

فصل اول

آشنایی با سیگنال‌ها و سیستم‌ها



مقدمه

واژه های سیگنال و سیستم از واژه های رایج در علوم مختلف مهندسی و غیر مهندسی است. در همه این علوم، سیگنال بیان گر یک پدیده فیزیکی است که تابعی از یک متغیر مستقل می باشد، و سیستم مجموعه منظمی است که ممکن است دارای یک یا چندین سیگنال ورودی و یک یا چندین سیگنال خروجی باشد. می توان سیگنال های ورودی به سیستم را بعنوان محرک ها یا اثر محیط خارج بر سیستم، و سیگنال های خروجی را بعنوان واکنش یا رفتار سیستم نسبت به آن محرک ها در نظر گرفت.

مهندسی و محققین تلاش می کنند تا نحوه کار سیستم های مختلف را درک کنند تا بتوانند حداقل به یکی از اهداف زیر دست یابند:

۱- بتوانند سیستم مورد نظر را بر روی کامپیوتر شبیه سازی کرده و با اعمال سیگنال های ورودی متفاوت، سیگنال های خروجی سیستم را بدست آورند، و به عبارت بهتر بتوانند سیستم را به نحو دقیق تری تجزیه و تحلیل کرده و عملکرد آن را بررسی کنند.

۲- بتوانند سیستمی مشابه سیستم اصلی طراحی و آن را تولید کنند.

۳- بتوانند با طراحی سیستمی جدید و با اتصال این سیستم به سیستم اصلی، باعث بهبود و یا تغییر رفتار سیستم اصلی شوند.

۴- بتوانند با داشتن سیگنال خروجی برای مدتی معلوم، به پیش بینی سیگنال خروجی در آینده بپردازند. به عنوان مثال در علوم و تکنولوژی: مخابرات، ماهواره، پزشکی، پردازش صوت و تصویر، کشاورزی، مکانیک، و حتی در اقتصاد نیز می توان کاربردهای مختلفی از مفاهیم سیگنال و سیستم را، برای دستیابی به اهداف فوق، یافت. در علوم مختلف، معمولاً طبیعت سیگنال ها و سیستم ها کاملاً متفاوت هستند. در مهندسی مکانیک، یک سیگنال می تواند نیروی مکانیکی وارد بر یک جسم، یا صوت (به مفهوم ارتعاشات مولکول های هوا) حاصل از حرکت یک اتومبیل در نظر گرفته شود. اگر نیروی مکانیکی به عنوان سیگنال ورودی یک سیستم مکانیکی (مثلاً فنر) در نظر گرفته شود، می توان سیگنال خروجی این سیستم را جابجایی یک نقطه دلخواه از فنر نسبت به حالت عادی خود پنداشت. در مهندسی برق، ولتاژ و جریان دو سیگنال پُر کاربرد هستند، و هر مداری، متشکل از عناصر خطی مثل سلف، خازن و مقاومت و یا عناصر غیر خطی مثل دیود و ترانزیستور، را می توان یک سیستم پنداشت. ملاحظه می شود که ماهیت فیزیکی سیگنال ها و سیستم ها در رشته های مختلف کاملاً متفاوت می باشند.

معمولاً برای بررسی کامل و منطقی یک پدیده فیزیکی در جهان خارج باید سه مرحله زیر را طی کرد:

۱- ابتدا باید آن پدیده را شناخت و تفسیر کاملی از آن پدیده و اثرات متقابل آن پدیده و جهان خارج ارائه کرد.

۲- بر اساس تفسیر ارائه شده در قسمت ۱، و با استفاده از روابط فیزیکی حاکم بر آن پدیده، باید مدل مناسبی را برای آن پدیده ارائه نمود.

۳- در مرحله آخر با توجه به مدل در دسترس، آن پدیده بصورت یک سیستم با یک یا چند سیگنال ورودی و خروجی شبیه سازی شده و نکته ابهامی در مورد آن وجود نخواهد داشت. لذا می توان رفتار (سیگنال خروجی) آن را به یک محرک (سیگنال ورودی) پیش بینی نمود. در کلیه مراحل فوق، از اصول سیگنال و سیستم استفاده شایانی خواهد شد. در پایان مرحله دوم، پدیده مادی یا فیزیکی ناشناخته به سیستمی با پارامترهای شناخته شده، تبدیل خواهد شد، که رفتار آن کاملاً (یا حداقل تا حد رضایت بخشی) قابل پیش بینی است.

گاهی نیز یک سیستم پیچیده و بزرگ را می‌توان به کمک ترکیب چند سیستم شناخته شده ساده شبیه‌سازی کرد. این نوع شبیه‌سازی می‌تواند در تفسیر عملکرد و پیش بینی رفتار این سیستم به سیگنال‌های ورودی مختلف، کمک شایانی نموده و از هزینه آزمایش‌های گران قیمت توسط سیستم اصلی بکاهد. به عنوان مثال برای بررسی اثر پدیده‌های مختلف جوی از قبیل گردباد و یا طوفان بر روی حرکت هواپیماهای غول پیکر مسافربری، انجام آزمایش عملی و مشاهده نتیجه، غیر قابل تصور است، چون اولاً ایجاد حالت مطلوب جوی در زمان آزمایش و در محل هواپیما امری غیر ممکن است و ثانیاً ممکن است نتایج آزمایش باعث هزینه‌های گزاف و ایجاد خسارت بر روی سیستم مورد آزمایش شود. پس بهتر است در این‌گونه موارد، هم سیستم هواپیما و هم سیگنال‌های ورودی (عوامل جوی) را توسط کامپیوتر شبیه‌سازی نموده و سیگنال‌های خروجی را مورد بررسی قرار داد. دیده می‌شود که اصول سیگنال و سیستم به عنوان ابزاری جهت تفسیر پدیده‌های جهان خارج و ایجاد یک بینش عمیق علمی از آنها، بسیار مورد استفاده دارند.

در این فصل، ابتدا تعریف اولیه سیگنال ارائه شده و سپس سیگنال‌ها، با توجه به خواصشان، دسته‌بندی می‌شوند. بعد از آن سیگنال‌های مهم، به عنوان ابزار کار برای مطالعه سیستم‌ها، معرفی می‌شوند. پس از معرفی و بررسی سیگنال‌ها، تعریف یک سیستم ارائه شده و خواص مختلف یک سیستم معرفی و بررسی می‌شود. از جمله خواص سیستم‌ها، دو خاصیت خطی و مستقل بودن از زمان هستند که در فصول بعدی این کتاب بیشتر مورد توجه قرار می‌گیرند. جهت آشنایی بیشتر دانشجویان به اصول و تعاریف مطرح شده در این فصل، در پایان به ارائه و بررسی چند مثال می‌پردازیم. پیش نیاز این فصل، ریاضیات مقدماتی و حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌باشد.

۱-۱- تعریف سیگنال

سیگنال تابعی از یک متغیر مستقل است و حاوی اطلاعاتی در مورد حالت یا رفتار فیزیکی یک پدیده یا سیستم می‌باشد. به عبارت دیگر سیگنال نوعی خبر است که اطلاعاتی در مورد پدیده فیزیکی مورد نظر به مخاطب ارائه می‌دهد. سیگنال‌ها از نظر ریاضی بصورت توابعی چند متغیره نمایش داده می‌شوند. سیگنال‌ها ممکن است جهت توصیف طیف وسیعی از پدیده‌های مادّی و فیزیکی بکار برده شوند.

روش ایجاد سیگنال بستگی به ماهیت آن دارد. به عنوان مثال، سیستم صوتی انسان می‌تواند نوعی اغتشاش کنترل شده در هوای اطراف دهان ایجاد نماید که آن را صوت می‌نامند. به عبارت بهتر، دهان و حنجره، با همکاری یکدیگر، می‌توانند باعث تغییر فشار هوا و ایجاد سیگنال صوتی شوند. این سیگنال مکانیکی نامیده می‌شود. البته سیگنال‌های مختلف با ماهیت‌های متفاوت، قابل تبدیل به یکدیگر هستند. به عنوان مثال سیگنال صوتی مکانیکی، به سادگی قابل تبدیل به سیگنال الکتریکی است. این عمل تبدیل توسط حس‌گرها^۱ انجام می‌شود. انواع مختلفی از حس‌گرها نیز جهت تبدیل سایر پارامترهای مکانیکی، از قبیل فشار و دما به سیگنال الکتریکی طراحی شده‌اند. یک سیگنال الکتریکی می‌تواند ولتاژ یا جریان باشد.

در تمامی مثال‌های فوق سیگنال مطرح شده یک تابع یک بعدی از زمان است. اما سیگنال می‌تواند تابعی از دو متغیر مستقل باشد. به عنوان مثال، نمودار روشنایی هر نقطه در یک تصویر، بیانگر یک سیگنال دو بعدی است. به این سیگنال، سیگنال تصویری می‌گویند. برای توصیف سیگنال دو بعدی، سه بعد مورد نیاز است. به ماهیت‌های متفاوت سیگنال صوتی و سیگنال تصویری توجه کنید که در اولی متغیر مستقل، زمان، و در دومی

¹ Sensors

متغیرهای مستقل، دو بعد از مکان هستند. از طرف دیگر، متغیر تابع در سیگنال صوتی، به میزان فشار هوا در محیط مربوط است. ولی در سیگنال تصویری، متغیر تابع میزان روشنایی یک مکان از تصویر می‌باشد. بنابراین سیگنال‌ها بسیار متنوع بوده و دارای ابعاد (دیمانسیون‌های) مختلف هستند.

در این کتاب، ما به بحث و بررسی سیگنال‌های متفاوت که بیانگر پدیده‌های مختلف فیزیکی می‌باشند خواهیم پرداخت. در بیشتر مباحث این کتاب می‌توانید برای راحتی، سیگنالها را بیانگر پدیده‌های الکتریکی در نظر بگیرید. یک سیگنال الکتریکی ممکن است، شکل موج ولتاژ یا جریان باشد اما از لحاظ بحث ما، این مطلب اصلاً اهمیتی ندارد و به همین دلیل، معمولاً در بیان سیگنال از واحد ولت یا آمپر یا واحد دیگری استفاده نخواهیم کرد مگر در موارد نادر که بیان واحد سیگنال باعث درک بهتر موضوع بشود.

۲-۱ انواع سیگنال‌ها

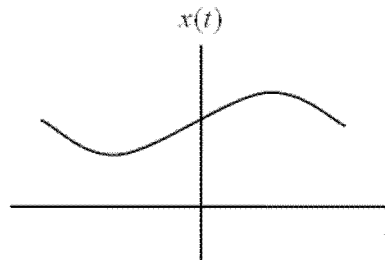
می‌توان سیگنال‌ها را با توجه به خواص متفاوتشان دسته‌بندی کرد. بعنوان مثال یک سیگنال می‌تواند تصادفی^۱ یا معین^۲ باشد. یک سیگنال معین بوسیله یک رابطه ریاضی یا نمودار و یا بوسیله یک جدول مقادیر بیان می‌شود. بعنوان مثال رابطه بین سیگنال f ، نیروی وارده بر یک جسم صلب با جرم m و شتاب a را میتوان با رابطه ریاضی $f=ma$ نمایش داد. همچنین ممکن است سیگنال نیروی مذکور بصورت یک منحنی بر حسب دو متغیر جرم و شتاب در یک دستگاه مختصات سه‌بعدی نمایش داده شده، و یا مقدار نیرو بر حسب دو متغیر دیگر بصورت یک جدول ارائه گردد. در حالی که برای بیان سیگنال‌های تصادفی از مدل‌های احتمال و روشهای آماری استفاده می‌شود. به عنوان مثال نویز در سیستم‌های مخابراتی یک سیگنال تصادفی است که نمی‌توان برای آن رابطه ریاضی مشخصی بر حسب زمان ارائه کرد. بیان نویز بصورت یک منحنی مشخص و یا جدول مقادیر بر حسب زمان نیز ممکن نیست. به همین دلیل، یک سیگنال تصادفی معمولاً با کمک یک تابع توزیع یا تابع چگالی احتمال و یا دیگر روشهای مبتنی بر آمار و احتمالات مهندسی بیان می‌شود. به عنوان مثال، نویز حرارتی که یکی از پُرکاربردترین نویزها است با تابع چگالی احتمال گوسی (Gaussian Probabilty Density Function) که دارای دو پارامتر مقدار متوسط و واریانس است بیان می‌شود، و رفتار آن با کمک تئوری احتمالات مورد بررسی قرار می‌گیرد. تئوری تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌های تصادفی خارج از محدوده این کتاب است. بنابراین، در این کتاب فقط با سیگنال‌های معین سروکار خواهیم داشت. مهمترین تقسیم بندی سیگنال‌ها، در این کتاب، از لحاظ پیوسته یا گسسته بودن متغیر مستقل سیگنال است. به طور کلی می‌توان سیگنال‌ها را به سه دسته: سیگنال پیوسته زمانی، سیگنال گسسته زمانی و سیگنال دیجیتال تقسیم کرد. در زیر هر یک از سه دسته سیگنال فوق معرفی می‌شوند.

۱-۲-۱ سیگنال پیوسته زمانی

سیگنال پیوسته زمانی سیگنالی است که متغیر مستقل آن، که معمولاً زمان است، مقادیر پیوسته‌ای را اتخاذ می‌کند. نمونه‌ای از این سیگنال‌ها در شکل (۱-۱) رسم شده است. سیگنال پیوسته زمانی را بصورت $x(t)$ نمایش می‌دهیم. متغیر مستقل گاهی می‌تواند مکان یا پارامتر فیزیکی دیگری باشد.

¹ random

² deterministic

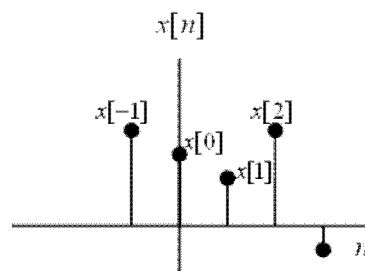


شکل (۱-۱): نمونه سیگنال پیوسته زمانی

سیگنال صوتی بصورت تابعی از زمان، و سیگنال فشار اتمسفر بصورت تابعی از ارتفاع، نمونه‌هایی از سیگنال‌های پیوسته زمانی هستند. سیگنال‌های مخابراتی مورد استفاده در سیستم‌های سخن پراکنی، اکثراً بصورت پیوسته زمانی می‌باشند. پدیده‌های فیزیکی که بصورت سیگنال قابل بیان هستند، اکثراً پیوسته زمانی هستند. البته شاید استفاده از لفظ پیوسته زمانی کمی غلط‌انداز باشد. چون لازم نیست در بیان سیگنال، متغیر مستقل (محور افقی) حتماً زمان باشد. مثلاً در مورد سیگنالی که بیانگر تغییرات فشار بر حسب ارتفاع است، متغیر مستقل دارای بعد طول است. به هر حال، همانگونه که اشاره شد، در بیان سیگنال به ابعاد، علاقه‌ای نشان نخواهیم داد. لذا اگر فقط محور افقی در نمایش سیگنال به ازاها مقادیر پیوسته تعریف شده باشد، اصطلاحاً آن سیگنال را سیگنال پیوسته زمانی می‌نامند، (بدون توجه به اینکه محور افقی واقعاً زمان باشد یا نه). اینگونه سیگنال‌ها جهت توصیف بسیاری از پدیده‌ها، مثل صوت و حرارت مورد استفاده قرار می‌گیرند. یادآوری می‌شود که جهت سهولت نوشتاری در بخش‌های بعدی این کتاب، عبارت "سیگنال پیوسته زمانی" بدون علامت کسره در انتهای سیگنال و بدون علامت همزه در انتهای پیوسته یعنی بصورت "سیگنال پیوسته زمانی" ظاهر خواهد شد.

۱-۲-۲ سیگنال گسسته زمانی

سیگنال گسسته زمانی سیگنالی است که متغیر مستقل آن مقادیر گسسته‌ای را اتخاذ می‌کند و دامنه آن می‌تواند مقادیر پیوسته و یا گسسته‌ای را اتخاذ نماید. یک نمونه از این سیگنال‌ها، در شکل (۲-۱) رسم شده است. سیگنال گسسته زمانی را بصورت $x[n]$ نمایش می‌دهیم.



شکل (۲-۱): نمونه سیگنال گسسته زمان

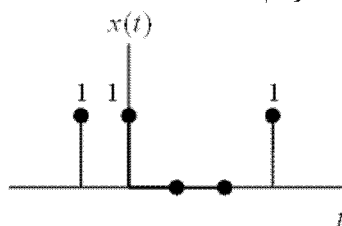
قابل توجه است که سیگنال گسسته زمانی تنها در لحظات گسسته از متغیر مستقل که معمولاً زمان می‌باشد، تعریف شده است و در سایر لحظات مقدار آن تعریف نشده است و نباید اشتباهاً مقدار آنرا صفر در نظر گرفت.

نمودار درآمد یک قهوه‌خانه سنتی طی سالهای مختلف می‌تواند بصورت یک سیگنال گسسته زمانی بیان گردد. در این صورت هر واحد از متغیر مستقل، مدت زمانی برابر یک سال را نشان می‌دهد. همانگونه که در مورد سیگنال‌های پیوسته زمانی اشاره شد، در اینجا نیز لزومی ندارد که حتماً محور افقی بُعد زمان را داشته باشد. بلکه همین قدر که محور افقی، مقادیر گسسته را اتخاذ نماید به آن سیگنال گسسته زمانی می‌گویند. سیگنال گسسته زمانی یا دنباله را می‌توان بوسیله نمونه‌برداری از سیگنال پیوسته زمانی و یا بوسیله برخی فرایندهای گسسته مستقیماً تولید کرد.

اصول تحلیل این سیگنال در بسیاری از جهات مشابه نوع پیوسته زمانی آن است. ولی در این کتاب بخاطر برخی نقاط افتراق، مبحث سیگنال‌ها و سیستم‌های گسسته زمانی جداگانه مورد بررسی قرار داده شده است. برای تمیز دادن سیگنال‌های پیوسته زمانی از سیگنال‌های گسسته زمانی، به ترتیب، از متغیر t درون پرانتز و از متغیر n درون براکت به عنوان متغیر مستقل استفاده می‌شود. اگر متغیر مستقل را زمان در نظر بگیریم، فاصله زمانی واقعی دو نمونه متوالی از سیگنال گسسته زمانی را می‌توان به دلخواه انتخاب کرد. تنها لازم است این فاصله برای هر دو نمونه متوالی در کل دنباله یکسان باشد. مثلاً اگر فاصله دو نمونه متوالی $1/01$ نانو ثانیه باشد و نمونه اول در مبدأ زمان فرض شود، نمونه دوم در زمان $1/01$ نانو ثانیه بعد از آن رخ می‌دهد و نمونه سوم در زمان $2/02$ نانو ثانیه رخ می‌دهد که بترتیب متناظر با $n=1$ و $n=2$ می‌باشند. یادآوری می‌شود که جهت سهولت نوشتاری در بخش‌های بعدی این کتاب، عبارت سیگنال گسسته زمانی "بدون علامت کسره در انتهای سیگنال و بدون علامت همزه در انتهای گسسته یعنی بصورت "سیگنال گسسته زمانی" ظاهر خواهد شد.

۳-۲-۱ سیگنال دیجیتال

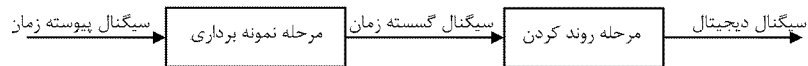
سیگنال دیجیتال سیگنالی است که نه تنها متغیر آن، که دامنه آن نیز مقادیر گسسته را اتخاذ می‌نماید. نمونه‌ای از این سیگنال‌ها در شکل (۳-۱) رسم شده است.



شکل (۳-۱): نمونه یک سیگنال دیجیتال که فقط مقادیر ۰ و ۱ را اتخاذ می‌کند.

این سیگنال‌ها، اکثراً در کامپیوتر مورد استفاده قرار می‌گیرند. در مورد این نوع سیگنال‌ها هیچ محدودیتی در مورد تعداد و مقدار دامنه‌های معتبر روی محور عمودی وجود ندارد، فقط کافی است تعداد این سطوح محدود باشند. به عنوان مثال این تعداد می‌تواند ۲، ۳ و یا در حالت کلی M باشد. به سیگنال دیجیتالی با دو و سه سطح دامنه معتبر به ترتیب سیگنال دوتایی (binary) و سه تایی (ternary) گفته می‌شود. در حالت کلی سیگنالی با M سطح معتبر را یک سیگنال M تایی (M -ary) می‌گویند، این سیگنال‌ها در مخابرات دیجیتال کاربرد بسیار زیادی دارند، و روز به روز بر کاربردهای آنها افزوده می‌شود. اگر چه این سیگنال‌ها در حقیقت نوع

خاصی از سیگنال‌های گسسته زمانی هستند، بدلیل اهمیت آن‌ها گاهی در برخی کتابها بطور جداگانه طبقه‌بندی می‌شوند. در حقیقت، این نوع سیگنال‌ها تنها وسیله ارتباطی انتقال اطلاعات میان کامپیوتر و خارج از آن می‌باشند. یک روش تولید این نوع سیگنال‌ها در شکل (۴-۱) نشان داده شده است.



شکل (۴-۱) روش ساخت سیگنال دیجیتال از روی سیگنال پیوسته زمانی

مرحله گرد یا روند کردن شامل تبدیل سطح هر نمونه به نزدیکترین سطح معتبر در سیگنال دیجیتال است. سیستم‌هایی که عملیات روند کردن را انجام می‌دهند به سیستم روند ساز معروف هستند. بدلیل اینکه این سیگنال‌ها در حقیقت یک زیر مجموعه از مجموعه سیگنال‌های گسسته زمانی هستند، از لحاظ تجزیه و تحلیل، تفاوتی با سیگنال‌های گسسته زمانی ندارند و ما بخش خاصی را به بررسی این سیگنال‌ها اختصاص نخواهیم داد. ولی توجه دانشجویان را به این نکته جلب می‌کنیم که آنچه باعث مزیت و برتری تحلیل سیگنال‌های گسسته زمانی بر پیوسته زمانی شده است، سادگی تحلیل سیگنال‌های دیجیتال می‌باشد.

۳-۱ چند سیگنال پیوسته زمانی مهم

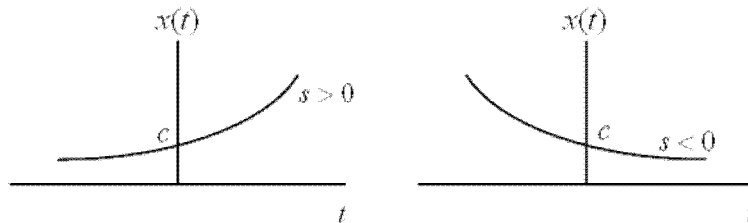
در این قسمت چند سیگنال پیوسته زمانی، که معمولاً در کاربردهای مهندسی بسیار ظاهر می‌شوند، را معرفی می‌کنیم. ترکیب این سیگنال‌ها نیز گاهی در مسائل به چشم می‌خورد. البته لزوماً همه سیگنال‌های پیوسته زمانی محدود به این سیگنال‌ها و ترکیب آنها نمی‌شوند.

۱-۳-۱ سیگنال نمائی مختلط

این سیگنال بصورت زیر بیان می‌شود:

$$x(t) = ce^{st}$$

که در آن c عدد ثابت حقیقی و s در حالت کلی یک عدد مختلط است. اگر s یک عدد حقیقی باشد، سیگنال فوق یک سیگنال نمائی حقیقی بوده، و به دو صورت نمائی افزایشده اگر $s > 0$ و نمائی کاهشده اگر $s < 0$ باشد، بیان می‌گردد.



شکل (۵-۱) سیگنال نمائی حقیقی کاهشده و افزایشده

یک نوع مهم از سیگنال‌های پیوسته زمانی وقتی بدست می‌آید که s یک عدد موهومی باشد. به عنوان مثال اگر $s = j\omega_0$ باشد (به طوری که $\omega_0 = 2\pi/T_0$) یک سیگنال نمائی بصورت $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ حاصل می‌شود که دارای خاصیت تناوبی است. چون همانگونه که بعداً اشاره خواهد شد، $e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0(t+T_0)}$ ، و از طرف دیگر داریم $e^{j\omega_0 T_0} = 1$ پس دوره تناوب اصلی این سیگنال است. دوره تناوب اصلی همیشه به صورت عددی مثبت بیان می‌شود. بنابراین، دوره تناوب اصلی این سیگنال وقتی $\omega_0 > 0$ یا $\omega_0 < 0$ است، یکسان است و برابر است با $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$ می‌باشد. خانواده توابع نمائی بصورت:

$$\varphi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \quad (2-1)$$

به ازاء مقادیر صحیح برای k ، به عنوان سیگنال‌های پایه در بسط فوریه مورد استفاده قرار می‌گیرند. بدین ترتیب هر سیگنالی که دارای دوره تناوب T_0 باشد، توسط مجموعه‌ای از این سیگنال‌ها با ضرایب خاص قابل بسط و بیان است (جزئیات این مورد را در فصل ۳ مطالعه کنید).

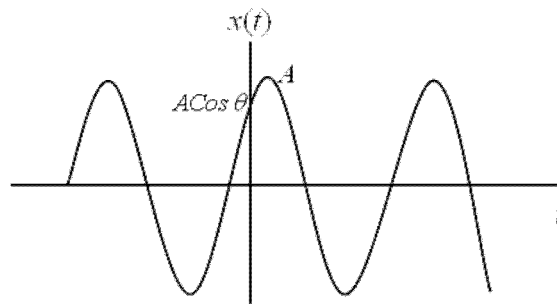
۲-۳-۱ سیگنال سینوسی

این سیگنال بصورت کلی زیر است:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta) \quad (3-1)$$

که در آن A ، ω_0 و θ اعداد ثابت حقیقی بوده و، به ترتیب، دامنه، فرکانس زاویه‌ای و فاز سیگنال نامیده می‌شوند. این سیگنال متناوب بوده و دوره تناوب اصلی آن برابر $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ می‌باشد. شکل کلی این سیگنال

بصورت زیر است



شکل (۶-۱): سیگنال سینوسی

طبق رابطه اولر داریم

$$e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t \quad (4-1)$$

تمرین (۱-۱): رابطه فوق را اثبات کنید.

بنابراین می‌توان $\cos\omega_0 t$ و $\sin\omega_0 t$ را بر حسب $e^{j\omega_0 t}$ بصورت زیر نوشت:

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] \quad (5-1)$$

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] \quad (۶-۱)$$

در حالت کلی تر داریم:

$$A \cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{A}{2} [e^{j\varphi} e^{j\omega_0 t} + e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 t}] \quad (۷-۱)$$

و یا

$$A \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \Re[e^{j(\omega_0 t + \varphi)}] \quad (۸-۱)$$

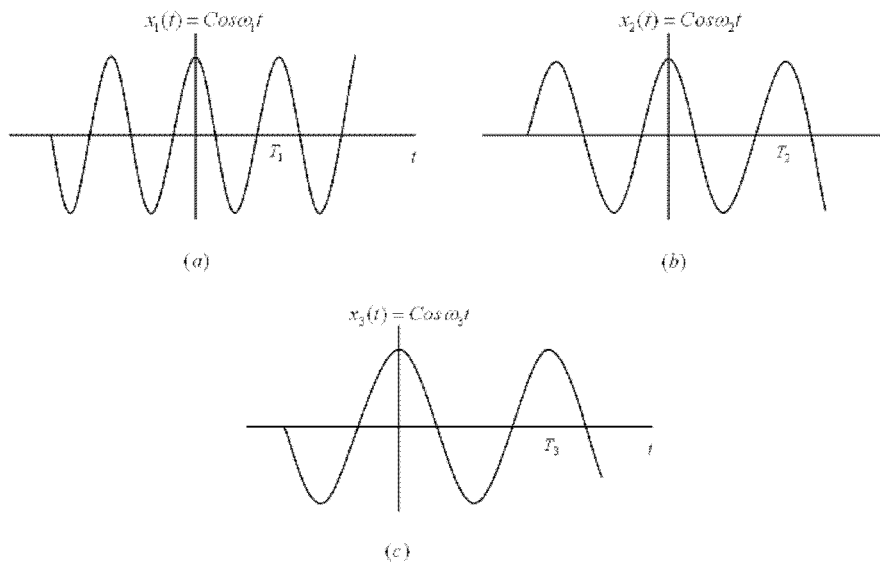
که در آن عملگر $\Re[\]$ بیانگر قسمت حقیقی سیگنال داخل براکت است.

کلید روابط فوق در مورد تابع $\sin[\]$ نیز قابل تعمیم است. فقط کافی است توجه کنیم

$$A \sin(\omega_0 t + \varphi) = A \cos\left(\omega_0 t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \quad (۹-۱)$$

در سیگنال فوق، هر قدر T_0 یا دوره تناوب اصلی بیشتر شود، فرکانس زاویه‌ای سیگنال کاهش می‌یابد. چند

نمونه از سیگنال سینوسی به ازاء دوره تناوب‌های مختلف در شکل (۷-۱) رسم شده‌اند.



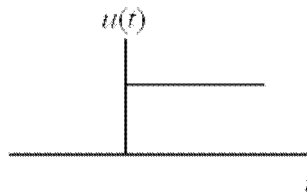
شکل (۷-۱): سیگنال سینوسی به ازاء فرکانسهای مختلف

۳-۳-۱ سیگنال پله واحد

رابطه ریاضی این سیگنال بصورت زیر است:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (۱۰-۱)$$

از این به بعد سیگنال پله واحد را با تابع $u(t)$ نمایش می‌دهیم و شکل آن بصورت زیر است:



شکل (۸-۱): سیگنال پله واحد

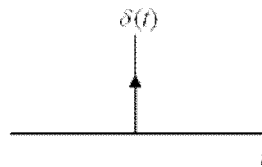
این سیگنال در ایجاد یک توصیف قابل قبول از سیگنال ضربه (که توضیح آن بعداً خواهد آمد) بسیار موفق عمل می‌کند و به کمک آن می‌توان برخی خواص سیستم‌ها را مورد بررسی قرار داد.

۴-۳-۱ سیگنال ضربه واحد

این سیگنال بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (11-1)$$

و بصورت زیر نمایش داده می‌شود



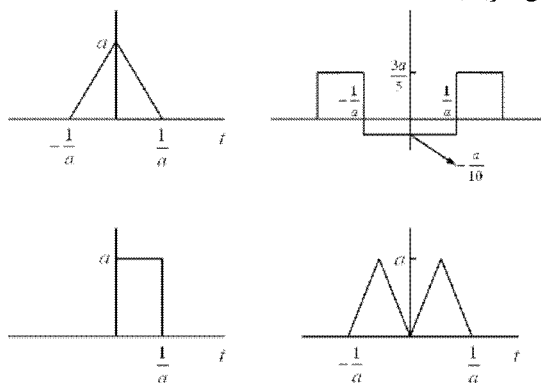
شکل (۹-۱): سیگنال ضربه واحد

با توجه به تعریف فوق می‌توان نوشت

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau = 1 \quad (12-1)$$

تمرین (۲-۱): روابط (۱۲-۱) را با توجه به رابطه (۱۱-۱) بدست آورید.

شیوه‌های مختلفی برای نمایش تابع ضربه وجود دارد. تمامی سیگنال‌های زیر در حد وقتی که $a \rightarrow \infty$ می‌توانند بیانگر یک سیگنال ضربه باشند.



شکل (۱۰-۱): چند تابع که در حالت حدی بیانگر تابع ضربه هستند.



دانشجویان بسادگی می‌توانند خواص تابع ضربه را با استفاده از سیگنال‌های فوق تحقیق نمایند. لازم به ذکر است که بعضی اوقات در این کتاب از مفهوم تابع و سیگنال بطور یکسان استفاده شده است. از دیگر خواص تابع ضربه می‌توان به دو خاصیت زیر اشاره کرد

$$\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t) \quad (13-1)$$

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0) \quad (14-1)$$

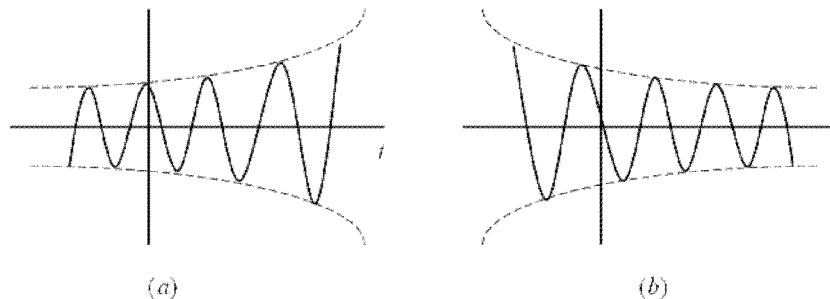
این خواص بسیار مهم هستند که تابع ضربه را به عنوان یک ابزار مهم در تحلیل نوع خاصی از سیستم‌ها مطرح می‌سازند. لازم به ذکر است توابعی مانند ضربه واحد و مشتقات آن که معمولاً بنام توابع تکین^۱ معروف هستند، تحت یک شاخه از ریاضیات بنام تئوری توزیع مورد بررسی قرار می‌گیرند. در این شاخه از ریاضیات به این توابع، توابع تعمیم یافته^۲ می‌گویند. جهت کسب اطلاعات بیشتر، دانشجویان می‌توانند به کتابهای موجود در این زمینه مراجعه نمایند.

۱-۳-۵ سیگنال نمائی سینوسی

این سیگنال مرکب از حاصلضرب دو تابع سینوسی و نمائی بدست آمده و بصورت زیر می‌باشد:

$$x(t) = ce^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta) \quad (15-1)$$

این سیگنال به ازاء $r > 0$ و $r < 0$ به ترتیب سینوسی افزاینده و سینوسی کاهنده نامیده می‌شود. و شکل آن بصورت زیر است



شکل (۱۱-۱): سینوسیهای افزاینده و کاهنده

این سیگنال‌ها در پاسخ مدارات RLC گاهی مشاهده می‌شوند. نوع دیگری از این سیگنال‌ها فقط به ازاء $t > 0$ تعریف می‌شوند.

$$z(t) = ce^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta) u(t) \quad (16-1)$$

این سیگنال‌ها به ازاء $r < 0$ در مسائل فیزیکی بسیار به چشم می‌خورند.

۱-۴ برخی سیگنال‌های گسسته زمانی مهم

^۱singular functions

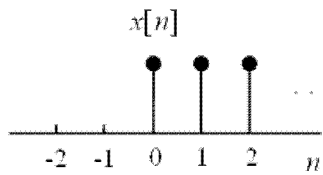
^۲generalized functions

اکنون به سیگنال‌های مهم گسسته زمانی می‌پردازیم. در این قسمت به چهار سیگنال مهم اشاره می‌کنیم. اما لازم است تذکر داده شود که از این به بعد در این کتاب بجای استفاده از لفظ سیگنال در حالت گسسته زمانی از لفظ دنباله استفاده می‌کنیم.

۱-۴-۱ دنباله پله واحد

دنباله پله واحد، معادل گسسته زمانی سیگنال پله واحد پیوسته زمانی است و بیان ریاضی آن بصورت زیر است:

$$u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases} \quad (17-1)$$

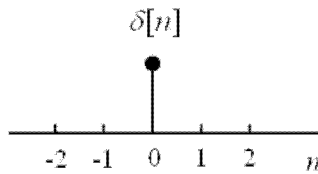


شکل (۱۲-۱): دنباله پله واحد

۲-۴-۱ دنباله ضربه واحد

تعریف این تابع با آنچه که در مورد سیگنال ضربه واحد انجام شد بسیار متفاوت است، چون این دنباله دارای دامنه واحد در مبدأ زمان است و در سایر زمانها صفر است، یعنی:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (18-1)$$



شکل (۱۳-۱): دنباله ضربه واحد

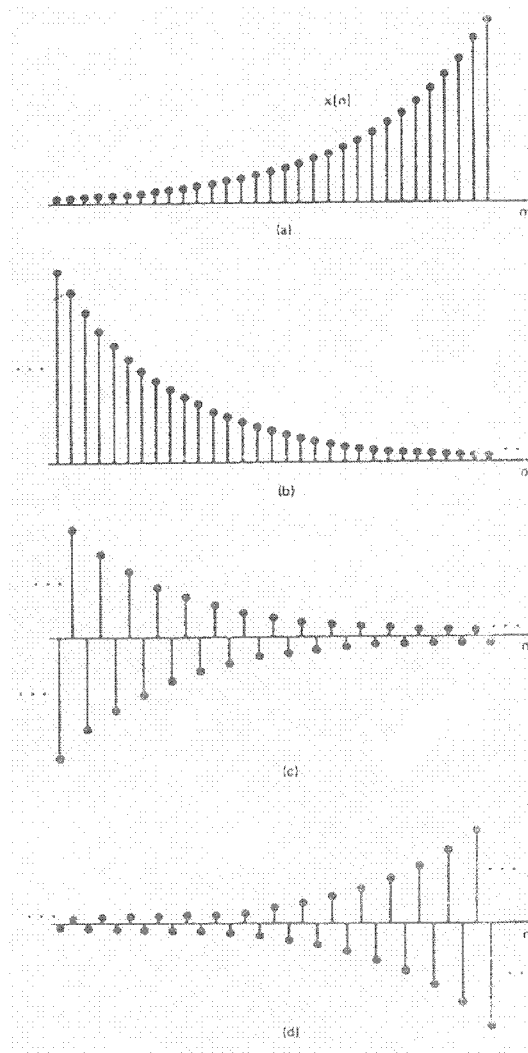
به‌سادگی می‌توان روابط زیر را در مورد دنباله‌های ضربه و پله نوشت:

$$\begin{aligned} x[n]\delta[n] &= x[0]\delta[n] \\ \delta[n] &= u[n] - u[n-1] \\ u[n] &= \sum_{m=-\infty}^n \delta[m] \\ u[n] &= \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \end{aligned} \quad (19-1)$$

تمرین (۳-۱): روابط فوق را ثابت کنید.

۳-۴-۱ دنبالهٔ نمائی مختلط

این دنباله در حالت کلی بصورت $x[n] = Az_0^n$ می‌باشد که در آن $z_0 = r_0 e^{j\Omega_0}$ یک عدد مختلط می‌باشد. اگر z_0 یک عدد حقیقی باشد در آن صورت به ازاء $|r_0| > 1$ یک دنباله نمائی حقیقی افزایشی و به ازاء $0 < |r_0| < 1$ یک دنبالهٔ نمائی حقیقی کاهنده خواهیم داشت. البته به ازاء $-1 < r_0 < 0$ و $r_0 < -1$ سیگنال‌های نمائی تغییر علامت دهنده خواهیم داشت.



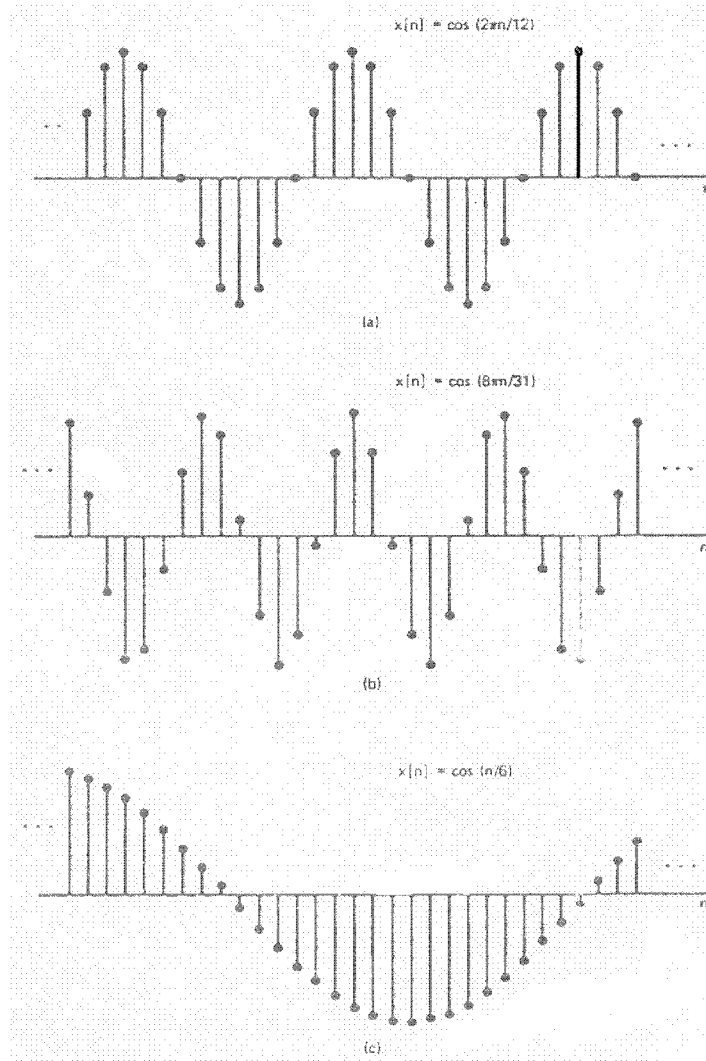
شکل (۱-۴): دنباله $x[n] = Az_0^n$ به ازاء مقادیر مختلف z_0

۴-۴-۱ دنبالهٔ سینوسی

این دنباله بصورت زیر بیان می‌شود:

$$x[n] = A \cos[\Omega_0 n + \varphi] \quad (20-1)$$

که در آن A, Ω_0, φ به ترتیب دامنه، فرکانس زاویه‌ای و فاز دنباله نامیده شده و اعداد ثابتی هستند. نمونه‌هایی از این دنباله‌ها در شکل (۱۵-۱) رسم شده‌اند.



شکل (۱۵-۱): چند نمونه از دنباله‌های سینوسی

سه تفاوت مهم میان سیگنال‌های سینوسی پیوسته زمانی و گسسته زمانی وجود دارد که در اینجا به بحث در مورد هر یک می‌پردازیم.

الف) دنباله سینوسی و یا حالت عمومی‌تر، دنباله نمایی بصورت $e^{j\Omega_0 n}$ یک دنباله متناوب بر حسب Ω_0 با دوره تناوب اصلی 2π است، چون

$$e^{j(\Omega_0+2\pi)n} = e^{j\Omega_0 n} e^{j2\pi n} = e^{j\Omega_0 n} \quad (21-1)$$

اما در مورد سیگنال سینوسی پیوسته زمانی چنین حالتی وجود ندارد. در حقیقت متناوب بودن دنباله سینوسی یا نمائی بر حسب Ω_0 (فرکانس زاویه‌ای) ناشی از طبیعت گسسته زمان بودن n است که فقط مقادیر صحیح را اتخاذ می‌کند. با افزایش Ω_0 (فرکانس زاویه‌ای) نوسانات دنباله افزایش می‌یابد. اما بخاطر متناوب بودن دنباله سینوسی بر حسب Ω_0 این افزایش فقط تا $\Omega_0 = \pi$ مشاهده می‌شود و اگر فرکانس زاویه‌ای از $\Omega_0 = \pi$ تا $\Omega_0 = 2\pi$ افزایش یابد، نوسانات کاهش می‌یابند، چون $\Omega_0 = 2\pi$ مشابه $\Omega_0 = 0$ است. این حقیقت در شکل (۱۶-۱) به نمایش گذاشته شده است. بنابراین دنباله‌های با نوسانات کم (تغییرات کم) دارای Ω_0 حول صفر یا 2π (مضارب زوج π) هستند و دنباله‌های با نوسانات زیاد دارای Ω_0 حول π یا مضارب فرد π هستند. از این خاصیت در فصل تبدیل فوریه گسسته زمانی نهایت استفاده را خواهیم برد.

ب) هر سیگنال پیوسته زمانی سینوسی یک سیگنال متناوب است. در حالیکه برای اینکه یک دنباله سینوسی یا نمائی گسسته زمانی با دوره تناوب N متناوب باشد، لازم است:

$$e^{j\Omega_0(n+N)} = e^{j\Omega_0 n} \quad (22-1)$$

و یا

$$e^{j\Omega_0 N} = 1 \quad (23-1)$$

برای اینکه رابطه (۲۳-۱) صادق باشد، باید

$$\Omega_0 N = 2\pi m \quad (24-1)$$

که در آن m عددی صحیح می‌باشد. از (۲۴-۱) داریم

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} \quad (25-1)$$

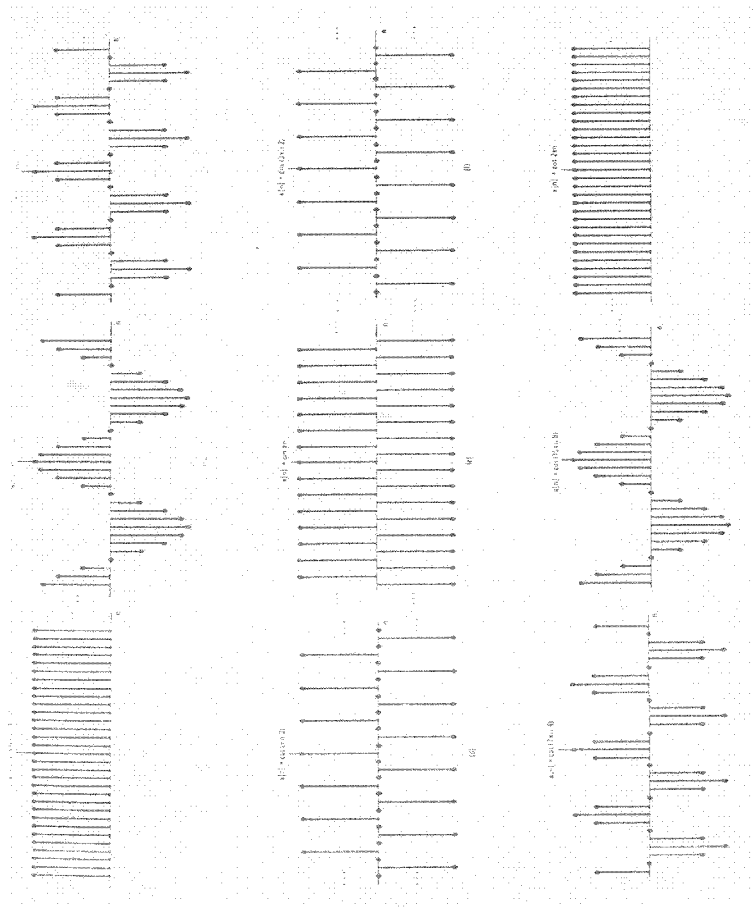
بنابراین یک دنباله سینوسی بصورت $e^{j\Omega_0 n}$ به ازاء مقادیر دلخواه Ω_0 متناوب نیست بلکه فقط در صورتی که نسبت $\frac{\Omega_0}{2\pi}$ برابر کسر گویائی شود، این دنباله متناوب خواهد بود. به عنوان مثال اگر $\frac{\Omega_0}{2\pi} = \sqrt{2}$ باشد، در آن صورت دنباله سینوسی و یا نمائی متناوب نخواهد بود. دنباله رسم شده در شکل (۱۶-۱) با دوره تناوب $N = 12$ متناوب است. در حالیکه دنباله رسم شده در شکل (۱۶-۱) اصلاً متناوب نیست.

ج) اکنون آماده‌ایم تا مفهومی از دوره تناوب اصلی دنباله سینوسی ارائه نماییم. اگر $x[n]$ یک دنباله سینوسی متناوب با دوره تناوب اصلی N باشد، فرکانس اصلی آن $\frac{2\pi}{N}$ خواهد شد. با توجه به رابطه (۲۵-۱) مشاهده می‌شود که فرکانس اصلی دنباله‌ای بصورت $e^{j\Omega_0 n}$ بصورت زیر است.

$$\frac{2\pi}{N} = \frac{\Omega_0}{m} \quad (26-1)$$

بنابراین دوره تناوب اصلی بصورت زیر قابل بیان است:

$$N = m \left(\frac{2\pi}{\Omega_0} \right) \quad (27-1)$$



شکل (۱۶-۱): چند نمونه از دنباله‌های سینوسی فرکانسهای مختلف

مشاهده می‌شود این دو تعریف کاملاً با تعریف دوره تناوب اصلی و فرکانس اصلی سیگنال سینوسی متفاوت هستند. و از همین‌جا می‌توان نتیجه گرفت که در مورد دنباله‌های سینوسی یک ارتباط ساده (معکوس یکدیگر بودن) بین دوره تناوب اصلی و فرکانس ظاهری دنباله Ω_0 وجود ندارد. به عنوان مثال اگر $\Omega_0 = 2\pi \frac{6}{31}$ باشد. دوره تناوب اصلی دنباله $N = 31$ و $m = 6$ بدست می‌آید (با رابطه (۱-۲۵) مقایسه کنید) ولی اگر اندکی فرکانس ظاهری افزایش یابد، یعنی $\Omega_0 = 2\pi \frac{6}{30}$ در آن صورت $\Omega_0 = 2\pi \frac{1}{5}$ شده و $N = 5$ و $m = 1$ بدست می‌آید. بنابراین مشاهده می‌شود با اندکی افزایش در فرکانس ظاهری دنباله، دوره تناوب بشدت کاهش می‌یابد (از $N = 31$ به $N = 5$) در حالی که در مورد سیگنال‌های سینوسی پیوسته زمانی با اندکی افزایش در فرکانس، دوره تناوب فقط اندکی کاهش می‌یابد و بر عکس. به عنوان مثال، در مورد یک سیگنال سینوسی پیوسته زمانی اگر فرکانس از $\omega_0 = 2\pi \frac{6}{31}$ به $\omega_0 = 2\pi \frac{6}{30}$ افزایش یابد، دوره تناوب از $\frac{31}{6}$ به $\frac{30}{6}$ کاهش می‌یابد.

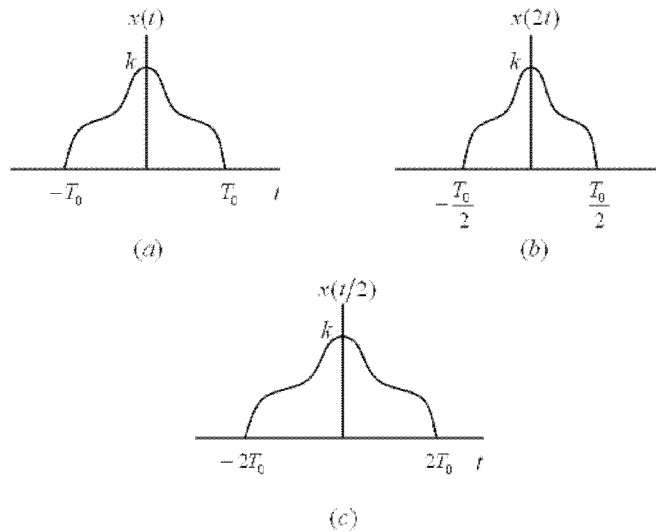
توجه به این سه تفاوت موجود میان دنباله و سیگنال سینوسی در بسیاری از مسائل می‌تواند راهگشا باشد.

۵-۱ تبدیل متغیر مستقل

در برخی کاربردها لازم است عملیاتی روی متغیر مستقل انجام گردد. در این قسمت به برخی از این عملیات اشاره می‌کنیم.

۱-۵-۱ مقیاس‌بندی^۱

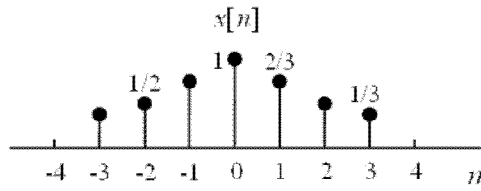
اگر $x(t)$ بصورت شکل (۱-۱۷-۱) باشد، در آن صورت $x(2t)$ و $x(\frac{t}{2})$ بصورت نمایش داده شده منقبض و منبسط می‌گردد. البته این امر که در حالت کلی $x(at)$ نسبت به $x(t)$ منقبض می‌شود اگر $|a| > 1$ ، و منبسط می‌شود اگر $|a| < 1$ ، فقط برای سیگنال‌های پیوسته زمانی صحیح است. در مورد یک دنباله ممکن است بطور کلی شکل دنباله تغییر کند و اصولاً نیز محدودیت‌هایی برای مقیاس‌بندی یک دنباله وجود دارد. به عنوان مثال یک دنباله بصورت $x[\sqrt{2}n]$ هرگز قابل تعریف نیست، در حالیکه $x(\sqrt{2}t)$ قابل تعریف است، بنابراین برای مقیاس‌بندی دنباله‌های گسسته زمانی باید توجه کرد که $x[an]$ وقتی قابل تعریف است که $\frac{1}{a}$ یک عدد صحیح باشد.



شکل (۱-۱۷-۱): $x(t)$ و مقیاس‌های آن

برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید.

مثال (۱-۱): مطلوبست $x[2n]$ و $x[\frac{1}{2}n]$ ، اگر $x[n]$ بصورت شکل (۱-۱۸) باشد.



شکل (۱۸-۱): $x[n]$ مربوط به مثال (۱-۱)

حل: تعریف می‌کنیم

$$y[n] = x[2n]$$

در اینصورت

$$y[-2] = x[-4] = 0$$

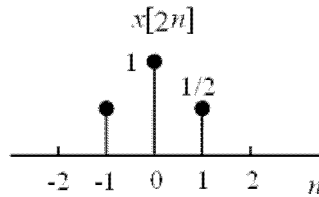
$$y[-1] = x[-2] = \frac{1}{2}$$

$$y[0] = x[0] = 1$$

$$y[1] = x[2] = \frac{1}{3}$$

$$y[2] = x[4] = 0$$

بنابراین دنباله $y[n] = x[2n]$ بصورت شکل زیر است (دنباله‌های موجود در n های فرد حذف می‌شوند).



شکل (۱۹-۱): $x[2n]$ مربوط به مثال (۱-۱)

برای قسمت بعد تعریف می‌کنیم

$$y[n] = x\left[\frac{1}{2}n\right]$$

بنابراین مشاهده می‌شود که به ازاء n های فرد $y[n]$ تعریف نشده است و به ازاء n های زوج داریم:

$$y[-8] = x[-4] = 0$$

$$y[-6] = x[-3] = \frac{1}{3}$$

$$y[-4] = x[-2] = \frac{1}{2}$$

$$y[-2] = x[-1] = \frac{2}{3}$$

$$y[0] = x[0] = 1$$

$$y[2] = x[1] = \frac{2}{3}$$

$$y[4] = x[2] = \frac{1}{2}$$

$$y[6] = x[3] = \frac{1}{3}$$

$$y[8] = x[4] = 0$$

بنابراین شکل این دنباله مشابه شکل (۱-۱۹) خواهد شد با این تفاوت که مقادیر n باید هر یک دو برابر شوند و در نقاطی که در آنجا n فرد است دنباله تعریف نشده است.

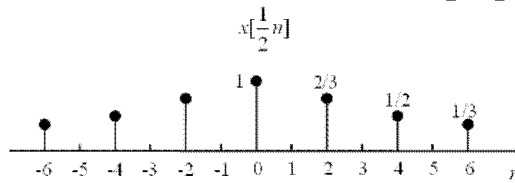
دیده می‌شود که در اینجا دنباله $y[n]$ در برخی نقاط تعریف ندارد، و این ممکن است مشکلاتی را در بر داشته باشد. این ابهام در حالت کلی برای تعریف هر دنباله بصورت $y[n] = x[n/k]$ که k عدد صحیح است، ظاهر می‌شود. برای رفع این ابهام مناسب است، تعریف زیر را انجام دهیم

$$y[n] = \begin{cases} x[n/k] \\ 0 \end{cases}$$

اگر k مضرب صحیح از n باشد

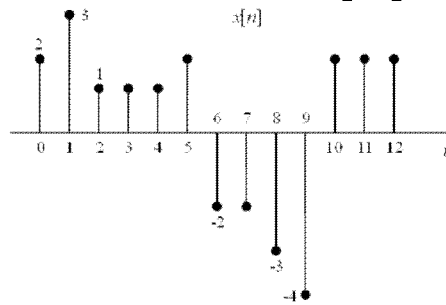
در غیر اینصورت

با این تعریف می‌توان دنباله $x[\frac{1}{2}n]$ ، در مثال (۱-۱)، را بصورت زیر ترسیم نمود.



شکل (۱-۲۰): $x[\frac{1}{2}n]$ مربوط به مثال (۱-۱)

تمرین (۱-۴): مطلوبست $x[3n]$ و $x[\frac{1}{4}n]$ ، اگر $x[n]$ بصورت زیر باشد.

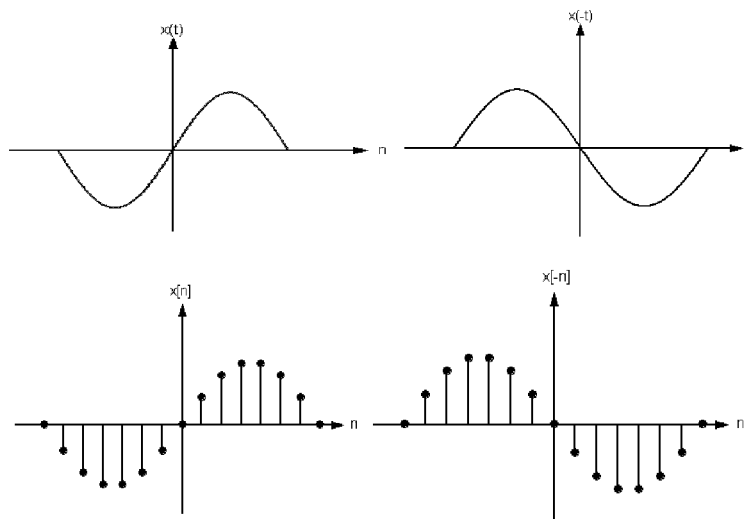


شکل (۱-۲۱): سیگنال $x[n]$ تمرین (۱-۴)

۱-۵-۲ انعکاس حول مبدأ^۱

یک سیگنال پیوسته زمانی و یک دنباله گسسته زمانی در شکل زیر ترسیم شده و حول صفر منعکس شده‌اند.

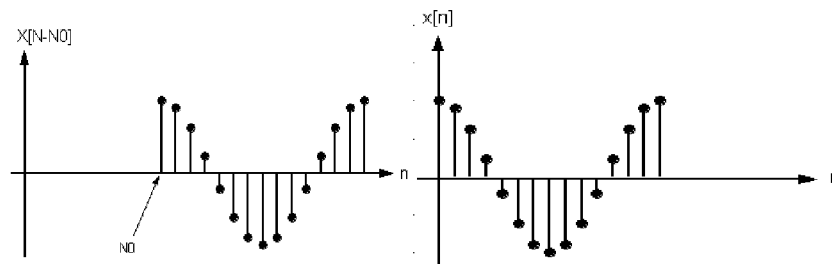
^۱ Reflection



شکل (۲۲-۱): انعکاس در حوزه پیوسته و گسسته زمان

۳-۵-۱ انتقال^۱

یک نمونه $x[n]$ و انتقال یافته آن در شکل (۲۳-۱) رسم شده‌اند.



شکل (۲۳-۱): یک دنباله گسسته زمان و انتقال یافته آن به سمت راست به اندازه N_0 نمونه

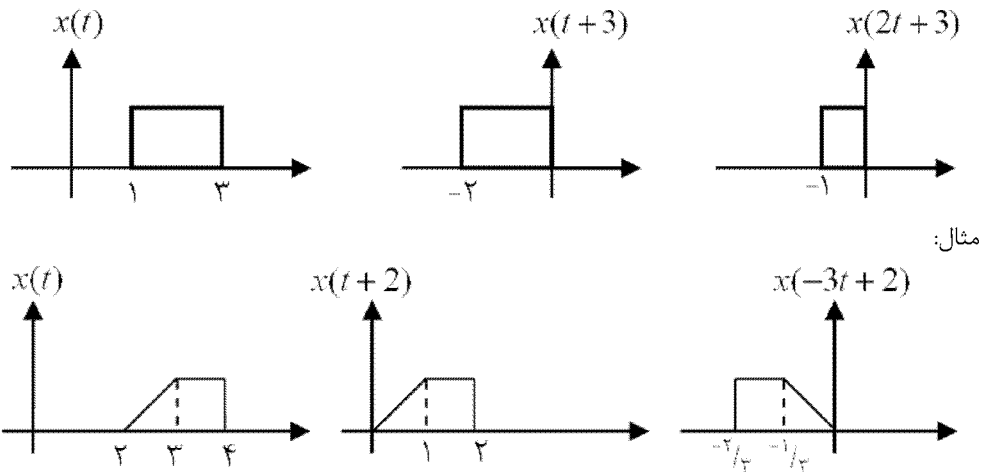
اگر N_0 مثبت باشد سیگنال به سمت راست و اگر N_0 منفی باشد سیگنال به سمت چپ منتقل می‌شود.

۴-۵-۱ تبدیل متغیر مستقل در حالت کلی

در حالت کلی ممکن است ترکیبی از تبدیلات فوق بر روی متغیر مستقل انجام گیرد، یعنی t به $(at+b)$ تبدیل شود که a و b مقادیر ثابت هستند. در این صورت یک روش برای تبدیل فوق این است. که، ابتدا سیگنال $x(t)$ را به اندازه b انتقال داده تا $x(t+b)$ بدست آید و سپس این سیگنال انتقال داده شده را به اندازه a مقیاس‌بندی می‌کنیم. یعنی بفرض اگر a مقداری مثبت و بزرگتر از یک بود، سیگنال $x(t+b)$ را به اندازه a واحد

¹ Shift

فقط منقبض می‌کنیم. ولی اگر a مقداری منفی و بزرگتر از یک داشت، سیگنال $x(t+b)$ را به اندازه a واحد منقبض و سپس آنرا منعکس می‌کنیم.
مثال:



۶-۱ تعاریف مشترک در مورد سیگنال‌ها

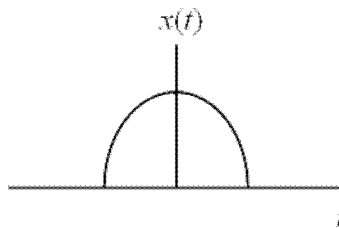
تعاریفی که در این قسمت انجام می‌شوند، در مورد سیگنال‌های پیوسته و گسسته زمان صادق می‌باشند. اما جهت جلوگیری از اطاله کلام متناوباً هر تعریف را فقط روی یک دسته از سیگنال‌ها انجام می‌دهیم و تعمیم آن به نوع دیگر، کاری ساده و بدیهی می‌باشد.

۱-۶-۱ سیگنال زوج و فرد

سیگنال $x(t)$ را زوج گویند، اگر
(۲۸-۱)

$$x(t) = x(-t)$$

به عنوان مثال سیگنال زیر یک سیگنال زوج است.

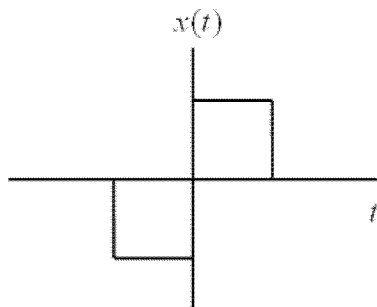


شکل (۲۴-۱): یک نمونه سیگنال زوج

سیگنال $x(t)$ را فرد گویند اگر
(۲۹-۱)

$$x(-t) = -x(t)$$

یک نمونه سیگنال فرد بصورت زیر است.



سیگنال (۱-۲۵): یک نمونه سیگنال فرد

هر سیگنال دلخواه را می‌توان بصورت مجموع دو سیگنال زوج و فرد نوشت، زیرا قسمت زوج سیگنال

$$ev\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \quad (۳۰-۱)$$

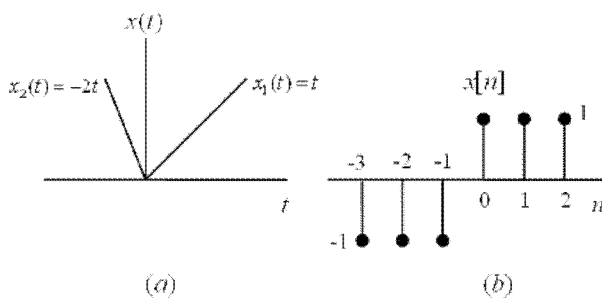
قسمت فرد سیگنال

$$od\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] \quad (۳۱-۱)$$

از جمع دو تابع فوق داریم

$$x(t) = ev\{x(t)\} + od\{x(t)\} \quad (۳۲-۱)$$

مثال (۱-۲): قسمت‌های زوج و فرد سیگنال‌های زیر را پیدا کنید.



شکل (۱-۲۶): (a) سیگنال مثال (۱-۲) (b) دنباله مثال (۱-۲)

حل: گفتیم که هر تابع را می‌توان به مجموع دو تابع زوج و فرد تقسیم کرد. داریم

$$x(t) = -2tu(-t) + tu(t)$$

$$x(-t) = 2tu(t) - tu(-t)$$

با توجه به روابط (۳۰-۱) و (۳۱-۱) داریم

$$x(t) = x_e(t) = ev\{x(t)\}$$

$$= \frac{1}{2}[-2tu(-t) + tu(t) + 2tu(t) - tu(-t)]$$

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[-3tu(-t) + 3tu(t)] = \frac{3}{2}t[u(t) - u(-t)]$$

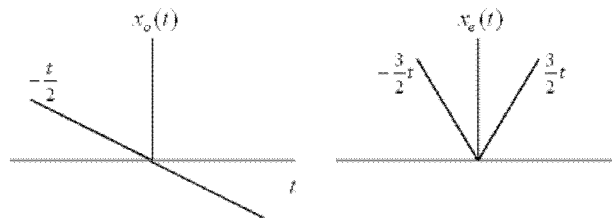
و اما برای قسمت فرد داریم

$$x_o(t) = \frac{1}{2}[-tu(t) - tu(-t)] = -\frac{t}{2}[u(t) + u(-t)] = -\frac{t}{2}$$

چون

$$u(t) + u(-t) = 1$$

که شکل هر دو قسمت در زیر رسم شده اند.



شکل (۱-۲۷): قسمت‌های زوج و فرد سیگنال پیوسته زمان شکل (۱-۲۶-a)

و اما برای $x[n]$ داریم

$$x[n] = \{\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]\} - \{\delta[n+1] + \delta[n+2] + \delta[n+3]\}$$

بنابراین

$$x[-n] = \{\delta[-n] + \delta[-n-1] + \delta[-n-2]\} - \{\delta[-n+1] + \delta[-n+2] + \delta[-n+3]\}$$

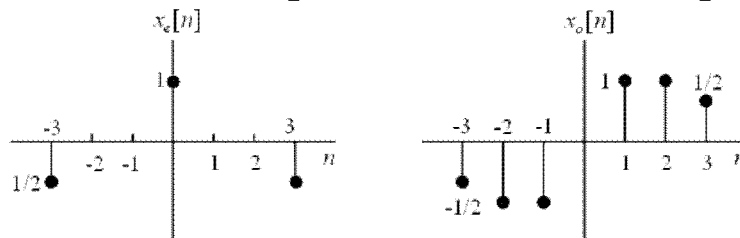
یا

$$x[-n] = \{\delta[n] + \delta[n+1] + \delta[n+2]\} - \{\delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3]\}$$

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\{\delta[n-3] - \delta[-n-3] + 2\delta[n]\}$$

و برای قسمت فرد هم داریم

$$x_o[n] = \{\delta[n-1] + \delta[n-2] + \frac{1}{2}\delta[n-3]\} - \{\delta[-n-1] + \delta[-n-2] + \frac{1}{2}\delta[-n-3]\}$$



شکل (۱-۲۸): قسمتهای زوج و فرد دنباله گسسته زمان شکل (۱-۲۶-b)

۱-۶-۲ سیگنال متناوب

سیگنالی را متناوب گویند که دارای خاصیت زیر باشد

$$x(t) = x(t + kT) \quad (۱-۳۳)$$

که k هر عدد صحیحی میتواند باشد و T دوره تناوب اصلی سیگنال است. باید توجه نمود که T کوچکترین عددی است که در حالت $k=1$ در رابطه فوق صدق می کند. در مورد سیگنال های گسسته نیز همین تعریف برقرار است. سیگنال ها و دنباله های سینوسی یکی از مهمترین سیگنال های متناوب بشمار می روند.

مثال (۱-۳): دوره تناوب دنباله زیر را در صورت متناوب بودن بیابید.

$$x[n] = \text{Cos}(\Omega_0 n) \begin{cases} \Omega_0 = \pi / \sqrt{2} \\ \Omega_0 = \pi / 3 \end{cases}$$

حل: ابتدا شرط متناوب بودن را تحقیق می کنیم

$$x[n + N] = \text{Cos}[\Omega_0(n + N)] = \text{Cos}(\Omega_0 n + \Omega_0 N)$$

بر خلاف سیگنال پیوسته زمانی که به ازاء هر مقدار ω_0 متناوب است، یک سیگنال گسسته زمانی (دنباله) در صورتی متناوب است که $\Omega_0 N = 2K\pi$ شود. بنابراین، باید

$$\Omega_0 N = 2\pi F_0 N = 2K\pi \Rightarrow F_0 = \frac{K}{N}$$

یعنی فرکانس دنباله برابر کسر گویائی گردد. بنابراین در مورد اول داریم:

$$F_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

و سیگنال گسسته زمانی (دنباله) فوق متناوب نخواهد بود. ولی در مورد (ب) داریم:

$$F_0 = \frac{1}{6}$$

و دنباله متناوب با دوره تناوب $N = 6$ خواهد شد.

توجه شود که برای محاسبه N باید صورت و مخرج کسر، نسبت به هم اول باشند. همانگونه که قبلاً تذکر داده شد، بر خلاف سیگنال های آنالوگ (پیوسته) در مورد سیگنال های گسسته تغییر کوچکی در فرکانس، می تواند سبب تغییرات بسیار بزرگی در دوره تناوب شود (در سیگنال های آنالوگ، تغییرات فرکانس و دوره تناوب متناظر می باشند).

۱-۷ اپراتور مقدار متوسط

بدلیل استفاده های بعدی از این اپراتور، فعلاً آن را بصورت یک عملگر ریاضی به صورت زیر برای دو نوع سیگنال متناوب و غیر متناوب تعریف می کنیم.

برای سیگنال غیر متناوب، مقدار متوسط سیگنال $x(t)$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (۳۴-۱)$$

برای سیگنال متناوب، مقدار متوسط سیگنال عبارت است از:

$$\langle x(t) \rangle = \int_{\langle T \rangle} x(t) dt \quad (۳۵-۱)$$

که انتگرال روی یک دوره تناوب گرفته می‌شود.

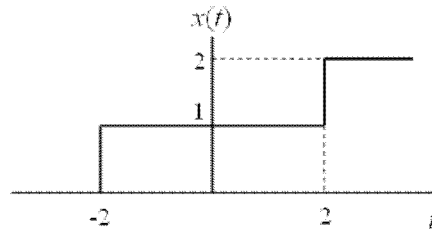
اگر چه تعریف فوق برای سیگنال‌های پیوسته انجام شده است، به سادگی با تبدیل انتگرال به مجموع می‌توان آنرا برای سیگنال‌های گسسته زمان نیز تعمیم داد. با این تعریف می‌توان مقدار مؤثر سیگنال $x(t)$ را بدین صورت تعریف کرد.

$$x_{rms} = \sqrt{\langle x^2(t) \rangle} \quad (۳۶-۱)$$

در این قسمت برای آشنایی بیشتر خوانندگان با مفاهیم مطرح شده قبلی به ارائه چند مثال حل شده می‌پردازیم.

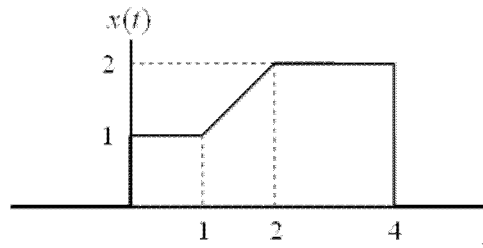
مثال (۴-۱): مطلوبست رسم سیگنال $x(t) = u(t+2) + u(t-2)$.

حل: با توجه به تابع پله واحد $u(t)$ سیگنال $x(t)$ بصورت شکل (۲۹-۱) است.



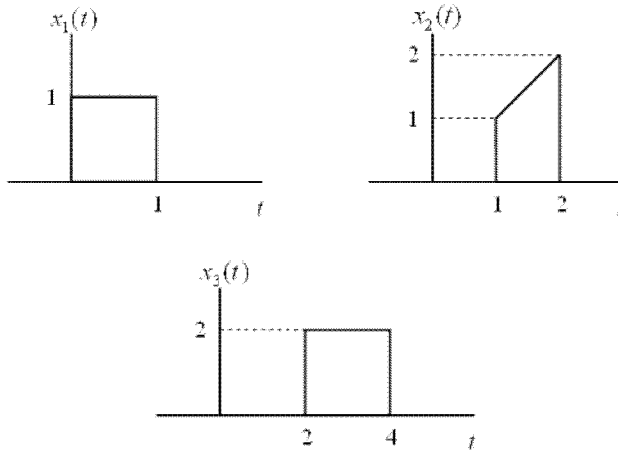
شکل (۲۹-۱): شکل $x(t)$ مثال (۴-۱)

مثال (۵-۱): مطلوبست ضابطه سیگنال رسم شده در شکل زیر



شکل (۳۰-۱): شکل $x(t)$ مثال (۵-۱)

حل: این سیگنال را به سه جزء تقسیم می‌کنیم.



شکل (۳۱-۱): تفکیک سیگنال شکل (۳۰-۱) به چند سیگنال

بنابراین

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

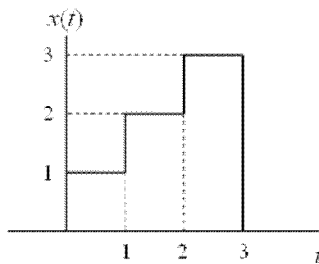
ولی

$$\begin{aligned} x_1(t) &= u(t) - u(t-1) \\ x_2(t) &= t[u(t-1) - u(t-2)] \\ x_3(t) &= 2[u(t-2) - u(t-4)] \end{aligned}$$

بنابراین، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) - u(t-1) \\ &+ t[u(t-1) - u(t-2)] + 2[u(t-2) - u(t-4)] \end{aligned}$$

مثال (۶-۱): ضابطه ریاضی سیگنال شکل زیر را بیابید.



شکل (۳۲-۱): سیگنال مثال (۶-۱)

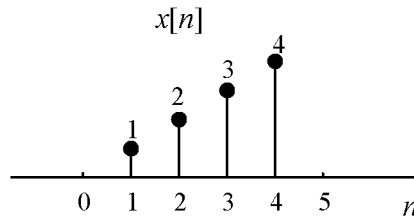
حل: با استفاده از تعریف تابع پله ضابطه سیگنال فوق را می توان بدینصورت نوشت:

$$x(t) = u(t) + u(t-1) + u(t-2) - 3u(t-3)$$

مثال (۷-۱): شکل دنباله زیر را رسم کنید.

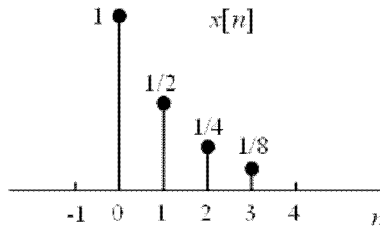
$$x[n] = n\{u[n] - u[n-5]\}$$

حل: این دنباله از $n=0$ شروع می‌شود. ولی بعلت ضرب شدن در n ، این دنباله مقدارش در مبدا صفر است و تا $n=4$ ادامه پیدا می‌کند.



شکل (۳۳-۱): دنباله مثال (۷-۱)

مثال (۸-۱): ضابطه دنباله نشان داده شده در شکل زیر را بیابید.

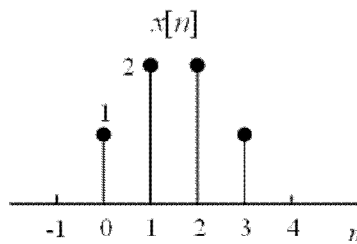


شکل (۳۴-۱): دنباله مربوط به مثال (۸-۱)

حل: مشاهده می‌شود که در فاصله $n=0$ تا $n=3$ هر مقدار دنباله، نصف مقدار دنباله در لحظه قبلی است.

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \{u[n] - u[n-4]\}$$

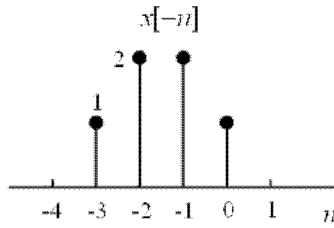
مثال (۹-۱): اگر $x[n]$ بصورت شکل زیر باشد، مطلوبست $x[1-n]$.



شکل (۳۵-۱): دنباله $x[n]$

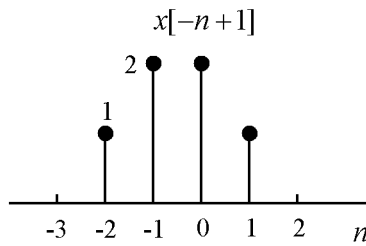
حل: مراحل تشکیل $x[1-n]$ از روی $x[n]$ بصورت زیر است.

الف) تشکیل $x[-n]$ از روی $x[n]$



شکل (۳۶-۱): دنباله $x[-n]$ ناشی از انعکاس $x[n]$

ب) انتقال دنباله $x[-n]$ به اندازه یک واحد به سمت راست، یعنی تشکیل $x[-(n-1)] = x[-n+1]$



شکل (۳۷-۱): انتقال شکل (۳۶-۱)

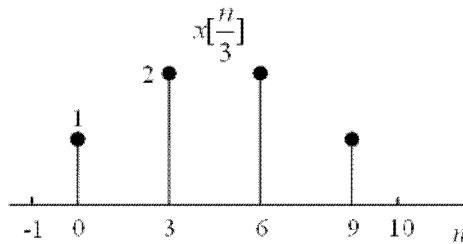
البته می‌توان ابتدا $x[n-1]$ را تولید کرده و سپس آن را حول مبدأ $n=0$ منعکس کرد. همانگونه که قبلاً اشاره شد، مقیاس‌بندی در مورد سیگنال‌های گسسته را می‌توان بصورت زیر تعریف کرد.

$$x_k[n] = \begin{cases} x[n/k] & n = mk, m \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن \mathbb{Z} مجموعه اعداد صحیح است. مثلاً در مورد مثال فوق اگر $k=3$ باشد، داریم

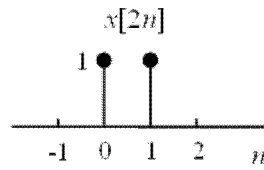
$$x_3[n] = \begin{cases} x[n/3] & n = 3m, m \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۳۷-۱)$$

و شکل $x[\frac{n}{3}]$ به صورت زیر خواهد بود.



شکل (۳۸-۱): دنباله $x[\frac{n}{3}]$

واگر شکل $x[3n]$ را رسم کنیم داریم



شکل (۳۹-۱): دنباله $x[3n]$

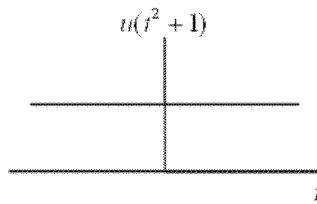
چون به ازاء $n = 0, 1, 2, \dots$ داریم :

$$\begin{aligned} y[n] &= x[3n] \\ y[0] &= x[0] \\ y[1] &= x[3] \\ y[2] &= x[6] \end{aligned}$$

دیده می‌شود که این سیگنال هنجگونه شباهتی به سیگنال اصلی $x[n]$ ندارد.

مثال (۱۰-۱): مطلوبست رسم $u(t^2 + 1)$

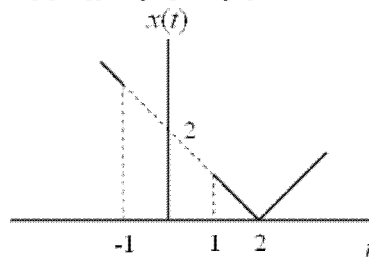
حل: چون $t^2 + 1$ همواره مثبت است پس $u(t^2 + 1) = 1$ است.



شکل (۴۰-۱): شکل سیگنال $u(t^2 + 1)$

مثال (۱۱-۱): مطلوبست رسم $x(t) = |t - 2|u(t^2 - 1)$

حل: ابتدا می‌بینیم $u(t^2 - 1)$ در فاصله $-1 < t < 1$ مساوی صفر است، چون آرگومانش منفی می‌شود. ولی در سایر فواصل مثبت است و مساوی واحد است. بنابراین شکل آن بصورت زیر است.

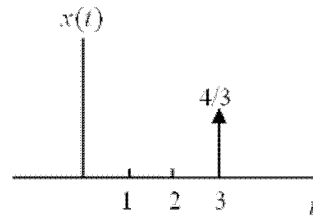


شکل (۴۱-۱): شکل سیگنال مثال (۱۱-۱)

مثال (۱۲-۱): مطلوبست رسم سیگنال $x(t) = 4\delta(3t - 9)$

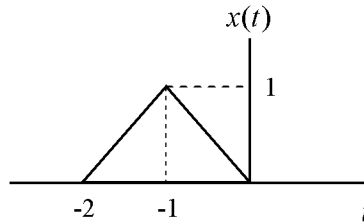
حل: با توجه به خواص تابع ضربه دانشجویان می‌توانند ثابت کنند که $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

$$x(t) = 4\delta[3(t-3)] = \frac{4}{3}\delta(t-3) \quad \text{بنابراین}$$



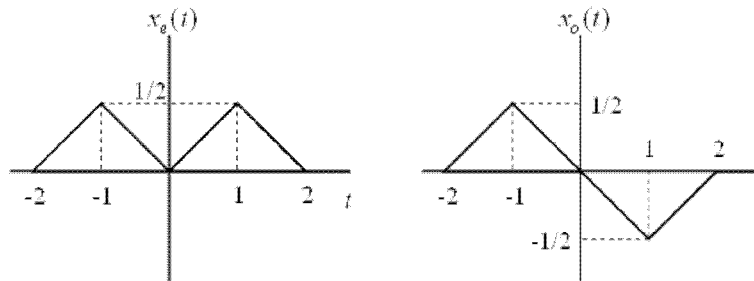
شکل (۴۲-۱): سیگنال مثال (۱۲-۱)

مثال (۱۳-۱): مطلوبست تعیین قسمتهای زوج و فرد سیگنال زیر



شکل (۴۳-۱): سیگنال مثال (۱۳-۱)

حل: بسادگی داریم



شکل (۴۴-۱): قسمتهای زوج و فرد سیگنال شکل (۴۳-۱)

مثال (۱۴-۱): رابطه‌ای برای انرژی سیگنال بر حسب انرژی‌های قسمت زوج و فرد آن بیابید. توجه کنید که تعریف انرژی سیگنال $x(t)$ بصورت انتگرال زیر است (اگر این انتگرال موجود باشد).

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

حل: قبلاً گفتیم که با بتوان رساندن و انتگرال‌گیری روی تمام حوزه t داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_e^2(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_o^2(t) dt + 2 \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t) x_e(t) dt$$

اما می‌دانیم که انتگرال سوم از طرف راست رابطه فوق مساوی صفر است و دلیل آن هم اینست که تابع تحت انتگرال که حاصلضرب یک تابع زوج در یک تابع فرد است، نهایتاً یک تابع فرد خواهد بود و سطح زیر منحنی یک تابع فرد صفر است. پس

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_e^2(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_o^2(t) dt$$

$$E_x = E_{x_e} + E_{x_o}$$

مثال (۱-۱۵): انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + 3t - 1)\delta(t-1) dt \quad \text{الف}$$

حل: بدلیل خاصیت نمونه برداری تابع ضربه، باید تابع زیر انتگرال را به ازای $t = 1$ حساب نمود. پس داریم

$$I = -3 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+1) dt = -3$$

$$II = \int_{-2}^2 t^2 [\delta(t) + 2\delta(t+1) + \delta(t-4)] dt \quad \text{ب}$$

حل: ابتدا با استفاده از تفکیک انتگرال مجموع به مجموع انتگرال‌ها و سپس با استفاده از خاصیت نمونه برداری تابع ضربه داریم

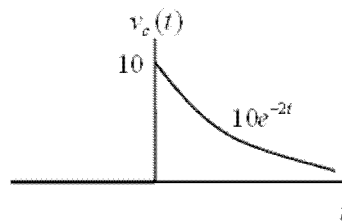
$$II = \int_{-2}^2 t^2 \delta(t) dt + 2 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \delta(t+1) dt + \int_{-2}^2 t^2 \delta(t-4) dt$$

$$= 0 + 2(-1)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+1) dt + (4)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-4) dt$$

اما آخرین انتگرال صفر است چون تابع ضربه در محدوده انتگرال قرار نمی‌گیرد. پس می‌توان نوشت

$$II = 0 + 2(-1)^2 + 0 = 2$$

مثال (۱-۱۶): سیگنال ولتاژ دو سر خازن با $C = 1 \text{ mF}$ بصورت زیر است. مطلوبست رسم منحنی سیگنال جریان آن



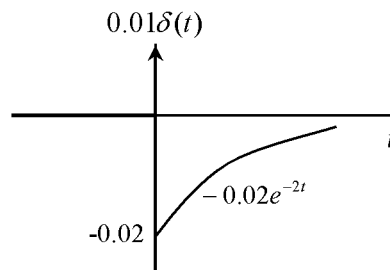
$$v_c(t) = 10 e^{-2t} u(t)$$

شکل (۱-۴۵): سیگنال مثال (۱-۱۶) (ولتاژ دو سر خازن)

حل:

$$i_c(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt} = 0.001 \times [(10) \times (-2)e^{-2t} u(t) + 10e^{-2t} \delta(t)]$$

$$= -0.02 e^{-2t} u(t) + 0.01 \delta(t)$$



شکل (۱-۴۶): منحنی جریان دو سر خازن مثال (۱-۱۶)

۸-۱ سیستم و تعریف آن

تاکنون با بخشی از ابزار کار در تجزیه و تحلیل سیستم‌ها، یعنی با سیگنال، آشنایی پیدا کردیم. اکنون برآنیم تا تعریف کامل و قابل قبولی از سیستم ارائه دهیم. اکثر دانشجویان کم و بیش در سایر درس‌ها و یا در برخی آزمایشگاه‌ها با مفهوم سیستم آشنا شده و می‌توانند برداشت خود را از این کلمه ارائه کنند. بنابراین به هیچ وجه کلمه سیستم مفهوم جدیدی را در ذهن تداعی نمی‌کند، و هر مهندسی با توجه به تخصص خود می‌تواند سیستم‌های مختلفی را برشمارد. ممکن است از دید یک مهندس مخابرات، یک ماهواره مخابراتی و از دید یک مهندس الکترونیک، یک تلویزیون به عنوان سیستم معرفی شود.

البته، اگر چه همه موارد مذکور در محدوده سیستم و تعریف آن می‌گنجند، اما آیا واقعاً تعریف سیستم فقط شامل تکنولوژی پیچیده و پیشرفته است؟ بعبارت دیگر ملاک شناخت سیستم چیست؟

برای پاسخ اساسی به این سوال، ایجاد یک تعریف جامع و مانع برای سیستم لازم و ضروری بنظر می‌رسد. معمولاً در کتابها دو تعریف زیر را، به طور موازی و گاهی بصورت هم ارز یکدیگر، برای سیستم بیان می‌کنند:

۱- فرایندی را که سیگنال خروجی‌اش با انجام تغییر و تحوّل در سیگنال ورودی حاصل می‌شود، سیستم می‌گویند.

۲- به مجموعه‌ای منظم از اجزائی که به کمک یکدیگر هدف مشخصی را برآورده می‌سازند سیستم می‌گویند. مطابق تعریف اول، هر سیستم بصورت یک جعبه سیاه در نظر گرفته می‌شود که دارای حداقل یک سیگنال ورودی و یک سیگنال خروجی است. مطابق تعریف فوق آنچه که باعث اطلاق کلمه سیستم به این جعبه سیاه می‌گردد، فقط ارتباط سیگنال‌های ورودی و خروجی آن است و اصلاً ارتباطی به مشخصات درونی جعبه ندارد. اما برداشت ما از تعریف دوم اینست که چون همه اشیا و موجودات، اعم از جاندار و بی جان، مخلوق خداوند متعال می‌باشند پس هر یک از آنها طبق قاعده نظم الهی خلق شده‌اند و درحقیقت، هر موجودی یک نوع سیستم می‌باشد. به عنوان مثال طبق این تعریف، ساعت، انسان، گیاه، میز، کره ماه، یک رستوران مجهز، سینما و یک باغ وحش نیز سیستم هستند. چون هم مجموعه‌ای منظم بوده و هم هدف مشخصی را برآورده می‌سازند. اما آیا برآستی کلمه سیستم، در اصطلاح مهندسان، شامل همه مخلوقات خداوند متعال می‌شود؟ بنظر می‌رسد تعاریف فوق اگر چه جامع هستند اما مانع نیستند. بعبارت دیگر، هر سیستم به منظوری که یک مهندس استفاده می‌کند در محدوده تعاریف فوق قابل گنجاندن است. اما برخی پدیده‌ها که معمولاً از نظر یک مهندس، سیستم نیستند نیز جزء تعاریف فوق قرار می‌گیرند (مثل کره ماه). پس باید تعریف را کمی دقیقتر نمود. آنچه که مسلم است، یک روش شناخت سیستم آن است که بتوان برای آن یک (یا درحالت کلی چند) سیگنال

ورودی و یک (یا در حالت کلی چند) سیگنال خروجی تعریف کرد. البته نوع و ماهیت این سیگنال‌ها مهم نیست. مثلاً سیگنال ورودی می‌تواند مکانیکی و خروجی الکتریکی باشد (و یا بر عکس)، اما این همه یک سیستم نیست. بلکه وقتی تعریف یک سیستم کامل می‌شود که علاوه بر تعریف سیگنال‌های ورودی و خروجی سیستم، فیزیک حاکم بر درون جعبه سیاه را نیز بشناسیم. بنابراین می‌توان گفت که سیستم یک جعبه سیاه نیست، بلکه یک جعبه معلوم است که شامل حداقل دو سیگنال بعنوان ورودی و خروجی می‌باشد. بنابراین دو موضوع در ایجاد یک سیستم یا برداشت سیستمی از یک پدیده فیزیکی دخالت دارند.

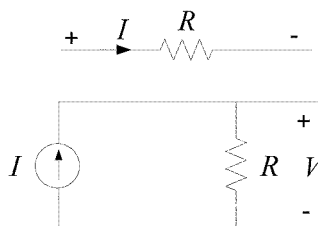
الف: فیزیک یا قانون تجربی که بر سیستم حاکم است مثل قانون اهم با معادله $V = RI$ یا قانون فارادی. در حالت کلی، قانون حاکم بر سیستم می‌تواند ترکیبی از قوانین تجربی مورد استفاده در علوم مختلف باشد.

ب: عوامل زیست محیطی که نوع سیگنال ورودی (سیستم) و خروجی آنرا تعیین می‌کنند. در حالت کلی، معادله قانون فیزیکی حاکم بر سیستم دارای چندین متغیر می‌باشد. نحوه انتخاب ورودی(ها) و خروجی(ها) از میان این متغیرها بستگی به منظور طراح دارد که از دید این تعریف طراح یک عامل مهم زیست محیطی است. انتخاب سایر عوامل زیست محیطی (مثل نور، گرما، رطوبت، و ...) با تاثیر بیشتر و حذف عوامل زیست محیطی غیر مهم نیز به عهده طراح یا مدل‌ساز است.

در تشکیل یک سیستم هر دو عامل فوق موثر هستند. بنابراین قدم اول در شناخت سیستم، شناخت فیزیک حاکم بر سیستم و سپس تعریف سیگنال‌های ورودی و خروجی و برقراری ارتباط منطقی بین آنها است. به عنوان مثال در مورد یک ساعت، می‌توان چندین تعریف متفاوت از سیستم ساعت در نظر گرفت. اگر ورودی انرژی الکتریکی و خروجی چرخش چرخ‌دنده‌ها در نظر گرفته شود، یک نوع سیستم بدست می‌آید و اگر ورودی، نیروی چرخ‌دنده‌ها و خروجی موقعیت عقربه‌ها روی صفحه ساعت باشد، نوع دیگری از سیستم حاصل می‌شود. بهر حال بطور خلاصه می‌توان گفت از ترکیب یک قانون تجربی با عوامل زیست محیطی به شکل خاص، سیستم پدید می‌آید.

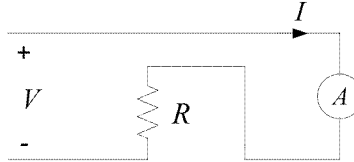
بنابراین امکان دارد که با یک قانون تجربی ولی با تغییر عوامل زیست محیطی، سیستم‌های مختلفی ساخت و یا بر عکس ممکن است که از چند قانون فیزیکی متفاوت یک سیستم مشخص بدست آورد. مثلاً یک مقاومت الکتریکی را که با قانون فیزیکی $V = RI$ مشخص می‌شود در نظر بگیرید. اگر سیستم را بصورتی تعریف کنیم که ورودی آن جریان و خروجی آن ولتاژ باشد، در آن صورت تابع انتقال سیستم (یعنی نسبت سیگنال خروجی به سیگنال ورودی) بصورت زیر خواهد شد.

$$V = RI \rightarrow T[x(t)] = R$$



شکل (۱-۴۷): یک نوع برداشت سیستمی از یک قانون فیزیکی (قانون اهم)

که در آن اپراتور $T[]$ بیانگر فرایند انتقال یا تبدیل در سیستم می‌باشد و این سیستم در واقع یک ضرب‌کننده خواهد بود که ورودی را در عدد ثابتی ضرب کرده و به خروجی منتقل می‌کند. اما اگر همین مقاومت با همان قانون فیزیکی مشخص بصورت زیر بکار برده شود (ورودی آن ولتاژ و خروجی جریان در نظر گرفته شود)



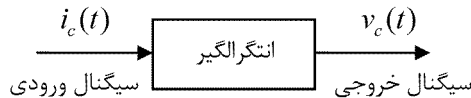
شکل (۱-۴۸): برداشت سیستمی متفاوت از قانون اهم

در آن صورت تابع انتقال (یا تابع تبدیل) سیستم می‌شود

$$T[x(t)] = \frac{1}{R} \quad (۳۸-۱)$$

و این سیستم اکنون یک تقسیم‌کننده است که ورودی را بر عدد R تقسیم کرده و به خروجی منتقل می‌کند. این امر در مورد یک سلف یا خازن کمی جالبتر است، چون در یک حالت از یک خازن یا سلف می‌توان یک انتگرال‌گیر و یا مشتق‌گیر ساخت. یک خازن اگر ورودی آن جریان و ولتاژ در نظر گرفته شود، یک انتگرال‌گیر است، یعنی

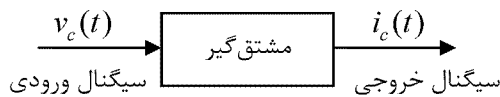
$$v_c(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} i_c(t) dt \quad (b-۳۸-۱)$$



شکل (۱-۴۹): یک برداشت سیستمی بعنوان انتگرال‌گیر از قانون فیزیکی خازن

به عبارت دیگر این سیستم از ورودی انتگرال گرفته و نتیجه را در خروجی ظاهر می‌کند (فرض کنید $c = 1$). از طرف دیگر همین خازن با همین قانون فیزیکی، اگر با ورودی ولتاژ و خروجی جریان در نظر گرفته شود یک مشتق‌گیر است، یعنی از ورودی مشتق گرفته و نتیجه مشتق را در خروجی ظاهر می‌کند.

$$i_c(t) = c \frac{dv_c(t)}{dt}$$



شکل (۱-۵۰): برداشت سیستمی مشتق‌گیر از قانون فیزیکی خازن

بنابراین تا اینجا اثر تعیین‌کننده عوامل زیست محیطی در تعریف سیستم را متوجه شدیم و دیدیم فقط با تغییر عوامل زیست محیطی می‌توان از یک قانون فیزیکی چندین سیستم، که این سیستم‌ها در مواردی کاملاً متفاوت هستند، ساخت.

اکنون این نکته را متذکر می‌شویم که برعکس حالت فوق، می‌توان از چندین قانون فیزیکی کاملاً مختلف (حتی با ماهیت‌های متفاوت)، یک تعبیر سیستمی ارائه کرد. به عنوان مثال در مکانیک ارتباط نیرو F (به عنوان ورودی) و جابجایی x (به عنوان خروجی) در یک فنر بصورت زیر است

$$x = \frac{1}{K}F$$

و این رابطه مبین یک سیستم تقسیم‌کننده است و اگر $K = R$ باشد، این سیستم معادل سیستم شکل (۱)-۴۶ (سیستم تقسیم‌کننده حاصل از مقاومت) است. همچنین از دید سیستمی، دو سیستم زیر نیز با هم معادلند و هر دو مشتق‌گیر می‌باشند (به شرط $L = C = 1$).



شکل (۱)-۵۱: برداشت معادل سیستمی از دو قانون فیزیکی متفاوت.

در سیستم اول ورودی ولتاژ و خروجی (مشتق ورودی) جریان و در سیستم دوم ورودی جریان و خروجی (مشتق ورودی) ولتاژ می‌باشد. اما در مبحث تجزیه و تحلیل سیستم‌ها واقعاً ماهیت ایجادکننده ارتباط ورودی و خروجی مهم نیست (اگر چه در نحوه ارتباط و تعریف سیستم مهم است).

پس در مبحث سیستم‌ها، اتفاقاتی که طی مراحل مختلف و به شیوه‌های مختلف در درون سیستم رخ می‌دهند، برای تحلیل‌گر سیستم جالب نیست و آنچه که برای ما به عنوان تحلیل‌گر سیستم مهم است، نتیجه این اتفاقات یا به عبارت دیگر رابطه بین ورودی و خروجی می‌باشد. بنابراین از دید ما سیستم‌های مختلفی که دارای یک نوع رابطه ورودی و خروجی هستند، مثل سیستم فنر (مکانیکی) و مقاومت (الکتریکی)، یکسان هستند و دارای خواص یکسانی هستند.

این مطلب کاربرد علم سیستم‌ها را در رشته‌های مختلف مهندسی مانند مهندسی برق، مکانیک، شیمی، اقتصاد و غیره روز افزون کرده و آنرا به عنوان علم مشترک با قوانین تقریباً مشترک در همه رشته‌ها مطرح نموده است. از این به بعد، رابطه ورودی و خروجی سیستم را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$y(t) = T[x(t)]$$

که در آن $x(t)$ ورودی سیستم و $y(t)$ خروجی سیستم است و T بیانگر تابع انتقال (یا نسبت سیگنال ورودی به خروجی) سیستم است.

۹-۱ تقسیم‌بندی سیستم‌ها

می‌توان سیستم‌ها را از جهات مختلف دسته‌بندی کرد. یک دسته‌بندی از جهت رابطه بین ورودی و خروجی سیستم‌ها است. اگر یک رابطه معین و یقین‌آور بین سیگنال‌های ورودی و خروجی سیستمی برقرار باشد، آن سیستم را یک سیستم معین^۱ می‌گویند. این‌گونه سیستم‌ها می‌توانند دارای سیگنال‌های ورودی و خروجی معین یا سیگنال‌های تصادفی باشند، اما در هر دو صورت رابطه بین ورودی و خروجی یک رابطه معین و یقین‌آور

^۱deterministic systems

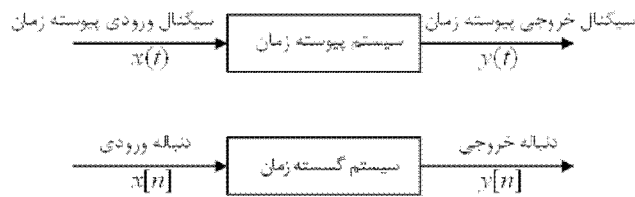
است. رابطه بین سیگنال‌های ورودی و خروجی سیستمی ممکن است یک رابطه تصادفی باشد که در این صورت سیستم را تصادفی^۱ می‌گویند. در حقیقت، همه سیستم‌ها از نوع معین هستند، ولی چون هنوز یک رابطه معین و یقین‌آور برای ارتباط دادن ورودی و خروجی بعضی سیستم‌ها بدست نیامده است، رابطه ورودی و خروجی آن سیستم‌ها را به صورت مدل‌های آماری یا تصادفی بیان می‌کنند. در حال حاضر، اکثر سیستم‌های بیولوژیکی را به صورت مدل‌های تصادفی یا سیستم‌های تصادفی بیان می‌کنند. مدل‌های مبتنی بر علم ژنتیک، یا مبتنی بر شبکه‌های عصبی از نوع مدل‌های تصادفی می‌باشند. در این کتاب، فقط سیستم‌های معینی که سیگنال‌های ورودی و خروجی‌اشان نیز معین می‌باشند مورد توجه قرار خواهد گرفت.

نوع دیگری از دسته بندی سیستم‌ها بر اساس پیوسته یا گسسته بودن زمانی سیگنال‌های ورودی و خروجی سیستم می‌باشد. از این جهت، می‌توان سیستم‌ها را به دو دسته کلی پیوسته زمانی و گسسته زمانی تقسیم کرد:

۱- سیستم پیوسته زمانی: سیستمی است که سیگنال‌های ورودی و خروجی آن پیوسته زمانی می‌باشند.

۲- سیستم گسسته زمانی: سیستمی است که سیگنال‌های ورودی و خروجی آن گسسته زمانی می‌باشند.

البته انواع دیگری از سیستم‌ها نیز وجود دارد که ورودی آنها پیوسته و خروجی آنها گسسته زمانی و یا خروجی آنها پیوسته و ورودی آنها گسسته زمانی می‌باشند که در حقیقت از ترکیب چند سیستم پیوسته زمانی و گسسته زمانی ساخته می‌شوند و در جای خود مورد بحث قرار می‌گیرند. بنابراین سیستم پیوسته زمانی و سیستم گسسته زمانی بصورت زیر رسم می‌شوند.

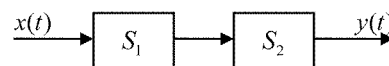


شکل (۱-۵۲): سیستم پیوسته و گسسته زمانی

۱-۱۰ اتصالات سیستم‌ها

در این فصل، ارتباط بین سیستم‌ها، که از لحاظ تجزیه و تحلیل سیستم‌ها بسیار حائز اهمیت است، را بطور خلاصه مورد بررسی قرار می‌دهیم. ما اتصالات را به چهار دسته تقسیم می‌کنیم.

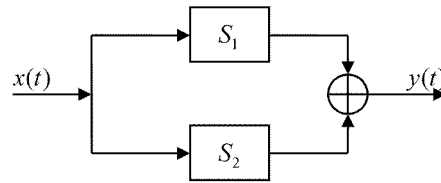
۱- اتصال سری یا Cascade



شکل (۱-۵۳): اتصال سری سیستم‌ها

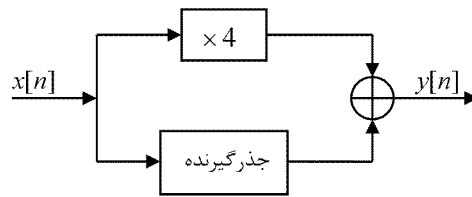
۲- اتصال موازی یا Parallel

¹ stochastic or random system



شکل (۵۴-۱): اتصال موازی سیستم‌ها

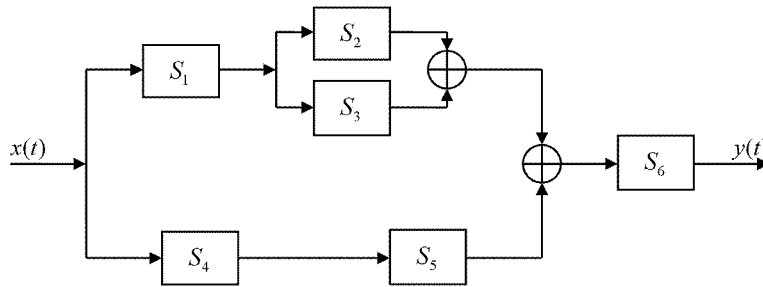
به عنوان مثال سیستم زیر مبین رابطه $y[n] = 4x[n] + \sqrt{x[n]}$ می‌باشد.



شکل (۵۵-۱): سیستمی با ضابطه $y[n] = 4x[n] + \sqrt{x[n]}$

۳- اتصال مرکب

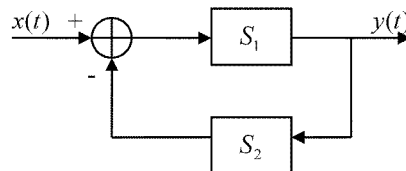
از ترکیب اتصالات سری و موازی بدست می‌آید. مثلاً یک نمونه از یک سیستم با اتصال مرکب سیستم‌های جزئی بصورت زیر است.



شکل (۵۶-۱): اتصال مرکب سیستم‌ها

۴- اتصال پس‌خور یا Feedback

در این نوع اتصال در خروجی یک نمونه از سیگنال برداشته شده و در ورودی تأثیر می‌گذارد. یک نمونه از سیستم‌های اتصال پس‌خور در زیر نمایش داده شده است.



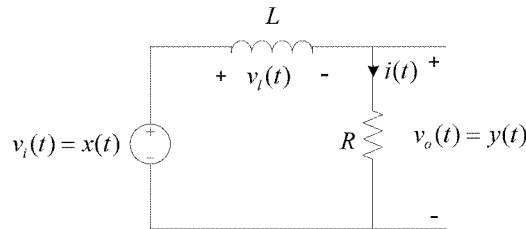
شکل (۵۷-۱): سیستم با اتصال پس‌خور

بعدها رابطه‌ای برای محاسبه خروجی بر حسب ورودی و ضابطه تک تک سیستم‌ها بدست خواهیم آورد. توجه کنید که جهت پیکانها در نمایش صحیح و دقیق سیستم‌ها بسیار مهم است. لازم بذکر است که در این کتاب از علامتهای ساختاری بصورت شکل زیر به عنوان جمع کننده و یا ضرب کننده استفاده خواهیم کرد.



شکل (۵۸-۱): علامتهای ساختاری نشاندهنده ضرب و جمع سیگنالها

مثال (۱۷-۱): یک نمودار جعبه ای معادل برای مدار زیر بیابید.

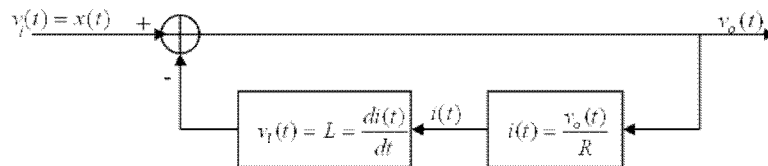


شکل (۵۹-۱): مدار مثال (۱۷-۱)

حل: باید از خروجی که $v_o(t)$ است ابتدا جریان $i(t)$ و سپس طی عملیات مشتق گیری $v_l(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ را تولید کنیم. در نهایت ولتاژ سلف را در ورودی از ولتاژ ورودی کم کنیم و آن را به خروجی متصل کنیم. نتیجه این مراحل در شکل زیر نشان داده شده است.

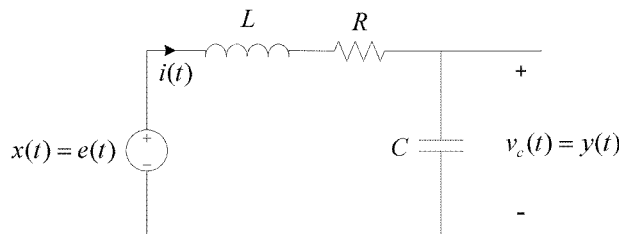
$$v_o(t) = v_l(t) - v_i(t)$$

$$v_l(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$



شکل (۶۰-۱): سیستم متناظر با تعریف ورودی و خروجی در مدار مثال (۱۷-۱)

مثال (۱۸-۱): نمودار بلوکی مدار زیر را بیابید.

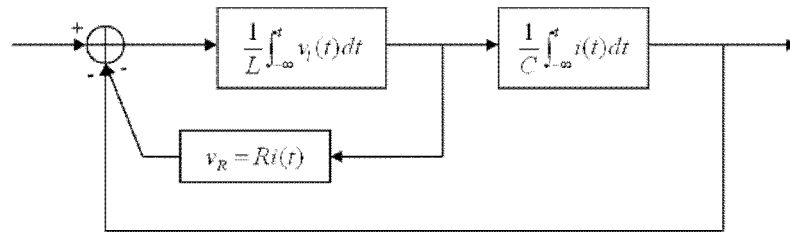


شکل (۶۱-۱): مدار شکل (۱۸-۱)

حل: ابتدا معادله دیفرانسیل مدار را داریم

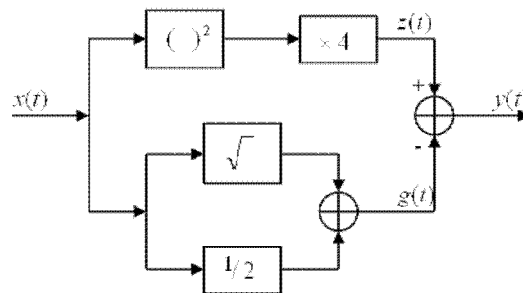
$$e(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} i(t) dt$$

اگر ورودی ولتاژ منبع و خروجی ولتاژ خازن باشد، با انجام مراحل مشابه مثال قبلی، معادل سیستمی مدار فوق بصورت زیر بدست می‌آید.



شکل (۶۲-۱): سیستم متناظر با تعریف ورودی و خروجی در مدار مثال (۱۸-۱)

مثال (۱۹-۱): ضابطه سیستم زیر را تعیین کنید.



شکل (۶۳-۱): سیستم مثال (۱۹-۱)

حل: داریم

$$z(t) = 4x^2(t)$$

و

$$g(t) = \sqrt{x(t)} + \frac{1}{2}x(t)$$

بنابراین

$$y(t) = 4x^2(t) - \sqrt{x(t)} - \frac{1}{2}x(t)$$

با این مثال‌ها اهمیت تفکیک یک سیستم بزرگ به اجزاء آن بیان شده است. در این صورت می‌توان ابتدا به بررسی عملکرد هر یک از اجزاء سیستم پرداخت، و سپس با اتصال اجزاء سیستم به یکدیگر به بررسی و درک عملکرد سیستم بزرگ پرداخت. این حقیقت یکی از روش‌های کارآمد در تجزیه و تحلیل سیستم‌های پیچیده و بزرگ می‌باشد. به عنوان مثال، تحلیل یک سیستم پیچیده مثل ماهواره یا تلویزیون بدون تفکیک این سیستم به

اجزاء آن تقریباً غیرممکن است. ولی با نظر به این سیستم‌ها بعنوان ترکیبی از چندین سیستم جزئی امکان تحلیل و تفسیر، و پیش‌بینی عملکرد آنها، بوجود می‌آید. تفکیک سیستم به اجزاء آن در فرایند شبیه‌سازی کاربرد فراوانی دارد.

۱۱-۱ خواص سیستم‌ها

در این قسمت برخی خواص اساسی سیستم‌های پیوسته و گسسته زمانی را مرور خواهیم کرد. این خواص، هم تفسیر فیزیکی داشته و هم توسط روابط ریاضی قابل تحقیق هستند. و اکثر آنها از روی ضابطه مرتبط دهنده ورودی و خروجی سیستم قابل استخراج هستند.

۱۱-۱-۱ سیستم با و بدون حافظه^۱

سیستمی را بدون حافظه گویند که خروجی آن در هر لحظه فقط به ورودی در همان لحظه بستگی داشته باشد (نه قبل و نه بعد). در غیر این صورت سیستم باحافظه است. مثلاً سیستمی با ضابطه مرتبط دهنده ورودی و خروجی بصورت زیر یک سیستم بی‌حافظه است.

$$y[n] = 2\{x[n] + x^2[n]\} \quad (۴۱-۱)$$

مقاومت که بیانگر قانون فیزیکی مهم است، نیز یک سیستم بدون حافظه است.

یک سیستم بی‌حافظه از سابقه سیگنال ورودی در گذشته مطلع نیست، به عبارت دیگر سابقه ورودی تأثیری در مقدار خروجی در حال حاضر ندارد. بنابراین خروجی در هر لحظه نباید به ورودی در لحظات قبل بستگی داشته باشد. اما اینکه در تعریف، لحظات قبل و بعد هر دو بطور یکسان آورده شده‌اند تنها یک تعریف و قرارداد است. به عنوان مثال دیگر یک سیستم تأخیری که رابطه ورودی و خروجی آن بصورت زیر است، یک سیستم باحافظه می‌باشد.

$$y(t) = x(t-1) \quad (۴۲-۱)$$

چون خروجی در هر لحظه متأثر از ورودی در یک لحظه قبل است. سیستمی با ضابطه

$$y(t) = x(t+1) \quad (۴۳-۱)$$

نیز، طبق تعریف، یک سیستم با حافظه است. اگرچه خروجی در هر لحظه به ورودی در لحظات قبل بستگی ندارد. بلکه خروجی در هر لحظه به ورودی در یک لحظه بعد بستگی دارد. و این نوعی سیستم پیش‌بین است و ارتباطی به حافظه ندارد، اما همین که خروجی در یک لحظه خاص به ورودی در لحظات دیگر حالا چه بعد و چه قبل بستگی داشته باشد، کافی است تا سیستم را طبق تعریف باحافظه بنامند.

مثال (۲۰-۱): کدامیک از سیستم‌های زیر باحافظه و کدامیک بی‌حافظه هستند.

$$y(t) = x^2(t/2) \quad \text{الف)}$$

$$y(t) = x(t)\cos^2(t-1) \quad \text{ب)}$$

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad \text{ج)}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad \text{د)}$$

حل: سیستم‌های (الف)، (ج) و (د) هر سه با حافظه هستند، چون

(الف) در این سیستم مثلاً داریم $y(1) = x^2\left(\frac{1}{2}\right)$ ، پس خروجی در هر لحظه به ورودی در همان لحظه بستگی ندارد.

(ب) در این سیستم، ارتباط ورودی و خروجی اگر چه توسط ضریب $\cos^2(t-1)$ تعیین می‌شود، ولی این ضریب مستقل از ورودی است. آنچه که مهم است ارتباط ورودی و خروجی است. بنابراین سیستم بی‌حافظه است.

(ج) در این سیستم، اگر بنویسیم

$$y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{x(t+\Delta) - x(t)}{\Delta}$$

مشاهده می‌شود که سیستم باحافظه است.

(د) واضح است که این سیستم نیز باحافظه است، زیرا خروجی در لحظه n به تمام ورودی‌های قبلی تا لحظه n بستگی دارد.

یکی از سیستم‌های معروف حافظه دار انسان است که تقریباً اکثر افعال و حرکات وی متأثر از برخوردهای گذشته او با کلیه جهان خارج (به عنوان ورودی) می‌باشد. البته اگر چه انسان یک سیستم بسیار پیچیده و بزرگ است، اما می‌توان به خاصیت حافظه دار بودن او به عنوان یکی از موهبت‌های الهی که باعث پیشرفت و عبرت گرفتن و ایجاد قدرت استنتاج در وی شده است، نام برد.

تمرین (۵-۱): آیا سیستمی با ضابطه $y(t) = x(|t|)$ با حافظه است؟

نمونه یک سیستم با حافظه خازن است، چون رابطه ورودی و خروجی آن اگر ورودی جریان و خروجی ولتاژ باشد، بصورت $y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ است.

۱-۱۱-۲ سیستم مستقل از زمان و تابع زمان^۱

سیستمی مستقل از زمان است که ماهیت وجودی آن با زمان تغییر نکند (نه ورودی یا خروجی آن). مثلاً اگر سیستمی بصورت $y(t) = \sin[x(t)]$ تعریف شود، ورودی و خروجی آن ممکن است هر تابع دلخواهی از زمان باشند، ولی ماهیت سیستم که در واقع سینوس گرفتن از ورودی می‌باشد، تابع زمان نیست. به عبارت دیگر ما هر لحظه که بخواهیم با این سیستم کار کنیم از ورودی سینوس می‌گیریم و در خروجی آن را ظاهر می‌کند. به عبارت دیگر، یک سیستم مستقل از زمان دچار پیری نمی‌شود. ولی سیستم‌های زیر ماهیتشان با زمان تغییر می‌کند و بنابراین تابع زمان می‌باشند.

$$y(t) = \sin(t)x(t) \quad , \quad y(t) = tx(t) \quad (۴۴-۱)$$

باز هم به عبارت دیگر گذشت زمان در کار سیستم مستقل از زمان تاثیری ندارد، پس اگر پاسخ به ورودی $x(t)$ را $y(t)$ بنامیم، پاسخ به ورودی $x(t-t_0)$ باید $y(t-t_0)$ بشود.

نمونه‌ای از سیستم وابسته به زمان سیستم زیر است.

$$y[n] = n^2 x[n] \quad (45-1)$$

تحقیق این مطلب بسیار ساده است. اگر سیستم مستقل از زمان باشد، پاسخ به $x[n - n_0]$ باید برابر $y[n - n_0]$ گردد. به عبارت دیگر اگر

$$y[n] = T\{x[n]\} \quad (46-1)$$

در آن صورت باید

$$y[n - n_0] = T\{x[n - n_0]\} \quad (47-1)$$

اما در اینجا داریم

$$T\{x[n - n_0]\} = n^2 x[n - n_0] \quad (48-1)$$

ولی

$$y[n - n_0] = (n - n_0)^2 x[n - n_0] \quad (49-1)$$

پس در اینجا تساوی (47-1) برقرار نیست و سیستم متغیر با زمان خواهد شد.

تمرین (6-1): سیستمی با ضابطه $y(t) = e^{x(t)}$ را از لحاظ خاصیت مستقل از زمان بودن مورد بررسی قرار دهید.

۱۱-۳ سیستم پایدار و ناپایدار^۱

سیستم پایدار سیستمی است که پاسخ آن به سیگنال ورودی با دامنه محدود، یک خروجی با دامنه محدود باشد در غیر این صورت سیستم ناپایدار است. نمونه‌ای از سیستم‌های ناپایدار، سیستم‌هایی با ضابطه‌ای بصورت $y(t) = e^{\alpha t} x(t)$ هستند که به ازاء $\alpha > 0$ ناپایدارند، اما اگر $\alpha < 0$ باشد پایدار هستند. به عنوان مثال دیگر، سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (50-1)$$

پاسخ این سیستم به ورودی $x[n] = u[n]$ (که مشخصاً دامنه آن محدود است چون ماکزیمم آن واحد است) چنین محاسبه می‌شود

$$y[n] = \sum_{k=0}^n u[k] = (n+1) u[n]$$

در اینصورت $y[0] = 1$ و $y[1] = 2$ و $y[2] = 3$ و به همین ترتیب با افزایش n ، $y[n]$ بطور نامحدودی افزایش می‌یابد، بنابراین سیستم ناپایدار است. نمونه دیگر از سیستم‌های ناپایدار، سیستم مشتق‌گیر است. چون، اگر ورودی بصورت $x(t) = u(t)$ باشد، خروجی ضربه می‌شود که از لحاظ دامنه در یک لحظه بسیار کوچک نامحدود است.

مثال (۲۱-۱): سیستم $y(t) = e^{x^2(t)}$ را از لحاظ پایداری بررسی کنید.

حل: طبق تعریف اگر دامنه ورودی محدود باشد، دامنه خروجی یک سیستم پایدار باید محدود باشد در اینجا اگر ورودی $x(t) < B$ محدود باشد، در آن صورت خروجی نیز محدود است. چون بیشترین مقدار خروجی e^{B^2} می‌شود که محدود است، به عبارت دیگر $y(t) < e^{B^2}$ بنابراین، این سیستم پایدار است. خاصیت پایداری سیستم، شرط اساسی در مراحل ساخت و تحقق عملی آنها می‌باشد و در بررسی عملکرد سیستم و پیش‌بینی پاسخ، بسیار مهم و اساسی است.

۱۱-۴ سیستم خطی و غیر خطی^۱

سیستم خطی، سیستمی است که خاصیت جمع آثار^۲ در آن صادق باشد، یعنی بطور خلاصه در دو شرط زیر صدق کند (پاسخ به $x_1[n]$ را $y_1[n]$ در نظر بگیرید)

الف: شرط جمع پذیری: پاسخ به $x_1[n] + x_2[n]$ می‌شود $y_1[n] + y_2[n]$

ب: شرط همگنی: پاسخ به $ax[n]$ می‌شود $ay[n]$ ، که a هر عدد مختلط و یا حقیقی (غیر از صفر) می‌تواند باشد. توجه داشته باشید که عیناً تعاریف زیر در مورد سیستم‌های پیوسته زمانی خطی نیز وجود دارد.

در حالت کلی، اگر پاسخ به $x_k[n]$ را با $y_k[n]$ نمایش دهیم، در آن صورت پاسخ به $x[n]$ که مجموعه وزن‌داری از $x_k[n]$ ‌ها می‌باشد، مجموع $y_k[n]$ ‌ها می‌شود.

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] \rightarrow y[n] = \sum_k a_k y_k[n] \quad (۵۲-۱)$$

به عنوان یک مثال از سیستم غیر خطی می‌توان $y = x^2$ را نام برد. چون اگر دو ورودی ثابت ۲ و -۲ را در نظر بگیریم پاسخ سیستم به هر دو ورودی ۴ است. ولی پاسخ سیستم به مجموع دو ورودی مساوی صفر است.

$$x_1 = 2 \rightarrow y_1 = 4$$

$$x_2 = -2 \rightarrow y_2 = 4$$

$$F(x_1 + x_2) = F(0) = 0 \neq y_1 + y_2$$

تمرین (۷-۱): ثابت کنید اگر ورودی سیستم خطی برابر صفر باشد، خروجی آن نیز لزوماً برابر صفر است.

انواع سیستم‌های غیر خطی

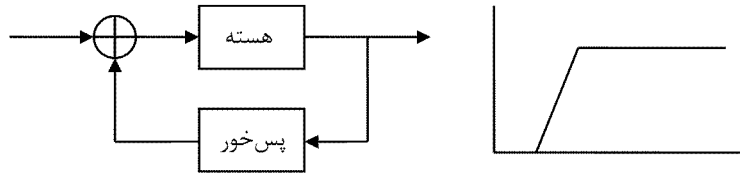
۱- بدون هیستریزیس یا تک مقداری^۳: به ازاء هر x یک y و بازاء هر y یک x بدست می‌آید.

۲- با هیستریزیس یا چند مقداره: پدیده هیستریزیس در مغناطیس و الکتروستاتیک هم دیده می‌شود. اصولاً تمام سیستم‌هایی که هیستریزیس دارند، با حافظه‌اند. معمولاً پدیده هیستریزیس از مجموع حالت اشباع و پس‌خور مثبت بوجود می‌آید. بدین مفهوم که مثلاً در یک هسته مغناطیسی با اعمال میدان مغناطیسی H تمام اتم‌ها در جهت میدان قرار می‌گیرند و ایجاد یک میدان مغناطیسی می‌کنند که با میدان اولیه هم جهت است و آن را تقویت می‌کند. بنابراین یک پس‌خور مثبت بوجود می‌آید که پس از مدتی باعث به اشباع رفتن هسته خواهد شد.

¹ Linear and Nonlinear Systems

² superposition

³ One to One Correspondence



شکل (۶۴-۱): سیستم هیستریزیس و نمودار اشباع

به عنوان مثال دیگری از سیستم غیر خطی می‌توان سیستمی با ضابطه $y = x + k = f(x)$ را در نظر گرفت که در آن k مقدار ثابت حقیقی است. در این صورت اگر دو ورودی به سیستم را بصورت $x_1 = 2$ و $x_2 = -2$ را در نظر بگیریم خروجی‌ها بصورت زیر محاسبه می‌شوند

$$x_1 = 2 \rightarrow y_1 = 2 + k = f(x_1)$$

$$x_2 = -2 \rightarrow y_2 = -2 + k = f(x_2)$$

$$f(x_1 + x_2) = f(0) = k \neq f(x_1) + f(x_2) = 2k$$

سیستم‌های خطی تکه‌ای^۱ نوع دیگری از سیستم‌های غیر خطی هستند که شباهت زیادی به سیستم‌های خطی دارند. به همین منظور، نام سیستم خطی تکه‌ای روی آنها نهاده شده است.

سیستم خطی تکه‌ای سیستمی است که تفاضل پاسخ‌ها به دو ورودی دلخواه تابعی از تفاضل آن دو ورودی باشد. به عنوان مثال اگر $x_1[n]$ و $x_2[n]$ دو ورودی به سیستم $y[n] = ax[n] + k$ باشند، داریم

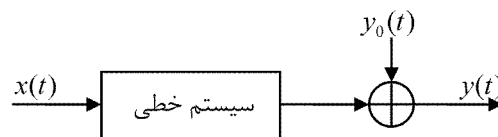
$$y_1[n] = ax_1[n] + k \quad (۵۳-۱)$$

$$y_2[n] = ax_2[n] + k \quad (۵۴-۱)$$

و از تفاضل دو معادله فوق داریم

$$y_1[n] - y_2[n] = ax_1[n] + k - ax_2[n] - k = a\{x_1[n] - x_2[n]\} \quad (۵۵-۱)$$

دیده می‌شود که تفاضل پاسخها فقط بستگی به تفاضل ورودی‌ها دارد. هر سیستم خطی تکه‌ای را می‌توان بصورت شکل زیر نشان داد (در حالت پیوسته زمانی)



شکل (۶۵-۱): سیستم خطی تکه‌ای

توجه شود که $y_0(t)$ تابعی از ورودی نیست، اما می‌تواند هر تابعی از زمان باشد. مثلاً $y(t) = ax(t) + \sin(t)$ لازم به تذکر است که $y_0(t)$ پاسخ ورودی صفر سیستم است، چون به ازاء ورودی صفر خروجی سیستم خطی صفر است. بنابراین اگر بر سیستم شکل (۶۵-۱) ضابطه زیر حاکم باشد

$$y(t) = T[x(t)] + y_0(t) \quad (۵۶-۱)$$

^۱ piecewise linear

که در آن عملگر $T[]$ یک عملگر خطی است. در آن صورت اگر $x(t) = 0$ باشد، خواهیم داشت

$$T[x(t)] = 0 \quad (۵۷-۱)$$

و بنابراین

$$y(t) = y_0(t) \quad (۵۸-۱)$$

پس $y_0(t)$ پاسخ ورودی صفر است.

این‌گونه سیستم‌ها در مهندسی برق و مدارهای الکتریکی بسیار زیاد مشاهده می‌شوند. اگر چه این سیستم‌ها در تعریف کلی ما از سیستم‌های خطی نمی‌گنجد ولی در بسیاری از موارد، اکثر عناصر تشکیل دهنده این سیستم‌ها در اصل خطی هستند.

مثال (۲۲-۱): سیستم مشتق‌گیر را از لحاظ خطی بودن بررسی کنید.

حل: فرض می‌کنیم پاسخ سیستم به ورودی $x_i(t)$ برابر $y_i(t)$ باشد، به ازاء i عدد صحیح

$$y_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt} \quad (۵۹-۱)$$

اکنون یک ورودی بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x(t) = \sum a_i x_i(t) \quad (۶۰-۱)$$

با اعمال این ورودی به سیستم فوق، خروجی را بصورت زیر داریم

$$y(t) = \frac{d}{dt} [\sum a_i x_i(t)] \quad (۶۱-۱)$$

و چون عملیات مشتق‌گیری و مجموع قابل جابجائی است، پس

$$y(t) = \sum a_i \frac{d}{dt} x_i(t) \quad (۶۲-۱)$$

و با توجه به (۵۹-۱) داریم

$$y(t) = \sum a_i y_i(t) \quad (۶۳-۱)$$

پس سیستم مشتق‌گیر خطی است.

تمرین (۸-۱): آیا سیستم انتگرال‌گیر خطی است؟

مثال (۲۳-۱): سیستم $y(t) = \text{Cos}[x(t)]$ را از لحاظ خطی بودن بررسی کنید.

حل: پاسخ سیستم به دو ورودی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را $y_1(t)$ و $y_2(t)$ می‌نامیم. و یک ورودی بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \quad (۶۴-۱)$$

اکنون پاسخ به این ورودی برابر است با

$$y(t) = \text{Cos}[ax_1(t) + bx_2(t)] \quad (۶۵-۱)$$

واضح است که این خروجی با مقدار زیر برابر نیست. بنابراین سیستم غیر خطی است.

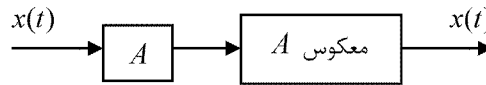
$$ay_1(t) + by_2(t) = a\text{Cos}[x_1(t)] + \text{Cos}[x_2(t)] \quad (۶۶-۱)$$

توجه به این نکته ضروری است که در اثبات یک خاصیت برای یک سیستم باید حالت کلی را در نظر گرفت، ولی برای نفی یک خاصیت کافی است یک حالت خاص را مورد بررسی قرار داد. به عنوان مثال برای نفی خاصیت

پایداری از سیستم مشتق‌گیر، استناد به این حقیقت که خروجی سیستم به ازاء ورودی پله، نامحدود است، کفایت می‌کند. ولی برای اثبات خاصیت خطی بودن آن لازم است، حالت کلی مانند آنچه در مثال (۱-۲۲) دیدید، مورد بررسی قرار گیرد.

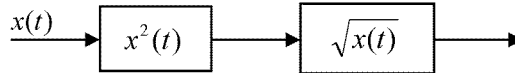
۱-۱۱-۵ عکس‌پذیری و سیستم معکوس یا وارون^۱

سیستم عکس‌پذیر، سیستمی است که به ازاء هر ورودی خاص و مجزا، پاسخ خاص و مجزا بدهد. در این صورت می‌توان سیستمی بنام سیستم معکوس (یا وارون) را آن‌گونه طراحی کرد که اگر ورودی آن سیستم معکوس به خروجی سیستم اصلی متصل شود، در آن صورت خروجی سیستم معکوس همان ورودی سیستم اصلی شود.



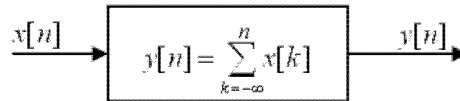
شکل (۱-۶۶): سیستم و معکوس آن

به عنوان مثال، سیستم دوبرابرکننده، معکوس‌پذیر است و معکوس آن سیستمی است که بر دو تقسیم می‌کند. ولی سیستم به توان دو رساننده معکوس‌پذیر نیست، چون پاسخ آن به دو ورودی ۲ و ۲- مساوی ۴ است. و اگر تصور شود که سیستم جذرگیرنده معکوس سیستم به توان دو رساننده است، می‌توان با اتصال متوالی (سری) آنها به هم و اعمال دو ورودی متمایز ۲ و ۲- مشاهده کرد که در حالتی که ورودی ۲- است، هنوز خروجی ۲ است و چون خروجی با ورودی مساوی نیست، پس سیستم جذرگیرنده، معکوس سیستم به توان دو رساننده نیست. ممکن است بنظر برسد، اگر ورودی محدود به مقادیر مثبت باشد این دو سیستم معکوس یکدیگر شوند. اما باید توجه کرد که خاصیت معکوس‌پذیری و اصولاً کلیه خواص سیستم مستقل از نوع ورودی و فقط تابع مشخصات درونی و فیزیک سیستم هستند.



شکل (۱-۶۷): سیستم به توان دو رساننده و اتصال متوالی آن با سیستم جذرگیرنده

تمرین (۱-۸): معکوس سیستم زیر را بیابید.



شکل (۱-۶۸): سیستم تمرین (۱-۸)

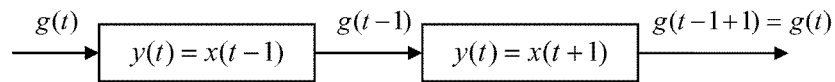
مثال (۱-۲۴): معکوس سیستم زیر را بیابید (سیستم تاخیردهنده)

$$y(t) = x(t-1)$$

چون سیستم تاخیردهنده است، بنابراین سیستم جلوانداز، معکوس آن است برای تحقیق این مطلب کافیت، این دو سیستم را بطور متوالی پشت سر هم وصل کنیم و مشاهده کنیم که خروجی سیستم معکوس در همه حالات و به ازاء هر ورودی مساوی ورودی سیستم اصلی است.

1-Invertible Systems

البته این روش حدسی جهت یافتن سیستم معکوس احتمالاً فقط در برخی حالت‌های خاص به جواب منطقی و ساده‌ای منجر می‌شود و در حالت کلی در آینده روشهای ریاضی دقیق‌تری جهت یافتن سیستم معکوس برای یک دسته خاص از سیستم‌ها ارائه خواهیم کرد.



شکل (۶۹-۱): سیستم تاخیر دهنده و معکوس آن مربوط به مثال (۲۴-۱)

تمرین (۹-۱): آیا سیستم تشکیل شده از اتصال متوالی چند سیستم معکوس‌پذیر، نیز معکوس‌پذیر است؟

۱۱-۶ علیت و سیستم علی^۱

سیستمی علی است که خروجی در هر لحظه به مقادیر ورودی در آن لحظه و لحظات قبل از آن بستگی داشته باشد. به عبارت دیگر، سیستم علی از آینده خبر ندارد و به عبارت فلسفی، سیستم علی از قانون علت و معلول تبعیت می‌کند. یعنی هرگز قبل از ایجاد علت (ورودی)، معلول (خروجی) بوجود نمی‌آید. بنابراین اگر دو ورودی به یک سیستم علی به ازاء $t < t_0$ یکسان باشند در آن صورت خروجی سیستم به ازاء $t < t_0$ برای دو ورودی باید یکسان باشد، یعنی

$$x_1(t < t_0) = x_2(t < t_0) \rightarrow y_1(t < t_0) = y_2(t < t_0) \quad (۶۷-۱)$$

به عنوان مثال، سیستم زیر علی است.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (۶۸-۱)$$

ولی سیستم زیر علی نمی‌باشد.

$$y(t) = x(t+1) \quad (۶۹-۱)$$

چون خروجی در هر لحظه به ورودی در لحظات آینده بستگی دارد و این سیستم در حقیقت نوعی سیستم پیشگو برای مقادیر ورودی است، یعنی مقادیر ورودی را قبل از اعمال به سیستم، پیشگویی می‌کند.

۱۲-۱ چندمثال حل شده

مثال (۲۵-۱): سیستم‌های داده شده را از لحاظ خواص مطرح شده در این فصل بررسی کنید.

الف) $y(t) = e^{x(t)}$

ب) $y[n] = x[n]x[n-1]$

حل: الف)

$$y(t) = e^{x(t)} = f[x(t)]$$

۱- برای بررسی خطی بودن باید $f(a_1x_1 + a_2x_2)$ را تشکیل دهیم و ببینیم با $a_1f[x_1(t)] + a_2f[x_2(t)]$ برابر است یا نه.

$$f[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = e^{a_1t}e^{a_2x_2(t)} \neq a_1f[x_1(t)] + a_2f[x_2(t)]$$

پس سیستم غیر خطی است.

۲- برای سیستم غیر متغیر با زمان باید تساوی $y(t + \tau) = f[x(t + \tau)]$ را تحقیق کنیم.

$$y(t + \tau) = e^{x(t+\tau)} = f[x(t + \tau)]$$

پس سیستم غیر متغیر با زمان است.

