جزوه

کنترل خطی

POWEREN.IR

PowerEn.ir

Date: صفر   Subject:

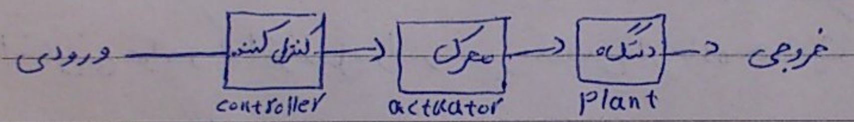
سیستم های کنترل به دو دسته تقسیم می شوند:

۱- سیستم های حلقه باز open loop system   ۲- سیستم های حلقه بسته closedloop system

سیستم حلقه باز: به سیستمی گفته می شود که هیچ گونه مقایسه ای بین ورودی و خروجی انجام نمی گیرد

مثل لباسشویی، نان تست کن، بخاری نفتی، راه رفتن انسان با چشمان بسته.

بلوک دیاگرام سیستم حلقه باز به صورت زیر می باشد.



در سیستم حلقه باز ورودی براساس اطلاعات قبلی مدل سیستم برای ایجاد خروجی اعمال می شود

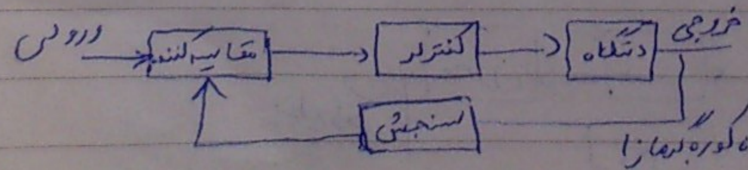
کنترل کننده سیگنال ورودی را دریافت نموده و با تغییر مناسب و تقویت آن آنرا به محرک

ارسال می کنند. محرک (موتور، دریچه، شیر) پس از دریافت سیگنال از کنترل کننده نیروی لازم

را به دستگاه اعمال می کند.

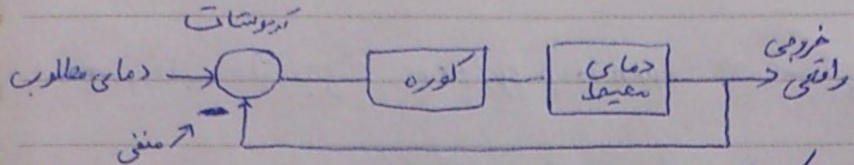
سیستم حلقه بسته: به سیستمی گفته می شود که در هر لحظه ورودی با خروجی مقایسه می شود که

به آن فیدبک feedback گویند.   ← بلوک دیاگرام حلقه بسته



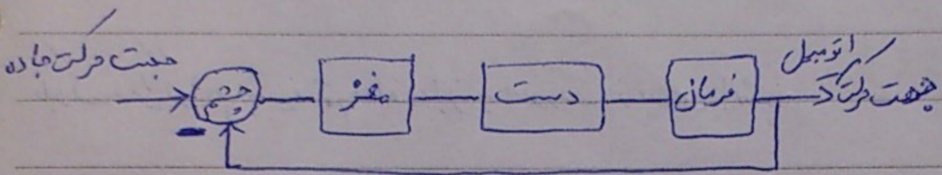
مثل آبگرمکن، راه رفتن با چشمان باز، کوره گرمازا

مثال) نمودار کنترل دمای محیط را رسم کنید.



ترموستات وسیله‌ای است که معین می‌کند کوره روشن باشد و یا نباشد.

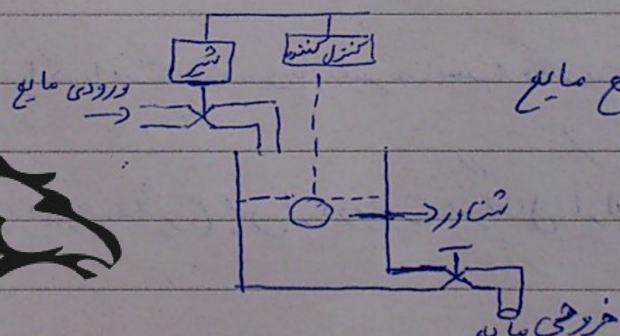
مثال) حرکت اتومبیل در مسیر مناسب جاده

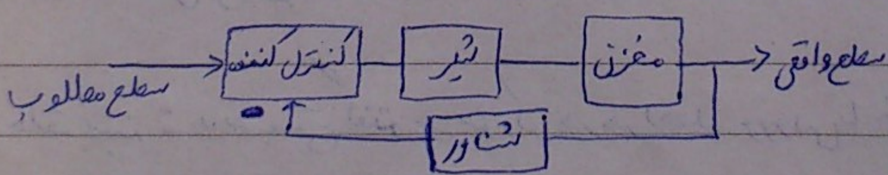


انسان می‌خواهد که اتومبیل را در مسیر مناسبی از جاده هدایت کند که این عمل با نگاه کردن

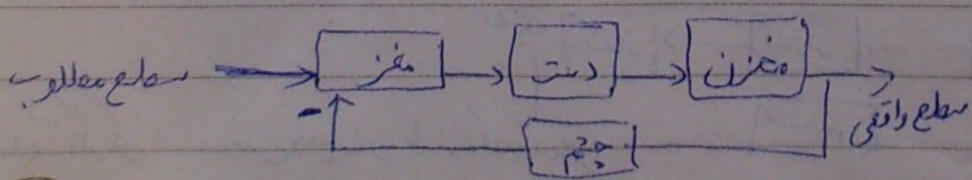
پیوسته به مسیر حرکت اتومبیل نسبت به جهت جاده انجام می‌دهد.

مثال) کنترل سطح مایع





اگر کنترل کننده انسان باشد بلوک دیاگرام به صورت زیر می‌باشد



مزیت و معایب سیستم حلقه بسته و حلقه باز

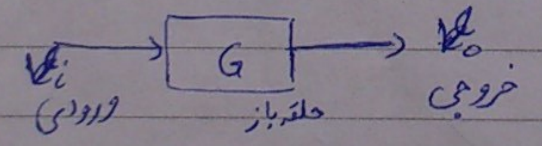
سیستم حلقه باز:
- هزینه کم
- پاسخ کند
- اثر اغتشاش یا نویز بر روی خروجی را نمی تواند تضعیف نماید
- سادگی دستگاه

سیستم حلقه بسته:
1. هزینه بالا
2. پاسخ سریع
3. باعث کاهش حساسیت می شود
4. موجب افزایش پایداری سیستم می شود
5. موجب کاهش نویز و اغتشاش می شود
6. سیستم ناپایدار را می توان پایدار نمود

مزیت ها

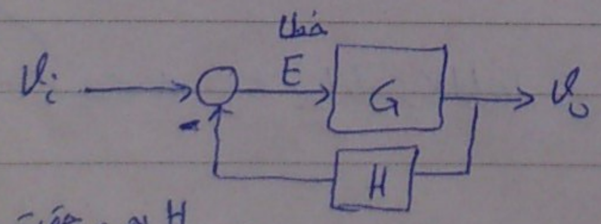
اثرات فیدبک بر روی بهره، حساسیت، نویز

1. اثر فیدبک بر روی بهره



G بهره یا Gain حقیقی است

بهره نهایی $T = \frac{V_o}{V_i} = G$ (1)



H بهره حقیقی

$$T = \frac{V_o}{V_i} = \frac{G}{1+GH} \quad (2)$$

Date: Subject:

اثبات :

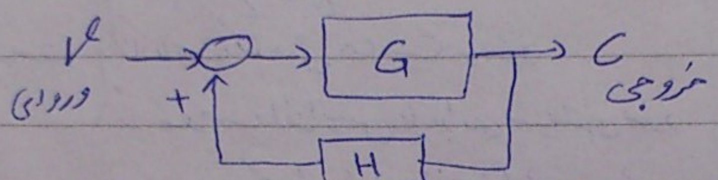
$E = V_i - H V_o$

$V_o = E G$

$V_o(1+GH) = V_i G \rightarrow \frac{V_o}{V_i} = \frac{G}{1+GH}$

با مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که فیدبک منفی باعث کاهش بهره می شود :

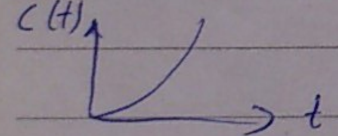
فیدبک مثبت :



$T = \frac{G}{1-GH}$ (۳)

فیدبک مثبت باعث افزایش بهره می شود

if $G = \frac{1}{H} \rightarrow T = \infty \rightarrow$ در این حالت سیستم ناپایدار می شود



پاسخ به سمت بینهایت می رود

(۲) اثر فیدبک بر روی حساسیت : یک سیستم کنترل خوب به سیستمی گفته می شود که نسبت به تغییر پارامترها

بی تفاوت باشد (حساس نباشد)

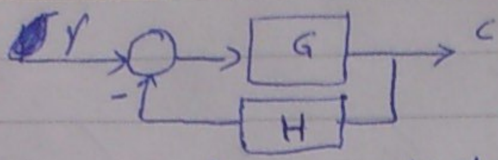
حساسیت کمیت M نسبت به پارامتر K از رابطه زیر بدست می آید :

$$S_k^M = \frac{\partial M}{\partial k} \cdot \frac{k}{M}$$

حساسیت

sensetivity

به طور کلی در یک سیستم حلقه بسته داریم:



G و H پارامتر سیستمی باشد

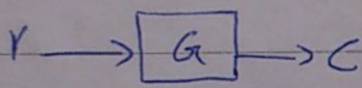
الف) اگر G شامل پارامتر K باشد

$$S_K^T = \frac{1}{1+GH} S_K^G$$

ب) اگر H شامل پارامتر K باشد داریم

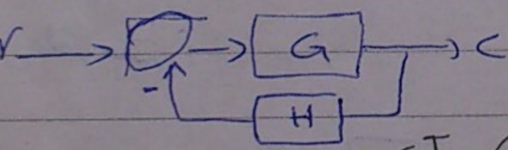
$$S_K^T = \frac{-GH}{1+GH} S_K^H$$

مثال) حساسیت سیستم حلقه باز و بسته را بررسی کنید؟

1) 

$$T = \frac{C}{R} = G$$

$$S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G}\cdot\frac{G}{T} = 1\cdot\frac{G}{T} = 1\cdot\frac{G}{G} = 1 \quad (1)$$

2) 

$$T = \frac{G}{1+GH} \quad , \quad S_G^T = \frac{(1+GH)-GH}{(1+GH)^2}\cdot\frac{G}{\frac{G}{1+GH}} = \frac{1}{1+GH} \quad (2)$$

بنابراین با مقایسه (1) و (2) نتیجه می گیریم که فیدبک منفی باعث کاهش حساسیت شده است

$$S_H^T = \frac{\partial T}{\partial H}\cdot\frac{H}{T} = \frac{-G^2}{(1+GH)^2}\cdot\frac{H}{\frac{G}{1+GH}} = \frac{-GH}{1+GH}$$

اگر $|GH|$ افزایش یابد S_H^T بسمت 1- میل خواهد کرد این بدان معنی است که

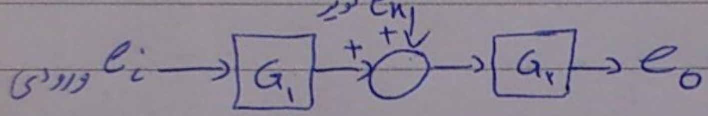
فیدبک در کاهش حساسیت نسبت به پارامتر فیدبک اثر چندانی ندارد چون صورتش H دارد

(۳) اثر فیدبک بر روی نویز: اثر فیدبک بر روی نویز بستگی به محل ورود نویز دارد

اگر نویز در محل ورودی اصلی سیستم وارد شود فیدبک اثری روی آن نخواهد گذاشت

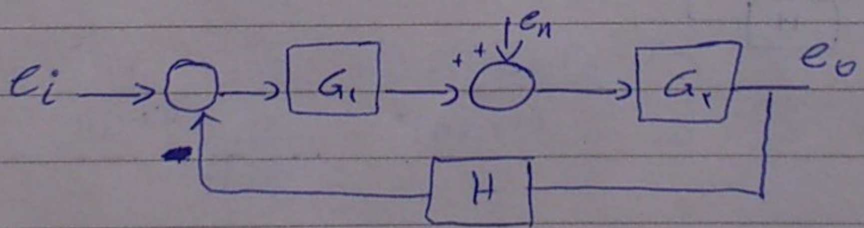
زیرا هر عملی که روی آن انجام شود روی ورودی اصلی نیز تأثیر می گذارد.

فرض کنید نویز بین دو طبقه تقویت کننده مطابق شکل زیر وارد شود



$$e_o = G_1 G_2 e_i + G_2 e_n \quad (1)$$ از جمع آثار یکبار e_n صفر و یک بار e_i صفر

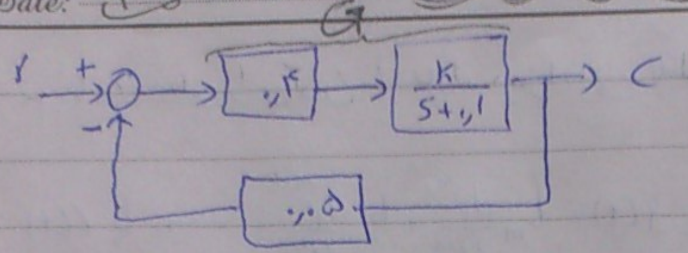
برای حلقه بسته



از جمع آثار $$e_o = \frac{G_1 G_2}{1+G_1 G_2 H} e_i + \frac{G_2}{1+G_1 G_2 H} e_n \quad (2)$$ یکبار e_n صفر و یکبار e_i صفر

پس با مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که فیدبک باعث کاهش اثرات نویز گردیده است

مثال) حساسیت S_k^T را در سیستم زیر بدست آورید؟



$$G = \frac{0.4k}{s+0.1} \quad , \quad H = 0.05$$

$$T = \frac{G}{1+GH}$$

چون G شامل پارامتر k است پس از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$$S_k^T = \frac{1}{1+GH} S_k^G$$

$$S_k^G = \frac{\partial G}{\partial k} \cdot \frac{k}{G} = \frac{0.4}{s+0.1} \cdot \frac{k}{\frac{0.4k}{s+0.1}} = 1$$

$$S_k^T = \frac{1}{1+\left(\frac{0.4k}{s+0.1}\right)(0.05)}(1) = \frac{s+0.1}{s+0.02k+0.1}$$

اگر $k=5$ در نظر گرفته شود

$$S_k^T = \frac{s+0.1}{s+0.2}$$

در فرکانس های پایین ($s \to 0$) $S_k^T = 0.5$ و در فرکانس های بالا ($s \to \infty$) $S_k^T = 1$

مدل سازی سیستم های خطی:

۱- در حوزه زمان: معادلات دیفرانسیل، معادلات فضای حالت، پاسخ زمانی

حوزه فرکانس: تابع تبدیل سیستم، پاسخ فرکانسی

سیستم های خطی را می توان با معادله دیفرانسیلی بشکل زیر توصیف نمود.

$$a_n \frac{dy^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{dy^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots\cdots + a_0\, y(t) = b_m \frac{dr^m}{dt^m} + b_{m-1}\frac{dr^{m-1}}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0\, r(t) \quad , n \geq m$$

معادله فضای حالت (State space equation)

برای بدست آوردن معادلات فضای حالت ابتدا متغیرهای حالت که بصورت x_1 و x_2 و ... تعریف می شود معرفی می کنیم

بطور کلی عناصر ذخیره کننده انرژی را میتوان بعنوان متغیر حالت تعریف کرد

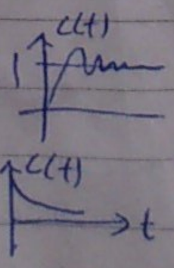
مثل ولتاژ خازن $V_c = x_2$ یا جریان القاگر $I_L = x_1$ یا مثل سرعت زاویه ای $W = x_3$

سپس با استفاده از این متغیرها (عنصرها) معادلات حالت در حالت کلی به صورت زیر می باشد

$$\text{معادله فضای حالت}\begin{cases}\dot{X} = AX + BU \\ y = CX\end{cases}$$

A و B و C ماتریس های ثابت هستند، $U \rightarrow$ ورودی ، $y \rightarrow$ خروجی

متغیر حالت $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

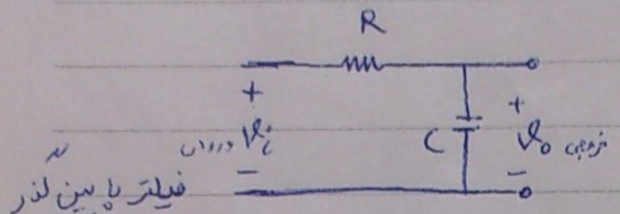


پاسخ پله step response

پاسخ ضربه Impulse response

پاسخ زمانی

مثال) مدار شکل زیر داده شده است



$$-V_i + Ri + V_c = 0 \Rightarrow -V_i + RC\frac{dV_c}{dt} + V_c = 0 \quad , \; V_c = V_o$$

$$\boxed{\frac{dV_o}{dt} + \frac{1}{RC}V_o = \frac{1}{RC}V_i}$$ معادله دیفرانسیل درجه اول

پاسخ زمانی ← $V_o(t) = \underbrace{K_1}_{\text{جواب خصوصی}} + \underbrace{K_2 e^{-\frac{t}{RC}}}_{\text{جواب عمومی}} \quad , \; K_1 = \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC}} = 1$

برای بدست آوردن معادله فضای حالت $V_c = V_o = X$ در نظر بگیرید و $V_i = u$

$$\frac{dX}{dt} + \frac{1}{RC}X = \frac{1}{RC}u \quad , \; \dot{X} = \overbrace{-\frac{1}{RC}}^{A}X + \overbrace{\frac{1}{RC}}^{B}u$$

$$y = CX = X \Rightarrow C = 1$$

$A = -\frac{1}{RC} \; , \; B = \frac{1}{RC}$ } خروجی $y = V_o = X$

تابع تبدیل سیستم (transfer function)

نسبت لاپلاس خروجی به لاپلاس ورودی را تابع تبدیل گویند.

