مدلسازی و تحلیل

عددی ماشین

دکتر عباس زاده

* انواع مدل ها :

1- مدل های ذهنی

2- دیاگرام بلوک (سمبولیک).

3- مدل های ریاضی : (معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم)

زمان گسسته

" " پیوسته.

معادله حالت.

* فرآیند مدلسازی و شبیه سازی :

1- تحلیل فیزیکی و به دست آوردن روابط حاکم بر سیستم

2- انتخاب متغیرهای حالت و ورودی ها و خروجی ها.

3- بازنویسی مجدد معادلات

4- پیاده سازی در محیط شبیه سازی (به دست آوردن بلوک ها)

5- انتخاب روش انتگرال گیری

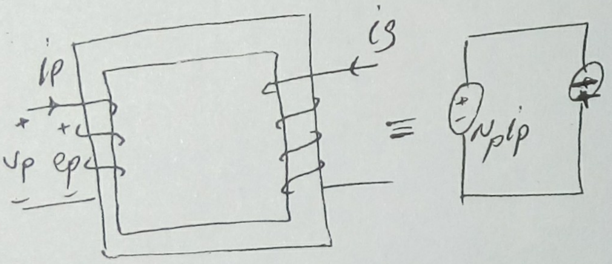
6- اجرای شبیه سازی

*فصل اول :

- ترانس تکفاز ← { ۱. حالت ایده‌آل ، ۲. ـ ـ واقعی }

- ـ ـ سه‌فاز ← { حالت ایده‌آل ، ـ واقعی } ، { Y−Y ، Y−Δ ، Δ−Y ، Δ−Δ }

- ترانس تکفاز :



فرض هسته خطی و $\mu \to \infty$ ← عرضش ندارم و تمام شار اولیه به ثانویه می‌رود.

$1.\ \mu_r = \infty$

$2.\ R_p = R_s = 0$

3. تلفات هسته نداریم

$$\left\{\begin{array}{l} v_p = e_p = N_p \dfrac{d\varphi_p}{dt} \\ v_s = e_s = N_s \dfrac{d\varphi_s}{dt} \\ \varphi_p = \varphi_s \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{v_p}{v_s} = \frac{e_p}{e_s} = \frac{N_p}{N_s}$$

$$N_p i_p + N_s i_s = 0 \Rightarrow \frac{i_p}{i_s} = -\frac{N_s}{N_p}$$

- یک گام می‌ریم جلوتر:

$1.\ \mu_r \neq \infty$

$2.\ R_s, R_s \neq 0$

3. هسته خطی

4.

اگر هسته حلقوی هیسترزیس داشته باشد تلفات خواهد داشت.

اگر $\mu_r \neq \infty$ ← شار نشتی خواهیم داشت.

$$\varphi_1 = \varphi_{l_1} + \varphi_m$$

$$\varphi_2 = \varphi_{l_2} + \varphi_m$$

$$\lambda_1 = N_1 \varphi_1 = N_1 \varphi_{l_1} + N_1 \varphi_m$$

$$\lambda_2 = N_2 \varphi_2 = N_2 \varphi_{l_2} + N_2 \varphi_m$$

رلوکتانس مسیر عبور شار نشتی: $\mathcal{R} = \dfrac{l}{\mu_0 A}$

mmf عبور دهنده شار نشتی: $N_1 i_1$

(در سیم پیچی اول)

$$\varphi_1 = \frac{N_1 i_1}{R_1}$$

$$\lambda_1 = N_1 \left[(N_1 i_1) P_{l_1} + (N_1 i_1 + N_2 i_2) P_m \right]$$

$$\lambda_1 = \underbrace{(N_1^2 P_{l_1} + N_1^2 P_m)}_{L_{11}} i_1 + \underbrace{(N_1 N_2 P_m)}_{L_{12}} i_2$$

$$\lambda_2 = \underbrace{(N_1 N_2 P_m)}_{L_{21}} i_1 + \underbrace{(N_2^2 P_{l_2} + N_2^2 P_m)}_{L_{22}} i_2$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2 \\ \lambda_2 = L_{21} i_1 + L_{22} i_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L_{11} &= L_{l_1} + L_{m_1} \\ L_{22} &= L_{l_2} + L_{m_2} \end{aligned} \longrightarrow \frac{L_{m_1}}{L_{m_2}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$$

$$\lambda_{m_1} = N_1 \varphi_m = N_1 (\varphi_{m_1} + \varphi_{m_2}) = L_{m_1} i_1 + \frac{N_1}{N_2} N_2 \varphi_{m_2} = L_{m_1} i_1 + \frac{N_1}{N_2} L_{m_2} i_2$$

5 ۲/ مغناطیسی سمت اول

$$= \underbrace{L_{m_1}}_{\text{اندوکتانس متقابل}} \underbrace{\left(i_1 + \frac{N_2}{N_1} i_2 \right)}_{\text{سمت اول}}$$

جریان معادل

$$= \dots\dots = L_{m_2}(\qquad)$$

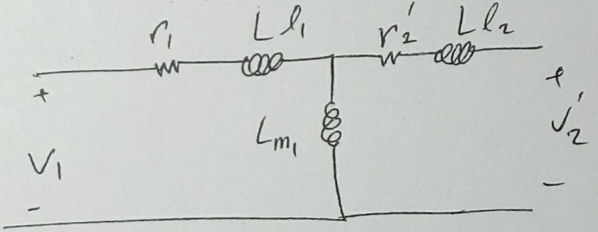
تحلیل روابط معادلات دیفرانسیل حال روابط الکتریکی را بنویسیم:

$$\begin{cases} V_1 = r_1 i_1 + e_1 \\ V_2 = r_2 i_2 + e_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} e_1 = \dfrac{d\lambda_1}{dt} = L_{l_1} \cdot \dfrac{di_1}{dt} + L_{m_1}\left(\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{N_2}{N_1}\dfrac{di_2}{dt}\right) \\ e_2 = L_{l_2}\dfrac{di_2}{dt} + L_{m_2}\left(\dfrac{di_2}{dt} + \dfrac{N_1}{N_2}\dfrac{di_1}{dt}\right) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\frac{N_2}{N_1} i_2 = i_2'} \begin{cases} V_1 = r_1 i_1 + L_{l_1}\dfrac{di_1}{dt} + L_{m_1}\dfrac{d}{dt}(i_1 + i_2') \quad \text{I} \\ V_2 = r_2 i_2 + L_{l_2}\dfrac{di_2}{dt} + L_{m_2}\dfrac{d}{dt}(i_1' + i_2) \xrightarrow{N_1/N_2} \end{cases}$$

$$\longrightarrow V_2' = r_2' \cdot i_2' + L_{l_2}'\frac{di_2'}{dt} + L_{m_1}\frac{d}{dt}(i_1 + i_2') \quad \text{II}$$

$\text{I}, \text{II} \longrightarrow$



$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases}$$

ولتاژ ورودی ⟵ جریان خروجی

X: متغیر حالت ; U: ورودی ; Y: خروجی

$$U = [V_1, V_2] \quad ; Y = [i_1, i_2] \quad ; x = [\lambda_1, \lambda_2] \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} X = [\psi_1, \psi_2']$$

$$\begin{cases} V_1 = r_1 i_1 + \dfrac{d\lambda_1}{dt} & ; \ \psi_1 = \omega_1 \lambda_1 \\ V_2 = r_2 i_2 + \dfrac{d\lambda_2}{dt} & ; \ \psi_2 = \omega_1 \lambda_2 \end{cases}$$

فرکانس

$$6/\begin{cases} V_1 = r_1 i_1 + \dfrac{1}{\omega_b}\dfrac{d\psi_1}{dt} \\ V_2' = r_2' \cdot i_2' + \dfrac{1}{\omega_b}\dfrac{d\psi_2'}{dt} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{\psi}_1 = \omega_b(V_1 - r_1 i_1) \\ \dot{\psi}_2' = \omega_b(V_2' - r_2' i_2') \end{cases} \equiv \dot{X} = AX + BU$$

ـ حل $: Y = CX + DU$

$$\psi_1 = \omega_b \cdot L_{l_1} \cdot i_1 + \psi_m = X_{l_1} \cdot i_1 + \psi_m$$

$$\psi'_2 = \omega_b \cdot L'_{l_2} \cdot i'_2 + \psi_m = X'_{l_2} \cdot i'_2 + \psi_m$$

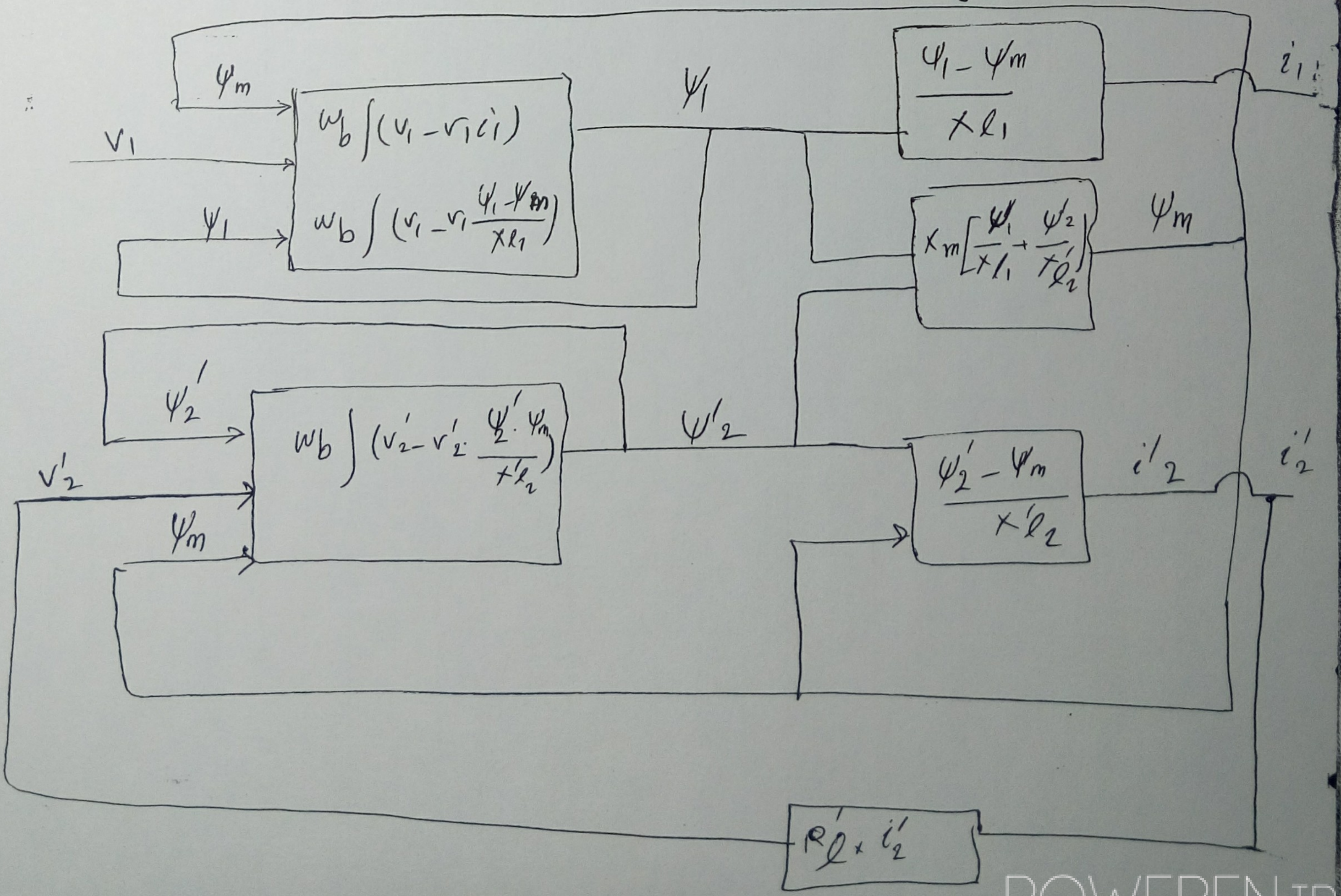
$$\psi_m = \omega_b \, l_{m_1} (i_1 + i'_2)$$

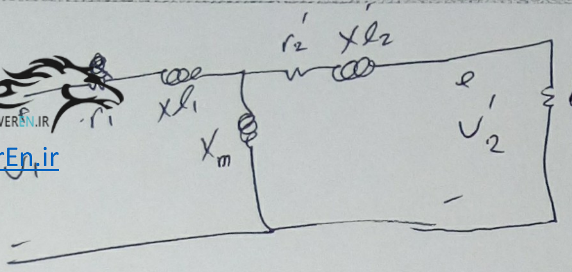
حل دو معادله دو مجهول $\longrightarrow \begin{cases} i_1 = \dfrac{\psi_1 - \psi_m}{X_{l_1}} \\ i'_2 = \dfrac{\psi'_2 - \psi_m}{X'_{l_2}} \end{cases} \equiv Y = CX + DU$

ψ_m را باید برحسب دیگر متغیرها بنویسیم:

$$\psi_m = ? = \omega_b L_{m_1} (i_1 + i'_2)$$

$$\psi_m = X_{m_1} \left[\frac{\psi_1 - \psi_m}{X_{l_1}} + \frac{\psi'_2 - \psi_m}{X'_{l_2}} \right] = X_m \left[\frac{\psi_1}{X_{l_1}} + \frac{\psi'_2}{X'_{l_2}} \right], \quad \frac{1}{X_m} = \frac{1}{X_{l_1}} + \frac{1}{X'_{l_2}} + \frac{1}{X_{m_1}}$$





مدل معادل قبل برای مدار روبرو است (آی زند):

ولی ما نیاز به مدلسازی بار نیز داریم (و قدرت هم نیست):

* 30 ، بهمن ماه

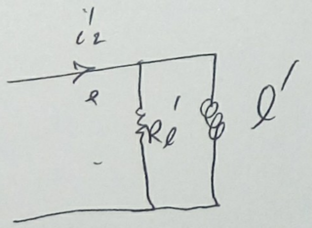
مباحث: ۱- مدلسازی ترانس همراه با انواع ترانس

۲- مدلسازی ترانس واقعی (اشباع)

۳- مدلسازی ترانس $Y\text{-}Y$; $Y\text{-}\Delta$; $\Delta\text{-}Y$

۴- مدلسازی جریان هجومی ورودی کلیدزنی ترانس

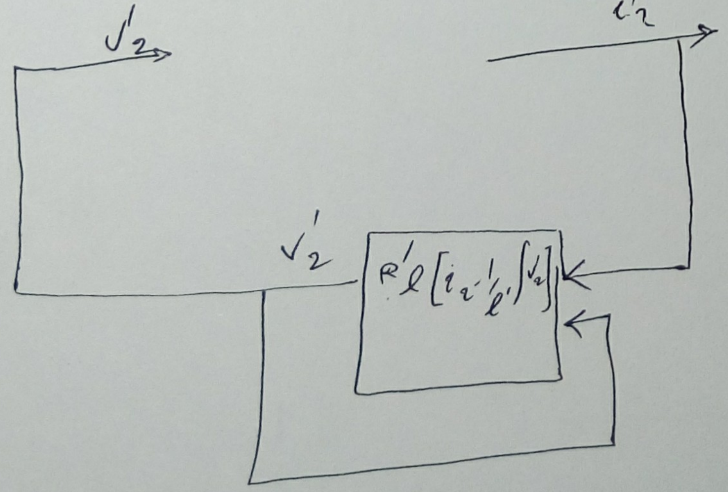
مثلا بار:



$$l' \frac{di_2'}{dt} = V_2'$$

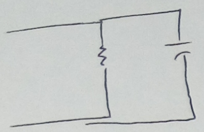
$$V_2' = R_l' \, i_{R_l} = R_l' \left[i_2' - \frac{1}{l'} \int V_2' \, dt \right]$$

به جای مقاومت قرمز رنگ معادل انتگرالی داریم:



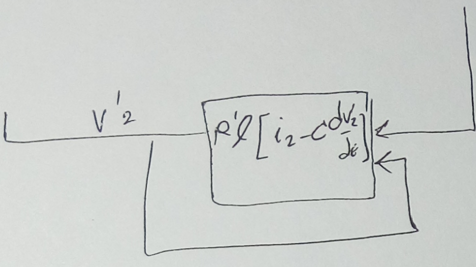
شکل ۱۵:

$$i'_C = C\frac{dv'_2}{dt}$$



$$v'_2 = R'l \cdot i_{Rl} = R'l\left[i'_2 - C\frac{dv'_2}{dt}\right]$$

معمولاً در شبیه‌سازی از مشتق‌گیر استفاده نمی‌شود چون

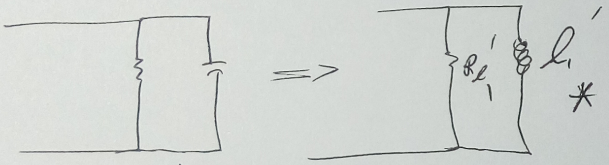


$$\frac{d}{dt} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \Delta v \times 10^5$$

Δt مثلاً $= 10^{-5}$

پس 10^5 برابر Δv ضرب می‌شود که در صورت وجود نویز این خطا خیلی زیاد می‌شود

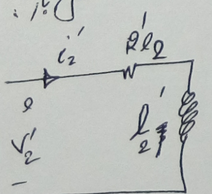
به همین دلیل در شبیه‌سازی‌ها از انتگرال‌گیر استفاده می‌شود.



$$Z_{RC} = \frac{R \times \frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = R_l + j\omega L \longrightarrow \frac{R}{1 + j\omega RC} = \frac{R}{\left[1-(\omega RC)^2\right]} - \frac{j\omega R^2 C}{\left[\quad\right]} \quad **$$

باید مقدار * را با فرم ** تشبیه کرده، از برابر قرار دادن l' را بیابیم. (؟)

شکل بار:



$$v'_2 = Rl \cdot i'_2 + \left[V_l = l' \times \frac{di'_2}{dt}\right]$$

$$R'l_2 + j\omega l'_2 = \frac{R'l_1 \times j\omega l'_1}{R'l_1 + j\omega l'_1} = \frac{R'l_1 \times j\omega l'_1\left[R'l_1 - j\omega l'_1\right]}{\left[R'l_1^2 - (\omega l'_1)^2\right]} = \cdots$$

* مطالعه‌ی اتصال کوتاه: V_2' را صفر می‌کنیم.

* ~ مدار باز: راه اول: بار را بی‌نهایت در نظر می‌گیریم. فرکانس بی‌نهایت.

$$i_2' = 0 \longrightarrow v_2' = \underbrace{r_2' i_2'}_{0} + \frac{1}{w_b}\frac{d\psi_2'}{dt} = \frac{1}{w_b} \times \frac{d\psi_m}{dt}$$

ψ شامل نشتی و مغناطیس کنندگی بود
در اینجا چون مدار نشتی نداریم

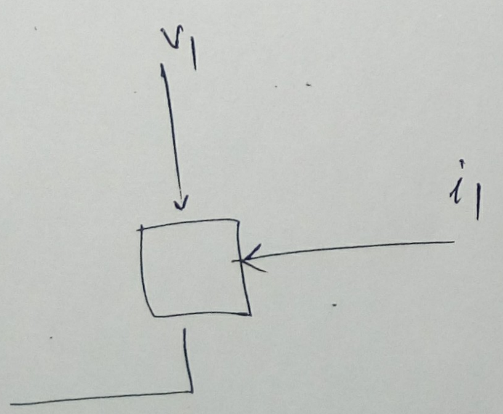
$$\psi_m = x_m(i_1 + i_2') = x_m i_1 \longrightarrow \psi_m = \frac{x_{m1}}{x_{m1} + x_{l1}} \cdot \psi_1$$

$$\psi_1 = (x_{l1} i_1 + x_m i_1)$$

$$v_2' = \frac{1}{w_b} \cdot \frac{\psi_{m1}}{x_{m1} + x_{l1}} \cdot \frac{d\psi_1}{dt} \longrightarrow$$ مشتق می‌گیریم

$$v_1 = r_1 i_1 + \frac{1}{w_b}\frac{d\psi_1}{dt} \longrightarrow \frac{d\psi_1}{dt} = w_b\left[v_1 - r_1 i_1\right]$$

$$v_2' = \frac{1}{w_b}\frac{x_{m1}}{x_{m1} + x_{l1}} \times w_b\left[v_1 - r_1 i_1\right]$$



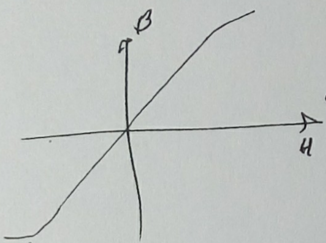
- ما گفتیم که هم می‌توان یک ماشین موجود را مدل کنیم و هم قبل از ساخت، ماشین را مدل کنیم.

- مدلسازی ماشین موجود:

پارامترهای مورد نیاز : $X_m ; X_{l_1} ; X_{l_2} ; r_1 ; r_2$

- قبل از ساخت: راه دقیق اینه که بار اول توسط F.E.M شبیه‌سازی می‌کنیم و پارامترهای مورد نیاز را پیدا می‌کنیم و بعدش مثلاً از مسیر لینک استفاده می‌کنیم.

* تا به حال منحنی B_H صعودی



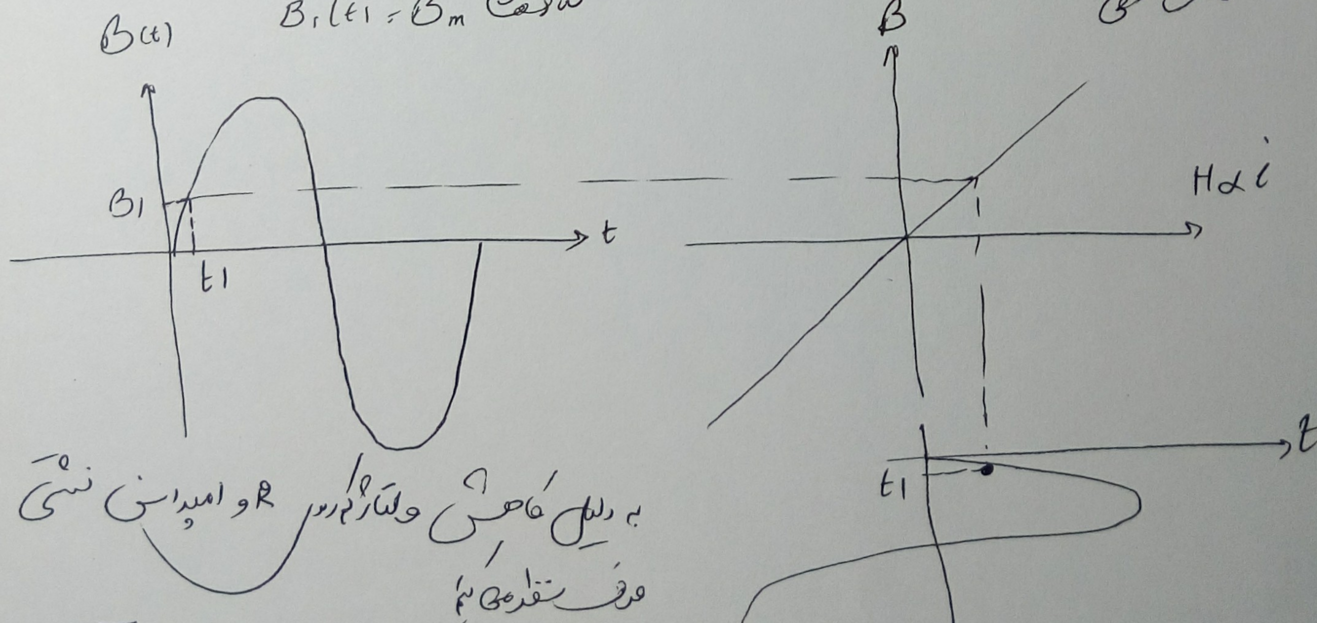
حال می‌خواهیم هسته غیرخطی باشد و ناحیه اشباع

- بار در حالت جریان ترانس چه تأثیری است.

