}{C_k}\int_0^t i_k(\tau)\,d\tau$

$v = \sum v_k$

$= \sum v_k(0) + \left(\sum \frac{1}{C_k}\right)\int_0^t i(\tau)\,d\tau$

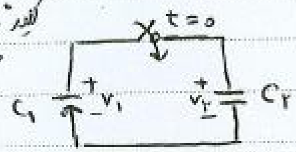
$v_{eq}(0) = \sum v_k(0)$ $\quad \frac{1}{C_{eq}} = \sum \frac{1}{C_k}$

خازن معادل

در اتصال موازی خازن های خطی $C_{eq} = \sum C_k$

شرایط اولیه خازن ها باید با هم مساوی باشد تا KVL نقض نشود

کلید زنی در خازن ها

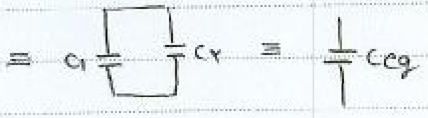


$Q(0^-) = Q_1(0^-) + Q_2(0^-)$

$Q(0^-) = C_1 V_1 + C_2 V_2$

در $t = 0^+$

$Q(0^+) = C_{eq} v$

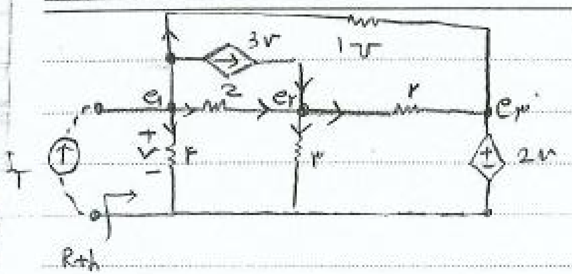


طبق اصل بقای بار $Q(0^-) = Q(0^+) \Rightarrow \boxed{v_{eq} = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2}}$

در $t = 0^-$ → انرژی کل $= \frac{1}{2} C_1 V_1^2 + \frac{1}{2} C_2 V_2^2$

در $t = 0^+$ → انرژی کل $= \frac{1}{2} C_{eq} v_{eq}^2$

$\frac{1}{2} C_{eq} v_{eq}^2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)\left[\frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2}\right]^2 = \frac{1}{2}\frac{(C_1 V_1 + C_2 V_2)^2}{C_1 + C_2}$



$e_1 = v$

$e_3 = 2v$

KCL @ Node 1: $v - e_3 + 3v + 2(v - e_2) + 4v = I_T$

$8v - 2e_2 = I_T$ **

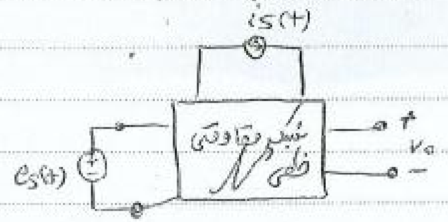
KCL @ Node 2: $2(e_2 - e_3) + 3e_2 = 2(e_1 - e_2) + 3v$

$2(e_2 - 2v) + 3e_2 = 3v + 2v - 2e_2$

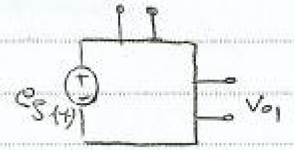
$9v - 7e_2 = 0 \rightarrow e_2 = \frac{9}{7}v$ *

$\xrightarrow{*,\ **} 8v - \frac{18}{7}v = I_T \rightarrow \frac{38}{7}v = I_T \Rightarrow R_{th} = \boxed{\frac{v}{I_T} = \frac{7}{38}}$

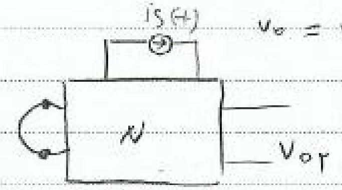
super position — برهم نهی — اصل جمع آثار:



≡

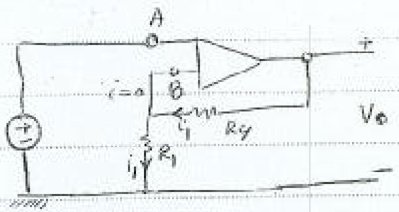


+



$v_o = v_{o1} + v_{o2}$

Non_inverting amp



R_2 مقاومت فیدبک، مسیری است بین خروجی و ورودی

$\frac{v_o}{v_{in}} = ?$

$v_o = (R_1 + R_2) i_1$

$v_A = v_B = v_{in} = R_1 i_1$

$i_1 = \frac{v_{in}}{R_1} \to \frac{v_o}{v_{in}} = \frac{R_1+R_2}{R_1} \geq 1$

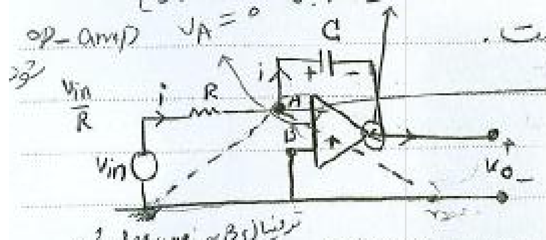
همواره از یک بزرگتر است

ولتاژ خروجی از ولتاژ ورودی بیشتر است.

از ترمینال خروجی می تواند جریان وارد

op-amp $v_A = 0$

مثال:



جریان وارد ترمینال ورودی
op-amp
نمی شود

ترمینال B به زمین وصل شده

$v(0) = 0$

$v(t) = v(0) + 1/C \int_0^t i(t)\, d\tau = 1/C \int_0^t \frac{v_{in}(\tau)}{C}\, d(\tau)$

$i(t) = \frac{v_{in}}{R}$

KVL: $= \cancel{v_A} + v_C + v_o = \cancel{v_A} \to v_o = -v_C \Rightarrow v_o = \frac{-1}{RC}\int_0^t v_{in}(\tau)\, d\tau$

موقع KVL از یک گره نباید دوبار عبور کنید.

ریپه می شود که (+)E کمتر از (-)E است

سوال: انرژی کجا رفت؟ صرف به ای زره شده است.

اتصال سری و موازی سلف های خطی:

سلف شبیه مقاومت: ؟

سری: $L_{eq} = \sum L_k$

موازی: $L_{eq} = \sum \frac{1}{L_k}$

اندوکتانس معکوس $\Gamma = \frac{1}{L}$

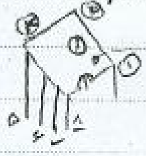
$\Gamma_{eq} = \sum \Gamma_k$

مسائل فصل ۳: تاریخ تحویل ۱۵/۸ خلاصه نویسی از ۷۵ تا ۹۷

فصل ۳ ۵ - ۷ - ۱۵ - ۱۳ ب ت ۱۴ - الف - ۲۱ - ۲۵ و ۲۸

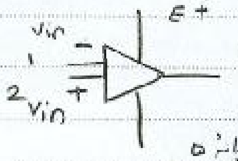
تقویت کننده عملیاتی operational Amplifier ← op-amp

op-amp ۷۴۱



از این نقطه شروع به شماره گذاری پایه ها را شروع می کنیم

بایاس
پایه ۴
$E+$



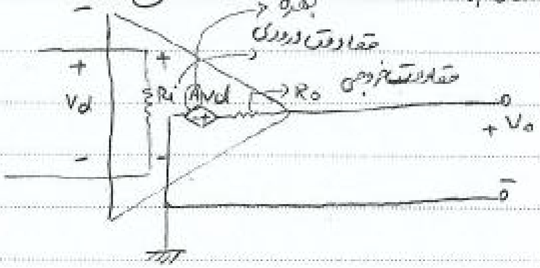
پایه ۳ V_o ⟶ خروجی را می گیریم

پایه های ۴ و ۵ منبع تغذیه هستند.

پایه ۵
E^-

بایاس = منبع تغذیه

مدل سیگنال کوچک یک op-amp



مقدار A باید بزرگ باشد

∞ بی نهایت

آمپ امپ ایده ال:

۱) هیچ جریانی وارد آن نمی شود

۲) پایانه های ورودی هم پتانسیل:

Year. Month. Date.

ii) assume $i_s(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$

حدس می‌زنیم $y_p = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ $\xrightarrow{\text{معادلهٔ اصلی}}$

$-CA_2\omega \sin(\omega t + \varphi_2) + \frac{1}{R} A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$

$A_2 = \frac{A_1}{\sqrt{(1/R)^2 + (\omega C)^2}}$ $\quad \varphi_2 = \varphi_1 - \tan^{-1}(\omega RC)$

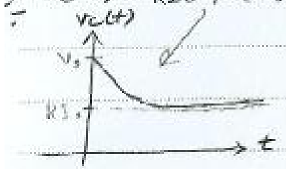
Super position

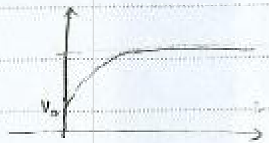
جواب کامل : $y_p + y_h$

با فرض $\rightarrow v_C(t) = RI_0 + k_1 e^{-\frac{t}{RC}}$

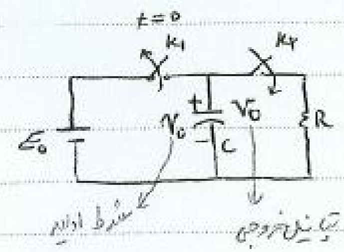
شرط اولیه در جواب کامل با $v_C(0) = v_0 \rightarrow RI_0 + k_1 = v_0 \rightarrow k_1 = v_0 - RI_0$

$v_C(t) = RI_0 + (v_0 - RI_0) e^{-\frac{t}{\tau}}$ $\quad \tau = RC$ ثابت زمانی





مدار RC:

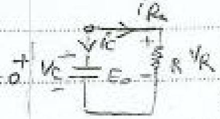


کلید k_1 بسته بوده است که خازن C شارژ شده است

$\Leftarrow$ $V_0 = E_0$ با باز کردن و بستن k_2

ولتاژ اولیه خازن تخلیه می‌شود

$v_0 = E_0 \Rightarrow t = 0^+$



جهت جریان در خازن

حال باید یک معادله دیفرانسیل تشکیل دهیم

KCL : $i_C + i_R = 0$ (1) $\quad$ KVL: $v_R = v_C$ $\quad i_C = C\frac{dv_C}{dt}$

$i_R = \frac{V_R}{R}$

Year. Month. Date.

پاسخ: آنچه در مدار خروجی اندازه‌گیری شود یا آن را می‌خواهیم (خروجی مورد نظر)

معادلهٔ مشخصه :

یک مدار دیفرانسیل مرتبه اول

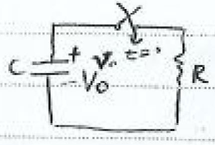
یک عنصر ذخیره‌کنندهٔ انرژی دارد

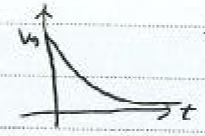
RL مقاومت و سلف — عنصر ذخیره کننده‌ی انرژی که سلف است.

RC " " خازن

$a_1 \frac{d^n v_0}{dt^n} + a_2 \frac{d v_0^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n v_0(t) = f(t) \rightarrow$ ورودی (خروجی)

n شرط اولیه : $v_0'(0) = a_1 \quad v_0(0) = a_2 \quad \dots \quad \frac{d v_0^{n-1}}{dt} = a_n$





جواب معادله همگن = پاسخ ورودی صفر ناشی از شرایط اولیه

پاسخ حالت صفر= پاسخ مدار با شرایط اولیه‌ی صفر ناشی از ورودی

پاسخ پله : پاسخ ناشی از اعمال ورودی پله‌ی واحد با شرایط اولیه (حالت) صفر

پاسخ ضربه : پاسخ ناشی از اعمال ضربه‌ی واحد (ورودی) با شرایط اولیه (حالت) صفر

یادآوری -

معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول با ضرایب ثابت :

$C\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R} = i_s(t)$ (ورودی) $\quad v_C(0) = v_0$

حل معادلهٔ همگن : $i_s(t) = 0 \rightarrow C\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{R} v_C(t) = 0$

صرف مشتق داشته باشیم به جای مشتق S می‌گذاریم

$C \times S + \frac{1}{R} = 0 \rightarrow S = -\frac{1}{RC}$

$v_C(t) = k_1 e^{-\frac{t}{RC}}$

فرض کنید (i) : یافتن جواب خاص $\quad i_s(t) = I_0 \Rightarrow y_p = k$ (جواب) : در معادلهٔ اصلی $C \times 0 + \frac{1}{R} k = I$

$\rightarrow k = RI_0$

$\left(C\frac{dy_p}{dt} + \frac{1}{R} y_p = I_0\right)$

Year. Month. Date.

$i(t)=\frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC_{eq}}}$ $C_{eq}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$

$v_{C_1}(t)=V_0-\frac{1}{C_1}\int_0^t i(\tau)d\tau$

$V_0-\frac{V_0}{RC_1}\int_0^t e^{-\frac{\tau}{RC_{eq}}}d\tau = V_0\left(1-\frac{1}{RC_1}\frac{e^{-\frac{\tau}{RC_{eq}}}}{-1/RC_{eq}}\Big|_0^t\right)$

$V_0\left[1+\frac{C_{eq}}{C_1}\left(e^{-t/RC_{eq}}-1\right)\right]$

محاسبه انرژی تلف شده در مقاومت R

$E(t)=\int_0^t p(\tau)d\tau$ $p(t)=R\left[\frac{V_0}{R}e^{-t/RC}\right]^2$

$=\int_0^t \frac{V_0^2}{R}e^{-2t/RC}dt = \frac{CV_0^2}{2}(1-e^{-2t/RC})$

اگر $R\to 0$ ⇐

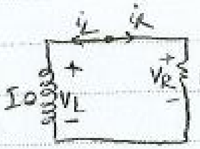
$\lim E(t)=\frac{1}{2}C_{eq}V_0^2$

$R\longrightarrow$ صفر

خلاصه:

RC موازی ← از KCL به معادله دیفرانسیل رسیدیم.

RC سری ← از KVL با مشتق‌گیری به معادله دیفرانسیل رسیدیم.



مدار RL: KCL $i_R+i_L=0$

$V_R=V_L$ $V_L-V_R=0$ KVL

$V_R=Ri_R$ شاخه تعریف $V_L=L\frac{di_L}{dt}$

$L\frac{di_L}{dt}-V_R=0$ $L\frac{di_L}{dt}-R(-i_L)=0\to L\frac{di_L}{dt}+Ri_L=0$

$i_L(0)=I_0$

$LS+R\times 1=0$ $S=-R/L$ همگن $i_L(t)=I_0e^{-\frac{R}{L}t}$ $t\geq 0$

$\boxed{T=\frac{L}{R}}$ فرکانس طبیعی $=-R/L$

Year. Month. Date. $S=-\frac{1}{RC}$

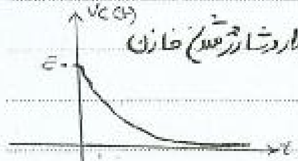
در مدار موازی از KCL و در مدار سری از KVL شروع می‌کنیم ⇐

(1): $C\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{v_C}{R}=0$ معادله ورودی صفر

$CS+1/R=0$

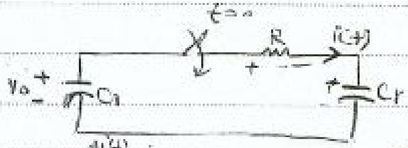
$v_C(t)=E_0e^{-t/RC}$

$S=-\frac{1}{RC}$



نمودار شارژ و دشارژ خازن

مثال:

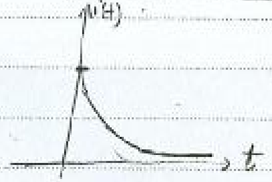


بدون شرط اولیه

KVL: $V_R+V_{C_2}-V_{C_1}=0$

در $t=0$ C_2 مثل اتصال کوتاه است

یعنی تمام ولتاژ را R می‌گیرد



$i_{C_1}=-i(t)=C_1\frac{dv_{C_1}}{dt}$

$i_{C_2}=i(t)=C_2\frac{dv_{C_2}}{dt}$

$V_R=Ri(t)$ باید معادله را برحسب i(t) بازنویسی و برمی‌گردیم به KVL

چون i(t) پاسخ مطلوب است

$Ri(t)+\frac{1}{C_2}\int_0^t i(\tau)d\tau-\left[V_0-\frac{1}{C_1}\int_0^t i(\tau)d\tau\right]=0$

این معادله انتگرالی است و راه حل آن را بلد نیستیم اما با یک مرتبه مشتق‌گیری انتگرال‌ها از بین می‌روند

$R\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C_2}i(t)+\frac{1}{C_1}i(t)=0$

$R\frac{di(t)}{dt}+i(t)\frac{1}{C_{eq}}=0$ $RS+\frac{1}{C_{eq}}=0$ $S=-\frac{1}{RC_{eq}}$

$i=I_0e^{-t/RC_{eq}}$

$I_0=\frac{V_0}{R}$

توجه کنید: به علت مشتق‌گیری معادله عوض شده و شرط اولیه‌ی جدیدی لازم داریم. شرط اولیه باید جریان مقاومت در $t=0$ باشد با حس فیزیکی ⇐ $I_0=\frac{V_0}{R}$

Year. Month. Date.

حالت دائمی (پایدار)

هر مداری در ابتدا یک حالت گذرا دارد

$t = 4T \rightarrow v_C(t) \approx 0/98\, RI_0$

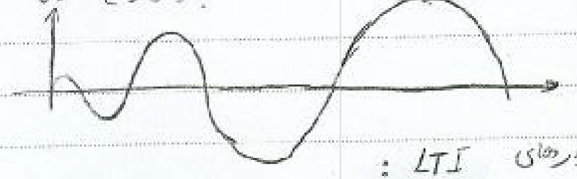
$i_S(t) = A\sin(\omega t + \varphi_1)$

$v_C(t) = k_1 e^{-t/RC} + k_2 \sin(\omega t + \varphi)$

پاسخ گذرا ناشی از کلیدزنی و حالت مدار (شرایط اولیه)

پاسخ پایدار ← شرایط دائمی منبع

با گذشت زمان صفر می‌شود



روش میانبر برای محاسبه پاسخ مدارهای LTI :

درجه اول با منابع ثابت مستقل :

$y(0)$ پاسخ در $t=0$

$y(\infty)$ پاسخ در $t=\infty$

$y(t) = [y(0) - y(\infty)]\, e^{-\frac{t}{T}} + y(\infty)$

برای مثال اول

$y(0) = 0$ $\quad v_C(t) = -RI_0 e^{-t/T} + RI_0$

$y(\infty) = RI_0$ $\quad = RI_0 (1 - e^{-t/T}) u(t)$

$T = RC$

$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{T} y = B$

T و B عدد ثابت اند.

1) $y(t) = k e^{-t/T} + b_0$

$t=0 \Rightarrow y(0) = k + b_0$

$t=\infty \Rightarrow y(\infty) = b_0$

$k = y(0) - b_0 = y(0) - y(\infty)$

$\rightarrow y(t) = [y(0) - y(\infty)]\, e^{-\frac{t}{T}} + y(\infty)$

با داشتن مقادیر اولیه و نهایی هر متغیر که به سادگی قابل محاسبه است و نیز با فرکانس طبیعی مدار می‌توان بدون حل معادله دیفرانسیل پاسخ کلی آن را تعیین کرد.

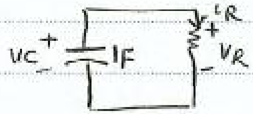
Year. Month. Date.

پاسخ ورودی صفر نسبت به شرط اولیه یک تابع خطی است.

پاسخ ورودی صفر تابع خطی از حالت (شرط اولیه) مدار است.

نکته : خاصیت فوق برای مدارهای غیرخطی برقرار نیست.

مثال:



$i_R = v_R^3$

مقاومت غیر خطی

$v_C = v_R$

$KCL \rightarrow i_C + i_R = 0 \rightarrow C\frac{dv_C}{dt} + v_C^3 = 0$

طرفین $\times\, dt$ و بر v_C^3 تقسیم

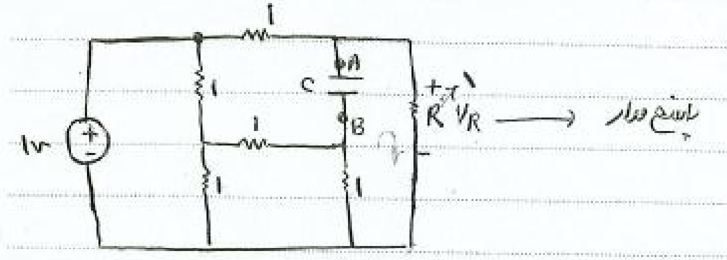
$\frac{(1)\, dv_C}{v_C^3} = -dt \rightarrow -\frac{1}{2[v(t)^2]} + \frac{1}{2V_0^2} = -t$

$\rightarrow v(t) = \frac{V_0}{\sqrt{1 + 2V_0^2 t}}$ $\quad t \geq 0$

* به وضوح دیده می‌شود که دیگر رفتار تابع خطی از ولتاژ اولیه نیست.

تبدیل مدارهای مرتبه اول پیچیده به مدار RL یا RC موازی:

فرض مدار با N مقاومت LTI و هر تعداد منابع وابسته و هر تعداد منابع مستقل + یک خازن (سلف)



$C = 2F \qquad V(0) = 0$

۱) از دو سر خازن (سلف) به بقیه مدار نگاه می‌کنیم.

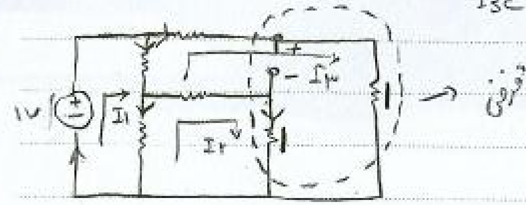
۲) مدار دیده شده را با یک مدار معادل تونن جایگزین می‌کنیم.

مدار معادل تونن: تمام مدار را به یک منبع و مقاومت کاهش بدهید

* شاخه AB را مدار باز نموده e_{oc} را محاسبه می‌کنیم (روش مش) $t = \infty$

* شاخه AB را اتصال کوتاه نموده I_{sc} را محاسبه می‌کنیم (روش گره) $t = 0$

* مقاومت معادل دیده شده از AB برابر است با $R_{AB} = \frac{e_{oc}}{I_{sc}}$



KVL①

$1 = (I_1 - I_3) + (I_1 - I_2)$

KVL②: $2(I_2 - I_3) + (I_2 - I_1) = 0$ $\Rightarrow$

KVL③: $2I_3 + 2(I_3 - I_2) + (I_3 - I_1) = 0$

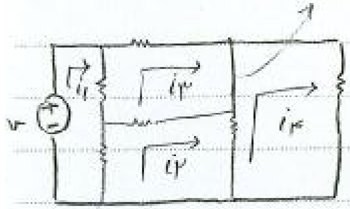
$I_1 = \frac{11}{10}$

$I_2 = \frac{7}{10}$

$I_3 = \frac{5}{10}$

$V_{AB} = 1 \times I_3 + (I_3 - I_2)2 = \frac{3}{10}$ باید یک حلقه فرضی در نظر بگیریم

$\Rightarrow \boxed{e_{oc} = V_C(\infty) = \frac{3}{10}}$



$I_{SC} = I_3 - I_4$

KVL1: $1 = (i_1 - i_3) + (i_1 - i_2)$

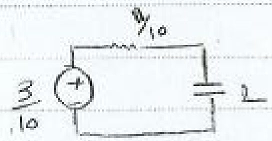
KVL 2: $(i_2 - i_3) + (i_2 - i_4) + (i_2 - i_1) = 0$ $\Rightarrow$

KVL 3: $2i_3 + (i_3 - i_2) + (i_3 - i_1) = 0$

KVL 4: $i_4 + (i_4 - i_2) = 0$

$$\begin{cases} i_1 = \frac{\text{[illegible]}}{11} \\ i_2 = \frac{8}{11} \\ i_3 = \frac{7}{11} \\ i_4 = \frac{4}{11} \end{cases}$$

$I_{s.c} = \frac{3}{11} \qquad R_{AB} = \frac{11}{10}$



$T = 2.2 \qquad V_C(0) = 0$

$V_C(\infty) = \frac{3}{10}$

اولاً ثابت زمانی فرق نمی‌کند.

ثابت زمانی (فرکانس طبیعی) در مدار بدون تغییر باقی می‌ماند

$V_R(t) = [V_R(0) - V_R(\infty)] e^{-t/2.2} + V_R(\infty)$

$V_R(0) = \frac{6}{11} \qquad V_R(\infty) = \frac{5}{10}$

$V_R(t) = \left(\frac{6}{11} - \frac{5}{10}\right) e^{-t/2.2} + \frac{8}{10}$

کل مدار (LTI) یک ثابت زمانی دارد

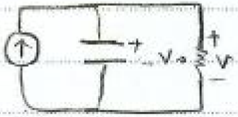
پاسخ کامل = پاسخ ورودی صفر + پاسخ حالت صفر

Year. Month. Date.

پاسخ ورودی صفر، معلول شرطهای اولیه

قضیه: پاسخ کامل: پاسخ ورودی صفر + پاسخ حالت صفر

برای یک مدار ساده (رزیستانس) زاده شده است.



$i_s(t)$ $\qquad G=\frac{1}{R}$

پاسخ حالت صفر $\quad V_0=0 \qquad$ پاسخ ورودی صفر $V_i \rightarrow C\frac{dV_i}{dt}+GV_i=0$ ②

$C\frac{dv_0}{dt}+GV_0=i_s(t)$ ① $\qquad V_i(0)=V_0$

$$①+② = C\frac{d(V_i+V_0)}{dt}+G(V_i+V_0)=i_s(t)$$

$$V_i(0)+V_0(0)=V_0$$

معادله کامل: $C\frac{dv}{dt}+GV=i_s(t) \qquad V(0)=V_0$

V پاسخ کامل است بنا به یکتایی جواب معادله دیفرانسیل $\Rightarrow \underline{V=V_0+V_i}$

پاسخ گذرا و پاسخ حالت دائمی: برای مدار قبلی $i_s(t)=I_0$

معمولاً حالت گذرا در لحظات آغازین کار مدار رخ می‌دهد و یک تابع میراست.

یعنی با گذشت زمان مقدارش صفر می‌شود

$v_i(t)=V_0e^{-t/RC} \qquad v_0(t)=RI_0(1-e^{-t/RC})$

جواب کامل $=\underbrace{(V_0-RI_0)e^{-t/RC}}_{\text{جواب گذرا}}+\underbrace{RI_0}_{\text{جواب حالت دائمی}}$

در مدار حذف ناگهانی ورودی یا کلیدزنی باعث ایجاد حالت گذرا می‌شود.

ضعف پاسخ گذرا در مدار RC موازی با ورودی سینوسی:

$I_s(t)=A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \qquad V(0)=V_0$

Year. Month. Date.

جواب کامل $=v(t)=\underbrace{K_1e^{-t/RC}}_{V_h}+\underbrace{A_2\cos(\omega t+\varphi_2)}_{V_p}$

$$A_2=\frac{A_1}{\sqrt{(1/R)^2+(\omega C)^2}}$$

$$\varphi_2=\varphi_1-\tan^{-1}(\omega RC)$$

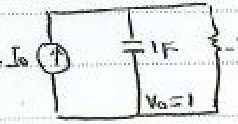
درصورتی‌که K باید صفر باشد. ←

$V_0=A_2\cos\varphi_2$

یعنی برای اینکه پاسخ گذرا نداشته باشیم باید در لحظه $t=0$ ولتاژ اولیه خازن برابر با مقدار فوق باشد

جواب کامل = جواب مخصوص ← جواب مخصوص شرایط اولیه را باید برآورده (تحقیق) کند.

سوال: جواب کامل را به دست آورید:

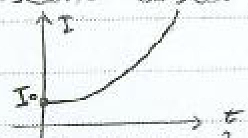


$i_s(t)=I_0 \quad 1F \quad -1\Omega \quad V_0=1$

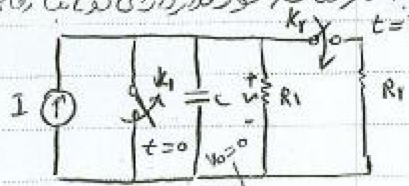
$(V_0-RI_0)e^{-t/RC}+RI_0$

$(1+I_0)e^{t}+I_0$

این مدار به علت وجود مقاومت منفی دارای فرکانس طبیعی مثبت در دوره معنا داشتن صفر است ولذا ناپایدار است. یک مدار ناپایدار جواب حالت دائمی ندارد.



مدارهایی با دو ثابت زمانی: یک عنصر در یک لحظه خاص به مدار اضافه شود مدار دارای دو ثابت زمانی خواهد بود.



در لحظه $t=0$ کلید K_1 را باز می‌کنیم منبع جریان وارد مدار می‌شود

$t<0$ $\quad K_1$ بسته و K_2 باز

$t=0$ $\quad K_1$ باز و K_2 باز (شرایط اولیه ندارد)

$t=T_1=R_1C$ $\quad K_2$ بسته و K_1 باز

V را برای زمان‌های مختلف محاسبه کنید:

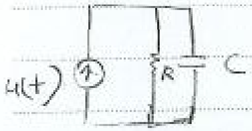
حل: مساله را در ۲ قسمت حل می‌کنیم

part 1: $0<t<T_1$

دقت کنید پاسخ کامل تابع خطی ورودی نیست

step response پاسخ پله

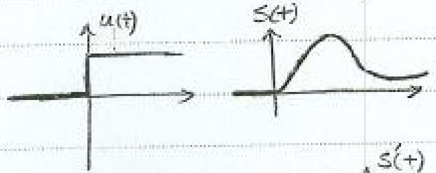
پاسخ حالت صفر مدار با ورودی پله واحد

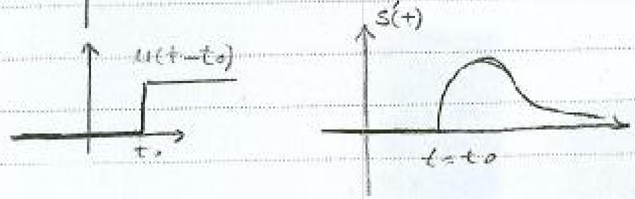


$v(t) = u(t) R (1 - e^{-t/RC})$

$S(t)$

خاصیت تغییرناپذیری پاسخ پله با زمان:





$s(t) = s(t - t_0)$

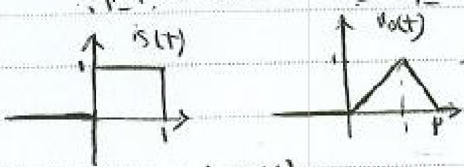
تابع انتقال (شیفت):

$J_\tau (f) = f(t-\tau)$

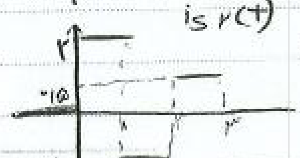
$J_\tau [Z_0(i_0)] = Z_0 [J_\tau (i_0)]$ خاصیت تغییرناپذیری با زمان

اگر در $t=0$ یک منبع را اعمال کنیم و پاسخ حالت صفر را به اندازه τ شیفت دهیم معادل این است

پاسخ: اگر پاسخ حالت صفر را به اندازه τ در حوزه زمان انتقال دهیم معادل این است که ابتدا ورودی را به اندازه τ در حوزه زمان انتقال دهیم و سپس پاسخ حالت صفر را محاسبه کنیم:



پاسخ حالت صفر

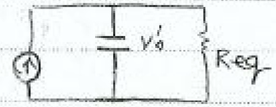


خروجی پاسخ حالت صفر ؟

$v(t) = R I_0 (1 - e^{-t/R_1C})$

$v'_0 = (v(t=T_1) = R I_0 (1 - \frac{1}{e}))$

part 2:



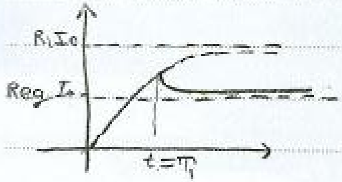
هم شرط اولیه دارد و هم پاسخ ورودی

$t \ge T \qquad v(t') = v'_0 e^{-t'/R_{eq}C} + R_{eq} I_0 (1 - e^{-t'/R_{eq}C})$

$t' = t - T_1$

$v(t) = R I_0 (1 - \frac{1}{e}) e^{-\frac{(t-T_1)}{T_2}} + R_{eq} I_0 (1 - e^{-\frac{t-T_1}{T_2}})$

مبدا زمان را به $T_1 = t$ منتقل کردم $t \to t'$



خطی بودن پاسخ حالت صفر:

هر چه دامنه ورودی k برابر شود پاسخ حالت صفر هم k برابر می‌شود

مدار RC موازی → $v(t) = R_1 I_0 (1 - e^{-t/RC})$ $\quad i_s(t) = I_0 \quad t \ge 0$

جواب

رابطه پاسخ با ورودی خطی است

در مدار خطی تغییرناپذیر با زمان برقرار است

$Z_{t=0} (i = I_0) =$

لحظه اعمال ورودی

نوع و مقدار ورودی

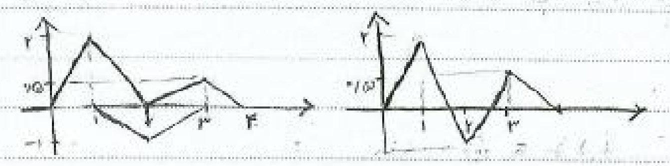
Z_{t_0} اپراتور حالت صفر

$$\begin{cases} Z_{t_0}(i_1+i_2) = Z_{t_0}(i_1) + Z_{t_0}(i_2) \\ Z_{t_0}(\alpha i) = \alpha Z_{t_0}(i) \end{cases}$$

پاسخ حالت صفر خطی است

ورودی در لحظه t_0 وارد شده است

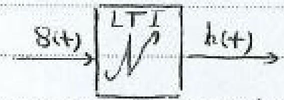
Year. Month. Date.



$$i_{s2}(t) = 2 i_s(t) - i_s(t-1) + 0/5\, i_s(t-2)$$

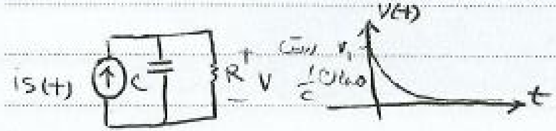
$$V_{o2}(t) = 2V_o(t) - V_o(t-1) + 0/5 V_o(t-2)$$

پاسخ ضربه : پاسخ حالت صفر یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان به یک ضربه واحد که در $t=0$ اعمال شده است را پاسخ ضربه‌ی آن مدار می‌گویند و با $h(t)$ نمایش می‌دهیم.