$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}$$

$n \geq m$ (سببی) سیستم causal

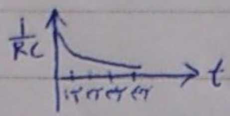
در مثال فوق داشتیم که

$$\frac{dV_o}{dt} + \frac{1}{RC}V_o = \frac{1}{RC}V_i$$

$$sV_o(s) + \frac{1}{RC} V_o(s) = \frac{1}{RC} V_i(s)$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

پاسخ ضربه $h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$



ثابت زمانی $\tau = RC$

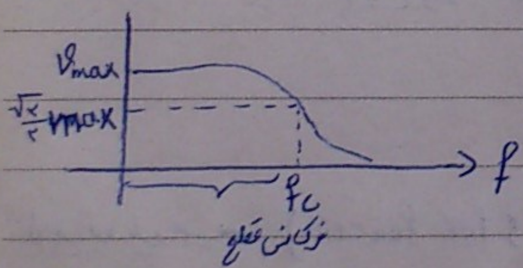
در $t = 4\tau$ پاسخ به سمت صفر می‌رود $e = 2.718$

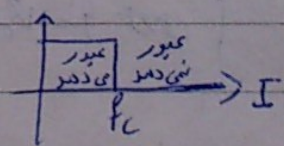
پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$

$s = j\omega \Leftarrow$

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{RC}}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$

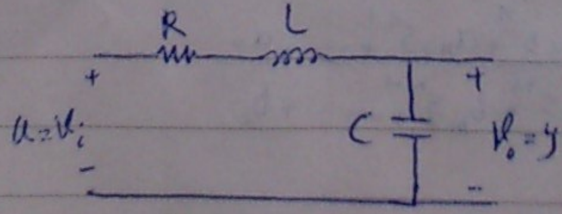
$$|H(j\omega)| = \frac{\frac{1}{RC}}{\underbrace{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}}_{\text{اندازه}}} \underbrace{\angle \tan^{-1}\frac{\omega}{\frac{1}{RC}}}_{\text{آرگومان زاویه}} = \frac{\frac{1}{RC}}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}} \angle -\tan^{-1}\omega RC$$





$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \Rightarrow$ $\frac{\sqrt{2}}{2} V$ ماکزیمم است

تمرین) معادلات فضای حالت مدار زیر را بدست آورید



$I_L = x_1$ $V_C = x_2$

Date: ص ع

Subject:

مدل سازی سیستم های مکانیکی

سیستم های مکانیکی از نظر نوع حرکت به دو دسته تقسیم می شوند

۱- سیستم های مکانیکی با حرکت انتقالی (translational)

۲- 〃 〃 〃 〃 دورانی (Rotational)

در سیستم های الکتریکی سیگنال های الکتریکی عبارتند از

۱- ولتاژ ۲- جریان ۳- بار و اجزا آن عبارتند از ۱- مقاومت ۲- سلف ۳- خازن ۴- دیود

در سیستم های مکانیکی با حرکت انتقالی سیگنال ها عبارتند از ۱- نیرو f ۲- سرعت V ۳- تغییر مکان

و اجزا آن عبارتند از ۱- جرم m ۲- فنر خطی K ۳- اصطکاک B

سیگنال های مکانیکی با حرکت دورانی ۱- گشتاور T ۲- سرعت زاویه ای ω

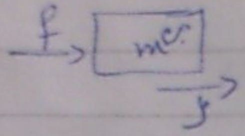
۳- جابه جایی زاویه θ ۴- شتاب زاویه ای

و اجزا آن عبارتند از ۱- اینرسی J ۲- فنر حلقوی ۳- اصطکاک دورانی

جرم:

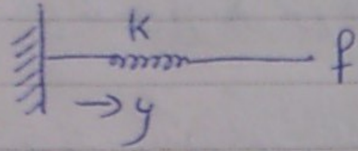
هرگاه به جسمی به جرم m نیرویی وارد شود و به اندازه x تغییر مکان یابد

Raz



رابطه f و y به صورت زیر می شود $f = m\frac{d^2y}{dt^2} = m\ddot{y}$

جرم انرژی جنبشی را ذخیره می کند

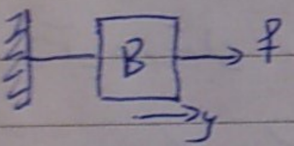


k ضریب سختی فنر

$f(t) = k\,y(t)$ انرژی پتانسیل را ذخیره می کند

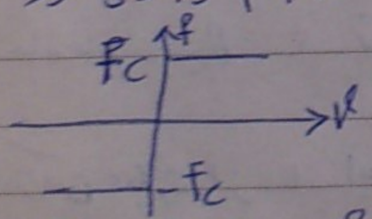
اصطکاک:
- چسبندگی viscosity
- کولمب
- استاتیکی

اصطکاک چسبندگی: نیروی مقاومی که هنگام حرکت دو جسم ایجاد می شود و به سرعت دو جسم بستگی دارد. معمولاً به صورت میرا کننده damper نشان می دهند



$f = B\frac{dy}{dt}$

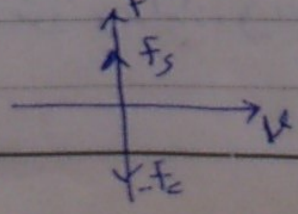
اصطکاک کولمب: نیروی مقاومی که در هنگام حرکت دو جسم ایجاد می شود و در طول حرکت ثابت است (غیرخطی) میباشد



$$f(c) = \pm F_c \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\left|\frac{dy}{dt}\right|}\right)$$

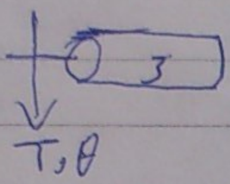
اصطکاک استاتیکی: نیروی مقاومی که می خواهد در لحظه شروع حرکت مانع حرکت می شود و پس از آن از بین می رود

$f(t) = \pm F_s v$



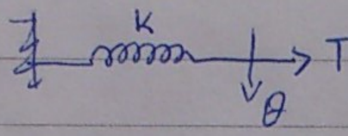
اینرسی J :

هرگاه به جسمی به اینرسی J گشتاور وارد شود معادله آن به صورت زیر می باشد



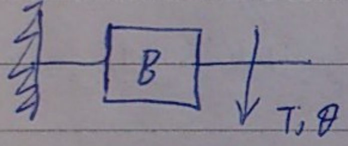
گشتاور $T = J\frac{d^2\theta}{dt^2} = J\frac{d\omega}{dt} = J\ddot{\theta}$ ، $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

فنر حلقوی :



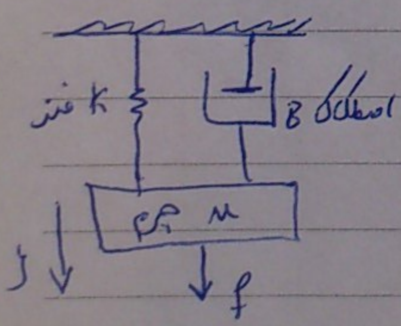
$T = K\theta(t)$

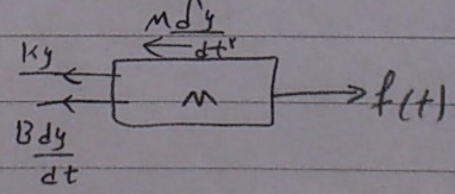
اصطکاک دورانی :



$T = B\frac{d\theta(t)}{dt}$

مثال) معادله دینامیکی شکل زیر را بنویسید و معادله فضای حالت و تابع تبدیل آنرا بدست آورید.





$$M\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + Ky = f(t)$$

$\Sigma F = ma$

$$\text{یا} \quad M\ddot{y} + B\dot{y} + Ky = f(t)$$

$Ms^2Y(s) + BsY(s) + KY(s) = F(s)$

$Y(s)[Ms^2 + Bs + K] = F(s) \rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K}$

Date: Subject:

$$y = x_1,\quad \dot{y} = x_2 \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 \quad ، \quad m\dot{x}_2 + B x_2 + k x_1 = F$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-k}{m}x_1 - \frac{B}{m}x_2 + \frac{F}{m}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-k}{m}x_1 - \frac{B}{m}x_2 + \frac{F}{m} \end{cases}$$

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{B}{m} \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_{B} F$$

اگر خروجی را x_1 در نظر بگیریم

$$Y = x_1$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

تشابه سیستم های مکانیکی و الکتریکی

۱- تشابه نیرو - ولتاژ

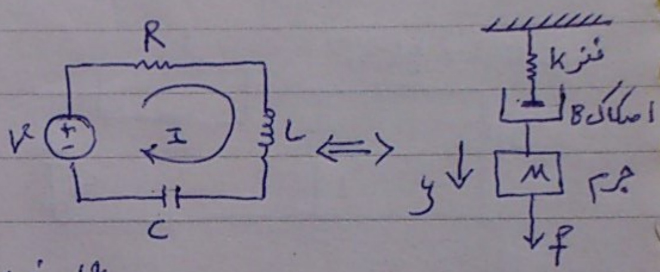
الف) اگر عناصر مکانیکی سری باشند تشابه الکتریکی آن ها نیز سری است.

ب) اگر عناصر مکانیکی موازی باشند تشابه الکتریکی آن ها نیز موازی است.

$$M\frac{d^2y}{dt^2}+B\frac{dy}{dt}+ky=f(t) \quad (۱)$$

یا

$$M\ddot{y}+B\dot{y}+ky=f(t)$$



$$-v+RI+L\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}\int i\,dt=0 \quad , \quad i=\frac{dq}{dt}$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=v \quad (۲)$$

از مقایسه (۱) و (۲) داریم:

مکانیکی	f	K	B	M	y	$\dot{y}$
الکتریکی	v	$\frac{1}{C}$	R	L	q	i

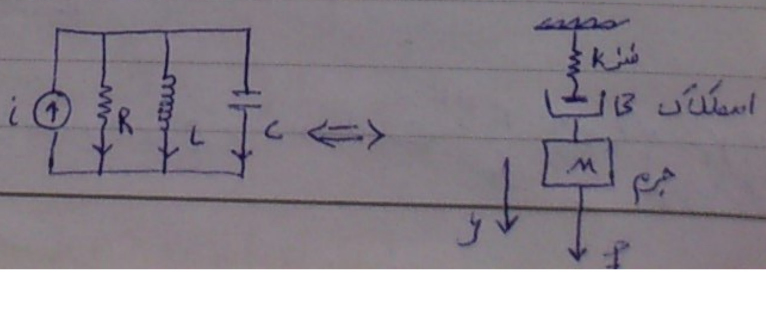
۲- تشابه نیرو - جریان

الف) اگر عناصر مکانیکی سری باشند تشابه الکتریکی آن ها موازی است.

ب) " " " موازی باشند " " " سری است.

$$M\ddot{y}+B\dot{y}+ky=f(t)$$

$$i=\frac{v}{R}+\frac{1}{L}\int v\,dt+C\frac{dv}{dt} \quad (۱)$$

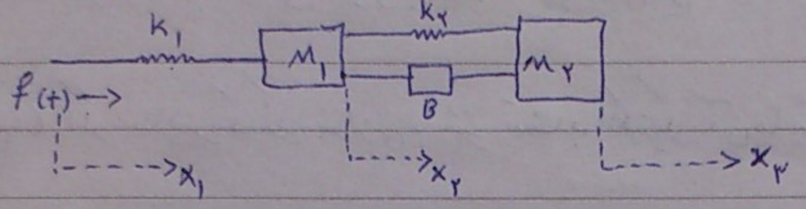


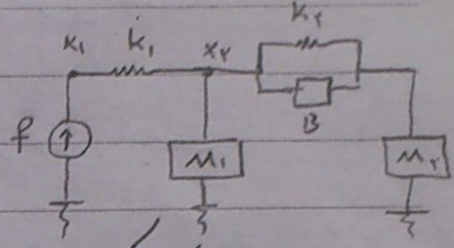
$$M\dot{v}+Bv+k\int v=f(t) \quad (۲)$$

مکانیکی	f	K	B	M	v	y (سرعت)
الکتریکی	i	$\frac{1}{L}$	$\frac{1}{R}$	C	v	φ

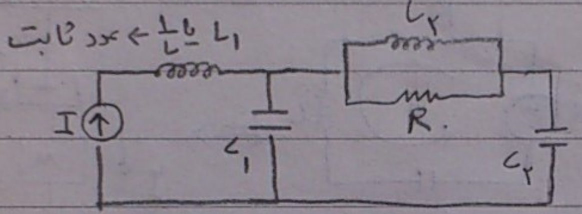
L ← چون مقدار ثابت است

مثال) تشابه الکتریکی سیستم (نیرو - جریان) و مکانیکی را رسم کنید؟



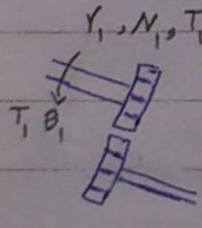


مدار معادل مکانیکی



چرخ دنده (Gear train)

وسیله‌ای است که انرژی را از یک جای سیستم به جای دیگر سیستم منتقل می‌کند و برای کاهش سرعت و افزایش گشتاور بکار می‌رود. در واقع همانند یک ترانسفورماتور عمل می‌کند.