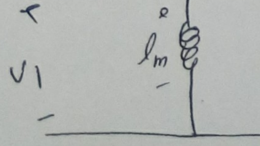
$$\left.\begin{array}{l} v_1 = e_1 = N\dfrac{d\varphi_1}{dt} \\ v_1 = V_m \sin\omega t \end{array}\right] \longrightarrow \varphi_1(t) = \varphi_m \cos\omega t$$

$$B_1(t) = B_m \cos\omega t$$

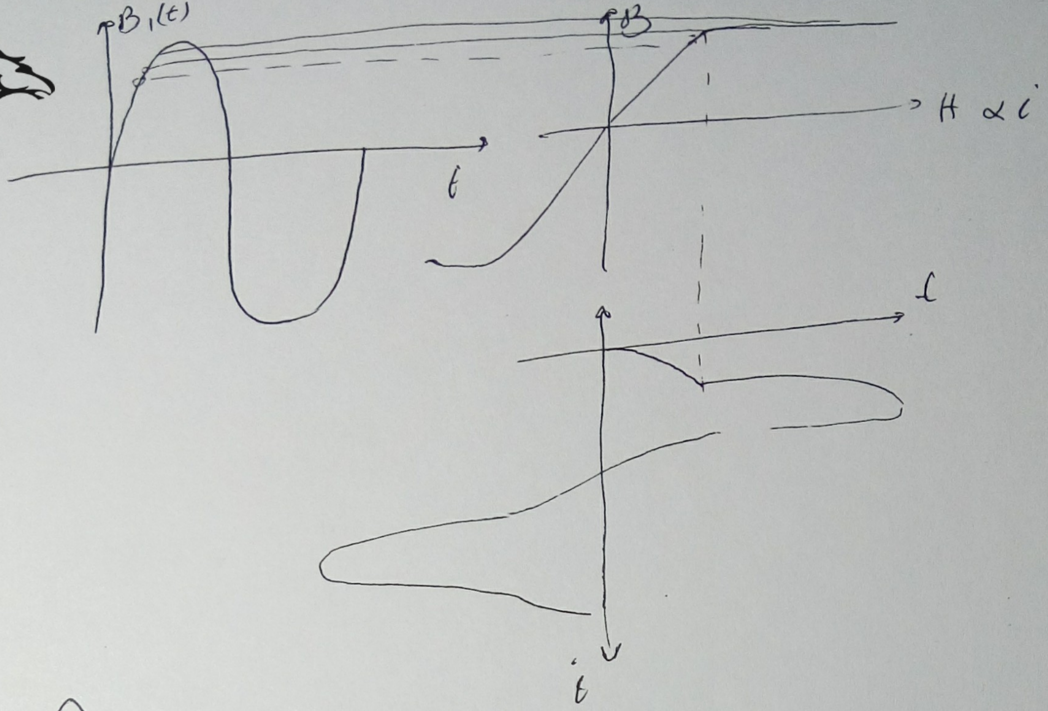
حالت خطی



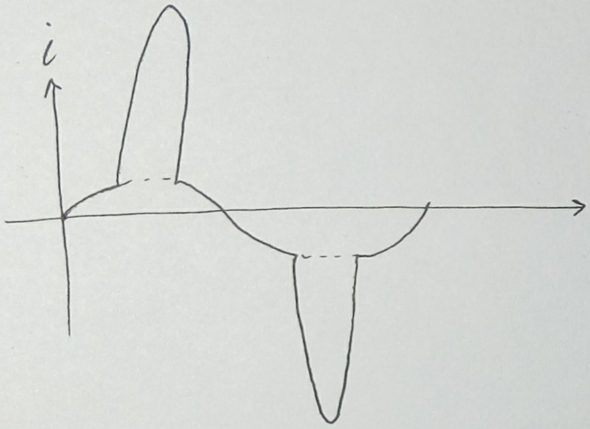
به دلیل کاهش ولتاژ در R و امپدانس نشتی سری از آن صرف نظر می‌کنیم



هسته غیرخطی:

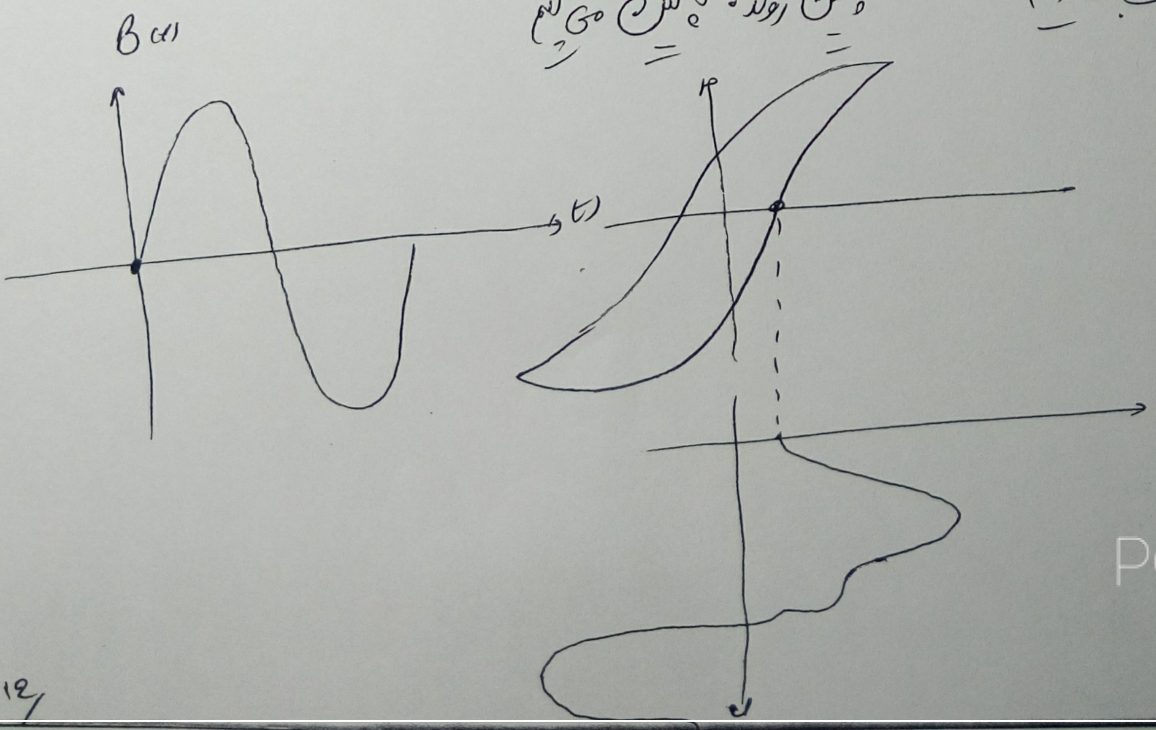


اثر پدیده اشباع:

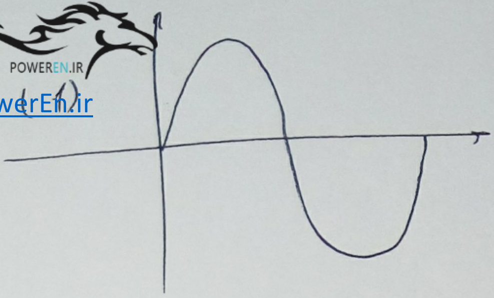


* اگر هسته ما لوپ هیسترزیس داشته باشد چطور می شود!

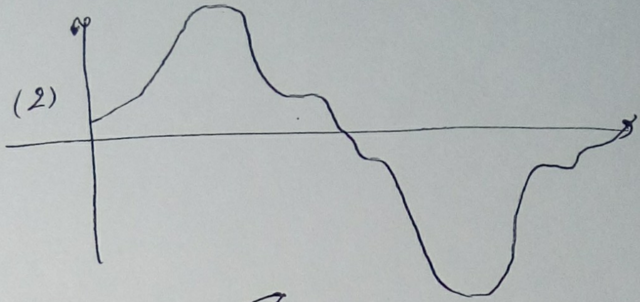
یک طرف حلقه بالا رونده هستش و طرف دیگر پایین رونده. وقتی روی B را دارم می‌رم به پیک از قسمت بالا رونده حلقه و وقتی از پیک برمی گردم. روی قسمت پایین رونده، پایین می‌آیم

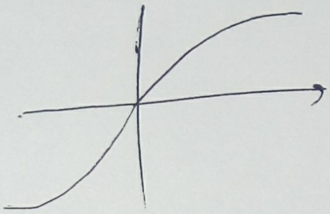


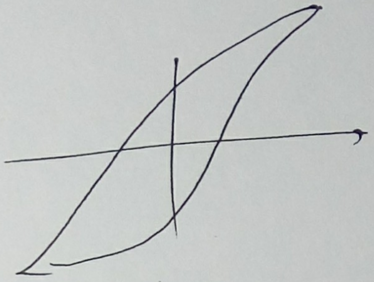
(1)



(2)





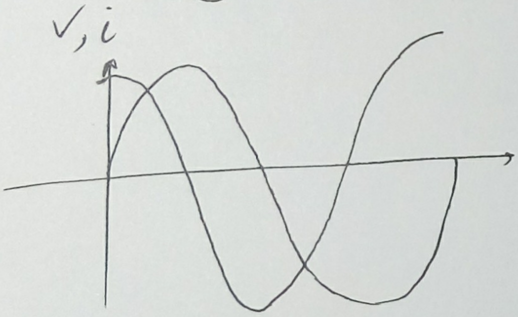


N دور

قبلاً گفتیم به دلیل وجود تلفات ، حلقه هیسترزیس می باشد که $\int HdB$ دارای عددی شود و تلفات دارد

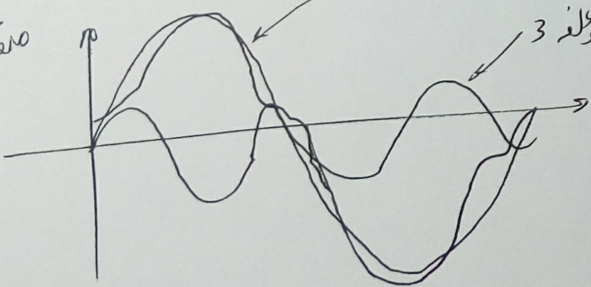
حال از دید مداری می خواهیم تلفات را حساب کنیم

منحنی (1)



$$P = \frac{1}{T}\int v_1(t)\, i_1(t)\, dt = 0$$

منحنی (2)

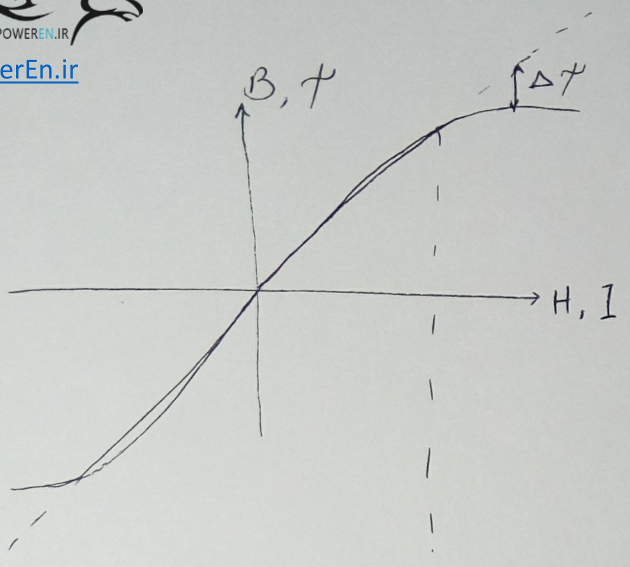


$$P = \frac{1}{T}\Big[\underbrace{\int V_m \sin\omega t\, i_1 \cos(\omega t - \varphi_1)}_{\text{برابر با مساحت حلقه هیسترزیس}} + \int V_m \sin\omega t\, I_3 \sin(\ldots) \ldots\Big]$$

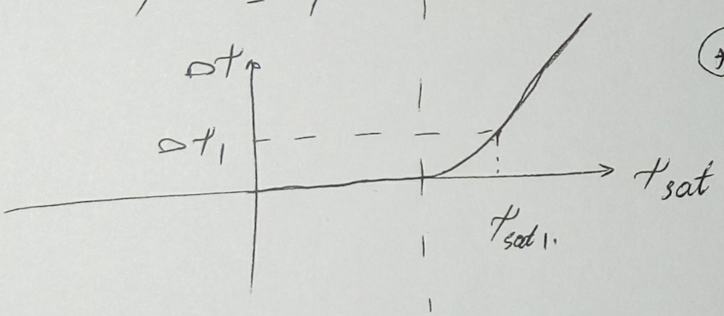
* ۱۵ اسفند ماه

مباحث: مدلسازی ترانس همراه با B_H غیرخطی.

ـ ـ ـ ادامه



$$\Delta\psi = \psi^{unsat} - \psi^{sat}$$



منفی (*)

$$\psi_m^{unsat} = \omega_b L_{m_1}^{unsat} (i_1 + i_2')$$

i_1 واقعی (با در نظر گرفتن مدل غیرخطی)

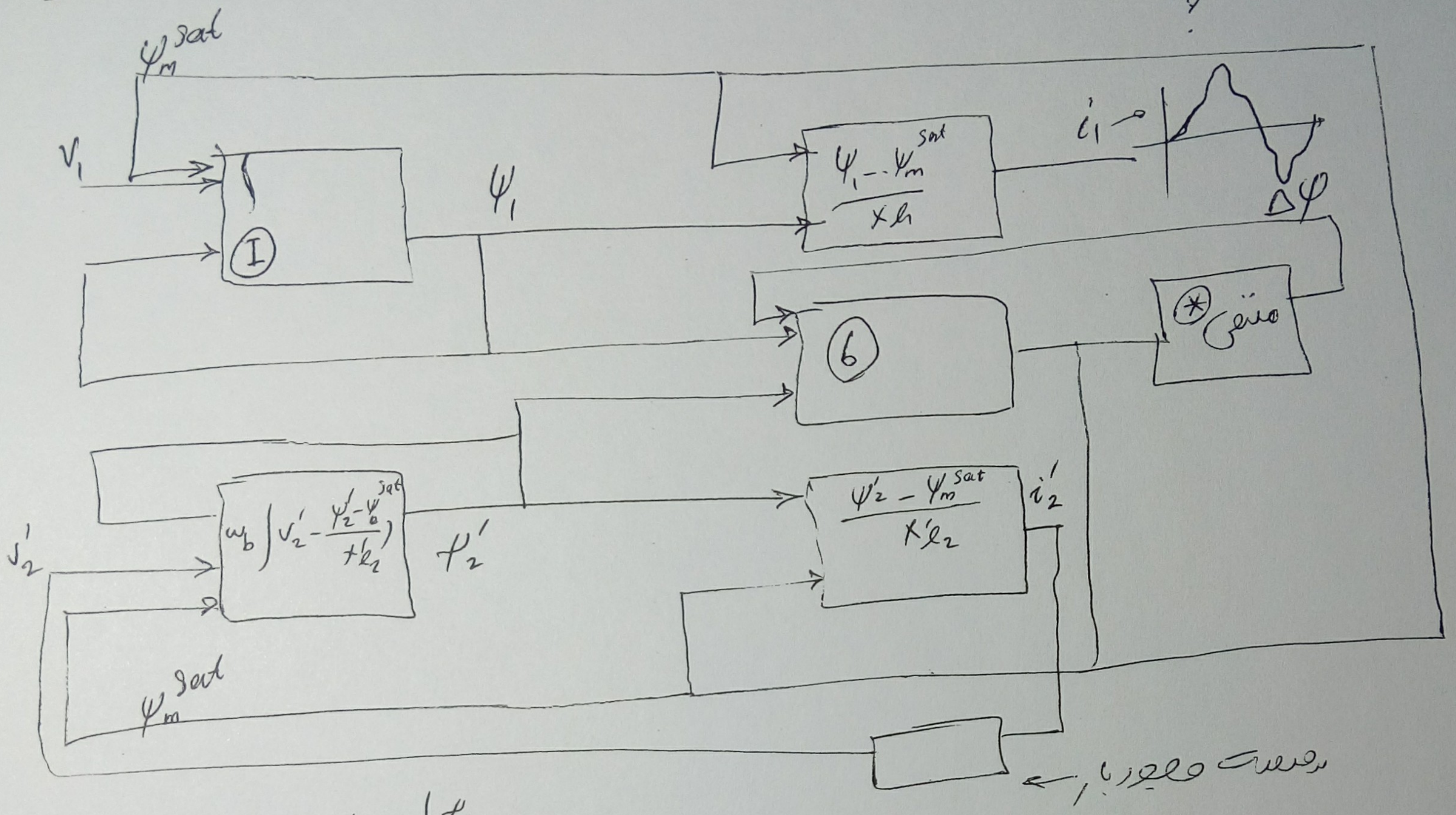
$$i_1 = \frac{\psi_1 - \psi_m^{sat}}{X_{l_1}} \quad , \quad i_2' = \frac{\psi_2' - \psi_m^{sat}}{X'_{l_2}}$$

$$\frac{\psi_m^{unsat}}{X_{m_1}^{unsat}} = \left[\frac{\psi_1}{X_{l_1}} + \frac{\psi_2'}{X'_{l_2}} - \frac{\psi_m^{sat}}{X_{l_1}} - \frac{\psi_m^{sat}}{X'_{l_2}} \right]$$

$$\psi_m^{unsat} = \psi_m^{sat} + \Delta\psi_m$$

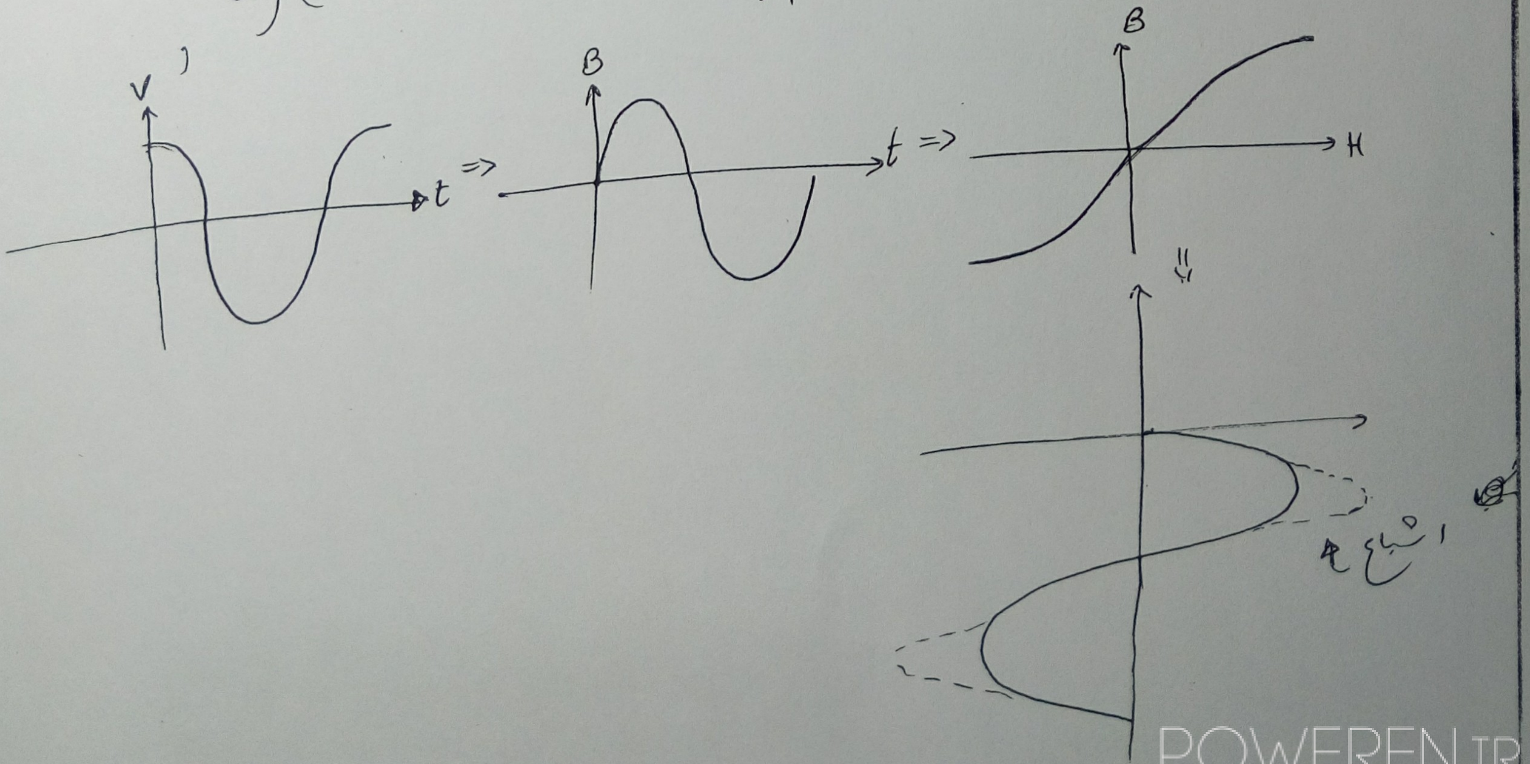
$$\psi_m^{sat} \times \left(\frac{1}{\psi_m^{unsat}} + \frac{1}{X_{l_1}} + \frac{1}{X'_{l_2}} \right) = \left[\frac{\psi_1}{X_{l_1}} + \frac{\psi_2'}{X'_{l_2}} + \frac{\Delta\psi}{X_m^{unsat}} \right]$$

$$X_m \left[\frac{\psi_1}{X_{l_1}} + \frac{\psi_2'}{X'_{l_2}} - \frac{\Delta\psi}{X_m^{unsat}} \right] \; ; \; \frac{1}{X_m} = \left[\frac{1}{X_{m_1}^{unsat}} + \frac{1}{X_{l_1}} + \frac{1}{X'_{l_2}} \right]$$

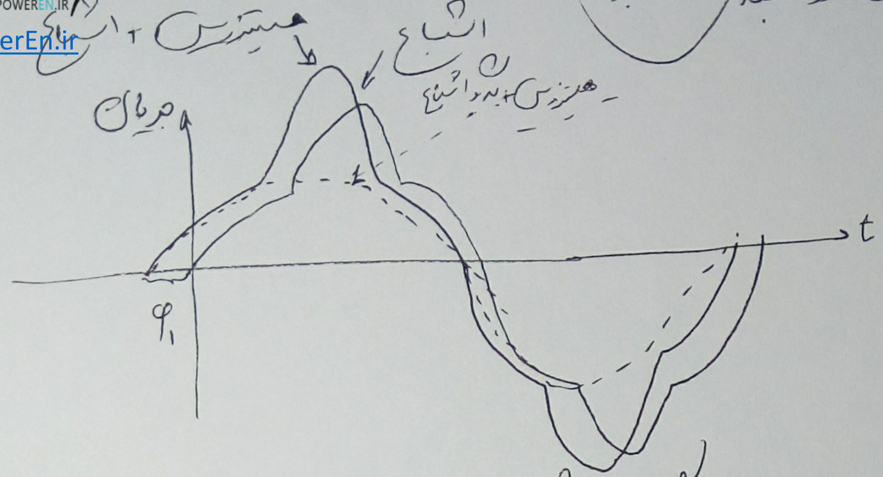


(I) : $u_1 = r_1 i_1 + \frac{1}{L_m}\frac{d\psi_1}{dt}$

$\psi = w_b \int (v_1 - r_1 i_1)\, dt \; ; \; i_1 = \frac{\psi_1 - \psi_m^{sat}}{X_{l_1}}$



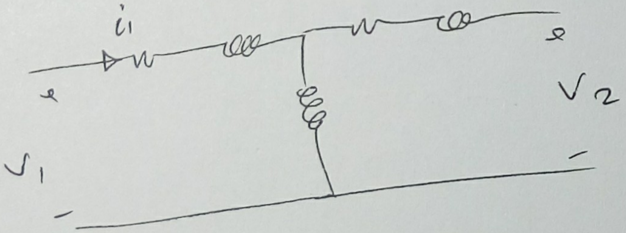
وجود حلقه هیسترزیس، منحنی ۵۳ رو متقارن خواهد بود.

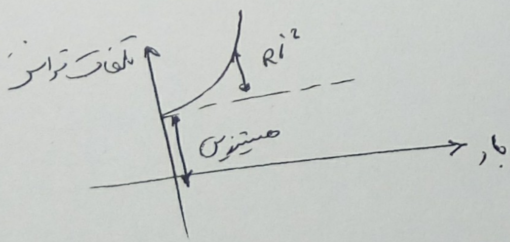


- اگر ماشین بی بار باشد P تلفات هیسترزیس است و اگر باردار باشد P تلفات مس شده ولی مقدار i_1 تغییر می کند.

تلفات $P = V_1 i_1 \cos\varphi$

- اگر ترانس به اشباع نره ولی لوپ هیسترزیس داشته باشد، جریان سینوسی است و فقط شیفت داره
- اگر اشباع رخ بده V سینوسی است ولی i_1 هارمونیک خواهد داشت و V_2 نیز دارای هارمونیک خواهد شد.

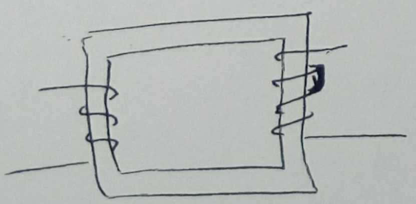


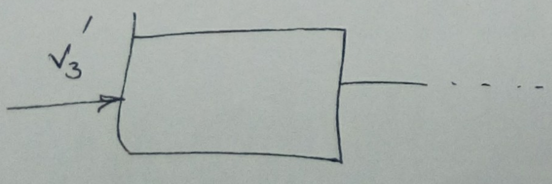


- اگر یک سیم پیچی ثانویه اتصال کوتاه رخ داده باشد تبدیل به سیم پیچی ثالثیه تبدیل می شود.