راه‌های محاسبه پاسخ ضربه
- از تعریف ضربه با تقریب تابع پالس
- مشتق گرفتن از پاسخ پله
- استفاده مستقیم از معادله دیفرانسیل

روش اول :



$$C\frac{dv}{dt} + \frac{V}{R} = i_s(t) \qquad V(0^-) = 0$$

$0<t<\Delta$ خازن شارژ می‌شود و $t>\Delta$ خازن دشارژ می‌شود.

ابتدا $h_\Delta(t)$ یعنی پاسخ مدار به ورودی $P_\Delta(t)$ را محاسبه می‌کنیم

$\Delta << RC$

$$P_\Delta(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{1}{\Delta} & 0<t<\Delta \\ 0 & t>\Delta \end{cases}$$

Year. Month. Date.

$$C\frac{dh_\Delta}{dt} + \frac{1}{R} h_\Delta = \frac{1}{\Delta} \qquad 0<t<\Delta \quad (1$$

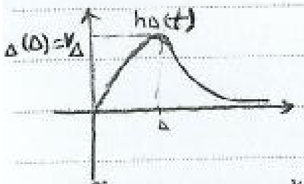
$$C\frac{dh_\Delta}{dt} + \frac{1}{R} h_\Delta = 0 \qquad t>\Delta \quad (2$$

معادله (1) $\xrightarrow{h_\Delta(0)=0}$ $h_\Delta(t) = \frac{R}{\Delta}(1-e^{-t/RC}) \qquad 0<t<\Delta$

جریان $\frac{1}{\Delta}$ از مقاومت می‌گذرد $\Leftarrow$ $V = \frac{R}{\Delta}$

$$h_\Delta(t=\Delta) = \frac{R}{\Delta}(1-e^{-\Delta/RC}) = V_\Delta$$

$$t>\Delta : h_\Delta(t) = V_\Delta\, e^{-\frac{(t-\Delta)}{RC}}$$ چون از نقطه Δ به بعد در نظر می‌گیریم



$$e^{-x} = \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \dots\right) \overset{x<<1}{\simeq} 1-x$$

$$\Delta \to 0 : \Delta << RC \to e^{-\frac{\Delta}{RC}} = 1 - \frac{\Delta}{RC}$$ بدون بعد

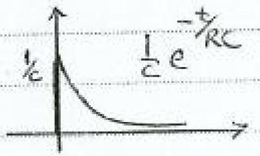
اگر $\Delta = 0$ پرش به اندازه $\frac{1}{C}$ می‌شود.

$$V_\Delta = h_\Delta(\Delta) = \underbrace{\frac{R}{\Delta}(1-e^{-\frac{\Delta}{RC}})}_{V} = \frac{1}{C}$$

$$h_\Delta(t) \overset{t<\Delta}{\simeq} \frac{R}{\Delta}\left(1-\left(1-\frac{t}{RC}\right)\right) = \frac{1}{C}\frac{t}{\Delta} \equiv \text{خط}$$

شیب این خط : $\frac{1}{C\Delta}$

اگر $\Delta \to 0$ به اندازه شیب بی‌نهایت می‌رود (پرش) (محور ها)!!



$$h_\Delta(t) \to \frac{1}{C} e^{-t/RC}$$

در حالت حدی قسمت اول $0<t<\Delta$ به یک پرش روی محور تبدیل می‌شود و قسمت دوم ادامه می‌یابد.

$$\lim_{\Delta \to 0} h_\Delta(t) = h(t)$$ پاسخ ضربه

قسمت اول شرط اولیه ای برای قسمت دوم محسوب می‌شود.

به ازای $t=0$ صفر می‌شود

Year. Month. Date.

قرار $\delta(t)$ به ازای $t \neq 0$ صفر است

۲) از پاسخ پله مشتق می‌گیریم:

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = R\delta(t)\left(1-e^{-t/RC}\right) + Ru(t)\left(\frac{1}{RC}e^{-t/RC}\right)$$

$$= u(t)\left(\frac{1}{C}e^{-t/RC}\right)$$

* $\delta(t)$ فقط در $t=0$ مقدار دارد و $1-e^{-t/RC}$ در $t=0$ برابر ۰ است که کل عبارت

$R\delta(t)\left(1-e^{-t/RC}\right)$ صفر می‌شود.

روش سوم: در مدارهای مرتبه بالاتر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

* کمک و فوق

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{1}{R}v(t) = \delta(t)$$

$$L[\delta(t)] = 1$$

در حوزه لاپلاس

از طرفین لاپلاس می‌گیریم

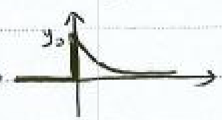
$$C(sV(s) - \cancel{v(0)}) + \frac{1}{R}V(s) = 1$$

$$V(s)\left(Cs + \frac{1}{R}\right) = 1 \rightarrow V(s) = \frac{1}{Cs + \frac{1}{R}}$$

$$F(s) = \frac{k}{s+a} \xrightarrow{L^{-1}(F(s))} f(t) = ke^{-at}u(t)$$

$$V(s) = \frac{1/C}{s + \frac{1}{RC}} \longrightarrow h(t) = \frac{1}{C}e^{-t/RC}u(t)$$

جواب را حدس می‌زنیم و آن را در معادله صدق می‌دهیم تا ضرایب ثابت معلوم شوند.

تحلیل مداری ←  ضربه باری ای رمی کند و آن بار هم تخلیه می‌شود.

$$y(t) = y_0 e^{-t/RC}u(t)$$

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{1}{R}v = \delta(t) \qquad v = y_0 e^{-t/RC}u(t)$$

$$\frac{dv}{dt} = y_0\left[-\frac{1}{RC}e^{-t/RC}u(t) + \underbrace{e^{-t/RC}\delta(t)}_{1\times\delta(t)}\right]$$

Year. Month. Date.

چون در این مسئله وقتی محدود نبود جریان پرش کرد.

روش دوم:

رابطه بین پاسخ ضربه و پاسخ پله:

پاسخ ضربه یک مدار (LTI) مشتق پاسخ پله (step) آن است.

$$s(t) = \int h(t)dt \quad \text{یا} \quad h(t) = \frac{d\,s(t)}{dt}$$

پاسخ پله

اثبات: تعریف تابع پاسخ $h(t) = \lim_{\Delta \to 0}\left[Z_0(P_\Delta)\right]$ ← اپراتور پاسخ حالت صفر

$$P_\Delta = \frac{1}{\Delta}\left[u(t) - u(t-\Delta)\right] = \frac{1}{\Delta}u(t) - \frac{1}{\Delta}\mathcal{T}_\Delta(u(t))$$

بنابه خطی بودن پاسخ حالت صفر →

$$h_\Delta(t) = Z_0(P_\Delta) = \frac{1}{\Delta}Z_0(u(t)) - \frac{1}{\Delta}Z_0(\mathcal{T}(u(t)))$$

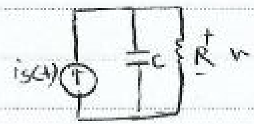
$$\frac{1}{\Delta}s(t) - \frac{1}{\Delta}\mathcal{T}_0(s(t))$$

$$h_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta}s(t) - \frac{1}{\Delta}s(t-\Delta)$$

$$h(t) = \lim_{\Delta \to 0} h_\Delta(t) = \lim_{\Delta \to 0}\left[\frac{s(t) - s(t-\Delta)}{\Delta}\right]$$

بنابه تعریف مشتق: $h(t) = \frac{d\,s(t)}{dt}$

* تمام این روابط برای مدارهای خطی تغییر ناپذیر با زمان صادق است.



۱) ابتدا پاسخ پله را حساب می‌کنیم

$$i_s(t) = u(t) \rightarrow s(t) = Ru(t)\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

Year. Month. Date.

انتگرال گیری از پاسخ ضربه

پاسخ پله <

محاسبه مستقیم

$t=0^-$ $\quad v_s(t)=0$

ولتاژ خازن و جریان سلف نمی‌توانند در لحظه صفر جهش کنند.

$t=0^+$ $\quad v_s(t)=1 \to$ عدم پرش $\to i_c(0^+)=0$ جریان سلف یک حافظه دارد

همه ولتاژ منبع دو سر سلف می‌افتد یعنی سلف شکل [illegible] عمل می‌کند.

$v_L=1 \Rightarrow L\frac{di_L}{dt}=1 \Rightarrow \frac{di_L}{dt}>0 \longrightarrow$ جریان سلف زیاد می‌شود

مقاومت اجازه نمی‌دهد که جریان سلف زیاد شود.

* با افزایش زمان و افزایش ولتاژ دو سر مقاومت V_L کاهش می‌یابد تا نهایتاً به مقدار صفر میل می‌کند

در این لحظه مقدار جریان $\frac{V_s(t)}{R}$ برابر $\frac{1}{R}$ است یعنی

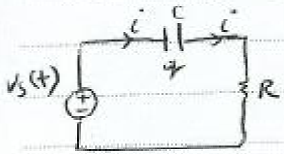
$I(0)=0$

$i(\infty)=\frac{1}{R} \qquad \Rightarrow$ اولاً در حالت دائمی سلف مثل اتصال کوتاه عمل می‌کند

ثانیاً پاسخ مدار برابر است

$i(t)=I_\infty(I_0-I_\infty)+\cancel{I_\infty}\,e^{-\frac{R}{L}t}$

$=\frac{1}{R}\left(e^{-\frac{R}{L}t}\right)u(t)$



محاسبه پاسخ پله و ضربه برای مدار RC سری:

$KVL:\ \frac{1}{C}\int i_c(\tau)d\tau + Ri_c = v_s(t)$

$\int i(\tau)d\tau = q$ بار خازن متغیر مدار $\Rightarrow \frac{1}{C}q + R\frac{dq}{dt} = v_s(t) \qquad q(0^-)=0$

$v_s(t)=u(t) \to \underbrace{q^s(t)}_{\text{پاسخ پله}} = \underbrace{C\,u(t)}_{\text{بار خازن}}\left(1-e^{-t/RC}\right)$

Year. Month. Date.

$= y_0\,\delta(t) - \frac{y_0}{RC}e^{-t/RC}u(t)$

جایگذاری در معادله اصلی $\quad C\left[y_0\delta(t)-\frac{y_0}{RC}e^{-t/RC}u(t)\right]+\frac{y_0}{R}e^{-t/RC}u(t)=\delta(t)$

متعادل کردن:

$Cy_0\delta(t)-\frac{y_0}{R}e^{-t/RC}u(t)+\frac{y_0}{R}e^{-t/RC}u(t)=\delta(t)$

$Cy_0\delta(t)=\delta(t) \Rightarrow \boxed{y_0=1/C}$

$y(t)=y_0e^{-t/RC}u(t) \Rightarrow \boxed{y(t)=\frac{1}{C}e^{-t/RC}u(t)}$

* خلاصه:

۴ روش برای محاسبه پاسخ ضربه به کار می‌رود

۱) استفاده از تبدیل لاپلاس (فعلاً مجاز نیست)

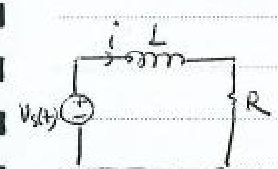
۲) استفاده از تعریف تابع پاسخ (انتگرالی و وقت‌گیر)

۳) مشتق‌گیری از پاسخ پله (توصیه می‌شود)

۴) متعادل کردن ضرایب $\delta(t)$ (درس اول درباره جواب)

محاسبه پاسخ پله و ضربه برای مدارهای ساده:

* RL سری پاسخ ولتاژ دوگان RC موازی پاسخ جریان است.



$v_s(t)=\delta(t)$

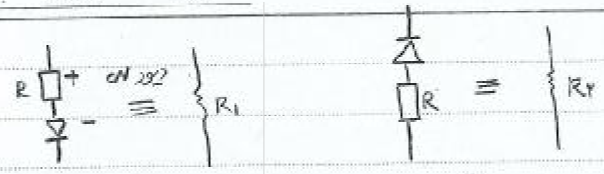
$\begin{cases} L\frac{di}{dt}+Ri=\delta(t) \\ L\frac{di}{dt}+Ri=0 \end{cases} \qquad i(0^-)=0$

از مشابه با کارهای قبلی جواب داریم

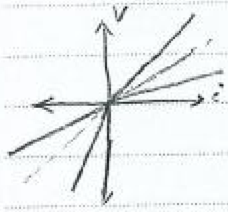
$i(0^+)=I_0 \longrightarrow I_0=\frac{1}{L}$

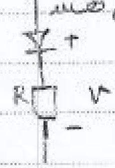
$i(t)=h(t)=\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}u(t)$ به خاطر وجود تابع پله در این انتگرال ۰ می‌شود.

$s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t)dt=\frac{1}{L}\left[-\frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{R/L}\right]_0^t=\frac{1}{R}u(t)\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$



این نوع مقاومت غیرخطی، مقاومت های تکه ای خطی هستند
piece-wise-linear.





تابع دوطرفه $v \to -v$ ⟸ دوطرفه است.
$i \to -i$ آنگاه

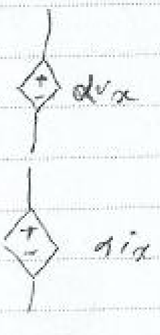
هر عنصری که دارای رابطه ای که بارش به طریقی به ولتاژ دو سرش مربوط باشد خازن نامیده می شود

$q = f(v)$

متغیر [illegible]

$v(t) = v_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau$

منابع وابسته:



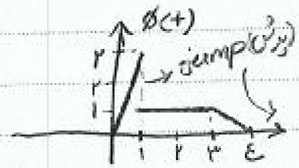
αv_x منبع ولتاژ وابسته به ولتاژ v_x

منبع ولتاژ وابسته به جریان $r i_x$ v

در مشتق گیری از توابع منفصل تابع ضربه ایجاد می شود.

شار عبوری از سلفی به صورت زیر است ولتاژ لحظه ای دو سر آن را تعیین کنید در صورتی که i مطابق نمودار ۲ باشد.

نمودار ۲



به نمودار ۲ هیچ احتیاجی نداریم

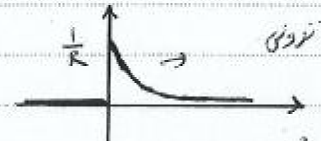
jump (پرش)

یک ولتاژ δ اعمال کرده که این پرش را ایجاد کرده است.

$\rightarrow i(t) = s(t) = C\delta(t)(1-e^{-t/RC}) + C u(t)\left(\frac{e^{-t/RC}}{RC}\right)$

$\Rightarrow s(t) = \frac{1}{R}u(t)\,e^{-t/RC}$ محاسبه پاسخ ضربه

$\xrightarrow{\text{مشتق}}$ $h(t) = \frac{1}{R}\delta(t) - \frac{1}{R^2}e^{-t/RC}u(t)$



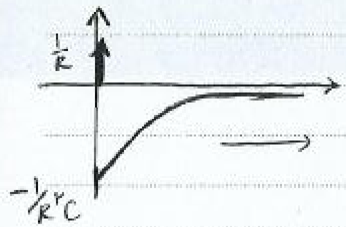
نزولی

خازن در $t = 0$ بار اولیه ندارد ⟸ ولتاژ هم ندارد

از طرفی با ورود منبع ولتاژ ← ولتاژ خازن نمی تواند پرش کند

⟸ ولتاژ دو سر مقاومت می رود ← جریان مقدار $\frac{1}{R}$ می شود

⟸ خازن در صفر مثل اتصال کوتاه عمل می کند و ولتاژ دو سرش نمی افتد و تمام ولتاژ دو سر مقاومت قرار می گیرد و به تدریج خازن شارژ می شود و مثل مدار باز عمل می کند.



در اثر ضربه: خازن یک جریان و ولتاژ اولیه پیدا می کند و شروع به دشارژ شدن می کند.

جدول ۴-۱ صفحه ۲۴۸ و ۲۴۹ بسیار مهم است. پاسخ ضربه و پله را برای هر ۴ حالت مدارهای ساده مرتبه اول نشان می دهد.

فصل اول <
KCL: جمع جبری جریان های یک گره، صفر است.
KVL: جمع جبری ولتاژهای یک حلقه صفر است.

تا منبع هست جهت منبع را در نظر می گیریم
با + و − سر و کار داریم ⟸ جهت قراردادی داریم

جواب حل مسئله {
if I_2 یا I_3 یا I_4 $(+) \Rightarrow$ جهت قراردادی (ما) جهت اصلی است
if I_2 یا I_3 یا I_4 $(-) \Rightarrow$ جهت اصلی عکس جهت قراردادی است

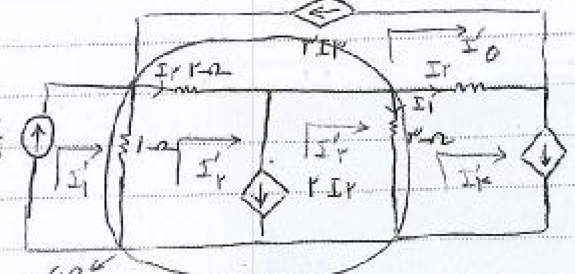
ولتاژ یک مفهوم نسبی است.

استفاده از گره مرکب به جز شاخه های مشترک چند گره را که اگر بخواهیم در استفاده در ورود و خروجی هایشان را با هم جمع کنیم.

گره مرکب را تشکیل می دهیم: دو یا چند گره را طوری ترکیب می کنیم که هیچ منبع ولتاژی در شاخه های ورودی یا خروجی گره مرکب نباشد و همین را شامل نشود.

KCL
5) (e_3+e_4) $\qquad \frac{e_2-e_3}{1} = \frac{e_4-e_5}{1} + e_4$

حال با این معادله را درک کنیم و سپس از روش مش استفاده می کنیم.



روش مش:
مسأله ۳۷:

۵ مش ۵ معادله
۴ منبع جریان و ۴ معادله
۳ منبع وابسته ۳ معادله کمکی

مش حلقوی بدون منبع (مش فرعی)

1) $I'_1 = I_S$ $\qquad I_1 = I'_3 - I'_4$
$\qquad I_2 = I'_4 - I'_5$

2) $I'_2 - I'_3 = 2I_2$ $\qquad I_3 = I'_2 - I'_5$

حلقه ای که هیچ منبع در آن نباشد.

3) $I'_4 = 2I_4$

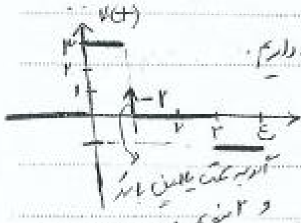
4) $I'_5 = -3I_3$

$1\times(I'_2 - I'_1) + 2(I'_2 - I'_5) + 3(I'_2 - I'_4) = 0$

$3u(t) - 3u(t-1) - 2\delta(t-1) + \cdots$

۱) وقتی مورد نیاز بود که ... رابطه جامعی دارند.

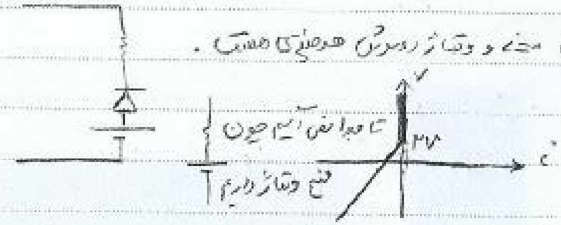
ما باید لحظات بحرانی را تعیین علامت کنیم. $\qquad v = \frac{d\phi}{dt}$



۲) باید سقوط داریم که وقتی مشتق بگیریم ضربه ای با مقدار ۲- داریم.

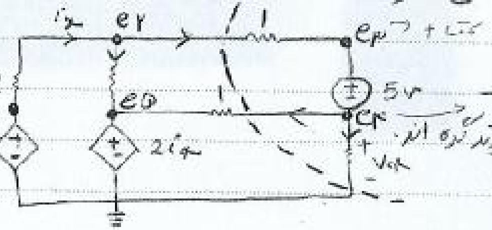
اگر به سمت پایین باشد و ۲ ضربه نیز درست است

اتصال عناصر پیوسته



اگر ۰ دی ← مدار با این منبع ولتاژ در روش هر دو یکی هستی.
اگر ۵۰>

منبع ولتاژ ← سختی روش گره $\qquad$ منبع جریان ← سختی روش مش



مسأله ۳۹:
هر گاه دو یا چند منبع به هم رسیدند گره اند.
۶ گره داریم
۵ معادله لازم داریم:

1) $e_1 = 3V_\alpha$

2) $e_5 = -2i_\alpha$ $\qquad$ به ازای هر منبع ولتاژ یک معادله به دست می آید

3) $e_3 - e_4 = 5$ $\qquad$ سه تا منبع ← سه معادله
دو تا معادله

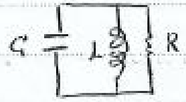
معادله کمکی

(4) $e_4 = V_\alpha$ $\qquad$ هیچ منبع ولتاژی به گره e_2 وصل نیست پس

(5) $i_\alpha = \frac{e_1 - e_2}{2}$ $\qquad$ معادله چهارم را با e_2 تشکیل می دهیم
صفحه بعد قرار دارد

KCL (9) node e_2: $(e_2 - e_3) + (e_2 - e_5) \ldots$

مدار مرتبه ۲: شامل ۲ عنصر ذخیره کننده انرژی است مشروط بر آنکه ساده نشوند. در ادامه توجه خود را به مدار RLC موازی معطوف می‌کنیم.



* در ابتدا روش حل معادلات مرتبهٔ دوم را یادآوری می‌کنیم:

یادآوری روش حل معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = i_s(t)$$

ضرایب ثابت

* جواب خصوصی مانند معادلات مرتبهٔ اول محاسبه می‌شود (حدس زدن و جایگذاری)

$i_L(t) = i_h(t) + i_p(t)$

جواب همگن   جواب خصوصی

بجای $d \to s$

$d^2 \to s^2$

جواب همگن: معادلهٔ مشخصه $s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$

ریشه‌های معادلهٔ مشخصه، فرکانس‌های طبیعی مدار هستند.

معادلهٔ فوق حتماً دو ریشه دارد که ۴ حالت وجود دارد

۲ ریشهٔ حقیقی منفی – ریشهٔ مضاعف حقیقی منفی – ۲ ریشهٔ مختلط – موهومی خالص

$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ یک پارامتر به نام α_d تعریف می‌کنیم

$\underbrace{\alpha_d}_{\text{تعریف}} \triangleq \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \Rightarrow s_{1,2} = -\alpha \pm \alpha_d$

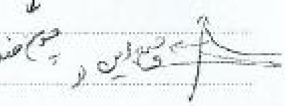
$i_h(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 (t)}$ صورت کلی جواب همگن

حالت اول: $\alpha > \omega_0 \Rightarrow s_1$ و s_2 حقیقی و منفی

over damped (اضافه کردن)(میرا شدن)   میرای شدید

چون ضرایب مثبت هستند ریشه‌ها منفی هستند

[illegible]

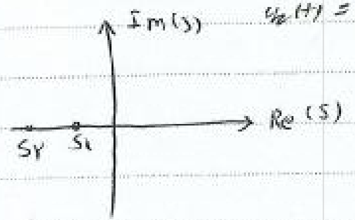


برخلاف این دو تا میرای نوسانی دیده می‌شود.

$\longrightarrow i_h(t) = k_1 e^{(-\alpha + \alpha_d)t} + k_2 e^{(-\alpha - \alpha_d)t}$ ؛ k_1 و k_2 با شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

$i_h(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$

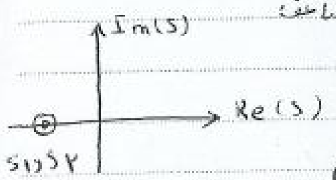
s_1 و s_2 در صفحهٔ مقابل روی قسمت حقیقی منفی قرار دارند.



حالت دوم: critically damped (میرای بحرانی)

: $\alpha = \omega_0 \to s_1 = s_2 = -\alpha \to i_h(t) = ke^{-\alpha t} + k' t e^{-\alpha t}$

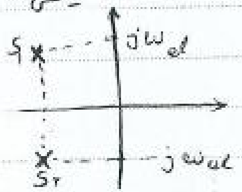
ریشهٔ مضاعف



حالت سوم: under damped (میرای ضعیف) → $\alpha < \omega_0$ → دو فرکانس طبیعی مختلط و مزدوج هم

$\underbrace{\omega_d}_{\text{حقیقی}} \triangleq \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ $s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$

در معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه دوم وقتی ریشه‌ها مختلط باشد ضرایب مزدوج یکدیگر هستند.



$i_h(t) = \overset{\text{مختلط}}{k_1} e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + k_1^* e^{(-\alpha - j\omega_d)t}$

اثبات:

هر عدد مختلط را می‌توان به شکل یک دامنه و یک فاز نمایش داد.

$\Rightarrow k_1 = |k_1| e^{j\theta}$ $k_1^* = |k_1| e^{-j\theta}$

$= |k_1| e^{-\alpha t} \left(e^{j(\theta + \omega_d)} + e^{-j(\theta + \omega_d)} \right)$

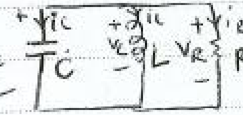
$= 2|k_1| e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \theta)$

Year. Month. Date.

$II)\ i_h(t) = (k + k't)\, e^{-\alpha t}$ $\quad III)\ i_h(t) = k e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \theta)$

$IV)\ i_h(t) = k\cos(\omega_d t + \theta)$

جواب همگن : پاسخ ورودی صفر



برای مدار موازی kcl را مبنای کار قرار می‌دهیم

$i_C + i_L + i_R = 0$ ① $\quad v_L = v_C = v_R$

$v_L = L \dfrac{di_L}{dt}$ $\quad v_R = R i_R$ $\quad i_C = C \dfrac{dv_C}{dt}$

برای نوشتن معادله با یک متغیر داشته باشیم ⇐ می‌خواهیم یک متغیر را نگه داریم

بقیه متغیرها را به آن تبدیل می‌کنیم

$i_C = C \dfrac{dv_C}{dt} = C \dfrac{dv_L}{dt} = LC \dfrac{d^2 i_L}{(dt)^2}$ ②

$i_R = \dfrac{v_R}{R} = \dfrac{v_L}{R} = \dfrac{L}{R} \dfrac{di_L}{dt}$ ③

② و ③ را در ① قرار می‌دهیم $\quad = LC \dfrac{d^2 i_L}{dt^2} + \dfrac{L}{R}\dfrac{di_L}{dt} + i_L = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 i_L}{dt^2} + \underbrace{\dfrac{1}{RC}}_{2\alpha} \dfrac{di_L}{dt} + \underbrace{\dfrac{1}{LC}}_{\omega_0^2} i_L = 0 \\ v_C(0) = 0 \qquad i_L(0) = I_0 \end{cases}$$

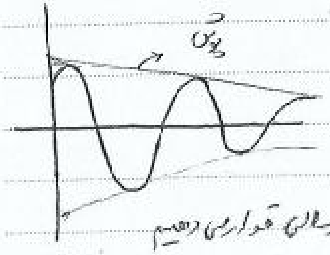
معادله پاسخ ورودی صفر $\quad \alpha = \dfrac{1}{2RC}$

فرکانس مدار نوسانگر $\quad \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

در جواب همگن به شرایط اولیه نیز احتیاج داریم

$\alpha \neq \omega_0$ بدون تمرین $R=1$, $C=1$, $L=4$ $\quad \alpha = 1/2$ $\quad \omega_0 = 1/2$

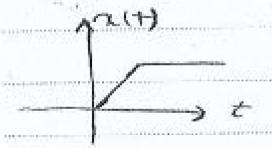
Year. Month. Date.



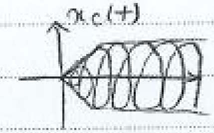
نقاط max را با یک منحنی به هم وصل می‌کنیم

موج AM ، Amplitude modulation

گاهی اطلاعات در دامنه ، فرکانس یا فاز سیگنال ارسالی قرار می‌دهیم



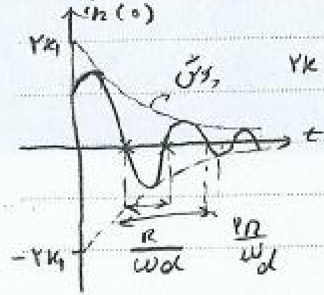
سیگنال پیام



فرکانس بالا

$\lambda = \dfrac{c}{f} = \dfrac{3\times 10^8}{10^9} = 30\,km$ $\quad f_c = 1\,MHz$ $\quad \lambda_c = \dfrac{c}{f_c} = 300\,m$

* * * *



$2k_1 e^{-\alpha t}$ آلاف وقتی است که سیگنال میرا باشد (را افزایش مفید باشد.)

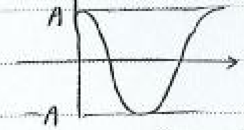
بدون آلاف Loss Less : حالت چهارم

جواب سینوسی خالص

$\alpha = 0 \longrightarrow s_{1,2} = \pm j\omega_0$

$\alpha \to 0 :\ i_h(t) = \underbrace{2|k_1|}_{A} \cos(\omega_0 t + \theta)$

در حالت سوم $\quad \omega_d = \omega_0$



خلاصه بحث :

$\dfrac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\alpha \dfrac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = i_s(t)$

$I:\ i_h(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$

Year. Month. Date.