N_1 و N_2 تعداد دنده‌ها، r_1 و r_2 شعاع های چرخ دنده

T_1 و T_2 گشتاور چرخ دنده‌ها، θ_1 و θ_2 جابه‌جایی زاویه‌ای

از اینرسی و اصطکاک چشم پوشی کرده‌ایم

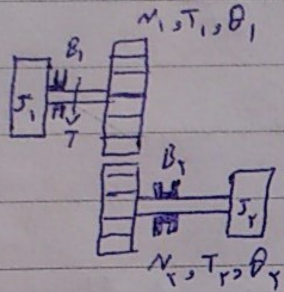
الف) تعداد دنده‌ها متناسب با شعاع های چرخ دنده است: $N_1 r_2 = N_2 r_1 \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{r_1}{r_2}$ (1)

ب) فاصله‌ای که بر روی هر چرخ دنده پیموده می‌شود یکسان است (۲) $r_1\theta_1 = r_2\theta_2 \rightarrow \frac{r_1}{r_2}=\frac{\theta_2}{\theta_1}$

ج) کار انجام شده توسط یک چرخ دنده با کار دیگری یکسان است (۳) $T_1\theta_1 = T_2\theta_2 \rightarrow \frac{T_1}{T_2}=\frac{\theta_2}{\theta_1}$

با توجه به معادلات فوق $\frac{T_1}{T_2}=\frac{N_1}{N_2}=\frac{I_2}{I_1}$

مثال) گشتاور اعمالی را بدست آورید؟



J_1 و J_2 اینرسی چرخ دنده‌ها

B_1 و B_2 اصطکاک چرخ دنده‌ها

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{N_1}{N_2}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{\theta_2}{\theta_1} \quad (1)$$

گشتاور چرخ دنده دوم $T_2 = J_2\frac{d^2\theta_2}{dt^2}+B_2\frac{d\theta_2}{dt}$ (۲)

$$T - T_1 = J_1\frac{d\theta_1^2}{dt^2}+B_1\frac{d\theta_1}{dt} \quad (3)$$

از (۱) داریم $T_1 = \frac{N_1}{N_2}T_2$ (۴) $\rightarrow$ (۵) $T_1 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)\left[J_2\frac{d^2\theta_2}{dt^2}+B_2\frac{d\theta_2}{dt}\right]$

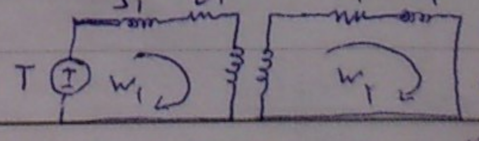
$$\frac{N_1}{N_2}=\frac{\theta_2}{\theta_1} \rightarrow \theta_2 = \theta_1\left(\frac{N_1}{N_2}\right) \quad (6)$$

$$T_1 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_2\frac{d^2\theta_1}{dt^2}+\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 B_2\frac{d\theta_1}{dt_1} \quad (7)$$

با استفاده از (۲) و (۳) داریم

$$T = \underbrace{\left[J_1+\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_2\right]}_{J_{eq}}\frac{d\theta_1^2}{dt^2}+\underbrace{\left[B_1+\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 B_2\right]}_{B_{eq}}\frac{d\theta_1}{dt}$$

یا اینکه $T = J_{eq}\frac{d^2\theta_1}{dt^2}+B_{eq}\frac{d\theta_1}{dt}$



$T \rightarrow V$

$J \rightarrow L$

$W \rightarrow I$

$B_1, B_2 \rightarrow R$

تشابه سازی سیستم های هیدرولیکی :

در سیستم های هیدرولیکی کمیت های مورد نظر عبارتند از : دبی جریان ، مایع ، فشار

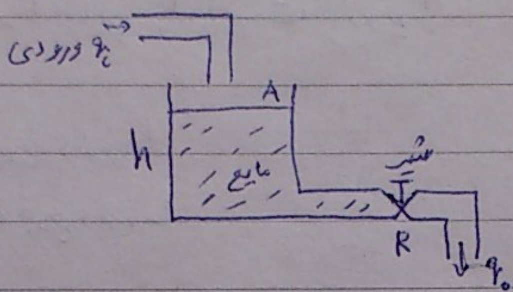
دبی جریان ← مقدار مایعی که در واحد زمان از مقطع مورد نظر سیستم عبور می کند

q_i دبی ورودی

q_o دبی خروجی

h تغییرات سطح مایع

A سطح مقطع (ظرفیت مخزن)



$$q_i - q_o = A\frac{dh}{dt}$$

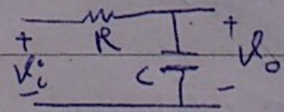
$$q_o = \frac{h}{R}$$

لاپلاس
$$\begin{cases} Q_i(s) - Q_o(s) = AsH(s) \\ Q_o(s) = \frac{H(s)}{R} \rightarrow H(s) = RQ_o(s) \end{cases}$$

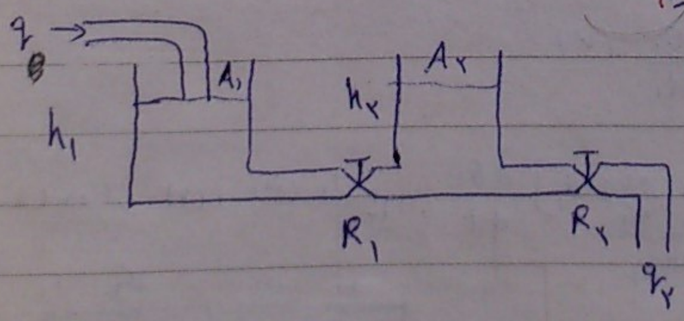
$$Q_i(s) = Q_o(s)\left[1 + RAs\right] \rightarrow \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{1+RAs}$$

نسبت خروجی به ورودی سیستم (۱) همانند مدار RC (فیلتر پایین گذر است)

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1+j\omega RC} = \frac{1}{1+RCS}$$



مثال) نسبت $\frac{Q_2(s)}{Q(s)}$ را بدست آورید؟



$$q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1}$$

$$q - q_1 = A_1\frac{dh_1}{dt} \quad , \quad q_2 = \frac{h_2}{R_2}$$

$$q_1 - q_2 = A_2\frac{dh_2}{dt}$$

$$\frac{Q_2(s)}{Q(s)} = \frac{1}{R_1C_1R_2C_2s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1) + 1}$$

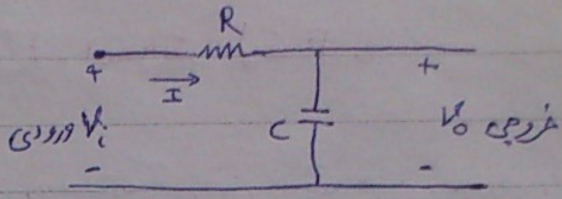
نمودار بلوکی

نمودار بلوکی ارتباط موجود بین عناصر را نشان میدهد

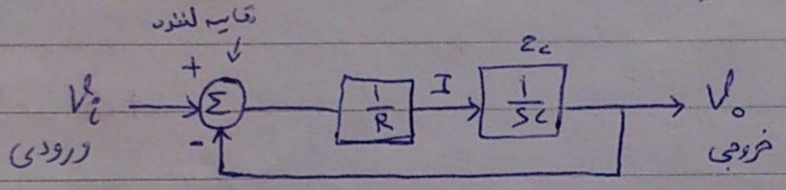
$$I = \frac{V_i - V_o}{R}$$

$$V_o = I Z_c$$

$$Z_c = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{sC}$$

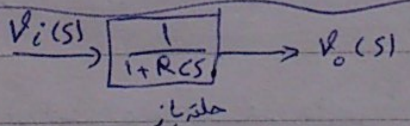


نمودار بلوکی برای مدار فوق بصورت زیر می باشد.



تابع تبدیل سیستم

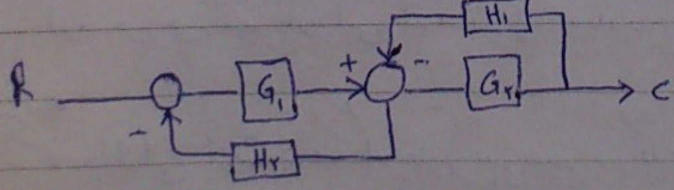
$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1+RCs}$$



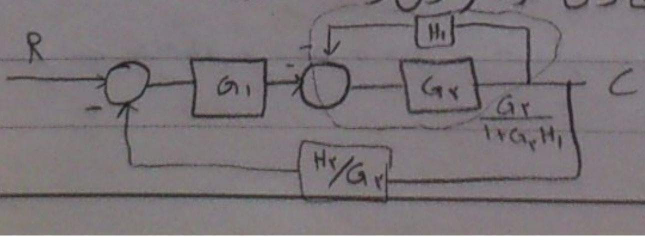
حلقه باز

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

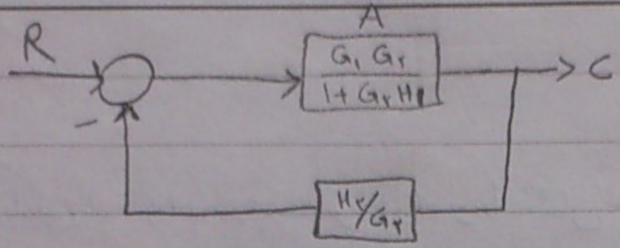
مثال) با ساده نمودن نمودار بلوکی شکل زیر نسبت خروجی به ورودی را بدست آورید یا نسبت $\frac{C}{R}$



با استفاده از جدول در کتاب می‌توان نمودار فوق را ساده نمود



Date: Subject:



نمودار گذر سیگنال (Signal_Flow_Gragh (S.F.G)

SFG یک روش ترسیمی است که می‌توان برای بدست آوردن نسبت خروجی به ورودی استفاده نمود. (یا برای نمایش روابط ورودی و خروجی میان متغیرهای یک سیستم):

قواعد SFG:

۱- گره‌ها نمایانگر متغیرها هستند

۲- بهره شاخه‌ها در کنار شاخه‌ها نمایش داده شده است.

۳- گره‌ها معمولاً از چپ به راست مرتب می‌شوند

۴- گره ورودی ← گره‌ای که تنها یک شاخه از آن خارج می‌شود

۵- گره خروجی ← گره‌ای که تنها یک شاخه به آن وارد می‌شود

۶- مسیر ← دنباله‌ای از شاخه‌ها که بطور پیوسته در یک جهت طی می‌شوند

۷- بهره مسیر ← حاصلضرب بهره‌های شاخه‌های موجود در مسیر

Date: مثال Subject:

۸- حلقه ← گره آغاز و پایان بر هم منطبق هستند

۹- مسیر پیشرو ← از گره ورودی شروع شده و به گره خروجی پایان می یابد.

برای بدست آوردن نسبت خروجی به ورودی در S.F.G از رابطه میسون استفاده می شود

$$T=\frac{V_o}{V_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n}P_i\Delta_i}{\Delta}$$ فرمول میسون

n ← تعداد مسیر پیشرو

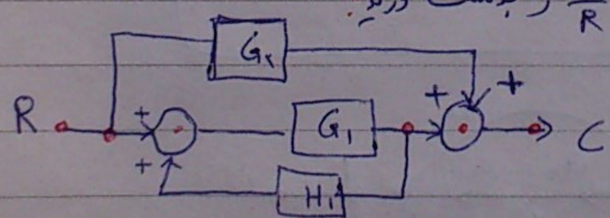
P_i ← iامین مسیر پیشرو

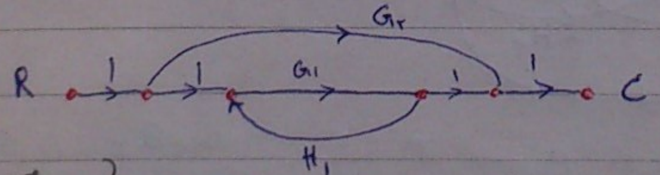
Δ ← دترمینان S.F.G

$\Delta = 1 - \Sigma$ (بهره حلقه‌ها) $+ \Sigma$ (حاصلضرب دو به دو حلقه‌هایی که نقطه مشترک ندارند) $- \Sigma$ (حاصلضرب سه به سه حلقه‌هایی که نقطه مشترک ندارند)

Δ_i : iامین دترمینان SFG باقیمانده از حذف مسیر پیشرو

مثال: با رسم نمودار SFG نسبت $\frac{C}{R}$ را بدست آورید؟





مسیر پیشرو $n=2$

$P_1 = G_1$

$P_2 = G_2$

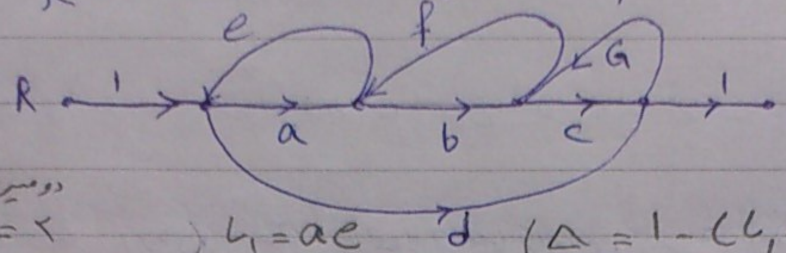
$L_1 = G_1H_1$

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i\Delta_i}{\Delta}=\frac{P_1\Delta_1+P_2\Delta_2}{\Delta}=\frac{G_1(1)+G_2(1-G_1H_1)}{1-G_1H_1}$$

$$T=\frac{C}{R}=\frac{G_1+G_2-G_1G_2H_1}{1-G_1H_1}$$

$\Delta = 1 - L = 1 - G_1H_1$ ، $\Delta_1 = 1$ ، $\Delta_2 = 1 - L_1 = 1 - G_1H_1$

مثال) نمودار S.F.G یک سیستم بصورت زیر داده شده است نسبت $\frac{C}{R}$ را بدست آورید ؟



دو مسیر پیشرو

$n = 2$

$P_1 = abc$

$P_2 = d$

$L_1 = ae$

$L_2 = bf$

$L_3 = cG$

$L_4 = dGfe$

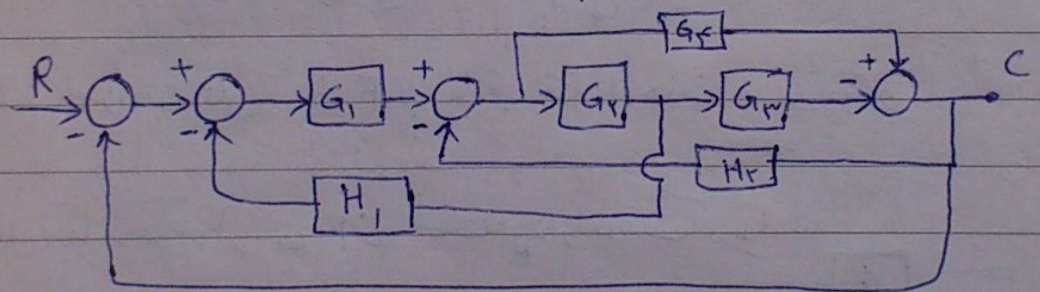
$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1 L_3)$

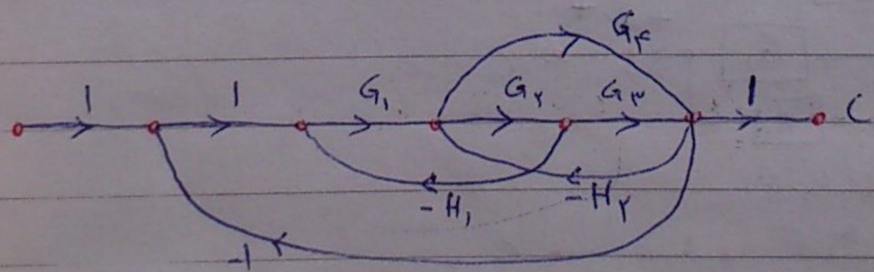
$\Delta_1 = 1$

$\Delta_2 = 1 - L_2 = 1 - bf$

$$T = \frac{C}{R} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{abc + d(1 - bf)}{\Delta}$$

مثال) با رسم نمودار SFG نسبت $\frac{C}{R}$ را بدست آورید





$\Delta_1 = 1$

$\Delta_2 = 1$

$P_1 = G_1 G_2 G_3$

$P_2 = G_1 G_4$

$L_1 = -G_1 G_2 H_1$

$L_2 = -G_2 G_3 H_2$

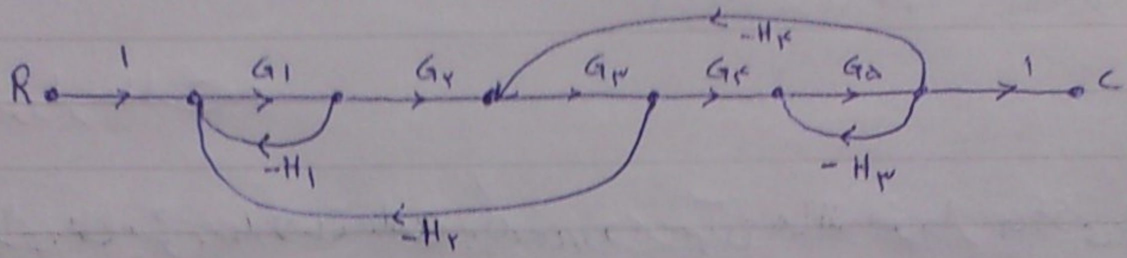
$L_3 = -G_1 G_2 G_3$

$L_4 = -G_4 H_2$

$L_5 = -G_1 G_4$

$$T = \frac{C}{R} = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_1 G_4}{1 + L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5}$$

مثال) با S.F.G ، $\frac{C}{R}$ را بدست آورید؟



$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5$

$L_1 = -G_1 H_1$

$L_2 = -G_1 G_2 G_3 H_2$

$L_3 = -G_5 H_3$

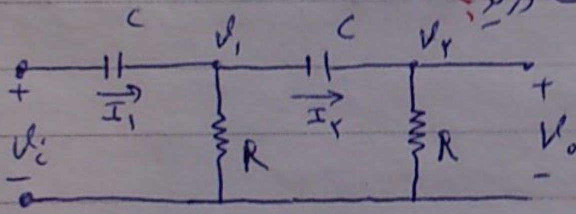
$L_4 = -G_3 G_4 G_5 H_4$

$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1 L_3 + L_1 L_4 + L_2 L_3)$

$\Delta_1 = 1$

$\frac{C}{R} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta}$

مثال) نسبت $\frac{V_o}{V_i}$ را با رسم S.F.G بدست آورید؟



$V_2 = V_o$

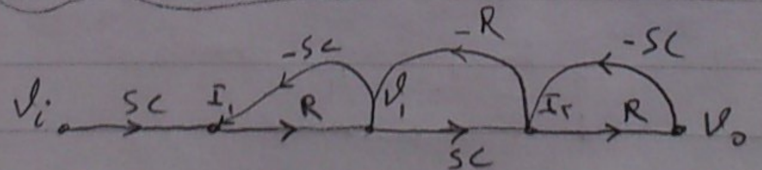
$V_1 = R(I_1 - I_2)$ ②

$V_o = R I_2$ ④

$I_1 = \frac{V_i - V_1}{Z_C}$ ، $I_2 = \frac{V_1 - V_o}{Z_C}$ ، V_i ، I_1 ، V_1 ، I_2 ، V_o