$e_3' = 0$

۱:

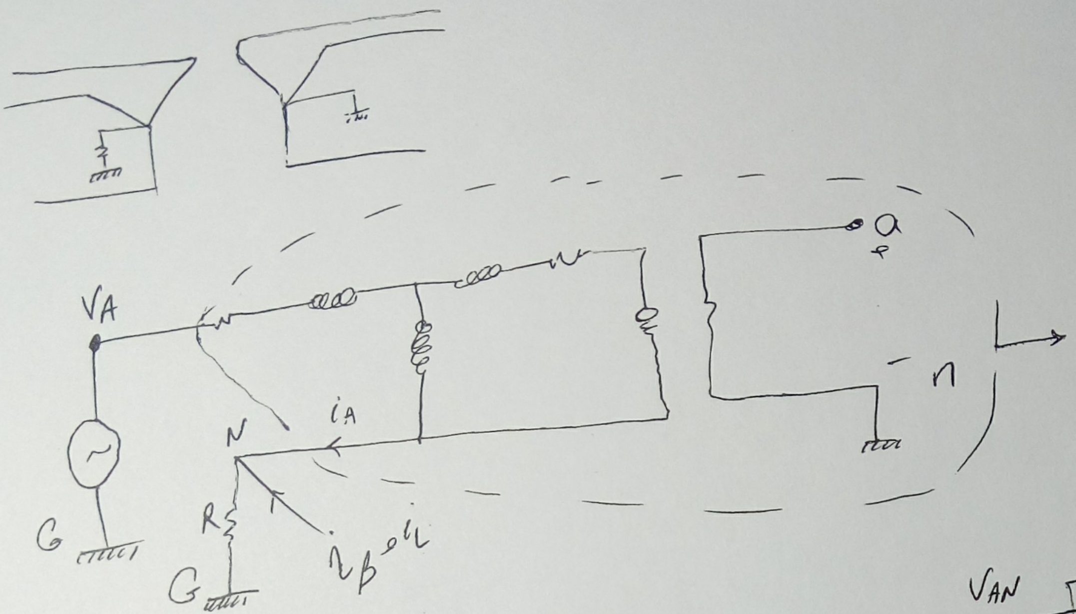




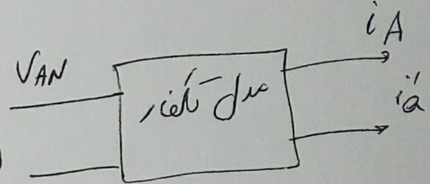
* جلسه ۱۲ اسفندماه :

* ترانس سه فاز

- Y-Y :



این قسمت را قبلاً مدل کردیم



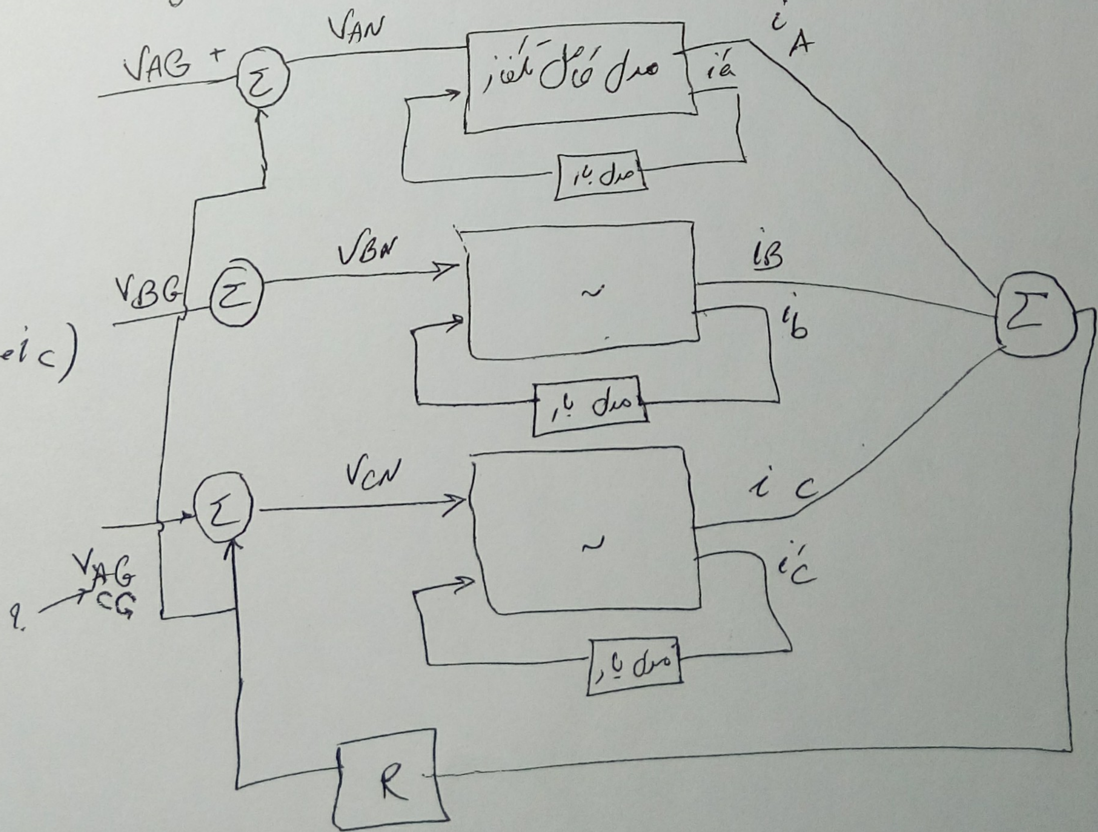
ورودی این V_{AN} هست در صورتی که ما V_{AG} را داریم پس :

$$V_{AN} = V_{AG} - V_{NG}$$

$$V_{BN} = V_{BG} - V_{NG}$$

$$V_{CN} = V_{CG} - V_{NG}$$

$$V_{NG} = R(i_A + i_B + i_C)$$



POWEREN.IR
PowerEn.ir

* جریان هجومی در حین اتصال ترانس به برق:

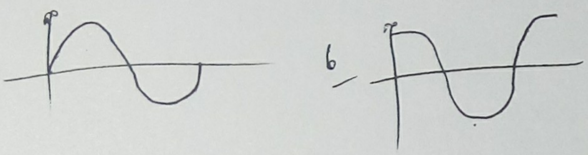
$$V_s = e(t) = N\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{N}\int v_s(t)\,dt + \varphi_0 = 0$$

ولتاژ سینوسی → $\varphi(t) = \frac{1}{N\omega}\int_0^{\pi} V_m \sin\omega t \; d\omega t = \frac{1}{N\omega}\times V_m \cos\Big|_0^{\pi}$

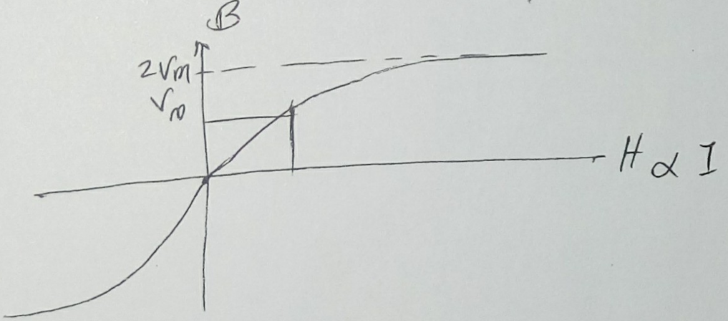
$$\Longrightarrow \varphi(t=\pi) = \frac{2V_m}{N\omega}$$

در حین اتصال ترانس دو نوع حالت می‌تواند باشد



ما طراحی را بر اساس V_m انجام داده‌ایم یعنی $\frac{V_m}{N\omega}$ چون در حالت گذرا به بالای V_m رسیده شده

پس جریان بسیار بالای کشیده می‌شود

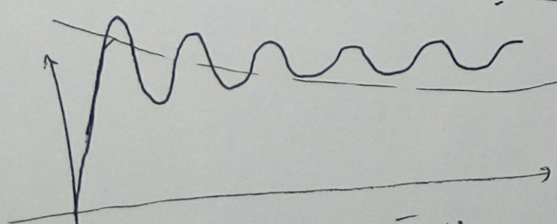


- اگر ولتاژ در لحظه برقرار گردد ترانس کمترین با شد حالت ...

ولتاژ سینوسی ⟶ $\varphi = 0$ ⟹

- هرچه مقاومت سیم پیچ‌ها بیشتر باشد جریان هجومی اولیه زودتر پایدار می‌شود.

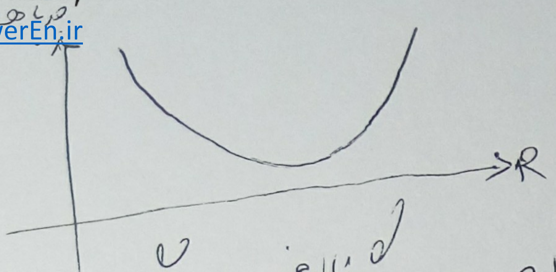
- در طیف فرکانسی جریان هجومی، ما مؤلفه زوج خواهیم داشت.
(در حالتی که در جریان‌ها پیش از این فقط مؤلفه فرد داشتیم)



- رله‌ها over current از روی طیف جریان می‌توانند جریان هجومی را از خطا تشخیص دهند.

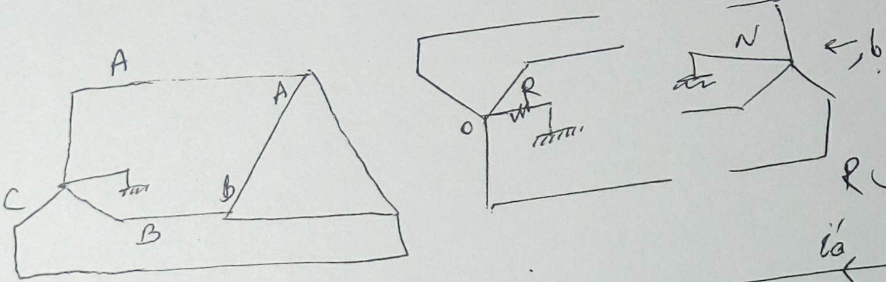
POWEREN.IR

- مقاومت R در مدل هفر مدل تأثیر زیادی روی جریان هجومی دارد :

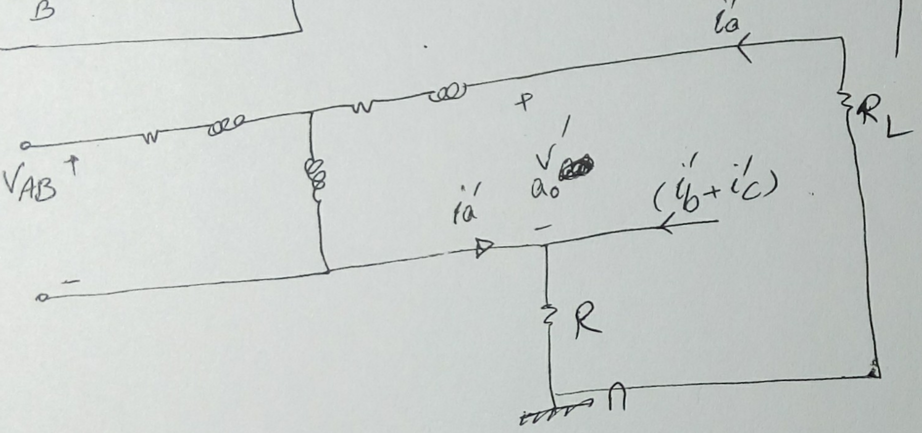


- مدل و تحلیل انجام شود تا اینجا با فرض متقارن بودن بود . اگر خطا رخ دهد دیگر از این مدل نمی‌توان استفاده کرد .

* اتصال ΔY :



وظایف R
- بهبود حالت گذرا
- محدود سازی جریان هجومی



$$V_{AB} = V_{AO} - V_{BO}$$

$$V_{BC} = V_{BO} - V_{CO}$$

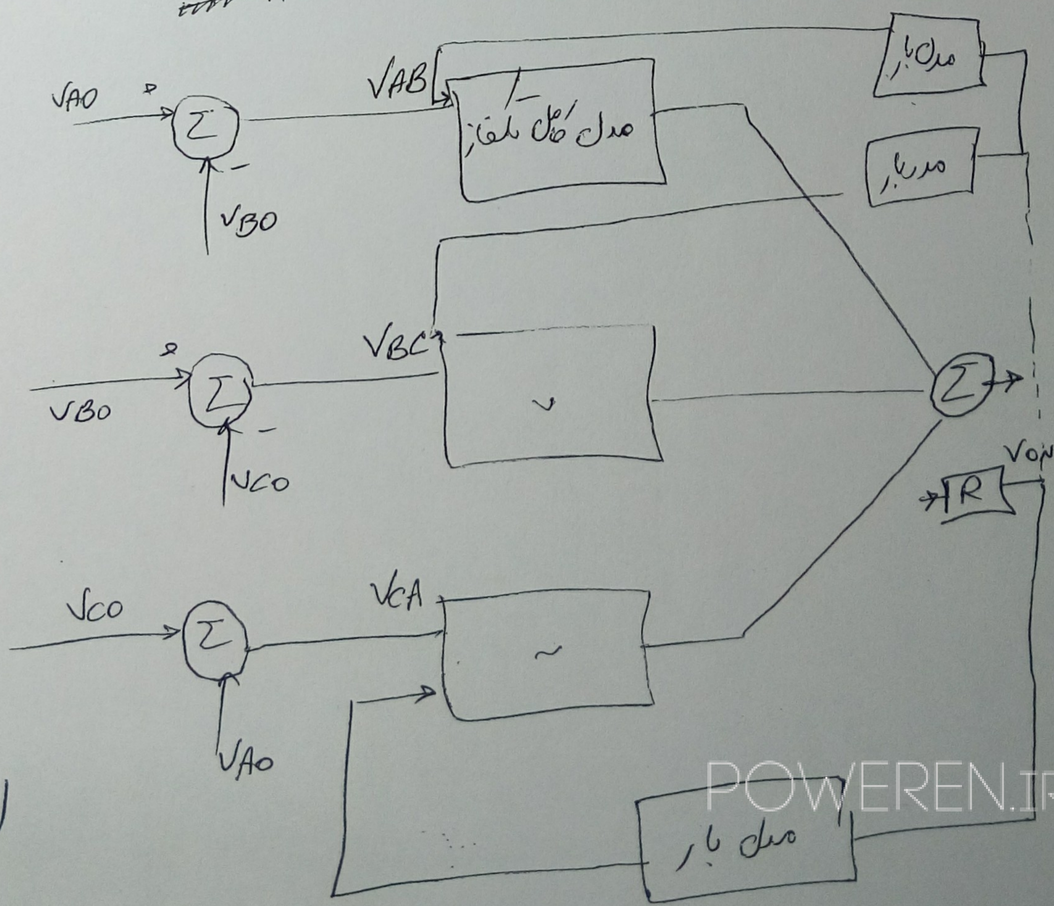
$$V_{CA} = V_{CO} - V_{AO}$$

$$v'_{ao} = v'_{an} - v_{on}$$

$$v'_{bo} = v'_{bn} - v_{ON}$$

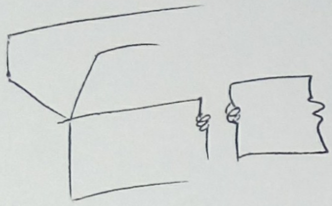
$$v'_{co} = v'_{cN} - v_{ON}$$

$$v_{ON} = R(i'_a + i'_b + i'_c)$$



* Δ_Δ : تحلیل شود.

* مقاومت R : چون توان بالاست بهتر به صورت زیر متصل شود:



* پروژه : (سه فاز)

1- ترانس T_T

2- ترانس اسکات ← مقاله ad

3- اتو ترانس سه فازه

4- ترانس V_V

الف، مدلسازی خطی - غیرخطی (بدون هیسترزیس - با هیسترزیس).

ج- مطالعه inrush current.

* مدلسازی ماشین‌های AC سه فاز:

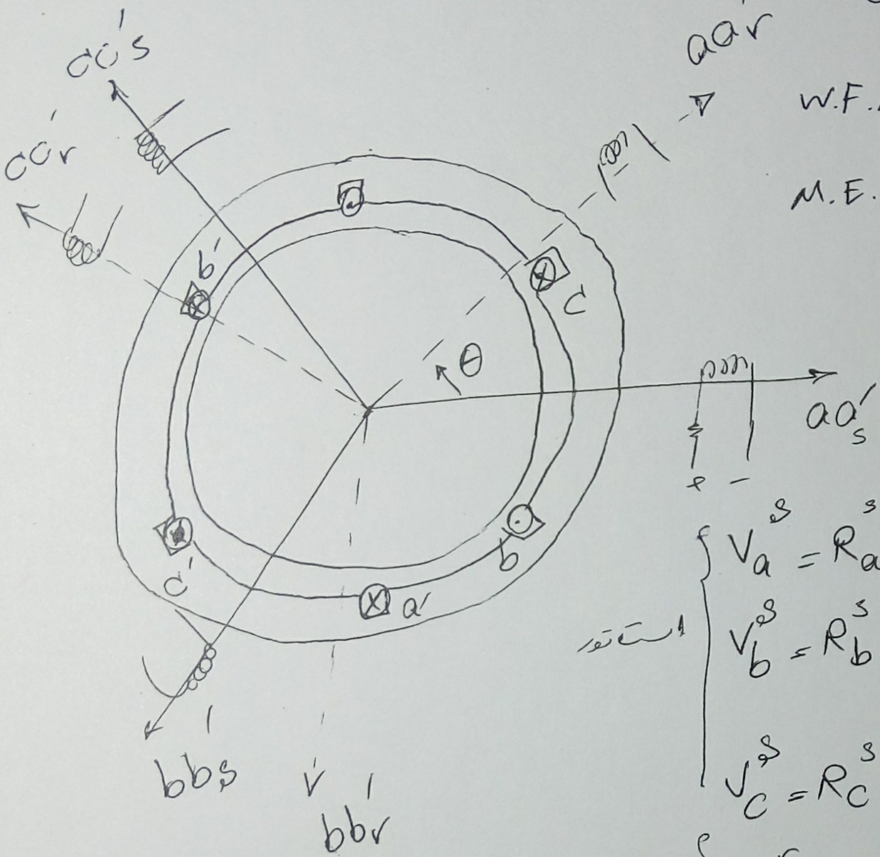
مباحث: 1- مدلسازی در قاب abc (سالم و خطادار)

2- " " dq0

3- " " W.F.M

4- " " M.E.C

- فرض: روتور دارای سیم‌پیچی متمرکز



استاتور

$$\begin{cases} V_a^s = R_a^s i_a^s + \dfrac{d\lambda_a^s}{dt} \\ V_b^s = R_b^s i_b^s + \dfrac{d\lambda_b^s}{dt} \\ V_c^s = R_c^s i_c^s + \dfrac{d\lambda_c^s}{dt} \end{cases} \longrightarrow V_{abc}^s = R_s \cdot i_{abc}^s + \frac{d\lambda_{abc}^s}{dt} \quad \text{I}$$

روتور

$$\begin{cases} V_a^r = R_a^r i_a^r + \dfrac{d\lambda_a^r}{dt} \\ V_b^r = R_b^r i_b^r + \dfrac{d\lambda_b^r}{dt} \\ V_c^r = R_c^r i_c^r + \dfrac{d\lambda_c^r}{dt} \end{cases} \longrightarrow V_{abc}^r = R_r \cdot i_{abc}^r + \frac{d\lambda_{abc}^r}{dt} \quad \text{II}$$

معادله مکانیکی: $T_e = T_L + J\dfrac{d\omega}{dt} + B.\omega$ $\quad \text{III}$

$$\text{I} , \text{II} \longrightarrow \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{abc}^s \\ \dot{\lambda}_{abc}^r \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abc}^s \\ i_{abc}^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{abc}^s \\ V_{abc}^r \end{bmatrix} \quad \text{IV}$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J}\left[T_e - T_L - B\omega \right]$$

$$\lambda_{as}^{s} = L_{asas} \cdot i_{as} + L_{asbs}\, i_{bs} + L_{ascs}\, i_{cs} + L_{asar}\, i_{ar} + L_{asbr}\, i_{br} + L_{ascr}\, i_{cr}$$

$*$ $\quad **$ $\quad ***$

$\lambda_b^s = \dots$

$\lambda_c^s = \dots$

$\lambda_a^r = \dots$

$\lambda_b^r = \dots$

$\lambda_c^r = \dots$

$$\xrightarrow{\text{از حل معادلات ۱۸ تا ۲۸}} \begin{bmatrix} \lambda_{abc}^{s} \\ \lambda_{acb}^{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_{ss}]_{3\times3} & [L_{sr}]_{3\times3} \\ [L_{rs}]_{3\times3} & [L_{rr}]_{3\times3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abc}^{s} \\ i_{abc}^{r} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} i_{abc}^{s} \\ i_{abc}^{r} \end{bmatrix} = [L]^{-1} \times \begin{bmatrix} \lambda_{abc}^{s} \\ \lambda_{abc}^{r} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{IV جایگذاری در}} \dot{X} = AX + BU$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J}\left[T_e - T_L - B\omega \right] \longrightarrow T_e \overset{?}{=} f(\lambda, i)$$

T_L: ورودی کنترل

L_{asac} : نفوذ مغناطیسی *

فرض: از هسته را در محاسبه R صرف نظر می‌کنیم.

$$*L_{asas} = ? = \frac{N^2}{R} = L_{bsbs} = L_{cscs}$$

$$R = \frac{2g}{\mu_0 A}$$

Poweren.ir

$$\lambda_{bs} = L_{bsbs} \cdot i_{bs}$$

$$*L_{asbs} = \frac{(b_s \text{ ناشی از جریان } i_{as})\, N_a}{i_{bs}} = \frac{N_a (b_s \text{ ناشی از } \dots \times \cos 120^\circ)}{\cancel{i_{bs}}} = -\frac{1}{2} \times N_a \times L_{bs}$$

$$L_{asas} = L_{asl} + \frac{N^2}{R}$$

leakage   مغناطیس کننده

جلسه ۱۴، اسفندماه:

$$L_{asas} = \frac{\text{شار دور کل عبوری از } as \text{ ناشی از خود}}{i_{as}} = \frac{N_a(\text{شار نشتی} + \text{شار متقابل اصلی})}{i_a} = L_{las} + L_{mas}$$

L_{ls}: $\rightarrow$ تقریبی: کتاب‌های طراحی ماشین ; $\rightarrow$ FEM $\Big\} \rightarrow l_{ls} = ---$

$$L_{ms} = \frac{N_{as}^2}{\mathcal{R}}$$

اگر ماشین متقارن باشد: $L_{asas} = L_{bsbs} = L_{cscs}$

$\lambda_{asas} \leftarrow$ اگر ماشین متقارن باشد

$$L_{asbs} = \frac{N_a \times (\text{شار کل عبوری از } as \text{ ناشی از } i_{bs})}{i_{bs}} = \frac{N_a \times (b \text{ شار کل} \times \cos 120°)}{i_{bs}} = L_{mas}\cos 120 = -\frac{1}{2}L_{mas}$$

$i_{bs} = i_{as}$

فاز تاثیر ندارد

$L_{ascs} = ---$

$$L_{ss} = \begin{bmatrix} L_{las} + L_{ms} & & \\ & L_{ls} + L_{bs} & \\ & & L_{ls} \end{bmatrix} \leftarrow ?$$

$[L_{rs}] = ?$

$$L_{asar} = \frac{N_{as}(\text{شار کل عبوری از } ar \text{ ناشی از } i_{as})}{i_{ar}}$$

if $\theta_r = 0 \longrightarrow L_{asar} = \frac{N_{as}N_{ar}}{\mathcal{R}}$; $\mathcal{R} = \frac{2g}{\mu_0 \times A_g}$

$\theta_r = \pi/2 \longrightarrow 0$

$\theta_r = \pi \longrightarrow -\frac{N_{as}N_{ar}}{\mathcal{R}}$

$\theta_r = 3\pi/2 \longrightarrow 0$

$\theta_r = 2\pi$ ——

$L_{asar} = M_{sr} \cdot \cos\theta_r \quad ; \quad M_{sr} = \frac{N_{as} N_{ar}}{R}$

$L_{asbr} = M_{sr} \cdot \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3})$

$L_{ascr} = M_{sr} \cos(\theta_r - \underset{-\frac{4\pi}{3}}{\underline{\quad}})$

$\dot{X} = AX + BU$

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}^s_{abc} \\ \dot{\lambda}^r_{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^s_{abc} \\ V^r_{abc} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [R_s] & 0 \\ 0 & [R_r] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^s_{abc} \\ i^r_{abc} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda^s_{abc} \\ \lambda^r_{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_{ss}] & [L_{sr}] \\ [L_{rs}] & [L_{rr}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^s_{abc} \\ i^r_{abc} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} i^s_{abc} \\ i^r_{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda^s_{abc} \\ \lambda^r_{abc} \end{bmatrix}$$

$\dot{X} = AX + BU$

$\dot{\lambda} = A\lambda + BU$

$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J}[\underset{?}{T_e} - T_L - B.\omega] \quad ; \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega$

$$P_{in} = \begin{bmatrix} V^s_{abc} & V^r_{abc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^s_{abc} \\ i^r_{abc} \end{bmatrix}$$

$V_{as} = R_s i_{as} + \frac{d\lambda_{as}}{dt} \longrightarrow \lambda_{as} = L_{as} i_{as} + \cdots$

P_{in}

تلف $\Downarrow$

$R_s i_s^2 , R_r i_r^2$

$$\left[R_s i_s + \frac{d\lambda_{as}}{dt}\right] \times i_{as} = R_s \cancel{i_{as}}^2 + L_{as} \cancel{\frac{di_{as}}{dt}} i_{as} + \underset{L_{asbs}}{\cancel{L_{asbs}}} \cancel{\frac{di_{bs}}{dt}} i_{as} + L_{ascs} \cancel{\frac{di_{cs}}{dt}} i_{as}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} L_{asar} \cancel{\frac{di_{ar}}{dt}} i_{as} \\ L_{asbr} \cancel{\frac{di_{br}}{dt}} i_{as} \\ \vdots \end{array} \right. \quad L_{ascr} \cancel{\frac{di_{cr}}{dt}} i_{cs} \quad \frac{dL_{asar}}{dt} \cdot i_{ar} \cdot i_{as} \quad \text{(I)} \quad \cdots$$

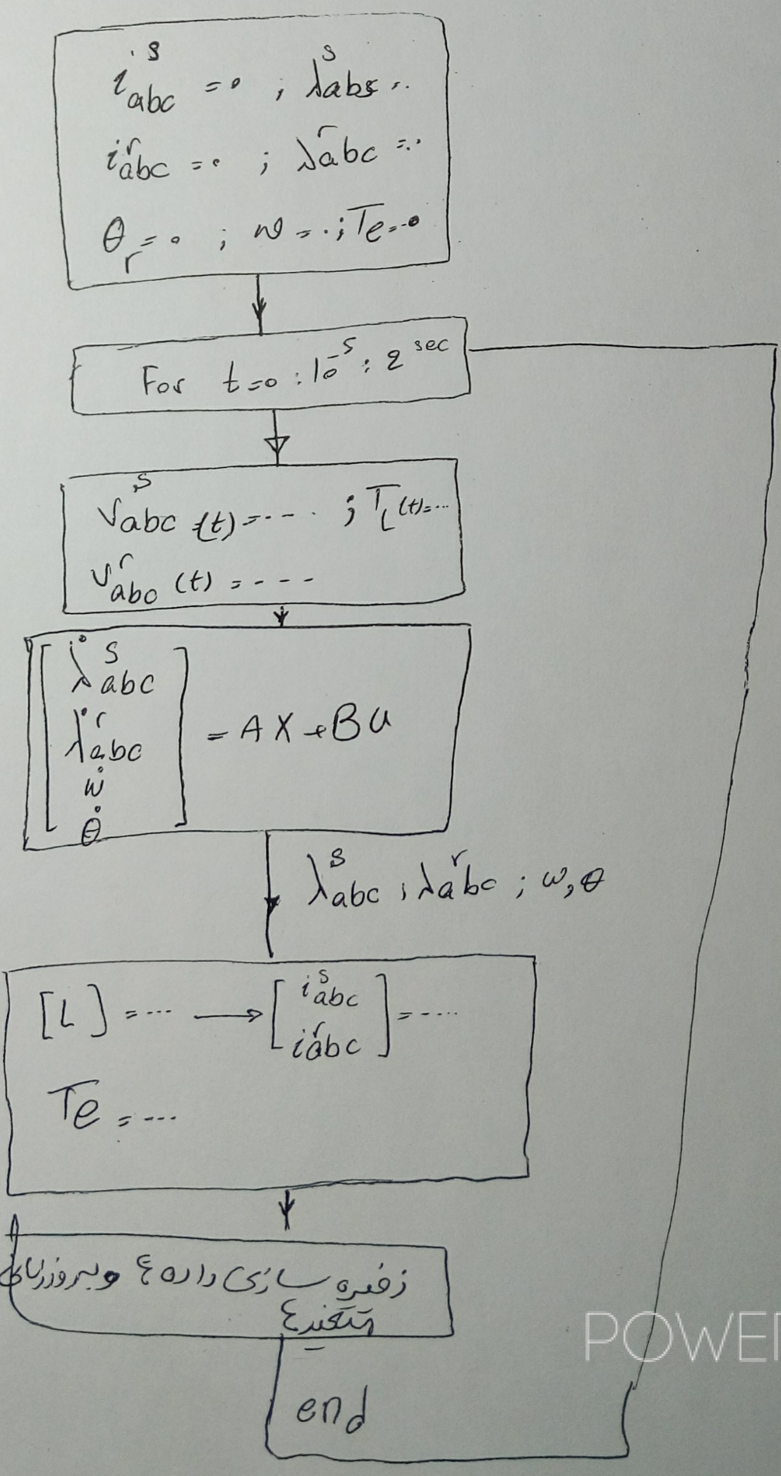
$\frac{dL_{as.br}}{dt} \cdot i_{br} \cdot i_{as}$ (II)

$\frac{dL_{as.cr}}{dt} \cdot i_{cr} \, i_{as}$ (III)

از کل عبارات معرفی شده فقط عبارات I تا II در توان P تأثیر دارند. از روی P و ω، گشتاور را پیدا می‌کنیم

$T_m = \frac{P_m = P_{\text{منتقل شده روتور}}}{\Omega_{\text{مکانیکی}}}$; $T_e = \frac{P}{2} [\text{دو قطب}]$

$* \quad \frac{dL}{dt} = \frac{dL}{d\theta_r} \cdot \underbrace{\frac{d\theta_r}{dt}}_{\omega}$



$\frac{dL_{asar}}{dt} * i_{ar} * i_{as} = \omega \frac{dL_{as}}{d\theta} \cdot i_{ar} \cdot i_{as}$?