۱) over damped میرای شدید $\omega_0<\alpha \to Q<1/2$

۲) میرای بحرانی $\omega_0=\alpha \to Q=1/2$

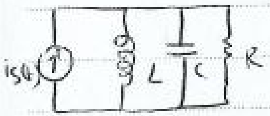
۳) میرای ضعیف $\omega_0>\alpha \to Q>1/2$

۴) نامیرا $\alpha=0 \to Q=\infty$

می‌بینیم که ضریب کیفیت تابعی از میرایی مدار است هرچه میرایی کمتر باشد مقدار Q بیشتر است

تاریخ میان‌ترم سه‌شنبه ۱۱ تا آخر فصل ۶

کلید زدن قبل پله است.



پاسخ پله: پاسخ حالت صفر به ورودی پله

$$\begin{cases} i_s(t)=u(t) \\ i_L(0)=0 \\ v_C(0)=0 \end{cases}$$

معادله مدار: $\frac{d^2 i_L}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt}+\frac{1}{LC}i_L=u(t)/LC$

بسته به مقادیر R و L و C یکی از ۴ حالت معادله حل می‌شود

۱) ω_0 (over damped) $i_L(t)=i_h(t)+i_p(t)$

ورودی ثابت است ← جواب خصوصی هم یک مقدار ثابت می‌شود و مشتق مقدار ثابت ۰ است.

$$i_h(t)=k_1e^{s_1t}+k_2e^{s_2t}$$

$$i_p=1$$

$$i_L(t)=1+k_1e^{s_1t}+k_2e^{s_2t} \to \begin{cases} i_L(0)=0 \Rightarrow 1+k_1+k_2=0 \\ \left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0} \longrightarrow k_1s_1+k_2s_2=0 \end{cases}$$

⇐ ۲ مجهول داریم (s_1 و s_2 مجهول نیست)

$$\frac{di_L(t)}{dt}=k_1s_1e^{s_1t}+k_2s_2e^{s_2t}$$

Year. Month. Date.

$$i_L(t)=(k+k't)e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$i_L(0)=I_0 \to k=I_0$$

ما به دو شرط اولیه احتیاج داریم ⇓ چون درجه ۲ است.

۱) $i_L(0)=I_0$ جریان سلف در لحظه صفر

۲) $\frac{di_L}{dt}(0)=\frac{V_0}{L}$ خود تابع در لحظه صفر

$$v_C=v_L=L\frac{di_L}{dt} \to \left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0}=\frac{V_0}{L}$$

پس $\to \frac{di_L}{dt}=k'e^{-\alpha t}+(k+k't)(-\alpha)e^{-\alpha t}$

$$\Rightarrow \left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0}=k'-\alpha k=\frac{V_0}{L} \to \boxed{k'=\frac{V_0}{4}+\frac{I_0}{2}}$$

$$i_L(t)=\left[I_0+\left(\frac{V_0}{4}+\frac{I_0}{2}\right)t\right]e^{-t/2}u(t)$$ ← جواب ورودی صفر

روش حل پاسخ ورودی صفر:

۱) تشکیل معادله دیفرانسیل ۲) تشخیص یکی از ۴ حالت

۳) محاسبه ضرایب ثابت با استفاده از شرایط اولیه

ضریب کیفیت یا Q factor: $Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha}=\frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\frac{1}{RC}}=\frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}}$

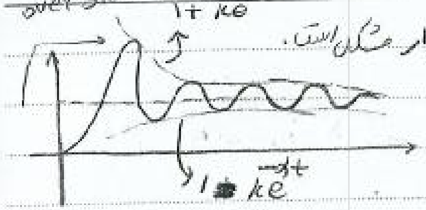
در حالت عدم اتلاف $(\alpha=0) \Rightarrow Q=\infty$

در حالت میرای شدید $(\alpha>\omega_0) \Rightarrow Q<\frac{1}{2}$

" میرای بحرانی $(\omega_0=\alpha) \Rightarrow Q=1/2$

Year. Month. Date.

over shot $1+ke^{-\alpha t}$



در حالت میرای ضعیف ریپل از صفر به حالت پایدار مشکل است.

$1+ke^{-\alpha t}\cos(\omega_d t+\theta)$

$1-ke^{-\alpha t}$

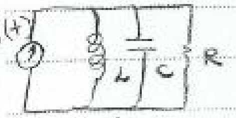
وقتی ضعیفی را دارد دوام می‌بینیم این حالت میرای ضعیف خطراتی دارد چون از مقدار مجاز بیشتر می‌شود

مدارهای برای کار 220 ولت طراحی کرده‌ایم اما ولتاژ 300 ولت به عنوان مثال از مدار می‌گذرد

تحلیل فیزیکی پاسخ پله

در $t=0$ سلف بدون شرایط اولیه و خازن بدون ولتاژ اولیه (سلف مثل مدار باز و خازن مثل اتصال کوتاه)

در $t=0$ همه جریان از (1) سلف ← مدار باز (2) مقاومت (3) خازن ← اتصال کوتاه می‌گذرد



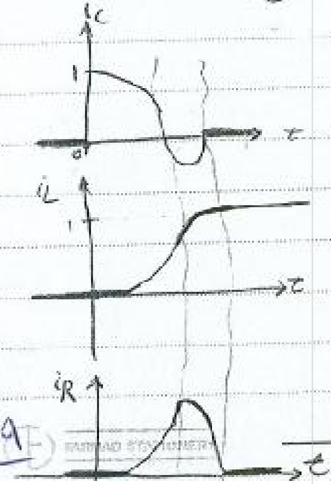
ولتاژ و جریان روی خازن در $t=0$ نمی‌تواند پرش کند.

در $t=0$ ولتاژ دو سر خازن و جریان سلف نمی‌تواند پرش کند. چون جریان سلفی صفر بوده نمی‌تواند پرش کند ← همه‌ی جریان از خازن می‌گذرد.

$i_C(0^+)=1$

← به مرور ولتاژ دو سر خازن افزایش می‌یابد ($v=\frac{1}{C}\int i_C\,dt$)

← هم از مقاومت و هم از سلف جریان می‌گذرد



جریان سلف نمی‌تواند بپرد.

KCL: $i_S-(i_C+i_L)=i_R$

Year. Month. Date.

$k_1=\frac{s_2}{s_1-s_2}$ $\quad k_2=\frac{-s_1}{s_1+s_2}$

حال پاسخ پله مدار RLC موازی برای حالت over damped را بدست می‌آوریم

$k_1=\frac{s_2}{s_1-s_2}$ $\quad k_2=\frac{-s_1}{s_1-s_2}$

$$i_L(t)=\left[1+\frac{s_2}{s_1-s_2}e^{s_1t}-\frac{s_1}{s_1-s_2}e^{s_2t}\right]u(t)$$

پاسخ پله‌ی موازی برای حالت میرای شدید:

حالت میرای بحرانی $\quad \frac{d^2i_L}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt}+\frac{1}{LC}i_L=\frac{u(t)}{LC}$

$i_L=i_p+i_h$ $\qquad \alpha=1/2RC$

$i_h(t)=(k+k't)e^{-\alpha t}$ و $i_p(t)=1$

$i_L(t)=[1+(k+k't)e^{-\alpha t}]u(t)$

$i_L(0)=0\longrightarrow 1+k=0$

$$\frac{di_L(t)}{dt}=(k')e^{-\alpha t}+(k+k't)(-\alpha e^{-\alpha t})$$

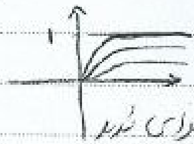
وقتی مشتق گیری $u(t)$ را در نظر نمی‌گیریم

$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0}=0\Rightarrow k'-\alpha k=0\to k'=-\alpha$

از صفر ← صفر
رسم نقطه‌ای سه تکه

$i_L(t)=[1-e^{-\alpha t}-\alpha te^{-\alpha t}]u(t)$

بحرانی یک حالتی از نوسان است.



پاسخ پله میرای شدید

Year. Month. Date.

← کم کم دو سر خازن ولتاژ پیدا می‌شود ← جریان خازن کم و جریان سلف و مقاومت زیاد

در بی‌نهایت خازن کاملاً شارژ شده و مثل مدار باز عمل می‌کند ← $i_C = 0$

جریان ثابت ← سلف اتصال کوتاه شده ← تمام جریان از سلف می‌گذرد
پایدار

← ولتاژ دو سر خازن و ولتاژ دو سر مقاومت صفر بوده است.

جریان سلف همواره زیاد می‌شود. چون در حال شارژ شدن است.

عامل غالب در این مسئله سلف است.

در $t=\infty$ سلف ← مدار باز ، در $t=0$ سلف ← اتصال کوتاه

در ابتدا خازن شارژ شده ← i_C کم ، ولتاژ دو سر خازن زیاد می‌شود

پاسخ ضربه:

$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2}+\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt}+i_L=\delta(t)$$

۱) استفاده مستقیم از معادله دیفرانسیل

جریان سلف نمی‌تواند پرش کند

← در مشتق اول جریان ضربه و در مشتق دوم دوبلت

اما طرف دوم دوبلت نداریم ← جریان سلف نمی‌تواند بپرد

زیرا در غیر این صورت در سمت چپ معادله‌ی فوق ، تابع دوبلت $\delta'(t)$ داریم در حالی که در سمت راست δ' نداریم و با هم حذف نمی‌شوند.

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$ ← انتگرال‌گیری از معادله →

چون مدار قبل از اعمال ضربه در حالت صفر بود

$$\rightarrow \int_{0^-}^{0^+} \rightarrow LC\left(\frac{di_L(0^+)}{dt}-\cancel{\frac{di_L(0^-)}{dt}}^{\,0}\right)+\frac{L}{R}\left(i_L(0^+)-i_L(0^-)\right)$$

$$+\int_{0^-}^{0^+} \cancel{i_L(\tau)d\tau}^{\,0} = 1$$

در لحظه $t=0^+$

$$LC\left(\frac{di_L(0^+)}{dt}\right)=1,\qquad \frac{di_L(0^+)}{dt}=\frac{1}{LC}$$

مسئله یافتن پاسخ ضربه به ~~پاسخ ورودی صفر~~ تبدیل شرط اولیه

Year. Month. Date.

پس همان یافتن پاسخ ضربه در لحظه $t=0^+$ به یافتن پاسخ ورودی صفر در لحظه $t=0^+$ با شرایط اولیه جدید تبدیل می‌شود.

حتی اگر مدار خطی نباشد روش درست است.

$$i_L(0^+)=0$$

$$\frac{di_L(0^+)}{dt}=\frac{1}{LC}$$

۲) روش دوم: حدس زدن جواب

می‌دانیم که ضربه به یک شرط اولیه منجر می‌شود پس می‌توان شکل کلی پاسخ را حدس زد و به کار برد

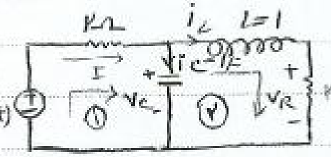
$$i_L(t)=k_1e^{s_1t}+k_2e^{s_2t}$$

پاسخ را در معادله صدق می‌دهیم تا k_1 و k_2 به دست آیند.

۳) روش سوم: مشتق گرفتن از پاسخ پله که فقط برای مدارهای LTI کار می‌رود.

تعبیر فیزیکی پاسخ ضربه:

در لحظه اول ضربه از مقاومت نمی‌تواند بگذرد ← همه جریان ضربه از خازن می‌گذرد ← بار روی خازن تولید می‌شود ← خازن ما با راکتیکی و سلف و R داریم ← بار خازن از طریق R و سلف تخلیه می‌شود و سپس همه نابود می‌شوند.



پاسخ ضربه ورودی جریان واحد را به دست آورید.

$$i_L(0^-)=I_0=1A$$

$$v_C(0^-)=V_0=2V$$

$$KCL:\ I=i_C+i_L=C\frac{dv_C}{dt}+i_L$$

$$KVL1:\ v_S(t)=2(\underbrace{i_L+C\frac{dv_C}{dt}}_{I})+v_C$$

$$KVL2:\ v_C=L\frac{di_L}{dt}+3i_L$$

برای تشکیل معادله دیفرانسیل v_c را از معادله دوم در معادله اول می‌گذاریم:

$$v_S(t) = u(t) = 1 i_L + \frac{d}{dt}\left(\frac{di_L}{dt} + 2i_L\right) + \left(\frac{di_L}{dt} + 2i_L\right)$$

$$\cancel{u(t) = 1 i_L + \frac{d}{dt}} \Rightarrow 2\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 7\frac{di_L}{dt} + 5 i_L = 1 \qquad t \geq 0$$

همیشه معادله مرتبه دوم به صورتی باشد که ضریب بالاترین مرتبه فقط یک باشد.

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 3.5\frac{di_L}{dt} + 2.5\, i_L = \frac{1}{2} \qquad t \geq 0$$

$$s^2 + 3.5s + 2.5 = 0 \longrightarrow \begin{cases} s_1 = -1 \\ s_2 = -2.5 \end{cases}$$

$$i_L(t) = 0.2 + k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2.5t}$$

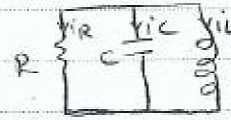
با جایگذاری شرایط اولیه k_1 و k_2 بدست می‌آید. با کمک معادله $v_R = 2i_L$ پاسخ مسئله حاصل می‌گردد.

روش فضای حالت:

می‌توان در یک مدار مرتبه ی n جریان یا شار هر سلف و ولتاژ یا بار هر خازن را به عنوان متغیر حالت در نظر گرفت و بجای تشکیل یک معادله دیفرانسیل مرتبه ی n ، دستگاهی شامل n معادله مرتبه ی اول را به صورت همزمان حل کرد.

حالت اولیه $V_0 = v_C(0)$

$I_0 = I_L(0)$



در معادله یا ولتاژ خازن یا جریان سلف باید باشد

$$i_C = -i_R - i_L$$

$$C\frac{dv_C}{dt} = -\frac{v_C}{R} - i_L$$

$$v_L = v_C \Rightarrow L\frac{di_L}{dt} = v_C$$

$$\begin{cases} \dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{1}{L} v_C + 0 \times i_L \\[2ex] \dfrac{dv_C}{dt} = -\dfrac{1}{RC} v_C - \dfrac{1}{C} i_L \end{cases}$$

در سمت چپ فقط متغیرهای حالت و در سمت راست خود متغیرهای حالت قرار دارند.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} i_L' \\ v_C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$$

$\frac{dx}{dt}$ ماتریس A $\vec{X} \leftarrow$ بردار حالت

دستگاه معادلات فضای حالت: $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{X}$

• معادله اسکالر $\frac{dx}{dt} = ax$ دارای جواب کلی $x = x_0 e^{at}$ می‌باشد.

• متناظراً پاسخ دستگاه معادلات برداری نیز به صورت زیر خواهد بود

پاسخ دستگاه $\underset{1\times n}{\vec{X}} = \underset{1\times n}{\vec{X}_0}\, \underset{n\times n}{e^{At}} \qquad t \geq 0 \qquad e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \cdots$

نکته: مقادیر ویژه ماتریس A همان فرکانس‌های طبیعی مدار هستند.

در ماتریس n×n می‌تواند n مقدار ویژه داشته باشد قبلاً s_1 و s_2 مقادیر ویژه ماتریس هستند

تشکیل معادله فضای حالت را می‌خواهیم حل را نخواهیم (استاد)

[$i_L(t)$ و $v_C(t)$] منحنیات قطعه‌ای در صفحه (v_C, i_L) می‌باشد هنگامی که t از صفر به سمت بی‌نهایت حرکت کند یک منحنی از نقطه (v_0, i_0) شروع می‌شود و مسیری را در فضای حالت طی می‌کند به آن مسیر حالت گویند.

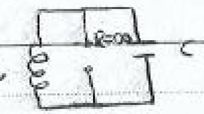
مزایای کاربرد معادلات حالت:

۱) تبدیل یک معادله دیفرانسیل مرتبه n به یک دستگاه شامل n معادله مرتبه اول

۲) مناسب برای تحلیل مدارهای غیرخطی و متغیر با زمان

۳) مناسب برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با کامپیوتر

Year. Month. Date.



$R = \infty \rightarrow \alpha = 0$

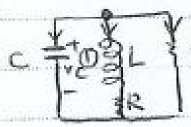
مدار باز ○ مدار LC بی‌اتلاف را مدار تشدید یا مدار تطبیق شده می‌نامند

(resonator)

○ شرایط اولیه از بین نمی‌رود بلکه یک لحظه در سلف و یک لحظه در خازن است

خازن

○ معادله سلف و خازن نیست بلکه یک مقاومت درونی نیز دارند چون جریان از حلقه سیم با مقاومت درونی می‌گذرد پس هیچ گاه سلف خالص نداریم.



سوال: شرایط اینکه مدار روبرو دارای پاسخ نوسانی باشد چیست.

$i_C + i_L + i_{R'} = 0$

$$kcl: \; C\frac{dv_C}{dt} + i_L + \frac{v_C}{R'} = 0$$

$$Cv_C' + i_L' + \frac{1}{R'}v_C' = 0$$

$$kvl^{①}: \; v_C = L\frac{di_L}{dt} + Ri_L$$

$$i_L' = -\left(\frac{1}{R'}v_C' + Cv_C''\right)$$

$$v_C - L\frac{di_L}{dt} - Ri_L = 0$$

$$i_L = -\left(\frac{v_C}{R'} + C\frac{dv_C}{dt}\right)$$

$$v_C + \frac{L}{R'}v_C' + LCv_C'' + \frac{R}{R'}v_C + RCv_C' = 0$$

$$\rightarrow v_C'' + \underbrace{\left(\frac{1}{R'C} + \frac{R}{L}\right)}_{2\alpha}v_C' + \underbrace{\left(\frac{R}{R'} + 1\right)\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2}v_C = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R'C} + \frac{R}{L}\right) = 0 \\ \alpha = 0 \\ \omega_0 > 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{R' = -\frac{L}{RC}}$$

مقاومت منفی برای ایجاد حالت نوسانی کاربرد دارد

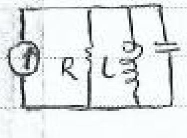
چون اتلاف معادل و مقاومت دارای C و R و L R' منفی می‌شود

$R' < -R$

فرکانس طبیعی

Year. Month. Date.

۱) معادلات مرتبه اول را تشکیل دهید



$(v_C \text{ و } i_L)$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{v_C}{L} \qquad \frac{dv_C}{dt} = \frac{-i_L}{C} - \frac{v_C}{RC} + \frac{i_S}{C}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dv_C}{dt} \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & -1/RC \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix}}_{b}\underbrace{i_S(t)}_{\omega}$$

$$\frac{dx}{dt} = \vec{A}\cdot x + \underset{\text{ضرایب ورودی}}{\vec{b}}\,\omega \rightarrow \text{ماتریس ورودی}$$

$$\text{پاسخ کامل} \quad \vec{X} = \underbrace{e^{At}\vec{X}_0}_{\text{پاسخ ورودی صفر}} + \underbrace{\int_0^t e^{\vec{A}(t-t')}\vec{b}\,\omega(t')\,dt'}_{\text{پاسخ حالت صفر}}$$

← فصل 12 مدار 2 ادامه می‌دهیم

۲) دستگاه معادلات حالت را برای شکل قبل تشکیل دهید:

$$\frac{di_L}{dt} = -3i_L + v_C \qquad \frac{dv_C}{dt} = -\frac{2}{2}i_L - \frac{1}{2}v_C + \frac{1}{2}v_S(t)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dv_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}v_S(t) \quad ?$$

سوال: خازن بدون اتلاف را حالت نوسانی نیز می‌نامند

$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

عامل اتلاف R است که نابود شده است.

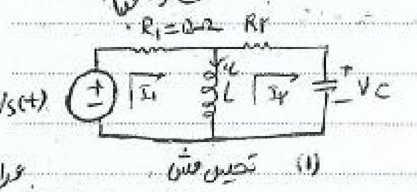
بار خازن در سلف به شار تبدیل می‌شود

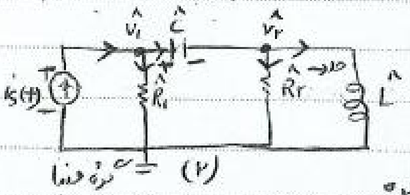
شار سلف هم در خازن به صورت بار (باعث شارژ شدن) می‌شود

Year. Month. Date.

جلسه ۳

دوگانی: (Duality)





روش گره

مدار (۱)

$i_L(0) = 0 \quad V_C(0) = 0$

این دو مدار دوگان هم هستند

$$KVL\ I: -V_s(t) + R_1 I_1(t) + L\frac{d}{dt}(I_1 - I_2)$$

$$KVL\ II: -L\frac{d}{dt}(I_1 - I_2) + R_2 I_2(t) + \underbrace{\frac{1}{C}\int_0^t I_2(\tau)\,d\tau}_{V_C} =$$

مدار (۲)

$$KCL\ \hat{v}_1: -i_s(t) + \hat{v}_1/\hat{R}_1 + \hat{C}\frac{d}{dt}(\hat{v}_1 - \hat{v}_2) = 0$$

$$KCL\ \hat{v}_2: -C\frac{d}{dt}(\hat{v}_1 - \hat{v}_2) + \frac{\hat{v}_2}{\hat{R}_2} + \frac{1}{L}\int_0^t \hat{v}_2(\tau)\,d\tau = 0$$

$\hat{L} = \hat{C}$

o می‌بینیم که اگر مقادیر ثابت دوگان‌ها مساوی باشند جواب‌ها عیناً یکی خواهد شد یعنی $\hat{v}_1 = \hat{I}_1$ و $\hat{v}_2 = \hat{I}_2$

چون حروف ریاضیشان مثل هم است، کافی است مقادیرشان هم باهم مساوی باشند.

بیانی تبدیل دوگانی از دید اجزاء مدار ←

مدار اول	مدار دوگان
$I_1, I_2 > I$	$\hat{V}$
V	$\hat{I}$
V_S	$\hat{I}_S$
$i_s = 2u(t)$	$\hat{V}_S = 2u(t)$
$L = 2H$	$\hat{C} = 2F$
$\hat{C} = 1/2\,F$	$\hat{L} = 1/2\,H$
$R = 5\Omega$	$\frac{1}{R} = \hat{G} = 0.2\Omega$

از دید توپولوژی مدار

مدار اول	مدار دوم
گره (بجز گره مبنا)	مش
مش	گره (بجز گره مبنا)
گره مبنا	مش بیرونی
KVL	KCL
KCL	KVL
سری	موازی

شار

Year. Month. Date.

o می‌توان یک حلقه تشکیل داد که تمام مش‌ها را در بر می‌گیرد (مش بیرونی) یا مدار مسطح

o به گره مبنا یک منبع ولتاژ و یک سلف و یک خازن متصل است در مدار دوگان نیز مش بیرونی از یک منبع جریان و یک خازن و یک سلف می‌گذرد.

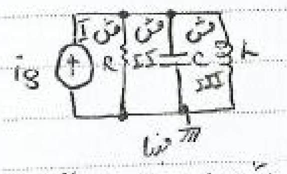
اشاره به الگوریتم:

در مدار دوگانی

شاخه R_1 که یک شاخه سری با منبع ولتاژ در مش بیرونی ← موازی با جریان و یک سر آن به گره مبنا متصل باشد

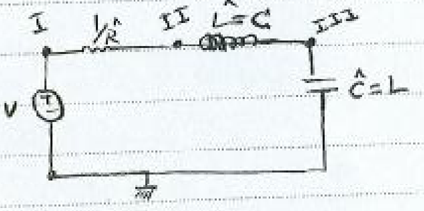
سلف بین گره مبنا و یکی از گره‌های مدار ← در مدار دوگانی باید یک خازن که در مش بیرونی و در مش دوم قرار داشته باشد.

موازی RLC



مش بیرونی از منبع و سلف می‌گذرد

سری RLC



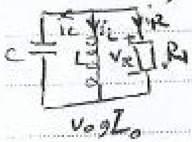
R بین مش ۱ و ۲ ← $\frac{1}{R}$ بین گره ۱ و گره ۲

o اگر یک جزء نه سری و نه موازی داشتیم بالاخره بین دو گره قرار دارد و در نتیجه در مدار دوگانی بین دو مش قرار می‌گیرد

تقریب‌های خطی مدارهای غیرخطی:

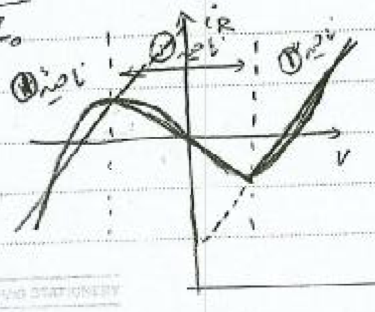
مقاومت غیرخطی کنترل شونده با ولتاژ

مثال:



$$\underset{\text{غیرخطی}}{R} = g(v) = -\alpha V_R + \beta V_R^3$$

نمودار مشخصه مقاومت غیرخطی



نمودار را با سه تکه خط‌های تقریب می‌زنیم

شود

یعنی کنج مقدار مثبت به خط اضافه کرده‌ام یعنی منبع جریان تا این حد برود

اگر نمودار ناحیه ① را ادامه دهیم قسمت مثبت محور را در نقطه‌ای قطع می‌کند و اگر نمودار ناحیه ۳ قسمت منفی محور را در نقطه‌ای قطع می‌کند — اکنون می‌خواهیم نمودار معادل قسمت خطی هر ناحیه را به دست آوریم.

مدار معادل نمودار خطی

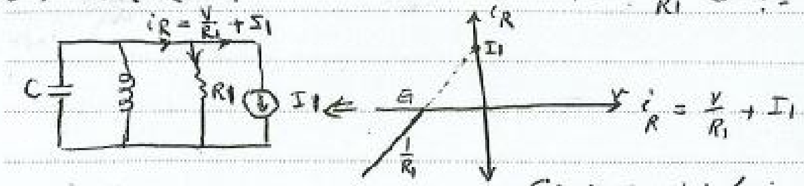
ناحیه ① :

فرض کنید شیب خط $\frac{1}{R_1}$ مثبت باشد :

ناحیه اول

$-\infty < V \leq E_1$ محدوده

$i_R = \frac{V}{R_1} + I_1$



$i_R = \frac{V}{R_1} + I_1$

کافی است با شیب و یک نقطه معادله خط را بنویسیم

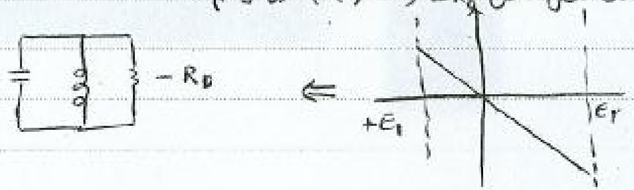
یعنی دو المان موازی شده‌اند چون جریان جمع شده است (یعنی مقاومت خطی R_1 و یک منبع جریان) ثابت مستقل I_1

از روی معادله مدار رسم می‌کنیم.

ناحیه ② :

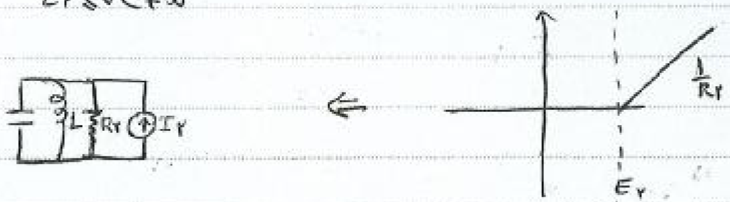
$-E_1 \leq V \leq E_2$

نمودار مشخصه را با یک مقاومت منفی مثل $-R_0$ ($R_0 > 0$) مدل می‌کنیم.



ناحیه ③

$E_2 \leq V < +\infty$



نمودار را با خطی به شیب $\frac{1}{R_2}$ تقریب می‌زنیم

در ابتدا نمودار مشخصه را خطی می‌کنیم.

روش حل (solution) :

در حین تبیین مسائل توپولوژی مدار و معادله یا نمودار مشخصه عنصر غیرخطی و حالت اولیه مدار را به شما می‌دهند روش حل به قرار زیر است

۱ : تقریب تکه‌ای خطی را (چنان که مثلاً) داریم اعمال کنید.

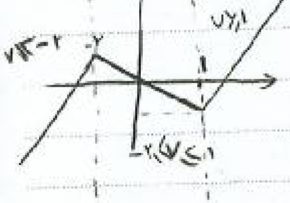
۲ : برای هر ناحیه با توجه به حدود آن یک مدار معادل خطی برای جایگزینی به جای عنصر غیرخطی به دست آورید

۳ : اکنون با توجه به حالت اولیه دریابید که در لحظه اولیه در کدام ناحیه هستید.

پارامتر و تقارن شرط اولیه برای ما اهمیت دارد چون مقاومت کنترل شده با ولتاژ است
(ببینید که حدود هر ناحیه را برحسب چه پارامتری (V یا i) نوشته‌اید شرط اولیه‌ای مهم است که از جنس همان پارامتر باشد.)

۴ : معادله دیفرانسیل مربوط به مدار خطی معادل را به دست آورید و پاسخ را با حل معادله تحلیل کنید

۵ : مادامی که پاسخ شما از حدود ناحیه تجاوز نکند معتبر است. در غیر این صورت در لحظه‌ای مثل t_1 که به حد می‌رسیم وارد ناحیه دیگری می‌شویم و مدار و معادله دیفرانسیل جدیدی در پیش رو داریم.



شرط اولیه $\left\{ \begin{array}{l} V_C(0) = 0 \\ I_L(0) = 2 \end{array} \right.$

در ناحیه دوم ← مقاومت منفی ← مدار ناپایدار

$v = ke^{+\alpha t}$ 　 $t_1 = t_1$ 　 $v(t_1) = 1$

← وارد ناحیه سوم می‌شویم ← { مدار جدید با شرایط اولیه جدید داریم

در لحظه $t = t_1$ ← $v(t_1) = 1$

در لحظه $t = t_1$ ← وارد ناحیه سوم می‌شویم ← مدار جدید با شرایط اولیه جدید داریم که شرایط اولیه این ناحیه از ناحیه قبلی در لحظه $t = t_1$ حاصل می‌شود
(لحظه مرگ ناحیه دوم = لحظه شروع ناحیه سوم)

شرایط اولیه n

این معادله یک پاسخ ورودی صفر و یک پاسخ حالت صفر دارد

$y(0)$

$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}$

$\vdots$

$\left.\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right|_{t=0}$

پاسخ کامل = پاسخ ورودی صفر + پاسخ حالت صفر

پاسخ ورودی صفر = یعنی تمام منابع صفر است حال باید معادله همگن را به دست آوریم.

ابتدا چند جمله ای مشخصه را تشکیل می دهیم و

$\Rightarrow s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0$

ریشه های آن را محاسبه می کنیم. n تا ریشه دارد که ممکن است تعدادی از آنها مضاعف باشد

ریشه های این معادله (s_1 و s_2 ... و s_n) فرکانس طبیعی مدار است یعنی جواب معادله همگن به صورت یک ترکیب خطی از این ضرایب است.

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i e^{s_i t}$$

به شرطی که فرکانس ها متمایز باشند یعنی ریشه مضاعف نداشته باشیم.

اگر ریشه مضاعف داشته باشیم در حوزه زمان پارامتر t در آن ضرب می شود

فرض کنید s_1 صفر مرتبه سوم باشد در آن صورت پاسخ همگن جملاتی شکل زیر خواهد بود

شرایط اولیه ⟵

$$k_1 e^{s_1 t} + t k_2 e^{s_1 t} + t^2 k_3 e^{s_1 t}$$

روش رسیدن به روابط بالا از روش قش و گره استفاده می کنیم و متغیرهای اضافی را حذف می کنیم تا به یک معادله واحد برسیم.

پاسخ حالت صفر:

جواب کلی به صورت زیر است.