$I_1 = \frac{V_i - V_1}{\frac{1}{SC}} = SC(V_i - V_1)$ ①

$I_2 = SC(V_1 - V_o)$ ③



$P_1 = S^2 R^2 C^2$

$L_1 = -RSC$

$L_2 = -RSC$

$L_3 = -RSC$

$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + (L_1 L_3)$

$= 1 + 3RCS + R^2 S^2 C^2$

$\Delta_1 = 1$

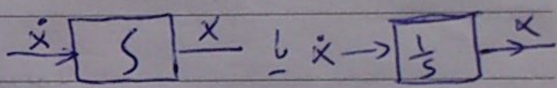
$$T=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{s^2R^2C^2}{1+3RCs+s^2R^2C^2}$$

نمودار حالت :

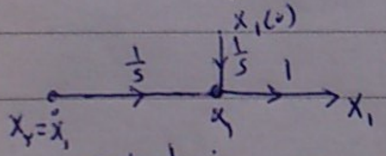
برای نمایش معادلات حالت به کار می رود و رسم آن همانند نمودار SFG می باشد با این تفاوت که انتگرال گیرها و مقدار اولیه حالت نیز بر آن اضافه می شود

برای نمایش نمودار حالت سیستمی بصورت زیر در نظر می گیریم

$sX_1(s)-X_1(0)=X_2$ $\qquad$ $\dot{x}_1=x_2$



$$X_1(s)=\frac{1}{s}X_1(0)+\frac{1}{s}X_2(s)$$



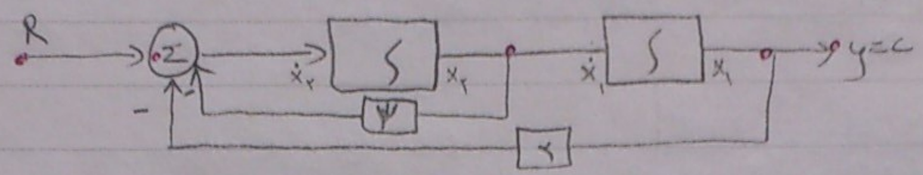
نمودار حالت

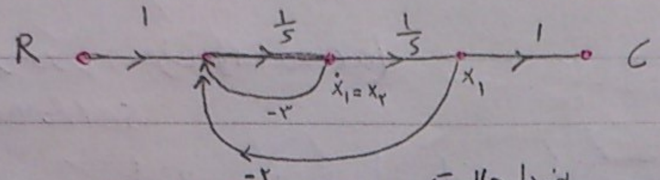
مثال) با رسم نمودار حالت تابع تبدیل $\frac{C(s)}{R(s)}$ را بدست آورید.

تابع تبدیل $H(s)=\frac{C(s)}{R(s)}$

معادلات فضای حالت سیستم
$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-2x_1-3x_2+R\\ y=x_1\end{cases}$$

حل: ابتدا برای راحتی کار می توان بلوک دیاگرام سیستم زیر را رسم نمود





نمودار حالت

فرمول میسون $T = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} P_i \Delta_i}{\Delta}$

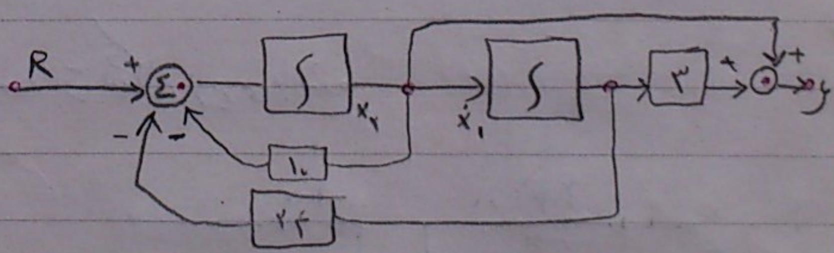
$P_1 = \left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}$ $\qquad \Delta_1 = 1$

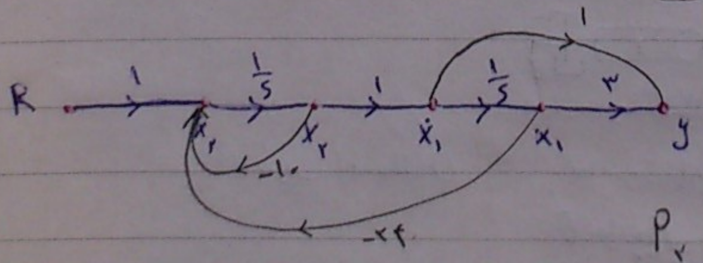
$$\begin{cases} L_1 = \dfrac{-3}{s} \\ L_2 = \dfrac{-2}{s^2} \end{cases} \qquad \Delta = 1-(L_1+L_2) = 1+\frac{2}{s^2}+\frac{3}{s}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{1}{s^2}}{1+\frac{2}{s^2}+\frac{3}{s}} = \frac{1}{s^2+3s+2}$$

مثال) با رسم نمودار حالت تابع تبدیل سیستم را بدست آورید؟

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -24x_1 - 10x_2 + R \\ y = 3x_1 + x_2 \end{cases}$$





$P_1 = \left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s}\right)(3) = \frac{3}{s^2}$

$P_2 = (1)\left(\frac{1}{s}\right)(1) = \frac{1}{s}$

$L_1 = -\frac{10}{s} \qquad L_2 = \frac{-24}{s^2}$

$$T = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} \quad , \Delta_1 = 1 \ , \ \Delta_2 = 1$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s+3}{s^2+10s+24}$$

سرو موتور (محرک actuator)

servomotor

سروموتور انرژی الکتریکی را به انرژی مکانیکی تبدیل می کند، ورودی الکتریکی است و خروجی آن گشتاور می باشد

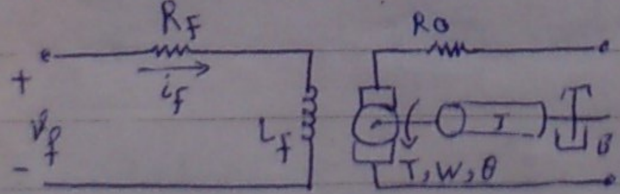
انواع سروموتور
۱- dc
۲- ac
۳- هیدرولیکی

در این درس سروموتور dc مورد نظر می باشد

سروموتور DC
- سروموتور DC با کنترل میدان
- سروموتور DC با کنترل آرمیچر

۱- سروموتور DC با کنترل میدان

مدار شماتیکی این سروموتور مطابق شکل زیر می باشد.



ω سرعت زاویه ای　V_f ولتاژ ورودی　R_a مقاومت آرمیچر ثابت

θ جابجایی زاویه ای　i_f جریان میدان　J اینرسی

L_f القاگر　T گشتاور

B ضریب اصطکاک

می خواهیم نسبت $\frac{\theta(s)}{V_f(s)}$ را بدست آوریم.

گشتاور بدون در نظر گرفتن اصطکاک: $T = J\dot{\omega} = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$ ، $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

$$T_L = T_m = T = \underbrace{\overset{\text{ضریب ثابت}}{k_f}\, i_f}_{(1)} = J s\, \omega(s)$$

گشتاور: $T = J\frac{d^2\theta}{dt^2} + B\frac{d\theta}{dt} = Js^2\theta(s) + Bs\,\theta(s) = (Js^2+Bs)\theta(s)$ (۲)

$$KVL: -V_f + R_f I_f + L\frac{dI_f}{dt} = 0 \to I_f(s) = \frac{V_f(s)}{R_f + sL} \quad (۳)$$

در معادله (۱) داریم: $T = k_f I_f(s)$ (۴)

با استفاده از (۲) و (۳) و (۴) داریم

$$k_f I_f(s) = (Js^2 + Bs)\theta(s)$$

$$k_f \frac{V_f(s)}{R_I + Ls} = (Js^2 + Bs)\,\theta(s)$$

$$\frac{\theta(s)}{V_f(s)} = \frac{k_f}{(R_f + Ls)(Js^2 + Bs)} = \frac{k_f}{s(R_f + Ls)(Js + B)} = \frac{k_f/BR}{s(1+T_f s)(1+T_L s)}$$

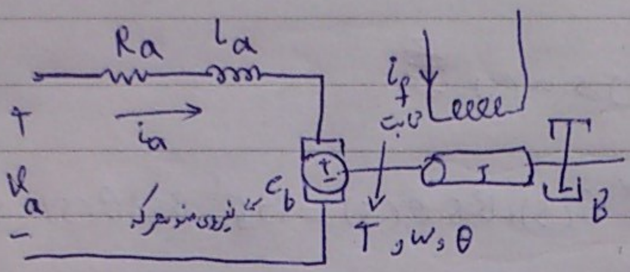
بطوریکه $T_f = \frac{L}{R}$ ثابت زمانی الکتریکی و $T_L = \frac{J}{B}$ ثابت زمانی مکانیکی

بلوک دیاگرام آن بصورت زیر می باشد:

$$v_f \longrightarrow \boxed{\frac{1}{R_f + Ls}} \xrightarrow{i_f} \boxed{k_f} \xrightarrow{T} \boxed{\frac{1}{Js+B}} \xrightarrow{w} \boxed{\frac{1}{s}} \longrightarrow \theta(s)$$

۲) سرو موتور DC با کنترل آرمیچر

مدار این سرو موتور بصورت زیر می باشد:



نسبت $\frac{\theta(s)}{V_a(s)}$ را بدست آورید

$$-V_a + R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_b = 0 \quad (1)$$

$$I_a(s) = \frac{V_a(s) - E_b(s)}{R_a + L_a s} \quad (۲)$$

$$T_m = T_L = J\frac{d^2\theta}{dt^2} + B\frac{d\theta}{dt} \quad (۳)$$

$$T = [Js^2 + Bs]\,\theta(s) \quad (۴)$$

$$e_b = k_b w \quad (۵)$$

$$E_b(s) = K_b W(s) \quad (۶)$$

$$T = k_m i_a(t) \quad (۷)$$ ، $$T = k_m I_a(s) \quad (۸)$$

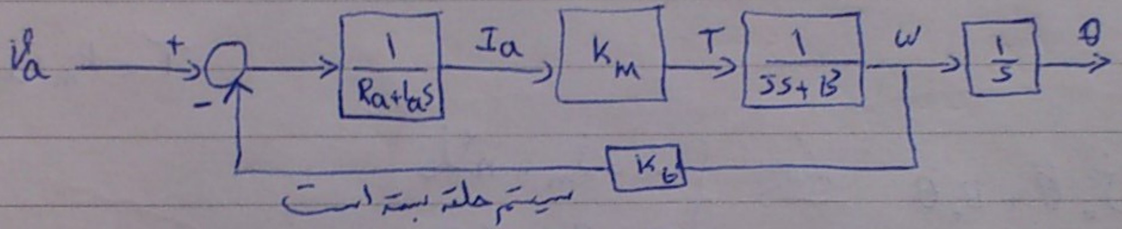
با استفاده از ۲، ۴، ۶ و ۸ نسبت $\frac{\theta(s)}{V_a(s)}$ بصورت زیر می باشد:

$$\frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s[(R_a + L_a s)(Js + B) + K_b K_m]}$$

$$\frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m/(R_aB+K_bK_m)}{s(1+T_ms)} \quad , \quad T_m = \frac{JR_a}{R_aB+K_bK_m}$$

چونکه مقدار L_a در حدود خیلی ناچیزی است می توان آن را حذف کرد. در این صورت سیستم از مرتبه سوم به مرتبه دوم کاهش می یابد

نمودار بلوکی بصورت زیر می باشد:



با تعریف متغیرها بصورت زیر

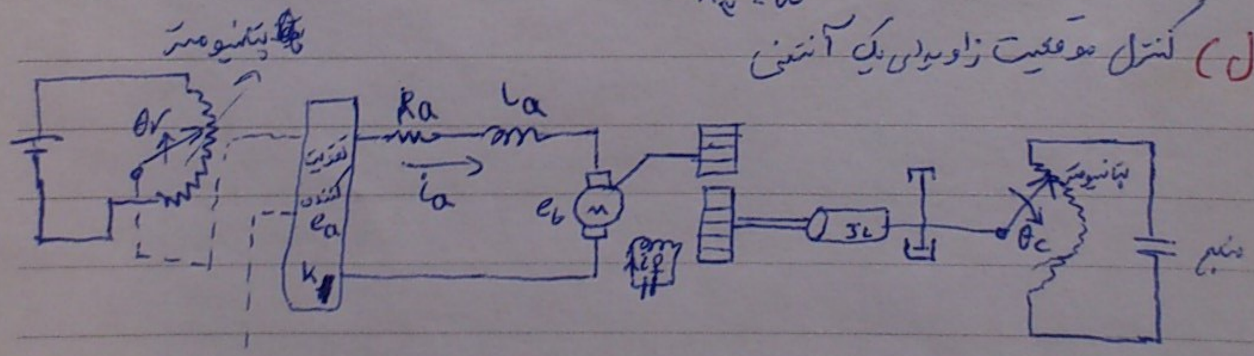
$x_1 = \theta$

$x_2 = i_a$

$x_3 = \omega$

می توان معادله فضای حالت را نوشت

مثال) کنترل موقعیت زاویه ای یک آنتن



θ_r موقعیت زاویه ای محور فرمان

θ_c موقعیت زاویه ای خروجی

θ_m موقعیت زاویه ای محور موتور

e_a ولتاژ اعمال شده به آرمیچر

J_L اینرسی

K_p بهره تقویت کننده

می خواهیم نسبت $\frac{\theta_m(s)}{E_e(s)}$ را بدست آوریم ، مطابق شکل موقعیت زاویه‌ای آنتن θ_c از طریق پتانسیومتر (مشخص کننده خطا) با موقعیت زاویه‌ای فرمان θ_2 مقایسه شده و تفاوت آن‌ها به صورت $e_e = k(\theta_1 - \theta_2)$ به ورودی تقویت کننده اعمال می‌شود.

ولتاژ خروجی تقویت کننده $e_a(t) = k_1 e_e$ و $e_b = k_b w$

$$T = k_m i_a$$

$$T = J_0 \ddot{\theta} + B_0 \dot{\theta} \xrightarrow{\text{به طوریکه}} \begin{cases} J_0 = J_m + n^2 J_L \\ B_0 = B_m + n^2 B_L \end{cases}$$

$$\frac{\theta_m}{E_i(s)} = \frac{k_e k_1 k_m}{s(R_a + L_a s)(J_0 s + B_0) + k_m k_b s}$$

معادله مشخصه سیستم $F(s) = 1 + G(s)H(s) \leftarrow F(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$

شرط لازم برای پایداری اینکه هیچ یک از ضرایب چند جمله ای فوق صفر نباشد و هم چنین هم علامت باشند

شرط کافی اینکه جدول روث - هورویتس را تشکیل دهیم و اگر همه اعداد ستون اول این جدول صفر نباشند و هم علامت باشند سیستم پایداری مجانبی است

s^n	a_0	a_2	a_4
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3
s^{n-3}	c_1	c_2	
$\vdots$	$\vdots$		
s^0	d_1		

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

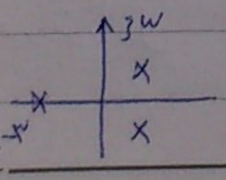
مثال) پایداری سیستم زیر را معین کنید؟ $F(s) = s^3 + s^2 + 2s + 24$

حل) سیستم فوق شرط لازم را دارد جدول روث را تشکیل می دهیم

s^3	1	2	0
s^2	$+\ 1$	24	
s^1	$-\ \frac{(1\times 2)-(24\times 1)}{1} = -22$		
s^0	$+\ 24$		

$+$

چون دو بار تغییر علامت در ستون اول ایجاد شده پس سیستم ناپایدار است



دو ریشه در سمت راست محور jω قرار دارد

$s_1 = -3 \qquad s_{2,3} = 1 \pm j2.64$

حالت خاص: اگر اولین عدد یک سطر در جدول صفر باشد ولی همهٔ اعداد آن سطر صفر نباشد سیستم ناپایدار است. برای تعیین ریشه ها در سمت راست میتوان حداقل از دو روش زیر استفاده شود

الف) قرار دادن ε بجای صفر در ستون اول و ادامه کار.

ب) بجای s مقدار $\frac{1}{s}$ را قرار دهیم.