در تقریب در نظر گرفتن اشباع در شبیه‌سازی

باید رلوکتانس هسته را نیز علاوه بر R_g در نظر بگیریم.

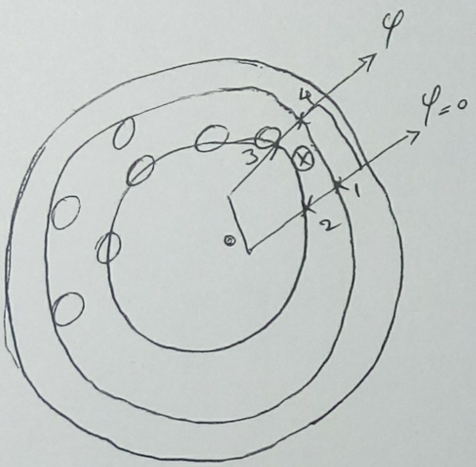
به دلیل اینکه در دندانه‌ها به اشباع می‌رود باید دندانه‌ها را نیز در نظر بگیریم.

$$R = \frac{2(g+\varepsilon)}{\mu_0 A_{effective}}$$

برای در نظر گرفتن اثر سیم‌پیچی غیرمتمرکز از مرجع abcd استفاده می‌کنیم.

* winding function: در روش abc سیم‌بندی را متمرکز در نظر می‌گرفتیم ولی در اینجا به صورت گسترده در نظر می‌گیریم

سپس اندوکتانس‌های ماشین را با دقت بالاتری محاسبه می‌کنیم.



فرضیات: صرف‌نظر از دندانه

" هسته

$$F(\theta) = ?$$

$$\oint H \cdot dl = \sum i_j$$

$$\int_1^2 H_{12} \cdot dl + \int_2^3 H_{23}\, dl + \int_3^4 H_{34}\, dl + \int_4^1 H_{41}\, dl = ni$$

$$F_{12} + F_{23} + F_{34} + F_{41} = ni$$

$$\mu = \infty \longrightarrow R = 0 \longrightarrow F_{23} = F_{41} = 0 \implies F_{12}(0) + F_{34}(\varphi) = n(\varphi)i \quad (9)$$

تعداد دورهای سیم‌پیچی شده

$$\int H_{12}(r,0)\, dl + \int H_{34}(r,\varphi)\, dl = n(\varphi) i \qquad 0 < \varphi < \varphi \; ; \begin{cases} F_{12}(0) = -H_r(R_s,0)\, g \\ F_{34}(\varphi) = H_r(R_s,\varphi)\, g \end{cases}$$

بر حسب شعاع

$$\text{گوس} : \oint B \cdot ds = 0 \xrightarrow{(12)} \mu_0 \int_0^l \int_0^{2\pi} r H_r(r,\varphi)\, d\varphi\, dz = 0 \qquad R_r < r < R_s \quad (11)$$

$$\implies \mu_0\, l \int r H_r(R,\varphi)\, d\varphi = 0 \longrightarrow \int_0^{2\pi} H_r(r,\varphi)\, d\varphi = 0 \quad *$$

$$\int_0^{2\pi} F_{34}(\varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi} H(R_s,\varphi)\,g\,d\varphi \longrightarrow \int_0^{2\pi} F_{34}(\varphi) = 0 \quad (15)$$

$(*)$

$$(9) \rightarrow \int_0^{2\pi} F_{12}(0) + \int_0^{2\pi} F(\varphi)\,d\varphi = I \int n(\varphi)\,d\varphi \quad (16)$$

جریان تابع پیچی نیست

$$16,15 \rightarrow \int_0^{2\pi} F_{12}(0)\,d\varphi = I \int n(\varphi)\,d\varphi \quad (17) \longrightarrow 2\pi F_{12}(0) = I \int n(\varphi)\,d\varphi \quad (18)$$

عدد ثابت

$$F_{12}(0) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} n(\varphi)\,d\varphi\right]}_{\langle n(\varphi)\rangle} \times I$$

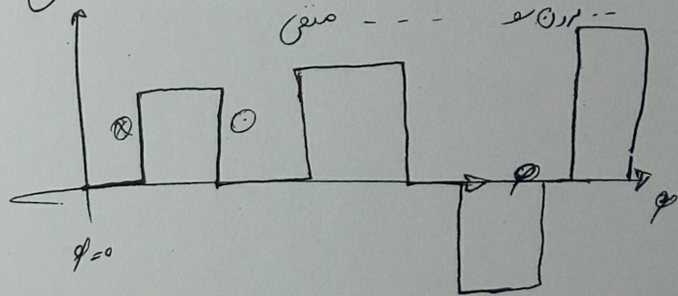
$\langle n(\varphi)\rangle$ متوسط تابع دور

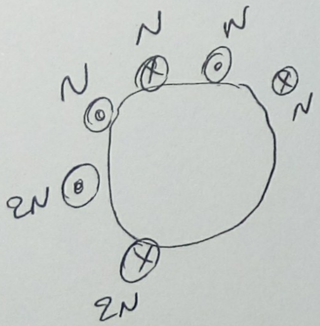
$n(\varphi)$: تابع دور سیم پیچی

اگر رو به سو باشد مقدار $n(\varphi)$ مثبت

... بیرون سو ... منفی

$n(\varphi)$: turn fuction در نقطه φ چند دور سیم پیچی هست داریم





$$\langle n(\varphi)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(\varphi)\,d\varphi \quad 18 \;;\; F_{12}(0) = \langle n(\varphi)\rangle \cdot I \quad (19)$$

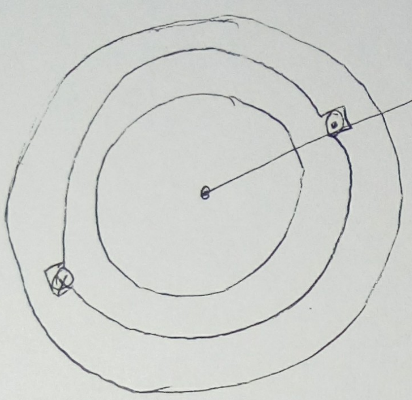
$$F_{12}(0) + F_{34}(\varphi) = n(\varphi)\cdot I \quad (9)$$

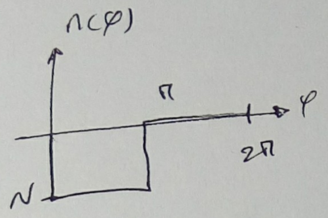
$$F(\varphi) = n(\varphi) I - \langle n(\varphi)\rangle I \Rightarrow F(\varphi) = \underbrace{\left[n(\varphi) - \langle n(\varphi)\rangle\right]}_{N(\varphi)\ \text{تابع سیم پیچی}} \cdot I = N(\varphi)\cdot I$$

برای به دست آوردن توزیع mmf ناشی از یک سیم پیچ $n(\varphi)$ را رسم می کنیم، متوسط آن را می گیریم. از روی آن دو $N(\varphi)$ حاصل می شود. با ضرب در I توزیع mmf در فاصله هوایی به دست می آید.

هدف: بدست آوردن $F(\varphi)$: 1- رسم $n(\varphi)$ 2- محاسبه $\langle n(\varphi) \rangle$ 3- محاسبه و رسم $N(\varphi) = n(\varphi) - \langle n(\varphi) \rangle$

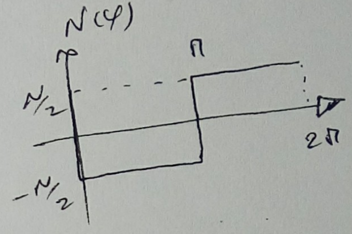
4- محاسبه و رسم $F(\varphi) = N(\varphi)\, I$

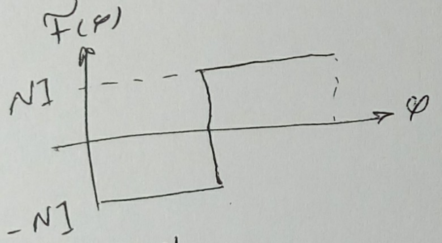




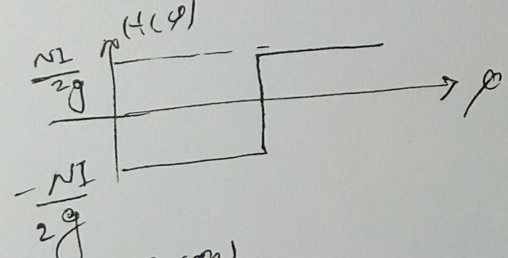
$$\langle n\varphi \rangle = \frac{N}{2}$$

$$N(\varphi) \longrightarrow$$

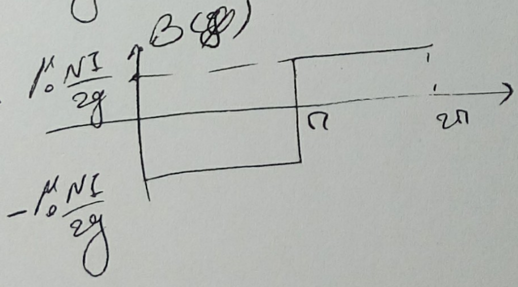




$$F(\varphi) = H(\varphi) \cdot g \longrightarrow$$

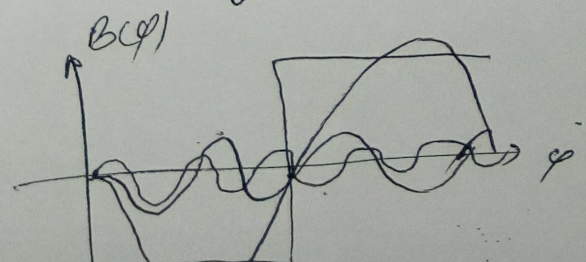


$$B(\varphi) = \mu_0 H \longrightarrow$$



توجه: φ مکانیکی است.

$$B(\varphi) = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 NI}{2g} & 0 < \varphi < \pi \\[2ex] \dfrac{\mu_0 NI}{2g} & \pi < \varphi < 2\pi \end{cases} \rightsquigarrow B(\varphi) = B_1(\varphi_m),\ B_3(\varphi_m),\ B_5(\varphi_m), \ldots$$



$$B_{1m} = \frac{4}{\pi} \times \frac{N \mu_0 I}{2g}$$

پس در فاصله هوایی دسته‌ای از چگالی شار خواهیم داشت.

- چون هسته داخلی در تقارن نگیریم به صورت محدود چند سیم پیچی می‌توان با استفاده از آن چگالی شار مستقیم را به دست آورد. اگر هسته غیرخطی باشد نمی‌توان این کار را انجام داد.

- متمرکز بودن سیم بندی باعث ایجاد هارمونیک‌های مزاحم در چگالی شار می‌شود که هارمونیک‌های مکانی نام دارند.

* اگر جریان سیم بندی AC با هارمونیک باشد آنگاه چگالی شار زمانی به وجود می‌آید.

و از بین این همه هارمونیک فقط مولفه‌های اول تولید توان می‌کنند.

$$F(\varphi) = N(\varphi)\, I(t)$$

مولفه اول × مولفه اول ⟵ تولید توان

* سری فوریه

$$N_{ch} = (-1)^{\frac{h-1}{2}} \left(\frac{2N_t}{h\pi}\right) \quad h = 1, 3, 5, 7, \ldots$$

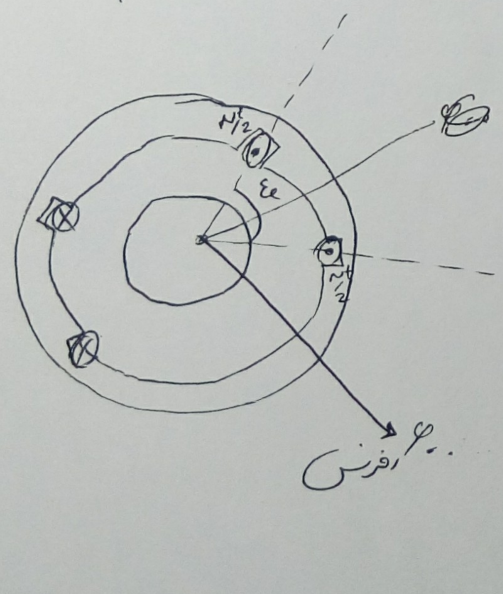
$$N(\varphi) = \frac{2N_t}{\pi}\left(\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos 3\varphi + \frac{1}{5}\cos 5\varphi \ldots\right)$$

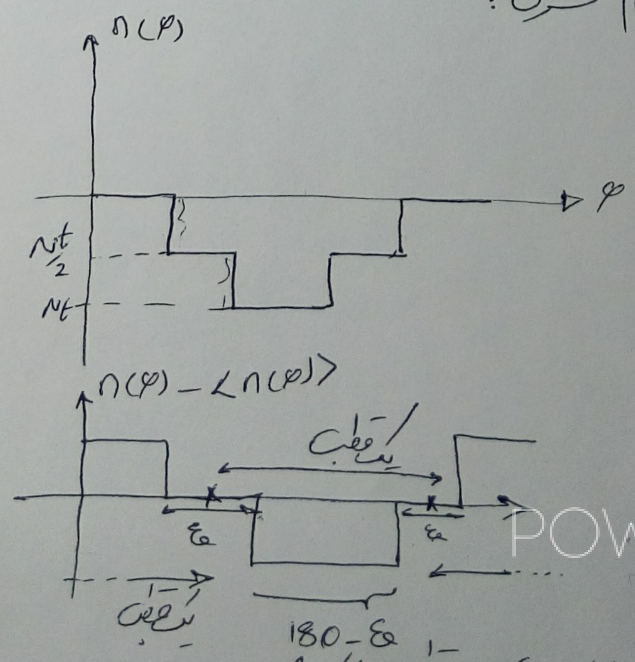
اگر تابع دور بسته شده و نه زوج و نه فرد بود در این صورت رفرنس را جابجا می‌کنیم تا فرد شود یعنی شیفت می‌دهیم.

$$\varphi^* = \varphi - (\ \ )$$

اگر این کار را انجام دادیم برای همه سیم پیچی‌ها باید اعمال شود.

* تحلیل گام کسری:





به اندازه ε درجه قطب‌ها کاهش می‌یابد

هر دایره کوتاه را شیفت می‌دهیم تا شکل فرد در بیاید. سپس سری فوریه را به دست می‌آوریم و دامنه هارمونیک اصلی و دیگر هارمونیک‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم می‌بینیم بسیار کمتر از کلاس ۱۰ است

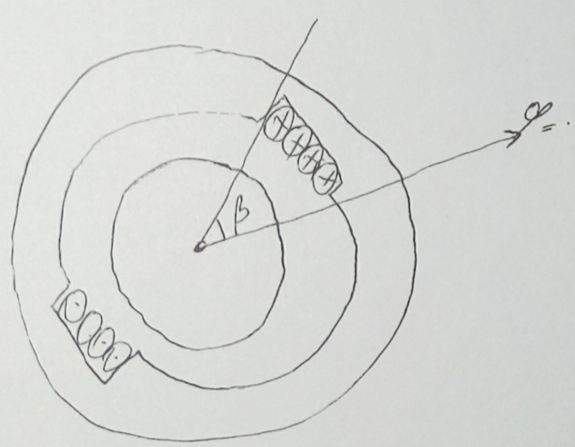
جلسه 20، فروردین :

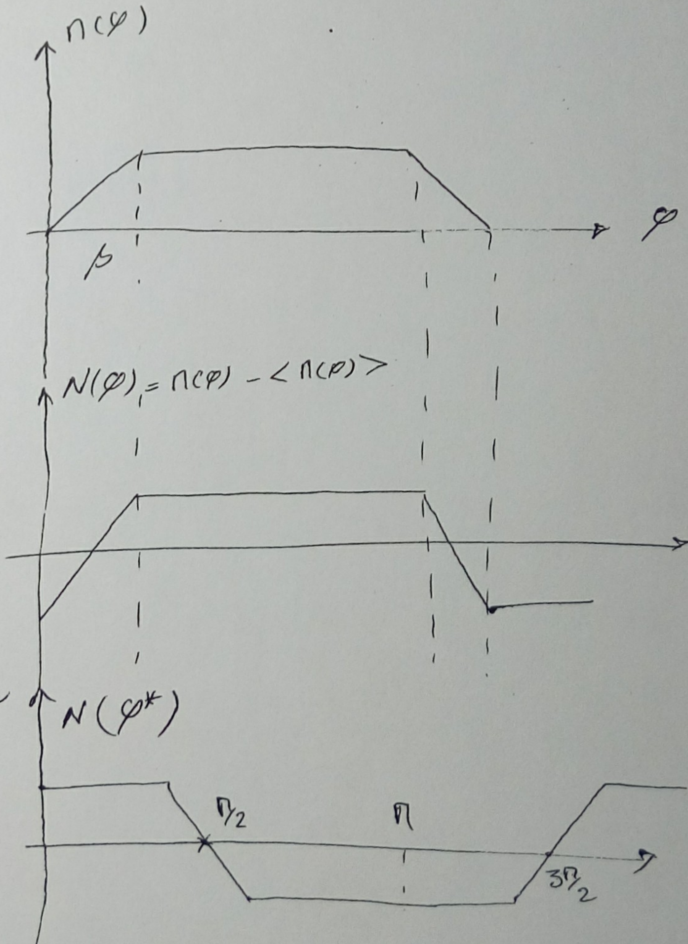
مباحث: بررسی و مقایسه انواع سیم‌بندی در ماشین‌های الکتریکی سه فاز ac

تأثیر توزیع شدگی هادی‌ها در شیار

uniformly distributed: تعداد دورها را در تعداد شیار بیشتری گسترش دهیم

روند $n(\varphi) \longrightarrow N(\varphi) \longrightarrow F(\varphi) = N(\varphi)\, I$





شیفت منفی برای تبدیل به تابع فرد

$$\varphi^* = \varphi - \pi/2 - \beta/2$$

این تغییر متغیر در کل روند حل باید اعمال شود

$$N_h = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{N_t}{2} \int_0^{\frac{\pi-\beta}{2}} \cos(h\varphi^*)\, d\varphi^* + \frac{4}{\pi} \int_{\frac{\pi-\beta}{2}}^{\pi/2} \frac{N/2}{(\beta/2)} (\pi/2 - \varphi^*) \cos h\varphi^*\, d\varphi^*$$

$$= (-1)^{\frac{h-1}{2}} \frac{2N_t}{\pi h} \frac{\sin(h\beta/2)}{(h\beta/2)}$$

h فرد

$$= \sum N_h \cos h\phi^*$$

$$F(\phi^*) = N(\phi^*) \cdot I$$

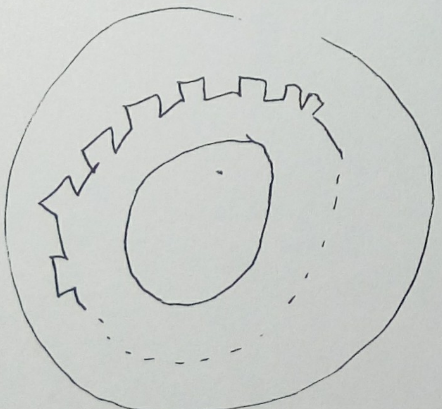
$$B(\phi^*) = \frac{N(\phi^*) I}{g} \times \mu_0$$

$$k_h = \frac{\text{دامنه مولفه } h \text{ ام توزیع سیم بندی یکنواخت}}{\text{ " " " " متمرکز}} = \frac{\sin(h\beta/2)}{(h\beta/2)}$$

برای حذف مولفه ۵ ام $\quad \sin \frac{\beta \times 5}{2} = 0 \longrightarrow \beta = \dots$

* برای افزایش شکل موج نیاز به افزایش شیار ها یا افزایش دور است تا چه حد می توان عمق یک شیار را در سیم بندی متمرکز افزایش داد و تعداد را افزایش داد؟ پس بعضی موارد از سیم بندی توزیع شده استفاده می کنیم
یکی دیگر از مزایای سیم بندی توزیع شده شکل موج سینوسی است.

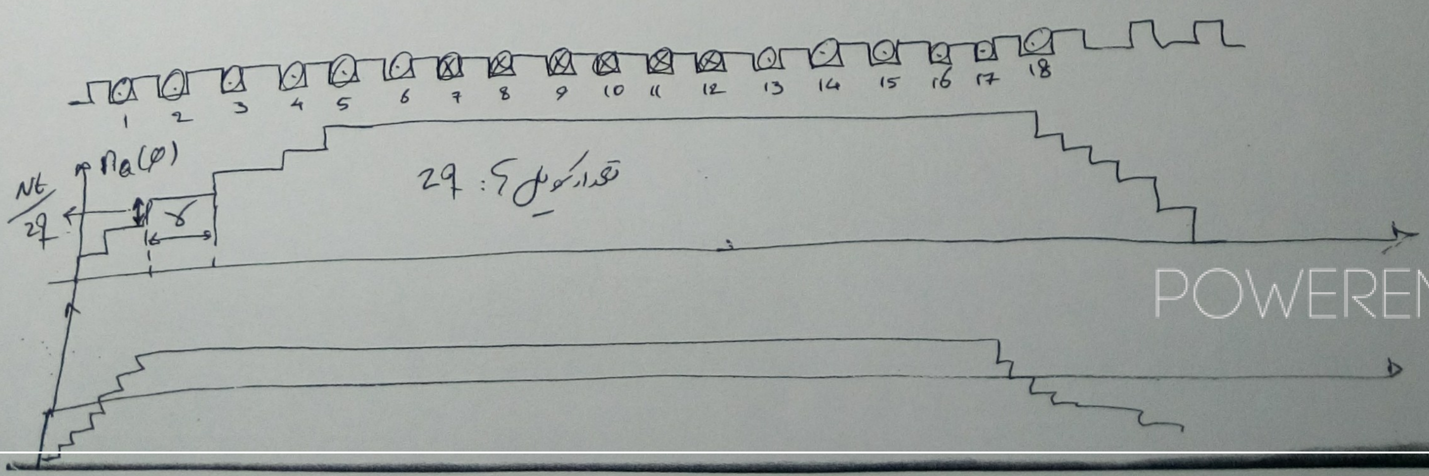
* سیم بندی توزیع شده:



$$\frac{s/\text{pole}}{\text{phase}} = \frac{36}{3 \times 2} = 6 \longrightarrow$$ 1 تا 6 مال یک طرف فاز a

a' ~ 7 تا 12

b ~ 6 تا بعدی

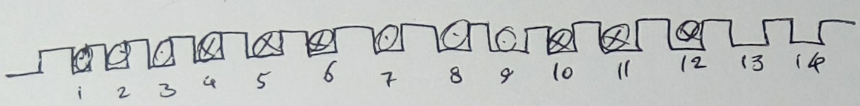


$$k_h = \frac{\sin\left(\frac{hq\gamma}{2}\right)}{q\sin\left(\frac{h\gamma}{2}\right)} \cos\left[h(q-1)\frac{\gamma}{2}\right]$$

γ : عرض شیار

تا اینجا توزیع شده با گام کامل را محاسبه کردیم.