۳- اما از لحاظ پایداری از شکل ضابطه سیستم می فهمیم که تا هنگامی که ورودی محدود است، خروجی نمی تواند بطور نامحدود بزرگ شود، پس سیستم پایدار است.

۴- سیستم بدون حافظه است، چون مقدار خروجی به مقدار ورودی در همان لحظه بستگی دارد.

۵- سیستم علی است، چون هرگز خروجی قبل از اعمال ورودی نمی تواند وجود داشته باشد.

(ب)

$$y[n] = x[n]x[n-1] = f\{x[n]\}$$

۱- بررسی خطی بودن

$$\begin{aligned} f\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} &= \{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} \{a_1x_1[n-1] + a_2x_2[n-1]\} \\ &= a_1^2(x_1[n]x_1[n-1]) + a_2^2(x_2[n]x_2[n-1]) + a_1a_2(x_1[n]x_2[n-1]) + a_1a_2(x_2[n]x_1[n-1]) \end{aligned}$$

اما می دانیم که شرط خطی بودن عبارتست از اینکه عبارت فوق باید مساوی عبارت زیر شود

$$a_1f\{x_1[n]\} + a_2f\{x_2[n]\} = a_1(x_1[n]x_1[n-1]) + a_2(x_2[n]x_2[n-1])$$

پس این سیستم خطی نیست.

۲- بررسی غیر متغیر بودن با زمان

باید نشان دهیم که اگر

$$y[n] = f\{x[n]\} = x[n]x[n-1]$$

در آنصورت

$$y[n - \tau] = f\{x[n - \tau]\} = x[n - \tau]x[n - \tau - 1]$$

اما چون

$$y[n - \tau] = x[n - \tau]x[n - \tau - 1] = f\{x[n - \tau]\}$$

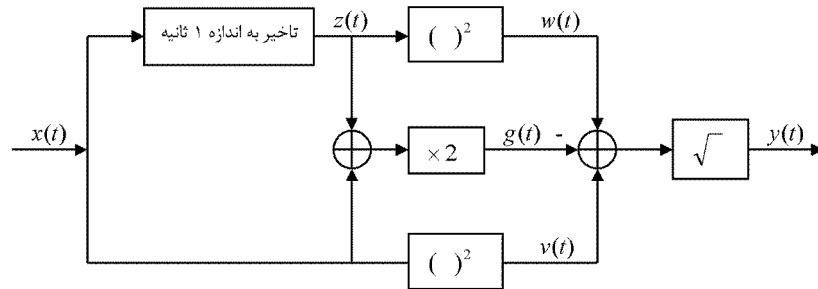
پس سیستم غیر متغیر با زمان است.

۳- سیستم به همان دلیلی که در قسمت (الف) گفتیم، پایدار است.

۴- سیستم دارای حافظه است، زیرا خروجی در هر لحظه حاوی اطلاعاتی از ورودی لحظه قبل است.

۵- سیستم علی است، چون قبل از اعمال ورودی، خروجی نمی تواند ظاهر شود.

مثال (۱-۲۶): رابطه ورودی و خروجی سیستم زیر را بیابید. آیا این سیستم خطی است.



شکل (۷۰-۱): سیستم مثال (۲۶-۱)

حل: $z(t) = x(t-1)$ $w(t) = z^2(t) = x^2(t-1)$ $v(t) = x^2(t)$

$$g(t) = [z(t) + x(t)] \times 2 = [x(t) + x(t-1)] \times 2$$

$$r(t) = w(t) + v(t) - g(t) = x^2(t) + x^2(t-1) - 2[x(t) + x(t-1)] = [x(t) - x(t-1)]^2$$

$$y(t) = \sqrt{[x(t) - x(t-1)]^2} = |x(t) - x(t-1)|$$

جهت بررسی خطی بودن باید شرط جمع آثار و همگنی را تحقیق کنیم

$$T[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = |[\alpha(x_1(t) - x_1(t-1)) + \beta(x_2(t) - x_2(t-1))]|$$

$$\neq \alpha |x_1(t) - x_1(t-1)| + \beta |x_2(t) - x_2(t-1)|$$

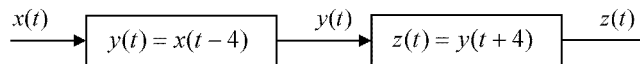
پس سیستم غیر خطی است.

مثال (۲۷-۱): معکوس سیستم زیر را بیابید.

$$y(t) = x(t-4)$$

حل: همان گونه که گفتیم، معکوس یک سیستم تاخیرانداز، یک سیستم جلوانداز است، پس

$$z(t) = y(t+4) = x(t-4+4) = x(t)$$



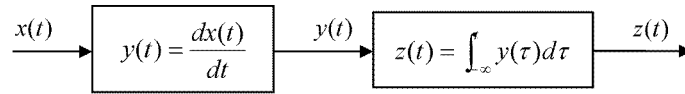
شکل (۷۱-۱): سیستم مثال (۲۷-۱) و معکوس آن

مثال (۲۸-۱): معکوس سیستم زیر را با فرض اینکه ورودی مقدار ثابت مستقل از زمان (مقدار DC) نداشته باشد بیابید.

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

حل: واضح است که معکوس سیستم مشتق‌گیر باید یک سیستم انتگرال‌گیر باشد. اکنون این حدس را تحقیق می‌کنیم.

$$z(t) = \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \frac{dx(\tau)}{d\tau} d\tau = x(t)$$



شکل (۷۲-۱): سیستم مثال (۲۸-۱) و معکوس آن

مثال (۲۹-۱): ثابت کنید

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N, & \alpha = 1 \\ \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

حل: برای $\alpha = 1$ ، اثبات واضح است. اما برای $\alpha \neq 1$ داریم

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n &= 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{N-2} + \alpha^{N-1} \\ (1-\alpha)(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{N-1}) &= 1 - \alpha + \alpha - \alpha^2 + \alpha^2 - \alpha^3 + \dots \\ &\quad - \alpha^{N-1} + \alpha^{N-1} - \alpha^N = 1 - \alpha^N \rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} \end{aligned}$$

و اگر $|\alpha| < 1$ باشد و $N \rightarrow \infty$ در آن صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1-\alpha^{\infty}}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

(ب) ثابت کنید اگر $|\alpha| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

$$\sum_{n=0}^N n\alpha^n = 0 + \alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + \dots + (N-1)\alpha^{N-1} + N\alpha^N \quad \text{حل:}$$

$$\begin{aligned} &(1 + \alpha^2 - 2\alpha)(\alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + 4\alpha^4 + 5\alpha^5 + \dots) \\ &= (\alpha + \alpha^3 - 2\alpha^2 + 2\alpha^2 + 2\alpha^4 - 4\alpha^3 + 3\alpha^3 \\ &\quad + 3\alpha^5 - 6\alpha^4 + 4\alpha^4 + 4\alpha^6 - 8\alpha^5 + 5\alpha^5 + 5\alpha^7 - 10\alpha^6 + \dots) \end{aligned}$$

می‌بینیم که تمام جملات همدیگر را حذف می‌کنند، مگر چند جمله‌ای که توان آنها در حدود N و اگر $N \rightarrow \infty$ و به شرط $|\alpha| < 1$ می‌توان از همه آنها صرف‌نظر کرد، بنابراین فقط جمله اول باقی می‌ماند

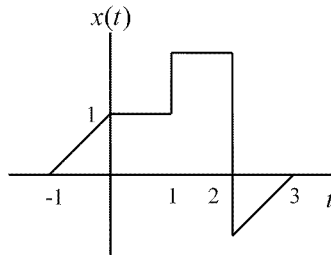
$$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \alpha + 2\alpha^2 + \dots + N\alpha^N + \dots = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

(د) مطلوبست محاسبه $\sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n - \sum_{n=0}^{k-1} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1-\alpha^{k+1}}{1-\alpha} = \frac{\alpha^{k+1}}{1-\alpha} \quad \text{حل:}$$

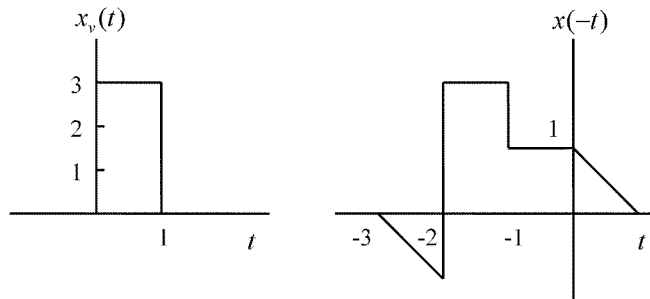
مثال (۳۰-۱): مطلوبست رسم $x_v(t)$ ، اگر $x(t)$ بصورت زیر رسم شده باشد.

$$x_v(t) = [x(t) + x(2-t)]u(1-t)$$



شکل (۷۳-۱): سیگنال $x(t)$ مربوط به مثال (۳۰-۱)

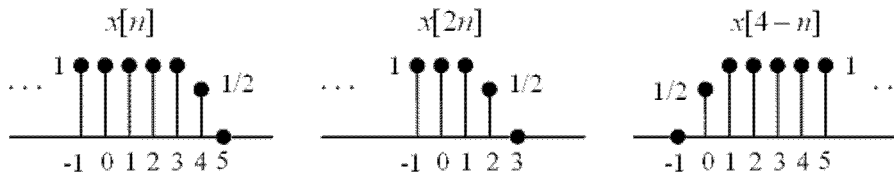
حل: با رسم $x(-t)$ و انتقال آن به اندازه ۲ واحد به سمت راست و جمع آنها به ازاء $t \leq 1$ شکل $x_v(t)$ را بصورت زیر بدست می‌آوریم.



شکل (۷۴-۱): سیگنال $x(-t)$ و $x_v(t)$ مربوط به مثال (۳۰-۱)

مثال (۳۱-۱): مطلوبست $x[4-n]$ و $x[2n]$ اگر $x[n]$ بصورت شکل (۷۵-۱) رسم شده باشد.

حل: با مقیاس کردن $x[n]$ ، $x[2n]$ بدست می‌آید و با قرینه‌سازی آن نسبت به محور $n=0$ و انتقال به اندازه ۴ واحد به سمت چپ می‌توان $x[4-n]$ را بدست آورد.



شکل (۷۵-۱): درباره $x[4-n]$ و $x[2n]$ و $x[n]$ مربوط به مثال (۳۱-۱)

مثال (۳۲-۱): تبدیل ناحیه $d(x, y)$ که در شکل (۷۶-۱) مشخص شده است را بیابید.

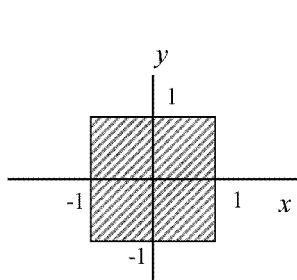
حل:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ & -1 < y < 1 \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$$

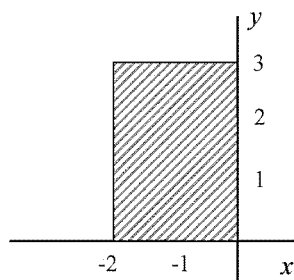
$$d(x+1, y-2) = \begin{cases} 1 & -1 < x+1 < 1 \\ & -1 < y-2 < 1 \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases} = \begin{cases} 1 & -2 < x < 0 \\ & 1 < y < 3 \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$$

$$d\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = \begin{cases} 1 & -1 < \frac{1}{x} < 1 \\ & -1 < \frac{1}{y} < 1 \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases} = \begin{cases} 1 & |x| > 1 \\ & |y| > 1 \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$$

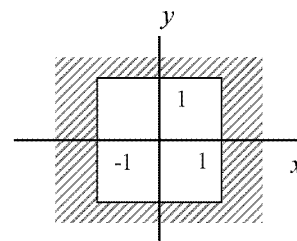
$$d\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = \begin{cases} 0 & 1 < x < 1 \\ & -1 < y < 1 \\ 1 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$$



(الف)



(ب)

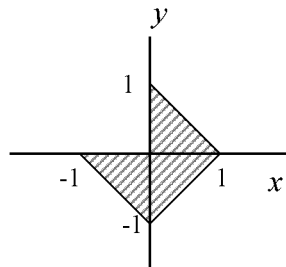


(ج)

شکل (۷۶-۱): نمایش نواحی (الف) $d(x, y)$ ، (ب) $d(x+1, y-2)$ و (ج) $d\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{درون مناطقی سایه دار} \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

مطلوبست محاسبه $f(x-3, y+2)$.



شکل (۷۷-۱): ناحیه $f(x, y)$ مربوط به قسمت (ب) از مثال (۳۲-۱)

حل: باید ابتدا ناحیه هاشور خورده را مشخص کنیم

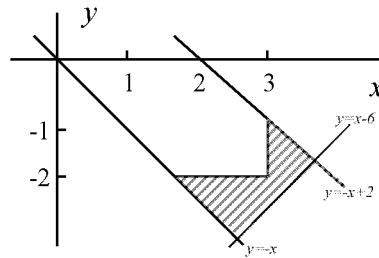
$$\begin{cases} -1 < x < 0, -x-1 < y < 0 \\ 0 < x < 1, x-1 < y < 1-x \end{cases}$$

اکنون باید x را به $x-3$ و y را به $y+2$ تبدیل کنیم.

$$\begin{cases} -1 < x-3 < 0, & -x-2 < y+2 < 0 \\ 0 < x-3 < 1, & x-4 < y+2 < -x+4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 < x < 3, & -x < y < -2 \\ 3 < x < 4, & x-6 < y < -x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x-3, y-2) = 1 \\ f(x-3, y-2) = 0 \end{cases}$$

و یا
در ناحیه هاشور خورده
سایر جاها



شکل (۷۸-۱): ناحیه $f(x-3, y+2)$ مربوط به قسمت (ب) از مثال (۳۲-۱)

(ج) مطلوبست محاسبه ناحیه $f(-\frac{1}{2}y, 2x)$

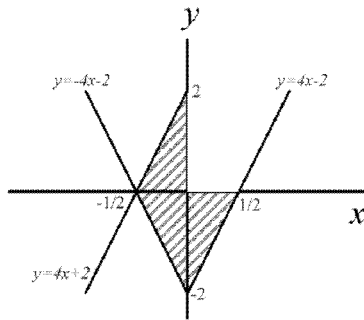
حل: همانند حالت قبل کافی است در ناحیه

$$\begin{cases} -1 < x < 0, & -x-1 < y < 0 \\ 0 < x < 1, & x-1 < y < 1-x \end{cases}$$

x را به $-\frac{1}{2}y$ و y را به $2x$ تبدیل کنیم.

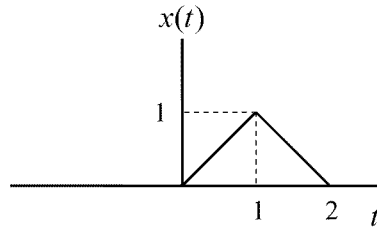
$$\begin{cases} -1 < -\frac{1}{2}y < 0, & \frac{1}{2}y-1 < 2x < 0 \\ 0 < -\frac{1}{2}y < 1, & -\frac{1}{2}y-1 < 2x < \frac{1}{2}y+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < y < 2, & \frac{1}{4}y - \frac{1}{2} < x < 0 \\ -2 < y < 0, & -\frac{1}{4}y - \frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{4}y \end{cases}$$



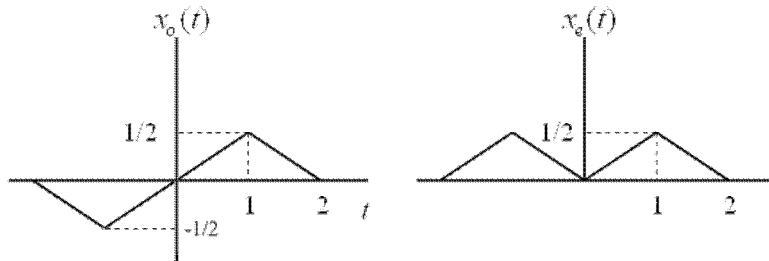
شکل (۷۹-۱): ناحیه $f(\frac{-1}{2}y, 2x)$ مربوط به قسمت (ج) از مثال (۳۲-۱)

مثال (۳۳-۱): قسمتهای زوج و فرد توابع زیر را مشخص کنید.



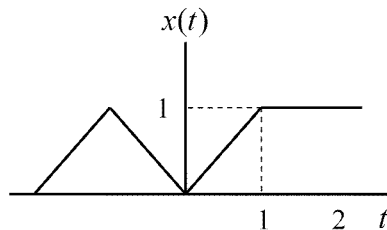
شکل (۸۰-۱): سیگنال مثال (۳۳-۱)

حل: به سادگی از روابط (۳۰-۱) و (۳۱-۱) می توان قسمتهای زوج و فرد این سیگنال را یافت.



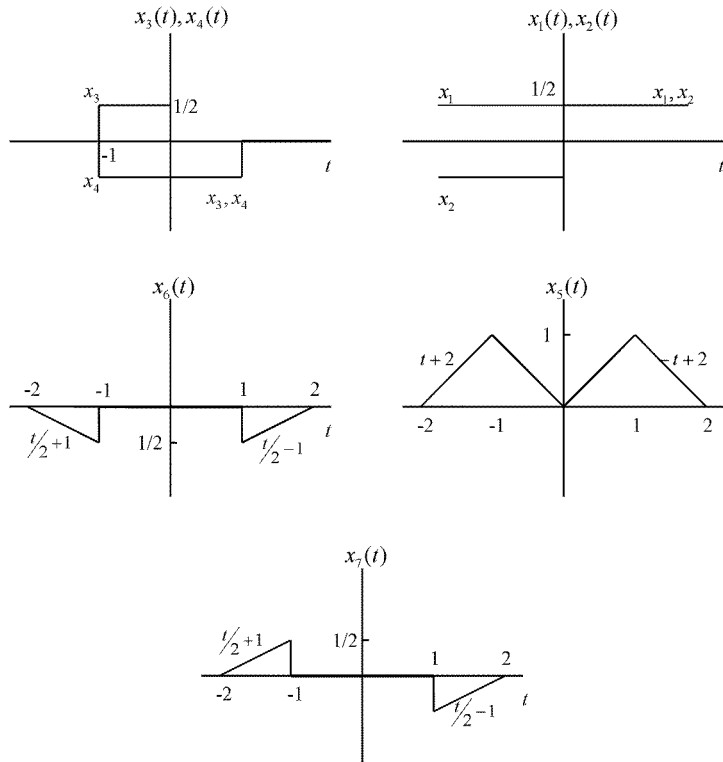
شکل (۸۱-۱): قسمتهای زوج و فرد سیگنال شکل (۸۰-۱)

مثال (۳۴-۱): قسمتهای زوج و فرد سیگنال $x(t)$ را بیابید.



شکل (۸۲-۱): سیگنال مثال (۱-۳۴)

حل: ابتدا سیگنال $x(t)$ را به اجزاء آن تفکیک می‌کنیم. این کار با تعریف توابع $x_1(t)$ الی $x_7(t)$ به صورت نشان داده شده ممکن است.



شکل (۸۳-۱): شکل سیگنال‌های $x_1(t)$ الی $x_7(t)$ که نشان‌دهنده قسمت‌های زوج و فرد سیگنال $x(t)$ هستند.

بنابراین چون

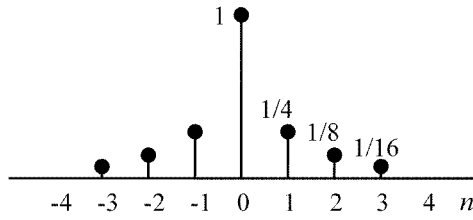
$$x(t) = \sum_{k=1}^7 x_k(t)$$

داریم

$$x_e(t) = x_1(t) + x_4(t) + x_5(t) + x_6(t)$$

$$x_o(t) = x_2(t) + x_3(t) + x_7(t)$$

مثال (۱-۳۵): قسمت زوج یک دنباله در شکل نمایش داده شده است. مطلوبست رسم دقیق دنباله اگر $x[n < 0] = 0$ باشد.



شکل (۸۴-۱): قسمت زوج دنباله مثال (۳۵-۱)

حل: می‌دانیم $x_e[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x[-n]\}$. ابتدا از مقدار تابع در صفر شروع می‌کنیم. می‌دانیم که چون $x[0] = x_e[0]$

$$x_e[0] = \frac{1}{2}\{x[0] + x[0]\} = x[0] = 1$$

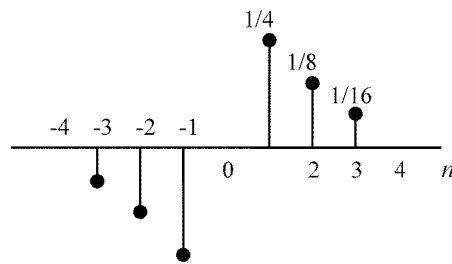
$$x_o[0] = \frac{1}{2}\{x[0] - x[0]\} = 0$$

$$x[n] = x_o[n] + x_e[n] = 0$$

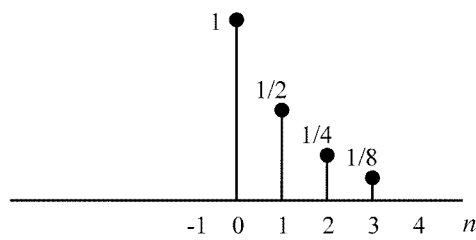
پس

$$x_o[n] = -x_e[n], \quad n < 0$$

$$x_o[n] = x_e[n], \quad n > 0$$



شکل (۸۵-۱): قسمت فرد دنباله مثال (۳۵-۱)



شکل (۸۶-۱): دنباله مثال (۳۵-۱)

بنابراین از مجموع قسمت های زوج و فرد داریم

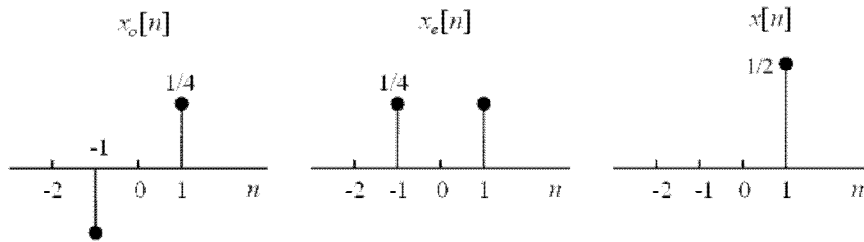
$$x[n] = 0; n \leq -1, \quad x[0] = 1$$

$$x[n] = \{x_e[n] + x_o[n]\}$$

که این مجموع در شکل ۸۶-۱ نشان داده شده است.

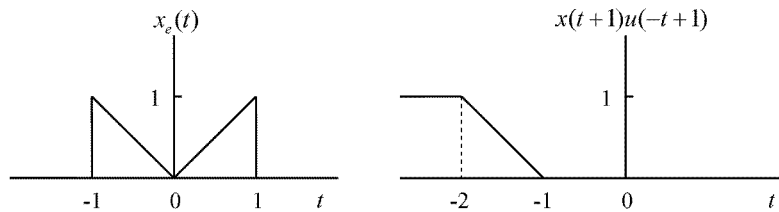
مثال (۳۶-۱): قسمت فرد یک دنباله در شکل زیر رسم شده است. با فرض $x[n \leq 0] = 0$ مطلوبست رسم $x[n]$

حل: مشابه حل مثال (۳۵-۱) است. البته باید توجه کنیم که قسمت فرد یک سیگنال در مورد مقدار سیگنال در نقطه صفر اطلاعاتی به ما نمی‌دهد.



شکل (۸۷-۱): قسمت‌های فرد و زوج و دنباله اصلی مربوط به مثال (۳۶-۱)

مثال (۳۷-۱): دو سیگنال زیر مربوط به قسمت زوج و شیفت یافته یک سیگنال مجهول $x(t)$ هستند. بدقت $x(t)$ و قسمت فرد آنرا بیابید.



شکل (۸۸-۱): قسمت‌های زوج و انتقال یافته (محدوده شده) سیگنال مثال (۳۷-۱)

حل: ابتدا اطلاعات موجود در سیگنال‌ها را مرتب می‌کنیم. از شکل (۸۸-۱) می‌توان $x(t)$ را برای $-1 < t < 0$ یافت. چون

$$-2 < t < -1, \quad x(t+1) = -(t+1) \rightarrow -1 < t < 0 \quad x(t) = -t$$

همچنین برای $t < -1$ نیز می‌توان $x(t)$ را یافت.

$$t < -1, \quad x(t) = 1$$

با توجه به اطلاعات قسمت زوج سیگنال نیز می‌توان این مقادیر را تحقیق کرد.

$$-1 < t < 0 \quad xe(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \rightarrow -t = \frac{1}{2}[-t + x(-t)]$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$x(-t) = -t, \quad -1 < t < 0$$

و یا

$$x(t) = t, \quad 0 < t < 1$$

از همین حقیقت برای یافتن $x(t)$ در $t > 1$ استفاده می‌کنیم.

$$t < -1, \quad x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \rightarrow 0 = \frac{1}{2}[1 + x(-t)]$$

پس

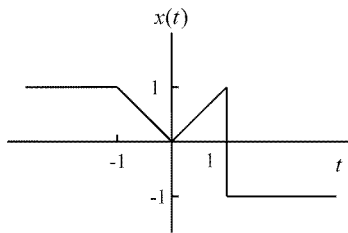
$$t < -1, x(-t) = -1$$

بنابراین می توان نوشت

$$t > 1, x(t) = -1$$

پس اکنون بطور کامل می توان شکل $x(t)$ را بدست آورد.

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t < -1 \\ -t & -1 < t < 0 \\ t & 0 < t < 1 \\ -1 & t > 1 \end{cases}$$



شکل (۸۹-۱): سیگنال $x(t)$ مجهول در مثال (۳۷-۱)

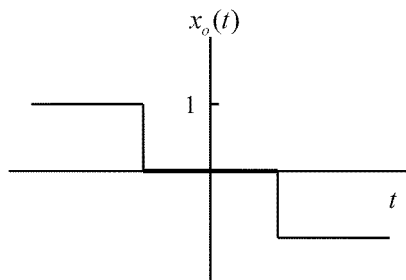
و بسادگی با استفاده از $x(t)$ می توان $x_o(t)$ را یافت.

$$t > 1, x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] = \frac{1}{2}[-1 - (+1)] = -1$$

$$0 < t < 1, x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] = \frac{1}{2}[t - (+t)] = 0$$

$$-1 < t < 0, x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] = \frac{1}{2}[-t - (-t)] = 0$$

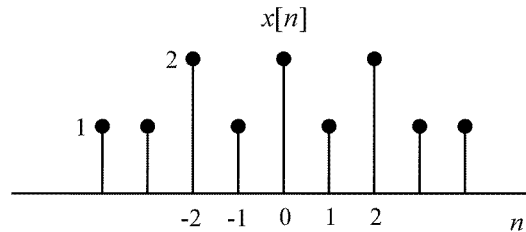
$$t < -1, x_o(t) = -x_o(-t) \quad \text{یا} \quad x_o(t) = \frac{1}{2}[1 + 1] = 1$$



شکل (۹۰-۱): قسمت فرد سیگنال شکل (۸۱-۱)

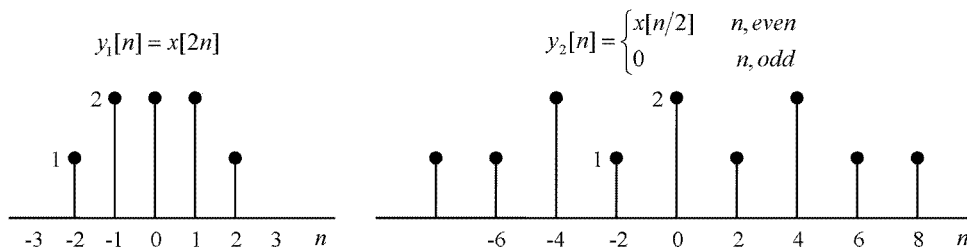
مثال (۳۸-۱) برای دنباله رسم شده در شکل زیرمطلوبست

$$y_2[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{2}] & n, \text{even} \\ 0 & n, \text{odd} \end{cases}, y_1[n] = x[2n]$$



شکل (۹۱-۱): دنباله مثال (۳۸-۱)

حل: به سادگی و با استفاده از تعریف داریم:

شکل (۹۲-۱): دنباله‌های $y_1[n]$ و $y_2[n]$ مربوط به مثال (۳۸-۱)

مثال (۳۹-۱): اولاً تعیین کنید کدامیک از دنباله‌های داده شده در بندهای (الف) تا (د) متناوب هستند و اگر متناوب هستند دوره تناوب آنها را بیابید.

$$x[n] = \cos\left(\frac{8\pi n}{7} + 2\right) \quad \text{(الف)}$$

حل: شرط اینکه N دوره تناوب باشد، اینست که

$$\begin{aligned} x[n+N] = x[n] &\rightarrow \cos\left(\frac{8\pi(n+N)}{7} + 2\right) = \cos\left(\frac{8\pi n}{7} + 2\right) \\ &\rightarrow \frac{8\pi}{7}(n+N) + 2 = 2k\pi + \frac{8\pi n}{7} + 2 \rightarrow 8\pi n + 8\pi N + 14 = 14k\pi + 8\pi n + 14 \end{aligned}$$

کوچکترین دوره تناوب

$$\rightarrow 8\pi N = 14k\pi \rightarrow N = \frac{14k}{8} = \frac{7k}{4} \xrightarrow{(k=4)} N = 7$$

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n^2}{8}\right) \quad \text{(ب)}$$

حل: مانند حالت قبل عمل می‌کنیم

$$\cos\left(\frac{\pi(n+N)^2}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi n^2}{8}\right)$$



$$\rightarrow \frac{\pi(n+N)^2}{8} = 2k\pi + \frac{\pi n^2}{8} \rightarrow \frac{\pi N^2}{8} + \frac{2\pi n N}{8} = 2k\pi$$

به ازای n های متفاوت N متفاوت بدست می آید. پس $x[n]$ متناوب نیست.

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{\delta[n-3m] - \delta[n-1-3m]\} \quad \text{ج}$$

حل: باز هم داریم

$$x[n+N] = x[n]$$

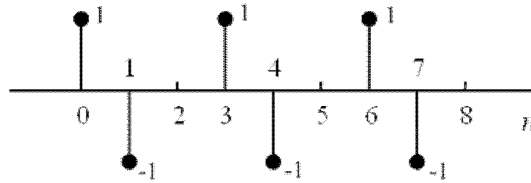
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \{\delta[n+N-3m] - \delta[n+N-1-3m]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{\delta[n-3k] - \delta[n-1-3k]\}$$

بنابراین

$$n+N-3m = n-3\left(m - \frac{N}{3}\right) = n-3k$$

$$n+N-3m-1 = n-1-3\left(m - \frac{N}{3}\right) = n-1-3k$$

به ازاء $N=3$ و $k=m-1$ حداقل دوره تناوب را داریم



شکل (۹۳-۱): دنباله متناوب مربوط به قسمت (ج) مثال (۳۹-۱)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(t-3n)^2} \quad \text{د}$$

حل: این سیگنال متناوب نیست چون:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(t-3n)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-9n^2} e^{6nt} = e^{-t^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-9n^2} e^{6nt}$$

$$x(t+T) = e^{-(t+T)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-9n^2} e^{6n(t+T)} \neq e^{-t^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-9n^2} e^{6nt}$$

$$\delta(2t) = \frac{1}{2} \delta(t) \quad \text{مثال (۴۰-۱): ثابت کنید}$$

حل: می دانیم اگر

$$g(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

در آن صورت داریم:

$$g(kt) = \frac{1}{k} \cdot \frac{df(kt)}{dt} = \frac{df(kt)}{d(kt)}$$

بنابراین

$$\delta(kt) = \frac{1}{k} \frac{du(kt)}{dt}$$

از طرفی می‌دانیم اگر k مثبت باشد

$$\begin{aligned} u(kt) &= u(t) \\ \rightarrow \frac{du(kt)}{dt} &= \frac{du(t)}{dt} \rightarrow \delta(kt) = \frac{1}{k} \delta(t) \end{aligned}$$

و اگر k منفی باشد داریم

$$\delta(kt) = \frac{1}{|k|} \delta(t)$$

مثال (۱-۴۱): سیستم‌های مشخص شده را از لحاظ خواص خطی بودن، متغیر با زمان بودن، پایداری، حافظه دار بودن و نیز علیت مورد بررسی قرار دهید.

$$y(t) = e^{x(t)} = F(x) \quad \text{الف}$$

بررسی خطی بودن:

$$f(a_1x_1 + a_2x_2) = e^{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)} \neq a_1f(x_1) + a_2f(x_2)$$

پس خطی نیست.

بررسی تغییرناپذیری با زمان:

$$y(t+T) = e^{x(t+T)} = F[x(t+T)]$$

پس تغییرناپذیر با زمان است.

بررسی پایداری:

$$y = e^x \text{ پایدار است چون تا وقتی که } x \text{ محدود است، } y \text{ هم محدود می‌ماند.}$$

بررسی حافظه دار بودن:

تابع فوق دارای حافظه نیست، چون مقدار y فقط بستگی به مقدار فعلی x دارد.

$$y[n] = x[n].x[n-1] = f(x) \quad \text{ب}$$

حل: بررسی خطی بودن:

$$\begin{aligned} f(a_1x_1[n] + a_2x_2[n]) &= \{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} \times \{a_1x_1[n-1] + a_2x_2[n-1]\} \\ &\neq f(a_1x_1[n]) + f(a_2x_2[n]) = a_1x_1[n].x_1[n-1] + a_2x_2[n].x_2[n-1] \end{aligned}$$

پس خطی نمی‌باشد.

بررسی تغییرناپذیری با زمان:

باید

$$\begin{aligned} y[n] &= f(x[n]) \rightarrow y[n-\tau] = f(x[n-\tau]) \\ y[n-\tau] &= x[n-\tau].x[n-\tau-1] = f(x[n-\tau]) \end{aligned}$$

پس تغییرناپذیر با زمان است.

واضح است که این سیستم دارای حافظه است، چون مقدار خروجی در هر لحظه به ورودی در یک لحظه قبل بستگی دارد.

این سیستم پایدار است.

$$y(t) = (\sin 6t).x(t) = F(x) \quad \text{ج}$$

بررسی خطی بودن:

$$\begin{aligned} F(a_1x_1(t) + a_2x_2(t)) &= (\sin 6t)(a_1x_1(t) + a_2x_2(t)) \\ &= a_1 \sin 6t.x_1(t) + a_2 \sin 6t.x_2(t) = a_1F(x_1(t)) + a_2F(x_2(t)) \end{aligned}$$

پس خطی است.

بررسی تغییرپذیری بازمان:

$$y(t - \tau) = \sin 6(t - \tau).x(t - \tau) \neq F[x(t - \tau)] = \sin 6t.x(t - \tau)$$

پس تغییرپذیر بازمان می باشد.

دارای حافظه نمی باشد و پایدار است.

$$y[n] = \sum_{k=n-2}^{n+4} x[k] = f[x[n]] \quad \text{د}$$

بررسی خطی بودن:

$$\begin{aligned} f(a_1x_1[n] + a_2x_2[n]) &= \sum_{k=n-2}^{n+4} (a_1x_1[k] + a_2x_2[k]) \\ &= a_1 \sum_{k=n-2}^{n+4} x_1[k] + a_2 \sum_{k=n-2}^{n+4} x_2[k] = a_1f(x_1[n]) + a_2f(x_2[n]) \end{aligned}$$

لذا خطی است.

بررسی تغییرناپذیری بازمان:

$$\begin{aligned} y[n - N] &= \sum_{k=n-N-2}^{n-N+4} x[k] = x[n - N - 2] + x[n - N - 1] \\ &+ \dots + x[n - N + 3] + x[n - N + 4] \\ f(x[n - N]) &= \sum_{k=n-2}^{n+4} x[k - N] = x[n - 2 - N] + x[n - 1 - N] + \dots + x[n - N + 4] \\ \rightarrow y[n - N] &= f(x[n - N]) \end{aligned}$$

و لذا غیر متغیر بازمان است. دارای حافظه است و پایدار نیز می باشد.

مثال (۴۲-۱): فرض کنید $x(t)$ و $y(t)$ دو سیگنال متناوب با پریودهای T_1 و $T_2 \leq T_1$ باشند. تحت چه شرایطی مجموع این دو سیگنال نیز خود یک سیگنال متناوب خواهد شد و پریود آن را حساب کنید.

حل: شرط اینکه $f(t) = x(t) + y(t)$ نیز متناوب باشد اینست که

$$\begin{cases} x(t + T_1) = x(t) \\ y(t + T_2) = y(t) \end{cases} \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{r} \quad : (p, r \in \mathbb{Z})$$

و \mathbb{Z} مجموعه اعداد صحیح است. بنابراین اگر p و r برهم بخش پذیر نباشند، داریم:

$$f(t + pT_2) = x(t + pT_2) + y(t + pT_2)$$

$$= x(t + rT_1) + y(t) = x(t) + y(t) \rightarrow f(t + pT_2) = f(t)$$

و دوره تناوب f برابر است با

$$T = pT_2 = rT_1$$

مثال (۱-۴۳): خواص سیستمی که رابطه ورودی و خروجی آن بصورت زیر است را بررسی کنید.

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) = f(x)$$

حل: بعدها خواهیم دید که این سیستم یک سیستم نمونه برداری است. شرط خطی بودن

$$y = f(x) \rightarrow f(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1f(x_1) + a_2f(x_2)$$

$$a_1x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_1x_1(t)\delta(t - nT) = a_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t)\delta(t - nT) = a_1f(x_1)$$

$$a_2x_2(t) = a_2f(x_2)$$

$$f(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1f(x_1) + a_2f(x_2)$$

$$f(a_1x_1 + a_2x_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_1x_1 + a_2x_2)\delta(t - nT)$$

$$= a_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1\delta(t - nT) + a_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2\delta(t - nT)$$

پس نتیجه می‌گیریم خطی است.

بررسی غیر متغیر با زمان بودن:

$$f(x(t - \tau)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - \tau)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT - \tau)\delta(t - nT)$$

$$y(t - \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - \tau)\delta(t - \tau - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - \tau - nT)$$

پس این سیستم در حالت کلی متغیر با زمان است.

مثال (۱-۴۴): تابع همبستگی میان دو سیگنال بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\phi_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau)x(\tau)d\tau$$

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau)y(\tau)d\tau$$

مطلوبست رابطه $\phi_{yx}(t)$ با $\phi_{xy}(t)$ و همچنین محاسبه قسمت فرد $\phi_{xx}(t)$ و $\phi_{yx}(t)$. اگر $y(t) = x(t + T)$ باشد.

حل: با توجه به روابط داده شده، می‌توان $\phi_{yx}(t)$ را بدست آورد.

$$\phi_{yx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t + \tau)x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(u)x(u - t)du = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)x(\tau - t)d\tau = \phi_{xy}(-t)$$

بنابراین $\phi_{yx}(t)$ و $\phi_{xy}(t)$ با هم برابرند، یعنی

$$\phi_{yx}(t) = \phi_{xy}(-t)$$

و این نتیجه مستقل از ارتباط $x(t)$ و $y(t)$ است.

اکنون محاسبه قسمت فرد $\phi_{xx}(t)$:

$$\begin{aligned}
\text{odd}[\phi_{xx}(t)] &= \frac{1}{2}[\phi_{xx}(t) - \phi_{xx}(-t)] \\
&= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} x(-t+\tau)x(\tau)d\tau \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} [x(\tau+t) - x(\tau-t)]x(\tau)d\tau \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\frac{1}{2}[x(t+\tau) - x(-t+\tau)] \right] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \text{ odd}[x(t+\tau)] d\tau = \phi_{xx_0}(t)
\end{aligned}$$

که در آن

$$x_o(t) = \text{od}[x(t)] = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

اکنون محاسبه $\phi_{yx}(t)$ ، با فرض $y(t) = x(t+T)$ رابطه همبستگی بصورت زیر در می‌آید

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x(\tau+T)d\tau$$

نتیجه می‌گیریم

$$\phi_{xy}(t+T) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau+T)x(\tau+T) d\tau$$

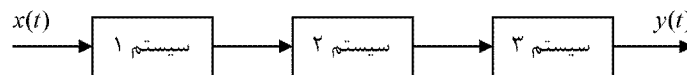
و چون

$$\phi_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x(\tau)d\tau$$

و یا

$$\phi_{xy}(t+T) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+u)x(u)du = \phi_{xx}(t)$$

مثال (۱-۴۵): آیا سیستمی متشکل از سه سیستم خطی و غیر متغیر بازمان که بصورت سری به هم متصل شده‌اند یک سیستم خطی و غیر متغیر بازمان می‌باشد.



شکل (۱-۹۴): ترکیب متوالی سه سیستم مربوط به مثال (۱-۴۵)

حل: ضابطه سیستم اول و دوم و سوم را بترتیب زیر در نظر می‌گیریم.

سیستم سوم $y = h(x)$ ، سیستم دوم $y = g(x)$ و سیستم اول $y = f(x)$.

خروجی سیستم کلی به ازای ورودی x_1

$$y_1 = h\{g[f(x_1)]\}$$

خروجی سیستم کلی به ازای ورودی x_2

$$y_2 = h\{g[f(x_2)]\}$$

خروجی سیستم کلی به ازای ورودی $ax_1 + bx_2$

$$y_3 = h\{g[f(ax_1 + bx_2)]\}$$

اما چون f خطی است

$$f(ax_1 + bx_2) = af(x_1) + bf(x_2)$$

نتیجتاً داریم

$$y_3 = h\{g[af(x_1) + bf(x_2)]\}$$

هم چنین چون g نیز خطی است، داریم

$$y_3 = h\{ag[f(x_1)]\} + hg\{bf(x_2)\}$$

و نهایتاً چون h نیز خطی است، داریم

$$y_3 = ah\{g[f(x_1)]\} + bh\{g[f(x_2)]\}$$

که این برابر است با

$$y_3 = ay_1 + by_2$$

پس سیستم خطی است. این مطلب را می‌توان برای N ورودی نیز تحقیق کرد. همچنین به سادگی می‌توان تحقیق کرد که سیستم متشکل از تعدادی سیستم غیر متغیر با زمان خود نیز غیرمتغیر با زمان است. مثال (۱-۴۶): اگر سیستمی فقط دارای خاصیت جمع‌پذیری باشد. آنرا سیستم جمع‌پذیر گویند و خروجی آن به ورودی $x_1 + x_2$ مساوی مجموع تک تک پاسخ‌ها است و اگر سیستمی فقط دارای خاصیت همگنی باشد، آنرا سیستم همگن گویند و خروجی آن به ورودی ax مساوی ay می‌باشد. در این مثال، چهار سیگنال زیر را از لحاظ همگنی یا جمع‌پذیر بودن بررسی کنید.

$$y[n] = \Re\{x[n]\} \quad \text{(الف)}$$

$$y(t) = \frac{1}{x(t)} \left[\frac{dx(t)}{dt} \right]^2 \quad \text{(ب)}$$

$$y[n] = \begin{cases} \frac{x[n]x[n-2]}{x[n-1]}, & x[n-1] \neq 0 \\ 0, & x[n-1] = 0 \end{cases} \quad \text{(ج)}$$

حل: الف) واضح است که در حالت کلی که a یا b مختلط باشند سیستم همگن نیست. اما اگر a و b حقیقی باشند داریم:

$$\begin{aligned} f(ax_1 + bx_2) &= \Re\{ax_1[n] + bx_2[n]\} \\ &= a\Re\{x_1[n]\} + b\Re\{x_2[n]\} \\ &= af[x_1] + bf[x_2] \end{aligned}$$

بنابراین، در حالت فرض سیستم نهایتاً خطی می‌شود (هم همگن و هم جمع‌پذیر). در غیر این صورت سیستم فقط جمع‌پذیر است.

(ب)

$$y(t) = \frac{1}{x(t)} \left[\frac{dx(t)}{dt} \right]^2 = f(x)$$

$$f(ax_1 + bx_2) = \frac{1}{ax_1 + bx_2} \left[\frac{ad(ax_1 + bx_2)}{dt} \right]^2 = \frac{1}{ax_1 + bx_2} \left[a \frac{dx_1}{dt} + b \frac{dx_2}{dt} \right]^2$$

سیستم غیر خطی، ولی همگن است. زیرا

$$f(ax) = \frac{1}{ax} \left[\frac{d(ax)}{dt} \right]^2 = \frac{1}{ax} a^2 \left[\frac{dx}{dt} \right]^2$$

$$= a \times \frac{1}{x} \left[\frac{dx}{dt} \right]^2 = af(x)$$

(ج)

$$y[n] = \begin{cases} \frac{x[n]x[n-2]}{x[n-1]} & x[n-1] \neq 0 \\ 0 & x[n-1] = 0 \end{cases}$$

شرط خطی بودن را تحقیق می‌کنیم

$$f[ax_1 + bx_2] = \frac{(ax_1[n] + bx_2[n])(ax_1[n-2] + bx_2[n-2])}{ax_1[n-1] + bx_2[n-1]}$$

دیده می‌شود سیستم خطی نیست ولی همگن است، چون

$$f(ax_1) = \frac{ax_1[n].ax_1[n-2]}{ax_1[n-1]} = \frac{ax_1[n].x_1[n-2]}{ax_1[n-1]} = af(x_1)$$

۱۳-۱ خلاصه

در این فصل، علاوه بر معرفی سیگنال به عنوان ابزار تحلیل سیستم و معرفی و بررسی برخی سیگنال‌های مهم، به برخی خواص مهم سیستم‌ها که از لحاظ تحلیل عملکرد سیستم حائز اهمیت هستند، اشاره شد. خواص مطرح شده در این فصل به هر دو دسته سیستم‌های پیوسته و گسسته زمانی قابل تعمیم هستند (اگر چه ما در هر حالت، خاصیت مورد نظر را فقط برای یک دسته بررسی کردیم).

خواصی که در اینجا برای سیستم‌ها ارائه کردیم، برای هر سیستم قابل اثبات یا نفی است. به عبارت دیگر کلیه سیستم‌ها یا این خواص را دارند و یا ندارند و هرگز نمی‌توان سیستمی یافت که در مورد نفی یا اثبات خواص فوق، در مورد آن نتوان نظر داد. البته در حالت کلی ایجاد یک تحلیل ریاضی دقیق برای کلیه سیستم‌ها بسیار مشکل و گاهی غیرممکن است. به همین دلیل، در این کتاب به عنوان اولین قدم در تحلیل سیستم‌ها، فقط به تحلیل سیستم‌های خطی و نا متغیر با زمان می‌پردازیم و فقط در چند مورد به سیستم‌های غیر خطی یا متغیر با زمان اشاره خواهیم کرد و عملکرد آنها را بررسی خواهیم کرد. در اینجا لازم به ذکر است که به طور کلی منظور از تحلیل سیستم، یافتن خواص آن و بررسی پاسخ سیستم به یک ورودی معلوم می‌باشد.

۱۴-۱ مسائل

۱-۱ برای دنباله نمایش داده شده، مطلوب‌بست رسم دنباله‌های زیر

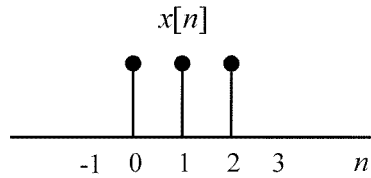
الف) $x[n-2]$

ب) $x[4-n]$

ج) $x[2n]$

د) $x[n^2]$

هـ) $\frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}(-1)^n x[n]$



شکل (۹۵-۱): شکل مربوط به تمرین ۱-۱

۲-۱ برای سیگنال رسم شده مطلوبست رسم سیگنال‌های زیر

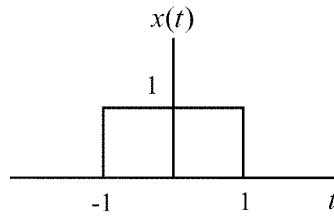
الف) $x(2t-4)$

ب) $x(1-t)$

ج) $x^2(t)$

د) $x(t^2)$

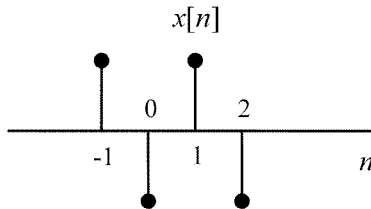
هـ) $tx(t^2)$



شکل (۹۶-۱): شکل مربوط به تمرین ۲-۱

۳-۱ حاصلضرب دنباله‌های زیر را بیابید. $(x[n], h[n])$

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta[n-k]$$



شکل (۹۷-۱): شکل مربوط به تمرین ۳-۱

۴-۱ دوره تناوب سیگنال‌های زیر را بیابید.

الف) $\cos \omega_0 t + \cos \omega_1 t$

ب) $e^{\sin \omega_0 t}$

ج) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-2k]$

د) $e^{jm\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$

۵-۱ آیا حاصلضرب دو سیگنال متناوب در حالت کلی متناوب است؟ این مطلب در مورد دنباله‌ها چگونه است؟

۶-۱ قسمت‌های زوج و فرد دنباله‌های زیر را بیابید.

$$x[n] = (-1)^n \{u[n+4] - u[n-4]\}$$

$$x[n] = \cos \Omega_0 n \{u[n] - u[n-4]\}$$

۷-۱ قسمت‌های زوج و فرد سیگنال‌های زیر را بیابید.

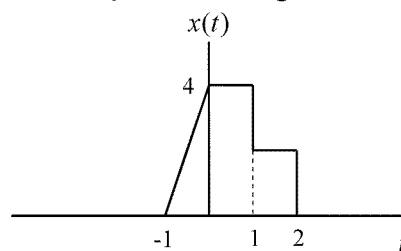
$$x(t) = e^t \cos(t) \{u(t) - u(t-3)\}$$

$$x(t) = \ln(t) \{u(t) - u(t-T)\} \quad , \quad \text{عدد ثابت } T$$

$$x(t) = \begin{cases} \ln(t^2 \cos t) & , -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$$

۸-۱ آیا با دانستن فقط قسمت زوج و یا فقط قسمت فرد یک سیگنال یا دنباله می‌توان سیگنال یا دنباله را بازسازی کرد؟ اگر می‌شود در چه حالت؟

۹-۱ ضابطه سیگنال زیر را یافته و قسمت‌های زوج و فرد آنرا مشخص کنید.



شکل (۹۸-۱): شکل مربوط به تمرین ۹-۱

۱۰-۱ اگر سیگنال مسئله (۹-۱) به سیستمی با ضابطه زیر اعمال شود خروجی سیستم را بیابید.

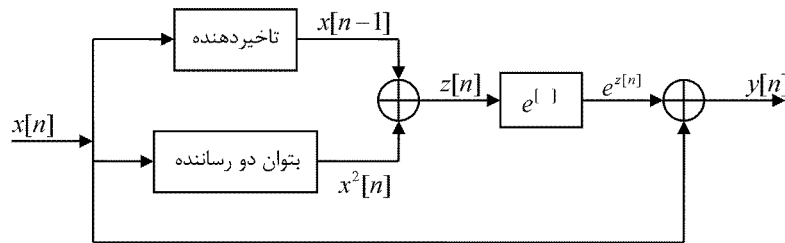
$$y(t) = e^{x(t)} x(t)$$

۱۱-۱ توضیح دهید آیا با انجام یک آزمایش یعنی اعمال یک ورودی خاص به یک سیستم و مشاهده خروجی می‌توان بطور یکتا ضابطه سیستم را بدست آورد؟ در صورت منفی بودن پاسخ آیا افزایش تعداد آزمایشات کمکی می‌کند؟

۱۲-۱ برای شناخت ضابطه یک سیستم خطی غیر متغیر با زمان انجام حداقل چند آزمایش ضروری است؟

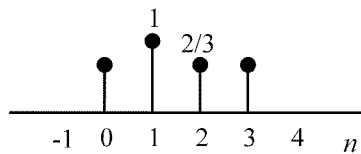
۱۳-۱ آیا معکوس یک سیستم علی و پایدار لزوماً و علی و پایدار است؟

۱۴-۱ سیستمی شامل چند جزء بصورت زیر در دسترس است



شکل (۹۹-۱): شکل مربوط به تمرین ۱۴-۱

مطلوبست $y[n]$ اگر $x[n]$ بصورت زیر باشد



شکل (۱۰۰-۱): شکل مربوط به تمرین ۱۴-۱

۱۵-۱ یک سیستم خطی دارای این خاصیت است که پاسخ آن به ورودی بصورت t^k برابر $\cos(kt)$ است، یعنی:

$$T[t^k] = \cos kt$$

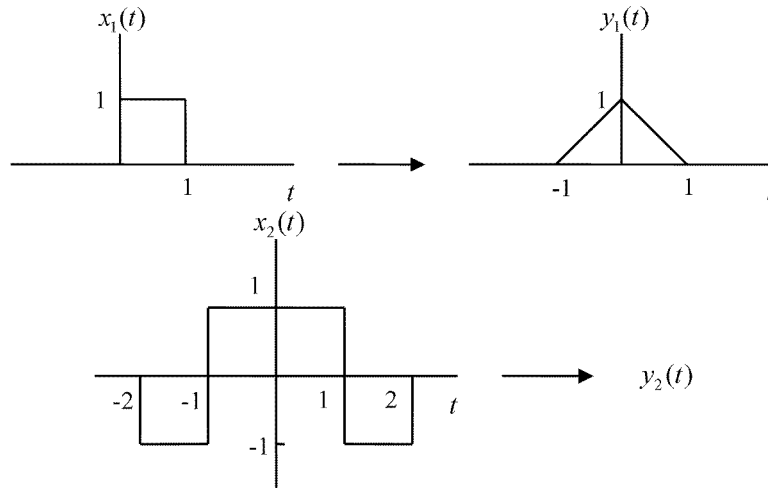
مطلوبست محاسبه پاسخ این سیستم به ورودی‌های زیر

$$x_1(t) = \sqrt{5} + 2t^2 + t^5$$

$$x_2(t) = e^{2t}$$

$$x_3(t) = \cos 4t$$

۱۶-۱ بر روی یک سیستم خطی و غیر متغیر با زمان، یک آزمایش انجام گرفته و مشاهده شده است که اگر ورودی این سیستم $x_1(t)$ باشد، خروجی $y_1(t)$ است (به شکل‌ها توجه کنید) مطلوبست پاسخ سیستم به ورودی $x_2(t)$.



شکل (۱-۱): شکل مربوط به تمرین ۱۶-۱

۱۷-۱ کدامیک از سیستم‌های زیر معکوس پذیرند سایر خواص این سیستم‌ها را مورد بررسی قرار دهید.

الف) $y(t) = x(t - 4)$

ب) $y(t) = \cos[x(t)]$

ج) $y(t) = tx(t)$

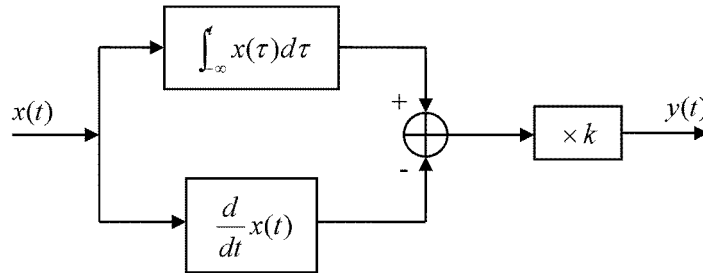
د) $y[n] = x[2n]$

ه) $y[n] = \begin{cases} x[n+1] & , n \geq 0 \\ x[n] & , n \leq -1 \end{cases}$

و) $y[n] = x[n]x[n-1]$

ز) $y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau$

۱۸-۱ خروجی سیستم زیر را بر حسب ورودی بنویسید و خواص آن را بررسی کنید.



شکل (۱۰۲-۱): شکل مربوط به تمرین ۱۸-۱

۱۹-۱ کدامیک از سیستم‌های زیر خطی‌اند؟ سایر خواص این سیستم‌ها را مورد بررسی قرار دهید که در آن a و b اعداد ثابتی هستند.

الف) $\frac{dy(t)}{dt} = a_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_1 x(t)$

ب) $y(t) = x(t) + \int_{-\infty}^t x^2(t) dt$

ج) $e^{y(t)} = \text{Cos}[x(t)]$

۲۰-۱ خواص سیستم‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\text{Ln}(x(t)) = \frac{dy(t)}{dt}$

ب) $x^2(t) = y(t-1)$

ج) $y[n] = y[n-1] + \sum_{k=-\infty}^n x[k]$

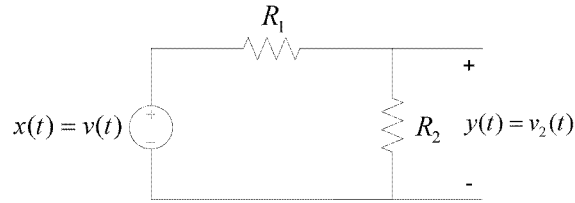
۲۱-۱ آیا معکوس یک سیستم خطی و علی یک سیستم خطی و علی می‌باشد؟

۲۲-۱ ثابت کنید در یک سیستم خطی، اگر ورودی متحد با صفر باشد، خروجی نیز متحد با صفر است.

۲۳-۱ آیا خاصیت مطرح شده در مسئله (۲۲-۱) برای سیستم‌های خطی تکه‌ای نیز صادق است؟

۲۴-۱ آیا معکوس یک سیستم پایدار، در حالت کلی یک سیستم پایدار است؟

۲۵-۱ یک نمودار بلوکی برای مدار زیر رسم کنید ورودی ولتاژ منبع و خروجی ولتاژ مقاومت R_2 است.



شکل (۱۰۳-۱): شکل مربوط به تمرین ۲۵-۱

۲۶-۱ آیا سیستم زیر معکوس پذیر است؟

$$y[n] = \sum_{k=0}^n x[n-k]$$

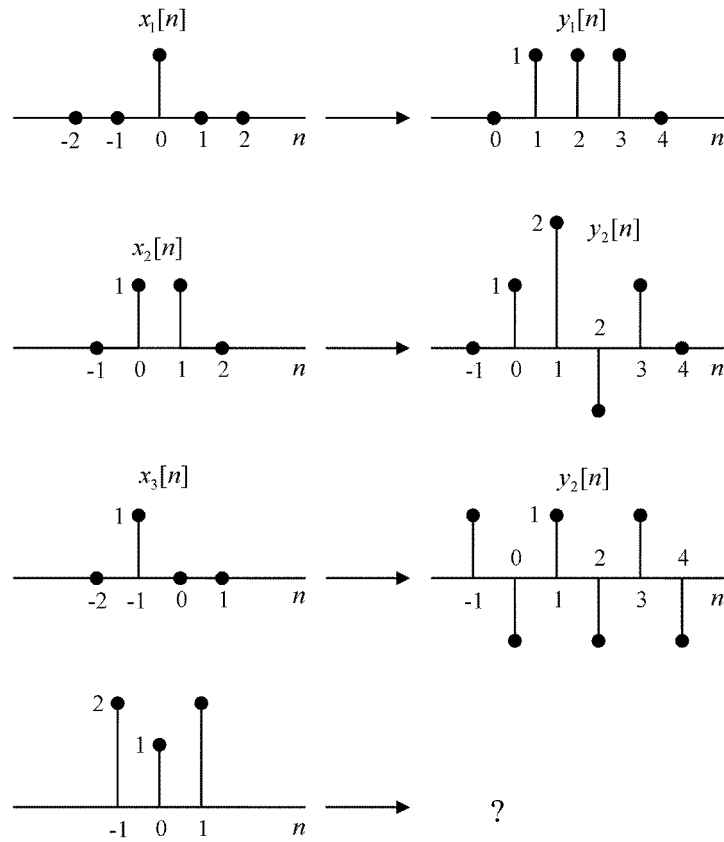
۲۷-۱ خواص سیستم زیر را بررسی کنید.

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-nT)$$

۲۸-۱ ثابت کنید که خاصیت علیت برای یک سیستم پیوسته زمان معادل است با عبارت زیر
 به ازاء هر ورودی دلخواه $x(t)$ ، اگر $x(t < t_0) = 0$ باشد، در آن صورت $y(t < t_0) = 0$ است.
 در جمله فوق $x(t)$ ورودی سیستم، t_0 یک زمان دلخواه و $y(t)$ پاسخ به ورودی $x(t)$ است. جمله فوق بطور
 یکسان برای سیستم گسسته زمان نیز مطرح است.

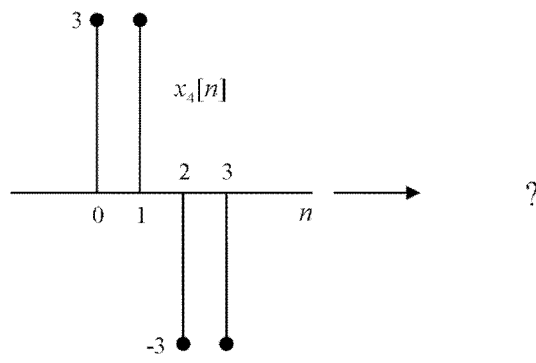
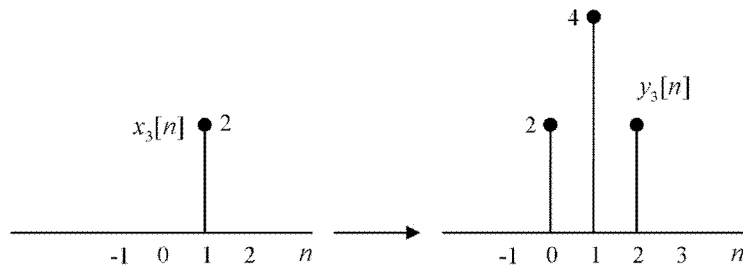
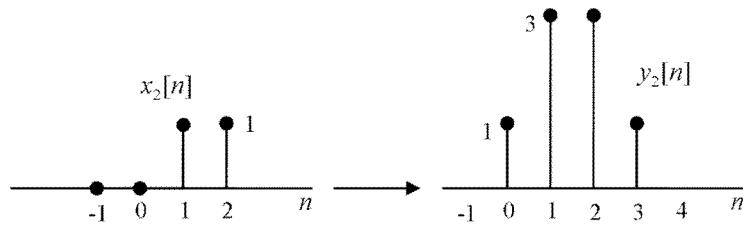
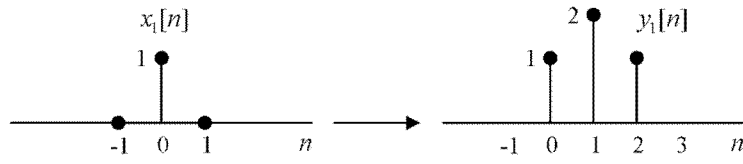
۲۹-۱ آیا عبارت مطرح شده در مسئله (۲۸-۱) برای سیستم‌های غیرخطی نیز صادق است؟ (یک مثال نقض
 بیاورید)

۳۰-۱ برای شناسایی یک سیستم گسسته زمان خطی (ولی احتمالاً متغیر با زمان) سه آزمایش بصورت زیر انجام
 شده است. یعنی سه ورودی به سیستم اعمال شده و خروجی آن مشاهده شده است. آیا این سیستم مستقل از
 زمان است؟ اگر ورودی بصورت $x[n]$ (نمایش داده شده) باشد، مطلوبست محاسبه خروجی.



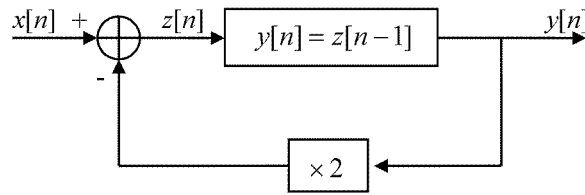
شکل (۱-۴): شکل مربوط به تمرین ۱-۳

۱-۳ برای شناسایی یک سیستم گسسته زمان مستقل از زمان (ولی احتمالاً غیرخطی) سه آزمایش بصورت زیر انجام شده است. یعنی سه ورودی به سیستم اعمال شده و خروجی آن مشاهده شده است. آیا این سیستم خطی است؟ اگر ورودی بصورت نمایش داده شده در شکل زیر باشد، مطلوبست محاسبه خروجی.



شکل (۱-۵): شکل مربوط به تمرین ۱-۳۱

۳۲-۱ یک سیستم پس‌خور بصورت زیر در دسترس است. فرض کنید $y[n] = 0$, $n < 0$.



شکل (۱۰۶-۱): شکل مربوط به تمرین ۳۲-۱

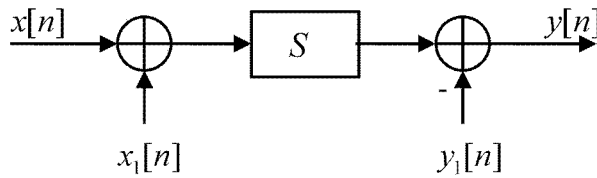
الف) مطلوبست پاسخ سیستم به ورودی $x[n] = \delta[n]$

ب) مطلوبست پاسخ سیستم به ورودی $x[n] = u[n]$

ج) آیا سیستم کلی خطی است؟

۳۳-۱ اگر S خطی تکه‌ای باشد، ثابت کنید سیستم زیر خطی است، با فرض اینکه $y_1[n]$ پاسخ سیستم خطی

S است به ورودی $x_1[n]$.



شکل (۱۰۷-۱): شکل مربوط به تمرین ۳۳-۱

فصل دوم

تحلیل سیستم‌های خطی نامتغیر با
زمان در حوزه زمان

مقدمه

در فصل یک با تعریف سیگنال و سیستم و همچنین با دسته‌بندی سیگنال‌ها و سپس با خواص عمومی سیستم‌ها آشنا شدیم. از جمله خواص سیستم‌ها دو خاصیت خطی (Linear) و نامتغیر بودن سیستم با زمان (Time-Invariant) است. سیستمی که دارای این دو خاصیت است را بطور خلاصه یک سیستم LTI می‌گوییم و تجزیه و تحلیل این نوع سیستم‌ها موضوع این کتاب است. واقعیت این است که سیستم‌های LTI تنها زیرمجموعه کوچکی از مجموعه سیستم‌ها به شمار می‌روند. اما علیرغم این حقیقت، سیستم‌های LTI فقط به خاطر سادگی تحلیل‌شان بسیار مورد علاقه مهندسين قرار گرفته‌اند. علاوه بر آن، مهندسين سیستم در برخی موارد سعی می‌کنند تا حد امکان عملکرد سیستم‌های غیرخطی را با ترکیبی از چند سیستم LTI تقریب بزنند تا از لحاظ تحلیل مساله را ساده‌تر نمایند و به اصطلاح مساله را تحلیل‌پذیر خطی نمایند.

ماهیت تغییرناپذیری یک سیستم با زمان نیز از جمله خواصی است که در عمل بندرت اتفاق می‌افتد. هر سیستم، اعم از اینکه بوسیله انسان، و یا ماشین‌آلات ساخته شده توسط انسان، تولید شده باشد و یا یک سیستم طبیعی باشد، یک مخلوق است. بنابراین هر سیستم به اعتبار اینکه یک مخلوق است و زمان یکی از ابعاد آن به شمار می‌رود، بالاخره ماهیتش دستخوش تغییر و تحول است. به عبارت دیگر زمان در عملکرد هر سیستم یک عامل تعیین‌کننده به حساب می‌آید. مفهوم مطلق ساخت یک سیستم مستقل از زمان به دلایل فلسفی و همچنین بدلائل علمی و عملی غیرممکن است و به هر حال هر سیستم تابعی از زمان است. زیرا هر سیستم روزی خلق و بالاخره روزی هم از بین می‌رود که این نشان متغیر بودن سیستم با گذشت زمان است، اگرچه این تغییرات به گندی و آرامی خود را ظاهر کند. با وجودی که هر سیستمی متغیر با زمان است ولی میتوان در مدت معقولى از زمان، که این مدت بستگی به نوع سیستم دارد، مشخصات سیستم را تقریباً ثابت فرض کرد و آن را یک سیستم نامتغیر با زمان پنداشت. بنابراین، باید توجه کرد که تفاوت زیادی میان آنچه که قلم به عنوان یک سیستم LTI روی صفحه کاغذ و بصورت یک بلوک چهارگوش در کتاب می‌نگارد و تحقق واقعی آن وجود دارد. بعنوان مثال، مقدار یک مقاومت ساده که باید ظاهراً مقداری ثابت باشد، توسط کارخانه سازنده به صورت جمع یک مقدار ثابت و همچنین یک مقدار خطا ارائه می‌شود. این عدم قطعیت در بیان مقدار دقیق مقاومت‌های تولیدی کارخانجات سازنده بیانگر این واقعیت است که این سیستم ساده که قبلاً به عنوان سیستم ضرب و تقسیم‌کننده معرفی شد در حقیقت و در جهان خارج یک سیستم با مشخصات متغیر با زمان و مکان و پارامترهای ناشناخته مختلف دیگر از قبیل عوامل زیست محیطی است. از عواملی که در تعیین مقدار حقیقی یک مقاومت دخالت دارند می‌توان به رطوبت هوا و گرما اشاره کرد و اینها فقط برخی از مجموعه عوامل موثر و تعیین کننده بر عملکرد یک مقاومت ساده می‌باشند. از طرف دیگر فقط در محدوده خاصی از دامنه ورودی این مقاومت بصورت یک سیستم ضرب یا تقسیم‌کننده عمل می‌کند و اگر دامنه ورودی از یک حد بیشتر شود امکان تغییر ماهیت (مثلاً مشاهده پدیده

سوختن) وجود دارد و سیستم خاصیت غیرخطی از خود نشان می‌دهد. بنابراین اگر واقع‌بینانه به جهان خارج نگاه کنیم امکان شناسائی یک سیستم ایده‌آل LTI بسیار مشکل است. یکی از سیستم‌های معروف غیر LTI، انسان است. برخوردهای چندگانه یک نفر با یک رویداد بیانگر ماهیت متغیر با زمان این سیستم است. این ماهیت متأثر از عوامل بسیاری است که نه تنها ماهیت دقیق این عوامل بلکه حتی اثرات هر یک از آن‌ها کاملاً شناخته شده نیست. **خداوند متعال نیز در قرآن کریم یک سیر تکاملی و صعودی را برای انسان از لحاظ قدرت جسمی ذکر فرموده است که این سیر تا میانسالی ادامه پیدا میکند. پس از دوره میانسالی، سیر نزولی قدرت جسمانی شروع می‌شود و تا پیری و نهایتاً مرگ جسمانی، این سیر ادامه پیدا می‌کند.**

بنابر این، در عبارات فوق، نوعی تابعیت زمانی برای جسم و قدرت جسمی انسان مشاهده می‌شود. در مورد سیستم‌های ساخت بشر نیز به تبع خود بشر، نوعی ماهیت تابعیت از زمان مشاهده می‌شود. اما به هر حال همانگونه که اشاره شد در محدوده خاصی از زمان و مقادیر ورودی، می‌توان عملکرد برخی سیستم‌ها را بصورت سیستم‌های LTI شبیه‌سازی کرد. این حقیقت ما را رهنمون می‌سازد تا سطح معلومات خود را در تجزیه و تحلیل سیستم‌های LTI بالا برده و این سیستم‌ها را که اتفاقاً ساده‌ترین نوع سیستم‌ها از لحاظ تحلیل هستند بیشتر مورد توجه قرار دهیم. در اینجا تذکر این نکته ضروری است که بحث ما در این کتاب فقط به سیستم‌های تک ورودی و تک خروجی^۱ اختصاص دارد. در اغلب موارد سیستم‌های مورد مطالعه درحقیقت سیستم‌های چند ورودی و چند خروجی^۲ هستند. درحقیقت از بعد علمی و همینطور فلسفی تمامی موجودات در عملکرد یکدیگر موثر هستند، اگر چه مکانیزم این تاثیرات برای ما کاملاً شناخته شده نباشد. هم‌چنین قوانین ثابتی (حداقل در محدوده شرایط خاص) بر بسیاری یا همه موجودات حاکم است. به عنوان یک مثال ساده، بالاخره هر سیستمی دارای جرمی است و تحت تاثیر قانون جاذبه عمومی کلیه اجرام در جهان هستی می‌باشد. البته این تاثیر از نوع شناخته شده آن در جهان است. البته از تاثیر بسیاری از اجرام بر جرمی که در فاصله بسیار دوری از آن قرار گرفته‌اند می‌توان صرف‌نظر کرد. در نتیجه تعداد ورودی‌های سیستم کاهش می‌یابد. تاثیرات متعدد دیگری بین موجودات هستی وجود دارد که اغلب آنها ناشناخته هستند و همگی می‌توانند منشا تغییر در عملکرد سیستم و اختلاف پیش بینی ما با واقعیت گردند. اگر در جایی مشاهده می‌کنیم که علی‌رغم دقت فوق‌العاده ما در مدلسازی یک سیستم، هنوز خروجی سیستم قابل پیش بینی نیست و یا خروجی‌های سیستم به ورودی‌های یکسان متفاوت است، به خاطر عدم شناخت دقیق ما از مکانیزم این تاثیرات و دامنه آنها است.

از تعابیر فلسفی که بگذریم در یک سیستم با تعداد دلخواه ورودی و خروجی ارتباط یک خروجی دلخواه با برخی از ورودی‌ها می‌تواند خطی و یا غیر خطی باشد. اگر ارتباط مهمترین خروجی سیستم،

¹ Single Input Single Output (SISO)

² Multi Input Multi Output (MIMO)

از نقطه نظر ما، با مهمترین و تعیین کننده ترین ورودی، خطی و غیرمتغیربازمان باشد، منطقی است و مجاز هستیم که یک برداشت LTI از سیستم مورد نظر ارائه کنیم.

علت اصلی ساده شدن تحلیل در این گونه سیستم‌ها، استفاده از پاسخ سیستم به تابع ضربه است. ما با یافتن پاسخ سیستم به تابع ضربه، که آن را **پاسخ به ضربه** (و یا بطور کوتاه پاسخ ضربه) می‌نامیم، می‌توانیم پاسخ به هر ورودی دیگر را بدست آوریم. این کار با کانولوشن پاسخ ضربه سیستم و سیگنال ورودی بدست می‌آید. بنابراین، عمده‌ترین بخش تحلیل سیستم‌های LTI عبارت از یافتن پاسخ ضربه آن سیستم است. با معلوم بودن پاسخ ضربه سیستم و کانولوشن آن با سیگنال ورودی، سیگنال خروجی بدست می‌آید. روش کانولوشن جهت یافتن پاسخ به ورودی دلخواه در این فصل مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

تذکر این نکته ضروری است که پاسخ ضربه تنها راه یافتن پاسخ سیستم LTI به ورودی دلخواه نیست. بلکه می‌توان ورودی را به مجموعه وزن‌دهی شده‌ای از هر نوع سیگنال‌های پایه یا ویژه دیگر که از لحاظ تحلیل ساده است بسط داد (مثلاً توابع سینوسی یا نمایی) و بعد با یافتن پاسخ سیستم به یکی از این سیگنال‌های پایه، می‌توان پاسخ سیستم به هر نوع ورودی دیگری را بدست آورد. بعنوان مثال اگر ورودی قابل بسط بصورت زیر باشد:

$$x(t) = \sum a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (1-2)$$

(مسلماً در این صورت ورودی متناوب خواهد بود) اگر پاسخ به ورودی $\exp(jk\omega_0 t)$ را برابر $G(k\omega_0 t)$ بنامیم، در اینصورت پاسخ سیستم به هر ورودی دلخواه، که قابل بیان به صورت (1-2) باشد، توسط رابطه (2-2) بیان می‌گردد:

$$y(t) = \sum a_k G(k\omega_0 t) \quad (2-2)$$

خاصیتی که توابع پایه باید داشته باشند این است که هم قابلیت توصیف هر سیگنالی و یا اکثر سیگنال‌های مهم را داشته باشند و هم پاسخ سیستم LTI به آن توابع به سادگی بدست آید. در میان توابع پایه مختلف تابع ضربه از همه ساده‌تر است، و کلیه خواص یک تابع پایه خوب را نیز دارا است. به همین خاطر در این فصل ابتدا به بررسی و تجزیه و تحلیل سیستم‌های LTI به کمک تابع ضربه (از طریق یافتن پاسخ ضربه) می‌پردازیم و در فصل‌های بعدی به بررسی کلی سیستم‌های LTI و ارائه توابع پایه جدید می‌پردازیم.

۱-۲ بسط سیگنال برحسب توابع ضربه

۱-۱-۲ بسط سیگنال گسسته زمان برحسب توابع ضربه

همانگونه که اشاره شد قدم اصلی در تجزیه و تحلیل سیستم‌های LTI در حوزه زمان (به مفهوم یافتن پاسخ سیستم به هر ورودی دلخواه) بسط دادن ورودی برحسب توابع ضربه است و پس از آن با محاسبه پاسخ به یک تابع پایه (یا همان پاسخ ضربه) و با توجه به خاصیت LTI بودن سیستم می‌توان پاسخ

سیستم به هر ورودی دلخواه را یافت. در این قسمت بخاطر سادگی ابتدا توجه خود را به سیستم‌های گسسته زمانی معطوف می‌کنیم و یک رابطه بسط برای یک دنباله دلخواه ورودی بصورت $x[n]$ ، برحسب توابع ضربه انتقال یافته $\delta[n-k]$ ارائه می‌کنیم. به دنباله دلخواه $x[n]$ در شکل (۲-۱-۲) توجه کنید. این دنباله را می‌توان متشکل از یک رشته ضربه انتقال یافته و وزن‌دهی شده بیان کرد. بعنوان مثال ضربه‌های این دنباله را که به ترتیب در $n = -2, n = -1, n = 0, n = 1, n = 2$ قرار دارند در شکل‌های (۲-۱-۲) الی (۲-۱-۶) مشاهده می‌کنید. این ضربه‌های انتقال یافته و وزن‌دهی شده، قابل توصیف برحسب توابع ضربه ومقدار دنباله در هر نقطه هستند. بعنوان مثال ضربه‌های موجود در $n = -1, n = 0, n = 1$ بترتیب بصورت ریاضی زیر قابل بیان هستند.

$$x[-1]\delta[n+1] = \begin{cases} x[-1] & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

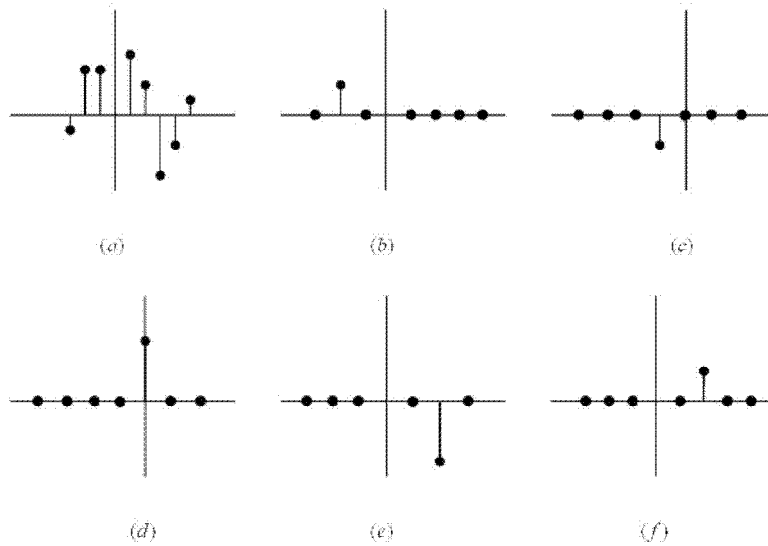
$$x[0]\delta[n] = \begin{cases} x[0] & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$x[1]\delta[n-1] = \begin{cases} x[1] & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

=

بنابراین $x[n]$ به صورت مجموع جملات توابع ضربه چنین می‌شود:

$$x[n] = \dots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \dots$$



شکل (۲-۱): تجزیه سیگنال‌های گسسته زمان بصورت مجموع توابع ضربه انتقال یافته و وزن

شده

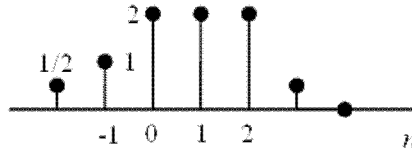
پس در حالت کلی داریم

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k] \quad (3-2)$$

رابطه (3-2) بسط سیگنال دلخواه $x[n]$ برحسب ترکیب خطی توابع ضربه انتقال یافته بصورت $\delta[n-k]$ می‌باشد که سنگینی هر عبارت مساوی $x[k]$ است. بنابراین به عنوان مثال برای $x[n] = u[n]$ داریم

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k]$$

مثال (1-2): مطلوبست رابطه بسط دنباله زیر برحسب توابع ضربه.



حل: وزن ضربه منتقل شده $\delta[n-k]$ توسط مقدار $x[n]$ در همان نقطه $n=k$ تعیین می‌شود بنابراین داریم

$$x[n] = (1/2)\delta[n+2] + \delta[n+1] + 2\delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + (1/2)\delta[n-3]$$

مثال (2-2): با توجه به رابطه بسط تابع پله برحسب توابع ضربه، دنباله مثال (1-2) را برحسب توابع پله بسط دهید.

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k] \quad \text{حل: داریم}$$

بنابراین می‌توان یک ضربه را برحسب توابع پله بصورت زیر نوشت

$$\delta[n-m] = u[n-m] - u[n-m-1]$$

بنابراین دنباله مثال (1-2) را برحسب توابع پله بسط می‌دهیم

$$\begin{aligned} x[n] &= (1/2)\{u[n+2] - u[n+1]\} + \{u[n+1] - u[n]\} \\ &+ 2\{u[n] - u[n-1]\} + 2\{u[n-1] - u[n-2]\} \\ &+ 2\{u[n-2] - u[n-3]\} + (1/2)\{u[n-3] - u[n-4]\} \end{aligned}$$

که پس از ساده کردن به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$x[n] = (1/2)u[n+2] + (1/2)u[n+1] + u[n] - (3/2)u[n-3] - (1/2)u[n-4]$$

تمرین (1-2): اگر این دنباله به عنوان ورودی به یک سیستم LTI اعمال شود خروجی سیستم را

بیابید، در صورتی که بدانیم پاسخ این سیستم به ورودی پله بصورت $y[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$ است.

۲-۱-۲ بسط سیگنال پیوسته زمانی برحسب توابع ضربه

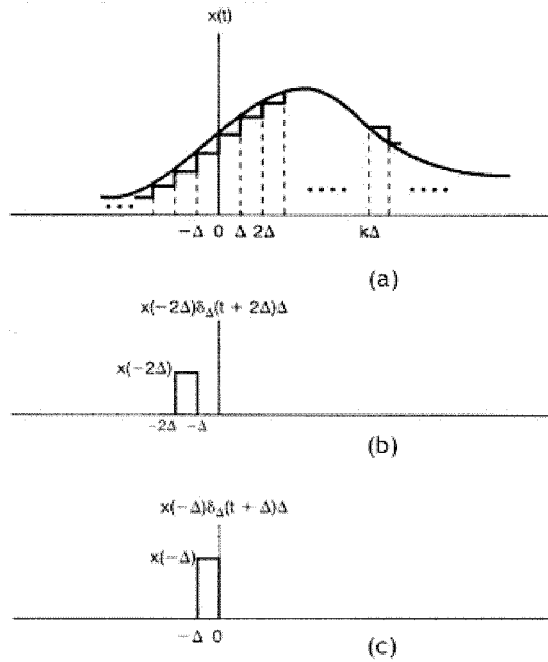
سیگنال پیوسته زمانی نیز مشابه حالت گسسته زمانی قابل بسط است. به‌عنوان مثال فرض کنید که $x_{\Delta}(t)$ تقریبی پله‌ای از تابع پیوسته $x(t)$ باشد. همانگونه که در شکل (۲-۲) نشان داده شده است. با روشی مشابه حالت گسسته زمانی، می‌توان تابع $x(t)$ را بصورت ترکیبی خطی از پالس‌های تاخیر یافته نوشت. اگر پالس اصلی را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

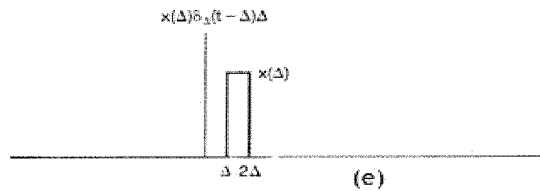
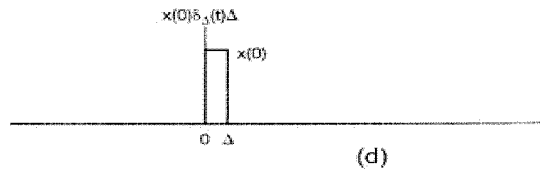
$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} 1/\Delta & 0 < t < \Delta \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad (۴-۲)$$

بنابراین سنگینی هر پالس $x(k\Delta)$ است. البته لازم است تابع $\delta_{\Delta}(t)$ را در Δ ضرب نمود تا دامنه آن برابر واحد شود و سپس توسط توابع $x(k\Delta)$ وزن دهی کرد. بنابراین خواهیم داشت:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta \quad (۵-۲)$$

این مساله در شکل (۲-۲) به نمایش گذاشته شده است.





شکل (۲-۲): تقریب یک سیگنال پیوسته زمانی با استفاده از توابع پالس

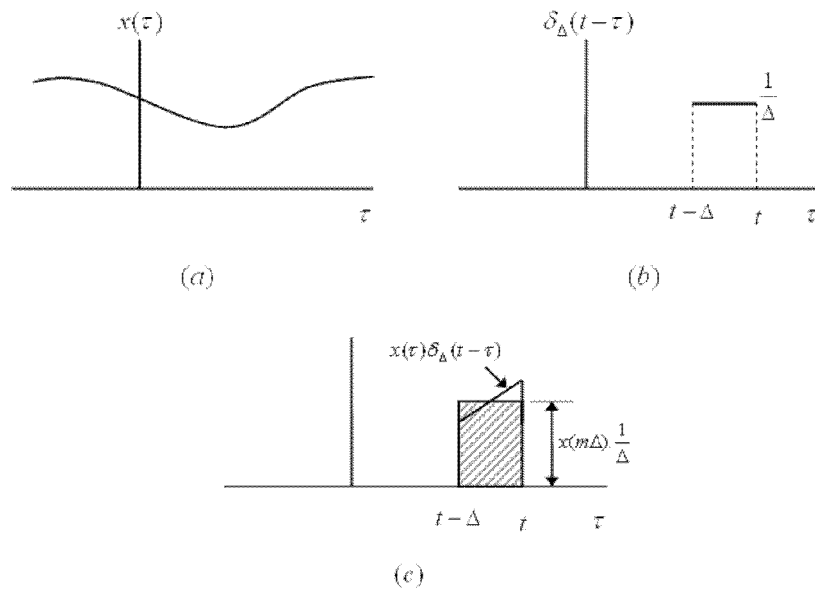
با توجه به شکل (۲-۲) مشاهده می‌شود که همانند حالت گسسته زمانی برای هر مقدار t ، تنها یک جمله از مجموع در سمت راست معادله (۲-۵) غیر صفر است. با میل کردن Δ به سمت صفر رابطه (۲-۵) نمایانگر $x(t)$ خواهد شد، چون در این صورت حد $x_\Delta(t)$ با $x(t)$ مساوی خواهد شد. به عبارت ریاضی، یعنی

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_\Delta(t - k\Delta) \Delta \quad (۲-۶)$$

که در حد، علامت مجموع به سوی انتگرال، و $k\Delta$ به سمت یک عدد پیوسته مثل τ میل می‌کند ($k\Delta \rightarrow \tau$). در نهایت رابطه (۲-۶) به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (۲-۷)$$

با کمی دقت به شکل (۲-۳) متوجه می‌شوید که دامنه سیگنال $x(\tau) \delta_\Delta(t - \tau) \Delta$ هنگامی که $\Delta \rightarrow 0$ نمایانگر مقدار $x(t)$ در نقطه $t = \tau$ می‌باشد. در این شکل ناحیه هاشور خورده بیانگر ناحیه‌ای است که مساحت آن تقریباً برابر سطح زیرمنحنی $x(\tau) \delta_\Delta(t - \tau)$ در فاصله $t - \Delta$ و t در نقطه $\tau = t = m\Delta$ می‌باشد.



شکل (۲-۳): نمایش معادله (۲-۶)

توجه کنید که رابطه (۲-۷) فقط با دانستن خواص تابع ضربه نیز قابل استنتاج است چون با توجه به خاصیت ضرب برای تابع ضربه، در اثر ضرب این تابع در تابع دلخواه $x(t)$ ، مقدار $x(t)$ در محل ضربه نمونه‌برداری می‌شود و سایر مقادیر $x(t)$ در مقدار حاصل ضرب تاثیری ندارند. به عبارت دیگر:

$$x(t)\delta(t-\tau) = x(\tau)\delta(t-\tau) \quad (۲-۸)$$

که نمایانگر یک ضربه با مقدار $x(\tau)$ در $t=\tau$ می‌باشد. بدین ترتیب با جمع کردن نمونه‌ها می‌توان سیگنال $x(t)$ را بازسازی کرد. به عبارت ریاضی داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)d\tau = x(t)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)d\tau = x(t) \quad (۲-۹)$$

در ایجاد تساوی از این حقیقت استفاده کرده‌ایم که سطح زیر منحنی تابع ضربه مساوی واحد است. مثال (۲-۳): اگر $x(t) = u(t)$ باشد، به ازای $t > 0$ داریم، $u(t) = 1$. بنابراین رابطه (۲-۷) بصورت زیر در می‌آید:

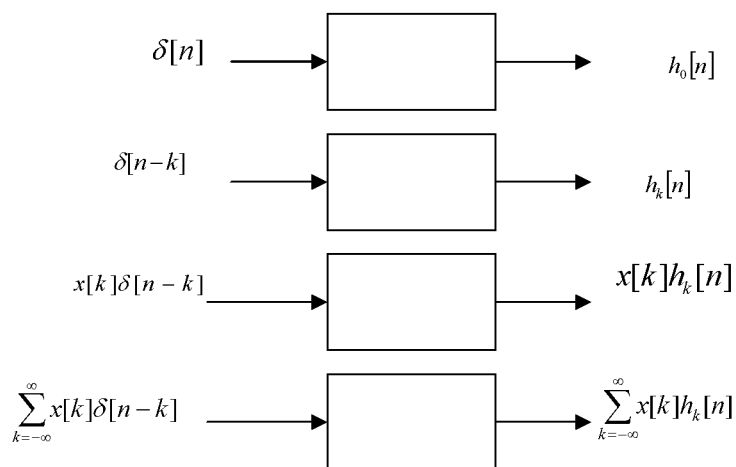
$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t \delta(t-\tau)d\tau \quad (۲-۱۰)$$

رابطه فوق مشابه رابطه‌ای است که برای $u[n]$ در حالت گسسته زمانی ارائه شد.

۲-۲ جمع کانولوشن در سیستم‌های LTI

فرض کنید سیگنال $x[n]$ به یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h_0[n]$ اعمال می‌شود. با توجه به رابطه (۲-۲) که $x[n]$ را برحسب توابع ضربه انتقال یافته با وزن‌های متفاوت بیان می‌کند و با توجه به

خاصیت جمع آثار^۱ در سیستم‌های LTI می‌توان پاسخ $y[n]$ را برحسب پاسخ‌های ضربه انتقال یافته با وزنه‌های متفاوت نوشت. اگر $h_k[n]$ پاسخ ضربه سیستم به ورودی $\delta[n-k]$ باشد، در اینصورت چون سیستم همگن است، پاسخ سیستم به ورودی وزن شده $x[k]\delta[n-k]$ برابر $x[k]h_k[n]$ است. همچنین پاسخ سیستم به ورودی دلخواه $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$ برابر است با $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$. این مراحل در شکل زیر نشان داده شده است.

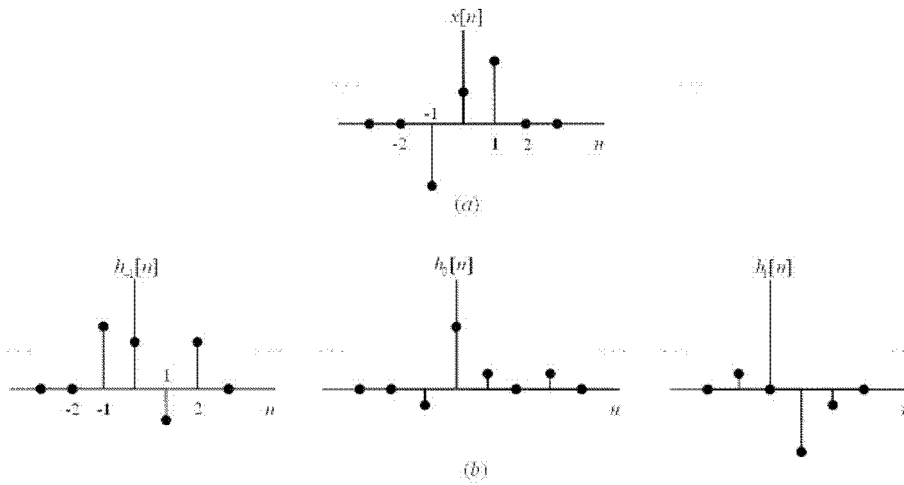


شکل ۲-۴ مراحل تعیین پاسخ سیستم خطی گسسته زمانی به ورودی دلخواه بنابراین پاسخ یک سیستم خطی، ولی نه لزوماً مستقل از زمان، از رابطه جمع کانولوشن به صورت زیر بدست می‌آید.

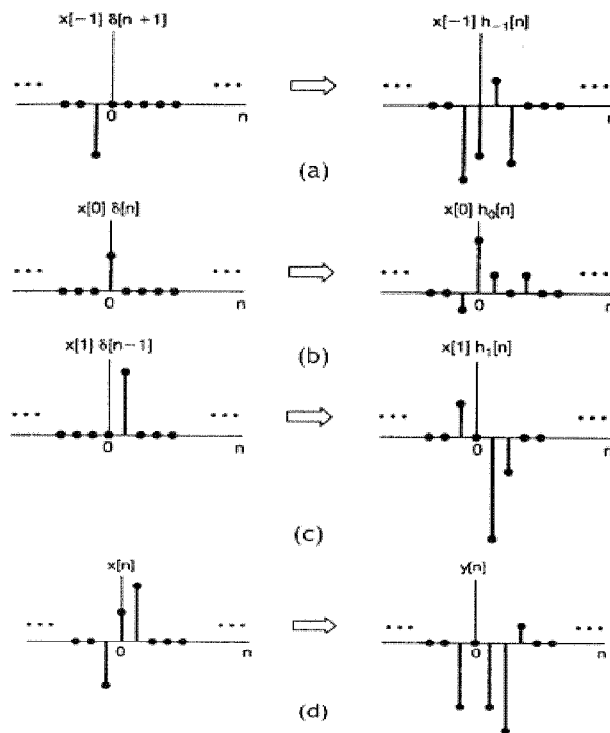
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n] \quad (۱-۲)$$

توجه داشته باشید که اگر سیستم LTI علاوه بر خطی بودن مستقل از زمان نیز باشد، در آنصورت $h_0[n-k] = h_k[n] = h[n-k]$ خواهد شد، یعنی با انتقال ورودی در حوزه زمان، خروجی فقط به همان اندازه در حوزه زمان انتقال پیدا خواهد کرد. به عنوان مثال به شکل‌های (۲-۵) و (۲-۶) توجه کنید.

¹ Superposition



شکل (۲-۵): نمایش پاسخ سیستم گسسته زمانی مربوط به رابطه (۲-۱۱)



شکل (۲-۶): محاسبه پاسخ سیستم خطی متغیر با زمان

خاصیت جمع آثار بخوبی از این شکل پیدا است. بعنوان مثال، شکل (۲-۵) می‌گوید اگر پاسخ سیستم به ضربه واحد برابر $h_0[n]$ باشد در این صورت پاسخ سیستم به $x[-1]\delta[n+1]$ می‌شود: $x[-1]h_{-1}[n]$ ، و پاسخ سیستم به $x[1]\delta[n-1]$ ، $x[1]h_1[n]$ می‌شود.

تا اینجا فقط از خاصیت خطی بودن سیستم استفاده کرده ایم و اگر سیستم مستقل از زمان (TI) نیز باشد رابطه (۱۱-۲) بصورت زیر درمی آید:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \quad (۱۲-۲)$$

که این رابطه به جمع کانولوشن برای سیستم های LTI معروف است. معمولاً از نماد * برای نمایش عمل کانولوشن استفاده می شود. در این صورت، می توان رابطه (۱۲-۲) را به صورت نمادین زیر نوشت:

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (۱۳-۲)$$

مثال (۴-۲): فرض کنید ورودی $x[n] = \alpha^n u[n]$ به سیستمی با پاسخ ضربه $h[n] = u[n]$ اعمال شود. اگر $0 < \alpha < 1$ باشد، مطلوبست پاسخ سیستم.

حل: در شکل (۷-۲) بترتیب $h[1-k], h[-1-k], h[-k], h[k]$ نمایش داده شده اند (بعبارت دیگر $h[n-k]$ به ازای $n = -1, 0, 1$). در شکل های (۷-۲) و (۷-۲) نیز بترتیب $h[n-k]$ به ازای مقدار مثبت و منفی دلخواه n رسم شده اند. مشاهده می شود که به ازای $n < 0$ هیچگونه روی هم افتادگی میان نقاط غیرصفر $x[k]$ و $h[n-k]$ وجود ندارد، پس برای $n < 0$ داریم (به ازای کلیه مقادیر k):

$$x[k]h[n-k] = 0$$

$$y[n] = 0 \quad \text{بنابراین برای } n < 0 \text{ داریم:}$$

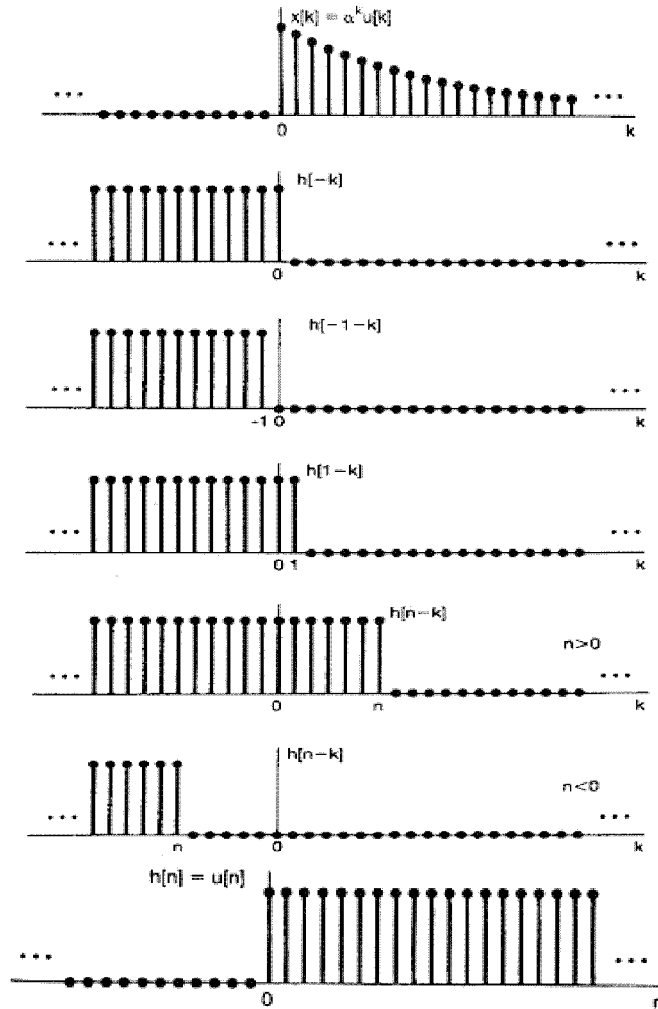
$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^k & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases} \quad \text{برای } n \geq 0 \text{ داریم:}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^k = (1 - \alpha^{n+1}) / (1 - \alpha)$$

بنابراین برای $n \geq 0$ داریم:

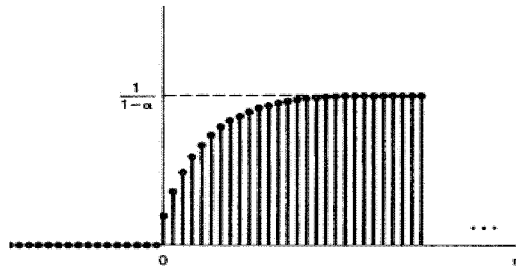
در نتیجه، به ازای همه n ها می توان خروجی را بصورت زیر نوشت:

$$y[n] = \left(\frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \right) u[n]$$



شکل (۷-۲): نمایش مراحل جمع کانولوشن مثال (۴-۲)

$$y[n] = \left(\frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \right) u[n]$$



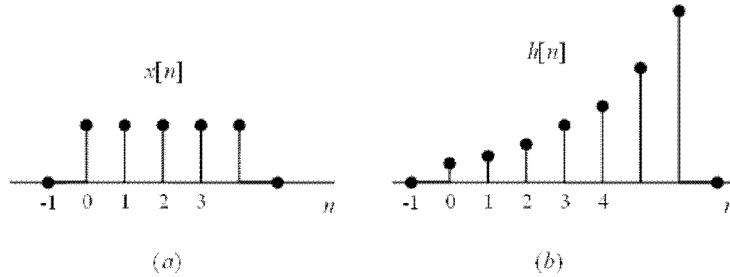
شکل (۸-۲): خروجی مثال (۴-۲)

مثال (۵-۲): بعنوان مثال دوم دو سیگنال زیر را با هم کانوالو کنید.

این سیگنال‌ها در شکل (۹-۲) نشان داده شده‌اند.

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$y[n] = \begin{cases} \alpha^n & 0 \leq n \leq 6 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$



شکل (۹-۲): سیگنال‌هایی که در مثال (۵-۲) با هم کانولوشن می‌شوند.

برای محاسبه کانولوشن باید ۵ فاصله مجزا را در نظر گرفت (شکل ۱۰-۲ را ببینید).
فاصله اول: به ازای $n < 0$ که هیچ اشتراکی بین $x[n]$ و $h[n-k]$ وجود ندارد، در نتیجه

$$y[n] = 0$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^{n-k}$$

فاصله دوم: برای $0 \leq n \leq 4$ داریم:

$$y[n] = \sum_{r=0}^n \alpha^r = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

با تغییر متغیر $r = n - k$ داریم:

$$y[n] = \sum_{k=0}^4 \alpha^{n-k} = \alpha^n \sum_{k=0}^4 (\alpha^{-1})^k = \alpha^n \frac{1 - \alpha^{-5}}{1 - \alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

فاصله سوم: $4 \leq n \leq 6$

$$y[n] = \sum_{k=n-6}^4 \alpha^{n-k}$$

فاصله چهارم: $6 \leq n \leq 10$ داریم:

با قرار دادن $r = k - n + 6$ خواهیم داشت:

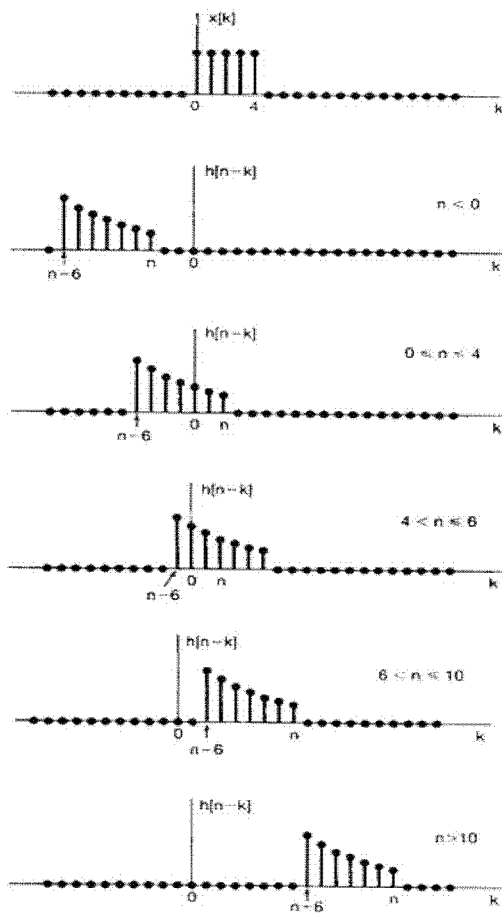
$$y[n] = \sum_{r=0}^{10-n} \alpha^{6-r} = \sum_{r=0}^{10-n} \alpha^6 (\alpha^{-1})^r$$

$$= \alpha^6 \frac{1 - \alpha^{n-11}}{1 - \alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1 - \alpha}$$

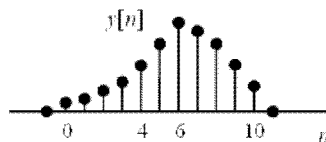
فاصله پنجم: برای $n > 10$ باز هیچگونه وجه اشتراکی نخواهیم داشت و بنابراین:

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} & 0 \leq n \leq 4 \\ \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} & 4 \leq n \leq 6 \\ \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1 - \alpha} & 6 \leq n \leq 10 \\ 0 & n > 10 \end{cases}$$

کلیه این مراحل در شکل ۱۰-۲ نشان داده شده‌اند.

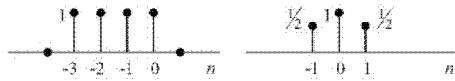


شکل (۱۰-۲): نمایش جمع کانولشن مثال (۵-۲)



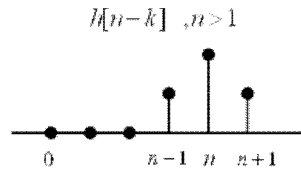
شکل (۲-۱۱): نتیجه عملیات کانولوشن مثال (۲-۵)

مثال (۲-۶): مطلوبست حاصل کانولوشن دو دنباله $x[n]$ و $h[n]$ که بترتیب در سمت راست و چپ شکلی زیر نمایش داده شده‌اند.



شکل (۲-۱۲): دنباله‌های $x[n]$ ، $h[n]$ مربوط به مثال (۲-۶)

حل: با توجه به تقارن $h[n]$ ، متوجه می‌شویم که $h[-k]$ مشابه $h[k]$ است در شکل ۲-۱۳، $h[n-k]$ به ازاء مقادیر $n > 1$ رسم شده است.



شکل (۲-۱۳): دنباله $h[n-k]$ به ازاء $n > 1$ مربوط به مثال (۲-۶)

مشاهده می‌شود که هیچ‌گونه روی هم افتادگی میان دو دنباله $x[k]$ و $h[n-k]$ وجود ندارد، پس:

$$x[k]h[n-k] = 0 \quad > 1$$

پس به ازای $n > 1$ ، $y[n]$ مساوی صفر است، یعنی

$$y[n] = 0 \quad > 1$$

اما برای $-4 \leq n \leq 1$ دو تابع $x[k]$ ، $h[n-k]$ روی هم افتادگی دارند، لذا مقدار $y[n]$ در این فاصله غیر صفر است. به ازاء $n = 1$ فقط یک نقطه تداخل میان $x[k]$ و $h[n-k]$ (به ازاء $k = 0$)،

$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[1-k] = x[0]h[1-0] = \frac{1}{2} \quad \text{پس:}$$

به ازاء $n = 0$ دو نقطه تداخل میان $x[k]$ ، $h[1-k]$ بوجود می‌آید (به ازای $k = 0, 1$)، پس:

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[1-k] = x[0]h[1-0] + x[1]h[0]$$

$$= (1)\left(\frac{1}{2}\right) + (1)(1) = 1 + 0.5 = \frac{3}{2}$$

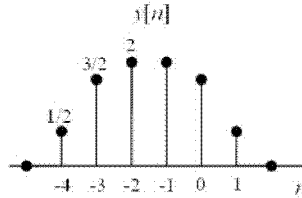
به ازاء دو مقدار درفاصله $-3 < n < 0$ نقاط تداخل ثابت باقی می‌ماند و در این دو حالت پاسخ برابر است

$$y[-1] = y[-2] = 1\left(\frac{1}{2}\right) + 1(1) + 1\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \quad \text{با:}$$

$$y[-3] = 1\left(\frac{1}{2}\right) + 1(1) = \frac{3}{2} \quad \text{به ازاء } n = -3 \text{ دو نقطه تداخل باقی می‌ماند و پاسخ برابر است با:}$$

$$y[-4] = 1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{به ازاء } n = -4 \text{ فقط یک نقطه تداخل باقی می‌ماند:}$$

و بنابراین $y[n]$ بصورت شکل زیر خواهد شد.



شکل (۲-۱۴): دنباله $y[n]$ حاصل کانولوشن مثال (۲-۶)

اکنون تعدادی از خواص مهم جمع کانولوشن را بیان می‌کنیم. این خواص عیناً برای انتگرال کانولوشن که در بخش بعد به آن می‌پردازیم نیز صادق هستند.

۲-۳ خواص جمع کانولوشن

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \quad \text{۱-جابجایی (۲-۱۴)}$$

این خاصیت به سادگی با قراردادن $r = n - k$ در رابطه (۲-۱۲) ثابت خواهد شد.

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] \quad \text{۲-شرکت‌پذیری (۲-۱۵)}$$

اثبات این رابطه نیز به سادگی از تعریف جمع کانولوشن ۲-۱۲ امکان پذیر است.

اما توصیف و استفاده از این خاصیت در شکل (۲-۱۵) ما را به نتایج جالبی که فقط در مورد سیستم‌های LTI صادق است رهنمون می‌سازد.

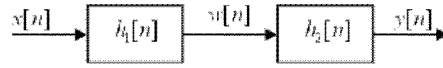
$$y[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] \quad \text{با توجه به شکل (۲-۱۵) داریم (۲-۱۶)}$$

$$y[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) \quad \text{ولی با توجه به خاصیت شرکت‌پذیری می‌توان نوشت (۲-۱۷)}$$

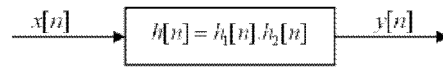
$$y[n] = x[n] * (h_2[n] * h_1[n]) \quad \text{اکنون با توجه به خاصیت جابجایی در جمع کانولوشن داریم (۲-۱۸)}$$

$$y[n] = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n] \quad \text{و دوباره با استفاده از خاصیت شرکت‌پذیری داریم (۲-۱۹)}$$

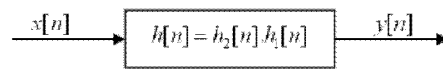
بدین ترتیب ثابت می‌شود که عملکرد شکل‌های (۲-۱۵-a) و (۲-۱۵-d) یکسان است. به عبارت دیگر، همواره می‌توان ترتیب قرار گرفتن سیستم‌های LTI سری را تغییر داد بدون آنکه در عملکرد (پاسخ) کل سیستم تغییری حاصل شود.



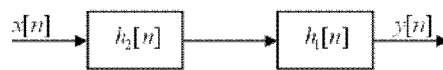
(a)



(b)



(c)



(d)

شکل (۲-۱۵): خاصیت شرکت پذیری و استفاده از این خاصیت در ترکیب با خاصیت جابجایی جمع کانولوشن برای جابجایی سیستم‌های LTI

۳- خاصیت توزیع پذیری

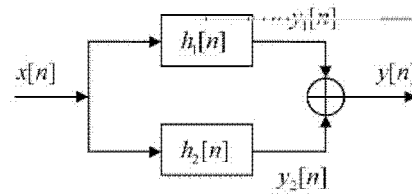
این خاصیت بیان می‌دارد که کانولوشن یک ورودی با مجموع چند پاسخ ضربه مساوی است با مجموع کانولوشن‌های همان ورودی با هر یک از پاسخ ضربه‌های مورد نظر.

$$x[n] * \left(\sum_{r=1}^M h_r[n] \right) = \sum_{r=1}^M (x[n] * h_r[n]) \quad (2-20)$$

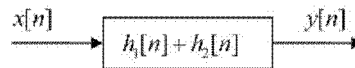
این خاصیت به سادگی با جابجایی ترتیب کانولوشن و مجموع ثابت می‌شود.

توصیف این خاصیت در شکل (۲-۱۶) داده شده است. به کمک این خاصیت می‌توان ترکیب موازی سیستم‌ها را به یک سیستم تبدیل کرد.

تمرین (۲-۳): آیا خاصیت جابجایی سیستم‌ها برای ترکیب متوالی سیستم‌های غیرخطی نیز صادق است؟



(a)



(b)

شکل (۲-۱۶): نمایش ساده‌ای از ساده کردن سیستم‌ها به کمک خاصیت توزیع پذیری

توجه به این نکته حائز اهمیت است که خواص فوق فقط در مورد سیستم‌های LTI صادق هستند، و در حالت کلی پاسخ ضربه یک سیستم غیرخطی بطور کامل نمی‌تواند سیستم و عملکرد آنرا مشخص سازد. بعبارت دیگر پاسخ ضربه یک سیستم غیرخطی همان قدراطلاعات در مورد سیستم دربردارد، که پاسخ به هر ورودی دیگر می‌تواند داشته باشد و ابتدا بر ورودی‌های دیگر امتیازی ندارد. ولی در سیستم‌های LTI، پاسخ ضربه به تنهایی بیانگر سیستم و خواص آن و پیش‌بینی کننده عملکرد آن است. به بیان واضح‌تر می‌توان گفت که برای سیستم‌های LTI پاسخ ضربه بطور یکتا می‌تواند رابطه ورودی و خروجی سیستم را مشخص کند ولی در مورد سیستم‌های غیرخطی چنین نیست. به عنوان مثال، فرض کنید پاسخ ضربه یک سیستم LTI بصورت زیر داده شده باشد:

$$h[n] = u[n] - u[n-3]$$

در این صورت، تنها و تنها یک سیستم LTI وجود دارد، که پاسخ ضربه آن بصورت فوق است و رابطه ورودی و خروجی آن سیستم دارای ضابطه زیر است:

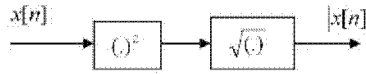
$$y[n] = x[n] + x[n-1] + x[n-2]$$

در حالیکه اگر $h[n]$ پاسخ ضربه سیستم غیرخطی در نظر گرفته شود چندین سیستم غیرخطی می‌توان یافت که پاسخ آنها به ورودی ضربه مساوی $h[n]$ شود. بعنوان مثال سیستم‌های زیر همگی دارای این خاصیت هستند.

$$y[n] = (x[n] + x[n-1] + x[n-2])^m$$

$$y[n] = \max(x[n], x[n-1], x[n-2])$$

مثال (۲-۷): آیا خاصیت جابجایی در مورد دو سیستم جذرگیرنده و بتوان ۲ رساننده صادق است؟
حل: پاسخ منفی است، چون اگر ابتدا سیستم بتوان ۲ رساننده و بعد جذرگیرنده را قرار دهیم، خروجی نهایی قدر مطلق ورودی است.



شکل (۲-۱۷): ترکیب متوالی دو سیستم غیرخطی

اما اگر ابتدا سیستم جذرگیرنده قرار داده شود خروجی این سیستم برای مقادیر منفی $x[n]$ تعریف نشده است (در محدوده سیستم های حقیقی) لذا دو سیستم قابل جابجایی نیستند.

۲-۴ انتگرال کانولوشن برای سیستم های LTI پیوسته زمانی

همانند آنچه در مورد سیستم های گسسته زمانی انجام دادیم، هدف این بخش، بدست آوردن رابطه ای جهت توصیف پاسخ سیستم پیوسته زمانی به هر ورودی دلخواه بر حسب فقط پاسخ ضربه سیستم است. قبلاً دیدیم که هر ورودی دلخواه $x(t)$ را می توان بر حسب توابع ضربه انتقال یافته و وزن دهی شده بصورت زیر نوشت:

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta \quad (2-21)$$

که در آن تابع $\delta_{\Delta}(t)$ در رابطه (۲-۴) داده شده است. اکنون فرض می کنیم پاسخ سیستم به تابع $\delta_{\Delta}(t - k\Delta)$ بصورت $h_{k\Delta}(t)$ در دسترس باشد، در این صورت با توجه به خطی بودن سیستم می توان پاسخ را بدست آورد.

$$y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) h_{k\Delta}(t) \Delta \quad (2-22)$$

با میل کردن Δ به سمت صفر مجموع بسمت انتگرال، $x(k\Delta)$ به سمت $x(\tau)$ (که در آن τ مقادیر پیوسته اتخاذ می کند) و $h_{k\Delta}(t)$ به سمت $h_{\tau}(t)$ یا پاسخ به ضربه اعمال شده در لحظه $t = \tau$ میل می کنند. بدین ترتیب رابطه (۲-۲۲) بصورت زیر تبدیل می شود:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_{\tau}(t) d\tau \quad (2-23)$$

این رابطه انتگرال کانولوشن در حالت پیوسته زمانی برای سیستم های خطی ولی نه لزوماً مستقل از زمان می باشد. به کمک این انتگرال می توان با در دست داشتن $h_{\tau}(t)$ یا پاسخ سیستم به ورودی $\delta(t - \tau)$ ، پاسخ به هر ورودی دلخواه $x(t)$ را یافت. توجه کنید که انتگرال فوق مستقیماً با استفاده از انتگرال (۲-۷) نیز قابل استخراج است، چون اگر داشته باشیم

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (2-24)$$

با توجه به اینکه عملیات انتقال ورودی به خروجی در یک سیستم خطی توسط یک عملگر خطی انجام می شود، یعنی:

$$y[t] = T[x[t]] \quad (2-25)$$

با استفاده از (۲-۲۴) برای سیگنال ورودی به سیستم، می توان رابطه (۲-۲۵) را بصورت زیر نوشت:

$$y(t) = T \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \right] \quad (26-2)$$

و چون T خطی است می‌توان ترتیب آنرا با انتگرال عوض کرد. در این صورت

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} T[x(\tau) \delta(t - \tau)] d\tau \quad (27-2)$$

و باز چون T خطی است می‌توان ضرایب ثابت (مستقل از t) را از آن خارج کرد، پس

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) T[\delta(t - \tau)] d\tau \quad (28-2)$$

و چون طبق تعریف پاسخ به ضربه انتقال یافته $\delta(t - \tau)$ برابر $h_\tau(t)$ است داریم

$$T[\delta(t - \tau)] = h_\tau(t) \quad (29-2)$$

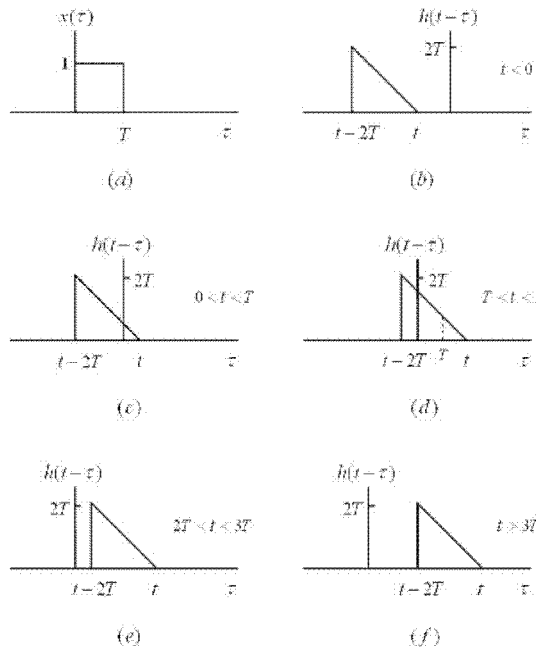
بنابراین، رابطه (۲۳-۲) مستقیماً بدست می‌آید. در اینجا تذکر این نکته حائز اهمیت است که کلیه خواص مطرح شده برای جمع کانولوشن از قبیل جابجائی، شرکت پذیری و توزیع پذیری برای انتگرال کانولوشن نیز صادق هستند.

مثال (۲-۹): مطلوبست محاسبه انتگرال کانولوشن زیر

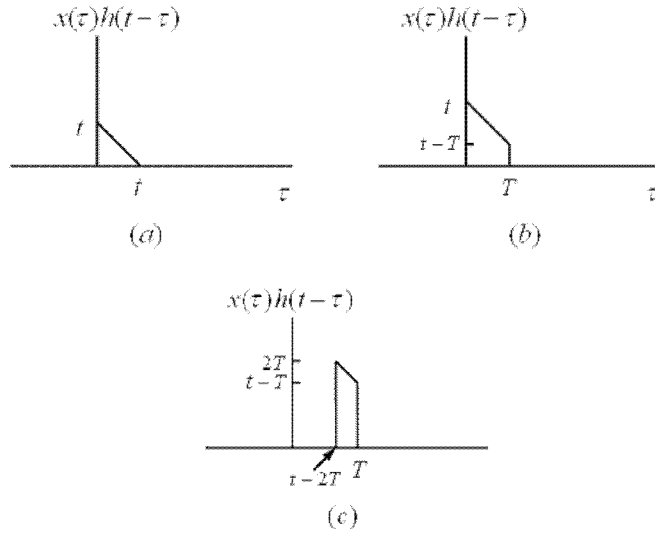
$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad h(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 2T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

حل: باید محاسبه $y(t)$ را در چند فاصله مجزا انجام داد. برای $t < 0$ و برای $t > 3T$ عبارت $x(\tau)h(t - \tau)$ صفر است، بنابراین خروجی صفر است. برای فواصل دیگر حاصل ضرب $x(\tau)h(t - \tau)$ در شکل ۲-۱۸ نمایش داده شده است.



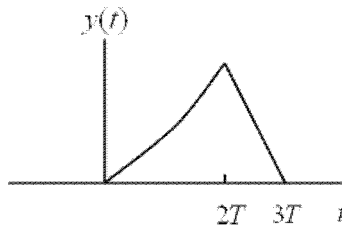
شکل (۱۸-۲): سیگنالهای $x(\tau)$ و $h(t-\tau)$ برای مقادیر مختلف t در مثال (۹-۲)



شکل (۱۹-۲): حاصل ضرب $x(\tau)h(t-\tau)$ برای مثال (۹-۲) به ازاء سه مقدار t که در آنها این حاصلضرب لزوماً صفر نیست (a) در بازه $0 < t < T$ ، (b) در بازه $T < t < 2T$ و (c) در بازه $2T < t < 3T$

بنابراین داریم:

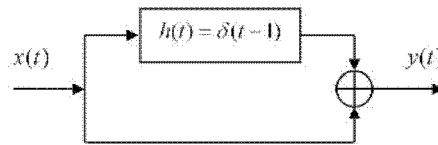
$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \int_{\tau=0}^t (t-\tau) d\tau = t^2 - \frac{1}{2}t^2 & 0 < t < T \\ \int_{\tau=0}^T (t-\tau) d\tau = T^2 - \frac{1}{2}T^2 & T < t < 2T \\ \int_{\tau=t-2T}^T (t-\tau) d\tau = -\frac{1}{2}t^2 + Tt + \frac{3}{2}T^2 & 2T < t < 3T \\ 0 & t < 3T \end{cases}$$



شکل (۲-۲۰): سیگنال $y(t) = x(t) * h(t)$ برای مثال (۲-۹)

تمرین (۲-۴): ثابت کنید حاصل کانولوشن تابع ضربه با تابع دلخواه $x(t)$ مساوی $x(t)$ است.

مثال (۲-۱۰): پاسخ ضربه سیستم زیر را بیابید.



شکل (۲-۲۱): سیستم مثال (۲-۱۰)

حل: با توجه به شکل داریم:

$$y(t) = x(t) + x(t) * \delta(t-1)$$

$$x(t) = x(t) * \delta(t)$$

با توجه به تمرین (۲-۴) می‌توان نوشت:

$$y(t) = x(t) * \delta(t) + x(t) * \delta(t-1)$$

پس،

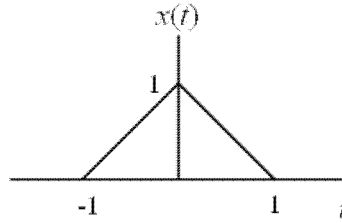
$$y(t) = x(t) * [\delta(t) + \delta(t-1)]$$

با توجه به خاصیت توزیع پذیری می‌توان نوشت:

بنابراین پاسخ ضربه کلی سیستم برابر است با

$$h(t) = \delta(t) + \delta(t-1)$$

مثال (۲-۱۱): مطلوب است خروجی سیستم فوق اگر ورودی آن به صورت شکل ۲-۲۲ باشد.



شکل (۲۲-۲): ورودی به سیستم مثال (۱۰-۲)

حل: برای محاسبه خروجی داریم:

$$y(t) = x(t) * [\delta(t) + \delta(t-1)]$$

و با توجه به خاصیت توزیع پذیری:

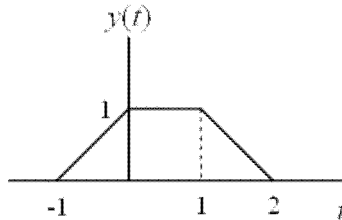
$$y(t) = x(t) * \delta(t) + x(t) * \delta(t-1)$$

و با توجه به این که حاصل کانولوشن هر تابع $x(t)$ با تابع ضربه انتقال یافته مساوی انتقال تابع $x(t)$

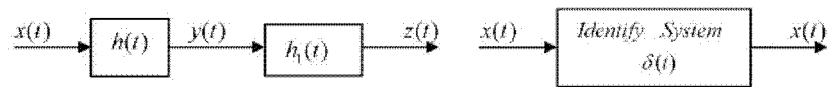
است، پس داریم:

$$y(t) = x(t) + x(t-1)$$

خروجی در شکل ۲۳-۲ رسم شده است.



شکل (۲۳-۲): خروجی سیستم مثال (۱۰-۲) به ورودی به شکل (۲۲-۲)



(a)

(b)

شکل (۲۴-۲): سیستم معکوس برای سیستم LTI پیوسته زمانی، سیستم اصلی دارای پاسخ ضربه

$$h(t) \text{ و معکوس آن دارای پاسخ ضربه } h_1(t) \text{ است به گونه‌ای که } h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$

مثال (۱۲-۲): سیستمی با رابطه ورودی و خروجی به صورت $y(t) = x(t-t_0)$ را در نظر بگیرید. مطلوب است سیستم معکوس آن.

حل: با قرار دادن ورودی سیستم به صورت تابع ضربه یعنی $x(t) = \delta(t)$ بسادگی پاسخ ضربه سیستم به صورت $h(t) = \delta(t-t_0)$ بدست می‌آید. بنابراین خروجی برابر است با $x(t-t_0) = x(t) * \delta(t-t_0)$.

برای بدست آوردن پاسخ ضربه سیستم باید خروجی سیستم معکوس همان ورودی سیستم اصلی باشد (شکل ۲۴-۲ را ببینید). بنابراین اگر پاسخ ضربه سیستم معکوس را $h_1(t)$ بنامیم، خواهیم داشت

$$h_1(t) = \delta(t+t_0)$$

با اتصال متوالی دو سیستم داریم

$$h_1(t) * h(t) = \delta(t + t_0) * \delta(t - t_0) = \delta(t)$$

این حقیقت از اینجا ناشی می‌شود که سیستم اصلی عملیات تا خیر به اندازه t_0 واحد زمانی را انجام می‌دهد و سیستم معکوس عملیات جلواندازی به همان اندازه را انجام می‌دهد. لذا ترکیب متوالی آنها یک سیستم با پاسخ ضربه $\delta(t)$ است، که ورودی را مستقیماً در خروجی ظاهر می‌کند (شکل ۲-۲۴).

مثال (۲-۱۳): سیستم LTI با پاسخ ضربه زیر را در نظر بگیرید.

$$h[n] = u[n] \quad (۲-۳۰)$$

با توجه به جمع کانولوشن می‌توان پاسخ سیستم را به هر ورودی دلخواه به دست آورد.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] u[n-k] \quad (۲-۳۱)$$

و چون $u[n-k] = 0$; $k \geq n+1$ بنابراین

$$y[n] = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^n x[k] ; & n \geq 0 \\ 0 & ; \quad n \leq -1 \end{cases} = \left(\sum_{k=-\infty}^n x[k] \right) u[n] \quad (۲-۳۲)$$

رابطه فوق بیانگر یک سیستم جمع‌کننده است. معکوس سیستم فوق عبارت است از:

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \quad (۲-۳۳)$$

که به طور ساده عملگر تفاضلی مرتبه اول نام دارد و پاسخ ضربه سیستم معکوس می‌شود:

$$h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1] \quad (۲-۳۴)$$

می‌توان بسادگی تحقیق کرد که این دو سیستم معکوس یکدیگر هستند. برای انجام این تحقیق داریم:

$$\begin{aligned} h[n] * h_1[n] &= u[n] * \{\delta[n] - \delta[n-1]\} \\ &= u[n] * \delta[n] - u[n] * \delta[n-1] = u[n] - u[n-1] = \delta[n] \end{aligned}$$

۲-۵ بررسی برخی خواص سیستم LTI با استفاده از پاسخ ضربه

۲-۵-۱ علیت سیستم LTI

به طور ساده یک سیستم LTI، هنگامی علی است که پاسخ ضربه آن در حالت پیوسته زمانی به ازای

$t < 0$ مساوی صفر باشد و در حالت گسسته زمانی به ازای $n < 0$ مساوی صفر شود، یعنی:

$$h(t) = 0 \quad < 0 \quad (۲-۳۵)$$

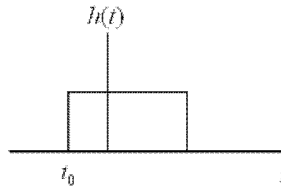
$$h[n] = 0 \quad < 0$$

بنابراین، یک سیستم انتقال‌دهنده با پاسخ ضربه $h(t) = \delta(t - t_0)$ ، رابطه (۲-۳۶) در زیر، علی است

اگر $t_0 > 0$ باشد، و در غیراینصورت غیرعلی است.

$$h(t) = \delta(t - t_0) \quad (۲-۳۶)$$

بنابراین سیستمی که پاسخ ضربه آن بصورت زیر باشد علی نیست.



شکل (۲-۲۵): نمونه پاسخ ضربه یک سیستم غیرعلی

همچنین سیستم گسسته زمانی $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$ علی است. ولی $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n+1} x[k]$ غیر علی است.

تمرین (۲-۵): آیا فقط از روی پاسخ ضربه می‌توان علیت را برای سیستم‌های فقط خطی یا فقط مستقل از زمان تحقیق کرد؟

۲-۵-۲ پایداری سیستم LTI

در فصل قبل بیان شد، شرط پایداری یک سیستم این است که اگر دامنه ورودی آن محدود باشد دامنه خروجی آن نیز محدود باشد. فرض می‌کنیم ورودی دارای حداکثر دامنه A باشد، یعنی:

$$|x(t)| < A \quad (۲-۳۷)$$

اگر سیستم LTI باشد پاسخ بصورت زیر درمی‌آید:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau \quad (۲-۳۸)$$

پس،

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau \right| \quad (۲-۳۹)$$

و با توجه به اصل:

$$|A+B| \leq |A| + |B| \quad (۲-۴۰)$$

می‌توان نوشت:

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t-\tau)h(\tau)| d\tau \quad (۲-۴۱)$$

با قرار دادن (۲-۳۷) در (۲-۴۱) و بیرون آوردن مقدار ثابت داریم:

$$|y(t)| \leq A \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau \quad (۲-۴۲)$$

پس اگر داشته باشیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau = \text{مقدار محدود} \quad (۲-۴۳)$$

در آنصورت $|y(t)|$ نیز به ازای کلیه مقادیر t محدود خواهد بود. بنابراین شرط کافی برای پایداری سیستم‌های LTI پیوسته زمانی، توسط رابطه (۲-۴۳) داده می‌شود اما می‌توان ثابت کرد که این شرط لازم نیز هست.

تمرین (۸-۲): ثابت کنید شرط (۲-۴۳) برای پایداری سیستم LTI یک شرط لازم و کافی است. راهنمایی: ورودی را بصورت زیر فرض کنید،

$$x(t) = \begin{cases} 0 & h(-t) = 0 \\ \frac{h(-t)}{|h(-t)|} & h(-t) \neq 0 \end{cases}$$

با انجام روندی مشابه، برای سیستم‌های گسسته زمانی نیز می‌توان نشان داد که شرط لازم و کافی برای پایداری سیستم گسسته زمانی LTI عبارت است از

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \text{مقدار محدود} \quad (۲-۴۴)$$

بطور خلاصه شرط لازم و کافی جهت پایداری یک سیستم این است که

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty \quad \text{در حالت پیوسته زمانی}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty \quad \text{در حالت گسسته زمانی}$$

تمرین (۲-۹): شرط پایداری سیستم‌های گسسته زمانی را اثبات کنید.

بنابراین سیستم جمع‌کننده یک سیستم پایدار نیست چون اگر یک ورودی ثابت و دامنه محدود مثل $u[n]$ را به آن اعمال کنیم و خروجی آن بطور نامحدود با n افزایش یابد، در اینصورت می‌توان یک مقدار از n را تصور کرد که هنوز ورودی محدود و مساوی واحد است اما خروجی در حال میل کردن

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} u[n] \rightarrow \infty \quad \text{بسمت } \infty \text{ است. یعنی}$$

مثال (۲-۱۴): آیا مشتق‌گیر یک سیستم پایدار است؟ علیت در سیستم مشتق‌گیر را بررسی کنید. حل: ضابطه سیستم مشتق‌گیر بصورت زیر است

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (۲-۴۵)$$

این رابطه را می‌توان بدو صورت نوشت:

$$y(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (۲-۴۷)$$

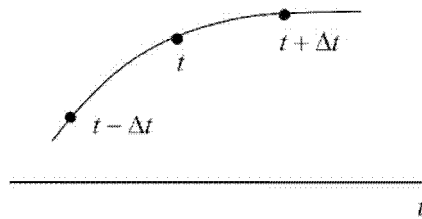
$$y(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (۲-۴۶)$$

برای هر یک از حالت‌های فوق پاسخ ضربه بصورت زیر بدست می‌آید:

$$h_2(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta(t) - \delta(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (۲-۴۸)$$

$$h_1(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta(t + \Delta t) - \delta(t)}{\Delta t} \quad (49-2)$$

دیده می‌شود که سیستم مشتق‌گیر اگر توسط رابطه (46-2) مشخص شود بیانگر یک سیستم غیرعلی و غیر قابل ساخت است ولی اگر توسط رابطه (47-2) مشخص شود بیانگر یک سیستم علی و قابل ساخت است اما می‌دانیم اگر ورودی $x(t)$ مشتق‌پذیر باشد در آن صورت روابط (46-2) و (47-2) برابر هستند.



شکل (26-2): پیش‌بینی مقدار ورودی در لحظه $t + \Delta t$ با استفاده از مشتق‌گیر

در این صورت با استناد به رابطه (47-2) این سیستم قابل ساخت و با استناد به رابطه (46-2) این سیستم غیرعلی است. بنابراین در حالتیکه تغییرات ورودی بسیار شدید نباشد (ورودی شامل توابع ضربه، پله و نقاط تکین نباشد) می‌توان با استفاده از سیستم مشتق‌گیر بصورت رابطه (47-2) با توجه به مقادیر ورودی در دو لحظه t و $t - \Delta t$ (به شکل (26-2) توجه کنید) مشتق ورودی را حساب کرد و سپس با توجه به تساوی دو رابطه (46-2) و (47-2) مقدار ورودی را در Δt ثانیه بعد پیش‌بینی کرد. چون اگر $\Delta t \rightarrow 0$ می‌توان $x(t + \Delta t)$ را با استفاده از خروجی سیستم مشتق‌گیر و توسط رابطه زیر بدست آورد.

$$x(t + \Delta t) \cong \left[\frac{dx(t)}{dt} \Delta t \right] + x(t) \quad (50-2)$$

مثال (9-2): یک سیستم LTI با پاسخ ضربه‌ای بصورت زیر در دست است. علیت و پایداری این سیستم را بررسی کنید.

$$h(t) = e^{-2t} \cos t \quad u(t)$$

حل: چون $h(t < 0) = 0$ است پس سیستم علی است.