مثال) معادله مشخصه سیستم داده شده است پایداری را تعیین کنید؟

$$F(s)=s^4+2s^3+2s^2+4s+5$$

حل: شرط لازم را دارد

$\varepsilon \to 0$

s^4	1	2	5
s^3	2	4	0
s^2	$+\cancel{0}\ \varepsilon$	5	
s^1	$-\frac{4\varepsilon-10}{\varepsilon}=-8$	0	
s^0	$+5$		

دو بار تغییر علامت داده است بنابراین دو ریشه در سمت راست دارد

بنابراین ناپایدار است.

یا روش دوم: بجای s مقدار $\frac{1}{s}$ را در معادله قرار می‌دهیم

$$F(s)=\left(\frac{1}{s}\right)^4+2\left(\frac{1}{s}\right)^3+2\left(\frac{1}{s}\right)^2+4\left(\frac{1}{s}\right)+5=0$$

$$F(s)=5s^4+4s^3+2s^2+2s+1=0$$

s^4	5	2	1
s^3	4	2	0
s^2	$-\frac{1}{2}$		
s^1	10		
s^0	1		

همان توضیح روش اول

* اگر تمام اعداد یک سطر از جدول روث صفر شود از معادله کمکی که از ضرایب سطر ماقبل صفرها تشکیل می شود استفاده می نماییم و سپس از معادله کمکی مشتق گرفته و بجای صفرها ضرایب آنرا قرار داده و ادامه می دهیم.

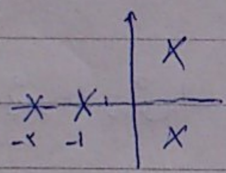
مثال) معادله مشخصه سیستم داده شده، پایداری آنرا مشخص کنید؟

$$F(s) = s^6 + 3s^5 + 4s^4 + 6s^3 + 9s^2 + 15s + 10 = 0$$

s^6	1	4	9	10
s^5	3	6	15	
s^4	2	4	10	
s^3	$8\ \cancel{0}$	$8\ \cancel{0}$		
s^2	2	10		
s^1	-32			
s^0	10			

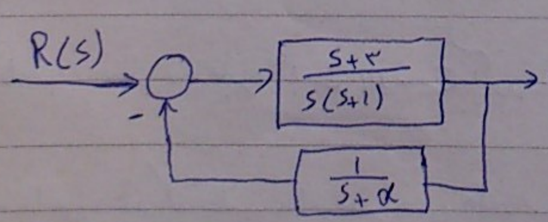
معادله کمکی $2s^4 + 4s^2 + 10$ مشتق گرفته $= 8s^3 + 8s$

سیستم به علت تغییر علامت ناپایدار است.



از چهار ریشه معادله کمکی دو تا در سمت راست قرار دارد

مثال) به ازای چه مقدار از α سیستم پایدار است؟



حل: $F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$

$$F(s) = s^3 + (\alpha+1)s^2 + (\alpha+1)s + 4 = 0$$

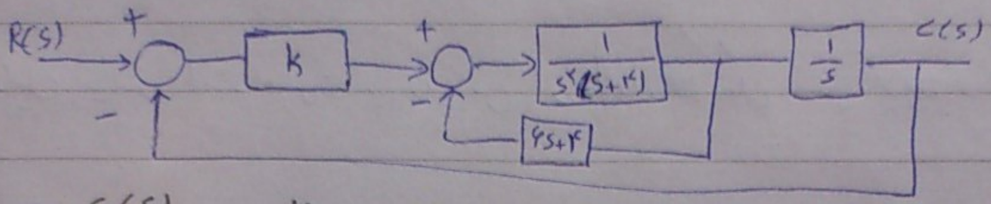
s^3	1	$\alpha+1$
s^2	$\alpha+1$	4
s^1	$\frac{(\alpha+1)^2-4}{\alpha+1}$	
s^0	4	

$\alpha+1>0 \rightarrow \alpha>-1$

$\frac{(\alpha+1)^2-4}{\alpha+1} \rightarrow \alpha>1$

پس برای $\alpha>1$ سیستم همیشه پایدار است

مثال) به ازای چه مقدار از k سیستم پایدار است؟



حل: $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^4+4s^3+6s^2+4s+k}$

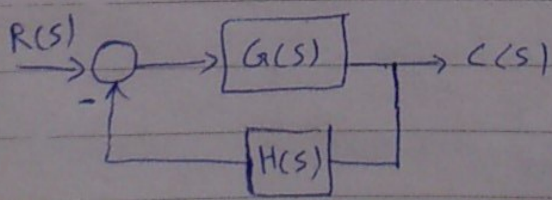
s^4	1	6	k
s^3	4	4	
s^2	5	k	
s^1	$\frac{20-4k}{5}$		
s^0	k		

$k<5 \Leftarrow \frac{20-4k}{5}>0$ ، $k>0$

پس به ازای $0<k<5$ سیستم پایدار مجانبی است

تعیین پایداری با روش مکان هندسی ریشه ها

مکان هندسی ریشه ها روشی است که به کمک آن میتوان تغییر مکان ریشه های معادله مشخصه حلقه بسته در صفحه s به ازاء تغییر یک پارامتر در سیستم حلقه باز (خواه این پارامتر قطب، صفر و یا بهره باشد) بدست آورد بنابراین استفاده از مکان ریشه ها این امکان را به ما می دهد که قطب ها و صفرهای حلقه بسته سیستم چگونه باید اصلاح شوند تا پاسخ مطلوب

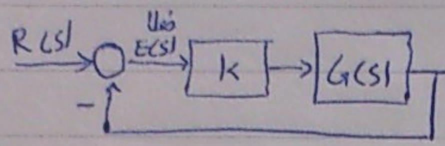


را بدست آوریم.

$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$

خطای حالت دائم (steady-state error)

بلوک دیاگرام سیستم را بصورت زیر درنظر میگیریم



بهره → k

$$E(s)=R(s)-C(s)$$

$$\begin{cases} e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s) \\ \text{یا} \\ e_{ss}=\lim_{t\to\infty} e(t) \end{cases}$$

$$C(s)=kG(s)E(s)$$

$$E(s)=R(s)-kG(s)E(s) \Rightarrow E(s)[1+kG(s)]=$$

$$E(s)=\frac{R(s)}{1+kG(s)}$$

① خطای حالت ماندگار

به ازای ورودی پله $R(s)=\frac{R}{s}$

$$E(s)=\frac{R}{s[1+kG(s)]}$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s) \rightarrow e_{ss}=\frac{R}{1+\lim_{s\to 0} kG(s)}$$

به طور دیگر $\boxed{e_{ss}=\frac{R}{1+K_p}}$ خطا

$K_p=\lim_{s\to 0} kG(s)$ ، K_p را ثابت خطای حالت ماندگار به ورودی پله گویند

۲_ خطای ماندگار به ازای ورودی شیب $R(s)=\frac{R}{s^2}$

$$E(s)=\frac{R(s)}{1+KG(s)}$$

$$R(s)=\frac{R}{s^2} \quad ، \longrightarrow E(s)=\frac{R}{s^2[1+KG(s)]}$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{R}{s[1+KG(s)]}=\frac{R}{\lim\limits_{s\to 0} sKG(s)} \longrightarrow \boxed{e_{ss}=\frac{R}{K_v}}$$

حفظ

$K_v=\lim\limits_{s\to 0} sKG(s)$ ، K_v را ثابت خطای شیب گویند

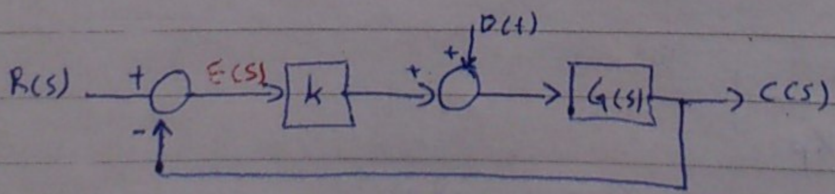
۳_ خطای ماندگار به ازای ورودی سهمی $R(s)=\frac{R}{s^3}$ ، $E(s)=\frac{R(s)}{1+KG(s)}$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{R}{s^2[1+KG(s)]}=\frac{R}{\lim\limits_{s\to 0} s^2KG(s)}=\frac{R}{K_a}$$

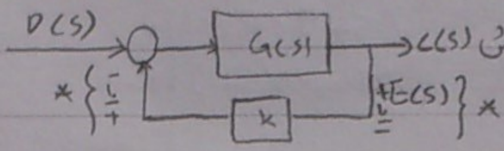
$$K_a=\lim_{s\to 0} s^2KG(s)$$

K_a را ثابت خطای شتاب گویند $e_{ss}=\frac{R}{K_a}$

مثال) خطای ماندگار سیستم حلقه بسته به سیگنال اغتشاش پله $D(t)=u(t)$ برابر با ـ است. میزان خطای ماندگار ناشی از ورودی $R(t)=u(t)$ چه مقدار است



حل: جمع آثار: تابع تبدیل به ازای ورودی اغتشاش $D(s)$



$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{G(s)}{1+KG(s)} \quad , \quad D(s) = \frac{1}{s} \longrightarrow C(s) = \frac{G(s)}{s[1+KG(s)]}$$

پس $E(s) = -C(s)$

$$E(s) = \frac{-G(s)}{s[1+kG(s)]} \quad , \quad e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s)$$

$$e_{ss} = \frac{-G(0)}{1+KG(0)} = -B \longrightarrow G(0) = \frac{B}{1-BK}$$

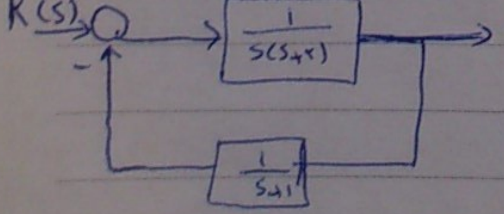
به ازای ورودی اصلی $R(s) = \frac{1}{s}$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{kG(s)}{1+kG(s)} \longrightarrow C(s) = \frac{KG(s)}{s[1+kG(s)]}$$

$$E(s) = \frac{R(s)}{1+KG(s)} \quad , \quad E(s) = \frac{1}{s[1+kG(s)]} \quad , \quad e_{ss} = \frac{1}{1+KG(0)}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+k\left(\frac{B}{1-BK}\right)} = 1 - k_B$$

مثال) خطای حالت ماندگار را برای ورودی شیب بدست آورید.



$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s+1}{s(s+2)(s+1)+1}$$

$R(s)=\frac{1}{s^2}$ ، $E(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{(s+1)(R(s))}{s(s+2)(s+1)+1}$

$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=1$

مثال) تابع تبدیل سیستم حلقه بسته داده شده است. $\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{K}{s^2+K_1K_2S+K_1}$

$t_p=2$ و ماکزیمم جهش پاسخ پله ۲۵ درصد است. K_1,K_2 را بدست آورید

حل: $\omega_n=\sqrt{K_1}$ ، $2\zeta\omega_n=K_1K_2$

$M_p=e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \rightarrow 0.25=e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$ ، $\zeta=0.4$

$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \Rightarrow t_p=\frac{\pi}{\omega_d} \rightarrow 2=\frac{\pi}{\omega_d} \Rightarrow \omega_d=1.57$

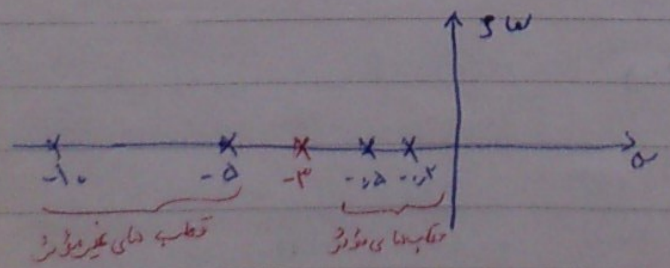
$K_1=\omega_n^2=2.95$ ، $K_2=\frac{2\zeta\omega_n}{K_1}$ ، $K_2=0.471$

قطب های مؤثر و غیرمؤثر

تابع تبدیل سیستم $G(S)=\frac{(S+3)}{(S+0.2)(S+0.5)(S+5)(S+10)}$

قطب های سیستم $S=-10$ ، $S=-5$ ، $S=-0.5$ ، $S=-0.2$

صفر سیستم: $S=-3$



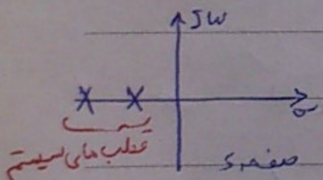
پایداری سیستم‌های کنترل خطی

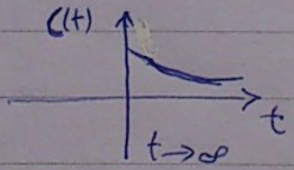
مفهوم پایداری از نظر مکانیکی :

اینکه اگر یک انحراف کوچک در موقعیت سیستم بوجود آید و سیستم به حالت اول باز گردد می‌گوییم سیستم پایدار است و اگر در نزدیکی حالت اول باشد می‌گوییم در مرز پایداری است و اگر به حالت اول باز نگردد می‌گوییم سیستم ناپایدار است.

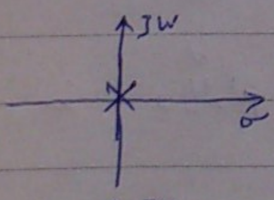
با توجه به قرار گرفتن مکان قطب ها در صفحه s پایداری سیستم بصورت زیر خواهد بود

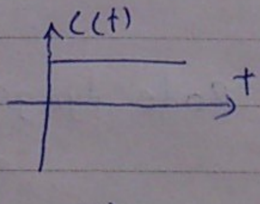
۱- پایداری مجانبی : درصورتیکه قطب ها در سمت چپ محور jw قرار می‌گیرد سیستم پایدار مجانبی است و پاسخ ضربه آن چنین می‌باشد

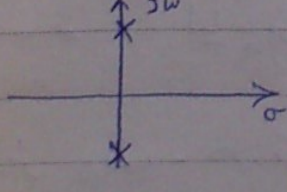


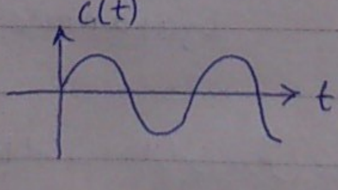


۲- اگر قطب های سیستم روی محور jw یا مبدا قرار گیرد سیستم پایدار مرزی است

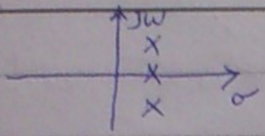


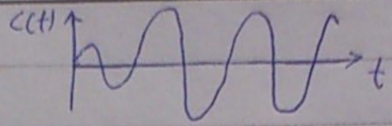






۳- اگر قطب ها در سمت راست محور jw قرار گیرد سیستم ناپایدار است و پاسخ به سمت





بینهایت می رود

از نظر ریاضی سیستمی پایدار است که به ازای ورودی با دامنه محدود دارای خروجی محدود باشد

که به آن Bounded input Bounded output ، BI تا BO گویند

$|r(t)| \leq M \leq \infty$ BI تا BO $r(t) \rightarrow$ سیستم $\rightarrow y(t)$

$|y(t)| \leq N \leq \infty$

روش های تعیین پایداری

۱- روش روث - هورویتس

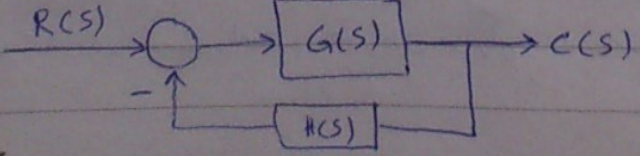
۲- " مکان هندسی ریشه ها

۳- " نایکوئیست

۴- " دیاگرام بُد Bode dyagrame

۵- " لیاپانوف Lyapanove

روش روث - هورویتس: با استفاده از این روش می توان پایداری مطلق (پایدار یا ناپایدار) بدست آورد.



$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{G(S)}{1+G(S)H(S)}$$

نکته: زمان نشست پاسخ فوق میرا بیشتر از زمان نشست پاسخ میرایی بحرانی است

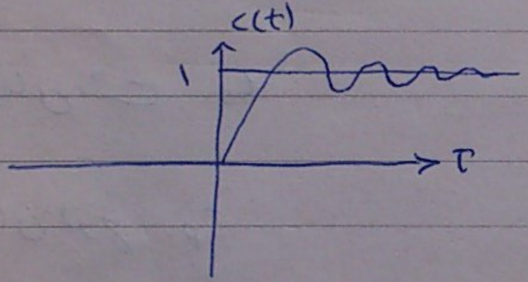
۳- اگر $0 < \zeta < 1$: در این حالت ریشه‌ها مختلط هستند

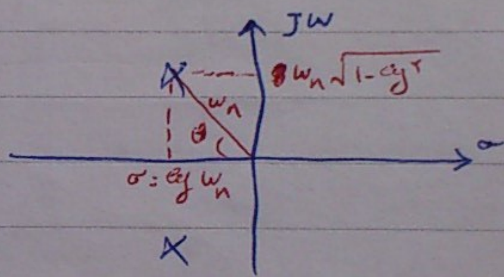
$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

و پاسخ را زیر میرا گویند.