* اگر توزیع شده با گام کسری را بخواهیم پیدا کنیم:

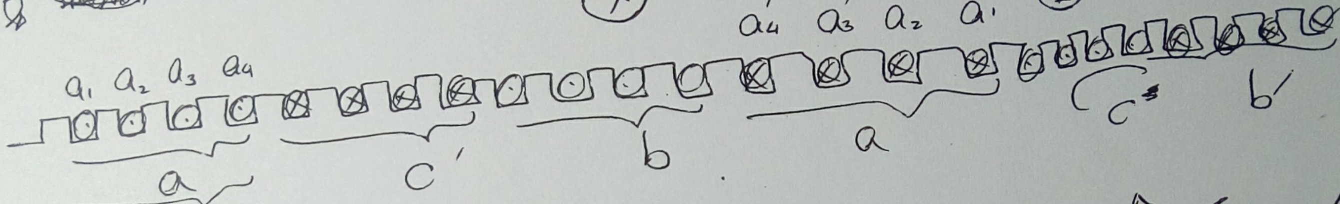


$\Leftarrow \frac{S/P}{P} = 6$

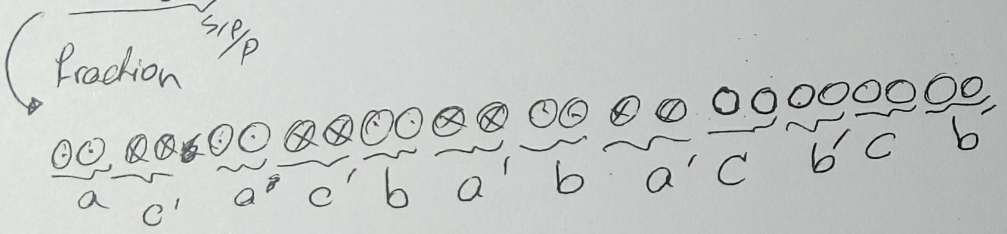
q ~~fraction~~

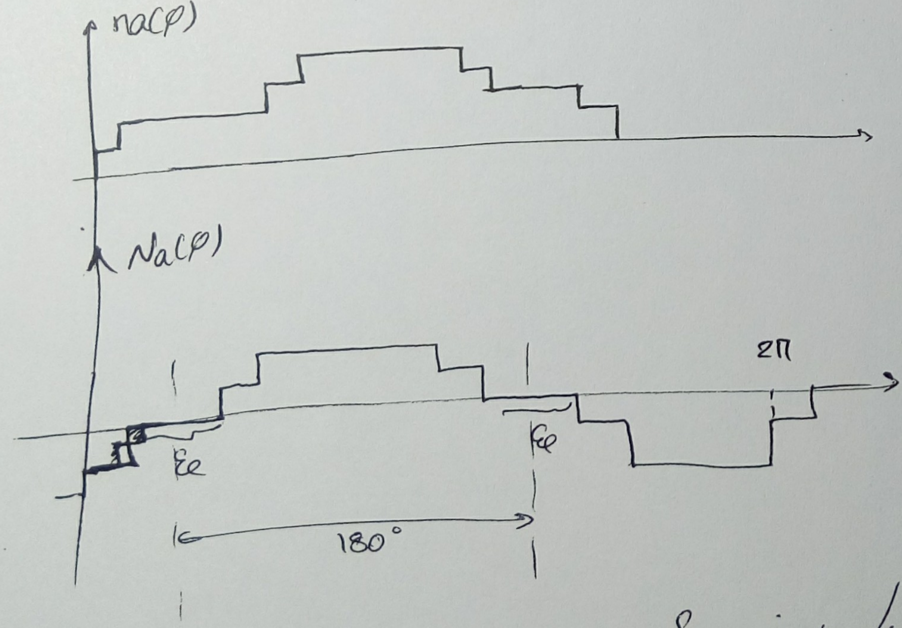
$\circledast \rightarrow$ a_1' a_2' a_3' a_4' (II)

a_4' a_3' a_2' a_1' (I)



$\frac{S/P}{P} = 4$





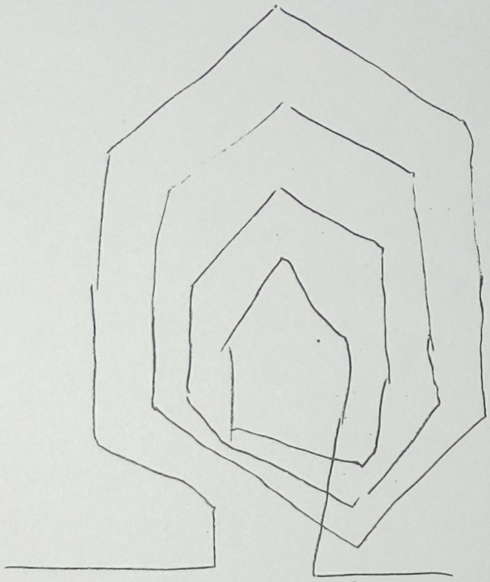
با انتخاب مناسب q, ε دو هارمونیک حذف می‌شود.

$$k_h = \frac{\sin\left(\frac{hq\gamma}{2}\right)}{q\sin\left(\frac{h\gamma}{2}\right)} \cos\left(\frac{h\varepsilon}{2} + h(q-1)\frac{\gamma}{2}\right)$$

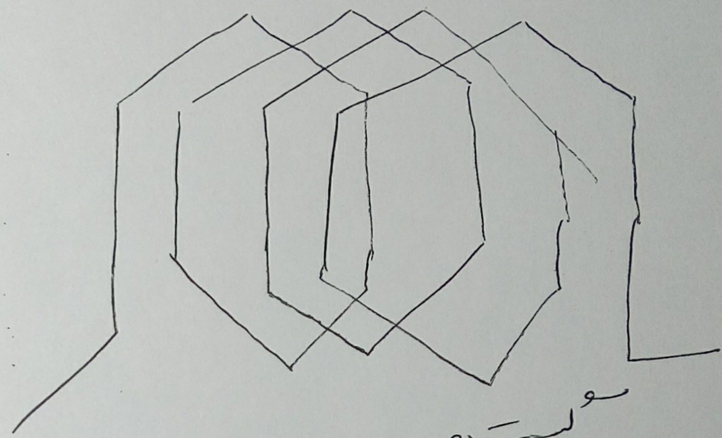
در شکل (*) هر قطب به دو صورت می توان کویل ها را جایگذاری کرد. حالت II متمرکز
چون تمام کلاف ها یک شکل است و ساخت و پیچیدن آن راحت تر است.

در حالت اول چون همه کویل ها در یک نقطه است سیم پیچی توزیع شده متمرکز نام دارد.

" " دوم سیم پیچی توزیع شده گسترده نام دارند.



متمرکز



گسترده.

* 32 قطب و 432 شیار ، تعداد فاز 3 :

$$\frac{S/P}{P} = \frac{432}{3\times 32} = 4.5$$

شیار کسری

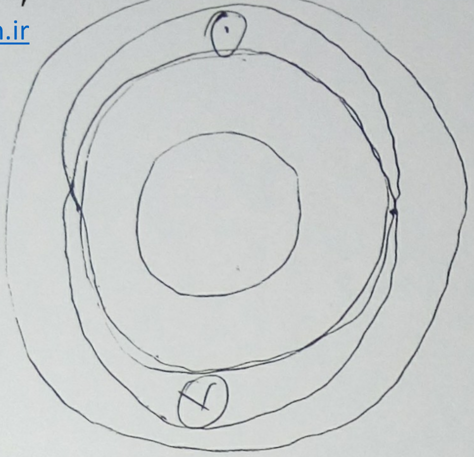
برای بعضی فازها 4 و بعضی 5 در نظر می گیریم

$a, a' \rightarrow 4$

$b, b' \rightarrow 5$

* جلسه 27، فروردین ماه

(توزیع تابع هادی‌ها، دانسیته) تابع دور = $Z = Z_m |\sin\varphi|$



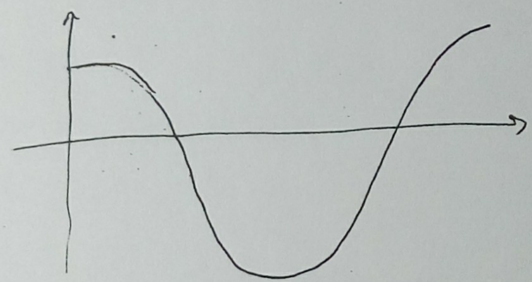
تعداد دور $N = -\int_0^{\pi} Z_m \sin\varphi \, d\varphi$

$$n(\varphi) = \int_0^{\varphi} Z(\varphi)\, d\varphi = \frac{Nt}{2}(\cos\varphi - 1)$$

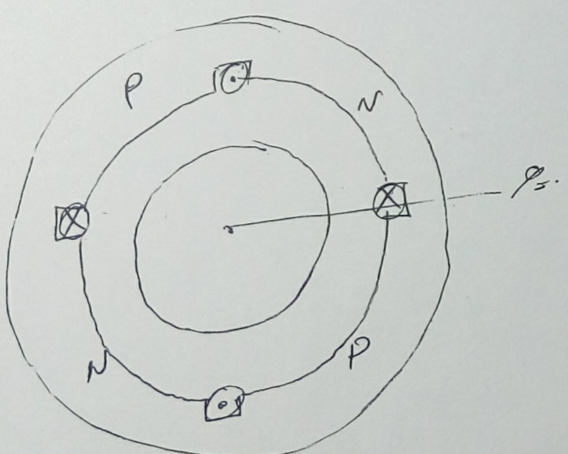
$$N(\varphi) = n(\varphi) - \langle n(\varphi) \rangle = -\frac{Nt}{2}\cos\varphi$$

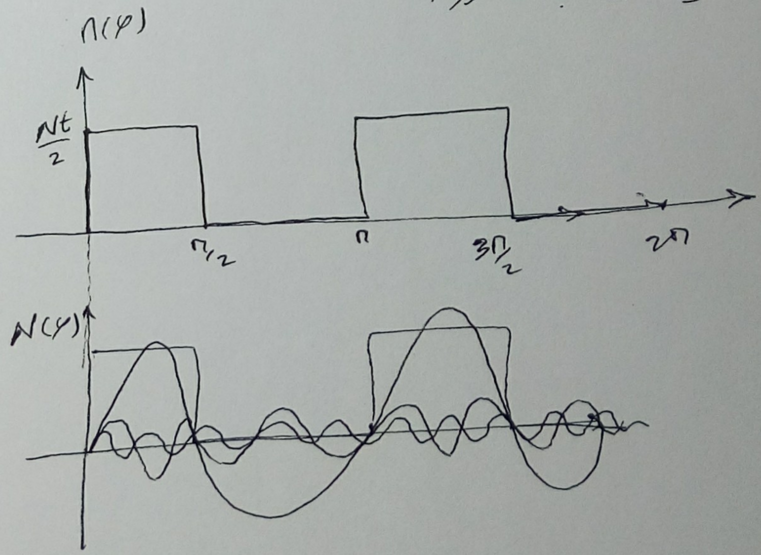
$$F(\varphi) = N(\varphi).I = -\frac{Nt.I}{2}\cos\varphi$$

$$B(\varphi) = -\frac{\mu_0 Nt.I}{2g}\cos\varphi$$



* ماشین چهارقطب متمرکز:





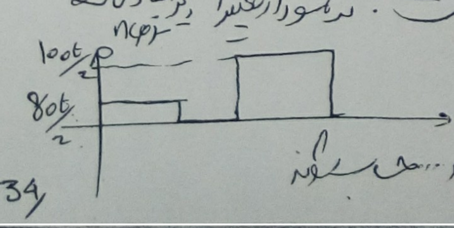
$$\varphi_e = \frac{P}{2}\varphi_m$$

اگر به جای (φ)، $\frac{P}{2}\varphi$ بگذاریم در معادلات گذشته همه‌ی معادلات برای چهارقطب هم صادق می‌شود

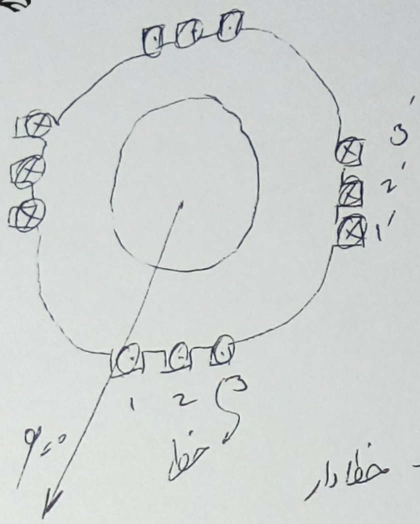
* توجه: اگر خطای ترسیم پیچ رخ دهد مثلاً از ۱۰۰ دور، ۲۰ دور اتصال کوتاه شده است. در نمودار تغییرات $n(\varphi)$ [illegible]

و [illegible] در توزیع چگالی سیم ایجاد می‌شود،

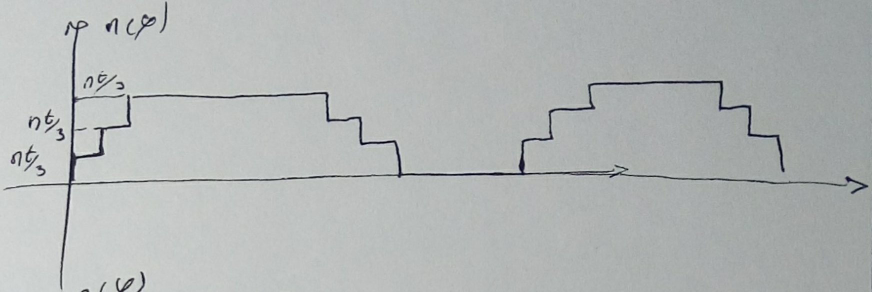
در یک فاز اتصال کوتاه هم به مسئله اضافه می‌شود که باید برای آن نیز $n(\varphi)$، $N(\varphi)$ و ... حساب شود

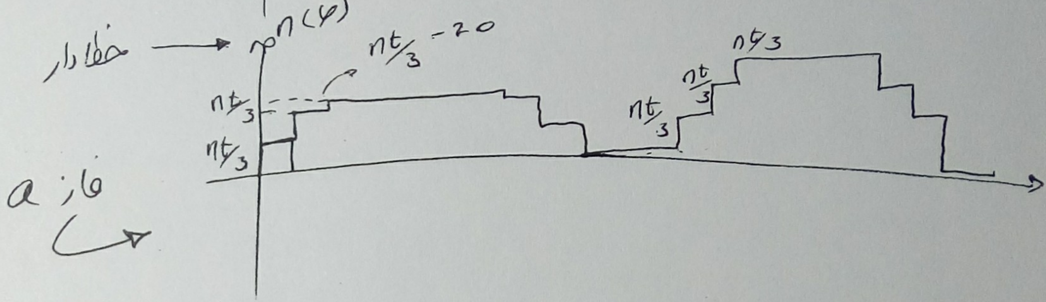


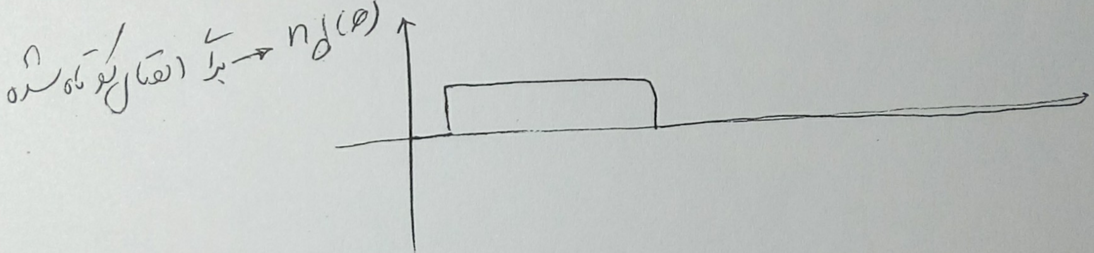
* اگر توزیع شده بخواهیم:



$$\frac{s/p}{p}=3$$





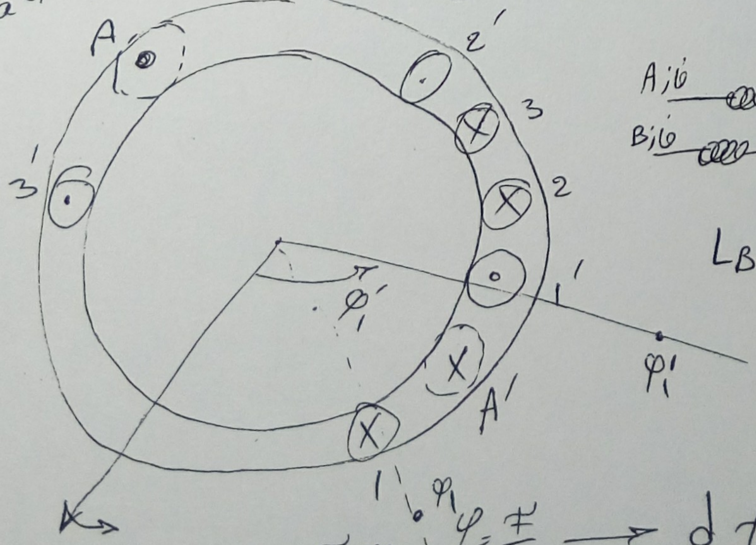


$n_a(\varphi)\,,\,n_b(\varphi)\,,\,n_c(\varphi)\,,\,n_d(\varphi)$

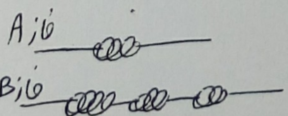
$N_a(\varphi)\,,\,N_b(\varphi)\,,\,N_c(\varphi)\,,\,N_d(\varphi)$

$F_a(\varphi)\,, - - - - - - - ,\,F_d(\varphi)$

$B_a(\varphi)\,, - - - - - - \rightarrow B_d(\varphi)$



* محاسبه اندوکتانس بین دو فاز فرضی A و B:



$$L_{BA}=\frac{\text{شار عبوری دور از فاز B ناشی از A}}{\text{جریان ۱ فاز A}}=\frac{\text{شار دور عبوری از '11 ناشی از A}}{\text{جریان ۱ فاز A}}$$

$$+\frac{\sim\ 22'\ \sim}{\sim}+\frac{\sim\ 33'\ \sim}{\sim}$$

$$F=\varphi R \rightarrow \varphi=\frac{F}{R} \longrightarrow d\Psi = F_A(\varphi)\cdot\mu\, r\, l\, \frac{d\varphi}{g}$$

شار کل عبوری از یک مقطع $d\varphi$

طول ماشین

شار عبوری از $11'$ $= \int_{\varphi_1}^{\varphi_1'} F_A(\varphi) \cdot \mu_0 \cdot r \cdot l \cdot \frac{d\varphi}{g}$ $\longrightarrow$ شار دور عبوری از $11'$ $= \int_{\varphi_1}^{\varphi_1'} \cdots n_{11'}(\varphi)$

درصورتیکه متمرکز نباشد

شار دور عبوری از $11'$ $= \int_0^{2\pi} n_{11'}(\varphi) \underbrace{F_A(\varphi)}_{N_A(\varphi) \cdot I_A} \cdot r \cdot l \cdot \mu_0 \cdot \frac{d\varphi}{g} = \frac{\mu_0 \cdot l \cdot r \cdot I_A}{g} \times \int_0^{2\pi} n_{11'}(\varphi) \cdot N_A(\varphi)\, d\varphi$

$\lambda_{11'} =$ گفتیم!

$$\lambda_{22'} = \frac{\mu_0 l r I_A}{g} \int_0^{2\pi} n_{22'}(\varphi) N_A(\varphi)\, d\varphi$$

$$\lambda_{33'} = \frac{\mu_0 l r \cdot I_A}{g} \int_0^{2\pi} n_{33'}(\varphi) \cdot N_A(\varphi)\, d\varphi$$

$$\lambda_{BA} = \lambda_{11'} + \lambda_{22'} + \lambda_{33'} = \frac{\mu_0 l r \cdot I_A}{g} \left[\int_0^{2\pi} n_{11'}(\varphi) \cdot N_A(\varphi)\, d\varphi + \int_0^{2\pi} n_{22'}(\varphi) \cdot N_A(\varphi)\, d\varphi + \int_0^{2\pi} n_{33'}(\varphi) N_A(\varphi)\, d\varphi \right]$$

$$= \frac{\mu_0 r l I_A}{g} \times \left[\int_0^{2\pi} \underbrace{\sum_{j=1}^{3} n_{jj'}(\varphi)}_{n_B(\varphi)} N_A(\varphi)\, d\varphi \right] = \frac{\mu_0 r l \cdot I_A}{g} \left[\int_0^{2\pi} n_B(\varphi) N_A(\varphi)\, d\varphi \right]$$

$$L_{BA} = \frac{\mu_0 r l}{g} \left[\int n_B(\varphi) \cdot N_A(\varphi)\, d\varphi \right] = \frac{\mu_0 r l}{g} \int \left[N_B(\varphi) + \langle n_B \rangle \right] N_A(\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 r l}{g} \int_0^{2\pi} N_B(\varphi) N_A(\varphi)\, d\varphi + \frac{\mu_0 r l}{g} \cdot \langle n_B \rangle \underbrace{\int_0^{2\pi} N_A(\varphi)\, d\varphi}_{0} \Rightarrow$$

$$\boxed{L_{BA} = \frac{\mu_0 r l}{g} \int_0^{2\pi} N_B(\varphi) N_A(\varphi)\, d\varphi}$$

با هر توزیع سیم بندی

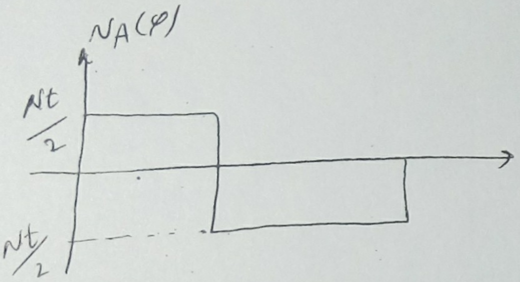
اندوکتانس $L_{AA} = \frac{\mu_0 r l}{g}\int_0^{2\pi} N_A^2(\varphi)\, d\varphi$

* تا حالا اندوکتانس متقابل گشتاوری حساب شده و برای محاسبه اندوکتانس کل $L_{leakage}$ باید محاسبه شود

* با این فرمول درست اندوکتانس هر ماشین با هر سیم‌بندی و حتی در حالت خطا را بینید می‌توانیم به دست آوریم.

* اگر P قطبی باشه φ به $\varphi\frac{P}{2}$ تبدیل می‌شه.

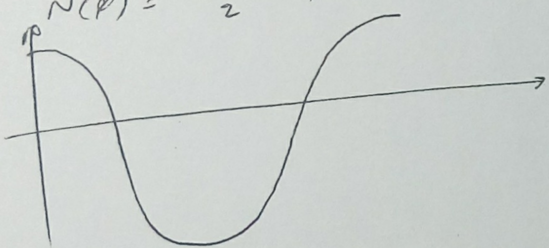
* مقایسه دو نوع سیم‌بندی متمرکز و سینوسی از نظر اندوکتانس:



$$L_{AA} = \frac{\mu_0 r l}{g}\int_0^{2\pi} N_A^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{\mu_0 r l}{g}\times\frac{N_t^2}{4}\times 2\pi$$

$$= \frac{\mu_0 r l}{g}\times\frac{N_t^2\times\pi}{2}$$

$N(\varphi) = -\frac{N_t}{2}\cos\varphi$



$$L_{AA} = \frac{\mu_0 r l}{g}\int_0^{2\pi}\frac{N_t^2}{4}\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\mu_0 r l N_t^2}{4g}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 r l N_t^2}{4\times 2g}\times 2\pi$$

$L_{AA\,\text{سینوسی}} = L_{AA\,\text{متمرکز}}\times \frac{1}{2}$

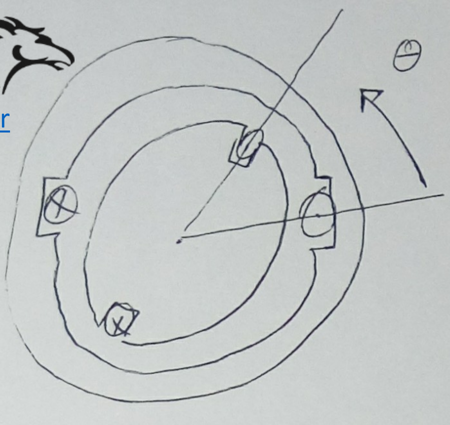
از یک دید چون $\frac{d\lambda}{dt}$ ولتاژ است اگر L بیشتر باشد $\frac{d\lambda}{dt}$ back emf بیشتر دارد و زودتر به اشباع می‌شود پس توزیع سینوسی دیرتر به اشباع می‌شه

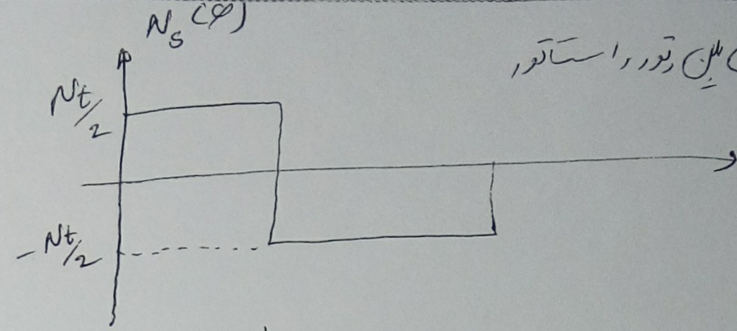
اما از دید ضریب توان بدتر است چون L کمتر جریان متقابل گشتاوری بیشتر را نتیجه می‌دهد.

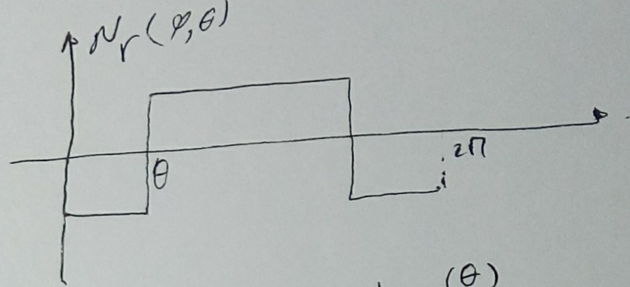
* تا حالا همه محاسبات برای سیم‌بندی روی یکی یعنی استاتور یا رتور انجام دادیم. حالا برای یک سیم‌بندی روی رتور و دیگری روی استاتور را باید به دست آوریم

ماتریس اندوکتانس
$$\begin{bmatrix} [\checkmark] & [?] \\ [?] & [\checkmark] \end{bmatrix}$$

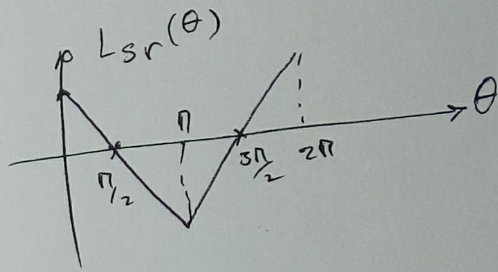
* اندوکتانس بین رتور و استاتور







$$L_{sr}(\theta) = \frac{\mu_0 . r . l}{g} \int_0^{2\pi} N_s(\varphi) . N_r(\varphi,\theta)\, d\varphi$$



* برای حل انتگرال بالا، تابع N_r و N_s را به بازه های مختلف تقسیم بندی می کنیم و انتگرال را بصورت چند جمله ای و در چند بازه حساب می کنیم.