تحقیق پایداری: شرط پایداری توسط رابطه (43-2) داده شده است. آنرا تحقیق می‌کنیم.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t} |\cos t| dt < \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}$$

پس سیستم پایدار است.

مثال (10-2): نشان دهید که اگر $h(t)$ (پاسخ ضربه یک سیستم LTI) متناوب باشد، حتماً سیستم ناپایدار و غیرعلی است.

حل: واضح است که اگر $h(t)$ متناوب باشد باید برای $t > 0$ و $t < 0$ تعریف شده باشد. پس سیستم غیرعلی است. برای یک تابع متناوب $h(t)$ قدرمطلق سطح زیر منحنی همواره نامحدود است. چون اگر سطح زیر قدر مطلق را به اجزاء آن تقسیم کنیم داریم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} |h(t)| dt$$

و اگر انتگرال روی یک دوره متناوب عدد محدود و غیرصفر باشد در آنصورت مجموع بی‌نهایت عدد محدود، خود بی‌نهایت می‌شود و بنابراین سیستم ناپایدار است. تنها در یک حالت سطح زیر قدر مطلق منحنی صفر است و آن وقتی است که $h(t)$ متحد باصفر باشد که مسلماً این حالت مورد نظر نیست. مثال (۲-۱۱): نشان دهید که اگر $h(t)$ پاسخ ضربه یک سیستم LTI دارای دوره محدود باشد در آنصورت حتماً سیستم پایدار است.

حل: اگر دوره تعریف پاسخ ضربه محدود باشد یعنی اگر

$$h(t) = 0, \forall t < t_0, t > t_1$$

در آنصورت شرط پایداری بصورت:

$$\int_{t_0}^{t_1} |h(t)| dt < \infty$$

در می‌آید و اگر بیشینه مقدار $h(t)$ در فاصله مذکور را h_0 بنامیم، داریم:

$$\int_{t_0}^{t_1} |h(t)| dt \leq h_0 (t_1 - t_0)$$

بنابراین سیستم پایدار است مگر در حالتی که خود h_0 بی‌نهایت شود، یعنی پاسخ ضربه در فاصله تعریف بی‌نهایت گردد که مسلماً این حالت مورد نظر نیست.

۲-۶ پاسخ پله سیستم‌های LTI

گاهی بررسی سیستم‌های LTI از روی پاسخ پله عملی‌تر و لازم‌تر است. لذا در این قسمت به نحوه استخراج پاسخ پله از روی پاسخ ضربه و برخی خواص پاسخ پله می‌پردازیم. اگر $s[n]$ و $s(t)$ پاسخ پله سیستم‌های LTI گسسته و پیوسته زمانی باشند، برای حالت گسسته زمانی داریم:

$$s[n] = u[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k] \quad (۲-۵۱)$$

بنابراین پاسخ ضربه از روی پاسخ پله توسط رابطه زیر بدست می‌آید:

$$h[n] = s[n] - s[n-1] \quad (۲-۵۲)$$

و برای حالت پیوسته زمانی پاسخ پله با استفاده از انتگرال کانولوشن بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$s(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad (۲-۵۳)$$

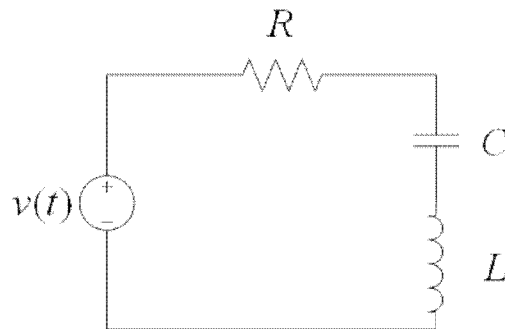
پاسخ ضربه نیز با استفاده از رابطه زیر از پاسخ پله بدست می‌آید.

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} \quad (۲-۵۴)$$

روابط فوق همگی ناشی از این حقیقت هستند که تابع پله واحد برابر انتگرال تابع ضربه واحد است، و یا تابع ضربه مشتق تابع پله واحد است. بنابراین در هر دو حالت گسسته و پیوسته زمانی جهت تفسیر عملکرد سیستم می‌توان از پاسخ پله بجای پاسخ ضربه استفاده کرد. این امر در حالت کلی در مورد هر تابع که از روی پاسخ ضربه توسط یک رابطه یک به یک و خطی حاصل شده باشد نیز قابل تعمیم است. اما پاسخ ضربه و پاسخ پله به علت اهمیت عملی و کاربردی بیش از سایر توابع مورد استفاده قرار می‌گیرند. به علت ارتباط خطی و ساده پاسخ پله با پاسخ ضربه می‌توان کلیه خواص سیستم را از روی پاسخ پله تعیین کرد. بعنوان مثال از روی پاسخ پله بسادگی با مشاهده اینکه $s(t < 0) = 0$ است می‌توان علیت سیستم را تحقیق کرد.

۷-۲ توصیف سیستم‌های LTI پیوسته زمان با استفاده از معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت

در گستره وسیعی از سیستم‌های پیوسته زمانی، می‌توان رابطه ورودی و خروجی را بصورت یک معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت (مستقل از زمان و مستقل از ورودی) استخراج کرد. چنین رابطه دیفرانسیلی در برخی پدیده‌های فیزیکی مشاهده می‌شود. بعنوان مثال یک مدار RL یا RLC را در نظر بگیرید.



شکل (۲۷-۲) یک سیستم پیوسته زمانی که توسط معادله دیفرانسیلی خطی و با ضرایب ثابت قابل بیان است.

اگر ورودی این سیستم را ولتاژ $v(t)$ و خروجی آنرا جریان $i(t)$ فرض کنیم، یعنی:

$$x(t) = v(t) \quad , \quad (t) = i(t)$$

معادله دیفرانسیل مرتبط کننده ورودی $v(t)$ و خروجی $i(t)$ به صورت زیر است:

$$R \frac{dy(t)}{dt} + L \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (۵۶-۲)$$

همین امر در مورد سیستم‌های گسسته زمانی نیز مشاهده می‌شود. در این قسمت ما ابتدا توجه خود را به سیستم‌های پیوسته زمانی معطوف می‌کنیم و سپس به حالت گسسته زمانی می‌پردازیم. بعنوان یک مثال ساده فرض کنید که رابطه ورودی و خروجی یک سیستم بصورت معادله دیفرانسیل زیر باشد:

$$x(t) = 2 \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) \quad (57-2)$$

همان‌طور که از دروس ریاضیات مهندسی آموخته‌ایم، پاسخ این سیستم متشکل از دو قسمت است. یکی از پاسخ‌ها، پاسخ همگن یا پاسخ معادله بدون طرف ثانی است. شکل این پاسخ فقط بستگی به نحوه ارتباط عناصر و شکل سیستم دارد و اصلاً ارتباطی به ورودی ندارد. در مورد این مثال پاسخ همگن بصورت زیر از مساوی صفر قراردادن ورودی بدست می‌آید.

$$2 \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 0 \quad (58-2)$$

پاسخ همگن

$$y_h(t) = Ae^{-2t}u(t) \quad (59-2)$$

اما قسمت دوم پاسخ را پاسخ خصوصی $y_p(t)$ می‌نامند، که نه فقط به نحوه ارتباط عناصر مدار بلکه به ورودی مدار نیز بستگی دارد. پاسخ خصوصی یک پاسخ خاص معادله دیفرانسیل است و از معلومات قبلی می‌دانیم که مجموع این دو قسمت پاسخ کلی معادله دیفرانسیل است، یعنی:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad (60-2)$$

بعنوان مثال اگر در همین مساله، ورودی بصورت $u(t)$ باشد، یک پاسخ خاص با در نظر گرفتن پاسخ همگن به صورت $y_p(t) = k_0 u(t)$ که در آن k_0 عدد ثابتی است. مقدار k_0 با در نظر گرفتن مسئله برای $t \rightarrow \infty$ محاسبه می‌گردد. برای $t \rightarrow \infty$ مشتقات خروجی همگی صفر می‌شوند. پس:

$$1 = 2 \times 0 + 4 \times k_0 \Rightarrow y_p(t) = \frac{1}{4} u(t) \quad (61-2)$$

بنابراین پاسخ کلی معادله دیفرانسیل یا پاسخ سیستم به ورودی پله مساوی است با

$$y(t) = \left(Ae^{-2t} + \frac{1}{4} \right) u(t) \quad (62-2)$$

جهت تکمیل پاسخ احتیاج به یک مقدار اولیه داریم. فرض می‌کنیم $y(0^+) = \frac{5}{4}$ باشد در اینصورت مقدار $A = 1$ بدست می‌آید. لازم به تذکر است جهت یافتن پاسخ یکتا برای یک معادله دیفرانسیل مرتبه N ام احتیاج به N شرط کمکی داریم.

اکنون حالت کلی یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت را بصورت زیر در نظر بگیرید.

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (63-2)$$

پاسخ یک‌چنین معادله‌ای شامل مجموع دو جواب خصوصی و عمومی می‌باشد. جواب عمومی با مساوی صفر قراردادن طرف دوم بدست می‌آید که پاسخ همگن هم خوانده می‌شود و جواب خصوصی یا اجباری یک جواب خاص معادله فوق است. بنابراین

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad (64-2)$$

$y_h(t)$ پاسخ معادله همگن است.

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y_h}{dt^k} = 0 \quad (۶۵-۲)$$

در حالت کلی معادله فوق دارای جوابی بصورت زیر است

$$y_h(t) = Ae^{\alpha t} \quad (۶۶-۲)$$

با جایگذاری (۶۶-۲) در (۶۵-۲) داریم

$$Aa_N \alpha^N e^{\alpha t} + Aa_{N-1} \alpha^{N-1} e^{\alpha t} + \dots + Aa_1 \alpha e^{\alpha t} + Aa_0 e^{\alpha t} = 0 \quad (۶۷-۲)$$

$$a_0 + a_1 \alpha + \dots + a_N \alpha^N = 0 \quad (۶۸-۲)$$

معادله فوق را **معادله مفسر** می‌گویند و در حالت کلی، این معادله منجر به N جواب برای α می‌شود. حالت‌های مختلف جواب و پاسخ همگن برای هر یک از N حالت، در زیر مورد بررسی قرار می‌گیرند.

(I) اگر این جوابها (یا ریشه‌های معادله مفسر) مستقل باشند:

$$y_h(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + \dots + A_N e^{\alpha_N t} \quad (۶۹-۲)$$

(II) اگر دو ریشه مشابه و بقیه مستقل باشند:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$$

$$y_h(t) = A_1 e^{\alpha t} + A_2 t e^{\alpha t} + \dots + A_N e^{\alpha_N t} \quad (۷۰-۲)$$

و اگر تعداد ریشه‌های مشابه بیشتر باشند به همین ترتیب پاسخ را تشکیل می‌دهیم. مثلا اگر سه ریشه مشابه باشند، یعنی:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$y_h(t) = A_1 e^{\alpha t} + A_2 t e^{\alpha t} + A_3 t^2 e^{\alpha t} + A_4 e^{\alpha_4 t} + \dots + A_N e^{\alpha_N t} \quad (۷۱-۲)$$

(III) اگر دو ریشه مزدوج مختلط باشند، یعنی:

$$\alpha_1, \alpha_2 = \alpha \pm j\beta$$

$$y_h(t) = (A_1 \cos \beta t + A_2 \sin \beta t) e^{\alpha t} + A_3 e^{\alpha_3 t} + \dots + A_N e^{\alpha_N t} \quad (۷۲-۲)$$

شکل جواب خصوصی مشابه ورودی است و باید با تجربه آنرا بدست آورد. مثلا اگر $x(t) = \cos \omega_0 t$ باشد خروجی سیستم LTI حتما بصورت $y(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ می‌باشد که A و φ را باید با قراردادن در معادله دیفرانسیل بدست آورد و یا حتی می‌توان از روش تحلیل فازوری برای بدست آوردن پاسخ اجباری استفاده کرد. در واقع پاسخ اجباری همان پاسخ حالت دائم سیستم است.

مثال (۱۲-۲): مطلوبست حل معادله دیفرانسیل زیر به ازای ورودی داده شده.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad , \quad x(t) = tu(t)$$

برای بدست آوردن پاسخ عمومی، ابتدا معادله مفسر را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0 \quad \alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = -1$$

$$y_h(t) = A_1 e^{-t} + A_2 t e^{-t} = (A_1 + A_2 t) e^{-t}$$

اکنون پاسخ خصوصی سیستم را بدست می‌آوریم. با توجه به شکل سیگنال ورودی، شکل پاسخ می‌تواند فقط تا توان اول t را داشته باشد. با این همه پاسخ را عمده‌اً به صورت چندجمله‌ای درجه دو می‌نویسیم تا ببینیم پاسخ خصوصی بدست آمده چگونه است، بنابراین:

$$y_p(t) = k_1 t^2 + k_2 t + k_3 \Rightarrow y'_p(t) = 2k_1 t + k_2 \Rightarrow y''_p(t) = 2k_1$$

مقادیر فوق را در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم تا ضرایب k_3, k_2, k_1 بدست آیند.

$$2k_1 + 4k_1 t + 2k_2 + k_1 t^2 + k_2 t + k_3 = t$$

$$\left. \begin{aligned} 2k_1 + k_3 + 2k_2 &= 0 \\ 4k_1 + k_2 &= 1 \\ k_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow k_3 = -2, k_2 = 1, y_p(t) = t - 2$$

مشاهده می‌شود که پاسخ خصوصی به صورت چندجمله‌ای درجه یک بدست آمد. اکنون داریم:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = [(A_1 + A_2 t) e^{-t} + t - 2] u(t)$$

که با قراردادن در معادله برای $t \geq 0$ می‌توان صحت جواب را تایید کرد.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -A_2 e^{-t} - A_2 e^{-t} + (A_1 + A_2 t) e^{-t} = (A_1 + A_2 t) e^{-t} - 2A_2 e^{-t}$$

$$\frac{dy}{dt} = A_2 e^{-t} - (A_1 + A_2 t) e^{-t} + 1$$

$$\rightarrow (A_1 + A_2 t) e^{-t} - 2A_2 e^{-t} + 2A_2 e^{-t}$$

$$-2(A_1 + A_2 t) e^{-t} + 2 + (A_1 + A_2 t) e^{-t} + t - 2 = t$$

توجه کنید که وضعیت معادله دیفرانسیل در $t = 0^+$ توسط شرایط اولیه تعیین می‌شود. برای بدست آوردن ضرایب A_2, A_1 احتیاج به دو شرط اولیه داریم. مثلاً اگر داشته باشیم:

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = 0$$

$$A_1 = 2 \quad A_2 = 1$$

در آن صورت A_2, A_1 بدست می‌آیند:

مثال (۲-۱۳): نشان دهید سیستمی که با معادله دیفرانسیل زیر (به همراه شرط کمکی داده شده) مشخص می‌شود یک سیستم غیرخطی است.

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad y(0^+) = 1$$

حل: پاسخ همگن این معادله بصورت زیر است:

$$y_h(t) = A e^{-t} u(t)$$

و پاسخ اجباری یا خصوصی در صورتی که ورودی بصورت $x(t) = ku(t)$ باشد (k عدد ثابت)، برای $t \geq 0$ بصورت زیر است:

$$y_p(t) = k$$

برای $t \leq 0$ پاسخ اجباری صفر است (چون ورودی صفر است) و فقط پاسخ همگن $y_h(t) = Be^{-t}u(-t)$ وجود دارد. بنابراین پاسخ در حالت کلی بصورت زیر است

$$y(t) = \begin{cases} ku(t) + Ae^{-t}u(t) & t \geq 0 \\ Be^{-t}u(-t) & t \leq 0 \end{cases}$$

و با اعمال شرط اولیه می توان تنها مجهول A را بدست آورد. بنابراین:

$$y(0^+) = 1 \Rightarrow A = 1 - k$$

برای بدست آوردن B از شرط پیوستگی پاسخ در $t = 0$ یا $y(0^+) = y(0^-)$ استفاده می کنیم، یعنی:

$$y(0^+) = 1 \Rightarrow y(0^-) = B = 1$$

بنابراین:

$$y(t) = \begin{cases} k(1 - e^{-t})u(t) + e^{-t}u(t) & t \geq 0 \\ e^{-t}u(-t) & t \leq 0 \end{cases}$$

دیده می شود که اگر ورودی را در عدد ثابتی ضرب کنیم یک قسمت از خروجی بی تاثیر از این ضریب ثابت k باقی می ماند. بنابراین k هر چه باشد یک قسمت از خروجی که در حقیقت پاسخ ورودی صفر است بی تغییر می ماند لذا سیستم غیرخطی است. با کمی دقت متوجه می شویم که علت بوجود آمدن یک پاسخ افزاینده (بر حسب زمان) برای $t \leq 0$ ، تلاش سیستم برای ارضای شرایط اولیه غیر صفر در لحظه اعمال ورودی است. اگر چه شرایط اولیه فقط در قسمت $t \geq 0$ از جواب اعمال می شود اما اگر جمله پاسخ برای $t \leq 0$ ، از پاسخ حذف شود، معادله دیفرانسیل ارضاء نمی شود. چون با در نظر گرفتن فقط جمله اول پاسخ برای $t \geq 0$ داریم:

$$y(t) = k(1 - e^{-t})u(t) + e^{-t}u(t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = ke^{-t}u(t) - e^{-t}u(t) - \delta(t)$$

$$\frac{dy}{dt} + y(t) = -\delta(t) + ku(t)$$

دیده می شود که یک جمله ضربه در لحظه صفر باقی می ماند. این جمله با در نظر گرفتن قسمت دوم پاسخ در $t \leq 0$ بوجود می آید.

دیدیم که در حالت کلی یک معادله دیفرانسیل با شرایط کمکی دلخواه غیر صفر بیانگر یک سیستم غیرخطی است. اکنون نشان می دهیم که تحت شرایط کمکی خاصی یک معادله دیفرانسیل با شرایط کمکی بیانگر یک سیستم خطی خواهد شد.

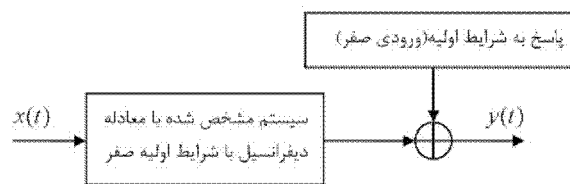
مثال (۲-۱۴): در مثال ۲-۱۳ اگر $y(0^+) = 0$ باشد چه تغییری در پاسخ رخ می‌دهد؟
 حل: در اینصورت سیستم خطی می‌شود و پاسخ سیستم برای $t \leq 0$ وجود ندارد. بنابراین در این حالت پاسخ کلی به ورودی $x(t) = ku(t)$ بصورت زیر است:

$$y(t) = ku(t) + Ae^{-t}$$

و اگر شرط اولیه $y(0^+) = 0$ باشد ضریب مجهول $A = -k$ بدست می‌آید. پس

$$y(t) = k(1 - e^{-t})u(t)$$

دیده می‌شود که اگر ورودی k برابر شود خروجی نیز k برابر می‌شود پس سیستم خطی است. اگر چه سیستم‌هایی که بوسیله یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت نمایش داده می‌شوند، در صورت داشتن شرایط کمکی در حالت کلی غیر صفر، خطی نیستند. در این حالت، پاسخ خصوصی فقط نسبت به ورودی (با در نظر گرفتن شرایط اولیه سیستم برابر صفر) رابطه خطی دارد. هم‌چنین، پاسخ همگن (یعنی پاسخ سیستم با در نظر گرفتن سیگنال ورودی برابر صفر) فقط نسبت به شرایط اولیه غیر صفر یک رابطه خطی دارد. به عبارت دیگر، می‌توان سیستم LTI با شرایط اولیه غیر صفر را بصورت خطی افزایشی (incremental linear) نمایش داد. دیاگرام بلوکی چنین سیستمی در شکل (۲-۲۸) نشان داده شده است.



شکل (۲-۲۸): نمایش معادله دیفرانسیل با شرایط کمکی غیر صفر بصورت یک سیستم خطی افزایشی

۲-۸ حالت استراحت اولیه^۱

برای اینکه سیستم نشان داده شده بوسیله معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت علی باشد، باید انتخاب خصوصی را برای شرایط اولیه انجام دهیم. این انتخاب را استراحت اولیه گویند. استراحت اولیه سیستم علی هنگامی برآورده می‌شود که خروجی سیستم و کلیه مشتقات آن دقیقاً قبل از اعمال ورودی برابر صفر باشند. مثلاً اگر ورودی در لحظه t_0^+ به سیستم اعمال شده باشد، خروجی سیستم و کلیه مشتقات آن در لحظه t_0^- برابر صفر در نظر گرفته شوند. به بیان ریاضی:

$$x(t) = 0 \quad \forall t \leq t_0^+ \quad \Leftrightarrow \quad (m)(t_0^-) = 0 \quad (۲-۷۳)$$

1-Initial Rest

بالا نویس (n) بیانگر مشتق مرتبه (n) ام است. با انتخاب شرائط استراحت اولیه برای معادله دیفرانسیل خطی با ضرائب ثابت، این معادله دیفرانسیل می تواند بیانگر یک سیستم علی، خطی و غیر متغیر با زمان نیز باشد. حقیقت فوق را طی یک مثال بخوبی می توان نشان داد.

مثال (۲-۱۵): معادله دیفرانسیل زیر را به ازای دو ورودی داده شده و شرط اولیه یکسان داده شده، حل کنید.

$$\frac{dy}{dt} + 2y = x \quad y(0) = 0, \quad x_1(t) = 0 \quad x_2(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ 1 & t > -1 \end{cases}$$

حل: شرط اولیه $y(0) = 0$ برای هر دو ورودی صادق است. برای ورودی اول، چون سیستم خطی است، پس جواب یا پاسخ کلی عبارت است از:

$$y(t) = 0$$

برای بدست آوردن جواب عمومی ابتدا معادله مفسر را تشکیل داده و آنرا حل می کنیم

$$\alpha + 2 = 0 \rightarrow \alpha = -2 \rightarrow y_h(t) = Ae^{-2t}$$

و جواب خصوصی، برای $t > -1$ ، برابر مقدار ثابتی می شود، که این مقدار ثابت در زیر محاسبه می شود:

$$2A_0 = 1 \Rightarrow A_0 = \frac{1}{2}$$

پس پاسخ کلی (برای $t > -1$) از مجموع دو پاسخ عمومی و خصوصی بصورت زیر بدست می آید:

$$y(t) = Ae^{-2t} + \frac{1}{2}$$

با اعمال شرط اولیه $y(0) = 0$ داریم:

$$(t > -1) \quad y_1(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}$$

اما این جواب برای $t > -1$ فقط صادق است. برای $(t < -1)$ پاسخ عمومی همان Ae^{-2t} است ولی جواب خصوصی صفر می شود چون ورودی برای $t > -1$ اعمال شده است. پس:

$$y_2(t) = Be^{-2t}, \quad t < -1$$

که در $t = -1$ باید هر دو جواب برابر باشند. پس:

$$Be^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2 \quad y_2(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2\right)e^{-2(t+1)} \quad t < -1$$

اما این سیستم علی نیست چون با وجود اینکه ورودی ها به ازای $t < -1$ یکسان هستند خروجی ها یکسان نیستند.

$$x_1(t < -1) = x_2(t < -1), \quad y_1(t < -1) \neq y_2(t < -1)$$

ولی با انتخاب $y(-1) = 0$ که شرایط استراحت اولیه را فراهم می آورد سیستمی که با معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dt} + 2y = x$ داده شده است برای $t < -1$ برای هر دو ورودی یک جواب می دهد، که این جواب برابر صفر است. در اینصورت فقط لازم است معادله را برای $t > -1$ حل کنیم.

چون سیستم علی است به ازای $t < -1$ قبل از اینکه ورودی اعمال شود خروجی نمی‌تواند ظاهر شود.

$$A = -\frac{1}{2}e^{-2}$$

با اعمال شرط استراحت اولیه $y(-1) = 0$ ، داریم:

و با قرار دادن این مقدار در $y(t)$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2(t+1)} & t > -1 \\ y(t) = 0 & t < -1 \end{cases}$$

سادگی می‌توان ثابت کرد که ارضاء حالت استراحت اولیه باعث می‌شود که علاوه بر خطی و علی شدن، سیستم مستقل از زمان نیز بشود.

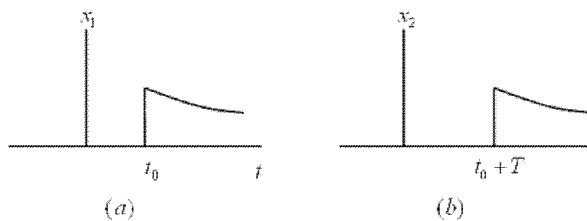
مثال (۲-۱۶): نشان دهید به کمک ارضاء شرایط استراحت اولیه معادله دیفرانسیل بیانگر یک سیستم مستقل از زمان می‌شود.

حل: در مثال قبل فرض کنید $y_1(t)$ پاسخ به ورودی $x_1(t)$ نشان داده شده در شکل (۲-۲۹) باشد. همچنین فرض کنید این سیستم در حالت استراحت اولیه باشد.

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} + 2y_1(t) = x_1(t) \\ y_1(t_0) = 0 \end{cases}$$

اکنون فرض کنید ورودی انتقال پیدا کند، یعنی $x_2(t) = x_1(t-T)$ دیده می‌شود که $x_2(t < t_0 + T) = 0$ بنابراین پاسخ $y_2(t)$ به این ورودی باید معادله دیفرانسیل به همراه شرط کمکی زیر را ارضاء کند.

$$\begin{cases} \frac{dy_2(t)}{dt} + 2y_2(t) = x_2(t) \\ y_2(t_0 + T) = 0 \end{cases}$$



شکل (۲-۲۹) ورودی‌های مثال ۲-۱۶

با جایگذاری ساده می‌بینیم که پاسخ $y_2(t) = y_1(t-T)$ در معادله فوق صادق است یعنی جفت معادله دوم را بصورت اولی در می‌آورد، پس سیستم مستقل از زمان است.

۲-۹ تشریح سیستم‌های LTI گسسته زمانی با استفاده از معادلات تفاضلی

یک معادله تفاضلی از مرتبه N ، در حالت کلی، بصورت زیر است:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (74-2)$$

در رابطه فوق M می‌تواند بزرگتر یا کوچکتر از N باشد. معادلات فوق دقیقاً به همان طریقی که برای معادلات دیفرانسیل ارائه شد قابل حل هستند. بنابراین پاسخ در حالت کلی متشکل از دو پاسخ خصوصی یا اجباری و همگن یا عمومی است.

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] \quad (75-2)$$

پاسخ همگن از مساوی صفر قرار دادن ورودی بدست می‌آید و جواب خصوصی یک جواب خاص معادله تفاضلی است که مشابه ورودی است. اکنون ابتدا پاسخ همگن را بدست می‌آوریم. برای این کار طرف دوم را در (74-2) مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = 0 \quad (76-2)$$

می‌توان تحقیق کرد که جوابی بصورت $y_h[n] = A\alpha^n$ در معادله فوق صدق می‌کند.

$$a_N A \alpha^{n-N} + a_{N-1} A \alpha^{n-N+1} + \dots + a_1 A \alpha^{n-1} + a_0 A \alpha^n = 0 \quad (77-2)$$

با جداسازی عامل مشترک داریم

$$A \alpha^{n-N} (a_N + a_{N-1} \alpha + a_{N-2} \alpha^2 + \dots + a_1 \alpha^{N-1} + a_0 \alpha^N) = 0$$

بنابراین

$$a_0 \alpha^N + a_1 \alpha^{N-1} + \dots + a_{N-2} \alpha^2 + a_{N-1} \alpha + a_N = 0 \quad (78-2)$$

معادله فوق معادله مفسر از مرتبه N ام می‌باشد و در حالت کلی N جواب دارد و در حالت کلی دو حالت برای جواب‌ها وجود خواهد داشت.

(I) N ریشه $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ مستقل یا متفاوت باشند، در این صورت پاسخ همگن بصورت زیر است

$$y_h[n] = A_1 \alpha_1^n + A_2 \alpha_2^n + \dots + A_N \alpha_N^n \quad (79-2)$$

(II) اگر دو تا از ریشه‌ها مشابه و بقیه مستقل باشند، یعنی $(\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha)$ ، در این صورت پاسخ همگن بصورت زیر است:

$$y_h[n] = A_1 \alpha^n + A_2 n \alpha^n + A_3 \alpha^n + \dots + A_N \alpha^n \quad (80-2)$$

اگر سه ریشه مشابه و بقیه مستقل باشند $(\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha)$ ، در این حالت نیز مشابه حالت‌های قبل پاسخ همگن بصورت زیر است:

$$y_h[n] = (A_1 + A_2 n + A_3 n^2) \alpha^n + A_4 \alpha^n + \dots + A_N \alpha^n \quad (81-2)$$

در این قسمت به شکل جواب خصوصی که بستگی به نوع ورودی دارد می‌پردازیم. در برخی از حالات از نوع ورودی می‌توان شکل پاسخ خصوصی را حدس زد.

اگر ورودی بصورت زیر باشد:

$$x[n] = n^k \quad (۸۲-۲)$$

در اینصورت، شکل پاسخ خصوصی در حالت کلی شامل یک چندجمله‌ای کامل از مرتبه k است، یعنی

$$y_p[n] = P_1 n^k + P_2 n^{k-1} + \dots + P_{k-1} n + P_k \quad (۸۳-۲)$$

مقادیر مجهول P_1 الی P_k با قرار دادن (۸۳-۲) در (۷۴-۲) بدست می‌آیند.

یک حالت معروف دیگر که در عمل زیاد دیده می‌شود این است که ورودی $x[n]$ بصورت نمایی، مطابق رابطه زیر باشد:

$$x[n] = \alpha^n \quad (۸۴-۲)$$

در این صورت سه حالت ممکن است رخ دهد.

۱- اگر α ریشه معادله مفسر نباشد در این صورت شکل پاسخ خصوصی بصورت زیر است

$$y[n] = P\alpha^n \quad (۸۵-۲)$$

مجهول P با قرار دادن (۸۵-۲) در (۷۴-۲) بدست می‌آید.

۲- اگر α ریشه معادله مفسر باشد شکل پاسخ خصوصی بصورت زیر است

$$y_p[n] = P_1 n \alpha^n + P_2 \alpha^n \quad (۸۶-۲)$$

۳- اگر α ریشه مضاعف یکبار تکرار شده باشد شکل پاسخ خصوصی بصورت زیر است

$$y_p[n] = P_1 n^2 \alpha^n + P_2 n \alpha^n + P_3 \alpha^n \quad (۸۷-۲)$$

و اگر α بیش از یک بار تکرار شده باشد به همین صورت پیش می‌رویم.

در تمام روابط فوق P_i ها اعداد ثابتی هستند که با قرار دادن رابطه متناظر برای $y_p[n]$ در (۷۴-۲) بدست می‌آیند.

مثال (۱۷-۲): مطلوبست حل معادله تفاضلی زیر با فرض شرایط اولیه مذکور و ورودی داده شده.

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n] \quad x[n] = n^2 u[n], y[0] = 0$$

حل: بدست آوردن پاسخ همگن،

$$y_h[n] + 2y_h[n-1] = 0$$

با قرار دادن $y_h[n] = A\alpha^n$ در معادله فوق خواهیم داشت:

$$A\alpha^n + 2(A\alpha^{n-1}) = 0 \Rightarrow \alpha^n + 2\alpha^{n-1} = 0 \Rightarrow \alpha = -2$$

$$y_h[n] = A(-2)^n$$

بنابراین پاسخ همگن بدین صورت است:

بدست آوردن پاسخ خصوصی،

$$y_p[n] + 2y_p[n-1] = n^2$$

فرم پاسخ خصوصی به استثناء سه ضریب مجهول مطابق رابطه زیر است:

$$y_p[n] = P_1 n^2 + P_2 n + P_3$$

وسه ضریب مجهول با قرار دادن پاسخ خصوصی در (۷۴-۲) بدست می‌آیند:

$$P_1 n^2 + P_2 n + P_3 + 2P_1(n-1)^2 + 2P_2(n-1) + P_3 = n^2$$

با حل معادله فوق داریم:

$$P_1 = \frac{1}{3}, \quad P_2 = \frac{4}{9}, \quad P_3 = \frac{1}{9}$$

بنابراین، پاسخ خصوصی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$y_p[n] = \frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{9}n + \frac{1}{9}$$

و رابطه کلی پاسخ به صورت زیر است:

$$y[n] = A(-2)^n + \frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{9}n + \frac{1}{9}$$

$$y[0] = A + \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{9}$$

و با اعمال شرایط اولیه می‌توان ضریب A را بدست آورد:

پاسخ معادله تفاضلی، با شرایط اولیه داده شده صفر، برابر است با:

$$y[n] = \left[-\frac{1}{9}(-2)^n + \frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{9}n + \frac{1}{9} \right] u[n]$$

توجه شود که شرط اولیه $y[0] = 0$ ، با توجه به ورودی $x[n] = n^2 u[n]$ که در حقیقت در لحظات

$n \geq 1$ به سیستم اعمال می‌شود، شرط استراحت اولیه محسوب می‌شود.

سیستم های با پاسخ ضربه محدود (FIR) و سیستم های با پاسخ ضربه نامحدود (IIR)

در رابطه (۷۴-۲)، اگر $N = 0$ باشد در آنصورت از طرف چپ تنها یک جمله باقی می‌ماند، یعنی:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} x[n-k] \quad (۸۸-۲)$$

که این رابطه بدون هیچ شرط کمکی قابل حل است. چنین معادله‌ای را غیربازگشتی گویند و پاسخ

ضربه این سیستم به صورت زیر است:

$$h[n] = \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} \delta[n-k] \quad (۸۹-۲)$$

چون مدت وجود پاسخ ضربه، محدود به زمان مشخصی (بین صفر و M) است به آن یک سیستم FIR

می‌گویند که به معنی سیستم با پاسخ ضربه محدود^۱ می‌باشد. چنین معادلاتی به شرایط کمکی احتیاج

ندارند. اما محاسبه خروجی سیستم در هر لحظه با استفاده از معادله تفاضلی سیستم، رابطه (۷۴-۲)،

وقتی که $N \geq 1$ است احتیاج به N شرط کمکی دارد. چنین معادله‌ای را در این حالت یک معادله

1. Finite Impulse Response

بازگشتی می‌گویند، و مدت وجود پاسخ ضربه چنین سیستمی نامحدود است. چنین سیستمی به سیستم با پاسخ ضربه نامحدود^۱ (سیستم IIR) معروف است که در مثال (۲-۱۸)، در زیر، یک نمونه از آنها دیده می‌شود.

مثال (۲-۱۸): مطلوب است حل معادله تفاضلی زیر که بیانگر یک سیستم با پاسخ ضربه نامحدود (سیستم IIR) می‌باشد. در معادله تفاضلی زیر $N=1$ است.

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$$

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1]$$

اگر $y[-1] = \alpha$ و $x[n] = k\delta[n]$ باشد داریم:

$$y[0] = x[0] + \frac{1}{2}y[-1] = k + \frac{1}{2}\alpha$$

$$y[1] = x[1] + \frac{1}{2}y[0] = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{2}\alpha\right)$$

$$y[2] = x[2] + \frac{1}{2}y[1] = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(k + \frac{1}{2}\alpha\right)$$

.....

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(k + \frac{1}{2}\alpha\right) \quad n \geq 0$$

و برای $n < 0$ نیز با قرار دادن مقادیر $y[n]$ بدست آمده در هر مرحله، در مرحله بعدی داریم:

$$y[-1] = x[-1] + \frac{1}{2}y[-2] = \alpha$$

$$y[-2] = 2\alpha$$

$$y[-3] = 2^2\alpha$$

$$y[-n] = (2)^{n-1}\alpha \Rightarrow y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}; \quad n \leq -1$$

چنین سیستمی غیرعلی است. در این حالت علاوه بر غیرعلی بودن مشاهده می‌شود که سیستم غیرخطی نیز هست چون یک جمله در خروجی وجود دارد که اصلاً بستگی به ورودی ندارد و اگر ورودی k برابر باشد آن جمله بطور ثابت در خروجی ظاهر می‌شود. این جمله در حقیقت پاسخ ورودی صفر سیستم است که باعث غیرخطی و در حالت کلی خطی افزایشی شدن سیستم می‌گردد.

برای اینکه سیستم علی و خطی شود باید شرایط استراحت اولیه را اعمال کنیم که عبارت است از:

$$y[-1] = 0$$

2- Infinite Impulse Response



در این صورت کافی است معادله را برای $n \geq 0$ حل کرد:

$$y[0] = x[0] + \frac{1}{2} y[-1] = k$$

$$y[1] = x[1] + \frac{1}{2} y[0] = \frac{1}{2} k$$

...

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n k$$

$$y[n] = k \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

بنابراین در حالت کلی می‌توان نوشت:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

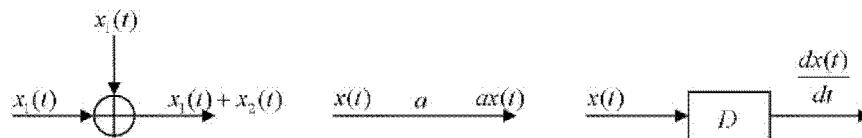
پاسخ فوق به ازاء $x[n] = k\delta[n]$ بدست آمد. اما برای $x[n] = \delta[n]$ داریم:

که این در حقیقت پاسخ ضربه سیستم است.

توجه شود که مانند حالت پیوسته زمانی فرض شرایط استراحت اولیه در مورد سیستم‌های گسسته زمانی باعث می‌شود که سیستم خطی، مستقل از زمان و علی گردد.

۲-۱۰ نمایش معادلات دیفرانسیل به صورت نمودار جعبه‌ای^۱

یکی از روش‌های ساخت عملی و بررسی پاسخ یک سیستم که رابطه ورودی و خروجی آن به صورت یک معادله دیفرانسیل خطی با ضریب ثابت داده شده است، استفاده از شبیه‌سازی در کامپیوتر می‌باشد. شبیه‌سازی یک سیستم جهت بررسی عملکرد آن بسیار ارزان‌تر و بی‌خطر می‌باشد. در حالیکه گاهی اوقات ساخت سیستم اصلی و آزمایش آن مستلزم صرف هزینه فراوان و همچنین خطرات فراوان می‌باشد. برای شبیه‌سازی لازم است معادله دیفرانسیل را بکمک نمودار جعبه‌ای نمایش داد. لازم به ذکر است سیستم‌هایی که در این فصل توسط معادلات دیفرانسیل بیان می‌شوند همگی خطی هستند، بعبارت دیگر معادلات دیفرانسیل دارای شرایط استراحت اولیه هستند. در این نمایش‌ها از سه عملگر جمع دو سیگنال، ضرب، و مشتق با دیاگرام بلوکی با نمایش قراردادی زیر استفاده می‌کنیم.



شکل (۲-۳۰): قراردادهای نمودار جعبه‌ای برای عملیات جمع و ضرب و مشتق

1-Block Diagram

جهت آشنایی بیشتر به مثال (۲-۱۹) و (۲-۲۰) توجه کنید. اما لازم است به یک مساله عملی در اینجا اشاره داشته باشیم و آن این است که چون از مشتق‌گیر در مدارات عملی کمتر استفاده می‌شود بلوک دیاگرام را با استفاده از انتگرال‌گیر رسم می‌کنیم. علت استفاده کم از مشتق‌گیر در مدارات این است که به ازای یک تغییر بسیار کوچک در مدت زمان خیلی کوچک از خود خاصیت ناپایداری نشان می‌دهد (نقاط انفصال). بطور کلی، یک مشتق‌گیر با ازاء هر گونه اغتشاش (یعنی تغییر محدود در دامنه سیگنال ورودی در فاصله زمانی بسیار کوچک) ناپایدار می‌شود، اما یک انتگرال‌گیر با اینکه بازهم ناپایدار است، ناپایداریش به ازای اعمال ورودی ثابت در مدت زمان نامحدود ظاهر می‌شود که البته از لحاظ فیزیکی غیرممکن است.

مثال (۲-۱۹): یک نمودار جعبه‌ای رسم کنید که رابطه ورودی و خروجی‌اش به صورت زیر باشد:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t)$$

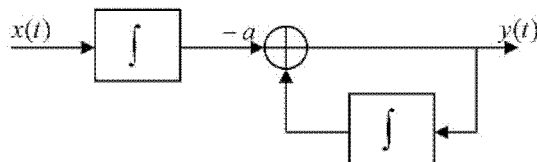
حل: برای شروع، ابتدا از طرفین رابطه فوق، به تعداد بزرگترین درجه مشتق موجود در رابطه، انتگرال می‌گیریم تا مشتق جای خود را به انتگرال دهد.

$$\int_{-\infty}^t \frac{dy(t)}{dt} + \int_{-\infty}^t ay(t) dt = \int_{-\infty}^t x(t) dt$$

$$y(t) + \int_{-\infty}^t ay(t) dt = \int_{-\infty}^t x(t) dt$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(t) dt - \int_{-\infty}^t ay(t) dt$$

اکنون نمودار جعبه‌ای این سیستم به سادگی قابل نمایش است.



شکل (۲-۳۱): نمودار جعبه‌ای سیستم مثال (۲-۱۹)

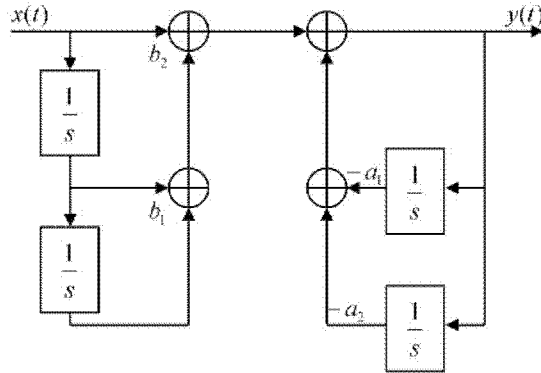
مثال (۲-۲۰): مطلوبست نمودار جعبه‌ای معادله دیفرانسیل زیر:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

از طرفین معادله دوبار انتگرال می‌گیریم تا مشتق‌ها از بین بروند. گاهی بلوک انتگرال‌گیر را با $\frac{1}{s}$ و بلوک مشتق‌گیری را با s مشخص می‌کنند که در فصل تبدیل لاپلاس علت امر مشخص می‌شود.

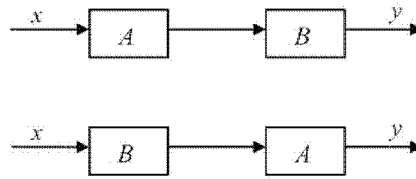
$$y(t) + a_1 \int_{-\infty}^t y(t) dt + a_2 \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t y(t) dt = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t x(t) dt + b_1 \int_{-\infty}^t x(t) dt + b_2 x(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t x(t) dt + b_1 \int_{-\infty}^t x(t) dt + b_2 x(t) - a_1 \int_{-\infty}^t y(t) dt - a_2 \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t y(t) dt$$



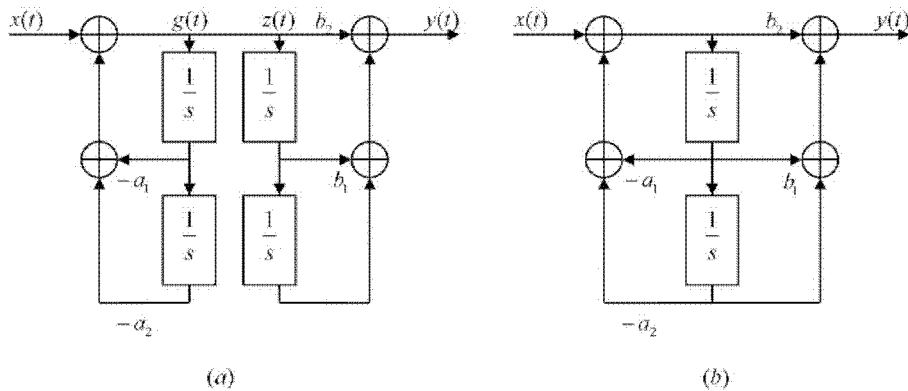
شکل (۲-۳۲): نمودار جعبه‌ای سیستمی مربوط به مثال (۲-۲۰)

به این طریقه نمایش، شکل مستقیم نوع I، (Direct form I) نام نهاده‌اند اما طریقه ساخت دیگری با حداقل تعداد جعبه‌های انتگرال امکان دارد و آن وقتی است که از جابجایی سیستم‌ها استفاده کنیم.



شکل (۲-۳۳): خاصیت جابجایی در سیستم‌های LTI

بدین ترتیب می‌توان با جابجا کردن دو بلوک فوق به سیستمی با حداقل تعداد بلوک‌های انتگرال‌گیر رسید.



شکل (۲-۳۴): طریقه تشکیل یک نمودار جعبه‌ای به شکل مستقیم نوع II

در مرحله اول با جابجا کردن دو قسمت شکل (۲-۳۲) به شکل (۲-۳۴-a) می‌رسیم. در این شکل چون $y(t) = z(t)$ است می‌توان عملیات انتگرال‌گیری در دو مسیر را توسط فقط یک مسیر انجام داد. بنابراین، شکل (۲-۳۴-b) حاصل می‌شود.

تمرین (۲-۹): نمودار جعبه‌ای سیستمی که بوسیله معادله زیر مشخص می‌شود را رسم کنید.

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 5y = \frac{dx}{dt}$$

۲-۱۱ نمایش معادلات تفاضلی به کمک نمودار جعبه‌ای

بدلیل کاربرد سریع، ارزان و وسیع رایانه‌ها، شبیه‌سازی سیستم‌های گسسته زمانی به کمک نمودار جعبه‌ای، که قابل تعریف در رایانه‌ها هستند، بسیار مفید و جالب توجه است. حتی در بعضی از موارد نمودار سیستم‌های پیوسته زمانی را توسط تکنیک‌های خاصی به حوزه گسسته زمانی منتقل می‌کنند تا بتوانند آنها را شبیه‌سازی نمایند. در اینجا نیز از همان سه عملگر قراردادی استفاده می‌شود با این تفاوت که در مورد سیستم‌های گسسته زمانی، عنصر مشتق تبدیل به عنصر تاخیر می‌گردد.

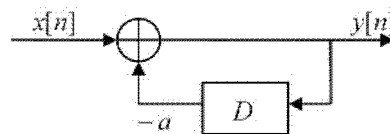


شکل (۲-۳۵): عنصر تاخیری در حوزه گسسته زمان

این عنصر پایدار است و به سادگی قابل ساخت نرم‌افزاری یا سخت‌افزاری می‌باشد. مثال (۲-۲۱): مطلوب است ساخت یک سیستم گسسته زمان که توسط معادله تفاضلی زیر توصیف می‌گردد.

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n]$$

بلوک دیاگرام سیستم فوق بصورت زیر است.

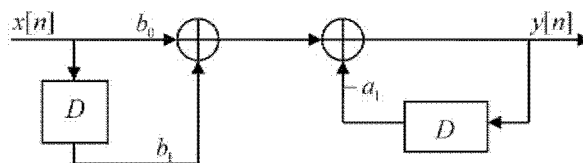


شکل (۲-۳۶): نمودار بلوکی معادله تفاضلی مثال (۲-۲۱)

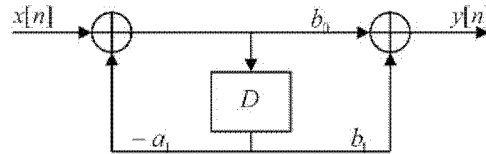
مثال (۲-۲۲): معادله تفاضلی زیر را توسط نمودار بلوکی نمایش دهید.

$$y[n] + a_1 y[n-1] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$$

نمودار جعبه‌ای سیستم فوق به صورت زیر است.



شکل (۳۷-۲): نمایش جعبه‌ای معادله تفاضلی مثال (۲۲-۲) به روش مستقیم نوع I
 اگر از خاصیت جابجایی سیستم‌های خطی که ناشی از خاصیت جابجایی جمع کانولوشن است استفاده
 شود نمودار جعبه‌ای فوق بصورت زیر خلاصه می‌شود.



شکل (۳۸-۲): نمودار جعبه‌ای معادله تفاضلی مثال (۲۲-۲) به روش مستقیم نوع II

در حالت کلی اگر معادله تفاضلی یک سیستم بصورت زیر باشد:

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^N b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right\} \quad (۹۰-۲)$$

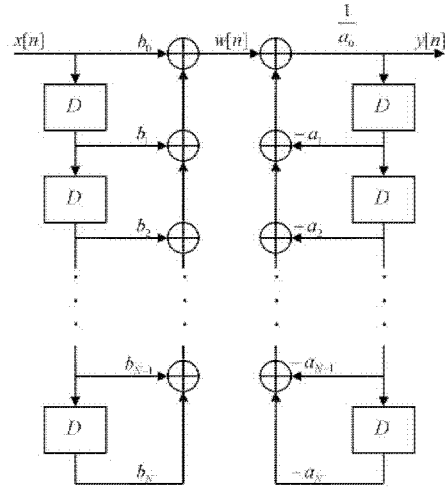
در آن صورت نمودار جعبه‌ای روش مستقیم نوع I برای این سیستم بصورت شکل (۲-۳۹-a) رسم می‌شود. قسمت سمت راست این نمودار بیانگر ضرایب a_k بوده و مسیرهای پس‌خور را مشخص می‌سازند. اما سمت چپ نمودار مربوط به مسیرهای جلوخور (ضرایب b_k) می‌باشد. شکل (۲-۳۹-b) همان سیستم شکل (۲-۳۹-a) است و فقط با استفاده از خاصیت جابجایی سیستم‌های LTI دو قسمت سمت چپ و راست آن جابجا شده‌اند. در شکل (۲-۳۹-c) با توجه به عملکرد یکسان عناصر تاخیر که در مجاورت یکدیگر قرار دارند، سیستم ساده‌تر شده و به صورت مستقیم نوع II رسم شده است.

مثال (۲-۲۳): در این مثال می‌خواهیم به بررسی یک سیستم LTI با معادله دیفرانسیل زیر بپردازیم. یک سیستم LTI پیوسته زمان در استراحت اولیه که با معادله دیفرانسیل زیر مشخص می‌شود را در نظر بگیرید

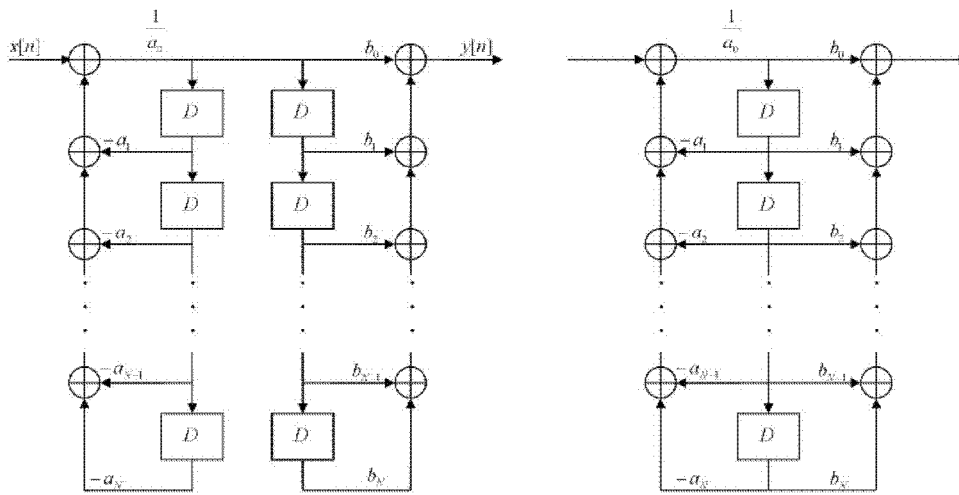
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t) \quad (۹۱-۲)$$

پاسخ پله آن بدین صورت بدست می‌آید:

$$s(t) = y_h(t) + y_p(t)$$



(a)



(b)

(c)

شکل (۲-۳۹): نمایش سیستم به صورت مستقیم I و II برای معادله تفاضلی (۲-۹۰)

که در آن $y_h(t)$ پاسخ معادله همگن و $y_p(t)$ یک پاسخ خصوصی از معادله فوق است. معادله مشخصه بدین صورت است:

$$P^2 + P - 2 = 0$$

این معادله دو پاسخ بصورت $p = -2$ و $p = 1$ دارد.

$$y_h(t) = Ae^{-2t} + Be^{+t}$$

بنابراین برای پاسخ همگن داریم:

به ازای $t > 0$ پاسخ دائمی ما چنین است (توجه کنید که در $t > 0$ چون خروجی برابر مقدار ثابتی می‌شود، پس مشتقش صفر است). این پاسخ با توجه به ورودی پله که به ازاء $t > 0$ دارای مقدار ثابتی است بدست می‌آید.

$$-2y_p(t) = 1 \Rightarrow y_p(t) = -\frac{1}{2}$$

$$s(t) = (Ae^{-2t} + Be^t - \frac{1}{2})u(t)$$

پس پاسخ پله در حالت کلی برابر است با:

اکنون باید ضرایب را محاسبه کرد. از معلوماتمان در مورد استراحت اولیه استفاده می‌کنیم. شرایط استراحت اولیه را به صورت مقابل داریم:

$$s(0) = s'(0) = 0$$

$$A + B - \frac{1}{2} = 0$$

$$-2A + B = 0$$

با قرار دادن این معلومات در رابطه پاسخ پله داریم:

از حل این دو معادله می‌توان مجهولات A و B را بدست آورد:

$$A = \frac{1}{6}, B = \frac{1}{3}$$

بنابراین پاسخ پله برابر است با

$$s(t) = \left[\frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{2} \right] u(t)$$

اکنون پاسخ ضربه را می‌توان از دو راه بدست آورد.

الف) چون ورودی ضربه تنها در یک لحظه بسیار کوتاه ظاهر می‌شود، می‌توان آن را بعنوان محرک ایجادکننده پاسخ همگن در نظر گرفت. بنابراین می‌توان تصور کرد که تنها پاسخ همگن در ایجاد پاسخ ضربه دخالت دارد و با استفاده از خواص تابع ضربه تنها باید ضرایب مجهول را بدست آورد یعنی تنها شرایط اولیه سیستم تغییر خواهند کرد.

معادله دیفرانسیل سیستم با طرف دوم بصورت $\delta(t)$ بصورت زیر است:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = \delta(t)$$

پاسخ همگن نیز قبلاً به صورت زیر بدست آمده است (ضرایب a و b مجهول هستند).

$$y(t) = [ae^{-2t} + be^t] u(t)$$

به مشتقات اول و دوم پاسخ همگن نیز جهت جایگذاری در معادله دیفرانسیل سیستم احتیاج داریم:

$$y'(t) = [-2ae^{-2t} + be^t] u(t) + (a+b)\delta(t)$$

$$y''(t) = [4ae^{-2t} + be^t] u(t) + (-2a+b)\delta(t) + (a+b)\delta'(t)$$

اکنون مقادیر فوق را در معادله دیفرانسیل مشخص‌کننده سیستم قرار می‌دهیم و در طرفین ضرایب را مساوی قرار می‌دهیم.

$$(4ae^{-2t} + be^t) u(t) + (-2a+b) \delta(t) + (a+b) \delta'(t) \\ + (-2ae^{-2t} + be^t) u(t) + (a+b) \delta(t) - 2(ae^{-2t} + be^t) u(t) = \delta(t)$$

از مساوی قرار دادن ضرایب جملات مشابه در دو طرف رابطه، مجهولات a و b را بدست می‌آید.

$$\begin{cases} -a + 2b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

از حل این دو رابطه $a = -\frac{1}{3}$ و $b = \frac{1}{3}$ بدست می‌آوریم.

$$h(t) = y(t) = \left[\frac{-1}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^t \right] u(t)$$

و بدین ترتیب پاسخ ضربه بدست می‌آید:

(ب) می‌توان پاسخ ضربه را مستقیماً از مشتق پاسخ پله بدست آورد.

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \left[\frac{-1}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^t \right] u(t)$$

مثال (۲-۲۴): فرض کنید رابطه یک سیستم LTI با ورودی آن بدین صورت است

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(t-2) d\tau$$

پاسخ ضربه سیستم را بدست آورید.

حل: پاسخ ضربه سیستم چنین است (بجای $x(t)$ یا ورودی، $\delta(t)$ قرار می‌دهیم)

$$h(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau-2) d\tau$$

و با استفاده از خواص تابع ضربه می‌توان نوشت:

$$= \int_{-\infty}^t e^{-(t-2)} \delta(\tau-2) d\tau = e^{-t+2} \int_{-\infty}^t \delta(\tau-2) d\tau$$

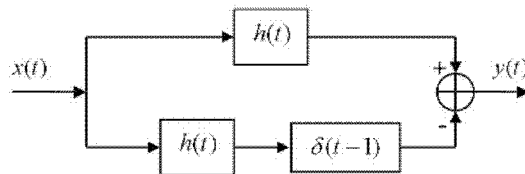
$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

چون

با یک تغییر متغیر، می‌توان انتگرال ظاهر شده در جواب $h(t)$ را به صورت زیر تبدیل کرد:

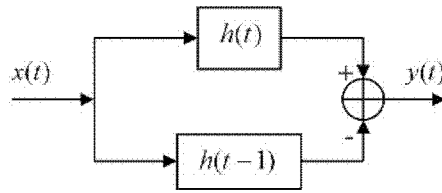
$$h(t) = e^{-t+2} \int_{-\infty}^{t-2} \delta(u) du = e^{-(t-2)} u(t-2)$$

مثال (۲-۲۵): پاسخ ضربه کلی سیستم زیر را بدست آورید (فرض کنید ضابطه $h(t)$ معلوم است)



شکل (۲-۴۰): سیستم مثال (۲-۲۵)

حل: حل این سیستم معادل حل سیستم زیر است:



شکل (۲-۴۱): سیستم معادل شکل (۲-۴۰)

چون اگر رابطه ورودی و خروجی را برای شکل (۲-۴۰) بنویسیم، داریم:

$$y(t) = x(t) * h(t) - x(t) * \delta(t-1) * h(t)$$

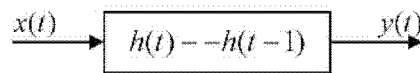
و طبق خاصیت توزیع پذیری کانولوشن می توان نوشت:

$$y(t) = x(t) * [h(t) - \delta(t-1) * h(t)]$$

$$h(t) * \delta(t-1) = h(t-1)$$

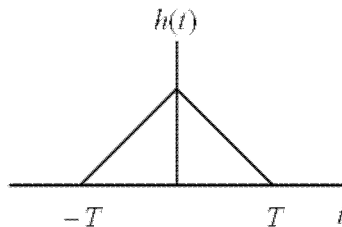
$$y(t) = x(t) * [h(t) - h(t-1)]$$

بنابراین، سیستم شکل (۳-۴۱) در نهایت بصورت شکل (۲-۴۲) ظاهر می شود.



شکل (۲-۴۲): سیستم معادل شکل (۲-۴۰)

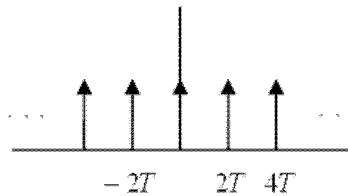
مثال (۲-۲۶): فرض کنید پاسخ ضربه یک سیستم بشکل زیر باشد، پاسخ این سیستم به ورودی قطار ضربه را بدست آورید.



شکل (۲-۴۳): پاسخ ضربه سیستم مثال (۲-۲۶)

حل: پاسخ این سیستم به ورودی قطار ضربه که رابطه ریاضی آن بصورت زیر است:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2kT)$$



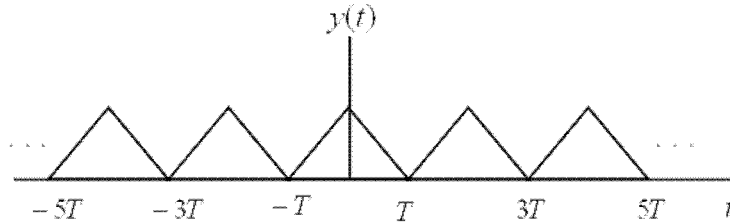
شکل (۲-۴۴): شکل قطار ضربه

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - 2kT) h(t - \tau) d\tau$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(t - 2kT)$$

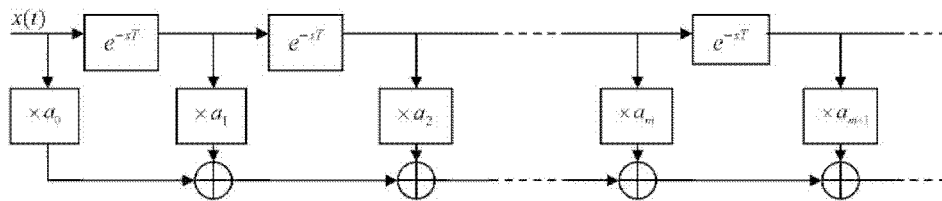
چنین بدست می‌آید:

و این پاسخ یعنی مجموعه‌ای از توابع بصورت شکل (۴۳-۲) که با تناوب زمانی $2T$ تکرار می‌شوند.



شکل (۴۵-۲): پاسخ سیستم مثال (۲۶-۲) به قطار ضربه (۴۴-۲)

مثال (۲۷-۲): پاسخ ضربه سیستم شکل ۴۶-۲ را بدست آورید.

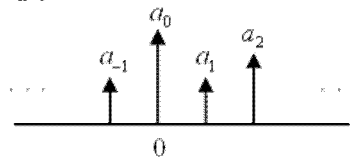


شکل (۴۶-۲): سیستم مورد نظر در مثال (۲۷-۲)

حل: اگر فرض کنیم N عنصر تاخیری داشته باشیم می‌توان $h(t)$ را از مجموع ورودی‌های وزن شده و انتقال یافته بصورت زیر پیدا کرد.

$$h(t) = a_0\delta(t) + a_1\delta(t-T) + a_2\delta(t-2T) + \dots + a_3\delta(t-mT)$$

$$+ \dots + a_N\delta(t-NT) = \sum_{n=0}^N a_n\delta(t-nT)$$



شکل (۴۷-۲): پاسخ ضربه سیستم شکل (۴۶-۲)

مثال (۲۸-۲): حاصل کانولوشن‌های زیر را بدست آورید.

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

a) $x[n] = \alpha^n u[n]$
 $h[n] = \beta^n u[n] \quad \alpha \neq \beta$

b) $x[n] = h[n] = \alpha^n u[n]$

c) $x[n] = (-1)^n \{ u[-n] - u[-n-8] \}$
 $h[n] = u[n] - u[n-8]$

d) $x[n] = 1 \quad \forall n$

$$h[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \geq 0 \\ 4^n & n < 0 \end{cases}$$

e) $x[n] = \left(\frac{-1}{2}\right)^n u[n-4]$

$$h[n] = 4^n u[2-n]$$

f) $x[n] = \delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-2] + \delta[n-3]$

$$h[n] = \delta[n+2] + 2\delta[n+1] + 3\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

حل:

a) $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha^k u[k] \beta^{n-k} u[n-k] = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k \beta^{n-k} u[n-k]$

توجه شود که مجموع فوق فقط برای $(k > 0; k \leq n)$ مقدار دارد. پس برای $n < 0$ داریم $y[n] = 0$ برای $n \geq 0$ داریم:

$$y[n] = \beta^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k = \beta^n \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1 - \alpha/\beta}$$

ویا در یک عبارت

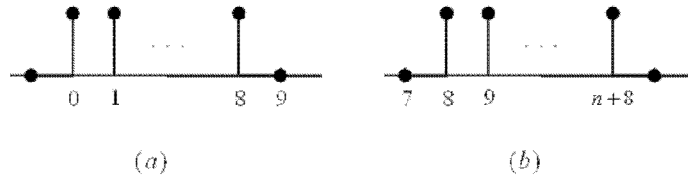
$$y[n] = \beta^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k = \beta^n \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$$

b) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha^k u[k] \alpha^{n-k} u[n-k]$

$$y[n] = \begin{cases} \alpha^n \sum_{k=0}^n 1 = \alpha^n \frac{n(n+1)}{2} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$c) \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \{ u[k] - u[k-8] \} \{ u[-n+k] - u[-n+k-8] \}$$

ابتدا تابع $u[-n+k] - u[-n+k-8]$ را به ازای $n=0$ و یک n دلخواه رسم می‌کنیم:

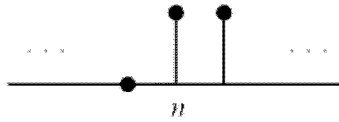


شکل (۲-۴۸): (a) تابع $u[k] - u[k-8]$ و (b) تابع $u[-k+n] - u[-n+k-8]$

اکنون با توجه به رابطه حاصل جمع تعداد محدودی از جملات یک تصاعد هندسی $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

داریم:

$$\begin{aligned} 0 \leq n \leq 7 \Rightarrow y[n] &= \sum_{k=n}^7 (-1)^k = \sum_{k=0}^7 (-1)^k - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \\ &= \frac{1-(-1)^8}{2} - \frac{1-(-1)^n}{2} = -\frac{1-(-1)^n}{2} \\ n > 8 \Rightarrow y[n] &= 0 \end{aligned}$$



شکل (۲-۴۸): تابع $u[n-k] - u[n-k-8]$

$$n < -7 \Rightarrow y[n] = 0$$

$$-7 \leq n < 0 \Rightarrow y[n] = \sum_{k=0}^{n+7} (-1)^k = \frac{1-(-1)^{n+8}}{2}$$

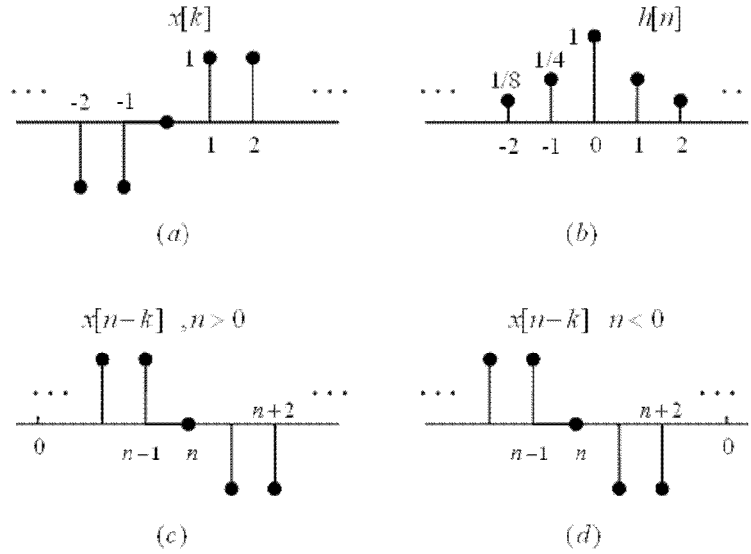
بنابراین، می‌توان پاسخ $y[n]$ را بصورت زیر نوشت:

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n < -7 \\ 1 & -7 \leq n < 0, \quad n = 2k \\ 0 & -7 \leq n < 0, \quad n = 2k+1 \\ 0 & 0 \leq n \leq 7, \quad n = 2k \\ 1 & 0 < n \leq 7, \quad n = 2k+1 \\ 0 & n > 7 \end{cases}$$

$$d) x[n] = u[n] - u[-n]$$

$$h[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \geq 0 \\ 4^n & n < 0 \end{cases}$$

ابتدا توابع مورد نیاز در محاسبه کانولوشن را رسم می‌کنیم.



شکل (۲-۴۹): (a) تابع $x[k]$ (b) تابع $h[k]$ (c) تابع $x[n-k]$ به ازاء $n > 0$ و (d) تابع $x[n-k]$ به ازاء $n < 0$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k] h[k] = \sum_{k=-\infty}^{-1} 4^k + \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \text{برای } n \geq 0, \text{ داریم:}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k] h[k] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} 4^k - \sum_{k=n}^{-1} (4)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \text{و برای } n < 0, \text{ داریم:}$$

$$y[n] = \begin{cases} \sum_{k=-1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k & n \geq 0 \\ -\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=n}^{-1} 4^k + \sum_{k=-\infty}^{n-1} 4^k & n < 0 \end{cases} \quad \text{بنابراین، در حالت کلی داریم:}$$

جهت حل کامل احتیاج به روابط زیر داریم:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]$$

$$\sum_{k=-\infty}^1 4^k = \sum_{k=-1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = 4 + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 4 + \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{16}{3}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2 - 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right] = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 2^{-n} \end{aligned}$$

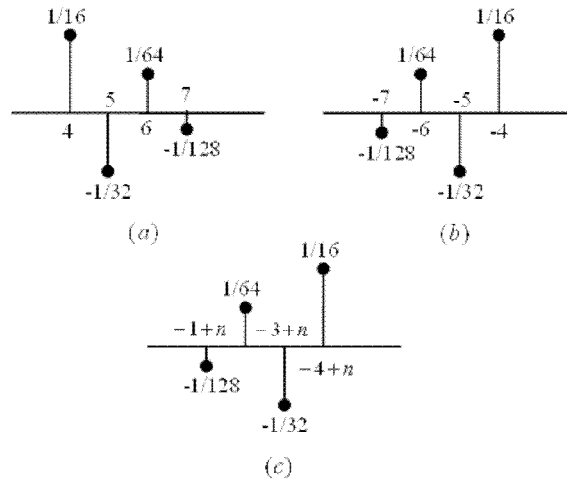
با جایگذاری این مقادیر در رابطه $y[n]$ می‌توان پاسخ به ازای $n > 0$ را بدست آورد.
و برای محاسبه $y[n]$ به ازاء n های منفی احتیاج به روابط زیر داریم:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=-1}^{n+1} 4^k &= \sum_{k=1}^{-n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \left(\sum_{k=0}^{-n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^k \right) - 1 \\ &= -1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{-n}}{1 - \frac{1}{4}} = -1 + \frac{4}{3} [1 - (4)^n] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{n-1} 4^k &= \sum_{k=-n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k - \sum_{k=0}^{-n} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{-n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{-n+1} = \frac{1}{3} 4^n \end{aligned}$$

$$e) x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-4]; \quad h[n] = 4^n u[2-n]; \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]$$



شکل (۵۰-۲): (a) تابع $x[k]$ (b) تابع $x[-k]$ و (c) تابع $x[n-k]$ به ازاء n دلخواه

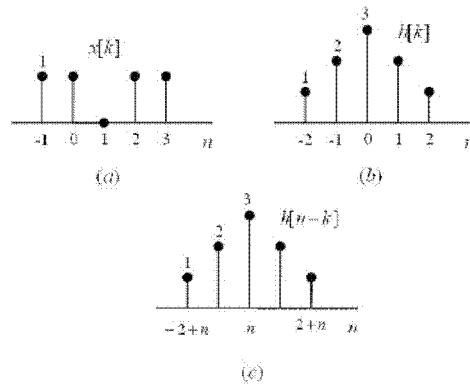
تابع $h[k] = 4^k u[2-k]$ فقط به ازاء $k \leq 2$ مقدار دارد. پس تا هنگامی که $n-4 \leq 2$ یا

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-4} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k} 4^k \quad -\infty < n \leq 6 \quad \text{برای } n \leq 6 \text{ داریم:}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^2 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k} 4^k \quad 7 \leq n < \infty \quad \text{برای } n-4 \geq 3 \text{ داریم:}$$

(محاسبه مجموع‌های مذکور ساده است و از آن صرفنظر می‌شود.)

(f) توابع $x[n]$ و $x[n-k]$ در شکل ۵۱-۲ رسم شده‌اند.



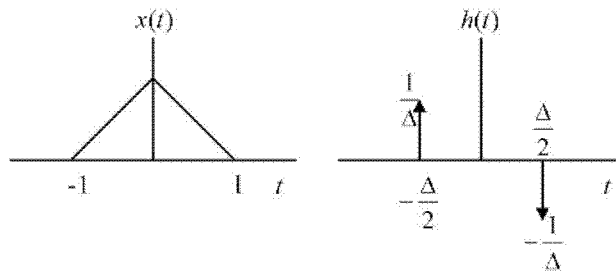
شکل (۵۱-۲): (a) تابع $x[k]$ (b) تابع $h[k]$ (c) تابع $h[n-k]$ مربوط به قسمت f

نواحی متمایز برای این کانولوشن و پاسخ در هر ناحیه از قرار زیر هستند:

$$\begin{aligned}
 n < -3 &\Rightarrow y[n] = 0 \\
 n = -3 &\Rightarrow y[n] = 1 \\
 n = -2 &\Rightarrow y[n] = 1 \times 1 + 2 \times 1 = 3 \\
 n = -1 &\Rightarrow y[n] = 1 \times 0 + 2 \times 1 + 3 \times 1 = 5 \\
 n = 0 &\Rightarrow y[n] = 1 \times 1 + 2 \times 0 + 3 \times 1 + 2 \times 1 = 6 \\
 n = 1 &\Rightarrow y[n] = 1 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times 0 + 2 \times 1 + 1 = 6 \\
 n = 2 &\Rightarrow y[n] = 1 \times 1 + 2 \times 0 + 3 \times 1 + 2 \times 1 + 1 = 6 \\
 n = 3 &\Rightarrow y[n] = 3 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 0 = 5 \\
 n = 4 &\Rightarrow y[n] = 2 \times 1 + 1 \times 1 = 3 \\
 n \geq 5 &\Rightarrow y[n] = 0
 \end{aligned}$$

مثال (۲-۲۹): مطلوبست محاسبه کانولوشن‌های زیر.

a)



شکل (۲-۵۲): توابع $x(t)$ و $h(t)$ مربوط به مثال (۲-۲۹)

$$h(t) = \frac{4}{3}[u(t) - u(t-1)] - \frac{1}{3}\delta(t-2) \quad \text{و} \quad x(t) = at + b \quad \text{(b)}$$

حل:

$$a) \quad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) \left[\frac{1}{A} \delta\left(\tau + \frac{A}{2}\right) - \frac{1}{A} \delta\left(\tau - \frac{A}{2}\right) \right] d\tau \\
 &= \frac{1}{A} x\left(t + \frac{A}{2}\right) - \frac{1}{A} x\left(t - \frac{A}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$b) \quad y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau$$

$$x(t) = at + b \Rightarrow x(t-\tau) = at - a\tau + b$$

$$\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} [at - a\tau + b] \left[\frac{3}{4} u(\tau) - u(\tau-1) - \frac{1}{3} \delta(\tau-2) \right] d\tau$$

$$y(t) = \int_0^1 \frac{4}{3} [u(\tau) - u(\tau-1)] (at - a\tau + b) d\tau - \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} [at - a\tau + b] \delta(\tau-2) d\tau$$

$$y(t) = \frac{1}{3}[a(t-1) - b]$$

مثال (۲-۳۰): پاسخ ضربه تعدادی سیستم خطی در زیر داده شده است. برای این سیستم‌های خطی اولاً خروجی را بیابید، ثانياً تعیین کنید کدامیک علی است و کدام غیر علی، (در حالت کلی در مورد مستقل از زمان بودن سیستم اطلاعی نداریم).

$$i) h_k[n] = \delta[n-k] \Rightarrow y[n] = x[n] * h_k[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k] = x[n]$$

این سیستم علی است.

$$ii) h_k[n] = \begin{cases} \delta[n-k] & \text{زوج } k \\ 0 & \text{فرد } k \end{cases} \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[2k] \delta[n-2k]$$

$$\Rightarrow y[n] = \begin{cases} 0 & \text{فرد } n \\ x[n] & \text{زوج } n \end{cases}$$

این سیستم علی است.

$$iii) h_k[n] = \delta[2n-k] \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[2n-k]$$

$$\Rightarrow y[n] = x[2n]$$

این سیستم غیر علی است چون اگر $n=1$ در نظر بگیریم پاسخ در این لحظه بستگی به مقدار ورودی در لحظه $n=2$ دارد.

$$iv) h_k[n] = ku[n-k] \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] ku[n-k]$$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^n kx[k]$$

این سیستم علی است.

$$\begin{aligned}
 v) \quad h_k[n] &= k\delta[n-2k] + 3k\delta[n-k] \\
 y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\delta[n-2k]x[k] + \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 3k\delta[n-k]x[k] \\
 y[n] &= \begin{cases} \frac{n}{2}x\left[\frac{n}{2}\right] + 3nx[n] & n = 2k \\ 3nx[n] & n = 2k + 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

این سیستم غیر علی است چون اگر $n = -2$ در نظر بگیریم پاسخ در این لحظه بستگی به مقدار ورودی در لحظه $n = -1$ دارد.

مثال (۲-۳۱): سیستمی با پاسخ ضربه داده شده در زیر مفروض است. آیا این سیستم علی و مستقل از زمان است؟

پاسخ این سیستم به ورودی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ ، که در زیر داده شده‌اند، را بیابید.

$$\begin{cases} x_1(t) = u(t-1) - u(t-3) \\ x_2(t) = e^{-t}u(t) \end{cases} \quad h_\tau(t) = u(t-\tau) - u(t-2\tau) = f[\delta(t-\tau)]$$

حل: از پاسخ ضربه این سیستم مشخص است که این سیستم خطی اما متغیر با زمان است. بعنوان مثال پاسخ به چند ضربه انتقال یافته متفاوت بصورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 f[\delta(t)] &= h_0(t) = u(t) - u(t) = 0 \\
 f[\delta(t-2)] &= h_2(t) = u(t-2) - u(t-4) \\
 f[\delta(t+1)] &= h_{-1}(t) = u(t+1) - u(t+2)
 \end{aligned}$$

بنابراین این سیستم متغیر با زمان و همچنین غیر علی است.

برای یافتن پاسخ به $x_1(t)$ داریم:

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)h_\tau(t)d\tau$$

و یا

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [u(\tau-1) - u(\tau-3)] [u(t-\tau) - u(t-2\tau)] d\tau$$

اکنون این انتگرال را به چهار قسمت تفکیک کرده و هر قسمت را جداگانه حساب می‌کنیم.

$$y_1(t) = I_1 - I_2 - I_3 + I_4$$

که در آن

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau-1)u(t-\tau) d\tau$$

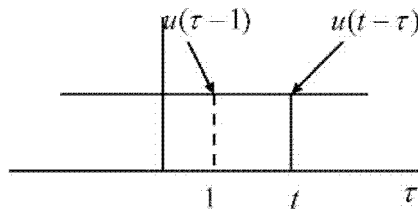
$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau-1)u(t-2\tau) d\tau$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau-3)u(t-\tau) d\tau$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau-3)u(t-2\tau) d\tau$$

برای محاسبه قسمت اول پاسخ یا I_1 لازم است دو ناحیه متفاوت در نظر بگیریم. برای ناحیه اول یعنی $-\infty < t < 1$ همانگونه که از شکل (۵۳-۲) پیداست روی هم افتادگی میان دو سیگنال وجود ندارد. پس در این ناحیه $I_1 = 0$. اما برای ناحیه دوم داریم

$$I_1 = \int_1^t d\tau = t-1 \quad 1 < t < \infty$$

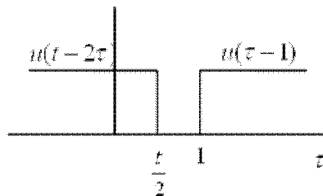


شکل (۵۳-۲): توابع $u(\tau-1)$ و $u(t-\tau)$ بر حسب τ (پارامتر است)

برای I_2 نیز باید دو ناحیه تعریف کنیم.

برای ناحیه اول همانگونه که از شکل (۵۴-۲) پیداست روی هم افتادگی بین $u(t-2\tau)$ و $u(\tau-1)$ وجود ندارد پس

$$I_2 = 0 \quad -\infty < t < 2 \quad \text{یا} \quad -\infty < \frac{t}{2} < 1$$



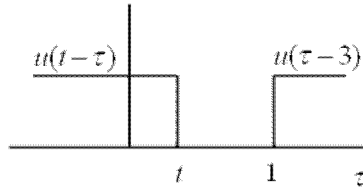
شکل (۵۴-۲): توابع $u(\tau-1)$ و $u(t-2\tau)$ بر حسب τ (پارامتر است)

ولی برای ناحیه دوم داریم

$$I_2 = \int_1^{\frac{t}{2}} d\tau = \frac{t}{2} - 1 \quad \frac{t}{2} > 1 \quad \text{یا} \quad t > 2$$

برای I_3 نیز دو ناحیه تعریف می‌کنیم. در ناحیه اول از شکل (۵۵-۲) پیداست که روی هم افتادگی بین دو تابع وجود ندارد پس

$$I_3 = 0 \quad -\infty < t < 3$$

شکل (۲-۵۵): توابع $u(t-\tau)$ و $u(\tau-3)$ بر حسب τ (t پارامتر است)

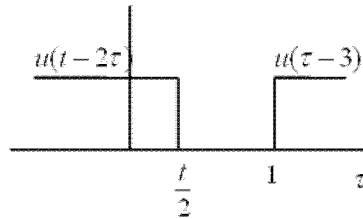
ولی برای ناحیه دوم داریم

$$I_3 = \int_3^t d\tau = t-3 \quad t > 3$$

برای I_4 نیز داریم

$$I_4 = 0 \quad \begin{array}{l} t/2 \leq 3 \\ \text{یا} \\ t \leq 6 \end{array}$$

$$I_4 = \int_3^{t/2} d\tau = \frac{t}{2} - 3 \quad \begin{array}{l} t/2 \geq 3 \\ \text{یا} \\ t \geq 6 \end{array}$$

شکل (۲-۵۶): توابع $u(t-2\tau)$ و $u(\tau-3)$ بر حسب τ (t پارامتر است)

اکنون بسادگی با در نظر گرفتن I_1 الی I_4 می‌توان پاسخ کلی را در فواصل مختلف نوشت. جواب نهایی برابر جواب حاصله از روش دوم است که در زیر ارائه می‌شود.

روش دوم حل مسئله این است که منحنی‌های توابع $[u(t-\tau) - u(t-2\tau)]$ و $[u(\tau-1) - u(\tau-3)]$ را بر حسب τ بکشیم. در این صورت می‌توان کانونوشن را با توجه به نواحی تلاقی دو منحنی بدست آورد.

شکل ۲-۵۷ محاسبه کانونوشن مثال ۲-۳۱ از طریق رسم مستقیم توابع $[u(\tau-1) - u(\tau-3)]$ و $[u(t-\tau) - u(t-2\tau)]$

باتوجه به شکل ۲-۵۷ داریم:

$$y_1(t) = 0 \quad t \leq 3$$

$$y_1(t) = \int_1^t d\tau = t-1 \quad 1 \leq t \leq 2$$

$$y_1(t) = \int_{t/2}^t d\tau = \frac{t}{2} \quad 2 \leq t \leq 3$$

$$y_1(t) = \int_{\frac{t}{2}}^3 d\tau = \frac{t}{2} \quad 3 \leq t \leq 6$$

$$y_1(t) = 0 \quad t \geq 6$$

برای بررسی پاسخ سیستم به ورودی $x_2(t)$

$$y_2(t) = x_2(t) * h_\tau(t)$$

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} u(\tau) [u(t-\tau) - u(t-2\tau)] d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} u(\tau) u(t-\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} u(\tau) u(t-2\tau) d\tau$$

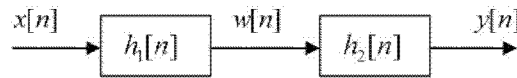
$$y_2(t) = \left(\int_0^t e^{-\tau} d\tau \right) u(t) - \left(\int_0^{t/2} e^{-\tau} d\tau \right) u(t) = -e^{-t} + 1 + e^{-t/2} - 1$$

$$y_2(t) = e^{-t/2} - e^{-t}$$

مثال (۳۲-۲): $y[n]$ خروجی سیستم شکل (۵۸-۲) را بیابید اگر $h_2[n] = a^n u[n]$, $h_1[n] = \text{Sin} 8n$ و

$|a| < 1$ باشد. همچنین سیگنال ورودی بصورت زیر است:

$$x[n] = \delta[n] - a\delta[n-1]$$



شکل (۵۸-۲): سیستم مربوط به مثال (۳۲-۲)

با استفاده از خاصیت جابجایی کانولوشن می توان محل سیستم های $h_1[n]$ و $h_2[n]$ را عوض کرد.

$$y[n] = x[n] * h_1[n] * h_2[n] = x[n] * h_2[n] * h_1[n]$$

حال حاصل کانولوشن $x[n] * h_2[n]$ را می یابیم.

$$g[n] = x[n] * h_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h_2[n-k]$$

$$g[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[k] a^{n-k} u[n-k] - a \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^{n-k} u[n-k] \delta[k-1]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] \delta[k] - a \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^{n-1} u[n-1] \delta[k-1]$$

$$= a^n u[n] - a^n u[n-1] = a^n (u[n] - u[n-1]) = a\delta[n]$$

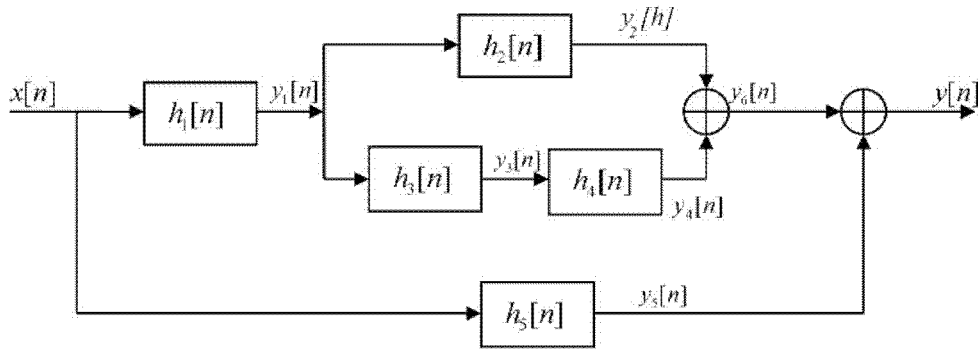
اکنون حاصل کانولوشن $g[n] * h_1[n]$ را پیدا می کنیم.

$$y[n] = g[n] * h_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a \delta[k] [\text{Sin} 8(n-k)]$$

$$y[n] = a \text{Sin} 8n$$

مثال (۲-۳۳): سیستم مرکب زیر را که ترکیبی از ۵ سیستم LTI است را در نظر بگیرید. پاسخ ضربه سیستم مرکب را برحسب پاسخهای ضربه سیستم‌های جزئی به دست آورید.

$$\begin{aligned} y_6[n] &= y_2[n] - y_4[n] = y_2[n] - y_3[n] * h_4[n] \\ y_6[n] &= y_2[n] - y_1[n] * h_3[n] * h_4[n] \\ &= y_1[n] * h_2[n] - y_1[n] * h_3[n] * h_4[n] \\ &= y_1[n] * (h_2[n] - (h_3[n] * h_4[n])) \\ &= (x[n] * h_1[n]) * \{h_2[n] - (h_3[n] * h_4[n])\} \end{aligned}$$



شکل (۲-۵۹): سیستم مرکب از سیستم‌های جزئی مربوط به مثال (۲-۳۳)

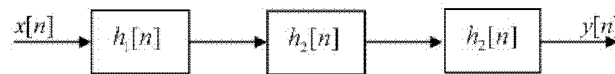
اکنون همه چیز آماده است تا $y[n]$ نهایی را بدست آورده و از روی آن پاسخ ضربه کل سیستم را محاسبه کنیم.

$$y[n] = (x[n] * h_5[n]) + y_6[n]$$

بنابراین پاسخ ضربه کلی سیستم به صورت زیر است:

$$h[n] = h_1[n] * \{h_2[n] - (h_3[n] * h_4[n])\} + h_5[n]$$

مثال (۲-۳۴): سیستم مرکب زیر از سه سیستم جزئی تشکیل شده است.



شکل (۲-۶۰): سیستم مرکب از سه سیستم جزئی مربوط به مثال (۲-۳۴)

اگر $h_2[n] = u[n] - u[n-2]$ باشد و اگر پاسخ ضربه کلی سیستم به صورت زیر باشد

$$\begin{aligned} h[n] &= \delta[n] + 5\delta[n-1] + 10\delta[n-2] \\ &+ 11\delta[n-3] + 8\delta[n-4] + 4\delta[n-5] + \delta[n-6] \end{aligned}$$

الف) مطلوبست $h_1[n]$

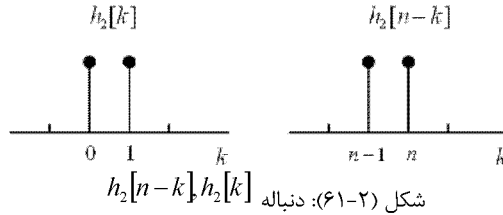
ب) مطلوبست پاسخ سیستم به ورودی $x[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$

حل: می‌دانیم که ترکیب متوالی سه سیستم معادل کانولوشن پاسخ ضربه آنها است

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] * h_2[n]$$

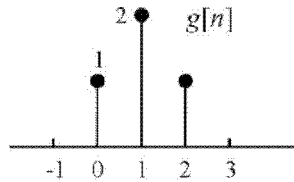
ابتدا حاصل کانولوشن $h_2[n] * h_2[n]$ را می‌یابیم

$$g[n] = h_2[n] * h_2[n] = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \{u[k] - u[k-2]\} \{u[n-k] - u[n-k-2]\}$$



شکل (۶۱-۲): دنباله $h_2[n-k], h_2[k]$

پاسخ این کانولوشن در شکل (۶۲-۲) رسم شده است.



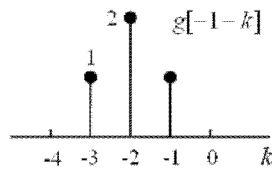
شکل (۶۲-۲): حاصل کانولوشن $h_2[n]$ با خودش

اکنون باید حاصل کانولوشن $g[n]$ و دنباله مجهول $h_1[n]$ برابر $h[n]$ (معلوم) باشد، یعنی:

$$h[n] = h_1[n] * g[n] = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} h_1[k] g[n-k]$$

با رسم دنباله $g[-1-k]$ (شکل (۶۳-۲)) می‌بینیم چون $h[-1] = 0$ است، یک جواب ممکن برای $h_1[k]$ به ازاء $k = -1, -2, -3$ مقدار صفر است. در این صورت حاصلضرب $h_1[k]$ در تابع $g[-1-k]$ به ازاء همه مقادیر k مساوی صفر می‌شود. به زبان ریاضی،

$$h[-1] = 0 \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_1[k] g[-1-k] = 0 \quad h_1[-1] = 0 \quad h_1[-2] = h_1[-3] = 0$$

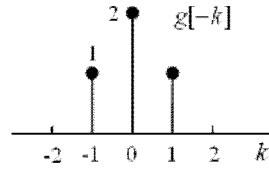


شکل (۶۳-۲): دنباله $g[-1-k]$

چون $h[0] = 1$ است و با رسم دنباله $g[-k]$ مشاهده می‌شود که لازم است $h_1[0] = 1$ شود تا حاصل کانولوشن مساوی یک گردد. (توجه کنید که مقادیر $h_1[-1], h_1[-2]$ قبلا مساوی صفر به دست آمده‌اند.)

$$h[0]=1 \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_1[k] g[-k]=1 \Rightarrow 1 \times h_1[-2] + 2 \times h_1[-1] + 1 \times h_1[0]=1$$

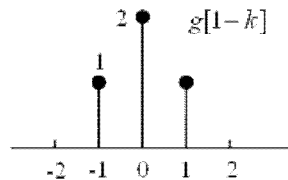
$$\Rightarrow h_1[0]=1$$

شکل (۶۴-۲): دنباله $g[-k]$

با ادامه همین روند می‌توان سایر مقادیر $h_1[n]$ را یافت. به عنوان مثال چون $h[1]=5$ است و با توجه به دنباله $g[1-k]$ که در شکل (۶۵-۲) رسم شده است درمی‌یابیم که $h_1[1]=3$ است.

$$h[1]=5 \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_1[k] g[1-k]=5$$

$$\Rightarrow 1 \times h_1[-1] + 2 \times h_1[0] + 1 \times h_1[1]=5 \Rightarrow 0 + 2 + h_1[1]=5 \Rightarrow h_1[1]=3$$

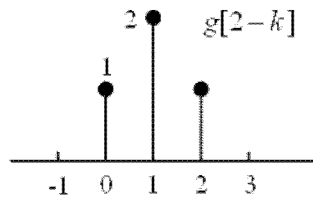
شکل (۶۵-۲): دنباله $g[1-k]$

و همچنین با توجه به $g[2-k]$ و مقدار $h[2]=10$ درمی‌یابیم که باید $h_1[2]=3$ باشد.

$$h[2]=10 \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_1[k] g[2-k]=10$$

$$\Rightarrow 1 \times h_1[0] + 2 \times h_1[1] + 1 \times h_1[2]=10 \Rightarrow 1 + 2 \times 3 + h_1[2]=10$$

$$\Rightarrow h_1[2]=3$$

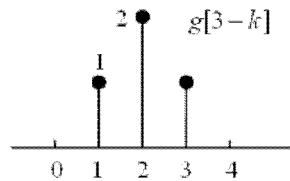
شکل (۶۶-۲): دنباله $g[2-k]$

مقدار $h_1[3]$ نیز با توجه به مقادیر محاسبه شده قبلی و برنامه $g[3-k]$ و مقدار $h[3]=1$ به دست می‌آید

$$h[3] = 11 \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_1[k] g[3-k] = 11$$

$$\Rightarrow 1 \times h_1[1] + 2 \times h_1[2] + 1 \times h_1[3] = 11 \Rightarrow 1 \times 3 + 2 \times 3 + h_1[3] = 11$$

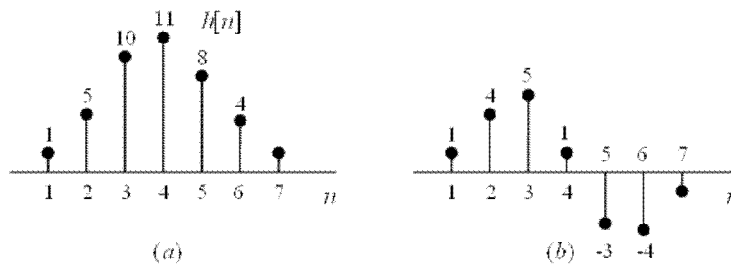
$$\Rightarrow h_1[3] = 2$$



شکل (۲-۶۷): دنباله $g[3-k]$

سایر مقادیر h_1 نیز به همین ترتیب محاسبه می شوند.

(ب) دنباله $h[n]$ در شکل (۲-۶۸) رسم شده است.



(a)

(b)

شکل (۲-۶۸): دنباله (a) حاصل کانولوشن

حاصل کانولوشن با توجه به خاصیت تابع ضربه بسادگی به دست می آید.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{ \delta[k] - \delta[k-1] \} h[n-k]$$

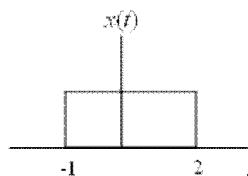
$$= h[n] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[k] - h[n-1] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[k-1] = h[n] - h[n-1]$$

مثال (۲-۳۵): یک سیستم LTI پیوسته زمانی را در نظر بگیرید. رابطه ورودی و خروجی این سیستم

به صورت زیر است:

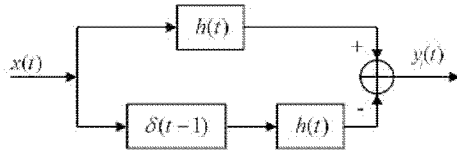
$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau-2) d\tau$$

الف) پاسخ سیستم به ورودی $x(t)$ را که در شکل ۲-۶۹ نمایش داده شده است بیابید.



شکل (۲-۶۹): ورودی سیستم برای مثال (۲-۳۵)

(ب) ترکیبی از سیستم‌های LTI را به صورت زیر در نظر بگیرید.



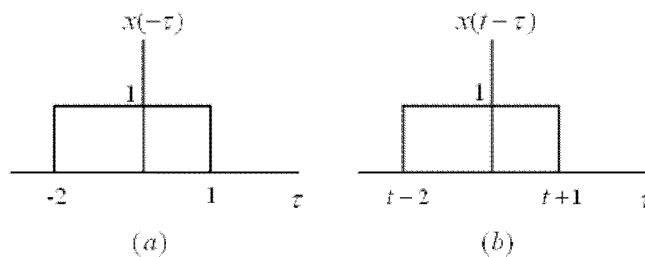
شکل (۲-۷۰): سیستم مرکب مربوط به مثال (۲-۳۵)

خروجی این سیستم را به دست آورید وقتی ورودی همان $x(t)$ ذکر شده در قسمت (الف) باشد. حل: الف) در مثال (۲-۲۴) پاسخ ضربه به این سیستم به صورت زیر به دست آمده است.

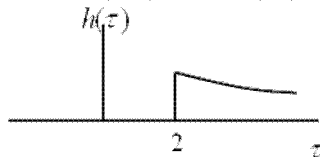
$$h(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$$

اکنون با توجه به پاسخ ضربه سیستم می‌توان پاسخ به ورودی $x(t)$ را یافت.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$



شکل (۲-۷۱): (a) تابع $x(-\tau)$ (b) تابع $x(t-\tau)$ بر حسب τ (پارامتر است)



شکل (۲-۷۲): پاسخ ضربه سیستم

همانگونه که مشاهده می‌شود به ازاء $t < 1$ روی هم افتادگی بین $x(t-\tau)$ و $h(\tau)$ وجود ندارد پس

$$y(t) = 0, t < 1$$

در فاصله $1 < t < 4$ با افزایش t ، روی هم افتادگی $h(\tau)$ و $x(t-\tau)$ افزایش می‌یابد و

$$y(t) = \int_2^{t+1} e^{-(\tau-2)}d\tau \quad 1 < t < 4$$

و به ازاء $t > 4$ همه تابع $x(t-\tau)$ روی $h(\tau)$ می‌افتد پس

$$y(t) = \int_{t-2}^{t+1} e^{-(t-\tau)}d\tau \quad 4 < t$$

(ب) با استفاده از خواص کانولوشن می‌توان نوشت:

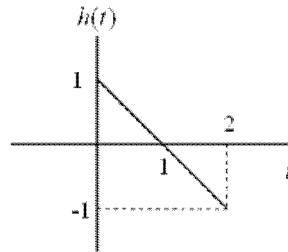
$$y_1(t) = x(t) * h(t) - x(t) * \delta(t-1) * h(t) \\ = y(t) - y(t-1)$$

و چون $y(t)$ معلوم است (در قسمت الف محاسبه شده است) حل مساله تمام است.
 مثال (۲-۳۶): الف) یک سیستم LTI پیوسته زمانی با پاسخ ضربه $h(t)$ به صورت زیر را در نظر بگیرید.

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

پاسخ این سیستم به ورودی قطار ضربه را بیابید.
 ب) پاسخ ضربه یک سیستم LTI پیوسته زمانی در شکل ۲-۷۳ داده شده است. مطلوب است پاسخ این سیستم به ورودی:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \delta(t - kT)$$



شکل (۲-۷۳): پاسخ ضربه مربوط به قسمت (ب) مثال (۲-۳۶)

حل: الف) قطار ضربه به این صورت است:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \quad \text{عدد صحیح } k$$

اگر پاسخ ضربه سیستم به این صورت باشد:

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

با توجه به رابطه کانولوشن می توان پاسخ ضربه سیستم را به دست آورد.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - kT) \right] e^{-(t-\tau)} u(t-\tau) d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - kT) e^{-t+\tau} u(t-\tau) \right] d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - kT) e^{-t+kT} u(t-kT) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(\tau - T) e^{-t+T} u(t-T)$$

$$+ \delta(\tau - 2T) e^{-t+2T} u(t-2T) + \delta(\tau - 3T) e^{-t+3T} u(t-3T) + \dots] d\tau$$

$$\begin{aligned}
 y(t) &= e^{-t+T}u(t-T) + e^{-t+2T}u(t-2T) + \dots + e^{-t+nT}u(t-nT) + \\
 & e^{-t-T}u(t+T) + e^{-t-2T}u(t+2T) + e^{-t-nT}u(t-nT) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-t+kT}u(t-kT)
 \end{aligned}$$

روش دوم برای حل قسمت (الف)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - kT) \right] e^{-(t-\tau)} u(t-\tau) d\tau$$

می‌توان جای علامت مجموع و انتگرال را جابجا کرد.

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - kT) e^{-(t-\tau)} u(t-\tau) d\tau = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-t+kT} u(t-kT)$$

حل قسمت (ب):

در این مساله ورودی قطار ضربه است اما دامنه آن مرتباً تغییر علامت می‌دهد.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(t - kT)$$

بنابراین با جایگذاری در رابطه کانولوشن داریم

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(\tau - kT) \right] h(t - \tau) d\tau$$

و یا

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(\tau - kT) h(t - \tau) \right] d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k h(t - kT) \delta(\tau - kT) \right] d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(-1)^0 h(t) \delta(\tau - 0) + (-1)^1 h(t - T) \delta(\tau - T) + (-1)^2 h(t - 2T) \delta(\tau - 2T) + \dots \right] d\tau$$

$$= (-1)^0 h(t) + (-1)^1 h(t - T) + (-1)^2 h(t - 2T) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k h(t - kT)$$

روش دوم حل قسمت (ب) با توجه به اینکه علامت‌های مجموع و انتگرال قابل جابجایی هستند

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(\tau - kT) \right] h(t - \tau) d\tau$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k \delta(\tau - kT) h(t - \tau) d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k h(t - kT)$$

مثال (۲-۳۷): در مورد عبارتهای زیر تعیین کنید که کدام عبارت صحیح و کدام غلط است.

(در مورد عبارتهای صحیح اثبات لازم است ولی در مورد عبارتهای غلط یک مثال نقض کافی است.)

$$x[n] * \{h[n]g[n]\} = \{x[n] * h[n]\}g[n] \quad \text{الف)}$$

$$a^n x[n] * a^n h[n] = a^n \{x[n] * h[n]\} \quad \text{ب)}$$

ج) اگر $y(t) = x(t) * h(t)$ باشد آنگاه $y(2t) = 2x(2t) * h(2t)$

د) اگر $x(t)$ و $h(t)$ فرد باشند در آن صورت $y(t) = x(t) * h(t)$ زوج است.
حل:

الف) این تساوی در حالت کلی برقرار نیست و این مساله به سادگی قابل اثبات است.

$$x[n] * \{h[n]g[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] g[n-k]$$

با تغییر متغیر $n-k = m$ داریم

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n-m] h[m] g[m] \neq \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k] h[k] \right\} g[n]$$

البته می توان با یک مثال نقض نیز عدم صحت قسمت الف را تایید کرد. برای این مثال نقض فرض می کنیم $x[n]$ دلخواه باشد

$$g[n] = \delta[n-1] \quad h[n] = \delta[n+1]$$

در این صورت طرف اول تساوی برابر صفر است اما طرف دوم تساوی برابر $x[2]\delta[n-1]$ می شود. پس بنابراین این تساوی در حالت کلی برقرار نیست.

ب) با توجه به خاصیت کانولوشن می توان نشان داد که این تساوی در حالت کلی صحیح است.

$$\begin{aligned} a^n x[n] * a^n h[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k x[k] a^{n-k} h[n-k] = a^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] \\ &= a^n \{x[n] * h[n]\} \end{aligned}$$

ج) صحت این تساوی نیز به کمک خواص کانولوشن در حالت کلی قابل اثبات است.

$$g(t) = x(2t) * h(2t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(2\tau) h(2t-2\tau) d\tau$$

با انجام تغییر متغیر $t_0 = 2\tau$ داریم

$$2\tau = t_0 \Rightarrow d\tau = \frac{1}{2} dt_0$$

و با جایگذاری در انتگرال کانولوشن

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_0) h(2t-t_0) \frac{dt_0}{2}$$

اما چون $y(t) = x(t) * h(t)$ است داریم

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$y(2t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(2t-\tau) d\tau = 2g(t) = 2x(2t) * h(2t)$$

د) با توجه به فرض مسئله $y(t) = x(t) * h(t)$ است پس

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

با تغییر متغیر $t-\tau = t_0$ می توان $y(-t)$ را به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}
 y(-t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(-t-\tau)d\tau = \int_{t_0=-\infty}^{-\infty} x(-t_0)h(-t+t_0)d(-t_0) \\
 y(-t) &= \int_{t_0=-\infty}^{+\infty} x(-t_0)h(t_0-t)dt_0 = \int_{t_0=-\infty}^{+\infty} \{-x(t_0)[-h(t-t_0)]\}dt_0 \\
 \Rightarrow y(-t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_0)h(t-t_0)dt_0 = y(t)
 \end{aligned}$$

پس $y(t)$ زوج است.

مثال (۲-۳۸): اطلاعات زیر در مورد توابع $y(t)$, $x(t)$, $h(t)$ در دست است.

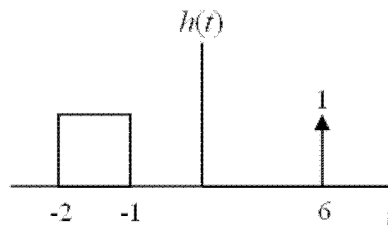
$$\begin{aligned}
 x(t) &= 0 & |t| > T_1 \\
 h(t) &= 0 & |t| > T_2 \\
 y(t) &= x(t) * h(t) = 0 & |t| > T_3
 \end{aligned}$$

الف) رابطه T_3, T_2, T_1 را بدست بیاورید.

ب) یک سیستم گسسته زمانی با ورودی $x[n]$ و پاسخ ضربه $h[n]$ و خروجی $y[n]$ را در نظر بگیرید. اگر $h[n]$ در خارج فاصله $N_0 \leq n \leq N_1$ مساوی صفر باشد و $x[n]$ در خارج فاصله $N_2 \leq n \leq N_3$ مساوی صفر باشد در آن صورت $y[n]$ در خارج فاصله $N_4 \leq n \leq N_5$ مساوی صفر است رابطه n_i ها را بیابید.

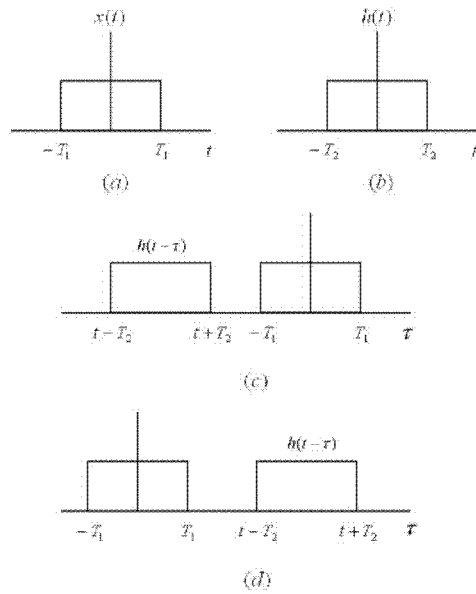
ج) یک سیستم گسسته زمانی LTI علی با این خاصیت در نظر بگیرید که اگر ورودی آن به ازای $n \geq 10$ مساوی صفر باشد خروجی آن به ازاء $n \geq 15$ مساوی صفر است. چه شرطی در مورد دوره غیرصفر $h[n]$ باید وجود داشته باشد؟

د) یک سیستم LTI پیوسته زمانی مفروض است که پاسخ ضربه آن در زیر رسم شده است. برای محاسبه $y[0]$ لازم است $x(t)$ را در چه فاصله‌ای داشته باشیم؟



شکل (۲-۷۴): پاسخ ضربه سیستم LTI مربوط به قسمت (د) مثال (۲-۳۸)

حل: الف) مطابق اطلاعات داده شده $x(t)$ و $h(t)$ را می‌توان بصورت زیر در نظر گرفت. البته در اینجا فقط نشان دادن محدوده وجود مورد نظر است و در این فاصله این توابع هر مقداری می‌توانند داشته باشند.



شکل (۷۵-۲): (a) تابع $x(t)$ تابع (b) تابع $h(t)$ (c) رسم همزمان $x(\tau)$, $h(t-\tau)$ طی مرحله کانولوشن برحسب t (منفی است) (d) رسم همزمان توابع $x(\tau)$, $h(t-\tau)$ برحسب t (مثبت است) دیده می‌شود اگر $t + T_2 < -T_1$ یا $t < -T_1 - T_2$ باشد حاصل کانولوشن صفر است پس

$$x(t) * h(t) = 0 \quad t < -T_1 - T_2$$

حاصل کانولوشن در فاصله $t > T_2 + T_1$ نیز مساوی صفر است چون روی هم افتادگی بین دو تابع وجود نخواهد داشت.

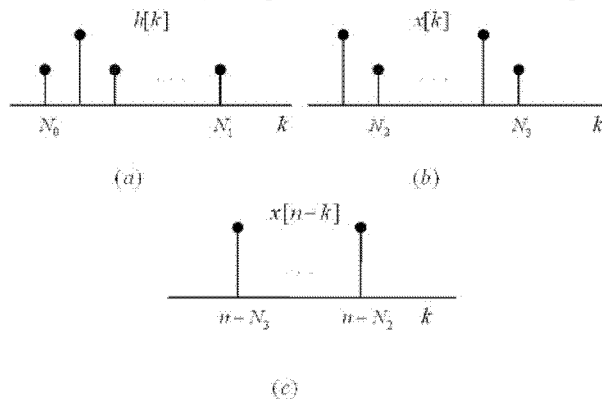
پس

$$y(t) = x(t) * h(t) = 0 \quad |t| > T_3$$

بنابراین

$$T_3 = T_1 + T_2$$

(ب) دو دنباله دلخواه فرضی برای $x[n]$ و $h[n]$ در نظر می‌گیریم.



شکل (۲-۷۶): (a) دنباله $h[k]$ (b) دنباله $x[k]$ (c) دنباله $x[n-k]$ بر حسب k (پارامتر منفی است)

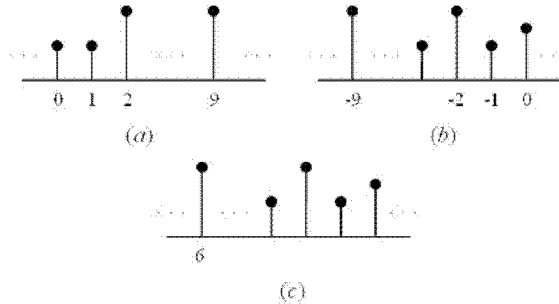
همانگونه که از شکل‌ها مشخص است، حاصل کانولوشن به ازاء $n < N_0 + N_2$ و $n > N_1 + N_3$ مساوی صفر است.

$$\begin{aligned} h[k]x[n-k] &= 0 & n - N_2 < N_0 &\Rightarrow n < N_0 + N_2 \\ h[k]x[n-k] &= 0 & n - N_3 > N_1 &\Rightarrow n > N_3 + N_1 \end{aligned}$$

بنابراین

$$N_4 = N_0 + N_2, \quad N_5 = N_1 + N_3$$

(ج) یک ورودی به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که به ازاء $n \geq 10$ مساوی صفر است برای این ورودی، خروجی به ازاء $n \geq 15$ باید صفر باشد.



شکل (۲-۷۷): (a) دنباله $x[k]$ (b) دنباله $x[-k]$ (c) دنباله $x[15-k]$

$$y[n \geq 15] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[(n \geq 15) - k] h[k] = 0$$

(د) با توجه به انتگرال کانولوشن زیر داریم

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau$$

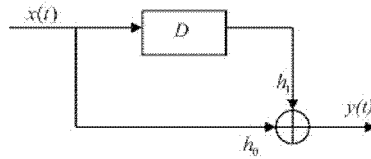
$$y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(-\tau) x(\tau) d\tau$$

و با قراردادن ضابطه $h(t)$ در رابطه فوق

$$\begin{aligned} y(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(-\tau - 6) x(\tau)] d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} [u(\tau - 1) - u(\tau - 2)] x(\tau) d\tau \\ &= x(-6) + \int_{-\infty}^{+\infty} [u(\tau - 1) - u(\tau - 2)] x(\tau) d\tau \end{aligned}$$

پس باید $x(\tau)$ را در فاصله $1 < \tau < 2$ داشته باشیم همچنین داشتن مقدار $x(t)$ در لحظه $t = -6$ نیز لازم است.

مثال (۲-۳۹): الف) پاسخ ضربه سیستم زیر را بیابید، که D معادل T ثانیه تأخیر در زمان است.

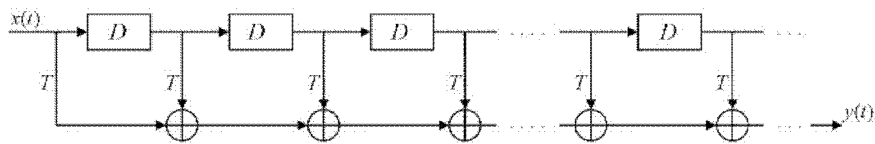


شکل (۲-۷۸): سیستم مثال (۲-۳۹) قسمت (الف)

با فرض

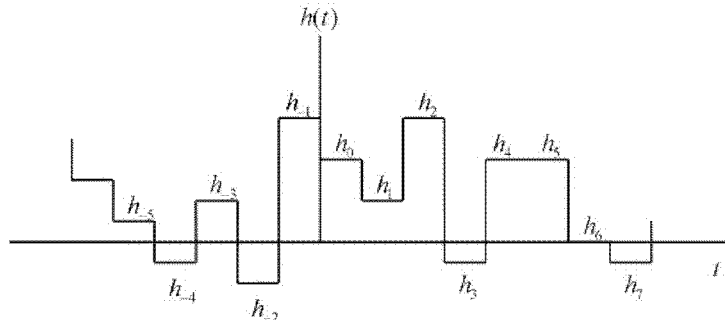
$$\left. \begin{array}{l} h_0 = 1 \\ h_1 = -1 \end{array} \right\}$$

ب) سیستم زیر را در نظر بگیرید که دارای n بلوک تأخیر زمانی است. اگر ورودی این سیستم $x(t) = e^{-t}u(t)$ باشد، پاسخ سیستم را بیابید. در حالت حدی اگر T خیلی کوچک شود پاسخ به چه صورت خواهد بود؟



شکل (۲-۷۹): سیستم مثال (۲-۳۹) قسمت (ب)

ج) یک سیستم با پاسخ ضربه بصورت زیر را در نظر بگیرید $h(t) = h_n$ برای $n < t < n+1$ یک نمونه از پاسخ ضربه به فرم فوق رسم شده است.



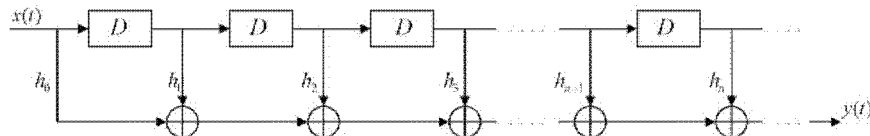
شکل (۲-۸۰): سیستم مثال (۲-۳۹) قسمت (ج)

د) نشان دهید که چنین پاسخ ضربه‌ای به کمک سیستمی که فقط شامل عناصر تأخیری جمع و ضرب‌کننده‌ها و یک سیستم با پاسخ ضربه $h(t) = u(t) - u(t-1)$ قابل ساخت است. کانونوشن سیگنال‌های $x(t), h(t)$ رسم شده در شکل (۲-۸۱) را به دست آورید.

بنابراین

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n [u(t-nT) - u(t-(n+1)T)]$$

اما سیستمی با پاسخ ضربه $h_1(t)$ یک سیستم شامل عناصر تاخیری و ضرب کننده‌ها بصورت زیر می‌باشد



شکل (۸۲-۲): سیستم با عناصر تاخیری و جمع و ضرب کننده‌ها

بنابراین ثابت می‌شود که پاسخ ضربه به صورت شکل (۸۰-۲) قابل ایجاد توسط دو سیستم با اتصال متوالی یکی بصورت شکل (۸۲-۲) و دیگری با پاسخ ضربه $h_2(t) = u(t) - u(t-T)$ می‌باشد. (د) می‌توان $x(t), h(t)$ را به صورت زیر نوشت

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \delta(t-nT) * [u(t) - u(t-T)]$$

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \delta(t-kT) * [u(t) - u(t-T)]$$

که در آن u_n و h_n به سادگی از روی شکل قابل تعیین هستند. بنابراین داریم

$$x(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \delta(t-nT) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \delta(t-kT) * p(t)$$

که در آن

$$p(t) = [u(t) - u(t-T)] * [u(t) - u(t-T)]$$

محاسبه $p(t)$ ساده است و به عهده خواننده واگذار می‌شود اما محاسبه قسمت اول کانولوشن ذیلاً ارائه می‌شود

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \delta(t-nT) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \delta(t-kT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \delta(t-nT) * \delta(t-kT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_n h_k \delta(t-kT-nT) \end{aligned}$$

اگر تغییر متغیر بدسیم به طوری که $k \rightarrow n+k$ باشد، در این صورت:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_n h_{k-n} \delta(t - kT)$$

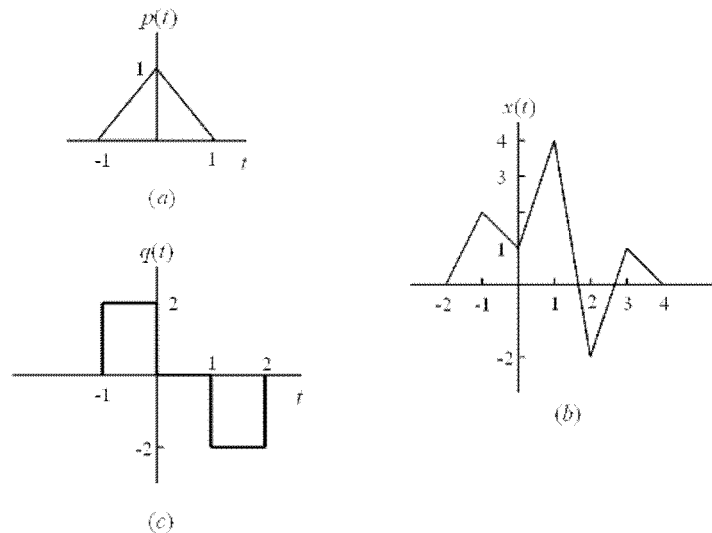
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k \delta(t - kT)$$

که y_k جمع کانولوشن u_k و h_k است، یعنی:

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n h_{k-n}$$

مثال (۲-۴۰): الف) نشان دهید که سیگنال ورودی $x(t)$ که در شکل نشان داده شده است قابل بسط به صورت زیر است

$$x(t) = \sum a_n p(t - n)$$



شکل (۲-۸۳): (a) سیگنال پایه $p(t)$ (b) سیگنال $x(t)$ (c) پاسخ سیستم به ورودی $p(t)$

ب) عبارتی برای پاسخ $y(t)$ سیستم به ورودی $x(t)$ برحسب پاسخ سیستم به ورودی $p(t-n)$ بدست آورید. فرض کنید $q(t)$ پاسخ سیستم به ورودی $p(t)$ می‌باشد.

ج) پاسخ سیستم به تابع شیب واحد را بیابید. (تابع شیب واحد به صورت $x(t) = tu(t)$ است)

د) پاسخ پله و ضربه به این سیستم را بیابید.

ه) نمودار جعبه‌ای سیستم را با استفاده از عناصر تاخیر انتگرال گیر، مشتق گیر، جمع و ضرب کننده‌ها رسم کنید.

حل: الف) مناسب است رابطه $p(t)$ را به صورت زیر بنویسیم

$$p(t) = (t+1)[u(t+1) - u(t)] + (1-t)[u(t) - u(t-1)]$$

$$= -2tu(t) + (t+1)u(t+1) + (t-1)u(t-1)$$

اکنون رابطه $x(t)$ مربوط به شکل (۲-۸۳-ب) را می‌نویسیم

$$x(t) = (2t+4)u(t+2) - (3t+3)u(t+1) + 4tu(t) + (-9t+9)u(t-1) \\ + (9t-18)u(t-2) - (4t+12)u(t-3) + (t-4)u(t-4)$$

با توجه به رابطه $p(t)$ می‌توان رابطه انتقال‌های مختلف آنرا نیز بدست آورد

$$p(t+2) = -(2t+4)u(t+2) + (t+3)u(t+3) + (t+1)u(t+1)$$

$$p(t+1) = -(2t+2)u(t+1) + (t+2)u(t+2) + tu(t)$$

$$p(t-1) = -(2t-2)u(t-1) + tu(t) + (t-2)u(t-2)$$

$$p(t-2) = -(2t-4)u(t-2) + (t-1)u(t-1) + (t-3)u(t-3)$$

$$p(t-3) = -(2t-6)u(t-3) + (t-2)u(t-2) + (t-4)u(t-4)$$

بنابراین می‌توان $x(t)$ را برحسب $p(t)$ بسط داد.

$$x(t) = 2p(t+1) + p(t) + 4p(t-1) - 2p(t-2) + p(t-3) \Rightarrow \begin{cases} a_{-1} = 2 \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 4 \\ a_2 = -2 \\ a_3 = 1 \end{cases}$$

(ب) با توجه به LTI بودن سیستم اگر ورودی بصورت مجموعه‌ای از توابع انتقال و وزن یافته $p(t)$ باشد، بعبارت دیگر اگر

$$x[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n p(t-n)$$

در آنصورت پاسخ به صورت زیر بدست می‌آید

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n q(t-n) = 2q(t+1) + q(t) + 4q(t-1) - 2q(t-2) + q(t-3)$$

(ج) تابع شیب واحد بصورت $r(t) = tu(t)$ می‌باشد که قابل بسط برحسب توابع $p(t-n)$ بصورت زیر است

$$r(t) = tu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} kp(t-k)$$

بنابراین پاسخ سیستم به تابع شیب واحد بصورت زیر بدست می‌آید.

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} kq(t-k)$$

(د) می‌دانیم اگر پاسخ یک سیستم LTI به ورودی شیب واحد $r(t)$ مساوی $y(t)$ باشد پاسخ پله آن مساوی است با

$$y_1(t) = \frac{d}{dt} \{y(t)\} = \frac{d}{dt} \{q(t-1) + 2q(t-2) + \dots\}$$

پس پاسخ پله بصورت زیر است

$$y_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} kq'(t-k) = 2[\delta'(t) + \delta'(t-1)]$$

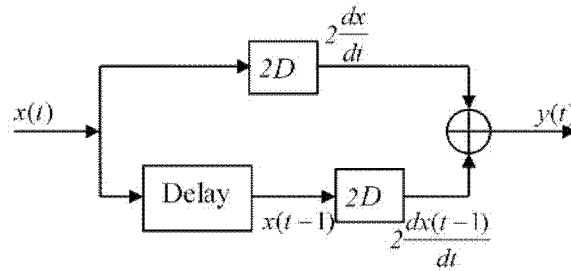
و پاسخ ضربه آن مشتق پاسخ پله است، یعنی

$$\begin{aligned} y_0(t) &= \left\{ \frac{d^2}{dt^2} q(t-1) + 2 \frac{d^2}{dt^2} q(t-2) + \dots \right\} \\ &= \sum_{K=1}^{\infty} kq''(t-k) = 2(\delta''(t) + \delta''(t-1)) \end{aligned}$$

(ه) ابتدا با داشتن p, q رابطه بین ورودی و خروجی را بدست می‌آوریم،

$$q(t) = 2 \left(\frac{dp(t)}{dt} + \frac{dp(t-1)}{dt} \right) \Rightarrow y(t) = 2 \left(\frac{dx(t)}{dt} + \frac{dx(t-1)}{dt} \right)$$

بنابراین نمودار جعبه‌ای این سیستم بصورت زیر است:



شکل (۲-۸۴): نمودار جعبه‌ای مربوط به قسمت (ه) مثال (۲-۴۱)

از اینجا می‌توان پاسخ ضربه را هم بدست آورد.

$$h(t) = 2(\delta'(t) + \delta'(t-1))$$

مثال (۲-۴۱): پاسخ پله سیستمی با پاسخ ضربه زیر را بدست آورید.

$$h[n] = (n+1)\alpha^n u[n] \quad |\alpha| < 1$$

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$$

حل: می‌دانیم که رابطه پاسخ پله و ضربه بصورت مقابل است

بنابراین:

$$\begin{aligned} s[n] &= \sum_{k=0}^n (k+1)\alpha^k = \sum_{k=0}^n \frac{d}{d\alpha} \alpha^{k+1} = \frac{d}{d\alpha} \sum_{k=0}^n \alpha^{k+1} \\ &= \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{\alpha^{n+2} - \alpha}{\alpha - 1} \right] = \frac{[(n+2)\alpha^{n+1} - 1](\alpha - 1) - \alpha^{n+2} + \alpha}{(\alpha - 1)^2} \\ &= \frac{(n+2)\alpha^{n+1}(\alpha - 1) - \alpha^{n+2} + 1}{(\alpha - 1)^2} \end{aligned}$$

مثال (۲-۴۲): سیستم‌های زیر را از لحاظ علیت و پایداری بررسی کنید.

$$a) h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - 1/2} = 2 < \infty$$

حل: این سیستم علی و پایدار است.

$$b) h[n] = (0.99)^n u[n+3]$$

$$\sum_{n=-3}^{+\infty} (0.99)^n = \frac{(0.99)^{-3}[-1]}{0.99 - 1} = \frac{(0.99)^{-3}}{0.01} < \infty$$

حل: این سیستم غیرعلی ولی پایدار است.

$$c) h[n] = (0.99)^n u[-n]$$

$$\sum_{n=-\infty}^0 (0.99)^n \rightarrow \infty$$

حل: این سیستم غیرعلی و ناپایدار است.

$$d) h[n] = 4^n u[2-n]$$

$$\sum_{n=-\infty}^2 4^n = \sum_{n=-2}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 20 + \frac{1}{1 - 1/4}$$

حل: این سیستم غیرعلی ولی پایدار است.

$$e) h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[-n+2] + (1.01)^n u[n+2]$$

$$\sum_{n=-\infty}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=-2}^{\infty} (1/01)^n \rightarrow \infty$$

حل: این سیستم غیرعلی و ناپایدار است.

$$f) h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + (1.01)^n u[-n+1]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=-\infty}^1 (1.01)^n = \frac{1}{1 - 1/2} + 1.01 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1.01}\right)^n = 2 + 1.01 + \frac{1}{1 - 1/1.01}$$

حل: این سیستم پایدار و غیرعلی است.

$$g) h[n] = n \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

حل: با توجه به اینکه داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} np^n = p \frac{d}{dp} \sum_{n=0}^{\infty} p^n = \frac{p}{(1-p)^2} = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 2$$

بنابراین سیستم علی و پایدار است.

$$h) \quad h(t) = e^{-3t}u(t-1)$$

حل: این سیستم پایدار و علی است زیرا

$$\int_1^{\infty} e^{-3t} dt = -\frac{1}{3}e^{-3t} \Big|_1^{\infty} = -\frac{1}{3}(0 - e^{-3}) = \frac{1}{3}e^{-3}$$

$$i) \quad h(t) = e^{-3t}u(-t-1)$$

حل: این سیستم ناپایدار و غیرعلی است زیرا

$$\int_{-\infty}^{-1} e^{-3t} dt = -\frac{1}{3}e^{-3t} \Big|_{-\infty}^{-1} \rightarrow \infty$$

$$j) \quad h(t) = e^{-t}u(t+100)$$

حل: این سیستم غیرعلی و پایدار است زیرا

$$\int_{-100}^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_{-100}^{\infty} = 0 - (-e^{+(100)}) = e^{100}$$

$$k) \quad h(t) = e^t u(-t-1)$$

حل: این سیستم پایدار و غیرعلی است زیرا

$$\int_{-\infty}^{-1} e^t dt = e^t \Big|_{-\infty}^{-1} - 0 = e^{-1}$$

$$l) \quad h(t) = e^{-4|t|}$$

حل: این سیستم پایدار و غیرعلی است زیرا

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4|t|} dt = \int_0^{\infty} e^{-4t} dt + \int_{-\infty}^0 e^{4t} dt = -\frac{1}{4}e^{-4t} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{4}e^{4t} \Big|_{-\infty}^0 = \left(-\frac{1}{4}\right)(-1) + \left(\frac{1}{4}\right)(1) = \frac{1}{2}$$

$$m) \quad h(t) = te^{-t}u(t)$$

حل: این سیستم پایدار و علی است زیرا

$$\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t}u(t) dt = \int_0^{\infty} te^{-t} dt = \left\{ -te^{-t} - e^{-t} \right\}_0^{\infty} = 1$$

$$n) \quad h(t) = \left(2e^{-t} - e^{\frac{t-100}{100}} \right) u(t)$$

حل: این سیستم ناپایدار و علی است زیرا

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(2e^{-t} - e^{\frac{t-100}{100}} \right) u(t) dt = \int_0^{\infty} \left(2e^{-t} - e^{\frac{t-100}{100}} \right) dt \rightarrow \infty$$

مثال (۲-۴۳): سه سیستم LTI با پاسخ‌های ضربه $h_3(t), h_2(t), h_1(t)$ مطابق شکل (۲-۸۵) را در نظر

بگیرید.

الف) سیگنال $x_1(t)$ را به گونه‌ای بیابید که

(i) $x_1(t)$ حقیقی باشد

(ii) $x_1(t < 0) = 0$

iii) برای $|x_1(t)| \leq 1 \Leftrightarrow t \geq 0$

iv) $y_1(t) = x_1(t) * h_1(t)$ تا حد ممکن در $t = 4$ بزرگ باشد.

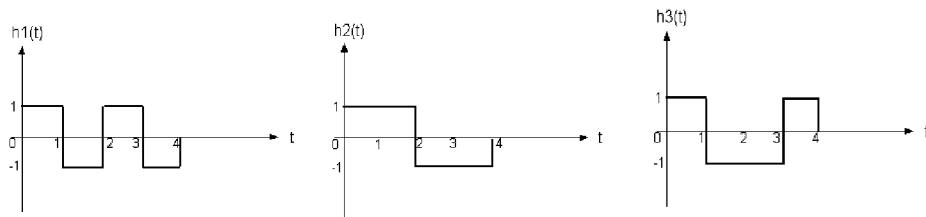
ب) قسمت الف) را برای $x_2(t)$ و $x_3(t)$ دوباره تکرار کنید. اما با انتخاب مناسب این بار

$y_2(t) = x_2(t) * h_2(t)$ و $y_3(t) = x_3(t) * h_3(t)$ را تا حد امکان در $t = 4$ بزرگ کنید.

ج) مقدار $y_{ij}(t)$ در لحظه $t = 4$ چیست؟

$$\begin{cases} y_{ij}(t) = x_i(t) * h_j(t) \\ i, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

د) هر کدام از سیستم‌های فوق را بوسیله عناصر خط تاخیر و جمع و ضرب کننده‌ها بسازید.



شکل (۲-۸۵): پاسخهای ضربه $h_3(t), h_2(t), h_1(t)$ مربوط به مثال (۲-۴۳)

حل: الف) خروجی سیستم اول برابر است با

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t-\tau) h_1(\tau) d\tau$$

همچنین مقدار خروجی در $t = 4$ برابر است با

$$y_1(4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(4-\tau) h_1(\tau) d\tau$$

با توجه به شکل $h_1(t)$ می‌توان این سیگنال را بصورت زیر تجزیه کرد

$$y_1(4) = \int_0^1 x_1(4-\tau) d\tau - \int_1^2 x_1(4-\tau) d\tau + \int_2^3 x_1(4-\tau) d\tau - \int_3^4 x_1(4-\tau) d\tau$$

بیشترین مقداری که برای $y(4)$ متصور است با توجه به اینکه $|x_1(t)| < 1$ موقعی است که

$$\begin{cases} x_1(4-t) = 1 & 0 < t < 1 \\ x_2(4-t) = -1 & 1 < t < 2 \\ x_3(4-t) = 1 & 2 < t < 3 \\ x_4(4-t) = -1 & 3 < t < 4 \end{cases}$$

و یا

$$x_1(t) = h_1(4-t) \Rightarrow x_1(t) = h_1(4-t)$$

$$x_1(t) \begin{cases} h_1(4-t) & 0 < t < 4 \\ \text{arbitrary} & t > 4 \end{cases}$$

ب) مشابه عملیات قسمت (الف) عمل می‌کنیم و داریم

$$x_2(4-t) = h_2(t) \rightarrow x_2(t) = h_2(4-t)$$

$$x_3(4-t) = h_3(t) \rightarrow x_3(t) = h_3(4-t)$$

توجه شود که در خارج فاصله $1 < t < 4$ توابع $x_2(t)$ و $x_3(t)$ دلخواه هستند.

ج) طبق تعریف $y_{ij}(t)$ داریم

$$y_{ij}(t) = x_i(t) * h_j(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i(t-\tau) h_j(\tau) d\tau$$

و در لحظه $t=4$ داریم

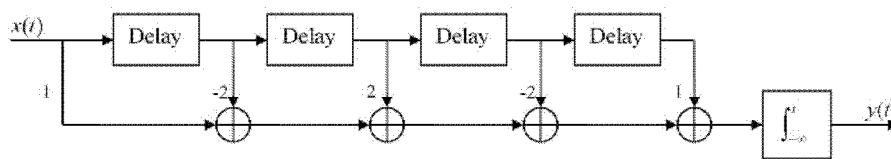
$$y_{ij}(4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i(4-\tau) h_j(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 4 & i = j \end{cases}$$

د) نمودار جعبه‌ای سیستم اول را بدست می‌آوریم بقیه بلوک‌ها با عملیاتی مشابه بدست می‌آیند. با کمی دقت می‌بینیم که $h_1(t)$ قابل بیان بصورت زیر است.

$$h_1(t) = 4u(t) - 2u(t-1) + 2u(t-2) - 2u(t-3) + u(t-4)$$

$$= u(t) * [\delta(t) - 2\delta(t-1) + 2\delta(t-2) - 2\delta(t-3) + \delta(t-4)]$$

بنابراین می‌توان نمودار جعبه‌ای این سیستم را بصورت زیر رسم کرد. بلوک delay به اندازه یک واحد در زمان تاخیر ایجاد می‌کند.