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

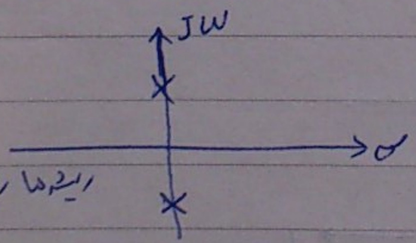




$$\cos\theta = \frac{\zeta\omega_n}{\omega_n} = \zeta$$

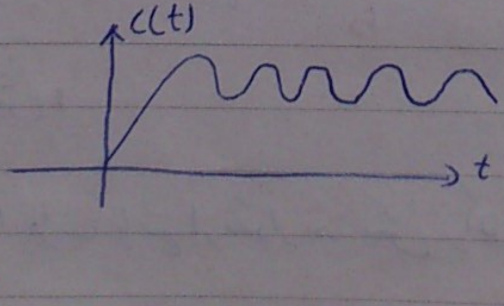
بهترین حالت پاسخ زمانی است که $0.4 \le \zeta \le 0.8$

۴- اگر $\zeta = 0$ پاسخ نوسانی خواهد شد



ریشه‌ها روی محور jω قرار دارند

$$c(t) = 1 - \cos\omega_n t$$



Date: Subject:

معیارهای پاسخ گذرا

برای بررسی معیار پاسخ گذرا موارد زیر باید مشخص شود

۱- حداکثر جهش (over shot) (M_p)

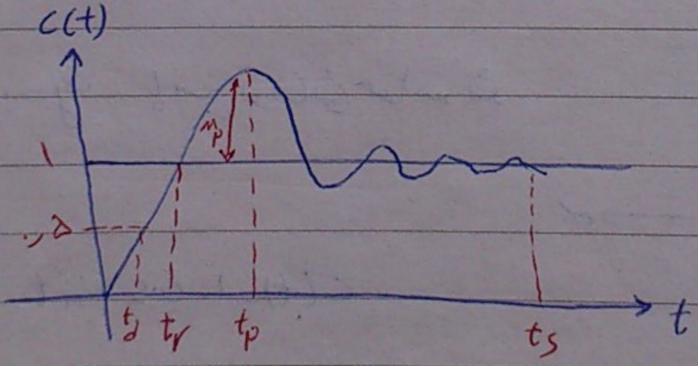
۲- زمان تأخیر t_d

۳- زمان صعود t_r

۴- زمان نشست t_s

۵- زمان اوج t_p

برای بررسی پاسخ زیر میدا را در نظر گرفته‌ایم



حداکثر جهش:

بزرگترین انحراف پاسخ از مقدار نهایی را که پله دارد گویند.

درصد حداکثر جهش $P.O = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100$

Raz

* فرمول فوق را در حالتی که مقدار نهایی آن یک نیست بکار می برند ولی اگر مقدار نهایی یک باشد

که در این مثال یک است از فرمول $M_p = e^{\frac{-\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ استفاده می شود

حداکثر جهش

زمان تأخیر t_d :

مدت زمانی که طول می کشد تا پاسخ به ۵۰ درصد مقدار نهایی اش برسد

زمان صعود t_r :

مدت زمانی که طول می کشد تا پاسخ از صفر درصد به صد درصد مقدار نهایی اش برسد.

(برای پاسخ فوق میرا از ۱۰ درصد به ۹۰ درصد)

زمان اوج t_p :

مدت زمان لازم برای رسیدن به اولین ماکزیمم پاسخ را گویند

زمان نشست t_s :

مدت زمانی که طول می کشد تا پاسخ به درصد معینی از مقدار نهایی اش برسد گویند

مورد نظر $t_s = \frac{4}{\xi \omega_n}$ (معیار ۲٪)

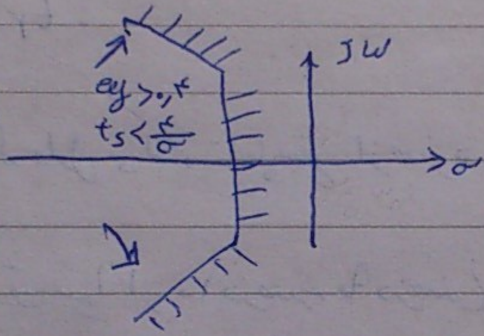
$t_s = \frac{3}{\xi \omega_n}$ (معیار ۵٪)

می توان t_p و t_r را برحسب ζ بصورت زیر نوشت

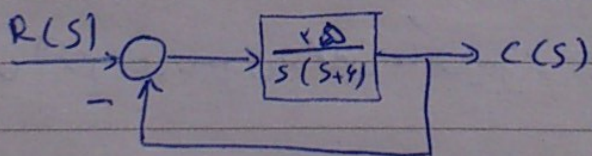
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$t_d = \frac{1+0.7\zeta}{\omega_n} \quad ، \quad t_r = \frac{\pi-\beta}{\omega_d} \quad ، \quad \beta = \tan^{-1}\frac{\omega_d}{\zeta\omega_n}$$

نکته: برای تعیین پاسخ گذرای سریع و میرا باید قطب های حلقه بسته سیستم در ناحیه خاصی از ~~...~~ صفحه s قرار داشته باشد.



مثال) در سیستم زیر t_r و t_p و t_s را بدست آورید؟



حل

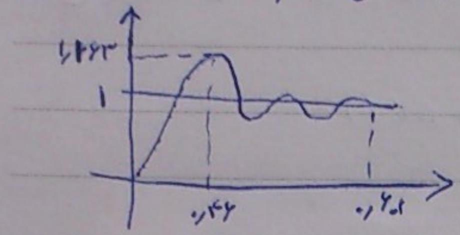
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{25}{s^2+6s+25} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

با توجه به رابطه فوق $\omega_n^2 = 25 \Rightarrow \omega_n = 5$ و $2\zeta\omega_n = 6$

$$t_r = \frac{\pi-\beta}{\omega_d} \quad ، \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 4 \quad ، \quad t_r = \frac{\pi - \tan^{-1}\frac{\omega_d}{\sigma}}{\omega_d}$$

$$\sigma = \zeta\omega_n = 3 \quad ، \quad t_r = 0.55 \quad ، \quad t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{3} \quad ، \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3.14}{4}$$

مثال) پاسخ زمانی یک سیستم داده شده است، محل قطب های سیستم حلقه باز را بدست آورید!



$t_s = ۰٫۶۰۱ \qquad t_p = ۰٫۴۶$

حل: تابع تبدیل سیستم حلقه باز:

$$G(S) = \frac{w_n^۲}{S(S+۲\xi w_n)}$$

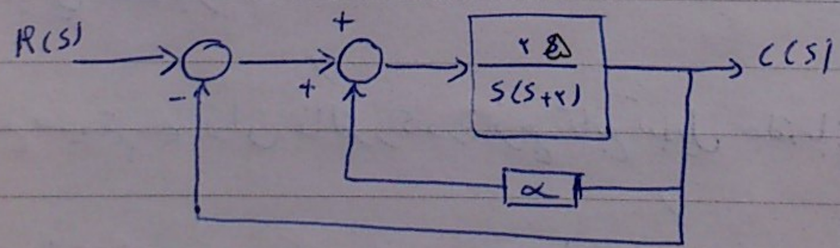
$$\begin{cases} S = ۰ \\ S = -۲\xi w_n \end{cases}$$

$$M_p = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^۲}}} \rightarrow ۱٫۱۶۳-۱ = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^۲}}}$$

$$\xi = ۰٫۵ \quad , \quad t_p = \frac{\pi}{w_d} = \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\xi^۲}} \Rightarrow ۰٫۴۶ = \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-(۰٫۵)^۲}}$$

$$w_n = ۸٫۶۲ \rightarrow S = -۲\xi w_n = -۲(۰٫۵)(۸٫۶۲) = -۸٫۶۲$$

مثال) در سیستم زیر α چقدر باشد تا قطب های سیستم مدار بسته دارای ضریب میرایی ۰٫۶ باشند



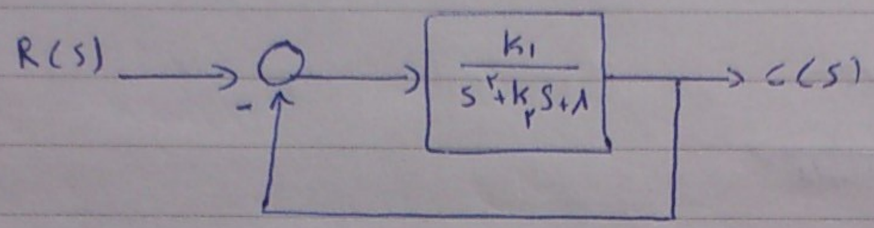
حل: تابع تبدیل سیستم حلقه بسته

$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{۲۵}{S^۲+۲S+۲۵(۱-\alpha)}$$

$$\begin{cases} w_n^۲ = ۲۵(۱-\alpha) \\ ۲\xi w_n = ۲ \Rightarrow ۲(۰٫۶)w_n = ۲ \rightarrow w_n = \frac{۱۰}{۶} \end{cases}$$

$$\left(\frac{۱۰}{۶}\right)^۲ = ۲۵(۱-\alpha) \rightarrow \alpha = ۰٫۸۸$$

مثال) مقدار k_1 را بدست آورید؟



پاسخ دائمی $c_{ss} = 0.6$

ورودی پله می باشد

$$c_{ss} = \lim_{s\to 0} sC(s)$$

$$0.6 = \lim_{s\to 0} \frac{k_1}{s^2+k_2 s+8+k_1} = \frac{k_1}{8+k_1} \Rightarrow k_1 = 12$$

مرتبه، رتبه و نوع سیستم

مرتبه ← بیشترین توان s در مخرج تابع تبدیل حلقه باز

رتبه سیستم ← تفاضل بیشترین توان s در مخرج با بیشترین توان s در صورت تابع تبدیل حلقه باز

نوع سیستم ← توان فاکتور s در مخرج تابع تبدیل حلقه باز

مثال) مرتبه، رتبه و نوع سیستم را مشخص کنید

1) $G(s) = \frac{s+1}{s(s^2+3s+2)}$ مرتبه ۳ رتبه ۲ نوع ۱

2) $G(s) = \frac{6}{s^3+2s^2+6s+5}$ مرتبه ۳ رتبه ۳ نوع صفر

Date: ۱۶ مهر   Subject:

پاسخ زمانی سیستم‌های کنترلی

پاسخ زمانی:

- پاسخ گذرا — transient respanse — c_{tr}
- پاسخ حالت دائم — steady state respanse — c_{ss}

$c(t) = c_{tr}(t) + c_{ss}(t)$ $c_{ss} = \lim_{s \to 0} sC(s)$

پاسخ گذرا: به قسمتی از پاسخ گویند که با گذشت زمان از بین می‌رود $\lim_{t \to \infty} c(t) = 0$

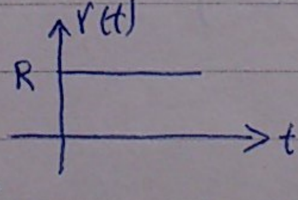
پاسخ حالت دائم: به قسمتی از پاسخ گفته می‌شود که با گذشت زمان ثابت باقی بماند

برای بررسی پاسخ زمانی، سیگنال های ورودی عبارتند از:

۱- ورودی پله   ۲- ورودی شیب   ۳- ورودی سهمی

ورودی پله: (step input)

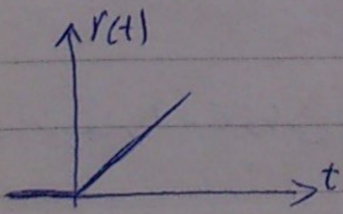
$r(t) = Ru(t)$



$R(s) = \frac{1}{s}$

$$r(t) = \begin{cases} R & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

ورودی شیب: (ramp input)



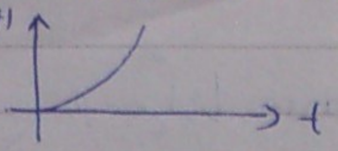
$r(t) = R\,t\,u(t)$

$$r(t) = \begin{cases} Rt & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$R(s) = \frac{1}{s^2}$

ورودی سهمی :

$r(t) = R t^2 u(t)$



$$r(t) = \begin{cases} Rt^2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

پاسخ سیستم درجه اول

معادله دیفرانسیل سیستم درجه اول به صورت زیر می باشد

$$\frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) = b_0 r(t) \Rightarrow \text{تابع تبدیل} \quad \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s+a_0}$$

$r(t)$ ورودی
$c(t)$ خروجی

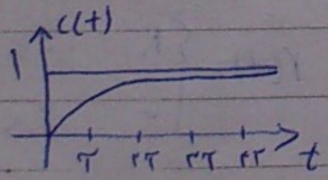
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{1+\frac{1}{a_0}s} = \frac{K}{1+Ts}$$

T ثابت زمانی

برای ورودی پله $R(s) = \frac{1}{s}$ $\longleftarrow$ $C(s) = \left(\frac{K}{1+Ts}\right) R(s)$

$$C(s) = \frac{K}{s(1+T(s))} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(1+Ts)} = \frac{K}{s} - \frac{KT}{1+Ts}$$

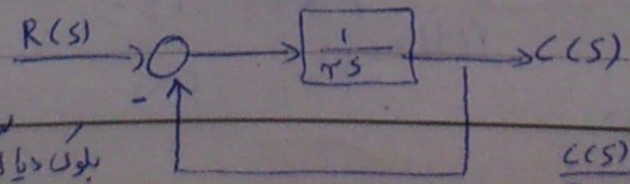
$$c(t) = K - Ke^{-\frac{t}{T}} = K(1-e^{-\frac{t}{T}})$$



$K=1$ در نظر می گیریم

رسم پاسخ پله سیستم درجه اول

پس از چهار ثابت زمانی پاسخ به مقدار ثابت نهایی اش می رسد.

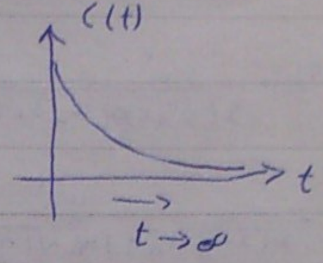


بلوک دیاگرام

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+Ts}$$

پاسخ ضربه : $R(S)=1$ ورودی ضربه

$$C(S)=\frac{1}{1+\tau S} \longrightarrow c(t)=\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$



پاسخ سیستم درجه اول با ورودی شیب :

$$R(S)=\frac{1}{S^2} \quad , \quad C(S)=\frac{K}{S^2(1+\tau S)}=\frac{K}{S^2}-\frac{K\tau}{S}+\frac{K\tau^2}{1+\tau S}$$

$$c(t)=K\left(t-\tau+\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad t\geq 0$$

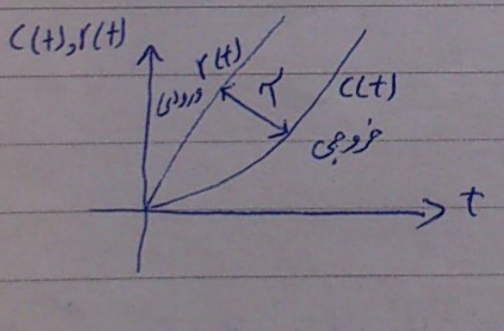
پاسخ سیستم

خطای سیستم :

$$\text{خطا } e = r(t)-c(t) = t-\left(t-\tau+\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \tau-\tau e^{-\frac{t}{\tau}}$$

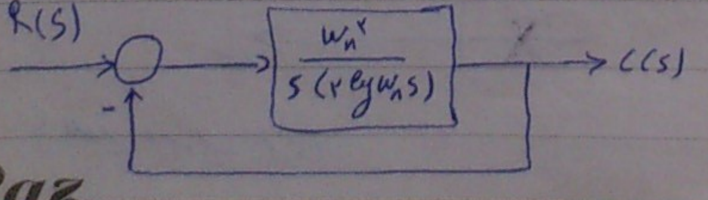
خطای حالت ماندگار $\lim_{t\to\infty} e(t) = \tau$

یا $e_{ss}=\lim_{s\to 0} S\,E(S)$



پاسخ زمانی سیستم درجه دوم

سیستم درجه دوم را بصورت شکل زیر در نظر می‌گیریم



ω_n فرکانس طبیعی

ξ زتا نسبت میرایی

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)} \Leftarrow R(s)=\frac{1}{s}$$ به ازای ورودی پله

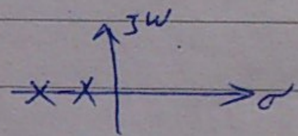
$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})(s+\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})}$$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

رفتار سیستم را برحسب ζ و ω_n می توان به صورت زیر بیان نمود

۱) اگر $\zeta > 1$ در این حالت ریشه های معادله درجه دوم سیستم حقیقی هستند.