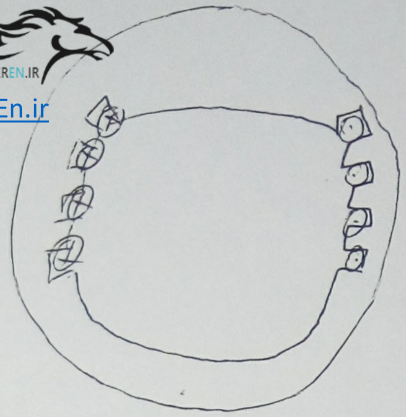
* یک راه دیگر گرفتن سری فوریه تابع است:

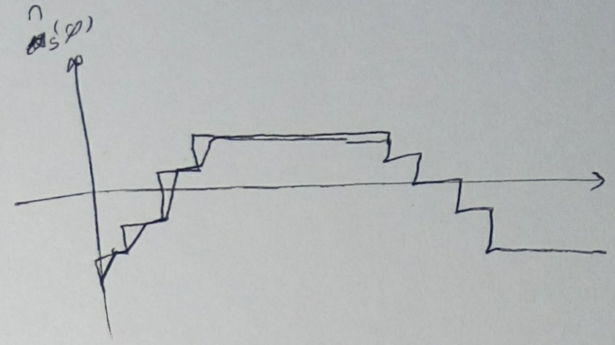
$$N_s(\varphi^*) = \frac{2N_s}{\pi}\left[k_{1s}\cos\varphi^* + k_{3s}\cos 3\varphi^* + \cdots\right]$$

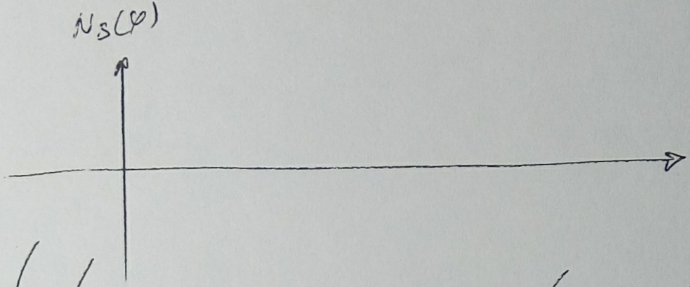
$$N_r(\varphi^*) = \frac{2N_r}{\pi}\left[k_{1r}\cos(\varphi^*-\theta) + k_{3r}\cos 3(\varphi^*-\theta) + \cdots\right]$$

* در شبیه سازی چون در هر لحظه باید اندوکتانس mutual ها را محاسبه کنیم مشکل است، خیلی طول می کشد. یک راه این است که بصورت offline L_{sr} را در هر θ از 0 تا 360° با یک step مشخص حساب می کنیم. بعد در شبیه سازی به هر کدام که نیاز داشتیم از این جدول استفاده می کنیم. حتی می توان برای این جدول به دست آمده یک تابع بدست می آوریم که اگر θ بین دو استپ قرار گرفت راحت تر باشد.

* اثر توزیع شدگی :







توجه: هادی‌هایی که بصورت یکجا و نقطه‌ای بر خلاف شکل نیست بلکه در شیار پخش هستند پس توابع N_r و N_s بصورت پله بالا و پایین نمی‌آیند (آنی) بلکه با یک شیب افزایش یا کاهش می‌یابد (فرم ذوزنقه).

- پس با توجه به مطالب گفته شده ما ماتریس اندوکتانس دقیق که شکل‌های متفاوت را توانستیم مدل کنیم.

$$[L] = \begin{bmatrix} [L_s] & [L_{sr}] \\ [L_{rs}] & [L_{rr}] \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\lambda^s_{abc}}{dt} = V^s_{abc} - R^s_{abc} \cdot i^s_{abc}$$

$$\frac{d\lambda^r_{abc}}{dt} = V^r_{abc} - R^r_{abc} \cdot i^r_{abc}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J}\left[T_e - T_m\right] - \frac{B}{J}\omega$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$U = \begin{bmatrix} V^s_{abc} \\ V^r_{abc} \\ T_m \end{bmatrix} \quad ; \quad x = \begin{bmatrix} \lambda^s_{abc} \\ \lambda^r_{abc} \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda^s_{abc} \\ \lambda^r_{abc} \end{bmatrix} = [L]\begin{bmatrix} i^s_{abc} \\ i^r_{abc} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} i^s_{abc} \\ i^r_{abc} \end{bmatrix} = [L]^{-1}\begin{bmatrix} \lambda^s_{abc} \\ \lambda^r_{abc} \end{bmatrix}$$

$i^s = f(\lambda)$

$i^r = f(\lambda)$

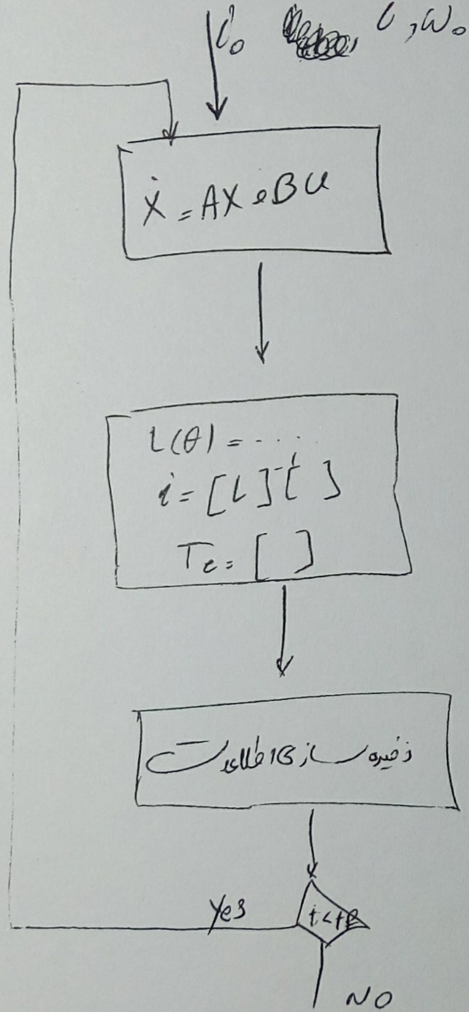
$$T_e = \frac{\partial w_f}{\partial \theta} \longrightarrow T_e = \frac{1}{2} i^T \frac{\partial L}{\partial \theta} \cdot i$$

$$w_f = \frac{1}{2} i^T \cdot [L] \cdot i$$

فقط L_{rs} و L_{sr} نسبت به θ متغیراند.

$$i^T = [\, i^s_{abc} \quad i^r_{abc} \,]$$

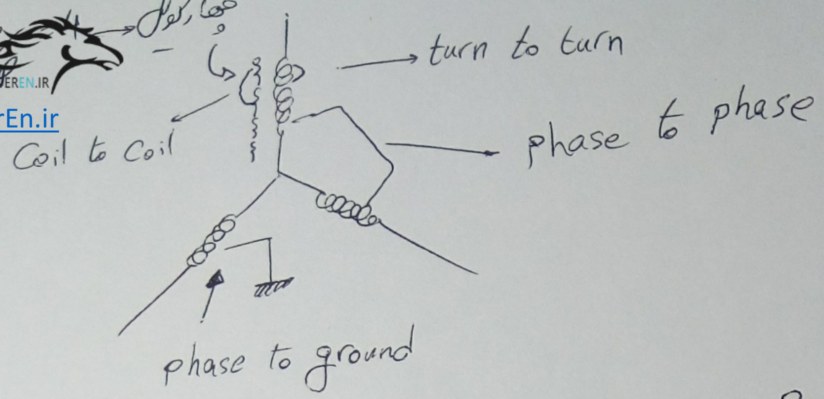
شرایط اولیه = θ_0 ، λ_0 ، T_{e0} ، ω_0 ، i_0



اگر بعد شرایط خطا هم بخواهیم محاسبات را انجام دهیم، حالا روند را تکرار می کنم با دو تغییر اولاً تعداد دورها فرق می کند ثانیاً یک فاز اضافه می شود.

— مقاله آقای حمید واعظ در این مورد هست.

* تعریفی از خطاهای در ماشین :

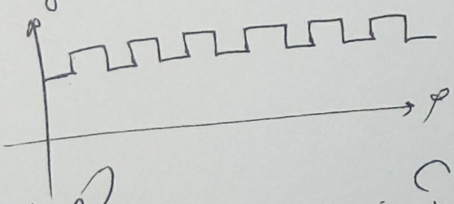


* در نظر گرفتن تاثیر شیار : قبلاً در روند اثبات L_{sr} ، g را ثابت فرض کردیم و بعد از آن استفاده کردیم در اینجا چون بر حسب φ ، g هم متفاوت است نمی‌توان از انتگرال پارامتری بیرون برد.

$$L_{sr} = \mu_0 r l \int_0^{2\pi} \frac{N_s N_r}{g(\varphi)} d\varphi$$

پس در هر لحظه سه تابع $N_r(\theta,\varphi)$ ، $N_s(\varphi)$ و $g(\varphi)$ را داریم و در هر φ مقادیر N_r و N_s و g^{-1} را در هم ضرب می‌کنیم و انتگرال می‌گیریم.

اگر رتور صاف و استاتور شیار داشته باشد داریم:

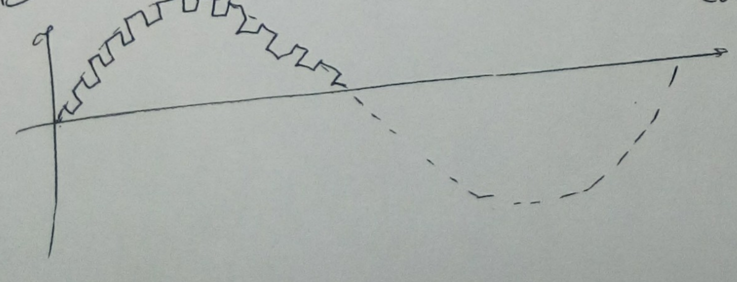


$\to g^{-1}(\varphi) = \dots$

برای انجام محاسبات پس از گرفتن g^{-1} ، سری فوریه می‌گیریم و دو جمله اول آن را فقط برمی‌داریم و در انتگرال‌گیری استفاده می‌کنیم.

اگر این کار را بکنیم در طیف فرکانسی جریان فرمولی، هارمونیک شیار هم دیده می‌شود.

در منحنی چگالی شار، روند این بود که φN را در I ضرب می‌کردیم و بر g تقسیم و سپس در μ_0 ضرب می‌کردیم و B به دست می‌آمد، حال اول g^{-1} هم یک نمودار است که تحدب دارد و داریم:



curvefit $\to \cos(N_s \varphi) \times \cos(\varphi)$ ، $\varphi = \omega_r t + \theta_0$

$= \sin(N_s \omega_r t + N_s \theta_0 + (N_r t + \theta_0)) \dots$

$= \sin((N_s + 1)\omega_r t)$

تعداد شیارها

یک فرکانس ما این شد

* در نظر گرفتن اثر اشباع : $\frac{N^2}{R}$, $R = \frac{L}{\mu_0 \mu_r A}$ $\Rightarrow$ R صعود

μ_r در اشباع کم

یعنی هسته به سمت هوا می‌رود.

برای در نظر گرفتن اشباع می‌توان g یعنی طول فاصله هوایی را کمی افزایش بدهیم (تقریبی).

* modified winding function عنوان مقالات این زمینه است :

* برای ماشین در حالت misAlign :

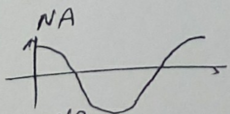
* در ماتریس اندوکتانس ها اندوکتانس متقابل شکاف را در نظر گرفتیم و باید اندوکتانس پراکندگی را هم در نظر بگیریم :

$$L_{asas} = \frac{\mu r l}{g} \int N_A^2(\varphi)\, d\varphi + L_{las}$$

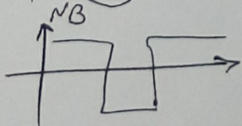
$$L_{las} = L_{ew} + L_{zz} + L_{sl} + L_{belt}$$

end winding

$$L_{BA} = \frac{\mu_0 r l}{g} \int N_B(\varphi) N_A(\varphi)\, d\varphi$$



$$N_A(\varphi) = \frac{N_A}{2} \cos\varphi$$



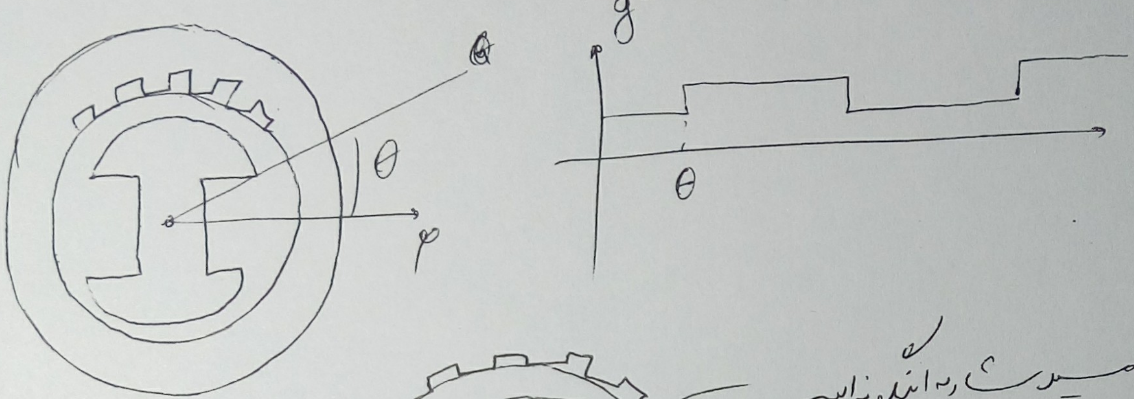
$$N_B(\varphi) = k_1 \cos(\varphi - \theta) + k_3 \cos 3(\varphi - \theta)$$

اگر در محاسبه اندوکتانس AB را حساب کنیم با ضرب $N_A \times N_B$ می‌بینیم $\cos\varphi\cos(\varphi-\theta)$ مقدار دارد اما $\cos\varphi\cos 3(\varphi-\theta)$ مقدار ندارد چون متعامد است صفر است پس هارمونیک تزویج ندارد این قسمت پس نشتی است.

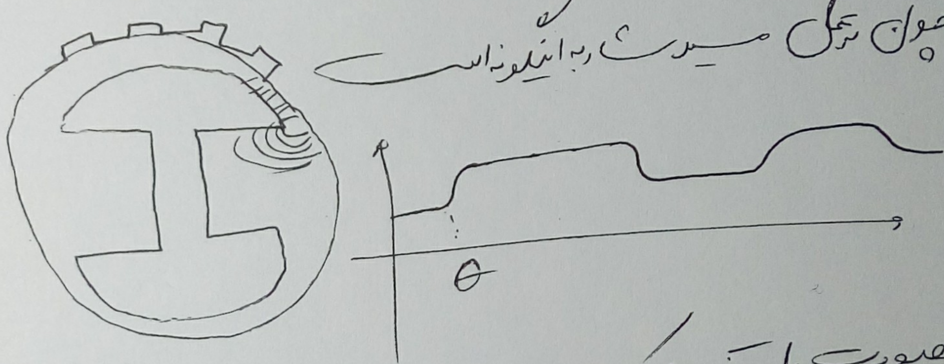
$$L_{belt} = \frac{\mu_0 r l}{g} \left(\frac{N_S}{P}\right)^2 \frac{16}{\pi} \left[\sum_{h=3,5,7} \left(\frac{k_{hA}}{h}\right)^2 \right]$$

* پس بخشی از ضرب $N_B \times N_A$ که صفر می‌شود در L_{AB} تأثیر ندارند و حذف می‌شود.

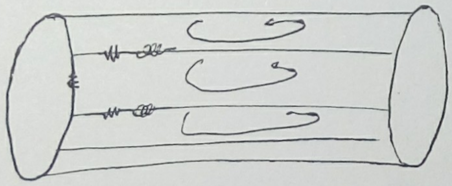
* ماشین قطب برجسته: مراحل اشکال $g(\varphi)$ را متناسب با ماشین قطب برجسته رسم می‌کنیم.



چون تبدیل مسیر به اینگونه است



به صورت پله تغییر نمی‌کند.



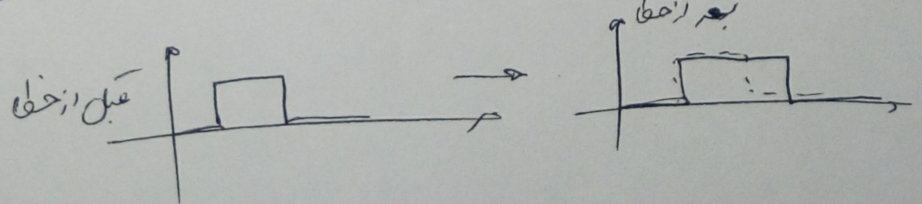
* ماشین روتور قفسی Cage: هر حلقه را به صورت دو لایه در نظر می‌گیریم و هر کدام را یک دور در نظر می‌گیریم.

$$\begin{bmatrix} [L_{ss}]_{3\times 3} & [L_{sr}]_{3\times n_r} \\ [L_{rs}]_{n_r\times 3} & [L_{rr}]_{n_r\times n_r} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\lambda}^{3}_{abc} = v^{3}_{abc} - R_s i^{3}_{abc} \\ \dot{\lambda}^{r}_{1\ldots n_r} = 0 - R_r \cdot i_{1\ldots n_r} \end{cases}$$

اتصال کوتاه‌اند

* شبیه‌سازی خطای سیم شکسته: اگر تعداد دورها $n_r - 1$ می‌شه. ثانیاً فرض اول هم درست نمی‌باشد.



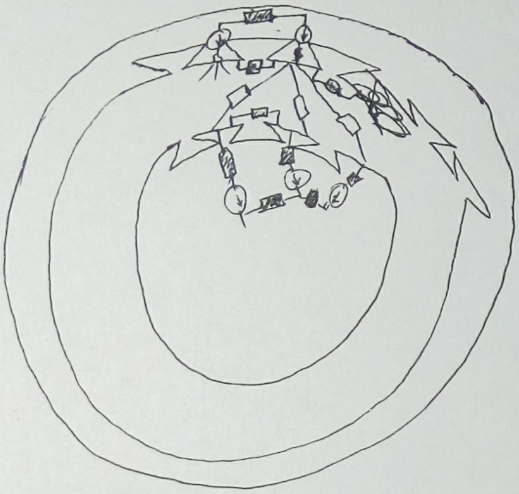
* به علت عبور حباب هوا از یک حلقه، مقاومت آن حلقه افزایش پیدا می کند.

جلسه ۹، ۱۰ اردیبهشت

* تحلیل و مدل سازی ماشین های الکتریکی به روش مدار معادل مغناطیسی

magnetic equivalent circuit (MEC)

- شناسایی مسیر عبور شار:



در کل سه نوع پرمانس داریم: ۱- آهن (هسته فرو): ذاتاً غیرخطی.

$G \cdot P = \frac{1}{R}$

۲- پرمانس های هوایی (بین دندانه ها) (هسته هوا)

این پرمانس همواره ثابت است.

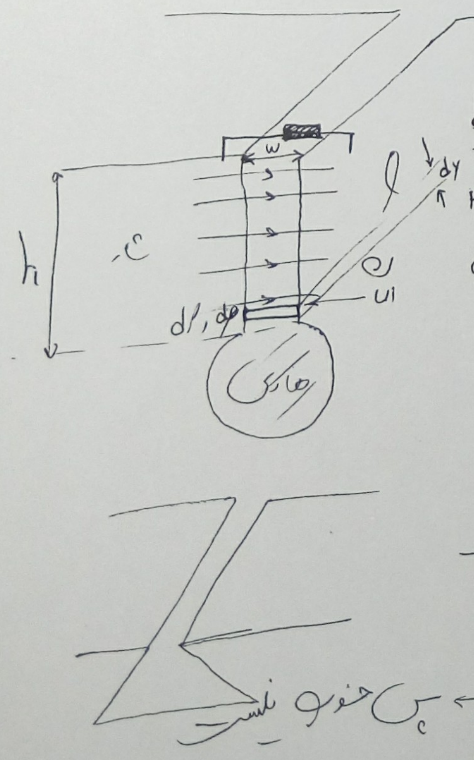
و شار عبوری از این مسیر، شار leakage است.

۳- پرمانس های بین دندانه های روتور و استاتور

این پرمانس به دلیل چرخش روتور، متغیر با موقعیت (وابسته به θ).

* کتاب ostovic:

- محاسبه پرمانس بین دندانه ها:



$\oint H \cdot dl = \sum I$

$H \cdot w = I$

$d\varphi = B \cdot dA = \underbrace{\mu_0 H}_{B} \cdot \underbrace{l\,dy}_{dA} = \mu_0 \frac{I}{w} \cdot l\,dy \longrightarrow \varphi = \int_0^h \mu_0 \frac{I}{w} l\,dy = \mu_0 \frac{I}{w} lh$

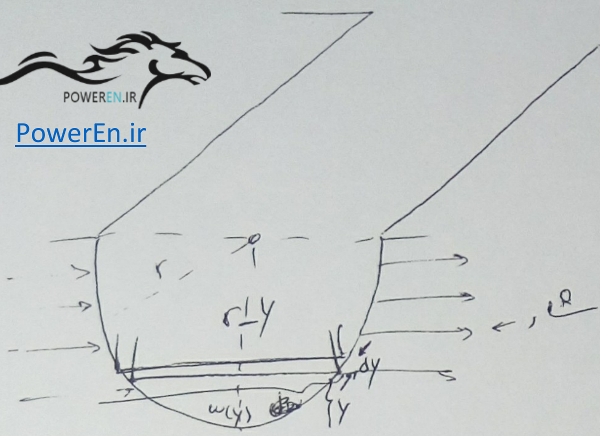
در کتاب چند نوع شیار هست

$R = \frac{F}{\varphi} = \frac{I}{\mu_0 \frac{I}{w} lh} = \frac{1}{\mu_0} \frac{w}{lh}$

پرمانس ویژه: $\Gamma = \frac{h}{w}$; $\mu_0 l \times \Gamma$

$\xrightarrow[\text{پرمانس}]{} G = \frac{1}{R_m} = \mu_0 \frac{lh}{w} = \mu_0 l \times \Gamma$

هر چقدر $\frac{h}{w}$ آن بزرگ باشد → $G\uparrow$ ← $R\downarrow$ ← $I\uparrow$ شار نشتی ← پس خوب نیست.