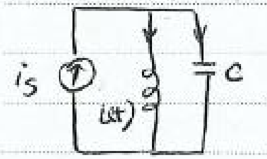
$$y_s(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i e^{s_i t}\right) + y_p(t)$$

$y_p(t)$ جواب خاص است که تنها به ورودی مدار بستگی دارد

با استفاده از صفر بودن حالت اولیه ضرایب ثابت به دست می آید.

$$v = \frac{d\phi}{dt}$$

مدار متغیر با زمان



$$L(t) = \frac{1}{a + b\cos\omega_1 t} \qquad a > b$$

به خاطر اینکه L همیشه مثبت باشد

$$\phi(t) = L(t) i(t)$$

$$KCL: i_L + i_C = i_s \qquad i_L = \frac{\phi(t)}{L(t)} \qquad i_C = C\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{\phi(t)}{L(t)} + C\frac{d^2\phi}{dt^2} = i_s \qquad i_C = C\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

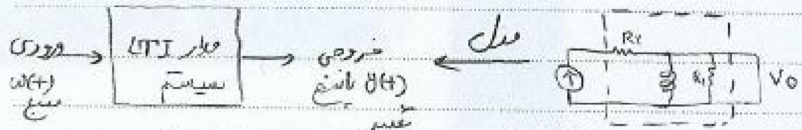
پارامتر اصلی شد

پس دیدیم که ϕ پارامتر مشترک شده نیز

ساعت 2-12 چهارشنبه ۱۹ / ۹

فصل ۶ = مبانی مدارهای خطی و تغییر ناپذیر با زمان:

گاهی اوقات تنها رفتار خروجی و ورودی مدار اهمیت داشته باشد از مدل زیر استفاده می کنیم



معادله مشخصه مدار بستگی به شکل مدار دارد. به خاطر ضرایب معادله دیفرانسیل (تغییر)

به طور کلی برای مدارهای خطی تغییر ناپذیر با زمان با یک ورودی و یک خروجی، رابطه بین ورودی و خروجی با یک معادله دیفرانسیل مرتبه n با ضرایب ثابت بیان می شود.

تعداد عناصر ذخیره کننده انرژی مستقل n تا است

$$\boxed{\frac{d^n y}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y} = \boxed{b_0\frac{d^m w}{dt^m} + b_1\frac{d^{m-1}w}{dt^{m-1}} + \dots + b_m w(t)}$$

طرف دوم معادله در حالت کلی می تواند هم ورودی و هم مشتقات ورودی باشد.

یک ترکیب خطی از خروجی و مشتقات متوالی آن

ترکیب خطی از ورودی و مشتقات آن

مقادیر ضرایب ثابت a_i و b_i به مقادیر المان های مدار بستگی دارند

Year. Month. Date.

بررسی پاسخ ضربه:

سمت راست معادله دیفرانسیل $w(t) = \delta(t)$

شامل تابع ضربه و مشتقات آن خواهد بود

روش محاسبهٔ مستقیم را به کار می‌بریم به شرطی به خواهید رید.

نوعی حدس زدن جواب است.

اگر یک طرف معادله $\delta'(t)$ داشته باشیم باید عکس تغییر هم همان $\delta(t)$ را داشته باشیم باید توابع سمت چپ با توابع سمت راست متعادل باشند.

* توابع ویژه سمت چپ باید با توابع ویژهٔ سمت راست متعادل باشند یعنی ضرایب آنها یکی باشد.

با توجه به مقادیر نسبی n و m سه حالت پیش می‌آید:

۱) $n > m$ (حالت مطلوب)

اما حدس ما غلط بوده است یعنی جواب نمی‌تواند شامل $\delta(t)$ باشد.

پاسخ ضربه شامل هیچ تابع ویژه‌ای نیست

۲) $n = m$ در این صورت پاسخ ضربه شامل یک ترم به صورت $b_0\,\delta(t)$ است.

۳) $n < m$ پاسخ ضربه هم δ و هم مشتقات δ را دارد

$h(t)$ شامل بیش از یک تابع ویژه خواهد بود $h(t) = k_1\delta(t) + k_2\delta'(t) + \dots + k_{m-n}\,\delta^{(m-n)}(t)$

بررسی حالت اول: پاسخ ضربه به صورت روبرو است زیرا

توابع ویژه در $t = 0^+$ برابر صفر می‌شوند و مدار ورودی ندارد. $h(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i e^{s_i t}\right) u(t)$ مهم

مثال: پاسخ ضربه را به دست آورید:

$n = 2$, $m = 1$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y(t) = \frac{dw}{dt} + 2w$$

قدم

Step 1: $s^2 + 4s + 3 = 0 \quad \begin{cases} s = -3 \\ s = -1 \end{cases}$

Step 2: $h(t) = \left(k_1 e^{-3t} + k_2 e^{-t}\right) u(t)$ مهم

نحوه‌ها

Year. Month. Date.

Step 3: متعادل کردن جواب‌ها

$$\frac{dh(t)}{dt} = (-3e^{-3t}k_1 - k_2 e^{-t})\,u(t) + (k_1 + k_2)\,\delta(t)$$

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2} = (9k_1 e^{-3t} + k_2 e^{-t})\,u(t) - (3k_1 + k_2)\,\delta(t) + (k_1 + k_2)\,\delta'(t)$$

$w(t) = \delta(t)$

$$h''(t) + 4h'(t) + 3h(t) = \delta'(t) + 2\delta(t)$$

جایگزینی

$$(9k_1 e^{-3t} + k_2 e^{-t})\,u(t) - (3k_1 + k_2)\,\delta(t) + (k_1 + k_2)\,\delta'(t) +$$

$$4\left[(-3k_1 e^{-3t} - k_2 e^{-t})\,u(t) + (k_1 + k_2)\,\delta(t)\right] + 3$$

$$\left[(k_1 e^{-3t} + k_2 e^{-t})\,u(t)\right] = \delta'(t) + 2\delta(t)$$

مرتب کردن

ضرایب $\delta'(t) \rightarrow k_1 + k_2 = 1$ $\quad -2k_2 = -1 \Rightarrow k_2 = 1/2$

$-3k_1 - k_2 + 4k_1 + 4k_2 = 2 \Rightarrow k_1 + 3k_2 = 2 \quad k_1 = 1/2$

$$9k_1 e^{-3t} + k_2 e^{-t} - 12k_1 e^{-3t} - 4k_2 e^{-t} + 3k_1 e^{-3t} + 3k_2 e^{-t} = 0$$

پاسخ ضربه شامل هیچ تابع ویژه‌ای نخواهد بود

اولاً ضرایب $u(t)$ خود به خود صفر می‌شوند ثانیاً ضرایب توابع ویژه از یک دستگاه معادلات $(m+1)$ مجهولی به دست می‌آید.

مثال: در یک سیستم LTI ورودی $x(t)=e^{-2t}u(t)$ را به سیستم داده‌ایم و خروجی $y(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$ را بدست آورده‌ایم. پاسخ ضربه‌ی این مدار را محاسبه کنید.

$$\frac{dx(t)}{dt}=-2e^{-2t}u(t)+\delta(t)\Rightarrow\delta(t)=\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)\Rightarrow\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow h(t)=\alpha y(t)+\beta\frac{dy(t)}{dt}+\gamma\frac{d^2y(t)}{dt}$$

$$h(t)=2(-e^{-t}+2e^{-2t})u(t)+(e^{-t}+2e^{-2t})u(t)=e^{-t}u(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt}=(-e^{-t}+2e^{-2t})u(t)+\delta(t)(1-1)$$

$$L[h(t)]=H(S)=\frac{1}{S+1}$$ ترم بعد

$$X(S)=L[x(t)]=\frac{1}{S+2}$$

$$Y(S)=L[y(t)]=\frac{1}{(S+1)}-\frac{1}{S+2}=\frac{S+2-S-1}{(S+1)(S+2)}=\frac{1}{(S+1)(S+2)}$$

$$Y(S)=X(S)\cdot H(S)\Rightarrow H(S)=\frac{Y(S)}{X(S)}$$

تابع شبکه مستقل از ورودی و خروجی

$$L[e^{-at}u(t)]=\frac{1}{S+a}$$

در جواب خروجی هم فرکانس‌های طبیعی تابع ورودی و هم فرکانس‌های تابع شبکه

مثال: $n=1$, $m=2$

$$\frac{dy}{dt}+2y(t)=\frac{d^2w(t)}{dt^2}+3\frac{dw(t)}{dt}+3w(t)$$

$$\delta''(t)+3\delta'(t)+3\delta(t)$$

Step 1: $S+2=0\Rightarrow S=-2$

Step 2: $h(t)=k_1e^{-2t}u(t)+k_2\delta(t)+k_3\delta'(t)$

Step 3: $h'(t)=-2k_1e^{-2t}u(t)+k_1\delta(t)+k_2\delta'(t)+k_3\delta''(t)$

Step 4: $2h(t)+h'(t)=(2k_2+k_1)\delta(t)+(2k_3+k_2)\delta'(t)+k_3\delta''(t)=\delta''(t)+3\delta'(t)+3\delta(t)$

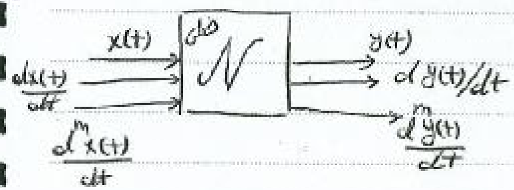
صدق دارد (۱)

حل دستگاه را از آخر شروع می‌کنیم:

$$\Rightarrow\begin{cases}\boxed{k_3=1}\\ 2k_3+k_2=3\ \boxed{k_2=1}\\ 2k_2+k_1=3\ \boxed{k_1=1}\end{cases}\Rightarrow h(t)=e^{-2t}u(t)+\delta(t)+\delta'(t)$$

روشی برای محاسبه پاسخ ضربه

تعیین پاسخ ضربه با داشتن ورودی و پاسخ حالت صفر:



خاصیت سیستم‌های خطی:

$$\alpha x(t)+\beta\frac{dx(t)}{dt}+\gamma\frac{d^2x(t)}{dt}=\alpha y(t)+\beta\frac{dy(t)}{dt}+\gamma\frac{d^2y(t)}{dt}$$

* اگر ترکیبی از ورودی اولیه و مشتقات آن را به عنوان ورودی جدید به سیستم بدهیم پاسخ حالت صفر جدید همان ترکیب* از پاسخ اولیه است. از این خاصیت برای تعیین پاسخ ضربه می‌توان استفاده کرد.

Year. Month. Date.

مثال: در یک سیستم LTI ورودی $x(t) = (\cos t)u(t)$ را به سیستم داده ایم و خروجی $y(t) = e^{-t}u(t)$ را گرفته ایم پاسخ ضربه ی این مدار را محاسبه کنید:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\sin t \, u(t) + \delta(t)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt} = -\cos t \, u(t) + \delta'(t) \Rightarrow \delta'(t) = \frac{d^2x(t)}{dt} + \cos t \, u(t)$$

$$\Rightarrow h'(t) = \frac{d^2y(t)}{dt} + y(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -e^{-t}u(t) + \delta(t) \rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = e^{-t}u(t) + \delta'(t) - \delta(t)$$

$$\Rightarrow h'(t) = e^{-t}u(t) + \delta'(t) + e^{-t}u(t) - \delta(t)$$

$$h'(t) = 2e^{-t}u(t) + \delta'(t) - \delta(t) \xrightarrow{\text{انتگرال می گیریم}}$$

$$h(t) = -2e^{-t}u(t) + u(t) + \delta(t)$$

* روش دوم وقتی به کار می رود که ورودی از لحظه ی $t=0$ به بعد اعمال شود و شکل خاصی داشته باشد.
* در توابع خاص و چند جمله ای استفاده از این روش کارآمد است.

پاسخ مدار LTI به یک ورودی دلخواه:

با استفاده از پاسخ ضربه می توان پاسخ سیستم به هر ورودی دلخواه را به دست آورد.

پاسخ کامل = پاسخ حالت صفر + پاسخ ورودی صفر

بدیهی است که در ادامه باید به دنبال یافتن پاسخ حالت صفر مدار به ورودی دلخواه باشیم.

قضیه کانولوشن: convolution Theorem

$is(t) \rightarrow \boxed{h(t)}$

Year. Month. Date.

i : input

فرض کنید $is(t)$ ورودی مدار LTI با پاسخ ضربه ی آن $h(t)$ است.

فرض کنید ورودی از لحظه ی $t=t_0$ به بعد اعمال شود در این صورت پاسخ حالت صفر مدار به ورودی $is(t)$ از انتگرال زیر محاسبه می شود.

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} h(t-\tau)\, is(\tau)\, d\tau \quad \text{برای } t \geq t_0$$

این انتگرال را انتگرال کانولوشن می نامند مشاهده می شود.

* پاسخ حالت صفر تابع خطی با ورودی است.

این قضیه برای سیستم خطی < تغییرپذیر / تغییرناپذیر > با زمان صادق است. با این تفاوت که:

مفهوم به دست آوردن پاسخ حالت صفر (مفهوم قضیه به خاصیت جمع پذیری برمی گردد.)

برای سیستم های تغییرپذیر با زمان نیز می توان قضیه کانولوشن را به صورت زیر بکار برد.

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} h(t,\tau)\, is(\tau)\, d\tau$$ به ازای هر τ یک مقدار برای h داریم

پارامتر تأخیر / پارامتر زمان

تابع پاسخ ضربه $h(t)$ (بر حسب زمان) متغیر می کند.

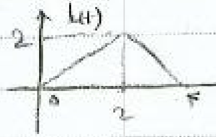
دقت کنید برای هر t باید یکبار این انتگرال جداگانه محاسبه شود.

$$v(t) = \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} h(t-\tau)\, is(\tau)\, d\tau}_{v(t_1)} + \int_{t_1}^{t} h(t-\tau')\, is(\tau')\, d\tau'$$

مقدار $v(t)$ در لحظه $t=t_1$ معلوم است. و می دانیم که $t_0 < t_1 < t$ در این صورت $v(t)$ را از رابطه روبرو می توان به دست آورد.

$$v(t) = v(t_1) + \int_{t_1}^{t} h(t-\tau')\, is(\tau')\, d\tau'$$

سیستم علّی سیستمی است که پاسخ ضربه اش برای $t<0$ صفر باشد. سیستمی قابل قبول است که پاسخ علّی اش صفر باشد



اگر $h(t)$ را داشته باشیم مثلاً شکل مقابل $h(1-\tau')$ را بخواهند

$$h(1-\tau') = h[-(\tau'-1)]$$

۳۸

ابتدا $h(t)$ را نسبت به محور عمود قرینه می کنیم سپس یک واحد به سمت راست

شیفت ...

$\frac{13}{14}$ لید

محاسبه انتگرال های کانولوشن:

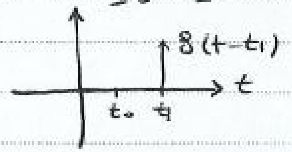
فرض کنید $i_s(t) = \delta(t-t_1)$

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} h(t-\tau)\, i_s(\tau)\, d\tau$$

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} h(t-\tau)\, i_s(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} h(t-\tau)\, \delta(\tau-t_1)\, d\tau$$

$\delta(\tau-t_1)$ فقط در $\tau = t_1$ مقدار دارد چون فقط در صفر مقدار دارد یعنی فقط در $\tau = t_1$ مخالف صفر
چون $\delta(\tau-t_1)$ تنها در $\tau = t_1$ مخالف صفر است لذا انتگرال فوق با فرض $t_0 < t_1 < t$ به صورت زیر در می آید:

$$v(t) = \int_{t_1^-}^{t_1^+} h(t-t_1)\, \delta(\tau-t_1)\, d\tau$$



$$h(t-t_1) \int_{t_1^-}^{t_1^+} \overset{(1)}{\delta(\tau-t_1)}\, d\tau = h(t-t_1)$$

به همان جوابی رسیدیم که بنا به خاصیت انتقال در سیستم های LTI از قبل پیش بینی می کردیم.

تغییر انتگرال تغییر

تفسیر:

$$\int_{t_0}^{t} h(t-t')\, \underbrace{\delta(t'-t_1)}_{\text{(ورودی)}}\, dt' = \underbrace{h(t-t_1)}_{\text{خروجی}}$$

* تغییر ناپذیری با زمان باعث می شود که اگر ورودی به اندازه t_1 انتقال بدهیم خروجی هم به اندازه منتقل می شود

فرم معادل انتگرال کانولوشن:

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} h(t-t')\, i_s(t')\, dt'$$

تغییر متغیر $\quad t - t' = \tau \qquad t' = t - \tau$

$t_0 < t' < t \qquad d\tau = -dt'$

$\Rightarrow \quad 0 < \tau < t - t_0$

$$\int_{t-t_0}^{0} h(\tau)\, i_s(t-\tau)(-d\tau) \Rightarrow v(t) = \int_{0}^{t-t_0} h(\tau)\, i_s(t-\tau)\, d\tau$$

فرم معادل انتگرال کانولوشن

$$= \int_{t_0}^{t} h(t-\tau)\, i_s(\tau)\, d\tau$$

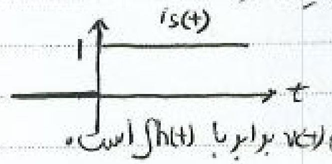
$$v(t) = \int_{t_0}^{t} h(t-\tau)\, i_s(\tau)\, d\tau$$

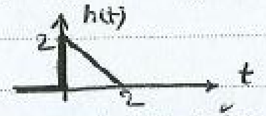
$$v(t) = \int_{0}^{t-t_0} h(\tau)\, i_s(t-\tau)\, d\tau$$

اگر $t_0 = 0$ در آن صورت دو فرم بالا به شکل در می آید یعنی ورودی ها از لحظه صفر وارد شوند

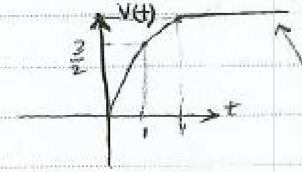
* برای $t_0 = 0$ یعنی اعمال ورودی در لحظه صفر داریم حدود انتگرال از صفر تا t می شود.

محاسبه گرافیکی انتگرال کانولوشن: یعنی از طریق محاسبه سطح زیر نمودار





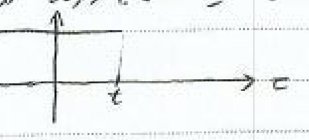
چون ورودی $u(t)$ برابر با انتگرال $\delta(t)$ است پس خروجی $v(t)$ برابر با $\int h(t)$ است.



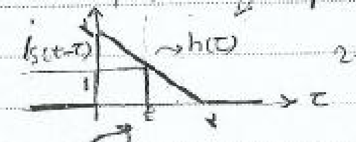
$$\int_0^t (2-t')\, dt' = 2t - \frac{t^2}{2}$$

برای $t > 2$ مقدار تابع ثابت می شود

قرینه و شیفت دادن به اندازه t_0 قدم اول



قدم دوم



قدم سوم

محاسبه حاصل ضرب به صورت گرافیکی

برای $0 < t < 2$ داریم $\quad \text{area} = \frac{2+2-t}{2} \times t$

$$v(t) = 2t - \frac{t^2}{2}$$

$P_\Delta(t'-t_{n-1})$

$$i_{sa}(t') = i_s(t_0)P_\Delta(t'-t_0) + i_s(t_1)\Delta P_\Delta(t'-t_1) + \dots + i_s(t_{n-1})\Delta$$

چون مدار خطی است پاسخ مدار به ورودی فوق مجموع پاسخ مدار به پالسها ی تأخیر یافته می‌شود یعنی

$h_\Delta(t-t_k)$ = پاسخ مدار به ورودی $P_\Delta(t-t_k)$

بنابراین

پاسخ پالس دلتا

پاسخ حالت صفر $\quad i_s(t_0)\Delta h_\Delta(t'-t_0) + i_s(t_1)\Delta h_\Delta(t'-t_1) + \dots + i_s(t_{n-1})\Delta\, h(t'-t_{n-1})$

مدار به ورودی $i_s(t)$ ثابت است

$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} i_s(t_k)\Delta h_\Delta(t'-t_k) = v(t)$$

حال $n \to \infty$; $\Delta = \frac{t-t_0}{n} \xrightarrow{\text{از درجه یک بی‌نهایت}}$

پس $\Delta \to 0 \Rightarrow h_\Delta(\,) = h(\,)$, $P_\Delta(\,) \to \delta(\,)$

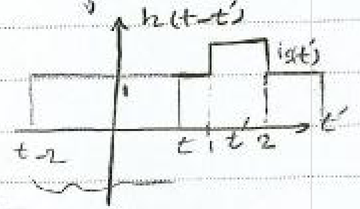
تابع زمانی

در نتیجه $\quad v(t) = \int_{t_0}^{t} i_s(t')\,h(t-t')\,dt' \qquad t \geq t_0$

مسئله ۲۸ صفحه ۶:

* همیشه شکل موج ساده‌تر را برای شیفت دادن انتخاب کنید

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} i_s(t')\,h(t-t')\,dt'$$

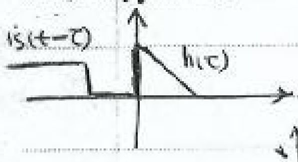


۴۰ طول شیفت باید 2 باشد

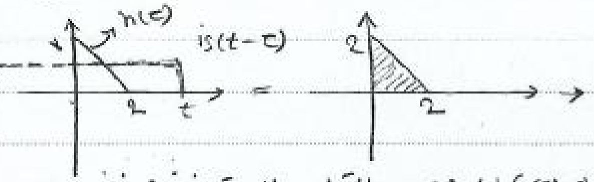
چون شکل موج $i_s(t)$ در $1<t<2$ ثابت است.

~~$h(\tau)$ را با $i_s(t-\tau)$ ... ضرب~~ $\Rightarrow$ حاصلضرب صفر می‌شود $\Rightarrow$ مقدار $= 0$

برای $t<0 \Rightarrow v(t)=0$

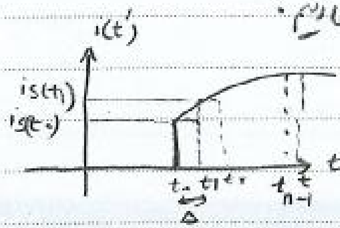


برای $t>2 \Rightarrow$



$v(t)=2$

یک تابع پیوسته (ورودی) را با مجموعی از توابع پالس تخمین می‌زنیم.



t نقطه‌ای است که می‌خواهیم پاسخ مدار را محاسبه کنیم

$t_0 < t' < t_1 \Longrightarrow$ تابع را با یک تابع پالس با دامنه $i_s(t_0)$ تخمین می‌زنیم

اسم شکل موج تقریبی را (مجموع پالس‌ها یا پله‌ها) $i_{sa}(t')$ می‌گذاریم در این صورت

$$i_{sa}(t') = \begin{cases} i_s(t_0) & t_0 \leq t' \leq t_1 \\ i_s(t_1) & \boxed{t_1 < t' < t_2} \quad t_1 \leq t' < t_2 \\ \vdots & \vdots \\ i_s(t_{n-1}) & t_{n-1} < t' < t \end{cases}$$

هدف محاسبه پاسخ حالت صفر مدار LTI در لحظه t به ورودی i_s

ورودی جدید را برحسب توابع پالس تأخیر یافته می‌نویسیم.

$$P_\Delta(t'-t_k) = \begin{cases} 0 & t' \leq t_k \\ \frac{1}{\Delta} & t_k \leq t' < t_k+\Delta \\ 0 & t' \geq t_k+\Delta \end{cases}$$

1) $t<0$ $v(t)=0$

2) $0\leq t\leq 1$ $v(t)=t$

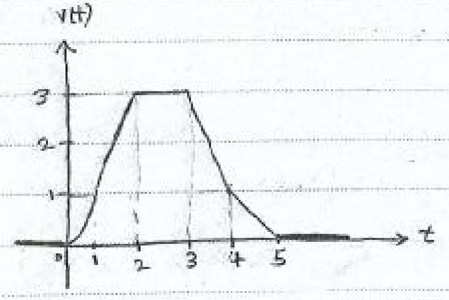
3) $1\leq t<2$ $v(t)=2t-1$

4) $2\leq t\leq 3$ $v(t)=3$

5) $3\geq t\geq 4$ $v(t)=9-2t$

6) $4\leq t\leq 5$ $v(t)=5-t$

7) $v(t)=0$



فصل ۷: روش به دست آوردن پاسخ خاص به یک ورودی سینوسی
پاسخ حالت صفر

تجزیه و تحلیل حالت دائم سینوسی:

هدف: محاسبه ی پاسخ حالت صفر مدارهای خطی مرتبه n به ورودی سینوسی

تبدیلی به اسم فازور تعریف می کنیم که با استفاده از آن معادلات دیفرانسیل خطی به معادلات جبری ساده تبدیل می شوند.

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \rightsquigarrow A_1\overset{\text{فازور}}{\vec{Y}}-A_2 Y+\dots$$

مروری بر اعداد مختلط:

نمایش اعداد مختلط به فرم کارتزین

$z=\underbrace{x}_{\text{قسمت حقیقی}}+j\underbrace{y}_{\text{قسمت موهومی}}$ $\qquad j=\sqrt{-1}$

$Re[z]=x \qquad Im[z]=y$

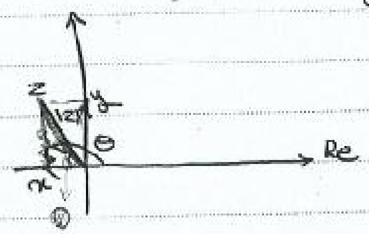
فرم قطبی:

$Im \rightarrow$ قسمت موهومی

$z=|z|e^{j\theta}$

دامنه $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

فاز $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=\measuredangle z$

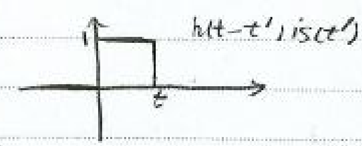


$x=|z|\cos\theta$

$y=|z|\sin\theta$

$0\leq\theta\leq 2\pi$

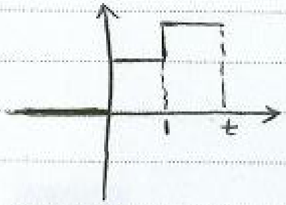
Step 1: $t<0 \rightarrow h(t-t')\cdot i_s(t')=0 \rightarrow v(t)=0$



Step 2: $0<t<1$

توضیح پایین صفحه قبل

$v(t)=\int_0^t 1\,dt'=t$



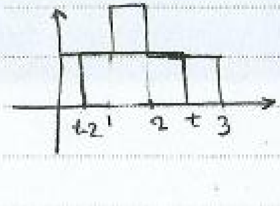
Step 3: $1\leq t\leq 2$

جدید = قسمت بالای قبلی

$v(t)=\int_0^1 dt'+\int_1^t 2dt'$

$=1+[2t']_1^t=2t-1$

Step 4:

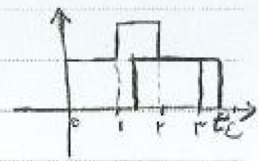


$v(t)=\int_{t-2}^1 dt'+\int_1^2 2dt'+\int_2^t dt'$

$=(3-t)+2+t-2=3$

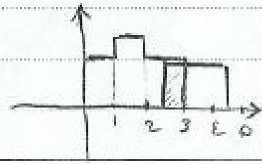
Step 5: $3\leq t\leq 4$

$v(t)=\int_{t-2}^2 2dt'+\int_2^3 dt'=9-2t$



Step 6: $4\leq t\leq 5$

$v(t)=\int_{t-2}^1 dt'=5-t$



Step 7: $t>5 \rightarrow v(t)=0$

مدار سیستم

شکل موج با ورودی سیگنال

عملیات اعداد مختلط:

$z_1 = x_1 + jy_1$

$z_2 = x_2 + jy_2$

$j \times j = -1$

$|j||j|\cos\theta = \sqrt{-1}\sqrt{-1}\,(1) =$

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$

$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1)$

$= |z_1||z_2|\, e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$

مزدوج عدد مختلط $\bar{z} = |z|\, e^{-j\theta} = x - jy$

$z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$

$z + \bar{z} = 2x$

$z - \bar{z} = 2jy$

شکل موج یا تابع

قضیه اصلی: مجموع جبری هر تعداد از سیگنال های سینوسی با فرکانس زاویه ای یکسان

و هر تعداد از مشتق های آنها از هر مرتبه، خود یک سینوسی $x \overset{\text{def}}{=} A_m\cos(\omega t + \phi)$

با همان فرکانس زاویه ای است.

مثال: $f(t) = 2\cos(2t + 60^\circ) - 4\sin 2t + \frac{d}{dt}(2\sin 2t)$

$f(t) = 2\cos 2t \overset{1/2}{\cos 60} + 2\sin 2t \overset{\sqrt{3}/2}{\sin 60} - 4\sin 2t + 4\cos 2t$

$= 5\cos 2t - (4 + \sqrt{3})(\sin 2t) = 7{,}6\cos(2t + 48{,}8^\circ)$

$\sqrt{5^2 + (4+\sqrt{3})^2} = 7{,}6 \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{4+\sqrt{3}}{5} = 48{,}8^\circ$

نکته: $A\cos\omega t - B\sin\omega t = \sqrt{A^2 + B^2}\cos\left(\omega t + \tan^{-1}\frac{B}{A}\right)$

* برای نمایش یک سینوسی تنها داشتن فازور و فرکانس آن کفایت می کند. چون فرکانس ثابت است.

$x(t) = A_m\cos(\omega t + \phi) \rightarrow$ تعریف می کنیم

معادل مختلط موج سینوسی یک عدد مختلط است.

$\vec{X} = A_m e^{j\phi}$ و به این مدل فازور گویند

فازور $x(t)$

سوال: $x(t) \overset{?}{=} \vec{X} \qquad x(t) = \mathrm{Re}[\vec{X} e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[A_m e^{j(\omega t + \theta)}]$

$= A_m\cos(\omega t + \theta)$

مقدار متوسط

$v(t) = \underbrace{110\sqrt{2}}_{Pk}\cos\left(2\pi 60 t + \frac{\pi}{3}\right)$

$\vec{V} = 110\sqrt{2}\; e^{j\frac{\pi}{3}}$

تذکر مهم:

$x(t) = A_m\sin(\omega t + \phi)$

$x(t) = A_m\cos\left(\omega t + (\phi - \frac{\pi}{2})\right)$

$\vec{X} = A_m e^{j(\phi - \pi/2)} = A_m \underbrace{e^{-j\pi/2}}_{-j} e^{j\phi}$

فازور x

$\vec{X} = -jA_m e^{j\phi}$

کاربرد عمده فازور در محاسبه ی جواب خاص معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب حقیقی ثابت است.

$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = A_m\cos(\omega t + \theta)$

طبق قضیه اصلی تمام سمت چپ این معادله دیفرانسیل یک سینوسی می شود.

Year. Month. Date.

لم ۱ : $\mathcal{E}(t) = Re\left[\underbrace{(\vec{x}+\vec{y}+j\omega\vec{z})}_{s}e^{j\omega t}\right]$ ωz_i $(z_r + j z_i)\,\omega j$

فاز   دامنه   جزء موهومی   جزء حقیقی

$= Re[\vec{s}e^{j\omega t}]$ $s = s_r + js_i = s_m e^{j\angle s}$

بنابر تساوی : $s_r = x_r + y_r - \omega z_i$

$s_i = x_i + y_i + \omega z_r$

$\Rightarrow s_m = \sqrt{(x_r+y_r-\omega z_i)^2 + (x_i+y_i+\omega z_r)^2}$

$\angle s = \tan^{-1}\left[\frac{x_i+y_i+\omega z_r}{x_r+y_r-\omega z_i}\right]$

یک سینوسی با همان فرکانس

$\Rightarrow \mathcal{E}(t) = s_m\cos(\omega t + \angle s)$

زاویه اولیه فقط در ربع ۳ آمد به اضافه ۱۸۰ شود

مثال: $7.62\cos(800t \boxed{-66.8})$ $+180$

$v(t) = -7\sin(800t) - 3\cos(800t)$ $\cos(\theta+180) = -\cos\theta$

$= -7\cos(800t - 90^\circ) - 3\cos(800t)$ $\cos(+66.8+180)$

$7\angle +90$ $3\angle 0$ $-\cos 66.8$

$3\angle -180^\circ$

$\sqrt{49+9}$

جمع فازورها $= 7j - 3 = 7.62\angle 113.2$ $+180$ -117.2

$\rightarrow v(t) = 7.62\cos(800t + 113.2)$

یک معادله دیفرانسیل را به صورت ع نشان دهیم

معادله دیفرانسیل کلی $= \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y_p(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$

۴۳

جواب حالت صفر معادله دیفرانسیل : $y_p(t)$

Phasor = Phase vector

Year. Month. Date.