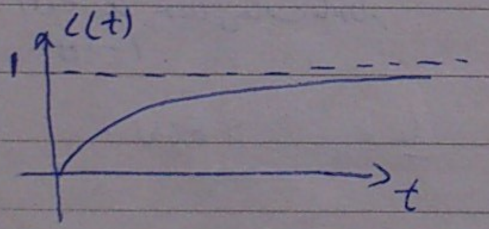
$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$



$$\exp x = e^x$$

$$c(t) = 1 - \exp\left[-(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}\right]$$

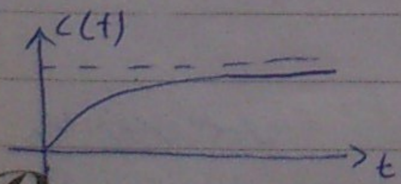
و پاسخ را فوق میرا گویند.

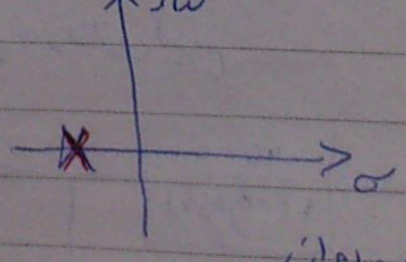


پاسخ فوق میرا

۲) اگر $\zeta = 1$ در این حالت ریشه ها مضاعف هستند. $s_1, s_2 = -\omega_n$

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)$$





پاسخ میرایی بحرانی

حالا با فرض اینکه $G(s)H(s)$ شامل پارامتر k باشد داریم $F(s)=1+KG(s)H(s)=0$

$$G(s)H(s)=\frac{-1}{k}$$

$G(s)H(s)$ یک کمیت مختلط است لذا اندازه و فاز آن بصورت زیر بدست می آید

$$|G(s)H(s)|=\frac{1}{|k|}$$

$$\underbrace{\angle G(s)H(s)}_{\text{زاویه}}=(2k+1)\pi \qquad k\geq 0$$

$$=2k\pi \qquad k<0$$

قوانین رسم مکان هندسی ریشه ها

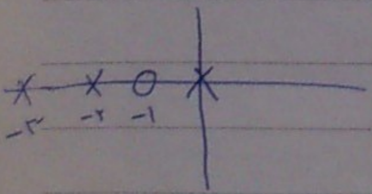
۱- برای $k=0$ مکان روی قطب های $G(s)H(s)$ قرار دارد

۲- برای $k=\pm\infty$ مکان روی صفرهای $G(s)H(s)$ قرار دارد

مثال) معادله مشخصه سیستم داده شده است

$$f(s)=s(s+2)(s+3)+k(s+1)=0 \Rightarrow f(s)=1+\underbrace{\frac{k(s+1)}{s(s+2)(s+3)}}_{G(s)H(s)}$$

$$G(s)H(s)=\frac{(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$



۴) تعداد مجانب ها:

مکان ریشه ها دارای n-m مجانب هستند و همه مجانب ها در یک نقطه محور حقیقی را قطع می کنند.

محل تلاقی آن ها از رابطه زیر بدست می آید:

$$\sigma = \frac{\sum(\text{قطب ها}) - \sum(\text{صفرها})}{n-m}$$

۵) زاویه مجانب ها:

زاویه مجانب ها با محور حقیقی از رابطه زیر بدست می آید.

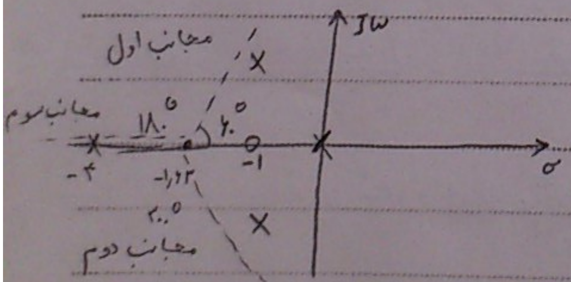
$$\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, |n-m|-1$$

مثال) تابع تبدیل حلقه باز سیستم داده شده است

$$G(s)H(s) = \frac{k(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$$

حل:

$$\sigma = \frac{(-4-1-j-1+j)-(-1)}{4-1} = -1,67$$



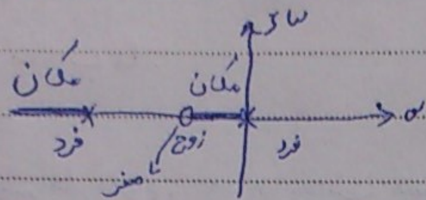
برای $k = 0, 1, 2 \longrightarrow \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$

$\theta = 60, 180, 300$

۶) مکان ریشه ها بر روی محور حقیقی

مکان ریشه ها بر روی محور حقیقی در سمت چپ تعداد فردی از قطب ها و صفرها قرار دارد.

مکان از قطب ها شروع و به صفر ختم می شود



⑦ زاویه خروج از قطب ها و زاویه ورود به صفرها:

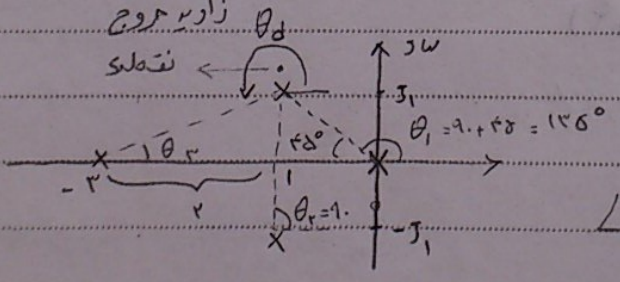
هرگاه $G(s)\,H(s)$ دارای قطب های موهومی باشد. قسمت هایی از مکان ریشه ها از این قطب ها شروع می شود که جهت مکان توسط زاویه خروج مشخص می شود.

مثال) زاویه خروج را بدست آورید؟

$$G(s)\,H(s)=\frac{k}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$

قطب های سیستم $\{0,\ -3,\ -1\pm j\}$

حل: قطب ها و صفرها را در صفحه ی رسم می کنیم.



زاویه خروج از رابطه زیر بدست می آید

$$\underbrace{\angle\sum(\text{صفرها})}_{\text{زاویه}} - \underbrace{\angle\sum(\text{قطب ها})}_{\text{زاویه}} = 180°$$

یا $\angle\sum\theta_z - \angle\sum\theta_p = 180° \to 0-(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_d) = 180°$

$\tan\theta_3 = \frac{1}{2} \to \theta_3 = 26.6° \to 0-(135+90+26.6+\theta_d) = 180°$

$\Rightarrow \theta_d = -431.6° = -71.6°$

(۸) تقاطع مکان با محور موهومی:

می خواهیم نقاطی را که مکان محور موهومی را قطع می کند بدست آوریم

برای این کار در جدول روث استفاده می کنیم.

مثال)

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$

حل: معادله مشخصه سیستم $F(s) = 1 + G(s)H(s)$

$$s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 7s + k = 0$$

s^4	1	8	k
s^3	5	6	
s^2	$\frac{34}{5}$	k	
s^1	$\frac{204/5 - 5k}{\frac{34}{5}}$		
s^0	k		

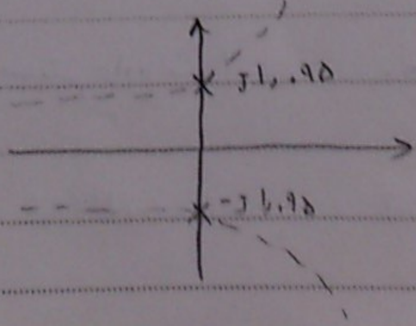
شرط پایداری سیستم این است که

$$k > 0 \ , \ \frac{204/5 - 5k}{\frac{34}{5}} > 0 \Rightarrow k < 8.15$$

پس به ازای $0 < k < 8.15$ سیستم پایدار است برای پایداری مرزی $k = 8.15$ می باشد

حال از معادله‌ی کمکی استفاده می کنیم.

$$\frac{34}{5}s^2 + k = 0 \longrightarrow \frac{34}{5}s^2 + 8.15 = 0 \Rightarrow s = \pm j1.095$$



۹) نقاط شکست ها

نقطه شکست نقطه‌ای از صفحه s است که در آن معادله مشخصه ریشه مکرر دارد. برای بدست آوردن نقطه شکست از k نسبت به s مشتق می‌گیریم و سپس آن را برابر صفر قرار می‌دهیم تا نقطه max k بدست آید.

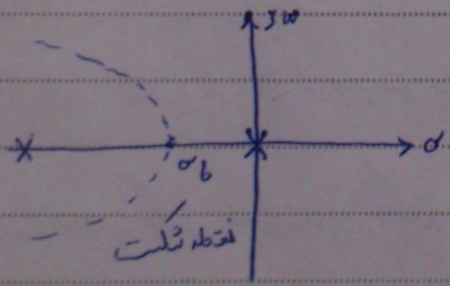
- نقاط شکست

$$\frac{\partial K}{\partial s} = 0 \quad \text{یا} \quad \boxed{\frac{\partial G(s)H(s)}{\partial s} = 0}$$ بیشتر استفاده می‌شود.

نکته: تمام نقاط بدست آمده نقطه شکست نیستند.

نکته: اگر جواب معادله فوق در معادله مشخصه صدق کند آن نقطه شکست میباشد.

نکته: بین دو قطب مجاور حتماً نقطه شکست وجود دارد.



مثال) نقاط شکست را بدست آورید؟

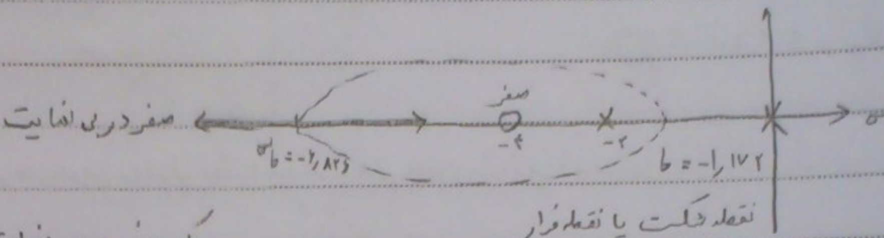
$F(s) = s(s+2) + K(s+4) = 0$ معادله مشخصه سیستم داده شده است.

حل $F(s) = 1 + KG(s)H(s)$ $\qquad G(s)H(s) = \frac{s+4}{s(s+2)}$

Subject : Date

$$\frac{\partial G(s)H(s)}{\partial s} = 0$$

از رابطه فوق داریم $s^2 + 8s + 8 = 0 \Rightarrow s_1 = -1{,}72$ و $s_2 = -6{,}828$

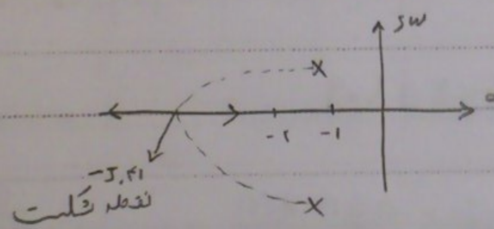


$n - m = 2 - 1 = 1$ یک صفر در بی نهایت است

مثال) نقطه شکست را بدست آورید.

$$G(s)H(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+2}$$

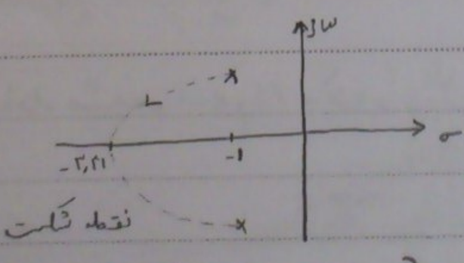
حل $\frac{\partial G(s)H(s)}{\partial s} = 0 \Rightarrow s^2 + 4s + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = 0{,}586 \\ s_2 = -3{,}41 \end{cases}$ ق ق



چون قطب روی صفر نداریم دایره کامل نشد

مثال) مکان هندسی ریشه ها را رسم کنید.

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$



حل: ① قطب ها = $\{0, -3, -1 \pm j1\}$

② تعداد شاخه ها $n = 4$ تعداد مجانب ها $n - m = 4 - 0 = 4$

نقطه تلاقی مجانب ها $\sigma = \frac{\sum \text{قطبها} - \sum \text{صفرها}}{n-m} = \frac{(0-3-1+j1-1-j1)-0}{4} = -1.25$

زاویه مجانب ها: $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$ و $k = 0, 1, 2, 3$

$\theta_k = \pm 45 , \pm 135$

③ محل تلاقی مکان با محور موهومی معادله مشخصه سیستم بصورت زیر است

$F(s) = s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 6s + k = 0$

s^4	1	8 k
s^3	5	6
s^2	6.8	k
s^1	$\frac{40.8 - 5k}{6.8}$	0
s^0	k	

برای محدوده $0 < k < 8.16$ سیستم پایدار برای $k = 8.16$ سیستم نوسانی است پس با معادله کمکی

$6.8s^2 + k = 0 \rightarrow 6.8s^2 + 8.16 = 0 \Rightarrow s = \pm j1.09$

④ نقطه شکست $\frac{dG(s)H(s)}{ds} = 0$ با توجه به اینکه مشتق معادله فوق مشکل است مشکل باشد از طریق جدول زیر هم میتوان نقطه شکست را حدس زد.

با استفاده از معادله مشخصه $s^4 + 5s^3 + 6s + k = 0$

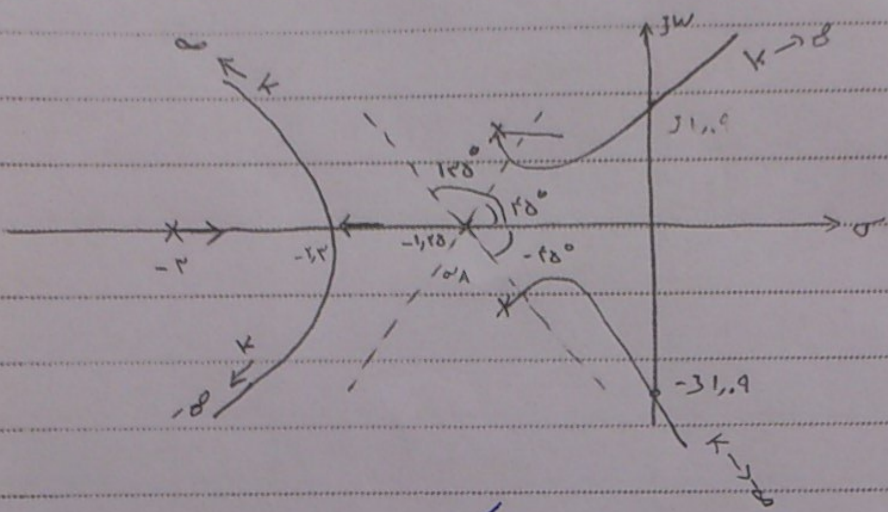
max k

k	0	2	4	4.83	4	0
s	0	-1	-2	-2.3	-2.6	-3

نقطه شکست $\sigma_b = -2.3$

شکل کامل مکان هندسی ریشه ها بصورت زیر می باشد

$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$



زاویه خروج $\theta_d = -71.6$

تعداد n-m صفر در بی نهایت
وجود ۴ = n-m

مثال) مکان ریشه ها را برای تابع تبدیل حلقه باز سیستم رسم کنید؟

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)}$$

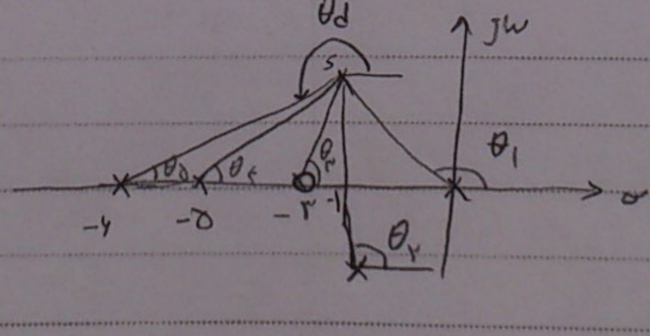
حل: قطب ها = $\{0, -5, -6, -1 \pm j1\}$ صفر $\{-3\}$

تعداد شاخه ها : $n = 5$ تعداد مجانب ها $n-m = 5-1 = 4$

محل تلاقی مجانب ها $\sigma_A = \frac{\Sigma \text{قطب ها} - \Sigma \text{صفرها}}{n-m} = \frac{(-5-6-1-j1-1+j1)-(-3)}{4} = -2.5$

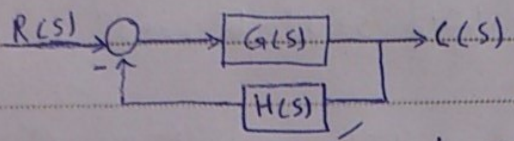
زاویه مجانب ها $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$, $k = 0, 1, \ldots, |n-m|-1 = 0, 1, 2, 3$

محاسبه زاویه خروج

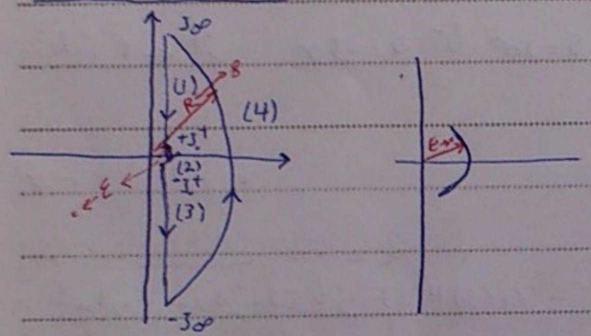


پایداری به روش نایکوئیست:

در این روش با استفاده از تابع تبدیل G(S) H(S) می توان پایداری سیستم حلقه بسته را تعیین کرد



برای بررسی این روش ابتدا مسیر نایکوئیست را رسم می کنیم:



شعاع دایره بزرگتر R و نیمدایره به شعاع ε می باشد

شرط پایداری سیستم حلقه بسته اینست که هیچ یک از ریشه های F(S) درسمت راست محور jω نباشد.