شکل (۲-۸۶): نمودار جعبه‌ای سیستمی با پاسخ ضربه $h_1(t)$

در این سیستم داریم

$$z(t) = \delta(t) - 2\delta(t-1) + 2\delta(t-2) - 2\delta(t-3) + \delta(t-4)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t z(\tau) d\tau = u(t) - 2u(t-1) + 2u(t-2) - 2u(t-3) + u(t-4)$$

مثال (۲-۴۴): معادله تفاضلی زیر را حل کنید (با فرض شرایط استراحت اولیه).

$$\begin{cases} y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] \\ x[n] = k \cos(\Omega_0 n) u[n] \end{cases}$$

حل: ابتدا برای یافتن پاسخ همگن طرف دوم را مساوی صفر قرار می‌دهیم

در این معادله پاسخی بصورت $y_h[n] = A\alpha^n$ صدق می‌کند که با قرار دادن این پاسخ در معادله فوق داریم:

$$y_h[n] - \frac{1}{2}y_h[n-1] = 0$$

$$A\alpha^n - \frac{1}{2}A\alpha^{n-1} = 0 \Rightarrow A\alpha^{n-1} \left\{ \alpha - \frac{1}{2} \right\} = 0$$

این معادله فقط یک ریشه دارد. $\alpha = \frac{1}{2}$ در نتیجه پاسخ همگن برابر است با:

$$y_h[n] = A \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

با توجه به نوع ورودی می توان شکل پاسخ خصوصی را حدس زد و بعد باید این شکل حدسی پاسخ را در معادله تفاضلی قرار داد. برای قرار دادن در معادله تفاضلی به $y_p[n-1]$ نیز نیاز داریم، پس:

$$\begin{aligned} y_p[n] &= B \cos(\Omega_0 n + \theta) \\ y_p[n-1] &= B \cos(\Omega_0(n-1) + \theta) = B \cos(\Omega_0 n - \Omega_0 + \theta) \\ &\Rightarrow B \{ \cos(\Omega_0 n) \cos \theta - \sin(\Omega_0 n) \sin \theta \} - \\ &\frac{B}{2} \{ \cos(\Omega_0 n) \cos(-\Omega_0 + \theta) - \sin(\Omega_0 n) \sin(-\Omega_0 + \theta) \} \\ &= k \cos(\Omega_0 n) \end{aligned}$$

پس از کمی محاسبه ساده خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} \cos(\Omega_0 n) \left\{ B \cos \theta - \frac{1}{2} B \cos(-\Omega_0 + \theta) \right\} \\ + \sin(\Omega_0 n) \left\{ -B \sin \theta + B \frac{1}{2} \sin(-\Omega_0 + \theta) \right\} = k \cos(\Omega_0 n) \end{aligned}$$

اکنون باید ضرایب $\cos \Omega_0 n$ و $\sin \Omega_0 n$ را در دو طرف معادله مساوی قرار دهیم

$$\begin{cases} B \cos \theta - \frac{1}{2} B \cos(-\Omega_0 + \theta) = k \\ -B \sin \theta + \frac{1}{2} B \sin(-\Omega_0 + \theta) = 0 \end{cases}$$

از معادله دوم داریم

$$\begin{aligned} \sin(-\Omega_0 + \theta) &= 2 \sin \theta \\ -\sin \Omega_0 \cos \theta + \cos \Omega_0 \sin \theta &= 2 \sin \theta \\ \sin \Omega_0 \cos \theta &= \sin \theta (\cos \Omega_0 - 2) \end{aligned}$$

که از این تساوی می توان رابطه زیر را بدست آورد

$$\theta = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\sin \Omega_0}{\cos \Omega_0 - 2} \right)$$

اکنون ضریب B هم بسادگی قابل محاسبه است

$$B = \frac{k}{\cos \theta - \frac{1}{2} \cos(\theta - \Omega_0)}$$

بنابراین $y[n]$ بصورت روبرو بدست می‌آید

$$y[n] = A \left(\frac{1}{2}\right)^n + B \cos(\Omega_0 n + \theta)$$

با اعمال شرایط اولیه می‌توان تنها جواب باقیمانده یعنی A را هم بدست آورد

$$y[0] = 0 \Rightarrow A + B \cos \theta = 0 \Rightarrow A = -B \cos \theta$$

مثال (۲-۴۵): یک سیستم که توسط معادله تفاضلی زیر تعریف می‌شود را با فرض شرایط استراحت اولیه در نظر بگیرید.

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$$

الف) فرض کنید $x[n] = \delta[n]$ باشد. مقدار $y[0]$ چیست؟ چه معادله‌ای در مورد $h[n]$ به ازای $n \geq 1$ وجود دارد و شرایط کمکی این معادله را بنویسید. معادله بدست آمده را برای محاسبه $h[n]$ حل کنید. ب) سیستم LTI با استراحت اولیه که توسط معادله تفاضلی زیر تعریف می‌شود را در نظر بگیرید.

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + 2x[n-1]$$

پاسخ ضربه این سیستم را بیابید.

ج) سیستم LTI با فرض شرایط استراحت اولیه که توسط معادله تفاضلی زیر داده شده است را در نظر بگیرید.

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = x[n]$$

با فرض $a_0 \neq 0$ مقدار $y[0]$ را بدست آورید. ورودی را $x[n] = \delta[n]$ در نظر بگیرید.

پاسخ ضربه این سیستم را بیابید.

حل: الف)

$$\begin{cases} y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] \\ x[n] = \delta[n] \end{cases}$$

چون سیستم در حال استراحت اولیه است پس علی است. بنابراین $h[n < 0] = 0$ یعنی پاسخ ضربه واحد برای $n < 0$ مساوی صفر است. اکنون در معادله تفاضلی $x[n] = \delta[n]$ و $y[n] = h[n]$ را قرار داده و معادله را به روش بازگشتی حل می‌کنیم. و یا

$$y[0] - \frac{1}{2}y[-1] = \delta[0]$$

$$y[0] = \delta[0] \Rightarrow h[0] = 1$$

و برای $n \geq 1$ ورودی صفر است و فقط پاسخ همگن باقی می‌ماند.

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = 0 \Rightarrow h[n \geq 1] = A\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

اکنون برای بدست آوردن ضریب مجهول A لازم است $h[1]$ را به روش بازگشتی از معادله تفاضلی بدست آورد.

$$h[n] - \frac{1}{2}h[n-1] = 0, \quad h[0] = 1$$

بنابراین با قراردادن $n=1$ در رابطه فوق داریم

$$h[1] - \frac{1}{2}h[0] = 0 \rightarrow h[1] = \frac{1}{2}$$

اکنون با توجه به اینکه $h[n \geq 1] = A\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $h[1] = \frac{1}{2}$ می توان مجهول A را بدست آورد

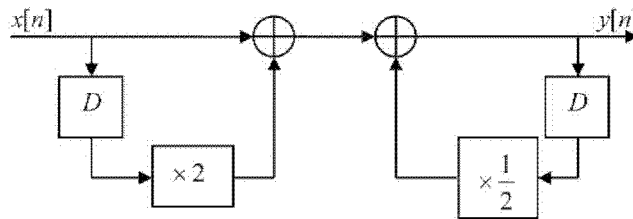
بنابراین خواهیم داشت

$$A\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} \rightarrow A = 1$$

(ب) این معادله را می توان بصورت زیر نوشت

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] + \frac{1}{2}y[n-1]$$

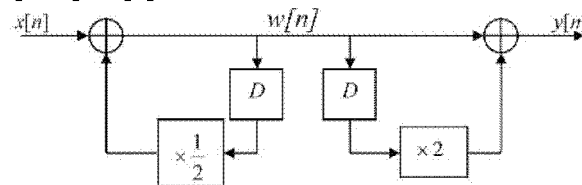
بنابراین می توان بصورت زیر و با استفاده از عناصر تاخیر و جمع و ضرب کننده ها این سیستم را ساخت.



شکل (۸۷-۲): ساخت سیستم شکل (۸۶-۲) بکمک ضرب و جمع کننده ها و عناصر تاخیر

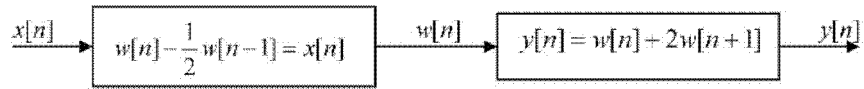
که در آن D عنصر تاخیردهنده به اندازه یک واحد است. اگر جای این دو سیستم را عوض کنیم مشاهده می شود که در این سیستم روابط روبرو را داریم

$$\begin{cases} x[n] + \frac{1}{2}w[n-1] = w[n] \\ w[n] + 2w[n-1] = y[n] \end{cases}$$



شکل (۲-۸۸): جایجایی سیستم‌ها با استفاده از خاصیت جایجایی

بنابراین می‌توان تصور کرد که این معادله تفاضلی توسط ترکیب متوالی دو سیستم بصورت زیر قابل بیان است



شکل (۲-۸۹): نمودار جعبه‌ای قسمت (ب) مثال (۲-۴۶)

گفتیم اگر دو سیستم بصورت متوالی بهم وصل شده باشند در آنصورت پاسخ ضربه کلی سیستم بصورت زیر بدست می‌آید



شکل (۲-۹۰): نمودار جعبه‌ای قسمت (ب) مثال (۲-۴۶)

در این ترکیب داریم $y[n] = x[n] * h_1[n] * h_2[n]$ ، بنابراین باید $h_1[n]$ و $h_2[n]$ را بدست آوریم. ابتدا $h_1[n]$ را بدست می‌آوریم چون سیستم خطی است و در شرایط اولیه صدق می‌کند، خواهیم داشت:

$$h_1[n] = \frac{1}{2} h_1[n-1] + \delta[n]$$

$$h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

اکنون $h_2[n]$ را بدست می‌آوریم.

$$h_2[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1]$$

اکنون آماده هستیم پاسخ ضربه کل سیستم را پیدا کنیم

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] * \{\delta[n] + 2\delta[n-1]\}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] * \delta[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] * 2\delta[n-1]$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

راه حل دوم: معادله تفاضلی $y[n] - 0.5y[n-1] = x[n] - 2x[n-1]$ همان معادله تفاضلی در بند الف است که در طرف دوم آن جمله $2x[n-1]$ را نیز باید اضافه کرد. در بند الف پاسخ طرف اول معادله را به $x[n] = \delta[n]$ به دست می‌آوریم. این پاسخ را $y_1[n]$ می‌نامیم. چون سیستم در حالت استراحت اولیه است، پاسخ طرف اول به $x[n] + 2x[n-1]$ برابر است با:

$$h[n] = y_1[n] + 2y_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

که همان جواب به دست آمده در راه حل اول است.

ج) چون سیستم علی است (طبق فرض استراحت اولیه) در آن صورت $h[n < 0] = 0$ قرار می‌دهیم

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = x[n]$$

$$x[n] = \delta[n]$$

$$\sum_{k=0}^N a_k h[n-k] = \delta[n]$$

به ازای $n = 0$ داریم

$$\sum_{k=0}^N a_k h[-k] = \delta[0] = 1$$

بنابراین داریم

$$a_0 h[0] = \delta[0] = 1 \rightarrow h[0] = \frac{1}{a_0}$$

بازاری $n > 0$ فقط پاسخ همگن می‌ماند، چون ورودی برابر صفر خواهد شد.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k h[n-k] = 0$$

پاسخ $h[n] = A\alpha^n$ در این معادله به ازای $n > 0$ صادق است پس آن را در معادله فوق جایگزین می‌کنیم:

$$\sum_{k=0}^N a_k A\alpha^{n-k} = 0$$

معادله را بر A (که مخالف صفر است) تقسیم می‌کنیم:

$$\sum_{k=0}^N a_k \alpha^{n-k} = 0$$

$$a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \dots + a_N \alpha^{n-N} = 0$$

با ضرب معادله فوق در α^{-n+N} داریم

$$a_0 \alpha^N + a_1 \alpha^{N-1} + a_2 \alpha^{N-2} + \dots + a_{N-1} + a_N = 0$$

این معادله N ریشه دارد که بسته به اینکه مستقل از هم باشند یا بعضی ریشه‌ها تکراری، پاسخ عمومی به صورت‌های زیر است

$N-1$ ریشه مستقل

$$h[n] = \{A_1(\alpha_1)^n + A_2(\alpha_2)^n + \dots + A_N(\alpha_N)^n\} u[n]$$

۲- دو ریشه مضاعف $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ و بقیه مستقل می‌باشند.

$$h[n] = \{A_1(\alpha)^n + A_2n(\alpha)^n + A_3(\alpha_3)^n + \dots + A_N(\alpha_N)^n\} u[n]$$

۳- m ریشه مضاعف $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = \alpha$ و $N - m$ ریشه مستقل می‌باشند.

$$h[n] = \{A_1\alpha^n + A_2n\alpha^n \dots + A_m n^m \alpha^n + A_{m+1}(\alpha_{m+1})^n + \dots + A_N(\alpha_N)^n\} u[n]$$

برای بدست آوردن ضرایب A_1, A_2, \dots, A_N باید N شرط اولیه داشته باشیم که در زیر به دست می‌آوریم.

معادله داده شده سیستم را وقتی $x[n] = \delta[n]$ است بسط می‌دهیم

$$a_0 h[n] + a_1 h[n-1] + a_2 h[n-2] + \dots + a_N h[n-N] = \delta[n]$$

به ازای $n=0$ داریم (توجه کنید که داریم $h(n < 0) = 0$)

$$a_0 h[0] = 1 \Rightarrow h[0] = \frac{1}{a_0}$$

به ازای $n=1$ داریم

$$a_0 h[1] + a_1 h[0] + a_2 h[-1] + a_3 h[-2] + \dots = 0$$

$$a_0 h[1] + a_1 h[0] = 0$$

$$h[1] = \frac{-a_1}{a_0} h[0] = -\frac{a_1}{a_0} \times \frac{1}{a_0} \rightarrow h[1] = -\frac{a_1}{a_0^2}$$

همچنین به ازای $n=2$ شرط سوم را بدست می‌آوریم

$$a_0 h[2] + a_1 h[1] + a_2 h[0] = 0$$

$$h[2] = -\frac{1}{a_0} \{a_1 h[1] + a_2 h[0]\} \rightarrow h[2] = \frac{1}{a_0} \left\{ \left(\frac{a_1}{a_0} \right)^2 - \frac{a_2}{a_0} \right\}$$

و به همین طریق بقیه شرایط اولیه بدست می‌آیند.

مثال (۲-۴۶): سیگنال $x(t)$ توسط یک سیستم ایجاد کننده اعوجاج با پاسخ ضربه $h(t)$ دچار اعوجاج شده است ضابطه $h(t)$ بصورت روبرو است، که می‌تواند بیان کننده اکو (Echo) یا انعکاس ضربه ورودی با پریود T و بهره h_k در نظر گرفته شود.

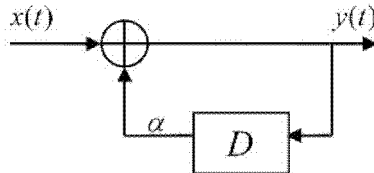
$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \delta(t - kT)$$

اگر بخواهیم دوباره $x(t)$ را بازسازی کنیم باید از سیستمی با پاسخ ضربه $g(t)$ که بطور متوالی با $h(t)$ قرار می‌گیرد استفاده کنیم که در آن داریم

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \delta(t - kT)$$

الف) مطلوبست رابطه h_k و g_k

ب) اگر $h_0 = 1$ و $h_1 = \frac{1}{2}$ و $h_n = 0$ برای $n \geq 2$ ، در آن صورت $g(t)$ را بیابید.
 ج) پاسخ ضربه سیستم زیر را بیابید، که D معادل T ثانیه تاخیر در حوزه زمان است.



شکل (۲-۹۱): سیستم مربوط به مثال (۲-۴۷) قسمت (ج)

د) فرض کنید که $y(t < 0) = 0$ باشد اگر $x(t < 0) = 0$. نشان دهید که سیستم به ازای $0 < \alpha < 1$ پایدار است.

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \delta(t - kT)$$

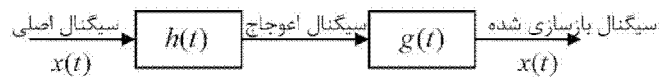
حل:

این یک سیستم ایجاد کننده اعوجاج است.

(الف)

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \delta(t - kT)$$

این یک سیستم بازساز $x(t)$ پس از عبور از سیستم ایجاد کننده اعوجاج است. نمودار جعبه‌ای برای این قسمت بصورت زیر است



شکل (۲-۹۲): نمودار جعبه‌ای مثال (۲-۴۷) قسمت (الف)

اگر سیگنال بازسازی شده دقیقاً همان سیگنال اصلی باشد باید داشته باشیم:

$$x(t) * h(t) * g(t) = x(t)$$

و یا

$$h(t) * g(t) = \delta(t)$$

ضرایب h_k معلوم هستند و هدف محاسبه ضرایب g_k و تعیین سیستم $g(t)$ است.

در مثال ۲-۳۹ بند ج محاسبه کانولوشن $\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \delta(t - nT) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k \delta(t - kT)$ را انجام دادیم. و نشان

دادیم که حاصل آن برابر $\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k \delta(t - kT)$ می‌شود که:

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n h_{k-n}$$

بنابراین برای این مساله نیز می‌توان نوشت:

$$h(t) * g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n h_{k-n} \right] \delta(t - kT) = \delta(t)$$

از مقایسه دو طرف رابطه فوق متوجه می‌شویم که باید به ازای $k \neq 0$ ، $y_k = 0$ و به ازای $k = 0$ ، $y_k = 1$ باشد. یعنی:

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n h_{k-n} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

توجه شود که برای $n < 0$ مقدار g_n صفر است.

بنابراین به ازای $k = 0$ داریم

$$h_0 g_0 = 1 \rightarrow g_0 = \frac{1}{h_0}$$

به ازای $k = 1$ داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{1-n} g_n = h_1 g_0 + h_0 g_1 = 0 \rightarrow g_1 = -\frac{h_1}{h_0} g_0 \quad g_1 = -\frac{h_1}{h_0^2}$$

به ازای $k = 2$ داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{2-n} g_n = h_2 g_0 + h_1 g_1 + h_0 g_2 = 0$$

و یا

$$g_2 = -\frac{h_2 g_0 + h_1 g_1}{h_0}$$

به همین ترتیب می‌توان ادامه داد و بقیه ضرایب را حساب کرد.

(ب) با استفاده از روابط بدست آمده داریم

$$h_0 = 1 \Rightarrow g_0 = 1 \Rightarrow g_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$h_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow g_1 = -\frac{1}{2}$$

برای محاسبه سایر ضرایب با توجه به اینکه $h_n = 0$ به ازای $n \geq 2$ می‌توان رابطه را ساده‌تر کرد.

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{L-n} g_n = h_L g_0 + h_{L-1} g_1 + \dots + h_1 g_{L-1} + h_0 g_L = 0$$

$$g_L = -\frac{h_1}{h_0} g_{L-1} \Rightarrow g_3 = -\frac{h_1}{h_0} g_2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow g_3 = -\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$g_k = (-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

بنابراین

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \delta(t - kT)$$

(ج) چون T ثانیه طول می کشد تا فیدبک اثر کند

$$\begin{cases} x(t) = \delta(t) \\ h(0) = \delta(t) \\ 0 < \alpha < 1 \end{cases} \quad h(t) = \alpha \delta(t - T)$$

از آنجا که $h(0)$ اثرش را اعمال کرده و از بین رفته، پس فقط در لحظات kT خروجی مقدار دارد، به طوری که:

$$h(2T) = \alpha^2 \delta(t - 2T)$$

$$h(kT) = \alpha^k \delta(t - kT)$$

$$h(t) = \sum_{K=0}^{\infty} \alpha^K \delta(t - kT)$$

(د) با شرط $0 < \alpha < 1$ سیستم پایدار است چون

شرط پایداری سیستم این است که $0 < \alpha < 1$ ، چون:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \delta(t - \tau - kT) d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1 - \alpha}$$

مثال (۲-۴۷): پاسخ ضربه سیستم‌های LTI و علی که توسط معادلات تفاضلی زیر مشخص شده‌اند را بدست آورید.

$$y[n] - y[n-2] = x[n] \quad \text{(الف)}$$

$$y[n] - y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] \quad \text{(ب)}$$

$$y[n] - y[n-2] = 2x[n] - 3x[n-4] \quad \text{(ج)}$$

$$y[n] - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n] \quad \text{(د)}$$

حل: الف) پاسخ ضربه را $h_0[n]$ می‌نامیم.

$$y[n] - y[n-2] = x[n] \quad , \quad h_0[n] - h_0[n-2] = \delta[n]$$

در $n = 0$ داریم

$$h_0[0] - h_0[-2] = \delta[0] \rightarrow h_0[0] = 1$$

چون سیستم علی است پس

$$h[n < 0] = 0$$

و برای $n \geq 1$ فقط پاسخ همگن داریم

$$h_0[n] - h_0[n-2] = 0$$

پاسخی بصورت $h_0[n] = A\alpha^n$ در معادله فوق صادق است. با قرار دادن این پاسخ در معادله مذکور داریم

$$A\alpha^n - A\alpha^{n-2} = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm 1$$

بنابراین شکل کلی پاسخ همگن بصورت زیر است

$$h_0[n] = A_1(1)^n + A_2(-1)^n = A_1 + A_2(-1)^n$$

برای بدست آوردن ضرایب مجهول احتیاج به دو شرط اولیه داریم. به روش بازگشتی و از روی معادله تفاضلی مستقیم می‌توان این دو شرط را بدست آورد. در معادله تفاضلی $n = 1$ قرار می‌دهیم

$$h_0[1] - h_0[-1] = 0 \Rightarrow h_0[1] = 0$$

پس $h_0[1]$ اولین شرط کمکی است. برای بدست آوردن شرط دوم در معادله $n = 2$ قرار می‌دهیم

$$h_0[2] - h_0[0] = 0$$

و یا

$$h_0[2] = h_0[0] = 1$$

بنابراین از این مقادیر اولیه برای بدست آوردن A_1 و A_2 استفاده می‌کنیم.

همچنین

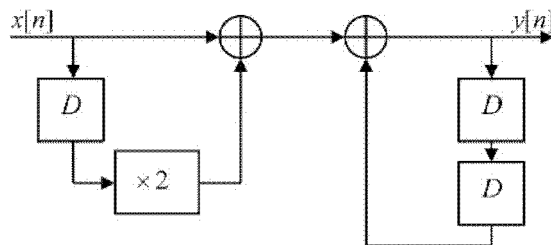
$$h_0[0] = A_1 + A_2(-1)^2 = A_1 + A_2 = 1$$

$$h_0[1] = A_1 + A_2(-1)^1 = A_1 - A_2 = 0$$

از حل دو معادله فوق A_1 و A_2 بدست می‌آیند

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{2}$$

(ب) این معادله تفاضلی بصورت زیر قابل ساخت است



شکل (۲-۹۰): نمودار جعبه‌ای سیستم مثال (۲-۴۸) قسمت (ب)

اگر جای دو سیستم را در شکل فوق عوض کنیم و آنرا با نمودار جعبه‌ای مربوط به قسمت (الف) مقایسه کنیم، مشاهده می‌شود که پاسخ ضربه این سیستم نسبت به پاسخ ضربه سیستم قسمت (الف) فقط در $2h_0[n-1]$ تفاوت دارد که ناشی از عبور سیگنال از مسیر دارای تاخیر است. $h_0[n]$ همان $h[n]$ بند قبلی است. بنابراین برای این سیستم پاسخ ضربه را بصورت زیر داریم

$$h[n] = h_0[n] + 2h_0[n-1] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{2}{2} + \frac{2}{2}(-1)^{n-1} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^n + (-1)^{n-1}$$

$$y[n] - y[n-2] = 2x[n] - 3x[n-4] \quad (\text{ج})$$

مشابه قسمت (ب) عمل کرده و داریم

$$h[n] = 2h_0[n] - 3h_0[n-4]$$

$$y[n] - \frac{\sqrt{3}}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n] \quad (\text{د})$$

$$y[0] - \frac{\sqrt{3}}{2}y[-1] + \frac{1}{4}y[-2] = \delta[0]$$

چون سیستم علی است پس $y[-2] = y[-1] = 0$ و $y[0] = h[0] = 1$

همین عملیات را بطور بازگشتی برای دو مقدار $n=1$ و $n=2$ نیز انجام می‌دهیم. این مقادیر را برای حل معادله همگن بعنوان شرایط کمکی نیاز داریم

$$y[1] - \frac{\sqrt{3}}{2}y[0] + \frac{1}{4}y[-1] = 0$$

$$\rightarrow y[1] = \frac{\sqrt{3}}{2}y[0] = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y[2] - \frac{\sqrt{3}}{2}y[1] + \frac{1}{4}y[0] = 0 \rightarrow y[2] = \frac{\sqrt{3}}{2}y[1] - \frac{1}{4}y[0] = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

با توجه به داشتن شرایط استراحت اولیه برای $k > 0$ فقط پاسخ همگن خواهیم داشت، چون ورودی برابر صفر است

$$h[n] = A\alpha^n \rightarrow A\alpha^n - \frac{\sqrt{3}}{2}A\alpha^{n-1} + \frac{1}{4}A\alpha^{n-2} = 0$$

$$\alpha^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4} - 4\left(\frac{1}{4}\right)}}{2}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-1/4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \pm j\frac{1}{4}$$

بنابراین پاسخ ضربه بصورت زیر است

$$h[n] = A_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + j \frac{1}{4} \right)^n + A_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - j \frac{1}{4} \right)^n$$

از شرایط کمکی برای بدست آوردن A_1 و A_2 استفاده می‌کنیم

$$h[1] = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + j \frac{1}{4} \right) + A_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - j \frac{1}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} (A_1 + A_2) + \frac{j}{4} (A_1 - A_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$h[2] = \frac{1}{2} \Rightarrow A_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{j}{4} \right)^2 + A_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{j}{4} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow A_1 \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{16} + j \frac{2\sqrt{3}}{16} \right) + A_2 \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{16} - j \frac{2\sqrt{3}}{16} \right) = \frac{1}{2}$$

البته نیازی به حل هم زمان دو رابطه فوق الذکر نیست و می‌توان از هر یک از دو رابطه فوق $A_1 = 1$ و $A_2 = 1$ را بدست آورد.

مثال (۲-۴۸): الف) ثابت کنید برای یک سیستم LTI علی که توسط معادله دیفرانسیل زیر تعریف

می‌شود $\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = x(t)$ با فرض شرایط استراحت اولیه لازم است شرایط زیر ارضاء شوند.

$$y(0^+) = \frac{dy(0^+)}{dt} = \dots = \frac{d^{N-2} y(0^+)}{dt^{N-2}} = 0$$

$$\frac{d^{N-1} y(0^+)}{dt^{N-1}} = \frac{1}{a_N}$$

$$y(0^-) = \frac{dy(0^-)}{dt} = \dots = \frac{d^{N-1} y(0^-)}{dt^{N-1}} = 0 \quad \text{فرض کنید}$$

ب) پاسخ ضربه سیستمی که توسط معادله دیفرانسیل زیر داده شده است را بر حسب پاسخ ضربه سیستم مذکور در بند الف) بیابید.

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

ج) با استفاده از قسمت‌های قبلی، با فرض سیستم‌های LTI علی با شرایط استراحت اولیه پاسخ ضربه سیستم بیان شده با معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$a) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$b) \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 3 \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

$$c) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{d^3 x(t)}{dt^3} + 2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

حل الف)

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = x(t)$$

جهت سادگی ابتدا حالت‌های خاص و ساده به ازای $N=1$ و $N=2$ را در نظر می‌گیریم.
به ازای $N=1$ داریم

$$x(t) = \delta(t)$$

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

از طرفین از 0^- تا 0^+ انتگرال می‌گیریم

$$a_0 \int_{0^-}^{0^+} y(t) dt + a_1 \int_{0^-}^{0^+} \frac{dy(t)}{dt} dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$$

$$y(0^+) = \frac{1}{a_1} \text{ و } a_1 y(0^+) = 1$$

به ازای $N=2$ داریم:

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \delta(t)$$

از طرفین از 0^- تا 0^+ انتگرال می‌گیریم،

$$\int_{0^-}^{0^+} \left(a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \right) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$$

بنابراین

$$a_1 y(0^+) + a_2 y'(0^+) = 1$$

حتما باید $y(0^+) = y(0^-) = 0$ باشد زیرا در غیر اینصورت در لحظه صفر یک پله در $y(t)$ وجود دارد.
وجود پله در $y(t=0)$ به معنی وجود ضربه در $\frac{dy}{dt}$ است و همین طور وجود مشتق ضربه در

$\frac{d^2 y}{dt^2}$ در $t=0$ است، در حالی که در طرف راست معادله سیستم، فقط تابع ضربه داریم. بنابراین

$$a_2 y'(0^+) = 1 \Rightarrow y'(0^+) = \frac{1}{a_2}$$

و اگر همینطور ادامه دهیم می‌بینیم که شروط زیر برقرار می‌باشند

$$\sum_{k=0}^N a_k \int_{0^-}^{0^+} \frac{d^k y(t)}{dt^k} dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt$$

$$\sum_{k=0}^N a_k \left[\frac{d^{k-1} y(t)}{dt^{k-1}} \Big|_{0^+} - \frac{d^{k-1} y(t)}{dt^{k-1}} \Big|_{0^-} \right] = 1$$

چون سیستم علی می‌باشد، پس

$$y(0^-) = \frac{dy(0^-)}{dt} = \frac{d^2y(0^-)}{dt^2} = \dots = 0$$

پس باید

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^{k-1}y(t)}{dt^{k-1}} \Big|_{0^+} = 1$$

سیگنال خروجی و کلیه مشتقات آن (تا مرتبه $N-2$) باید برابر صفر باشد و فقط مشتق مرتبه $N-1$ سیگنال خروجی دارای ضربه باشد، زیرا در غیر این صورت در سمت چپ معادله سیستم مشتقات ضربه هم ظاهر خواهد شد. در حالی که در سمت راست معادله فقط ضربه داریم. بنابراین:

$$y(0^+) = \frac{dy(0^+)}{dt} = \frac{d^2y(0^+)}{dt^2} = \dots = \frac{d^{N-2}y(0^+)}{dt^{N-2}} = 0$$

مشتق $(N-1)$ ام خروجی دارای ضربه است که انتگرالش حول زمان صفر یک پله می‌سازد، به طوری که:

$$a_N \frac{d^{N-1}y(0^+)}{dt^{N-1}} = 1 \Rightarrow \frac{d^{N-1}y(0^+)}{dt^{N-1}} = \frac{1}{a_N}$$

(ب)

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

اگر پاسخ ضربه سیستم قسمت (الف) همین مساله را $h_0(t)$ بنامیم، پاسخ ضربه سیستم فوق خواهد شد.

$$h(t) = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k h_0(t)}{dt^k}$$

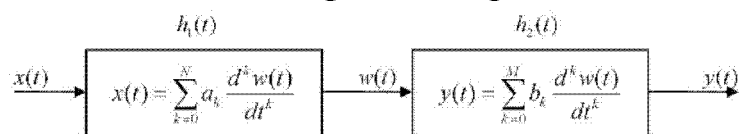
محاسبه $h_0(t)$ که در واقع پاسخ ضربه معادله همگن به ازای $t > 0$ و شرایط اولیه فوق‌الذکر می‌باشد.

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0 \Rightarrow y_i(t) = A_i e^{\alpha_i t}$$

با فرض متمایز بودن ریشه‌ها داریم

$$y(t) = h_0(t) = A_0 e^{\alpha_0 t} + A_1 e^{\alpha_1 t} + \dots + A_N e^{\alpha_N t}$$

بقیه حالات نیز ساده هستند و از توضیح آنها صرفنظر می‌گردد.



شکل (۲-۹۱): نمودار جعبه‌ای مثال (۲-۴۹) قسمت (ب)

مساله را به شرط متمایز بودن ریشه‌ها حل می‌کنیم

$$x(t) * h_1(t) * h_2(t) = y(t)$$

$$h_1(t) = h_0(t) = \sum_{k=0}^N A_k e^{\alpha_k t}$$

$$h_2(t) = \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k \delta(t)}{dt^k} \Rightarrow h_1(t) * h_2(t) = \sum_{k=0}^N A_k e^{\alpha_k t} * \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k \delta(t)}{dt^k}$$

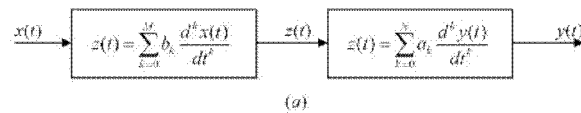
چند جمله اول رابطه فوق را بسط می‌دهیم

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_{k=0}^N A_k e^{\alpha_k t} \right) * b_0 \delta(t) + \left(\sum_{k=0}^N A_k e^{\alpha_k t} \right) * b_1 \delta'(t) + \left(\sum_{k=0}^N A_k e^{\alpha_k t} \right) * b_1 \delta''(t) + \dots \\ &= b_0 \sum_{k=0}^N A_k e^{\alpha_k t} + b_1 \sum_{k=0}^N \alpha_k A_k e^{\alpha_k t} + b_2 \sum_{k=0}^N A_k (\alpha_k)^2 e^{\alpha_k t} + \dots + b_N \sum_{k=0}^N A_k (\alpha_k)^N e^{\alpha_k t} \\ &= \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k h_0(t)}{dt^k} \end{aligned}$$

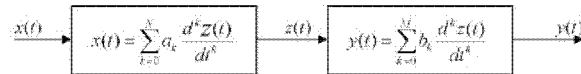
توضیح: طرز بدست آوردن سیستم شکل (۲-۹۱) از معادله اصلی بدین صورت است که با توجه به معادله دیفرانسیل زیر

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

می‌توان شکل (۲-۹۲-ا) را برای این معادله رسم کرد و با استفاده از جابجایی سیستم‌ها شکل (۲-۹۲-ب) حاصل می‌شود که معادل سیستم (۲-۹۱) است.



(a)



(b)

شکل (۲-۹۲: a) نمودار جعبه‌ای مربوط به معادله دیفرانسیل (b) جابجایی سیستم‌ها

(ج)

$$a) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

محاسبه پاسخ ضربه

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \delta(t)$$

از طرفین رابطه از 0^- تا 0^+ انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{0^-}^{0^+} \left[\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) \right] dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$$

نتیجه این انتگرال بصورت زیر است:

$$\frac{dy}{dt} \Big|_{0^+} - \frac{dy}{dt} \Big|_{0^-} + 3y(0^+) - 3y(0^-) + 2 \int_{0^-}^{0^+} y(t) dt = 1$$

می‌دانیم $y(t)$ نمی‌تواند شامل پله باشد چون سمت چپ شامل مشتق ضربه می‌شود در حالیکه سمت راست فقط ضربه داریم و از طرفی می‌دانیم که سیستم در حال استراحت اولیه است پس

$$y(0^-) = \frac{dy}{dt} \Big|_{0^-} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dt} \Big|_{0^+} + 3y(0^+) = 1$$

و چون در $y(t=0)$ پله نداریم $y(0^+) = y(0^-) = 0$ و بنابراین

$$\frac{dy}{dt} \Big|_{0^+} = 1, \quad y(0^+) = 0$$

حال فرض می‌کنیم که فقط شرایط اولیه داریم و ورودی سیستم صفر است (پاسخ همگن).

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0 \rightarrow s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2) = 0$$

ریشه‌های معادله مفسر $s = -1$ و $s = -2$ هستند. پس پاسخ همگن در حالت کلی بصورت زیر است:

$$y(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}$$

و با استفاده از شرایط کمکی می‌توان ضریب مجهول را یافت.

$$y(0^+) = 0 \rightarrow A_1 + A_2 = 0$$

$$\frac{dy}{dt} \Big|_{0^+} = 1 \rightarrow A_1 + 2A_2 = -1$$

از حل معادلات فوق A_1 و A_2 بدست می‌آیند. بنابراین داریم

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t) = h(t)$$

$$b) \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 3 \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

با توجه به معلومات مثال (۲-۴۸) بجای یافتن پاسخ ضربه سیستم فوق می‌توان پاسخ ضربه سیستم زیر را یافت

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \frac{dy(t)}{dt} dt + \int_{0^-}^{0^+} 2y(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt \Rightarrow y(0^+) + 2 \int_{0^-}^{0^+} y(t) dt = 1$$

با توجه به اینکه پاسخ ضربه خود نمی‌تواند شامل ضربه باشد پس $\int_{0^-}^{0^+} y(t) dt = 0$ است. بنابراین داریم

$$y(0^+) = 1$$

برای یافتن پاسخ همگن طرف دوم را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0 \Rightarrow s + 2 = 0 \rightarrow h_0(t) = Ae^{-2t}u(t)$$

تنها ریشه معادله مفسر $s = -1$ است. بنابراین $h_0(t) = Ae^{-2t}u(t)$ است و با توجه به شرط کمکی داریم:

$$h_0(t) = 1 \Rightarrow A = 1 \Rightarrow h_0(t) = e^{-2t}u(t)$$

اکنون از روی پاسخ ضربه این سیستم می‌توان پاسخ ضربه سیستم اصلی را یافت.
محاسبه پاسخ ضربه اصلی سیستم

$$h(t) = 3 \frac{dh_0(t)}{dt} + h_0(t) = 3[-2e^{-2t}u(t) + \delta(t)] + e^{-2t}u(t)$$

و یا

$$h(t) = -5e^{-2t}u(t) + 3\delta(t)$$

روش دیگر حل مساله: فقط پاسخ همگن را محاسبه می‌کنیم و به آن ضریبی از ضربه اضافه می‌کنیم.
چون سمت راست شامل مشتق ضربه است.

$$y(t) = Ae^{-2t}u(t) + B\delta(t)$$

اکنون از پاسخ ضربه مشتق می‌گیریم و آنرا در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم تا ضرایب مجهول B و A بدست آیند.

$$\frac{dy(t)}{dt} = -2Ae^{-2t}u(t) + A\delta(t) + B\delta'(t)$$

$$-2Ae^{-2t}u(t) + A\delta(t) + B\delta'(t) + 2Ae^{-2t}u(t) + 2B\delta(t) = 3\delta'(t) + \delta(t)$$

بنابراین $B = 3$ و $A = -5$ بدست می‌آیند. پس داریم:

$$y(t) = -5e^{-2t}u(t) + 3\delta(t)$$

$$c) \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{d^3x(t)}{dt^3} + 2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4 \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

ابتدا پاسخ ضربه سیستم زیر را بدست می‌آوریم:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = x(t)$$

از طرفین از 0^- تا 0^+ انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{0^-}^{0^+} \left[\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) \right] dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$$

$$\frac{dy}{dt} \Big|_{0^+} + 5y(0^+) + 6 \int_{0^-}^{0^+} y(t) dt = 1$$

پاسخ نمی‌تواند شامل پله باشد پس $y(0^+) = 0$ است. بنابراین:

$$\frac{dy}{dt} \Big|_{0^+} = 1$$

و از حل معادله مفسر برای بدست آوردن پاسخ همگن استفاده می‌کنیم:

$$s^2 + 5s + 6 = 0 \Rightarrow (s+3)(s+2) = 0$$

$$h(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t}$$

از شرط کمکی $h_0(0^+) = 0$ داریم:

$$A_1 + A_2 = 0$$

و همچنین از شرط دوم داریم:

$$\frac{dh_0(0^+)}{dt} = 1 \rightarrow -2A_1 - 3A_2 = 1$$

از حل این دو معادله $A_1 = 1$ و $A_2 = -1$ بدست می‌آیند. پس:

$$h_0(t) = (e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

حال پاسخ سیستم اصلی را می‌یابیم:

$$h(t) = \frac{d^3 h_0(t)}{dt^3} + 2 \frac{d^2 h_0(t)}{dt^2} + 4 \frac{dh_0(t)}{dt} + 3h_0(t)$$

$$\frac{dh_0(t)}{dt} = (-2e^{-2t} + 3e^{-3t})u(t)$$

$$\frac{d^2 h_0(t)}{dt^2} = (4e^{-2t} - 9e^{-3t})u(t) + \delta(t)$$

$$\frac{d^3 h_0(t)}{dt^3} = (-8e^{-2t} + 27e^{-3t})u(t) + \delta'(t) - 5\delta(t)$$

$$h(t) = (-8e^{-2t} + 27e^{-3t})u(t) - 5\delta(t) + \delta'(t) + 2(4e^{-2t} - 9e^{-3t})u(t) + 2\delta(t) + 4(-2e^{-2t} + 3e^{-3t})u(t) + 3(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

$$h(t) = (-5e^{-2t} + 18e^{-3t})u(t) - 3\delta(t) + \delta'(t)$$

حل مساله به روش دیگر: ابتدا پاسخ همگن را حساب کرده و به آن ضرایبی از $\delta(t)$ و $\delta'(t)$ اضافه می‌کنیم (چون طرف دوم شامل ضربه و مشتق آن است). اکنون ضرایب مجهول را حساب می‌کنیم:

$$y(t) = (Ae^{-2t} + Be^{-3t})u(t) + C\delta(t) + D\delta'(t)$$

اکنون مشتقات مراتب بالاتر را حساب کرده و در معادله دیفرانسیل جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{dy(t)}{dt} = (-2Ae^{-2t} - 3Be^{-3t})u(t) + (A+B)\delta(t) + C\delta'(t) + D\delta''(t)$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = (4Ae^{-2t} + 9Be^{-3t})u(t) - (2A+3B)\delta(t) + (A+B)\delta'(t) + C\delta''(t) + D\delta'''(t)$$

با جایگذاری در معادله اصلی

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = [3A+2B+6C]\delta(t) + [A+B+5C+6D]\delta'(t) +$$

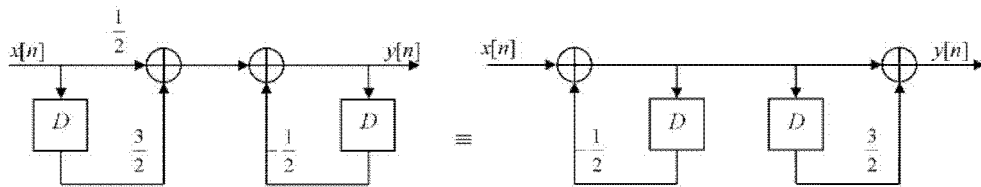
$$[5D+C]\delta''(t) + D\delta'''(t) = \delta''(t) + 2\delta''(t) + 4\delta'(t) + 3\delta(t)$$

از مساوی قرار دادن ضرایب توابع ضربه و مشتقات آن در دو طرف داریم

$$\begin{cases} D=1 \\ 5D+C=2 \\ A+B+5C+6D=4 \\ 3A+2B+6C=3 \end{cases}$$

از حل همزمان این معادلات $A=-5$ و $B=18$ و $C=-3$ و $D=1$ بدست می‌آیند
 $\Rightarrow y(t) = (-5e^{-2t} + 18e^{-3t})u(t) - 3\delta(t) + \delta'(t)$

مثال (۲-۴۹): الف) پاسخ ضربه سیستمی با معادله تفاضلی زیر را بیابید (با فرض شرایط استراحت اولیه)؛ ب) پاسخ ضربه این سیستم به ورودی $x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ را بیابید.



شکل (۲-۹۳): دو نمودار جعبه‌ای معادل مربوط به سیستم مثال (۲-۴۹) قسمت (ج-ب)

$$y[n] - \frac{5}{2}y[n-1] + y[n-2] = 6x[n] - 7x[n-1] + 5x[n-2]$$

الف) ابتدا پاسخ ضربه سیستم با معادله زیر را پیدا می‌کنیم.

$$y[n] - \frac{5}{2}y[n-1] + y[n-2] = x[n]$$

از شرط استراحت $y[-1] = y[-2] = 0$ داریم

$$y[0] - \frac{5}{2}y[-1] + y[-2] = 1 \Rightarrow y[0] = 1$$

$$y[1] - \frac{5}{2}y[0] + y[-1] = 0 \Rightarrow y[1] = \frac{5}{2}$$

$$y[2] - \frac{5}{2}y[1] + y[0] = 0 \Rightarrow y[2] = \frac{5}{2}y[1] - y[0] = \frac{25}{4} - 1 = \frac{21}{4}$$

اکنون معادله همگن را حل می‌کنیم.

$$y[n] - \frac{5}{2}y[n-1] + y[n-2] = 0$$

پاسخی بصورت $h_0[n] = A\alpha^n$ در معادله فوق (به ازای $n \geq 0$) صادق است. پس معادله مفسر بصورت

زیر خواهد بود

$$A\alpha^n - \frac{5}{2}A\alpha^{n-1} + A\alpha^{n-2} = 0 \Rightarrow \alpha^2 - \frac{5}{2}\alpha + 1 = 0$$

ریشه‌های این معادله $\alpha = 2$ و $\alpha = \frac{1}{2}$ هستند. پس:

$$h_0[n] = A(2)^n + B\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad n > 0$$

اکنون از شرایط کمکی بدست آمده استفاده می‌کنیم:

$$h_0[1] = 2A + \frac{B}{2} = \frac{5}{2}$$

$$h_0[2] = 4A + \frac{B}{4} = \frac{21}{4}$$

از حل همزمان این دو معادله $A = \frac{4}{3}$ و $B = \frac{-1}{3}$ بدست می‌آوریم، پس:

$$h_0[n] = \frac{4}{3}(2)^n - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad n \geq 0$$

حال پاسخ ضربه اصلی سیستم را بدست می‌آوریم

$$h[n] = 6h_0[n] - 7h_0[n-1] + 5h_0[n-2]$$

$$h[n] = (8(2)^n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n)u[n] + \left(-\frac{28}{3}(2)^{n-1} + \frac{7}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)u[n-1] + \left(\frac{20}{3}(2)^{n-2} - \frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right)u[n-2]$$

(ب)

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k} \left[\frac{4}{3}(2)^k - \frac{1}{3}(2)^{-k}\right] \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{4}{3}2^k (-2)^k \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k (-2)^k \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^n 2^k (-2)^k - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k (-2)^k \\ &= \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left\{ 4 \sum_{k=0}^n (-4)^k - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \right\} \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

مثال (۲-۵): یک سیستم پیوسته زمانی LTI با فرض شرایط استراحت اولیه که توسط معادله دیفرانسیل زیر مشخص می‌شود را در نظر بگیرید:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t)$$

الف) پاسخ ضربه سیستم را حساب کنید.

ب) پاسخ سیستم فوق را به ورودی زیر بیابید.

$$x(t) = e^{-2t} \cos(3t) u(t)$$

حل: الف)

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t)$$

محاسبه پاسخ پله

$$s(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

برای محاسبه پاسخ همگن با معادله مفسر $p^2 + p - 2 = 0$ مواجه می‌شویم که دارای پاسخ‌های $p = -2$ و $p = 1$ می‌باشد. پس:

$$y_h(t) = Ae^{-2t} + Be^t$$

پاسخ خصوصی برای $t > 0$ در نظر گرفته می‌شود و چون در این ناحیه ورودی مقدار ثابتی است بنابراین پاسخ خصوصی به مقدار ثابت در نظر گرفته می‌شود. پس:

$$\frac{d^2 y_p(t)}{dt^2} + \frac{dy_p(t)}{dt} - 2y_p(t) = 1 \Rightarrow y_p(t) = \frac{-1}{2}$$

بنابراین پاسخ پله بصورت زیر است:

$$s(t) = Ae^{-2t} + Be^t - \frac{1}{2}$$

با توجه به شرایط اولیه $s(0) = 0$ و $s'(0) = 0$ داریم:

$$A + B - \frac{1}{2} = 0$$

$$-2A + B = 0$$

از حل این دو معادله $A = \frac{1}{6}$ و $B = \frac{1}{3}$ بدست می‌آیند پس پاسخ پله در حالت کلی بصورت زیر است

$$s(t) = \left(\frac{1}{6} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{1}{2} \right) u(t)$$

اکنون پاسخ ضربه بسادگی از مشتق تابع پله بدست می‌آید.

محاسبه پاسخ ضربه بطور مستقیم

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = \delta(t)$$

پاسخ فقط همان پاسخ همگن است منتها با شرایط اولیه متفاوت، بنابراین لازم است شرایط اولیه جدید که بدلیل اعمال ضربه به سیستم بدست آمده‌اند را بدست آورد.

$$y(t) = [ae^{-2t} + be^t] u(t)$$

$$y'(t) = [-2ae^{-2t} + be^t] u(t) + (a+b)\delta(t)$$

$$y''(t) = [4ae^{-2t} + be^t] u(t) + (-2a+b)\delta(t) + (a+b)\delta'(t)$$

مقادیر فوق را در معادله دیفرانسیل اصلی قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} & [4ae^{-2t} + be^t]u(t) + (-2a + b)\delta(t) + (a + b)\delta'(t) + \\ & (a + b)\delta(t) - 4ae^{-2t} - be^t u(t) = \delta(t) \end{aligned}$$

از حل معادلات $a = -\frac{1}{3}$ و $b = \frac{1}{3}$ بدست می‌آیند.

$$y(t) = \left[-\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t \right] u(t)$$

بنابراین پاسخ ضربه سیستم بصورت مقابل است.

البته جهت اطمینان پاسخ پله را از انتگرال پاسخ ضربه نیز بدست می‌آوریم:

$$s(t) = \int_{-\infty}^t \left[-\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t \right] u(t) dt = \int_0^t -\frac{1}{3}e^{-2t} dt + \int_0^t \frac{1}{3}e^t dt$$

$$s(t) = \frac{1}{6}(e^{-2t} - 1) + \frac{1}{3}(e^t - 1) = \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{2} \quad t \geq 0$$

(ب) پاسخ خصوصی

$$x(t) = e^{-2t} \cos 3t u(t) \Rightarrow y_p(t) = Ae^{-2t} \cos(3t + \theta)$$

پاسخ خصوصی برای این ورودی به صورت $y_p(t) = Ae^{-2t} \cos(3t + \theta)$ است، پس

$$\frac{dy_p(t)}{dt} = -2Ae^{-2t} \cos(3t + \theta) + 3Ae^{-2t} \sin(3t + \theta) = Ae^{-2t} (3\sin(3t + \theta) - 2\cos(3t + \theta))$$

$$\frac{d^2 y_p(t)}{dt^2} = -2Ae^{-2t} [3\sin(3t + \theta) - 2\cos(3t + \theta)] + Ae^{-2t} [9\cos(3t + \theta) + 6\sin(3t + \theta)]$$

با جایگذاری این مقادیر در رابطه اصلی داریم:

$$-5Ae^{-2t} \cos(3t + \theta) - 12Ae^{-2t} \sin(3t + \theta) - 2Ae^{-2t} \cos(3t + \theta)$$

$$+ 3Ae^{-2t} \sin(3t + \theta) - 2Ae^{-2t} \cos(3t + \theta)$$

$$\Rightarrow -9Ae^{-2t} \cos(3t + \theta) - 9Ae^{-2t} \sin(3t + \theta) = e^{-2t} \cos 3t$$

و یا

$$-9Ae^{-2t} [\cos \theta \cos 3t - \sin \theta \sin 3t + \sin 3t \cos \theta + \sin \theta \cos 3t]$$

$$= e^{-2t} \cos 3t$$

بنابراین $A = -\frac{1}{9}$ بدست آمده در روابط زیر نیز باید همزمان برقرار گردند

$$\begin{cases} -9A[\cos \theta + \sin \theta] = 1 \\ \cos \theta - \sin \theta = 0 \end{cases}$$

از حل همزمان این دو معادله $\theta = \frac{\pi}{4}$ بدست می‌آید (فقط یک جواب کافیت)

با قرار دادن این مقادیر در پاسخ خصوصی داریم

$$y_p(t) = -\frac{1}{9}e^{-2t} \cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y(t) = Ae^{-2t} + Be^t - \frac{1}{9}e^{-2t} \cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$$

اکنون از شرایط کمکی برای محاسبه مجهولات A و B استفاده می‌کنیم

$$y(0) = 0 \Rightarrow A + B - \frac{1}{9} \times \frac{1}{2} = 0$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow 2A + B - \frac{1}{9} \left[\frac{1}{2} \times 3 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right] = 0$$

از حل همزمان این دو معادله آخرین ضرایب مجهول نیز بدست می‌آید

حل به روش فزوری:

فرض می‌کنیم γ عدد مختلط است.

$$y_p(t) = R_e [B e^{(-2+3j)t}]$$

$$y_p'(t) = R_e [B(-2+j3)e^{(-2+3j)t}] \Rightarrow y_p''(t) = R_e [B(-5+j12)e^{(-2+3j)t}]$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل سیستم داریم

$$\Re [B \times (-5+j12) e^{(-2+3j)t}] + \Re [y B(-2+j3) e^{(-2+3j)t}] - 2 \Re [B e^{(-2+3j)t}] = \Re [e^{(-2+3j)t}]$$

و یا

$$\Re [B(-5+j12) e^{j3t} + B(-2+j3) e^{j3t} - 2B e^{j3t}] = \Re [e^{j3t}]$$

بنابراین از معادله فوق می‌توان بسادگی B را بدست آورد.

مثال (۲-۵): معادله تفاضلی زیر را به روش مستقیم نوع II نمایش دهید.

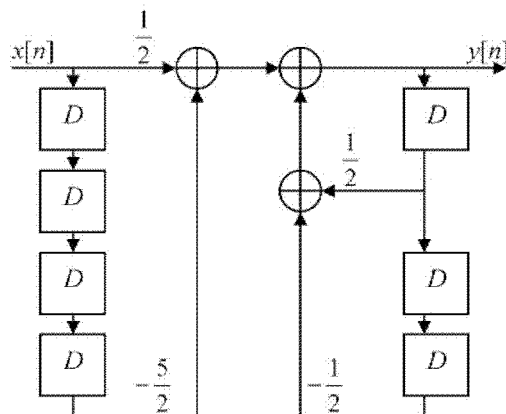
$$a) 2y[n] - y[n-1] + y[n-3] = x[n] - 5x[n-4]$$

ابتدا معادله را بدین صورت مرتب می‌کنیم

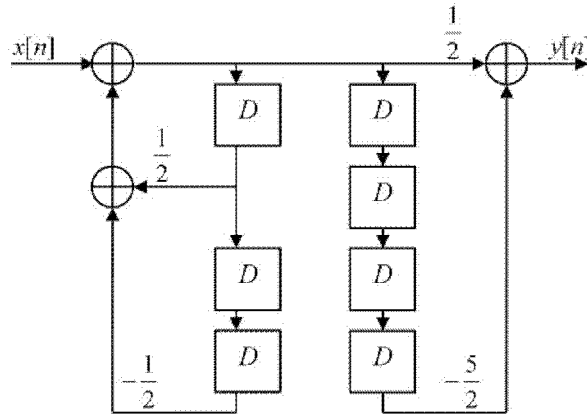
$$y[n] = \frac{1}{2} \{ y[n-1] + y[n-3] + x[n] - 5x[n-4] \}$$

اکنون می‌توان نمودار شکل (۲-۹۶) را برای سیستم نمایش داد، که در آن، سیستم D یک عنصر

تاخیر بوده و عدد روی علامت پیکان بیانگر مقداری است که سیگنال در آن ضرب می‌شود.

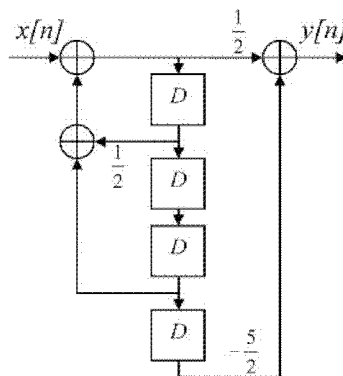


شکل (۲-۹۴): نمودار جعبه‌ای مثال (۲-۵۲) به روش نوع I با جابه‌جایی این سیستم شکل (۲-۹۴) به صورت زیر تبدیل می‌شود.



شکل (۲-۹۵)

و با حذف عناصر تاخیری اضافه، که بطور موازی هم قرار دارند، نمایش روش مستقیم نوع II بدست می‌آید.



شکل (۲-۹۶): نمودار جعبه‌ای روش مستقیم نوع II برای سیستم مثال (۲-۵۲)

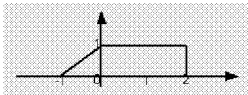
۲-۱۲ خلاصه

در این فصل، به مطالعه روش تحلیل سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان (LTI)، در حوزه زمان، پرداختیم. در روش مورد مطالعه از پاسخ ضربه سیستم استفاده کردیم. در حالت سیستم گسسته زمانی، سیگنال خروجی از جمع کانولوشن پاسخ ضربه و سیگنال ورودی بدست می‌آید. در حالت سیستم پیوسته زمانی، انتگرال کانولوشن پاسخ ضربه و سیگنال ورودی، مقدار سیگنال خروجی را در هر لحظه از زمان مشخص می‌کند. برای بررسی خواص علی و پایدار بودن سیستم نیز از پاسخ ضربه

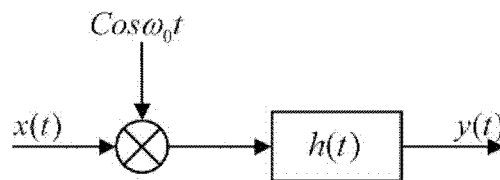
استفاده کردیم. علاوه بر استفاده از کانولوشن، به تحلیل سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان از طریق حل معادلات تفاضلی خطی با ضرائب ثابت برای سیستم‌های گسسته زمانی، و حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرائب ثابت برای سیستم‌های پیوسته زمانی پرداختیم. ساخت سیستم‌های LTI با استفاده از بلوک‌های مدارات استاندارد (انتگرال گیر، جمع کننده و ضرب کننده برای سیستم پیوسته زمانی، و تاخیر زمانی، جمع کننده و ضرب کننده برای سیستم گسسته زمانی) نیز ارائه گردید. همچنین، با ارائه دهها مثال حل شده، نحوه استفاده از تحلیل سیستم‌های LTI، در حوزه زمان، و بررسی خواص آن‌ها بیان شد.

۲-۱۳ مسائل

۲-۱ حاصل کانولوشن‌های زیر را بیابید.

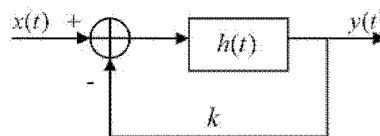
$x(t)$	$h(t)$
$e^{-t}u(t)$	$\text{Cost}(u(t)-u(t-T))$
$ t u(t)$	
$(-1)^n u[n]$	$u[n]-u[n-N_0]$
$n_0 u[n]$	$n[u[n]-u[n-N_0]]$

۲-۲ خروجی سیستم زیر را بیابید.



$$x(t) = h(t) = 2A\omega \sin(2\omega t) \quad \omega_0 > 2\omega$$

۲-۳ به ازای چه مقادیری از k سیستم زیر پایدار است؟



$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

۴-۲ در علیت و پایداری سیستم‌های پیوسته زمانی زیر بحث کنید.

$$h(t) = t^2 e^{-t} u(t) \quad , \quad h(t) = e^{-t} \cos t \quad , \quad h(t) = e^{\cos t} u(t)$$

۵-۲ در علیت و پایداری سیستم‌های گسسته زمانی زیر بحث کنید.

$$h[n] = 2^{-n} u[-n+1] \quad , \quad h[n] = (-1)^n e^{-n+1} u[-n+1] \quad , \quad h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-kN)$$

۶-۲ پاسخ ضربه سیستم با معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید. (با فرض استراحت اولیه)

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad ; \quad y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

۷-۲ پاسخ ضربه سیستم با معادله تفاضلی زیر را بدست آورید. (با فرض شرایط استراحت اولیه)

$$\sum_{k=0}^4 k y[n-k] = 2x[n] \quad , \quad \sum_{k=1}^3 k^2 y[n-k] = x[n] - x[n-1]$$

$$y[n] + y[n-1] + y[n-2] = x[n] + x[n-1] - x[n-2]$$

۸-۲ آیا معکوس یک سیستم LTI علی همواره یک سیستم LTI علی است؟

۹-۲ تحت چه شرایطی می‌توان گفت که معکوس سیستم LTI علی وجود دارد؟

۱۰-۲ سیستمی به صورت زیر مفروض است. خواص آن را بررسی کنید.

$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^M x[n-k]$$

۱۱-۲ حاصل کانولوشن زیر را بیابید. (و بر حسب مقادیر مختلف a و c روی پاسخ بحث کنید.)

$$q e^{c(t-a)} u(a-t) u(t) * e^{-ct} u(t)$$

۱۲-۲ سیستم علی $h(t)$ را به گونه‌ای بیابید که در رابطه زیر صدق کند. h_2 پارامتری با مقدار معین

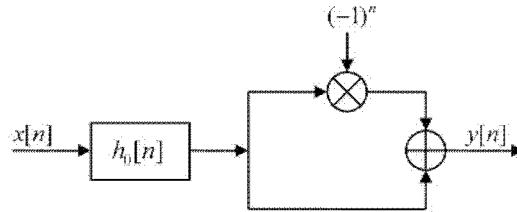
$$\int_0^{\infty} h(\alpha) R(\tau - \alpha) d\alpha = R(\tau + h_2) \quad ; \quad R(\tau) = \frac{3}{2} e^{-\tau} + \frac{11}{3} e^{-3\tau} \quad \text{است.}$$

۱۳-۲ تبدیل هیلبرت سیگنال‌های $x_1(t) = \cos t$ ، $x_2(t) = e^{-t} u(t)$ را بدست آورید.

با توجه به تعریف این تبدیل ک عبارت است از:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

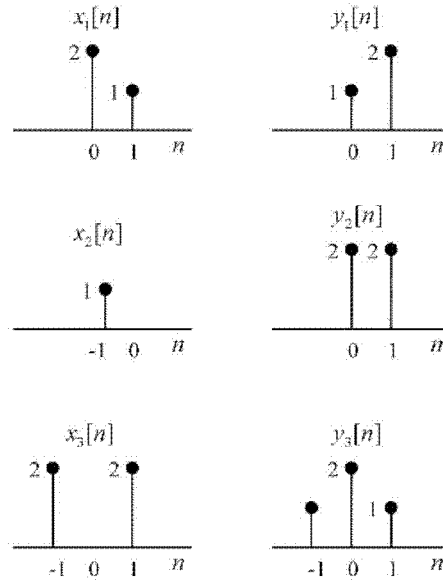
۱۴-۲ پاسخ ضربه سیستم زیر را بیابید.



$$h_0[n] = \frac{\text{Sin}(nR_0)}{n}$$

بر حسب مقادیر مختلف R_0 بحث کنید.

۱۵-۲ بر روی یک سیستم گسسته زمانی مستقل از زمان آزمایش انجام داده‌ایم و می‌خواهیم سایر مشخصات آن را از قبیل پایداری، علیت و خطی بودن مورد بررسی قرار دهیم. دنباله‌های ورودی و خروجی در هر حالت به صورت زیر هستند.

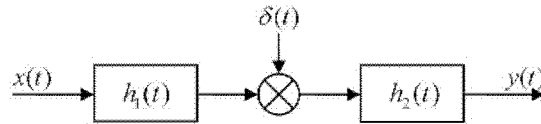


مطلوبست: الف) خواص سیستم، ب) پاسخ ضربه سیستم.

۱۶-۲ مطلوبست محاسبه انتگرال زیر.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sinc}^2 t dt$$

۱۷-۲ خروجی سیستم زیر را بیابید،



اگر $s(t) = h_1(t) = h_2(t) = A \tau \sin c \frac{t}{2\pi} \tau$ باشند.

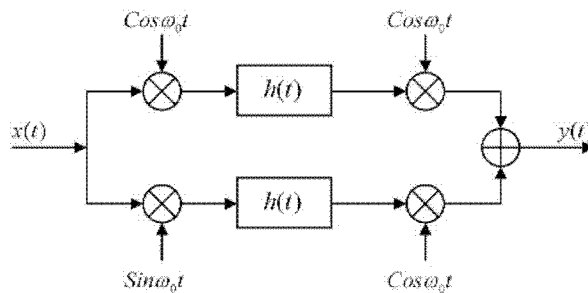
۱۸-۲ سیستم متوسط متحرک (moving average) توسط رابطه زیر مشخص می‌گردد.

خروجی سیستم را به ازای ورودی زیر بیابید.

$$\omega_0 t = \frac{2\pi}{T_0}, x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$y(t) = \frac{1}{2T_0} \int_{t-T_0}^{t+T_0} x(\alpha) d\alpha$$

۱۹-۲ خروجی سیستم زیر را بیابید.



با فرض $x(t) = h(t) = A \tau \text{Sin} \frac{ct}{2\pi} \tau$ روی مقادیر مختلف ω_0 بحث کنید.

۲۰-۲ آیا ممکن است از ترکیب چند سیستم غیرخطی و خطی یک سیستم خطی بدست آید؟ (بحث و دلیل)

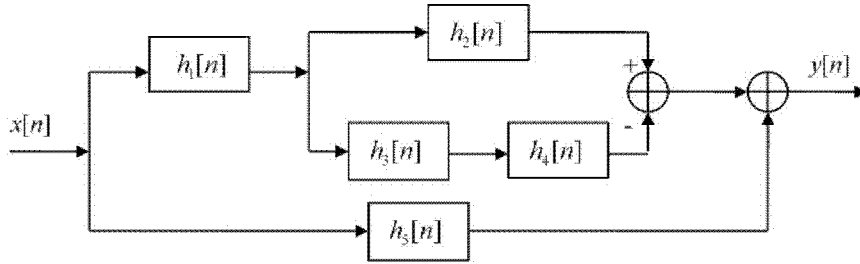
۲۱-۲ آیا ممکن است از ترکیب چند سیستم غیرعلی و علی سیستم علی بدست آورد؟ (بحث و دلیل)

۲۲-۲ آیا ممکن است از ترکیب چند سیستم پایدار و غیرپایدار سیستم پایدار بدست آورد؟ (بحث و دلیل).

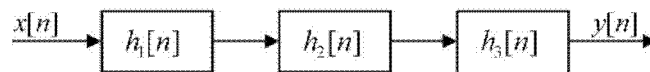
۲۳-۲ پاسخ ضربه کلی سیستم را بیابید، اگر:

$$h_1[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n \{u[n] - u[n-2]\}, \quad h_2[n] = h_3[n] = nu[n]$$

$$h_4[n] = \delta[n-2], \quad h_5[n] = \delta[n] - 4\delta[n-1]$$

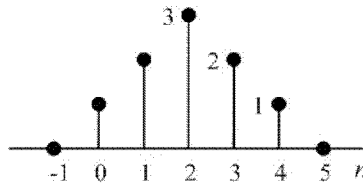


۲۴-۲ ترکیب متوالی سه سیستم را در نظر بگیرید.



اگر پاسخ ضربه کلی این ترکیب به صورت شکل زیر باشد:

مطلوبست $h_2[n]$



۲۵-۲ پاسخ ضربه یک سیستم پیوسته زمانی خطی ولی متغیر با زمان به صورت زیر است:

$$h_\tau(t) = u(t) - u(t - \tau)$$

مطلوبست پاسخ این سیستم به ورودی $x(t) = e^{-t}u(t)$.

$$h_k[n] = u[n] - u[n-k]$$

۲۶-۲ پاسخ ضربه یک سیستم گسسته زمانی خطی ولی متغیر با زمان بصورت زیر است. مطلوبست

پاسخ این سیستم به ورودی:

$$x[n] = u[n] - u[n-4]$$

۲۷-۲ پاسخ ضربه یک سیستم گسسته زمانی خطی ولی متغیر با زمان به صورت زیر است:

$$h_k[n] = u[-kn] - u[n - 2k]$$

مطلوبست پاسخ این سیستم به ورودی:

$$x[n] = n\{u[n] - u[n - 5]\}$$

۲۸-۲ خواص سیستمی با ضابطه ورودی و خروجی بصورت زیر را بیابید.

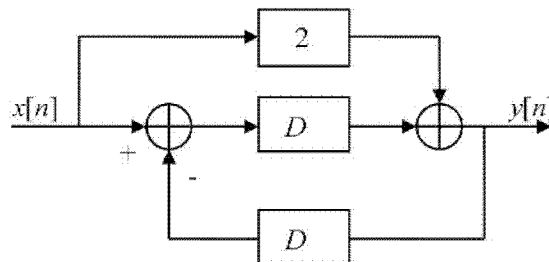
(M عدد زوج)

$$y(t) = \frac{1}{M+1} \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}} x(t-kT)$$

۲۹-۲ یک سیستم LTI دارای پاسخ ضربه $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ است. این سیستم را توسط عناصر

تاخیر، جمع و ضرب‌کننده‌ها بسازید.

۳۰-۲ پاسخ ضربه سیستم زیر را بیابید. (با فرض استراحت اولیه)



۳۱-۲ سیستم‌های LTI زیر را به روش مستقیم نوع II بسازید.

الف) $2y[n-2] + y[n-4] = x[n-5] + x[n]$

ب) $y[n] + y[n-3] = x[n-1]$

ج) $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} = x(t) + \frac{dx(t)}{dt}$

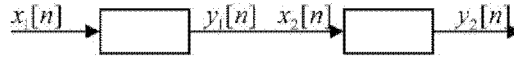
د) $5\frac{d^4 y(t)}{dt^4} = 2x(t) + 3\frac{dx(t)}{dt}$

هـ) $\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 3\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau + x(t)$

۳۲-۲ دو سیستم LTI با معادلات تفاضلی زیر بطور متوالی پشت سر هم قرار گرفته‌اند.

$$y_1[n] \neq 2y_1[n-1] = x_1[n-2] + x_1[n-4]$$

$$y_2[n] - y_2[n-2] = x_2[n] + x_2[n-1]$$

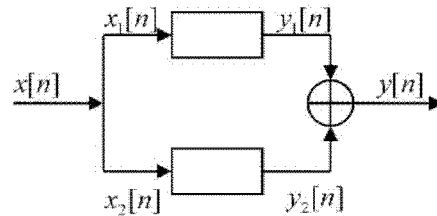


الف) معادله تفاضلی سیستم کلی (مربک از دو سیستم متوالی) را بدست آورید.
 ب) این سیستم را به روش مستقیم نوع II بسازید.

۳۳-۲ دو سیستم LTI با معادلات تفاضلی زیر بشکلی با هم ترکیب شده‌اند.

$$y_1[n] - 3y_1[n-2] = 2x_1[n-3] - x_1[n]$$

$$2y_2[n-1] - y_2[n-3] = x_1[n-1] - 3x_1[n]$$



الف) معادله تفاضلی سیستم کلی را بدست آورید. (این معادله باید بیانگر ارتباط $x[n]$ و $y[n]$ باشد)
 ب) این سیستم را به روش مستقیم نوع II بسازید.

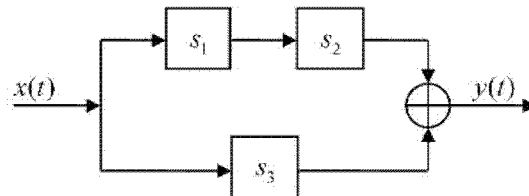
۳۴-۲ یک سیستم با استفاده از ترکیب متوالی و موازی سه سیستم LTI بصورت زیر ساخته شده است.

معادلات دیفرانسیل هر سیستم بصورت زیر هستند

$$3 \frac{dy_1(t)}{dt} + \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} = 2 \frac{dx_1(t)}{dt} + 4 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2}$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} + \frac{d^3 y_2(t)}{dt^3} = 3 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + \frac{d^3 x_2(t)}{dt^3}$$

$$2 \frac{d^2 y_3(t)}{dt^2} + \frac{d^4 y_3(t)}{dt^4} = \frac{dx_3(t)}{dt} + 2 \frac{d^3 x_3(t)}{dt^3}$$



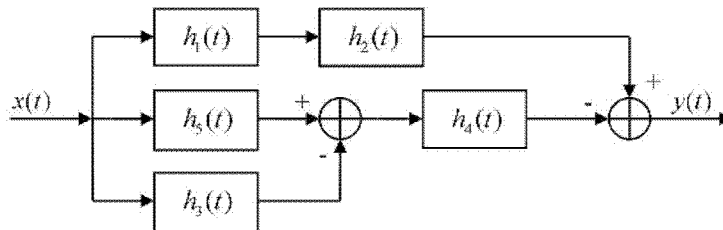
الف) مطلوبست معادله دیفرانسیل سیستم مرکب.
 ب) سیستم مرکب را به روش مستقیم نوع II بسازید.

۳۵-۲ پاسخ ضربه یک سیستم LTI پیوسته زمانی، $h(t) = e^{-2t}u(t)$ می‌باشد. معادله دیفرانسیل بیانگر این سیستم را بدست آورده و آنرا به روش مستقیم نوع II بسازید.

۳۶-۲ پاسخ ضربه یک سیستم LTI گسسته زمانی بصورت $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ می‌باشد. معادله تفاضلی بیانگر این سیستم را بدست آورده و آنرا به روش مستقیم نوع LTI بسازید.

۳۷-۲ نشان دهید که پاسخ ضربه یک سیستم پایدار هرگز نمی‌تواند متناوب باشد.

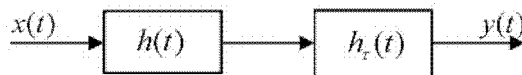
۳۸-۲ خروجی سیستم زیر را بیابید اگر ورودی به صورت $x(t) = e^{-t}u(t)$ باشد.



$$\begin{aligned} h_1(t) &= u(t) - u(t-1) & h_2(t) &= e^{-t}[u(t) - u(t-2)] \\ h_3(t) &= |t| [u(t+1) - u(t-1)] & h_4(t) &= \delta(t) - \delta(t-2) & h_5(t) &= \delta(t) \end{aligned}$$

۳۹-۲ یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ به یک سیستم خطی ولی متغیر با زمان با پاسخ ضربه بطور متوالی متصل شده است

$$\begin{aligned} h(t) &= u(t) - u(t-1) \\ h_\tau(t) &= u(t) - u(t-\tau) \end{aligned}$$



الف) خروجی سیستم مرکب را بدست آورید اگر ورودی بصورت $x(t) = u(t) - u(t-2)$ باشد.
 ب) اگر جای دو سیستم را جابه‌جا کنیم آیا خروجی تغییر می‌کند؟

۴۰-۲ آیا می‌توان یک سیستم خطی طراحی کرد که اگر ورودی آن بصورت $x(t) = \sin 2t$ باشد، خروجی آن بصورت $y(t) = \sin(t)$ گردد؟

۴۱-۲ اگر ورودی یک سیستم خطی در کلیه زمان‌ها غیر صفر باشد (مثلاً $x(t) = \cos t$). آیا ممکن است خروجی این سیستم به ازاء زمان‌های محدود غیر صفر باشد؟ (مثلاً $T_1 < t < T_2$, $y(t) \neq 0$)

۴۲-۲ در مورد یک سیستم مجهول می‌دانیم که اگر ورودی بصورت $x(t) = e^{-t}$ باشد خروجی بصورت $y(t) = e^{-2t}$ است، آیا این سیستم می‌تواند خطی باشد؟



فصل سوم

تبدیل فوریه پیوسته زمان

مقدمه

همانگونه که گفتیم هدف ما در این کتاب تجزیه و تحلیل سیستم‌های LTI است. روش حوزه زمان در تجزیه و تحلیل این سیستم‌ها با همه وضوح و روشنی در بعضی موارد به محاسبات پیچیده و خسته‌کننده منتهی می‌شود. این امر باعث شده است تا روش تجزیه و تحلیل فوریه در این موارد به کار گرفته شود. البته تنها بدلیل سادگی این روش مورد توجه قرار نگرفته است، بلکه دلیل عمده توجه متخصصان به تحلیل فوریه در تجزیه و تحلیل سیستم‌های LTI، این است که در واقع یک نوع برداشت جدید از سیستم‌ها به خواننده می‌دهد و خواننده را به دنیای جدیدی به نام حوزه فرکانس برده و او را در این دنیای جدید با خواص سیستم‌ها آشنا می‌سازد. البته لازم است توجه شود که تحلیل فوریه فقط و فقط در مورد سیستم‌های خطی کاربرد دارد. تبدیل فوریه در واقع ابتدا به عنوان یک ابزار ریاضی کارآمد جهت تفسیر برخی از پدیده‌های فیزیکی و همچنین حل برخی مسایل پیچیده ریاضی ارائه گردید. تبدیل فوریه عملگری است که برخی معادلات پیچیده را به معادلات ساده جبری تبدیل می‌نماید. اساس کار این عملگر بسط یک تابع بر اساس مؤلفه‌های فرکانسی به صورت $e^{j\omega t}$ است. اهمیت تحلیل فوریه در تجزیه و تحلیل سیستم‌ها و سیگنال‌ها نیز از همین جا ناشی شده است. توابعی به صورت $e^{j\omega t}$ نوع خاص و بسیار مهمی از توابع هستند که اگر پاسخ سیستم خطی به این توابع را داشته باشیم اطلاعات مهمی در مورد سیستم و خواص آن می‌توان بدست آورد. این خواص به خواص سیستم در حوزه فرکانس موسوم هستند و از روی آنها می‌توان سایر خواص سیستم را نیز بدست آورد. جالب است توجه کنیم که پاسخ سیستم خطی به این گونه توابع دقیقاً مشابه ورودی به استثناء یک ضریب ثابت مختلط است. بعبارت دیگر توابعی بصورت $e^{j\omega t}$ توابع ویژه سیستم‌های LTI هستند. بنابراین مشاهده می‌شود که تحلیل فوریه یک ابزار کارآمد و سریع در بدست آوردن خواص سیستم‌های خطی و تجزیه و تحلیل عملکرد آنهاست. در این فصل توجه خود را به تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌های پیوسته زمان معطوف می‌داریم و در فصل چهارم به بررسی سیستم‌ها و دنباله‌های گسسته زمان می‌پردازیم. در اینجا جهت یادآوری لازم است تعریف انرژی و توان را برای سیگنال‌های انرژی و توان که در فصل اول ارائه شد را مجدداً تکرار کنیم.

انرژی سیگنال $v(t)$ طبق تعریف برابر است با

$$E_v = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |v(t)|^2 dt \quad (1-3)$$

که از تعریف انرژی برای یک مقاومت واحد بدست آمده است. رابطه (1-3) را به صورت (2-3) نیز می‌توان نوشت.

$$E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt \quad (2-3)$$

علامت قدر مطلق برای داشتن انرژی مثبت و حقیقی برای سیگنال‌های مختلط گذاشته شده است. همچنین طبق تعریف توان (قدرت) سیگنال $v(t)$ به صورت زیر است.

$$P_v = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|^2 dt \quad (3-3)$$

۳-۱ تقسیم‌بندی سیگنال‌ها از نظر توان و انرژی

البته تقسیم‌بندی سیگنال‌ها نمی‌تواند یک تقسیم‌بندی منحصر بفرد باشد و با توجه به هر خاصیت از سیگنال می‌توان یک نوع تقسیم‌بندی ارائه کرد. در اینجا منظور ما از تقسیم‌بندی از لحاظ میزان انرژی موجود در سیگنال است. در این صورت سیگنال‌ها به دو دسته تقسیم می‌شوند.

الف- سیگنال انرژی

سیگنال انرژی سیگنالی است که انرژی آن محدود باشد.

ب- سیگنال توان

سیگنال توان سیگنالی است که توان آن محدود باشد.

دید می‌شود که در سیگنال‌های انرژی E_v محدود و مثبت و توان صفر است، چون توان از تقسیم انرژی به تمام طول زمان بدست می‌آید، و اگر E_v محدود باشد P_v صفر می‌شود. همچنین چون توان در سیگنال‌های توان محدود است E_v بینهایت می‌شود، چون انرژی از حاصلضرب توان در تمام طول زمان بدست می‌آید. البته بعضی از سیگنال‌ها نه سیگنال توان هستند و نه سیگنال انرژی. در جدول (۱-۳) خواص سیگنال‌های انرژی و توان خلاصه شده‌اند.

$P_v = 0$	$E_v < \infty$	سیگنال انرژی
$P_v < \infty$	$E_v = \infty$	سیگنال توان

جدول (۱-۳) خواص سیگنال‌های انرژی و توان

چند نمونه از سیگنال‌های توان و انرژی در جدول (۲-۳) آورده شده‌اند.

انرژی	توان	نوع سیگنال	رابطه سیگنال
$A^2 \frac{\tau}{2}$	0	انرژی	$Ae^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$
$A^2 \tau$	0	انرژی	$A[u(t) - u(t - \tau)]$
∞	$\frac{A^2}{2}$	توان	$A \cos(\omega t + \theta)$
∞	A^2	توان	A
∞	∞	تعریف نشده (نه توان و نه انرژی)	$Atu(t)$

جدول (۲-۳) چند نمونه از سیگنال‌های توان و انرژی

مثال (۱-۳): انرژی و توان را برای سیگنال‌های جدول (۲-۳) بدست آورید.

حل:

$$E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-2\frac{t}{\tau}} u(t) dt = -\frac{\tau}{2} A^2 e^{-2\frac{t}{\tau}} \Big|_0^{\infty} = \frac{\tau}{2} A^2, \quad P_v = \frac{E_v}{T} = 0 \quad (\text{الف})$$

$$E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 [u(t) - u(t - \tau)] dt = A^2 \tau, \quad P_v = \frac{E_v}{T} = 0 \quad (\text{ب})$$

$$E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \cos^2(\omega t + \theta) dt = \infty \quad (\text{ج})$$

$$P_v = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \cos^2(\omega t + \theta) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{T} \frac{T}{2} = \frac{A^2}{2}$$

$$E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 dt = \infty; \quad P_v = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2 T}{T} = A^2 \quad (\text{د})$$

$$E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 t^2 u^2(t) dt = \int_0^{\infty} A^2 t^2 dt = \infty \quad (\text{هـ})$$

$$P_v = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 t^2 u^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2 \left(\frac{T}{2}\right)^3}{3T} = \infty$$

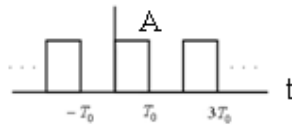
لازم بذکر است تمام سیگنال‌های متناوب جزء سیگنال‌های توان هستند.

همچنین باید توجه کرد که در حالت کلی سیگنال‌های انرژی سیگنال غیر متناوب هستند.

مثلاً سیگنال شکل (۱-۳) متناوب و سیگنال توان است.

$$E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} v^2(t) dt \rightarrow \infty \quad \text{و} \quad P_v = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_0^{T_0} v^2(t) dt = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{A^2 T_0}{2T_0} = \frac{A^2}{2}$$

جهت نمایش حوزه فرکانس در مورد سیگنال‌های توان از سری فوریه و برای سیگنال‌های انرژی از تبدیل فوریه استفاده می‌کنیم.



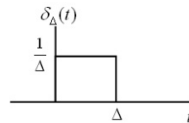
شکل (۱-۳): یک نمونه سیگنال توان

مثال (۲-۳): مطلوبست انرژی سیگنال $\delta(t)$.

حل: برای اینکار ابتدا انرژی سیگنال $\delta_{\Delta}(t)$ را بدست می‌آوریم و بعد می‌بینیم $\Delta \rightarrow 0$ چه اثری روی انرژی خواهد داشت.

$$E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_0^{\Delta} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^2 dt \rightarrow \infty$$

بنابراین اگر $\Delta \rightarrow 0$ می‌بینیم که حد انرژی بسمت ∞ میل می‌کند، لذا این سیگنال نمی‌تواند یک سیگنال انرژی باشد.



شکل (۲-۳): سیگنال $\delta_{\Delta}(t)$ که در حد وقتی $\Delta \rightarrow 0$ بسمت $\delta(t)$ میل می‌کند.

اکنون به محاسبه توان P_v برای سیگنال $\delta(t)$ می‌پردازیم. مجدداً اینکار را برای $\delta_{\Delta}(t)$ انجام می‌دهیم

$$P_v = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\Delta} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T}$$

بنابراین می‌بینیم که اگر $\Delta \rightarrow 0$ ، با توجه به اینکه مرتبه میل کردن Δ بسمت صفر و T بسمت بی‌نهایت از یک مرتبه است، حاصلضرب آنها عدد ثابت و محدودی است. پس سیگنال ضربه یک سیگنال توان است.

۳-۲ فضای سیگنال^۱

هر سیگنال عضوی از فضای سیگنال است که در فضای سیگنال بعضی از عملیات را روی سیگنال تعریف می‌نمایند (همانند تعریف فضای سه‌بعدی). شباهت‌های زیادی میان سیگنال در فضای سیگنال و بردار در فضای سه‌بعدی وجود دارد. در حقیقت هر سیگنال برداری است در فضای سیگنال. در این قسمت به برخی عملیات‌های مهم که در فضای سیگنال تعریف شده‌اند می‌پردازیم.

۳-۲-۱ ضرب داخلی^۲ دو سیگنال

اگر $v(t)$ و $w(t)$ دو سیگنال انرژی (غیر متناوب) باشند ضرب داخلی دو سیگنال طبق تعریف برابر است با

$$\langle v(t), w(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v(t) w^*(t) dt \quad (۴-۳)$$

اگر $v(t)$ و $w(t)$ دو سیگنال توان (متناوب) با دوره تناوب مشترک T_0 باشند در آنصورت ضرب داخلی بدینصورت تعریف می‌شود.

$$\langle v(t), w(t) \rangle = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} v(t) w^*(t) dt \quad (۵-۳)$$

برای سیگنال‌های متعامد حاصلضرب داخلی مساوی صفر است. بنابراین $v(t)$ و $w(t)$ متعامد هستند اگر

$$\langle v(t), w(t) \rangle = 0 \quad (۶-۳)$$

دقیقاً مانند تعریف بردارهای متعامد در فضای بردارها (فضای سه‌بعدی)، سیگنال‌هایی مانند $v(t) = \cos \omega t$ و $w(t) = \sin \omega t$ بر هم عمودند و حاصلضرب داخلی آنها صفر است. ضرب داخلی معیاری است از میزان شباهت دو سیگنال به هم. هر چه دو سیگنال به هم شبیه‌تر باشند ضرب داخلی آنها بیشتر می‌شود. در حالتی که $w(t) = v(t)$ باشد در آنصورت حاصلضرب داخلی بیانگر انرژی سیگنال است. برعکس اگر ضرب داخلی دو سیگنال صفر باشد آن دو سیگنال حداقل شباهت را بهم دارند، در اینصورت سیگنال‌ها را متعامد^۳ نامند. بنابراین شباهت v به w_1 بیشتر است از شباهت v به w_2 است اگر

^۱ Signal Space

^۲ Inner Product

^۳ Orthogonal

$$\langle v(t), w_1(t) \rangle \langle v(t), w_2(t) \rangle$$

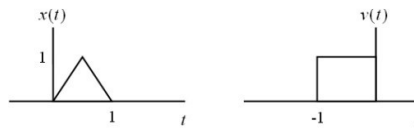
به شرط اینکه انرژی $w_1(t)$ و $w_2(t)$ مساوی باشند.

مثال (۳-۳): مطلوبست حاصلضرب داخلی سیگنال‌های شکل (۳-۳).

حل: چون روی هم افتادگی از لحاظ زمان میان دو سیگنال وجود ندارد پس

$$\langle x(t), v(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) v(t) dt = 0$$

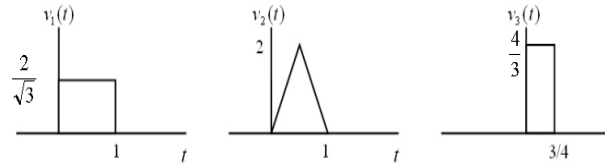
بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که کلیه سیگنال‌هایی که از لحاظ زمانی روی هم افتادگی ندارند بر هم عمودند.



شکل (۳-۳): سیگنال‌های مثال (۳-۳)

مثال (۴-۳): شباهت سیگنال $x(t)$ مثال (۳-۳) به کدامیک از سیگنال‌های $v_1(t)$ و $v_2(t)$ و $v_3(t)$

بیشتر است؟



شکل (۴-۳): سیگنال‌های $v_1(t)$ ، $v_2(t)$ و $v_3(t)$ مربوط به مثال (۴-۳)

حل: برای بررسی شباهت، ابتدا توجه می‌کنیم که انرژی کلیه سیگنال‌های داده شده $v_1(t)$ و $v_2(t)$ و

$v_3(t)$ یکسان است. اکنون به محاسبه حاصلضرب داخلی سیگنال $x(t)$ با هر یک از سیگنال‌ها

می‌پردازیم.

$$\langle x(t), v_1(t) \rangle = \int x(t) v_1(t) dt = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\langle x(t), v_2(t) \rangle = \int_0^1 x(t) v_2(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (2t)(4t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 8(1-t)(1-t) dt = \frac{2}{3}$$

$$\langle x(t), v_3(t) \rangle = \int_0^1 x(t) v_3(t) dt = \int_0^{0.5} (2t) \frac{4}{3} dt + \int_{0.5}^{0.75} 2(1-t) \frac{4}{3} dt = \frac{7}{12}$$

مشاهده می‌شود که حاصلضرب داخلی $x(t)$ با $v_2(t)$ از بقیه حاصلضرب‌های داخلی بیشتر است پس

شباهت $x(t)$ با $v_2(t)$ بیشتر است.

تمرین (۱-۳): نشان دهید که اگر $\langle x_1(t), x_2(t) \rangle = 0$ باشد در آن صورت توان (انرژی) سیگنال زیر مساوی مجموع توان‌های (انرژی‌های) هر یک از سیگنال‌ها است.

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

۳-۲-۲ اندازه سیگنال (مشابه اندازه بردار)

تعریف اندازه سیگنال در فضای سیگنال مشابه تعریف اندازه بردار در فضای سه بعدی می‌باشد. در حقیقت جذر انرژی سیگنال برای سیگنال‌های انرژی و جذر توان سیگنال برای سیگنال‌های توان را اندازه سیگنال می‌نامند.

$$\|v(t)\| = \sqrt{\langle v(t), v(t) \rangle} \quad (۸-۳)$$

به خاطر آورید که اندازه بردار \vec{V} در فضای سه بعدی بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$|\vec{V}| = \sqrt{\vec{V} \cdot \vec{V}}$$

مثال (۵-۳): اندازه سیگنال $v_1(t) = e^{-\alpha} u(t)$ و $v_2(t) = A \cos \omega t$ را بیابید.

حل: در مورد سیگنال $v_1(t)$ چون یک سیگنال انرژی است داریم.

$$\|v_1(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} v_1^2(t) dt} = \sqrt{\int_0^{\infty} e^{-2\alpha} dt} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$$

و در مورد سیگنال $v_2(t)$ چون یک سیگنال توان است داریم.

$$\|v_2(t)\| = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0/2} A^2 \cos^2 \omega_0 t dt} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

مثال (۶-۳): اندازه سیگنال $x(t) = A e^{j\omega t}$ را بیابید.

حل: این سیگنال یک سیگنال توان و مختلط است. پس

$$\|x(t)\| = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) x^*(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} A^2 dt} = A$$

تمرین (۲-۳): فرض کنید $x_1(t)$ و $x_2(t)$ متعامد باشند، در آن صورت اندازه سیگنال مجموع را بر حسب اندازه هر یک از سیگنال‌ها بدست آورید.

مثال (۷-۳): نشان دهید سیگنال‌های $\sin \omega t$ و $\cos \omega t$ در فاصله $(0, T_0)$ بر هم عمود هستند.

$$\left(T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \right)$$

حل:

$$\langle \sin \omega_0 t, \cos \omega_0 t \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t dt = 0$$

۳-۲-۳ سیگنال یکه^۴ (مشابه بردار یکه)

تعریف سیگنال یکه در فضای سیگنال مشابه تعریف بردار یکه در فضای بردارها است. اگر اندازه سیگنال $v(t)$ مساوی واحد باشد در آن صورت $v(t)$ یک سیگنال یکه است. پس سیگنال $v(t)$ یک سیگنال یکه است اگر

$$\|v(t)\| = 1 \quad (۱۰-۳)$$

۳-۲-۴ سیگنال‌های متعامد یکه^۵ (مختصات متعامد یکه)

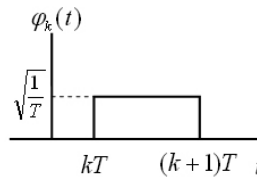
تعریف سیگنال‌های متعامد یکه در فضای سیگنال‌ها دقیقاً مشابه تعریف بردارهای متعامد یکه در فضای بردار است.

مجموعه سیگنال‌های $\Phi_1(t)$ ، $\Phi_2(t)$ و ... را مجموعه سیگنال‌های متعامد یکه گویند اگر همه آنها دوجه دو متعامد باشند ($\langle \Phi_i, \Phi_j \rangle = 0$ ، $i \neq j$) و اندازه همه آنها مساوی واحد باشند.

$$\langle \Phi_i(t), \Phi_j(t) \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (۱۱-۳)$$

دقیقاً مشابه آنچه که در مورد تجزیه هر بردار، به بردارهای یکه متعامد می‌دانیم هر سیگنال را می‌توان به سیگنال‌های متعامد یکه تجزیه کرد. بدین ترتیب هر عملیات مطلوب را می‌توان روی سیگنال‌های متعامد یکه انجام داد. البته چون عملیات روی سیگنال‌های متعامد یکه ساده‌تر بوده و سریعتر به جواب می‌رسد تجزیه سیگنال به سیگنال‌های متعامد یکه بسیار رایج است.

در مورد فضای سیگنال‌ها باید توجه داشت که مجموعه سیگنال‌های متعامد یکه، که سایر سیگنال‌ها بر حسب آنها قابل تجزیه می‌باشند، یکتا نیستند و ممکن است یک سیگنال به چندین شکل قابل بسط باشد. بنابراین مساله مهمی که باید در انتخاب مجموعه سیگنال‌های متعامد یکه در نظر گرفت، سهولت انجام عملیات مختلف ریاضی روی این مجموعه بوده و در ضمن ضرایب بسط نیز باید بسادگی بدست آیند. عدم وجود هر یک از شرایط فوق باعث سخت‌تر شدن مساله می‌شود. بنابراین از توضیح فوق مشخص می‌شود که انتخاب مجموعه سیگنال‌های متعامد یکه بستگی به نوع مساله دارد. مثال (۸-۳): نشان دهید که سیگنال‌های زیر یک مجموعه متعامد یکه هستند.



شکل (۵-۳) مجموعه سیگنال‌های متعامد یکه

حل: رابطه ریاضی این مجموعه بصورت زیر است.

⁴ Normal Signal

⁵ Orthonormal Signals Set

$$\Phi_k(t) = \sqrt{\frac{1}{T}} [u(t - kt) - u(t - (k+1)T)]$$

ابتدا تحقیق می‌کنیم این مجموعه سیگنال‌ها یک‌هسته هستند یعنی اندازه آنها مساوی واحد است.

$$\|\Phi_k(t)\| = \sqrt{\langle \Phi_k(t), \Phi_k(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{kT}^{(k+1)T} dt} = 1$$

از لحاظ تعامد مساله واضح است چون از لحاظ زمانی سیگنال‌های $\Phi_k(t)$ روی هم افتادگی ندارند.

بنابراین

$$\langle \Phi_k(t), \Phi_j(t) \rangle = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases}$$

در مورد سیستم‌های خطی دیدیم که اگر بتوان ورودی را بصورت مجموع زیربسط داد.

$$x(t) = \sum_k a_k \Phi_k(t)$$

در آنصورت پاسخ سیستم به این ورودی برابر است با

$$y(t) = \sum_k a_k T[\Phi_k(t)]$$

که در آن $T[\Phi_k(t)]$ پاسخ سیستم به ورودی $\Phi_k(t)$ است. در فصل دوم دیدیم که با بسط سیگنال بر حسب توابع ضربه بصورت $\delta(t - \tau)$ می‌توان تا حد زیادی تحلیل عملکرد سیستم‌ها را ساده کرد. و دیدیم که چگونه فقط با داشتن پاسخ به ضربه انتقال یافته $h_\tau(t)$ می‌توان پاسخ سیستم به هر ورودی دیگر را یافت. در این قسمت می‌خواهیم توابع جدیدی را بعنوان توابع پایه انتخاب کنیم. در نحوه این انتخاب دقت می‌کنیم که مشابه پاسخ ضربه باید یافتن پاسخ به این توابع پایه ساده باشد و در ضمن یافتن ضرایب بسط بسادگی امکان‌پذیر باشد. این توابع پایه جدید توابع نمائی مختلط هستند. اگر $x(t)$ متناوب باشد مجموعه سیگنال‌های متعامد یک‌هسته بصورت زیر می‌باشند.

$$\Phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (12-3)$$

که هر کدام متناوب با دوره تناوب $\left| \frac{2\pi}{k\omega_0} \right|$ می‌باشند. این مجموعه توابع متعامد یک‌هسته هستند. چون

$$\langle \Phi_l(t), \Phi_m(t) \rangle = \langle e^{jl\omega_0 t}, e^{jm\omega_0 t} \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{jl\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt = \begin{cases} 1 & l = m \\ 0 & l \neq m \end{cases} \quad (13-3)$$

مزیت سیگنال‌هایی که بصورت $e^{jk\omega_0 t}$ هستند، بخاطر شکل پاسخ سیستم LTI به آنها است. اگر به سیستم LTI یک ورودی نمایی بصورت e^{st} (که s عددی است مختلط) بدهیم در آنصورت پاسخ نیز به همان شکل، منتها با دامنه و زاویه‌ای متفاوت است. عبارت دیگر توابع e^{st} توابع ویژه سیستم‌های LTI پیوسته زمان هستند.

$$x(t) = e^{st} \quad \xrightarrow{\quad h(t) \quad} \quad \boxed{\text{LTI}} \quad \xrightarrow{\quad} \quad y(t) = ke^{st} \quad , \quad k \in C$$

شکل (۳-۶): نمایی‌های مختلط توابع ویژه سیستم‌های LTI پیوسته زمان هستند

اثبات این مطلب با استفاده از انتگرال کانولوشن بسادگی امکان پذیر است.

$$y(t) = e^{st} * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s(t-\tau)} h(\tau) d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau} h(\tau) d\tau \quad (۳-۱۴)$$

از اینجا مشخص می‌شود که ضریب ثابت مورد بحث بصورت زیر است.

$$k = H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad (۳-۱۵)$$

حال اگر بتوانیم ورودی را بصورت مجموعه‌ای از سیگنال‌هایی بصورت e^{st} بنویسیم. یعنی

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + \dots \quad (۳-۱۶)$$

در آن صورت پاسخ بسادگی بصورت زیر است.

$$y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + \dots \quad (۳-۱۷)$$

به خاطر همین خاصیت سیگنال e^{st} است که باعث شده سعی کنیم ورودی را بر حسب سیگنال‌هایی

بصورت $e^{jk\omega t}$ بسط دهیم. به سیگنال e^{st} تابع ویژه^۶ سیستم LTI پیوسته زمان گویند.

چون پاسخ به همان صورت ورودی منتها با دامنه و زاویه متفاوت است. دامنه و زاویه ایجاد شده فقط

بستگی به سیستم دارد (به رابطه (۳-۱۵) توجه کنید). توجه کنید که سیگنال‌هایی بصورت $e^{st} u(t)$

توابع ویژه سیستم‌های LTI پیوسته زمان نیستند.

مثال (۳-۹): نشان دهید سیگنال‌هایی بصورت $e^{st} u(t)$ توابع ویژه برای سیستم‌های LTI نیستند.

حل: فرض می‌کنیم ورودی یک سیستم LTI پیوسته زمان بصورت $e^{st} u(t)$ باشد از انتگرال کانولوشن

برای محاسبه خروجی استفاده می‌کنیم.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s(t-\tau)} u(t-\tau) h(\tau) d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^t e^{-s\tau} h(\tau) d\tau$$

دیده می‌شود که انتگرال خود تابعی از t است. بنابراین شکل تابعیت خروجی از t فقط بصورت e^{st}

نیست. بعنوان مثال اگر پاسخ ضربه سیستم بصورت زیر باشد.

$$h(t) = e^{-t} u(t)$$

داریم.

$$y(t) = e^{st} \left(\int_0^t e^{-(s+1)\tau} d\tau \right) u(t)$$

$$= e^{st} \frac{1}{s+1} [1 - e^{-(s+1)t}] u(t)$$

مثال (۳-۱۰): کدامیک از سیگنال‌های زیر توابع ویژه سیستم‌های LTI پیوسته زمان هستند.

الف) $x(t) = e^{-t} + e^{-2t}$

ب) $g(t) = e^t$

⁶ Eigen Function

$$w(t) = e^{-st} + e^{-t}u(t) \quad \text{ج}$$

حل: الف) سیگنال $x(t)$ یک تابع ویژه برای سیستم‌های LTI پیوسته زمان نیست.

چون

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-(t-\tau)} + e^{-2(t-\tau)}]h(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)}h(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)}h(\tau)d\tau = e^{-t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}h(\tau)d\tau + e^{-2t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\tau}h(\tau)d\tau \end{aligned}$$

بنابراین خروجی بصورت $y(t) = H(s)x(t)$ نیست.

ب) $g(t)$ یک تابع ویژه است چون بصورت e^{st} است.

ج) $w(t)$ یک تابع ویژه نیست.

مثال (۳-۱۱): برای سیستم زیر $y(t)$ را بیابید. فرض کنید $H(s) = \frac{1}{s+1}$ باشد.



شکل (۳-۷): یک سیستم LTI

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

با توجه به (۳-۱۷) داریم

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t} \\ y(t) &= \frac{1}{2}H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}H(-j\omega_0)e^{-j\omega_0 t} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{j\omega_0 t}}{j\omega_0 + 1} + \frac{e^{-j\omega_0 t}}{-j\omega_0 + 1} \right) \\ y(t) &= \frac{1}{2} \left[\frac{(1 - j\omega_0)e^{j\omega_0 t}}{1 + \omega_0^2} + \frac{(1 + j\omega_0)e^{-j\omega_0 t}}{1 + \omega_0^2} \right] \\ &= \frac{1}{2(1 + \omega_0^2)} [(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) + j\omega_0 (e^{-j\omega_0 t} - e^{j\omega_0 t})] \\ \rightarrow y(t) &= \frac{1}{2(1 + \omega_0^2)} [2\cos\omega_0 t + j\omega_0 (-j2\sin\omega_0 t)] \\ &= \frac{1}{1 + \omega_0^2} [\cos\omega_0 t + \omega_0 \sin\omega_0 t] \end{aligned}$$

۳-۳ سری فوریه

اکنون آماده هستیم که سیگنال دلخواه متناوب $x(t)$ را بصورت مجموعه‌ای از سیگنال‌های متعامد یکه

$\Phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ بنویسیم. رمز موفقیت در محاسبه ضرایب بسط است. روابط تبدیل فوریه و ضرایب

سری فوریه بصورت زیر هستند.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (18-3) \text{ (رابطه تبدیل فوریه)}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (19-3) \text{ (رابطه ضرایب تبدیل)}$$

که a_k مؤلفه $x(t)$ روی $e^{jk\omega_0 t}$ یا ضریب k ام تبدیل فوریه نامیده می‌شود. طریقه بدست آوردن ضرایب a_k از روی $x(t)$ به کمک خاصیت تعامد سیگنال‌هایی بصورت $e^{jm\omega_0 t}$ و $e^{jk\omega_0 t}$ می‌باشد. برای اثبات رابطه (۱۹-۳) ابتدا توجه می‌کنیم که توابعی بصورت $e^{jm\omega_0 t}$ و $e^{jk\omega_0 t}$ به ازاء $m \neq k$ متعامد هستند.

اکنون طرفین رابطه (۱۸-۳) را در $e^{-jm\omega_0 t}$ ضرب کرده و روی یک دوره تناوب انتگرال می‌گیریم

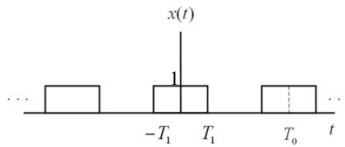
$$\int_{T_0} x(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = \sum_k a_k \int_{T_0} e^{j(k-m)\omega_0 t} dt \quad (20-3)$$

مشاهده می‌کنیم که طرف دوم برابر $a_m T_0$ است چون به ازاء سایر k ها حاصل انتگرال صفر است. پس

$$\int_{T_0} x(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = a_m T_0 \quad (21-3)$$

و این همان رابطه (۱۹-۳) می‌باشد.

مثال (۱۲-۳): ضرایب a_k را برای سیگنال $x(t)$ شکل (۸-۳) بیابید.



شکل (۸-۳): سیگنال مثال (۱۲-۳)

حل:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} 1 \times e^{-jk\omega_0 t} dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T_0} [e^{-jk\omega_0 T_1} - e^{jk\omega_0 T_1}] = \frac{-j2 \sin(k\omega_0 T_1)}{-jk\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0}}$$

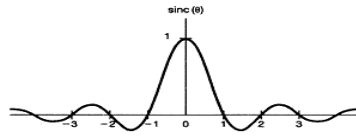
بنابراین

$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

تابع سینک بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\text{Sin } c(\theta) \triangleq \frac{\text{Sin } \pi\theta}{\pi\theta}$$

شکل این تابع به صورت زیر است.



شکل (۹-۳): رسم تابع سینک

به ازاء مقادیر صحیح x تابع $Sinc(x)$ مساوی صفر است.

$$a_k = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi} = \frac{\sin k\pi \frac{2T_1}{T_0}}{k\pi} = \frac{2T_1}{T_0} Sinc\left(\frac{k2T_1}{T_0}\right) = \frac{2T_1}{T_0} Sinc\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right)$$

رسم a_k :

هر چه نسبت $\frac{T_0}{T_1}$ بزرگتر باشد تغییرات از یک مؤلفه به مؤلفه بعدی کمتر خواهد بود لذا می‌توان گفت

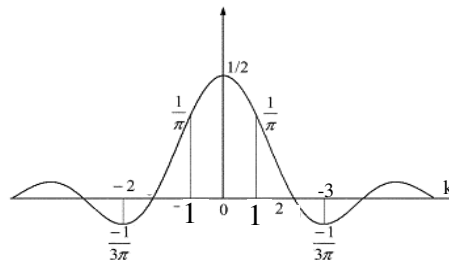
که، دامنه بازاء $k\omega_0$ از روی پوش منحنی بدست خواهد آمد.

رابطه $\frac{T_1}{T_0} \rightarrow 0$ دو معنی می‌دهد یکی T_0 ثابت و $T_1 \rightarrow 0$ که در آنصورت یک ردیف پالسهای سوزنی

خواهیم داشت و دیگر اینکه T_1 ثابت و $T_0 \rightarrow \infty$ که در آنصورت یک پالس منفرد خواهیم داشت که از لحاظ طیف فرکانس هر دو دارای شکل $Sinc$ هستند، که قبلاً رسم شده است. اگر T_0 ثابت باشد چون طیف فقط در نقاط $k\omega_0$ دارای مقدار است تغییر دامنه‌ها ملایم تر می‌شود ولی به هم نزدیکتر نمی‌شوند. ولی اگر $T_0 \rightarrow \infty$ عبارتی $\omega_0 \rightarrow 0$ در آنصورت $k\omega_0$ مقادیر نزدیک به هم اتخاذ خواهد کرد و طیف پیوسته خواهد شد. به عنوان مثال دو حالت ساده را در نظر می‌گیریم.

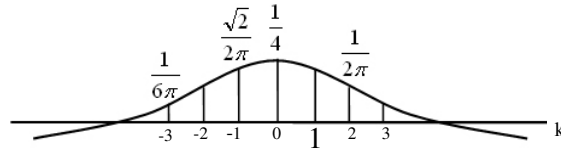
الف (I) اگر

$$T_1 = \frac{T_0}{4} \rightarrow a_k = \frac{1}{2} Sinc \frac{k}{2}$$

شکل (۱۰-۳): رسم دامنه a_k بر حسب $k\omega_0$

$$T_1 = \frac{T_0}{8} \rightarrow a_k = \frac{1}{4} Sinc \frac{k}{4}$$

ب (II) اگر



شکل (۱۱-۳): رسم دامنه a_k به ازای مقادیر مختلف $\frac{T_0}{T_1}$

می‌بینیم هرچه $T_1 \rightarrow 0$ میل داده شود در حالی که T_0 ثابت است طیف به سمت پیوسته شدن میل نمی‌کند ولی تغییراتش ملایم‌تر می‌شود.

مثال (۱۳-۳): $x(t)$ را به صورت سری فوری بسط دهید.

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3} \cos 6\pi t$$

حل: با استفاده از رابطه اولر داریم

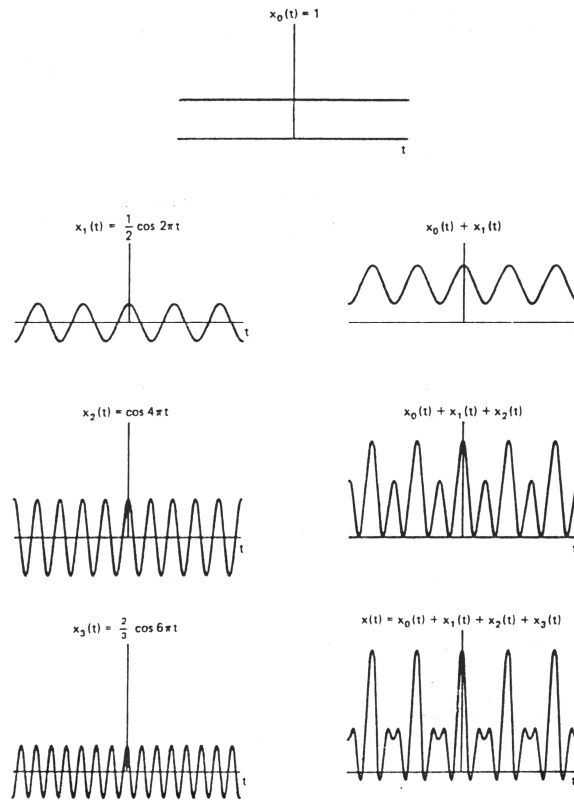
$$x(t) = 1 + \frac{1}{4} (e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2} (e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) + \frac{1}{3} (e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t})$$

بنابراین ضرایب سری فوری به صورت زیر بدست می‌آیند

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4}, \quad a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$$

مراحل تشکیل $x(t)$ از روی سیگنال‌های متعامد یکه در شکل (۱۲-۳) نمایش داده شده است.

بسادگی می‌توان نمایش دیگری برحسب توابع سینوسی و کسینوسی برای $x(t)$ یافت جهت یافتن این



شکل (۱۲-۳): مراحل ساخت $x(t)$ مثال (۱۳-۳) بصورت یک ترکیب خطی از سیگنال‌های متعامد یکه

نمایش لازم است توجه کنید که اگر $x(t)$ حقیقی باشد در آن صورت $a_k = a_{-k}^*$.

تمرین (۳-۳): ثابت کنید اگر $x(t)$ حقیقی باشد در آن صورت $a_k = a_{-k}^*$.

در صورتی که $a_k = a_{-k}^*$ باشد، داریم

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t}] \quad (۲۲-۳)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\omega_0 t}] = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{Re} [a_k e^{jk\omega_0 t}]$$

که در آن $\text{Re}[\cdot]$ به معنای قسمت حقیقی سیگنال است. اگر فرض کنیم $a_k = A_k e^{j\theta_k}$ باشد در آن

صورت داریم (A_k, θ_k) حقیقی هستند:

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \text{Cos}(k\omega_0 t + \theta_k) \quad (۲۳-۳)$$

معادله (۲۳-۳) یک روش برای نمایش $x(t)$ می‌باشد. یا می‌توان روش نمایش دیگری را نیز بدست آورد. این کار به کمک نوشتن a_k بصورت رابطه (۲۴-۳) ممکن است.

$$a_k = b_k + jc_k \quad (24-3)$$

در آن صورت داریم.

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [b_k \cos k\omega_0 t - c_k \sin k\omega_0 t] \quad (25-3)$$

تمرین (۴-۳): رابطه (۲۵-۳) را بدست آورید.

۳-۳-۱ تقریب سیگنال از روی سری فوریه

از لحاظ ریاضی رابطه بسط سری فوریه یک رابطه تحقیقی است، اما اگر حدود مجموع آن را محدود کنیم در آن صورت یک تقریب از $x(t)$ بدست می‌آید. اگر $2N+1$ جمله از سری فوریه را در نظر بگیریم در این صورت یک سیگنال جدید خواهیم داشت. که با سیگنال اصلی $x(t)$ متفاوت است.

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (26-3)$$

در اینصورت مقدار خطای لحظه‌ای از رابطه (۲۷-۳) محاسبه می‌گردد.

$$\mathcal{E}(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (27-3)$$

از یک دیدگاه مقدار عددی خطا زیاد برایمان مهم نیست بلکه انرژی موجود در آن برایمان مهم است. انرژی خطا بصورت زیر تعریف می‌گردد.

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{E}(t)|^2 dt \quad (28-3)$$

هرچه انرژی خطا کوچکتر باشد $\hat{x}(t)$ شباهت بیشتری به $x(t)$ دارد. البته این نوع شباهت تضمینی در مورد شباهت مقادیر لحظه‌ای دو سیگنال ایجاد نمی‌کند. در حقیقت ممکن است در لحظات منفصل و محدود، مقدار تفاضل دو سیگنال بزرگ شود اما سطح زیر منحنی مربع تفاضل مقداری محدود باشد و انتظار داریم هرچه N بزرگتر شود این مقدار نیز نسبت صفر میل نماید.

۳-۳-۲ شرایط وجود سری فوریه

این شرایط بصورت زیر خلاصه می‌گردند از اثبات در کلیه مراحل صرف نظر شده است

$$1- \int_{T_0} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (\text{شرط کافی})$$

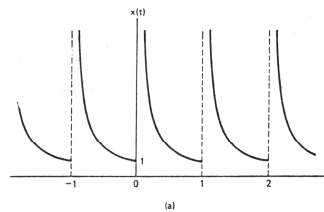
۲- شرایط دیریکله با هم برقرار باشند.

$$\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty \quad \text{الف}$$

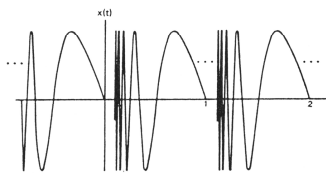
ب) تعداد ماکزیمم‌ها و مینیمم‌ها در یک دوره تناوب محدود باشد.

ج) تعداد ناپیوستگی‌ها در یک دوره تناوب محدود باشد.

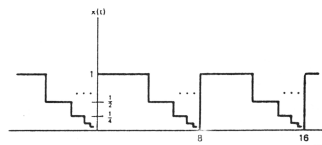
در حالت کلی شرایط فوق فقط شرط کافی می‌باشند، اما برای سیگنال‌های خوشرفتار شرایط فوق بصورت شرط لازم و کافی خواهند شد. سیگنال‌های خوشرفتار سیگنال‌هایی هستند که بصورت فیزیکی قابل ساخت هستند.



(a)



(b)



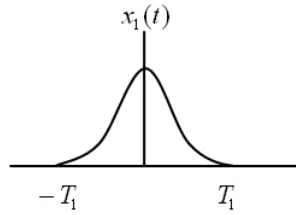
شکل (۳-۱۳): نمونه سیگنال‌هایی که بترتیب شرطهای الف، ب و ج از شرایط دیریکله را نقض می‌کنند.

۳-۴ تبدیل فوریه^۷

۳-۴-۱ تبدیل فوریه بعنوان تعمیمی از سری فوریه

در این قسمت تعریف تبدیل فوریه را بعنوان یک تعمیم منطقی از سری فوریه ارائه می‌نمائیم. در ضمن توجه می‌کنیم که تبدیل فوریه بعنوان یک رابطه ریاضی و بطور مستقل از سری فوریه قابل تعریف است. تعریف تبدیل فوریه بعنوان تعمیمی از سری فوریه ما را یاری می‌نماید تا از رابطه ضرایب سری فوریه، که در جای خود ثابت شد، برای یافتن رابطه معکوس تبدیل فوریه استفاده کنیم. ابتدا سیگنال $x_1(t)$ که از لحاظ زمانی محدود است را در نظر می‌گیریم.

⁷ Fourier Transform

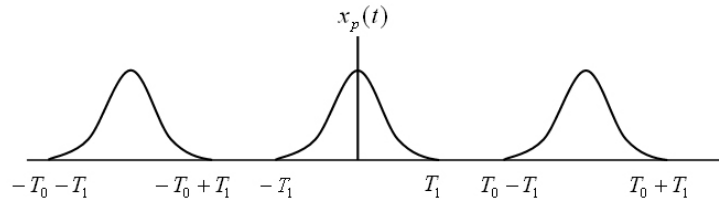


شکل (۳-۱۴): یک سیگنال دوره محدود دلخواه.

رابطه ریاضی این سیگنال کاملاً دلخواه و بصورت زیر فرض می‌شود.

$$x_1(t) = \begin{cases} x(t) & |t| < T_1 \\ 0 & |t| > T_1 \end{cases} \quad (۳-۲۹)$$

اکنون با استفاده از سیگنال فوق، سیگنال متناوب $x_p(t)$ را بگونه‌ای می‌سازیم که در هر دوره تناوب سیگنال $x_p(t)$ برابر $x_1(t)$ باشد.

شکل (۳-۱۵): سیگنال متناوب $x_p(t)$ که در یک دوره تناوب مساوی $x_1(t)$ است.

اکنون سری فوریه را برای سیگنال $x_p(t)$ می‌نویسیم.

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (۳-۳۰)$$

که در آن

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x_p(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_p(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (۳-۳۱)$$

چون در فاصله $(-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2})$ مساوی $x(t)$ است پس قرار می‌دهیم

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (۳-۳۲)$$

حال برای اینکه سعی کنیم $x(t)$ را بدست آوریم، دوره تناوب T_0 مربوط به $x(t)$ را بسمت بینهایت میل می‌دهیم. در نتیجه

$$T_0 \rightarrow \infty \Rightarrow x_p(t) = x(t)$$

اگر $T_0 \rightarrow \infty$ خود a_k بسمت صفر میل می‌کند ولی حاصلضرب $T_0 a_k$ عددی محدود می‌شود. لذا $T_0 a_k$ را بدست می‌آوریم

$$T_0 a_k = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \Rightarrow \lim_{T_0 \rightarrow \infty} T_0 a_k = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (۳۳-۳)$$

اگر $T_0 \rightarrow \infty$ در آنصورت $\omega_0 \rightarrow 0$ یعنی $k\omega_0$ مقادیر بسیار نزدیک به هم یا پیوسته را اختیار می‌کند. پس اجازه دهید بجای $k\omega_0$ از مقدار پیوسته ω استفاده کنیم و نام حد $T_0 a_k$ را $X(\omega)$ گذارده و به آن تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ بگوئیم. بنابراین تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ برابر است با

$$X(\omega) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (۳۴-۳)$$

۳-۴-۲ تبدیل معکوس فوریه

همانگونه که گفتیم تعریف تبدیل فوریه بعنوان یک تعمیم از سری فوریه به ما این امکان را می‌دهد که با استفاده از رابطه ضرایب سری فوریه، رابطه تبدیل معکوس فوریه را بدست آوریم. در اینجا لازم بذکر است که رابطه تبدیل معکوس فوریه مستقیماً و با استفاده از تعریف تبدیل فوریه قابل استخراج است. با توجه به رابطه سری فوریه می‌توان نوشت.

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k T_0 e^{-jk\omega_0 t} \quad (۳۵-۳)$$

در حد وقتی که $T_0 \rightarrow \infty$ داریم

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_p(t) = x(t)$$

و از طرفی با توجه به معلومات مقدماتی در مورد حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌دانیم که وقتی $T_0 \rightarrow \infty$ ، حد مجموع بسمت انتگرال میل می‌کند و با توجه به اینکه می‌دانیم

$$X(\omega) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} a_k T_0$$

و همچنین

$$\frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

پس نتیجه می‌گیریم که (در حد ω_0 بسمت $d\omega$ میل می‌کند)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{jk\omega_0 t} d\omega = F^{-1}[X(\omega)] \quad (۳۶-۳)$$

از این به بعد رابطه تبدیل معکوس فوریه را بصورت $F^{-1}[\cdot]$ نمایش می‌دهیم.

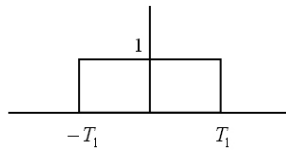
۳-۵ محاسبه ضرایب سری فوریه سیگنال متناوب از روی تبدیل فوریه سیگنال غیر متناوب
در این قسمت نشان می‌دهیم که اگر تبدیل فوریه یک سیگنال غیر متناوب دلخواه مانند $x(t)$ را داشته باشیم در اینصورت می‌توان ضرایب سری فوریه سیگنال متناوب متناظر $x_p(t)$ که از تکرار

$x(t)$ حاصل می‌شود را بدست آورد فرض کنید که $X(\omega)$ تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ است، و همچنین $x_p(t)$ یک سیگنال متناوب است که در هر دوره تناوب مساوی $x_p(t)$ است. اگر ضرایب سری فوریه $x_p(t)$ را a_k بنامیم، بسادگی می‌توان ثابت کرد که

$$a_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) \quad (۳۷-۳)$$

تمرین (۵-۳): رابطه (۳۷-۳) را ثابت کنید.

مثال (۱۴-۳): تبدیل فوریه سیگنال شکل (۱۶-۳) را بدست آورید.



شکل (۱۶-۳)

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} 1 \times e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{1}{j\omega} (e^{j\omega T_1} - e^{-j\omega T_1})$$

$$\frac{j2 \sin \omega T_1}{j\omega} = \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega} = 2T_1 \frac{\sin \omega T_1}{\omega T_1} = 2T_1 \frac{\sin \pi \left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)}{\pi \left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)}$$

با توجه به تعریف تابع سینک که بصورت زیر است.

$$\text{Sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \quad (۳۸-۳)$$

می‌توان رابطه $X(\omega)$ را بصورت زیر نوشت.

$$X(\omega) = 2T_1 \text{Sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

قبلاً برای سیگنال متناوب پالس مستطیلی بعرض $2T_1$ ضرایب a_k را بصورت زیر داشتیم.

$$a_k = \frac{2T_1}{T_0} \text{Sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) \quad (۳۹-۳)$$

بنابراین از روی $X(\omega)$ نیز می‌توانیم همین نتیجه را بدست آوریم

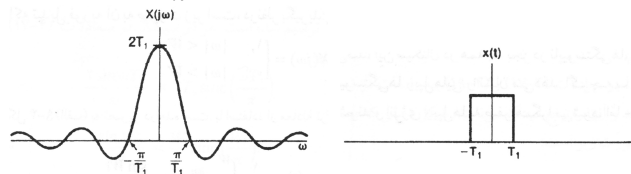
$$a_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) = \frac{2T_1}{T_0} \text{Sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right)$$

بدلیل اهمیت پالس مستطیلی بهتر است تبدیل آن را به خاطر بسپاریم.

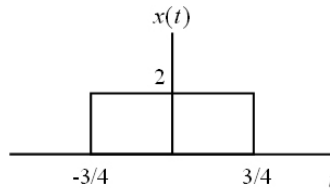
بطور کلی تبدیل فوریه یک پالس متقارن با عرض $2T_1$ و ارتفاع A بصورت زیر است.

$$X(\omega) = (\text{نصف عرض پالس} \times \text{سینک} \times \text{سینک}) \times \text{سینک} \left[\frac{\omega}{\pi} \times T_1 \right]$$

$$X(\omega) = 2AT_1 \text{Sinc} \left(\frac{\omega}{\pi} T_1 \right) \quad (۴۰-۳)$$



شکل (۳-۱۷): نمایش سیگنال $x(t)$ در حوزه زمان و رسم طیف آن در حوزه فرکانس به عنوان مثال برای شکل (۳-۱۸) رابطه تبدیل فوریه به صورت زیر است.



شکل (۳-۱۸)

$$X(\omega) = 2 \times 2 \times \frac{3}{4} \text{Sinc} \left(\frac{\omega}{\pi} \times \frac{3}{4} \right) = 3 \text{Sinc} \frac{3\omega}{4\pi}$$

مثال (۳-۱۵): تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید.

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad (۴۱-۳)$$

اگر $a < 0$ باشد $x(t)$ بطور مطلق انتگرال پذیر نیست و بنابراین $X(\omega)$ وجود ندارد. ولی اگر $a > 0$ باشد $X(\omega)$ بصورت زیر بدست می‌آید.

$$X(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{-1}{a + j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty}$$

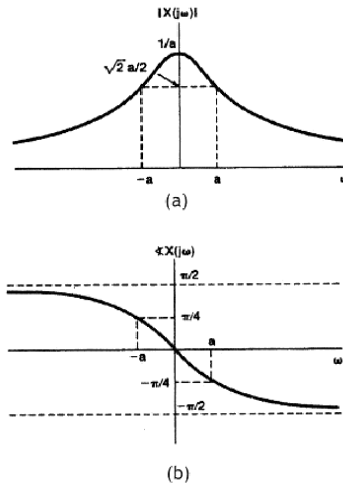
بنابراین

$$X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}, \quad a > 0 \quad (۴۲-۳)$$

دامنه و زاویه فاز $X(\omega)$ نیز بصورت زیر بدست می‌آیند.

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \quad \angle X(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{a} \quad (۴۳-۳)$$

که در شکل (۳-۱۹) ترسیم شده‌اند.



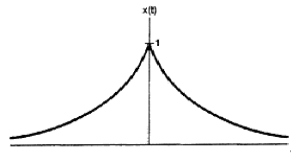
شکل (۳-۱۹): تبدیل فوریه سیگنال $a > 0$ و $x(t) = e^{-at}u(t)$ که در مثال (۳-۸) مورد بحث است. از این شکل‌ها پیداست که دامنه بیشینه برای مؤلفه‌های $X(\omega)$ در فرکانس‌های پایین قرار دارد یا بعبارت دیگر می‌توان گفت این سیگنال پایین‌گذر است. روش دیگر برای رسم $X(\omega)$ رسم مقادیر حقیقی و موهومی آن بطور جداگانه و یا روی یک فضای سه‌بعدی می‌باشد.

مثال (۳-۱۶): مطلوبست تبدیل فوریه سیگنال $x(t) = e^{-a|t|}$ اگر $a > 0$ باشد بصورت زیر است. تبدیل فوریه $x(t) = e^{-a|t|}$

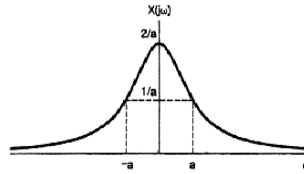
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

$$\frac{1}{a + j\omega} + \frac{1}{a - j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \quad (3-44)$$

شکل‌های (۳-۲۰) و (۳-۲۱) سیگنال $x(t)$ و تبدیل فوریه آنرا نشان می‌دهند. توجه کنید که در این مثال خاص تبدیل فوریه حقیقی است. بنابراین نیازی به رسم طیف فاز نیست.



شکل (۳-۲۰): نمایش سیگنال $x(t)$ مورد بحث در مثال (۳-۹)



شکل (۳-۲۱): تبدیل فوری سیگنال $x(t)$ مورد بحث در مثال (۳-۹)

مثال (۳-۱۷): ثابت کنید تبدیل فوری پالس گاوسی $x(t) = e^{-\pi t^2}$ بصورت زیر است.

$$X(\omega) = e^{-\pi \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2} = e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} \quad (۳-۴۵)$$

حل: برای حل این مساله از روش حل مستقیم انتگرال استفاده می‌کنیم. پس از مطالعه خواص تبدیل فوری یک روش ساده‌تر برای بدست آوردن تبدیل فوری پالس گاوسی ارائه خواهیم کرد.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi \left(t + \frac{j\omega}{2\pi}\right)^2 - \frac{\omega^2}{4\pi}} dt = e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi \left(t + \frac{j\omega}{2\pi}\right)^2} dt$$

با انتخاب یک متغیر جدید بنام y و قرار دادن $t + \frac{j\omega}{2\pi} = y$ داریم.

$$X(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} dy$$

محاسبه انتگرال در سمت راست بصورت زیر امکان‌پذیر است. ابتدا نام این انتگرال را I_y نهاده و یک انتگرال متناظر بصورت I_x تعریف می‌کنیم و حاصلضرب این دو انتگرال را تشکیل می‌دهیم این حاصلضرب بیانگر یک انتگرال دوگانه روی کل صفحه xy است.

$$I_x I_y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x^2+y^2)} dx dy$$

اکنون این انتگرال را در مختصات قطبی محاسبه می‌کنیم.

$$(y = r \sin \theta, \quad x = r \cos \theta)$$

$$I_x I_y = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\pi r^2} r d\theta dr$$

بنابراین

$$I_x I_y = 1 \Rightarrow I_x = I_y = 1$$

پس

$$X(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$$

همچنین با استفاده از تعریف $X(\omega)$ داریم.

$$X(0) = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt \quad (۳-۴۶)$$

که این انتگرال به روش عادی کمی مشکل‌تر قابل محاسبه است.

تمرین (۳-۶): انتگرال فوق را بروش عادی محاسبه کنید.

مثال (۳-۱۸): اگر تبدیل فوریه سیگنالی بصورت زیر باشد مطلوبست رابطه $x(t)$.

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases} \quad (۳-۴۷)$$

حل: با استفاده از رابطه تبدیل معکوس فوریه بسادگی می‌توان $x(t)$ را بدست آورد.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin Wt}{\pi t} \quad (۳-۴۸)$$

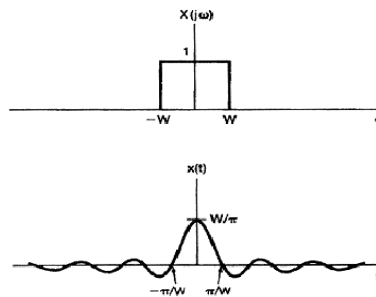
مثال (۳-۱۹): تبدیل فوریه سیگنال ضربه را بدست آورید: $x(t) = \delta(t)$

حل: با قرار دادن $\delta(t)$ در رابطه تبدیل فوریه و با توجه به خواص سیگنال ضربه داریم:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{j\omega t} dt = 1 \quad (۳-۴۹)$$

در واقع این رابطه فوق بیانگر این است که سیگنال ضربه تمام مؤلفه‌های فرکانسی را از $-\infty$ تا $+\infty$ دارا است. بعبارت دیگر شدت تغییرات زمانی سیگنال ضربه بسیار زیاد و در بین سیگنال‌ها بیشترین است.

مثال (۳-۲۰): تبدیل فوریه سیگنال $x(t) = e^{-t} \cos \omega_0 t u(t)$ را بیابید.



شکل (۳-۲۲): زوج تبدیل فوریه مثال (۳-۱۸)

حل: می‌دانیم که $\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}$ بنابراین $x(t)$ را می‌توان بصورت زیر نوشت.

$$x(t) = e^{-t} \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] u(t) = \left[\frac{1}{2} e^{(j\omega_0 - 1)t} + \frac{1}{2} e^{-(j\omega_0 + 1)t} \right] u(t)$$

اکنون می‌توان تبدیل فوریه را بسادگی بدست آورد.

$$\begin{aligned}
 X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{(j\omega_0-1)t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-(j\omega_0+1)t} e^{-j\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{j(\omega-\omega_0)+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{j(\omega+\omega_0)+1} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{j2\omega+2}{-(\omega^2-\omega_0^2)+1+j2\omega} \right] = \frac{j\omega+1}{1-(\omega^2-\omega_0^2)+j2\omega}
 \end{aligned} \tag{۵۰-۳}$$

مثال (۳-۲۱): تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(t - kT) \tag{۵۱-۳}$$

حل: با گرفتن تبدیل فوریه از رابطه (۵۱-۳) داریم.

$$\begin{aligned}
 X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(t - kT) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk\omega T}
 \end{aligned} \tag{۵۲-۳}$$

در طی مراحل یافتن پاسخ برای این مساله توجه کنید که بدلیل خطی بودن عملیات مجموع (\sum) و انتگرال قابل جابجایی هستند.

مثال (۳-۲۲): تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید.

$$x(t) = [u(t) - u(t - T_0)]A \tag{۵۳-۳}$$

حل: با توجه به تبدیل فوریه تابع پالس که قبلاً بدست آوردیم می‌توان نوشت.

$$X(\omega) = \int_0^{T_0} A e^{-j\omega t} dt, \quad X(\omega) = \left(AT_0 \operatorname{Sinc} \frac{\omega T_0}{2\pi} \right) e^{-j\omega \frac{T_0}{2}} \tag{۵۴-۳}$$

۳-۶ همگرایی تبدیل فوریه

اگر چه رابطه تبدیل فوریه با فرض دوره محدود بودن سیگنال $x(t)$ بدست آمده است ولی همانگونه که دیدیم تبدیل فوریه برای طیف وسیعی از سیگنال‌هایی که دارای دوره نامحدودی هستند نیز وجود دارد. در حقیقت شرایط گفته شده در مورد وجود سری فوریه عیناً در مورد تبدیل فوریه نیز مطرح است بدون اثبات می‌پذیریم که شرایط همگرا شدن تبدیل فوریه بصورت زیر می‌باشند.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty^{-1}$$

۲-سه شرط دیریکله با هم برقرار باشند:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

الف: $x(t)$ بطور مطلق انتگرال‌پذیر باشد.

ب: $x(t)$ دارای تعداد قابل شمارش نقاط بیشینه و کمینه در هر فاصله محدود باشد.

ج: $x(t)$ دارای تعداد قابل شمارشی ناپیوستگی در هر فاصله محدود باشد؛ علاوه بر آن باید این ناپیوستگی‌ها محدود باشند.

اگر چه شرایط فوق شروط کافی جهت وجود تبدیل فوریه به حساب می‌آیند، در قسمت‌های بعدی همین فصل مشاهده خواهیم کرد که سیگنال‌های متناوب که در شرط اول و قسمت (الف) از شرط دوم صدق نمی‌کنند، دارای تبدیل فوریه بصورت توابع ضربه می‌باشند. بدین خاطر می‌توان با وارد نمودن تعریف توابع ضربه در تبدیل فوریه، سری فوریه و تبدیل فوریه را در یک چهارچوب قرار داد. بعبارت دیگر با تعریف توابع ضربه می‌توان برای سیگنال‌های متناوب نیز تبدیل فوریه تعریف کرد.

۳-۷ خواص تبدیل فوریه

(تمام خواص تبدیل فوریه که در ذیل می‌آید در مورد سری فوریه نیز صادق هستند).

۳-۷-۱ خطی بودن تبدیل فوریه

اگر تبدیل فوریه $x_i(t)$ را $X_i(\omega)$ بنامیم در این صورت داریم.

$$F\left[\sum_i a_i x_i(t)\right] = \sum_i a_i X_i(\omega) \quad (۳-۵۵)$$

تمرین (۳-۷): رابطه (۳-۵۵) را ثابت کنید.

۳-۷-۲ تقارن تبدیل فوریه

اگر $x(t)$ حقیقی باشد در آنصورت داریم.

$$X^*(\omega) = X(-\omega) \quad (۳-۵۶)$$

اثبات: رابطه تبدیل فوریه بصورت زیر است.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

پس مزدوج مختلط فوریه بصورت زیر است.

$$X^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t} dt = X(-\omega)$$

در مورد آخرین قسمت تساوی فوق توجه کنید که $x(t) = x^*(t)$ است.

با توجه به رابطه (۳-۵۶) می‌توان گفت که اگر $x(t)$ حقیقی باشد در آنصورت دامنه تبدیل فوریه تابعی زوج نسبت به ω و زاویه تبدیل فوریه تابعی فرد نسبت به ω می‌باشد.