لم ۱ : $Re[\ ]$ یک اپراتور جمع پذیر و همگن است

$Re[\alpha_1 z_1(t) + \alpha_2 z_2(t)] = \alpha_1 Re[z_1(t)] + \alpha_2 Re[z_2(t)]$

لم ۲ : فرض کنید $\vec{A} = A_m e^{j\phi}$ فازور A $a(t) = A_m\cos(\omega t+\phi)$

$\frac{d}{dt}Re[\vec{A}e^{j\omega t}] = Re[\frac{d}{dt}\vec{A}e^{j\omega t}] = Re[j\omega \vec{A}e^{j\omega t}]$

اگر فازور تابع A باشد فازور مشتق تابع $j\omega A$ می شود.

۱. عملیات جزء حقیقی گرفتن و مشتق گرفتن خاصیت جابجایی دارد.

۲. اعمال $\frac{d}{dt}$ به $\vec{A}e^{j\omega t}$ معادل ضرب $\vec{A}e^{j\omega t}$ در $j\omega$ است.

یعنی فازور مشتق تابع برابر است با $j\omega \times$ فازور تابع

مشتق گیری به یک عملیات ضرب ساده تبدیل شد

لم ۳ : $Re[\vec{A}e^{j\omega t}] = Re[\vec{B}e^{j\omega t}]$ $\forall t$

حوزه زمان   حوزه فازور

$\Leftrightarrow \vec{A} = \vec{B}$

لم ۴ : $x(t)$ سینوسی با فرکانس ω ، $\frac{d^n}{dt^n}x(t) \xrightarrow{\text{معادل فازوری}} (j\omega)^n \vec{X}$

اثبات قضیه اصلی :

معادله اصلی : $y(t) = x(t) + \frac{d}{dt}z(t)$

جزء حقیقی Real part

$x(t) = x_m\cos(\omega t + \phi_1) = Re[\vec{X}e^{j\omega t}]$

$y(t) = y_m\cos(\omega t - \phi_2) = Re[\vec{Y}e^{j\omega t}]$

$z(t) = z_m\cos(\omega t + \phi_3) = Re[\vec{Z}e^{j\omega t}]$

Year. Month. Date.

$$\vec{Y} = \frac{1}{1+\frac{L}{R}j\omega + LC(j\omega)^2}A_m e^{j\phi}$$

$$\vec{Y} = \frac{A_m e^{j\phi}}{(1-LC\omega^2)+\frac{L}{R}(j\omega)}$$

ورودی

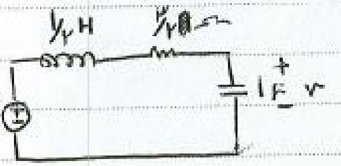
فازور ورودی

$$\vec{Y} = \frac{\sum_{k'=0}^{m} b_{k'}(j\omega)^{k'}}{\sum_{k=0}^{n} a_k (j\omega)^k}\vec{X}$$: فازور جواب خاص معادله دیفرانسیل

فازور خروجی

خروجی

$$\to \vec{y}_p(t) = Re[\vec{Y}e^{j\omega t}]$$



یعنی از لحظه صفر به مدار اعمال شده است

$\cos 2t\, u(t)$

و شکل موج سینوسی است

$$\begin{cases} \frac{1}{2}v''(t) + \frac{3}{2}v'(t) + v = \cos 2t\, u(t) \\ v(0) = 1^{v} \quad i_L(0) = 2^{A} \Rightarrow v(0) = 1 \text{ و } v'(0) = 2 \end{cases}$$

$i_L = C\frac{dv}{dt}$

سوال: اگر $v(t)$ پاسخ مدار بالا باشد پاسخ کامل را بدست آورید؟

$v = v_h + v_p$ معادله مشخصه $\frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{2}s + 1 = 0 \Rightarrow$

$$s^2 + 3s + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -2 \\ s_2 = -1 \end{cases} \to v_h = (k_1e^{-2t} + k_2e^{-t})u(t)$$

گذاشتن $u(t)$ یعنی مدار از لحظه صفر شروع به کار می‌کند

چون ریشه‌ها منفی هستند و پایدار است و مشابه صورت سینوسی است

$v_p \to$

$$\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$$

Year. Month. Date.

$$y_p(t) = y_m\cos(\omega t + \angle y_p) = Re[\vec{Y}e^{j\omega t}]$$

$$x(t) = Re[\vec{X}e^{j\omega t}]$$

$$\to \sum a_k \frac{d^k}{dt^k}\{Re[\vec{Y}e^{j\omega t}]\} = \sum b_{k'}\frac{d^{k'}}{dt^{k'}}Re[\vec{X}e^{j\omega t}]$$

$$\xrightarrow{\text{لم ۲}} \sum a_k Re[(j\omega)^k\vec{Y}e^{j\omega t}] = \sum b_{k'} Re[(j\omega)^{k'}\vec{X}e^{j\omega t}]$$

$$\xrightarrow{\text{لم ۱}} Re\{\underbrace{[\sum_{k=0}^{n} a_k (j\omega)^k]\vec{Y}}_{\text{فازور}}e^{j\omega t}\} = Re\{\vec{X}e^{j\omega t}$$

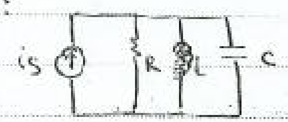
$$(\sum_{k'=0}^{m} b_{k'}(j\omega)^{k'})\}$$

$$\xrightarrow{\text{لم ۳}} [\sum_{k=0}^{n} a_k (j\omega)^k]\vec{Y} = [\sum_{k'=0}^{m} b_{k'}(j\omega)^{k'}]\vec{X}$$

مهم:

$$\Rightarrow \vec{Y} = \frac{\sum_{k'=0}^{m} b_{k'}(j\omega)^{k'}}{\sum_{k=0}^{n} a_k (j\omega)^k}\vec{X}$$ (فازور جواب خاص معادله)

مثال:



$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = i_s$$

$i_s = A_m\cos(\omega t + \phi)$ معلوم

$n = 2$, $m = 0$ $\qquad \vec{X} = \vec{I_s} = A_m e^{j\phi}$

$a_2 = LC \qquad a_1 = \frac{L}{R} \qquad a_0 = 1 \qquad b_0 = 1$

توان های جزء $j\omega$ موجودند

Year. Month. Date.

فرکانس ω_0 ما باشد پاسخ حالت دائمی داریم، اگر یکی باشد نداریم.

۴- اگر همه‌ی فرکانس‌های طبیعی سمت چپ باشد ولی زوج فرکانس طبیعی موهومی مضاعف داشته باشیم. در این صورت پاسخ حالت دائمی نداریم.

مثال: معادله مشخصه: $s^4 + 2\omega_0^2 s^2 + \omega_0^4 = (s^2 + \omega_0^2)^2$

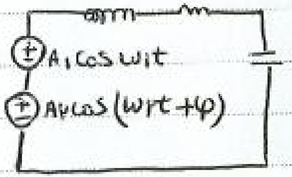
$s_1 = s_2 = j\omega_0$

$s_3 = s_4 = -j\omega_0$

بنابه حالت ۴ پاسخ حالت دائم نداریم.

$$y_h(t) = k_1' \cos(\omega_0 t + \varphi) + k_2' t \cos(\omega_0 t + \varphi')$$

چون پاسخ همگن صعودی نامیرا است و در لحظه‌ای که سینوس هیچ وقت صفر نمی‌شود
همچنین مداری پاسخ حالت صفر ندارد.



اصل جمع آثار برای پاسخ حالت دائمی سینوسی

۱- منبع دوم را صفر می‌کنیم $\vec{V_1} = \dfrac{A_1}{1 + RC(j\omega_1) + LC(j\omega_1)^2}$

۲- منبع اول را صفر می‌کنیم $\vec{V_2} = \dfrac{A_2 \angle \varphi}{1 + RC(j\omega_2) + LC(j\omega_2)^2}$

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t)$$

$$v_1(t) = \mathrm{Re}\left[\vec{V_1} e^{j\omega_1 t}\right] = |\vec{V_1}| \cos(\omega_1 t + \angle V_1)$$

$$v_2(t) = \mathrm{Re}\left[\vec{V_2} e^{j\omega_2 t}\right] = |\vec{V_2}| \cos(\omega_2 t + \angle V_2)$$

Year. Month. Date.

$v_p(t) = B_m \cos(\omega t + \phi)$ $x(t) = \cos 2t \rightarrow \vec{X} = 1 \angle 0$

$\mathrm{Re}\left[\vec{V_p} e^{j\omega t}\right]$

$$V_p = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}(j2) + \frac{1}{2}(j2)^2} \times 1 = \frac{1}{-1 + 3j} = \frac{(-1-3j)}{\underbrace{(-1+3j)(-1-3j)}_{10}}$$

$$-\frac{1}{10} - \frac{3}{10} j = 0.32 \angle -108.4^\circ$$

چون در ربع سوم هستیم باید زاویه منفی به دست بیاوریم

$$v_p(t) = 0.32 \cos(2t - 108.4^\circ)$$

$$v(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-t} + 0.32 \cos(2t - 108.4^\circ)$$

$$\xrightarrow{\text{شرایط اولیه}} \begin{cases} k_1 + k_2 + 0.32 \cos(108.4^\circ) = 1 \\ -2k_1 - k_2 + 0.64 \sin(108.4^\circ) = 0 \end{cases}$$

زوج $\cos(-\theta) = \cos\theta$

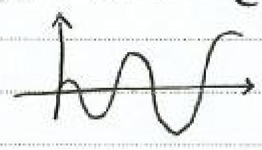
فرد $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

$\boxed{k_1 = 3.7}$ $\boxed{k_2 = -2.5}$

نکته مهم: درباره‌ی پاسخ حالت دائم سینوسی:

۱) اگر همه فرکانس‌های طبیعی در سمت چپ محور $j\omega$ باشند یعنی جزء حقیقی منفی داشته باشند پاسخ حالت دائم سینوسی حتماً وجود دارد.

۲) اگر حداقل یک فرکانس طبیعی جزء حقیقی مثبت داشته باشد پاسخ حالت دائم به علت ناپایداری وجود ندارد.



دامنه با زمان بزرگتر می‌شود

درصورتی که وقتی جواب سینوسی داریم که دامنه ثابت باشد.

۳) اگر همه‌ی فرکانس‌های طبیعی سمت چپ باشند و فقط یک زوج فرکانس موهومی خالص (روی محور $j\omega$) مزدوج داشته باشیم آن گاه اگر فرکانس سینوسی ورودی متفاوت با

$(\neq \dots)$

تحلیل فازوری $\quad Re[\vec{V} e^{j\omega t}]$

۳- محاسبه امپدانس خازن:

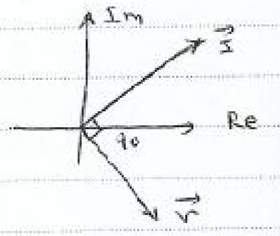
$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \rightarrow Re[\vec{I} e^{j\omega t}] = C\frac{d}{dt}$$

$$\overset{\text{لم ۲}}{=} C\, Re\left[\frac{d}{dt} \vec{V} e^{j\omega t}\right]$$

$$= C\, Re[j\omega \vec{V} e^{j\omega t}]$$

$$= Re[j\omega C \vec{V} e^{j\omega t}]$$

$$\overset{\text{لم ۳}}{=} \vec{I} = j\omega C \vec{V} \qquad Z_C = \frac{\vec{V}}{\vec{I}} = \frac{\vec{V}}{j\omega C\vec{V}} = \frac{1}{j\omega C}$$



پس می‌بینیم ولتاژ خازن نسبت به جریان آن $\boxed{90^\circ}$ تأخیر فاز دارد

خلاصه نتایج:

$$Z_R(j\omega) = R$$

$$Z_L(j\omega) = j\omega L$$

$$Z_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$$

قانون مهم: اگر امپدانس یک قطبی معلوم باشد و اگر جریان آن هم معلوم باشد می‌توان ولتاژ دو سر آن را محاسبه کرد (بدون نیاز به انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری)

$$\vec{V} = Z(j\omega)\vec{I} \longrightarrow \begin{cases} |V| = |Z||I| \\ \measuredangle V = \measuredangle Z + \measuredangle I \end{cases}$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = I_m |Z| \cos(\omega t + \varphi + \measuredangle Z)$$

ادمیتانس:

$$Y(j\omega) \triangleq \frac{1}{Z(j\omega)} \qquad Y_L(j\omega) = \frac{1}{j\omega L} \qquad Y_C(j\omega) = j\omega C$$

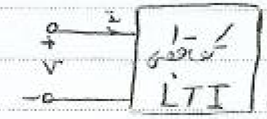
عنصر سلف $\quad Z_L = j\omega L$

$$v(t) = |V_1| \cos(\omega_1 t + \measuredangle V_1) + |V_2| \cos(\omega_2 t + \measuredangle V_2)$$

چون ω ها با هم متفاوت است نمی‌توانیم برایش یک سینوسی بنویسیم

25 / 9 / 82

امپدانس

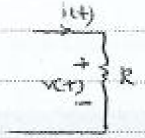


فرض کنید یک قطبی شامل هیچ منبع نابسته‌ای نیست و در حالت دائم سینوسی است

تعریف می‌کنیم امپدانس یک قطبی $\quad Z(j\omega) \triangleq \frac{\vec{V}}{\vec{I}}$ ← فازور ولتاژ / ← فازور جریان

نسبت فازور ولتاژ به فازور جریان و تابعی از فرکانس زاویه‌ای ω است

۱- محاسبه امپدانس یک مقاومت LTI



$$v(t) = Ri(t)$$

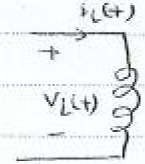
در حالت دائم سینوسی

$$i(t) = Re[\vec{I} e^{j\omega t}] \qquad \overset{\text{لم ۲}}{\Longrightarrow} \quad \vec{V} = R\vec{I}$$
$$v(t) = Re[\vec{V} e^{j\omega t}]$$

$$Z = \frac{\vec{V}}{\vec{I}} = R\ \Omega$$

امپدانس یک مقاومت LTI همان R است.

۲- محاسبه امپدانس سلف LTI



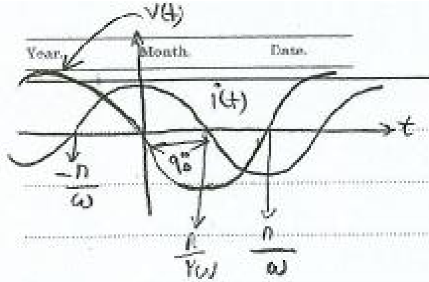
$$V_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \quad ①$$

$$i(t) \text{ فازور } \vec{I} \quad = \quad \text{فازور } \frac{di(t)}{dt} = j\omega\vec{I} \quad ②$$

$$v(t) \text{ فازور } \vec{V} = L(j\omega\vec{I}) = j\omega L\vec{I}$$

امپدانس سلف $\quad Z(j\omega) = \frac{\vec{V}}{\vec{I}} = \frac{j\omega L\vec{I}}{\vec{I}} = j\omega L$

* پس ولتاژ سلف نسبت به جریان آن 90° تقدم فاز دارد.



در سلف: ولتاژ $\frac{\pi}{2}$ نسبت به جریان تقدم فاز دارد

$\omega t = \pi/2 \rightarrow t = \frac{\pi}{2\omega}$

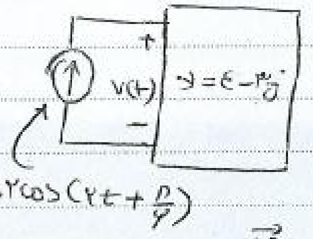
$v(t) = V_m \sin(\omega t + \pi)$ $\quad \pi - \pi/2 \longrightarrow$ با توجه به نکته بالا

$i(t) = \frac{V_m}{\omega L} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

$= \frac{V_m}{\omega L} \cos(\omega t)$

هدف: محاسبه $v(t)$

ابتدا وارد حوزهٔ فازور می‌شویم



$\vec{V} = Z\vec{I} \rightarrow \vec{I} = Y\vec{V}$

$Y = \frac{1}{Z}$

$\vec{I} = 2e^{j\pi/6} = \sqrt{3} + j$ $\qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \frac{\pi}{6}$ $\qquad \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ Re

$\vec{V} = \frac{\vec{I}}{Y} = \frac{\sqrt{3} + j(1)}{4 - 3j} = \frac{2e^{j\frac{\pi}{6}}}{5e^{j\theta}}$

$\theta = \tan^{-1}(-\frac{3}{4})$

$-33/72\beta = \theta = \pi + \tan^{-1}(-\frac{3}{4})$

برای اینکه به ربع ٤ دست یابیم $+\pi$ می‌کنیم.

راه حل دوم:

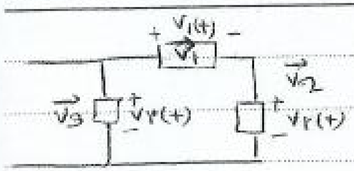
$= \frac{(\sqrt{3} + j)(4 + 3j)}{25} = \frac{4\sqrt{3} - 3}{25} + j\frac{4 + 3\sqrt{3}}{25}$

ضرب در مزدوج مخرج

$\Rightarrow v(t) = \frac{2}{5}\cos(2t + \frac{\pi}{6} - \theta)$

تجزیه و تحلیل حالت دائمی مدارهای ساده (سینوسی)

۱) قوانین kvl و kcl بین فازورها نیز برقرار است.



$KVL: V_1(t) + V_2(t) - V_3(t) = 0$

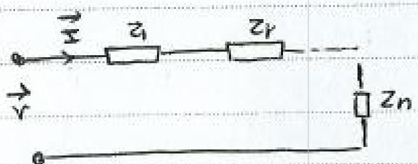
$\Rightarrow \vec{V}_1 + \vec{V}_2 - \vec{V}_3 = 0$

درحالت کلی داریم $\sum \vec{V}_k = 0$

قانون kcl برای فازورهای جریان نیز برقرار است. به طور مشابه

$\sum \vec{I}_k = 0$

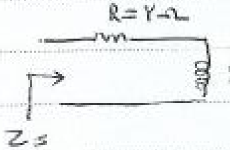
۲) قوانین حاکم بر اتصال مقاومت‌ها، برای اتصال امپدانس‌ها نیز صادق است.

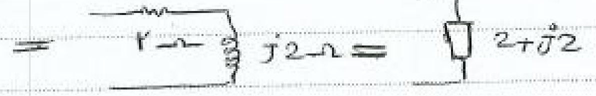


$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$

$\rightarrow Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + \dots$

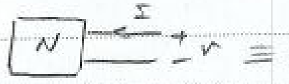
$$Z_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n}}$$

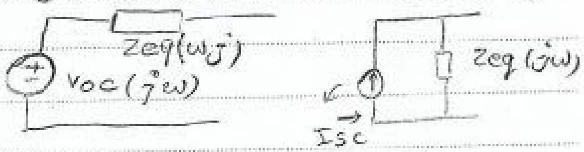




۳) مدار معادل تونن و نورتن در حالت دائم سینوسی نیز وجود دارد.

امپدانس در حوزهٔ فازور = مقاومت در حوزهٔ زمان





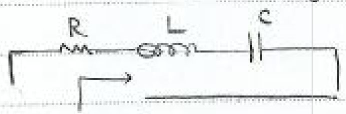
تمام منابع هم فرکانس و مستقل باشند

$\vec{V}_{oc}(j\omega) = Z_{eq}(j\omega)\,\vec{I}_{sc}(j\omega)$

Year. Month. Date.

مثال ۲ : محاسبه امپدانس RLC سری و موازی :

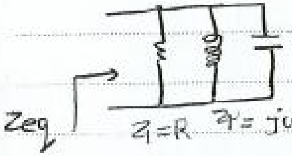
$Z=R \quad Z=j\omega L \quad \frac{1}{Cj\omega}$



$Z(j\omega) =$

$$Z_{eq} = R + j\omega L + \frac{1}{Cj\omega} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

RLC سری : $Z_{R}(j\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$



$Z_1 = R \quad Z_2 = j\omega L \quad Z_3 = \frac{1}{Cj\omega} \Rightarrow \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}$

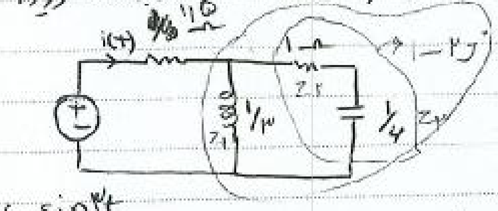
$$\Rightarrow \frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + Cj\omega$$

$$\frac{1}{Z_{eq}} = G + \frac{1}{j\omega L} + Cj\omega$$

ضرب در مزدوج

$$Z_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \left[C\omega - \frac{1}{\omega L}\right]j} = \frac{\frac{1}{R} - j\left(C\omega - \frac{1}{\omega L}\right)}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left[C\omega - \frac{1}{\omega L}\right]^2}$$

مثال ۳ : امپدانس دیده شده توسط منبع را حساب کرده و ورودی آن $i(t)$ را به دست آورید :

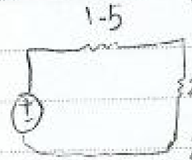


$$Z_1 = L\omega j = 3 \times \frac{1}{3} j = j$$

$$Z_2 = 1$$

$$Z_3 = \frac{1}{C\omega j} = -\frac{j}{C\omega} = -2j$$

$$Z_{123} = \frac{(Z_1)(Z_2+Z_3)}{Z_1+Z_2+Z_3}$$



$$Z_{eq} = Z_{1 \parallel 2,3} = \frac{j(1-2j)}{j+1-2j} = \frac{2+j}{1-j} \times \frac{1+j}{1+j} = \frac{\ }{1+j^2}$$

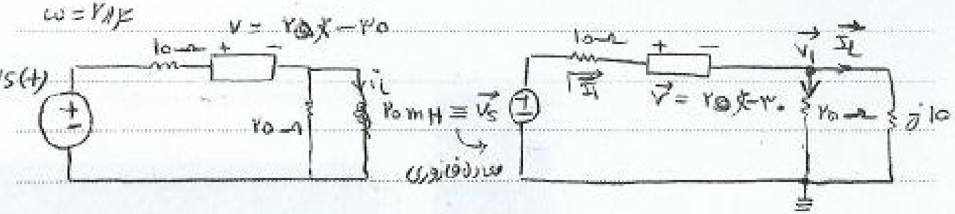
Year. Month. Date.

مجموعه روش های موازی به کار رفته برای مقاومت ها در حالت زمانی به طور مشابه برای امپدانس ها نیز به کار می رود (گره یا مش)

ه) منابع هم فرکانس ——— اصل جمع آثار

منابع غیر هم فرکانس

مثال ۱ : مطلوب است محاسبه $\vec{I}_L = 2.5 \angle 40°$ و اگر $V_S(t)$ ، $\omega = 500 \ rad/sec$



$$KVL = \vec{V_S} = 10\vec{I_1} + \vec{V} + \vec{V_1}$$

$$\vec{V_1} = j10 I_L$$

$$KCL: \vec{I_1} = I_L + \frac{V_1}{25} = \underset{e^{j90}}{j}\, 10 \times 2.5 e^{j40°} = 25 \angle 130$$

$$KCL: I_1 = I_L + \frac{V_1}{25} = 2.5 \angle 40 + 1 \angle 130 = (\underbrace{2.5\cos 40 + \cos 130}_{Re})$$

اندازه تقسیم بر ۲۵ می شود ولی زاویه تغییر نمی کند.

$$\underbrace{j(2.5 \sin 40 + \sin 130°)}_{Im} = 1.27$$

$$V_S = 12.7 + j13.7 + 25\angle -30 = 1.27 + j2.37$$

$$= 35.47 \angle 59°$$

قسمت آخر $V_S(t) = 35.47 \cos(500t + 59°)$

خازن در فرکانس بالا مانند اتصال کوتاه و سلف در فرکانس بالا مانند مدار باز عمل می کند.

Year. Month. Date.

$$-10\angle 0 + \vec{I_1} + (\vec{I_1} - \vec{I_2}) + \frac{1}{j4}(I_1 + I_3) = 0$$

$$4j\vec{I_2} + (\vec{I_2} - \vec{I_3}) + (\vec{I_2} - \vec{I_1}) = 0$$

$$I_3 - I_2 + I_3 + \frac{1}{j4}(I_3 - I_1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2-j/4 & -1 & j/4 \\ -1 & 2+4j & -1 \\ j/4 & -1 & 2-j/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{I_1} \\ \vec{I_2} \\ \vec{I_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

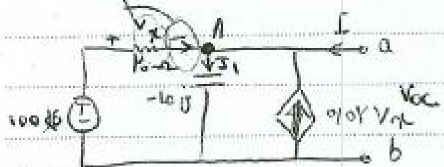
$$\vec{I_3} = \frac{\begin{vmatrix} 2-j/4 & -1 & 10 \\ -1 & 2+4j & 0 \\ j/4 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\text{دترمینان ضرایب}} = 1/21\angle -75/9^\circ$$

یادآوری:

تزاز: فوریه لاپلاس — حالت دائمی سینوسی S.S.S

Sinousaial steady state

مثال: مدار معادل تونن از دو سر a و b در حالت دائمی سینوسی



روش اول: محاسبه V_{oc}

سیمی a و b مدار باز است $\Leftarrow \vec{I} = 0$

روش اول:

$\vec{V_C} = \vec{V_{oc}}$ ولتاژ خازن

$\vec{i_C} = \frac{\vec{V_{oc}}}{-10j}$ دامنه فازوری

$$KCL: A \quad -\left(\frac{100 - V_{oc}}{40}\right) - 0/02\,V_x + \frac{V_{oc}}{-10j}$$

$$i_C = \frac{V_{oc}}{-10j} \qquad \vec{V_x} = 100 - \vec{V_{oc}}$$

$$\sin\varphi = \cos(\varphi - \pi/2)$$

Year. Month. Date.

$$v(t) = 60\sin 4t = 60\cos(4t - \pi/2)$$

$$\vec{V} = 60\, e^{-\frac{\pi}{2}j}$$

$$60(\cos(-\pi/2) + j\sin(-\pi/2)) = -j60$$

$$Z_{eq} = \frac{1}{2}(1 + 3j)$$

$$Z_{in} = Z_{eq} + R = 1.5$$

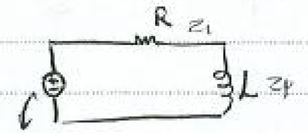
$$\boxed{Z_{in} = 2 + \frac{3}{2}j}$$

$$\vec{V} = -60j \rightarrow \vec{I} = \frac{\vec{V}}{Z_{in}} = \frac{-60j}{2 + \frac{3}{2}j}$$

$$\vec{I} = \angle\vec{V} - \angle Z_{in}$$

$$= 24\angle -126/9^\circ$$

مثال: مدار RL:



$Z_1 = R$

$Z_2 = j\omega L$

$Z = Z_1 + Z_2 = R + j\omega L$

$\vec{V} = Z \cdot \vec{I}$

$V_m \cos(\omega t + \theta)$

$$V_m e^{j\theta} = \boxed{(R + j\omega L)}\,\vec{I} \rightsquigarrow \vec{I} = \frac{V_m e^{j\theta}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\, e^{j\phi}}$$

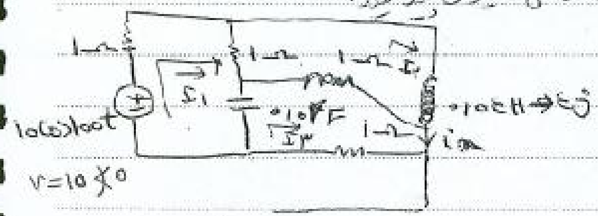
معادل فازوری

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

$$\vec{I} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\, e^{j(\theta - \phi)}$$

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\cos(\omega t + \theta - \phi)$$

مثال: جریان $i_x(t)$ را در حالت دائمی سینوسی پیدا کنید:



$v = 10\angle 0$

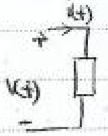
$\cos\alpha + \cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$

Year. Month. Date.

توان در حالت دائمی سینوسی:

قدرت

توان لحظه‌ای، توان متوسط، توان مختلط، توان حقیقی، توان راکتیو، توان ظاهری



(لحظه‌ای) توان لحظه‌ای $\triangleq p(t) = v(t)\cdot i(t)$

زاویه فاز ولتاژ

S.S.S: $v(t) = V_m\cos(\omega t + \measuredangle V)$ θ

$i(t) = I_m\cos(\omega t + \measuredangle I)$ φ جریان

$p(t) = V_m I_m \cos(\omega t+\theta)\cos(\omega t+\varphi)$

$\frac{1}{2} V_m I_m\cos(\measuredangle V - \measuredangle I) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t+\theta+\varphi)$

← توان ظاهری شامل دو عبارت است یکی متغیر با زمان و دیگری نامتغیر با زمان است.

مؤلفه AC توان: با زمان تغییر می‌کند. مؤلفه DC توان و با زمان تغییر نمی‌کند.

* می‌دانیم که توان لحظه‌ای شامل دو جزء است یکی مستقل از زمان و دیگری متغیر با زمان.

توان متوسط: مقدار متوسط توان لحظه‌ای p(t) که در طول یک پریود به شبکه تک قطبی وارد می‌شود

$P_{ave} \triangleq \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt$ توان متوسط در فاصله $[t_1,t_2]$

میانگین (متوسط)

در حالت سینوسی: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$P_{ave} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} I_m V_m\cos(\theta-\varphi)\,dt +$

$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} V_m I_m\cos(2\omega t+\theta+\varphi)\,dt$ 0

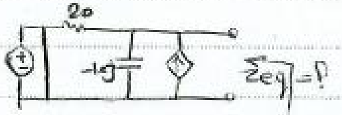
Year Month Date

$\vec{V}_{oc}\left(\frac{j}{10} + 0.02 + \frac{1}{20}\right) = 5+2$ $V_{oc} = \frac{700}{7+j10} = 57.3\measuredangle -55^\circ$

$0-55=-55$

55.100

قسمت دوم:

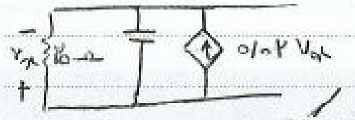


خازن با مقاومت موازی است $\frac{200}{22.3}$

$\frac{-200j}{22.3\measuredangle -26.5} = \frac{200\measuredangle -90}{22.3\measuredangle -26.5}$

$Z_{R,C} = \frac{20(-10j)}{20-10j} = 8.94\measuredangle -63.44 = -90+26.5$

ZR,C با منبع جریان موازی است ⇒ منبع جریان = $\frac{\text{فازور ولتاژ دو سر آن}}{\text{فازور جریان گذرنده}} = \frac{-V_x}{-0.02V_x} = 50$

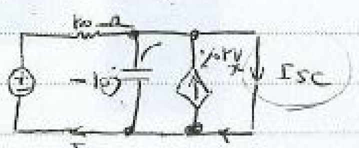


یعنی در مدار بالا منبع جریان مثل یک مقاومت 50 عمل می‌کند.

$Z_{eq} = 50 \,\|\, Z_{R,C} = 8.19\measuredangle -55^\circ$

قسمت سوم:

ISC محاسبه:

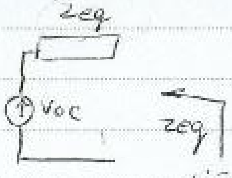


Vx=

$I_1 = \frac{100\angle 0}{20} = 5$

$I_{s.c} = I_1 + 0.02V_x = 7$ (5+2)

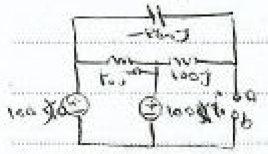
$V_x = 100\angle 0$



مدار تونن

$\boxed{Z_{eq} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}}}$ $\frac{V_{oc}}{Z} = \frac{57.3e^{-j55}}{8.19e^{-j55}} = 7 = I_{sc}$

تمرین: مدار معادل تونن نسبت به دو سر a و b را به دست آورید.