شیار نیم دایره (آهن‌هایی که داخل آن نیستند) :

$$R = \frac{\text{طول مسیر}}{\mu_0 \times \text{سطح مقطع}}$$

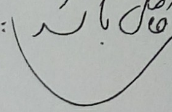
$$dG = \frac{\mu_0 \times \text{سطح مقطع}}{\text{طول مسیر}} = \frac{\mu_0 \times l\, dy}{w(y)}$$

$$w(y) = 2\sqrt{r^2 - (-y+r)^2}$$

$$dG_m = \frac{\mu_0 l}{2} \frac{dy}{\sqrt{r^2 - (r-y)^2}}$$

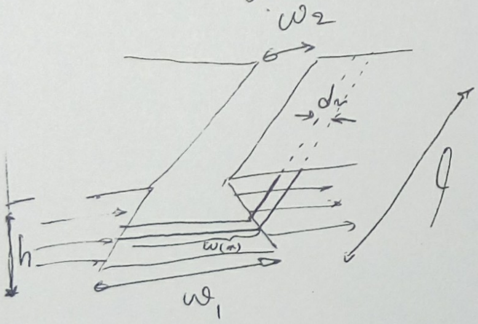
$$G_m = \int_0^r dG_m = \mu_0 l \frac{\pi}{4}$$

اگر شیار دوم نیم دایره کامل باشد :



$$G_M = 2G_m$$

شیار سوم ذوزنقه‌ای :

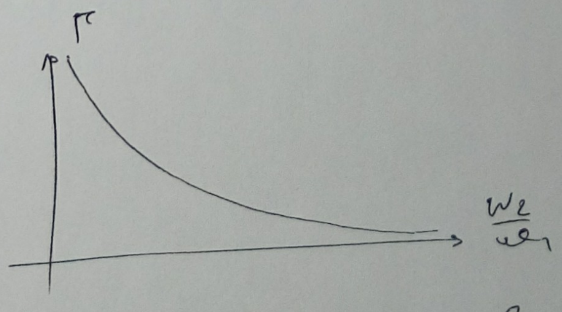


$$G = \int_0^h \mu_0 \frac{l}{w(x)} dx$$

$$\left.\begin{array}{l} w(x)\big|_{x=0} = w_1 \\ w(x)\big|_{x=h} = w_2 \end{array}\right] \Rightarrow w(x) = w_1 + \frac{w_2 - w_1}{h} x$$

$$\Rightarrow G = \frac{\mu l}{\frac{w_2 - w_1}{h}} \cdot \frac{h}{(w_2 - w_1)} \ln \frac{w_2}{w_1}$$

$$\Gamma = \frac{h}{w_2 - w_1} \ln \frac{w_2}{w_1}$$



هرچه شیار بازتر باشد (بیشتر مستطیلی) ← $G\uparrow$ ← $\Gamma\downarrow$ ← نشتی ↓

ص 128 کتاب جدولی برای انواع حالت‌ها :

تا اینجا فرض کردیم تمام هادیها بیرون از شیار هستند حالا می خواهیم با فرض هادی های داخل شیار محاسبه را انجام دهیم : (معمولا شکل ذوزنقه ای) :

المان مربوط به جریان

$$A(x) = \frac{x}{2}\left(2w_1 + \frac{w_2 - w_1}{h}x\right)$$; x: سطح مقطع شیار در ارتفاع x ⟶

کل سطح مقطع شیار $= A_{max} = \frac{w_1 + w_2}{2}h$

چگالی توزیع هادی در ارتفاع x $= Z_1 \times \frac{A(x)}{A_{max}}$

توزیع جریان در راستای x $= dI = J_Z \cdot dA$

عرض شیار در ارتفاع x $: w(x) = \frac{w_2 - w_1}{h}x + w_1$

المان $= dA = w(x)\,dx$

$$dI = J_Z\, w(x)\, dx$$

$$\oint H \cdot dl = \sum I \longrightarrow H_x\, w(x) = \underbrace{i}_{\text{جریان هادی}} \times \underbrace{Z(x)}_{\text{تعداد هادیهای نهفته در ارتفاع } x} \longrightarrow H_x = i \times \frac{Z}{h} \times \frac{x\left(2h\frac{w_1}{w_2 - w_1} + x\right)}{(w_1 + w_2)\left(h\frac{w_1}{w_2 - w_1} + x\right)}$$

$$\longrightarrow B_x = \mu_0 H_x$$

$$d\varphi = \frac{dF}{\cancel{}} \times dG \quad ; \quad d\varphi = B_x \cdot l \cdot dx \longrightarrow$$ المان مربوط به عبوری $\Big] \Rightarrow$

$dF \ldots$

$$\Rightarrow dG = \mu_0 \times \frac{l\, i\, Z^2\, w_1}{\frac{h^3}{b-1}(w_1 + w_2)^2} \times \frac{x^2\left(2\frac{h}{b-1} + x\right)^2}{\frac{h}{b-1} + x}dx \quad ; \quad b = \frac{w_2}{w_1}$$

$$G = \frac{h}{w_1} \times \frac{(b-1)^4 + 4(b-1)^2 - 4(b-1) + 4(\ln(b))}{4(b+1)^2 \cdot (b-1)^3}$$

جلسه ۱۰ اردیبهشت :

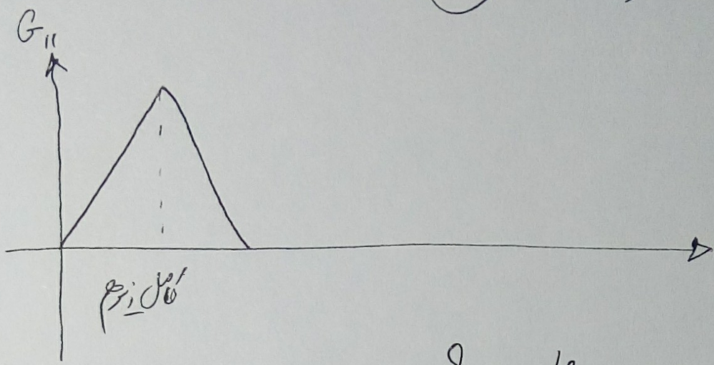
محاسبه پرمانس بین دندانه های استاتور و رتور:

طول مسیر عبور شار

$$R = \frac{l}{\mu_0 A}$$

سطح مقطع

$$G = \frac{\mu_0 A}{l}$$



* اگر دندانه های رتور و استاتور هم شکل باشند:

$$G_{ij}(\gamma) = G_{max} \cdot b(\gamma)$$

$$b(\gamma) = \frac{b'(\gamma) - b'(\pi)}{b'(0) - b'(\pi)}$$

$$b'(\gamma) = \ln \frac{\cosh\left(\pi \frac{\gamma - \gamma_t}{2\beta}\right) \cosh\left(\pi \frac{\gamma + \gamma_t}{2\beta}\right)}{\cosh^2\left(\pi \frac{\gamma}{2\beta}\right)} - \frac{\gamma_t^2}{2\beta} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\left(k \frac{\pi^2}{\beta}\right)}}{\sinh\left(k \frac{\pi^2}{\beta}\right)} \cosh\left(k\pi \frac{\gamma}{\beta}\right) \times \left[\cosh\left(k\pi \frac{\gamma_t}{\beta}\right) - 1\right]$$

$$\beta = \ln \left[\frac{D_{st}}{D_{r0}} = \frac{\text{قطر داخلی استاتور}}{\text{قطر خارجی رتور}} \right]$$

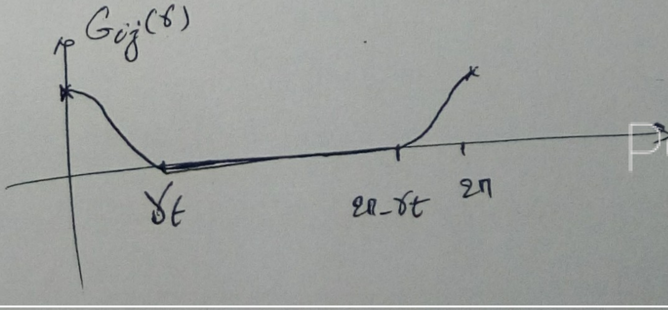
فرمول بالا با حذف تاثیر پراکندگی است .

اگر پراکندگی را در نظر بگیریم :

$$G_{ij} = \begin{cases} G_{max} \frac{1 + \cos\frac{\pi}{\gamma_t}\gamma}{} & 0 < \gamma \le \gamma_t \\ 0 & \gamma_t \le \gamma < 2\pi - \gamma_t \\ G_{max} \frac{1 + \cos\left[\left(\frac{\pi}{\gamma_t}\right)(\gamma - 2\pi)\right]}{2} & 2\pi - \gamma_t \le \gamma \le 2\pi \end{cases}$$

γ_t : عرض دندانه

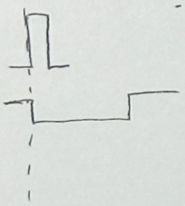
γ : زاویه چرخش رتور (θ)

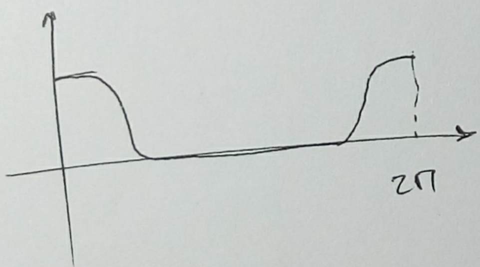


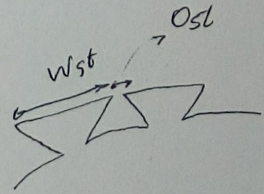
تا اینجا پرمانس بین دندانه اول رتور با دندانه اول استاتور (G_{11}) حساب کردیم. برای مثلا دندانه اول استاتور G_{12} باشد همه موارد صفحه قبل را با اندازه γ_t شیفت میدیم.

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots \\ G_{21} & & \\ \vdots & & \end{bmatrix}_{n_s \times n_r}$$

* اگر دندانه‌های رتور و استاتور هم شکل نباشند (دندانه رتور عرضش کمتر از دندانه استاتور باشد):







$$G_{i,j} = \begin{cases} G_{max} & 0 \le \gamma \le \gamma'_t \ \& \ 2\pi - \gamma'_t \le \gamma \le 2\pi \\ G_{max}\,\left(1 + \cos\pi \dfrac{\gamma - \gamma'_t}{\gamma_t - \gamma'_t}\right) & \gamma'_t \le \gamma \le \gamma_t \\ G_{max}\,\dfrac{1 + \cos\pi \dfrac{\gamma - 2\pi + \gamma'_t}{\gamma_t - \gamma'_t}}{2} & 2\pi - \gamma_t \le \gamma \le 2\pi - \gamma'_t \\ 0 & \gamma'_t \le \gamma \le 2\pi - \gamma_t \end{cases}$$

عرض دندانه استاتور — عرض دندانه رتور

$$\gamma'_t = \frac{|W_{st} - W_{rt}|}{D_{ag}}$$

قطر داخلی استاتور — قطر خارجی رتور

$$D_{ag} = \frac{D_{si} + D_{ro}}{2}$$

دهانه شیار استاتور — rotor opening عرض دهانه شیار رتور

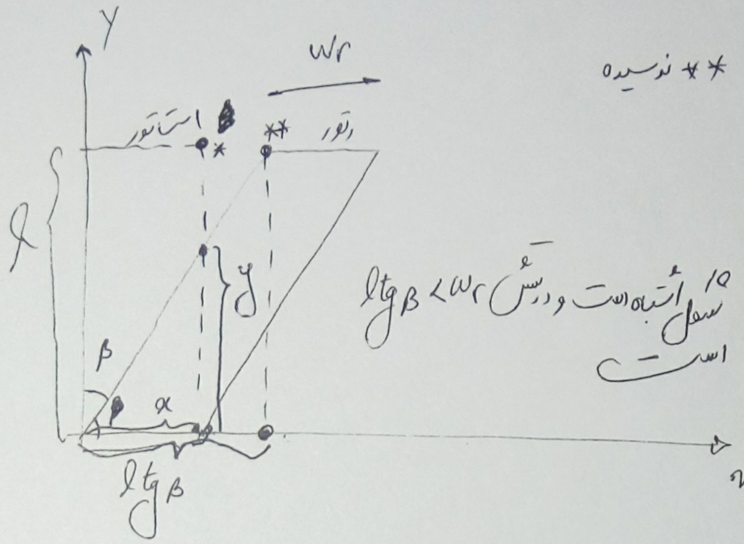
$$\gamma_t = \frac{W_{st} + W_{rt} + O_{st} + O_{sr}}{D_{ag}}$$

$$G_{max} = \mu_0 \frac{l\, W_{min}}{\delta}$$

δ ← فاصله هوایی

$$W_{min} = \min(W_{st}, W_{rt})$$

* در نظر گرفتن skewing (اریب کردن اندازه رتور) :



$l\,tg\beta < w_r$ شکل ۱۰ اشتباه است و درستش ... است

* به ** نرسیده ① $A = \frac{1}{2}xy = \frac{x^2}{2tg\beta}$ $\quad 0<x<l\,tg\beta$

$\tan\beta = \frac{y}{x}$

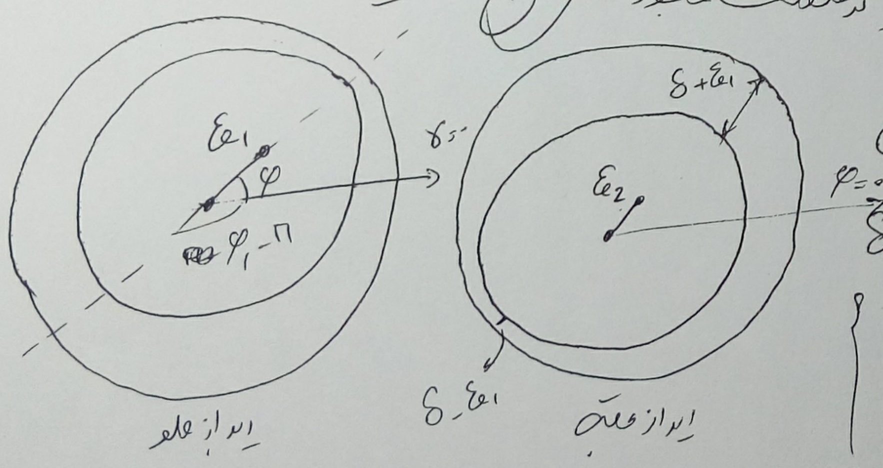
② $A = (x - l\,tg\beta)l + \frac{l^2 tg\beta}{2}$ $\quad l\,tg\beta < x < w_r$

③ $A = (w_r - l\,tg\beta)l + \frac{l^2 tg\beta}{2} + l(x - w_r) - \frac{(x-w_r)^2}{2tg\beta}$

$w_r < x < w_r + l\,tg\beta$

جلسه ۱۵، اردیبهشت :

محاسبه پرمانس بین دندانه‌ی رتور و استاتور در صورت وجود خطای خروج از مرکزیت :



فرض $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$

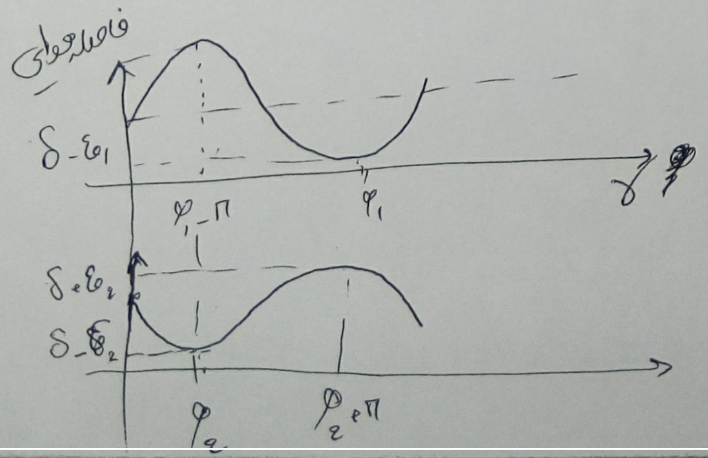
$\delta = \frac{D_{si} - D_{ro}}{2}$

$\delta_{min} = \delta - \varepsilon$

$\delta_{max} = \delta + \varepsilon$

$\delta_1 = \delta - \varepsilon_1\cos(\gamma - \varphi_1)$

$\delta_2 = \delta - \varepsilon_2\cos(\gamma - \varphi_2)$



با فرض تغییرات محوری خطی :

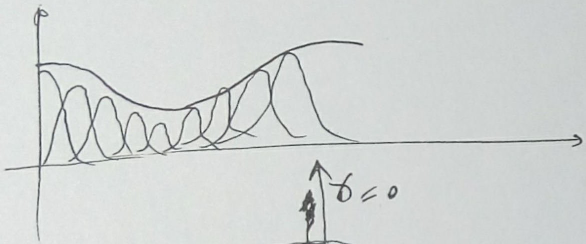
$$\delta = \frac{\delta_2(\gamma) - \delta_1(\gamma)}{l} \cdot z + \delta_1(\gamma)$$

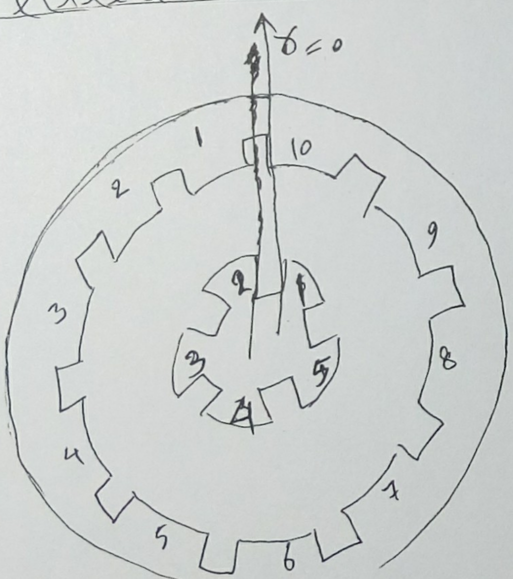
$$dG_{max} = \frac{dz}{\delta(z)} \mu_0 \cdot \omega_r \longrightarrow G_{max} = \mu_0 \cdot \omega_r \int_0^l \frac{dz}{\delta(z)} \Rightarrow G_{max} = \mu_0 \cdot \omega_r \cdot l$$

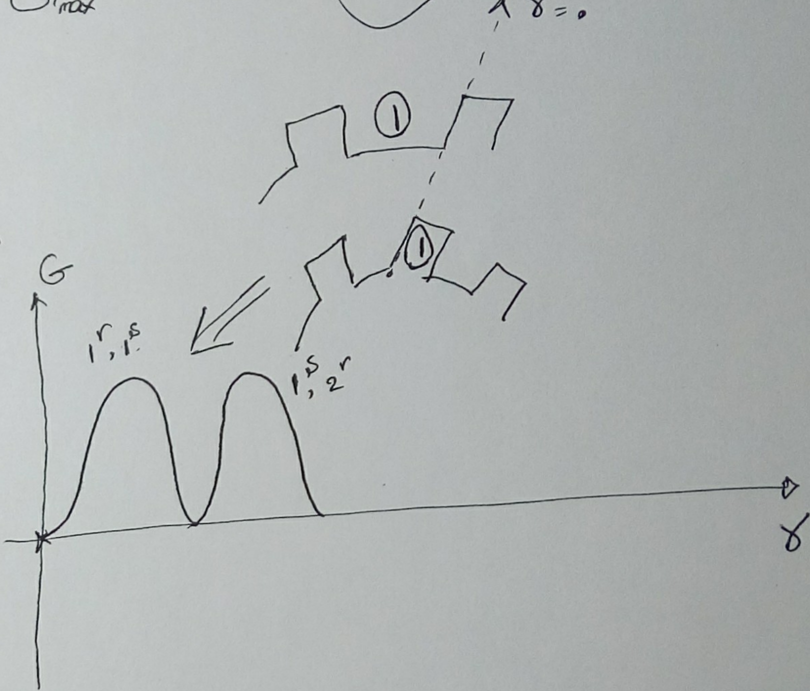
$$G_{max} = \mu_0 \cdot \omega_r \cdot l \cdot \frac{\ln \dfrac{\delta - \varepsilon_2 \cos(\gamma - \varphi_2)}{\delta - \varepsilon_1 \cos(\gamma - \varphi_1)}}{\varepsilon_1 \cos(\gamma - \varphi_1) - \varepsilon_2 \cos(\gamma - \varphi_2)}$$

$\omega_r = \omega_s$

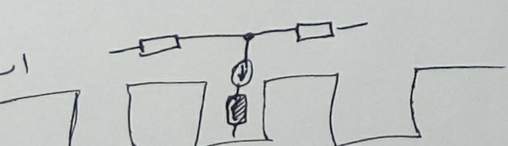
به دلیل متغیر بودن فاصله هوایی با تغییر کردن δ ، γ ، G_{max} به صورت سینوسی تغییر می‌کند





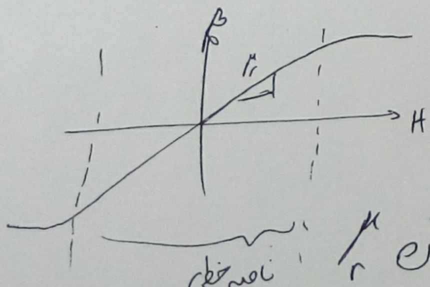


* محاسبه پرمیانس های شیار خورده :



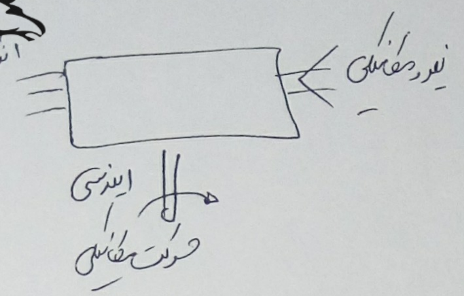
$$R = \frac{h}{\mu_0 \mu_r A_t} \xrightarrow{\text{طول دندانه}} G = \frac{\mu_0 \mu_r A_t}{h}$$

در اثر خطی بود



اول با فرض خطی بودن G ، و معلوم بودن بقیه پارامترها، معادلات را حل می‌کنیم و شار عبوری را محاسبه می‌کنیم و از روی نمودار B-H نقطه کار را پیدا می‌کنیم و از روی آن μ_r را پیدا می‌کنیم و دوباره مراحل را انجام می‌دهیم و μ_r جدید را پیدا می‌کنیم. تا جایی ادامه می‌دهیم که μ_r ثابت بشود و تغییری نکند.

جلسه 17، اردیبهشت



$$F.dx + \sum_{j=1}^{m} i_j v_j \, dt = dw_{mag} + dw_{loss} + dw_{mec} \quad (0)$$

$$dw_{mec} = J \frac{d^2\gamma}{dt^2} \cdot d\gamma \quad (0)$$

$$dw_{loss} = \sum_{j=1}^{m} R_j \cdot i_j^2 \, dt + \underbrace{dw_{Fe}}_{\text{تلفات آهنی}} \quad (1)$$

$$V_k = R_k i_k + e_k \quad (2)$$

$$e_k = \frac{d\lambda_k}{dt}$$

$$i_k v_k \, dt = i_k^2 R_k \, dt + i_k e_k \, dt = R_k i_k^2 \, dt + i_k \, d\lambda_k \quad (3)$$

از روابط 3، 0 $\Rightarrow (T - T_{loss}) \, d\gamma + \sum_{j=1}^{m} i_j \, d\lambda_j = J \frac{d^2\gamma}{dt^2} d\gamma + dw_{mag} + dw_{Fe} \quad (4)$

T_{loss} = گشتاور مورد نیاز جهت غلبه به تلفات مکانیکی

$$dw_{mag} = \sum_{j=1}^{n} F_j \, d\varphi_j \quad (5) \quad (P = VI \longrightarrow \text{معادل مغناطیسی} = F\varphi)$$

$$\varphi_j = F_j G_j \quad (6)$$

$$d\varphi_j = F_j \, dG_j + G_j \, dF_j \quad (7)$$

$(7),(5) \rightarrow dw_{mag} = \sum_{j=1}^{n} (F_j^2 dG_j + F_j G_j dF_j) \quad (8) \Rightarrow$ قبلاً دیدیم پرمانس ها به سه دسته تقسیم می گردند $\Rightarrow$

$$dw_{mag} = \sum_{\text{خطی}} \underbrace{(F_j^2 dG_j + F_j G_j dF_j)}_{*} + \sum_{\substack{\text{غیرخطی پارامتری} \\ \text{یعنی دندانه رتور و استاتور}}} (\quad * \quad) + \sum_{\text{غیرخطی ذاتی}} (\quad * \quad)$$

در غیر خطی با ... $\Rightarrow dG_j = \dfrac{\partial G_j}{\partial \gamma} \cdot d\gamma$ (10)

ناشی از چرخش رتور

(در غیر خطی ذاتی (هسته)) : $dG_j = \dfrac{\partial G_j}{\partial F_j} \cdot dF_j$ (11)

ناشی از mmf هسته به اندازه اشباع می‌رود

در خطی : $dG_j = 0$

$$\Rightarrow dw_{mag} = \sum_{\text{خطی}} F_j G_j \, dF_j + \sum F_j \left(F_j \frac{dG_j}{d\gamma} d\gamma + G_j \, dF_j \right)$$

بیس اندازه رقم داستور

$$+ \sum F_j \left(F_j \frac{dG_j}{dF_j} dF_j + G_j \, dF_j \right) \quad (12)$$

$$dw_{mag} = dw'_{mag} + \sum F_j^2 \frac{dG_j}{d\gamma} d\gamma \quad (13)$$

$$dw'_{mag} = \sum F_j G_j \, dF_j + \sum F_j G_j \, dF_j + \sum F_j \left(F_j \frac{dG_j}{dF_j} dF_j + G_j \, dF_j \right)$$

در پرمیانس خطی + غیر خطی پارامتری $\longrightarrow d\varphi_j = G_j \, dF_j$

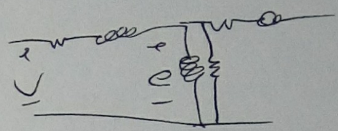
$$dw'_{mag} = \sum F_j \, d\varphi_j + \sum \cancel{2} F_j \, d\varphi_j + \sum F_j \, d\varphi_j \quad (17)$$

$$dw'_{mag} = \sum_{j=1}^{m} i_j \, d\lambda_j$$ چون هیچ حرکتی در dw'_{mag} نیست

(13) بازنویسی رابطه $\longrightarrow dw_{mag} = \sum i_j \, d\lambda_j + \sum F_j^2 \dfrac{dG_j}{d\gamma} d\gamma$ (20)

$$(T - T_{loss})\, d\theta = J \frac{d^2\theta}{dt^2} d\theta + \sum F_j^2 \frac{dG_j}{d\theta} d\theta + dw_{Fe} \quad (21)$$

$$T - T_{loss} = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \sum F_j^2 \frac{dG_j}{d\theta} + \underbrace{\frac{dw_{Fe}}{d\theta}}_{0} \quad (22)$$



چون تلفات هسته تقریباً مستقل از چرخش روتور است

چون تلفات هسته به ولتاژ ترمینال ربط دارد

$V \simeq e$

$$\underbrace{T}_{\text{توان مکانیکی وارده به سیستم}} = \underbrace{T_{loss}}_{\text{تلفات چرخشی}} + \underbrace{J \frac{d^2\theta}{dt^2}}_{\text{تغییرات انرژی ذخیره شده در اینرسی}} + \sum F_j^2 \frac{dG_j}{d\theta} \quad (I)$$

گشتاور مورد نیاز جهت شتابگیری

قبلاً داشتیم: $T_m = T_{loss} + J \frac{d\omega}{dt} + T_e \quad (II)$

مقایسه I و II

$$\boxed{T_e = \sum F_j^2 \frac{dG_j}{d\theta}} \quad (\lambda)$$

این بخش فقط برمبنای فاصله هوایی را نیاز دارد

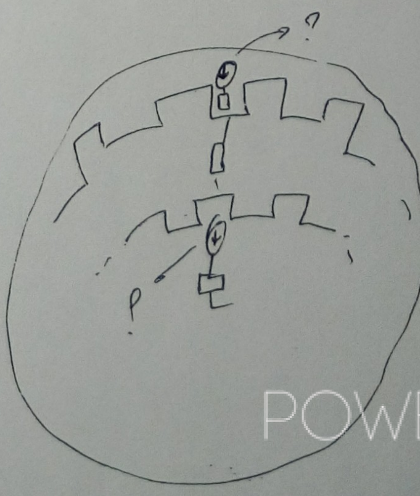
F هم معلوم

برمبنای آرایش دندانه روتور و استاتور

$[\ \ ]\ G_{ij}(\theta)$

قبلاً حساب شده

* مشکل زیر منابع جریان معمول اند؟ با حل معادله زیر آنها را بدست می آوریم

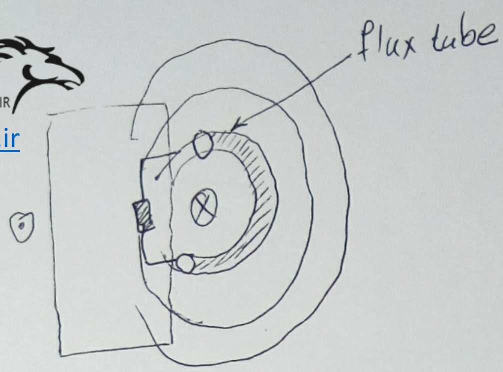


$V_{abc} = R_a i_a + \frac{d\lambda_a}{dt} \rightarrow i = \dots \rightarrow mmf$ مشخص