اثبات: از رابطه تبدیل فوریه داریم.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \rightarrow X^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t} dt = X(-\omega)$$

از یک طرف $|X(\omega)| = |X^*(\omega)|$ است و از طرف دیگر از رابطه فوق داریم.

$$|X(-\omega)| = |X^*(-\omega)|$$

پس نتیجه می‌گیریم که

$$|X(\omega)| = |X(-\omega)| \quad (۳-۵۷)$$

یعنی دامنه تبدیل فوریه تابعی زوج از ω است.

به روشی ساده‌تر می‌توان رابطه (۵۶-۳) یا (۵۷-۳) را ثابت کرد (با استفاده از رابطهٔ مثلثاتی تبدیل فوریه).

همانگونه که می‌دانیم $X(\omega)$ را می‌توان با بسط نمایی بصورت زیر نوشت.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt \quad (58-3)$$

با تبدیل ω به $-\omega$ در رابطه (۵۸-۳) داریم.

$$X(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt + j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt \quad (59-3)$$

و از مقایسه دو رابطهٔ فوق بوضوح مشاهده می‌شود که

$$|X(\omega)| = |X(-\omega)|$$

از همینجا نیز می‌توان قسمت دوم قضیه را ثابت کرد، فقط کافی است توجه کنیم زاویه $X(\omega)$ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\angle X(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt}{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt} \quad (60-3)$$

با تبدیل ω به $-\omega$ داریم

$$\angle X(-\omega) = \tan^{-1} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt}{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt} \quad (61-3)$$

پس می‌بینیم که $\angle X(\omega) = -\angle X(-\omega)$ یعنی زاویه $X(\omega)$ تابعی فرد از ω است. اکنون فرض کنید $x(t)$ علاوه بر حقیقی بودن، تابعی زوج از t نیز باشد. در اینصورت جملهٔ زیر درست است.

اگر $x(t)$ حقیقی و زوج باشد، تبدیل فوریه حقیقی خالص و زوج است.

اثبات: اگر $x(t)$ حقیقی باشد قبلاً داشتیم.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt \quad (62-3)$$

اگر $x(t)$ زوج باشد انتگرال دوم صفر می‌شود، چون حاصل ضرب یک تابع زوج در یک تابع فرد خود تابعی فرد است که وقتی انتگرالش را در فاصلهٔ متقارن حول صفر می‌گیریم مقدارش صفر می‌شود. بنابراین فقط انتگرال اول باقی می‌ماند که حقیقی خالص و زوج است.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt = X(-\omega)$$

اما اگر $x(t)$ علاوه بر حقیقی بودن تابعی فرد از t نیز باشد در اینصورت عبارت زیر را داریم.

اگر $x(t)$ حقیقی و فرد باشد، تبدیل فوریه موهومی خالص و فرد است.

اثبات: بطریقی مشابه قضیه قبلی انتگرال اول صفر می‌شود. بنابراین فقط انتگرال دوم باقی می‌ماند.

$$X(\omega) = -j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt \quad (63-3)$$

که این بیانگر موهومی خالص بودن $X(\omega)$ است و اما با تشکیل $X(-\omega)$ داریم.

$$X(-\omega) = j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt$$

بنابراین $X(\omega)$ یک تابع فرد از ω می باشد.

۳-۷-۳ خاصیت دوگانی^۸

فرض کنید رابطه زیر بین دو تابع f و g برقرار باشد.

$$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(v) e^{-juv} dv \quad (۶۴-۳)$$

اگر قرار دهیم $u = \omega$ و $v = t$ ، در آنصورت $f(\omega)$ تبدیل فوریه $g(t)$ خواهد شد یا

$$f(\omega) = F[g(t)] \quad (۶۵-۳)$$

و اگر $u = t$ و $v = \omega$ قرار دهیم، در آنصورت $g(-\omega)$ تبدیل فوریه $\frac{1}{2\pi} f(t)$ می گردد یا

$$2\pi g(-\omega) = F[f(t)] \quad (۶۶-۳)$$

بنابراین اگر $f(\omega)$ تبدیل فوریه $g(t)$ باشد.

$$g(t) \stackrel{F}{\leftrightarrow} f(\omega) \quad (۶۷-۳)$$

می توان گفت که تبدیل فوریه $f(t)$ مساوی $2\pi g(-\omega)$ خواهد بود.

$$f(t) \stackrel{F}{\leftrightarrow} 2\pi g(-\omega) \quad (۶۸-۳)$$

بعبارت دیگر از رابطه $x(t) = F[X(\omega)]$ داریم.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (۶۹-۳)$$

و از اصل تبدیل فوریه با جابجا کردن متغیرها داریم.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (۷۰-۳)$$

بنابراین با مقایسه دو رابطه (۶۹-۳) و (۷۰-۳) می توان نوشت.

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \quad (۷۱-۳)$$

اکنون اگر ω را به $-\omega$ تغییر دهیم و دو طرف را در $\frac{1}{2\pi}$ ضرب کنیم رابطه (۷۱-۳) مثل رابطه زیر

می شود.

$$\frac{1}{2\pi} X(t) = \frac{1}{2\pi} \int x(-\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

و بنابراین داریم.

⁸ Duality

$$\frac{1}{2\pi} X(t) \leftrightarrow x(-\omega) \quad (۷۲-۳)$$

از خاصیت دوگانگی می‌توان در محاسبه تبدیل فوری و تبدیل معکوس فوریه کمک فراوانی گرفت.

مثال (۳-۲۳): مطلوبست تعیین فوریه سیگنال $x(t)$ اگر $x(t) = \frac{2}{t^2+1}$

حل: از روش‌های معمولی حل این مساله بسیار مشکل است ولی با استفاده از خاصیت دوگانگی مساله را

حل می‌کنیم. می‌دانیم که تبدیل فوریه $e^{-|t|}$ مساوی $\frac{2}{1+\omega^2}$ می‌باشد، پس

$$e^{-|t|} \xrightarrow{F} \frac{2}{1+\omega^2} \quad (۷۳-۳)$$

بنابراین با استفاده از خاصیت دوگانگی می‌توان نوشت.

$$\frac{2}{1+t^2} \xleftarrow{F} 2\pi e^{-|\omega|} = 2\pi e^{-|\omega|} \quad (۷۴-۳)$$

مثال (۳-۲۴): اگر $x(t) = A\tau \text{Sinc} \frac{t}{2\pi}\tau$ (τ عدد ثابت) باشد مطلوبست $X(\omega)$.

حل: می‌دانیم که تبدیل فوریه پالس مربعی بصورت زیر است.

$$A \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \leftrightarrow A\tau \text{Sinc} \frac{\omega}{2\pi}\tau$$

اکنون با توجه به خاصیت دوگانگی تبدیل فوریه $x(t) = A\tau \text{Sinc} \frac{1}{2\pi}\tau$ بصورت زیر است

$$A\tau \text{Sinc} \frac{1}{2\pi}\tau \leftrightarrow 2\pi A \left[u\left(\omega + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(\omega - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

توجه کنید که به علت متقارن بودن پالس عملیات قرینه‌سازی تأثیری در پاسخ ایجاد نکرده است. شکل

(۳-۲۳) بخوبی بیانگر مراحل فوق است.

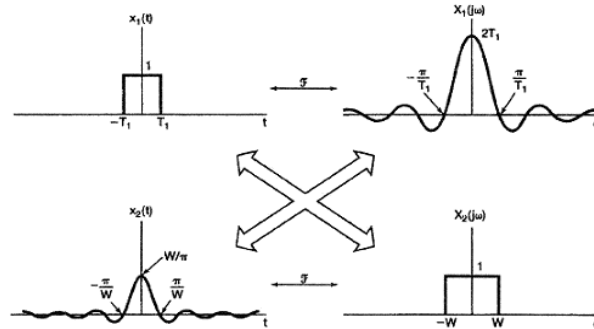
۳-۷-۴ رابطه پارسوال^۹

رابطه مهمی که با توجه به خواص تبدیل فوریه می‌توان بدست آورد، رابطه پارسوال می‌باشد که در

حقیقت بیانگر این است که انرژی در حوزه زمان و فرکانس مساوی هستند. این رابطه بدین صورت بیان

می‌گردد.

^۹ Parseval's Equation



شکل (۳-۲۳): مراحل یافتن تبدیل فوریه $x(t)$ در مثال (۳-۲۴) با استفاده از دوگانگی

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (۷۵-۳)$$

اثبات: با توجه به اینکه

$$|x(t)|^2 = x(t)x^*(t)$$

و با استفاده از رابطه (۳-۶۹) داریم.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt \quad (۷۶-۳)$$

با تغییر تقدم و تأخر انتگرال‌ها داریم.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) d\omega \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) X(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (۷۷-۳)$$

رابطه پارسوال برای سیگنال‌های متناوب بصورت زیر قابل بیان است.

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \quad (۷۸-۳)$$

با استفاده از قضیه پارسوال می‌توان چگالی طیفی توان یا انرژی را بصورت $G_x(\omega) = |x(\omega)|^2$ در نظر گرفت.

تمرین (۳-۸): رابطه (۳-۷۸) را با استفاده از تعریف تبدیل فوریه برای سیگنال‌های متناوب و با استفاده از رابطه (۳-۷۵) مسقیماً به دست آورید.

۳-۷-۵ انتقال در حوزه زمان

اگر تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ را $X(\omega)$ بنامیم در آنصورت تبدیل فوریه سیگنال انتقال یافته $x(t-t_0)$ برابر $X(\omega) e^{-j\omega t_0}$ می‌باشد.

اثبات: قرار می‌دهیم $y(t) = x(t-t_0)$ و تبدیل فوریه $y(t)$ را بدست می‌آوریم.

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)e^{-j\omega t} dt$$

با تغییر متغیر $t-t_0 = \tau$ داریم.

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega(\tau+t_0)} d\tau = e^{-j\omega t_0} X(\omega) \quad (۷۹-۳)$$

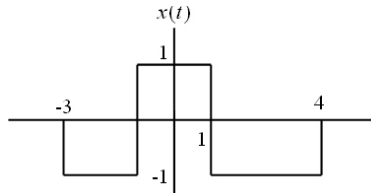
مثال (۲۵-۳): با استفاده از خاصیت انتقال در حوزه زمان و تبدیل فوریه پالس گاوسی متقارن، تبدیل فوریه پالس گاوسی انتقال یافته زیر را حساب کنید.

$$x(t) = e^{-\pi(t-t_0)^2}$$

حل: تبدیل فوریه پالس گاوسی متقارن در رابطه (۴۵-۳) داده شده است. بنابراین تبدیل فوریه پالس گاوسی انتقال یافته بصورت زیر است.

$$X(\omega) = e^{-j\omega t_0} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$$

مثال (۲۶-۳): تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید.



شکل (۲۴-۳): سیگنال مربوط به مثال (۲۶-۳)

حل: این سیگنال را می‌توان بصورت مجموع یک پالس متقارن و دو پالس انتقال یافته، بصورت زیر نوشت.

$$x(t) = -[u(t+3) - u(t+1)] + [u(t+1) - u(t-1)] - [u(t-1) - u(t-4)]$$

بنابراین با توجه به تبدیل فوریه پالس مربعی و خاصیت انتقال در حوزه زمان می‌توان تبدیل فوریه را بسادگی بدست آورد.

$$X(\omega) = \left(-2\text{Sinc}\frac{\omega}{\pi}\right)e^{j2\omega} + 2\text{Sinc}\frac{\omega}{\pi} - \left(3\text{Sinc}\frac{3\omega}{2\pi}\right)e^{-j\frac{5}{2}\omega}$$

۳-۷-۶ مشتق‌گیری در حوزه زمان

اگر تبدیل فوریه $x(t)$ را $X(\omega)$ بنامیم، تبدیل فوریه مشتق مرتبه n ام یا $\frac{d^n x(t)}{dt^n}$ بصورت زیر است:

$$F\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right] = (j\omega)^n X(\omega) \quad (۸۰-۳)$$

اثبات: از رابطه تبدیل معکوس فوریه استفاده می‌کنیم.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

اکنون از طرفین رابطه فوق نسبت به t ، n بار مشتق می‌گیریم تا بسادگی رابطه (۳-۸۰) بدست آید. از خاصیت مشتق در حوزه زمان برای محاسبه تبدیل مستقیم و معکوس فوریه می‌توان استفاده شایانی برد.

۳-۷-۷ انتگرال گیری در حوزه زمان

با توجه به خاصیت مشتق گیری در حوزه زمان و با توجه به اینکه عملیات انتگرال گیری عکس عملیات مشتق گیری است، انتظار می‌رود که تبدیل فوریه انتگرال بصورت $\frac{X(\omega)}{j\omega}$ باشد. اما در حقیقت یک جمله دیگر نیز باید در نظر گرفته شود که بیانگر مؤلفه در فرکانس صفر یا DC سیگنال است. پس در حالت کلی داریم.

$$F\left[\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau\right] = \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega) \quad (۳-۸۱)$$

توجه کنید که اگر مقدار $X(0)$ غیر صفر باشد جمله اول نامفهوم خواهد بود. این بدین معنی است که سیگنال $x(t)$ در حوزه زمان دارای سطح زیر منحنی غیر صفر است، چون

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt \quad (۳-۸۲)$$

این جمله در حقیقت متناسب است با مؤلفه DC سیگنال $y(t)$ که معادل یک ضربه در فرکانس صفر خواهد بود که در جمله دوم رابطه (۳-۸۱) منظور شده است. توجه داشته باشید که اثبات ریاضی رابطه (۳-۸۱) نیاز به ریاضیات عالی دارد که از حوصله این کتاب خارج است. اما این سوال پیش می‌آید که وجود این جمله اضافی در مورد عملیات مشتق گیری بعنوان عکس عملیات انتگرال گیری چرا ظاهر نمی‌شود. دلیل این امر این است که طی عملیات مشتق گیری لازم است تبدیل فوریه متناظر در $j\omega$ ضرب شود در اینصورت جمله دوم بصورت $j\omega X(0)\delta(\omega)$ در می‌آید که برابر صفر است، بنابراین تأثیر خود را از دست می‌دهد.

به همین جهت از لحاظ مشتق گیری بعنوان معکوس عملیات انتگرال گیری، وجود یا عدم وجود جمله دوم رابطه (۳-۸۱) تفاوتی ندارد. اما اکنون این سؤال پیش می‌آید که چرا ضریب خاص $\pi X(0)$ بعنوان دامنه ضربه در فرکانس صفرا انتخاب شده است؟ پاسخ این سوال بعنوان تمرین بعهدہ دانشجویان گذاشته شده است.

تمرین (۳-۹): علت وجود ضریب $\pi X(0)$ برای دامنه ضربه در فرکانس صفر در رابطه (۳-۸۱) چیست؟

مثال (۳-۲۷): تبدیل فوریه تابع پله واحد را بدست آورید.

حل: همانطور که می‌دانید تابع پله واحد در شرایط وجود تبدیل فوریه صدق نمی‌کند بنابراین به روش محاسبه مستقیم انتگرال فوریه نمی‌توان تبدیل فوریه تابع پله واحد را بدست آورد. بلکه باید از این خاصیت استفاده کرد که تابع پله، انتگرال تابع ضربه است.

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (۸۳-۳)$$

و چون تابع ضربه دارای تبدیل فوریه واحد است با استفاده از (۸۱-۳) و با انتخاب $x(t) = \delta(t)$ داریم $X(\omega) = 1$ و تبدیل فوریه $u(t)$ بصورت زیر است.

$$F[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \quad (۸۴-۳)$$

۳-۷-۸ مقیاس‌بندی زمانی

اگر تبدیل فوریه $x(t)$ را $X(\omega)$ بنامیم در اینصورت با فرض a عددی ثابت داریم.

$$F[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (۸۵-۳)$$

اثبات: قرار می‌دهیم $y(t) = x(at)$ پس

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt$$

با انتخاب $at = u$ داریم (اگر $a > 0$ باشد).

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-\frac{j\omega}{a}u} \frac{du}{a} = \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

و اگر $a \leq 0$ باشد.

$$Y(\omega) = \int_{\infty}^{-\infty} x(u) e^{-\frac{j\omega}{a}u} \frac{du}{a} = -\frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

بدین ترتیب رابطه (۸۵-۳) ثابت می‌شود.

هر خاصیتی که تاکنون در حوزه زمان گفتیم، طبق خاصیت دوگانگی برای حوزه فرکانس با اندکی تفاوت نیز قابل بیان است.

۳-۷-۹ انتقال در حوزه فرکانس

اگر $X(\omega)$ تبدیل فوریه $x(t)$ باشد در آنصورت $X(\omega - \omega_0)$ تبدیل فوریه سیگنال $x(t)e^{j\omega_0 t}$ است.

$$X(\omega - \omega_0) = F[e^{j\omega_0 t} x(t)] \quad (۸۶-۳)$$

اثبات: با استفاده از رابطه تبدیل معکوس فوریه داریم.

$$\frac{1}{2\pi} \int X(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = F^{-1}[X(\omega - \omega_0)]$$

با انتخاب $\omega - \omega_0 = \lambda$

$$F^{-1}[X(\omega - \omega_0)] = \frac{1}{2\pi} \int X(\lambda) e^{j(\omega_0 + \lambda)t} d\lambda = e^{j\omega_0 t} x(t)$$

خاصیت فوق با توجه به خاصیت دوگانگی و از روی خاصیت انتقال در حوزه زمان نیز قابل استخراج است.

۳-۷-۱۰ مشتق گیری در حوزه فرکانس

اگر $X(\omega)$ تبدیل فوریه $x(t)$ باشد، $\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ تبدیل فوریه سیگنال $-jtx(t)$ است.

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = F[-jtx(t)] \quad (۸۷-۳)$$

اثبات:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

از طرفین رابطه فوق نسبت به ω مشتق می گیریم

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)[-jt]e^{-j\omega t} dt$$

بنابراین تبدیل فوریه سیگنال $-jtx(t)$ مساوی $\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ است.

خاصیت فوق برای محاسبه تبدیل معکوس فوریه بسیار مورد استفاده دارد.

مثال (۳-۲۸): تبدیل معکوس فوریه را بیابید اگر:

$$X(\omega) = \frac{1}{(j\omega + a)^2}$$

حل: با استفاده از روش انتگرال گیری حل این مساله مشکل است ولی با استفاده از خاصیت مشتق در حوزه فرکانس مساله بسادگی قابل حل است. ابتدا توجه می کنیم که $X(\omega)$ مشتق $Y(\omega)$ به صورت زیر است.

$$Y(\omega) = \frac{j}{j\omega + a}$$

بعبارت دیگر

$$X(\omega) = \frac{dY(\omega)}{d\omega}$$

پس با توجه به اینکه

$$y(t) = je^{-at}u(t)$$

می توان $x(t)$ را بصورت زیر بدست آورد

$$x(t) = -jty(t) = te^{-at}u(t)$$

۳-۷-۱۱ انتگرال گیری در حوزه فرکانس

این خاصیت با استفاده از دوگانی و رابطه (۳-۸۱) بصورت زیر قابل بیان است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda)d\lambda = F\left[\frac{x(t)}{-jt} + \pi x(0)\delta(t)\right] \quad (۸۸-۳)$$

توجه کنید که $2\pi x(0)$ سطح زیرمنحنی $X(\omega)$ در حوزه فرکانس است.

$$2\pi x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)d\omega \quad (۸۹-۳)$$

۳-۷-۱۲ تبدیل فوریه سیگنال‌های متناوب

اگر $x(t)$ یک سیگنال متناوب باشد در آن صورت می‌توان سری فوریه آنرا بصورت زیر نوشت.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (۹۰-۳)$$

با توجه به اینکه تبدیل فوریه سیگنال $e^{jk\omega_0 t}$ مساوی $2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$ است، می‌توان سری فوریه سیگنال متناوب را بصورت زیر ارائه کرد.

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (۹۱-۳)$$

به کمک تعریف توابع ضربه می‌توان یک نمایش مناسب برای سیگنال‌های متناوب در حوزه فرکانس بصورت تبدیل فوریه ارائه کرد. در این صورت سیگنال‌های متناوب و غیر متناوب تحت یک مجموعه دارای تبدیل فوریه می‌باشند.

۳-۷-۱۳ مدولاسیون^{۱۰}

طبق خاصیت مدولاسیون، تبدیل فوریه حاصلضرب دو سیگنال، کانولوشن تبدیل فوریه‌ها می‌باشد.

یعنی اگر

$$r(t) = s(t)p(t) \quad (۹۲-۳)$$

تبدیل فوریه $r(t)$ برابر است با

$$R(\omega) = \frac{1}{2\pi} [S(\omega) * P(\omega)] \quad (۹۳-۳)$$

اثبات: برای اثبات ابتدا حاصل کانولوشن $S(\omega) * P(\omega)$ را حساب می‌کنیم.

$$S(\omega) * P(\omega) = \int_{\lambda=-\infty}^{\infty} S(\lambda)P(\omega - \lambda)d\lambda \quad (۹۴-۳)$$

اکنون بجای $P(\omega - \lambda)$ رابطه معادل تبدیل معکوس فوریه را قرار می‌دهیم.

$$S(\omega) * P(\omega) = \int_{\lambda=-\infty}^{\infty} S(\lambda) \left[\int_{t=-\infty}^{\infty} p(t) e^{-j(\omega-\lambda)t} dt \right] d\lambda \quad (۹۵-۳)$$

اکنون ترتیب انتگرال‌گیری را تغییر می‌دهیم.

$$\begin{aligned} S(\omega) * P(\omega) &= \int_{t=-\infty}^{\infty} p(t) \left[\int_{\lambda=-\infty}^{\infty} S(\lambda) e^{-j(\omega-\lambda)t} d\lambda \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-j\omega t} dt \left[\int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda) e^{j\lambda t} d\lambda \right] \end{aligned}$$

بنابراین با قرار دادن $2\pi s(t)$ بجای انتگرال دوم داریم.

$$S(\omega) * P(\omega) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} s(t)p(t) e^{-j\omega t} dt \quad (۹۶-۳)$$

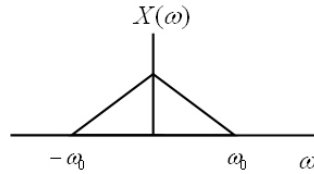
با توجه به تعریف تبدیل فوریه می‌توان نتیجه زیر را گرفت.

¹⁰ Modulation

$$F[s(t)p(t)] = \frac{1}{2\pi} [S(\omega) * P(\omega)] \quad (۹۷-۳)$$

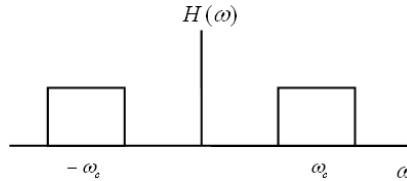
این خاصیت پایه ریاضی برای انواع مدولاسیون است. برای توضیح نحوه عمل مدولاسیون فرض کنید بخواهیم سیگنال پایین‌گذر $x(t)$ (منظور از سیگنال پایین‌گذر سیگنالی است که طیف آن در اطراف فرکانس‌های پائین (صفر) متمرکز است) را به فاصله‌ای دور از درون یک کانال میان‌گذر ارسال کنیم. این حالت اکثراً در مخابرات روزمره مشاهده می‌شود. یک نمونه از سیگنال‌های پایین‌گذر سیگنال صحبت می‌باشد. از طرف دیگر کانال‌های اصلی انتقال متداول در مخابرات معمولاً میان‌گذر هستند. بنابراین سیگنال صحبت را بی‌هیچ تغییری در طیف فرکانس از این کانال‌ها نمی‌توان عبور داد. بنابراین مجبوریم که طیف سیگنال را در محدوده باند عبور مجاز کانال قرار دهیم. عبارت دیگر مجبوریم یک (انتقال) فرکانسی در طیف سیگنال ایجاد کرده و طیف سیگنال را به محدوده باند عبور انتقال دهیم. این کار به کمک یکی از انواع مدولاسیون‌ها نظیر مدولاسیون دامنه امکان‌پذیر است. به مثال زیر توجه کنید.

مثال (۳-۲۹): سیگنال پایین‌گذر $x(t)$ را با طیف زیر در نظر بگیرید.



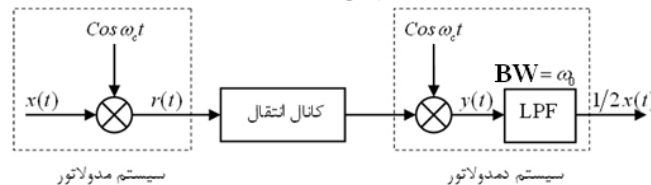
شکل (۳-۲۵): طیف سیگنال پایین‌گذر

می‌خواهیم این سیگنال را از کانال زیر عبور دهیم.



شکل (۳-۲۶): طیف کانال میان‌گذر (محدوده باند عبور مجاز)

در اینصورت برای انتقال طیف سیگنال به محدوده باند عبور از سیستم مدولاتور استفاده می‌کنیم. البته پس از عبور سیگنال از کانال لازم است دوباره طیف سیگنال به باند اصلی بازگردانده شود که این کار توسط سیستم دمدولاتور در قسمت گیرنده انجام می‌گردد.



شکل (۲۷-۳): سیستمی جهت انتقال طیف سیگنال به محدوده باند عبور مجاز سیگنال و سپس پیاده کردن طیف در محدوده اصلی طیف عملیات مدولاسیون سیگنال پایین‌گذر در یک سیگنال سینوسی به نام سیگنال حامل ضرب می‌شود. فرکانس سیگنال حاصل در میانه باند کانال میان‌گذر قرار دارد.

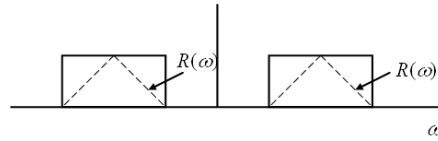
$$r(t) = x(t) \cos \omega_c t \quad (۹۸-۳)$$

این عملیات ضرب در حوزه زمان باعث انتقال طیف سیگنال $x(t)$ حول فرکانس ω_c می‌شود.

$$R(\omega) = \frac{1}{2\pi} [X(\omega)] * [\pi\delta(\omega - \omega_c) + \pi\delta(\omega + \omega_c)] \quad (۹۹-۳)$$

$$= \frac{1}{2} [X(\omega - \omega_c) + X(\omega + \omega_c)] \quad (۱۰۰-۳)$$

می‌بینیم که طیف $R(\omega)$ در محدوده باند عبور قرار می‌گیرد و براحتی از کانال عبور می‌کند.



شکل (۲۸-۳): طیف سیگنال پس از انتقال

اکنون برای بازسازی $X(\omega)$ از $R(\omega)$ باز هم عمل مدولاسیون را بصورت نشان داده شده در شکل بر روی سیگنال دریافتی انجام می‌دهیم. در این صورت طیف $y(t)$ از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$y(t) = r(t) \cos \omega_0 t = x(t) \cos^2 \omega_c t = \frac{1}{2} x(t) \cos 2\omega_c t + \frac{1}{2} x(t) \quad (۱۰۱-۳)$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega) + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} X(\omega - 2\omega_c) + \frac{1}{2} X(\omega + 2\omega_c) \right] \quad (۱۰۲-۳)$$

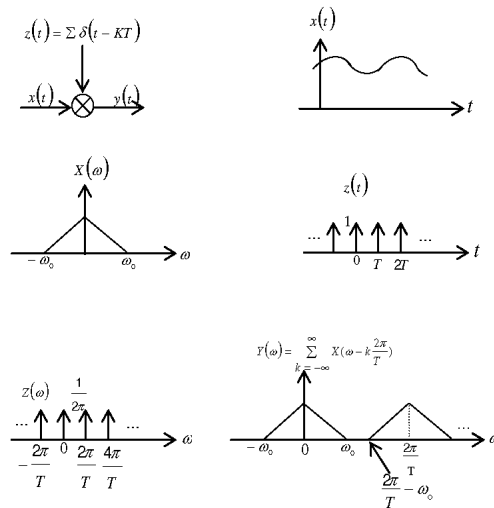
بنابراین اگر پهنای باند فیلتر را مساوی ω_0 در نظر بگیریم در آنصورت در خروجی $\frac{1}{2} x(t)$ را داریم و مؤلفه‌های دیگر از فیلتر عبور نخواهد کرد.

۳-۷-۱۴ نمونه‌برداری بعنوان مثالی از مدولاسیون

نمونه‌برداری زمانی از سیگنال‌های باند محدود در فصول آتی بتفصیل مورد بحث قرار می‌گیرد، ولی در اینجا لازم است بعنوان یک مثال از قضیه مدولاسیون از نمونه‌برداری نام برد.

مثال (۲۹-۳): فرض کنید $x(t)$ سیگنال باند محدود با پهنای باند ω_0 باشد. از این سیگنال توسط یک قطار ضربه که در حوزه زمان بفاصله T از هم قرار دارند نمونه‌برداری می‌شود. منظور از نمونه‌برداری کردن از یک سیگنال، ضرب کردن آن سیگنال در یک قطار پالس ضربه $p(t)$ می‌باشد.

در شکل (۲۹-۳) سیستم نمونه‌بردار و سیگنال‌های $x(t)$ ، $p(t)$ و $y(t) = p(t)x(t)$ طیف‌های آنها در حوزه فرکانس نمایش داده شده‌اند.



شکل (۳-۲۹): نمایش سیگنال‌های $x(t)$ و قطار ضربه در حوزه زمان و فرکانس و نمایش سیگنال $y(t)$ در حوزه فرکانس
 شرط عدم تداخل طیفها در هم این است که $\frac{2\pi}{T} > 2\omega_0$ باشد. در این صورت می توان از سیگنال $y(t)$ دوباره سیگنال $x(t)$ را با کمک یک فیلتر پایین گذر^{۱۱} بازسازی کرد، که این امر بعدها به تفصیل مورد بحث قرار خواهد گرفت.

۳-۷-۱۵ خاصیت کانولوشن

یکی از مهمترین خواص تبدیل فوریه که می توان کاربرد آن را در تحلیل سیستم‌های LTI توسعه داد، خاصیت کانولوشن است، چون به کمک خاصیت فوق عمل کانولوشن در حوزه زمان به عمل ضرب معمولی در حوزه فرکانس تبدیل می شود. برای روشن شدن مطلب فرض کنید $x(t)$ ورودی به سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ است. در اینصورت $y(t)$ با رابطه زیر بیان می گردد.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (۱۰۳-۳)$$

$$Y(\omega) = F[y(t)] = \int_{t=-\infty}^{\infty} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} [x(\tau)h(t - \tau)] e^{-j\omega t} dt \quad (۱۰۴-۳)$$

با تغییر ترتیب انتگرال گیری داریم:

$$Y(\omega) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{t=-\infty}^{\infty} h(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \quad (۱۰۵-۳)$$

با استفاده از خاصیت انتقال زمانی می فهمیم که انتگرال دوم مساوی است با $e^{-j\omega\tau} H(\omega)$ بنابراین داریم.

^{۱۱} Low Pass Filter

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} H(\omega) = H(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (۱۰۶-۳)$$

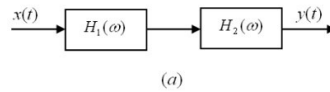
بنابراین

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (۱۰۷-۳)$$

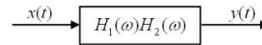
پس بطور خلاصه طبق خاصیت کانولوشن عملیات کانولوشن در حوزه زمان به عملیات ضرب در حوزه فرکانس تبدیل می‌شود.

$$y(t) = h(t) * x(t) \xrightarrow{F} Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (۱۰۸-۳)$$

خاصیت فوق نتیجه مستقیم این واقعیت است که توابع نمایی توابع ویژه سیستم‌های LTI هستند. تابع $H(\omega)$ اغلب بنام تابع شبکه یا پاسخ فرکانسی سیستم معروف است. با استفاده از خاصیت فوق می‌توان ترکیب متوالی دو سیستم را بصورت یک سیستم بیان کرد که در شکل (۳-۳۰) نشان داده شده است. با استفاده از خاصیت کانولوشن خاصیت جابجایی سیستم‌های متوالی LTI نیز بسادگی ثابت می‌شود.



(a)



(b)



(c)

شکل (۳-۳۰): سه سیستم معادل، در این جا سه سیستم نمایانگر یک سیستم یا یک عملکرد هستند.

مثال (۳-۲۹): برای سیستم مشتق‌گیر داریم

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (۱۰۹-۳)$$

پاسخ در حوزه فرکانس چنین است.

$$Y(\omega) = j\omega X(\omega) \quad (۱۱۰-۳)$$

بنابراین تابع شبکه بدینصورت بدست می‌آید.

$$H(\omega) = j\omega \quad (۱۱۱-۳)$$

مثال (۳-۳۰): یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t) = \delta(t - t_0)$ را در نظر بگیرید. پاسخ فرکانسی

سیستم و ارتباط ورودی و خروجی آنرا بیابید.

حل: تبدیل فوریه $h(t)$ همان پاسخ سیستم می‌باشد.

$$H(\omega) = e^{-j\omega t_0}$$

بنابراین خروجی در حوزه فرکانس بصورت زیر است.

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

و در حوزه زمان

$$y(t) = x(t - t_0)$$

مثال (۳-۳۱): سیستم LTI با پاسخ ضربه زیر را در نظر بگیرید.

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

$$\text{پاسخ سیستم به ورودی } x(t) = \sum_{k=-3}^3 a_k e^{jk2\pi t} \text{ را بیابید.}$$

حل: به سادگی داریم.

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

$$\text{با توجه به تبدیل فوریه ورودی که } X(\omega) = \sum_{k=-3}^3 2\pi a_k \delta(\omega - k2\pi) \text{ می باشد، می توان خروجی را}$$

بدین صورت نوشت.

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

$$\left[\sum_{k=-3}^3 2\pi a_k \delta(\omega - 2k\pi) \right] \frac{1}{1 + j\omega} = \sum_{k=-3}^3 \frac{2\pi a_k}{jk2\pi + 1} \delta(\omega - 2k\pi)$$

و در حوزه زمان برای $y(t)$ بدست می آوریم.

$$y(t) = \sum_{k=-3}^3 \frac{a_k}{jk2\pi + 1} e^{j2\pi kt}$$

۳-۸ رسم بود

در رسم بود، دامنه و زاویه پاسخ فرکانسی سیستمها در مقیاس لگاریتمی ترسیم می گردد و این نوع رسم بدلیل سادگی بر روشهای دیگر ترسیم مزیت دارد. چون معمولاً این نوع رسم در تعیین عملکرد سیستمها در حوزه فرکانس بسیار موفق عمل می کند و بهمین خاطر بسیار مورد استفاده دارد. دو روش متداول رسم بود که در کتابها مورد استفاده قرار می گیرند عبارتند از:

الف: روش Decade

ب: روش Octave

در روش اول که بیشتر هم کاربرد دارد محور عمودی بر حسب $20 \log |H(\omega)|$ رسم می شود و محور افقی بر حسب $\log \omega$ ، اما معمولاً خود ω را هم بر روی محور افقی می نویسند. ولی در روش دوم که در اینجا بحث نمی شود محور افقی بر حسب $\log_2 \omega$ رسم می شود. در اینجا با یک مثال روش اول را توضیح می دهیم.

مثال (۳-۳۲): رسم بود $H(\omega)$ را بیابید اگر

$$H(\omega) = \frac{1 + j\omega/10}{(1 + j\omega/100)(1 + j\omega/1000)} \quad (۱۱۲-۳)$$

ابتدا از طرفین $\log_{10}(\cdot)$ گرفته و سپس در عدد ۲۰ ضرب می‌کنیم، واحدی که اکنون باید بکار برده شود دسی‌بل dB نام دارد، که دانشجویان با آن آشنایی کافی دارند.

$$y = 20 \log |H(\omega)| = 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{100}\right)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{1000}\right)^2} \quad (۱۱۳-۳)$$

اگر مقداری تقریب استفاده کنیم که البته این تقریبها کاملا منطقی و قابل قبول نیز هستند در آنصورت برای $\omega < 10$ می‌توان نوشت.

$$y \approx 0$$

همچنین برای سایر فواصل تقریب‌های زیر قابل قبول است

$$y \approx 20 \log \frac{\omega}{10} \quad 10 < \omega < 100$$

$$y \approx 20 \log \frac{\omega}{10} - 20 \log \frac{\omega}{100} \approx 20 \log 10 \approx 20 dB \quad 100 < \omega < 1000 \quad (۱۱۴-۳)$$

$$y \approx 20 \log \frac{\omega}{10} - 20 \log \frac{\omega}{100} - 20 \log \frac{\omega}{1000} \approx 20 - 20 \log \frac{\omega}{1000} \quad \omega > 1000$$

و به ازاء ω های بزرگتر مقدار y بسمت صفر و سپس به سمت مقادیر منفی میل می‌کند. بعنوان مثال برای $\omega = 10^4$ داریم.

$$y \approx 0$$

و برای $\omega = 10^5$ مقدار تابع مساوی ۲۰- دسی‌بل می‌شود. اگر دقت شود رسم شکل بروش فوق حداکثر سه dB خطا در نقاط شکستگی بوجود می‌آورد.

بعنوان مثال اگر بخواهیم بطور دقیق حساب کنیم در $\omega = 10$ داریم.

$$20 \log |H(\omega)| = 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{10}{10}\right)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{10}{100}\right)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{10}{1000}\right)^2}$$

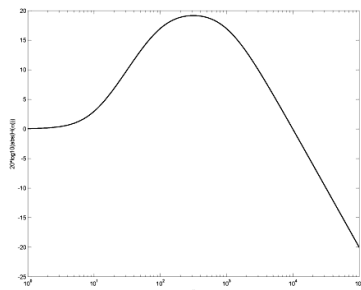
از دو جمله دوم با تقریب خوب می‌توان صرفنظر کرد و فقط از جمله اول داریم.

$$y = 10 \log 2 \approx 3 dB$$

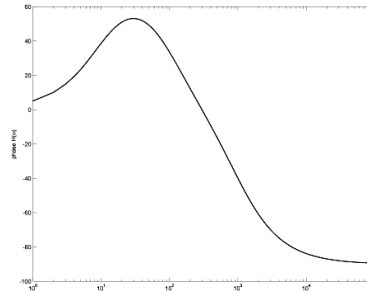
در حالیکه طبق تعریف انجام شده در $\omega = 10$ مقدار y مساوی صفر dB محاسبه شده بود. شکل صحیح بصورت خط تو پر رسم شده است.

رسم بود پاسخ زاویه نیز به کمک رابطه $\angle H(\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega}{10} - \tan^{-1} \frac{\omega}{100} - \tan^{-1} \frac{\omega}{1000}$ با تقریب خوبی

بصورت شکل (۳-۳۱-ب) خواهد شد (توجه شود مقدار زاویه در فرکانس بی‌نهایت مساوی 90° - می‌باشد).



(الف)



(ب)

شکل (۳-۳۱): رسم بود دامنه و زاویه پاسخ فرکانسی

۳-۹ سیستم‌های مرتبه اول و دوم

سیستم‌های مرتبه اول و دوم بعنوان سیستم‌های پایه هستند و اکثر سیستم‌های مراتب بالاتر قابل تجزیه به سیستم‌های مراتب اول و دوم می‌باشند. بهمین خاطر بررسی معادله دیفرانسیل، پاسخ ضربه، پله و پاسخ فرکانسی آنها مهم است.

یک سیستم مرتبه اول دارای معادله دیفرانسیلی بصورت زیر است.

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad (۳-۱۱۵)$$

که در آن τ عدد ثابتی است. با گرفتن تبدیل فوری از طرفین این معادله دیفرانسیل می‌توان پاسخ فرکانسی سیستم را بدست آورد.

$$j\omega\tau Y(\omega) + Y(\omega) = X(\omega) \quad (۳-۱۱۶)$$

و یا

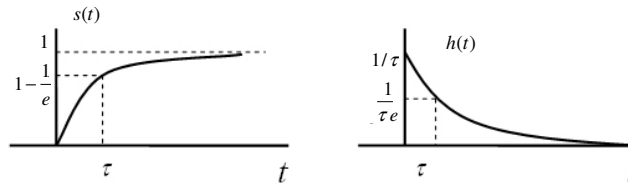
$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \quad (۳-۱۱۷)$$

با استفاده از پاسخ فرکانسی سیستم اکنون می‌توان پاسخ ضربه آن را بدست آورد

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t) \quad (۳-۱۱۸)$$

پاسخ پله سیستم را میتوان از کانولوشن پاسخ ضربه با پله واحد بدست آورد.

$$s(t) = h(t) * u(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau = [1 - e^{-t/\tau}] u(t) \quad (۳-۱۱۹)$$

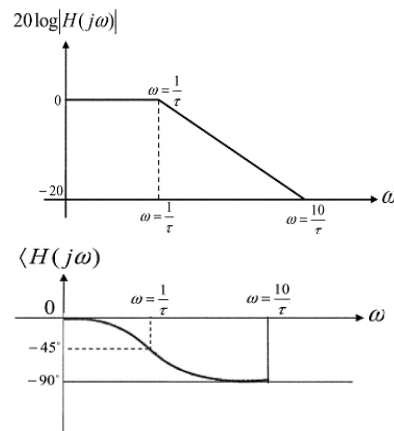


شکل (۳-۳۲): رسم پاسخ پله و ضربه برای سیستم مرتبه اول و دوم

ملاحظه می‌شود هر چه τ کمتر می‌شود، پاسخ ضربه (زودتر) سقوط می‌کند و زمان صعود پاسخ پله هم کمتر می‌شود و در واقع لختی سیستم کمتر می‌شود.

۳-۱۰ رسم بود سیستم‌های مرتبه اول

رسم بود برای قدر مطلق پاسخ دامنه و زاویه سیستم‌های مرتبه اول در شکل (۳-۳۳) ترسیم شده است.



شکل (۳-۳۳): رسم بود برای دامنه و زاویه پاسخ فرکانسی سیستم‌های مرتبه اول

معادله دیفرانسیل خطی مربوط به سیستم‌های مرتبه دوم بصورت زیر است.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t) \quad (۳-۱۲۰)$$

معادله دیفرانسیلی بصورت فوق در بسیاری از سیستم‌های فیزیکی همانند مدارهای RLC به کرات مشاهده می‌شود. بسادگی از روی رابطه (۳-۱۲۰) می‌توان پاسخ فرکانسی سیستم مرتبه دوم را بصورت رابطه (۳-۱۲۱) بدست آورد.

$$H(\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \quad (۳-۱۲۱)$$

گاهی می‌توان $H(\omega)$ را بصورت زیر نوشت.

$$H(\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega - c_1)(j\omega - c_2)} \quad (۳-۱۲۲)$$

که در آن

$$c_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (123-3)$$

$$c_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (124-3)$$

برای $\zeta \neq 1$ ، c_1 و c_2 متفاوت هستند و می‌توان نوشت.

$$H(\omega) = \frac{M}{j\omega - c_1} - \frac{M}{j\omega - c_2} \quad (125-3)$$

که در آن

$$M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (126-3)$$

در این صورت پاسخ ضربه به صورت زیر بدست می‌آید.

$$h(t) = M[e^{c_1 t} - e^{c_2 t}]u(t) \quad (127-3)$$

اگر $\zeta = 1$ باشد در آن صورت $c_1 = c_2 = -\omega_n$ می‌شود و خواهیم داشت.

$$h(t) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega + \omega_n)^2} \quad (128-3)$$

و پاسخ ضربه در این حالت مساوی است با

$$h(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} u(t) \quad (129-3)$$

منحنی‌های مختلف $\frac{h(t)}{\omega_n}$ به ازاء ζ ‌های مختلف در شکل ۳-۴۳ رسم شده است. به ζ ضریب میرایی^{۱۲} و به ω_n فرکانس طبیعی غیر میرایی^{۱۳} می‌گویند.

اگر $0 < \zeta < 1$ باشد c_1 و c_2 مختلط می‌شوند و پاسخ ضربه به صورت زیر در می‌آید.

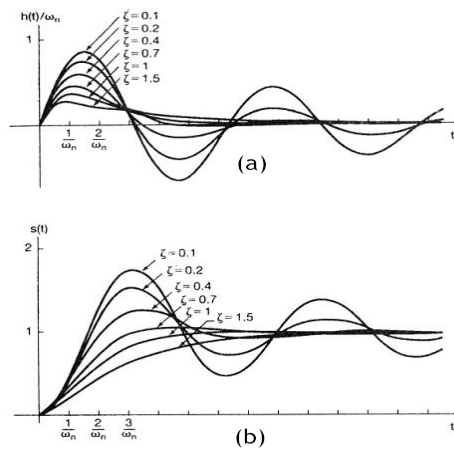
$$h(t) = \frac{\omega_n e^{-\omega_n \zeta t}}{j2\sqrt{1-\zeta^2}} \left[e^{j(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2})t} - e^{-j(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2})t} \right] u(t) \quad (130-3)$$

$$= \frac{\omega_n e^{-\omega_n \zeta t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[\sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) \right] u(t) \quad (131-3)$$

پاسخ پله نیز که از رابطه $h(t) * u(t)$ بدست می‌آید بازاء ζ ‌های متفاوت در شکل ۳-۴۴ ترسیم شده‌اند.

¹² Damping Ratio

¹³ Undamped Natural Frequency

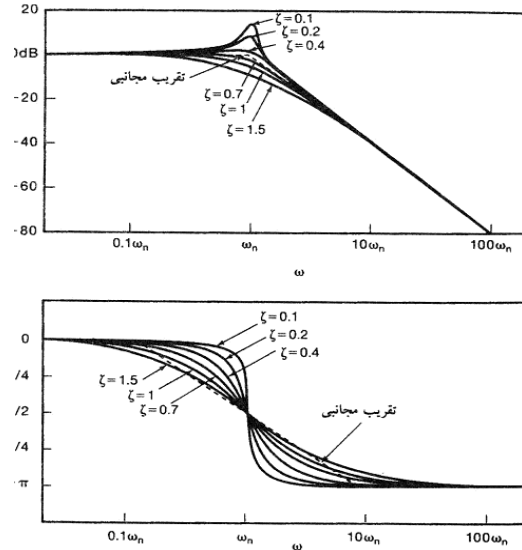


شکل (۳۴-۳) (a) پاسخ ضربه و (b) پاسخ پله برای سیستم مرتبه دوم با زامقادیر مختلف ضریب میرایی ζ .
رسم بود پاسخ فرکانسی نیز با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$20 \log |H(\omega)| = -10 \log \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\} \quad (۱۳۲-۳)$$

$$\angle H(\omega) = -tg^{-1} \left(\frac{2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right) \quad (۱۳۳-۳)$$

نمودار بود در شکل (۳۵-۳) رسم شده است.



شکل (۳-۳۵): رسم بود برای سیستم‌های مرتبه دوم با چندین مقدار مختلف برای ضریب میرایی ζ .

۳-۱۱ تفکیک سیستم‌های مراتب بالاتر به سیستم‌های مراتب پائین‌تر

همانطور که گفته شد سیستم‌های مراتب بالاتر بسادگی قابل تفکیک به سیستم‌های مراتب اول و دوم می‌باشند. این حقیقت توسط مثال (۳-۳۳) نشان داده شده است.

مثال (۳-۳۳): فرض کنید سیستم $H(\omega)$ بصورت زیر را بخواهیم بکمک تفکیک آن به دو زیر سیستم مرتبه اول تحلیل کنیم.

$$H(\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)(1+j\frac{\omega}{10})} \quad (۳-۱۳۴)$$

در این صورت با تجزیه $H(\omega)$ به حاصلضرب دو فاکتور $H_1(\omega)$ و $H_2(\omega)$ که پاسخ فرکانسی دو سیستم مرتبه اول هستند، داریم.

$$H(\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)} \times \frac{1}{(1+j\frac{\omega}{10})} \rightarrow H(\omega) = H_1(\omega) \times H_2(\omega) \quad (۳-۱۳۵)$$

که در آن

$$H_1(\omega) = \frac{1}{1+j\omega} \quad (۳-۱۳۶)$$

$$H_2(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{10}} \quad (۳-۱۳۷)$$

در این صورت داریم

$$20 \log |H(\omega)| = 20 \log |H_1(\omega)| + 20 \log |H_2(\omega)| \quad (۱۳۸-۳)$$

بنابراین جهت رسم پاسخ دامنه باید دامنه هر یک را بر حسب دسی‌بل با هم جمع کنیم و همین کار را برای فاز نیز باید انجام داد.

۳-۱۲ چگالی طیفی انرژی و توان

مفهوم چگالی یک مفهوم آشنا و شناخته شده در مهندسی و فیزیک می‌باشد. هر ذهن آشنا به مسائل علمی با شنیدن کلمه چگالی مفهوم تمرکز یک کمیت در یک محیط را در خود تداعی می‌کند و این مطلب کاملاً بدیهی و صحیحی می‌باشد. البته در موارد مختلف منظور از کمیت و محیط در تعریف فوق متفاوت خواهد بود. بعنوان مثال چگالی بار الکتریکی میزان باری است که در یک نقطه از فضای یک بعدی، دو بعدی و یا سه بعدی متمرکز شده است.

عبارت چگالی طیفی انرژی (یا توان) بیانگر میزان انرژی (یا توان) یک سیگنال مفروض در فرکانس‌های مختلف می‌باشد. چگالی طیفی انرژی در مورد سیگنال‌های انرژی و چگالی طیفی توان در مورد سیگنال‌های توان تعریف می‌گردند.

اما همانطور که روشن است چگالی طیفی انرژی (یا توان) یک مفهوم حوزه فرکانسی می‌باشد. بنابراین باید بتوان ارتباطی بین این مفاهیم و تبدیل فوریه (یا سری فوریه) سیگنال یافت. این ارتباط را بسادگی می‌توان توسط رابطه پارسوال بدست آورد.

جهت یادآوری رابطه پارسوال را برای سیگنال‌های انرژی دوباره ذکر می‌کنیم.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (۱۳۹-۳)$$

طرف دوم این رابطه کل انرژی سیگنال را بدست می‌دهد. بنابراین با توجه به تعریف چگالی انرژی که باید انتگرال آن در سراسر حوزه فرکانس مساوی کل انرژی سیگنال باشد می‌توان چگالی طیفی انرژی را به این صورت تعریف کرد.

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} |X(\omega)|^2 \quad (۱۴۰-۳)$$

با این تعریف می‌توان نوشت.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (۱۴۱-۳)$$

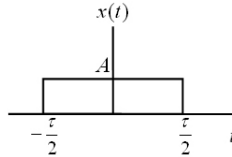
که در آن E کل انرژی سیگنال است.

بطریق مشابه و با استفاده از فرمول پارسوال برای سیگنال‌های توان می‌توان چگالی طیفی توان را به صورت زیر تعریف نمود.

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \delta(\omega - k\omega_0), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (۱۴۲-۳)$$

که در آن ضرایب سری فوریه سیگنال متناوب $x(t)$ و دوره تناوب آن است. در اینجا لازم به ذکر است که در بعضی کتابها چگالی طیفی انرژی بصورت $|X(\omega)|^2$ و بدون ضریب $\frac{1}{2\pi}$ تعریف شده است که تفاوت چندانی با تعریف ما ندارد.

مثال (۳-۳۴): مطلوب است تابع چگالی طیفی انرژی سیگنال زیر



شکل (۳-۳۶): سیگنال $x(t)$ مربوط به مثال (۳-۳۴)

حل: می دانیم که برای $x(t)$ بصورت شکل فوق داریم.

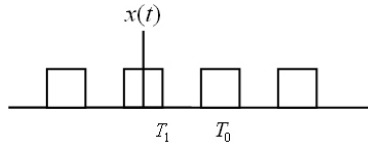
$$X(\omega) = A\tau \operatorname{Sinc} \frac{\omega}{2\pi} \tau \quad (۳-۱۴۳)$$

بنابراین طبق تعریف (۳-۱۴۰) داریم.

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} |X(\omega)|^2 = \frac{A^2 \tau^2}{2\pi} \left(\operatorname{Sinc} \frac{\omega}{2\pi} \tau \right)^2 \quad (۳-۱۴۴)$$

همانگونه که واضح است و دانشجویان باید خود حدس زده باشند تابع چگالی طیفی نامنفی و حقیقی است.

مثال (۳-۳۵): مطلوبست تابع چگالی طیفی توان سیگنال زیر



شکل (۳-۳۷): یک سیگنال توان با دوره تناوب $T_0 = 4T_1$

که تعریف آن در یک دوره تناوب بدین صورت است.

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases} \quad (۳-۱۴۵)$$

حل: همانگونه که می دانیم برای این سیگنال ضرایب سری فوریه بصورت زیر هستند (مثال ۳-۱۲ را ببینید).

$$a_k = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} \quad (۳-۱۴۶)$$

بنابراین طبق تعریف (۳-۱۴۲) داریم.

$$S(\omega) = \frac{1}{4} \delta(\omega) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\sin^2(k\pi/2)}{k^2 \pi^2} \delta(\omega - k\omega_0) \quad (۱۴۷-۳)$$

مثال (۳-۳۶): یک سیستم LTI بصورت زیر را در نظر بگیرید.

$$h(t) = e^{-4t} u(t)$$

سری فوریه خروجی سیستم زیر اگر ورودی بصورت $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$ باشد را بدست آورید.

حل: دوره تناوب ورودی واحد است. همچنین ضرایب سری فوریه این سیگنال برابر واحد هستند.

$$a_k = 1$$

ابتدا تبدیل فوریه ورودی را می‌یابیم.

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - 2k\pi)$$

تبدیل فوریه پاسخ ضربه سیستم با پاسخ فرکانسی سیستم برابر است با

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j4\omega}$$

بنابراین تبدیل فوریه خروجی برابر است با

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + j4\omega} 2\pi \delta(\omega - 2k\pi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + j8k\pi} 2\pi \delta(\omega - 2k\pi)$$

سری فوریه خروجی بصورت زیر است.

$$a_k = \frac{1}{1 + j8k\pi}$$

مثال (۳-۳۷): در همان سیستم مثال (۳-۲۴) اگر ورودی بصورت $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(t-n)$ باشد

سری فوریه خروجی را بدست آورید.

حل: می‌توان ورودی را بصورت زیر تفکیک کرد.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-2n) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[t-(2n+1)]$$

بنابراین تبدیل فوریه آن به این صورت در می‌آید.

$$X(\omega) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\pi) - \pi e^{-j\omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\pi)$$

بنابراین

$$X(\omega) = \left[\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\pi) (1 - e^{-j\omega}) \right]$$

از حاصل ضرب تبدیل فوریه ورودی در پاسخ فرکانسی می‌توان سری فوریه خروجی را بدست آورد.

$$\begin{aligned}
 Y(\omega) &= X(\omega)H(\omega) = \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi(1 - e^{-jk\pi}) \frac{1}{1 + j4k\pi} \delta(\omega - k\pi) \\
 a_k &= \frac{(1 - e^{-jk\pi})}{2(1 + j4k\pi)}
 \end{aligned}$$

مثال (۳-۳۸): تحقیق کنید مجموعه سیگنال‌های زیر در فاصله $[0, T = \frac{2\pi}{\omega_0}]$ ارتونرمال هستند.

$$\Phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} [\cos k\omega_0 t - \sin k\omega_0 t]$$

حل: شرط ارتونرمال بودن این است که

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \Phi_m(t)\Phi_n(t)dt &= \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \\
 \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T}} [\cos m\omega_0 t - \sin m\omega_0 t] \times [\cos n\omega_0 t - \sin n\omega_0 t] dt \\
 &= \frac{1}{T} \left[\int_0^T \cos m\omega_0 t \cos n\omega_0 t dt - \int_0^T \cos m\omega_0 t \sin n\omega_0 t dt \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^T \sin m\omega_0 t \cos n\omega_0 t dt + \int_0^T \sin m\omega_0 t \sin n\omega_0 t dt \right]
 \end{aligned}$$

حاصل انتگرال دوم و سوم به ازاء جمیع مقادیر m و n صفر است اما برای انتگرال اول و چهارم اگر $m=n$ باشد موضوع فرق می‌کند.

$$\int_0^T \cos^2 n\omega_0 t dt = \frac{T}{2}, \quad \int_0^T \sin^2 n\omega_0 t dt = \frac{T}{2}$$

نتیجتاً داریم

$$\int_0^T \Phi_m(t)\Phi_n(t)dt = \frac{1}{T} \left[\frac{T}{2} + 0 + 0 + \frac{T}{2} \right] = 1 \quad \text{اگر } m = n$$

$$= 0 \quad \text{اگر } m \neq n$$

پس مجموعه سیگنال‌های $\Phi_n(t)$ ارتونرمال هستند.

مثال (۳-۳۹): نشان دهید قسمتهای زوج و فرد یک سیگنال بر هم عمودند.

حل: شرط تعامد بصورت زیر است

$$\langle x_e(t), x_o(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t)x_o(t)dt = 0$$

و این شرط صادق است چون $x_e(t)$ یک تابع زوج و $x_o(t)$ یک تابع فرد است.

مثال (۳-۴۰): اگر ضریب سری فوریه سیگنال $x(t)$ را a_k بنامیم. مطلوبست ضرایب سری فوریه

$$\frac{dx(t)}{dt} \quad \text{و} \quad x(t-t_0)$$

حل: با توجه به تعریف a_k داریم.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

با تغییر آرگومان $x(t)$ خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} x(t - t_0) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0(t-t_0)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk\omega_0 t_0} e^{jk\omega_0 t} \end{aligned}$$

بنابراین ضرایب سری فوری $y(t)$ بصورت زیر می‌باشند.

$$b_k = a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$$

در مورد سیگنال $\frac{dx(t)}{dt}$ بسادگی با مشتق‌گیری از $x(t)$ بدست می‌آوریم.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

بنابراین ضرایب سری فوری $\frac{dx(t)}{dt}$ برابرند با $c_k = a_k jk\omega_0$.

مثال (۳-۴۱): تبدیل فوری سیگنال زیر را بیابید.

$$x(t) = \sin t + \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

حل: تبدیل فوری بصورت زیر با بسط $x(t)$ بدست می‌آید.

$$x(t) = \frac{1}{2j} [e^{jt} - e^{-jt}] + \frac{1}{2} \left[e^{j\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)t} + e^{-j\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)t} \right]$$

نتیجتاً تبدیل فوری بصورت زیر است.

$$X(\omega) = \frac{\pi}{j} [\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)] + \pi \left[e^{j\frac{\pi}{4}} \delta(\omega-2\pi) + e^{-j\frac{\pi}{4}} \delta(\omega+2\pi) \right]$$

مثال (۳-۴۲): تبدیل فوری سیگنال زیر را بیابید.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2|n|t} u(t)$$

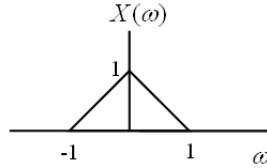
حل: تبدیل فوری بصورت زیر است.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left(1 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} e^{-2|n|t} \right) u(t) dt$$

با تغییر محل مجموع و انتگرال داریم.

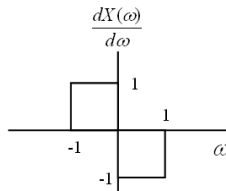
$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2nt} u(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n + j\omega} \right]$$

مثال (۳-۴۳): تبدیل معکوس فوریه طیف فرکانسی مشخص شده در شکل (۳-۴۰) را بیابید.



شکل (۳-۳۸) تبدیل فوریه مربوط به مثال ۳-۴۳

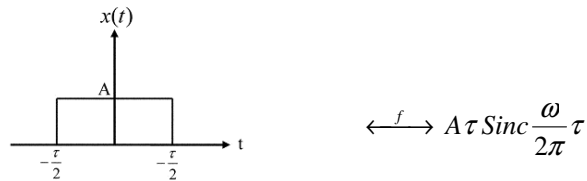
حل: با یک بار مشتق گرفتن از $X(\omega)$ شکل (۳-۳۹) حاصل می‌شود.



شکل (۳-۳۹) مشتق طیف شکل ۳-۳۸

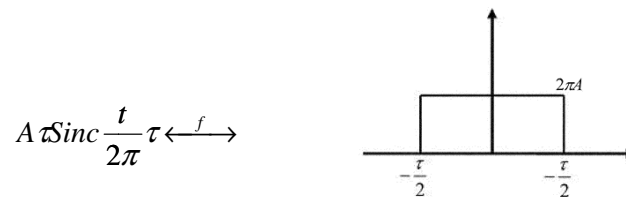
بنابراین اول تبدیل معکوس $\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ را می‌یابیم.

در حقیقت $\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ شامل مجموع دو پالس مستطیلی انتقال یافته می‌باشد که یکی به اندازه $\frac{1}{2}$ واحد سمت راست و دیگری به اندازه $\frac{1}{2}$ واحد سمت چپ انتقال پیدا کرده است. بنابراین با توجه به تبدیل فوریه پالس مستطیلی (که جهت یادآوری ذکر می‌گردد)،



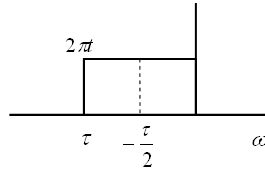
شکل ۳-۴۰ رابطه تبدیل فوریه یک پالس حوزه زمان

و با استفاده از خاصیت دوگانگی



شکل ۳-۴۱ رابطه تبدیل فوریه معکوس یک پالس حوزه فرکانس

بنابراین تبدیل فوریه معکوس طیفی بصورت زیر

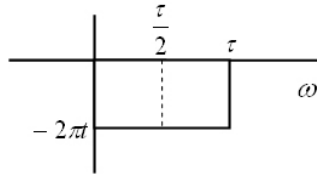


شکل (۴۲-۳) پالس انتقال یافته در حوزه فرکانس

مساوی است با

$$A \tau e^{-j\pi/2} \text{Sinc} \frac{t}{2\pi} \tau$$

و تبدیل معکوس فوری طیفی بصورت زیر



شکل (۴۳-۳) پالس انتقال یافته در حوزه فرکانس

مساوی است با

$$-A \tau e^{j\pi/2} \text{Sinc} \frac{t}{2\pi} \tau$$

بنابراین در مقایسه با شکل $\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ و با استفاده از خاصیت جمع‌پذیری تبدیل فوری و با انتخاب

$A = \frac{1}{2\pi}$ و $\tau = 1$ می‌توان تبدیل معکوس $\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ را یافت.

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} \xrightarrow{F} -\frac{1}{2\pi} e^{j/2} \text{Sinc} \frac{t}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} e^{-j/2} \text{Sinc} \frac{t}{2\pi}$$

اما با توجه به خواص تبدیل فوری می‌دانیم که $\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ در واقع تبدیل فوری $-jtx(t)$ می‌باشد.

بنابراین داریم:

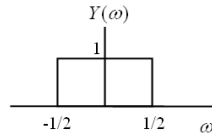
$$-jtx(t) = -\frac{1}{2\pi} (e^{j/2} - e^{-j/2}) \text{Sinc} \frac{t}{2\pi}$$

و یا

$$x(t) = \frac{1}{\pi t} \text{Sin} \frac{t}{2} \text{Sinc} \frac{t}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\text{Sinc} \frac{t}{2\pi} \right)^2$$

روش حل دیگر این مساله بدینصورت است که $X(\omega)$ را بصورت کانونلوشن دو طیف بصورت زیر

بنویسیم.



شکل (۳-۴۴) طیفی که از کانولوشن کردن با خودش شکل طیف ۳-۳۸ حاصل می شود.

در این صورت داریم.

$$Y(\omega) * Y(\omega) = X(\omega)$$

و با توجه به اینکه کانولوشن در حوزه فرکانس، تبدیل به ضرب در حوزه زمان می گردد، داریم.

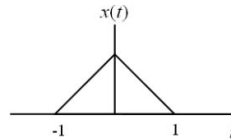
$$2\pi[y^2(t)] = x(t)$$

اما می دانیم که $y(t)$ یا تبدیل معکوس طیف پالسی شکل بدین صورت است.

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \text{Sinc} \frac{t}{2\pi}$$

بنابراین همان پاسخ قبلی بدست می آید.

مثال (۳-۴۴): تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید.

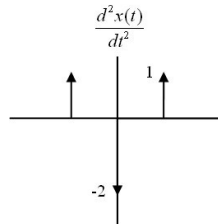


شکل (۳-۴۵) شکل سیگنال مربوط به مثال ۳-۴۴

حل: روشهای مختلفی برای حل این مساله وجود دارد که البته یکی از این روشها، روش مستقیم حل

انتگرال است که در اینجا مورد نظر ما نیست. یک روش ساده تر مشتق گیری از $x(t)$ می باشد. اگر از

$x(t)$ دوبار مشتق بگیریم داریم.



شکل (۳-۴۶) مشتق شکل موج رسم شده در شکل ۳-۴۵

تبدیل فوریه این سیگنال برابر است با

$$F\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right] = -2 + e^{j\omega} + e^{-j\omega}$$

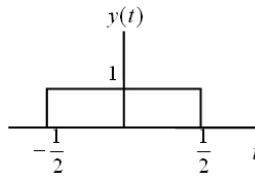
و چون تبدیل فوریه مشتق دوم $x(t)$ مساوی حاصلضرب $(j\omega)^2$ در تبدیل فوریه آن می باشد. پس

$$(j\omega)^2 X(\omega) = -2 + 2\cos \omega$$

و یا

$$X(\omega) = \frac{2(1 - \cos \omega)}{\omega^2} = \frac{4 \sin^2(\frac{\omega}{2})}{\omega^2}$$

البته این روش وقتی قابل قبول است که $x(t)$ فاقد مقدار ثابت باشد. در غیر این صورت فرآیند مشتق گیری باعث حذف مولفه ثابت سیگنال شده و در پاسخ نهائی باید بطور جداگانه تاثیر این مولفه را بصورت ضربه در مبدا وارد نمود. روش دیگر تجزیه $x(t)$ به کانولوشن دو سیگنال پالسی است.



شکل (۳-۴۷) سیگنال پالسی برای تولید سیگنال مثلثی در فرآیند کانولوشن

تبدیل فوریه $y(t)$ عبارت است از

$$Y(\omega) = \text{Sinc} \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}$$

و چون $x(t) = y(t) * y(t)$ داریم.

$$X(\omega) = Y^2(\omega)$$

بنابراین داریم.

$$X(\omega) = \frac{\sin^2 \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega^2}{4}} = \frac{4 \sin^2 \frac{\omega}{2}}{\omega^2}$$

مثال (۳-۴۵): تبدیل فوریه معکوس $X(\omega)$ را بیابید.

$$X(\omega) = \cos(4\omega + \frac{\pi}{3})$$

حل:

$$X(\omega) = \frac{1}{2} \left[e^{j(4\omega + \frac{\pi}{3})} + e^{-j(4\omega + \frac{\pi}{3})} \right]$$

و به سادگی می‌توان نوشت.

$$x(t) = \frac{1}{2} [e^{j\frac{\pi}{3}} \delta(t + 4) + e^{-j\frac{\pi}{3}} \delta(t - 4)]$$

مثال (۳-۴۶): کدامیک از عبارتهای زیر صحیح است؟

(الف) تمام توابع قدرت تبدیل فوریه دارند.

(ب) هیچکدام از توابع قدرت تبدیل فوریه ندارند.

(ج) تمام توابع انرژی تبدیل فوریه دارند.

(د) هیچکدام از توابع انرژی تبدیل فوریه ندارند.

(ه) بعضی از توابع انرژی و بعضی از توابع قدرت تبدیل فوریه دارد.

حل: قسمت (ج) صحیح است. چون تابع انرژی یکی از شرایط کافی وجود تبدیل فوریه را ارضاء می کند و آن محدود بودن انرژی سیگنال است. یعنی

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$$

بنابراین تمام توابع انرژی تبدیل فوریه دارند.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \text{ و } F(\omega) \text{ باشد مقدار } X(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 1 \\ 0 & |\omega| > 1 \end{cases} \text{ و } f(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \text{ اگر (۳-۴۷): مثال}$$

را بیابید.

حل: با گرفتن تبدیل فوریه از دو طرف رابطه $f(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$ داریم:

$$F(\omega) = (j\omega)^2 X(\omega)$$

از اینجا $F(\omega)$ به سادگی بدست می آید. طبق رابطه پارسوال داریم:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \omega^4 d\omega = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5\pi} \end{aligned}$$

مثال (۳-۴۸): سیستم متوسط متحرک^{۱۴} توسط رابطه زیر مشخص می گردد. مطلوبست $H(\omega)$ یا تبدیل فوریه پاسخ ضربه سیستم.

$$y(t) = \frac{1}{2T_0} \int_{t-T_0}^{t+T_0} x(\alpha) d\alpha$$

حل: اگر ورودی سیستم $x(t)$ را مساوی ورودی ضربه $\delta(t)$ قرار دهیم داریم:

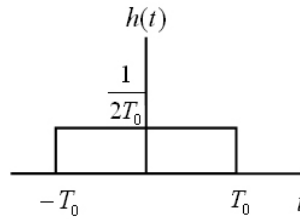
$$h(t) = y(t) = \frac{1}{2T_0} \int_{t-T_0}^{t+T_0} \delta(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2T_0} [u(t+T_0) - u(t-T_0)]$$

و پاسخ فرکانسی بسادگی بدست می آید.

$$H(\omega) = \text{Sinc} \frac{\omega T_0}{\pi}$$

پاسخ ضربه بصورت شکل (۳-۴۸) ترسیم می گردد.

1. Moving Average



شکل (۴۸-۳) پاسخ ضربه سیستم متوسط متحرک

مثال (۴۹-۳): تعیین کنید که کدامیک از عبارتهای زیر صحیح هستند.

(الف) اگر $x(t)$ فرد باشد، در آن صورت $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega = 0$ می‌باشد.

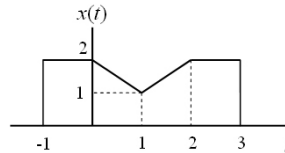
(ب) اگر $x(t)$ زوج باشد در آن صورت $\int_{-\infty}^{\infty} \omega X(\omega) d\omega = 0$ می‌باشد.

(ج) اگر $x(t)$ متناوب باشد در آن صورت $X(\omega)$ نیز متناوب است.

(د) اگر $x(t)$ حقیقی باشد، در آن صورت $X(\omega)$ نیز حقیقی است.

حل: بندهای (الف) و (ب) صحیح و بندهای (د) و (ج) غلط است.

مثال (۵۰-۳): سیگنال $x(t)$ بصورت شکل زیر را در نظر بگیرید.



شکل (۴۹-۳) سیگنال مربوط به مثال ۵۰-۳

(الف) زاویه $X(\omega)$ را بیابید.

(ب) $X(0)$ را محاسبه کنید.

(ج) $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega$ را بدست آورید.

حل: (الف) با توجه به شکل $x(t+t_0)$ یک سیگنال زوج است بنابراین تبدیل فوریه آن حقیقی و زوج

خواهد بود. اما تبدیل فوریه $x(t)$ با تبدیل فوریه $x(t+t_0)$ (با فرض اینکه $y(t) = x(t+t_0)$) با رابطه

زیر مربوط است.

$$Y(\omega) = e^{j\omega t_0} X(\omega)$$

بنابراین داریم

$$X(\omega) = Y(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

و چون $Y(\omega)$ حقیقی خالص است، زاویه $X(\omega)$ مساوی $-\omega t_0$ است.

$$\angle X(\omega) = -\omega t_0$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

(ب) چون

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt \quad \text{داریم}$$

برای محاسبه $X(0)$ کفایت سطح زیر منحنی $x(t)$ را حساب کرد، پس $X(0) = 7$.
ج: با استفاده از رابطه تبدیل معکوس فوریه داریم.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} dt$$

و با قرار دادن $t = 0$ داریم.

$$x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega$$

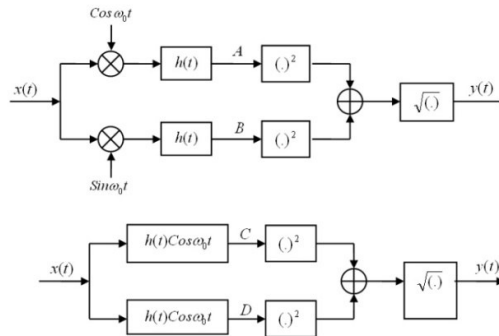
بنابراین داریم.

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega = 2\pi x(0) = 4\pi$$

مثال (۳-۵۱): ثابت کنید که خروجی دو سیستم زیر یکسان است.

شکل (۳-۵۰) سیستم مربوط به مثال ۳-۵۱

حل:



$$A = \int x(\tau) \cos \omega_0 \tau h(t - \tau) d\tau$$

$$B = \int x(\tau) \sin \omega_0 \tau h(t - \tau) d\tau$$

$$C = \int x(\tau) \cos[\omega_0(t - \tau)] h(t - \tau) d\tau$$

$$D = \int x(\tau) \sin[\omega_0(t - \tau)] h(t - \tau) d\tau$$

با بسط $\cos\omega_0(t - \tau)$ و $\sin\omega_0(t - \tau)$ در مورد C و D داریم.

$$C = \int x(\tau) h(t - \tau) [\cos \omega_0 t \cdot \cos \omega_0 \tau + \sin \omega_0 t \cdot \sin \omega_0 \tau] d\tau$$

$$= \cos \omega_0 t \int x(\tau) h(t - \tau) \cos \omega_0 \tau + \sin \omega_0 t \int x(\tau) h(t - \tau) \sin \omega_0 \tau d\tau$$

$$= A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

و بهمین ترتیب برای D داریم

$$D = A \sin \omega_0 t - B \cos \omega_0 t$$

در نتیجه داریم

$$C^2 = A^2 \cos^2 \omega_0 t + B^2 \sin^2 \omega_0 t + 2AB \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t$$

$$D^2 = A^2 \sin^2 \omega_0 t + B^2 \cos^2 \omega_0 t - 2AB \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t$$

$$C^2 + D^2 = A^2 (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t) + B^2 (\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t)$$

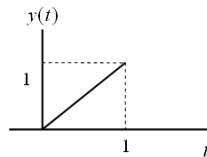
$$\Rightarrow C^2 + D^2 = A^2 + B^2$$

بنابراین خروجی هر دو سیستم یکسان است.

مثال (۳-۵۲): یک سیستم LTI، با پاسخ فرکانسی زیر را در نظر بگیرید.

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & 2 < |\omega| < 3 \\ 0 & \text{سایر فرکانسها} \end{cases}$$

آیا می‌توان یک ورودی $x(t)$ به این سیستم یافت که خروجی سیستم فوق به آن مطابق شکل زیر باشد؟ اگر هست آن را مشخص کنید و اگر نیست چرا؟



شکل (۳-۵۱) خروجی سیستم مربوط به مثال ۳-۵۲

حل: چون خروجی در حوزه زمان محدود است پس در حوزه فرکانس نامحدود خواهد بود. از طرفی، چون اصلاً خروجی سیستم $H(\omega)$ نمی‌تواند از لحاظ فرکانسی نامحدود باشد، نمی‌توان یک ورودی به سیستم فوق یافت که خروجی $y(t)$ (شکل فوق) را نتیجه دهد.

مثال (۳-۵۳): آیا سیستم مطرح شده در مثال (۳-۳۸): معکوس پذیر است؟ توضیح دهید.

حل: خیر، چون باند فرکانسی $H(\omega)$ محدود است و اگر فرض کنیم $G(\omega)$ سیستم معکوس $H(\omega)$ باشد باید رابطه زیر به ازاء همه فرکانسها صادق باشد.

$$G(\omega)H(\omega) = 1$$

ملاحظه می‌شود که در خارج از محدوده $2 < |\omega| < 3$ تساوی فوق نمی‌تواند برقرار شود چون $H(\omega)$ مساوی صفر است و اصولاً در حالت کلی می‌توان گفت تمام سیستم‌های که از لحاظ فرکانسی باند محدود هستند معکوس پذیر نمی‌باشند.

مثال (۳-۵۴): سیگنال حقیقی $x(t)$ دارای تبدیل فوریه $X(\omega)$ می‌باشد که دامنه آن از رابطه زیر تبعیت می‌کند

$$\text{Ln}|X(\omega)| = -|\omega|$$

$x(t)$ را تعیین کنید اگر

الف) $x(t)$ سیگنال زوج باشد.

ب) $x(t)$ سیگنال فرد باشد.

حل: الف) چون $x(t)$ سیگنال زوج است باید $X(\omega)$ در این حالت حقیقی خالص و زوج باشد. یعنی

$$X(\omega) = \begin{cases} e^{\omega} & \omega < 0 \\ e^{-\omega} & \omega > 0 \end{cases}$$

در نتیجه

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{1-jt} + \frac{1}{1+jt} \right] = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$$

ب) چون $x(t)$ سیگنال فرد است باید $X(\omega)$ موهومی خالص و فرد باشد.

یعنی

$$X(\omega) = \begin{cases} -je^{\omega} & \omega < 0 \\ je^{-\omega} & \omega > 0 \end{cases}$$

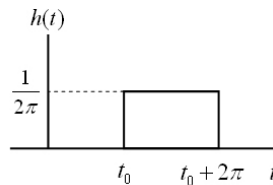
در نتیجه

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{j}{2\pi} \left[\frac{-1}{1+jt} + \frac{1}{1-jt} \right] = \frac{-t}{\pi(1+t^2)}$$

مثال (۳-۵۵): آیا می‌توان سیستمی با قدر مطلق پاسخ فرکانسی بصورت $|Sinc(\omega)|$ ساخت؟

حل: سیستمی که دارای قدر مطلق تبدیل فوریه بصورت $|Sinc(\omega)|$ است دارای پاسخ ضربه ای

بصورت زیر است.



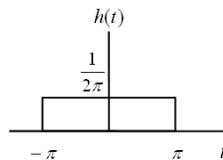
شکل (۳-۵۲) پاسخ ضربه سیستمی با قدر مطلق پاسخ فرکانسی بصورت $|Sinc(\omega)|$

که در آن t_0 می‌تواند مثبت یا منفی باشد. لازمه عملی بودن ساخت چنین سیستمی، علی بودن آن

است. بنابراین لازم است $t_0 > 0$ باشد. چنانچه سیستم را بصورت زیر تعریف کنیم.

$$H(\omega) = Sinc(\omega)$$

در آن صورت پاسخ ضربه سیستم بصورت زیر خواهد بود.



شکل (۳-۵۳) پاسخ ضربه سیستمی با پاسخ فرکانسی بصورت $Sinc(\omega)$

ملاحظه می‌شود که سیستم غیر علی است. برای علی شدن سیستم فوق، یک تاخیر باندازه π یا بیشتر باید به آن افزود. بنابراین سیستم زیر پاسخ مساله ما خواهد بود.

$$H(\omega) = Sinc \omega e^{-j\omega l}, \quad l \geq \pi$$

۳-۱۳ خلاصه

در این فصل تبدیل فوریه بعنوان ابزاری کارآمد در تجزیه و تحلیل سیستم LTI معرفی گردید و برخی خواص تبدیل فوریه و برخی تعاریف رایج در حوزه فرکانس ارائه شد. خاصیت نمونه‌برداری دارای کاربردهای فراوانی است که با تفصیل در فصل ۵ در مورد آن توضیح داده خواهد شد.

انتظار می‌رود که دانشجو در پایان این فصل بتواند از تبدیل فوریه در جایی که عملیات کانولوشن برای یافتن پاسخ سیستم مشکل است، استفاده شایانی ببرد. همچنین دانشجو باید بتواند در عملیات یافتن پاسخ برای سیستم‌های پیچیده، با ترکیب برخی خواص با یکدیگر به آسانی انتقال عملیات از حوزه زمان به فرکانس یا بالعکس را انجام دهد.

۳-۱۴ مسائل

۳-۱ سری فوریه سیگنال‌های زیر را بیابید.

$$\text{الف) } \cos\left[\frac{\pi(t+1)}{4}\right]$$

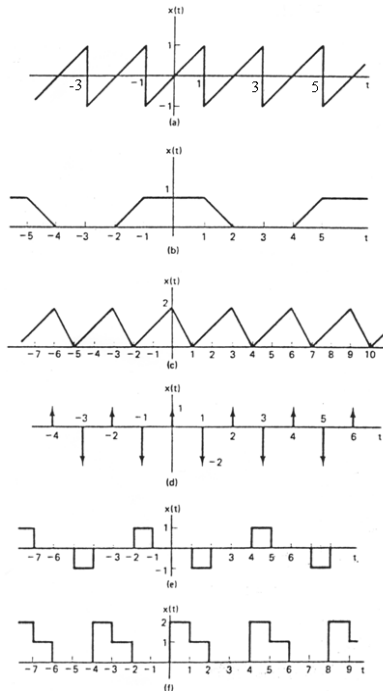
$$\text{ب) } x(t) = \begin{cases} (1-t) + \sin 2\pi t & 0 < t < 1 \\ 1 + \sin 2\pi t & 1 < t < 2 \end{cases}$$

متناوب با دوره تناوب ۲ می‌باشد.

$$\text{ج) } x(t) = \begin{cases} \sin \pi t & 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & 2 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

متناوب با دوره تناوب ۴ می‌باشد.

۳-۲ سری فوریه سیگنال‌های زیر را بیابید.



شکل ۳-۵۴ سیگنالهای مربوط به مسئله ۳-۲

۳-۳ سیستمی که توسط معادله دیفرانسیل زیر مشخص می شود را در نظر بگیرید.

$$y(t) = t^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + t \frac{dx(t)}{dt}$$

(الف) آیا این سیستم LTI است؟

(ب) نشان دهید که توابعی بصورت $\Phi_k(t) = t^k$ توابع ویژه سیستم فوق هستند.

(ج) پاسخ سیستم فوق به ورودی زیر را بیابید.

$$x(t) = 10t^{-10} + 3t + \frac{1}{2}t^4 + \pi$$

۳-۴ ثابت کنید که خروجی هر یک از سه سیستم زیر به ورودی $x(t) = \cos t$ با پاسخ دو سیستم دیگر به آن برابر است.

1) $h_1(t) = u(t)$

2) $h_2(t) = -2\delta(t) + 5e^{-2t}u(t)$

3) $h_3(t) = 2te^{-t}u(t)$

۳-۵ تابع همبستگی دو تابع $x(t)$ و $y(t)$ بصورت زیر تعریف می شود.

$$\Phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)y(\tau)d\tau$$

مطلوبست:

الف) تبدیل فوریه تابع همبستگی بر حسب تبدیلهای فوریه $X(\omega)$ و $Y(\omega)$.ب) اگر $x(t)$ و $y(t)$ به ترتیب ورودی و خروجی یک سیستم LTI باشند، با فرض اینکه

$$x(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ 0 & t \leq 0, t \geq 1 \end{cases}$$

$$h(t) = e^{-\alpha t}, \alpha > 0$$

مطلوبست محاسبه $\Phi_{yy}(\omega), \Phi_{xy}(\omega), \Phi_{xt}(\omega)$.۳-۶ خروجی سیستمی با پاسخ ضربه $h(t) = \frac{\sin 2\pi t}{\pi}$ به ورودی‌های زیر را بیابید.

$$1) x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t + \frac{10k}{3})$$

$$2) x_2(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

$$3) x_3(t) = \cos(\omega\pi t)$$

۳-۷ مطلوبست خروجی سیستم‌های زیر اگر $x(t) = \sin(2\omega_c t) + \cos(\omega_c \frac{t}{2})$

$$h_1(t) = \frac{d}{dt} \frac{\sin \omega_c t}{2\pi} \quad h_2(t) = \frac{\sin 3\omega_c t}{\pi}$$

$$h_3(t) = e^{-j2\pi\omega_c t} \quad h_4(t) = u(t)$$

کدامیک از سیستم‌های فوق پایدار است؟

۳-۸ با توجه به تعریف تبدیل هیلبرت

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

تبدیل هیلبرت سیگنال‌های $x_1(t) = \cos t$, $x_2(t) = e^{-t} u(t)$ را بدست آورید.

۳-۹ پاسخ فرکانسی سیستمی که خروجی آن تبدیل هیلبرت ورودی آن است را بدست آورید.

۳-۱۰ تبدیل فوریه سیگنال‌های زیر را بیابید.

الف) $[e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t] u(t)$, $\alpha > 0$ ب) $e^{2+t} u(-t+1)$

$$x(t) = \begin{cases} 1 + \cos \pi t & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases} \quad \text{ج}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|t-2n|} \quad \text{د}$$

هـ) $\delta(t) + 2\delta(3-2t)$

و) $e^{-3t}[u(t+2) - u(t-3)]$

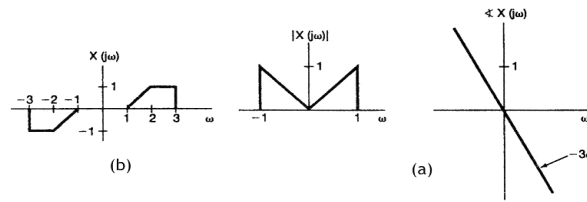
ز) $e^{-3|t|} \sin 4t$

ح) $[te^{-3t} \sin 4t]u(t)$

۱۱-۳ تبدیل معکوس فوریه را برای $X(\omega)$ های زیر بیابید.

الف) $X(\omega) = \frac{2 \sin[3(\omega - 2\pi)]}{\omega - 2\pi}$

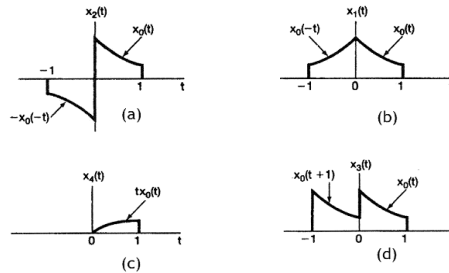
ب) و ج) مطابق شکل.



شکل ۵۵-۳ مربوط به مسئله ۱۰-۳

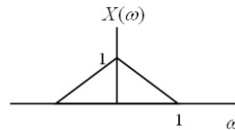
۱۲-۳ اگر $x_0(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ باشد مطلوبست تبدیل فوریه سیگنال های رسم شده در شکل

زیر.



شکل ۵۶-۳ مربوط به مسئله ۱۱-۳

۱۳-۳ تبدیل فوریه سیگنال $y(t) = x(t)p(t)$ را بیابید، اگر $X(\omega)$ بصورت شکل زیر و $p(t)$ توسط رابطه های زیر داده شده باشند.



شکل ۵۷-۳ مربوط به مسئله ۱۲-۳

الف) $p(t) = \cos 2t - \cos t$

$$p(t) = \sum_n \delta(t - n\pi) \quad (\text{ب})$$

$$p(t) = \sum_n \delta(t - 2n) \quad (\text{ج})$$

$$p(t) = \sum_n \delta(t - 4n\pi) \quad (\text{د})$$

$$p(t) = \sin t \sin 2t \quad (\text{ه})$$

$$p(t) = \cos t \quad (\text{و})$$

۱۴-۳ سیستمی با پاسخ فرکانسی زیر مفروض است.

$$H(\omega) = \frac{a - j\omega}{a + j\omega}$$

اگر ورودی سیستم $x(t) = e^{-bt}u(t)$ و $b > 0$ باشد مطلوبست خروجی سیستم به ازای

$$\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases} \quad (\text{ج})$$

۱۵-۳ با فرض $a=1$ ، خروجی سیستم مساله (۱۳-۳) را به ورودی زیر بیابید.

$$x(t) = \cos \frac{t}{\sqrt{3}} + \cos t + \cos \sqrt{3}t$$

۱۶-۳ معکوس سیستم زیر را بیابید.

$$h(t) = e^{-at}u(t) \quad (\forall a > 0)$$

۱۷-۳ رابطه ورودی و خروجی یک سیستم LTI علی بدین صورت است.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)z(t-\tau)d\tau - x(t)$$

که در آن $z(t) = e^{-t}u(t) + 3\delta(t)$ می‌باشد.

(الف) پاسخ فرکانسی سیستم را بیابید.

(ب) پاسخ دامنه و فاز را توسط رسم بود نمایش دهید.

(ج) پاسخ ضربه سیستم را بیابید.

۱۸-۳ خروجی یک سیستم LTI علی توسط رابطه زیر به ورودی مربوط است.

$$\frac{dx(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

(الف) پاسخ فرکانسی سیستم را بدست آورده و رسم نمائید.

ب) اگر تبدیل فوریه ورودی بصورت زیر باشد خروجی را بیابید.

$$X_1(\omega) = \frac{1+j\omega}{2+j\omega} \quad X_2(\omega) = \frac{2+j\omega}{1+j\omega} \quad X_3(\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)}$$

۱۹-۳ رابطه ورودی و خروجی یک سیستم LTI علی توسط رابطه زیر داده شده است.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2x(t)$$

الف) پاسخ فرکانسی را بدست آورده و رسم نمایید.

ب) خروجی سیستم را برای ورودی $x(t) = te^{-2t}$ بیابید.

۲۰-۳ تبدیل معکوس فوریه $X(\omega)$ را بیابید اگر

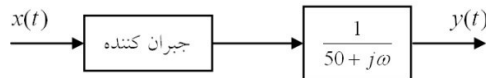
$$X(\omega) = 1 + \frac{j\omega}{10} \quad \text{الف)}$$

$$X(\omega) = \frac{1 + \frac{j\omega}{10}}{1 + \omega} \quad \text{ب)}$$

$$X(\omega) = \frac{1 + j3\omega}{(1 + j\omega)(1 + j2\omega)} \quad \text{ج)}$$

۲۱-۳ آیا می توان سیگنالی را یافت که تبدیل فوریه آن $X(\omega) = \frac{1}{1-j\omega}$ باشد؟ توضیح دهید.

۲۲-۳ سیستم رسم شده در زیر را در نظر بگیرید.



شکل ۳-۵۸ سیستم مربوط به مسئله ۲۱-۳

فرض کنید خواسته باشیم پاسخ فرکانسی کل سیستم دارای شرایط زیر باشد:

الف) لگاریتم دامنه $H(\omega)$ دارای شیب $-40dB/dec$ برای $\omega > 1000$ باشد.

ب) برای $0 < \omega < 1000$ لگاریتم دامنه بین $\pm 10dB$ نوسان کند.

مطلوبست جبران کننده ای که شرایط فوق را برای $H(\omega)$ برآورده کند.

۲۳-۳ پاسخ ضربه سیستم زیر را بیابید.

$$H(\omega) = \frac{5(j\omega) + 7}{(4 + j\omega)[(j\omega)^2 + j\omega + 1]}$$

۲۴-۳ پاسخ ضربه سیستم زیر را بیابید.

$$H(\omega) = \frac{1}{(j\omega + 2)^3}$$

۳-۲۵ دو سیگنال دلخواه $x_1(t), x_2(t)$ در فضای بردارها را با انرژی یکسان در نظر بگیرید. می‌خواهیم سیگنال‌های فوق را بگونه‌ای انتخاب کنیم که فاصله آنها در فضای سیگنال‌ها بیشینه باشد. مطلوبست رابطه میان دو سیگنال (دو بردار) فوق.
 راهنمایی: فاصله دو سیگنال در فضای سیگنال‌ها مشابه فاصله دو بردار در فضای بردارها است و طول هر بردار مشابه انرژی سیگنال است.
 ۳-۲۶ تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید.

$$x(t) = 5(0.8)^{|t|}$$

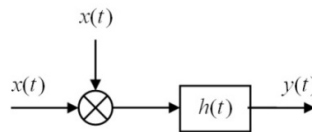
۳-۲۷ کدامیک از سیگنال‌های زیر می‌توانند توابع ویژه سیستم‌های LTI باشند؟

الف) $x(t) = e^{j\omega_0 t}$

ب) $x(t) = e^{j\omega_0 t} + e^{j\omega_1 t}$

ج) $x(t) = e^{j(\omega_0 + \omega_1)t}$

۳-۲۸ بازای ورودی $x(t) = A\tau \text{Sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\tau\right)$ خروجی سیستم زیر را بیابید.



شکل ۳-۵۹ سیستم مربوط به مسئله ۳-۲۷

۳-۲۹ تبدیل فوریه هر یک از سیگنال‌های زیر را بیابید.

الف) $x(t) = \cos \omega_0 t u(t)$

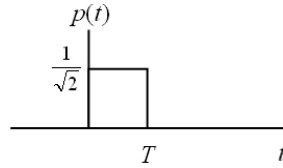
ب) $x(t) = \cos \omega_0 t [u(t) - u(t - T_0)]$, $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

۳-۳۰ سیستمی که رابطه ورودی و خروجی آن توسط رابطه $y(t) = \frac{1}{2T_0} \int_{t-T_0}^{t+T_0} x(\alpha) d\alpha$ مشخص می‌شود، مفروض است. ثابت کنید خروجی سیستم به ورودی زیر مقداری مستقل از زمان (DC) است.

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - \omega_0) \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

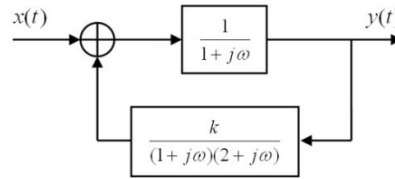
۳-۳۱ ثابت کنید مجموعه سیگنال‌های بصورت زیر یک مجموعه متعامد یکه هستند.

$\Phi_k(t) = p(t - kT)$ و $p(t)$ مطابق شکل زیر است.



شکل ۶۰-۳ مربوط به مسئله ۳۰-۳

۳۲-۳ شرط اینکه سیستم پس خور(فیدبک) زیر دارای پاسخ فرکانسی محدود باشد (تبدیل فوریه پاسخ ضربه موجود باشد) را بیابید.



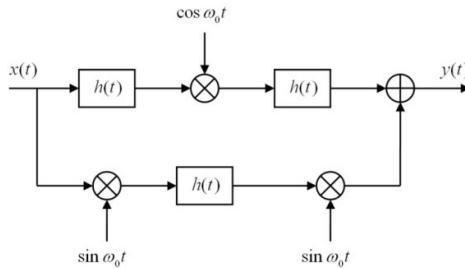
شکل ۶۱-۳ یک سیستم پس خور(فیدبک) مربوط به مسئله ۳۱-۳

۳۳-۳ $|H(\omega)|^2 = \frac{6}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}$ را بیابید اگر علی باشد و $h(t)$ را بیابید اگر علی باشد. آیا پاسخ این مسئله یکتاست.

۳۴-۳ خروجی سیستم زیر را بیابید.

$$x(t) = u(t) - u(t - T)$$

$$h(t) = k_1\delta(t) + k_2\delta(t - T)$$



شکل ۶۲-۳ سیستم مسئله ۳۳-۳

۳۵-۳ با استفاده از تبدیل فوریه ثابت کنید سیستم زیر معکوس پذیر نیست.

$$h(t) = u(t + T_0) - u(t - T_0)$$

۳۶-۳ تبدیل فوریه پالس گاوسی کسینوسی بصورت زیر را بیابید.

$$x(t) = Ae^{-\pi t^2} \cos \omega_0 t \quad (\omega_0 \text{ معلوم})$$

۳۷-۳ مطلوبست محاسبه انتگرال زیر با استفاده از خواص تبدیل فوریه.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sinc}^2 t dt$$

فصل چهارم

تبدیل فوریه گسسته زمان

مقدمه

روش‌های پیوسته زمان که در فصل ۳ مورد بررسی قرار گرفتند، دارای اهمیت زیادی هستند. در حقیقت این ابزارها به همراه نوع گسسته زمان آن تشکیل یک زوج ابزار قوی و کارآمد را در تجزیه و تحلیل سیستم‌های LTI می‌دهند. اگرچه وجوه تشابه زیادی میان تبدیل فوری پیوسته زمان و گسسته زمان وجود دارد، اما هنوز تفاوت‌های عمده‌ای میان این دو نوع وجود دارد که ناشی از ماهیت متفاوت آنهاست.

در این فصل بر آن نیستیم که از لحاظ تاریخی، منشأ تبدیل فوری پیوسته زمان را مورد بررسی قرار دهیم. اما واضح است که تبدیل فوری اساساً برای سیگنال‌های پیوسته زمان ارائه شده است و بعدها با توجه به کاربرد وسیع دنباله‌های گسسته زمان، نوع دیگری از این تبدیل که مناسب برای استفاده در حالت گسسته زمان است، ارائه شده است. لذا منطقی است که بتوان با ایجاد برخی تناظرها و با استفاده از تعاریف و خواص حالت پیوسته زمان، تعاریف و خواص متناظر برای حالت گسسته زمان را بدست آورد.

از لحاظ مفهوم، شناخت و درک برخی خواص در حوزه پیوسته زمان بسیار ساده‌تر و بدیهی‌تر از نوع گسسته زمان آن است. به عنوان مثال مفهوم پایین‌گذر یا بالاگذر بودن طیف یک سیگنال در حالت پیوسته زمان کاملاً بدیهی است. به عبارت دیگر اگر طیف سیگنال بیشتر در حوالی فرکانس‌های پایین و صفر متمرکز باشد، آن سیگنال پایین‌گذر است و متناسب با میزان دور بودن محل طیف از فرکانس‌های حوالی صفر، سیگنال میان‌گذر و یا بالاگذر می‌شود. اما در مورد سیگنال‌های گسسته زمان، طیف حوزه فرکانس متناوب است و در فاصله فرکانسی 2π مرتباً تکرار می‌شود، لذا تعریف پایین‌گذر یا بالاگذر بودن باید دقیق‌تر اعمال گردد. در این مورد اگر طیف سیگنال حول مضارب زوج $(2k\pi), \pi$ متمرکز باشد، سیگنال پایین‌گذر است و اگر طیف سیگنال حول مضارب فرد $[(2k+1)\pi], \pi$ متمرکز باشد، سیگنال بالاگذر است.

در این فصل پس از بررسی مختصری بر روی دنباله‌های متفاوت و استخراج ضرایب سری فوری، توجه خاص خود را به تبدیل فوری و بررسی خواص آن متمرکز می‌کنیم. در این رهگذر ضرایب DFT یک دنباله را تعریف کرده و از آن در محاسبه کانولوشن از کامپیوتر کمک می‌گیریم. با توجه به اهمیت تفاوت‌ها و شباهت‌های روش‌های پیوسته و گسسته زمان در تمام مراحل فوق و به مناسبت، از این تفاوت‌ها و شباهت‌ها صحبت به میان خواهیم آورد و قسمت خاصی را به آن اختصاص خواهیم داد و در انتهای فصل به بررسی روش‌های ساخت سیستم‌های مختلف گسسته زمان LTI به کمک بلوک‌های اساسی می‌پردازیم.



۴-۱ توابع ویژه سیستم‌های LTI گسسته‌زمان

مراحل نمایش فوریه در حالت گسسته‌زمان (یا به عبارت دیگر مراحل نمایش یک دنباله (تابع) دلخواه به صورت ترکیب خطی توابع نمایی مختلط)، با آنچه در حالت پیوسته‌زمان انجام دادیم، یکسان است. نشان می‌دهیم که دنباله‌های مختلط نمایی، توابع ویژه برای سیستم‌های LTI گسسته‌زمان هستند. به عنوان مثال فرض کنید که یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ دارای ورودی زیر باشد.

$$x[n] = z^n \quad (1-4)$$

که در آن z یک عدد مختلط است. خروجی سیستم را می‌توان از جمع کانولوشن بدست آورد.

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^n h[k]z^{-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k} \end{aligned} \quad (2-4)$$

در این جا دیده می‌شود که اگر ورودی $x[n]$ یک تابع نمایی مختلط مثل تابع (۱-۴) باشد، خروجی نیز شامل همان تابع نمایی مختلط خواهد بود که در یک ضریب ثابت (که تابع مقدار z است) ضرب شده است.

$$y[n] = H(z)z^n \quad (3-4)$$

که در آن

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k} \quad (4-4)$$

در اینجا $H(z)$ مقدار ویژه مربوط به تابع ویژه z^n خواهد بود.

در حالت کلی‌تر می‌بینیم که معادله (۳-۴) با توجه به خاصیت جمع اثر که در مورد سیستم‌های LTI صادق است، روشن‌گر این مطلب است که نمایش سیگنال‌ها برحسب توابع نمایی مختلط می‌تواند ما را به عبارت‌های مناسبی برای پاسخ یک سیستم LTI راهنمایی کند. بدین صورت که اگر ورودی یک سیستم LTI گسسته به صورت ترکیب خطی از توابع نمایی مختلط نمایش داده شود، یعنی اگر $x[n]$ به صورت زیر نوشته شود:

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \quad (5-4)$$

در آن صورت خروجی با توجه به خاصیت جمع آثار و رابطه (۳-۴) به صورت زیر بیان می‌گردد

$$y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n \quad (6-4)$$

به عبارت دیگر خروجی را می‌توان به صورت ترکیب خطی از همان دنباله‌های مختلط نمایش داد که در تولید $x[n]$ به صورت مجموع (۵-۴) شرکت داشته‌اند، با این تفاوت که علاوه بر ضرایب a_k که

¹ Eigen Function

مربوط به بسط ورودی بر حسب توابع نمایی هستند، باید ضریب $H(z_k)$ را نیز به عنوان مقدار ویژه تابع z_k^n اضافه کرد.

مشابه روش فصل سوم ما بحث خود را به توابعی به صورت $e^{j\Omega n}$ (به عبارت دیگر z^n با $|z|=1$) محدود می‌کنیم. در فصل هفتم حالت کلی را در نظر خواهیم گرفت.

در قسمت‌های بعدی ابتدا نمایش فوریه سیگنال‌های تناوبی را در نظر خواهیم گرفت و در قسمت (۴-۳) تبدیل فوریه گسسته زمان را به عنوان تعمیمی از سری فوریه، دقیقاً مشابه آنچه در بخش (۳-۴) انجام دادیم، مطرح خواهیم کرد. روش کار دقیقاً مشابه روش پیوسته زمانی است که در فصل سوم بحث شده است. همانگونه که قبلاً اشاره شد میان حالت پیوسته و گسسته زمانی شاهد اختلافات و تشابهات مهمی خواهیم بود که به تفصیل به بررسی هر یک خواهیم پرداخت.

۴-۲ نمایش دنباله‌های متناوب

۴-۲-۱ ترکیب خطی نمایی‌های مختلط

همانگونه که در فصل ۲ توضیح داده شد، یک دنباله گسسته زمان $x[n]$ تناوبی است اگر بازه عدد ثابت و مثبت N داشته باشیم.

$$x[n] = x[n + N] \quad (۷-۴)$$

به عنوان مثال همان‌گونه که در قسمت (۲-۴-۳) دیدیم، تابع نمایی مختلط به صورت $e^{j\frac{2\pi}{N}n}$ تناوبی با دوره تناوب N می‌باشد. بعلاوه مجموعه دنباله‌های نمایی مختلط که با دوره N تناوبی هستند، به صورت زیر قابل نمایش هستند.

$$\phi_k[n] = e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (۸-۴)$$

فرکانس زاویه‌ای همه این دنباله‌ها ضربی از فرکانس زاویه‌ای اصلی $\frac{2\pi}{N}$ است. بنابراین همه این سیگنال‌ها را می‌توان به عنوان هم‌آهنگ‌های^۲ مختلف این فرکانس زاویه‌ای تلقی کرد.

اختلاف مهم میان مجموعه سیگنال‌های هم‌آهنگ در حالت پیوسته و گسسته زمان این است که تمامی سیگنال‌های موجود در مجموعه سیگنال‌ها، در حالت پیوسته زمان که در معادله (۳-۱۲) داده شده‌اند، مجزا و دارای فرکانس مخصوص به خود هستند، ولی در مجموعه دنباله‌های گسسته زمان (۴-۷) تنها N دنباله مجزا با فرکانس مخصوص به خود دیده می‌شود. دلیل این امر نیز واضح است چون

$$e^{j(\Omega+2\pi r)n} = e^{j\Omega n} e^{j2\pi rn} = e^{j\Omega n} \quad (۹-۴)$$

نتیجه مستقیم این مبحث این است که $\phi_0[n] = \phi_N[n]$ ، $\phi_1[n] = \phi_{N+1}[n]$ و در حالت کلی تر

$$\phi_k[n] = \phi_{k+rN}[n] \quad (۱۰-۴)$$

² Harmonics

یعنی هنگامی که k با ضریب صحیحی از N تغییر کند، دوباره همان دنباله قبلی تولید خواهد شد. اکنون می‌خواهیم یک دنباله تناوبی دلخواه را به صورت مجموعی از دنباله‌های $\phi_k[n]$ بنویسیم.

$$x[n] = \sum_k a_k \phi_k[n] = \sum_k a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \quad (۱۱-۴)$$

از آنجائیکه $\phi_k[n]$ فقط به ازاء N مقدار متوالی از k تولید دنباله‌های مجزا می‌کند، مجموع (۱۱-۴) فقط احتیاج به N عبارت متوالی دارد، یعنی

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \phi_k[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk \left(\frac{2\pi}{N}\right) n} \quad (۱۲-۴)$$

به عنوان مثال می‌توان k را در محدوده $k=0,1,2,\dots,N$ و یا $k=3,4,\dots,N+2$ متغیر فرض کرد. توجه شود که در اینجا فرض شده است که بتوان $x[n]$ را به صورت مجموع (۱۲-۴) بسط داد، بنابراین در مورد شرایط وجود سری فوریه یا به عبارت دیگر شرط همگرایی سری (۱۲-۴) به $x[n]$ بحث نخواهیم کرد. در جای خود شرایط وجود سری فوریه گسسته‌زمان را با استفاده از شرایط وجود سری فوریه پیوسته‌زمان ارائه می‌کنیم. همچنین لازم به ذکر است که سری فوریه پیوسته‌زمان در حالت کلی یک سری نامتناهی است (با تعداد جملات نامتناهی)، در حالیکه سری فوریه گسسته‌زمان یک سری متناهی است. بنابراین تحقیق شرط همگرایی برای سری فوریه گسسته‌زمان^۳ بسیار ساده‌تر است.

معادله (۱۲-۴) را به عنوان سری فوریه گسسته‌زمانی و ضرایب a_k را به عنوان ضرایب سری فوریه می‌شناسند. همانگونه که اشاره شد در حالت گسسته‌زمانی این مجموع محدود است که نتیجه مستقیم رابطه (۱۰-۴) است.

۴-۲-۲ تعیین سری فوریه دنباله‌های متناوب

اکنون فرض کنید که یک دنباله به نام $x[n]$ با دوره تناوب N داشته باشیم. می‌خواهیم ببینیم آیا می‌توان $x[n]$ را به صورت مجموع (۱۲-۴) نوشت. در صورت مثبت بودن جواب، می‌خواهیم a_k را تعیین کنیم. این سوال را می‌توان به صورت پیدا کردن جواب برای یک مجموعه معادلات خطی مطرح کرد.

اگر معادله (۱۲-۴) را برای مقادیر متوالی n محاسبه کنیم، داریم.

³ Discrete Fourier Series

$$\begin{aligned}
 x[0] &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \\
 x[1] &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}k} \\
 &\vdots \\
 x[N-1] &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j2\pi k(N-1)/N}
 \end{aligned} \tag{۱۳-۴}$$

از آنجا که هر دو طرف معادله با دوره تناوب N ، متناوب هستند، رابطه $x[N]$ مشابه $x[0]$ خواهد شد. بنابراین معادله (۱۳-۴) نمایش دهنده یک مجموعه از N معادله و N مجهول a_k می باشد. می توان نشان داد که این مجموعه N معادله ای به صورت خطی مستقل هستند و بنابراین جهت بدست آوردن a_k بر حسب مقادیر معلوم $x[n]$ قابل حل می باشند. اما رابطه ساده تری جهت تعیین a_k نیز وجود دارد. برای بدست آوردن این رابطه استفاده از معادله زیر مفید است.

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} = \begin{cases} N & k = 0, \mp N, \dots \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \tag{۱۴-۴}$$

رابطه فوق مشابه حالت پیوسته زمان زیر است.

$$\int_0^T e^{jk(\frac{2\pi}{T})t} dt = \begin{cases} T & k = 0 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \tag{۱۵-۴}$$

برای بدست آوردن رابطه (۱۴-۴) از مجموع زیر استفاده کردیم.

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & \alpha = 1 \\ \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \end{cases} \tag{۱۶-۴}$$

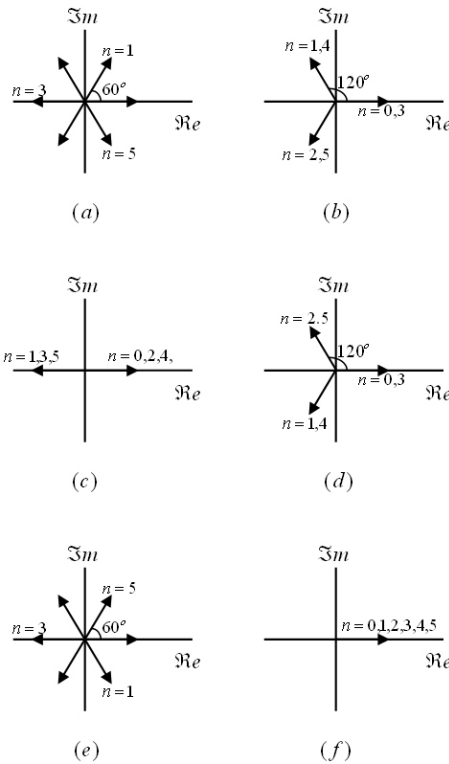
همچنین می دانیم تابع $e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ فقط گاهی که k ضربی از N باشد مساوی واحد است. اگر α را مساوی $e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ بگیریم، داریم.

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} = \begin{cases} N & k = 0, \mp N, \mp 2N, \dots \\ \frac{1-e^{jk\frac{2\pi}{N}N}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \tag{۱۷-۴}$$

از آنجایی که نمایی های مختلط در مجموع (۱۴-۴) متناوب با دوره تناوب N می باشند، تساوی مطرح شده در معادله (۱۴-۴) برای هر مجموعی که در فاصله N گرفته شود، صادق است.

$$\sum_{n=r}^{r+N-1} e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} = \begin{cases} N & k = 0, \mp N, \dots \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \tag{۱۸-۴}$$

نمایش تصویری معادله (۱۸-۴) در شکل (۱-۴) برای $N = 6$ داده شده است (به ازاء k های مختلف) در این شکل اعداد مختلط به صورت بردارهایی در صفحه مختلط داده شده‌اند که طول همه آنها واحد است و زاویه آنها $\frac{2\pi}{6}n$ می‌باشد که $n = 0, 1, 2, \dots, 5$.



شکل (۱-۴): دنباله‌های نمایی مختلط $\phi_k[n] = e^{jk(\frac{2\pi}{6})n}$ در یک دوره تناوب بازااء مقادیر مختلف k .

$$k = 6(f) \quad k = 5(e) \quad k = 4(d) \quad k = 3(c) \quad k = 2(b) \quad k = 1(a)$$

از حالت تقارن هر یک از این شکل‌ها می‌توان دید که مجموع $e^{jk(\frac{2\pi}{6})n}$ در یک دوره تناوب صفر است به جز هنگامی که $k = 0, 6, 12$ است که در حالت اخیر همه بردارها روی هم می‌افتند و به طور عددی با هم جمع می‌شوند.

اکنون سری فوریه معادله (۱۲-۴) را در نظر گرفته، هر دو طرف را در $e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n}$ ضرب کرده و در یک دوره تناوب N جمع می‌زنیم. طبق روابط (۱۴-۴) تا (۱۸-۴) نتیجه حاصل Na_k خواهد بود چون

$$\sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n} = \sum_{n=\langle N \rangle} \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n} \quad (۱۹-۴)$$

با تعویض مرتبه جمع در سمت راست داریم.

$$\sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(\frac{2\pi}{N})n(k-r)} \quad (20-4)$$

باتوجه به معادله (۱۸-۴) مجموع دوم در طرف راست مساوی صفر است مگر در مواقعی که $k-r$ مساوی صفر یا مضرب صحیحی از N باشد. بنابراین اگر r در محدوده تغییرات k وجود داشته باشد، در آنصورت معادله (۴-۲۰) مساوی N است اگر $k=r$ و مساوی صفر است اگر $k \neq r$. پس سمت راست مساوی Na_r می شود و به این ترتیب a_r بدست می آید.

$$a_r = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n} \quad (21-4)$$

بنابراین ما زوج سری فوریه (۲۲-۴) و (۲۳-۴) را به ترتیب به عنوان معادلات ترکیب و تحلیل خواهیم داشت.

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad (22-4)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad (23-4)$$

ضرایب سری فوریه a_k را اغلب به عنوان ضرایب طیفی $x[n]$ می نامند. این ضرایب، $x[n]$ را به صورت N دنباله هم‌هنگ نمایش می دهند. با توجه به معادله (۱۲-۴) می بینیم که اگر k در محدوده 0 تا $N-1$ تغییر کند، می توان $x[n]$ را به صورت زیر نوشت.

$$x[n] = a_0 \phi_0[n] + a_1 \phi_1[n] + \dots + a_{N-1} \phi_{N-1}[n] \quad (24-4)$$

و اگر k در محدوده 1 تا N تغییر کند، می توان $x[n]$ را به صورت زیر نشان داد.

$$x[n] = a_1 \phi_1[n] + a_2 \phi_2[n] + \dots + a_N \phi_N[n]$$

اما چون $\Phi_0[N] = \Phi_N[N]$ ، $a_0 = a_N$ می باشد پس باید $a_0 = a_N$ شود. بنابراین

$$a_k = a_{k+N} \quad (25-4)$$

بنابراین ضرایب سری فوریه نیز متناوب بوده و دوره تناوب آنها نیز همان دوره تناوب دنباله مربوطه می باشد.

مثال (۱-۴): سری فوریه دنباله $x[n] = \sin \Omega_0 n$ را بیابید اگر

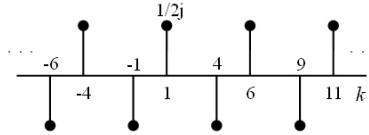
حل: این دنباله در صورتی متناوب است که $\Omega_0 = 2\pi \frac{m}{N}$ باشد (N, m هر دو عدد صحیح هستند).

پس

$$x[n] = \frac{1}{j2} e^{j(\frac{2\pi}{N}m)n} - \frac{1}{j2} e^{-j(\frac{2\pi}{N}m)n}$$

از مقایسه با رابطه (۲۲-۴) داریم.

$$a_m = \frac{1}{j2}, \quad a_{-m} = -\frac{1}{j2}$$

شکل (۴-۲): نمایش ضرایب سری فوریه $x[n]$ در حالت $N=5, m=1$.

و بقیه ضرایب در فاصله جمع بندی صفر هستند. همانطور که گفتیم این ضرایب با دوره تناوب N

تکرار می‌شوند. مثلاً اگر $m=1, N=5$ باشند: $a_1 = a_6, a_{-1} = a_4$

اگر $N=5, m=3$ باشد $x[n]$ را به صورت زیر خواهیم داشت.

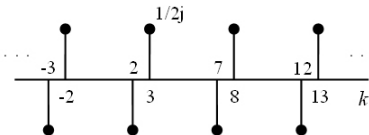
$$x[n] = \frac{1}{j2} e^{j(\frac{2\pi}{5})3n} - \frac{1}{j2} e^{-j(\frac{2\pi}{5})3n}$$

در نتیجه داریم

$$a_3 = \frac{1}{j2}, \quad a_{-3} = -\frac{1}{j2}$$

و با استفاده از خاصیت تناوبی داریم.

$$a_{-3+5} = a_2 = -\frac{1}{j2}, \quad a_{3-5} = a_{-2} = \frac{1}{j2}$$

شکل (۴-۳): نمایش ضرایب سری فوریه $x[n]$ در حالتی که $m=1, N=5$ باشد.

مثال (۴-۲): سری فوریه دنباله زیر را بیابید.

$$x[n] = 1 + \text{Sin}\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + 3\text{Cos}\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + \text{Cos}\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right)$$

حل: سیگنال فوق تناوبی با دوره تناوب N است. بابت $x[n]$ داریم.

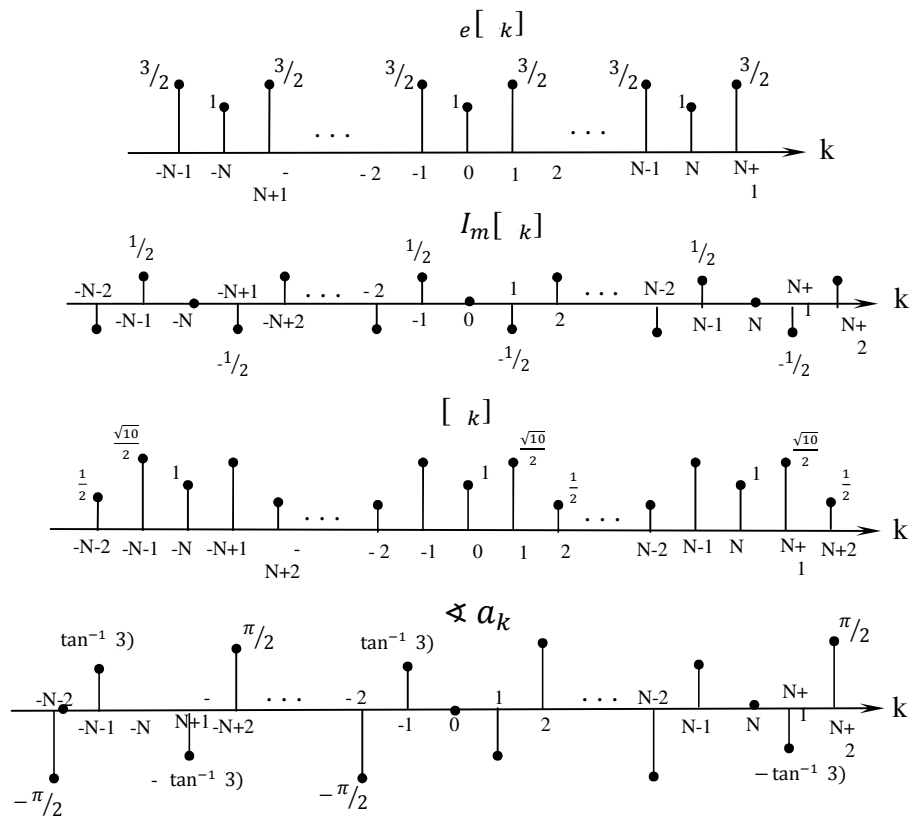
$$\begin{aligned} x[n] &= 1 + \frac{1}{j2} \left[e^{j(\frac{2\pi}{N})n} - e^{-j(\frac{2\pi}{N})n} \right] + \frac{3}{2} \left[e^{j(\frac{2\pi}{N})n} + e^{-j(\frac{2\pi}{N})n} \right] + \\ & \frac{1}{2} \left[e^{j\left[\left(\frac{2\pi}{N}\right)2n + \frac{\pi}{2}\right]} + e^{-j\left[\left(\frac{2\pi}{N}\right)2n + \frac{\pi}{2}\right]} \right] \\ &= 1 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{j2}\right) e^{j(\frac{2\pi}{N})n} + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{j2}\right) e^{-j(\frac{2\pi}{N})n} + \frac{1}{2} e^{j\pi/2} e^{j(\frac{2\pi}{N})2n} + \\ & \frac{1}{2} e^{-j\pi/2} e^{-j(\frac{2\pi}{N})2n} \end{aligned}$$

بنابراین ضرایب سری فوریه بدست می آیند.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{j2}, \quad a_{-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{j2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} e^{j\pi/2} = \frac{j}{2}, \quad a_{-2} = \frac{1}{2} e^{-j\pi/2} = -\frac{j}{2}$$

که به صورت های زیر می توان آن را نمایش داد.

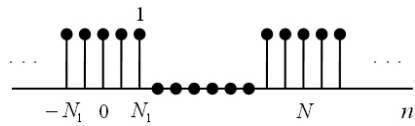


شکل (۴-۴): (a) قسمت های حقیقی و موهومی ضرایب سری فوریه مثال (۲-۴) (b) دامنه همان ضرایب توجه کنید که در مثال، برای تمام مقادیر k صادق است. البته این تساوی هنگامی صادق است که $x[n]$ حقیقی باشد.

مثال (۳-۴): برای دنباله مربعی به صورت شکل (۵-۴) مطلوبست تعیین ضرایب سری فوریه.

حل: با استفاده از رابطه (۲۲-۴) داریم

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}$$



شکل (۴-۵): دنباله مربعی

چون فقط $2N_1 + 1$ جمله داریم. اگر m را مساوی $n + N_1$ قرار دهیم.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk \left(\frac{2\pi}{N}\right)(m-N_1)} \\ &= \frac{1}{N} e^{jk \left(\frac{2\pi}{N}\right)N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk \frac{2\pi}{N} m} \\ &= \frac{1}{N} e^{jk \left(\frac{2\pi}{N}\right)N_1} \frac{1 - e^{-jk \frac{2\pi}{N} (2N_1+1)}}{1 - e^{-jk \frac{2\pi}{N}}} \\ &= \frac{1}{N} \frac{e^{jk \frac{2\pi}{N} N_1} - e^{-jk \frac{2\pi}{N} (N_1+1)}}{1 - e^{-jk \frac{2\pi}{N}}} \\ &= \frac{1}{N} \frac{e^{-jk \frac{2\pi}{2N}} e^{jk \frac{2\pi}{N} [N_1 + 1/2]} - e^{-jk \frac{2\pi}{N} [N_1 + 1/2]}}{e^{-jk \frac{2\pi}{2N}} - e^{-jk \frac{2\pi}{N}}} \end{aligned}$$

بنابراین می توان ضرایب سری فوریه یک دنباله مربعی را به صورت زیر نوشت.

$$a_k = \frac{1}{N} \frac{\text{Sin} \left[k \left(\frac{2\pi}{N} \right) \left(N_1 + \frac{1}{2} \right) \right]}{\text{Sin} \left[k \left(\frac{2\pi}{2N} \right) \right]} \quad k \neq 0, \pm N, \dots \quad (\text{a-۲۶-۴})$$

$$a_k = \frac{1}{N} (2N_1 + 1) \quad k = 0, \pm N, \dots \quad (\text{b-۲۶-۴})$$

عبارتی را که برای ضرایب سری فوریه بدست آوریم می توانیم به صورت ضرایبی از نمونه های پوش تابع زیر فرض کنیم.

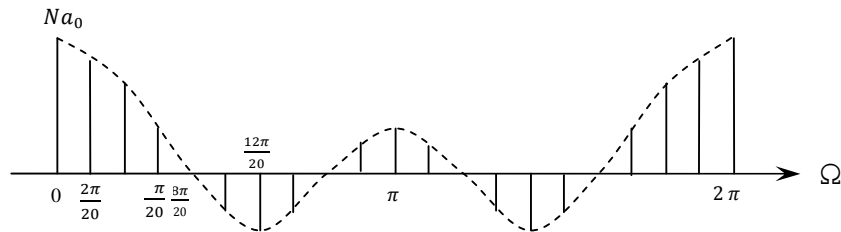
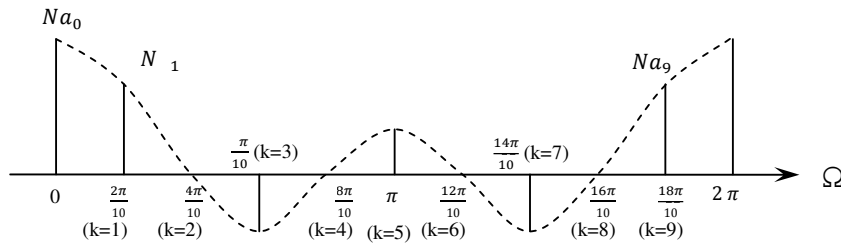
$$Na_k = \frac{\text{Sin} \left[(2N_1 + 1) \frac{\Omega}{2} \right]}{\text{Sin} \left(\frac{\Omega}{2} \right)} \Bigg|_{\Omega = \frac{2\pi}{N} k} \quad (\text{۲۷-۴})$$

در شکل (۴-۶) ضرایب Na_k برای $2N_1 + 1 = 5$ و $N = 10, 20$ رسم شده اند.

با افزایش N و ثابت بودن N_1 پوش Na_k ثابت می ماند اما فاصله نمونه هایی که برای محاسبه ضرایب سری فوریه به کار برده می شوند، کمتر می شود. توجه شود که در حالت پیوسته زمان پوش بدست آمده برای یک پالس مربعی یک تابع Sinc بود ولی در اینجا و در مورد دنباله مربعی به دلیل تناوبی

بودن ضرایب سری فوریه یک $Sinc$ بدست نمی آید. بنابراین معادل گسسته زمان یک تابع $Sinc$ به صورت $\frac{\sin[\beta n]}{\sin[n]}$ خواهد بود.

یکی دیگر از تفاوت های سری فوریه گسسته و پیوسته زمان در این است که در حالت پیوسته زمان برای یک سیگنال موج مربعی متقارن دیدیم که هر چه تعداد عبارات مجموع سری فوریه به سمت ∞ میل می کرد، مجموع به سمت موج مربعی میل می کرد ولی در نقاط ناپیوستگی پدیده گیبس^۱ مشاهده می شد. اما در حالت گسسته زمان تعداد جملات سری فوریه محدود و همچنین پدیده گیبس مشاهده نمی شود.



شکل (۴-۶): ضرایب سری فوریه مربوط به دنباله مربعی بازاء

$$N = 40(c) \quad N = 20(b) \quad N = 10(a), 2N_1 + 1 = 5$$

بنابراین با توجه به شکل (۴-۶) دیده می شود که با افزایش N یا دوره تناوب، طیف ضرایب سری فوریه به سمت یک طیف پیوسته میل می کند و این کاملاً منطقی و قابل پیش بینی می باشد، چرا که با

افزایش دوره تناوب و میل کردن آن به سمت مقادیر خیلی بزرگ دنباله، $x[n]$ به یک دنباله محدود تبدیل خواهد شد و بعدها خواهیم دید که دنباله‌های دوره محدود، دارای طیف پیوسته می‌باشند. یکی دیگر از مهمترین تشابهات بین سیستم‌های پیوسته و گسسته ناشی از این حقیقت است که نمایی‌های مختلط، توابع ویژه برای سیستم‌های LTI پیوسته و گسسته زمان می‌باشند. فرض کنید $x[n]$ ورودی یک سیستم LTI گسسته زمان با پاسخ ضربه $h[n]$ باشد. اگر $x[n]$ یک دنباله متناوب با دوره تناوب N باشد، با توجه به خاصیت خطی بودن سیستم انتظار داریم که پاسخ سیستم ($y[n]$) نیز متناوب باشد. هدف، ارائه رابطه برای ضرایب سری فوریه خروجی برحسب ضرایب سری فوریه ورودی است. ابتدا بسط دنباله $x[n]$ را برحسب ضرایب سری فوریه می‌نویسیم.

$$x[n] = \sum_{k < N} a_k e^{jk \left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \quad (۲۸-۴)$$

اگر پاسخ ضربه سیستم $h[n]$ باشد، می‌توان با استفاده از (۴-۶) رابطه زیر را برای خروجی نوشت.

$$y[n] = \sum_{k < N} a_k H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) e^{jk \left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \quad (۲۹-۴)$$

بنابراین ضرایب سری فوریه خروجی به صورت $a_k H\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$ هستند که در آن

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-k} h[n] \quad (۳۰-۴)$$

بنابراین

$$H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-jk \left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \quad (۳۱-۴)$$

برای توضیح بیشتر به مثال زیر توجه کنید.

مثال (۴-۵): فرض کنیم پاسخ ضربه سیستم LTI به صورت $h[n] = \alpha^n u[n]$ باشد که در آن $-1 < \alpha < 1$ است. اگر ورودی این سیستم به صورت $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ باشد، مطلوبست خروجی

سیستم و سری فوریه آن.

حل: ابتدا ورودی را به صورت سری فوریه بسط می‌دهیم.

$$x[n] = \frac{1}{2} e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} + \frac{1}{2} e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

با توجه به پاسخ ضربه سیستم و رابطه (۴-۳۱) داریم.

$$\begin{aligned} H\left(\frac{2\pi}{N}k\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n e^{-jk \left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\alpha e^{-jk \left(\frac{2\pi}{N}\right)} \right]^n = \frac{1}{1 - \alpha e^{-jk \frac{2\pi}{N}}} \end{aligned}$$

بنابراین می‌توان خروجی را به صورت سری فوریه نوشت.

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \frac{1}{2} H\left(\frac{2\pi}{N}\right) e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2} H\left(-\frac{2\pi}{N}\right) e^{-j\frac{2\pi}{N}n} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}}} \right) e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{j\frac{2\pi}{N}}} \right) e^{-j\frac{2\pi}{N}n}
 \end{aligned}$$

اگر فرض کنیم.

$$\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}}} = r e^{j\theta}$$

در آن صورت داریم.

$$y[n] = \frac{1}{2} r e^{j\theta} e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2} r e^{-j\theta} e^{-j\frac{2\pi}{N}n} = r \cos\left(\frac{2\pi}{N}n + \theta\right)$$

۳-۴ دنباله‌های غیرمتناوب-تبدیل فوریه گسسته زمان (DTFT) †

در مثال (۳-۴) و در شکل (۶-۴) دیدیم که با افزایش دوره تناوب فاصله این نمونه‌ها از هم کمتر می‌شود. با مشاهدات مشابه در مورد سیگنال‌های پیوسته زمان توانستیم با افزایش دوره تناوب به سمت ∞ نمایش تبدیل فوریه را برای یک سیگنال غیرمتناوب ارائه کنیم. در این فصل دقیقاً همان عملیات را پیش می‌گیریم و ابتدا تابع $\tilde{x}[n]$ متناوب را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که در یک دوره تناوب مساوی سیگنال غیرمتناوب باشد.

فرض می‌کنیم $x[n]$ در فاصله $|n| > N_1$ مساوی صفر باشد. هرچه دوره تناوب N بیشتر می‌شود، در ناحیه بزرگتری می‌توان $x[n]$ را با $\tilde{x}[n]$ مساوی گرفت و اگر N به سمت بینهایت ∞ میل کند آنگاه $\tilde{x}[n] = x[n]$ می‌گردد.

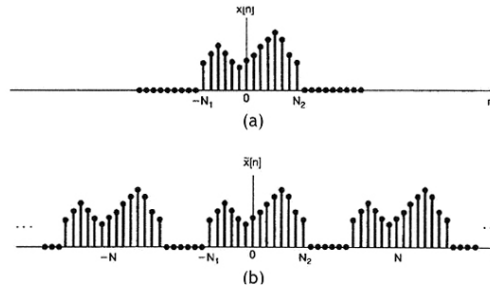
اکنون سری فوریه $\tilde{x}[n]$ را در نظر بگیرید.

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \quad (۳۲-۴)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \quad (۳۳-۴)$$

از آنجا که در یک دوره تناوب که شامل $|n| \leq N_1$ است، $x[n]$ مساوی $\tilde{x}[n]$ است، مناسب است که حدود مجموع را در فاصله مذکور در نظر بگیریم. در این صورت می‌توان جای $\tilde{x}[n]$ را با $x[n]$ عوض کرد و نوشت.

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} \tilde{x}[n] e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \quad (۳۴-۴)$$

شکل (۴-۷): (a) سیگنال با دوره محدود $x[n]$ (b) سیگنال تناوبی $\tilde{x}[n]$ که در یک دوره تناوب با $x[n]$ مساوی است

اگر دوره تناوب N به سمت بینهایت میل کند، در آن صورت $k \frac{2\pi}{N}$ مقادیر پیوسته را اتخاذ می‌کند و اگر چه a_k به سمت صفر میل می‌کند ولی Na_k مقادیر محدود غیر صفر را اتخاذ می‌کند. اکنون پوش $X(\Omega)$ مربوط به Na_k را به صورت رابطه (۴-۳۵) می‌نویسیم.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \quad (4-35)$$

در رابطه (۴-۳۵)، $\Omega = k \frac{2\pi}{N}$ مقادیر پیوسته را اتخاذ می‌کند. رابطه فوق تبدیل فوریه مستقیم نامیده می‌شود. بنابراین می‌توان ضرایب فوریه دنباله $\tilde{x}[n]$ (که از تکرار مداوم $x[n]$ با دوره تناوب N واحد بدست می‌آید) را از رابطه (۴-۳۵) بدست آورد.

$$Na_k = X(\Omega) \Big|_{\Omega = \frac{2\pi}{N}k} \quad (4-36)$$

$$a_k = \frac{1}{N} X(k\Omega_0) \quad (4-37)$$

که در آن $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ می‌باشد.

بنابراین ضرایب a_k متناسب با نمونه‌های متساوی‌فاصله از تابع پوش می‌باشند. از ترکیب معادلات (۴-۳۲) و (۴-۳۷) داریم.

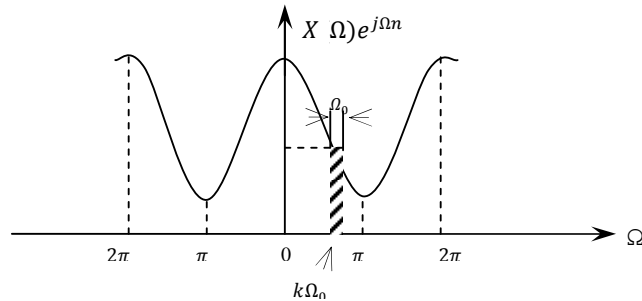
$$\tilde{x}[n] = \sum_{k < N} \frac{1}{N} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \quad (4-38)$$

از آنجائیکه $\frac{1}{\Omega_0} = \frac{N}{2\pi}$ یا $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ است، معادله (۴-۳۸) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k < N} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \Omega_0 \quad (4-39)$$

هنگامیکه $N \rightarrow \infty$ آنگاه $\Omega_0 \rightarrow 0$ و $k\Omega_0$ مقادیر پیوسته را اتخاذ می‌کند. بنابراین $\tilde{x}[n]$ برای هر مقدار محدود n مساوی $x[n]$ خواهد شد و از اینجا می‌توان رابطه تبدیل معکوس فوریه گسسته‌زمان را بدست آورد. در حالت حدی مذکور، معادله (۴-۳۹) در فاصله یک دوره تناوب به انتگرال تبدیل

می‌شود. برای واضح‌تر شدن مطلب فرض کنید $X(\Omega)e^{j\Omega n}$ به صورت نمایش داده شده در شکل (۴-۸) باشد.



شکل (۴-۸): نمایش معادله (۴-۳۹)

از معادله (۴-۳۵) پی می‌بریم که $X(\Omega)$ متناوب و دوره تناوب آن 2π است. همچنین $e^{j\Omega n}$ نیز متناوب با دوره تناوب 2π است. بنابراین حاصل ضرب $X(\Omega)e^{j\Omega n}$ نیز تناوبی با دوره تناوب 2π است. همانگونه که از شکل پیداست، هر عبارت در مجموع (۴-۳۹) نمایانگر مساحتی به ارتفاع $X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$ و پهنای Ω_0 است.