* متوسط توابع سینوسی روی یک پریود یا فضای انرژی صفر می‌شود

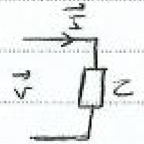
$$P_{ave} = \tfrac{1}{2} V_m I_m \boxed{\cos(\measuredangle \vec{V} - \measuredangle \vec{I})}$$

* برای یک شبکه‌ی پسیو توان متوسط همواره نامنفی است

* به امپدانس بار رزیستیو (مقاومتی) می‌گویند

$$Z = R \Rightarrow \measuredangle Z = 0 \longrightarrow P_{ave} = \tfrac{1}{2} V_m I_m \cos 0 = \tfrac{1}{2} V_m I_m$$

یادآوری:



$$Z = \frac{\vec{V}}{\vec{I}} = \frac{V_m \angle \theta}{I_m \angle \varphi}$$

$$Z = \frac{V_m}{I_m} \measuredangle (\theta - \varphi)$$

* اگر بار مقاومتی باشد توان یک مقدار حقیقی و مخالف صفر می‌شود.

$$Z = j\omega L \quad \text{سلفی} \quad \measuredangle\theta - \measuredangle\varnothing = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P_{ave} = 0$$

(خازنی) (توان)

* توان متوسط یک سلف همواره صفر است ← مقاومت مصرف کننده است اما خازن و سلف ذخیره کننده هستند.

$Z = R + jX \longrightarrow$ (قسمت موهومی) راکتانس

قسمت حقیقی (رزیستانس)

* در حالت کلی یک امپدانس را به صورت روبرو نمایش می‌دهند:

به ازای بار سلفی (یا خازنی) بدست می‌آید (بار راکتیو)

$$\longrightarrow -90^\circ < Z < 90^\circ \longrightarrow 0 \le P_{ave} \le \tfrac{1}{2} V_m I_m$$

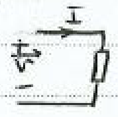
* ماکزیمم توان متوسط که به ازای بار مقاومتی به دست می‌آید

نکته:

$$Z = R \longrightarrow V_m = R I_m \longrightarrow P_{ave} = \tfrac{1}{2} R I_m^2 = \tfrac{1}{2} \frac{V_m^2}{R}$$

I^* ← مزدوج

توان مختلط:



$Z = R + jX$

$$\vec{V} = V_m \angle \theta$$
$$\vec{I} = I_m \angle \varnothing$$

توان مختلط را با P بزرگ نشان می‌دهیم و یک فازور (است).

$$\text{توان مختلط} \quad P \triangleq \tfrac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{I}^*$$

توان مختلط برابر است با حاصلضرب فازور ولتاژ در مزدوج فازور جریان تقسیم بر ۲

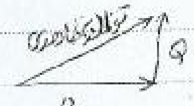
$$P = \tfrac{1}{2} V_m e^{j\theta} (I_m e^{-j\varnothing}) = \tfrac{1}{2} V_m I_m (e^{j(\theta - \varnothing)})$$

$$\underbrace{\tfrac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \varphi)}_{\text{توان متوسط یا توان حقیقی}} + j \tfrac{1}{2} V_m I_m \sin(\theta - \varphi)$$

توان راکتیو

واحد VAR ← Q

توان راکتیو مصرف نمی‌شود بلکه ذخیره می‌شود که واحدش را VAR نه WATT اختیار می‌کنیم



$$\text{توان ظاهری} = \sqrt{P_{ave}^2 + Q^2}$$

1) $Z = R \rightarrow Q = 0$

2) $Z = j\omega L \longrightarrow Q = \tfrac{1}{2} V_m I_m \quad (\theta - \varnothing = \frac{\pi}{2})$

(پس‌فاز)

برای بار سلفی Q مثبت است

3) $Z = \frac{1}{j\omega C} \rightarrow Q = -\tfrac{1}{2} V_m I_m \quad (\theta - \varnothing = -\frac{\pi}{2})$

برای بار خازنی Q منفی (پیش‌فاز)

ضریب توان:

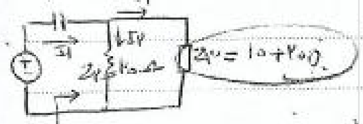
power factor

$$PF = \frac{P_{ave}}{|P|} = \cos(\theta - \varphi) \qquad 0 \le PF \le 1$$

Year. Month. Date.

مثال: توان متوسط توان هر سلف عنوان راکتیو و ضریب توان هر عنصر را حساب کنید. $100\angle 0^\circ$

$Z_1 = -10j \quad Z_3$



$$Z_{in} = [20 \| (10+20j)] - 10j = \frac{20(10+20j)}{30+20j} - 10j$$

$$10.77 - 3.85j = 11.44 \angle -20^\circ$$

Zin

$$\vec{I_1} = \frac{\vec{V_s}}{Z_{in}} = \frac{100}{11.44\angle -20} \simeq 8.75 \angle 20$$

$$I_2 = \frac{Z_3}{Z_2+Z_3} I_1 = 5.42 \angle 49.4 \ A$$

$$I_3 = \frac{Z_2}{Z_2+Z_3} I_1 = 4.85 \angle 15.2 \ A$$

$\vec{I_1} = \vec{I_2} + \vec{I_3}$ ✓ فیثاغورث

$$Z_1 \ \& \ P_1 = \tfrac{1}{2} V_1 I_1^* = \tfrac{1}{2} Z_1 |I_1|^2 = \tfrac{1}{2}(1-10j)(8.75)^2 =$$

$-j\,382.38$ VAR

$P_{ave} = 0 \quad Q = -382.38$ VAR $\quad PF = 0$ پیش فاز

$Z_2 \ \& \ P_2 = \tfrac{1}{2} Z_2 |I_2|^2 = 294.1$ VAR

$P_{ave} = 294.1$ WAT $\quad Q = 0 \quad PF = 1$

$Z_3 = P_3 = \tfrac{1}{2} Z_3 |I_3|^2 = 117.42 + j\,152.23$

$P_{ave} = 117.42$ W $\quad PF = 0.45 \quad Q = 253.73$ VAR

$\angle Z = \tan^{-1}\left(\frac{20}{10}\right) = \tan^{-1} 2$

$\cos(\angle Z) = 0.45$

Year. Month. Date.

$Z = R + jx$

$$\text{حقیقی} \quad P_{ave} = \tfrac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \varphi) = \tfrac{1}{2} Re[Z] I_m^2 = \tfrac{1}{2} R I_m^2$$

$\angle Z$

$$Q = \tfrac{1}{2} V_m I_m \sin(\theta-\varphi) = \tfrac{1}{2} Im[Z] I_m^2 = \tfrac{1}{2} x I_m^2$$

$\angle Z$

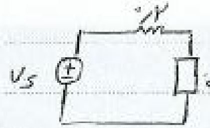
$Im|Z|$

مهم
مثال: توان کلی مصرف کننده (توان مفید) در ولتاژ ۳۱۰ V برابر با ۱۱KW است.
مقاومت سیم اتصال از منبع تا بار ۰٫۲ است.

کل توان = توان مفید + توان تلف شده

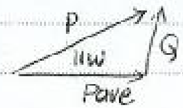
$$\eta = \frac{\text{توان مفید}}{\text{کل توان}}$$

الف: اگر ضریب توان مصرف کننده برابر ۱ باشد (یعنی با رمقاومتی است یعنی $\cos 0^\circ = 1$ است)
جریان کشیده شده و توان تلف شده در خط اتصال چقدر است؟



$V_m = 310$ V

$P_{ave} = 11$ KW



$\theta - \varnothing = 0$ یعنی اختلاف فاز بین V و I صفر است (با رمقاومتی)

$\cos(\theta - \varnothing) = 1$

$PF = 1 \rightarrow Q = 0$

زیرا

$Q = \tfrac{1}{2} V_m I_m \sin(0) = 0$

$P_{ave} = \tfrac{1}{2} V_m I_m$

اتلاف توان در خط اتصال است

$$I_m = \frac{11000}{\tfrac{1}{2}\times 310} = 71 \ A$$

$P_{lose} = \tfrac{1}{2} R I^2 =$

توان تلف شده در خط اتصال

$\tfrac{1}{2}(0.2)(71)^2 = 503$

$$\boxed{\eta = \frac{11000}{11503}} = \text{راندمان}$$

$\%96 \leftarrow$ ۹۵٪

ب: اگر ضریب توان ۰٫۴ پس فاز باشد (یعنی حالت سلفی دارد یعنی Q هم داریم است)

$\cos(\theta - \varnothing) = 0.5$

$P_{ave} = \tfrac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \varnothing) \Rightarrow \quad I_m = 142 \ A$

$$\eta = \frac{11000}{11000 + 2012} = 84\%$$

$P_{lose} = 2012$

Year. Month. Date.

شرط انتقال ماکزیمم توان متوسط

$$\Rightarrow \begin{cases} R_L = R_S \\ X_L = -X_S \end{cases} \Rightarrow \boxed{Z_L = Z_S^*}$$

$$P_{avel_{max}} = \frac{1}{8}\frac{|V_S|^2}{R_L}$$

یعنی امپدانس مناسب برای بار برابر با مزدوج امپدانس دیده شده از دو سر آن است.

* مقدار موثر شکل موج : Effective value

$p(t) = v(t)i(t) = R_L i(t)^2$ توان لحظه‌ای ، قانون اهم

$$P_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T R_L i^2(t)\, dt$$

در حالت DC: $i(t) = I_{DC} \rightarrow P_{ave} = R_L I_{DC}^2 = p(t)$

می‌دانیم که P_{ave} فقط از زمان است و با $\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt$ رابطه مستقیم دارد

منظور از مقدار موثر برای جریان $i(t)$ یک جریان DC است که همان توان متوسط را تولید می‌کند (با I_e نمایش می‌دهیم)

$$R_L I_e^2 = \frac{1}{T} R_L \int_0^T i^2(t)\, dt$$

$$I_e \triangleq \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2\, dt}$$ تعریف مقدار موثر

مثال: مقدار موثر یک شکل موج سینوسی را حساب کنید:

$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$

$$V_e = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} V_m^2 \cos^2(\omega t + \theta)\, dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\left[\frac{V_m^2}{2} + \frac{1}{2}\sin 2(\omega t+\theta)\right]_0^{\pi}}$$

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

۵۳

Year. Month. Date.

جریان مزدوج است

$8.75\, e^{-j20} = 8.75\cos(20) - j\,8.75\sin(20)$

$P_{VS} = -\frac{1}{2} V_S I_1^* = 50\,(8.75 \angle -20)$

$= -411.41 + j\,147.1$

$P_{ave} = -411.4\ W$

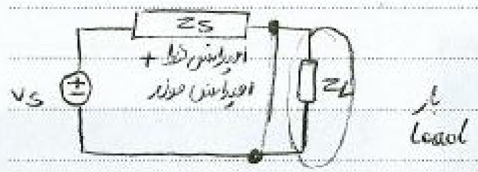
$Q = 147.1$

$\boxed{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0}$ ok

تعمیم مطالب انتقال توان متوسط ماکزیمم:

غالباً در مدارهای ویژه در شبکه‌های توزیع قدرت یا مخابراتی مثل بار (مصرف کننده) خط انتقال و مولد (منبع) سروکار داریم، منبع و خط دارای یک امپدانس هستند، یک امپدانس صورت فرض دارد. خط انتقال هم به نوبه خود یک امپدانس دارد.

منبع با خط انتقال سری است، امپدانس معادل را اینجا می‌گوییم



همیشه دوست داریم بیشترین توان متوسط به بار تحویل داده شود

سوال: به ازای Z_S ثابت چه رابطه‌ای باید بین Z_L و Z_S برقرار باشد

$Z_L = R_L + jX_L$

$P_{av_L} = \frac{1}{2} R_L |I_S|^2$ $\qquad \vec{I_S} = \frac{\vec{V_S}}{Z_S + Z_L}$

توان متوسط در بار

$$|I_S|^2 = \frac{|V_S|^2}{(R_L+R_S)^2 + (X_L+X_S)^2}$$

$Z_S = R_S + jX_S$

$$P_{ave_L} = \frac{1}{2}|V_S|^2 \frac{R_L}{(R_L+R_S)^2 + (X_L+X_S)^2}$$ $Z_S = R_S + jX_S$ ثابت

$P_{aveL\,max} = ?$ $\qquad \frac{\partial P_{avL}}{\partial R_L} = 0 \rightarrow R_L = \sqrt{R_S^2 + (X_L+X_S)^2}$

$$\frac{\partial P_{avL}}{\partial X_L} = 0 \rightarrow X_L + X_S = 0$$

Year. Month. Date.

$V_o(j\omega) = \frac{V_s(j\omega)}{R+\frac{1}{j\omega C}} \propto \frac{1}{j\omega C} \Rightarrow$ تابع تبدیل

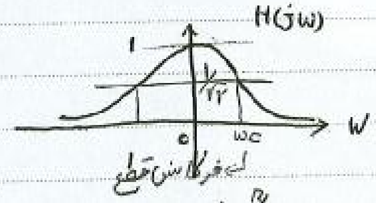
$V_o(j\omega) = V_s(j\omega) \propto \frac{1}{1+j\omega RC}$

$V_o(j\omega) = H(j\omega)\, V_s(j\omega)$

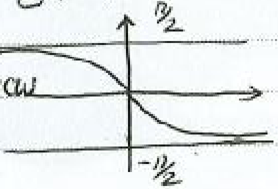
تابع تبدیل

به منحنی های $|H(j\omega)|$ و $\measuredangle H(j\omega)$ برحسب ω پاسخ فرکانسی می گویند

$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}$



$\measuredangle H(j\omega) = -\tan^{-1} RC\omega$



فرکانس قطع 3dB

$\log_{10} 2 = 0,3$

$10 \log_{10} X = X\, dB$ دسی بل

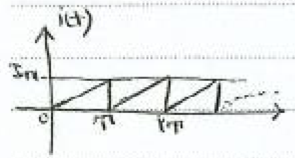
$\sqrt{2} = 3\, dB$ $\quad (\frac{1}{\sqrt{2}})_{10} = -3dB$

فرکانسی که ستانده دهنده پاسخ فرکانسی $\frac{1}{\sqrt{2}}$ مقدار ماکزیمم آن می شود را فرکانس قطع -3dB گویند

Year. Month. Date.

$310V = \sqrt{2} \times 220 = V_{peak} \leftarrow V_e = 220V \leftarrow$ برق شهری

مثال: مقدار موثر شکل موج دندانه اره ای را حساب کنید.



$I_{av} = \frac{I_m}{2}$

$I_e = I_m/\sqrt{3}$

محاسبه مقدار موثر مجموع ۲ سینوسی:

$i(t) = I_{m1} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + I_{m2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

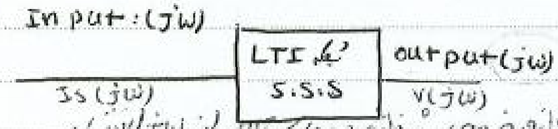
$\omega_1 \neq \omega_2 \rightarrow I_e = \sqrt{\frac{I_{m1}^2}{2} + \frac{I_{m2}^2}{2}} = \sqrt{I_{e1}^2 + I_{e2}^2}$

$\omega_1 = \omega_2 \rightarrow I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \rightarrow$ دامنه سینوسی معادل $= \frac{\sqrt{I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + 2 I_{m1} I_{m2} \cos\varphi}}{\sqrt{2}}$

دیاگرام فازوری: دکتر ب مطالعه شود

در فازور قبلی یک بردار ببین جمع فازورها قبل جمع بردارها

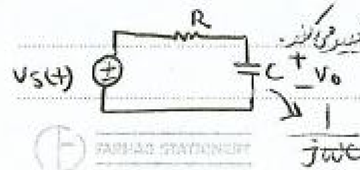
تابع شبکه: Network function - تابع تبدیل transfer function



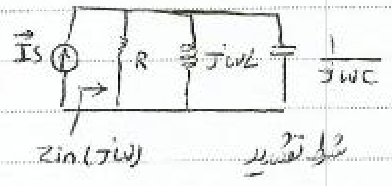
تابع شبکه (تبدیل) برابر است با نسبت فازور خروجی به فازور ورودی که تابعی از ω است.

$H(j\omega) \triangleq \frac{V_o(j\omega)}{I_s(j\omega)}$ (خروجی / ورودی) برای بررسی رفتار فرکانسی مدار به کار می رود

مثال: می خواهیم ببینیم با تغییر فرکانس ورودی، خروجی چگونه تغییر می کند.



$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_s(j\omega)} \rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC}$

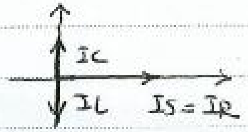


$Y_{in}(j\omega) = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C$

شرط تشدید $Im[Y_{in}(j\omega)]|_{\omega=\omega_0} = 0 \Rightarrow$

$\frac{1}{j\omega_0 L} + j\omega_0 C = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$

$Z_{in}(j\omega_0) = \frac{1}{Y_{in}(j\omega_0)} = R \rightarrow \vec{V} = R\vec{I_s}$

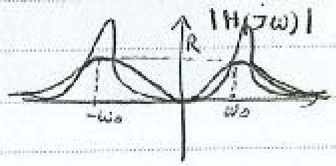


رسم پاسخ فرکانسی RLC موازی:

$H(j\omega) = Z_{in}(j\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})}$

ضریب Q تشدید $Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha}$ صفحه 5 $\longrightarrow H(j\omega) = \frac{R}{1+jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$

$Q = \omega_0 CR \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$



وقتی پاسخ ... متمم موهومی مخرج = 0 که مخرج min مقدار و کسر max مقدار خود را دارند

1) هرچه مقدار Q بیشتر شود منحنی های پاسخ فرکانسی sharp (تیزتر) می شوند.
(فشرده تر می شود)

2) در فرکانس تشدید مقدار دامنه پاسخ فرکانسی max می شود و فاز صفر است.

3) مدار RLC موازی مثل یک فیلتر میانگذر عمل می کند

Q: selectivity انتخابگری

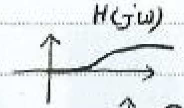
$H(j\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{2}} |H(j\omega)|_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{\sqrt{1+R^2C^2\omega_c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \omega_c^2 = \frac{1}{R^2C^2} \rightarrow \omega_c = \frac{1}{RC} = \omega_{-3dB}$

فرکانس قطع $-3dB$

مدار داده شده در حقیقت یک فیلتر پایین گذر است یعنی فرکانس های فرکانس پایین را $(\omega<\omega_c)$ عبور می دهد اما فرکانس های بالاتر را تضعیف می کند.

Filter:
- low pass
- High Pass
- Band Pass (میانگذر)
- Band stop



تشدید: ... Resonance

یک قطبی (شامل حداقل یک خازن و یک سلف) در حالت تشدید است هرگاه یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

1) جزء موهومی امپدانس آن صفر باشد $X(j\omega_0) = 0$

2) جزء موهومی ادمیتانس آن صفر باشد $B(j\omega_0) = 0$

3) ولتاژ $\vec{V}$ و جریان $\vec{I}$ در فرکانس تشدید هم فاز باشند.

$\angle V - \angle I = 0$

مدار مثل یک مقاومت عمل می کند و قسمت های موهومی همدیگر را خنثی می کنند.

مثال: مدار RLC موازی

عنصر ۵:

عناصر تزویج:

عناصر مداری: دو سر، سه سر، چهار سر — سلف تزویج شده، ترانسفورماتور ایده آل، منابع وابسته

انتقال انرژی در مدار ← اتصال فیزیکی

تزویج coupling

۴ سر و ۲ قطب (دهانه) دارد.

* بیش از شاخه دارند

و ولتاژ یا جریان هر شاخه به ولتاژ یا جریان شاخه دیگر مربوط است (یعنی اگر بخواهیم v_2 را بدانیم باید i_1 را نیز بدانیم).

جهت قرارداری:

$$p(t) = v_1(t)\, i_1(t) + v_2(t)\, i_2(t)$$

با توجه به جهت های قراردادی مشخص شده برای i_1 و i_2 و v_1 و v_2 — توان تحویل داده شده از دنیای خارج به عنصر

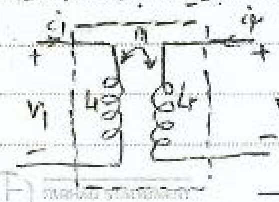
سلف های تزویج شده:

جریان سلف ← شار ← ولتاژ دو سر = تغییر شار عبوری از دو سر سلف

با نزدیک کردن دو سلف شار یکی از دیگری (علاوه بر شار خودش) می گذرد چون خطوط میدان مغناطیسی خطوط بسته ای هستند اگر این شارها هم جهت باشند شار برآیند بزرگتر و در غیر این صورت کمتر است.

به تغییر شار سلف معادل پاسخ یک عنصر (شانویه) می باشد.

* وقتی دو سلف در نزدیکی یکدیگر قرار بگیرند مقداری از شار مغناطیسی هر کدام از دیگری عبور می کند تا شار مجموع می تواند بیشتر (یا کمتر) از شار تولید شده توسط جریان عبوری از هر عنصر باشد.



مدل مداری یک زوج سلف تزویجی

M درصدی از شار یکی که بر دیگری اثر می کند.

سلف (۱)

مدل سلف تزویج شده:

$\phi_1 = f_1(i_1, i_2)$ شار در سلف ۱ — چون i_1 و i_2 تنها تابعی از t است

$\phi_2 = f_2(i_1, i_2)$ شار در سلف ۲

$$v_1 = \frac{d\phi_1}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial i_1}\frac{di_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial i_2}\frac{di_2}{dt}$$ ⇐ قانون فاراده

$$v_2 = \frac{d\phi_2}{dt} = \frac{\partial f_2}{\partial i_1}\frac{di_1}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial i_2}\frac{di_2}{dt}$$

اگر f_1 و f_2 تابع خطی از i_1 و i_2 باشند در قرآیند زمانی صرفاً می شود در این هر یک سری ضرایب ثابت تبدیل می شوند.

برای سلف تزویج شده LTI:

$$\phi_1 = L_{11}\, i_1(t) + L_{12}\, i_2(t)$$

اندوکتانس خودی (خودش را نشان می دهد) — اندوکتانس متقابل ← چون شار گذرنده از سلف ① ناشی از جریان سلف مقابل را نشان می دهد — چون شار گذرنده از سلف ناشی از جریان خودش

$$\phi_2 = L_{21}\, i_1(t) + L_{22}\, i_2(t)$$

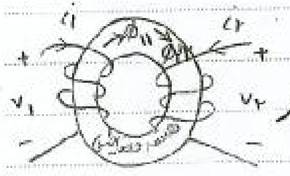
$$\rightarrow \begin{cases} v_1(t) = L_{11}\dfrac{di_1(t)}{dt} + L_{12}\dfrac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) = L_{21}\dfrac{di_1(t)}{dt} + L_{22}\dfrac{di_2(t)}{dt} \end{cases}$$

* L_{11} و L_{22}: ضریب اندوکتانس خودی — ضریب شار ناشی از i_2

* $L_{12} = L_{21}$: ضریب اندوکتانس متقابل ← (mutual) =

* اگر سلف ها نسبت به هم ساکن باشند: $L_{12} = L_{21} = M$

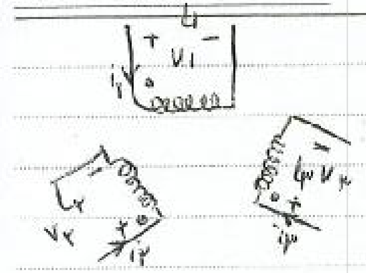
* M می تواند مثبت باشد یا منفی ← اگر شارها همدیگر را تضعیف کنند / اگر شارها همدیگر را تقویت کنند



* برای فضای آزاد $\mu = 1$ اما برای هسته مغناطیسی μ خیلی بیشتر است با استفاده از قانون دست راست جهت شار ϕ_1 و ϕ_2 را حساب می کنیم.

* دیده می شود که شارها همدیگر را تقویت می کنند یعنی $M > 0$

Year. Month. Date.



$$\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & L_{12} & L_{13}\\ L_{21} & L_2 & L_{23}\\ L_{31} & L_{32} & L_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1(t)\\ i_2(t)\\ i_3(t)\end{bmatrix}$$

* عناصر متقارن نسبت به قطر اصلی باهم مساوی اند:

$$\begin{cases} L_{21} = L_{12} \quad و \quad L_{32} = L_{23}\\ L_{31} = L_{13}\end{cases}$$

* علامت ضریب اندوکتانس متقابل ($i \neq j$) تنها بستگی به قرارداد نقطه بین سلف i و سلف j دارد.

ماتریس القای فضی:

$[\phi] = [L][I]$ $\qquad \underline{\text{ضرب طرفین } [L]^{-1}}$

$[I] = [L]^{-1}[\phi] = [\Gamma][\phi]$ جریان برحسب شار بدست می‌آید

گاما

ماتریس Γ را ماتریس القای معکوس می‌نامند.

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} L_1 & M\\ M & L_2\end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\text{یعنی ماتریس}}{\Gamma} = \frac{1}{L_1L_2 - M^2}\begin{bmatrix} L_2 & -M\\ -M & L_1\end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22}\end{bmatrix} \qquad \boxed{\Gamma_{11} = \frac{L_2}{L_1L_2 - M^2}}$$

چون باهم برابرند

شرط اولیه

$$\begin{cases} i_1(t) = i_1(0) + \Gamma_{11}\int_0^t v_1(\tau)\,d\tau + \Gamma_{12}\int_0^t v_2(\tau)\,d\tau\\ i_2(t) = i_2(0) + \Gamma_{12}\int_0^t v_1(\tau)\,d\tau + \Gamma_{22}\int_0^t v_2(\tau)\,d\tau\end{cases}$$

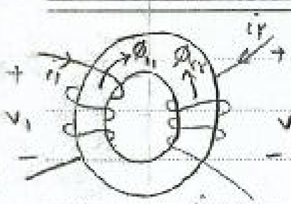
در حالت پایدار سینوسی:

$$\begin{cases}\vec{I_1}(j\omega) = \dfrac{\Gamma_{11}\vec{V_1}}{j\omega} + \dfrac{\Gamma_{12}\vec{V_2}}{j\omega}\\ \vec{I_2}(j\omega) = \dfrac{\Gamma_{12}\vec{V_1}}{j\omega} + \dfrac{\Gamma_{22}\vec{V_2}}{j\omega}\end{cases}$$

شرط اولیه نداریم

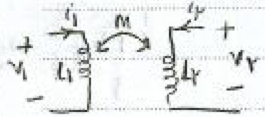
Year. Month. Date.

تصحیف



* دیده می‌شود که شارها همدیگر را تقویت می‌کنند $M>0$

در حالت دائم سینوسی:



از کجا بفهمیم که $M>0$ یا $M<0$ است.

نمی‌دانیم که نود را از رو یا از زیر آورده‌ایم

اگر جریان از سر نقطه‌دار وارد شوند یا از سر نقطه‌دار خارج شوند $M>0$ (ورود)

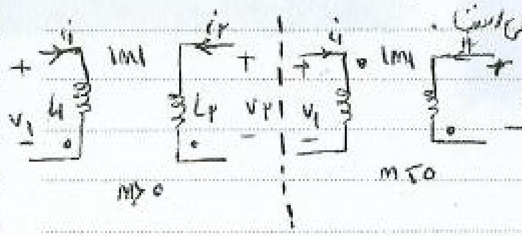
برای شکل بالا $M>0$ است.

* روابط سلف تزویج در حالت دائم سینوسی:

$$\begin{cases}\vec{V_1} = L_1 j\omega\vec{I_1} + Mj\omega\vec{I_2}\\ \vec{V_2} = Mj\omega\vec{I_1} + L_2 j\omega\vec{I_2}\end{cases}$$

قرارداد نقطه برای تعیین علامت M:

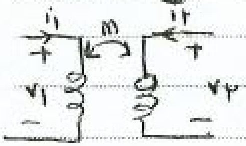
به یک سر از هر سلف یک نقطه اختصاص می‌دهند اگر جریان‌ها هر دو از سر نقطه‌دار وارد یا خارج شوند علامت M مثبت و در غیر این صورت M منفی است.



$$\begin{cases}\phi_1 = L_1 i_1 - |M| i_2\\ \phi_2 = -|M| i_1 + L_2 i_2\end{cases}$$

قراردادهای ماتریسی:

استفاده از قرارداد ماتریسی محاسبات مدارهای پیچیده شامل سلف تزویج را هموارتر می‌کند.

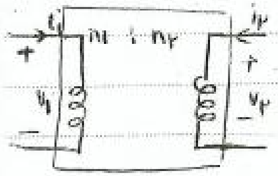


$$\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_1 & M\\ M & L_2\end{bmatrix}}_{\text{ماتریس اندوکتانس}}\begin{bmatrix} i_1\\ i_2\end{bmatrix} = \underline{\phi} = \underset{\text{ضرب ماتریسی}}{\underline{L}\,\underline{I}}$$

FARHAD STATIONERY

Year. Month. Date.

ترانسفورماتور ایده آل :

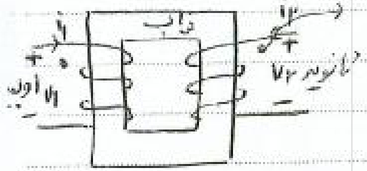


نقطه وجود ندارد

۱) ترانسفورماتور ایده آل انرژی تلف نمی کند

نقطه برای اینکه بدانیم شارهای کدام هم جهت هستند

۲) دارای هیچ گونه شار نشتی نیست



سلف تزویج

$\mu_r \to \infty \Rightarrow$ سلف تزویج $\longrightarrow$ ترانس ایده آل

هیچ شاری وارد فضای آزاد نمی شود

۳) ضریب خودالقایی هر سیم پیچ بینهایت است.

$L_1 = \mu_r \mu_0 n^2 L \longrightarrow \infty$

* تعریفی از ترانسفورماتورهای واقعی فیزیکی است.

اگر یک ترانس فیزیکی داشته باشیم و بخواهیم یک مدل از آن بدست بیاوریم آن را با ترانس ایده آل تخمین می زنیم

روابط اساسی ترانسفورماتور ایده آل :

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{n_1}{n_2} \qquad \frac{i_1(t)}{i_2(t)} = -\frac{n_2}{n_1}$$

$$\Rightarrow i_1(t)\, v_1(t) + i_2(t)\, v_2(t) = 0$$

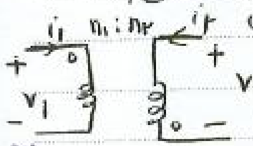
توان تحویلی $\Rightarrow$ صفر انرژی

تلف نمی کند و نه انرژی ذخیره می کند!

اگر n_1 , n_2 بود ترانس ایده آل

اگر m بود سلف تزویج

* ترانس ایده آل بدون حافظه است چون انرژی ذخیره نمی کند



$$\boxed{\frac{v_1}{v_2} = \frac{-n_1}{n_2} \qquad \frac{i_1}{i_2} = \frac{n_2}{n_1}}$$

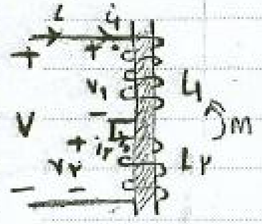
قرارداد نقطه رعایت نشده است

Year. Month. Date.

$[\Gamma]$ فاراد $= [\int v(t)] = \frac{1}{j\omega} \vec{V}$

اگر دو سلف تزویج را به هم متصل کنیم $\Leftarrow$

اتصال سری سلف های تزویج :



سری هستند یعنی جریان یکسانی از آن ها عبور می کند

$i_1 = i_2 = i$

$V = v_1 + v_2$

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix}$$

وقتی i_1 و i_2 با هم برابر باشند $\frac{di_1}{dt} = \frac{di_2}{dt} = \frac{di}{dt}$

$$v_1(t) = (L_1 + M)\frac{di}{dt} \qquad v_2(t) = (M + L_2)\frac{di}{dt}$$

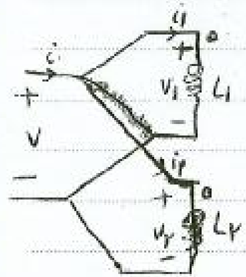
$$V(t) = v_1 + v_2 = (L_1 + L_2 + 2M)\frac{di}{dt}$$

اتصال سری سلف های تزویج یک سلف جدید با اندوکتانس $L_1 + L_2 + 2M$ بوجود می آورد

در حالت کلی : $L_{eq} = L_1 + L_2 \pm 2M$

اتصال سری دو سلف تزویج معادل یک سلف ساده است.