$\lambda = L_{asas} i_a + \dots$

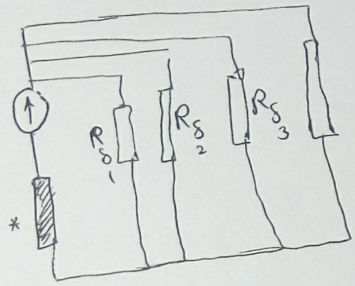
جلسه 22 اردیبهشت :

* گام اول : تشخیص مسیر عبور شار



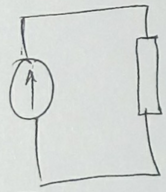
برای محاسبه A باید توجه شود به مسیر عبور شار رسیده ای است.

$$R_{\delta i} = \frac{l}{\mu_0 \times A}$$



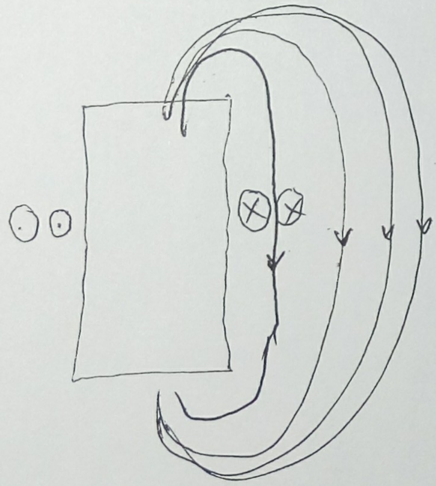
رلوکتانس * در برابر بقیه قابل صرف نظر کردن است

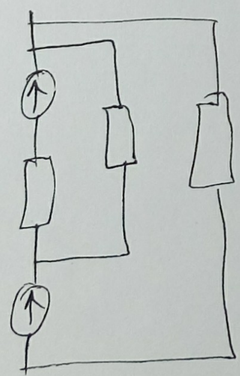
$\Longrightarrow$



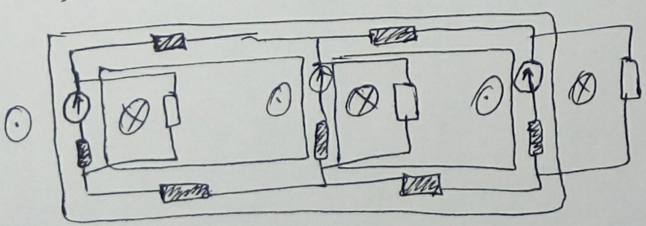
$$R_m = \frac{1}{\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{R_{\delta k}}}$$

*

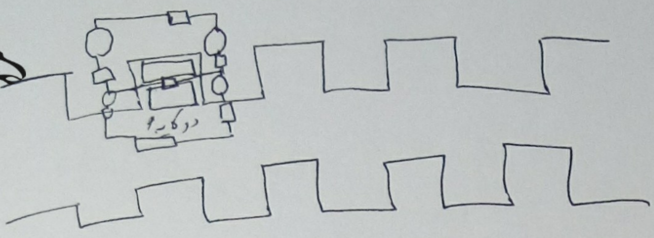




* ترانس سه فاز



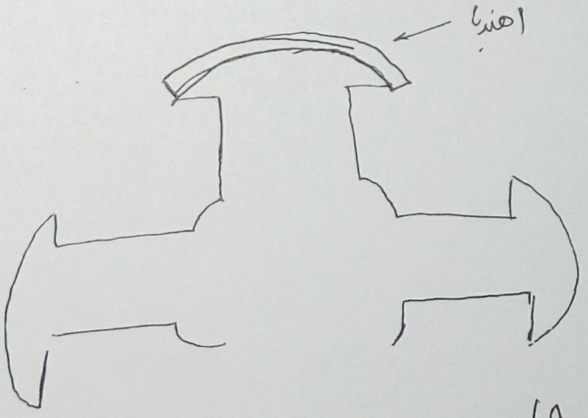
* کتاب 2 : Electric Machi Dynamics of saturated فصل 9.0 .



سوالای ۳ و ۹ کتاب .

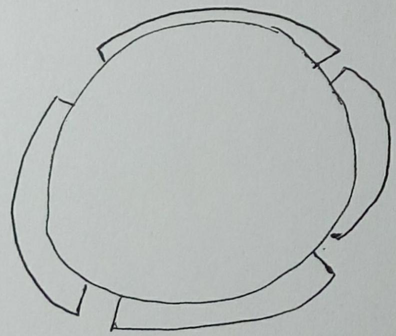
* ماشین سنکرون قطب برجسته شکل 2.28 ص ۱۰

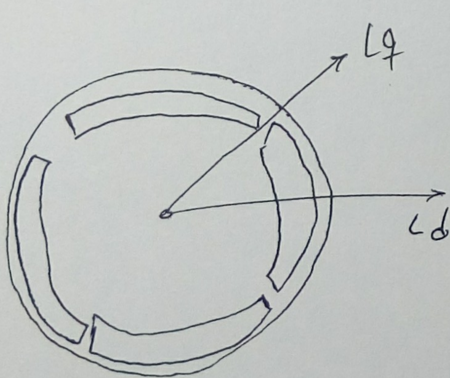
* فایل Modelsazi va tahlil adady abbas zade : ماشین القایی : اسلاید 156 ص ۱۰۱ کتاب .



* Permanent magnet :

اگر ماشین قطب برجسته باشد علاوه بر گشتاور مغناطیسی گشتاور رلوکتانسی هم داریم .





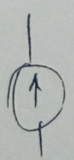
$L_d \neq d_q \longrightarrow$ گشتاور رلوکتانسی داریم

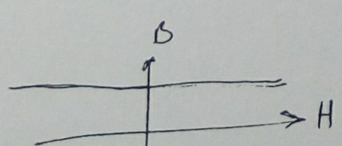
مدلسازی ماشین مغناطیس دائم :

- اول آهنربا را با منبع شار مدل می‌کنیم

ایده‌آل :

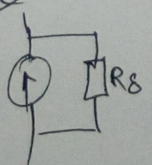
$B_r . A = \varphi_r$

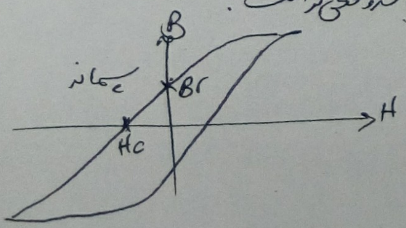




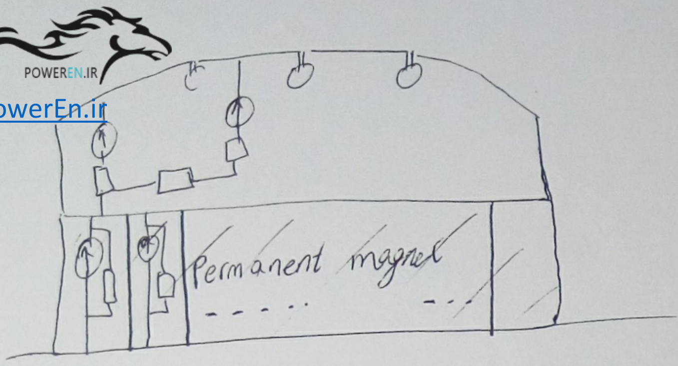
هرچه شیبش تر باشد واقعی تر است .

واقعی :





$$R_8 = \frac{H_c \times l}{B_r . A}$$



اسلاید 158 :

آهنربا را معمولاً به بیش از 10 قسمت تقسیم می‌کنیم

شکل 2.83 .

اسلاید 159 : شکل 2.85 ج خوانده شود.

شکل 2.86 ~~[illegible]~~ شبکه پرمانس اش کشیده شده.

* نوشتن معادلات ماشین القایی :

جلسه 29 اردیبهشت :

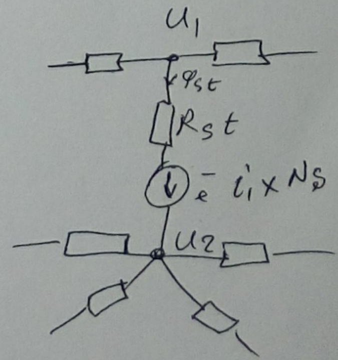
* $[A_{11}][u_1]=[\varphi_{st}]$ روی استاتور

$[A_{11}]$: ماتریس پرمانس مربوطه

$[u_1]_{1\times K}$

$[\varphi_{st}]$ شار هر یک از دندانه‌های استاتور

*
$$[A_{22}][u_2]+[A_{23}][u_3]=[\varphi_{st}]$$
$$[A_{32}][u_2]+[A_{33}][u_3]=[\varphi_{rt}]$$ شار مربوط به روتور
$$[A_{44}][u_4]=[\varphi_{rt}]$$



نوشتن KVL در یوغ استاتور و دندانه‌ها و

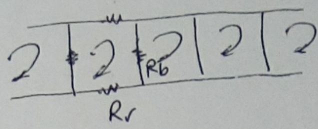
$$[u_2]=[u_1]-[R_{st}][\varphi_{st}]+[F_{st}]$$
$$[u_3]=[u_4]-R_{rt}\varphi_{rt}+F_{rt}$$
$$[F_{st}]_{K\times 1}=[W_s]_{K\times 3}\cdot[i_s]_{3\times 1}$$ جریان استاتور

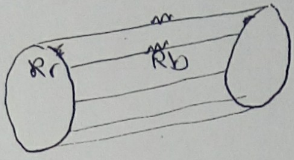
W_s ماتریس سیم‌بندی

جریان‌ها به نوعی وابسته به جریان فاز است که با W_s مشخص می‌شود که بعداً محاسبه می‌شود. مثلاً اگر سیم‌پیچی 4 سری باشد ها هم جریان فاز است و ...

$$[\varphi_{rt}] = [\omega r] \times [i_r]$$

اگر Cage باشد





$$[V_S]_{abc} = [R_S][i_S]_{abc} + \left[\frac{d\lambda_s}{dt}\right]_{abc}$$

$$[V_r] = [R_r][i_r] + \left[\frac{d\lambda_r}{dt}\right]$$

برای هر حلقه

$$0 = 2\, i_{r,j} R_{r,j} - (i_{r,j} - i_{r,j+1}) R_{b,j} + (i_{r,j} - i_{r,j-1}) R_{b,j-1} + \frac{d\varphi_{r,j}}{dt} \quad (3)$$

$$\frac{d\varphi_{r,j}}{dt} = -(2R_{r,j} + R_{b,j} + R_{b,j-1})\, i_{r,j} + R_{b,j}\, i_{r,j+1} + R_{b,j-1} \cdot i_{r,j-1} \quad (4)$$

$$\left[\frac{d\varphi_{rt}}{dt}\right] = -[R_r][i_r] \quad (5) \qquad ; [R_r] = \begin{bmatrix} R_{b,1} + R_{b,nr} + 2R_{r,1} & -R_{b,1} & 0 \cdots 0 & -R_{b,nr} \\ -R_{b,1} & R_{b1}, R_{b,2} + 2R_{r,3} & -R_{b,2} & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -R_{b,nr} & 0 & 0 & R_{b,nr} + R_{b,n_{r-1}} + 2R_{b,nr} \end{bmatrix}$$

معادلات الکتریکی

$$[V_S] = [R_S][i_S] + \left[\frac{d\lambda_s}{dt}\right]$$

$$[V_r] = [R_r][i_r] + \left[\frac{d\lambda_r}{dt}\right] \xrightarrow[{[V_r] = 0}]{\text{Cage برای}} 0 = [R_r][i_r] + \left[\frac{d\lambda_r}{dt}\right] = \left[\frac{d\varphi_{r,t}}{dt}\right]$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J}[T_e - T_m] \quad (6)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega \quad (7)$$

$$T_e = \sum_{i=1}^{ns} \sum_{j=1}^{nr} (V_{2,i} - V_{3,j}) \frac{\partial G_{i,j}}{\partial \theta} \quad (8)$$

$L_{ss} i_s + L_{sr} i_r = \lambda_s$ (9)

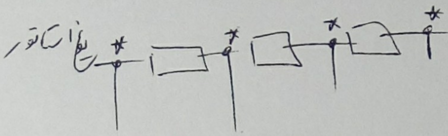
* سعی می‌کنیم از مسئله پرمانسی ۱۹ به اندوکتانس برسیم:

$L_{rs} i_s + L_{rr} i_r = \lambda_r = \varphi_r$ (10)

فرض اول: به دلیل آنکه یوغ استاتور به اشباع نمی‌رود، رلوکتانس یوغ استاتور خیلی کم است و در مقابل سایر رلوکتانس‌ها قابل صرف‌نظر کردن است. پس پتانسیل تمامی نقاط ستاره‌دار یکی است. پس همه نقاط u_1 هستند.

$u_1 = 0 = u_4$

$$\begin{cases} A_{22} u_2 + A_{23} u_3 = \varphi_{st} & (12) \\ A_{32} u_2 + A_{33} u_3 = \varphi_{rt} & (13) \end{cases}$$



همچنین مسئله را برای روتور یعنی u_4 داریم.

$$\begin{cases} u_2 = -R_{st} \varphi_{st} + F_{st} & (15) \\ u_3 = -R_{rt} \varphi_{rt} + F_{rt} & (16) \end{cases}$$

دوم: u_1 و u_4 را مرجع در نظر می‌گیریم $u_1 = u_4 = 0$

$$\begin{cases} A_{22} W_s I_s + A_{23} I_r = (I_{ns \times ns} + A_{22} R_{st}) \varphi_{st} + A_{23} R_{rt} \varphi_{rt} & (17) \\ A_{32} W_s I_s + A_{32} I_r = (I_{nr, nr} + A_{33} R_{rt}) \varphi_{rt} + A_{32} R_{st} \varphi_{st} & (18) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C A_{22} \cdot W_s I_s + C A_{23} I_r = \varphi_{st} + C A_{23} R_{rt} \cdot \varphi_{rt} & (19) \\ D A_{32} W_s I_s + D A_{32} I_r = \varphi_{rt} + D A_{32} R_{st} \varphi_{st} & (20) \end{cases}$$

$$C = [I_{ns \times ns} + A_{22} \cdot R_{st}]^{-1}$$

$$D = [I_{nr, nr} + A_{33} R_{rt}]^{-1}$$

رابطه ۱۹ $\times W_s^T$

$$\mathrm{I} \quad \underbrace{W_s^T \cdot C A_{22} \cdot W_s}_{L_{ss}} I_s + \underbrace{W_s^T \cdot C A_{23}}_{L_{sr}} I_r = \overbrace{\underbrace{W_s^T \varphi_{st}}_{**}}^{\lambda_s} + \underbrace{W_s^T C A_{23} R_{rt} \varphi_{rt}}_{*}$$

$$\mathrm{II} \quad \underbrace{D A_{32} W_s}_{L_{rs}} I_s + \underbrace{D A_{32}}_{L_{rr}} I_r = \underbrace{\varphi_{rt}}_{****} + \underbrace{D A_{32} R_{st} \varphi_{st}}_{***}$$

L_{rs} چون Cage $\longrightarrow \lambda_r$

فرض سوم: اگر ماشین خوب طراحی شده باشد عبارت * در برابر ** و عبارت *** در برابر **** قابل صرف‌نظر کردن است.

حال پس از فرض سوم اندوکتانس‌ها از عبارات I و II محاسبه شوند.

پس از محاسبه اندوکتانس ؟ ماشین بصورت الکتریکی قابل مدلسازی است.

چون حالت دائمی را می‌خواهیم یک مقدار اولیه دلخواه می‌دهیم:

$$\left\{\begin{array}{l} [V_s] = R_s i_s + \dfrac{d\lambda_s}{dt} \\ [V_r] = R_r i_r + \dfrac{d\lambda_r}{dt} \\ \dot{\omega} = \dfrac{1}{J}[T_e - T_w] \\ \dot{\gamma} = \omega \end{array}\right\} \quad \begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{\omega} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = [A]\begin{bmatrix} \lambda \\ \omega \\ \gamma \end{bmatrix} + B[V]$$

بر اساس مقادیر: $\lambda_s, \lambda_r \longrightarrow \varphi_{st}, \varphi_{rt}$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ss} & L_{sr} \\ L_{rs} & L_{rr} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_s \\ \lambda_r \end{bmatrix} = \dots$$

$$\cancel{A_{32} W_s I_s + A_{33} I_r - A_{32} R_{st}\, \varphi_{st}} = \cancel{\left(\frac{I}{W_r N_r} + A_{33} R_{st}\right)} \varphi_{rt}$$

$$F_{st} = W_s \cdot i_s \dots$$

$$F_{rt} = W_r \cdot i_r \dots$$

$$\xrightarrow{16,\ 15} [U_2], [U_3]$$

$$\longrightarrow T_e = \sum\sum (U_2 - U_1) \frac{dG}{dU} \dots$$

معادلات حالت الکتریکی - مکانیکی

↓

$\lambda_s, \lambda_r, \theta, \omega$

↓

$\theta \longrightarrow L_{ss}, L_{rr}, L_{rs}, L_{sr}$

$$\begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} = [L]^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_s \\ \lambda_r \end{bmatrix}$$

↓

از حل مسئله پتانسیل

$u_2, u_3 = \dots$

↓

$T_e = \sum\sum \dots$

$\dot{\lambda}_s = \dots$

$\varphi_{rt} = \lambda_r = \dots$

$\dot{\omega} = \dots$

$\theta = \dots$

↓

حل معادلات حالت

↓

$$\begin{bmatrix} w_s^T A_{22} w_s & w_s^T A_{23} & w_s^T A_{22} R_{st} \\ A_{22} w_s & A_{23} & -(I_{ns} + A_{22}) R_{st} \\ A_{32} w_s & A_{35} & -A_{32} R_{st} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s \\ I_r \\ \varphi_{st} \end{bmatrix} = \dots$$

$$\dots = \begin{bmatrix} \lambda_s + w_s^T A_{23} R_{rt} \varphi_{rt} \\ A_{23} R_{rt} \varphi_{rt} \\ (I_{nr} + A_{33} R_{rt}) \varphi_{rt} \end{bmatrix}$$

ماتریس واحد $\rightarrow n_r \times n_r$

↓ I_s, I_r, φ_{st}

$F_s = w_s \times I_s$

$F_r = w_r \times I_r$

↓ F_s, F_r

روابط ۱۵، ۱۶

↓ u_2, u_5

$T_e = \sum\sum$

↓

اگر موتور عوض شود یعنی از اتفاقی مثلا سوخته شده باشد. فقط سیم‌بندی پرمانی عوض می‌شود. چون داریم. دیگر اول $V_r = 0$ که در فرم الاصطلاحیت

$$v_r = R_r \cdot I_r + \frac{d\lambda_r}{dt}$$

* فایل آف ، .... ، اصلاحی :

* سه شنبه ۷ خرداد :

* FEM : 2D / 3D ← اول مش بندی ← حل معادله ماکسول.

معادله ماکسول

1) $\nabla \times H = J \pm \frac{\partial D}{\partial t}$

2) $\nabla \cdot B = 0$

3) $\nabla \times E = \frac{\partial B}{\partial t}$

4) $\nabla \cdot D = \rho$

- D: چگالی میدان الکتریکی یا بار الکتریکی

- ρ: بار ساکن

- $\frac{\partial D}{\partial t}$: جریان الکتریکی خاصیت خازنی

$$\text{if } \nabla \cdot B = 0 \longrightarrow B = \nabla \times A$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \nabla \times A = 0$$

$$B = \mu H = \nabla \times A \longrightarrow H = \frac{1}{\mu} \nabla \times A \longrightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times A = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

هر یک از مثلث‌هایی که در مش‌بندی درست کردیم، باید این معادلات را حل کنیم.

در هیچ از جاهای موتور یعنی آهن، هوا و مس μ هم مقدار نیست.

$\mu = \mu_0$ هوا

$\mu = \mu_r \mu_0$ آهن

اسکالراند

$$\text{معادله ما} \Rightarrow \frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times A = J_z + \frac{\partial D}{\partial t} \Rightarrow \frac{1}{\mu}\left[\cancel{\nabla(\nabla \cdot A)} - \nabla^2 A\right] = J \vec{a}_z + \frac{\partial D}{\partial t}$$

فقط در جهت z جریان داریم

$$\Rightarrow -\frac{\nabla^2 A}{\mu} = J \vec{a}_z + \frac{\partial D}{\partial t} \Rightarrow$$

تعریف کرل

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cancel{A_x} & \cancel{A_y} & A_z \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -\mu J - \mu \frac{\partial D}{\partial t}$$

در هر مثلث معادله PDE را حل کنیم:

$$A_z \longrightarrow B = \nabla \times A \longrightarrow H, \varphi$$

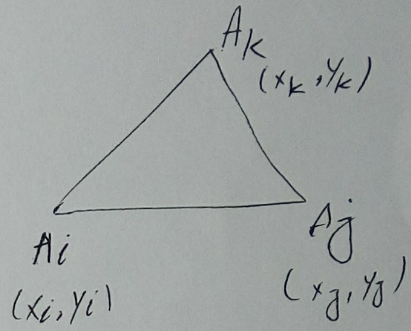
اگر ورودی سینوسی باشد در حوزه فیزوری می توان حل کرد..

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}=-\mu J + \mu j\omega\sigma$$

باقی

$$R=\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}+J_0$$

در صورت پیدا کردن A به صورت دقیق، در هر نقطه از مثلث R باید صفر باشد



$$\int_{\Omega} R \cdot \underbrace{\omega}_{\text{وزن}}\, dx\, dy = 0$$

$\Rightarrow$ اگر این اتفاق بیفتد A محاسبه شده دقیق ترین A است.

$$-\iint_{\Omega}\omega\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)dx\,dy=\iint \omega J \cdot dx\,dy \qquad (*)$$

$$\Rightarrow = \iint \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial A}{\partial y}\right)dx\,dy-\oint \frac{1}{\mu}\,\omega\,\frac{\partial A}{\partial n}\,dc$$

برای مثلث ۰ می توان اثبات کرد

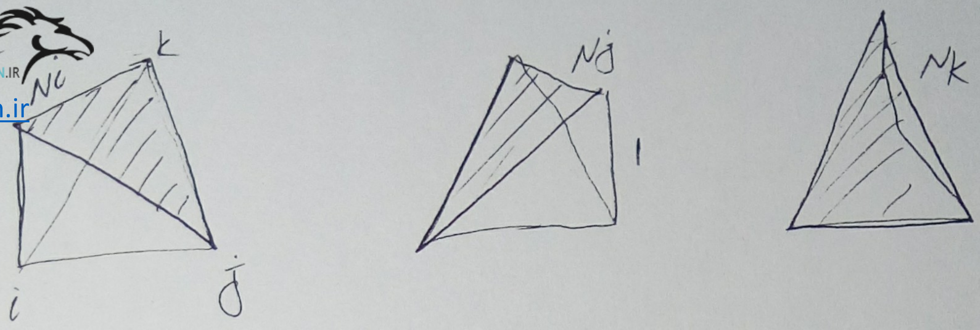
$$A=C_1+C_2x+C_3y \longrightarrow \begin{cases} A_i=C_1+C_2x_i+C_3y_i \\ A_j=C_1+C_2x_j+C_3y_j \\ A_k=C_1+C_2x_k+C_3y_k \end{cases} \longrightarrow \left\{ C_1=\frac{A_i\begin{vmatrix}x_i & y_i\\ x_k & \end{vmatrix}}{} \right.$$

$$\longrightarrow \begin{cases} C_1=\dfrac{A_i\begin{vmatrix}x_i & y_i\\ x_k & y_k\end{vmatrix}+A_j\begin{vmatrix}x_k & y_k\\ x_i & y_i\end{vmatrix}+A_k\begin{vmatrix}x_i & y_i\\ x_j & y_j\end{vmatrix}}{2\Delta} \\[2ex] C_2=\dfrac{A_i\begin{vmatrix}1 & A_i & y_i\\ 1 & A_j & y_i\\ 1 & A_k & y_k\end{vmatrix}}{2\Delta} \; ; \; C_3=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & x_i & A_i\\ 1 & x_j & A_j\\ 1 & x_k & A_k\end{vmatrix}}{2\Delta} \\[2ex] \Delta=\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_k & y_k\end{vmatrix} \end{cases}$$

$$N_i=(a_i+b_ix+c_iy)/2\Delta=\omega_1$$

$$N_j=(a_j+b_jx+c_jy)/2\Delta=\omega_2$$

$$A=\sum_{i=1}^{k}N_i(x,y)\,\vec{A_i} \quad , \quad N_k=(a_k+b_kx+c_ky)/2\Delta=\omega_3$$



حل: $\frac{\partial A}{\partial x} = \cdots \; ; \; \frac{\partial A}{\partial y} = \cdots \; ; \; \frac{\partial \omega}{\partial x} = \cdots \; ; \; \frac{\partial \omega}{\partial y} = \cdots$

با جواب اشکال * صفحه

$$-\frac{1}{4\mu\Delta} \cdot \begin{bmatrix} b_i^2 + C_i^2 & b_i b_j + C_i C_j & b_i b_k + C_i C_k \\ b_i b_j + C_i C_j & b_j^2 + C_j^2 & b_j b_k + C_j C_k \\ b_i b_k + C_i C_k & b_j b_k + C_j C_k & b_k^2 + C_k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \end{bmatrix} = \int \omega_j \cdot dx\,dy$$

$$= \cdots = \begin{bmatrix} \iint \omega_i J_0 \, dx\, dy \\ \iint \omega_j J_0 \, dx\, dy \\ \iint \omega_k J_0 \, dx\, dy \end{bmatrix} = J_0 \begin{bmatrix} \iint \omega_i \, dx\, dy \\ \iint \omega_i \, dx\, dy \\ \iint \omega_k \, dx\, dy \end{bmatrix}$$