هنگامی که $\Omega_0 \rightarrow 0$ مجموع تبدیل به انتگرال شده و $x[n] = \tilde{x}[n]$ می‌شود. بنابراین رابطه (۴-۳۹) به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega \quad (۴-۴۰)$$

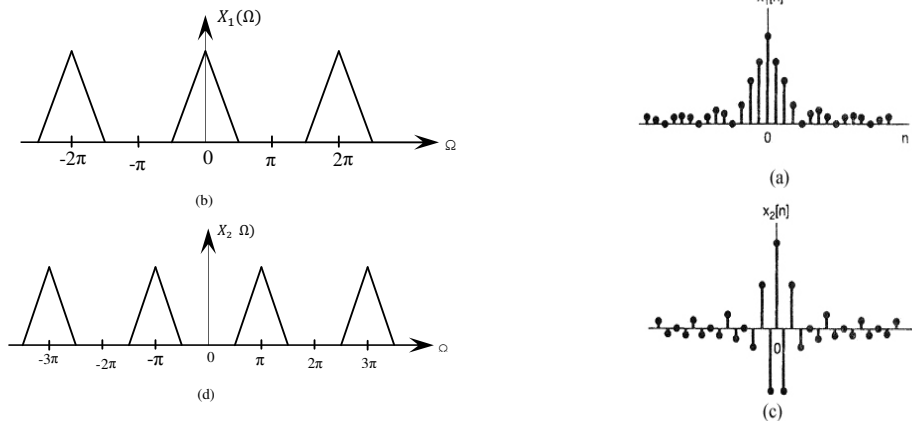
محدوده انتگرال‌گیری دلخواه ولی طول آن 2π است. بنابراین زوج تبدیل فوریه زیر را بدست آوردیم.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega \quad (۴-۴۱)$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \quad (۴-۴۲)$$

$X(\Omega)$ را معمولاً طیف $x[n]$ می‌نامند و متناوب با دوره تناوب 2π می‌باشد و این یکی از تفاوت‌های تبدیل فوریه گسسته و پیوسته زمان می‌باشد. تبدیل فوریه سیگنال پیوسته زمان غیرمتناوب است در حالیکه تبدیل فوریه دنباله گسسته زمان متناوب است و دوره تناوب آن در حوزه فرکانس مستقل از نوع و شکل دنباله گسسته زمان، مساوی 2π است. تفاوت دیگر در محدود بودن حدود انتگرال‌گیری در معادله (۴-۴۱) است که باز ناشی از تناوبی بودن $X(\Omega)$ می‌باشد. بنابراین چون $\Omega = 2\pi, \Omega = 0$ یک فرکانس را مشخص می‌کنند، فرکانسهای نزدیک به این مقادیر و یا هر مضرب زوجی از π را فرکانس پایین گویند. همچنین فرکانسهایی که نزدیک مضارب فرد π باشند را فرکانسهای بالا گویند.

بنابراین دنباله $x_1[n]$ رسم شده در شکل (۹-۴) بسیار آهسته‌تر از $x_2[n]$ تغییر میکند و دارای مؤلفه‌های فرکانسی پایین می‌باشد که در شکل مشخص شده است.



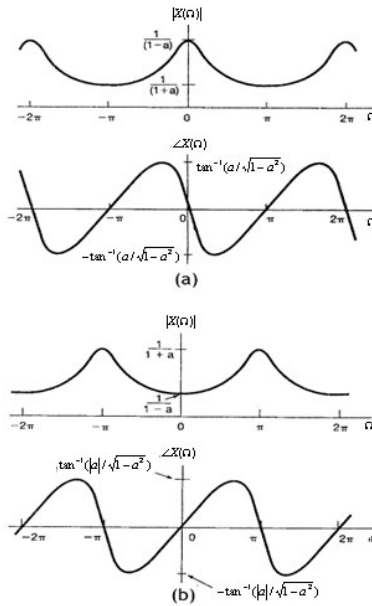
شکل (۹-۴): (a) دنباله گسسته‌زمان $x_1[n]$ تبدیل فوریه $X_1(\Omega)$ که در حوالی $\Omega = \pm\pi, \pm3\pi$ متمرکز است. مثال (۹-۴): تبدیل فوریه دنباله زیر را بیابید.

$$x[n] = a^n u[n] \quad |a| < 1$$

حل: با استفاده از رابطه (۴۲-۴) داریم.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} [ae^{-j\Omega}]^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$$

دامنه و فاز $X(\Omega)$ در شکل (۹-۴-۱۰) برای $a > 0$ و در شکل (۹-۴-۱۰-ب) برای $a < 0$ نشان داده شده است. توجه می‌کنیم که در هر دو حالت دوره تناوب 2π است و طیف دامنه زوج و طیف زاویه، فرد می‌باشد. در ضمن توجه می‌کنیم که اگر $a > 0$ باشد، دنباله فوق در فرکانسهای پایین بیشینه دامنه را خواهد داشت و اگر $a < 0$ باشد در فرکانسهای بالا بیشینه دامنه را خواهد داشت. البته در هر دو حالت لازمه همگرا شدن تبدیل فوریه، شرط $|a| < 1$ می‌باشد.

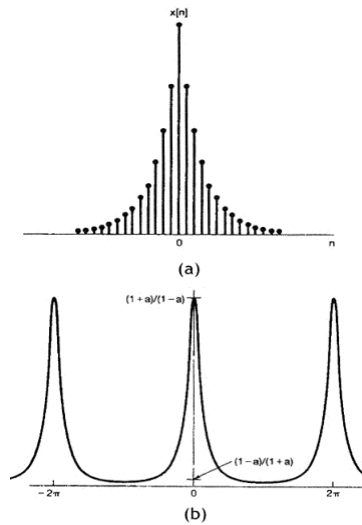


شکل (۴-۱۰): دامنه و زاویه تبدیل فوریه مثال (۴-۵) برای (a) $a > 0$ (b) $a < 0$

مثال (۴-۶): تبدیل فوریه دنباله زیر را بیابید.

$$x[n] = \alpha^{|n|}$$

حل: شکل سیگنال به ازاء $0 < \alpha < 1$ در شکل (۴-۱۱) رسم شده است.



شکل (۴-۱۱): (a) سیگنال $x[n]$ مثال (۴-۶) و (b) تبدیل فوریه آن $0 < \alpha < 1$

تبدیل فوریه این سیگنال برابر است با

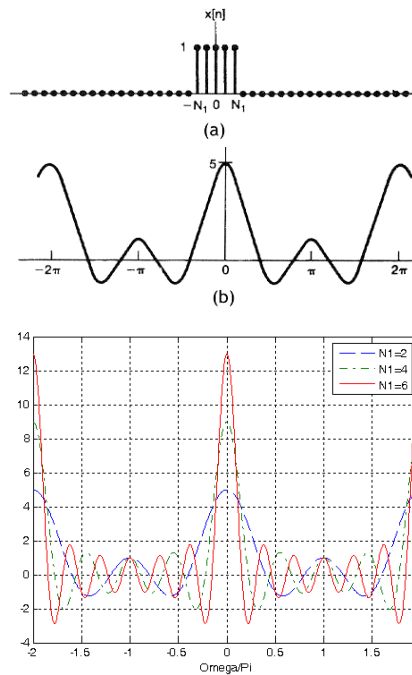
$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^{-n} e^{-j\Omega n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha^m e^{j\Omega m} + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n e^{-j\Omega n} \\ &= \frac{1}{1 - \alpha e^{j\Omega}} - 1 + \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} = \frac{1 - \alpha^2}{1 - 2\alpha \cos \Omega + \alpha^2} \end{aligned}$$

در این حالت $X(\Omega)$ حقیقی و برای $0 < \alpha < 1$ در شکل (۴-۱۱-ب) رسم شده است. مثال (۴-۷): تبدیل فوریه پالس مربعی را بدست آورید.

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N_1 \\ 0 & |n| > N_1 \end{cases} \text{ پالس مربعی:}$$

حل:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-N_1}^{+N_1} e^{-j\Omega n} = \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-j\Omega(m-N_1)}$$



شکل (۴-۱۲): (a) پالس مربعی مثال (۴-۷) برای $N_1 = 2$ (b) تبدیل فوریه آن برای $N_1 = 2$ (c) مقایسه تبدیل فوریه پالس مربعی برای سه مقدار مختلف $N_1 = 2, 4, 6$

مجموع دوم به کمک تبدیل زیر از مجموع اول بدست آمده است.

$$m = n + N_1$$

بنابراین می توان نوشت.

این تبدیل در شکل (۱۲-۴) رسم شده است.

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= e^{j\Omega N_1} \frac{1 - e^{-j\Omega(2N_1+1)}}{1 - e^{-j\Omega}} = \frac{e^{j\Omega N_1} - e^{-j\Omega(N_1+1)}}{1 - e^{-j\Omega}} \\ &= \frac{e^{-j\Omega/2} e^{j\Omega(N_1+\frac{1}{2})} - e^{-j\Omega(N_1+\frac{1}{2})}}{e^{-j\Omega/2} - e^{j\Omega/2}} \\ X(\Omega) &= \frac{\text{Sin}\Omega(N_1 + \frac{1}{2})}{\text{Sin}\frac{\Omega}{2}} \end{aligned}$$

جهت مشاهده تاثیر افزایش طول پالس مربعی طیف این سیگنال به ازاء افزایش N_1 طیف این پالس برای سه مقدار مختلف $N_1 = 2, 4, 6$ در شکل ۱۲-۴ نیز رسم شده است. دیده می شود که با افزایش N_1 طیف سیگنال در حوزه فرکانس بسته تر می شود که به مفهوم کاهش دامنه در فرکانسهای بالاتر است.

۴-۴ دنباله های متناوب و تبدیل فوریه گسسته زمانی

همانند حالت پیوسته زمان، روابط مهمی بین نمایش سری فوریه دنباله های متناوب و تبدیل فوریه دنباله های غیرمتناوب وجود دارد. در این بخش ابتدا نحوه بدست آوردن ضرایب سری فوریه یک دنباله متناوب از روی تبدیل فوریه یک دوره تناوب از آن دنباله را تشریح می کنیم. سپس نشان خواهیم داد که چگونه سری فوریه دنباله های متناوب را می توان به کمک نمایش تبدیل دنباله متناوب به صورت قطار ضربه، در چهار چوب تبدیل فوریه جای داد.

۴-۴-۱ ضرایب سری فوریه به عنوان نمونه های تبدیل فوریه در یک دوره تناوب

فرض کنید که $\tilde{x}[n]$ یک دنباله متناوب با دوره تناوب N باشد و همچنین فرض کنید $x[n]$ در یک دوره تناوب به صورت زیر باشد

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & M \leq n \leq M + N - 1 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \quad (۴۳-۴)$$

که در آن M یک عدد دلخواه است.

قبلاً نشان دادیم که

$$Na_k = X(k \frac{2\pi}{N}) \quad (۴۴-۴)$$

که در آن a_k ضرایب سری فوریه $\tilde{x}[n]$ و $X(\Omega)$ تبدیل فوریه $x[n]$ می باشد. بنابراین Na_k معادل است با نمونه های تبدیل فوریه در یک دوره تناوب. نکته دیگری که باید به آن توجه کرد این است که

اگرچه شکل $x[n]$ و $X(\Omega)$ به انتخاب M وابسته است ولی مقادیر $X(\Omega)$ در فرکانسهای نمونه برداری $\frac{2\pi k}{N}$ به مقدار M بستگی ندارد.

مثال (۴-۸): فرض کنیم دنباله تناوبی به صورت زیر تعریف گردد.

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$$

این دنباله در شکل (۴-۱۳-۲) رسم شده است. مطلوبست محاسبه ضرایب سری فوریه دنباله فوق:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

اگر فاصله مجموع را $0 \leq n \leq N-1$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت.

$$a_k = \frac{1}{N}$$

اکنون اگر $x_1[n]$ را به صورت رابطه (۴-۴۳) با $M = 0$ تعریف کنیم، داریم.

$$x_1[n] = \delta[n]$$

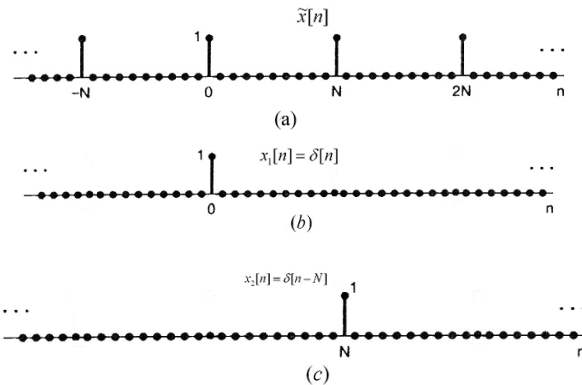
که در شکل (۴-۱۳-۲) رسم شده است.

تبدیل فوریه این دنباله به سادگی از تعریف تبدیل فوریه قابل محاسبه است.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] e^{-j\Omega n} = 1$$

در اینجا می‌بینیم که رابطه $a_k = \frac{1}{N}$ برقرار است. چون در اینجا $(X(\Omega))_{\Omega=k\frac{2\pi}{N}}$ مساوی واحد

و مستقل از مقدار k است.



شکل (۴-۱۳): (a) قطار ضربه تناوبی گسسته زمانی (b,c) دو دنباله غیرتناوبی که هر کدام مساوی $\tilde{x}[n]$ در یک دوره تناوب دنباله هستند.

اکنون اگر $0 < M < N$ اختیار کنیم و سیگنال $x_2[n]$ را به صورت زیر تعریف کنیم.

$$x_2[n] = \delta[n - N] \quad (۴۵-۴)$$

که تبدیل فوریه آن نیز متفاوت خواهد بود.

$$X(\Omega) = e^{-j\Omega N} \quad (۴۶-۴)$$

ولی به هر حال در فرکانسهای نمونه برداری $k \frac{2\pi}{N}$ ، مقدار $e^{-j\Omega N}$ نیز مساوی واحد است. در اینصورت

نیز رابطه (۴۴-۴) در فرکانسهای $k \frac{2\pi}{N}$ برقرار است.

۴-۴-۲ تبدیل فوریه برای دنباله‌های متناوب

اکنون می‌خواهیم تبدیل فوریه دنباله‌های متناوب را بیابیم. برای شروع، ابتدا دنباله زیر را در نظر بگیرید.

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} \quad (۴۷-۴)$$

در حالت پیوسته زمان، دیدیم که تبدیل فوریه $e^{j\omega_0 t}$ یک ضربه در $\omega = \omega_0$ می‌باشد. بنابراین انتظار داریم که در حالت گسسته زمان نیز چنین شود. اما تبدیل فوریه در حالت گسسته زمان با دوره تناوب

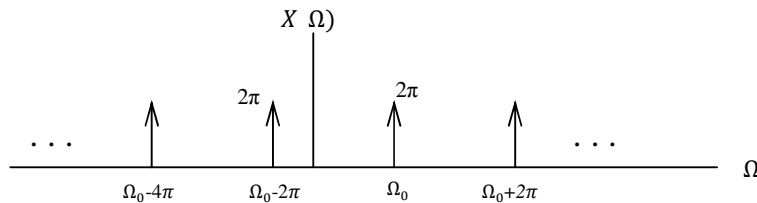
2π متناوب است، چون

$$e^{j\Omega_0 n} = e^{j(\Omega_0 + 2\pi r)n} \quad (۴۸-۴)$$

توجه شود که این تابع بر حسب Ω متناوب است، حتی اگر بر حسب n متناوب نباشد. بنابراین تبدیل فوریه (۴۸-۴) را باید به صورت (۴۹-۴) نوشت.

$$X(\Omega) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) \quad (۴۹-۴)$$

که در شکل (۱۴-۴) نشان داده شده است.



شکل (۱۴-۴): تبدیل فوریه $x[n] = e^{j\Omega_0 n}$

جهت اطمینان از صحت رابطه می‌خواهیم تبدیل فوریه معکوس رابطه (۴۹-۴) را بیابیم.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (۵۰-۴)$$

توجه کنید که فاصله طیفی به طول 2π دقیقاً شامل یک ضربه است. بنابراین اگر ضربه را فقط در Ω_0 در نظر بگیریم، نتیجه (۵۰-۴) به صورت زیر خواهد بود.

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} \quad (۵۱-۴)$$

در حالت کلی‌تر اگر $x[n]$ شامل مجموعی از نمایی‌های مختلط باشد.

$$x[n] = b_1 e^{j\Omega_1 n} + \dots + b_M e^{j\Omega_M n} \quad (52-4)$$

طبق (49-4) تبدیل فوریه (52-4) برابر است با (53-4)

$$X(\Omega) = b_1 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - \Omega_1 - 2\pi l) + b_2 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - \Omega_2 - 2\pi l) + \dots + b_M \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - \Omega_M - 2\pi l) \quad (53-4)$$

این رابطه به ما می‌گوید $X(\Omega)$ یک قطارضربه متناوب است که ضربه‌های آن در فرکانس‌های $\Omega_1, \dots, \Omega_M$ و در فاصله مضارب صحیحی از 2π قرار دارند. بنابراین هر فاصله 2π دقیقاً یک ضربه از هر یک از مجموعه‌های طرف راست در (53-4) را دارا خواهد بود.

توجه کنید که معادله (49-4) تبدیل فوریه دنباله مشخص شده توسط رابطه (47-4) است، چه این دنباله متناوب و چه غیرمتناوب باشد، یعنی چه Ω_0 را بتوان به صورت کسر گویایی از 2π نوشت و چه نتوان. به طور مشابه دنباله رابطه (52-4) فقط هنگامی تناوبی است که تمام Ω_0 ‌های آن را به صورت کسر گویایی از 2π بتوان نوشت.

اکنون فرض کنید $x[n]$ تناوبی با دوره تناوب N باشد، در اینصورت می‌توان $x[n]$ را به صورت سری فوریه نوشت.

$$x[n] = \sum_{k \leq N} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad (54-4)$$

اگر رابطه فوق را به صورت جمله به جمله بنویسیم، داریم.

$$x[n] = a_0 + a_1 e^{j(\frac{2\pi}{N})n} + a_2 e^{j2(\frac{2\pi}{N})n} + \dots + a_{N-1} e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}n} \quad (55-4)$$

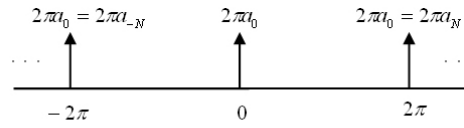
در مقایسه با (52-4) می‌توان تناظر زیر را میان Ω_i ‌ها و فرکانس‌های موجود در (54-4) ایجاد کرد.

$$\Omega_1 = 0, \Omega_2 = \frac{2\pi}{N}, \Omega_3 = 2\left(\frac{2\pi}{N}\right), \dots, \Omega_N = (N-1)\frac{2\pi}{N} \quad (56-4)$$

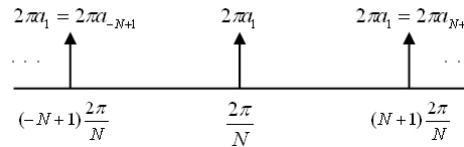
بنابراین از معادله (53-4) داریم.

$$X(\Omega) = a_0 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - 2\pi l) + a_1 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - \frac{2\pi}{N} - 2\pi l) + \dots + a_N \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - (N-1)\frac{2\pi}{N} - 2\pi l) \quad (57-4)$$

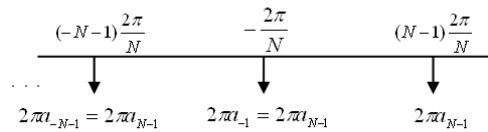
که در شکل (15-4) نمایش داده شده است.



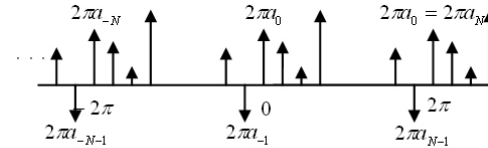
(a)



(b)



(c)



(d)

شکل (۴-۱۵): تبدیل فوریه سیگنال تناوبی گسسته زمان

در شکل (۴-۱۵-۲) اولین مجموع در سمت راست معادله (۴-۷۱) را رسم کرده‌ایم و از خاصیت تناوبی استفاده کردیم و نوشتیم.

$$a_0 = a_N = a_{-N} \quad (۴-۵۸)$$

در شکل (۴-۱۵-۲) اولین مجموع و در شکل (۴-۱۵-۳) آخرین مجموع را رسم کرده‌ایم. شکل (۴-۱۵-۲) مجموع کلی را برای $X(\Omega)$ نمایش می‌دهد.

$$X(\Omega) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - k \frac{2\pi}{N} - 2\pi l) \quad (۴-۵۹)$$

$$= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - \frac{k - lN}{N} 2\pi)$$

در اینجا فقط با تغییر k می‌توان تمام جملات مجموع را ساخت یعنی می‌توان نوشت.

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \quad (۴-۶۰)$$

بنابراین (۴-۶۰) تبدیل فوریه دنباله متناوب $x[n]$ با ضرایب سری فوریه a_k می‌باشد. بدین ترتیب هر دو نوع دنباله‌های متناوب و غیرمتناوب در یک قالب قابل بیان توسط تبدیل فوریه می‌شوند. همه این مراحل مرهون تعریف تابع جادویی ضربه می‌باشند.

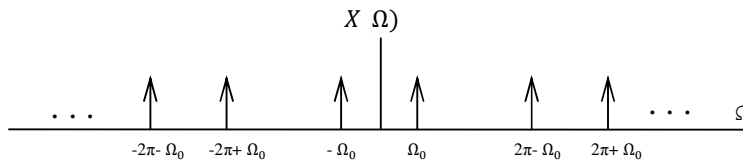
مثال (۴-۹): مطلوبست تبدیل فوریه دنباله متناوب زیر

$$x[n] = \cos \Omega_0 n = \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 n}$$

حل: از معادله (۴-۵۳) بلافاصله داریم.

$$X(\Omega) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi \{ \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) + \delta(\Omega - \Omega_0 + 2\pi l) \}$$

که در شکل (۴-۱۶) رسم شده است.



شکل (۴-۱۶): تبدیل فوریه گسسته زمانی $x[n] = \cos \Omega_0 n$

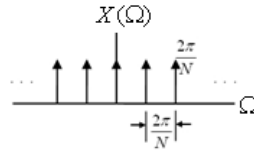
مثال (۴-۱۰): مطلوبست تبدیل فوریه دنباله زیر

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$$

حل: چون سیگنال تناوبی با دوره تناوب N است.

$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N} k\right) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N} k\right)$$

که در شکل (۴-۱۷) رسم شده است. در اینجا مشاهده می‌شود که هر چه فاصله بین ضربه‌ها در زمان بیشتر می‌شود (دوره تناوب بیشتر می‌شود)، فاصله ضربه‌ها در حوزه فرکانس کمتر می‌گردد (فرکانس اصلی کمتر می‌شود) و این نتیجه‌ای آشنا می‌باشد که در حوزه پیوسته زمان نیز کم و بیش در مورد آن بحث شد. در واقع شدت تغییرات سیگنال (دنباله) در حوزه زمان بیانگر وجود مؤلفه‌های فرکانس بالا در حوزه فرکانس سیگنال (دنباله) می‌باشد. بنابراین برای یک دنباله تناوب با دوره تناوب کوچک می‌توان انتظار مؤلفه‌های فرکانس بالا در حوزه فرکانس را داشت و برعکس اگر دوره تناوب بزرگ باشد، می‌توان انتظار داشت که مؤلفه‌های فرکانس بالا کمتر شوند. در اینجا دوباره لازم به ذکر است که به علت متناوب بودن حوزه فرکانس برای دنباله‌های گسسته زمان، تعریف فرکانسهای پایین شامل ضرایب زوج π می‌باشد کمالینکه فرکانسهای بالا شامل ضرایب فرد از π است.



شکل (۴-۱۷): تبدیل فوریه قطار ضربه گسسته زمان

۴-۵ خواص تبدیل فوریه گسسته زمان

در این قسمت به بررسی چند خاصیت مهم از خواص تبدیل فوریه گسسته زمان می‌پردازیم. همانگونه که قبلاً اشاره شد برخی از این خواص بسیار مشابه خاصیت متناظر در مورد سیگنال‌های پیوسته زمان هستند. در برخی موارد میزان این شباهت به حدی است که می‌توان با توجه به خاصیت پیوسته زمان متناظر، مستقیماً خاصیت گسسته زمان را استخراج کرد.

اما در همه موارد وضع بدین صورت نیست و گاهی برخی خواص تبدیل فوریه گسسته زمان دارای تفاوت‌های اساسی با نوع پیوسته زمان هستند. اصولاً دلیل اصلی این تفاوت‌ها در تناوبی بودن تبدیل فوریه گسسته زمان نهفته است.

اگر تبدیل فوریه گسسته زمان $x[n]$ را $X(\Omega)$ بنامیم، جهت نمایش این رابطه و برای سهولت از علامت‌های زیر استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= F\{x[n]\} \\ x[n] &= F^{-1}\{X(\Omega)\} \\ x[n] &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} X(\Omega) \end{aligned} \quad (۴-۶۱)$$

همه علائم فوق معادل یکدیگر بوده و یک مفهوم را می‌رسانند.

۴-۵-۱ تناوبی بودن تبدیل فوریه گسسته زمان

همانطور که قبلاً گفتیم تبدیل فوریه گسسته زمان یک تابع پیوسته و متناوب از Ω می‌باشد که دوره تناوب آن 2π است.

$$X(\Omega) = X(\Omega + 2\pi r) \quad (۴-۶۲)$$

این خاصیت ارتباطی به نوع دنباله در حوزه زمان ندارد و یک خاصیت عمومی در حوزه فرکانس برای دنباله‌های گسسته زمان است.

۴-۵-۲ خطی بودن

اگر تبدیل فوریه دنباله گسسته زمان $x_i[n]$ را $X_i(\Omega)$ بنامیم، مثلاً اگر

$$x_1[n] \stackrel{F}{\Leftrightarrow} X_1(\Omega) \quad (۴-۶۳)$$

$$x_2[n] \stackrel{F}{\Leftrightarrow} X_2(\Omega) \quad (۴-۶۴)$$

در آن صورت

$$a_1x_1[n] + bx_2[n] \stackrel{F}{\Leftrightarrow} a_1X_1(\Omega) + bX_2(\Omega) \quad (۶۵-۴)$$

همانگونه که در مورد خاصیت متناظر در حوزه پیوسته زمان بیان کردیم، خاصیت خطی بودن شامل دو خاصیت جمع آثار و همگن بودن است. خاصیت همگن بودن به صورت زیر قابل بیان است. اگر

$$X_i(\Omega) = F\{x_i[n]\} \quad (۶۶-۴)$$

در آن صورت تبدیل فوریه $ax_i[n]$ برابر است با

$$aX_i(\Omega) = F\{ax_i[n]\} \quad (۶۷-۴)$$

و همچنین خاصیت جمع آثار بیان می‌دارد که

$$F\{\sum x_i[n]\} = \sum F\{x_i[n]\} = \sum X_i(\Omega) \quad (۶۸-۴)$$

بنابراین در حالت کلی

$$\begin{aligned} F\{\sum a_i x_i[n]\} &= \sum F\{a_i x_i[n]\} = \sum a_i F\{x_i[n]\} \\ &= \sum a_i X_i(\Omega) \end{aligned} \quad (۶۹-۴)$$

عدم مشخص کردن حد مجموع به مفهوم دلخواه بودن آن است.

۴-۵-۳ تقارن

با توجه به رابطه تبدیل فوریه گسسته زمان به سادگی می‌توان ثابت کرد که اگر $x[n]$ حقیقی باشد.

$$X(\Omega) = X^*(-\Omega) \quad (۷۰-۴)$$

اثبات: طبق تعریف تبدیل فوریه داریم.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \quad (۷۱-۴)$$

بنابراین

$$X^*(-\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n]e^{-j\Omega n} \quad (۷۲-۴)$$

که اگر $x[n]$ حقیقی باشد رابطه فوق مساوی $X(\Omega)$ خواهد بود.

اگر تبدیل فوریه را طبق رابطه اولر بر حسب توابع سینوس و کسینوس بنویسیم، داریم.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\cos\Omega n - j \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\sin\Omega n$$

بنابراین رابطه دامنه و زاویه بصورت زیر بدست می‌آیند.

$$|X(\Omega)| = \sqrt{\left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\cos\Omega n \right\}^2 + \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\sin\Omega n \right\}^2} \quad (۷۳-۴)$$

$$X(\Omega) = -\tan^{-1} \frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\sin\Omega n}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\cos\Omega n} \quad (۷۴-۴)$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که قسمت حقیقی و دامنه $X(\Omega)$ تابعی زوج از Ω و قسمت موهومی و همچنین زاویه آن تابع فردی از Ω می‌باشد. بنابراین تبدیل فوریه قسمت‌های زوج و فرد $x[n]$ به ترتیب مساوی قسمت‌های حقیقی و موهومی $X(\Omega)$ خواهند بود.

$$\mathcal{E}\nu\{x[n]\} \stackrel{F}{\leftrightarrow} \Re\{X(\Omega)\} \quad (۷۵-۴)$$

$$\mathcal{O}d\{x[n]\} \stackrel{F}{\leftrightarrow} -j\Im\{X(\Omega)\} \quad (۷۶-۴)$$

اثبات: از بسط $x[n]$ به قسمت‌های زوج و فرد و از بسط $X(\Omega)$ به قسمت‌های حقیقی و موهومی داریم.

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\mathcal{E}\nu\{x[n]\} + \mathcal{O}d\{x[n]\}]e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}\nu\{x[n]\}\cos\Omega n - j \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{O}d\{x[n]\}\sin\Omega n \\ &\quad - j \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}\nu\{x[n]\}\sin\Omega n + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{O}d\{x[n]\}\cos\Omega n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}\nu\{x[n]\}\cos\Omega n - j \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{O}d\{x[n]\}\sin\Omega n \\ &= \Re\{X[\Omega]\} + j\Im\{X(\Omega)\} \end{aligned} \quad (۷۷-۴)$$

بنابراین روابط زیر را خواهیم داشت که مؤید ادعای ما می‌باشند.

$$\Re\{X[\Omega]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}\nu\{x[n]\}\cos\Omega n \quad (۷۸-۴)$$

$$\Im\{X[\Omega]\} = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{O}d\{x[n]\}\sin\Omega n \quad (۷۹-۴)$$

۴-۵-۴ انتقال در حوزه زمان و فرکانس

با توجه به رابطه تبدیل فوریه گسسته زمان می‌توان به سادگی تبدیل فویه دنباله انتقال داده شده در حوزه زمان را بدست آورد.

$$x[n-n_0] \stackrel{F}{\leftrightarrow} e^{-j\Omega n_0} X(\Omega) \quad (۸۰-۴)$$

همچنین می‌توان تبدیل را به صورت انتقالی از $X(\Omega)$ بدست آورد.

$$e^{j\Omega_0 n} x[n] \stackrel{F}{\leftrightarrow} X(\Omega - \Omega_0) \quad (۸۱-۴)$$

تمرین (۱-۴): روابط (۸۰-۴) و (۸۱-۴) را ثابت کنید.

۴-۵-۵ تفاضل و مجموع

در حقیقت معادل انتگرال‌گیری در حوزه گسسته‌زمان، مجموع می‌باشد. متناظر با آن، معادل مشتق‌گیری در حوزه گسسته‌زمان، تفاضل می‌باشد. فرض کنید دنباله $x[n]$ دارای تبدیل فوریه $X(\Omega)$ باشد، در آن صورت با استفاده از خواص خطی بودن تبدیل فوریه و انتقال در حوزه‌زمان، می‌توان تبدیل فوریه تفاضل (به عنوان معادل گسسته‌زمان مشتق‌گیری) $x[n] - x[n-1]$ را به صورت زیر ارائه کرد.

$$x[n] - x[n-1] \stackrel{F}{\leftrightarrow} (1 - e^{-j\Omega}) X(\Omega) \quad (۸۲-۴)$$

اما مجموع زیر را در نظر بگیرید

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m] \quad (۸۳-۴)$$

چون

$$y[n] - y[n-1] = x[n] \quad (۸۴-۴)$$

شاید تصور کنیم که تبدیل فوریه $y[n]$ باید تبدیل فوریه $x[n]$ تقسیم بر $(1 - e^{-j\Omega})$ بشود. اما این فقط قسمتی از جواب است و جواب کلی باید شامل مؤلفه DC سیگنال هم بشود. پس

$$\sum_{m=-\infty}^n x[m] \stackrel{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(\Omega) + \pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) \quad (۸۵-۴)$$

که جمله دوم یک مؤلفه DC در سیگنال می‌باشد.

تمرین (۲-۴): سعی کنید با ایجاد تناظر میان حالت پیوسته‌زمان و گسسته‌زمان رابطه (۸۵-۴) را استخراج کنید.

مثال (۱۲-۴): مطلوبست تبدیل فوریه دنباله $u[n]$.

حل: با توجه به (۸۵-۴) می‌توان تبدیل فوریه $u[n]$ را به عنوان مجموع $\delta[n]$ بدست آورد، چون

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$$

و چون تبدیل فوریه $\delta[n]$ برابر واحد است، داریم.

$$F\{u[n]\} = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - k2\pi)$$

۴-۵-۶ مقیاس‌بندی در حوزه‌زمان و فرکانس

به خاطر ماهیت گسسته‌مقادیر متغیر مستقل، در مورد دنباله‌های گسسته‌زمان خاصیت مقیاس‌بندی باید به گونه‌ای دیگر برای این نوع دنباله‌ها تعریف شود. ابتدا فرض کنید $y[n] = x[-n]$ باشد، در اینصورت داریم.

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n] e^{-j\Omega n} \quad (۸۶-۴)$$

با تغییر متغیر $m = -n$ داریم.

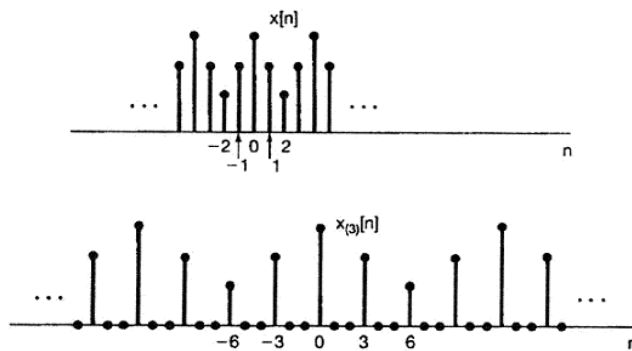
$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{j\Omega n} = X(-\Omega) \quad (۸۷-۴)$$

اگر چه رابطه فوق مشابه رابطه متناظر پیوسته زمان آن است، اما تفاوت‌های اصلی هنگامی ظاهر می‌شوند که بخواهیم مقیاس‌بندی دنباله‌های گسسته زمان را تعریف کنیم. همانگونه که قبلاً نشان دادیم در مورد دنباله‌های گسسته زمان نتیجه عملیات مقیاس‌بندی لزوماً مشابه دنباله اصلی نیست و گاهی بسیار متفاوت است. بنابراین نباید انتظار داشت که در حالت کلی میان تبدیل فوریه یک دنباله و تبدیل فوریه دنباله مقیاس‌بندی شده، یک رابطه مشخص وجود داشته باشد. در حالت پیوسته در حقیقت $x(at)$ اگر $a < 1$ باشد یک نمونه سیگنال مشابه $x(t)$ است که فقط تغییرات آن روی محور زمان آهسته‌تر شده (در حوزه زمان سیگنال بازر شده) است. همین سیگنال اگر $a > 1$ باشد، هنوز مشابه سیگنال $x(t)$ است و فقط تغییرات آن روی محور زمان سریعتر شده (در حوزه زمان سیگنال بسته‌تر شده) است.

اما ارتباط $x[n]$ و $x[an]$ به این سادگی نیست. به عبارت دیگر $x[an]$ نمی‌تواند در حالت کلی بیانگر یک دنباله با تغییراتی مشابه $x[n]$ باشد. بنابراین نمی‌توانیم تغییرات حوزه زمانی دنباله $x[n]$ را با انتخاب $a < 1$ آهسته‌تر کنیم. و یا اینکه اگر $a > 1$ را عدد صحیح بگیریم (مثلاً $a = 2$) در واقع دنباله را در حوزه زمان بازر نکرده‌ایم، چون n فقط اعداد صحیح را اختیار میکند. بنابراین دنباله $x[2n]$ فقط شامل نمونه‌های زوج $x[n]$ خواهد بود. برای اینکه رفتار دنباله مقیاس‌بندی شده شبیه رفتار دنباله اصلی باشد، دنباله $x_k[n]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{k}] & \text{اگر } n \text{ مضربی از } k \text{ باشد} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ مضربی از } k \text{ نباشد} \end{cases} \quad (۸۸-۴)$$

به عنوان مثال در شکل (۱۹-۴) $x[n]$ و $x_{(3)}[n]$ نمایش داده شده است



شکل (۱۸-۴): دنباله $x_{(3)}[n]$ که از $x[n]$ با قرار دادن دو صفر بین مقادیر متوالی دنباله اصلی بدست آمده است.

بنابراین $x_{(k)}[n]$ از $x[n]$ با قرار دادن $k-1$ صفر بین مقادیر مختلف دنباله اصلی بدست می‌آید. بنابراین می‌توان $x_{(k)}[n]$ را شکل آهسته‌تر $x[n]$ فرض کرد. در این صورت می‌توان رابطه‌ای میان تبدیل فوریه این دو دنباله بدست آورد. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} X_{(k)}(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[kr]e^{-j\Omega kr} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[r]e^{-j(k\Omega)r} = X(k\Omega) \end{aligned} \quad (۸۹-۴)$$

بنابراین تبدیل فوریه $x_{(k)}[n]$ برابر است با

$$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{F} X(k\Omega) \quad (۹۰-۴)$$

این نتیجه با توجه به خاصیت دوگانی حوزه‌های زمان و فرکانس کاملاً قابل توجیه است. به عبارت دیگر چون $x_{(k)}[n]$ در حقیقت شکل بازتر $x[n]$ است، انتظار داریم که تبدیل فوریه آن شکل فشرده‌تر تبدیل فوریه دنباله اصلی باشد.

۷-۵-۴ مشتق‌گیری در حوزه فرکانس

با مشتق‌گیری از رابطه تبدیل فوریه گسسته زمان داریم.

$$\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} jnx[n]e^{-j\Omega} \quad (۹۱-۴)$$

بنابراین $\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$ تبدیل فوریه $-jnx[n]$ می‌باشد یا

$$-jnx[n] \xleftrightarrow{F} \frac{dX(\Omega)}{d\Omega} \quad (۹۲-۴)$$

۸-۵-۴ قضیه پارسوال

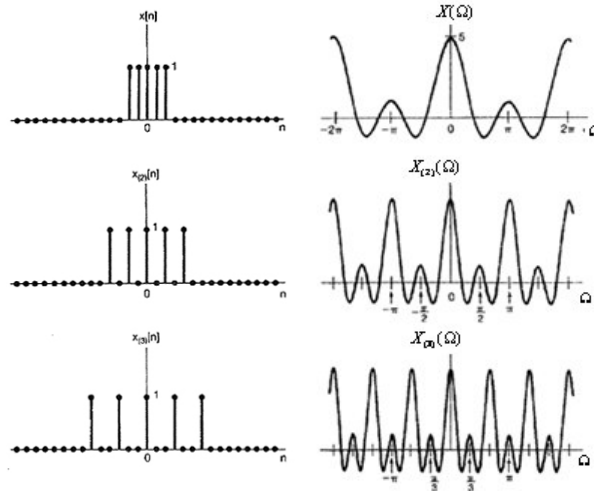
همانگونه که قبلاً بیان گردید، رابطه پارسوال بیانگر تساوی انرژی موجود در حوزه زمان و فرکانس برای یک دنباله می‌باشد.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega \quad (۹۳-۴)$$

اثبات: با توجه به اینکه $|x[n]|^2 = x[n]x^*[n]$ و با توجه به رابطه تبدیل معکوس فوریه در حوزه گسسته زمان، می‌توان نوشت.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} x[n] \int_{-\pi}^{\pi} X^*(\Omega)e^{-j\Omega n} d\Omega \quad (۹۴-۴)$$

با تغییر ترتیب انتگرال و مجموع داریم.



شکل (۴-۱۹): ارتباط بین حوزه‌های زمان و فرکانس؛ با افزایش k ، $x_{(k)}[n]$ بازتر می‌شود ولی تبدیل فوریه آن فشرده‌تر می‌شود.

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\Omega) d\Omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega \end{aligned} \quad (۴-۹۵)$$

به $|X(\Omega)|^2$ طیف چگالی انرژی نیز گفته می‌شود. انرژی در دنباله متناوب بینهایت است و رابطه پارسوال به شکل (۴-۹۵) در مورد این دنباله‌ها مفید نخواهد بود. برای دنباله‌های متناوب قضیه پارسوال به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k \in \langle N \rangle} |a_k|^2 \quad (۴-۹۶)$$

تمرین (۴-۳): رابطه فوق را با توجه به تعریف توان در مورد دنباله‌های متناوب ثابت کنید.

۴-۵-۹ خاصیت کانولوشن

قبلاً راجع به خاصیت مهم تبدیل فوریه در تبدیل عمل کانولوشن به عمل ضرب صحبت کرده‌ایم. اگر ورودی سیستمی باشد که پاسخ ضربه آن $h[n]$ است، در این صورت خروجی از رابطه کانولوشن بدست می‌آید که جهت یاد آوری، دوباره تکرار می‌شود.

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (۴-۹۷)$$

در آن صورت می‌توان ارتباط بین تبدیل فوریه دنباله‌های ورودی، خروجی و پاسخ ضربه را به صورت زیر نوشت.

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) \quad (۴-۹۸)$$

$H(\Omega)$ را پاسخ حوزه فرکانس یا تابع انتقال سیستم گسسته می‌گویند. رابطه (۹۸-۴) قبلاً در مورد سیگنال‌های پیوسته زمان ثابت شده است و اکنون این رابطه را برای حالت گسسته زمان ثابت می‌کنیم.

اثبات: همانطور که می‌دانیم جمع کانولوشن به صورت زیر بیان می‌شود.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k] \quad (۹۹-۴)$$

اگر طرفین رابطه (۹۹-۴) را در $e^{-j\Omega n}$ ضرب کرده و روی n از $-\infty$ تا $+\infty$ جمع بزنیم، داریم.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n-k]x[k]e^{-j\Omega n} \quad (۱۰۰-۴)$$

از تغییر مرتبه مجموع می‌توان طرف دوم رابطه (۱۰۰-۴) را به صورت (۱۰۱-۴) نوشت

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-k]e^{-j\Omega n} \quad (۱۰۱-۴)$$

با تغییر متغیر $n-k = m$ رابطه (۱۰۱-۴) به رابطه (۱۰۲-۴) تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]e^{-j\Omega(m+k)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]e^{-j\Omega k} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]e^{-j\Omega m} \end{aligned} \quad (۱۰۲-۴)$$

بنابراین رابطه (۹۸-۴) حاصل می‌شود و اثبات کامل می‌گردد.

مثال (۱۳-۴): یک سیستم LTI با پاسخ ضربه‌ای به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$h[n] = \delta[n - n_0]$$

مطلوبست تعیین رابطه ورودی و خروجی سیستم مذکور.

حل: پاسخ فرکانسی سیستم مذکور به صورت زیر است.

$$H(\Omega) = e^{-j\Omega n_0}$$

بنابراین برای هر ورودی $x[n]$ با تبدیل فوریه $X(\Omega)$ ، تبدیل فوریه خروجی برابر است با

$$Y(\Omega) = e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$$

بنابراین می‌توان رابطه ورودی و خروجی سیستم را به این صورت نوشت.

$$y[n] = x[n - n_0]$$

مثال (۱۴-۴): فرض کنید پاسخ ضربه یک سیستم به صورت زیر باشد.

$$h[n] = \alpha^n u[n]$$

اگر ورودی این سیستم به صورت زیر در نظر گرفته شود، مطلوبست تعیین خروجی سیستم.

$$x[n] = \beta^n u[n]$$

حل: طی مراحل زیر می‌توان پاسخ را در حوزه زمان و فرکانس بدست آورد. ابتدا تابع انتقال فرکانسی سیستم محاسبه می‌گردد و سپس تبدیل فوریه ورودی بدست می‌آید.

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}}$$

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - \beta e^{-j\Omega}}$$

در نهایت حاصل ضرب تابع انتقال در تبدیل فوریه ورودی محاسبه می‌شود.

$$Y(\Omega) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\Omega})(1 - \beta e^{-j\Omega})}$$

اگر $\alpha \neq \beta$ باشد، می‌توان $Y(\Omega)$ را به صورت زیر نوشت.

$$Y(\Omega) = \frac{A}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} + \frac{B}{1 - \beta e^{-j\Omega}}$$

که در آن

$$A = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}, \quad B = -\frac{\beta}{\alpha - \beta}$$

بنابراین $y[n]$ برابر است با

$$\begin{aligned} y[n] &= A\alpha^n u[n] + B\beta^n u[n] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha^{n+1} u[n] - \beta^{n+1} u[n]] \end{aligned}$$

اما اگر $\alpha = \beta$ باشد.

$$Y(\Omega) = \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} \right)^2$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت.

$$Y(\Omega) = \frac{e^{j\Omega}}{-j\alpha} \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} \right)$$

بنابراین داریم.

$$y[n] = \frac{j}{\alpha} [-j(n+1)\alpha^{n+1} u[n+1]]$$

و یا

$$y[n] = (n+1)\alpha^n u[n+1]$$

از آنجائیکه فاکتور $n+1$ برای $n = -1$ مساوی صفر است، می‌توان نوشت.

$$y[n] = (n+1)\alpha^n u[n]$$

همانطوریکه قبلاً گفتیم عملکرد $h[n]$ در سیستم‌های گسسته همانند عملکرد $h(t)$ در سیستم‌های پیوسته زمان است. بنابراین باید بتوان کلیه خواص سیستم از قبیل پایداری، علیت، حافظه‌دار بودن را از

روی این پاسخ بدست آورد. به عنوان مثال، یک سیستم گسسته، پایدار است وقتی که پاسخ ضربه آن در رابطه زیر صدق کند.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty \quad (۱۰۳-۴)$$

به عنوان مثال سیستمی با پاسخ ضربه $h[n] = z^n$ هرگز پایدار نخواهد بود. در نتیجه برای چنین سیستمی تبدیل فوریه $h[n]$ واگرا خواهد بود. بنابراین در حالت کلی شرط لازم برای وجود یا همگرایی تبدیل فوریه هر دنباله گسسته زمان $x[n]$ این است که در رابطه (۱۰۳-۴) صدق کند.

۴-۵-۱۰ کانولوشن تناوبی^۵

خاصیت کانولوشن آنگونه که قبلاً مطرح شد، قابل اعمال برای دو دنباله متناوب نیست. چون در آن حالت جمع کانولوشن همگرا نخواهد شد. اما در اینجا کانولوشن تناوبی برای دو دنباله $\tilde{x}_2[n], \tilde{x}_1[n]$ که هر دو با دوره تناوب مشترک N متناوب هستند را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\tilde{y}[n] = \tilde{x}_1[n] \otimes \tilde{x}_2[n] = \sum_{m=\langle N \rangle} \tilde{x}_1[m] \tilde{x}_2[n-m] \quad (۱۰۴-۴)$$

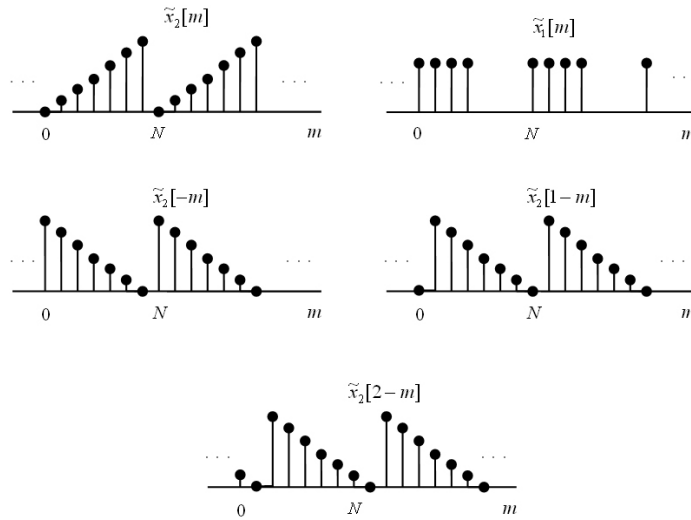
کاربرد معادله فوق را در شکل (۴-۲۱) نمایش داده شده است. سیگنال های $\tilde{x}_2[n-m], \tilde{x}_1[m]$ همانند کانولوشن معمولی در یکدیگر ضرب می شوند. توجه کنید که چون دو دنباله روی محور n با دوره تناوب N تناوبی هستند بنابراین حاصل ضرب آن دو نیز روی محور n با دوره تناوب N متناوب است. همچنین توجه کنید که مجموع در یک دوره تناوب محاسبه می شود. برای محاسبه $\tilde{y}[n]$ برای مقادیر متوالی $n, \tilde{x}_2[n-m]$ انتقال داده می شود با فرض اینکه m محور زمان است و با خارج شدن تدریجی یک دوره تناوب از فاصله مجموع، دوره تناوب دیگر وارد فاصله مشخص شده، می شود. بنابراین با افزایش n به اندازه N واحد، $\tilde{x}_2[n-m]$ به اندازه یک دوره تناوب کامل انتقال داده می شود و از اینجا می توان گفت که $\tilde{y}[n+N] = \tilde{y}[n]$ یا به عبارت دیگر $\tilde{y}[n]$ نیز با دوره تناوب N متناوب است. نتایج حاصل بستگی به انتخاب محل حدود مجموع ندارد و فقط باید حد مجموع یک دوره تناوب را شامل شود. برای کانولوشن تناوبی، خاصیت کانولوشن که قبلاً مطرح شد را می توان برحسب ضرایب سری فوریه مستقیماً بیان کرد، که در آن a_k, b_k, c_k به ترتیب ضرایب سری های فوریه، $\tilde{x}_2[n], \tilde{x}_1[n]$ می باشند.

$$c_k = N a_k b_k \quad (۱۰۵-۴)$$

اثبات: اگر $\tilde{x}_1[n]$ و $\tilde{x}_2[n]$ به ترتیب دارای ضرایب سری فوریه a_k و b_k باشند، داریم (دوره تناوب هر دنباله N است).

$$\tilde{y}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \tilde{x}_1[k] \tilde{x}_2[n-k] \quad (۱۰۶-۴)$$

⁵ Periodic Convolution



شکل (۴-۲۰) مراحل شکل‌گیری کانولوشن تناوبی در دنباله تناوبی

$$\tilde{x}_1[n] = \sum_{m=\langle N \rangle} a_m e^{jm\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \quad (10.7-4)$$

$$\tilde{x}_2[n] = \sum_{r=\langle N \rangle} b_r e^{jr\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

حدود مجموع را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم.

$$0 < r < N-1 \quad (10.8-4)$$

$$0 < m < N-1$$

با قرار دادن (۴-۱۰۷) و (۴-۱۰۸) در (۴-۱۰۶) داریم.

$$\begin{aligned} \tilde{y}[n] &= \sum_{k=\langle N \rangle} \sum_{m=0}^{N-1} a_m e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)mk} \sum_{r=0}^{N-1} b_r e^{jr\left(\frac{2\pi}{N}\right)(n-k)} \\ &= \sum_{k=\langle N \rangle} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} a_m b_r e^{jr\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)(m-r)} \end{aligned} \quad (10.9-4)$$

با تغییر ترتیب مجموع داریم.

$$\tilde{y}[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} a_m b_r e^{jr\frac{2\pi}{N}n} \sum_{k=\langle N \rangle} e^{jk\frac{2\pi}{N}(m-r)} \quad (11.0-4)$$

می‌بینیم مجموع آخر یعنی مجموعی که روی k عمل می‌کند، همواره مساوی صفر است مگر به ازاء $m=r$ در این حالت مقدار آن مساوی N می‌گردد که این مطلب تاکنون بارها مشاهده شده است. بنابراین می‌توان مجموع روی m و r را به یک مجموع تبدیل کرد و نوشت.

$$\tilde{y}[n] = \sum_{m=0}^{N-1} a_m b_m e^{jm\frac{2\pi}{N}n} N \quad (11.1-4)$$

اما سری فوریه $\tilde{y}[n]$ به صورت زیر است.

$$\tilde{y}[n] = \sum_{m=0}^{N-1} c_m e^{jm \frac{2\pi}{N} n} \quad (112-4)$$

از مقایسه (۱۱۱-۴) با (۱۱۲-۴) رابطه (۱۱۳-۴) را نتیجه می‌گیریم.

$$c_k = N a_k b_k \quad (113-4)$$

۴-۵-۱۱ تبدیل فوریه گسسته DFT^۶

همانگونه که گفتیم از مزیت‌های عمده روش‌های گسسته زمان بر پیوسته زمان وجود روش‌های مناسب و سریع در تجزیه و تحلیل دنباله‌ها و سیستم‌های گسسته زمان می‌باشد. با توجه به کاربرد روزافزون رایانه در علوم مهندسی می‌توان با سرعت و دقت مطلوب هرگونه عملیات دلخواهی را روی دنباله‌ها و سیستم‌های گسسته زمان از قبیل کانولوشن و غیره را انجام داد. در میان روش‌های مختلف تحلیل، روشی مناسب جهت استفاده در رایانه‌های دیجیتال بنام DFT وجود دارد که تحقق آن به روش سخت‌افزاری و یا نرم‌افزاری نیز بسیار ساده است. DFT نوعی تبدیل فوریه برای دنباله‌های دوره محدود به شمار می‌رود که در حقیقت نمونه‌های تبدیل فوریه گسسته زمان یا DTFT در فرکانس‌های $k \frac{2\pi}{N}$ می‌باشد و در جای خود نحوه انتخاب N به تفصیل مورد بررسی قرار می‌گیرد.

تعریف DFT

فرض کنید $x[n]$ دنباله‌ای با دوره محدود باشد، بنابراین یک عدد N_1 را می‌توان به قسمی یافت که

$$x[n] = 0 \quad n > N_1 - 1 \quad \text{و} \quad n < 0 \quad (114-4)$$

اکنون می‌توان دنباله تناوبی $\tilde{x}[n]$ را به قسمی تعریف کرد که در یک دوره تناوب مساوی $x[n]$ باشد.

اگر $N \geq N_1$ باشد و $\tilde{x}[n]$ با دوره تناوب N متناوب باشد، داریم.

$$\tilde{x}[n] = x[n] \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad (115-4)$$

ضرایب سری فوریه برای $\tilde{x}[n]$ با رابطه زیر داده می‌شوند.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}[n] e^{-jk \left(\frac{2\pi}{N}\right) n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk \left(\frac{2\pi}{N}\right) n} \end{aligned} \quad (116-4)$$

N جمله اول از مجموع ضرایب که بوسیله (۱۱۶-۴) نمایش داده می‌شوند، را DFT مربوط به $x[n]$

می‌نامند که آن را با $\tilde{X}[k]$ نمایش می‌دهند.

$$\tilde{X}[k] = a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk \left(\frac{2\pi}{N}\right) n} \quad k = 0, \dots, N - 1 \quad (117-4)$$

⁶ Discrete Fourier Transform

اهمیت عملی DFT در این است که از روی آن می‌توان دنباله اصلی دوره محدود را بازسازی کرد. از معادله (۴-۲۲) که برای دنباله متناوب $\tilde{x}[n]$ نوشتیم، می‌توان $\tilde{x}[n]$ را از روی a_k بدست آورد. بنابراین از معادلات (۴-۱۱۵) و (۴-۱۱۷) می‌توان رابطه (۴-۱۱۸) را بدست آورد

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{jk \left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4-118)$$

رابطه (۴-۱۱۸) را رابطه معکوس DFT یا (IDFT) می‌نامند. بنابراین یک دنباله دوره محدود را می‌توان به عنوان مجموعه‌ای محدود از مقادیر غیرصفر و یا به عنوان مجموعه‌ای محدود از $\tilde{X}[k]$ در DFT تصور کرد، به عبارت دیگر این تناظر یک‌به‌یک است.

اهمیت دوم DFT این است که الگوریتم‌های سریعی چون FFT برای محاسبه آن وجود دارد. می‌توان نشان داد که $\tilde{X}[k]$ در واقع با یک نمونه‌برداری در حوزه فرکانس از $X(\Omega)$ بدست می‌آید، که در

فرکانسهای متوالی $\frac{2\pi k}{N}$ برداشته می‌شوند. یعنی

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N} X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \quad \text{در یک دوره تناوب } 2\pi \quad (4-119)$$

برای این کار به جای Ω در رابطه تبدیل فوریه مقدار $k \frac{2\pi}{N}$ را قرار می‌دهیم.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (4-120)$$

$$X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \quad (4-121)$$

با مقایسه این رابطه با رابطه زیرمی‌توان به نتیجه مورد نظر رسید.

$$\tilde{X}(k) = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \quad (4-122)$$

اما چون $x[n]$ فقط در دوره $0 \leq n \leq N_1$ که $N_1 < N$ است، مقدار غیرصفر دارد می‌توان رابطه (۴-۱۲۲) را به صورت (۴-۱۲۳) نوشت.

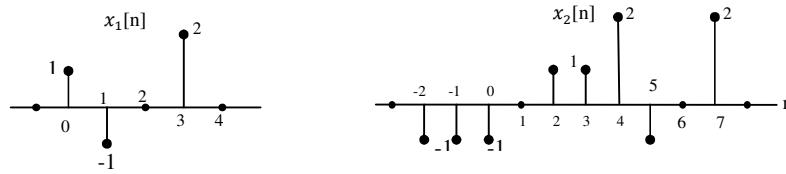
$$\tilde{X}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk \left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \quad (4-123)$$

که این همان رابطه (۴-۱۱۹) است.

باید دقت کرد که دوره تناوب نمونه‌برداری در حوزه فرکانس بگونه‌ای باشد که $N > N_1$ شود. در

غیراینصورت در بازسازی $x[n]$ از $X\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$ یا $\tilde{X}(k)$ دچار اشتباه خواهیم شد.

برای روشن شدن مطلب دو دنباله $x_1[n], x_2[n]$ را در نظر بگیرید.

شکل (۴-۲۱): نمایش دنباله‌های $x_1[n]$, $x_2[n]$ در حوزه زمان

تبدیل فوریه $X_1(\Omega)$ و $X_2(\Omega)$ به سادگی قابل محاسبه می‌باشند.

$$\begin{aligned} X_1(\Omega) &= 1 - e^{-j\Omega} + 2e^{-j3\Omega} \\ X_2(\Omega) &= -e^{-j2\Omega} - e^{-j\Omega} - 1 + e^{-j2\Omega} + e^{-j3\Omega} \\ &\quad + 2e^{-j4\Omega} - e^{-j5\Omega} + 2e^{-j7\Omega} \end{aligned} \quad (۴-۱۲۴)$$

اگر دوره تناوب نمونه‌برداری را $N = 4$ در نظر بگیریم به ازاء جمیع مقادیر k رابطه زیر را داریم.

$$X_1\left(\frac{2\pi}{4}k\right) = X_2\left(\frac{2\pi}{4}k\right) \quad (۴-۱۲۵)$$

چون

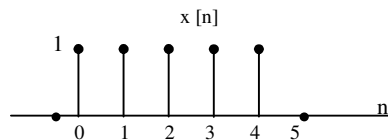
$$X_1\left(\frac{2\pi}{4}k\right) = 1 - e^{-j\frac{\pi k}{2}} + 2e^{-j\frac{3\pi k}{2}} \quad (۴-۱۲۶)$$

$$X_2\left(\frac{2\pi}{4}k\right) = -e^{-jk\pi} - e^{-j\frac{\pi k}{2}} - 1 + e^{-jk\pi} + e^{-j\frac{3\pi k}{2}} \quad (۴-۱۲۷)$$

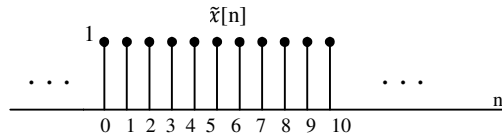
$$+ 2e^{-j2k\pi} - e^{-j\frac{5\pi k}{2}} + 2e^{-j\frac{7\pi k}{2}} = 1 - e^{-j\frac{\pi k}{2}} + 2e^{-j\frac{3\pi k}{2}}$$

بنابراین نمونه‌های بدست آمده از طیف هر دو دنباله یکسان هستند. بنابراین اگر چه از این نمونه‌ها می‌توان دوباره $x_1[n]$ را بازسازی کرد چون دوره تناوب آن ۴ است، ولی نمی‌توان $x_2[n]$ را بازسازی کرد چون دوره تناوب آن ۱۰ است. بنابراین اگر بخواهیم نمونه‌های برداشته شده از $X_2(\Omega)$ به طور یکتا $x_2[n]$ را بازسازی کند. لازم است حداقل $N \geq 10$ شود.

مثال (۴-۱۵): ضرایب DFT مربوط به دنباله $x[n]$ که در شکل (۴-۲۳) نمایش داده شده است را بیابید.

شکل (۴-۲۲) دنباله مربعی $x[n]$

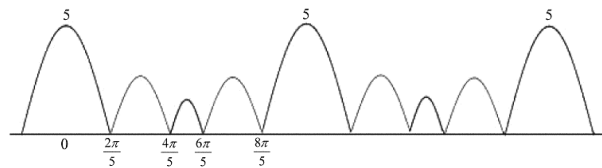
حل: اگر دنباله متناوب $\tilde{x}[n]$ را از روی $x[n]$ با دوره تناوب $N = 5$ بسازیم دنباله شکل (۴-۲۴) حاصل می‌شود. در این صورت ضرایب سری فوریه دنباله متناوب $\tilde{x}[n]$ به صورت (۴-۱۲۵) بدست می‌آیند.



شکل (۲۳-۴): دنباله متناوب که از روی $x[n]$ با دوره تناوب $N = 5$ ساخته شده است.

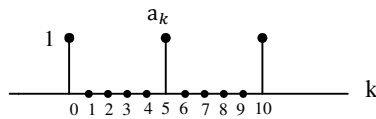
$$a_k = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^4 e^{-jk(\frac{2\pi}{5}k)n} = \begin{cases} 1 & k = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ 0 & \text{در غیراینصورت} \end{cases} \quad (۱۲۸-۴)$$

و البته می‌توان این ضرایب را به صورت نمونه‌های $F(x[n]) = X(\Omega)$ در فرکانس‌های $\Omega = k \frac{2\pi}{5}$ از $k = 1, 2, 3, \dots$ بدست آورد. قبلاً دیدیم که قدر مطلق تبدیل فوریه گسسته زمانی $x[n]$ به صورت زیر است.



شکل (۲۴-۴): طیف دامنه $|X(\Omega)|$

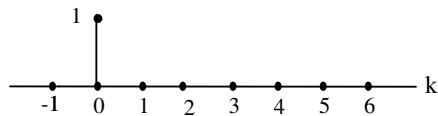
می‌توان به سادگی a_k را بدست آورد.



شکل (۲۵-۴): ضرایب سری فوریه $\tilde{x}[n]$

و ضرایب DFT مساوی ضرایب a_k در یک دوره متناوب می‌باشند.

$$X(k)$$

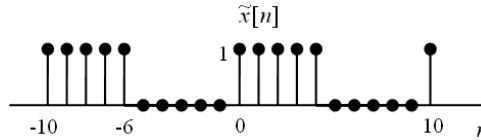


شکل (۲۶-۴): ضرایب DFT مربوط به $x[n]$

بنابراین

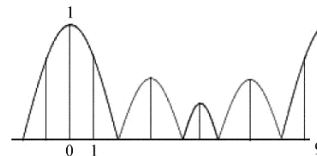
$$X[k] = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

اکنون فرض کنید $\tilde{x}[n]$ را از روی $x[n]$ با دوره تناوب $N = 10$ بسازیم.

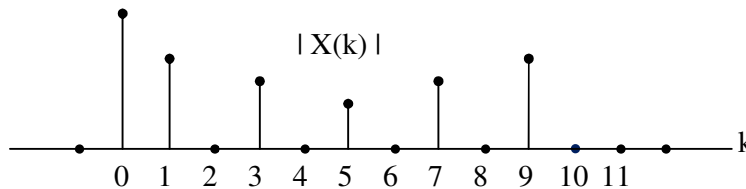


شکل (۴-۲۷): دنباله متناوب $\tilde{x}[n]$ که از روی $x[n]$ با دوره تناوب $N = 10$ ساخته شده است.

طیف $X(\Omega)$ مثل حالت اول است چون از روی $x[n]$ بدست می‌آید، اما اکنون باید از طیف $X(\Omega)$ در فرکانس‌های $\Omega = k \frac{2\pi}{10}$ نمونه‌برداری کنیم.



شکل (۴-۲۸): ضرایب سری فوریه مربوط به $\tilde{x}[n]$ برحسب k



شکل (۴-۲۹): ضرایب DFT مربوطه به $x[n]$

محدوده تغییرات دامنه $X(k)$ در شکل فوق نمایش داده شده است، که برابر یک دوره تناوب از a_k است.

محاسبه کانولوشن معمولی به کمک DFT

مهمترین کاربرد معادله (۴-۱۰۵) این است که به کمک این معادله DFT می‌توان محاسبات مربوط به کانولوشن معمولی دو دنباله دوره محدود را ساده کرد. به عنوان مثال فرض کنید.

$$x_1[n] = 0 \quad 0 \leq n \leq N_1 - 1 \quad \text{در خارج ناحیه} \quad (۴-۱۲۹)$$

$$x_2[n] = 0 \quad 0 \leq n \leq N_2 - 1 \quad \text{در خارج ناحیه} \quad (۴-۱۳۰)$$

همچنین فرض کنید $y[n]$ نمایانگر کانولوشن معمولی دو دنباله فوق باشد، بنابراین در خارج ناحیه

$$0 \leq n \leq N_1 + N_2 - 2 \quad (۴-۱۳۱)$$

$y[n]$ برابر صفر است.

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] = 0 \quad (۴-۱۳۲)$$

اکنون دوره تناوب N را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که

$$N \geq N_1 + N_2 - 1 \quad (۴-۱۳۳)$$

باشد و دنباله‌های $\tilde{x}_1[n]$ و $\tilde{x}_2[n]$ را با دوره تناوب N از روی سیگنالهای متناظر $x_1[n]$ و $x_2[n]$ می‌سازیم.

$$\tilde{x}_1[n] = x_1[n] \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (134-4)$$

$$\tilde{x}_2[n] = x_2[n] \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (135-4)$$

اگر $y[n]$ نمایانگر کانولوشن متناوب $\tilde{x}_1[n]$ و $\tilde{x}_2[n]$ باشد، داریم.

$$\tilde{y}[n] = \sum_{m \in \langle N \rangle} \tilde{x}_1[m] \tilde{x}_2[n-m] \quad (136-4)$$

در آن صورت در یک دوره تناوب حاصل کانولوشن تناوبی و معمولی یکسان است.

$$\tilde{y}[n] = y[n] \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (137-4)$$

توضیح معادله فوق در شکل (۴-۳۰) بوضوح دیده می‌شود. در این شکل فرض شده است که $N_1 = 5$ و $N_2 = 7$. بنا براین با انتخاب $N = 12$ سیگنالهای متناوب $\tilde{x}_1[n]$ و $\tilde{x}_2[n]$ ایجاد شده‌اند و حاصل کانولوشن تناوبی آنها در یک دوره تناوب گرفته شده است. دیده می‌شود که این حاصل با حاصل کانولوشن معمولی در یک دوره تناوب برابر است.

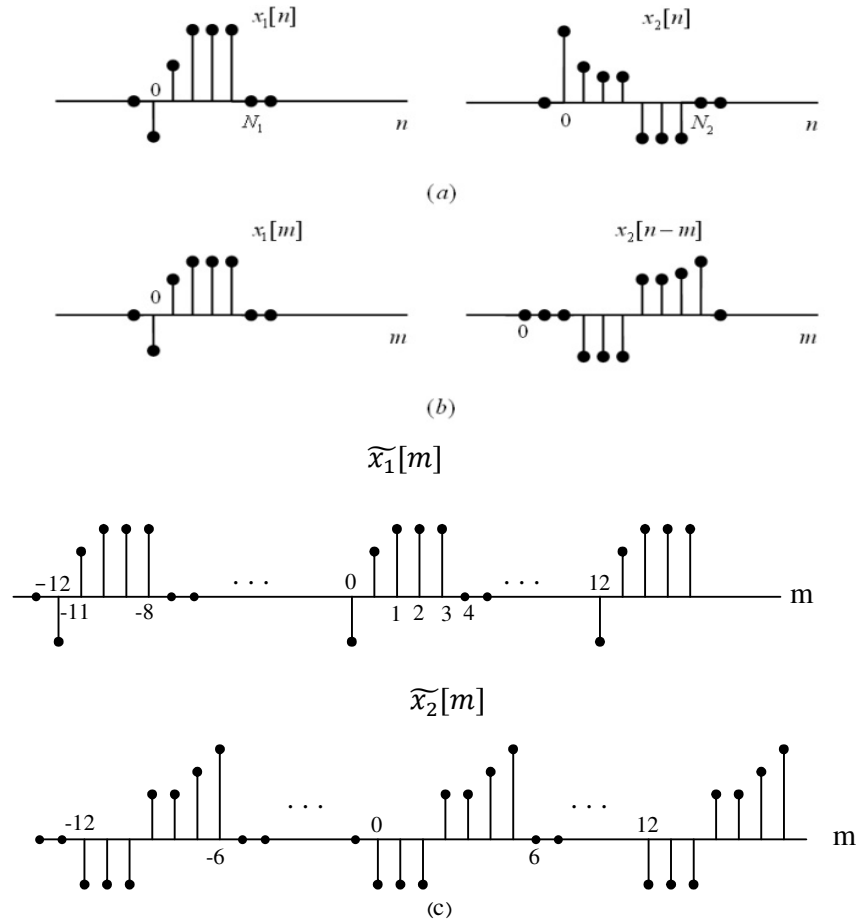
بنابراین ابتدا باید به $x_1[n]$ و $x_2[n]$ به اندازه کافی صفر اضافه کرد تا دوره تناوب سیگنال متناوب متناظر N شود (به گونه‌ای که $N \geq N_1 + N_2 - 1$ است). پاسخ کانولوشن معمولی $y[n]$ در خارج ناحیه $0 \leq n \leq N-1$ صفر است، بنابراین $y[n]$ که از کانولوشن معمولی (غیرتناوبی) $x_1[n]$ و $x_2[n]$ بدست می‌آید را می‌توان از کانولوشن تناوبی $\tilde{x}_1[n]$ و $\tilde{x}_2[n]$ بدست آورد. البته به شرط اینکه نتیجه را فقط در یک دوره تناوب N در نظر بگیریم. از طرفی می‌دانیم که سری فوریه $\tilde{y}_2[n]$ را می‌توان از روی سری‌های فوریه $\tilde{x}_1[n]$ و $\tilde{x}_2[n]$ بدست آورد و چون $\tilde{y}[n]$ و $\tilde{x}_1[n]$ و $\tilde{x}_2[n]$ متناظر با $y[n]$ و $x_1[n]$ و $x_2[n]$ در فاصله $0 \leq n \leq N-1$ می‌باشند، بنابراین از معادله (۴-۱۱۷) می‌بینیم که ضرایب سری‌های فوریه برای سیگنال‌های متناوب مساوی DFT‌های سه سیگنال غیرمتناوب می‌باشند.

بنابراین الگوریتم زیر را می‌توان برای پیدا کردن کانولوشن غیرمتناوب $x_1[n]$ و $x_2[n]$ ارائه کرد.

۱- ابتدا DFT، N نقطه‌ای مربوط به $x_1[n]$ و $x_2[n]$ ($X_1(k)$ و $X_2(k)$) را محاسبه می‌کنیم.

۲- دو DFT را در هم ضرب می‌کنیم تا DFT مربوط به $y[n]$ بدست آید.

$$Y(k) = X_1(k)X_2(k) \quad (138-4)$$



شکل (۴-۳۰): محاسبه کانولوشن معمولی دو دنباله با دوره‌های محدود (a) دنباله اصلی (b) کانولوشن معمولی $x_1[n]$ و $x_2[n]$ (c) کانولوشن تناوبی $\tilde{x}_1[n]$ و $\tilde{x}_2[n]$

۳-IDFT را حساب کرده و $y[n]$ را بدست می‌آوریم (معادله (۴-۱۱۸)) تنها محدودیت عملیات فوق این است که باید حتماً DFT، N نقطه‌ای را حساب کرد به گونه‌ای که $N \geq N_1 + N_2 - 1$ باشد. با توجه به وجود الگوریتم FFT برای محاسبه سریع DFT مجموع سه عملیات گفته شده روش بسیار ساده و سریعی را جهت محاسبه کانولوشن غیرتناوبی دو دنباله دوره محدود، ارائه میکند.

۴-۵-۱۲ خاصیت مدولاسیون

فرض کنید $y[n] = x_1[n]x_2[n]$ در این صورت طبق خاصیت مدولاسیون تبدیل فوری حاصل ضرب دنباله‌ها در حوزه زمان به کانولوشن تبدیل‌های فوری در حوزه فرکانس تبدیل می‌شوند.

$$x_1[n]x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X_1(\theta)X_2(\Omega - \theta)d\theta \quad (۱۳۹-۴)$$

اثبات: رابطه تبدیل فوریه به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]x_2[n]e^{-j\Omega n} \quad (۱۴۰-۴)$$

از طرفی می‌توان به جای $x_1[n]$ مقدارش را نوشت.

$$x_1[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta)e^{j\theta n}d\theta \quad (۱۴۱-۴)$$

با جایگذاری در (۱۴۰-۴) داریم

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n] \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{2\pi} X_1(\theta)e^{j\theta n}d\theta \right\} e^{-j\Omega n} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n]X_1(\theta)e^{j\theta n}d\theta e^{-j\Omega n} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta)d\theta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n]e^{-jn(-\theta+\Omega)} \end{aligned}$$

و بالاخره

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta)X_2(\Omega - \theta)d\theta \quad (۱۴۲-۴)$$

مثال (۱۶-۴): مطلوبست تبدیل فوریه دنباله $(-1)^n$.

$$x_1[n] = e^{j\pi n} = (-1)^n$$

حل: چون دنباله $x_1[n]$ متناوب است، داریم.

$$X_1(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\Omega - \frac{2\pi}{N}k)$$

توجه می‌شود که برای $x_1[n]$ دوره تناوب $N = 2$ می‌باشد.

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} = \frac{1}{2} [1 - e^{-j\frac{2\pi}{2}k}] = \frac{1}{2} [1 - e^{-jk\pi}]$$

بنابراین ضرایب سری فوریه به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

و با استفاده از تعریف تبدیل فوریه برای دنباله‌های متناوب می‌توان تبدیل فوریه دنباله $x_1[n]$ را بدست آورد.

$$X_1(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\Omega - k\pi)$$

که مجموع فوق فقط به ازاء k های فرد مقدار دارد، پس می‌توان رابطه فوق را به صورت زیر نیز نوشت.

$$X_1(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - (2k+1)\pi)$$

در شکل (۳۱-۴) مراحل کانولوشن $X_1(\Omega)$ و یک تبدیل فوریه دلخواه $X_2(\Omega)$ نشان داده شده است.

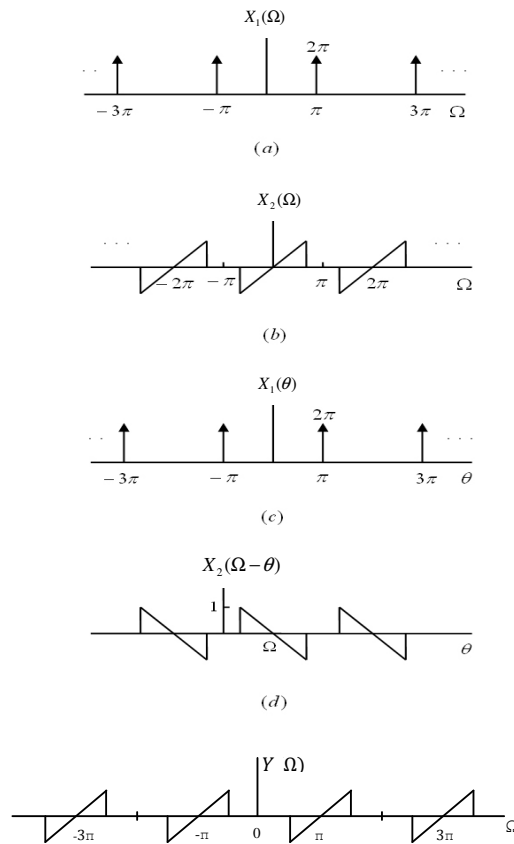
اگر $X_2(\Omega)$ را همانند شکل (b-۳۱-۴) را در نظر بگیریم، در آن صورت با انتخاب ناحیه انتگرال گیری بین 0 و 2π داریم.

$$\int_0^{2\pi} X_1(\theta)X_2(\Omega-\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} X_2(\Omega-\theta)\delta(\theta-\pi)d\theta = X_2(\Omega-\pi) \quad (۱۴۳-۴)$$

که طیف حاصل از ضرب $x_1[n]$ و $x_2[n]$ در شکل (d-۳۱-۴) رسم شده است. البته این نتیجه را از خاصیت انتقال به حوزه فرکانس نیز می توانستیم بدست آوریم. چون $e^{jm} = (-1)^n$ و طبق خواص تبدیل فوریه، ضرب یک دنباله مفروض در یک دنباله نمایی موجب انتقال طیف دنباله مفروض خواهد شد.

$$e^{jm} x_2[n] \xleftrightarrow{F} X_2(\Omega - \pi) \quad (۱۴۴-۴)$$

در اینجا می بینیم که ضرب یک دنباله در $(-1)^n$ باعث می شود که فرکانسهای بالا و پایین در طیف دنباله جابه جا شوند که این خاصیت بسیار مهمی است.



شکل (۳۱-۴): مراحل مختلف مدولاسیون گسسته زمان یک سیگنال دلخواه $x_2[n]$ با $x_1[n] = (-1)^n$

۴-۵-۱۳ خواص دوگانی

در اینجا به بررسی چند نوع دوگانی جدید و جالب می‌پردازیم.

ضرایب سری فوریه متناوب

در حالت پیوسته زمان، خاصیت تقارن یا دوگانی بین دو معادله مستقیم و معکوس تبدیل فوریه دیده می‌شد ولی در حالت تبدیل فوریه گسسته زمان چنین خاصیتی وجود ندارد، اما یک نوع تقارن در سری فوریه گسسته زمان دیده می‌شود. برای روشن شدن مطلب دو دنباله متناوب با دوره تناوب N را در نظر بگیرید که بوسیله رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند.

$$f[m] = \frac{1}{N} \sum_{r \in \langle N \rangle} g[r] e^{-jr \left(\frac{2\pi}{N}\right)m} \quad (۱۴۵-۴)$$

اگر $r=n, m=k$ در نظر بگیریم، داریم.

$$f[k] = \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} g[n] e^{-jk \left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \quad (۱۴۶-۴)$$

بنابراین $f[k]$ متناظر با ضرایب سری فوریه دنباله $y[n]$ خواهد بود.

$$g[n] \stackrel{F}{\leftrightarrow} f[k] \quad (۱۴۷-۴)$$

توجه شود که در نمایش فوق عملگر F مبین ارتباط سری فوریه بین دو دنباله می‌باشد.

اگر $r=-k, m=n$ در نظر بگیریم، داریم.

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k \in \langle N \rangle} y[-k] e^{jk \left(\frac{2\pi}{N}\right)n} = \sum_{k \in \langle N \rangle} \frac{1}{N} g[-k] e^{jk \left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \quad (۱۴۸-۴)$$

و در نتیجه $\frac{1}{N} g[-k]$ متناظر با ضرایب سری فوریه دنباله $f[n]$ خواهد بود.

$$f[n] \stackrel{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{N} g[-k] \quad (۱۴۹-۴)$$

در واقع عملیات فوق بیانگر این حقیقت است که ضرایب سری فوریه دنباله متناوب، a_k ، متناسب با دنباله اصلی $x[n]$ است که در زمان معکوس شده باشد ($x[n]$ دنباله‌ای است که a_k ضرایب سری فوریه آن است). این دوگانی در تمام خواص سری فوریه مشاهده می‌شود. دانشجویان به عنوان مثال می‌توانند موارد زیر را تحقیق کنند.

$$\begin{cases} e^{jm \left(\frac{2\pi}{N}\right)n} x[n] \stackrel{F}{\leftrightarrow} a_{k-m} \\ x[n-n_0] \stackrel{F}{\leftrightarrow} a_k e^{-jk \left(\frac{2\pi}{N}\right)n_0} \end{cases} \quad (۱۵۰-۴)$$

$$\begin{cases} \sum_{r \in \langle N \rangle} x[r] y[n-r] \stackrel{F}{\leftrightarrow} N a_k b_k \\ x[n] y[n] \stackrel{F}{\leftrightarrow} \sum_{l \in \langle N \rangle} a_l b_{k-l} \end{cases} \quad (۱۵۱-۴)$$

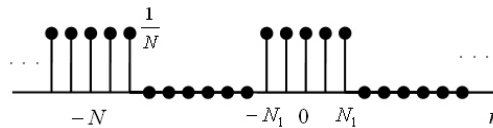
تمرین (۴-۴): صحت روابط فوق را تأیید کنید.

هر دستگاه نمایانگر یک جفت دوگانی است. کاربرد خاصیت دوگانی در مثال زیر نشان داده شده است. مثال (۱۷-۴): دنباله متناوب زیر را در نظر بگیرید.

$$x[n] = \frac{1}{N} \frac{\text{Sin}\left[\left(\frac{2\pi n}{N}\right)\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)\right]}{\text{Sin}\left(\frac{2\pi n}{2N}\right)}$$

ضرایب سری فوریه این دنباله را با استفاده از خاصیت دوگانی بدست آورید.

حل: دیدیم که اگر $x[k] \xleftrightarrow{F} g[n]$ ، در آن صورت $x[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{N} g[-k]$. بنابراین ضرایب سری فوریه $x[n]$ ، همان دنباله مربعی است که دامنه‌اش در $\frac{1}{N}$ ضرب شده و در زمان نیز معکوس شده است (به شکل (۳۲-۴) توجه کنید).



شکل (۳۲-۴): ضرایب سری فوریه دنباله $x[n]$ که در مثال (۱۷-۴) ذکر شده است.

تبدیل فوریه گسسته زمان و سری فوریه پیوسته زمان

نوعی دوگانی بین تبدیل فوریه گسسته زمان و ضرایب سری فوریه پیوسته زمان وجود دارد که از مقایسه معادلات مربوطه بوضوح مشاهده می‌شود. جهت مقایسه بهتر فرمول‌ها را دوباره تکرار می‌کنیم.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (۱۵۲-۴)$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (۱۵۳-۴)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (۱۵۴-۴)$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (۱۵۵-۴)$$

فرض کنید که $f(u)$ نمایانگر یک تابع متناوب پیوسته زمان باشد که دوره تناوب آن 2π است و همچنین فرض کنید $g[m]$ یک دنباله گسسته باشد که با $f(u)$ به صورت زیر مربوط باشد.

$$f(u) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g[m] e^{-jum} \quad (۱۵۶-۴)$$

با قرار دادن $u = \Omega$ و $m = n$ می‌بینیم که $f(\Omega)$ تبدیل فوریه $g[n]$ است، همچنین می‌توان $g[m]$ را از $f(u)$ بازسازی کرد.

$$g[n] \leftrightarrow f(\Omega) \quad (۱۵۷-۴)$$

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

$$g[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{jmu} du \quad (158-4)$$

اگر در رابطه (155-4) $m = -k, u = t$ قرار دهیم، رابطه زیر را بدست خواهیم آورد.

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[-k] e^{jkt} \quad (159-4)$$

بنابراین $g[-k]$ ضرایب سری فوریه $f(t)$ می باشند.

$$f(t) \stackrel{F}{\leftrightarrow} g[-k] \quad (160-4)$$

که سری فوریه فوق مربوط به حالت پیوسته زمان باشد. معنی عبارات فوق این است که اگر فرض کنیم $x[n]$ یک دنباله گسسته زمان با تبدیل فوریه $X(\Omega)$ باشد، از آنجائیکه $X(\Omega)$ متناوب و تابعی پیوسته از Ω است، می توان ضرایب سری فوریه آن را بدست آورد به طوریکه $\omega_0 = 1$ و به جای t از متغیر Ω به عنوان متغیر پیوسته استفاده خواهیم کرد. از خاصیت دوگانی درمی یابیم که ضرایب سری فوریه $X(\Omega)$ همان دنباله اصلی $x[n]$ هستند که در زمان معکوس شده باشد. مثال (18-4): سیگنال پیوسته زمان $x(t)$ که با دوره تناوب 2π متناوب است را در نظر بگیرید. فرض کنید $x(t)$ دارای ضرایب سری فوریه به صورت زیر باشد.

$$a_k = \begin{cases} 1 & |k| \leq N_1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

شکل (4-33): نمایش ضرایب سری فوریه سیگنال پیوسته زمانی $x(t)$

مطلوبست پیدا کردن سیگنال $x(t)$.

حل: اگر از خاصیت دوگانی استفاده شود، می توان به سادگی $x(t)$ را بدست آورد.

$$x(t) = \frac{\text{Sin}(N_1 + \frac{1}{2})t}{\text{Sin} \frac{t}{2}}$$

به طریق مشابه تبدیل فوریه گسسته زمان $X(\Omega)$ که در یک دوره تناوب $-\pi < \Omega < \pi$ تعریف شده است را در نظر می گیریم.

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq w \\ 0 & w < |\Omega| \leq \pi \end{cases} \quad (161-4)$$

می توان $X(\Omega)$ را به عنوان یک سیگنال مربعی متناوب با سری فوریه زیر در نظر گرفت.

$$x[n] = \frac{\text{Sin}wn}{\pi n} = \frac{w}{\pi} \text{Sinc} \left(\frac{wn}{\pi} \right) \quad (162-4)$$

چون برای چنین سیگنالی $T_1 = w$ ، $\omega_0 = 1$ می باشد (به فصل 3 مراجعه شود).

در جدول (۴-۱) خواص دوگانی در حوزه پیوسته و گسسته زمان نمایش داده شده‌اند.

	پیوسته زمان		گسسته زمان	
	حوزه زمان	حوزه فرکانس	حوزه زمان	حوزه فرکانس
سری فوریه	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ پیوسته زمان متناوب در زمان	$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ فرکانس گذشته غیرمتناوب در فرکانس	$x[n] = \sum_{n=\langle N \rangle} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$ گسسته زمان متناوب در زمان	$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}$ گسسته در فرکانس متناوب در فرکانس
تبدیل فوریه	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$ پیوسته زمان غیرمتناوب	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ پیوسته در فرکانس غیرمتناوب در فرکانس	$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$ گسسته زمان غیرمتناوب در زمان	$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$ پیوسته در فرکانس متناوب در فرکانس

جدول (۴-۱)

۴-۶ نمایش تبدیل فوریه گسسته زمانی DTFT به صورت قطبی

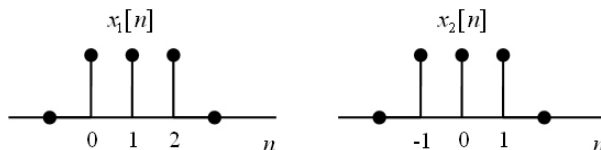
فرض کنید $x[n]$ یک دنباله گسسته زمانی با تبدیل فوریه $X(\Omega)$ باشد، همانطور که می‌دانیم $X(\Omega)$ یک تابع مختلط می‌باشد، بنابراین می‌توان آن را به صورت قطبی نمایش داد.

$$X(\Omega) = |X(\Omega)| e^{j\angle X(\Omega)} \quad (۴-۱۶۳)$$

چون $X(\Omega)$ با دوره تناوب 2π متناوب است، لازم است دامنه و زاویه $X(\Omega)$ نیز با دوره تناوب 2π متناوب باشند. $|X(\Omega)|$ شامل اطلاعات مربوط به دامنه نمایی‌های مختلطی است که در $x[n]$ وجود دارند و $\angle X(\Omega)$ نیز زاویه نمایی‌ها را معین می‌کند. بنابراین دانستن هر دو عامل قدر مطلق و زاویه برای تعیین یکتای $X(\Omega)$ لازم و کافی است. به هر حال می‌توان چندین دنباله متفاوت را یافت که دارای دامنه تبدیل فوریه یکسان باشند.

برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید.

مثال (۴-۱۹): تبدیل فوریه گسسته زمان DTFT مربوط به دو دنباله زیر را بیابید.



شکل (۴-۳۴): دو دنباله متفاوت که دارای قدر مطلق تبدیل فوریه یکسان هستند

حل: ابتدا برای $x_1[n]$ داریم

$$X_1(\Omega) = \sum_{n=0}^2 e^{-j\Omega n} = 1 + e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega}$$

و برای $x_1[n]$ نیز داریم.

$$X_2(\Omega) = \sum_{n=-1}^1 e^{-j\Omega n} = e^{j\Omega} + 1 + e^{-j\Omega}$$

اگر از رابطه اول عبارت $e^{-j\Omega}$ را فاکتور بگیریم، رابطه دوم بدست می‌آید، یعنی

$$X_1(\Omega) = e^{-j\Omega} [X_2(\Omega)]$$

بنابراین دامنه هر دو تبدیل فوریه یکسان است.

$$|X_1(\Omega)| = |X_2(\Omega)|$$

نمایش DTFT به صورت قطبی بسیار مفید است. مثلاً در مورد سیستم‌های LTI که در آنها رابطه بین خروجی، ورودی و تابع شبکه به صورت زیر است.

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) \quad (۴-۱۶۴)$$

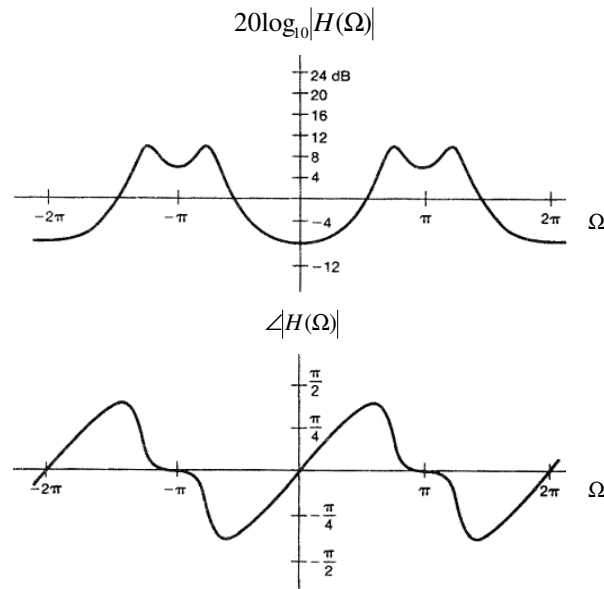
می‌توان ارتباط بین دامنه‌ها و زاویه‌ها را به صورت زیر نوشت.

$$|Y(\Omega)| = |H(\Omega)||X(\Omega)| \quad (۴-۱۶۵)$$

$$\angle Y(\Omega) = \angle H(\Omega) + \angle X(\Omega) \quad (۴-۱۶۶)$$

لازم است توجه شود که دامنه $X(\Omega)$ تابعی زوج و متناوب از Ω است و زاویه $X(\Omega)$ تابعی فرد و متناوب از Ω می‌باشد. این مطلب با توجه به نمایش تبدیل فوریه به صورت قطبی کاملاً آشکار می‌شود (به روابط (۴-۷۱) الی (۴-۷۴) مراجعه کنید). پس $|X(\Omega)|$ یک تابع زوج و متناوب از Ω است، چون از مجموع دو تابع زوج و متناوب با دوره تناوب یکسان تشکیل شده است و همچنین $\angle X(\Omega)$ یک تابع فرد و متناوب از Ω است، چون از حاصل تقسیم دو تابع زوج و فرد که هر دو با یک دوره تناوب یکسان متناوب هستند، تشکیل شده است. به عنوان مثالی از $|X(\Omega)|$ و $\angle X(\Omega)$ به شکل (۴-۳۵) توجه کنید.

به دلیل زوج بودن دامنه تبدیل فوریه، دانستن آن فقط در هر فاصله به طول π کافی است. همچنین با فرد بودن زاویه تبدیل فوریه، دانستن آن در هر فاصله به طول π جهت مشخص کردن $X(\Omega)$ به طور یکتا کافی می‌باشد.



شکل (۴-۳۵): نمای قدر مطلق و زاویه تبدیل فوریه.

۴-۷ تابع انتقال سیستم‌هایی که بوسیله معادله تفاضلی با ضرایب ثابت توصیف می‌گردند

۴-۷-۱ محاسبه پاسخ ضربه و تابع انتقال

همانگونه که در فصل دوم توضیح داده شد سیستم‌های LTI گسسته زمان را می‌توان به وسیله یک معادله تفاضلی با ضرایب ثابت و با فرض شرایط استراحت اولیه توصیف نمود. در حالت کلی یک معادله تفاضلی از مرتبه M ام به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (4-167)$$

در اولین قدم جهت محاسبه پاسخ ضربه لازم است فرض کنیم که تبدیل فوریه $h[n]$ ، $y[n]$ و $x[n]$ وجود دارند و همگرا هستند. در این صورت می‌توان از طرفین رابطه (۴-۱۶۷) تبدیل فوریه گرفت و رابطه (۴-۱۶۸) و سپس (۴-۱۶۹) را بدست آورد.

$$\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\Omega} Y(\Omega) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\Omega} X(\Omega) \quad (4-168)$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\Omega}} \quad (4-169)$$

بنابراین با داشتن معادله تفاضلی به راحتی می‌توان تابع انتقال سیستم را بدست آورد.

مثال (۴-۲۱): پاسخ فرکانسی یک سیستم LTI که توسط معادله تفاضلی زیر توصیف می‌گردد را با فرض شرایط استراحت اولیه بدست آورید.

$$y[n] - \alpha y[n-1] = x[n] \quad (۱۷۰-۴)$$

حل: اگر فرض کنیم $|\alpha| < 1$ باشد با گرفتن تبدیل فوریه از دو طرف رابطه (۱۷۰-۴) به رابطه (۱۷۱-۴) می‌رسیم.

$$Y(\Omega) - \alpha e^{-j\Omega} Y(\Omega) = X(\Omega) \quad (۱۷۱-۴)$$

بنابراین تابع انتقال سیستم از رابطه زیر بدست می‌آید

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} \quad (۱۷۲-۴)$$

رابطه (۱۷۲-۴) یک رابطه آشنا برای دانشجویان و در حقیقت تبدیل فوریه دنباله زیر می‌باشد.

$$h[n] = \alpha^n u[n] \quad (۱۷۳-۴)$$

مثال (۲۲-۴): با توجه به معادله تفاضلی زیر که مبین یک سیستم LTI و علی می‌باشد، مطلوبست تابع انتقال سیستم.

$$y[n] - y[n-1] + \frac{2}{9} y[n-2] = x[n] \quad (۱۷۴-۴)$$

حل: با فرض وجود تبدیل فوریه $x[n], y[n], h[n]$ از تبدیل فوریه (۱۷۴-۴) به رابطه (۱۷۵-۴) می‌رسیم.

$$Y(\Omega) - e^{-j\Omega} Y(\Omega) + \frac{2}{9} e^{-j2\Omega} Y(\Omega) = X(\Omega) \quad (۱۷۵-۴)$$

و یا

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega} + \frac{2}{9} e^{-j2\Omega}} \quad (۱۷۶-۴)$$

با تفکیک (۱۷۶-۴) به کسور جزئی داریم.

$$H(\Omega) = \frac{-1}{1 - \frac{1}{3} e^{-j\Omega}} + \frac{2}{1 - \frac{2}{3} e^{-j\Omega}} \quad (۱۷۷-۴)$$

بنابراین به سادگی می‌توان $h[n]$ را بدست آورد.

$$h[n] = -\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{2}{3}\right)^n u[n] \quad (۱۷۸-۴)$$

مثال (۲۲-۴): فرض کنید ورودی سیستم مذکور در رابطه (۱۷۷-۴) به صورت زیر باشد.

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

مطلوبست پاسخ سیستم.

حل: تبدیل فوریه ورودی برابر است با

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} e^{-j\Omega}}$$

بنابراین طبق خاصیت مدولاسیون می توان تبدیل فوری خروجی را بدست آورد.

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega})(1 - \frac{2}{3}e^{-j\Omega})}$$

می توان رابطه فوق را به کسور جزئی بسط داد، در این صورت داریم:

$$Y(\Omega) = \frac{a}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega}} + \frac{b}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}} + \frac{c}{1 - \frac{2}{3}e^{-j\Omega}}$$

مقادیر a, b, c باید در روابط زیر صدق کنند.

$$a + b + c = 1$$

$$-\frac{11}{12}a - b - \frac{7}{12}c = 0$$

$$\frac{1}{6}a + \frac{2}{9}b + \frac{1}{12}c = 0$$

از حل معادلات فوق به روش کرامر می توان a, b, c را بدست آورد.

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 7/12 \\ 0 & 2/9 & 1/12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 11/12 & 1 & 7/12 \\ 1/6 & 2/9 & 1/12 \end{vmatrix}} = \frac{-5}{\frac{108}{432}} = -4$$

و به همین ترتیب می توان مقادیر b, c را بدست آورد.

$$b = 1.8, c = 3.2$$

۴-۷-۲ نمایش سیستم LTI گسسته زمان به کمک بلوک های اساسی

هر سیستم LTI گسسته زمان که به صورت یک معادله تفاضلی با ضرایب ثابت داده شده است، را می توان به کمک بلوک های اساسی نمایش داد. در اینجا منظور ما از بلوک های اساسی بلوک تأخیر، ضرب کننده و جمع کننده می باشد. این نوع نمایش کاربرد فراوانی در شبیه سازی سیستم های گسسته زمان به کمک رایانه دارد.

دو نوع ساختار برای نمایش سیستم های LTI گسسته زمان به کمک بلوک های اساسی وجود دارد که این دو نوع ساختار کاملاً معادل می باشند (اگرچه از لحاظ ظاهر و تعداد بلوک های مورد استفاده متفاوت هستند). به عنوان مثال جهت سادگی فرض می کنیم در معادله تفاضلی (۴-۱۶۷)، $M = N$ باشد.

ساختار سری هنگامی بدست می‌آید که بتوان صورت و مخرج رابطه (۴-۱۶۹) را به صورت حاصل ضرب عوامل تجزیه کرد. در اینصورت می‌توان $H(\Omega)$ را به صورت زیر نوشت.

$$H(\Omega) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^N (1 + \mu_k e^{-j\Omega})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 + \eta_k e^{-j\Omega})} \quad (۴-۱۷۹)$$

توجه شود که در حالت کلی η_k, μ_k اعداد مختلطی هستند. آن تعداد از ریشه‌ها که مختلط هستند به صورت دو به دو مزدوج ظاهر می‌شوند، در نتیجه می‌توان با یکی کردن ریشه‌های مزدوج به فرم زیر به $H(\Omega)$ دست یافت.

$$H(\Omega) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^P (1 + \beta_{1k} e^{-j\Omega} + \beta_{2k} e^{-j2\Omega}) \prod_{k=1}^{N-2P} (1 + \mu_{1k} e^{-j\Omega})}{a_0 \prod_{k=1}^Q (1 + \alpha_{1k} e^{-j\Omega} + \alpha_{2k} e^{-j2\Omega}) \prod_{k=1}^{N-2Q} (1 + \eta_k e^{-j\Omega})} \quad (۴-۱۸۰)$$

در رابطه فوق P و Q تعداد جفت ریشه‌های مزدوج صورت و مخرج می‌باشند. بنابراین اکنون تمام ضرایب معادله (۴-۱۸۰) حقیقی هستند و می‌توان تابع $H(\Omega)$ را به صورت حاصلضرب توابع درجه یک و درجه دو نوشت و در نتیجه ساختاری که توسط معادله (۴-۱۸۰) پیشنهاد می‌شود یک ساختار سری از سیستم‌های مرتبه اول و دوم می‌باشد. جهت روشن‌تر شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید. مثال (۴-۲۳): $H(\Omega)$ را توسط بلوک‌های اساسی بسازید.

$$H(\Omega) = \frac{b_0 (1 + \beta_{11} e^{-j\Omega} + \beta_{21} e^{-j2\Omega}) (1 + \mu_1 e^{-j\Omega})}{a_0 (1 + \alpha_{11} e^{-j\Omega} + \alpha_{21} e^{-j2\Omega}) (1 + \eta_1 e^{-j\Omega})}$$

حل: ابتدا $H(\Omega)$ را به دو جزء به صورت زیر تقسیم می‌کنیم.

$$H(\Omega) = H_1(\Omega) H_2(\Omega)$$

که در آن

$$H_1(\Omega) = \frac{b_0 (1 + \beta_{11} e^{-j\Omega} + \beta_{21} e^{-j2\Omega})}{a_0 (1 + \alpha_{11} e^{-j\Omega} + \alpha_{21} e^{-j2\Omega})}$$

$$H_2(\Omega) = \frac{1 + \mu_1 e^{-j\Omega}}{1 + \eta_1 e^{-j\Omega}}$$

با نوشتن $H_1(\Omega)$ به صورت $\frac{Y_1(\Omega)}{X(\Omega)}$ داریم.

$$\frac{Y_1(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{b_0 (1 + \beta_{11} e^{-j\Omega} + \beta_{21} e^{-j2\Omega})}{a_0 (1 + \alpha_{11} e^{-j\Omega} + \alpha_{21} e^{-j2\Omega})}$$

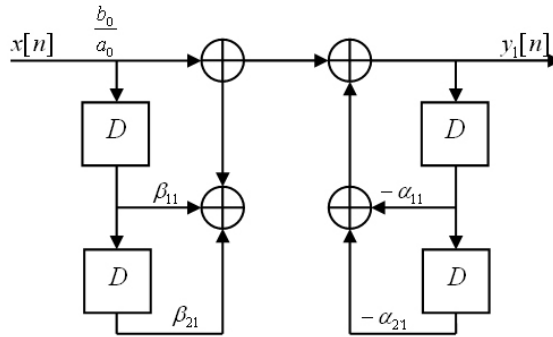
و در نتیجه

$$Y_1(\Omega) [1 + \alpha_{11} e^{-j\Omega} + \alpha_{21} e^{-j2\Omega}] = \frac{b_0}{a_0} X(\Omega) [1 + \beta_{11} e^{-j\Omega} + \beta_{21} e^{-j2\Omega}]$$

و در حوزه زمان می‌توان رابطه ورودی و خروجی را بدین صورت نوشت.

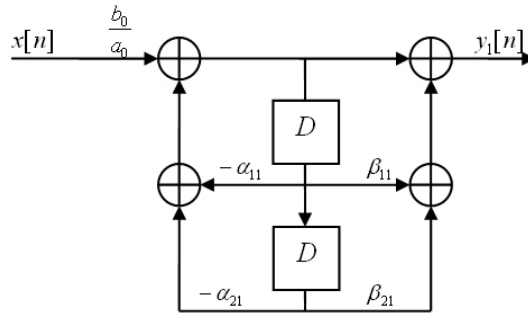
$$\begin{aligned}
 & y_1[n] + \alpha_{11}y_1[n-1] + \alpha_{21}y_1[n-2] \\
 &= \frac{b_0}{a_0} \{x[n] + \beta_{11}x[n-1] + \beta_{21}x[n-2]\} \\
 y_1[n] &= \frac{b_0}{a_0} \{x[n] + \beta_{11}x[n-1] + \beta_{21}x[n-2]\} - \alpha_{11}y_1[n-1] + \alpha_{21}y_1[n-2]
 \end{aligned}$$

ساختار رابطه فوق به صورت شکل صفحه بعد است. (نوع مستقیم شماره ۱)



شکل (۴-۲۶): نمایش نوع مستقیم شماره ۱ مربوط $H_1(\Omega)$ در مثال (۴-۲۳)

البته می توان ساختار فوق را با جابه جا کردن جزئی در سیستم به صورت زیر نمایش داد. (نوع مستقیم شماره ۲)



شکل (۴-۳۷): نمایش نوع مستقیم شماره ۲ مربوط به $H_1(\Omega)$ در مثال (۴-۲۳)

اکنون لازم است $H_2(\Omega)$ را نیز به کمک بلوک های اساسی بسازیم. این کار را با نوشتن $H_2(\Omega)$ به صورت حاصل تقسیم $Y(\Omega)$ بر $Y_1(\Omega)$ آغاز می کنیم.

$$H_2(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{Y_1(\Omega)} = \frac{1 + \mu_1 e^{-j\Omega}}{1 + \eta_1 e^{-j\Omega}}$$

رابطه فوق را می توان به صورت زیر نوشت.

$$Y(\Omega)(1 + \eta_1 e^{-j\Omega}) = Y_1(\Omega)(1 + \mu_1 e^{-j\Omega})$$

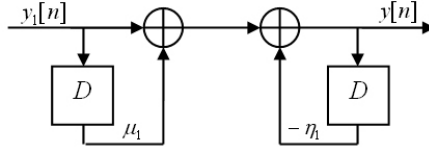
و در حوزه زمان می توان نوشت.

$$y[n] + \eta_1 y[n-1] = y_1[n] + \mu_1 y_1[n-1]$$

و یا

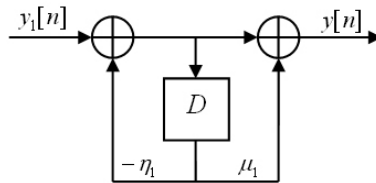
$$y[n] = y_1[n] + \mu_1 y_1[n-1] - \eta_1 y_1[n-1]$$

بنابراین می‌توان نمایش زیر را برای تابع انتقال $H_2(\Omega)$ ارائه نمود (نوع مستقیم شماره ۱).



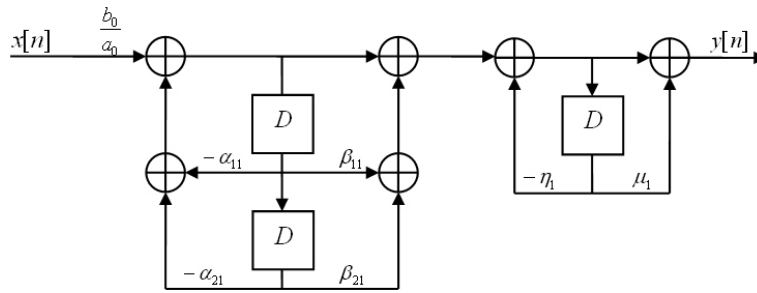
شکل (۳۸-۴): نمایش نوع مستقیم شماره ۱ مربوط به $H_2(\Omega)$ در مثال (۲۳-۴)

و نمایش نوع مستقیم شماره ۲ به صورت زیر بدست می‌آید.



شکل (۳۹-۴): نمایش نوع مستقیم شماره ۲ مربوط به $H_2(\Omega)$ در مثال (۲۳-۴)

اکنون از ترکیب دو شکل (۳۷-۴) و (۳۹-۴) می‌توان ساختار سری مربوط به مثال (۲۳-۴) را بدست آورد.



شکل (۴۰-۴): نمایش ساختار سری مثال (۲۳-۴)

واضح است که می‌توان جای دو بلوک $H_1(\Omega)$ و $H_2(\Omega)$ را در ساختار سری عوض کرد. ساختار معادل دیگری که برای سیستم با پاسخ فرکانسی (۱۶۹-۴) می‌توان در نظر گرفت بنام ساختار موازی معروف است. این ساختار از نوشتن معادله (۱۶۹-۴) به صورت (۱۸۱-۴) استخراج می‌گردد.

$$H(\Omega) = \frac{b_N}{b_N} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 + \eta_k e^{-j\Omega}} \quad (181-4)$$

در اینجا نیز η_k در حالت کلی عدد مختلط می‌باشد. اگر هر زوج ریشه‌های مختلط مزدوج را در یک جمله مختصر کنیم، رابطه (۱۸۱-۴) بصورت (۱۸۲-۴) تبدیل می‌شود.

$$H(\Omega) = \frac{b_N}{b_N} + \sum_{k=1}^Q \frac{\beta_{0k} + \beta_{1k} e^{-j\Omega}}{1 + \alpha_{1k} e^{-j\Omega} + \alpha_{2k} e^{-j2\Omega}} + \sum_{k=1}^{N-2Q} \frac{A_k}{1 + \eta_k e^{-j\Omega}} \quad (182-4)$$

در رابطه (۴-۱۸۱) تمام ضرایب حقیقی هستند و می توان آن را بوسیله بلوک های اساسی ساخت. جهت روشن تر شدن مطلب به مثال (۴-۲۴) توجه کنید.

مثال (۴-۲۴): $H(\Omega)$ را توسط بلوک های اساسی بسازید.

$$H(\Omega) = 1 + \sum_{k=1}^2 \frac{\beta_{0k} + \beta_{1k}e^{-j\Omega}}{1 + \alpha_{1k}e^{-j\Omega} + \alpha_{2k}e^{-j2\Omega}} + \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{1 + \eta_k e^{-j\Omega}}$$

حل: می توان $H(\Omega)$ را به صورت زیر نوشت.

$$H(\Omega) = 1 + H_1(\Omega) + H_2(\Omega) + H_3(\Omega) + H_4(\Omega)$$

که در آن

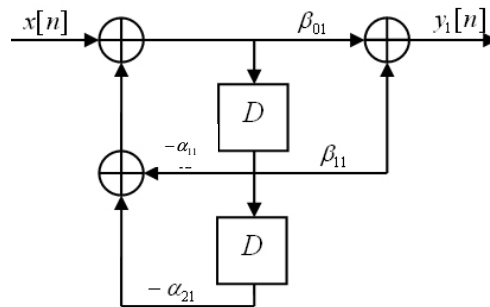
$$H_1(\Omega) = \frac{\beta_{01} + \beta_{11}e^{-j\Omega}}{1 + \alpha_{11}e^{-j\Omega} + \alpha_{21}e^{-j2\Omega}}$$

$$H_2(\Omega) = \frac{\beta_{02} + \beta_{12}e^{-j\Omega}}{1 + \alpha_{12}e^{-j\Omega} + \alpha_{22}e^{-j2\Omega}}$$

$$H_3(\Omega) = \frac{A_1}{1 + \eta_1 e^{-j\Omega}}$$

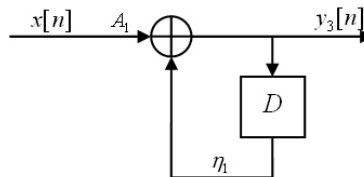
$$H_4(\Omega) = \frac{A_2}{1 + \eta_2 e^{-j\Omega}}$$

ابتدا $H_1(\Omega)$ را مشابه روشی که قبلاً توضیح دادیم، می سازیم. نتیجه کار به صورت شکل زیر است.



شکل (۴-۴۱): نمایش نوع مستقیم شماره ۲ برای $H_1(\Omega)$ مربوط به مثال (۴-۲۴)

همچنین می توان ساختار شکل (۴-۴۲) را برای $H_3(\Omega)$ بدست آورد.



شکل (۴-۴۲): نمایش ساختار سیستم $H_3(\Omega)$ مربوط به مثال (۴-۲۴)

همین کار را برای هر چهار سیستم تشکیل دهنده سیستم اصلی نیز انجام می‌دهیم و در نهایت ساختار سیستم کلی از ترکیب موازی این سیستم‌ها بدست می‌آید. این کار به صورت تمرین به عهده دانشجویان گذاشته می‌شود.

۴-۸ پاسخ ضربه و پله سیستم‌های LTI گسسته زمان مرتبه اول و دوم

به دلیل اهمیت این دو سیستم در ساخت سیستم‌های مراتب بالاتر می‌توان این سیستم‌ها را سیستم‌های پایه در نظر گرفت بنابراین بررسی آنها لازم و ضروری است.

۴-۸-۱ پاسخ ضربه و پله سیستم مرتبه اول

سیستم مرتبه اول در حالت کلی با معادله تفاضلی زیر مشخص می‌گردد.

$$y[n] - \alpha y[n-1] = x[n] \quad (183-4)$$

و پاسخ فرکانسی آن به صورت زیر است (با فرض $|\alpha| < 1$).

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} \quad (184-4)$$

بنابراین پاسخ ضربه سیستم مرتبه اول برابر است با

$$h[n] = \alpha^n u[n] \quad (185-4)$$

چند نمونه از این پاسخ ضربه‌ها به ازاء مقادیر مختلف α در شکل (۴-۴۳) نمایش داده شده است. پاسخ پله نیز به صورت زیر از کانولوشن پاسخ ضربه در دنباله پله واحد قابل محاسبه است.

$$s[n] = h[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n-k] u[k] \quad (186-4)$$

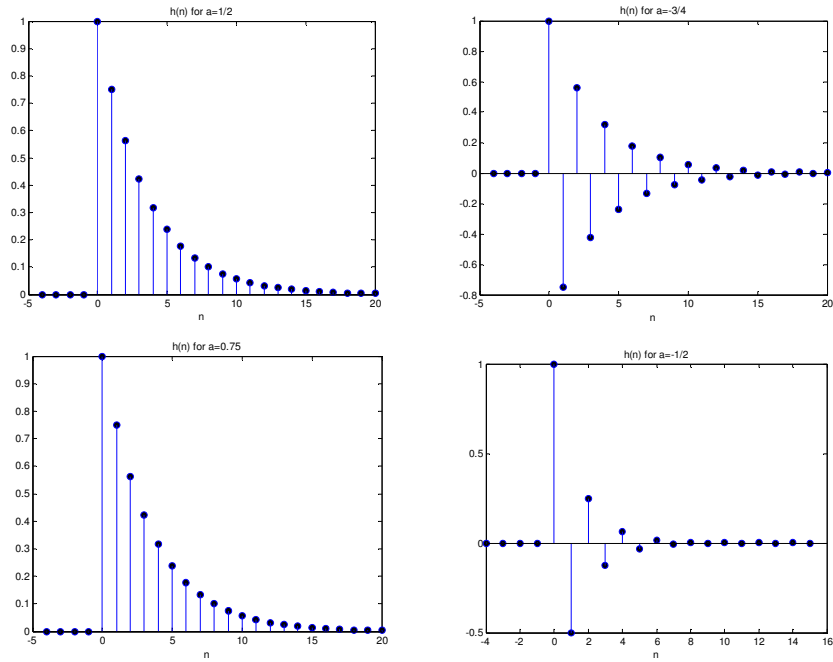
$$s[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{n-k} u[n-k] = \alpha^n \sum_{k=0}^n \alpha^{-k} = \alpha^n \frac{1 - \alpha^{-(n+1)}}{1 - \alpha^{-1}} \quad (187-4)$$

و یا

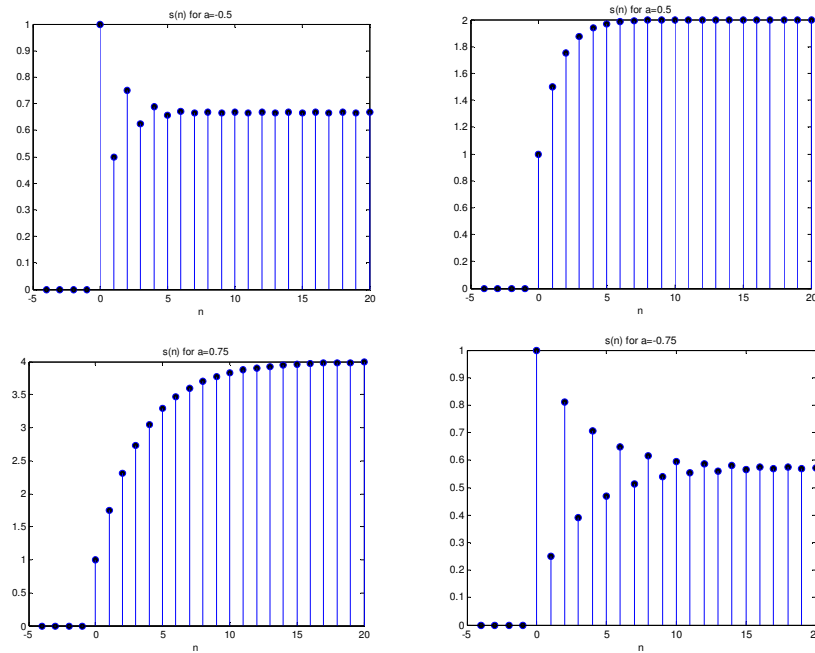
$$s[n] = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} u[n] \quad (188-4)$$

چند نمونه از این پاسخ پله‌ها به ازاء مقادیر مختلف $\alpha = a$ از روی رابطه (۴-۱۸۴) در شکل (۴-۴۴) رسم شده است.

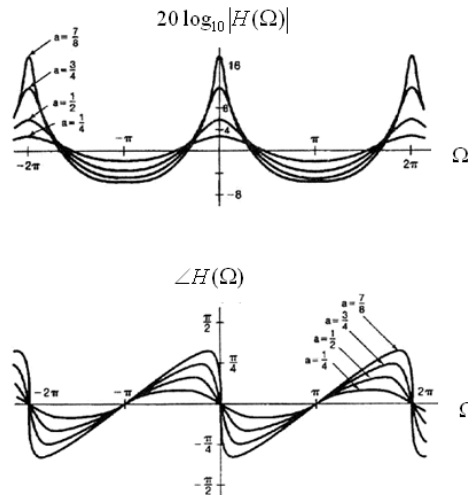
همچنین دامنه و فاز تابع انتقال این سیستم به ازاء مقادیر مختلف $\alpha = a$ در شکل (۴-۴۵) رسم شده است.



شکل (۴۳-۴): نمونه‌هایی از پاسخ ضربه سیستم‌های مرتبه اول به صورت رابطه (۴-۱۸۵) به ازاء مقادیر مختلف a



شکل (۴۴-۴): چند نمونه از پاسخ پله سیستم مرتبه اول به صورت رابطه (۴-۱۸۸) به ازاء مقادیر مختلف a



شکل (۴-۴): دامنه و فاز پاسخ فرکانسی سیستم مرتبه اول به ازاء مقادیر مختلف a

۴-۸-۲ پاسخ ضربه و پله سیستم‌های مرتبه دوم

در حالت کلی می‌توان یک سیستم مرتبه دوم را توسط معادله تفاضلی به صورت زیر نمایش داد.

$$y[n] - 2r \cos \theta y[n-1] + r^2 y[n-2] = x[n] \quad (۱۸۹-۴)$$

با فرض $0 \leq \theta \leq \pi, 0 < r < 1$ پاسخ فرکانسی برابر است با

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - 2r \cos \theta e^{-j\Omega} + r^2 e^{-j2\Omega}} \quad (۱۹۰-۴)$$

می‌توان مخرج $H(\Omega)$ را به حاصلضرب دو عامل تجزیه کرد.

$$H(\Omega) = \frac{1}{[1 - (re^{-j\theta})e^{-j\Omega}][1 - (re^{j\theta})e^{-j\Omega}]} \quad (۱۹۱-۴)$$

می‌توان $H(\Omega)$ را با فرض $\theta \neq 0, \pi$ به صورت زیر نمایش داد.

$$H(\Omega) = \frac{A}{1 - (re^{j\theta})e^{-j\Omega}} + \frac{B}{1 - (re^{-j\theta})e^{-j\Omega}} \quad (۱۹۲-۴)$$

که در آن

$$A = \frac{e^{j\theta}}{j2 \sin \theta}, \quad B = \frac{-e^{-j\theta}}{j2 \sin \theta} \quad (۱۹۳-۴)$$

در این صورت پاسخ ضربه برابر است با

$$h[n] = [A(re^{j\theta})^n + B(re^{-j\theta})^n]u[n] = \frac{r^n \sin[(n+1)\theta]}{\sin \theta} u[n] \quad (۱۹۴-۴)$$

اگر $\theta = 0$ باشد می‌توان $H(\Omega)$ را به صورت زیر نوشت.

$$H(\Omega) = \frac{1}{(1 - re^{-j\Omega})^2} \quad (۱۹۵-۴)$$

و در این حالت خاص $h[n]$ برابر است با

$$h[n] = (n+1)r^n u[n+1] = (n+1)r^n u[n] \quad (۱۹۶-۴)$$

و اگر $\theta = \pi$ باشد.

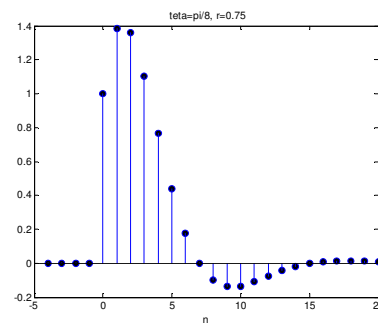
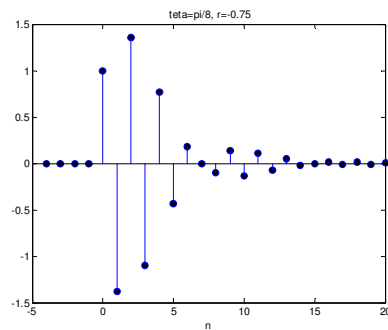
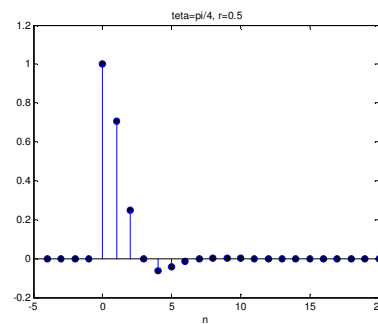
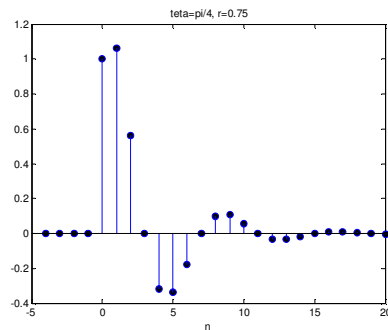
$$H(\Omega) = \frac{1}{(1 + re^{-j\Omega})^2} \quad (۱۹۷-۴)$$

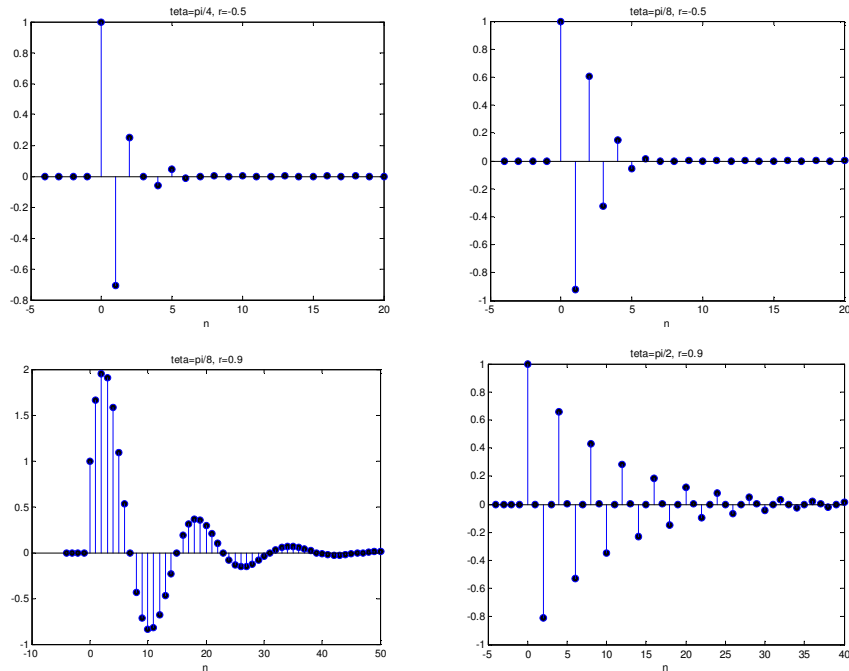
و پاسخ ضربه برابر است با

$$h[n] = (n+1)(-r)^n u[n+1] = (n+1)(-r)^n u[n] \quad (۱۹۸-۴)$$

چند نمونه از تابع انتقال و پاسخ ضربه سیستم‌های مرتبه دوم در شکل های ۴-۴۶ و ۴-۴۷ نشان داده شده است.

از این شکل‌ها نتیجه می‌گیریم که نرخ نزول $h[n]$ با تغییر r کنترل می‌شود، هر چه r به واحد نزدیکتر باشد، نرخ نزول کمتر می‌شود. همچنین θ تعیین کننده فرکانس نوسان پاسخ حول مقدار نهایی خود می‌باشد. اگر $\theta = 0$ باشد، هیچگونه نوسانی در $h[n]$ مشاهده نمی‌شود، اما اگر $\theta = \pi$ باشد، نوسان‌ها سریع خواهند شد.



شکل (۴-۴۶) چند نمونه از پاسخ ضربه سیستم‌های مرتبه دوم به ازاء مقادیر مختلف θ, r

اثر تغییر r و θ را در شکل موج پاسخ پله نیز می‌توان مشاهده کرد اگر $\theta \neq 0, \pi$ باشد، پاسخ پله برابر است با

$$s[n] = u[n] * h[n] = \left[A \frac{1 - (re^{j\theta})^{n+1}}{1 - re^{j\theta}} + B \frac{1 - (re^{-j\theta})^{n+1}}{1 - re^{-j\theta}} \right] u[n] \quad (۴-۱۹۹)$$

و اگر $\theta = 0$ باشد.

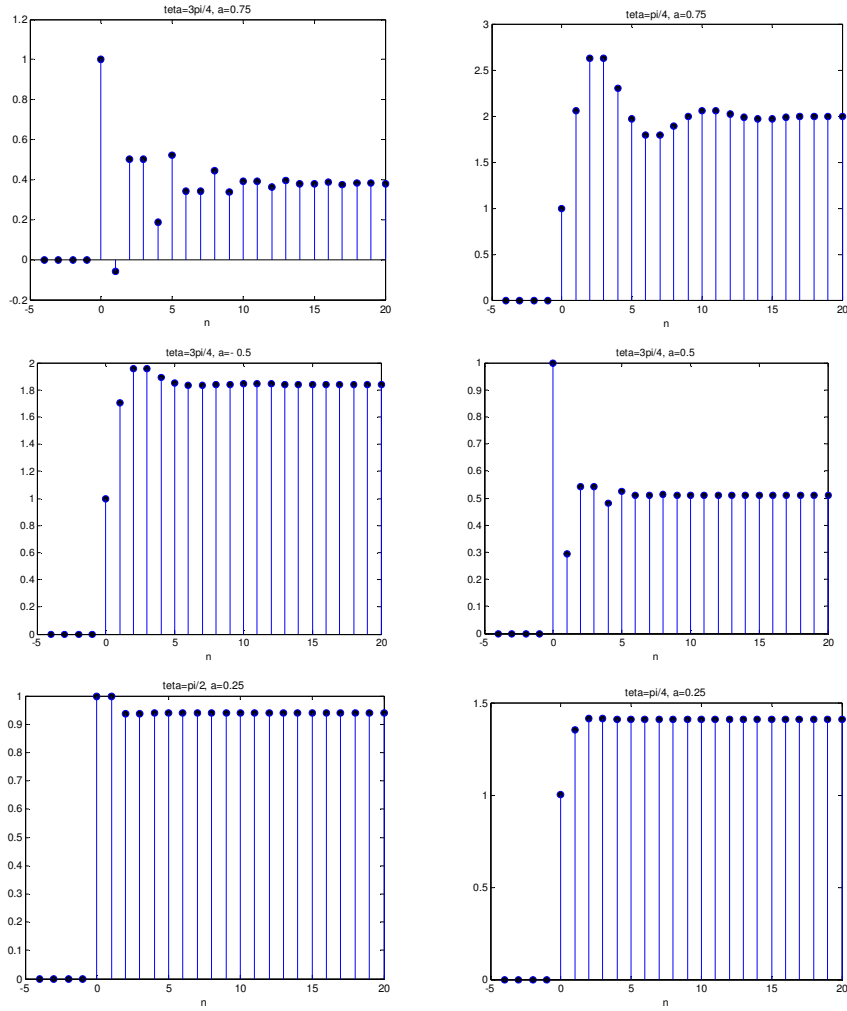
$$s[n] = \left[\frac{1}{(r-1)^2} - \frac{r}{(r-1)^2} r^n + \frac{r}{r-1} (n+1)r^n \right] u[n] \quad (۴-۲۰۰)$$

و اگر $\theta = \pi$ باشد.

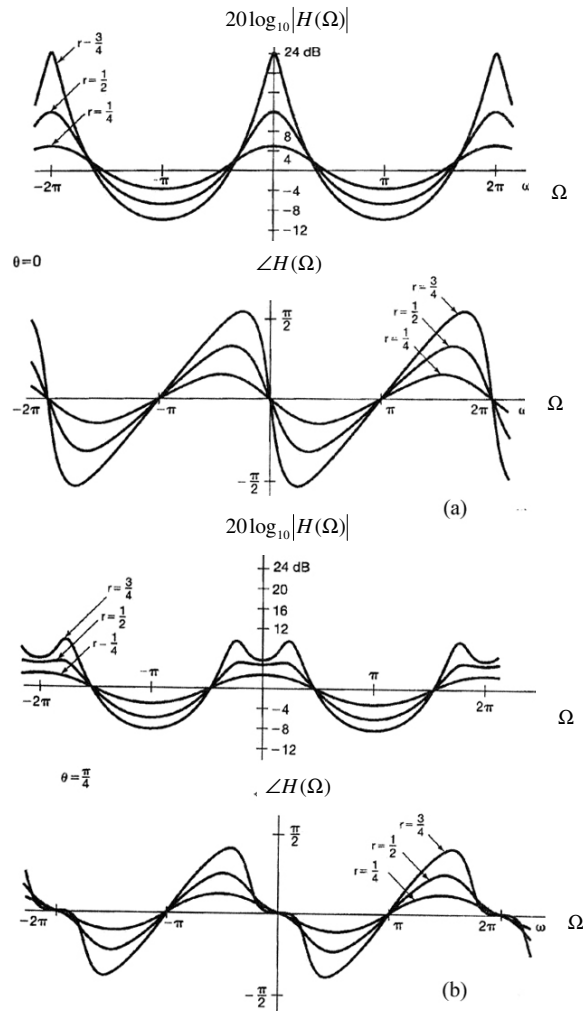
$$s[n] = \left[\frac{1}{(r+1)^2} + \frac{r}{(r+1)^2} (-r)^n + \frac{r}{r+1} (n+1)(-r)^n \right] u[n] \quad (۴-۲۰۱)$$

شکل پاسخ ضربه برای مقادیر مختلف θ, r در شکل (۴-۴۷) رسم شده است. می‌توان نشان داد که به ازاء هر مقدار θ غیر از صفر پاسخ ضربه دارای نوسانات میرا خواهد بود و پاسخ پله دارای بالاپرش و نوسان حول مقدار نهایی می‌باشد و جالب است توجه کنیم که θ در حقیقت تعیین کننده باند فرکانسی است که توسط سیستم مرتبه دوم تقویت می‌شود و r تعیین کننده میزان قله و تیزی آن در پاسخ فرکانسی و در باند عبور می‌باشد.

چند نمونه از پاسخ فرکانسی سیستم‌های مرتبه دوم به ازاء مقادیر مختلف θ, r در شکل (۴۸-۴) رسم شده‌اند.



شکل ۴۷-۴ پاسخ پله سیستم مرتبه دوم به ازاء مقادیر مختلف $\theta, r = a$



شکل (۴-۴۸): رسم پاسخ فرکانسی سیستم مرتبه دوم به ازاء مقادیر مختلف θ, r

در پایان این بحث لازم به ذکر است که اگر معادله تفاضلی سیستم مرتبه دوم به صورت زیر باشد.

$$y[n] - (d_1 + d_2)y[n-1] + d_1d_2y[n-2] = x[n] \quad (۲۰۲-۴)$$

که در آن اعداد حقیقی هستند و در آن صورت می‌توان سیستم مرتبه دوم را به حاصلضرب دو سیستم مرتبه اول تفکیک نمود. مراحل تفکیک به صورت زیر است.

$$H(\Omega) = \frac{1}{(1 - d_1e^{-j\Omega})(1 - d_2e^{-j\Omega})} = \frac{A}{1 - d_1e^{-j\Omega}} + \frac{B}{1 - d_2e^{-j\Omega}} \quad (۲۰۳-۴)$$

که در آن



$$A = \frac{d_1}{d_1 - d_2}, \quad B = \frac{d_2}{d_2 - d_1} \quad (۲۰۴-۴)$$

در این صورت پاسخ ضربه و پاسخ پله به صورت زیر خواهند بود.

$$h[n] = [Ad_1^n + Bd_2^n]u[n] \quad (۲۰۵-۴)$$

$$s[n] = \left[A \left(\frac{1-d_1^{n+1}}{1-d_1} \right) + B \left(\frac{1-d_2^{n+1}}{1-d_2} \right) \right] u[n] \quad (۲۰۶-۴)$$

می‌بینیم در این حالت پاسخ ضربه شامل دو تابع نمایی حقیقی نزولی خواهد بود. چنین سیستمی را می‌توان از ترکیب سری دو سیستم مرتبه اول بدست آورد. اگر d_1, d_2 منفی باشند پاسخ نوسانی خواهد بود.

تاکنون توجه خود را به سیستم‌های پایدار معطوف کرده بودیم (سیستم‌هایی که تبدیل فوریه دارند). در حالت کلی سیستم مرتبه اولی که توسط معادله تفاضلی (۱۸۳-۴) مشخص می‌شود به ازاء $|a| > 1$ ناپایدار است و سیستم مرتبه دوم که توسط معادله تفاضلی (۱۸۹-۴) یا معادله تفاضلی (۲۰۲-۴) مشخص می‌شوند متناظراً به ازاء $|d_1| \geq 1, |d_2| \geq 1$ ناپایدار می‌باشند و خارج از مبحث فعلی ما قرار می‌گیرند.

۴-۹ خلاصه

در این فصل با توجه به اهمیت دنباله‌ها و سیستم‌های گسسته زمان ابتدا سری فوریه گسسته مورد بحث قرار گرفته و سپس تبدیل فوریه گسسته زمان (DTFT) مورد بحث قرار گرفت. روش استفاده از ضرایب DFT در محاسبه کانولوشن و خواص DTFT به تفصیل مورد بحث قرار گرفت. روش ساخت سیستم‌های مراتب بالا به کمک بلوک‌های اساسی و بررسی سیستم‌های مراتب اول و دوم به عنوان بلوک‌های اصلی سازنده سیستم‌های مراتب بالاتر در پایان مورد بحث قرار گرفتند. مثال (۲۵-۴): سری فوریه گسسته زمان دنباله زیر را بنویسید.

$$f[n] = \text{Cos}(0.1\pi n)$$

حل: در این حالت بدلیل اینکه $\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1}{20}$ می‌باشد، $f[n]$ متناوب است و دوره تناوب آن به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$N_0 = m \left(\frac{2\pi}{\Omega} \right) = m \left(\frac{2\pi}{0.1\pi} \right) = 20m$$

کوچکترین عدد صحیح m که $20m$ را به یک عدد صحیح تبدیل نماید به ازاء $m=1$ حاصل می‌شود، بنابراین دوره تناوب این دنباله $N_0=20$ می‌باشد و سری فوریه به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}
 f[n] &= \sum_{k=0}^{19} a_k e^{j0.1\pi k} \\
 a_k &= \frac{1}{20} \sum_{n=0}^{19} f[n] e^{-j0.1\pi kn} = \frac{1}{20} \sum_{n=0}^{19} \text{Cos}(0.1\pi n) e^{-j0.1\pi kn} \\
 &= \frac{1}{40} \sum_{n=0}^{19} (e^{j0.1\pi n} + e^{-j0.1\pi n}) e^{-j0.1\pi kn} \\
 &= \frac{1}{40} \left[\sum_{n=0}^{19} e^{j0.1\pi n(1-k)} + \sum_{n=0}^{19} e^{-j0.1\pi n(1+k)} \right]
 \end{aligned}$$

نتیجتاً اولین مجموع به ازاها جمع مقادیر k صفر است به جز $k=1$. همچنین دومین مجموع به ازاها جمع مقادیر k صفر است به جز $k=19$ در این صورت داریم.