برای بررسی مسیر نایکوئیست را رسم نمودیم که از چهار ناحیه تشکیل شده است.

نیمدایره کوچک در شکل نمایانگر اینست که مسیر نایکوئیست نباید از نقاط منفرد (Singular) بگذرد لذا آنرا با نیم دایره ی به شعاع بینهایت کوچک رسم کردیم.

اگر ریشه های از F(s) درسمت راست محور jω قرار داشته باشد حتماً در داخل مسیر نایکوئیست هست.

اگر ریشه هایی از معادله مشخصه روی محور jω قرار گیرد برای اینکه مسیر نایکوئیست از این نقاط عبور نکند از نیم دایره ی بشعاع بینهایت کوچک حول این نقاط استفاده می کنیم.

مسیر نایکوییست از چهار منطقه اصلی تشکیل شده است که منطقه (۳) قرینه منطقه (۱) است

منطقه ۱ ← از $s=+j\infty$ تا $s=+j0^+$ در امتداد محور $j\omega$

منطقه ۲ ← از $s=+j0^+$ تا $s=-j0^+$ در امتداد نیم دایره‌ای به شعاع $s=\varepsilon e^{j\theta}$ می‌باشد

منطقه ۳ ← از $s=-j0^+$ تا $s=-j\infty$ در امتداد محور $j\omega$

منطقه ۴ ← از $s=-j\infty$ تا $s=+j\infty$ در امتداد نیم دایره‌ای به شعاع R بزرگ $s=Re^{j\theta}$

$R\to\infty$

بررسی پایداری:

۱- پایداری مدار حلقه باز $G(s)H(s)$

۲- پایداری مدار حلقه بسته $F(s)=1+G(s)H(s)$

در حالت اول قطب های $G(s)H(s)$ باید در سمت چپ محور $j\omega$ قرار گیرد تا سیستم پایدار باشد

در حالت دوم ریشه های $F(s)$ باید در سمت چپ صفحه s قرار گیرند تا سیستم پایدار باشد

پایداری سیستم حلقه بسته را می‌توان با استفاده از سیستم حلقه باز بدست آورد.

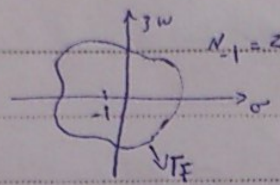
برای این کار از قضیه اصل کوشی استفاده می‌کنیم

(اصل آرگومان کوشی) couchy principle of Argoment

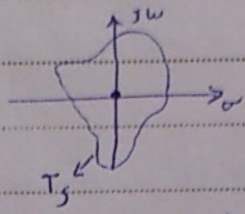
$N_{-1} = Z_{-1} - P_{-1}$

$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0 \rightarrow G(s)H(s) = F(s) - 1$

نکته:



$N_{-1} = Z_{-1} - P_{-1} - 1$



$N = Z - P$

منحنی نایکوئیست که $-1+j0$ را دوری زند

منحنی نقطه مبدأ دوری زند

$N_{-1} \rightarrow$ تعداد دورهایی که منحنی $G(s)H(s)$ (منحنی نایکوئیست) حول نقطه $(-1+j0)$ دور می زند

$Z_{-1} \rightarrow$ تعداد صفرهای $1+G(s)H(s)$ (یا ریشه های معادله مشخصه) که در سمت راست محور $j\omega$ قرار گرفته است

یا سمت راست صفحه s

$P_{-1} \rightarrow$ تعداد قطب های $G(s)H(s)$ در نیمه صفحه راست صفحه s قرار دارد

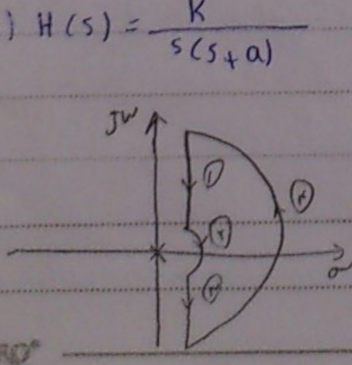
شرط پایداری:

شرط پایداری اینکه $Z_{-1}=0$ باشد پس باید $N_{-1} = -P_{-1}$ ، $N_{-1} = \cancel{Z_{-1}} - P_{-1}$

مثال) تحقیق کنید سیستم حلقه بسته پایدار است یا نه

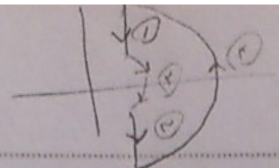
$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+a)} \quad a>0,\ k>0$$

حل:



رسم مسیر نایکوئیست

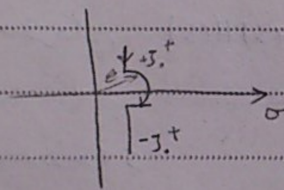
باتوجه به تابع تبدیل $G(s)H(s)$ هیچ قطبی در سمت راست محور $j\omega$ نداریم پس $P_{-1}=0$

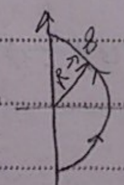


$\lim G(s)H(s)\Big|_{s=\varepsilon e^{j\theta}} = \frac{k}{\varepsilon e^{j\theta}(\varepsilon e^{j\theta}+a)}$ نمودار نایکوئیست متناظر ناحیه ② را رسم می کنیم

یا بصورت کلی تر $\lim_{s\to 0} G(s)H(s) = \lim_{s\to 0} \frac{k}{s(s+a)} = \lim_{s\to 0} \frac{k}{as} = \infty e^{-j\theta}$

پس رابطه فوق نشان می دهد که نمودار نایکوئیست متناظر ناحیه ② دارای دامنه بینهایت و تغییر فاز (زاویه) در جهت عکس تغییر زاویه مسیر نایکوئیست است. مسیر نایکوئیست از $+90$ درجه به -90 درجه در جهت عقربه ساعت می رسد ولی علامت منفی بالا نشان می دهد که در نمودار $G(s)H(s)$ متناظر باید از -90 تا $+90$ خلاف جهت عقربه های ساعت برسد

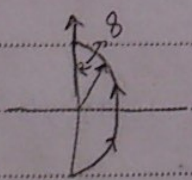


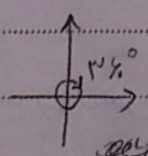


نمودار نایکوئیست متناظر ناحیه (2)

بررسی ناحیه ۴

$\lim G(s)H(s)\Big|_{s=Re^{j\theta},\ R\to\infty} = \frac{k}{Re^{j\theta}(Re^{j\theta}+a)} = \frac{k}{R^2 e^{j2\theta}}\Big|_{R\to\infty} = 0\, e^{-j2\theta}$





پس منحنی نایکوئیست متناظر با مسیر ۴ دارای دامنه صفر و زاویه ۳۶۰° خلاف جهت عکس مسیر نایکوئیست

بررسی ناحیه ① : در این ناحیه $s = j\omega$

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s(s+a)} = \frac{k}{j\omega(j\omega+a)} = \frac{k(-\omega^2 - ja\omega)}{\omega^4 + a^2\omega^2}$$

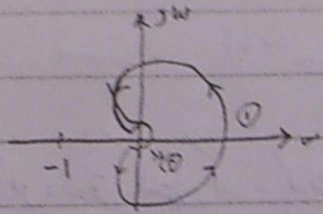
با قرار دادن جزء موهومی برابر صفر محل تلاقی منحنی نایکوئیست با محور حقیقی بدست می آید.

Subject : Date

قسمت موهومی $G(s)H(s)$ $\qquad \frac{-ka\omega}{\omega^4+a^2\omega^2} = \frac{ka}{\omega^3+a^2\omega} = 0$

وقتیکه $\omega=\infty$ باشد معادله فوق صفر خواهد بود

پس شکل این منحنی نایکوئیست به صورت زیر خواهد بود که از ترکیب ناحیه ② و ① بدست می آید



چون منحنی نایکوئیست 1- را دور نمی زند

پس $N_{-1}=0$ و $Z_{-1}=0$ لذا سیستم حلقه بسته پایدار است

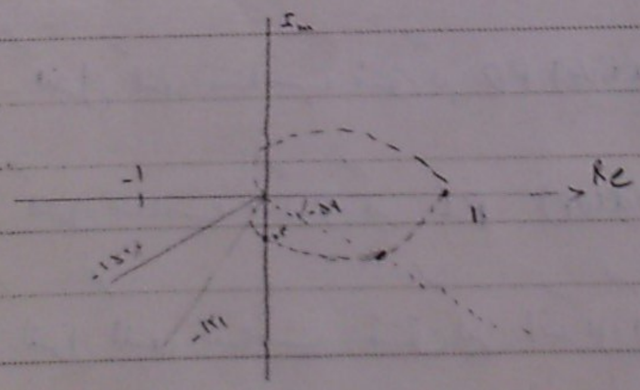
نکته: اگر سیستم حلقه باز پایدار باشد و منحنی نایکوئیست 1- را دور نزند سیستم حلقه بسته پایدار است

مثال) پایداری سیستم حلقه بسته را بررسی کنید با روش نایکوئیست ؟

$$G(s)H(s) = \frac{1}{(1+0.5s)(1+2s)} \rightarrow G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{(1+0.5j\omega)(1+2j\omega)}$$

به جای مسیر از نقطه یابی حل می کنیم

	ω	۰	۰٫۵	۱	۲	۵	∞
اندازه	$\lvert G(j\omega)H(j\omega)\rvert$	۱	۰٫۶۸۶	۰٫۴	۰٫۲۲	۰٫۰۳۷	۰
زاویه	φ	۰	۵۹-	۹۰-	۱۲۱-	۱۴۶٫۴-	۱۸۰-



هیچ قطبی سمت راست ندارد $P_{-1}=0$

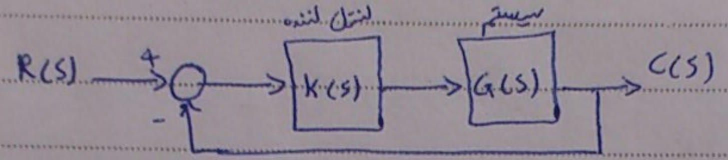
$(N_{-1}=Z_{-1}-P_{-1})$

و $N_{-1}=0$ پس $Z_{-1}=0$ لذا سیستم حلقه بسته پایدار است

Subject : Date

کنترل کننده ها

در اینجا منظور ما کنترل کننده های صنعتی است که در نیروگاهها، پالایشگاه ها و ... مورد استفاده قرار می گیرد. که به آن کنترل کننده خودکار هم می گویند.



در بلوک دیاگرام شکل فوق کنترل کننده که تابع تبدیل آن با $K(s)$ مشخص شده است وظیفه آن این است که با استفاده از ورودی و خروجی سیگنال مناسب را محاسبه و به سیستم اعمال نماید.

به عبارت دیگر $K(s)$ را باید طوری طراحی کنیم که خروجی، ورودی را بدون خطا دنبال کند و اثر اغتشاش و نویز را بر روی خروجی تضعیف نماید.

انواع کنترل کننده ها:

۱- کنترل کننده متناسب P (Proportional controller)

۲- کنترل کننده متناسب مشتق گیر PD (Proportional-Derivative)

۳- کنترل متناسب انتگرال گیر PI (Proportional-Integrator)

۴- کنترل کننده متناسب - مشتق گیر - انتگرال گیر PID

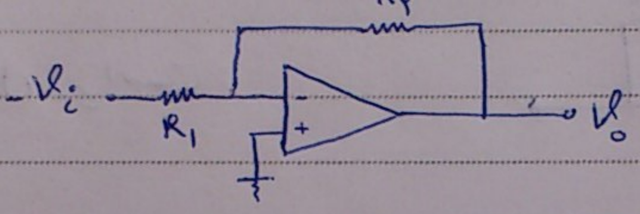
Subject :   Date ....

کنترل کننده P

باعث کاهش حدفازی شود

از این کنترل کننده برای افزایش سرعت پاسخ سیستم و کاهش خطای ماندگار استفاده می شود.

مدار این کنترل کننده بشکل زیر می باشد:



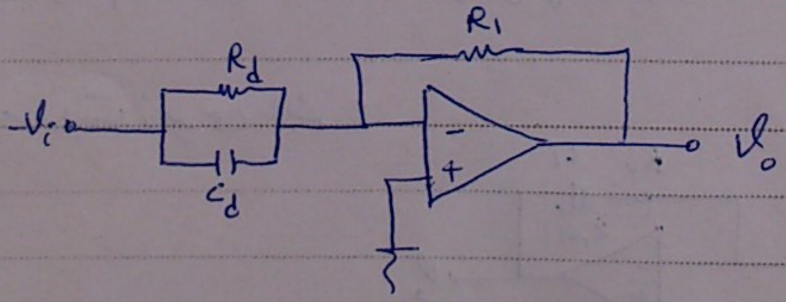
$$K(s) = \frac{V_o}{-V_i} = \frac{R_2}{R_1} = K_p \longrightarrow K(s) = K_p$$ بهره ثابت

کنترل کننده PD

از این کنترل کننده برای افزایش حدفاز سیستم و کاهش نوسانات پاسخ پله سیستم استفاده می

این کنترل کننده همانند جبران کننده پیش فاز lead compensator می ماند.

مدار آن بشکل زیر است:

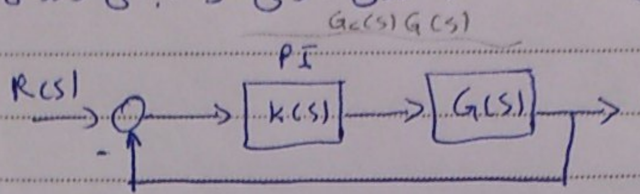


$$K(s) = \frac{R_1}{\frac{R_d}{1+R_d s C_d}} = \underbrace{\frac{R_1}{R_d}}_{K_p}(1+\underbrace{R_d C_d}_{T_d} s) \to K(s) = K_p(1+T_d s) = a+bs$$

Subject : .... Date ....

مثال) کنترل کننده PI را طوری طراحی کنید که برای ورودی شیب واحد خطای ماندگار ۰/۰۱ و $\zeta = 0.7$ باشد

$G(s) = \frac{1}{s+2}$



شیب $r(t) = R\,t\,u(t) \to R(s) = \frac{R}{s^2}$, $R \to 1$

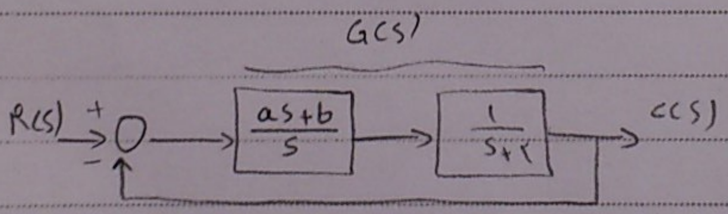
در PI: $K(s) = K_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right) = a + \frac{b}{s}$

$G_c(s)G(s) = \left(a+\frac{b}{s}\right)\left(\frac{1}{s+2}\right)$

$e_{ss} = 0.01$, $e_{ss} = \frac{1}{K_v}$, $K_v = \lim_{s\to 0} s\,G_c(s)G(s) = \frac{b}{2}$

$0.01 = \frac{1}{\frac{b}{2}} = \frac{2}{b} \to b = 200$

با استفاده از معادله مشخصه می‌بینیم



$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$

$F(s) = 1+G(s) = s^2 + 2s + as + b = s^2 + (2+a)s + b$

$\omega_n = \sqrt{b} = \sqrt{200}$, $2\zeta\omega_n = 2+a$

$2(0.7)(\sqrt{200}) = 2+a \to a = 18$ [illegible] $\to K(s) = 18 + \frac{\sqrt{200}}{s}$