اتصال موازی سلف های تزویج :



$i = i_1 + i_2$

$V = v_1 = v_2 \Rightarrow \frac{d\phi_1}{dt} = \frac{d\phi_2}{dt} = \frac{d\phi}{dt}$

$$\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

به شرط $i_1(0) = i_2(0) = 0 \Rightarrow \phi = \phi_1 = \phi_2$

$$i = \underbrace{(\Gamma_{11} + \Gamma_{22} + 2\Gamma_{12})}_{\Gamma_{eq}}\,\phi$$

اول i_1 و i_2 را حساب می کنیم بعد با جمع شان i را

$i_1 = (\Gamma_{11} + \Gamma_{12})\phi$

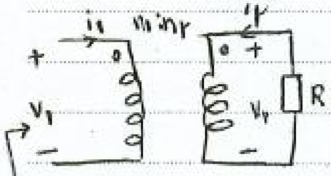
$i_2 = (\Gamma_{12} + \Gamma_{22})\phi$

سلف معادل اتصال موازی $L_{eq} = \frac{1}{\Gamma_{eq}}$

Year. Month. Date.

آنچه که سلف تزویج دارد مدار کنیم مرتبه اش به افزایش می یابد اما اگر ترانس ایده آل وارد مدار کنیم مرتبه مدار تغییری نمی کند.

- با اضافه کردن ترانس ایده آل در یک مدار مرتبه آن تغییر نمی کند.



خاصیت تغییر امپدانس:

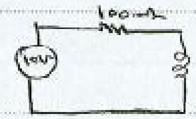
طرف ثانویه را ختم می کنیم به یک بار مقاومتی

$R_{in} = ?$

$$R_{in} = \frac{V_1}{i_1} = \frac{(\frac{n_1}{n_2})V_2}{(-\frac{n_2}{n_1})\,i_2}$$

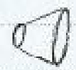
$$V_2 = -R_L i_2$$

$$\Rightarrow R_{in} = +R_L\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2$$



5:1

قفس



$R = ۴\Omega$

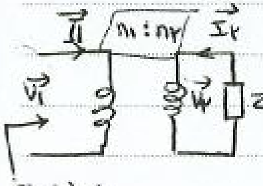
انتقال توان max :

باید مقاومت بار و مقاومت خط با هم برابر باشند.

برای این کار از ترانس ایده آل استفاده می کنیم.

تطبیق امپدانس:

$M \rightarrow$ ترجیح



کاربرد ترانس = تطبیق امپدانس

$$Z_{in}(j\omega) = \frac{\vec{V_1}}{\vec{I_1}} = \frac{(\frac{n_1}{n_2})\vec{V_2}}{-(\frac{n_2}{n_1})\vec{I_2}}$$

$$Z_L = -\frac{\vec{V_2}}{\vec{I_2}} \Rightarrow \underbrace{Z_{in}(j\omega)}_{\text{اولیه}} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \underbrace{Z_L(j\omega)}_{\text{ثانویه}}$$

یا $\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$ وقتی [illegible] باشد

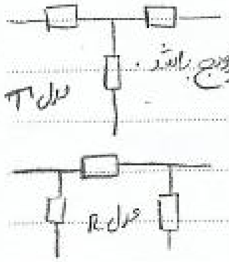
یعنی امپدانس دیده شده از اولیه ترانس ایده آل برابر است با امپدانس ختم شده به ثانویه ضرب در مجذور نسبت دورها

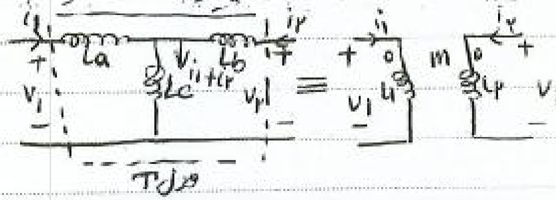
Year. Month. Date.

مدارهای معادل سلف های تزویج شده:

الف) مدل T: هرگاه سه المان را به هم چسبانده به شکل T درآید

یعنی می خواهیم با مداری معادل به شکل مقابل پیدا کنیم که معادل یک جفت سلف تزویج باشد.





معادل:

هدف یافتن مقادیر L_a، L_b و L_c است به گونه ای که دو مدار معادل باشند.

مدار سمت راست معلوم است.

$$\begin{cases} V_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \\ V_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

مدار سمت راست معلوم است

KVL در مش سمت چپ: $V_1 = L_a\frac{di_1}{dt} + L_c\frac{d(i_2+i_1)}{dt}$

KVL در مش سمت راست: $V_2 = L_b\frac{di_2}{dt} + L_c\frac{d}{dt}(i_2+i_1)$

با مساوی قرار دادن

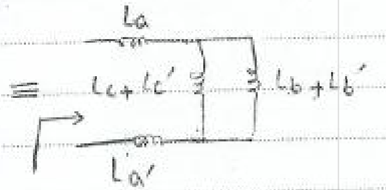
$$= (L_a+L_c)\frac{di_1}{dt} + L_c\frac{di_2}{dt}$$

$$= L_c\frac{di_1}{dt} + (L_b+L_c)\frac{di_2}{dt}$$

$L_1 = L_a + L_c \qquad M = L_c \qquad L_2 = L_b + L_c$

با مساوی قرار دادن دستگاه معادلات خواهیم داشت:

$$\begin{cases} L_a = L_1 - M \\ L_b = L_2 - M \end{cases}$$

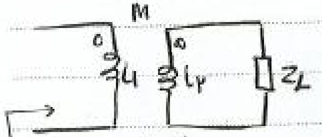


$$L_{eq} = L_a + L_a' + (L_c + L_c') \parallel (L_b + L_b')$$

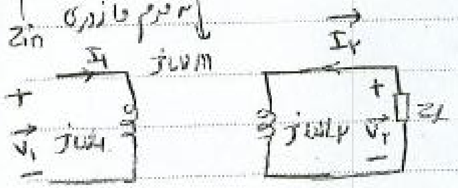
تقادیر L_a تا L_c' را از روی روابط داده شده بدست می‌آوریم و در رابطه L_{eq} جایگزین می‌کنیم

ترانس خطی (مثل ایده‌آل ولی بدون اتلاف) :

(هم سلف‌ها تزویج دارند چون M وجود دارد)



مثال: در مدار روبرو که ترانس خطی به یک بار Z_L ختم شده $Z_{in}(j\omega)$ را به‌دست آورید:



$$\vec{V_1} = j\omega L_1 \vec{I_1} + j\omega M \vec{I_2} \quad (1)$$

$$\vec{V_2} = j\omega M \vec{I_1} + j\omega L_2 \vec{I_2} \quad (2)$$

$$V_2 = -Z_L \vec{I_2} \quad (3)$$

(2) و (3) $\Rightarrow I_2 = \dfrac{-j\omega M}{Z_L + j\omega L_2} \vec{I_1} \quad (4)$

(1), (2), (4) $\Rightarrow \dfrac{\vec{V_2}}{\vec{V_1}} = \dfrac{jM\omega Z_L}{j\omega L_1 Z_L + \omega^2 (M^2 - L_1 L_2)}$

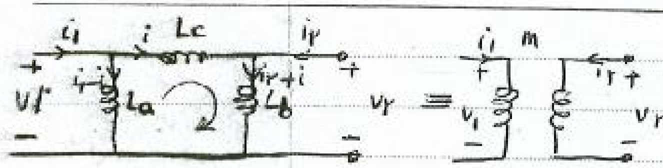
ضریب تزویج: $= k \triangleq \dfrac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ برای ضعف های تزویج با k نمایش می‌دهیم

$$\boxed{-1 < k \le 1}$$

4c

مجهولات ما معلوم شد.

مدل T:



KVL (در مش وسط): $L_c \dfrac{di}{dt} + L_b \dfrac{d(i_2+i)}{dt} - L_a \dfrac{d(i_1-i)}{dt} = 0$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{L_a \frac{di_1}{dt} - L_b \frac{di_2}{dt}}{L_a + L_b + L_c}$$

KVL در مش چپ: $v_1 = L_a \dfrac{d}{dt}(i_1 - i)$

KVL در مش راست: $v_2 = L_b \dfrac{d}{dt}(i_2 + i)$

$\rightarrow L_1 = \dfrac{L_a(L_b+L_c)}{L_a+L_b+L_c}$, $L_2 = \dfrac{L_b(L_a+L_c)}{L_a+L_b+L_c}$

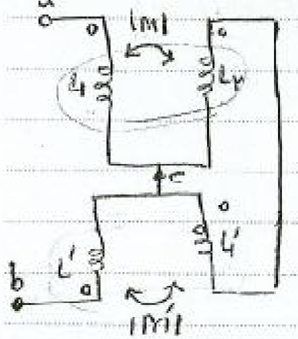
$$M = \frac{L_a L_b}{L_a + L_b + L_c}$$

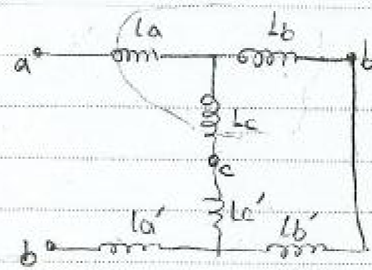
$$\rightarrow \begin{cases} L_b = \dfrac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 - M} \\ L_a = \dfrac{L_1 L_2 - M^2}{L_2 - M} \\ L_c = \dfrac{L_1 L_2 - M^2}{M} \end{cases}$$

مهم

مثال: اندوکتانس معادل دیده‌شده از سرهای a و b را به‌دست آورید:

از مدل T استفاده می‌کنیم:





L_b', L_b سری $\equiv L_b + L_b'$

L_c', L_c سری $\equiv L_c + L_c'$

Year. Month. Date.

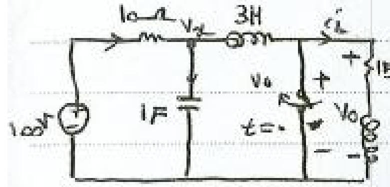
$y_p(t) = \delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2)$

پاسخ کامل : $v(t) = \delta(t) - e^{-t}u(t) + e^{-t}u(t) - 2e^{-(t-1)}u(t-1) + e^{-(t-2)}u(t-2)$

$v(t) = f(t)$ پاسخ کامل به

$v(t) = \underbrace{y^{*}_{v_0=1}}_{\text{پاسخ ورودی صفر}} + \underbrace{2f(t)}_{\text{پاسخ حالت صفر}}$

مسأله ۲۱ صفحه ۵ :



$v_0(t) = ?$

در $t=0$ خازن از مدار خارج شده چون سلف اتصال کوتاه است و خازن ولتاژ را از است ... از مدار خارج می‌شود.

$v_C(0) = 0$ و $i_L(0) = 10$

وقتی کلید را باز می‌کنیم چون جریان اولیه سلف ... نمی‌برد

$\frac{100 - v_x}{10} = v_x' - i_L$ (1)

$v_x = 3i_L' + 15i_L + 2i_L' = 5i_L' + 15i_L$ (2)

$v_x' = 5i_L'' + 2i_L' = 5i_L'' + 15i_L'$ (3)

$50 = 10i_L'' + 31i_L' + 5i_L$

$v_C(0) = 15i_L(0) + 5\frac{di_L(0)}{dt} \rightarrow \frac{di_L(0)}{dt} = -30$

$v_0 = 15i_L + 2\frac{di_L}{dt}(0)$

Year. Month. Date.

اگر $|K| = 1$ ⟸ سلف تزویج به ترانس ایده‌آل تبدیل می‌شود

می‌خواهیم این موضوع را بررسی کنیم:

$|K| = 1 \longrightarrow M^2 = L_1L_2 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{jM\omega Z_L}{j\omega L_1 Z_L} = \frac{M}{L_1}$

ضریب القاء متقابل — تعداد دورهای هر سیم‌پیچ

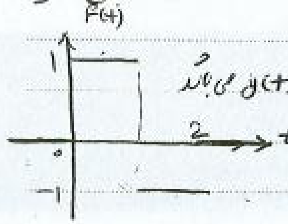
$M \propto n_1 n_2$ $\quad L_0 = n^2 L$ $\quad n_1$ و n_2 تعداد دورهای هر سیم‌پیچ

$L_1 \propto n_1^2$

$\Rightarrow \boxed{\frac{V_2}{V_1} = \frac{n_2}{n_1}}$ یعنی رابطه اساسی ترانس ایده‌آل :

* * * *

سوال ۵ میان‌ترم : پاسخ ضربه مدار مرتبه اولی به صورت $h(t) = \delta(t) - e^{-t}u(t)$ می‌باشد پاسخ همین



مدار با شرط اولیه $v_0 = 1/2$ به ورودی پله $y(t) = 1/2 e^{-t}u(t) + \frac{\delta(t)}{2}$ می‌باشد

پاسخ همین مدار با شرایط اولیه $v_0 = 1$ به دست آورید

پاسخ ضربه و پاسخ پله یعنی ورودی‌ها صفر هستند

پاسخ پله، با پاسخ حالت صفر است

$s(t) = \int_{0}^{t} h(\tau)d\tau = \int_0^t [\delta(\tau) - e^{-\tau}u(\tau)]d\tau = u(t) - \int e^{-\tau}u(\tau)d\tau.$

$e^{-t}u(t)$

$y(t) =$ پاسخ حالت صفر + پاسخ ورودی صفر $= s(t) + y^{*}_{v_0=1/2} = 1/2 e^{-t}u(t) + \frac{\delta(t)}{2}$

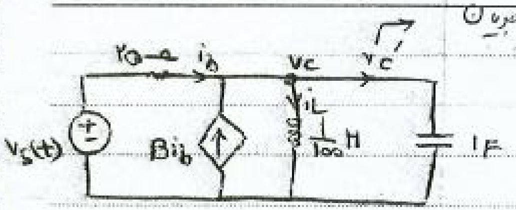
$y^{*}_{v_0=1/2} = \frac{\delta(t)}{2} - \frac{e^{-t}u(t)}{2}$

خطی بودن پاسخ ورودی صفر : $y^{*}_{v_0=1}(t) = 2y^{*}_{v_0=1/2}(t) = \delta(t) - e^{-t}u(t)$

خاصیت خطی بودن پاسخ حالت صفر : $f(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2) \rightarrow$

مسئله ۲۸ فصل ۵:

معادله دیفرانسیل



KCL: $i_b = \frac{v_s - v_c}{25}$ (1) $i_b' = \frac{v_s' - v_c'}{25}$ (5)

$(\beta+1) i_b = i_L + v_c'$ (2)

$i_L' = 100 v_c$ (3)

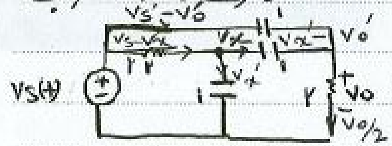
مشتق از (2) $\Rightarrow (\beta+1) i_b' = i_L' + v_c''$ (4)

$\Rightarrow v_c'' + \frac{(\beta+1)}{25} v_c' + 100 v_c = \frac{\beta+1}{25} v_s'$

حالت بدون نوسان:

ب) $\frac{\beta+1}{25} = 0 \Rightarrow \beta = -1$

مسئله ۹ فصل ۶:



چون سه گره داریم ⇐ سه مجهول داریم لذا چون $v_s(t)$ را داریم ⇐ ۲ مجهول داریم ⇐ ۲ معادله لازم است.

سه گره v_s و v_x و v_{out} (v_o)

KCL for v_x: $\frac{v_s - v_x}{2} = v_x' + v_x' - v_o'$

KCL $\frac{v_o}{2} = v_x' - v_o' + v_s' - v_o'$

$$\begin{cases} 4v_x' + v_x = 2v_o' + v_s & (1) \\ v_x = 2v_o' + \frac{v_o}{2} - v_s' & (2) \end{cases}$$

مشتق گیری از (1): $4v_x'' + v_x' = 2v_o'' + v_s'$ (3)

مشتق گیری از (2): $v_x' = 2v_o'' + \frac{v_o'}{2} - v_s''$ (4)

(2) و (4) را در (3) جایگذاری می‌کنیم

$8v_o'' + 2v_o' - 4v_s'' + 2v_o' + \frac{v_o}{2} - v_s'$
$= v_s' + 2v_o''$

$\rightarrow 6v_o'' + 4v_o' + \frac{1}{2}v_o = 4v_s'' + 2v_s'$

فرکانس های طبیعی سمت چپ و سمت راست را مشخص می‌دهیم.

فرکانس های طبیعی سمت چپ $= 6s^2 + 4s + \frac{1}{2} = 0$

$\rightarrow \begin{cases} s = -1/2 \\ s = -1/6 \end{cases}$ سمت راست $4s^2 + 2s = 0$ $s = 0$, $s = -1/2$

فرکانس طبیعی مشترک بین سمت چپ و راست وجود داشته باشد در پاسخ حذف می‌شود.

برای جواب را حدس می‌زنیم: $y(t) = k e^{-t/6} u(t) \rightarrow k = ?$

$v_s(t) = u(t) \rightarrow v_s' = \delta(t)$ و $v_s'' = \delta'(t)$

$v_o'(t) = k\delta(t) - \frac{k}{6} e^{-t/6} u(t)$

$v_o'' = k\delta'(t) - \frac{k}{6}\delta(t) + \frac{k}{36} e^{-t/6} u(t)$

* جایگذاری در $6k\delta'(t) - k\delta(t) + \frac{k}{6} e^{-t/6}u(t) + 4k\delta(t) - \frac{4k}{6} e^{-t/6}u(t)$
$+ \frac{k}{2} e^{-t/6} = 4\delta'(t) + 2\delta(t)$

$\boxed{v_s(t) = \frac{2}{3} e^{-t/6} u(t)}$

$e^{-t/6}$ تعادل ضرایب $\Rightarrow k = 4/6$

δ تعادل ضرایب $\Rightarrow -k + 4k = 3k = 2 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$

$|E_{oc}| = 100$

$Z_{th} = R_{th} + jX_{th}$

$|V_{ab}| = \dfrac{|E_{oc}|}{|Z_L + Z_{th}|}|Z_L|$

$R_{th} + R_L + j(X_{th} + X_L)$

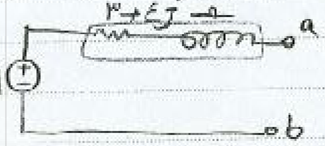
$R_{th} + 0 + j(X_{th} - 8)$

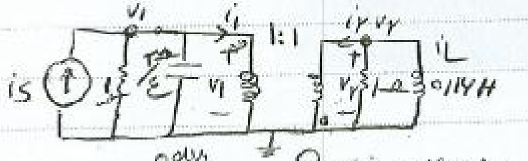
1) $Z_L = -j8 \rightarrow 160 = \dfrac{8 \times 100}{R_{th} + j(X_{th} - 8)}$

$5 = \sqrt{R_{th}^2 + (X_{th} - 8)^2}$

2) $Z_L = -j4\,\Omega \qquad \dfrac{400}{3} = \dfrac{400 \times 4}{\sqrt{R_{th}^2 + (X_{th} - 4)^2}}$

$\begin{cases} R_{th} = 3 \\ X_{th} = 4 \end{cases}$





ترانس ایده آل با فرض 2: $n<0$

معادله دیفرانسیل ، پاسخ پله و پاسخ به ورودی سینوسی؟

$\begin{cases} v_1 = -v_2 \\ i_1 = i_2 \end{cases}$

و شار گره همان و شار سمت ترانس است.

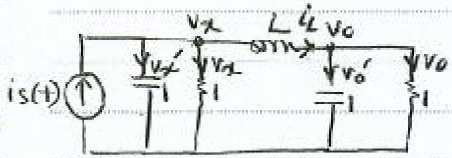
اولیه $i_s(t) = v_1 + \frac{1}{4}v_1' + i_1$

ثانویه $i_L(t) = v_2 + i_2 = 0$

به روش فرض $V_L = L\dfrac{di_L}{dt} = v_2$ معادله ده بعدی

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 8\frac{di_L}{dt} + 25 i_L = -25 i_s(t)$$

می‌بینیم که هر دو شرط تاکید شده را تحقیق می‌کنند.



kcl for v_x : $i_s(t) = v_x + v_x' + i_L$ ①

اینجا v_x و v_o و i_L مجهولات ما هستند.

kcl for v_o : $i_L = v_o' + v_o$ ②

$L i_L' = v_x - v_o$ ③   پس ⇐

مشتق از ② : $i_L' = v_o'' + v_o'$ ④

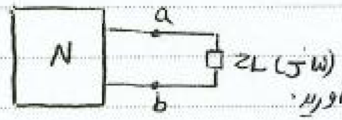
$v_x = Lv_o'' + Lv_o' + v_o$ ⑤

مشتق از ⑤ → $v_x' = Lv_o''' + Lv_o'' + v_o'$ ⑥

⑥ و ⑤ و ② را در ① جایگذاری می‌کنیم : $Lv_o''' + Lv_o' + v_o' + Lv_o'' + Lv_o'' + v_o + v_o' = i_s(t)$

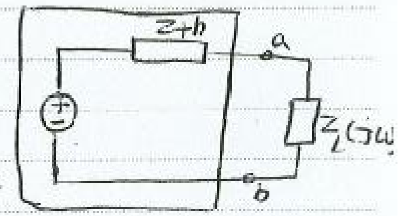
$\rightarrow Lv_o''' + 2Lv_o'' + (L+2)v_o' + 2v_o = i_s(t)$

۴۴ فصل ۷ :



مدار تونن دیده شده از سرهای a و b را بدست آورید.

$Z_L(j\omega)$	∞	$-j8$	$-j4$
$\lvert V_{ab}\rvert$	100	160	$\frac{400}{3}$



مدارهای مرتبه دوم:

$\Delta(s) = s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$

$\alpha > \omega_0$ میرایی شدید $s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

$\alpha = \omega_0$ میرایی بحرانی $s_1 = s_2 = -\alpha$

$\alpha < \omega_0$ میرایی ضعیف $s_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\underbrace{\omega_0^2 - \alpha^2}_{\omega_d}}$

$\alpha = 0 \longrightarrow$ حالت نوسانی

$\phi(0^-) = \phi(0^+)$

$۲ \times ۳/۸ + ۱ \times ۰/۸ = ۳i(0^+) \rightarrow i(0^+) = ۲/۸ \, A$

KVL: $۳\frac{di}{dt} + ۹i = ۱۵ \rightarrow \begin{cases} \frac{di}{dt} + ۳i = ۱۵/3 \\ i(0^+) = ۲/۸ \end{cases}$

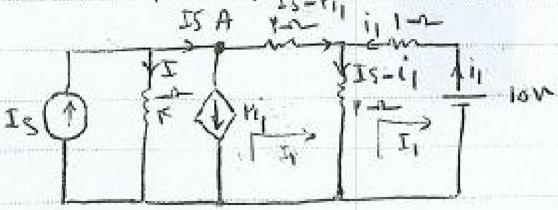
$i = (۱/۱۱ + ۱/۷ e^{-۳t}) u(t) \qquad v_0 = ۵i$

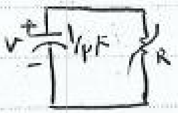
تمرین های سری ۶:

فصل ۴: ۲۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۶، ۶۰ ، ۷۷ – ۸۷

در مدار شکل زیر مقدار منبع Is (بر حسب آمپر) درصورتی که $I = 0$ باشد کدام است؟

راهنمایی: ولتاژ گره A صفر است.





در مدار زیر $v_0(0) = ۳$ و $v_C(t) = ?$

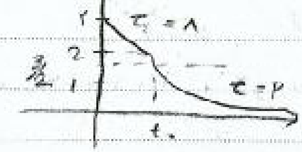
$\frac{1}{2}\frac{dv}{dt} + i_R = 0$

$i_R = \begin{cases} v_R & v_R < ۲ \\ ۴v_R - ۶ & v_R > ۲ \end{cases}$

$\frac{dv}{dt} + ۲i_R = 0$

$\frac{dv}{dt} + ۲(۴v - ۶) = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{dv}{dt} + ۸v = ۱۲ \\ v(0) = ۳ \end{cases}$

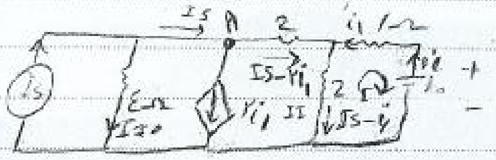
$v(t) = \begin{cases} \frac{3}{2} + \frac{3}{2} e^{-۸t} & 0 < t < t_0 \\ 2 e^{-2(t-t_0)} & t > t_0 \end{cases}$



تمرینات فصل 5: خلاصه نویسی.

فصل ۵ ۸۵ - ۸۳ - ۷۵ - ۴۸ و ۳۷ - ۱۳ - ۷

تاریخ ۹٫۲۵٫۹ - ۲۸ - ۲۵ - ۲۲ - ۱۵ - ۱۱ - ۹



$KVL_I: -i_1 + ۱۰ - ۲(I_s - i_1) = 0$

$KVL_{II}: 2(I_s - 2i_1) + ۲(I_s - i_1) = 0$

$\begin{cases} -i_1 + ۱۰ - ۲I_s + ۲i_1 = 0 \\ ۲I_s - ۴i_1 + ۲I_s - ۲i_1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} ۲\times(-۲I_s + i_1 - ۱۰) \\ ۴I_s - ۶i_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{۴I_s} + ۲i_1 = -۲۰ \\ \cancel{۴I_s} - ۶i_1 = 0 \end{cases}$

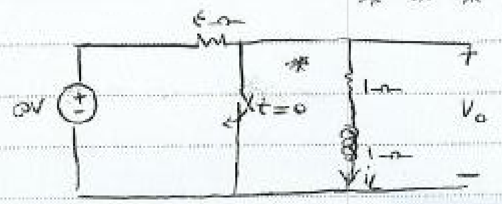
$-۴i_1 = -۲۰ \qquad \boxed{i_1 = ۵ A}$

$۴I_s = ۶i_1 \rightarrow ۴I_s = ۳۰ \qquad I_s = \frac{۳۰}{۴} = \frac{15}{۲} = ۷/5 \, A$

$$cs = \delta(t) \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv}{dt} + \frac{5}{3}v = 3\delta(t) \\ v(0^-) = 0 \end{cases}$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \to v(0^+) - v(0^-) + \frac{5}{3}\int_{0^-}^{0^+} v\,dt = 3 \qquad v(0^+) = 3$$

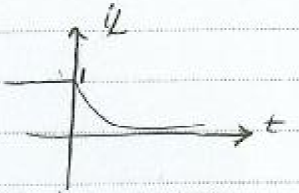
* * * *



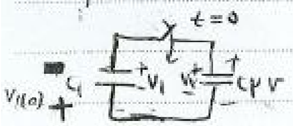
$i_L(t) = ?$

$t<0 \quad i_L(0^-) = \frac{5}{4+1} = 1A$

$$t>0 \begin{cases} KVL: \frac{di}{dt} + i = 0 \to i_L = e^{-t} \\ i(0^+) = i(0^-) = 1 \end{cases}$$



* * * *



جریان سلف در موارد زیر می‌تواند ناپیوسته باشد:

۱) ورودی ضربه به مدار اعمال شود

۲) سلف به همراه سلف‌های دیگر تشکیل گره دهند (مثلاً دو سلف سری)

۳) ... منابع جریان ...

دو خازن موازی

قانون بقای بار $\Rightarrow Q(0^-) = Q(0^+)$

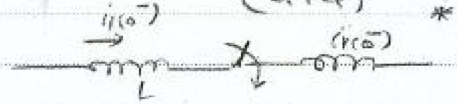
در 0^+ هر دو خازن یک ولتاژ دارند

$$C_1V_1(0^-) + C_2V_2(0^-) = (C_1+C_2)\,V(0^+)$$

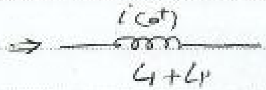
$$V(0^+) = \frac{C_1V_1(0^-) \pm C_2V_2(0^-)}{C_1+C_2}$$

* * * *

دوگان برای دو سلف سری:



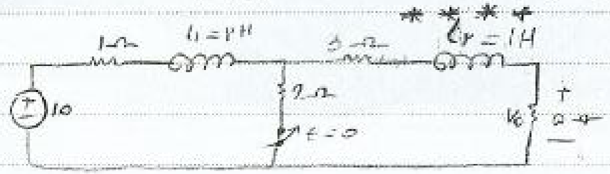
$\Rightarrow$



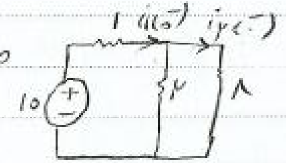
$$\phi(0^-) = \phi(0^+) \to L_1 i_1(0^-) + L_2 i_2(0^-) = (L_1+L_2)\, i(0^+)$$

$$i(0^+) = \frac{L_1 i_1(0^-) + L_2 i_2(0^-)}{L_1+L_2}$$

* * * *



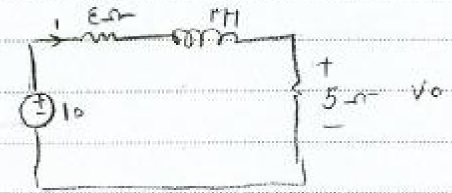
$t<0$



$$i_1(0^-) = \frac{10}{1+2\|8} = \frac{10}{2.6} = 3.8\,A$$

$$i_2(0^-) = \frac{2}{2+8} \times 3.8 = 0.8\,A$$

$t>0$

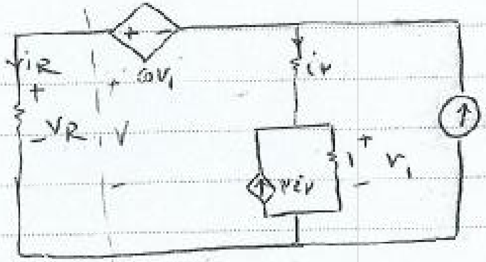


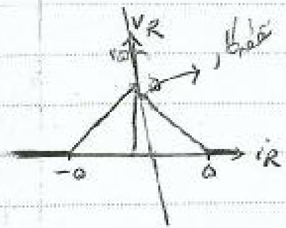
۳۰-۶ ، ۱۴ ، ۱۵ ، ۱۶ ، ۲۱ و ۳۸ و ۳۹

خلاصه درس فصل ۶

Year. Month. Date.

مقاومت غیرخطی





$i_2 + 3i_2 = \frac{v_1}{1} \to v_1 = 4i_2$

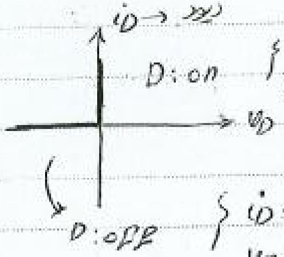
$i_2 = i + 1$

$v = 5v_1 + i_2 + v_1 = 6v_1 + i_2 = 6(4i_2) + i_2 = 25 i_2$

$= 25(i+1) \to \boxed{v = 25i + 25}$

$\begin{cases} v_R = v \\ i_R = -i \end{cases}$ $\quad \begin{cases} v_R = -25 i_R + 25 \\ v_R = -i_R + 5 \end{cases}$

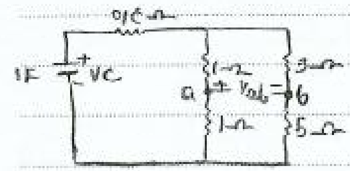
$i_R = \frac{5}{6}$ و $v_R = \frac{25}{6}$

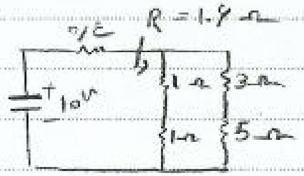


D: on $\begin{cases} v_D = 0 \\ i_D \geq 0 \end{cases}$

D: off $\begin{cases} i_D = 0 \\ v_D \leq 0 \end{cases}$

Year. Month. Date.