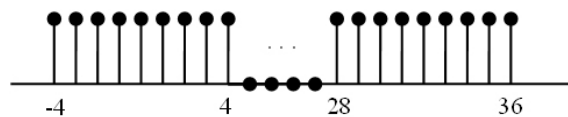
$$\begin{aligned}
 a_1 &= a_{19} = \frac{1}{2} \\
 f[n] &= \frac{1}{2} (e^{j0.1\pi n} + e^{j1.9\pi n}) \\
 &= \frac{1}{2} (e^{j0.1\pi n} + e^{-j0.1\pi n})
 \end{aligned}$$

مثال (۴-۲۶): سری فوریه گسسته زمانی $f[n] = \text{Sin}0.1\pi n$ را بیابید.

حل: مشابه حل مثال قبلی به نتیجه زیر می‌رسیم.

$$f[n] = \frac{1}{j2} [e^{j0.1\pi n} - e^{-j0.1\pi n}]$$

مثال (۴-۲۷): سری فوریه گسسته زمانی دنباله رسم شده در زیر را بیابید.



شکل (۴-۴۹) سیگنال مربوط به مثال ۴-۲۷

حل: دوره تناوب این دنباله مساوی ۳۲ است پس $\Omega_0 = \frac{2\pi}{32} = \frac{\pi}{16}$ در نتیجه سری فوریه به صورت

زیر است.

$$f[n] = \sum_{k=\langle 32 \rangle} a_k e^{jk\frac{\pi}{16}n}, \quad a_k = \frac{1}{32} \sum_{n=\langle 32 \rangle} f[n] e^{-jk\frac{\pi}{16}n}$$

برای سادگی فرض می‌کنیم در مجموع دوم $-16 \leq n \leq 15$ انتخاب گردد، در این صورت

$$a_k = \frac{1}{32} \sum_{n=-16}^{15} f[n] e^{-jk\frac{\pi}{16}n}$$

و چون در فاصله مذکور فقط $f[n]$ به ازاها $-4 \leq n \leq 4$ مقدار دارد.

$$a_k = \frac{1}{32} \sum_{n=-4}^4 e^{-jk\frac{\pi}{16}n}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{32} \left[\frac{e^{-j\frac{5\pi k}{16}} - e^{j\frac{4\pi k}{16}}}{e^{-j\frac{\pi k}{16}} - 1} \right] \\ &= \frac{1}{32} \frac{e^{-j\frac{0.5\pi k}{16}} \left[e^{-j\frac{4.5\pi k}{16}} - e^{j\frac{4.5\pi k}{16}} \right]}{e^{-j\frac{0.5\pi k}{16}} \left[e^{-j\frac{0.5\pi k}{16}} - e^{j\frac{0.5\pi k}{16}} \right]} \\ &= \frac{1}{32} \frac{\text{Sin}\left(\frac{4.5\pi k}{16}\right)}{\text{Sin}\left(\frac{0.5\pi k}{16}\right)} \\ &= \frac{1}{32} \frac{\text{Sin}(4.5k\Omega_0)}{\text{Sin}(0.5k\Omega_0)}, \quad \Omega_0 = \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

مثال (۴-۲۸): نشان دهید که دنباله‌هایی به صورت

$$\varphi_k[n] = \delta[n-k], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$$

در فاصله $[-N, N]$ متعامد یکه (ارتونرمال) می‌باشند.

حل: کافی است شرایط زیر را تحقیق کنیم.

$$\sum_{n=-N_1}^{N_1} \varphi_k[n] \varphi_m^*[n] = \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$$

با قرار دادن $\varphi_m[n], \varphi_k[n]$ در رابطه فوق داریم.

$$\sum_{n=-N_1}^{N_1} \delta[n-k] \delta[n-m]$$

ولی می‌بینیم که این مجموع به ازاء تمام مقادیر k, m مساوی صفر است، مگر اینکه $k = m$ باشد.

در آن صورت داریم.

$$\sum_{n=-N_1}^{N_1} (\delta[n-k])^2 = 1$$

و اثبات کامل می‌شود.

مثال (۴-۲۹): تبدیل فوریه دنباله زیر را بیابید.

$$x[n] = a^n u[-(n+1)]$$

حل:

$$\begin{aligned}
 X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[-(n+1)] e^{-j\Omega n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{-1} (ae^{-j\Omega})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a} e^{j\Omega}\right)^n = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a} e^{j\Omega}\right)^n \\
 &= -1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{a} e^{j\Omega}} = \frac{1}{ae^{-j\Omega} - 1} = \frac{1}{(a\cos\Omega - 1) - ja\sin\Omega} \quad |a| > 1 \text{ به شرط}
 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
 |X(\Omega)| &= \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\Omega}} \\
 \angle X(\Omega) &= \text{tg}^{-1} \left[\frac{a\sin\Omega}{a\cos\Omega - 1} \right]
 \end{aligned}$$

مثال (۳۰-۴): تبدیل معکوس فوریه طیف پالس مربعی $X(\Omega)$ را بیابید.

$$X(\Omega) = \text{rect}\left(\frac{\Omega}{2\Omega_c}\right)$$

که در آن

$$\text{rect}\left(\frac{x}{2a}\right) = \begin{cases} 1 & -a < x < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

حل: طبق رابطه تبدیل معکوس فوریه داریم.

$$\begin{aligned}
 x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{j\Omega n} d\Omega \\
 &= \frac{1}{j2\pi n} e^{j\Omega n} \Big|_{-\Omega_c}^{\Omega_c} = \frac{\sin(\Omega_c n)}{\pi n} = \frac{\Omega_c}{\pi} \text{Sinc}\left(\frac{\Omega_c n}{\pi}\right)
 \end{aligned}$$

مثال (۴-۳۱): تبدیل فوریه دنباله‌های $x_2[n] = \delta[n - n_0]$, $x_1[n] = \delta[n]$ را بیابید.

حل:

$$\begin{aligned}
 X_1(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] e^{-j\Omega n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] e^{-j\Omega n \times 0} = 1
 \end{aligned}$$

برای دنباله دوم نیز داریم.

$$X_2(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0] e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega n_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0] = e^{-j\Omega n_0}$$

مثال (۴-۳۲): نشان دهید که مجموعه سیگنالی به صورت $\phi_k(n) = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ به ازاء $k = 0, 1, \dots, N-1$ در فاصله‌ای به طول N متعامد هستند. حل: کفایت مجموع زیر را حساب کنیم و تساوی را ثابت کنیم.

$$\sum \phi_k[n]\phi_m^*[n] = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ A & k = m \end{cases}$$

که A عدد دلخواهی است.

با جایگذاری داریم (فاصله را به طور دلخواه از 0 تا $N-1$ در نظر می‌گیریم ولی هر فاصله دیگری با همین طول نیز همین جواب را می‌دهد).

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk\frac{2\pi}{N}n} e^{-jm\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m)\frac{2\pi}{N}n}$$

در متن درس ثابت شده است که مجموعی به صورت فوق به ازاء $k \neq m$ مساوی صفر است و به ازاء $k = m$ مساوی N است. پس

$$\sum \phi_k[n]\phi_m^*[n] = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ N & k = m \end{cases}$$

مثال (۴-۳۳): نشان دهید اگر $x[n] = \sum_{i=1}^M a_i \phi_i[n]$ باشد، که در آن $\phi_i[n]$ یک مجموعه سیگنال متعامد در فاصله (N_1, N_2) هستند، در آن صورت

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2 = \sum_{i=1}^M |a_i|^2 A_i$$

که در آن A_i عدد ثابت است که البته تابع اندیس نیز می‌تواند باشد. حل:

$$\begin{aligned} \sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2 &= \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]x^*[n] = \sum_{n=N_1}^{N_2} \left[\sum_{i=1}^M a_i \phi_i[n] \sum_{j=1}^M a_j^* \phi_j^*[n] \right] \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_i a_j^* \sum_{n=N_1}^{N_2} \phi_i[n] \phi_j^*[n] \end{aligned}$$

اما در مثال (۴-۳۲) ثابت باشد که اگر $\phi_i[n]$ تشکیل یک مجموعه سیگنال متعامد به ازاء مقادیر مشخصی از i, j در فاصله مشخص را بدهد در آن صورت مجموع $\sum_{n=N_1}^{N_2} \phi_i[n] \phi_j^*[n]$ فقط به ازاء

مقادیر $i = j$ غیر صفر و مساوی A_i می‌باشد، بنابراین

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2 = \sum_{i=1}^M |a_i|^2 A_i$$

و قضیه ثابت می‌شود.

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

مثال (۴-۳۴): پاسخ ضربه یک سیستم LTI گسسته زمان به صورت زیر است.

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$

سری فوریه خروجی سیستم را بیابید اگر ورودی آن به صورت زیر باشد.

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta[n-4m]$$

حل: ابتدا تبدیل فوریه ورودی را پیدا می‌کنیم، برای این کار احتیاج به ضرایب سری فوریه $x[n]$ داریم.

$$a_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 e^{-jk\frac{2\pi}{4}n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n-4m] = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 e^{-jk\frac{2\pi}{4}n} \delta[n] = \frac{1}{4}$$

بنابراین می‌توان $X(\Omega)$ را بدین صورت نوشت.

$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\Omega - \frac{k\pi}{2}\right)$$

اما تبدیل فوریه ورودی را قبلاً در متن درس حساب کرده‌ایم.

$$X(\Omega) = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 - \cos\Omega + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5 - 4\cos\Omega}$$

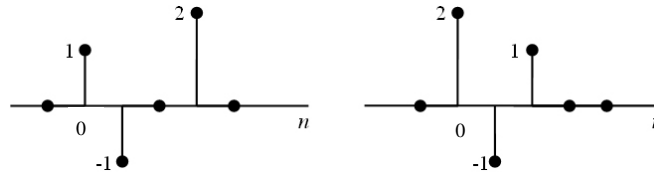
تبدیل فوریه خروجی از حاصلضرب تبدیل فوریه ورودی در تبدیل فوریه پاسخ ضربه سیستم به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= H(\Omega)X(\Omega) = \frac{3}{5 - 4\cos\Omega} \times 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\Omega - \frac{k\pi}{2}\right) \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{3a_k}{5 - 4\cos\frac{k\pi}{2}} \delta\left(\Omega - \frac{k\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

بنابراین ضرایب سری فوریه خروجی از رابطه زیر بدست می‌آیند.

$$b_k = \frac{\frac{3}{4}}{5 - 4\cos\frac{k\pi}{2}}$$

مثال (۴-۳۵): مراحل کانولوشن معمولی دو دنباله زیر را به کمک استفاده از DFT توضیح دهید.



شکل (۴-۵۰) مربوط به مثال (۴-۳۵)

حل: ابتدا DFT شش نقطه‌ای $x_1[n]$ و $x_2[n]$ را حساب می‌کنیم. چون $N_2=3, N_1=4$ می‌باشد، لذا دوره تناوب برای حاصل کانولوشن را برابر $N = N_1 + N_2 - 1 = 6$ در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned}\tilde{X}_1(k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^3 x_1[n] e^{-jk \left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{n=0}^3 x_1[n] e^{-jk \left(\frac{2\pi}{6}\right)n} = \frac{1}{6} \left[1 - e^{-jk \frac{\pi}{3}} + 2e^{-jk\pi} \right]\end{aligned}$$

که در آن $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

همین کار را برای $x_2[n]$ نیز انجام می‌دهیم.

$$\tilde{X}_2(k) = \frac{1}{6} \left[2 - e^{-jk \frac{\pi}{3}} + e^{-jk \frac{2\pi}{3}} \right], \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

مرحله بعدی محاسبه حاصلضرب دو DFT می‌باشد.

$$\begin{aligned}\tilde{Y}(k) &= 6\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k) = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 y[n] e^{-jk \frac{2\pi}{3}n} \\ &= \frac{6}{36} \left[2 - e^{-jk \frac{\pi}{3}} + e^{-jk \frac{2\pi}{3}} - 2e^{-jk \frac{\pi}{3}} + e^{-j \frac{2k\pi}{3}} - e^{-jk\pi} + 4e^{-jk\pi} \right. \\ &\quad \left. - 2e^{-j \frac{4k\pi}{3}} + 2e^{-j \frac{5k\pi}{3}} \right] \\ &= \frac{6}{36} \left[2 - 3e^{-jk \frac{\pi}{3}} + 2e^{-j \frac{2k\pi}{3}} + 3e^{-jk\pi} - 2e^{-j \frac{4k\pi}{3}} + 2e^{-j \frac{5k\pi}{3}} \right]\end{aligned}$$

بنابراین با توجه به رابطه معکوس DFT یا IDFT می‌توان حاصل کانولوشن معمولی $x_1[n]$ و $x_2[n]$ را بدست آورد.

$$y[n] = \sum_{k=0}^5 \tilde{Y}(k) e^{jk \frac{2\pi}{N}n} \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$y[0] = 2, \quad y[1] = -3, \quad y[2] = 2, \quad y[3] = 3, \quad y[4] = -2, \quad y[5] = 2$$

که البته مقادیر فوق از روش کانولوشن معمولی نیز به سادگی قابل محاسبه می‌باشد.

مثال (۳۶-۴): فرض کنید $X(\Omega)$ تبدیل فوریه یک دنباله غیرحقیقی $x[n]$ باشد. تبدیل فوریه دنباله‌های زیر را برحسب تبدیل فوریه $X(\Omega)$ بیابید.

الف) $\Re\{x[n]\}$

ب) $x^*[-n]$

ج) $\mathcal{E}\{x[n]\}$

حل: الف)

$$y[n] = \Re\{x[n]\} = \frac{1}{2} \{x[n] + x^*[n]\}$$

با گرفتن تبدیل فوریه از طرفین رابطه فوق داریم.

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2} \{F\{x[n]\} + F\{x^*[n]\}\}$$

اکنون فقط لازم است تبدیل فوریه $x^*[n]$ را بیابیم. تبدیل فوریه $x[n]$ به صورت زیر است.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

در نتیجه داریم.

$$X^*(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n]e^{j\Omega n}$$

و بالاخره با تبدیل Ω به $-\Omega$ رابطه فوق به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$X^*(-\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n]e^{-j\Omega n}$$

پس تبدیل $x^*[n]$ فوریه مساوی است با $X^*(-\Omega)$ بنابراین

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2} \{X(\Omega) + X^*(-\Omega)\}$$

(ب) به سادگی با توجه به رابطه تبدیل فوریه و تبدیل n به $-n$ داریم.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n]e^{j\Omega n}$$

در نتیجه خواهیم داشت.

$$X^*(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[-n]e^{-j\Omega n}$$

بنابراین تبدیل فوریه $x^*[-n]$ مساوی $X^*(\Omega)$ می‌باشد.

$$y[n] = \mathcal{E}\mathcal{V}\{x[n]\} = \frac{1}{2} \{x[n] + x[-n]\} \quad (\text{ج})$$

برای بدست آوردن تبدیل فوریه $\mathcal{E}\mathcal{V}\{x[n]\}$ کافی است تبدیل فوریه $x[-n]$ را یافت. با توجه به رابطه تبدیل فوریه می‌توان به سادگی تبدیل فوریه $x[-n]$ را یافت.

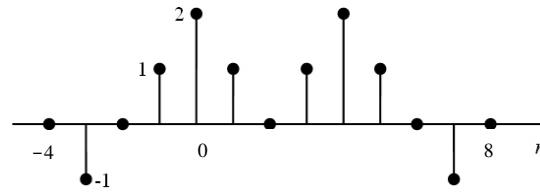
$$X(-\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n]e^{-j\Omega n}$$

بنابراین تبدیل فوریه $y[n]$ برابر است با

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2} \{X(\Omega) + X(-\Omega)\} = \mathcal{E}\mathcal{V}\{X(\Omega)\}$$

مثال (۳۷-۴): فرض کنید $X(\Omega)$ تبدیل فوریه دنباله $x[n]$ باشد (در شکل رسم شده است). بدون محاسبه مستقیم $X(\Omega)$ مطلوبست.

$$\text{الف) } X(0) \quad \text{ب) } \angle X(\Omega) \quad \text{ج) } \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) d\Omega \quad \text{د) } X(\pi) \quad \text{و) } \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$



شکل (۴-۱) (۵)

الف) با توجه به رابطه تبدیل فوریه داریم

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \rightarrow X(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = 6$$

ب) با توجه به شکل $x[n]$ می بینیم دنباله $x[n+2]$ یک دنباله حقیقی زوج می باشد، بنابراین تبدیل فوریه دنباله $y[n] = x[n+2]$ دارای فاز صفر است (حقیقی می باشد) در نتیجه دنباله $x[n]$ برابر است با

$$x[n] = y[n-2]$$

و ارتباط تبدیل فوریه $x[n]$ بر حسب تبدیل فوریه $y[n]$ به صورت زیر بیان می گردد.

$X(\Omega) = Y(\Omega)e^{-j2\Omega}$ و چون $Y(\Omega)$ دارای فاز صفر است، بنابراین $X(\Omega)$ دارای فاز $e^{-j2\Omega}$ می باشد.

ج) با توجه به رابطه تبدیل معکوس فوریه داریم.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$2\pi x[0] = \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) d\Omega = 4\pi$$

بنابراین

د)

$$\begin{aligned} X(\pi) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n x[n] \\ &= (-1)^{-3}(-1) + (-1)^{-1}(1) + (-1)^0(2) + (-1)^1(1) + (-1)^3(1) \\ &\quad + (-1)^4(2) + (-1)^5(1) + (-1)^7(-1) \\ &= 1 - 1 + 2 - 1 - 1 + 2 - 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

و) طبق رابطه پارسوال

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 \\ &= 2\pi[1+1+4+1+1+4+1+1] = 28\pi \end{aligned}$$

مثال (۴-۳۸): یک سیستم LTI علی که بوسیله معادله تفاضلی زیر بیان می گردد را در نظر بگیرید، مطلوبست پاسخ ضربه سیستم.

$$y[n] - \frac{3}{8}y[n-1] + \frac{1}{32}y[n-2] = x[n]$$

حل: با استفاده از تبدیل فوریه طرفین معادله تفاضلی فوق داریم.

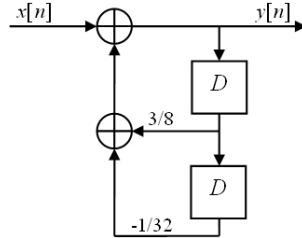
$$Y(\Omega) - \frac{3}{8}Y(\Omega)e^{-j\Omega} + \frac{1}{32}Y(\Omega)e^{-j2\Omega} = X(\Omega)$$

$$\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1}{1 - \frac{3}{8}e^{-j\Omega} + \frac{1}{32}e^{-j2\Omega}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega})(1 - \frac{1}{8}e^{-j\Omega})}$$

$$= \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}} + \frac{-1}{1 - \frac{1}{8}e^{-j\Omega}} \quad \text{و} \quad h[n] = \left[2\left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{8}\right)^n \right] u[n]$$

مثال (۴-۳۹): سیستم مثال (۴-۳۸) را به کمک بلوک‌های اساسی بسازید.

حل: با توجه به معادله تفاضلی به سادگی سیستم را به صورت شکل ۴-۵۲ خواهیم داشت.



شکل (۴-۵۲): مربوط به مثال (۴-۳۹)

مثال ۴-۴۰: معکوس سیستم با معادله تفاضلی

$$y[n] + y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n-1] + \frac{1}{2}x[n-2]$$

را بیابید.

حل: یک روش حل این است که ابتدا تابع سیستم را بسازیم و بعد آن را معکوس کنیم. با گرفتن تبدیل فوریه از معادله فوق داریم.

$$Y(\Omega) + Y(\Omega)e^{-j\Omega} + \frac{1}{4}Y(\Omega)e^{-j2\Omega} = X(\Omega)e^{-j\Omega} + \frac{1}{2}X(\Omega)e^{-j2\Omega}$$

و بنابراین

$$H(\Omega) = \frac{e^{-j\Omega} + \frac{1}{2}e^{-j2\Omega}}{1 + e^{-j\Omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\Omega}}$$

در نتیجه سیستم معکوس دارای تابع شبکه به صورت زیر است.

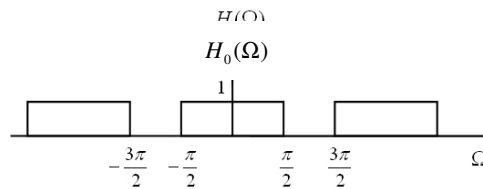
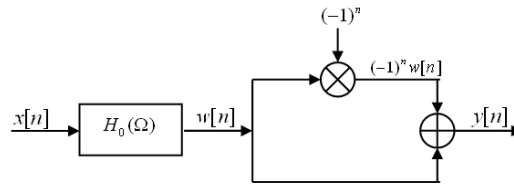
$$H_i(\Omega) = \frac{1}{H(\Omega)} = \frac{1 + e^{-j\Omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\Omega}}{e^{-j\Omega} + \frac{1}{2}e^{-j2\Omega}}$$

$$= \frac{(1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}{e^{-j\Omega}(1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega})} = \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{e^{-j\Omega}} = e^{j\Omega} + \frac{1}{2}$$

در حوزه زمان $h_i[n] = \delta[n+1] + \frac{1}{2}\delta[n]$ همانگونه که می بینیم این سیستم علی نمی باشد.

مثال (۴-۴): طیف $H(\Omega)$ را برای سیستم زیر بیابید.

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$



شکل ۴-۵ تابع انتقال سیستم $H_0(\Omega)$

حل: برای رسم طیف $H(\Omega)$ کافیسست ورودی را $x[n] = \delta[n]$ در نظر گرفته، در آن صورت $y[n] = \delta[n]$ بدست می آید. البته لازم به ذکر است که تبدیل فوریه $(-1)^n$ قبلاً بدست آمده است.

$$(-1)^n = \cos \pi n = \frac{1}{2} [e^{j\pi n} - e^{-j\pi n}]$$

$$(-1)^n \leftrightarrow \frac{1}{2} \left[2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - \pi - 2k\pi) + 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega + \pi - 2k\pi) \right]$$

که البته هر دو جمله طرف ثانی یکی هستند، پس

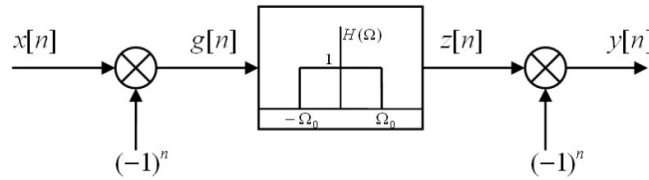
$$(-1)^n \leftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - \pi - 2k\pi)$$

بنابراین طبق خاصیت مدولاسیون داریم.

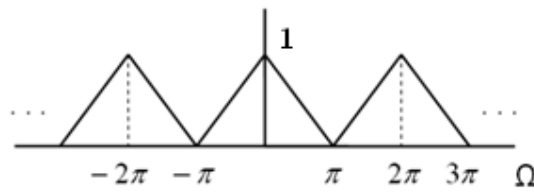
$$H(\Omega) = H_0(\Omega) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\lambda - \pi - 2k\pi) H_0(\Omega - \lambda) d\lambda = H_0(\Omega) + H_0(\Omega - \pi) = 1$$

یعنی این سیستم یک سیستم تمام گذر است.

مثال (۴-۸): خروجی سیستم زیر را بیابید اگر $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$.

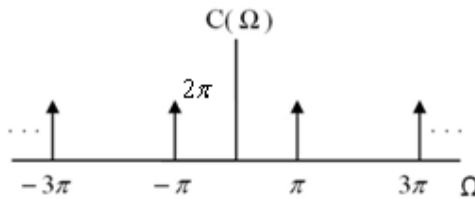


فرض کنید طیف $x[n]$ بصورت زیر باشد.

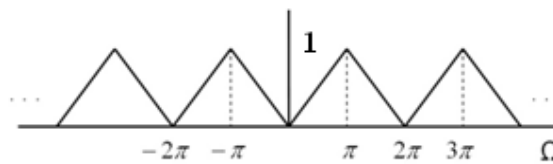


حل: طیف دنباله $c[n] = (-1)^n$ بصورت زیر است.

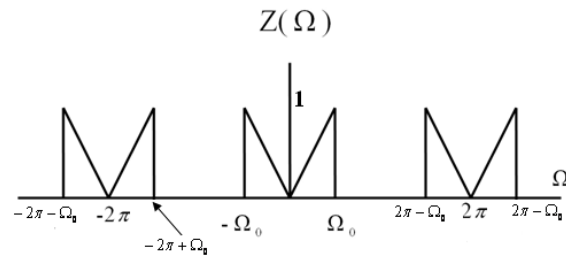
$$F[(-1)^n] = C(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - (2k+1)\pi)$$



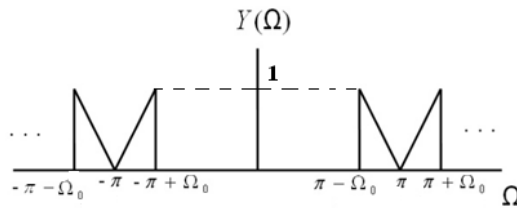
بنابراین دنباله $g[n]$ در حقیقت یک دنباله مدولاسیون دامنه می‌باشد که از سوار شدن دنباله مدوله‌کننده $x[n]$ بر روی دنباله حامل $c[n]$ یا $(-1)^n$ حاصل شده است. بنابراین طیف $G(\Omega)$ بصورت زیر بدست می‌آید.



$z[n]$ در حقیقت از فیلتر کردن $g[n]$ توسط یک فیلتر پایین‌گذر حاصل می‌شود. پس طیف $z[n]$ بصورت زیر است.



$y[n]$ یک دنباله مدوله شده دامنه می باشد که ناشی از سوار شدن دنباله مدوله کننده $z[n]$ روی حامل $c[n] = (-1)^n$ می باشد. بنابراین طیف $y[n]$ از یک انتقال به اندازه π در طیف $z[n]$ بدست می آید.

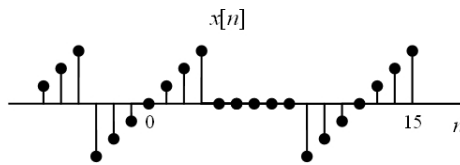
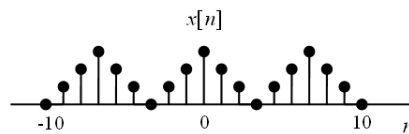


۴-۱۰ مسائل

۴-۱ سری فوریه گسسته زمانی سیگنال های زیر را بیابید.

$$x[n] = 2\cos(3.2\pi(n-3))$$

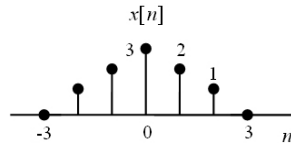
$$x[n] = 2\cos(2.2\pi n)$$



شکل ۴-۵ مربوط به مثال ۴-۱

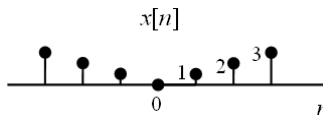
۴-۲ تبدیل فوریه گسسته زمان دنباله های زیر را بیابید.

(الف)



شکل ۴-۵۵ مربوط به مثال ۲-۴

ب) $y[n] = x[n-3]$ که در آن $x[n]$ همان دنباله مذکور در قسمت الف می‌باشد.
ج)



شکل ۴-۵۶ مربوط به مثال ۲-۴

۳-۴ تبدیل معکوس پاسخ فرکانسی زیر را بیابید (فرض کنید که سیستم علی است)

$$H(\Omega) = \frac{e^{j\Omega} + 0.32}{e^{j2\Omega} + e^{j\Omega} + 0.16}$$

۴-۴ پاسخ معکوس سیستم با معادله تفاضلی

$$y[n] + y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n-1] + \frac{1}{2}x[n-2]$$

را به ورودی زیر بیابید.

$$x[n] = (0.5)^n u[n]$$

۵-۴ پاسخ سیستم $H(\Omega)$ را به ورودی $x[n]$ بیابید اگر

$$H(\Omega) = \frac{e^{j\Omega} - 0.5}{(e^{j\Omega} + 0.5)(e^{j\Omega} - 1)} \quad \text{و} \quad x[n] = 3^{-(n+1)} u[n]$$

۶-۴ فرض کنید $x_c(t)$ یک سیگنال پیوسته زمان دوره تناوب با دوره تناوب یک میلی ثانیه باشد. سری فوریه سیگنال مذکور به صورت زیر می‌باشد.

$$x_c(t) = \sum_{k=-9}^9 a_k e^{j\left(\frac{2\pi k t}{10^{-3}}\right)}$$

ضرایب سری فوریه به ازاء $|k| > 9$ مساوی صفر هستند. مطلوبست ضرایب سری فوریه گسسته زمان سیگنال $x[n]$ که با نمونه‌برداری از $x_c(t)$ حاصل شده است.

$$x[n] = x_c\left(\frac{n}{6} \times 10^{-3}\right)$$

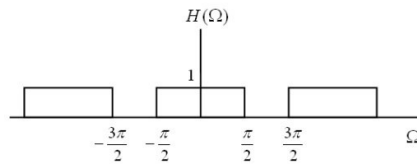
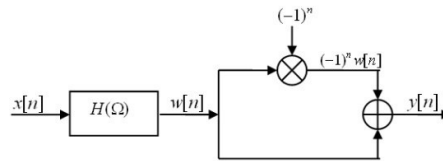
۷-۴ پاسخ سیستم $H(\Omega) = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - \frac{1}{2}}$ را به ورودی $x[n] = \left(\frac{8}{10}\right)^k u[n] - 2(2)^2 u[-(n+1)]$ بیابید.

۸-۴ تبدیل فوریه دنباله‌های زیر را بیابید.

$$x[n] = a^n \text{Cos}(\Omega_0 n) u[n] \quad |a| < 1, \quad x[n] = a^n \text{Sin}(\Omega_0 n) u[n] \quad |a| < 1$$

۹-۴ خروجی سیستم زیر را بیابید اگر ورودی به صورت زیر باشد.

$$x[n] = \delta[n] + 1$$



شکل ۴-۵۷ مربوط به مثال ۴-۹

۴-۱۰ تبدیل فوریه یک دنباله گسسته زمان $x[n]$ را $X(\Omega)$ می‌نامیم. مطلوبست تبدیل فوریه دنباله‌های $x_c[n]$ ، $x_d[n]$ ، $x_s[n]$ بر حسب $X(\Omega)$ اگر

$$x_c[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & n, \text{ even} \\ 0 & n, \text{ odd} \end{cases}$$

$$x_s[n] = \begin{cases} x[n] & n, \text{ even} \\ 0 & n, \text{ odd} \end{cases}$$

$$x_d[n] = x[2n]$$

۴-۱۱ زوج دنباله‌های $x[n]$ و $y[n]$ را در نظر بگیرید. برای هر زوج تعیین کنید آیا سیستمی LTI یافت می‌شود که ورودی آن $x[n]$ و خروجی آن $y[n]$ باشد؟ (پاسخ خود را با دلیل بیان کنید). اگر چنین سیستمی وجود دارد، آیا این سیستم یگانه است؟ و یا چند سیستم (LTI یا غیر LTI) را می‌توان بگونه‌ای یافت که زوج ورودی و خروجی آن‌ها $[x[n], y[n]]$ باشند.

الف) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، $y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

ب) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ ، $y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

ج) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ ، $y[n] = 4^n u[-n]$

د) $x[n] = e^{\frac{jn}{8}}$ ، $y[n] = 2e^{\frac{jn}{8}}$

و) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$ ، $y[n] = \cos\frac{\pi n}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\pi n}{3}$

۱۲-۴ تبدیل فوریه هر یک از دنباله‌های زیر را بیابید.

الف) $n\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

ب) $\left(\frac{1}{2}\right)^n [u[n+3] - u[n-2]]$

ج) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k \delta[n-3k]$

۱۳-۴ $x[n]$ و $y[n]$ دو دنباله حقیقی با تبدیل فوریه $Y(\Omega)$ ، $X(\Omega)$ باشند، تابع همبستگی بین دو دنباله به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\phi_{xy}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k+n]y[k]$$

به همین ترتیب می‌توان $\phi_{xx}[n]$ ، $\phi_{yy}[n]$ ، $\phi_{yx}[n]$ را تعریف نمود. مطلوبست ارتباط تبدیل فوریه $\phi_{xx}[n]$ ، $\phi_{yy}[n]$ ، $\phi_{xy}[n]$ ، $\phi_{yx}[n]$ بر حسب $Y(\Omega)$ ، $X(\Omega)$.

۱۴-۴ فرض کنید دنباله $x[n] = \text{Sin}\left(\frac{\pi n}{84}\right) - 2\text{Cos}\left(\frac{\pi n}{4}\right)$ ورودی به هر یک از سیستم‌های زیر باشد.

الف) $h[n] = \frac{\text{Sin}\left(\frac{\pi n}{6}\right)}{\pi n}$

ب) $h[n] = \frac{\text{Sin}\left(\frac{\pi n}{6}\right)}{\pi n} + \frac{\text{Sin}\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}$

ج) $h[n] = \frac{\text{Sin}\left(\frac{\pi n}{6}\right)\text{Sin}\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{\pi^2 n^2}$

مطلوبست خروجی هریک از سیستم‌های فوق در حوزه زمان و فرکانس.

۱۵-۴ پاسخ ضربه را برای هر یک از سیستم‌هایی که بوسیله معادلات تفاضلی زیر بیان می‌گردند بدست آورده و سپس سیستم را به کمک بلوک‌های اساسی بسازید (فرض کنید سیستم علی است).

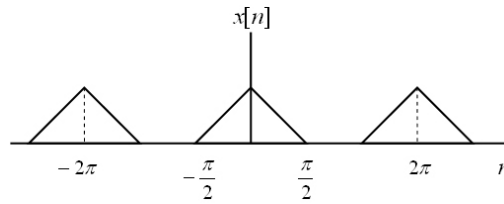
الف) $y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]$

ب) $y[n] + \frac{5}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]$

ج) $y[n] + \frac{5}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1] - \frac{1}{8}x[n-2]$

۱۶-۴ معکوس سیستم‌های مثال (۱۵-۴) را بدست آورده و به کمک بلوک‌های اساسی بسازید.

۱۷-۴ فرض کنید طیف $x[n]$ به صورت زیر باشد. مطلوبست طیف $z[n] = x[n]p[n]$ اگر



شکل ۴-۵۸ مربوط به مثال ۴-۱۷

الف) $p[n] = \cos n$

ب) $p[n] = \sin \frac{\pi n}{2}$

ج) $p[n] = \cos \frac{\pi n}{2}$

د) $p[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - 2k]$

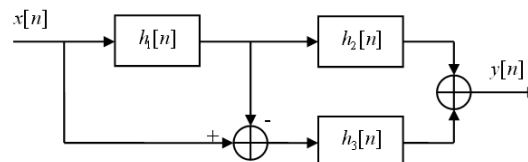
هـ) $p[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - 4k]$

۴-۱۸ در سیستم زیر $H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$ را بیابید.

$$h_1[n] = e^{-|n|}$$

$$H_2(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < \frac{\pi}{4} \\ 0 & \frac{\pi}{4} < |\Omega| < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$H_3(\Omega) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega} + \frac{1}{3}e^{-j2\Omega}}$$



شکل ۴-۵۹ مربوط به مثال ۴-۱۸

۴-۱۹ ورودی یک سیستم مجهول خطی به صورت زیر است.

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

اگر خروجی این سیستم در پاسخ به ورودی فوق برابر مقدار زیر باشد.

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

مطلوبست پاسخ فرکانسی سیستم و پاسخ ضربه آن.

۴-۲۰ سیستم مطرح شده در مثال (۴-۱۹) را به کمک بلوک‌های اساسی بسازید.

۴-۲۱ یک سیستم LTI به کمک معادله تفاضلی زیر بیان می‌گردد

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$$

الف) مطلوبست پاسخ فرکانسی سیستم.

ب) مطلوبست خروجی سیستم به ازاء ورودی‌های زیر.

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad \text{و} \quad x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad \text{و} \quad x[n] = \delta[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

۴-۲۲ پاسخ ضربه سیستمی با طیفی به صورت‌های زیر را بیابید، همچنین تعیین کنید کدامیک از سیستم‌های زیر علی است.

$$H(\Omega) = \frac{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \quad \text{و} \quad H(\Omega) = \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}} \quad \text{و} \quad H(\Omega) = 1 + 2e^{-j3}$$

۴-۲۳ دامنه و فاز پاسخ فرکانسی $X(\Omega)$ را رسم کنید اگر

$$X(\Omega) = 1 + 2e^{-j\Omega} \quad X(\Omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)\left(1 + \frac{3}{4}e^{-j\Omega}\right)}$$

$$X(\Omega) = \frac{1 + 2e^{-j\Omega}}{1 + 2e^{-j\Omega}} \quad X(\Omega) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)^3}$$

۴-۲۴ سیستمی با پاسخ فرکانسی به صورت زیر را به کمک بلوک‌های اساسی بسازید.

$$H(\Omega) = \frac{e^{-j4\Omega}}{\left(1 + \frac{1}{6}e^{-j\Omega} - \frac{1}{6}e^{-j2\Omega}\right)}$$

۴-۲۵ یک سیستم علی LTI توسط معادله تفاضلی زیر بیان می‌گردد

$$y[n] - \frac{\sqrt{2}}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n] - n[n-1]$$

مطلوبست پاسخ فرکانسی و پاسخ ضربه سیستم.

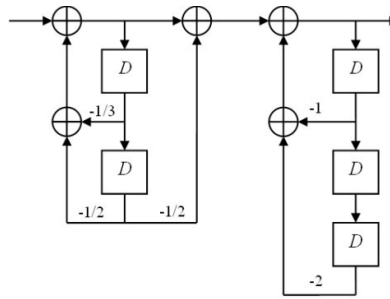
۴-۲۶ یک سیستم علی LTI با معادله تفاضلی زیر را در نظر بگیرید.

$$y[n] - ay[n-1] = bx[n] + x[n-1]$$

مطلوبست محاسبه مقدار b بگونه‌ای که پاسخ فرکانسی سیستم در معادله زیر صدق کند.

$$|H(\Omega)| = 1 \quad \text{ها} \quad \Omega$$

۴-۲۷ پاسخ ضربه سیستم زیر را بیابید.



شکل ۴-۶۰ مربوط به مثال ۴-۲۷

۴-۲۸ یک سیستم LTI علی با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ مفروض است. این سیستم توسط یک زوج معادله تفاضلی به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$\begin{cases} y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] + w[n] + \frac{1}{2}w[n-1] = \frac{2}{3}x[n] \\ y[n] - \frac{5}{4}y[n-1] + 2w[n] - 2w[n-1] = -\frac{5}{3}x[n] \end{cases}$$

پاسخ ضربه این سیستم را بیابید (در معادله دنباله $w[n]$ یک دنباله واسطه باشد).

۴-۲۹ برنامه‌های کامپیوتری بنویسید که کارهای زیر را انجام دهد.

الف: از روی معادله $x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ و تشکیل N معادله و N مجهول، a_k ها را حساب و رسم کنید.

ب: از روی معادله $a_k = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$ اولاً بتواند با داشتن $x[n]$ ، a_k را حساب کند و ثانیاً با داشتن a_k ، $x[n]$ را محاسبه و رسم کند.

۴-۳۰ سیستمی که دارای پاسخ ضربه به صورت زیر است را به کمک بلوک‌های اساسی بسازید.

$$h[n] = 5 \times (0.8)^{-|n|}$$

۴-۳۱ سیستمی که دارای پاسخ ضربه به صورت زیر است را به کمک بلوک‌های اساسی بسازید.

$$h[n] = e^{-2n}u[n]$$

فصل ۵

نظریه نمونه برداری

مقدمه

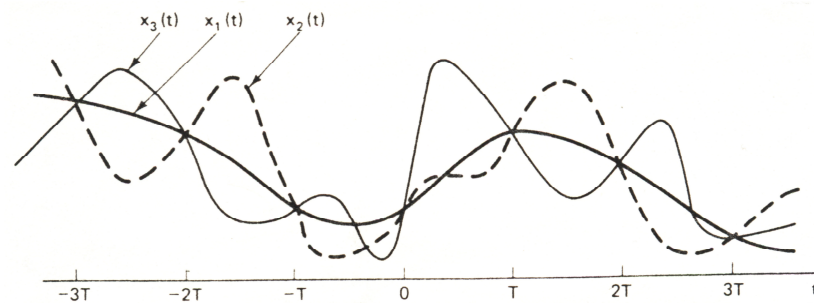
در حالت‌های خاص اطلاعات یک سیگنال پیوسته زمانی (باند محدود) را می‌توان بطور کامل بوسیله اطلاعات موجود در نمونه‌هایی با فاصله زمانی مشخص از سیگنال برداشت کرد. این نتیجه از نظریه نمونه‌برداری بدست آمده است. این نمونه‌ها باید دارای یک حداکثر فاصله زمانی از هم باشند و اگر فاصله نمونه‌ها از هم بیشتر شود دیگر نمی‌توان سیگنال را از روی نمونه‌ها بازسازی کرد. این حقیقت که می‌توان یک سیگنال پیوسته را بطور کامل بوسیله نمونه‌های مجزا نمایش داد، باعث شده است تا ارتباط عمیقی میان سیگنال‌های پیوسته و گسسته زمانی بوجود آید. در بسیاری از حالات پردازش سیگنال گسسته زمانی بسیار ساده‌تر و قابل انعطاف‌تر است. چون این نوع پردازش‌ها را می‌توان بوسیله الگوریتم‌های خاصی با استفاده از کامپیوتر با سرعت‌های بسیار بالا انجام داد. هم‌اکنون پردازش سیگنال‌های صوتی و تصویری توسط همین روش صورت می‌گیرد. در این فصل ضمن بررسی انواع روش‌های نمونه‌برداری از سیگنال‌های پیوسته زمانی بخشی را به طریقه تبدیل نمونه‌های پیوسته زمان به دنباله گسسته زمان اختصاص خواهیم داد و نهایتاً پردازش گسسته زمان بر روی سیگنال‌های پیوسته زمان را مورد بحث قرار خواهیم داد.

۵-۱ نمایش سیگنال پیوسته زمانی بوسیله نمونه‌های آن (نظریه نمونه‌برداری)

در حالت کلی نباید انتظار داشت که نمونه‌برداری از سیگنال‌های مختلف در فواصل زمانی مشخص تمام اطلاعات موجود در سیگنال‌های مورد نظر را به ما بدهد. بعنوان مثال سه سیگنال $x_1(t)$ ، $x_2(t)$ و $x_3(t)$ را در نظر بگیرید. تمام نمونه‌های این سیگنال‌ها در لحظات kT با هم برابرند یعنی

$$x_1(kT) = x_2(kT) = x_3(kT)$$

بنابراین در حالت کلی بی‌نهایت شکل موج وجود دارند که می‌توانند یکدسته نمونه‌های مشخص را بوجود آورند. اما اگر سیگنال باند محدود باشد و نمونه‌ها به اندازه کافی به هم نزدیک برداشته شوند یکدسته نمونه مشخص فقط یک سیگنال را برای ما بوجود خواهد آورد که این امر بصورت ریاضی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. بطور حسی واضح است که اگر سرعت نمونه‌برداری از سیگنال، از سرعت تغییرات سیگنال خیلی بیشتر باشد، نمونه‌های حاصل بخوبی بیانگر نحوه تغییرات سیگنال خواهند بود. در این صورت به این نوع نمونه‌برداری، نمونه‌برداری موفقیت آمیز گفته می‌شود. اکنون لازم است رابطه میان سرعت نمونه‌برداری و سرعت تغییرات سیگنال را جهت نمونه‌برداری موفقیت‌آمیز مورد بررسی قرار دهیم. این رابطه در مورد انواع روش‌های نمونه‌برداری یکسان است و ما جهت سادگی آن را در مورد نمونه‌برداری ایده‌آل یا نمونه‌برداری به کمک قطار ضربه بدست می‌آوریم.

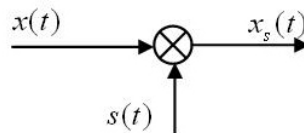


شکل (۵-۱): سه سیگنال پیوسته زمانی که دارای مقادیر یکسانی در لحظات kT هستند.

مزیت نمونه برداری ایده آل در سادگی محاسبات ریاضی می باشد. ولی همانطور که می دانیم ساخت قطار ضربه که از $-\infty$ شروع شده و تا ∞ ادامه پیدا کند غیر ممکن است، حتی ساخت تقریبی آن نیز بدلیل وجود دوره نامحدود غیر ممکن می باشد.

۵-۲ نمونه برداری با قطار ضربه از سیگنال های باند محدود (حالت ایده آل)

در بعضی موارد قطار ضربه^۱ به نام تابع نمونه بردار نیز معروف می باشد و دلیل آن هم قبلاً گفته شد. اکنون نشان خواهیم داد که جهت نمونه برداری موفقیت آمیز باید دوره تناوب نمونه برداری (T_s) با بالاترین مؤلفه فرکانسی سیگنال باند محدود رابطه خاصی داشته باشد. در اینجا تذکر این نکته فوق العاده ضروری است که نمونه برداری فقط در مورد سیگنال های باند محدود می تواند موفقیت آمیز باشد و از سیگنال هایی که از لحاظ فرکانسی دارای باند نامحدود هستند نمی توان بطور موفقیت آمیز نمونه برداری کرد. سیستم نمونه برداری به کمک قطار ضربه بصورت زیر می باشد.



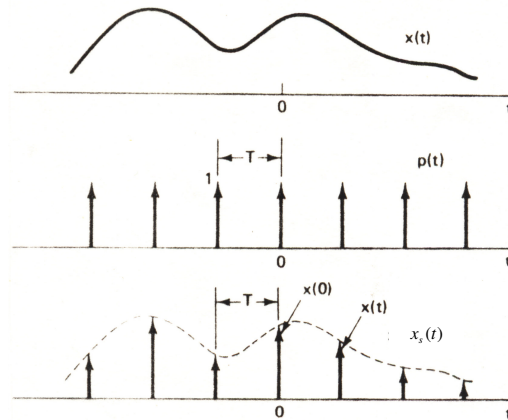
شکل (۵-۲): سیستم نمونه برداری به کمک قطار ضربه از یک سیگنال باند محدود

که در آن $s(t)$ یک قطار ضربه با دوره تناوب T_s می باشد.

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \quad (۵-۱)$$

همان گونه که بعداً توضیح خواهیم داد سیستم شکل (۵-۲) در حقیقت مبین نوعی مدولاتور با حاملی بصورت قطار ضربه می باشد. یک نمونه از شکل سیگنال $x(t)$ و نمونه های آن در شکل (۵-۳) نمایش داده شده اند.

^۱ Impulse Train



شکل (۳-۵): مدولاسیون دامنه با قطار ضربه

در این صورت داریم.

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \quad (۲-۵)$$

و یا

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \quad (۳-۵)$$

و با توجه به خاصیت مدولاسیون که در فصل سوم مورد بحث قرار گرفت می‌توان ارتباط طیفی سیگنال‌ها را بصورت رابطه (۴-۵) نوشت.

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} [X(\omega) \times S(\omega)] \quad (۴-۵)$$

قبلاً داشتیم که تبدیل فوریه قطار ضربه خود نیز در حوزه فرکانس یک قطار ضربه به صورت زیر است.

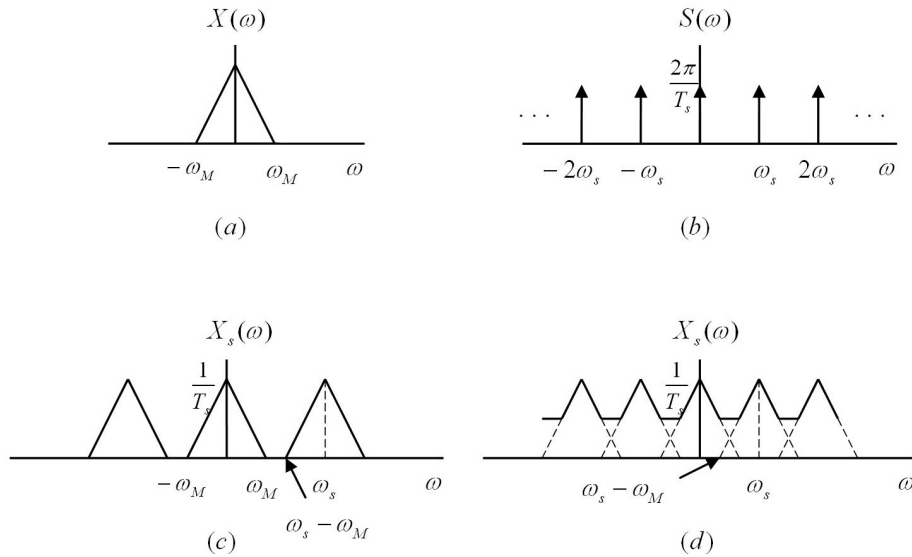
$$S(\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \quad (۵-۵)$$

که در آن $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ می‌باشد. با قرار دادن (۵-۵) در (۴-۵) به (۶-۵) خواهیم رسید.

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{K=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s) \quad (۶-۵)$$

این رابطه به ما می‌گوید که $X_s(\omega)$ یک تابع تناوبی است که شامل مجموع انتقال‌هایی به اندازه ω_s از $X(\omega)$ با دامنه $\frac{1}{T_s}$ در حوزه فرکانس می‌باشد. این مطلب در شکل (c-۴-۵) و (d-۴-۵) به ازاء دو

مقدار متفاوت از ω_s نمایش داده شده است.

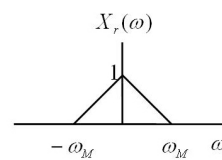
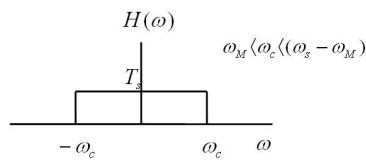
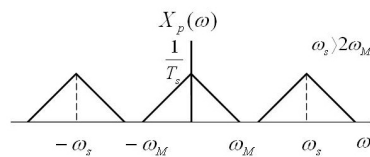
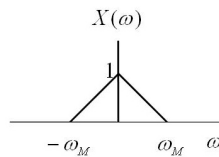
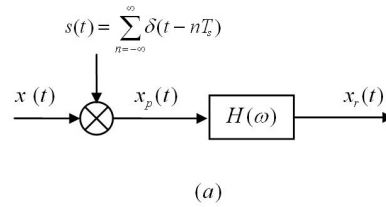


شکل (۴-۵): تأثیر نمونه‌برداری بر طیف سیگنال‌ها (a) طیف سیگنال اصلی (b) طیف سیگنال نمونه‌بردار (c) طیف سیگنال نمونه‌برداری شده با $\omega_s > 2\omega_M$ (d) همان طیف با $\omega_s < 2\omega_M$

از شکل (۴-۵) پیدا است که اگر $\omega_M < \omega_s - \omega_M$ یا $\omega_s > 2\omega_M$ در این صورت هیچ‌گونه تداخلی بین طیف‌های فرکانسی انتقال داده شده بوجود نخواهد آمد، و مانند این است که $X(\omega)$ در هر فاصله با دوره تناوب ω_s در حوزه فرکانس تکرار شود.

نتیجتاً اگر $\omega_s > 2\omega_M$ باشد، می‌توان $x(t)$ را بطور کامل از $x_s(t)$ بوسیله عبور نمونه‌های $x_s(t)$ از یک فیلتر پایین‌گذر با بهره T_s بازسازی نمود. البته باید فرکانس قطع فیلتر بزرگتر از ω_M و کوچکتر از $\omega_s - \omega_M$ باشد (به شکل (۵-۵) توجه کنید).

اما اگر $\omega_s < 2\omega_M$ باشد در این صورت تداخل ایجاد می‌شود. [شکل (۴-۵) (d)] و امکان بازسازی $x(t)$ از روی نمونه‌ها وجود ندارد. این بدین مفهوم است که نمونه‌ها به اندازه کافی به هم نزدیک نیستند. نحوه بازسازی $x(t)$ از روی $x_s(t)$ در شکل (۵-۵) نمایش داده شده است.



شکل (۵-۵): بازسازی دقیق سیگنال از روی نمونه‌های آن بوسیله فیلتر پایین‌گذر

بنابراین اکنون ارتباط مطلوب میان سرعت نمونه‌برداری و بالاترین مؤلفه فرکانسی موجود در طیف سیگنال باند محدود جهت نمونه‌برداری موفقیت‌آمیز را می‌توان بصورت زیر نوشت.

$$\omega_s \geq 2\omega_M \quad (۷-۵)$$

و یا

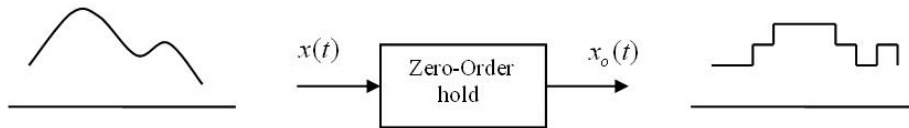
$$\frac{2\pi}{T_s} \geq 2\omega_M \quad (۸-۵)$$

رابطه (۷-۵) به نرخ نایکوئیست^۱ جهت نمونه‌برداری موفقیت‌آمیز از سیگنال‌های باند محدود معروف است. از همین جا نیز می‌توان پی به این حقیقت برد که در مورد سیگنال‌هایی که در حوزه فرکانس دارای باند نامحدود هستند هرگز نمی‌توان نامساوی (۷-۵) یا شرط نایکوئیست را ارضاء نمود، چون در مورد این‌گونه سیگنال‌ها ω_M بسمت بی‌نهایت میل می‌نماید.

^۱ Nyquist Rate

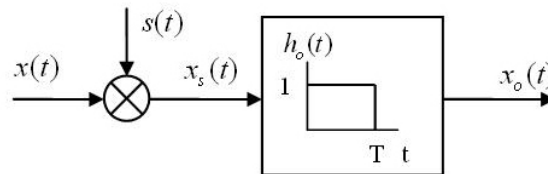
۵-۳ نمونه برداری به کمک مدار نگه دارنده مرتبه صفر^۱

طبق نظریه نمونه برداری می توان یک سیگنال باند محدود را بطور کامل توسط نمونه ها بازسازی نمود. اگرچه این نتیجه حاصلی از نمونه برداری ایده آل می باشد، اما در موارد عملی نیز دقیقاً صادق است. یکی از سیستم هائی که در عمل جهت نمونه برداری مورد استفاده قرار می گیرد سیستمی است که در آن مقدار نمونه های برداشته شده در هر لحظه تا زمان نمونه بعدی نگه داشته می شوند. نمونه ای از سیگنال و نمونه های آن در شکل (۶-۵) نمایش داده می شود.

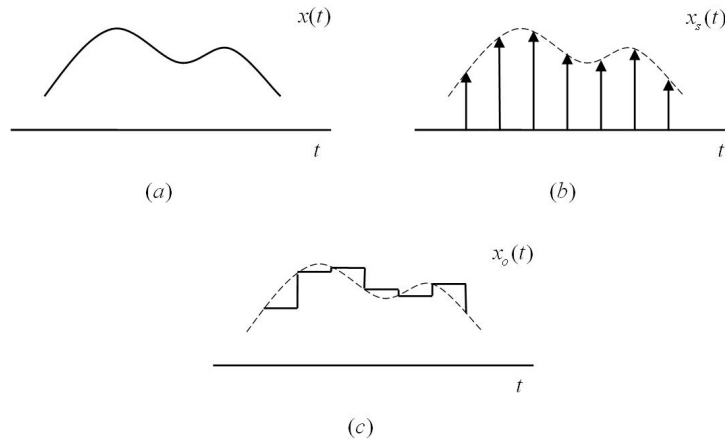


شکل (۶-۵): نمونه برداری به کمک مدار Z.O.H

در این نوع نمونه برداری بازسازی $x(t)$ از $x_0(t)$ بوسیله یک مدار LPF که در باند عبور دارای بهره متغیر است امکان پذیر است. برای روشن تر شدن موضوع ابتدا توجه کنید که $x_0(t)$ یا خروجی مدار ZOH را می توان بوسیله سیستم زیر نیز تولید کرد.

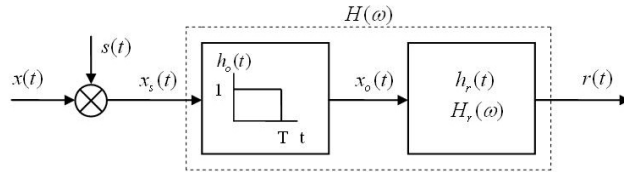


شکل (۷-۵): سیستم معادل جهت نمونه برداری Z.O.H سیگنالهای هر قسمت در شکل ۸-۵ نمایش داده شده اند.



شکل (۸-۵): توصیف دقیق ZOH بصورت نمونه برداری با قطار ضربه به همراه کانولوشن با پالس مربعی.

^۱ Zero Order Hold (Z.O.H)



شکل (۹-۵): اتصال سری مدار ZOH به همراه مدار بازسازی

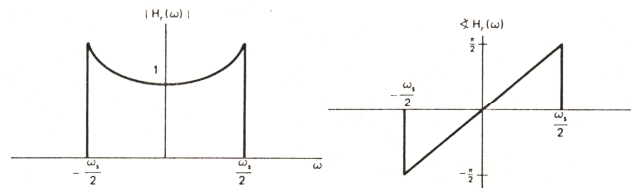
مراحل تولید نمونه‌های سیگنال به روش ZOH بدین صورت است که ابتدا به روش نمونه‌برداری ایده‌آل $x_s(t)$ را بوجود می‌آوریم و بعد سیگنال $x_s(t)$ را از یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h_0(t)$ عبور می‌دهیم. خروجی همان $x_0(t)$ خواهد بود. اما برای بازسازی سیگنال $x(t)$ از روی $x_s(t)$ قبلاً گفتیم که باید $x_s(t)$ را از یک فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل عبور داد. بنابراین با توجه به شکل (۹-۵) باید $H_r(\omega)$ بگونه‌ای باشد که حاصلضرب $H_0(\omega)H_r(\omega)$ معادل یک فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل گردد. به عبارت دیگر چون

$$H_0(\omega) = e^{-\frac{j\omega T}{2}} \left(2 \frac{\text{Sin}(\omega T/2)}{\omega} \right) \quad (۹-۵)$$

لازم است که

$$H_r(\omega) = \left[\frac{e^{\frac{j\omega T}{2}} H(\omega)}{2 \frac{\text{Sin}(\omega T/2)}{\omega}} \right] \quad (۱۰-۵)$$

در این صورت اگر $H(\omega)$ مشخصه یک فیلتر LPF باشد، خروجی سیستم، $H_r(\omega)$ همان $x(t)$ منتها با تغییر اندکی در دامنه خواهد بود.

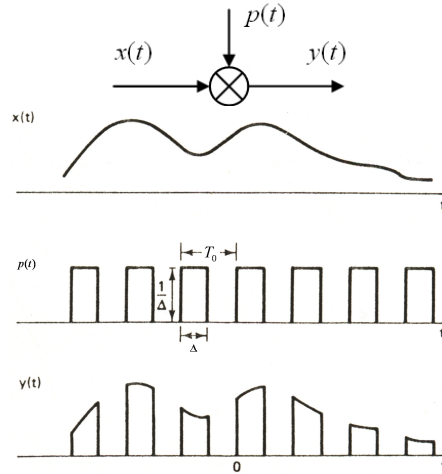


شکل (۱۰-۵): دامنه و فاز مربوط به فیلتر بازسازی برای ZOH

۴-۵ نمونه‌برداری بوسیله پالس

روش دیگری که بطور عملی جهت نمونه‌برداری از سیگنالهای پیوسته مورد استفاده قرار می‌گیرد نمونه‌برداری به کمک قطار پالس^۱ (بجای قطار ضربه) می‌باشد. در این صورت مدار نمونه‌برداری و نمایش سیگنالها بصورت زیر است.

^۱ Pulse Train



شکل (۵-۱۱): نمونه برداری به کمک قطار پالس، هنگامی که $\Delta \rightarrow 0$ ، $p(t)$ بسمت قطار ضربه میل می کند. تبدیل فوریه $p(t)$ به این صورت است.

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (۱۱-۵)$$

که در آن a_k ضرایب سری فوریه $p(t)$ می باشند و $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$.

ضرایب a_k به صورت زیر بدست می آیند.

$$(۱۲-۵)$$

$$a_k = \int_0^{\Delta} \frac{1}{\Delta T_0} e^{-j\frac{2\pi}{T_0} kt} dt = -\frac{1}{j\frac{2k\Delta\pi}{T_0}} e^{-j\frac{2\pi}{T_0} kt} \Big|_0^{\Delta} = -\frac{1}{j2k\Delta\pi} [e^{-j\frac{2\pi}{T_0} k\Delta} - 1] = e^{-j\frac{\pi}{T_0} k\Delta} \frac{1}{k\Delta\pi} \text{Sin}\left(\frac{\pi}{T_0} k\Delta\right), \quad k \neq 0$$

و برای $k=0$ خواهیم داشت.

$$a_k = \frac{1}{T_0} \quad (۱۳-۵)$$

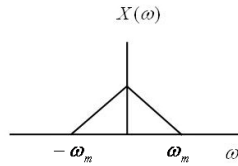
بنابراین داریم.

$$P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{k\Delta} e^{-j\frac{\pi}{T_0} k\Delta} \text{Sin}\left(\frac{\pi}{T_0} k\Delta\right) \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T_0}\right) \quad (۱۴-۵)$$

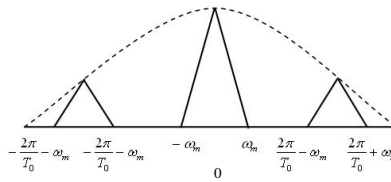
و در نتیجه

$$Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k\Delta\pi} e^{-j\frac{\pi}{T_0} k\Delta} \text{Sin}\left(\frac{\pi}{T_0} k\Delta\right) X\left(\omega - \frac{2k\pi}{T_0}\right) \quad (۱۵-۵)$$

اگر فرض کنیم $x(t)$ دارای طیفی بصورت شکل ۵-۱۲ باشد.

شکل (۵-۱۲): طیف سیگنال $x(t)$

در آن صورت طیف $Y(\omega)$ بصورت شکل ۵-۱۳ خواهد شد.



شکل (۵-۱۳): طیف سیگنال نمونه برداری شده

با توجه به طیف $Y(\omega)$ باز هم می بینیم شرط نایکوئیست جهت نمونه برداری موفقیت آمیز در مورد نمونه برداری با قطار پالس نیز صادق است. بنابراین اگر

$$\frac{2\pi}{T_0} \geq 2\omega_m \quad (۵-۱۶)$$

در آن صورت به کمک یک فیلتر پایین گذر می توان دوباره سیگنال اصلی را بازسازی کرد.

۵-۵ درون یابی^۱ یا بازسازی سیگنال از روی نمونه های برداشته شده

درون یابی روشی است که برای بازسازی سیگنال چه بطور دقیق و چه بطور تقریبی از روی نمونه ها بکار برده می شود. یکی از ساده ترین روش های درون یابی استفاده از مدار ZOH می باشد. یکی دیگر از روشهای بازسازی روش بازسازی خطی^۲ می باشد که در آن قله های هر نمونه بوسیله یک خط راست به نمونه بعدی متصل می شود.



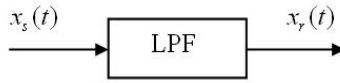
شکل (۵-۱۴): بازسازی خطی بین نقاط نمونه خط چین سیگنال اصلی

قبلاً گفتیم که اگر سیگنال باند محدود و فاصله نمونه ها به اندازه کافی کم باشد، در آن صورت می توان با عبور نمونه ها از یک فیلتر پایین گذر ایده آل بطور کامل سیگنال را بازسازی کرد. نحوه عمل بازسازی سیگنال از روی نمونه ها که توسط فیلتر پایین گذر ایده آل صورت می پذیرد را در حوزه زمان بهتر می توان توضیح داد. سیستم شکل (۵-۱۵) را در نظر بگیرید. خروجی مدار LPF از رابطه زیر بدست می آید.

^۱ Interpolation

^۲ Linear Interpolation

$$x_r(t) = x_s(t) * h(t)$$



شکل (۱۵-۵): مدار بازسازی ایده‌آل

اما می‌دانیم که

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

بنابراین

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) h(t - nT_s) \quad (۱۸-۵)$$

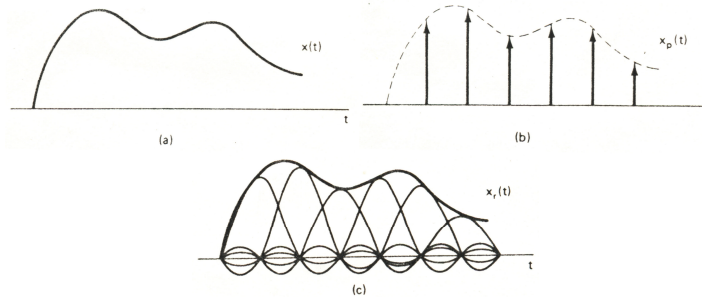
معادله فوق یک فرمول بازسازی است. اما برای فیلتر LPF با فرکانس قطع ω_c و بهره T_s پاسخ ضربه بصورت زیر است.

$$h(t) = T_s \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sinc}\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right) \quad (۱۹-۵)$$

با جایگذاری رابطه (۱۹-۵) در (۱۸-۵) رابطه (۲۰-۵) بدست می‌آید.

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) T_s \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sinc}\left[\frac{\omega_c(t - nT_s)}{\pi}\right] \quad (۲۰-۵)$$

عمل بازسازی سیگنال با فرمول فوق وقتی که $\omega_c = \frac{\omega_s}{2}$ است در شکل (۱۶-۵) نمایش داده شده است.



شکل (۱۶-۵): بازسازی ایده‌آل سیگنال باند محدود به کمک توابع Sinc

رابطه (۲۰-۵) حاوی نکات جالبی می‌باشد. یکی از آنها این است که هر سیگنال باند محدود $x(t)$ را می‌توان بصورت مجموعه‌ای از بی‌نهایت توابع Sinc (فرمول (۲۰-۵)) نمایش داد مشروط بر آنکه $\omega_s \geq 2\omega_c$ باشد که در آن ω_c بیشترین مولفه فرکانسی موجود در سیگنال می‌باشد. مثال (۱-۵): ثابت کنید.

$$\text{Cos}(\omega_c t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sinc}\left[\frac{t - nT_s}{T_s}\right] \quad (۲۱-۵)$$

$$\text{که در آن } T_s = \frac{\pi}{\omega_c}$$

حل: با توجه به رابطه (۲۰-۵) جهت نمونه برداری از سیگنال باند محدود $\cos \omega_c t$ کافی است فاصله نمونه‌ها کمتر یا مساوی $\frac{\pi}{\omega_c}$ باشد. در این صورت رابطه (۲۰-۵) صادق است و با توجه به رابطه زیر

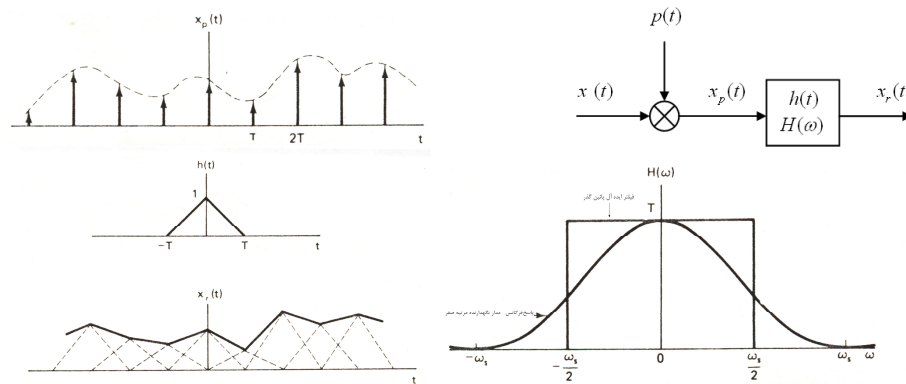
$$\cos(\omega_c n T_s) = \cos(n\pi) = (-1)^n \quad (۲۲-۵)$$

رابطه (۲۱-۵) خود به خود ثابت است.

توجه شود که رابطه‌ای به شکل (۲۱-۵) به کمک روش‌های معمولی بسادگی قابل اثبات نمی‌باشد ولی همانطور که دیدیم به کمک نظریه نمونه برداری به سادگی به اثبات می‌رسد.

بازسازی به روش فوق را معمولاً بازسازی باند محدود می‌نامند چون اگر $x(t)$ باند محدود باشد به کمک روش فوق می‌توان دقیقاً $x(t)$ را بازسازی نمود. اما چون ساخت فیلتر پایین گذر ایده‌آل غیر ممکن است، معمولاً به روش‌های ساده‌تری از فیلتر کردن (یا به عبارت معادل بازسازی کردن) دست می‌یازند که یکی از آنها استفاده از مدار ZOH با پاسخ ضربه $h_0(t)$ است که پاسخ فرکانسی آن در شکل (۱۰-۵) رسم شده است. بنابراین $h_0(t)$ یک تقریب برای فیلتر LPF ایده‌آل است. همانطور که از شکل (۱۰-۵) پیدا است تقریب فوق چندان تقریب خوبی نیست ولی در بسیاری از موارد همین تقریب نیز کافی است.

اما همانگونه که گفتیم روش دیگری که اغلب مورد استفاده قرار می‌گیرد بازسازی خطی است که در آن سیگنال بازسازی شده پیوسته ولی مشتقاتش پیوسته نیستند. در بعضی موارد سیستم بازساز خطی به سیستم نگهدارنده مرتبه اول^۱ معروف است. روش فوق در شکل (۱۷-۵) نمایش داده شده است.



شکل (۱۷-۵): بازسازی خطی (نگهدار مرتبه اول) بصورت نمونه برداری قطار ضربه که با پاسخ ضربه مثلثی کانوال شده است.

^۱ First Order Hold (FOH)

به سادگی می توان تابع تبدیل $H(\omega)$ را بدست آورد.

$$H(\omega) = \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} \right)^2 \quad (۲۳-۵)$$

که در شکل (۱۷-۵) دامنه $H(\omega)$ را بر روی دامنه فیلتر پایین گذر ایده آل منطبق کرده ایم و می بینیم که شباهت آن به فیلتر LPF بیشتر از شباهت $H_0(\omega)$ به فیلتر LPF می باشد.

۵-۶ اثر تداخل^۱

در قسمت های گذشته فرض ما بر این بود که فرکانس نمونه برداری به اندازه کافی بزرگ است، یعنی $\omega_s > 2\omega_m$ است، در نتیجه پدیده تداخل رخ نمی دهد. هنگامی که $\omega_s < 2\omega_m$ باشد در آن صورت نمی توان $x(t)$ را از روی سیگنال $x_s(t)$ ساخت، چون در حوزه فرکانس پدیده تداخل به وجود می آید. اما به هر حال سیگنال $x_r(t)$ در نقاط نمونه برداری مساوی $x(t)$ است. به عبارت دیگر بدون توجه به مقدار ω_s داریم.

$$x_r(nT) = x(nT) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (۲۴-۵)$$

بعنوان مثال فرض کنید $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ است. $X(\omega)$ در شکل (۱۸-۵) رسم شده است. در این شکل ضربه در فرکانس های مثبت و منفی جهت تشخیص به دو صورت رسم شده است. $X_s(\omega)$ و طیف سیگنال نمونه برداری شده را در نظر می گیریم و توجه خود را به تغییرات ω_0 و فرکانس نمونه برداری ω_s معطوف می کنیم. در شکل (۱۸-۵) $X_s(\omega)$ را برای مقادیر مختلف ω_0 رسم کرده ایم (فرض کرده ایم که ω_s ثابت است). شکل پاسخ فیلتر ایده آل نیز به صورت خط چین نشان داده شده است. دیده می شود که در حالتی که $\omega_0 < \omega_s/2$ است هیچ گونه تداخلی به وجود نمی آید (شکل های ۵-۱۸، b و c). ولی به ازاء $\omega_0 > \omega_s/2$ پدیده تداخل در شکل های (d و e) پیدا است. برای هر یک از چهار حالت خروجی فیلتر LPF یا $x_r(t)$ چنین است.

$$\omega_0 = \frac{\omega_s}{6} \text{ و } x_r(t) = \cos \omega_0 t = x(t) \quad (b)$$

$$\omega_0 = \frac{2\omega_s}{6} \text{ و } x_r(t) = \cos \omega_0 t = x(t) \quad (c) \quad (۲۵-۵)$$

$$\omega_0 = \frac{4\omega_s}{6} \text{ و } x_r(t) = \cos(\omega_s - \omega_0)t \neq x(t) \quad (d)$$

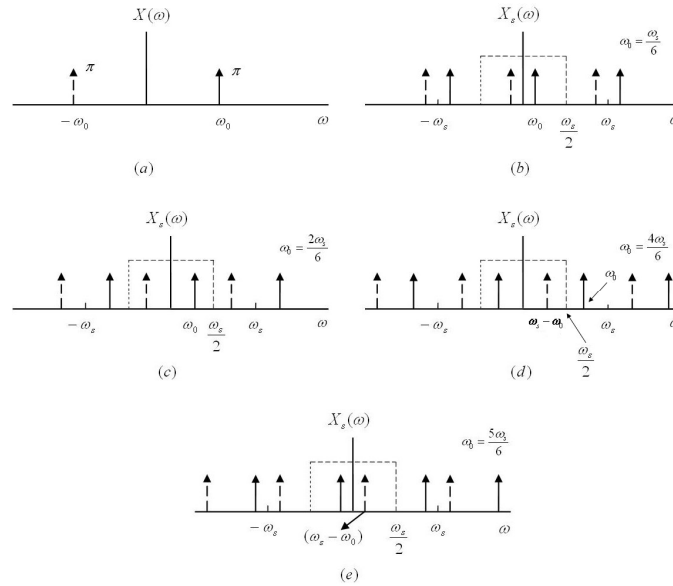
$$\omega_0 = \frac{5\omega_s}{6} \text{ و } x_r(t) = \cos(\omega_s - \omega_0)t \neq x(t) \quad (e)$$

هنگام به وجود آمدن پدیده تداخل فرکانس واقعی ω_0 جای خود را به فرکانس عاریتی (مجازی)^۲ $\omega_s - \omega_0$ می دهد.

^۱ Aliasing

^۲ Virtual Frequency

برای $\omega_s < \omega_0 < \frac{\omega_s}{2}$ با افزایش ω_0 نسبت به ω_s فرکانس خروجی $\omega_s - \omega_0$ کاهش می‌یابد. هنگامی که $\omega_s = \omega_0$ شود. در آنصورت سیگنال بازسازی شده یک مقدار dc یا ثابت خواهد بود. این حالت مبین این واقعیت است که هنگامی که نمونه‌برداری یکبار در هر سیکل انجام شود تمام نمونه‌های برداشته شده دارای دامنه یکسان خواهند بود و به نظر می‌رسد که هیچ تغییری ندارد یا $\omega_0 = 0$ است. در شکل (۱۸-۵) سیگنال اصلی نمونه برداشته شده و سیگنال بازسازی شده ترسیم شده‌اند.

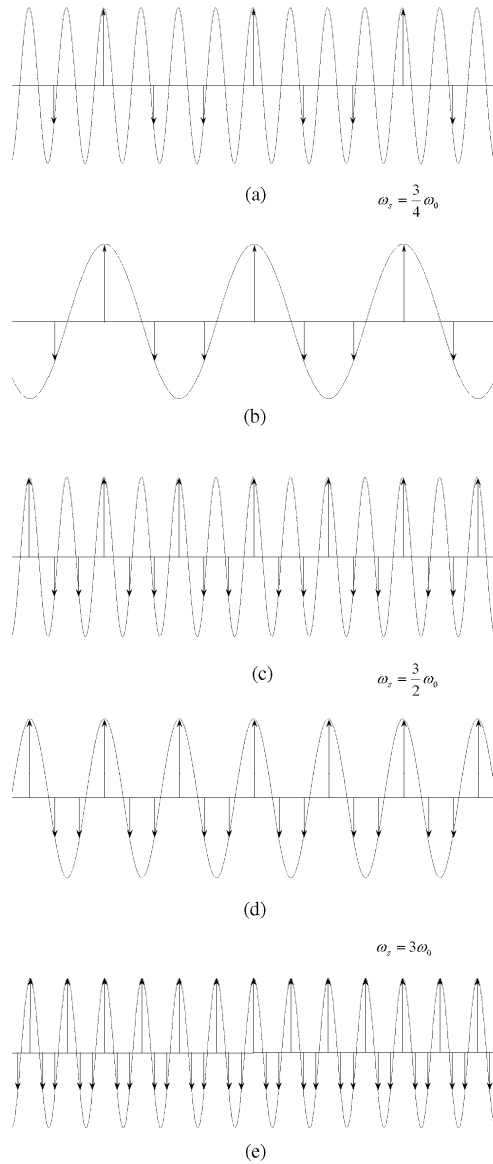


شکل (۱۸-۵): نمایش تأثیر فرکانس‌های بیشتر و کمتر از فرکانس نمونه‌برداری در حوزه فرکانس. (a) طیف سیگنال سینوسی اولیه (b,c)

طیف سیگنال نمونه‌برداری شده با $\omega_s > 2\omega_m$ (e,d) طیف سیگنال نمونه‌برداری شده با $\omega_s < 2\omega_m$

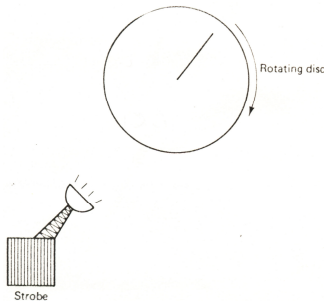
در شکل (۱۹-۵) سیگنال $x(t)$ بصورت خطوط پرنگ رسم شده‌اند. همچنین نمونه‌های برداشته شده و سیگنال بازسازی شده از روی نمونه‌ها با خط چین رسم شده‌اند. از این شکل‌ها به خوبی می‌توان چگونگی بازسازی یا درون‌یابی را مشاهده کرد. اثر داخل که باعث انعکاس فرکانس‌های بالاتر به فرکانس‌های پایین‌تر است را نیز می‌توان در شکل‌های (c,d) مشاهده کرد. چون در این حالت فرکانس نمونه‌برداری ω_s از دو برابر فرکانس ω_0 کمتر است ($\omega_s = \frac{6}{5}\omega_0$) و بنابراین سیگنال بازسازی شده دارای فرکانس زیر است.

$$\omega_s - \omega_0 = \frac{6}{5}\omega_0 - \omega_0 = \frac{1}{5}\omega_0 \quad (۲۶-۵)$$



شکل (۵-۱۹): تأثیر تداخل روی سیگنال سینوسی برای مقادیر مختلف فرکانس نمونه برداری (a) سیگنال سینوسی اولیه با فرکانس ω_0 و نمونه های گرفته شده با فرکانس $\omega_s = \frac{3\omega_0}{4}$ (b) سیگنال بازسازی شده از نمونه های گرفته شده از سیگنال اصلی با فرکانس نمونه برداری $\omega_s = \frac{3\omega_0}{4}$ (c) سیگنال سینوسی اولیه با فرکانس ω_0 و نمونه های گرفته شده با فرکانس $\omega_s = \frac{3\omega_0}{2}$ (d) سیگنال بازسازی شده از نمونه های گرفته شده از سیگنال اصلی با فرکانس نمونه برداری $\omega_s = \frac{3\omega_0}{2}$ (e) سیگنال بازسازی شده از نمونه های گرفته شده از سیگنال اصلی با فرکانس نمونه برداری $\omega_s = 3\omega_0$ در (b) و (d) پدیده تداخل رخ می دهد در حالی که در (c) تداخل رخ نمی دهد.

در واقع نمونه‌برداری آهسته باعث شده است که فرکانس‌های بالاتر به فرکانس‌های پایین منعکس شوند. این واقعیت را با آزمایش ساده شکل (۵-۲۰) می‌توان تحقیق کرد.



شکل (۵-۲۰): چراغ چشمک‌زن و دیسک چرخان

دیسک با سرعت مشخص در حال گردش است. خطوط شعاعی منفردی که روی آن ترسیم شده است را در نظر بگیرید. چراغی را که با سرعت‌های مختلف و بطور متناوب روشن و خاموش می‌شود^۱ را بعنوان سیستم نمونه‌بردار فرض کنید. هنگامی که فرکانس فلاش خیلی بیشتر از سرعت چرخش دیسک باشد سرعت چرخش صفحه بطور صحیح از چرخش خط شعاعی دیده می‌شود. هنگامی که سرعت فلاش کمتر و کمتر شود تا جایی که کمتر از دو برابر سرعت چرخش صفحه شود، به نظر می‌رسد سرعت چرخش صفحه کمتر از مقدار قبلی است (البته با جهت عکس). اگر سرعت فلاش یکبار در هر دور صفحه باشد بنظر می‌رسد که صفحه ثابت است و چرخشی ندارد.

۵-۷ نمونه‌برداری در حوزه فرکانس

نظریه نمونه‌برداری که در قسمت‌های قبلی این فصل برای حوزه زمان در مورد سیگنال‌های باند محدود مطرح شد، در حوزه فرکانس بصورت دوگان حوزه زمان قابل تعریف است. عبارت دیگر یک نوع دوگانی بین حوزه زمان و فرکانس در نظریه نمونه‌برداری مشاهده می‌گردد. قبلاً دیدیم که جهت نمونه‌برداری موفقیت‌آمیز لازم است سیگنال در حوزه فرکانس دارای باند محدود باشد. بنابراین انتظار داریم نمونه‌برداری در حوزه فرکانس فقط برای سیگنال‌هایی که در حوزه زمان دارای دوره محدود هستند، موفقیت‌آمیز باشد. حقیقت امر نیز همین است و نمونه‌برداری موفقیت‌آمیز در حوزه فرکانس مستلزم دوره محدود بودن سیگنال در حوزه زمان می‌باشد.

در این قسمت روش نمونه‌برداری فرکانسی از یک سیگنال زمان محدود که در حوزه فرکانس نامحدود است را مورد بررسی قرار می‌دهیم. توجه داشته باشید که بر اساس نظریه نمونه‌برداری نمی‌توان از این سیگنال‌ها در حوزه زمان نمونه‌برداری کرد چون پهنای باند آنها بی‌نهایت است برای بررسی مفصل‌تر این موضوع سیستم نمونه‌بردار در حوزه فرکانس را بصورت شکل (۵-۲۱) در نظر بگیرید. توجه شود

¹ Flasher

که سیستم ضرب‌کننده در حقیقت یک ضرب‌کننده در حوزه فرکانس می‌باشد که معادل حوزه زمانی آن کانولوشن می‌باشد.

در اینجا داریم.

$$\bar{X}(\omega) = X(\omega)P(\omega) \quad (۲۷-۵)$$

در حوزه زمان داریم.

$$(۲۸-۵)$$

$$\bar{x}(t) = x(t) * p(t)$$

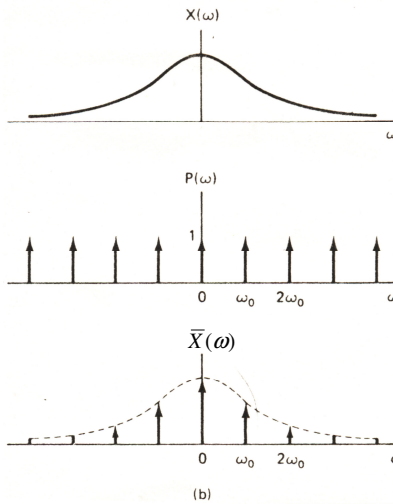
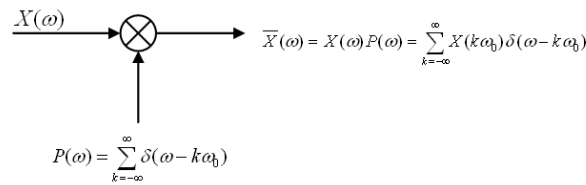
که در آن

$$p(t) = \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \frac{2\pi}{\omega_0} k) \quad (۳۰-۵)$$

بنابراین

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - \frac{2\pi k}{\omega_0}) \quad (۳۱-۵)$$

معادله (۳۱-۵) دوگان معادله (۸-۵) است.



شکل (۲۱-۵): نمونه‌برداری به کمک قطار ضربه در حوزه فرکانس (a) سیستم اصلی (b) طیف‌های مربوط به

$$\bar{X}(\omega) \text{ و } P(\omega) \text{ و } X(\omega)$$

اگر $x(t)$ زمان محدود باشد یعنی

$$x(t) = 0, |t| > T_m \quad (۳۲-۵)$$

در این صورت همان گونه که در شکل (۲۲-۵) نمایش داده شده است با انتخاب

$$\frac{2\pi}{\omega_0} > 2T_m \quad (۳۳-۵)$$

می باشد که در معامله (۳۱-۵) داده شده است شامل $x(t)$ و انتقال یافته های آن به اندازه $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

تبدیل فوریه آن $X(\omega)$ را می توان با انجام عمل پنجره پایین گذر زمانی^۱ از سیگنال $\bar{x}(t)$ جدا کرد

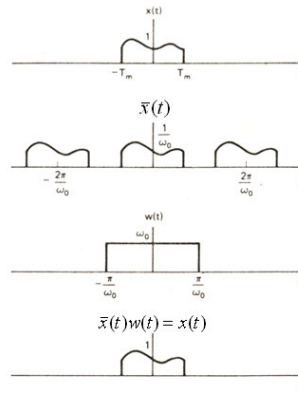
یعنی

$$x(t) = \bar{x}(t)w(t) \quad (۳۴-۵)$$

که در آن

$$w(t) = \begin{cases} \omega_0 & |t| \leq \frac{\pi}{\omega_0} \\ 0 & |t| > \frac{\pi}{\omega_0} \end{cases} \quad (۳۵-۵)$$

سیگنال های مراحل فوق در شکل (۲۲-۵) نمایش داده شده اند.



شکل (۲۲-۵): شکل موج حوزه زمانی، مربوط به نمونه برداری حوزه فرکانس

اگر نامساوی (۳۳-۵) صادق نباشد در آن صورت نمی توان $x(t)$ را از $\bar{x}(t)$ جدا کرد چون $x(t)$ با انتقال یافته هایش تداخل پیدا می کند این نوع تداخل دوگان تداخل حوزه فرکانس است که قبلاً شرح داده شد.

^۱ low-time windowing

در مقایسه با آنچه در مورد بازسازی گفتیم می‌توان گفت عملکرد پنجره پایین‌گذر زمانی روی سیگنال $\bar{x}(t)$ کار بازسازی روی نمونه‌های $X(\omega)$ را در حوزه فرکانس انجام می‌دهد از معامله (۳۴-۵) داریم.

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} [\bar{X}(\omega) * W(\omega)] \quad (۳۶-۵)$$

که در آن

$$\bar{X}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0) \quad (۳۷-۵)$$

و $W(\omega)$ تبدیل فوریه $w(t)$ است. یعنی

$$W(\omega) = 2\pi \text{Sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad (۳۸-۵)$$

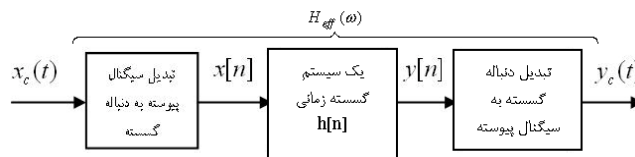
با ترکیب معادلات (۳۶-۵) و (۳۷-۵) داریم.

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0) \text{Sinc}\left(\frac{\omega - k\omega_0}{\omega_0}\right) \quad (۳۹-۵)$$

که این معادله نیز دوگان (۲۰-۵) است.

۵-۸ پردازش گسسته زمانی بر روی سیگنال‌های پیوسته زمانی^۱

در بسیاری از کاربردها بدلیل سادگی پردازش در حوزه گسسته زمانی بهتر است ابتدا سیگنال پیوسته زمانی را به یک سیگنال معادل گسسته زمانی تبدیل نمود و بعد تمام عملیات پردازش‌های لازم را روی سیگنال گسسته زمانی انجام داد. این کار توسط نمونه‌برداری امکان‌پذیر است. این عملیات را می‌توان در سه بلوک زیر خلاصه کرد.



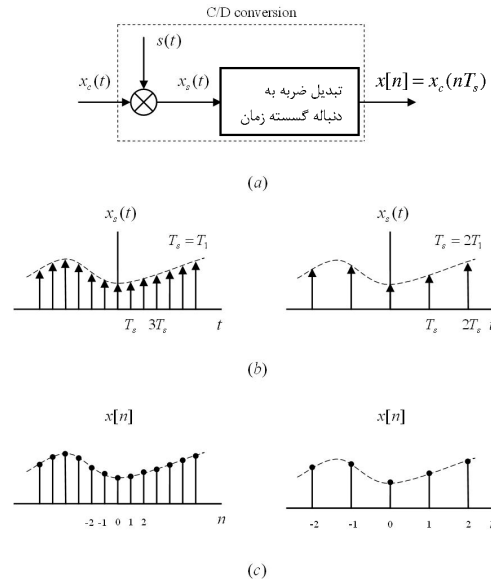
شکل (۲۳-۵): پردازش گسسته زمانی بر روی سیگنال‌های پیوسته زمانی

بلوک سوم جهت بازگشت به حوزه پیوسته زمانی لازم است. اساس کار در بلوک اول (C/D) این است که باید رابطه (۴۰-۵) میان نمونه‌های $x[n]$ و سیگنال $x_c(t)$ برقرار باشد.

$$x[n] = x_c(nT_s) \quad (۴۰-۵)$$

جهت درک بهتر مطلب شایسته است رابطه میان $x_c(t)$ و نمونه‌هایش را بوسیله یک فرایند نمونه‌برداری و بدنبال آن یک مدار مبدل ضربه به دنباله نمایش داد. این رابطه بوسیله شکل (۲۴-۵) نمایش داده شده است.

¹ Discrete Time Processing of Continuoses-Time Signal



شکل (۵-۲۴): نمونه‌برداری با قطار ضربه در اتصال با سیستم مبدل ضربه به دنباله زمانی گسسته (a) نمایش کلی سیستم (b) $x_s(t)$ برای دوسرعت نمونه‌برداری پوش خط‌چین $x_c(t)$ را نمایش می‌دهد. (c) خروجی بصورت دنباله برای دوسرعت مختلف نمونه‌برداری.

در حوزه فرکانس می‌توان نوشت.

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(\omega - k\omega_s) \quad (۴۱-۵)$$

و یا در حوزه زمان داریم.

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT_s) \delta(t - nT_s) \quad (۴۲-۵)$$

که از روی این رابطه (۴۲-۵) می‌توان نوشت.

$$X_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT_s) e^{-jn\omega T_s} \quad (۴۳-۵)$$

از طرفی دیگر خروجی $x[n]$ را در نظر گرفته و تبدیل فوریه‌اش را می‌نویسیم.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (۴۴-۵)$$

اکنون اگر بخواهیم $x[n] = x_c(nT)$ شود داریم.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s) e^{-j\Omega n} \quad (۴۵-۵)$$

با مقایسه روابط (۴۳-۵) و (۴۵-۵) داریم.

$$X(\Omega) = X_s\left(\frac{\Omega}{T_s}\right)$$

و از طرف دیگر داریم.

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T_s} X_c(\omega), \quad |\omega| \leq \omega_m \quad (۴۶-۵)$$

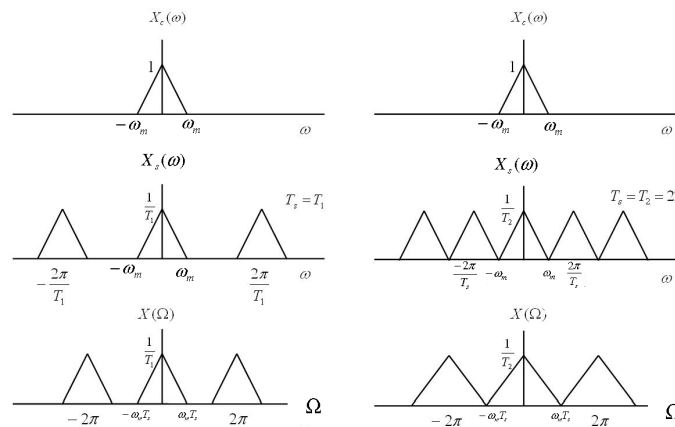
که در آن ω_m بالاترین مؤلفه فرکانسی موجود در X_c است. بنابراین داریم.

$$X(\Omega) = \frac{1}{T_s} X_c\left(\frac{\Omega}{T_s}\right), \quad |\Omega| < \omega_m T_s \quad (۴۷-۵)$$

و یا

$$X(\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{\Omega}{T_s} - \frac{2k\pi}{T_s}\right) \quad (۴۸-۵)$$

ارتباط میان $X(\Omega)$ ، $X_s(\omega)$ ، $X_c(\omega)$ در شکل (۲۵-۵) رسم شده است.



شکل (۲۵-۵): ارتباط بین $X(\Omega)$ ، $X_s(\omega)$ ، $X_c(\omega)$ برای دو سرعت مختلف نمونه برداری

توجه به این نکته حائز اهمیت است که LTI بودن کل سیستم (۲۷-۵) بستگی به دو عامل زیر دارد.

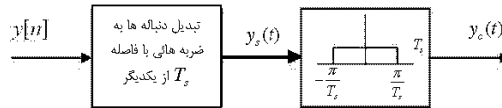
- ۱- LTI بودن سیستم گسسته زمان که جهت پردازش سیگنال پیوسته زمان بکار می‌رود.
- ۲- باند محدود بودن سیگنال ورودی و بالا بودن نرخ نمونه برداری به اندازه‌ای که از تداخل جلوگیری کند.

توجه شود که در شکل (۲۵-۵) T_1 و T_2 (نرخ‌های نمونه برداری) بگونه‌ای هستند که شرط نایکوئیست را ارضاء می‌نمایند یعنی $\frac{2\pi}{T_2} \geq 2\omega_m$ و $\frac{2\pi}{T_1} \geq 2\omega_m$. در غیر این صورت تداخل حاصله مانع از موفقیت

عمل نمونه برداری می‌شد.

با توجه به شکل (۲۴-۵) می‌بینیم که انتخاب T_s تأثیری در فاصله نمونه‌ها در حوزه گسسته زمانی ندارد و این در واقع نمایانگر یک نرمالیزاسیون برحسب T_s (تقسیم محور زمان بر T_s) در انتقال از حوزه پیوسته به گسسته زمانی می‌باشد. این نرمالیزاسیون بر حسب T_s در حوزه زمان معادل ضرب حوزه فرکانس در ضریب نرمالیزاسیون T_s می‌باشد، یعنی $\Omega = T_s \omega$.

اکنون مناسب است که بلوک D/C که کارش تبدیل نمونه‌ها به یک سیگنال پیوسته زمانی است را بررسی کنیم. در این بلوک ابتدا باید دنباله‌ها را با توجه به دانستن نرخ نمونه‌برداری T_s به ضربه‌هایی با فاصله T_s از یکدیگر تبدیل نمود و سپس با قراردادن یک LPF می‌توان $y_c(t)$ را بازسازی کرد. (به شکل (۲۶-۵) توجه کنید).



شکل (۲۶-۵): بلوک D/C

در اینجا داریم.

$$y_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] \delta(t - nT_s) \quad (۴۹-۵)$$

و بعد از LPF داریم.

$$Y_c(\omega) = Y_s(\omega) H_r(\omega) \quad (۵۰-۵)$$

$$y_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] h_r(t - nT_s) \quad (۵۱-۵)$$

که در آن

$$h_r(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T_s}\right)}{\frac{\pi t}{T_s}} \quad (۵۲-۵)$$

بنابراین می‌توان نوشت.

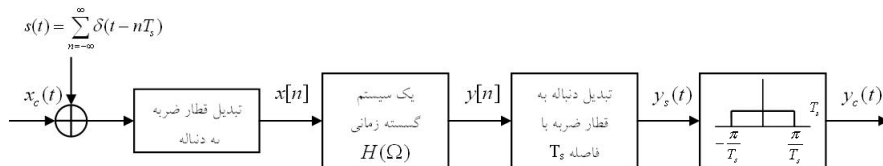
$$y_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] \frac{\sin[\pi(t - nT_s)/T_s]}{\pi(t - nT_s)/T_s} \quad (۵۳-۵)$$

چون $h_r(0) = 1$ و $h_r(mT_s) = 0$ برای $m \neq 0$ پس

$$y_c(mT_s) = y[m] \quad (۵۴-۵)$$

البته بشرطی که $Y_c(\omega) = 0$ برای $|\omega| \geq \frac{\pi}{T_s}$ باشد. اکنون سیستم کلی که بیانگر یک پردازش گسسته

زمانی $H(\Omega)$ بر روی سیگنال پیوسته زمانی $x_c(t)$ می‌باشد را می‌توان بصورت زیر رسم کرد.



شکل (۲۷-۵): سیستم کلی که نمایشگر یک پردازش گسسته زمانی $H(\Omega)$ بر روی سیگنال پیوسته زمانی $x_c(t)$ می‌باشد.

حال سوال اینست که یک پردازشگر گسسته زمانی $H(\Omega)$ در سیستم شکل (۲۷-۵) معادل چه سیستمی در حوزه پیوسته زمانی است؟ جواب این سوال با در نظر گرفتن $Y_c(\omega)$ و $X_c(\omega)$ در شکل (۲۷-۵) داده می‌شود. در شکل (۲۷-۵) داریم:

$$X(\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{\Omega}{T_s} - \frac{2k\pi}{T_s}\right) \quad (۵۵-۵)$$

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(\Omega)X_c\left(\frac{\Omega}{T_s} - \frac{2k\pi}{T_s}\right) \quad (۵۶-۵)$$

از معادلات (۵۰-۵) الی (۵۴-۵) می‌توان استنباط کرد که

$$Y_s(\omega) = Y(\Omega) \Big|_{\Omega = \omega T_s} \quad (۵۷-۵)$$

$$Y_s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(\omega T_s) X_s\left(\omega - \frac{2k\pi}{T_s}\right) \quad (۵۸-۵)$$

و بعد از LPF کردن داریم:

$$Y_c(\omega) = T_s X_c(\omega) H(\omega T_s), \quad |\omega| < \frac{\pi}{T_s} \quad (۵۹-۵)$$

بنابراین تابع انتقال معادل به صورت زیر بدست می‌آید.

$$H_{eff}(\omega) = T_s H(\omega T_s), \quad |\omega| < \frac{\pi}{T_s} \quad (۶۰-۵)$$

بنابراین برای انجام عملیات مشتق‌گیری رابطه متناظر در حوزه گسسته زمان باید بدین صورت باشد.

$$H(\Omega) = \frac{1}{T_s} j\left(\frac{\Omega}{T_s}\right), \quad |\Omega| < \pi \quad (۶۱-۵)$$

این تابع تبدیل با دوره تناوب 2π متناوب است و اگر آن را در سیستم شکل (۲۷-۵) در محل $H(\Omega)$ استفاده کنیم عمل کلی سیستم معادل یک مشتق‌گیر پیوسته با تابع تبدیل زیر است.

$$H_{eff}(\omega) = \begin{cases} j\omega & |\omega| < \frac{\pi}{T_s} \\ 0 & |\omega| > \frac{\pi}{T_s} \end{cases} \quad (۶۲-۵)$$

پاسخ فرکانسی $H_{eff}(\omega)$ و $H(\Omega)$ در شکل (۲۸-۵) رسم شده‌اند. محاسبه پاسخ ضربه به صورت تمرین به عهده دانشجویان گذاشته می‌شود.

بنابراین اگر یک سیستم گسسته زمانی با پاسخ فرکانسی به صورت (۶۱-۵) در شکل (۲۷-۵) در محل

$h[n]$ استفاده شود خروجی $y_c(t)$ بازاء هر ورودی باند محدود (که بالاترین مؤلفه فرکانسی‌اش از $\frac{\pi}{2}$

کوچکتر باشد) مشتق ورودی خواهد بود.

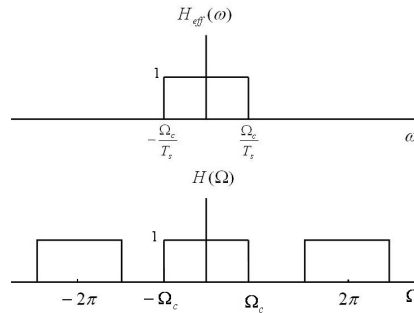
مثال (۲-۵): تابع انتقال یک فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل در حوزه پیوسته زمانی بصورت رابطه (۶۳-۵) است.

$$H_{eff}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \frac{\Omega_c}{T_s} = \omega_c \\ 0 & |\omega| > \frac{\Omega_c}{T_s} = \omega_c \end{cases} \quad (۶۳-۵)$$

اگر بخواهیم بجای این سیستم از یک سیستم معادل گسسته زمانی در شکل (۲۷-۵) استفاده کنیم باید سیستمی را بصورت زیر بکار ببریم.

$$H(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < \Omega_c \\ 0 & \Omega_c < |\Omega| < \pi \end{cases} \quad (۶۴-۵)$$

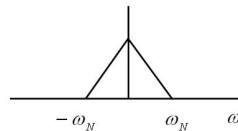
که با دوره تناوب 2π تکرار می‌شود.



شکل (۲۸-۵): نمایش $H_{eff}(\omega)$ و $H(\Omega)$

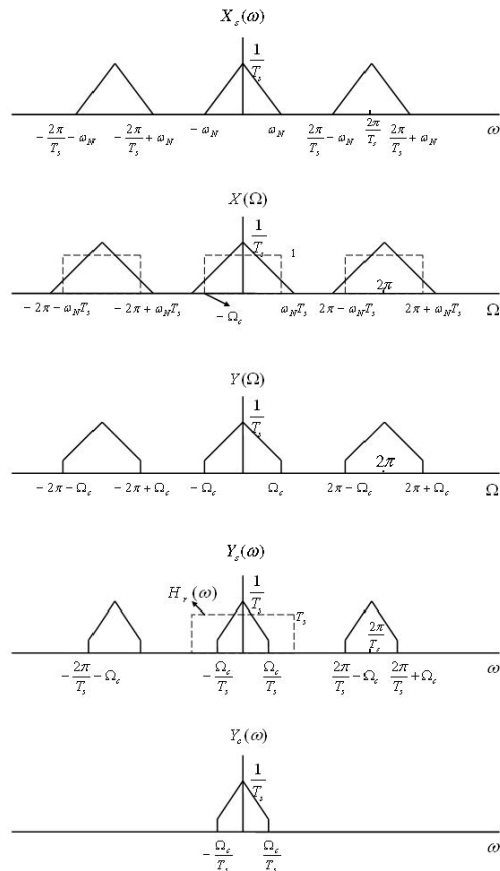
اکنون فرض کنید سیگنال $x_c(t)$ دارای طیف زیر باشد.

$$X_c(\omega)$$



شکل (۲۹-۵): نمایش طیف $X_c(\omega)$

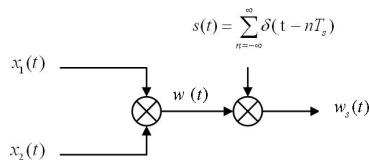
بنابراین به ترتیب برای $X_s(\omega)$ ، $X(\Omega)$ ، $Y(\Omega)$ و $Y_s(\omega)$ و در نهایت $Y_c(\omega)$ طیف‌های زیر را داریم.



شکل (۳۰-۵): نمایش $X_s(\omega)$ ، $X(\Omega)$ ، $Y(\Omega)$ ، $Y_s(\omega)$ و $Y_c(\omega)$

پس فرکانس قطع فیلتر در حوزه پیوسته زمانی را می توان توسط دوره تناوب نمونه برداری T_s تعیین نمود، بدون اینکه Ω_c یا فرکانس قطع فیلتر گسسته زمانی را تغییر داد. این یک روش متداول در ساختن فیلترهای پایین گذر پیوسته زمانی با فرکانس های قطع مختلف، از فیلترهای پایین گذر گسسته زمانی با یک فرکانس قطع می باشد.

مثال (۳-۵): در سیستم نشان داده شده در شکل ۳۱-۵ بیشترین فاصله نمونه ها (T_s) جهت نمونه برداری موفقیت آمیز چقدر باید باشد؟



شکل ۳۱-۵ سیستم مربوط به ۳-۵

توجه کنید که پهنای باند $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به ترتیب ω_1 و ω_2 می‌باشند.
 حل: لازم است ابتدا پهنای باند $w(t)$ را بیابیم. با توجه به اینکه حاصلضرب دو سیگنال $x_1(t)$ ، $x_2(t)$ است، داریم.

$$W(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

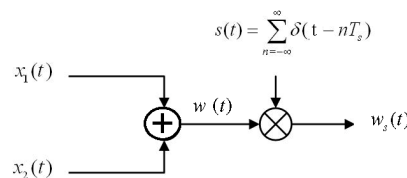
بنابراین طیف $W(\omega)$ دارای پهنای باند $\omega_1 + \omega_2$ می‌باشد. بنابراین طبق نظریه نمونه‌برداری شرط زیر را جهت نمونه‌برداری موفقیت‌آمیز خواهیم داشت.

$$\frac{2\pi}{T_s} \geq 2(\omega_1 + \omega_2)$$

و یا

$$T_s \leq \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_2}$$

مثال (۴-۵): در سیستم شکل زیر بیشترین فاصله نمونه‌ها (T_s) جهت نمونه‌برداری موفقیت‌آمیز چقدر باید باشد.



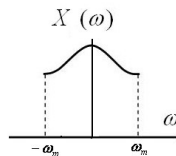
شکل ۳۲-۵ سیستم مربوط به مثال ۴-۵

توجه کنید که پهنای باند $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به ترتیب ω_1 و ω_2 باشد.
 حل: با توجه به شکل پهنای باند $W(\omega)$ مساوی ماکزیمم ω_1 و ω_2 می‌باشد بنابراین

$$T_s \leq \frac{\pi}{\text{Max}\{\omega_1, \omega_2\}}$$

مثال (۵-۵): در سیستم شکل ۵-۵ سیگنال نمونه بردار یک قطار ضربه است که علامت هر دو نمونه مجاور مخالف یکدیگر است. اگر طیف سیگنال بصورت شکل ۳۳-۵ نمایش داده شده باشد. تبدیل فوریه

$x_s(t)$ و $y(t)$ را برای حالتی که $\Delta < \frac{\pi}{2\omega_M}$ باشد بدست آورید.

شکل ۳۳-۵ شکل طیف سیگنال $x(t)$ مربوط به مثال ۵-۵

$$x_s(t) = x(t)s(t)$$

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * S(\omega)$$

می توان سیگنال نمونه بردار را بصورت زیر نوشت.

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2k\Delta) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2k\Delta + \Delta)$$

بنابراین بسادگی می توان تبدیل فوریه $s(t)$ را بدین صورت نوشت.

$$S(\omega) = \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) - \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) e^{-jk\omega_s\Delta}$$

که در آن $\omega_s = \frac{2\pi}{2\Delta}$ می باشد.

$$S(\omega) = \frac{\pi}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{k\pi}{\Delta}\right) [1 - e^{-jk\omega_s\Delta}]$$

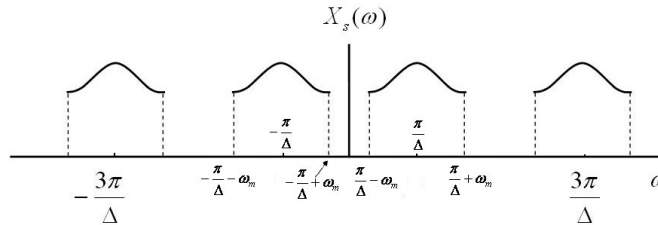
در این صورت داریم.

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{\Delta} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - \frac{k\pi}{\Delta}\right) (1 - e^{-jk\omega_s\Delta}) \right\} = \frac{1}{2\Delta} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - \frac{k\pi}{\Delta}\right) (1 - e^{-jk\pi}) \right\}$$

و یا

$$X_s(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - \frac{k\pi}{\Delta}\right) & k, \text{ odd} \\ 0 & k, \text{ even} \end{cases}$$

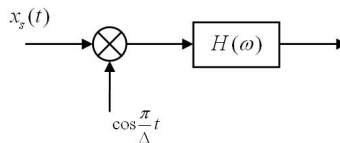
بنابراین طیف $X_s(\omega)$ بصورت زیر می باشد.



شکل ۳۴-۵ شکل طیف $X_s(\omega)$ مربوط به مثال ۵-۵

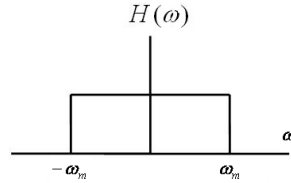
مثال (۶-۵): جهت بازسازی سیگنال اصلی در مثال (۵-۵) از روی نمونه های آن از چه سیستمی می توان استفاده کرد.

حل: می توان از سیستم شکل ۳۵-۵ استفاده کرد.



شکل ۳۵-۵ شکل سیستم مربوط به مثال ۵-۵

که در آن $H(\omega)$ یک فیلتر پایین گذر بصورت شکل ۳۶-۵ است.



شکل ۳۶-۵ شکل طیف $H(\omega)$ مربوط به مثال ۶-۵

مثال (۷-۵): ماکزیمم مقدار Δ جهت نمونه برداری موفقیت آمیز از سیگنال $x(t)$ چقدر می تواند باشد؟ حل: با توجه به شکل ۲۳-۵ و طبق نظریه نمونه برداری باید

$$\frac{\pi}{\Delta} - \omega_m \geq -\frac{\pi}{\Delta} + \omega_m \Rightarrow \frac{2\pi}{\Delta} \geq 2\omega_m$$

و یا

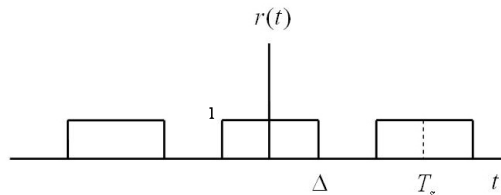
$$\Delta \leq \frac{\pi}{\omega_m}$$

مثال (۸-۵): در سیستم نمونه بردار شکل ۵-۵ از یک موج متناوب مربعی مطابق شکل ۲۶-۵ جهت نمونه برداری از سیگنال باند محدود $x(t)$ استفاده شده است. دوره تناوب سیگنال نمونه بردار T_s می باشد. اگر پهنای باند سیگنال ω_m باشد و با فرض $\Delta = \frac{T_s}{3}$ مطلوب است ماکزیمم مقدار T_s جهت نمونه برداری موفقیت آمیز.

حل: سیگنال نمونه بردار را به صورت زیر داریم.

$$s(t) = r(t)$$

که در آن $r(t)$ بصورت زیر است.



شکل ۳۷-۵ سیگنال نمونه بردار مربوط به مثال ۸-۵

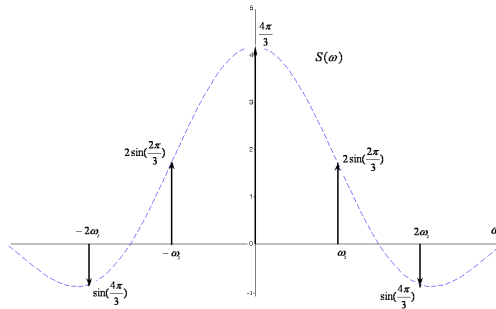
اما قبلاً ضرایب سری فوریه $r(t)$ را بدست آورده بودیم.

$$a_k = \frac{\sin k\omega_s \Delta}{k\pi} \quad \text{و} \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

پس

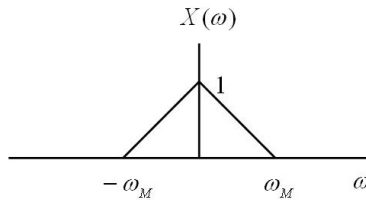
$$S(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin k\omega_s \Delta}{k\pi} \delta(\omega - k\omega_s)$$

بنابراین طیف $S(\omega)$ بصورت شکل ۳۸-۵ خواهد بود.



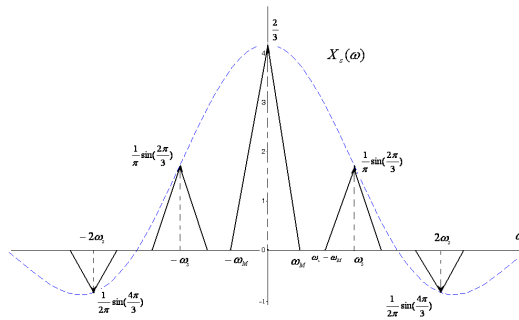
شکل ۳۸-۵ شکل طیف $S(\omega)$ مربوط به مثال ۸-۵

اگر فرض کنیم طیف $x(t)$ بصورت زیر باشد.



شکل ۳۹-۵ شکل طیف $x(t)$ مربوط به مثال ۸-۵

در این صورت طیف سیگنال نمونه برداری شده $x_s(t)$ بصورت زیر خواهد بود.



شکل ۴۰-۵ شکل طیف $x(t)$ مربوط به مثال ۸-۵

بنابراین شرط لازم بدست می آید.

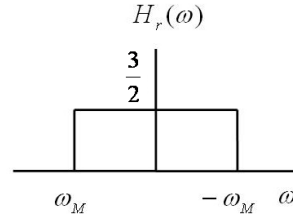
$$\omega_s - \omega_M \geq \omega_M$$

و یا

$$\omega_s \geq 2\omega_M \Rightarrow T_s \leq \frac{\pi}{\omega_M}$$

مثال (۹-۵): برای مثال (۸-۵) سیستمی جهت بازسازی $x(t)$ از روی نمونه‌های برداشته شده طراحی کنید.

حل: چنین سیستمی بسادگی یک فیلتر پایین‌گذر با بهره $\frac{3}{2}$ می‌باشد.

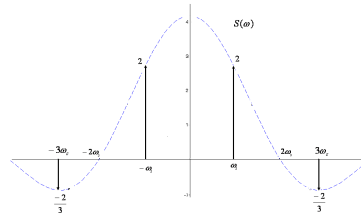


شکل ۴۱-۵ شکل طیف سیستم باز ساز مربوط به مثال ۹-۵

مثال (۱۰-۵): مثال (۸-۵) و (۹-۵) را به ازاء $\Delta = \frac{T_s}{4}$ تکرار کنید و فرض کنید سیگنال نمونه بردار به صورت زیر باشد.

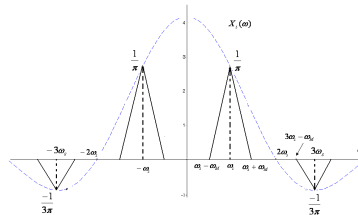
$$s(t) = r(t) - 0.5$$

حل: در این حالت همان‌گونه که مشاهده می‌شود مؤلفه DC و کلیه مولفه‌های زوج در سیگنال $s(t)$ وجود نخواهد داشت و در نتیجه طیف سیگنال $s(t)$ بصورت شکل ۴۲-۵ خواهد بود.



شکل ۴۲-۵ شکل طیف $S(\omega)$ مربوط به مثال ۱۰-۵

طیف سیگنال نمونه برداری شده به صورت شکل ۴۳-۵ خواهد بود.



شکل ۴۳-۵ شکل طیف $X_s(\omega)$ مربوط به مثال ۱۰-۵

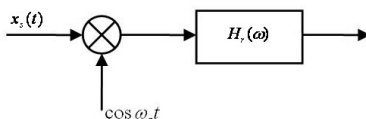
در این صورت جهت نمونه برداری موفقیت‌آمیز لازم است که

$$\omega_s + \omega_M \geq 3\omega_s - \omega_M \Rightarrow \omega_s \geq \omega_M$$

و یا

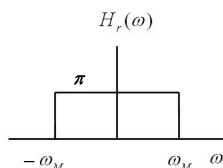
$$T_s \leq \frac{2\pi}{\omega_M}$$

و اما جهت بازسازی سیگنال اصلی از روی نمونه‌هایش سیستم شکل ۴۴-۵ پیشنهاد می‌شود.



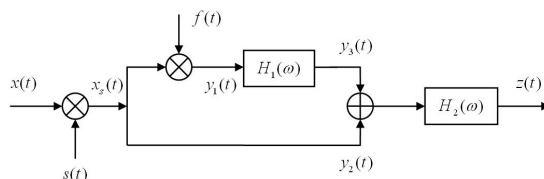
شکل ۴۴-۵ سیستم بازسازی مربوط به مثال ۱۰-۵

که در آن



شکل ۴۵-۵ تابع انتقال فیلتر سیستم باز ساز

مثال (۵-۱۱): یک سیگنال باند محدود با پهنای باند w را می‌توان بطور یکتا از روی نمونه‌های غیر یکنواخت نیز بازسازی کرد، مشروط بر اینکه تعداد نمونه‌ها $2w$ نمونه در ثانیه و یا بیشتر باشد. در این مساله یک شکل ساده از انواع نمونه برداری غیر یکنواخت مورد بررسی قرار می‌گیرد. به شکل ۴۶-۵ توجه کنید.



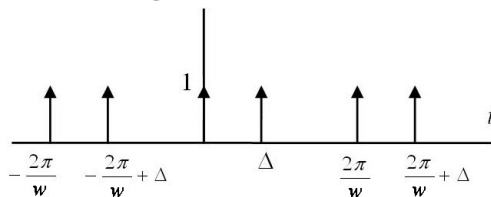
شکل ۴۶-۵ سیستم نمونه بردار مورد بحث در مثال ۱۱-۵

برای شکل فوق فرض‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

۱- $x(t)$ یک سیگنال باند محدود است یعنی

$$X(\omega) = 0 \quad |\omega| > w$$

۲- $s(t)$ یک قطار ضربه با فواصل غیر یکنواخت بین ضربه‌ها می‌باشد.



شکل ۴۷-۵ سیگنال نمونه بردار با نمونه‌های غیر یکنواخت

۳- $f(t)$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{w}$ می باشد که در نقاط $t = 0$ و $t = \Delta$ مقدار آن بصورت زیر است.

$$f(0) = a, f(\Delta) = b$$

۴- $H_1(\omega)$ یک سیستم ۹۰ درجه تغییر فاز دهنده می باشد.

$$H_1(\omega) = \begin{cases} j & \omega > 0 \\ -j & \omega < 0 \end{cases}$$

۵- $H_2(\omega)$ یک فیلتر پایین گذر است.

$$H_2(\omega) = \begin{cases} K & 0 < \omega < w \\ K^* & -w < \omega < 0 \\ 0 & |\omega| > w \end{cases}$$

که در آن K یک عدد ثابت مختلط است.

مطلوبست

الف) تبدیل فوریه $s(t)$

ب) تبدیل فوریه حاصلضرب $f(t)s(t)$

ج) عبارتی برای تبدیل فوریه $y_1(t)$ در فاصله $0 < \omega < w$

د) عبارتی برای تبدیل فوریه $y_2(t)$ در فاصله $0 < \omega < w$

ه) عبارتی برای تبدیل فوریه $y_3(t)$ در فاصله $0 < \omega < w$

و) مقادیر پارامترهای حقیقی a و b و مقدار پارامتر مختلط K بصورت تابعی از Δ بگونه ای که به ازاء هر سیگنال باند محدود $x(t)$ و $0 < \Delta < \frac{\pi}{w}$ داشته باشیم.

$$z(t) = x(t)$$

حل: الف) برای بدست آوردن تبدیل فوریه $s(t)$ ابتدا آن را بصورت زیر می نویسیم.

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k \frac{2\pi}{w}) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k \frac{2\pi}{w} - \Delta)$$

بنابراین $s(t)$ را می توان بصورت مجموع دو موج تصور کرد.

$$s(t) = g(t) + g(t - \Delta)$$

که در آن

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k \frac{2\pi}{w})$$

تبدیل فوریه $g(t)$ را قبلاً بارها بدست آورده ایم.

$$G(\omega) = \frac{2\pi}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - kw) = w \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - kw)$$

بنابراین تبدیل فوریه $s(t)$ برابر است با

$$S(\omega) = w(1 + e^{-j\omega\Delta}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - kw)$$

و یا

$$S(\omega) = w \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + e^{-jk\omega\Delta}) \delta(\omega - kw)$$

ب) تبدیل فوریه $l(t) = f(t)s(t)$ برابر است با

$$\begin{aligned} L(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)s(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\frac{2\pi}{w}) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\frac{2\pi}{w} - \Delta) \right] f(t)e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

بدلیل ضرب شدن $f(t)$ در تابع ضربه، فقط مقادیر $f(t)$ در لحظات $t = kT$ و $t = kT + \Delta$ مورد نیاز است (k عددی صحیح و $T = \frac{2\pi}{w}$).

$$\begin{aligned} L(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT)e^{-j\omega kT} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT + \Delta)\delta(t - kT - \Delta)e^{-j\omega(kT + \Delta)} \right] dt \\ L(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)e^{-j\omega kT} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) dt + \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT + \Delta)e^{-j\omega(kT + \Delta)} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT - \Delta) dt \end{aligned}$$

بنابراین

$$L(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)e^{-j\omega kT} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT + \Delta)e^{-j\omega(kT + \Delta)}$$

اما چون $f(t)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{w}$ می باشد، داریم.

$$f(kT) = f(0) = a \quad \text{و} \quad f(kT + \Delta) = f(\Delta) = b$$

بنابراین

$$L(\omega) = a \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kT} + be^{-j\omega\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kT}$$

و یا

$$L(\omega) = (a + be^{-j\omega\Delta}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kT}$$

اما بسادگی می توان ثابت کرد که

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kT} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$$

ابتدا با نوشتن تبدیل فوریه $m(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ داریم.

$$M(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kT}$$

اما قبلاً تبدیل فوریه قطار ضربه را بصورت زیر داشتیم.

$$M(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right)$$

بنابراین اثبات کامل می‌شود و بدین ترتیب با فرض $w = \frac{2\pi}{T}$ داریم.

$$L(\omega) = (a + be^{-j\omega\Delta}) w \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - kw)$$

و یا

$$L(\omega) = w \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a + be^{-jkw\Delta}) \delta(\omega - kw)$$

$$y_1(t) = f(t)s(t)x(t) = l(t)x(t) \quad (\text{ج})$$

$$Y_1(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[(a + be^{-j\omega\Delta}) w \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - kw) \right] * X(\omega)$$

$$= \frac{w}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a + be^{-jkw\Delta}) X(\omega - kw)$$

بنابراین در فاصله

$$0 < \omega < w$$

$$Y_1(\omega) = \frac{w}{2\pi} \left[(a + b)X(\omega) + (a + be^{-j\omega\Delta})X(\omega - w) \right]$$

$$y_2(t) = s(t)x(t) \quad (\text{د})$$

بنابراین

$$Y_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} w \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + e^{-jkw\Delta}) \delta(\omega - kw) * X(\omega)$$

$$= \frac{w}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + e^{-jkw\Delta}) X(\omega - kw)$$

و در فاصله

$$0 < \omega < w$$

$$Y_2(\omega) = \frac{w}{2\pi} \left[2X(\omega) + (1 + e^{-j\omega\Delta})X(\omega - w) \right]$$

(ه) طبق قضیه کانولوشن تبدیل فوریه $y_3(t)$ از رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$Y_3(\omega) = H_1(\omega)Y_1(\omega)$$

در فاصله $0 < \omega < w$

$$H_1(\omega) = j$$

$$Y_3(\omega) = jY_1(\omega)$$

$$= j \frac{w}{2\pi} [(a+b)X(\omega) + (a + be^{-jw\Delta})X(\omega - w)]$$

و جهت اینکه خروجی همواره مساوی $x(t)$ باشد باید

$$Z(\omega) = H_2(\omega)[Y_2(\omega) + Y_3(\omega)] = X(\omega)$$

اکنون باید داشته باشیم (از مساوی قرار دادن دو طرف رابطه به ازاء $0 < \omega < w$)

$$X(\omega) = K \frac{w}{2\pi} \{ [2 + j(a+b)]X(\omega) + [(1 + e^{-jw\Delta}) + j(a + be^{-jw\Delta})]X(\omega - w) \}$$

نتیجتاً داریم.

$$K \frac{w}{2\pi} [2 + j(a+b)] = 1$$

$$(1 + e^{-jw\Delta}) + j(a + be^{jw\Delta}) = 0$$

$$1 + e^{-jw\Delta} + ja + jbe^{-jw\Delta} = 0$$

نتیجتاً داریم.

$$a = \sin w\Delta + \cot g(w\Delta)(1 + \cos w\Delta)$$

$$K = \frac{2\pi/w}{2 + j(a+b)} \quad \text{و} \quad b = \frac{-(1 + \cos w\Delta)}{\sin w\Delta}$$

همان‌گونه که می‌بینیم در حالت خاص که $\Delta = \frac{\pi}{w}$ است مقادیر a و b برابر می‌شوند.

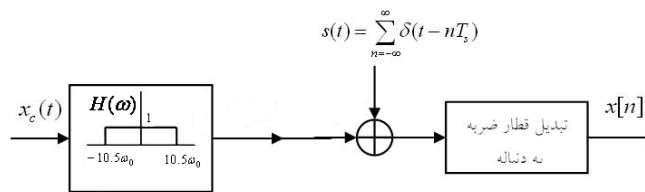
مثال (۵-۱۲): شکل زیر یک مدار مبدل سیگنال پیوسته به دنباله گسسته می‌باشد.

سیگنال ورودی متناوب با دوره تناوب 0.1 ثانیه می‌باشد. ضرایب سری فوریه آن عبارتند از

$$a_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} \quad -\infty < k < \infty$$

فیلتر پایین‌گذر $H(\omega)$ دارای مشخصه نشان داده شده در شکل می‌باشد. دوره تناوب نمونه‌برداری

$T_s = 2 \times 10^{-3}$ ثانیه می‌باشد.



شکل ۵-۴۸ سیستم مورد بحث در مثال ۵-۱۲

الف) نشان دهید که $x[n]$ یک دنباله متناوب است و دوره تناوب آن را بیابید.

ب) ضرایب سری فوریه $x[n]$ را بیابید.

حل : الف) بسط $x(t)$ به سری فوریه بصورت زیر است.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \text{ و } T = 0.1s$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} e^{jk\omega_0 t} \quad \text{و} \quad \omega_0 = 20\pi \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

طیف $X(\omega)$ بصورت زیر است.

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} \delta(\omega - k\omega_0)$$

بنابراین فقط تا ۱۰ ضربه از فیلتر عبور می نماید. پس

$$x_c(t) = \sum_{k=-10}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} e^{jk\omega_0 t}$$

و چون

$$x[n] = x_c[nT_s]$$

خواهیم داشت.

$$x[n] = \sum_{k=-10}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} e^{jk\omega_0 nT_s}$$

بنابراین

$$x[n] = \sum_{k=-10}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} e^{jk \cdot 0.04 \pi n}$$

رابطه فوق در حقیقت ممین سری فوریه گسسته زمانی $x[n]$ می باشد. از اینجا نتیجه می گیریم $x[n]$ متناوب است و دوره تناوب آن از رابطه زیر بدست می آید.

$$\frac{2\pi}{N} = 0.04\pi$$

بنابراین دوره تناوب $x[n]$ برابر است با

$$N = 50$$

ب) ضرایب سری فوریه در یک دوره تناوب عبارتند از

$$a_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} \quad -10 < k < 10$$

توجه شود که ضرایب سری فوریه در خارج فاصله مذکور برابر صفر هستند.

مثال (۵-۱۳): از یک سیگنال باند محدود $x_c(t)$ با سرعتی بیشتر از سرعت نایکوئیست نمونه برداری شده است. فاصله نمونه ها T_s می باشد. نمونه ها پس از آن به دنباله تبدیل می شوند.

مطلوبست ارتباط انرژی سیگنال $x_c(t)$ و دنباله $x[n]$.

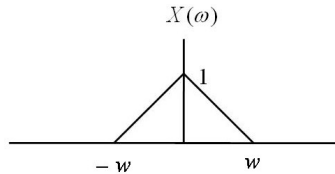
حل: انرژی دنباله $x[n]$ بصورت زیر تعریف می شود.

$$E_d = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

و انرژی سیگنال $x_c(t)$ بصورت زیر است.

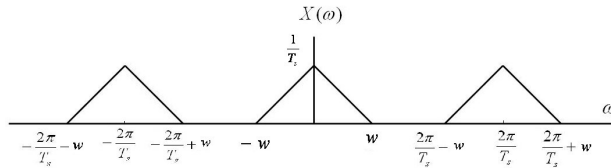
$$E_c = \int_{-\infty}^{\infty} |x_c(t)|^2 dt$$

فرض می‌کنیم طیف $x(t)$ بصورت زیر باشد.



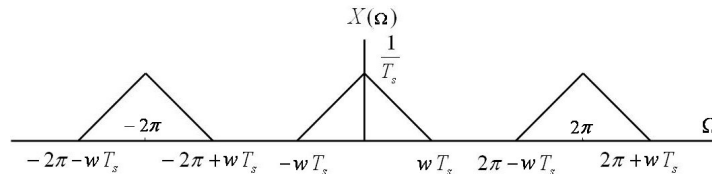
شکل ۴۹-۵ طیف سیگنال $x(t)$ مربوط به مثال ۵-۱۳

در این صورت طیف $x_p(t)$ بصورت زیر است.



شکل ۵۰-۵ طیف سیگنال $x_p(t)$ مربوط به مثال ۵-۱۳

نتیجتاً طیف تبدیل فوریه گسسته زمان $x[n]$ بصورت زیر خواهد بود.



شکل ۵۱-۵ طیف سیگنال گسسته زمان متناظر با $x(t)$

اما طبق رابطه پارسوال در حوزه گسسته زمان داریم.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)| d\Omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

اما رابطه پارسوال در حوزه پیوسته زمان نیز بصورت زیر است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_c(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_c(\omega)| d\omega$$

با توجه به شکل‌ها می‌توان در یک دوره متناوب رابطه زیر را نوشت (با تغییر متغیرهای مستقل).

$$X(\Omega) = \frac{1}{T_s} X_c\left(\frac{\Omega}{T_s}\right)$$

بنابراین

$$E_d = \frac{1}{2\pi} \int_{-wT_s}^{wT_s} |X(\Omega)|^2 d\Omega = \frac{1}{2\pi T_s^2} \int_{-wT_s}^{wT_s} \left| X_c\left(\frac{\Omega}{T_s}\right) \right|^2 d\Omega$$

و یا تغییر متغیر بصورت $u = \frac{\Omega}{T_s}$

$$E_d = \frac{1}{2\pi T_s} \int_{-w}^w |X_c(u)|^2 du$$

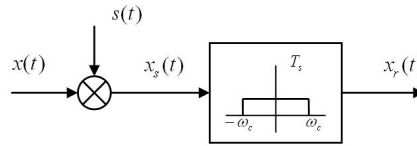
و چون $X_c(\omega)$ باند محدود است.

$$= \frac{1}{2\pi T_s} \int_{-\infty}^{\infty} |X_c(\omega)|^2 d\omega$$

بنابراین

$$E_d = \frac{1}{T_s} E_c$$

مثال (۵-۱۴): شکل زیر یک سیستم نمونه‌بردار که بوسیله یک فیلتر بازساز دنبال شده است را نشان می‌دهد.



شکل ۵-۵۲ سیستم مربوط به مثال ۵-۱۴

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

با توجه به نظریه نمونه‌برداری می‌دانیم که اگر $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ از دو برابر بالاترین مولفه فرکانسی موجود در $x(t)$ بیشتر باشد، می‌توان بطور یکتا $x(t)$ را از روی نمونه‌هایش بازسازی کرد. در غیر این صورت، تداخل ایجاد می‌شود و سیگنال بازسازی شده $x_r(t)$ مساوی $x(t)$ نخواهد بود. اما در لحظات

نمونه‌برداری مقادیر $x(t)$ و $x_r(t)$ مساوی هستند مشروط بر این که $\omega_c = \frac{\omega_s}{2}$ باشد. یعنی

$$x_r(kT_s) = x(kT_s) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

در این مساله فرض کنید $\omega_c = \frac{\omega_s}{2}$ است و رابطه فوق را ثابت کنید.

حل:

$$x_s(t) = x(t)s(t)$$

داریم

$$\begin{aligned}
 &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s)
 \end{aligned}$$

نتیجتاً برای $x_r(t)$ داریم.

$$\begin{aligned}
 x_r(t) &= \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \right) * h(t) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) h(t - nT_s)
 \end{aligned}$$

اما می‌دانیم (با توجه به شکل پاسخ فرکانسی)

$$h(t) = T_s \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sinc} \frac{\omega_c t}{\pi}$$

بنابراین

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) T_s \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sinc} \left[\frac{\omega_c (t - nT_s)}{\pi} \right]$$

و در نتیجه

$$x_r(kT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \text{Sinc} \left[\frac{\omega_c T_s (k - n)}{\pi} \right] T_s \frac{\omega_c}{\pi}$$

از طرفی $\omega_c = \frac{\omega_s}{2}$ پس

$$x_r(kT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \text{Sinc} (k - n)$$

و با توجه به خواص تابع sinc می‌توان رابطه زیر را نوشت.

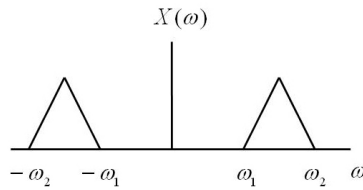
$$\text{Sinc}(k - n) = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ 1 & k = n \end{cases}$$

که در آن k و n اعداد صحیح هستند. پس

$$x_r(kT_s) = x(kT_s)$$

مثال (۵-۱۵): در این مساله می‌خواهیم یک حالت ساده مربوط به نمونه برداری از سیگنال‌های میان‌گذر^۱ را مورد بررسی قرار دهیم. این سیگنال دارای باندهای محدود است که انرژی آن در فرکانس‌های میانی متمرکز شده است (مانند شکل ۵-۵۳).

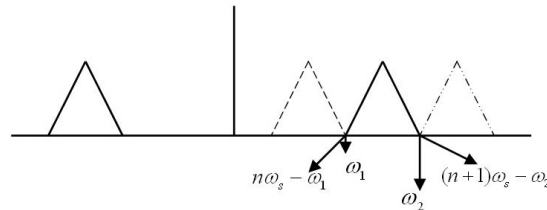
^۱Band-pass



شکل ۵-۵۳ سیگنال میانگذر مربوط به مثال ۵-۱۵

طبق نظریه نمونه برداری حداقل فرکانس نمونه برداری باید $\omega_s = 2\omega_2$ باشد تا بتوان بطور موفقیت آمیز وبه کمک یک فیلتر میان گذر، سیگنال را بازسازی کرد. اما در این مساله می خواهیم ثابت کنیم که می توان با سرعت های کمتر نیز از سیگنال میان گذر بصورت موفقیت آمیز نمونه برداری کرد. فرض کنید $\omega_2 - \omega_1 = w$ و $\omega_1 = 4w$ و نتیجتاً $\omega_2 = 5w$ می گردد. اکنون فرکانس نمونه برداری حداقل را جهت امکان بازسازی سیگنال به کمک یک فیلتر میان گذر بدست آورید.