$v_C(0) = 15^v$

$v_{ab}(t) = ?$

برای مدار مرتبه اول : $y(t) = y(\infty) + [y(0) - y(\infty)]e^{-t/\tau}$

$\tau = R_{eq} C = (0.4 + 8 \| 2)(1) = 2\,sec$

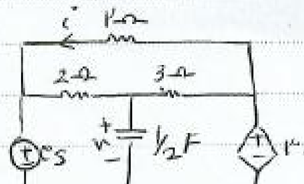
$v = \frac{1.6}{1.6 + 0.4} \times 10 = 8^v$ $\quad v_a = \frac{1}{2} \times 8 = 4v$ $\quad v_b = \frac{5}{5+3} \times 8 = 5$

$v_{ab}(\infty) = 0$ $\quad y = ke^{-t/\tau}$ $\quad y = ke^{-t/\tau}$ $\quad v_{ab} = -e^{-2t}$ $\quad t \geq 0$

$i = \frac{v_b}{5} = \frac{5e^{-2t}}{5} = e^{-2t}$

* * * *

پاسخ پله و ضربه را برای خروجی v بدست آورید



$-3i + 2i + e_s = 0 \Rightarrow i = e_s$

$\frac{1}{2}\frac{dv}{dt} + \frac{v - e_s}{2} + \frac{v - 3e_s}{3} = 0$

$\frac{dv}{dt} + \frac{5}{3}v = 3e_s$

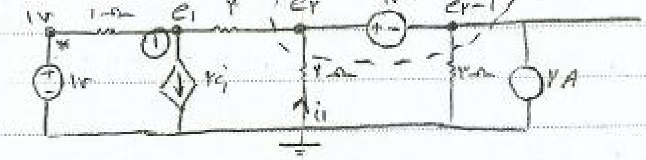
$e_s = u(t) \to \begin{cases} \frac{dv}{dt} + \frac{5}{3}v = 3 \\ v(0^+) = v(0^-) = 0 \end{cases}$ $\quad \frac{dv}{dt} + \frac{5}{3}v = 3e_s$

$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + \frac{5}{3}v = 0 \\ v(0^+) = 3 \end{cases}$

$s(t) = v(t) = \frac{9}{5}(1 - e^{-\frac{5}{3}t})\,u(t)$

$h(t) = v = 3e^{-\frac{5}{3}t}\,u(t)$

Year. Month. Date.



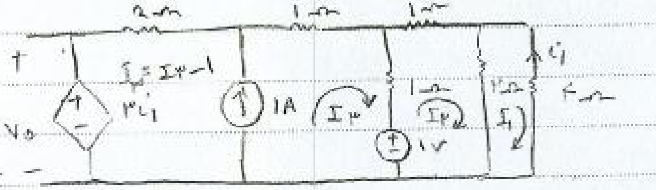
... که جریان یکی معلوم است متغیر منبع وابسته را برحسب گره‌ها به دست می‌آوریم

$i_1 = -\frac{e_2}{2}$

KCL گره ۱: $\frac{e_1-1}{1} + 2\left(-\frac{e_2}{2}\right) + \frac{e_1-e_2}{3} = 0$

KCL گره ۲: $\frac{e_2-e_1}{3} + \frac{e_2}{2} + \frac{e_2-1}{3} - 2 = 0$

۳ گره
۴ مش



حل به روش مش:

$v_0 = 3i_1 = -3I_1$

$i_1 = -I_1$

$$\begin{cases} -3(-I_1) + 2(I_3-1) + I_3 + 1 + 1(I_3-I_2) + 1 = 0 \\ -1 + 1(I_2-I_3) + I_2 + 2(I_2-I_1) = 0 \\ 2(I_1-I_2) + 4I_1 = 0 \end{cases}$$

تحلیل مدارهای غیرخطی:

در اتصال سری ← مشخصه‌های $i-v$ باهم جمع می‌شوند

در اتصال موازی ← " " $i-v$ " "

سلف‌های سری ← " " $\phi-i$ " "

موازی ← " " $i-\phi$ " "

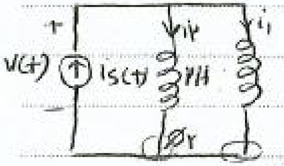
خازن‌های سری ...

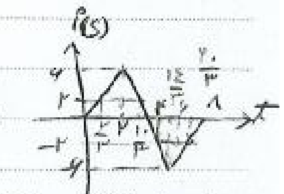
$\left(i_1 = \frac{\phi}{L}\right)$

Year. Month. Date.

سلف سری $V = V_1 + V_2 \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi_1}{dt} + \frac{d\phi_2}{dt} \to \phi = \phi_1 + \phi_2$

شارها باهم جمع می‌شوند



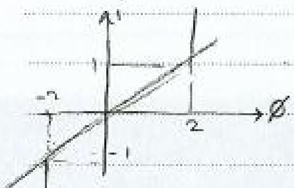


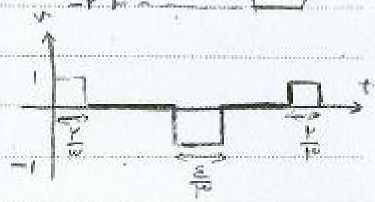
$v(t) = ?$ $\phi_1 = f(i_1)$

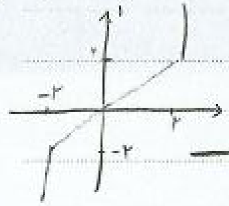
هدف محاسبه شکل ولتاژ منبع جریان ؟

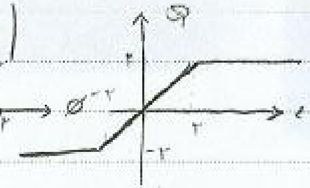
$i_2 = \frac{1}{L_2}\phi_2 = \frac{1}{2}\phi_2$ برای محاسبه موازی مشخصه‌های ϕ

i ها جمع می‌شوند



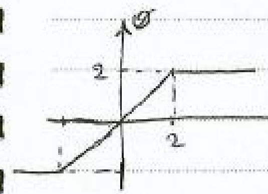






$v_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = L\frac{di_S}{dt} =$

$(1+2) \times 3 = 2$



Year. Month. Date. ۱۴و۱۳

که مشخصه های دیود، مقاومت، منبع جریان و ولتاژ را در نظر داشته باشید و باهم ترکیب کنید.

آنالیز سیگنال کوچک (small signal):

$i = f(v)$

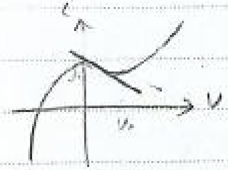
$v(t) = V_0 + \Delta v(t)$ $\quad |\Delta v(t)| << V_0$ شرط سیگنال کوچک

ولتاژ بایاس (DC) ثابت

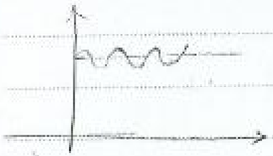
بسط تیلور حول V_0

$$i(t) = f(V_0+\Delta v) = f(V_0) + f'(V_0)\Delta v + f''(V_0)\frac{(\Delta v)^2}{2} + \cdots$$

$$i(t) = \underbrace{f(V_0)}_{I_0} + \underbrace{f'(V_0)}_{g}\Delta v = I_0 + g\Delta v \quad \begin{cases} I_0 = f(V_0) & \text{جریان نقطه کار} \\ g \triangleq \frac{di}{dv} & \text{رسانایی سیگنال کوچک مدار} \end{cases}$$



$v(t) = V_0 + V_m \sin\omega t$ $\quad |V_m| << |V_0|$



$i = I_0 + I_m \sin\omega t$ تحلیل سیگنال کوچک: پل ارتباطی بین مدار و الکترونیک

در مورد خازن:

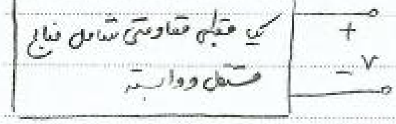
بار $q = f(v)$ $\quad v = V_0 + \Delta v \quad |\Delta v| << |V_0|$

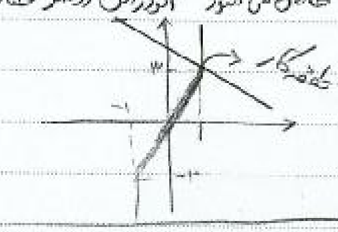
$q = f(V_0 + \Delta v) \simeq f(V_0) + f'(V_0)\Delta v$

$$i = \frac{dq}{dt} = \underbrace{f'(V_0)}_{C_d}\frac{d(\Delta v)}{dt} \qquad C_d \triangleq \frac{dq}{dv}\Big|_{V_0}$$

Year. Month. Date. ۱۵۱

در مدار زیر اگر در سرهای ab یک مقاومت وصل کنیم ولتاژ $v = 2V$ و اگر مقاومت 4Ω وصل کنیم ولتاژ $v = 4V$ حاصل می شود. اگر در این دو سر مقاومتی غیرخطی با مشخصه زیر وصل کنیم $v = ?$



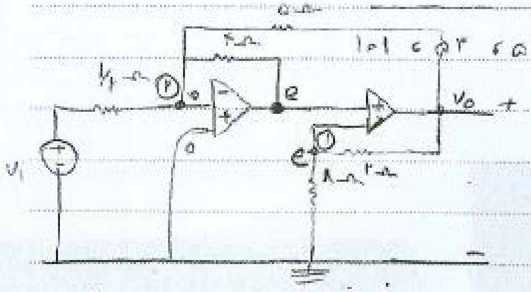


حل تمرینات ۳۶، ۴۲، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۱۰۱

فصل ۳ : ۴ و ۳۴

تاریخ تحویل ۸/۲۰ با خلاصه

$\frac{v_o}{v_i} = ?$ $\quad \frac{i_o}{v_i} = ?$



KCL ①

$$\frac{e}{8} + \frac{e - v_o}{2} = 0 \rightarrow e = 0.8\, v_o$$

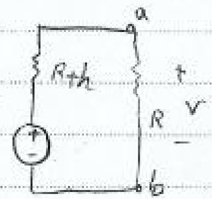
KCL ② $\quad -2v_i - \frac{e}{4} - \frac{v_o}{5} = 0 \rightarrow -2v_i - \frac{0.8 v_i}{4} - \frac{v_i}{5} = 0$

$-2v_i = 0.4\, v_o$ $\quad \boxed{\frac{v_o}{v_i} = -5}$

$$i_o = \frac{v_o}{2+8} + \frac{v_o}{5} = 0.3\, v_o = 0.3(-5v_i) = -1.5\, v_i$$

$\boxed{\frac{i_o}{v_i} = -1.5}$

حل



$v = \frac{R}{R + R_{th}} V_{th}$

$\frac{V_{th}}{1 + R_{th}} = 2$

$\frac{4 + R_{th}}{4(1 + R_{th})} = \frac{2}{4}$

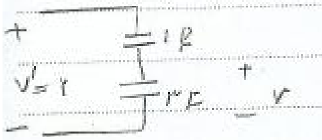
$\frac{4}{4 + R_{th}} V_{th} = 4$

$\begin{cases} R_{th} = 2\Omega \\ V_{th} = 6V \end{cases}$ $\quad v = 2i + 6$

$\begin{cases} v = v_R \\ i = -i_R \end{cases}$ $\quad v_R = -2i_R + 6 \quad i_R = 1A$

آنوکی عنصر با منحنی دو طرفه باشد جریان کنترل کننده منبع وابسته باشد حذف می‌شود

Year. Month. Date.



$i_1 = i_2 \rightarrow C_1 \frac{dV_1}{dt} = C_2 \frac{dV_2}{dt}$

$C_1V_1 = C_2V_2 \quad (Q_1 = Q_2)$

$V_2 = \frac{C_1}{C_2} V_1 \qquad V_1 + V_2 = V \qquad V_2 = \frac{C'}{C_1 + C_2} V$

$V = \frac{1}{1+3} \times 2 = 0.5V$

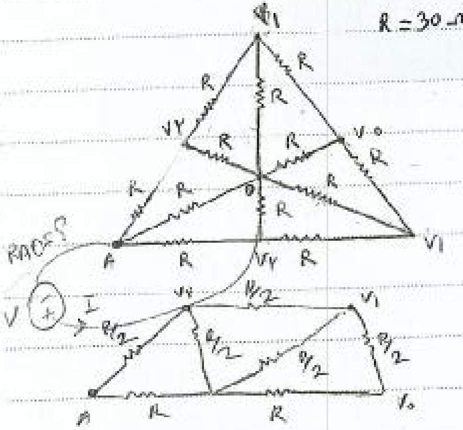
$V_{21} = V_{L2} = L_1 \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt}$

$L_1 i_1 = L_2 i_2 \quad (\varnothing_1 = \varnothing_2)$

$i_2 = \frac{L_1}{L_2} i_1$

$i = \frac{2}{2+8} \times 1 = 0.2A$

۹Ω مقاومت معادل بین نقطه O و A چقدر است؟ $R = 30\Omega$

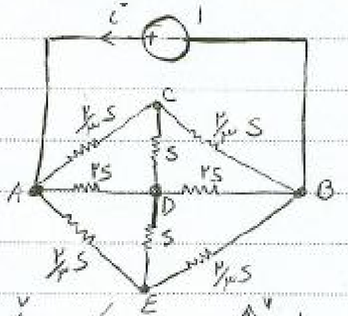


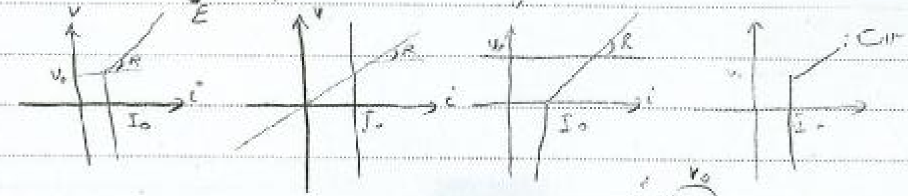
$R_{eq} = \left[\left(\left[\frac{1}{2}+1\right) \| \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2}\right] \| \frac{1}{2}\Big) + \frac{1}{2}\Big] \| R$

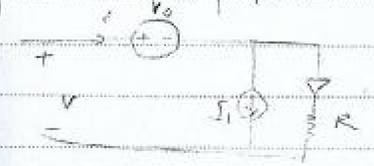
$\frac{9}{2} R$

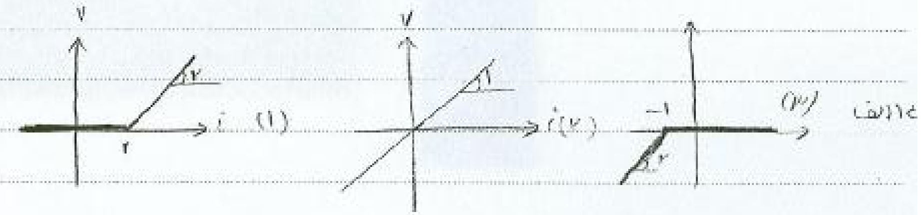
Year. Month. Date.

در مدار شکل مقابل جریان i را به دست آورید:

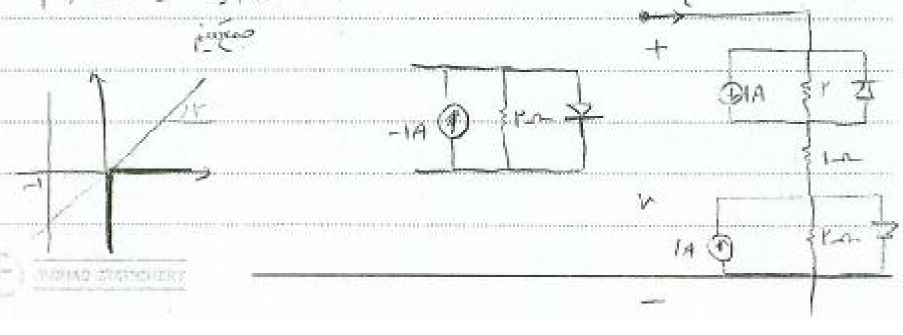




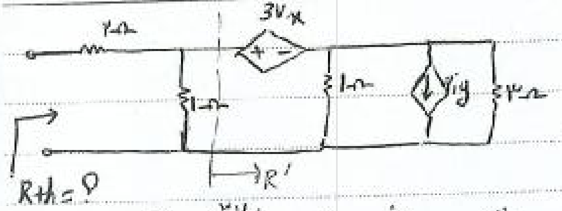




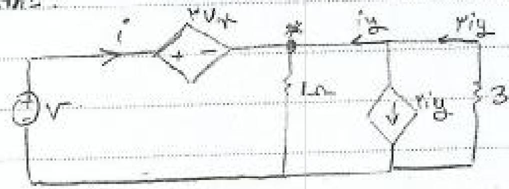
اگر جریان هایشان را با هم جمع کنیم



Year. Month. Date.



$R_{th} = 2+1 \,||\, R'$



$v_x = ۳(۳i_y) = ۹i_y$

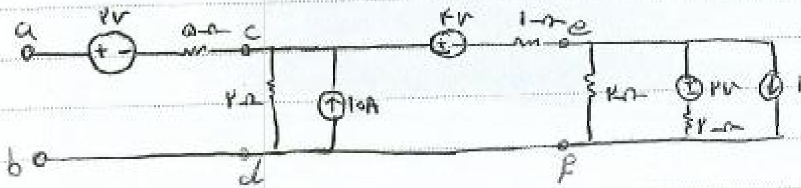
$kcl*: i + i_y + \frac{v_x}{1} = 0$

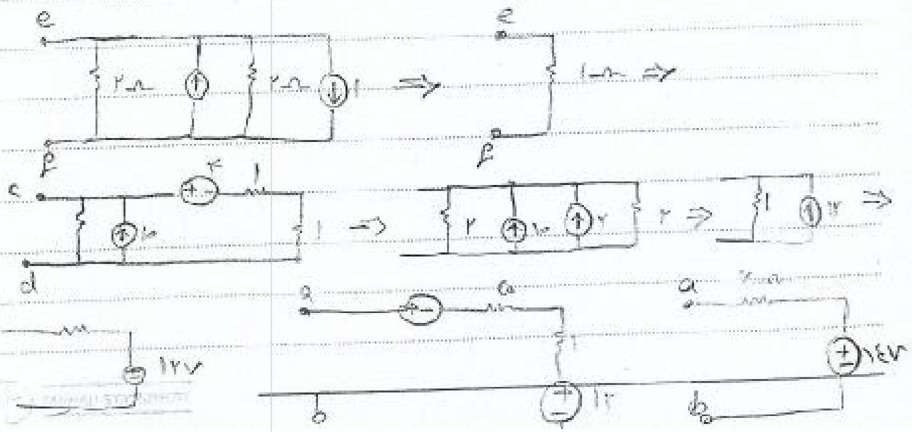
$\rightarrow i = -(i_y + v_x) = -10 i_y$

$v = ۳v_x - v_x = ۲v_x = ۱۸ i_y$

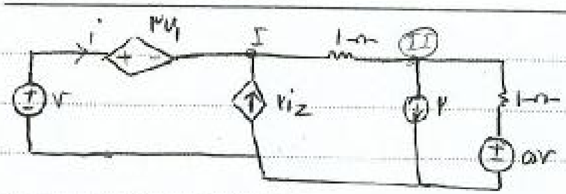
$R' = \frac{v}{i} = \frac{۱۸ i_y}{-10 i_y} = -۱/۸\ \Omega$

$R = 2+1 \,||\, R' = 2 + \frac{-۱/۸}{-۰/۸} = \frac{۱۷}{۴}\ \Omega$





Year. Month. Date.

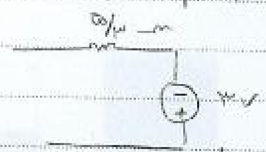


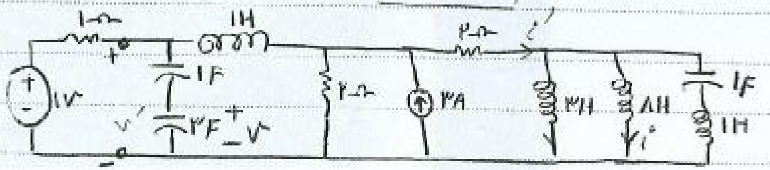
$kcl\ I \quad i = -۲i_۲ - i_۲ = -۳i_۲ \rightarrow i_۲ = -\frac{1}{۳} i$

$kcl\ II \quad i_۲ + ۲ + \frac{v_۱}{1} = 0 \rightarrow v_۱ = -(i_۲ + ۲) = \frac{1}{۳} i - ۲$

$v = ۳v_۱ - i_۲ + v_۱ + ۵ = ۴v_۱ - i_۲ + ۵ = ۴(\frac{1}{۳} i - ۲) + \frac{1}{۳} i + ۵$

$v = \frac{۵}{۳} i - ۳$



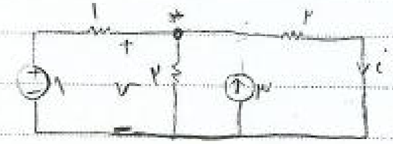


i و v را بدست آورید

$v_L = L \frac{di}{dt} = 0$ سلف در مدار dc به صورت اتصال کوتاه عمل می‌کند

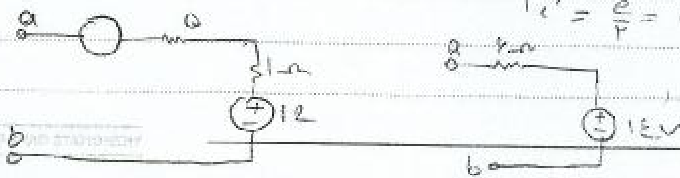
$i_c = C \frac{dv}{dt} = 0$ خازن مدار باز

تقسیم ولتاژ در خازن به عکس ظرفیت ها صورت می‌گیرد.

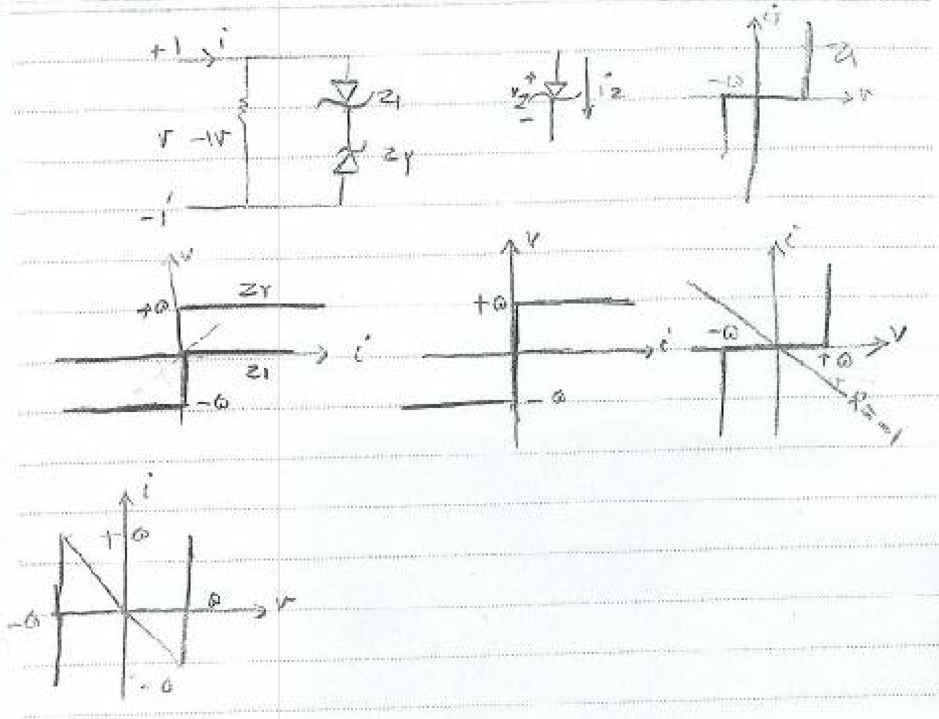


$kcl*: \frac{e-1}{1} + \frac{e}{۲} + \frac{e}{۲} - ۳ = 0$

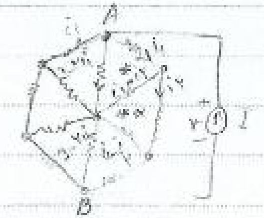
$e = ۲v \quad \begin{cases} v' = e = ۲v \\ i' = \frac{e}{۲} = 1A \end{cases}$



Year. Month. Date.



Year. Month. Date.



KVL in ۱ : $Ri_1 + R(i_1 - i_2) - R(I - ۲i_1) = ۰$

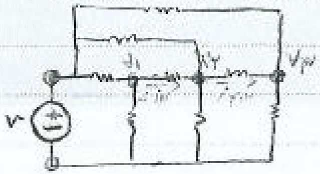
$i_2 = ۴i_1 - I$

KVL in ۲ : $۲R(i_1 - i_2) + R(i_1 - i_2) - Ri_2 = ۰$

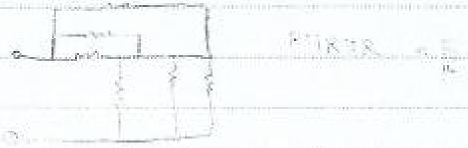
$۲i_1 - ۳i_2 = ۰$

$۲i_1 - ۳(۴i_1 - I) = ۰ \rightarrow \boxed{i_1 = ۰/۳I}$

$V = ۲R(I - ۲i_1) = ۰/۸RI \rightarrow R_{AB} = ۰/۸R$



$i_2 = i_3 = ۰$

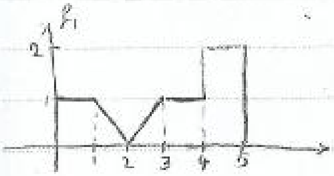


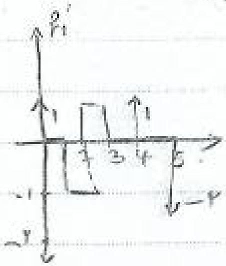
$R_{in} = ۲R \| \frac{۴}{۳}R \| ۴R$

$-i_2 + i_3 + i$

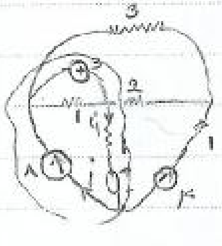
$-i_2 + i_3 + i_1$

$-i = -i_3 - i_1$





$$\delta(t) - u(t-1) + 2u(t-2) - u(t-3) + \delta(t-4) - 2\delta(t-5)$$



$P = vi$ $\quad i = 8A$

$i_1 = 4 + 8 = 12A$

$v - 3 + 12 + 1 = 0$

$v = -10$

$P = -80W < 0$

$v_B = 0$

$i = i_1 + i_2$

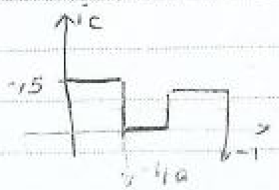
$$i = \frac{v_{in} - v_B}{R} = \frac{v_{in}}{R}$$

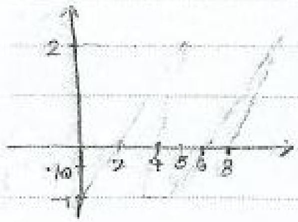
$$i_1 = \frac{v_B - v_o}{R_1'} = \frac{-v_o}{R_1'}$$

$$\to \frac{v_o}{v_{in}} = \frac{R_2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

$$i_2 = \frac{-v_o}{R_2'}$$

$$i_c = C\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dv_m}{dt}$$





$$i = \begin{cases} \frac{1}{2}v & v < 0 \\ v & 0 < v < 2 \end{cases}$$

اوپنهایم سری ۱ : B

$\delta(2t) = \frac{1}{2}\delta(t)$ $\quad$ $\delta(2t) = \frac{1}{2}\delta(t)$ نشان دهید که

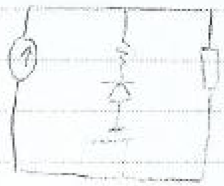
$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} P_\Delta(t)$$

$$P_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0 < t < \Delta \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$$

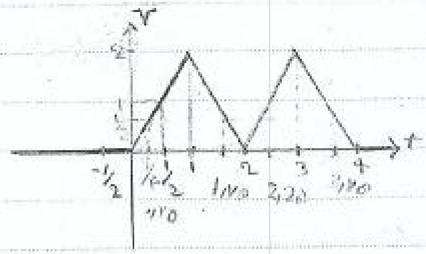
$$\delta(2t) = \lim_{\Delta \to 0} P_\Delta(2t) = \lim_{\Delta \to 0} \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0 < 2t < \Delta \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases} = \lim \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0 < t < \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$$

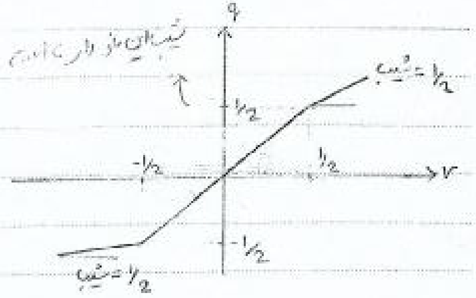
$$= \frac{1}{2} \lim_{\Delta \to 0} \begin{cases} \frac{1}{\Delta/2} & 0 < t < \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases} = \frac{1}{2}\delta(t)$$

$\frac{1}{2}$ ضرب و تقسیم شده است



۷۳





if $-\frac{1}{2} \le v \le \frac{1}{2} \Rightarrow c = 1$

o.w. $c = \frac{1}{2}$

$0<t<0/25$

$0/25<t<1$

$1<t<1/75$

$1/75<t<2$

$2<t<2/25$

$2/25<t<3$

$3<t<3/75$

$3/75<t<4$

if $0<t<0/25 \Rightarrow i = c\frac{dv}{dt} = 1\times 2 = 2$

if $0/25<t<1 \Rightarrow i = c\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\times 2 = 1$

if $1<t<1/75 \Rightarrow i = c\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}(-2) = -1$

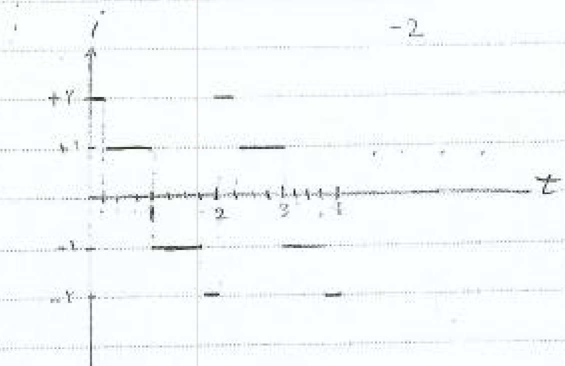
if $1/75<t<2 \Rightarrow i = c\frac{dv}{dt} = 1\times(-2) = -2$

if $2<t<2/25 \Rightarrow i = 1\times 2 = 2$

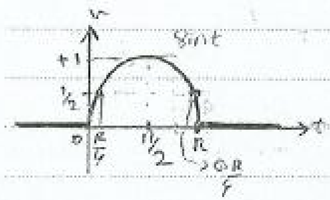
if $2/25<t<3 \Rightarrow i = \frac{1}{2}\times 2 = 1$

-1

-2



۷۴



نقاط بحرانی

$(\frac{\pi}{6}, 0)$ $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$ $(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}$

if $-\frac{1}{2} \le v \le \frac{1}{2} \Rightarrow c =$

o.w. $c = \frac{1}{2}$

$0<t<\frac{\pi}{6}$

$\frac{\pi}{6}<t<\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}<t<\frac{5\pi}{6}$

$\frac{5\pi}{6}<t<\pi$

if $0<t<\frac{\pi}{6} \Rightarrow i = c\frac{dv}{dt} = (1)\cos t = \cos t$

if $\frac{\pi}{6}<t<\frac{\pi}{2} \Rightarrow i = c\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\cos t$

if $\frac{\pi}{2}<t<\frac{5\pi}{6} \Rightarrow i = c\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\cos t$

if $\frac{5\pi}{6}<t<\pi \Rightarrow i = c\frac{dv}{dt} = \cos t$

if $t>\pi \Rightarrow i = 0$