حل: چون قرار است سیگنال به کمک فیلتر میان گذر بازسازی گردد می توان ω_s را بگونه ای انتخاب کرد که تمام انتقال های سیگنال تا انتقال n ام در داخل محدوده $|\omega| < \omega_1$ قرار گیرند و انتقال $(n+1)$ ام در محدوده $|\omega| > \omega_2$ قرار گیرند. در این صورت به کمک یک فیلتر میان گذر و بدون هیچ تداخلی می توان سیگنال را بازسازی کرد.



شکل ۵-۵۴ نمونه برداری میانگذر

بنابراین لازم است.

$$n\omega_s - \omega_1 \leq \omega_1$$

$$(n+1)\omega_s - \omega_2 \geq \omega_2$$

در حالت کلی حل همزمان دو نامساوی فوق ساده نمی باشد، اما با فرضهایی که انجام داده ایم ساده است (حالت تساوی را در نظر می گیریم).

$$n\omega_s = 2\omega_1$$

$$(n+1)\omega_s = 2\omega_2$$

بنابراین

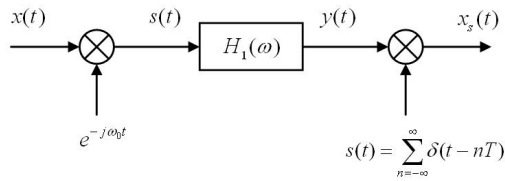
$$\omega_s = 2w$$

ولی اگر می خواستیم از نظریه نمونه برداری استفاده کنیم به پهنای باند حداقل پنج برابر نیاز داشتیم.

$$\omega_s = 2\omega_2 = 10w$$

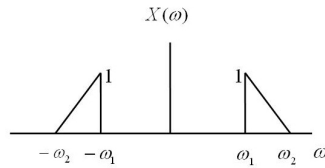
مثال (۱۶-۵): در مثال (۱۵-۵) یک روش جهت نمونه برداری از سیگنال‌های میان‌گذر مورد بررسی قرار گرفت.

اکنون می‌خواهیم با روش دیگری در این مثال آشنا شویم. در این روش ابتدا سیگنال میان‌گذر را در یک تابع نمایی مختلط بصورت $e^{-j\omega_0 t}$ ضرب کرده و پس از عبور دادن از فیلتر پایین‌گذر $H_1(\omega)$ از آن نمونه برداری می‌کنیم. مراحل گفته شده در شکل زیر نمایش داده شده‌اند.



شکل ۵-۵ سیستم نمونه بردار میانگذر

فرض کنید طیف $x(t)$ بصورت زیر باشد.



شکل ۵-۶ طیف سیگنال میانگذر

اگر $\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ و اگر فرکانس قطع فیلتر پایین‌گذر $H_1(\omega)$ ، $\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$ باشد، مطلوبست

(الف) رسم طیف $y(t)$.

(ب) تعیین ماکزیمم دوره تناوب نمونه برداری T .

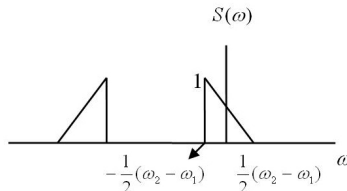
(ج) رسم طیف $x(t)$.

(د) سیستمی جهت بازسازی $x(t)$ از $x_s(t)$.

حل: الف) طبق قضیه مدولاسیون می‌توان طیف $s(t)$ را بدست آورد.

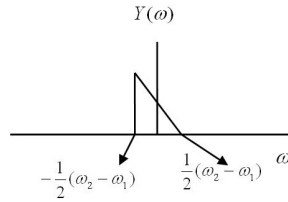
$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * 2\pi\delta(\omega + \omega_0) = X(\omega + \omega_0)$$

که شکل آن به این صورت است.



شکل ۵-۷ طیف سیگنال میانگذر پس از انتقال به سمت چپ

در نتیجه خروجی فیلتر پایین‌گذر فقط شامل آن قسمت از طیف $S(\omega)$ باشد که حول مبدأ قرار دارد.



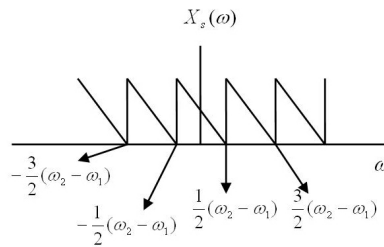
شکل ۵-۵۸ طیف سیگنال میانگذر پس از انتقال و عبور از فیلتر پائین گذر

(ب) با توجه به اینکه $y(t)$ یک سیگنال پایین گذر است پس طبق نظریه نمونه برداری باید

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \geq 2\left(\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)\right) = \omega_2 - \omega_1$$

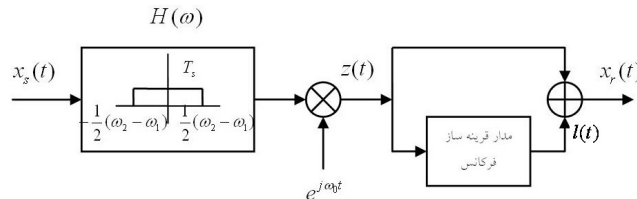
$$T_s \leq \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}$$

(ج) با فرض اینکه $T_s = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}$ باشد طیف $x_s(t)$ بصورت زیر خواهد بود.



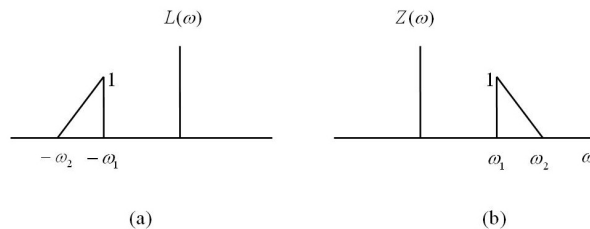
شکل ۵-۵۹ طیف سیگنال میانگذر پس از انتقال و عبور از فیلتر پائین گذر و نمونه برداری

(د) سیستم زیر جهت بازسازی $x(t)$ از $x_s(t)$ پیشنهاد می گردد.



شکل ۵-۶۰ سیستمی زیر جهت بازسازی $x(t)$ از $x_s(t)$

طیف سیگنالها در هر مرحله در شکل زیر رسم شده اند.

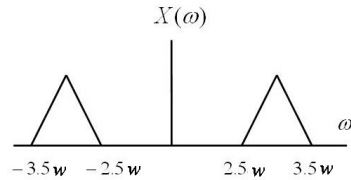


شکل ۵-۶۱ نمایش طیف های (a) $L(\omega)$ و (b) $Z(\omega)$

نتیجتاً طیف $x_r(t)$ مشابه طیف $x(t)$ خواهد شد.

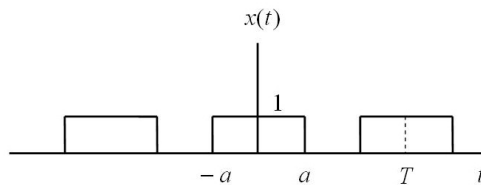
مسائل فصل پنجم

۱-۵ حداقل فرکانس نمونه برداری موفقیت آمیز از سیگنال میان گذر $x(t)$ را بدست آورید. توجه کنید که بعد از نمونه برداری باید بتوان $x(t)$ را با عبور نمونه هایش از یک فیلتر میان گذر بازسازی کرد.



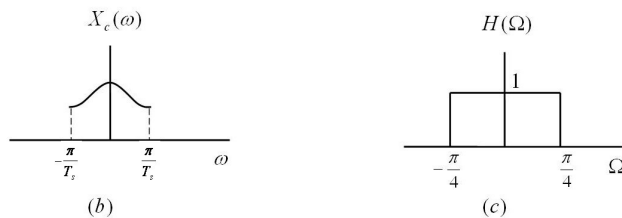
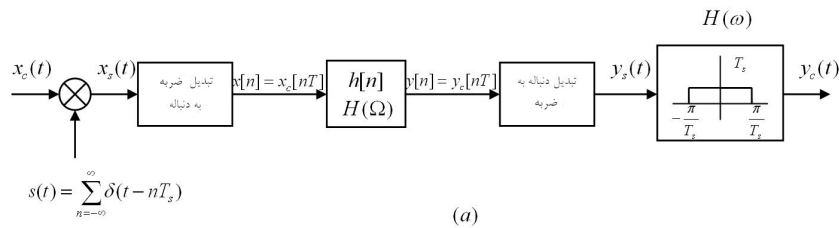
شکل ۶۲-۵ مربوط به مسئله ۱-۵

۲-۵ حداقل فرکانس نمونه برداری موفقیت آمیز از سیگنال $x(t)$ چیست اگر $x(t)$ در حوزه زمان بصورت زیر باشد.



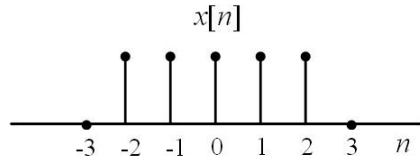
شکل ۶۳-۵ مربوط به مسئله ۲-۵

۳-۵ شکل زیر یک سیستم جهت پردازش گسسته زمانی روی سیگنال های پیوسته زمانی را نشان می دهد. اگر طیف $X_c(\omega)$ و $H(\Omega)$ در یک دوره تناوب بصورت زیر باشد. مطلوب است رسم طیف های $Y_c(\omega)$ و $Y_s(\omega)$ و $X(\Omega)$ و $X_s(\Omega)$.



شکل ۶۴-۵ مربوط به مسئله ۳-۵

۴-۵ دنباله $x[n]$ بصورت زیر مفروض است.



شکل ۴-۵ مربوط به مسئله ۴-۵

الف) تبدیل فوریه این دنباله را بیابید.

ب) از این دنباله در حوزه فرکانس نمونه برداری می‌گردد. حداقل فاصله نمونه‌ها جهت نمونه برداری موفقیت‌آمیز چقدر باید باشد.

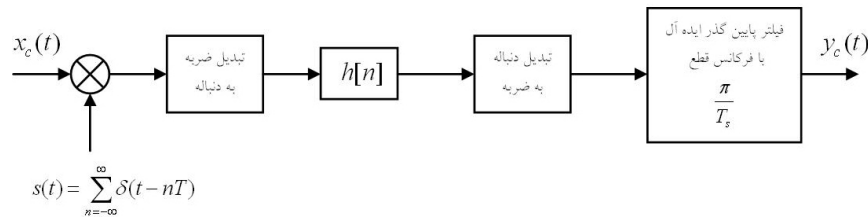
۵-۵ در سیستم شکل زیر $h[n]$ پاسخ ضربه یک سیستم LTI می‌باشد. این سیستم LTI توسط معادله تفاضلی زیر توصیف می‌شود.

$$y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + x[n]$$

اگر ورودی یک سیگنال باند محدود باشد قسمی که

$$X_c(\omega) = 0 \quad |\omega| > \frac{\pi}{T_s}$$

پاسخ ضربه کلی سیستم که نسبت $\frac{Y_c(\omega)}{X_c(\omega)}$ می‌باشد را بیابید.

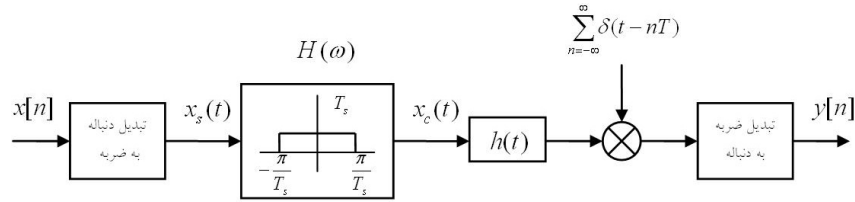


شکل ۵-۶۶ مربوط به مسئله ۵-۵

۶-۵ سیستم شکل زیر نوعی سیستم جهت پردازش پیوسته زمانی روی دنباله‌های گسسته زمانی را نشان می‌دهد. در این سیستم $h(t)$ یک سیستم LTI می‌باشد که توسط معادله دیفرانسیل زیر توصیف می‌گردد.

$$\frac{d^2 y_c(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy_c(t)}{dt} + 3 y_c(t) = x(t)$$

مطلوبست پاسخ ضربه گسسته زمانی معادل.



شکل ۶۷-۵ مربوط به مسئله ۵-۶

۷-۵ یک سیگنال پیوسته زمان بصورت زیر را در نظر بگیرید.

$$x_c(t) = s_c(t) - a s_c(t - T_D)$$

و فرض کنید تبدیل فوریه $X_c(\omega)$ محدود به $\frac{\pi}{T_s}$ باشد. اگر $x_c(t)$ بوسیله یک قطار ضربه با دوره

تناوب T_s نمونه برداری شود. بقسمی که

$$x[n] = x_c(nT)$$

مطلوبست پاسخ ضربه $h[n]$ یک سیستم گسسته زمان LTI بگونه‌ای که

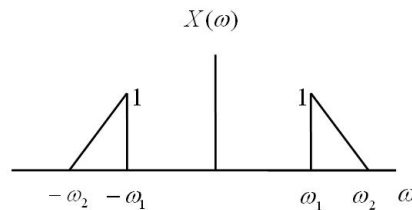
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k] h[n - k]$$

که در آن $s[n] = s_c(nT)$ است و $T_D = T_s$ است.

۸-۵ مسئله ۷-۵ را به ازاء $T_D = \frac{T_s}{2}$ حل کنید. آیا پاسخ تفاوتی می‌کند؟

۹-۵ طیف یک سیگنال میان‌گذر مفروض $x(t)$ بصورت زیر است. مطلوب است رسم طیف دنباله

$$x[n] = x(nT_s) \quad \text{که در آن } T_s = \frac{\pi}{\omega_2}$$

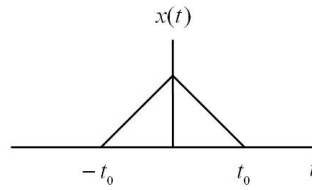


شکل ۶۸-۵ مربوط به مسئله ۵-۹

۱۰-۵ مساله ۹-۵ را به ازاء $T_s = \frac{2\pi}{\omega_2}$ و $T_s = \frac{\pi}{2\omega_2}$ حل کرده و تفاوت هر یک را با نتیجه مساله ۹-۵

بیان کنید.

۱۱-۵ سیگنال دوره محدود $x(t)$ بصورت زیر مفروض است



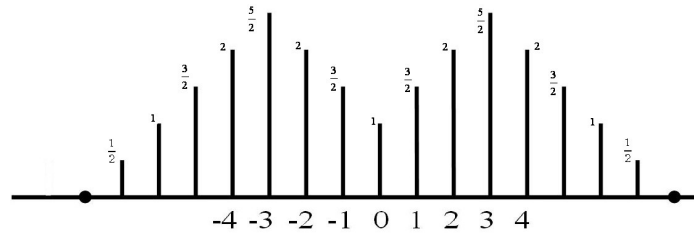
شکل ۶۹-۵ مربوط به مسئله ۱۱-۵

از این سیگنال در حوزه فرکانس نمونه برداری بعمل می‌آید و سپس به کمک یک پنجره پایین‌گذر زمانی Low time window دوباره سیگنال اصلی بازسازی می‌گردد. مطلوب است رسم سیستم نمونه برداری و نمایش طیف‌هایی که در مراحل مختلف بوجود می‌آیند (فرض کنید نمونه برداری موفقیت‌آمیز باشد).

۱۲-۵ در مساله ۱۱-۵ حداقل فاصله ضربه‌های فرکانسی جهت نمونه برداری موفقیت‌آمیز چقدر باید باشد؟

۱۳-۵ از سیگنال $x(t) = \text{Sinc}t$ در حوزه زمان نمونه برداری بعمل می‌آید و نمونه‌ها توسط یک مدار ZOH بازسازی می‌گردد. مطلوب است رسم طیف سیگنال‌های ایجاد شده در هر مرحله. ۱۴-۵ اگر نمونه‌های سیگنال در مساله ۱۳-۵ از یک مدار بازسازی خطی عبور داده شوند. مطلوب است رسم طیف خروجی مدار بازسازی خطی.

۱۵-۵ یک دنباله گسسته زمان $x[n]$ بصورت شکل ۷۰-۵ را در نظر بگیرید.



شکل ۷۰-۵ مربوط به مسئله ۱۵-۵

از این دنباله با دوره تناوب ۲ نمونه برداری بعمل می‌آید بگونه‌ای که

$$x_s[n] = \begin{cases} x[n] & n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

مطلوب است رسم $x_s[n]$ و طیف آن.

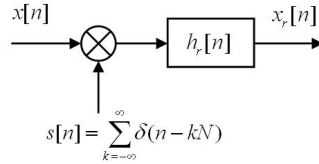
۱۶-۵ یک دنباله گسسته زمان بوسیله سیستم شکل ۷۱-۵ نمونه برداری می‌گردد و سپس بوسیله یک مدار بازسازی $h_r[n]$ بازسازی می‌شود.

الف) حداقل فرکانس نمونه برداری موفقیت‌آمیز را بدست آورید.

ب) نشان دهید که بدون توجه به فرکانس نمونه برداری داریم.

$$x_r[mN] = x[mN]$$

که در آن m اعداد صحیح مثبت و منفی می باشد.

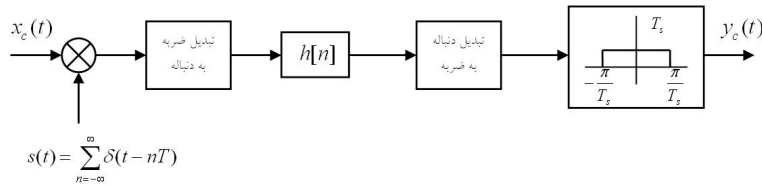


شکل ۵-۷۱ سیستم نمونه بردار مربوط به مسئله ۵-۱۶

۵-۱۷ معادل گسسته زمانی یک سیستم پیوسته زمان با پاسخ ضربه بصورت زیر را بیابید (τ و A اعداد ثابت اند).

$$h_r(t) = A \tau \sin c\left(\frac{\omega}{2\pi} \tau\right)$$

راهنمایی: معادل گسسته زمانی یک سیستم پیوسته سیستمی است که اگر در سیستم شکل زیر قرار داده شود سیستم کلی دارای پاسخ ضربه ای بصورت $h(t)$ گردد.



شکل ۵-۷۲ مربوط به مثال ۵-۱۷

۵-۱۸ حداقل فرکانس نمونه برداری از سیگنالی بصورت زیر را بیابید.

$$x(t) = A \tau \text{Sinc}^4\left(\frac{\omega}{2\pi} \tau\right)$$

۵-۱۹: فرکانس مجازی ناشی از نمونه برداری ناموفق از سیگنال زیر را بیابید.

$$x(t) = \cos(10^3 \pi t)$$

(الف) اگر فرکانس نمونه برداری $\omega_s = 10\pi$ باشد.

(ب) اگر فرکانس نمونه برداری $\omega_s = 100\pi$ باشد.

(ج) اگر فرکانس نمونه برداری $\omega_s = 1000\pi$ باشد.

(د) اگر فرکانس نمونه برداری $\omega_s = 1999\pi$ باشد.

۵-۲۰: یک دیسک که روی آن چهار گلبرگ نقاشی شده اند را در نظر بگیرید. این دیسک با سرعت ۱۵ دور بر ثانیه می چرخد. از یک نوار باریک این دیسک قابل مشاهده می باشد.

بدین ترتیب فرکانس نوسان علامت مشاهده شده از نوار باریک ۶۰ هرتز می باشد. $v(t)$ موقعیت علامت مشاهده شده می باشد. فرض می کنیم $v(t)$ بصورت زیر باشد.

$$v(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \omega_0 = 120 \pi$$

چشم بدلیل محدودیت‌های فیزیکی نمی‌تواند نوسانات ۶۰ هرتز را مشاهده نماید. می‌توان این پدیده را با مدل کردن چشم بصورت یک فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل در نظر گرفت. فرکانس قطع این فیلتر را می‌توان ۲۰ هرتز در نظر گرفت.

عمل نمونه‌برداری از $v(t)$ را می‌توان به کمک یک چراغ چشمک‌زن مدلسازی کرد. بنابراین اگر $s(t)$ بیانگر چراغ چشمک‌زن باشد داریم

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$

که در آن $\frac{1}{T_s}$ فرکانس چشمک‌های چراغ بر حسب هرتز است.

سیگنال نمونه‌برداری شده اکنون حاصلضرب $r(t) = v(t)s(t)$ می‌باشد.
مطلوبست

الف) تبدیل فوریه $v(t)$.

ب) تبدیل فوریه $s(t)$. اثر T_s را در آن مشخص کنید.

ج) طبق نظریه نمونه‌برداری، ماکزیمم مقدار T_s را جهت نمونه‌برداری موفقیت‌آمیز از $v(t)$ تعیین کنید. توجه کنید که بعد از نمونه‌برداری باید بتوان $v(t)$ را از روی نمونه‌های آن توسط یک فیلتر پایین‌گذر بازسازی کرد. طیف $r(t)$ را هنگامی که T_s کمی کمتر از مقدار تعیین شده در فوق باشد رسم کنید.

د) اگر $\omega_s = \omega_0 + 20\pi$ باشد، فرکانس مجازی مشاهده شده چیست.

ه) قسمت (د) را برای $\omega_s = \omega_0 - 2\pi$ تکرار کنید.

فصل ششم

تبدیل لاپلاس

مقدمه

در فصول قبلی توانایی فوق العاده تبدیل فوریه در تجزیه و تحلیل سیستم‌های خطی را مشاهده کردیم. این توانایی از آنجا ناشی می‌شود که بسیاری از سیگنال‌ها را می‌توان بصورت ترکیب خطی از توابع نمایی موهومی نوشت و چون توابع ویژه سیستم‌ها نیز بصورت نمایی موهومی بودند، بسادگی توانستیم پاسخ به هر ورودی را بدست آوریم. اما برخی سیگنالها را نمی‌توان بر حسب توابع نمایی موهومی نوشت. در این فصل با معرفی تبدیل لاپلاس، که حالت کلی تر تبدیل فوریه است، می‌خواهیم بسط جدید سیگنال دلخواه را بر حسب توابع ویژه سیستم‌های LTI (توابع نمایی مختلط) ارائه کنیم.

۶-۱ تبدیل لاپلاس

برای یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ ، دیدیم که پاسخ $y(t)$ سیستم، به ورودی نمایی مختلط e^{st} ، چنین می‌شود.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s(t-\tau)} h(\tau) d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau} h(\tau) d\tau = H(s) e^{st} \quad (1-6)$$

که در آن

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau} h(\tau) d\tau \quad (2-6)$$

اگر $s = j\omega$ موهومی محض بود، انتگرال معادله (۲-۶) همان تبدیل فوریه $h(t)$ بود. اما در حالت عمومی که 's' عدد مختلط است انتگرال (۲-۶) را تبدیل لاپلاس $h(t)$ می‌نامند، که مانند تبدیل فوریه نقش مهمی در تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌های LTI دارد. در حالت کلی تبدیل لاپلاس سیگنال دلخواه $x(t)$ چنین تعریف می‌شود.

$$X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (3-6)$$

که در حالت کلی $s = \sigma + j\omega$ در حالت کلی یک عدد مختلط است. انتگرال (۳-۶) همانگونه که مشاهده می‌شود تابعی از 's' است. گاهی اپراتور 'ℓ' را در مورد تبدیل لاپلاس بکار می‌برند و چنین نمایش می‌دهند.

$$x(t) \xrightarrow{\ell} X(s)$$

هنگامی که $s = j\omega$ باشد معادله (۳-۶) به رابطه زیر تبدیل می‌شود.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4-6)$$

این همان تبدیل فوریه $x(t)$ است که بصورت $X(\omega)$ قبلاً نشان داده شد. بنابراین تبدیل لاپلاس $x(t)$ وقتی که $s = j\omega$ باشد مساوی تبدیل فوریه $x(t)$ خواهد بود.

$$X(s) \Big|_{s=j\omega} = \mathfrak{S}\{x(t)\} = X(\omega) \quad (5-6)$$

ارتباط جالب دیگری میان تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه وجود دارد که اگر معادله (۳-۶) را بصورت معادله (۶-۶) بنویسیم، می‌توان این ارتباط را پیدا کرد.

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \quad (6-6)$$

یا

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t} dt \quad (7-6)$$

بنابراین می‌توان $X(s)$ را تبدیل فوریه $x(t)e^{-\sigma t}$ دانست. این حقیقت حاوی نتایج ارزنده‌ای است. از جمله اینکه تبدیل لاپلاس حالت عمومی‌تر تبدیل فوریه است. بدین مفهوم که می‌توان سیگنال‌هایی را یافت که تبدیل فوریه ندارند اما تبدیل لاپلاس دارند. برای درک بهتر به مثال زیر توجه کنید.

مثال (۶-۱): سیگنال $x(t) = e^{-at}u(t)$ را در نظر بگیرید. تبدیل فوریه این سیگنال وقتی $a > 0$ است بسادگی قابل محاسبه است.

$$X(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega + a} \quad a > 0 \quad (8-6)$$

و از معادله (۶-۳) داریم.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} e^{-st} u(t) dt \quad (9-6)$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t} dt \quad (10-6)$$

با قرار دادن $s = \sigma + j\omega$ داریم.

$$X(\sigma + j\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-(\sigma+a)t} e^{-j\omega t} dt \quad (11-6)$$

با مقایسه معادله (۶-۸) با معادله (۶-۱۱) پی می‌بریم که معادله (۶-۹) تبدیل فوریه $e^{-(\sigma+a)t}u(t)$ می‌باشد. بنابراین داریم.

$$X(\sigma + j\omega) = \frac{1}{(\sigma + a) + j\omega} \quad (\sigma + a) > 0 \quad (12-6)$$

یا بطور معادل

$$X(s) = \frac{1}{s + a} \quad \Re\{s\} > -a \quad (13-6)$$

به عنوان مثال برای $a = 0$ ، تابع پله واحد خواهد بود که تبدیل لاپلاس آن $X(s) = \frac{1}{s}$ است،

البته با شرط $\Re\{s\} > 0$.

باید توجه کرد که تبدیل لاپلاس ممکن است برای بعضی از مقادیر σ همگرا باشد و برای برخی دیگر واگرا. در مثال (۶-۱) تبدیل لاپلاس برای $\Re\{s\} = \sigma > -a$ همگرا است، و اگر a مثبت باشد در اینصورت $X(s)$ بازاء برخی مقادیر منفی نیز همگرا است. بنابراین تبدیل لاپلاس در $\sigma = 0$ نیز همگرا خواهد شد. در اینصورت تبدیل لاپلاس به تبدیل فوریه تبدیل می‌شود.

$$X(0 + j\omega) = \frac{1}{j\omega + a} \quad (14-6)$$

اما اگر a منفی یا صفر باشد در این صورت اگر چه تبدیل لاپلاس وجود دارد ولی تبدیل فوریه وجود ندارد. چون ناحیه همگرایی شامل $\sigma = 0$ نخواهد شد.

مثال (۲-۶): درمقایسه با مثال قبلی اکنون فرض کنید.

$$x(t) = -e^{-at} u(-t) \quad (۱۵-۶)$$

بنابراین

$$X(s) = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} e^{-st} u(-t) dt = -\int_{-\infty}^0 e^{-(s+a)t} dt \quad (۱۶-۶)$$

و یا

$$X(s) = \frac{1}{s+a} \left(1 - e^{-(s+a)t} \Big|_{t \rightarrow -\infty} \right) \quad (۱۷-۶)$$

در این مثال برای همگرا شدن تبدیل لاپلاس باید $\Re\{s+a\} < 0$ شود، یا

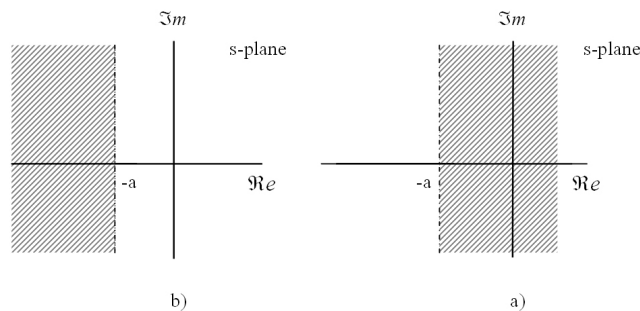
$$\Re\{s\} < -a \quad (۱۸-۶)$$

بنابراین

$$-e^{-at} u(-t) \xrightarrow{\ell} \frac{1}{s+a} \quad \Re\{s\} < -a \quad (۱۹-۶)$$

عبارت جبری تبدیل لاپلاس در هر دو مثال (۱-۶) و (۲-۶) یکی است. اما مقادیری که s می‌تواند اختیار کند تا آن دو عبارت صادق باشند متفاوت است. در مثال اول محدوده تغییرات s توسط $\Re\{s\} > -a$ تعیین می‌شود و در مثال دوم محدوده تغییرات s توسط $\Re\{s\} < -a$ تعیین می‌شود.

بنابراین برای یکتا بودن تبدیل لاپلاس سیگنال‌ها، باید علاوه بر عبارت جبری تبدیل لاپلاس، محدوده همگرا بودن را نیز مشخص کرد. به این محدوده ناحیه همگرایی^۱ می‌گویند و با علامت مختصر ROC نمایش داده می‌شود. بنابراین ROC شامل مقادیری از $s = \sigma + j\omega$ است که برای آنها تبدیل فوریه کاملاً مشخص و مجزا می‌باشند، چون اگر چه عبارت‌های جبری یکی می‌باشند ولی ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس‌ها متفاوت است. روش مناسب نمایش ROC در شکل (۱-۶) نمایش داده شده است.



شکل (۱-۶): (a) ROC مربوط به مثال (۱-۶) (b) ROC مربوط به مثال (۲-۶)

^۱ Region of Convergence

متغیر 's' یک عدد مختلط است و در شکل (۱-۶)، صفحه مختلط یا صفحه s^۱ نمایش داده شده است. در صفحه مختلط، $\Re\{s\}$ روی محور افقی و $\Im\{s\}$ روی محور عمودی اختیار می‌شود. گاهی به این دو محور، محور σ و محور $j\omega$ نیز گفته می‌شود. ناحیه هاشور خورده در شکل (۱-۶-**a**) نمایانگر مجموعه نقاطی در صفحه s است که در آنها عبارت (۱۳-۶) همگرا است. پس در واقع نمایانگر ناحیه همگرایی مثال (۱-۶) است و ناحیه هاشور خورده در شکل (۱-۶-**b**) ناحیه همگرایی مثال (۲-۶) را نمایش می‌دهد.

مثال (۳-۶): فرض کنید.

$$x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) \quad (۲۰-۶)$$

عبارت جبری تبدیل لاپلاس چنین است.

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)]e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}e^{-st}u(t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t}e^{-st}u(t)dt \end{aligned} \quad (۲۱-۶)$$

اگر در عبارت اول $s > -1$ و در عبارت دوم $s > -2$ در نظر گرفته شود به نتیجه زیر می‌رسیم.

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} \quad (۲۲-۶)$$

برای تعیین ROC چون $x(t)$ مجموع دو تابع نمایی حقیقی است و چون همانطور که نشان خواهیم داد اپراتور تبدیل لاپلاس خطی است، بنابراین $X(s)$ مجموع تبدیل لاپلاس هر یک از توابع نمایی است. عبارت اول، تبدیل لاپلاس $e^{-t}u(t)$ و عبارت دوم تبدیل لاپلاس $e^{-2t}u(t)$ است. از مثال (۱-۶) می‌توان ROC را برای هر یک از این توابع بدست آورد.

$$e^{-t}u(t) \xrightarrow{\ell} \frac{1}{s+1} \quad \Re\{s\} > -1 \quad (۲۳-۶)$$

$$e^{-2t}u(t) \xrightarrow{\ell} \frac{1}{s+2} \quad \Re\{s\} > -2 \quad (۲۴-۶)$$

بنابراین مجموع مقادیری از $\Re\{s\}$ که بازاء آنها تبدیل لاپلاس نمایی همگراست عبارت است از فصل مشترک نواحی همگرایی فوق الذکر و یا

$$x(t) \xrightarrow{\ell} \frac{2s+3}{s^2+3s+2} \quad \Re\{s\} > -1 \quad (۲۵-۶)$$

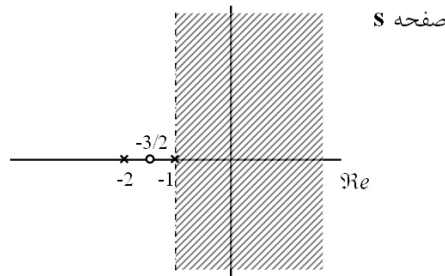
هنگامی که بتوان $X(s)$ را بصورت $x(t) = \frac{N(s)}{D(s)}$ نوشت، به آن کسری^۲ گفته می‌شود. $X(s)$ همواره

کسری است اگر $x(t)$ ترکیب خطی از توابع نمایی حقیقی باشد. در قسمت‌های بعدی خواهیم دید سیستم‌های LTI که بوسیله معادلات دیفرانسیل خطی با ضرائب ثابت مشخص می‌شوند نیز دارای تابع

^۱ S-Plane

^۲ Rational

تبدیل $H(s)$ بصورت کسری هستند. ریشه‌های $N(s)$ را صفرها^۱ و ریشه‌های $D(s)$ را قطب‌های^۲ تبدیل می‌نامند و معمولاً در رسم ROC این نقاط نیز مشخص می‌شوند. مثلاً برای مثال (۳-۶) رسم ROC بصورت شکل (۲-۶) است.



شکل (۲-۶): نمودار صفر و قطب و ROC برای مثال (۳-۶)

علامت 'x' جهت نمایش قطب و علامت 'o' جهت نمایش صفر بکار گرفته شده‌اند. مثال (۴-۶): فرض کنید.

$$x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t) \quad (۲۷-۶)$$

تبدیل لاپلاس $\delta(t)$ مساوی واحد است و تبدیل لاپلاس سایر سیگنال‌ها بسادگی بدست می‌آید. بنابراین

$$X(s) = 1 - \frac{4}{3} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{s-2} \quad \Re\{s\} > 2 \quad (۲۸-۶)$$

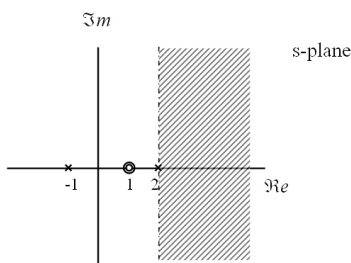
ناحیه همگرایی از فصل مشترک تک تک نواحی همگرایی بدست می‌آید. توجه شود که ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس تابع ضربه، تمام صفحه s می‌باشد. رابطه (۲۸-۶) را می‌توان بدین صورت نیز نوشت.

$$X(s) = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)} \quad \Re\{s\} > 2 \quad (۲۹-۶)$$

رسم صفر و قطب و ROC برای $X(s)$ بصورت شکل (۳-۶) می‌باشد. همانطور که گفتیم تبدیل لاپلاس با $s = j\omega$ همان تبدیل فوریه است. هنگامی که ROC شامل محور $j\omega$ نشود ($\Re\{s\} = 0$) جزو ناحیه همگرایی نباشد) در اینصورت تبدیل فوریه سیگنال وجود ندارد. نکته دیگری که به آن باید اشاره کرد در مورد صفرها و قطب‌های مرتبه بالاتر است. همانگونه که از شکل (۳-۶) پیداست دو صفر در یک نقطه واقع می‌شود که به آنها صفر مرتبه دوم می‌گویند.

¹ Zeros

² Poles



شکل (۳-۶): نمودار صفر - قطب و ناحیه همگرایی رابطه (۲۹-۶)

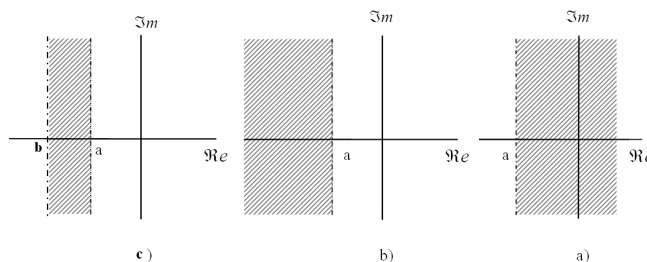
در این مثال دو قطب در $s = -1$ و $s = 2$ داریم ولی ROC در سمت راست بزرگترین قطب قرار گرفته است. برای تبدیل لاپلاس‌های کسری ارتباط نزدیکی میان محل قطب‌ها و ROC وجود دارد و بطوری که بعداً خواهیم دید می‌توان فقط با مشاهده مکان قطب‌ها ROC را مشخص کرد.

۲-۶ خواص ناحیه همگرایی برای تبدیلات لاپلاس

در قسمت قبل دیدیم که تعریف کامل تبدیل لاپلاس، نه تنها شامل عبارت جبری است بلکه احتیاج به مشخص کردن ناحیه همگرایی نیز دارد. ناحیه همگرایی دارای خواصی است که با شناخت این خواص می‌توان ناحیه همگرایی را فقط با دانستن عبارت جبری $X(s)$ و دانستن اطلاعات اندکی در مورد شکل $x(t)$ در حوزه زمان بدست آورد. هم اکنون این خواص را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

خاصیت ۱: ناحیه همگرایی $X(s)$ شامل قطعات موازی با محور $j\omega$ در صفحه s است.

از آنجا به صحت این خاصیت پی برده می‌شود که ناحیه همگرایی $X(s)$ شامل آن مقادیری از $s = \sigma + j\omega$ است که بازه آنها تبدیل فوریه $x(t) = e^{-\sigma t}$ همگرا شود. پس ناحیه همگرایی فقط به مقدار حقیقی s بستگی دارد و مستقل از مقدار موهومی آن است. بنابراین ROC فقط توسط خطوطی به موازات محور $j\omega$ محدود می‌شود. بنابراین ROC در حالت کلی به یکی از سه صورت زیر است.



شکل ۴-۶ (a) ناحیه همگرایی راسترو (b) ناحیه همگرایی چپرو (c) ناحیه همگرایی محدود

خاصیت ۲: ناحیه همگرایی شامل قطب‌ها نمی‌شود.

این مطلب در سه مثال مطرح شده بوضوح دیده می‌شود و در حالت کلی نیاز به توضیح اضافی ندارد.

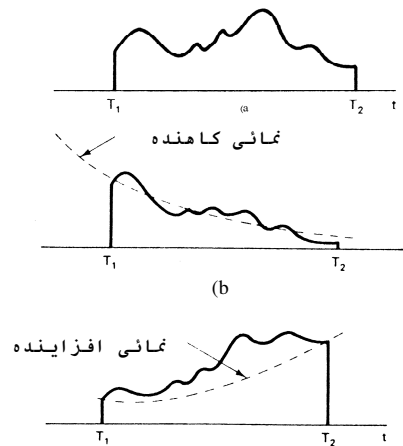
خاصیت ۳: اگر $x(t)$ در حوزه زمان محدود (دوره محدود) باشد و اگر حداقل یک مقدار از s موجود باشد بقسمی که بازه آن s ، تبدیل لاپلاس همگرا باشد در آن صورت ناحیه همگرایی شامل تمام صفحه s خواهد بود. خاصیت سوم بدین صورت ثابت می‌شود.

یک سیگنال زمان محدود دارای این خاصیت است که در خارج یک ناحیه صفر و در داخل آن غیر صفر است (به شکل (۵-۶) توجه کنید).

فرض کنید که $x(t)e^{-\sigma t}$ بطور مطلق بازه مقادیری از σ مثلاً σ_0 انتگرال پذیر باشد.

بنابراین

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \quad (۳۰-۶)$$



شکل (۵-۶): (a) سیگنال با دوره محدود (b) سیگنال دوره N در یک نمایی کاهنده ضرب شده است. (c) سیگنال دوره محدود N در یک نمایی افزایشنده ضرب شده است

در این حالت $\Re\{s\} = \sigma_0$ در ناحیه همگرایی قرار دارد. برای اینکه $\Re\{s\} = \sigma_1$ هم در ناحیه همگرایی باشد باید

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt = \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t} dt < \infty \quad (۳۱-۶)$$

اکنون فرض کنید $\sigma_0 < \sigma_1$ باشد، بگونه‌ای که $e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t}$ بیانگر یک تابع نمایی کاهنده باشد. بنابراین در فاصله‌ای که $x(t)$ وجود دارد، ماکزیمم مقدار تابع نمایی مساوی $e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T_1}$ است و می‌توانیم بنویسیم:

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt < e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T_1} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt \quad (۳۴-۶)$$

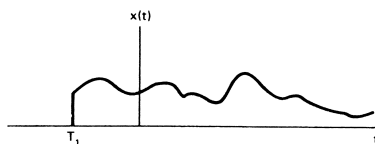
با توجه به اینکه انتگرال سمت راست محدود است متوجه می‌شویم که صفحه s بازه $\sigma_0 < \Re\{s\}$ نیز جزو ناحیه همگرایی است. با روشی مشابه اگر $\sigma_0 > \sigma_1$ باشد آنگاه

¹ Finite Duration

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt < e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T_2} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt \quad (35-6)$$

و دوباره پی می‌بریم که $x(t)e^{-\sigma_1 t}$ به ازاء $\Re\{s\} < \sigma_0$ بطور مطلق انتگرالپذیر است. بنابراین ناحیه همگرایی شامل همه صفحه s خواهد بود. این نتایج در شکل (۵-۶-b) و (۵-۶-c) نمایش داده شده است. در شکل (۵-۶-b) حاصل ضرب سیگنال شکل (۵-۶-a) را در نمایی کاهنده مشاهده می‌کنیم و در شکل (۵-۶-c)، حاصل ضرب همان سیگنال را در نمایی افزایشی می‌بینیم. چون ناحیه وجود $x(t)$ محدود است رشد تابع نمایی در این فاصله هرگز نامحدود نخواهد بود و بنابراین انتگرال‌پذیری $x(t)$ با ضرب کردن در تابع نمایی (چه کاهنده و چه افزایشی) خدشه‌دار نخواهد شد (البته اگر خود $x(t)$ انتگرال‌پذیر باشد).

توجه به این نکته حائز اهمیت است که اطمینان از محدود بودن رشد توابع نمایی از آنجا ناشی می‌شود که فاصله وجود $x(t)$ محدود است و اگر چنین نباشد در خاصیت بعدی به آن اشاره می‌شود. خاصیت ۴: اگر $x(t)$ راست رو^۱ (سیگنالی را راست‌رو می‌گویند که از سمت چپ محدود باشد یعنی بازاء مقادیر $t < T_1$ مساوی صفر باشد) باشد و اگر خط $\Re\{s\} = \sigma_0$ در ناحیه همگرایی باشد در آنصورت تمام مقادیر s که بازاء آنها $\Re\{s\} > \sigma_0$ می‌شود، نیز در ناحیه همگرایی قرار می‌گیرند. در شکل (۶-۶) یک سیگنال راست‌رو مشاهده می‌شود. البته ممکن است برای چنین سیگنالی نتوان ناحیه همگرایی تعریف کرد. یعنی ممکن است هیچ مقدار s ای را نتوان یافت که بازاء آن تبدیل لاپلاس همگرا شود.



شکل (۶-۶): سیگنال راست‌رو

یک مثال از این نوع تابع $x(t) = e^{t^2} u(t)$ است. اما موقتاً فرض کنید که تبدیل لاپلاس بازاء مقدار مشخصی از σ همگرا باشد که ما با σ_0 آنرا نمایش می‌دهیم، بنابراین

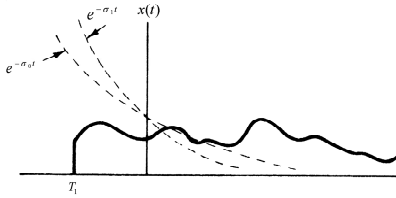
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \quad (36-6)$$

یا بطور معادل چون $x(t)$ راست‌رو است.

$$\int_{T_1}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \quad (37-6)$$

بنابراین اگر $\sigma_1 > \sigma_0$ باشد بازهم می‌توان گفت که $|x(t)| e^{-\sigma_1 t}$ بطور مطلق انتگرال‌پذیر است، چون با افزایش t (یا $t \rightarrow \infty$)، $e^{-\sigma_1 t}$ با سرعت بیشتری نسبت به $e^{-\sigma_0 t}$ کاهش می‌یابد که در شکل (۶-۷) نمایش داده شده است.

¹ Right-sided



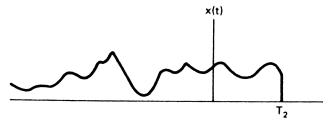
شکل (۷-۶): اگر $x(t)$ راست‌رو و $x(t)e^{-\sigma_0 t}$ بطور مطلق انتگرال‌پذیر باشند، در آنصورت $x(t)e^{-\sigma_1 t}$ با شرط $\sigma_1 > \sigma_0$ انتگرال‌پذیر است.

همچنین می‌توان نوشت.

$$\int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt = \int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t - (\sigma_1 - \sigma_0)t} dt \quad (۳۸-۶)$$

$$\leq e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T_1} \int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt$$

چون T_1 محدود است، از معادله (۳۷-۶) متوجه می‌شویم که سمت راست نامعادله (۳۸-۶) محدود است و بنابراین $x(t)e^{-\sigma_1 t}$ بطور مطلق انتگرال‌پذیر است. توجه کنید که چون $x(t)$ راست‌رو است و چون $\sigma_1 > \sigma_0$ است سرعت سقوط $e^{-\sigma_1 t}$ بیشتر از $e^{-\sigma_0 t}$ است و بنابراین $x(t)e^{-\sigma_1 t}$ نمی‌تواند بدون محدودیت در ناحیه t های منفی رشد کند چون $x(t)$ بازا $t < T_1$ مساوی صفر است. خاصیت ۵: اگر $x(t)$ سیگنال چپ‌رو^۱ باشد و اگر خط $\Re\{s\} = \sigma_0$ در ناحیه همگرایی باشد، تمام مقادیر s که بازا آنها $\Re\{s\} < \sigma_0$ است نیز در ناحیه همگرایی قرار می‌گیرند. یک سیگنال چپ‌رو سیگنالی است که بازاها زمان‌های بزرگتر از یک مقدار محدود T_2 ، صفر باشد (به شکل (۸-۶) توجه کنید). اثبات این خاصیت مثل اثبات خاصیت ۴ است.

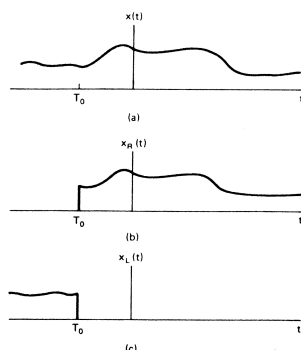


شکل (۸-۶): سیگنال چپ‌رو

خاصیت ۶: اگر $x(t)$ دو جهته^۲ باشد و اگر خط $\Re\{s\} = \sigma_0$ در ناحیه همگرایی باشد، ناحیه شامل یک قطعه موازی محور $j\omega$ در صفحه s است بگونه‌ای که شامل $\Re\{s\} = \sigma_0$ می‌شود. یک سیگنال دو جهته سیگنالی است که از هر دو طرف در حوزه زمان امتداد داشته باشد (به شکل (۶-۹) توجه کنید). برای تعیین ناحیه همگرایی چنین سیگنالی می‌توان با انتخاب یک لحظه دلخواه از زمان مانند T_0 سیگنال را به مجموع دو سیگنال چپ‌رو $x_L(t)$ و راست‌رو $x_R(t)$ تجزیه کرد، همانگونه که در شکل (۹-۶) نشان داده شده است. تبدیل لاپلاس $x(t)$ بازا مقادیری از s همگراست که در آن ناحیه هر دو سیگنال $x_L(t)$ و $x_R(t)$ همگرا باشند.

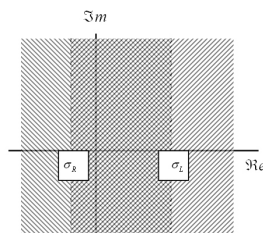
¹ Left-sided

² Two-sided



شکل (۶-۹): سیگنال دو جهته که به دو سیگنال چپرو و راسترو تجزیه شده است.

از خاصیت ۴ می‌دانیم که ناحیه همگرایی $\ell\{x_R(t)\}$ شامل نقاطی از صفحه S است که در آنها $\Re\{s\} > \sigma_R$ می‌باشد (بازاء مقدار معینی از σ_R). یعنی شامل سمت راست یک مقدار معین مثل σ_R است. و از خاصیت ۵ هم می‌دانیم که ناحیه همگرایی $\ell\{x_L(t)\}$ شامل نقاطی از صفحه S است که در آنها $\Re\{s\} < \sigma_L$ است (σ_L عدد معینی است). بنابراین اگر بدانیم تبدیل لاپلاس بازاء یک خط مشخص مثل $\Re\{s\} = \sigma_0$ همگراست. پس حتماً این دو ناحیه (یعنی $\Re\{s\} < \sigma_L$ و $\Re\{s\} > \sigma_R$) دارای حداقل یک خط مشترک یا یک قطعه مشترک می‌باشند. [ک. به شکل (۶-۱۰)]



شکل (۶-۱۰): نواحی همگرایی مربوط به $x_R(t)$ و $x_L(t)$ که طبق فرض در یک ناحیه مشترک هستند. ناحیه مشترک نواحی همگرایی در واقع ناحیه همگرایی مربوط به $x(t) = x_R(t) + x_L(t)$ می‌باشد. اما ممکن است که $\sigma_R > \sigma_L$ شود. در اینصورت ناحیه مشترک وجود نخواهد داشت و تبدیل لاپلاس بازاء هیچ مقداری از S همگرا نخواهد شد. مثال (۶-۵): فرض کنید.

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & 0 < t < T \\ 0 & t < 0, T < t \end{cases} \quad (۶-۳۹)$$

تبدیل لاپلاس آن بصورت زیر است.

$$X(s) = \int_0^T e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{s+a} [1 - e^{-(s+a)T}] \quad (۶-۴۰)$$

چون در این مثال $x(t)$ دارای طول محدود است، از خاصیت (۳) متوجه می‌شویم که ناحیه همگرایی شامل تمام صفحه S است.

$x(t)$ دارای تعداد نامتناهی صفر است که بازاء آنها $1 - e^{-(s+a)T} = 0$ می‌شود.

بنابراین

$$e^{-(s+a)T} = 1 = e^{-j2k\pi} \quad (۴۱-۶)$$

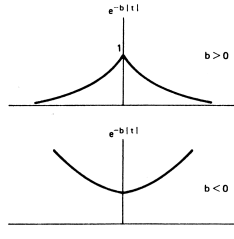
$$(s+a)T = j2\pi k \quad (۴۲-۶)$$

$$s = -a + j\frac{2\pi k}{T} \quad \text{و} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (۴۳-۶)$$

تمرین ۱-۶: محل این صفرها را در صفحه s مشخص کنید.

مثال (۶-۶): فرض کنید سیگنال ۴۴-۶ را داشته باشیم

$$x(t) = e^{-b|t|} \quad (۴۴-۶)$$



شکل (۱۱-۶): سیگنال $x(t) = e^{-b|t|}$ بازاء $b > 0$ و $b < 0$

در شکل (۱۱-۶) این سیگنال بازاء $b > 0$ و $b < 0$ رسم شده است.

چون سیگنال دو طرفه یا دو جهته است باید آنرا به دو سیگنال راست‌رو و چپ‌رو تجزیه کرد. یعنی

$$x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{bt}u(-t) \quad (۴۵-۶)$$

اما قبلا داشتیم که

$$e^{-bt}u(t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{s+b} \quad \text{و} \quad \Re\{s\} > -b \quad (۴۶-۶)$$

$$e^{bt}u(-t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{-1}{s-b} \quad \text{و} \quad \Re\{s\} < b \quad (۶-۴۷)$$

اگر چه تبدیل لاپلاس هر دو قسمت سیگنال موجود است (یعنی ناحیه همگرایی دارند)، ولی اگر $b < 0$ باشد، این دو ناحیه همگرایی نقاط مشترک ندارند. بنابراین $x(t)$ تبدیل لاپلاس نخواهد داشت. اما اگر $b > 0$ باشد، تبدیل لاپلاس چنین است.

$$X(s) = \frac{-2b}{(s-b)^2} \quad -b < \Re\{s\} < b \quad (۴۸-۶)$$

تمرین: رابطه فوق را ثابت کنید.

توجه کنید که هر سیگنال خواه تبدیل لاپلاس داشته باشد یا نداشته باشد در یکی از چهار طبقه سیگنال‌هایی که معرفی کردیم قرار خواهد گرفت (سیگنال زمان محدود، راست‌رو، چپ‌رو، دو طرفه). بنابراین هر سیگنالی که تبدیل لاپلاس دارد باید ناحیه همگرایی‌اش در یکی از چهار ناحیه زیر قرار بگیرد.

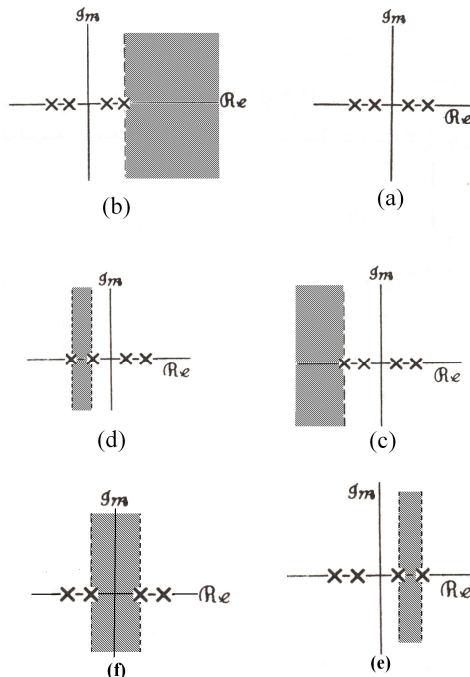
تمام صفحه S
 سمت چپ صفحه S
 سمت راست صفحه S
 محدود به دو خط موازی محور $j\omega$ در صفحه S (برای سیگنال‌های دو طرفه)
 (برای سیگنال‌های زمان محدود)
 (برای سیگنال‌های چپ‌رو)
 (برای سیگنال‌های راست‌رو)

در تمامی حالات ناحیه همگرایی از یک قطب شروع می‌شود و به یک قطب دیگر یا بینهایت ختم می‌شود ولی هرگز شامل قطب‌ها نمی‌شود. بنابراین برای سیگنال راست‌روئی که شامل چند قطب است، ناحیه همگرایی از بزرگترین قطب (آخرین قطب در سمت راست) شروع شده و به $(+\infty)$ ختم می‌شود. و برای سیگنال چپ‌روئی که شامل چند قطب است ناحیه همگرایی از کوچکترین قطب (آخرین قطب در سمت چپ) شروع شده و به بینهایت منفی $(-\infty)$ ختم می‌شود.

مثال (۶-۷): عبارت جبری زیر را با نمودار صفر-قطب شکل (۶-۱۲a) در نظر بگیرید.

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)(s-2)} \quad (۶-۴۹)$$

همانطور که در شکل (۶-۱۲) نمایش داده شده است پنج (تعداد قطب‌ها +۱) ناحیه همگرایی برای عبارت فوق ممکن است. اگر سیگنال مربوط به نمودار صفر-قطب فوق، راست‌رو باشد شکل (۶-۱۲b) ناحیه همگرایی آن خواهد بود.

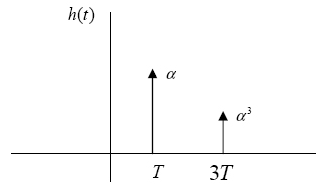


شکل (۶-۱۲): نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرایی ممکنه برای مثال (۶-۷)



اما اگر سیگنال مذکور چپرو باشد شکل (c-۱۲-۶) نمایش ناحیه همگرایی خواهد بود. همچنین اگر سیگنال $x(t)$ دو طرفه باشد یکی از شکل های (e,f,d-۱۲-۶) نمایش ناحیه همگرایی آن است. در حالتی که ناحیه همگرایی شکل (f-۱۲-۶) باشد تبدیل فوریه وجود دارد چون ناحیه همگرایی شامل محور $j\omega$ می شود. برای بقیه حالتها تبدیل فوریه وجود ندارد.
مثال (۸-۶): تبدیل لاپلاس سیگنال زیر را بدست آورید.

$$h(t) = \alpha\delta(t-T) + \alpha^3\delta(t-3T) \quad (۵۰-۶)$$



شکل (۱۳-۶): سیگنال $h(t)$ مربوط به مثال (۸-۶)

تبدیل لاپلاس عبارت اول برابر است با

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha\delta(t-T)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{-sT} \delta(t-T) dt = \alpha e^{-sT} \quad (۵۱-۶)$$

تبدیل لاپلاس عبارت دوم نیز به همین صورت بدست می آید و در نهایت داریم.

$$H(s) = \alpha e^{-sT} + \alpha^3 e^{-3sT} \quad (۵۲-۶)$$

و یا

$$H(s) = \alpha e^{-sT} [1 + (\alpha e^{-sT})^2] \quad (۵۳-۶)$$

اگر مکان صفرها و قطبهای این تابع را پیدا کنیم محل صفرها از مساوی صفر قرار دادن هر یک از عوامل تشکیل دهنده $H(s)$ بدست می آیند.

$$e^{-sT} = 0 \quad \text{یا} \quad \alpha^2 e^{-2sT} = -1 \quad (۵۴-۶)$$

تساوی اول غیر ممکن است و فقط تساوی دوم امکان پذیر است.

$$\alpha^2 e^{-2sT} = -1 \quad (۵۵-۶)$$

بنابراین

$$e^{-2sT} = \frac{-1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} e^{-jk\pi} \quad k \text{ عدد فرد است} \quad (۵۶-۶)$$

با لگاریتم گرفتن از دو طرف داریم.

$$-2sT = \ln \frac{1}{\alpha^2} - jk\pi \quad (۵۷-۶)$$

و با قرار دادن $s = \sigma + j\omega$ داریم.

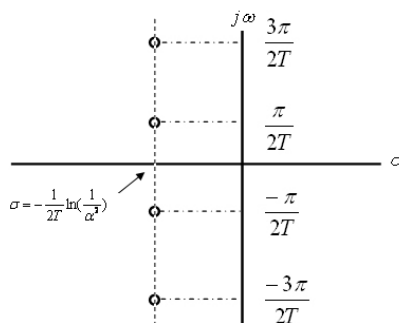
$$-2T\sigma = \ln \frac{1}{\alpha^2} \quad (۵۸-۶)$$

$$\sigma = -\frac{1}{2T} \ln\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) \quad (۵۹-۶)$$

$$-2T\omega = -k\pi \quad (۶۰-۶)$$

$$\omega = \frac{k\pi}{2T} \quad k = \pm 1, \pm 3, \dots \quad (۶۱-۶)$$

توجه شود که تابع قطب ندارد پس رسم نمودار صفر-قطب آن چنین است



شکل (۶-۱۴) نمودار صفر و قطب مثال (۶-۸)

۶-۳ معکوس تبدیل لاپلاس

قبلاً بدست آوردیم که تبدیل لاپلاس تابعی از S بوده و رابطه آن با تبدیل فوریه سیگنال بصورت زیرمی‌باشد.

$$X(\sigma + j\omega) = F\{x(t)e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t} dt \quad (۶۲-۶)$$

توجه کنید که انتگرال روی یک خط دلخواه در ROC در امتداد محور موهومی در نظر گرفته می‌شود. همچنین می‌توان تبدیل فوریه معکوس را حساب کرد.

$$x(t)e^{-\sigma t} = F^{-1}\{X(\sigma + j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (۶۳-۶)$$

و اگر طرفین را در $e^{\sigma t}$ ضرب کنیم داریم.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega \quad (۶۴-۶)$$

در نهایت اگر متغیر انتگرال‌گیری را از ω به S تبدیل کنیم و در نظر داشته باشیم که σ ثابت است بگونه‌ای که $ds = j d\omega$ ، در اینصورت تبدیل لاپلاس معکوس بدین صورت بدست می‌آید.

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (۶۵-۶)$$

انتگرال باید روی خط $\Re\{s\} = \sigma$ گرفته شود بگونه‌ای که این خط در ROC قرار داشته باشد. معمولاً محاسبه تبدیل لاپلاس معکوس از فرمول (۶۵-۶) مشکل است و از روش‌های دیگر برای اینکار استفاده می‌شود. یکی از این روش‌ها تبدیل $X(s)$ به مجموعی بصورت زیر است (اگر امکان داشته باشد).

$$X(s) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{s + a_i} \quad (۶۶-۶)$$

در اینصورت تبدیل معکوس با داشتن ناحیه همگرایی $X(s)$ بسادگی بدست می‌آید. این روش در اصطلاح به **بسط کسور جزئی**^۱ معروف است. برای واضح شدن مطلب به مثال (۹-۶) توجه کنید. مثال (۹-۶): مطلوبست تبدیل لاپلاس معکوس

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad \Re\{s\} > -1 \quad (۶۷-۶)$$

برای بدست آوردن تبدیل معکوس $X(s)$ از روش بسط به کسور جزئی ابتدا $X(s)$ را مساوی مجموع دو کسر قرار می‌دهیم.

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \quad (۶۸-۶)$$

برای محاسبه A و B ، طرفین رابطه (۶-۶۸) را بترتیب در $(s+1)$ و سپس در $(s+2)$ ضرب کرده و در حاصل بترتیب $s = -1$ و سپس $s = -2$ قرار می‌دهیم. یعنی

$$X(s)(s+1) \Big|_{s=-1} = A + B \frac{s+1}{s+2} \Big|_{s=-1} = A \quad (۶۹-۶)$$

بنابراین

$$A = 1 \quad (۷۰-۶)$$

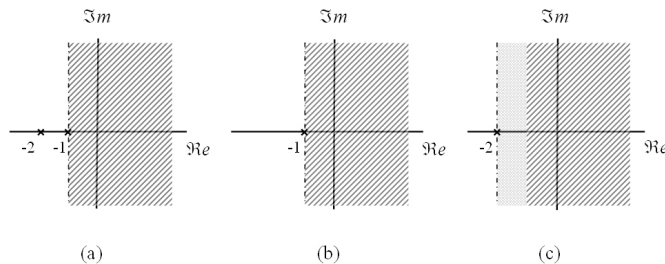
به همین ترتیب داریم.

$$B = -1 \quad (۷۱-۶)$$

بنابراین

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \quad (۷۲-۶)$$

اکنون با توجه به داشتن ناحیه همگرایی متوجه می‌شویم که $x(t)$ یک سیگنال راست‌رو است. ناحیه همگرایی در شکل (۶-۱۶-۲) ترسیم شده است.



شکل (۶-۱۶): ساختار ROC برای عبارتهای اولیه در بسط کسرهای جزئی (a) نمودار صفر-قطب و ROC برای $x(t)$ (b) قطب در $s = -1$ و ROC مربوط به سیگنال راست‌رو متناظر با آن (c) قطب در $s = -2$ و ROC مربوط به سیگنال راست‌رو متناظر با آن

^۱ Partial fraction expansion

اما برای هر یک از کسرهای معادله (۷۲-۶) تبدیل فوریه چنین است.

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{s+1} \quad \text{و} \quad \Re\{s\} > -1 \quad (۷۳-۶)$$

$$e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{s+2} \quad \text{و} \quad \Re\{s\} > -2 \quad (۷۴-۶)$$

بنابراین

$$(e^{-t} - e^{-2t})u(t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad \text{و} \quad \Re\{s\} > -1 \quad (۷۵-۶)$$

اکنون فرض کنید $X(s)$ ای داریم با همان عبارت جبری مثال (۹-۶)، ولی ناحیه همگرایی اش بصورت $\Re\{s\} < -2$ است. در اینصورت داریم (توجه کنید که سیگنال در این حالت چپرو است).

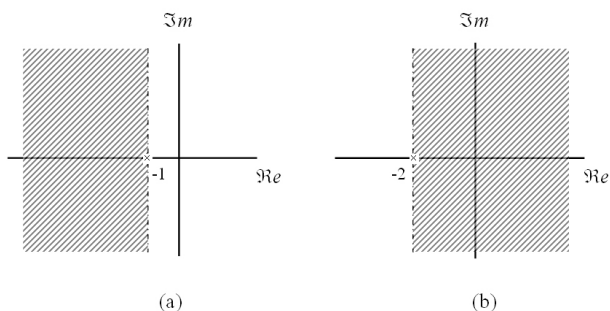
$$-e^{-t}u(-t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{s+1} \quad \Re\{s\} < -1 \quad (۷۶-۶)$$

$$-e^{-2t}u(-t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{s+2} \quad \Re\{s\} < -2 \quad (۷۷-۶)$$

در نتیجه

$$(-e^{-t} + e^{-2t})u(-t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad \Re\{s\} < -2 \quad (۷۸-۶)$$

در نهایت فرض کنید همان $X(s)$ قبلی دارای ناحیه همگرایی $-2 < \Re\{s\} < -1$ باشد. در این حالت سیگنال باید دو جهته یا دو طرفه باشد و ناحیه همگرایی را بدو قسمت تقسیم می‌کنیم.



شکل (۱۵-۶): ناحیه همگرایی در (a) سیگنال چپرو و (b) راسترو

شکل (۱۵-۶-۱) نمایانگر یک سیگنال چپرو است. پس

$$-e^{-t}u(-t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{s+1} \quad \Re\{s\} < -1 \quad (۷۹-۶)$$

و شکل (۱۵-۶-۲) نمایانگر یک سیگنال راسترو است. پس

$$+e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{s+2} \quad \Re\{s\} > -2 \quad (۸۰-۶)$$

بنابراین داریم

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad -2 < \Re\{s\} < -1 \quad (۸۱-۶)$$

۶-۴ خواص تبدیل لاپلاس

در این قسمت خواص تبدیل لاپلاس که از خیلی جهات مشابه خواص تبدیل فوریه هستند مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند. در تعیین تبدیل لاپلاس و ناحیه همگرایی سیگنال جدید باید دو نکته را به دقت بررسی کرد. نکته اول اینکه عبارت جبری تبدیل لاپلاس بر اثر تغییر ایجاد شده در حوزه زمان به چه صورت است؟ آیا صفر یا قطبی اضافه یا کم می‌شود؟ آیا محل صفرها و قطب‌ها تغییر می‌کند؟ و نکته دوم اینکه آیا این تغییر در تعداد صفرها یا قطب‌ها یا ناحیه همگرایی را نیز تحت تاثیر قرار می‌دهد؟ آیا رفتار ناحیه همگرایی به طور کلی تغییر می‌کند یا فقط جابجا می‌شود؟ به عبارت دیگر آیا سیگنال در حوزه زمان دچار تغییرات اساسی مثلاً تبدیل راست رو به چپ رو یا بالعکس می‌شود؟ در نظر گرفتن نکات فوق الذکر باعث می‌شود به سادگی تبدیل لاپلاس و ناحیه همگرایی جدید را بدست آوریم.

۶-۴-۱ خطی بودن تبدیل لاپلاس

فرض کنید

$$x_1(t) \xleftrightarrow{\ell} X_1(s) \quad \text{با ناحیه همگرایی } R_1 \quad (۸۲-۶)$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{\ell} X_2(s) \quad \text{با ناحیه همگرایی } R_2 \quad (۸۳-۶)$$

در اینصورت تبدیل لاپلاس و ناحیه همگرایی مجموع این دو سیگنال به صورت زیر است.

$$ax_1(t) + bx_2(t) \xleftrightarrow{\ell} aX_1(s) + bX_2(s) \quad R_1 \cap R_2 \quad \text{با ناحیه همگرایی حداقل } (۸۴-۶)$$

ناحیه همگرایی حداقل فصل مشترک R_1 و R_2 است، و اگر این مجموعه تهی باشد تبدیل لاپلاس وجود نخواهد داشت. ممکن است ناحیه همگرایی بزرگتر از فصل مشترک باشد، مثلاً در معادله (۸۴-۶) اگر $x_1(t) = x_2(t)$ و $a = -b$ باشد در آنصورت $X(s) = 0$ می‌شود و ناحیه همگرایی کل صفحه s است.

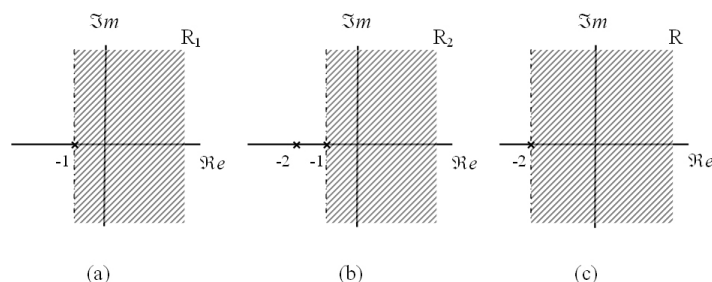
مثال (۶-۱۰):

$$X_1(s) = \frac{1}{(s+1)} \quad R_1: \Re\{s\} > -1$$

$$X_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad R_2: \Re\{s\} > -1$$

نمودار صفر-قطب این دو در شکل (۱۷-۶-a,b) ترسیم شده است. اکنون فرض کنید:

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{(s+1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2} \quad (۸۵-۶)$$



شکل (۶-۱۷): (a) ROC مربوط به $X_1(s)$ (b) ROC مربوط به $X_2(s)$ (c) ROC مربوط به $X_1(s) - X_2(s)$. بنابراین در ترکیب خطی $X_1(s)$ و $X_2(s)$ قطب $s = -1$ بوسیله صفر در "-1" خنثی می‌شود. بنابراین نمودار صفر - قطب بصورت شکل (c-۱۷-۶) در می‌آید. لذا ناحیه همگرایی $X(s)$ ، $\Re\{s\} > -2$ خواهد شد. بهر حال چون ناحیه همگرایی بوسیله قطب‌ها محدود می‌شوند با خنثی شدن یک قطب در این مثال ناحیه همگرایی بزرگتر از فصل مشترک دو ناحیه همگرایی R_1 و R_2 شده است.

در حالت کلی تر اگر تبدیل لاپلاس $x(t)$ را به صورت زیر داشته باشیم.

$$x_k(t) \xleftrightarrow{\ell} X_k(s), \quad R_k \quad (۶-۸۶)$$

در آنصورت تبدیل لاپلاس هر ترکیب خطی از $x(t)$ ها به صورت زیر است.

$$x(t) = \sum_k a_k x_k(t) \xleftrightarrow{\ell} \sum_k a_k X_k(s), \quad R = \bigcap_k R_k \quad \text{حداقل} \quad (۶-۸۷)$$

۶-۴-۲ انتقال در حوزه زمان

اگر

$$x(t) \xleftrightarrow{\ell} X(s) \quad \text{ROC} = R \quad (۶-۸۸)$$

در آن صورت

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} X(s) \quad \text{ROC} = R \quad (۶-۸۹)$$

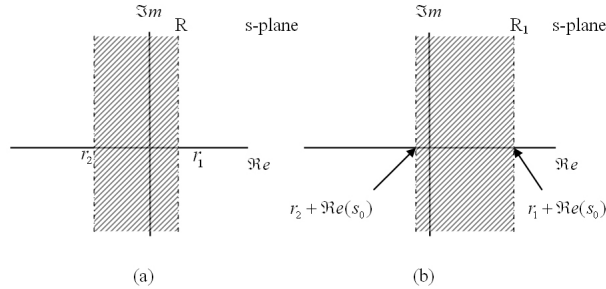
ناحیه همگرایی در حالت انتقال در حوزه زمان تغییر نخواهد کرد. چون جمله e^{-st_0} تنها قادر است قطب یا صفر در ∞ یا $-\infty$ ایجاد کند که در تعیین ناحیه همگرایی و نمودار صفر و قطب به هیچ وجه تاثیری ندارد.

۶-۴-۳ انتقال در حوزه s

$$x(t) \xleftrightarrow{\ell} X(s) \quad \text{ROC} = R \quad (۶-۹۰)$$

$$e^{s_0 t} x(t) \xleftrightarrow{\ell} X(s - s_0) \quad \text{و} \quad \text{ROC} = R + \Re\{s_0\} \quad (۶-۹۱)$$

این بدین معنی است که ناحیه همگرایی مربوط به $X(s - s_0)$ همان ناحیه همگرایی $X(s)$ است که باندازه $\Re\{s_0\}$ انتقال پیدا کرده است. بنابراین برای هر مقدار s در R ، مقدار $s + \Re\{s_0\}$ در R_1 (ناحیه همگرایی $e^{s_0 t} x(t)$) قرار می‌گیرد. همانگونه که در شکل (۶-۱۸) نمایش داده شده است.



شکل (۶-۱۸): اثر انتقال در حوزه s بر روی ROC (a) مربوط به $x(t)$ (b) ROC مربوط به $X(s - s_0)$ توجه شود که در این خاصیت محل صفرها و قطب‌ها همگی به اندازه s_0 جابجا می‌شوند. اما با نگاهی به سیگنال حوزه زمان می‌فهمیم که شکل کلی سیگنال ثابت مانده است. به عبارت دیگر اگر سیگنال راست رو باشد، راست رو باقی می‌ماند. و اگر چپ رو باشد، چپ رو باقی می‌ماند. بنابراین شکل ناحیه همگرایی دچار تغییرات اساسی نمی‌شود و فقط دچار انتقال می‌گردد.

۶-۴-۴ مقیاس بندی درحوزه زمان

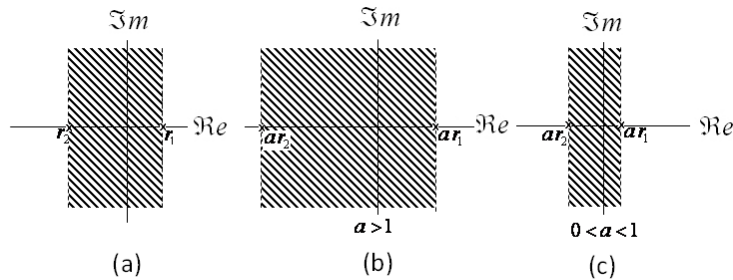
اگر

$$x(t) \xleftrightarrow{\ell} X(s) \quad \text{ROC} = R \tag{۶-۹۲}$$

آنگاه

$$x(at) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{ROC} = R_1 = aR \tag{۶-۹۳}$$

یعنی برای هر مقدار s در R ، $\frac{s}{a}$ باید در R_1 قرار داشته باشد. به شکل (۶-۱۹) توجه کنید.



شکل (۶-۱۹): اثر مقیاس‌بندی زمانی ROC (a) ROC مربوط به $x(t)$ (b) ROC مربوط به $\frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$ برای $a > 0$

(c) ROC مربوط به $\frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$ برای $0 < a < 1$

اگر a مثبت باشد در آنصورت شکل سیگنال در حوزه زمان دچار تغییرات اساسی نمی‌شود. به عبارت دیگر اگر سیگنال $x(t)$ راست رو یا چپ رو باشد در آن صورت سیگنال $x(at)$ نیز به ترتیب راست رو یا چپ رو می‌شود. اما اگر a منفی باشد در آن صورت شکل سیگنال در حوزه زمان دچار تغییرات اساسی می‌شود. به عبارت دیگر اگر سیگنال $x(t)$ راست رو باشد سیگنال $x(at)$ چپ رو می‌شود و

بالعکس. بنابراین در تعیین ناحیه همگرایی جدید باید دقت شود که علاوه بر اینکه مکان صفرها و قطبها تغییر می کند، ناحیه همگرایی نیز در حالت $a < 0$ دچار تغییر شکل اساسی می شود. مثلا اگر سیگنال $x(t)$ دارای نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرایی به صورت شکل (۶-۱۲-b) باشد، نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرایی سیگنال $x(at)$ وقتی $a = -1$ است به صورت شکل (۶-۱۲-c) می باشد. توجه شود که برای این مثال خاص، کلیه قطبهای در $s = s_p$ به قطبهای در $s = -s_p$ تبدیل می شوند. به علاوه سیگنال راست رو به سیگنال چپ رو تبدیل می شود. در نتیجه ناحیه همگرایی از حالت راست رو به حالت چپ رو تبدیل می شود.

۶-۴-۵ خاصیت کانولوشن

اگر

$$x_1(t) \xleftrightarrow{\ell} X_1(s) \quad ROC = R_1 \quad (۶-۹۴)$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{\ell} X_2(s) \quad ROC = R_2 \quad (۶-۹۵)$$

بنابراین

$$x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{\ell} X_1(s)X_2(s) \quad R_1 \cap R_2 \quad \text{با ناحیه همگرایی حداقل} \quad (۶-۹۶)$$

ناحیه همگرایی $X_1(s)X_2(s)$ شامل حداقل فصل مشترک دو ناحیه همگرایی $X_1(s)$ و $X_2(s)$ می باشد و ممکن است بزرگتر شود اگر تعدادی از قطبها بوسیله صفرها خنثی شوند. به عنوان مثال

اگر

$$X_1(s) = \frac{s+1}{s+2} \quad \Re\{s\} > -2 \quad (۶-۹۷)$$

و

$$X_2(s) = \frac{s+2}{s+1} \quad \Re\{s\} > -1 \quad (۶-۹۸)$$

در آن صورت $X_1(s)X_2(s) = 1$ و ناحیه همگرایی آن تمام صفحه s است (چون هیچ قطبی ندارد).

۶-۴-۶ مشتق گیری در حوزه زمان

اگر

$$x(t) \xleftrightarrow{\ell} X(s) \quad ROC = R \quad (۶-۹۹)$$

بنابراین

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\ell} sX(s) \quad \text{حداقل} \quad ROC = R \quad (۶-۱۰۰)$$

بنا بر این اگر $X(s)$ قطبی در $s = 0$ داشته باشد حذف می شود. در نتیجه اگر این قطب یکی از مرزهای ناحیه همگرایی را تشکیل داده باشد ناحیه همگرایی مشتق بزرگتر خواهد شد. به عنوان مثال تبدیل لاپلاس تابع پله $x(t) = u(t)$ برابر $X(s) = \frac{1}{s}$ می شود. که ناحیه همگرایی آن $\Re\{s\} > 0$ است. اما تبدیل لاپلاس مشتق $\frac{dx(t)}{dt} = \delta(t)$ برابر واحد است. که ناحیه همگرایی آن کلیه صفحه s است. به عنوان

مثالی دیگر توجه کنید که تبدیل لاپلاس تابع $x(t) = u(-t)$ برابر $X(s) = -\frac{1}{s}$ می شود. که ناحیه همگرایی آن $\Re\{s\} < 0$ است. اما تبدیل لاپلاس مشتق $\frac{dx(t)}{dt} = -\delta(t)$ برابر منفی واحد است. که ناحیه همگرایی آن باز هم کلیه صفحه s است.

بنابراین این امکان وجود دارد که طی عملیات مشتق سیگنال یک طرفه چپ رو یا راست رو تبدیل به سیگنال دوره محدود شود و در نتیجه ناحیه همگرایی از چپ رو یا راست رو به تمام صفحه s تبدیل می شود.

همچنین در اینجا باید دقت نمود که اگر ناحیه همگرایی سیگنال $x(t)$ به قطب در صفر محدود شود و اگر بعد یا قبل از صفر قطبی وجود داشته باشد در آن صورت با حذف شدن قطب در صفر ناحیه همگرایی امتداد یافته و به قطب بعدی منتهی می شود. در این صورت شکل ناحیه همگرایی و معادل آن شکل سیگنال در حوزه زمان دچار تغییرات اساسی نمی شود و فقط ناحیه همگرایی توسعه می یابد. نکته آخری که در اینجا باید متذکر شد این است که اگر سیگنال $x(t)$ دارای قطبی در $s=0$ نباشد یا این قطب یکی از حدود ناحیه همگرایی نباشد، در آن صورت عملیات مشتق فقط احتمالاً قطب در صفر را حذف می کند یا صفری در صفر اضافه می کند و در ناحیه همگرایی هیچ تغییری بوجود نمی آید. تمرین: رابطه ۶-۱۰۰ را ثابت کنید.

۶-۵-۷) مشتقگیری در حوزه s

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (۱۰۱-۶)$$

نتیجتاً داریم.

$$\frac{dX(s)}{ds} = \int_{-\infty}^{\infty} (-t)x(t) e^{-st} dt \quad (۱۰۲-۶)$$

$$-tx(t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{dX(s)}{ds} \quad ROC = R \quad (۱۰۳-۶)$$

دیده می شود که عملیات مشتق در حوزه فرکانس هیچ گونه تغییری در شکل کلی سیگنال حوزه زمان ایجاد نمی کند. بنابراین شکل کلی ناحیه همگرایی ثابت می ماند. اما از لحاظ نمودار صفر و قطب نیز عملیات مشتق در حوزه لاپلاس هیچ قطبی یا صفری را اضافه نمی کند و فقط مرتبه قطب را افزایش می دهد. بنابراین ناحیه همگرایی ثابت می ماند.

مثال (۶-۱۱): فرض کنید $x(t) = te^{-at}u(t)$. از آنجائیکه

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{s+a} \quad \Re\{s\} > -a \quad (۱۰۴-۶)$$

بنابراین

$$te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+a} \right) = \frac{1}{(s+a)^2} \quad \Re\{s\} > -a \quad (۱۰۵-۶)$$

با تعمیم کاربرد رابطه (۶-۱۰۳) داریم.

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{(s+a)^n} \quad \Re\{s\} > -a \quad (106-6)$$

کاربرد رابطه (۱۰۶-۶) بیشتر زمانی است که بخواهیم تبدیل لاپلاس معکوس را حساب کنیم. تمرین: رابطه (۱۰۶-۶) را ثابت کنید.

۶-۴-۸ انتگرالگیری در حوزه زمان

اگر

$$x(t) \xleftrightarrow{\ell} X(s) \quad ROC = R \quad (107-6)$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{s} X(s) \quad ROC = R \cap \{\Re\{s\} > 0\} \quad \text{حداقل} \quad (108-6)$$

این خاصیت مستقیماً با انتگرالگیری از دو طرف رابطه تبدیل لاپلاس معکوس بدست می‌آید ولی می‌توان آنرا بطریق زیر نیز بدست آورد.

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = u(t) * x(t) \quad (109-6)$$

بنابراین با توجه به خاصیت کانولوشن و چون $\Re\{s\} > 0$ و $\frac{1}{s}$ می‌باشد داریم.

$$u(t) * x(t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{s} X(s) \quad (110-6)$$

و ناحیه همگرایی آن شامل فصل مشترک ناحیه همگرایی $X(s)$ و تبدیل لاپلاس $u(t)$ است.

۶-۴-۹ تئوری مقادیر اولیه و نهایی

در حالت‌های خاصی که $x(t < 0) = 0$ و همچنین حالت‌هایی که در آنها $x(t)$ شامل هیچگونه توابع ضربه و مشتقات آن در صفر نباشد می‌توان بسادگی از تبدیل لاپلاس مقادیر اولیه یا $x(0^+)$ مقدار $x(t)$ هنگامی که t از طرف مقادیر مثبت به سمت صفر میل کند و یا همچنین مقدار $x(t)$ هنگامی که $t \rightarrow \infty$ را بدست آورد. مقادیر اولیه و نهایی از روابط زیر بدست می‌آیند.

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \quad (111-6)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad (112-6)$$

تمرین: فرمول‌های فوق را ثابت کنید.

۶-۴-۱۰ تبدیل لاپلاس سیستم معکوس

اگر

$$h(t) \xleftrightarrow{\ell} H(s) \quad ROC = R_h \quad (113-6)$$

در آنصورت عبارت جبری تبدیل لاپلاس سیستم معکوس $(h_i(t))$ که در رابطه $h(t) * h_i(t) = \delta(t)$ صدق می‌کند از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$h_i(t) \xleftrightarrow{\ell} H_i(s) = \frac{1}{H(s)} \quad (114-6)$$

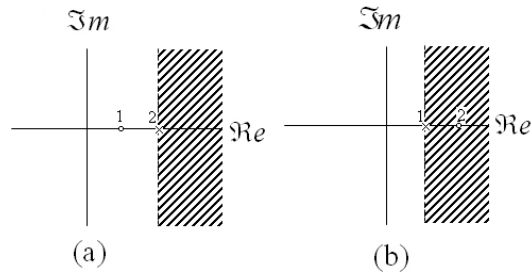
بنابراین صفرهای سیستم اصلی به قطب در سیستم معکوس، و قطب‌های سیستم اصلی به صفر در سیستم معکوس تبدیل می‌شوند. مسئله اصلی ناحیه همگرایی است. می‌توان ثابت کرد که در حالت کلی ناحیه همگرایی سیستم معکوس در این مورد یکتا نیست. آنچه مهم است این است که ناحیه همگرایی سیستم معکوس باید ناحیه مشترکی با ناحیه همگرایی سیستم اصلی داشته باشد، تا امکان ضرب کردن تبدیل لاپلاس سیستم اصلی و سیستم معکوس وجود داشته باشد.

این حقیقت بسیار جالب است چون نتیجه ساده آن این است که تعداد جفت سیگنالهایی که کانولوشن کردن آنها منجر به تابع ضربه می‌شود بیش از واحد می‌تواند باشد.

برای توضیح نحوه پیدا کردن ناحیه همگرایی سیستم معکوس به مثالهای زیر توجه کنید.

(مثال ۶-۱۲): فرض کنید سیستمی با تابع انتقال و ناحیه همگرایی زیر داده شده باشد.

$$H(s) = \frac{s-1}{s-2} = 1 + \frac{1}{s-2}; \quad \text{Re}(s) > 2$$



شکل (۶-۲۰) نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرایی (a) سیستم اصلی (b) سیستم معکوس

پاسخ ضربه این سیستم به صورت زیر بدست می‌آید.

$$h(t) = \delta(t) + e^{2t}u(t)$$

تابع انتقال سیستم معکوس نیز به صورت زیر بدست می‌آید.

$$H_i(s) = \frac{s-2}{s-1} = 1 - \frac{1}{s-1}; \quad \text{Re}(s) > 1$$

که از آن داریم.

$$h_i(t) = \delta(t) - e^t u(t)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} h_i(t) * h(t) &= [\delta(t) - e^t u(t)] * [\delta(t) + e^{2t} u(t)] \\ &= \delta(t) - e^t u(t) + e^{2t} u(t) - e^t u(t) * 2^{2t} u(t) = \delta(t) \end{aligned}$$

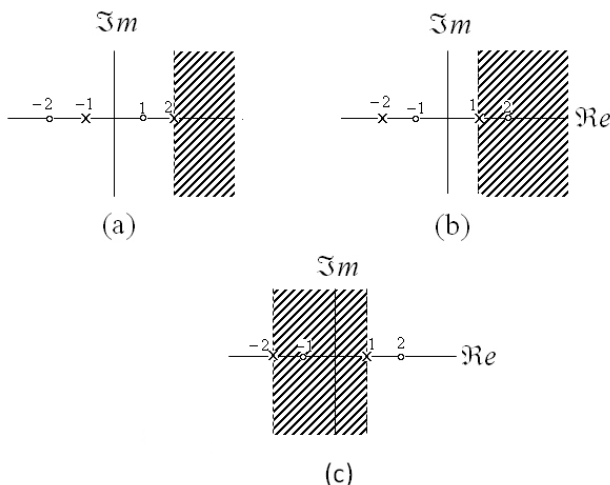
اما اگر ناحیه همگرایی تابع انتقال سیستم معکوس را به صورت $\text{Re}(s) < 1$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت.

$$h_i(t) = \delta(t) + e^t u(-t)$$

در اینصورت حاصل کانولوشن $h_i(t) * h(t)$ وجود نخواهد داشت. چون ناحیه همگرایی مشترک بین $h(t)$ و $h_i(t)$ وجود ندارد.

مثال (۶-۱۳): مطلوبست ضابطه سیستم معکوس مربوط به سیستمی که ضابطه و ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه آن به صورت زیر است.

$$H(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)} = 1 + \frac{\frac{2}{3}}{s+1} + \frac{\frac{4}{3}}{s-2}; \quad \text{Re}(s) > 2$$



شکل (۶-۲۱) نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرایی (a) سیستم اصلی (b) ضابطه اول سیستم معکوس (c) ضابطه دوم سیستم معکوس

ضابطه پاسخ ضربه سیستم به صورت زیر است.

$$h(t) = \delta(t) + \frac{2}{3}e^{-t}u(t) + \frac{4}{3}e^{2t}u(t)$$

ضابطه و دو ناحیه همگرایی ممکن سیستم معکوس به صورت زیر است.

$$H_i(s) = \frac{(s+1)(s-2)}{(s-1)(s+2)} = 1 - \frac{\frac{2}{3}}{s-1} - \frac{\frac{4}{3}}{s+2}; \quad \begin{cases} \text{Re}\{s\} > 1 \\ -2 < \text{Re}\{s\} < 1 \end{cases}$$

با توجه به شکل برای سیستم معکوس دو ناحیه همگرایی ممکن تعریف می شود. این دو ناحیه همگرایی در شکل های (۶-۲۱b, c) رسم شده اند. بنابراین دو رابطه برای سیستم معکوس بدست می آید.

$$h_i(t) = \delta(t) - \frac{2}{3}e^t u(t) - \frac{4}{3}e^{-2t} u(t)$$

$$h_i(t) = \delta(t) + \frac{2}{3}e^t u(-t) - \frac{4}{3}e^{-2t} u(t)$$

ضابطه اول علی و ضابطه دوم پایدار است. اما هر دو معکوس سیستم اصلی هستند و حاصل کانولوشن آنها با سیستم اصلی برابر تابع ضربه است.

$$[\delta(t) - \frac{2}{3}e^t u(t) - \frac{4}{3}e^{-2t} u(t)] * [\delta(t) + \frac{2}{3}e^{-t} u(t) + \frac{4}{3}e^{2t} u(t)] = \delta(t)$$

$$[\delta(t) + \frac{2}{3}e^t u(-t) - \frac{4}{3}e^{-2t} u(t)] * [\delta(t) + \frac{2}{3}e^{-t} u(t) + \frac{4}{3}e^{2t} u(t)] = \delta(t)$$

۵-۶ بررسی خواص سیستم‌های خطی مشخص شده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

همانطور که قبلاً دیدیم از تبدیل فوریه برای تجزیه و تحلیل سیستم‌های خطی، که با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت توصیف می‌شوند، استفاده کردیم و اکنون به روشی مشابه می‌خواهیم از تبدیل لاپلاس استفاده کنیم. به عنوان مثال فرض کنید که رابطه ورودی-خروجی یک سیستم با معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت زیر مشخص می‌شود.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t) \quad (۱۱۵-۶)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف داریم.

$$sY(s) + 3Y(s) = X(s) \quad (۱۱۶-۶)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{1}{s+3} \quad (۱۱۷-۶)$$

به $H(s)$ تابع تبدیل سیستم می‌گویند که تبدیل معکوس آن همان پاسخ ضربه سیستم خواهد بود. بدین ترتیب عبارت جبری $H(s)$ پیدا شد ولی باید ROC نیز تعیین شود. در حقیقت معادله دیفرانسیل به تنهایی بیانگر یک سیستم LTI نخواهد بود و در حالت کلی برای یک معادله دیفرانسیل، بسته به اینکه بدانیم سیستم علی است یا غیرعلی، می‌توان چند ناحیه همگرایی یا بطور معادل چند پاسخ ضربه تعیین کرد. اما اگر بدانیم سیستم علی است می‌توان ناحیه همگرایی‌اش را در سمت راست آخرین قطب (یا بزرگترین قطب) بگونه‌ای که شامل هیچ قطبی نشود رسم کرد. در این مثال ناحیه همگرایی در سمت راست قطب $s = -3$ فرض می‌شود.

اما اگر سیستم فوق غیر علی بود ناحیه همگرایی در سمت چپ $s = -3$ قرار می‌گرفت. در حالت اول پاسخ ضربه (علی) بصورت زیر خواهد بود.

$$h(t) = e^{-3t} u(t) \quad (۱۱۸-۶)$$

و در حالت دوم پاسخ ضربه (غیرعلی) برابر است با

$$h(t) = -e^{-3t} u(-t) \quad (۱۱۹-۶)$$

در حالت کلی برای یک معادله دیفرانسیل بصورت زیر

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (۱۲۰-۶)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین معادله فوق داریم.

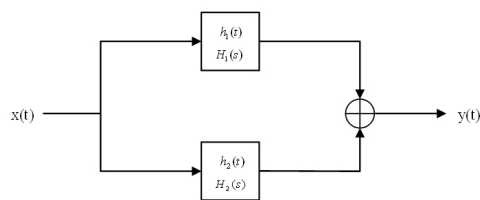
$$\left(\sum_{k=0}^N a_k s^k\right)Y(s) = \left(\sum_{k=0}^M b_k s^k\right)X(s) \quad (۱۲۱-۶)$$

بنابراین

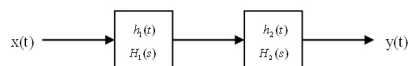
$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \quad (۱۲۲-۶)$$

۶-۶ اتصال سیستم‌ها

با کمک تبدیل لاپلاس می‌توان تابع تبدیل ترکیبات مختلف سیستم‌ها را تعیین کرد. چند ترکیب ساده به عنوان مثال در زیر ارائه شده‌اند.



(a)



(b)

شکل (۶-۲۲): (a) اتصال موازی دو سیستم LTI (b) اتصال سری دو سیستم LTI

برای شکل (۶-۲۲-a) داریم.

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) \quad (۱۲۳-۶)$$

بنابراین رابطه تبدیل لاپلاس کلی سیستم بصورت زیر خواهد بود.

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) \quad (۱۲۴-۶)$$

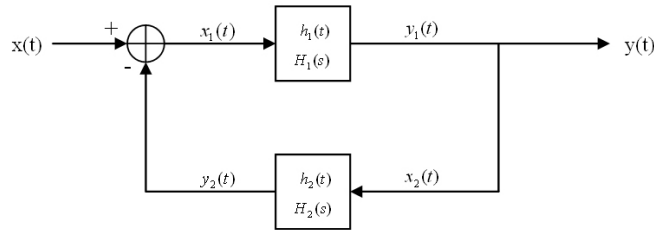
و برای شکل (۶-۲۲-b) داریم.

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) \quad (۱۲۵-۶)$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \quad (۱۲۶-۶)$$

تمرین: تابع تبدیل ترکیب سیستم‌هایی به صورت شکل (۶-۲۳) را تعیین کنید. این نحو اتصال سیستم‌ها به اتصال پس‌خور^۱ معروف است.

^۱ Feedback



شکل (۶-۲۳): اتصال فیدبک دو سیستم LTI

تمرین: ثابت کنید شرط کافی برای پایداری یک سیستم آن است که ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه آن شامل محور $j\omega$ باشد.

۶-۷ تبدیل لاپلاس یکطرفه

در قسمت‌های قبلی این فصل به تفصیل در مورد تبدیل لاپلاس دو طرفه صحبت کردیم. اما در این قسمت راجع به نوع دیگر تبدیل لاپلاس که در تحلیل سیستم‌های علی با شرایط اولیه (سیستم هائی که در حالت استراحت اولیه نیستند) کاربرد دارد صحبت خواهیم کرد. تبدیل لاپلاس یکطرفه $\mathcal{X}(s)$ سیگنال $x(t)$ چنین تعریف می‌شود.

$$\mathcal{X}(s) \triangleq \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (۶-۱۲۷)$$

با این تعریف اگر دو سیگنال بازاء $t < 0$ متفاوت و بازاء $t > 0$ یکسان باشند، تبدیل لاپلاس یکطرفه یکسانی خواهند داشت ولی تبدیل لاپلاس دو طرفه‌شان یکسان نیست. بنابراین تبدیل لاپلاس یکطرفه را می‌توان همان تبدیل لاپلاس دو طرفه برای سیگنال‌هایی تصور کرد که بازاء $t < 0$ و $t = 0^-$ مساوی صفر هستند. بنابراین ناحیه همگرایی معادله (۶-۱۲۷) در سمت راست بزرگترین قطب از لحاظ مقدار حقیقی قرار دارد. در نتیجه نیازی به ذکر ناحیه همگرایی نیست.

مثال (۶-۱۴): سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t) \quad (۶-۱۲۸)$$

هر دو تبدیل لاپلاس یکطرفه و دو طرفه در این مورد یکی می‌شوند و داریم.

$$\mathcal{X}(s) = X(s) = \frac{1}{(s+a)^n} \quad \Re\{s\} > -a \quad (۶-۱۲۹)$$

مثال (۶-۱۴): اکنون فرض کنید.

$$x(t) = e^{-a(t-t_0)} u(t-t_0) \quad (۶-۱۳۰)$$

تبدیل لاپلاس دو طرفه برای این مثال را قبلاً از خاصیت انتقال زمانی بدست آوردیم.

$$X(s) = \frac{e^{-st_0}}{s+a} \quad \Re\{s\} > -a \quad (۶-۱۳۱)$$

حالا تبدیل لاپلاس یکطرفه بدست می‌آوریم.

$$\chi(s) = \int_{0^+}^{+\infty} e^{-a(t-t_0)} u(t-t_0) e^{-st} dt \quad (۱۳۲-۶)$$

$$\chi(s) = \begin{cases} \int_{0^+}^{+\infty} e^{at_0} e^{-t(s+a)} dt & ; t_0 \leq 0 \\ \int_{t_0}^{+\infty} e^{at_0} e^{-t(s+a)} dt & ; t_0 > 0 \end{cases} \quad (۱۳۳-۶)$$

بنابراین

$$\chi(s) = \begin{cases} e^{at_0} \frac{1}{s+a} & ; t_0 \leq 0 \\ e^{st_0} \frac{1}{s+a} & ; t_0 > 0 \end{cases} \quad \Re\{s\} > -a \quad (۱۳۴-۶)$$

در این مثال دیده می شود که تبدیل لاپلاس دو طرفه و یک طرفه برای حالت $t_0 > 0$ برابرند. اما اگر $t_0 \leq 0$ دو پاسخ مختلف برای تبدیل لاپلاس یکطرفه و دو طرفه بدست می آید.

با استناد به مطالبی که تاکنون گفته شد، پی می بریم که تبدیل لاپلاس یکطرفه $\chi(s)$ در واقع تبدیل لاپلاس دو طرفه مربوط به سیگنال $x(t)u(t)$ است، نه سیگنال $x(t)$. بسیاری از خواص تبدیل یکطرفه و دوطرفه یکسان هستند و در حقیقت دو قضیه مقدار اولیه و مقدار نهایی بیشتر مربوط به تبدیل لاپلاس یکطرفه هستند. چون برای صادق بودن آن دو قضیه گفتیم که لازم است $x(t)$ برای $t < 0$ مساوی صفر باشد و هیچگونه تابع ضربه یا مشتقاتش را در صفر نداشته باشد. یکی از مهمترین تفاوت های خواص تبدیل لاپلاس یکطرفه و دوطرفه در خاصیت مشتق گیری است. فرض کنید $x(t)$ دارای تبدیل لاپلاس یکطرفه $\chi(s)$ است بنابراین با انتگرالگیری جزء به جزء از $\frac{dx(t)}{dt}$ داریم.

$$\int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = x(t)e^{-st} \Big|_{0^+}^{\infty} + s \int_{0^+}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (۱۳۵-۶)$$

بنابراین

$$\frac{d x(t)}{dt} \xrightarrow{\varphi} s\chi(s) - x(0^+)$$

بطور مشابه داریم.

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \xrightarrow{\varphi} s^2 \chi(s) - sx(0^+) - x'(0^+) \quad (۱۳۶-۶)$$

که $x'(0^+)$ مشتق در $t = 0^+$ است.

یکی از کاربردهای اساسی تبدیل لاپلاس یکطرفه در حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت با شرایط اولیه غیر صفر (غیر استراحت اولیه) می باشد. به عنوان مثال سیستم علی که بوسیله معادله زیر مشخص می شود را در نظر بگیرید.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - 6y(t) = x(t) \quad (۱۳۷-۶)$$

با شرایط اولیه

$$y(0^+) = 1 \quad \text{و} \quad \frac{dy(0^+)}{dt} = -2$$

اگر ورودی این سیستم $x(t) = u(t)$ باشد، با گرفتن تبدیل لاپلاس یکطرفه از دو طرف معادله (۶-۱۳۷) داریم.

$$s^2 Y(s) - s + 2 + sY(s) - 1 - 6Y(s) = \frac{1}{s} \quad (۶-۱۳۸)$$

$$Y(s) = \frac{1 + s^2 - s}{s(s+3)(s-2)} \quad (۶-۱۳۹)$$

که در آن $Y(s)$ تبدیل لاپلاس یکطرفه $y(t)$ است. با بسط رابطه (۶-۱۳۹) داریم.

$$Y(s) = \frac{-1}{s} + \frac{13}{s+3} + \frac{3}{s-2} \quad (۶-۱۴۰)$$

که نتیجتاً داریم.

$$y(t) = \left[-\frac{1}{6} + \frac{13}{15} e^{-3t} + \frac{3}{10} e^{2t} \right] u(t) \quad (۶-۱۴۱)$$

مثال (۶-۱۵): ثابت کنید اگر تابع انتقال سیستمی دارای قطب‌های بیشتری نسبت به صفرها باشد و علاوه بر آن سیستم علی باشد پاسخ پله در $t = 0$ پیوسته است.
حل: کافی است نشان دهیم پاسخ پله در $t = 0^+$ برابر صفر است. فرض کنید تابع انتقال سیستم به صورت زیر باشد.

$$H(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} \quad n > m \quad (۶-۱۴۲)$$

پاسخ ورودی پله چنین است.

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{(s+z_1)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)\dots(s+p_n)} \quad (۶-۱۴۳)$$

بدلیل علیت سیستم می‌توان از تئوری مقدار اولیه استفاده کرد. از تئوری مقدار اولیه داریم.

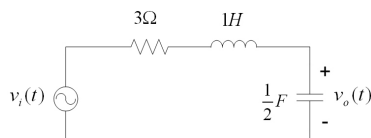
$$\lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = y(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(s+z_1)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)\dots(s+p_n)} \quad (۶-۱۴۴)$$

چون درجه مخرج از صورت بزرگتر است حد بسمت صفر میل می‌کند، پس

$$y(0^+) = 0$$

تمرین: در مدار شکل (۶-۲۴) $v_o(t)$ را به کمک تبدیل لاپلاس یکطرفه بدست آورید.

$$v_o(0^+) = 1 \quad \text{و} \quad \left. \frac{dv_o(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = 2$$



شکل (۶-۲۴): یک مدار RLC خطی

مثالهای حل شده

مثال (۶-۱۶): تبدیل لاپلاس، ناحیه همگرایی و نمودار صفر و قطب هر یک از توابع زیر را بیابید.

الف) $x(t) = \delta(t - t_0)$

ب) $x(t) = u(-t)$

حل: الف)

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st_0} \delta(t - t_0) dt$$

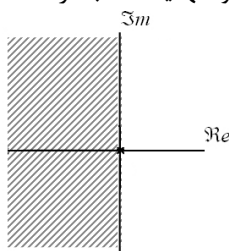
بنابراین

$$X(s) = e^{-st_0}$$

این تبدیل هیچ صفر و یا قطب محدودی ندارد ولی می‌توان گفت که به ازاء $t_0 > 0$ ، $-\infty$ قطب و $+\infty$ صفر این تبدیل بحساب می‌آیند و به ازاء $t_0 < 0$ ، $-\infty$ صفر و $+\infty$ قطب این تبدیل می‌باشند. پس ناحیه همگرایی تمام صفحه s خواهد شد.

ب) $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} u(-t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-st} dt = -\frac{1}{s} \quad \Re[s] < 0$

فقط به ازاء $\Re[s] < 0$ انتگرال فوق همگرا و مساوی $-\frac{1}{s}$ خواهد بود بنابراین ناحیه همگرایی سمت چپ محور $j\omega$ را در بر خواهد گرفت و تنها یک قطب در $s = 0$ وجود دارد.



شکل (۶-۲۵) ناحیه همگرایی مربوط به قسمت ب مثال ۶-۱۶

مثال (۶-۱۷): تبدیل لاپلاس و ناحیه همگرایی سیگنال زیر را بیابید.

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta(t - kT)$$

حل:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta(t - kT) \right] e^{-st} dt$$

با تغییر ترتیب انتگرال و مجموع داریم.

$$X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) e^{-st} dt$$

با توجه به حل مثال (۶-۱۶) قسمت الف داریم.

$$X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-skT}$$

اما رابطه فوق مبین یک تصاعد هندسی با قدر نسبت ae^{-sT} می‌باشد و تنها بشرطی این مجموعه همگرا می‌گردد که

$$|ae^{-sT}| < 1$$

با نوشتن s بصورت $\sigma + j\omega$ ، چون $e^{-\sigma T}$ همواره نامنفی است می‌توان آن را از زیر علامت قدر مطلق بیرون کشید در این صورت داریم.

$$e^{-\sigma T} < \frac{1}{|a|} \Rightarrow -\sigma T < \ln \frac{1}{|a|}$$

در نهایت ناحیه همگرایی بصورت زیر حاصل می‌شود.

$$\Re[s] > \frac{-1}{T} \ln\left(\frac{1}{|a|}\right)$$

در این صورت داریم.

$$X(s) = \frac{1}{1 - ae^{-sT}}$$

واضح است که این تبدیل صفر (محدود) ندارد ولی قطب‌های آن ریشه‌های مخرج هستند.

$$1 - ae^{-sT} = 0 \Rightarrow ae^{-sT} = 1$$

از این رابطه می‌توان نتیجه گرفت.

$$e^{-sT} = \frac{1}{a}$$

ابتدا فرض می‌کنیم $a > 0$ باشد در این صورت حل معادله فوق بصورت زیر است.

$$e^{-(\sigma + j\omega)T} = \frac{1}{a} \Rightarrow e^{-\sigma T} = \frac{1}{a}; e^{-j\omega T} = e^{-j2k\pi}$$

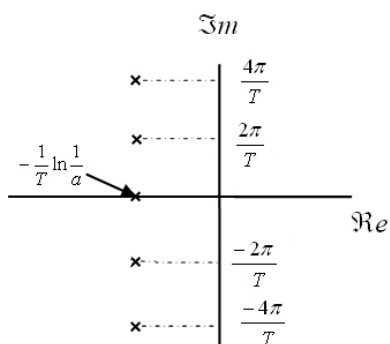
بنابراین

$$\sigma = \frac{-1}{T} \ln\left(\frac{1}{a}\right)$$

و

$$\omega = \frac{2k\pi}{T}$$

نمودار صفر و قطب در شکل ۶-۲۶ رسم شده است.

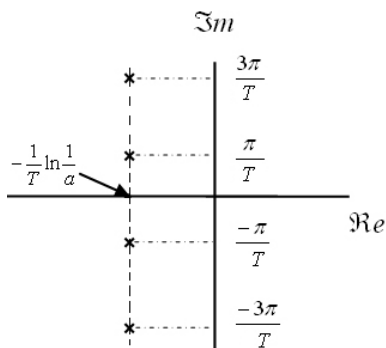


شکل (۲۶-۶) نمودار صفر و قطب برای حالت $a > 0$ در مثال ۱۷-۶

بطریقه مشابه اگر $a < 0$ باشد محل قطب‌ها از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\sigma = \frac{-1}{T} \operatorname{Ln}\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$\omega = (2k+1) \frac{\pi}{T}$$



شکل (۲۷-۶) نمودار صفر و قطب برای حالت $a < 0$ در مثال ۱۷-۶

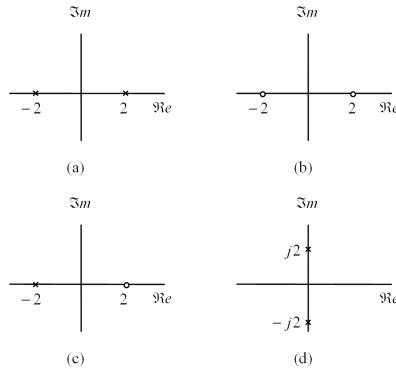
مثال (۱۸-۶): برای هر یک از عبارتهای زیر در مورد یک سیگنال مفروض $x(t)$ و برای هر یک از

چهار نمودار صفر و قطب رسم شده در شکل ۲۸-۶ تعیین کنید که ناحیه همگرایی چگونه خواهد بود.

الف) تبدیل فوریه $x(t)e^{-t}$ وجود دارد.

ب) $t > 10, x(t) = 0$

ج) $t < 0, x(t) = 0$



شکل (۶-۲۸) مربوط به مثال ۶-۱۸

حل: توجه شود که شکل (b) حتماً مربوط به یک سیگنال دوره محدود است چون تنها سیگنالهای دوره محدود هستند که دارای هیچ قطبی نیستند. بنابراین ناحیه همگرایی چنین سیگنالی تمام صفحه s است.

الف) چون تبدیل فوریه $x(t)e^{-t}$ وجود دارد پس انتگرال زیر همگرا است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(1+j\omega)t} dt$$

بنابراین $\sigma = 1$ جزو ناحیه همگرایی است و چون ناحیه همگرایی نمی‌تواند شامل قطب شود و از طرفی توسط قطبها محدود می‌شود می‌توان نواحی همگرایی را برای هر یک از چهار نمودار صفر و قطب بصورت شکل (۶-۲۹) رسم کرد.

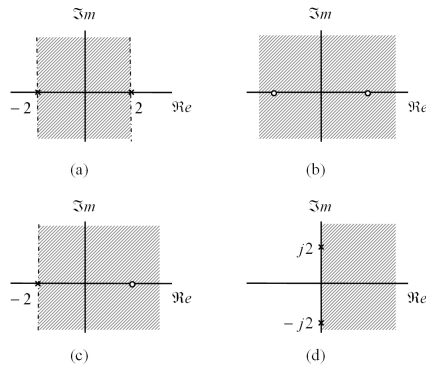
پس نواحی همگرایی بصورت زیر خواهد بود.

برای شکل (a) $-2 < \Re[s] < 2$

برای شکل (b) $-\infty < \Re[s] < \infty$

برای شکل (c) $\Re[s] > -2$

برای شکل (d) $\Re[s] > 0$



شکل (۶-۲۹) نواحی همگرایی را برای هر یک از چهار نمودار صفر و قطب برای حالت الف

ب) چون سیگنال چپرو است پس نواحی همگرایی بصورت زیر خواهند بود (جهت اختصار از رسم شکل صرفنظر می‌شود).

$$\Re[s] < -2 \quad \text{برای شکل (a)}$$

$$\Re[s] < -2 \quad \text{برای شکل (c)}$$

$$\Re[s] < 0 \quad \text{برای شکل (d)}$$

ج) چون سیگنال راسترو است پس نواحی همگرایی توسط روابط زیر داده می‌شوند

$$\Re[s] > 2 \quad \text{برای شکل (a)}$$

$$\Re[s] > -2 \quad \text{برای شکل (c)}$$

$$\Re[s] > 0 \quad \text{برای شکل (d)}$$

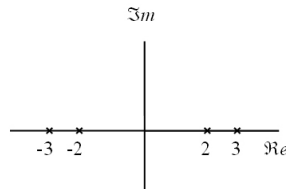
مثال (۶-۱۹): تمام روابط زمانی ممکنه $x(t)$ که دارای عبارت جبری تبدیل لاپلاس بصورت زیر هستند را بیابید.

$$X(s) = \frac{4s^3 - 26s}{(s^2 - 9)(s^2 - 4)}$$

حل: از بسط $X(s)$ به کسور جزیی داریم.

$$X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s-3}$$

می‌بینیم $X(s)$ مجموع چهار کسر جزیی است و نمودار صفر و قطب آن بصورت شکل (۶-۳۰) است.



شکل (۶-۳۰) نمودار صفر و قطب مربوط به مثال ۶-۱۹

پنج حالت مختلف برای ناحیه همگرایی وجود دارد، پس پنج رابطه زمانی مختلف برای $x(t)$ امکان دارد.

الف: اگر ناحیه همگرایی بصورت $\Re[s] < -3$ باشد رابطه زمانی $x(t)$ باید از مجموع چهار سیگنال چپرو بدست آید، پس

$$x(t) = -(e^{-2t} + e^{-3t} + e^{2t} + e^{3t})u(-t)$$

ب: اگر ناحیه همگرایی بصورت $-3 < \Re[s] < -2$ باشد رابطه زمانی $x(t)$ باید از مجموع سه سیگنال چپرو (مربوط به قطبهای ۲ و ۳ و -۲) و یک سیگنال راسترو (مربوط به قطب -۳) بدست آید. پس

$$x(t) = e^{-3t}u(t) - (e^{-2t} + e^{2t} + e^{3t})u(-t)$$

ج: اگر ناحیه همگرایی بصورت $-2 < \Re[s] < 2$ باشد رابطه زمانی $x(t)$ باید از مجموع دو سیگنال چپرو (مربوط به قطبهای ۲ و ۳) و دو سیگنال راسترو (مربوط به قطبهای -۲ و -۳) بدست آید، پس

$$x(t) = (e^{-3t} + e^{-2t})u(t) - (e^{3t} + e^{2t})u(-t)$$

د: اگر ناحیه همگرایی بصورت $2 < \Re[s] < 3$ باشد رابطه زمانی $x(t)$ باید از مجموع یک سیگنال چپرو (مربوط به قطب ۳) و سه سیگنال راسترو (مربوط به قطبهای ۲ و ۳ و -۲) بدست آید، پس

$$x(t) = (e^{-3t} + e^{-2t} + e^{2t})u(t) - e^{3t}u(t)$$

ه: اگر ناحیه همگرایی بصورت $\Re[s] > 3$ باشد در آنصورت رابطه زمانی $x(t)$ از مجموع چهار سیگنال راسترو بدست می آید، پس

$$x(t) = (e^{-3t} + e^{-2t} + e^{2t} + e^{3t})u(t)$$

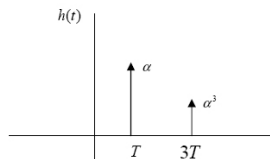
مثال (۶-۲۰): تبدیل لاپلاس $X(s)$ یک سیگنال $x(t)$ دارای چهار قطب و تعداد نامعلومی صفر می باشد. اگر فقط بدانیم $x(t)$ دارای یک ضربه در $t=0$ است تعیین کنید چه اطلاعاتی در مورد تعداد صفرها و محل آنها می توانیم داشته باشیم.

حل: چون $x(t)$ دارای ضربه در $t=0$ است پس باید $X(s)$ بصورت زیر باشد.

$$X(s) = 1 + \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{D(s) + N(s)}{D(s)}$$

که در آن $N(s)$ و $D(s)$ یک چند جمله ای برحسب s هستند. چون چهار قطب برای $X(s)$ وجود دارد می توان گفت که درجه صورت نیز حداقل چهار است، پس حداقل چهار صفر نیز برای تبدیل لاپلاس $X(s)$ وجود خواهد داشت. در مورد محل صفرها با اطلاعات داده شده در صورت مسئله فعلا نمی توان قضاوتی داشت.

مثال (۶-۲۱): یک سیستم با پاسخ ضربه به صورت زیر مفروض است.



شکل (۶-۳۱) پاسخ ضربه سیستم مربوط به مثال ۶-۲۱

مطلوب است $H(s)$ و تعیین صفرها، قطبها و ناحیه همگرایی آن.
حل: داریم.

$$h(t) = \alpha\delta(t-T) + \alpha^3\delta(t-3T)$$

بنابراین بسادگی می توان تبدیل لاپلاس را بدست آورد.

$$H(s) = \alpha e^{-sT} + \alpha^3 e^{-3sT}$$

این تبدیل قطب ندارد. بنابراین ناحیه همگرایی آن تمام صفحه s خواهد بود. اما دارای صفر است که محل صفرها از مساوی صفر قرار دادن $H(s)$ بدست می آید.

$$\alpha e^{-sT} = -\alpha^3 e^{-3sT}$$

چون $s = \sigma + j\omega$ بنابراین خواهیم داشت.

$$\alpha e^{-\sigma T} e^{-j\omega T} = \alpha^3 e^{-3\sigma T} e^{-j(3\omega T + (2k+1)\pi)}$$

که در آن k عدد صحیح است. پس محل صفرها از حل دو معادله زیر برای σ و ω بدست می‌آید

$$\alpha^2 e^{-2\sigma T} = 1$$

$$2\omega T = (2k+1)\pi$$

بنابراین

$$s = \frac{-1}{2T} \ln\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) + j \frac{(2k+1)\pi}{2T}$$

به ازاء هر k که عدد صحیح باشد یک صفر را مشخص می‌نماید.

مثال (۶-۲۲): نشان دهید که اگر $x(t)$ یک تابع زوج باشد بگونه‌ای که $x(t) = x(-t)$ ، در آن صورت

$$X(s) = X(-s)$$

حل: چون تابع زوج است داریم

$$x(t) = x(-t)$$

و با تبدیل لاپلاس گرفتن از دو طرف رابطه فوق رابطه زیر را خواهیم داشت

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t) e^{-st} dt$$

و یا

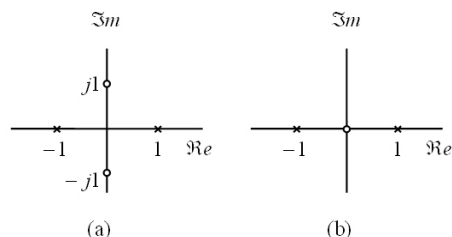
$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t) e^{-st} dt$$

و با تغییر متغیر $-t = u$ به رابطه زیر می‌رسیم

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{su} du = X(-s)$$

مثال (۶-۲۳): دو نمودار صفر و قطب در شکل زیر رسم شده‌اند. تعیین کنید کدامیک از آنها احتمالاً

مربوط به تابع زوج و کدامیک مربوط به تابع فرد (در حوزه زمان) است.



شکل (۶-۳۲) نمودارهای صفر و قطب مربوط به مثال ۶-۲۳

حل: در مورد تابع زوج چون $X(s) = X(-s)$ است و چون در مورد شکل (a)، $X(s) = X(-s)$ است

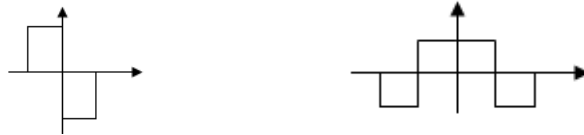
بنابراین شکل (a) می‌تواند بیانگر یک تابع زوج باشد. لازم به ذکر است که در مورد سیگنال فرد داریم.

$$x(t) = -x(-t) \Rightarrow X(s) = -X(-s)$$

بنابراین در مورد سیگنال فرد نیز تقارن نسبت به هر دو محور حقیقی و موهومی در مورد محل صفرها و قطب‌ها نیز وجود دارد. پس با مشاهده تقارن نسبت به هر دو محور فقط می‌توان در مورد احتمال زوج یا فرد بودن قضاوت نمود و به تنهایی و با قطعیت نمی‌توان در مورد یکی از آنها قضاوت کرد. در مورد شکل (b) همان قضاوت قبلی را داریم. اما یک نتیجه دیگر در این مورد نیز می‌توان گرفت. چون یک صفر در $s = 0$ داریم معنایش این است که سطح زیر منحنی سیگنال در حوزه زمان صفر است. چون

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 0$$

اما این نتیجه نیز به تنهایی نمی‌تواند برای قضاوت در مورد زوج یا فرد بودن کافی باشد. چون سطح زیر منحنی هر دو نوع سیگنال می‌تواند صفر شود. به عنوان مثال دو سیگنال نشان داده شده در شکل (۳۳-۶) هر دو دارای یک صفر در مبدا هستند در حالی که یکی زوج و دیگری فرد است.



شکل ۳۳-۶ دو سیگنال زوج و فرد که هر دو دارای یک صفر در مبدا (صفحه ۵) هستند.

مثال (۲۴-۶): ثابت کنید.

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

حل: اگر فرض کنیم $x(t) = 0$ برای $t < 0$ یا $x(t) = x(t)u(t)$ باشد. با بسط $x(t)$ به سری تیلور در حول $t = 0^+$ داریم.

$$x(t) = [x(0^+) + x'(0^+)t + x''(0^+)\frac{t^2}{2} + \dots + x^{(n)}(0^+)\frac{t^n}{n!} + \dots]u(t)$$

که تبدیل آن بصورت زیر است.

$$X(s) = \left[\frac{x(0^+)}{s} + \frac{x'(0^+)}{s^2} + \frac{x''(0^+)}{s^3} + \dots + \frac{x^{(n)}(0^+)}{s^n} + \dots \right]$$

بنابراین

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = x(0^+)$$

مثال (۲۵-۶): با توجه به مثال (۲۴-۶) مقدار $x(0^+)$ را برای تبدیل‌های زیر بیابید.

$$X(s) = \frac{1}{s+2} \quad \text{الف)}$$

$$X(s) = \frac{2s+1}{(s+2)(s+3)} \quad \text{ب)}$$

حل: الف) با توجه به قضیه مقدار اولیه داریم.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{s+2} = 1$$

(ب)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(2s+1)}{(s+2)(s+3)} = 2$$

مثال (۶-۲۶): یک سیگنال حقیقی مفروض مانند $x(t)$ را در نظر گرفته و ثابت کنید که رابطه زیر در مورد تبدیل لاپلاس آن صادق است.

$$X(s) = X^*(s^*)$$

حل: با توجه به تعریف تبدیل لاپلاس داریم.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

بنابراین

$$X^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-s^*t} dt$$

و چون $x(t) = x^*(t)$

$$X^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-s^*t} dt$$

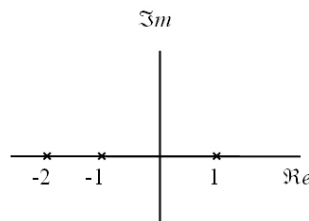
و نهایتاً

$$X^*(s^*) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(s^*)^*t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = X(s)$$

مثال (۶-۲۷): با توجه به مثال (۶-۲۹) ثابت کنید که صفرها و قطب‌های تبدیل یک سیگنال حقیقی باید نسبت به محور σ قرینه باشند.

حل: چون $X(s) = X^*(s^*)$ بنابراین اگر (s_z, s_p) یک قطب (صفر) تبدیل باشد، لازم است حتماً (s_z^*, s_p^*) نیز یک قطب (صفر) تبدیل باشد، بنابراین قطب‌ها (صفرها) همواره بصورت زوج مختلط (s_z, s_z^*) و (s_p, s_p^*) وجود دارند.

مثال (۶-۲۸): نمودار صفر و قطب زیر را در نظر بگیرید و تمام نواحی همگرایی ممکنه را برای آن رسم کنید و تعیین کنید کدامیک از این نواحی می‌توانند مبین یک سیستم پایدار، سیستم علی و یا سیستم پایدار علی باشند.



شکل (۶-۳۴) نمودار صفر و قطب مربوط به مثال ۶-۲۸

حل: نواحی همگرایی ممکنه بصورت زیر هستند.

(الف)

$$\Re[s] < -2$$

این ناحیه همگرایی مربوط به یک سیستم غیر علی و ناپایدار می باشد. غیر علی بخاطر چپ‌رو بودن سیگنال، و ناپایدار بخاطر عدم وجود محور $j\omega$ در ناحیه همگرایی.

(ب)

$$-2 < \Re[s] < -1$$

این ناحیه همگرایی مربوط به یک سیستم غیر علی و ناپایدار است. دلیل غیر علی بودن بخاطر دو طرفه بودن سیگنال است و دلیل ناپایداری مانند حالت (الف) است.

(ج)

$$-1 < \Re[s] < 1$$

این ناحیه همگرایی مربوط به یک سیستم غیر علی ولی پایدار است. دلیل غیر علی بودن مانند حالت (الف) است و دلیل پایداری وجود محور $j\omega$ در ناحیه همگرایی می باشد.

(د)

$$\Re[s] > 1$$

این ناحیه همگرایی مبین یک سیستم ناپایدار است چون شامل محور $j\omega$ نیست و می تواند مربوط به یک سیستم علی باشد (البته نه لزوما) چون مبین یک سیگنال راست‌رو می باشد. لازم به ذکر است که تمام سیستم‌های علی دارای پاسخ ضربه راست‌رو و محدود به ناحیه $t > 0$ هستند. در حالیکه لزوما همه سیگنال‌های راست‌رو نمی توانند مبین پاسخ ضربه سیستم‌های علی باشند.

مثال (۶-۲۹): سیستمی با پاسخ ضربه زیر مفروض است.

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

پاسخ این سیستم به ورودی $x(t) = e^{2t}$ را بیابید.

حل: ابتدا تبدیل لاپلاس $h(t)$ را می یابیم.

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

در اینجا لازم به ذکر است که تبدیل لاپلاس $x(t)$ وجود ندارد. بنابراین نمی توان پاسخ را از حاصلضرب تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه و ورودی بدست آورد. اما با توجه به تعریف کانولوشن در متن درس ثابت شد که پاسخ سیستم LTI به ورودی به صورت $e^{s_0 t}$ برابر است با

$$y(t) = H(s_0)e^{s_0 t}$$

بنابراین در اینجا بسادگی می توان پاسخ را بدست آورد.

$$y(t) = H(2)e^{2t} = \frac{1}{1+2}e^{2t} = \frac{1}{3}e^{2t}$$

مثال (۶-۳۰): یک سیستم LTI علی با پاسخ ضربه زیر مفروض است.

$$h(t) = e^{-t}u(t) + \delta(t)$$

مطلوبست معکوس سیستم فوق اگر فرض کنیم معکوس آن علی باشد.

حل: طبق تعریف سیستم معکوس داریم.

$$h(t) * h_i(t) = \delta(t)$$

بنابراین با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین داریم.

$$H(s)H_i(s) = 1$$

و یا

$$H_i(s) = \frac{1}{H(s)}$$

بنابراین چون

$$H(s) = \frac{1}{s+1} + 1 = \frac{s+2}{s+1}$$

برای سیستم معکوس داریم.

$$H_i(s) = \frac{s+1}{s+2}$$

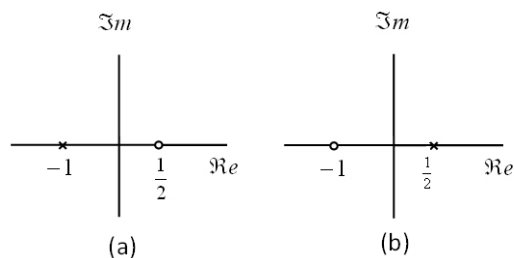
و یا

$$H_i(s) = \frac{s+2}{s+2} - \frac{1}{s+2} = 1 - \frac{1}{s+2}$$

و در حوزه زمان

$$h_i(t) = \delta(t) - e^{-2t}u(t)$$

مثال (۳۱-۶): نمودار صفر و قطب یک سیستم LTI علی و پایدار در زیر رسم شده است.



شکل (۳۵-۶) نمودار صفر و قطب (a) یک سیستم LTI علی و پایدار (b) معکوس سیستم

مطلوبست رسم نمودار صفر و قطب برای سیستم معکوس و تعیین ناحیه همگرایی اگر فرض کنیم

سیستم معکوس پایدار باشد.

حل: چون ارتباط تبدیل لاپلاس سیستم و معکوس آن به صورت زیر است.

$$H(s) = \frac{1}{H_i(s)}$$

بنابراین صفرهای سیستم اصلی منطبق بر قطب سیستم معکوس و قطب‌های سیستم اصلی منطبق بر صفر سیستم معکوس خواهند بود؛ بنابراین نمودار صفر و قطب سیستم معکوس بصورت شکل (۶-۳۵b) است.

و ناحیه همگرایی سیستم معکوس بدلیل پایداری باید شامل محور $j\omega$ شود.

$$\Re[s] < \frac{1}{2}$$

مثال (۶-۳۲): طبق تعریف سیستمی کمینه فاز^۱ است که خود و معکوس آن علی و پایدار باشند. ثابت کنید که تمام قطب‌ها و صفرهای سیستم کمینه فاز باید در سمت چپ محور $j\omega$ قرار گرفته باشند. حل: اولاً جهت اینکه سیستم اصلی علی و پایدار باشد لازم است تمام قطب‌های آن در سمت چپ محور $j\omega$ قرار داشته باشند. اما با توجه به آنچه در مثال قبلی توضیح داده شد محل صفرها و قطب‌های سیستم اصلی در سیستم معکوس جابجا می‌شوند. بنابراین جهت اطمینان از علی و پایدار بودن سیستم معکوس لازم است محل صفرهای سیستم اصلی نیز در سمت چپ محور $j\omega$ قرار داشته باشند.

مثال (۶-۳۳): تعیین کنید کدامیک از عبارات زیر صحیح و کدامیک غلط هستند.

الف) تمام قطب‌های یک سیستم پایدار در سمت چپ محور $j\omega$ قرار دارند.

ب) اگر تعداد قطب‌های تابع تبدیل بیش از صفرهای آن باشند و همچنین اگر سیستم علی باشد در آن صورت پاسخ پله در $t = 0$ پیوسته است.

حل: الف) غلط است چون شرط پایداری وجود محور $j\omega$ در ناحیه همگرایی می‌باشد. بنابراین یک سیستم پایدار می‌تواند قطب‌هایی در سمت راست محور $j\omega$ داشته باشد ولی هنوز هم ناحیه همگرایی شامل محور $j\omega$ باشد (پاسخ ضربه سیستم چپ‌رو باشد). در حقیقت برای سیستم پایدار و علی لازم است که تمام قطب‌ها در سمت چپ محور $j\omega$ قرار گیرند.

ب) صحیح است. چون با توجه به اینکه تعداد قطب‌ها بیش از تعداد صفرها است، پس در $H(s)$ درجه مخرج از درجه صورت بزرگتر است.

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

بنابراین مطمئن هستیم که نمی‌توان $H(s)$ را بصورت مجموع یک عدد ثابت و یک کسر که درجه صورت از درجه مخرج کوچکتر است نوشت و به همین دلیل پاسخ ضربه نمی‌تواند شامل ضربه باشد و چون سیستم علی است پس

$$h(t) = 0 \quad \text{بازا} \quad t < 0$$

اما پاسخ پله برابر است با انتگرال پاسخ ضربه از $-\infty$ تا لحظه t ، بنابراین در حوزه لاپلاس می‌توان تبدیل پاسخ پله را برحسب تبدیل پاسخ ضربه بصورت زیر نوشت.

¹ Minimum phase

$$S(s) = \frac{H(s)}{s}$$

بنابراین طبق قضیه مقدار اولیه داریم.

$$s(t=0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sS(s)$$

و یا

$$S(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{N(s)}{D(s)}$$

و با توجه به اینکه درجه صورت از مخرج کمتر است داریم.

$$s(t=0^+) = 0$$

بنابراین پاسخ پله در $t=0^+$ و $t=0^-$ برابر است.

مثال (۳۴-۶): یک سیستم LTI که توسط معادله دیفرانسیل زیر مشخص می‌شود را در نظر بگیرید.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t)$$

الف) تابع تبدیل سیستم را بیابید.

ب) پاسخ ضربه سیستم را برای هر یک از حالات زیر بدست آورید.

(i) سیستم علی است.

(ii) سیستم پایدار است.

(iii) سیستم غیر علی و ناپایدار است.

حل: الف) با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف رابطه داریم.

$$s^2 Y(s) - sY(s) - 2Y(s) = X(s)$$

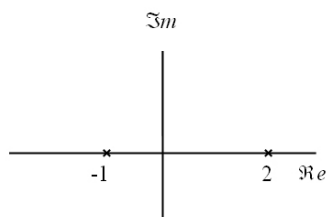
بنابراین

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 - s - 2}$$

و یا

$$H(s) = \frac{-\frac{1}{3}}{s+1} + \frac{\frac{1}{3}}{s-2}$$

ب) با رسم نمودار صفر و قطب سه حالت برای $h(t)$ متصور است.



شکل (۳۴-۶) نمودار صفر و قطب سیستم مورد بحث در مثال ۳۴-۶

(i) سیستم علی و ناپایدار دارای ناحیه همگرایی بصورت زیر است.

$$\Re[s] > 2$$

که پاسخ ضربه آن برابر است با مجموع دو پاسخ ضربه راست‌رو

$$h(t) = \left(-\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}\right)u(t)$$

(ii) سیستم پایدار و غیر علی که دارای ناحیه همگرایی بصورت زیر است.

$$-1 < \Re[s] < 2$$

پاسخ ضربه این سیستم از مجموع دو پاسخ ضربه علی و غیر علی بدست می‌آید.

$$h(t) = \left(-\frac{1}{3}e^{-t}u(t) - \frac{1}{3}e^{2t}u(-t)\right)$$

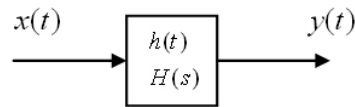
(iii) سیستم ناپایدار و غیر علی که دارای ناحیه همگرایی بصورت زیر است.

$$\Re[s] > -1$$

پاسخ ضربه این سیستم از مجموع دو پاسخ ضربه غیر علی بدست می‌آید.

$$h(t) = \left(\frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{2t}\right)u(-t)$$

مثال (۳۵-۶): یک سیستم LTI را با اطلاعات زیر در نظر بگیرید.



شکل (۳۷-۶) مربوط به مثال ۳۵-۶

$$X(s) = \frac{s+2}{s-2}$$

$$x(t) = 0, t > 0$$

$$y(t) = -\frac{2}{3}e^{2t}u(-t) + \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

مطلوبست.

الف) $H(s)$ و تعیین ناحیه همگرایی.

ب) $h(t)$.

حل: الف) تبدیل لاپلاس $y(t)$ بصورت زیر است.

$$Y(s) = \frac{2}{3} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{3} \frac{1}{s+1}$$

و یا

$$Y(s) = \frac{s}{(s+1)(s-2)}$$

بنابراین

$$H(s) = \frac{\frac{s}{(s+1)(s-2)}}{\frac{(s+2)}{(s-2)}} = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

این تابع انتقال دارای دو قطب در $s = -1$ و $s = -2$ است. اما چون $y(t)$ محدود است لازم است سیستم پایدار باشد. ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس $y(t)$ بصورت $-1 < \Re[s] < 2$ است. با این ترتیب با توجه به چپ رو بودن $x(t)$ و اینکه $X(s)$ فقط یک قطب دارد پس ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس $x(t)$ به صورت $\Re[s] < 2$ خواهد شد. بنابراین ناحیه همگرایی سیستم باید بصورت $-1 < \Re[s]$ شود تا هم شامل محور $j\omega$ باشد و هم فصل مشترک آن با ناحیه همگرایی $X(s)$ برابر ناحیه همگرایی $Y(s)$ شود. بنابراین ناحیه همگرایی تابع انتقال $H(s)$ بصورت زیر است.

$$\Re[s] > -1$$

(ب) بسادگی با بسط $H(s)$ به کسور جزئی داریم.

$$H(s) = \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+1}$$

و یا

$$h(t) = (2e^{-2t} - e^{-t})u(t)$$

مثال (۶-۳۶): یک سیستم علی با پاسخ ضربه $h(t)$ دارای خواص زیر است.

(i) هنگامی که ورودی سیستم بصورت $x(t) = e^{2t}$ است، خروجی آن بصورت $y(t) = \frac{1}{6}e^{2t}$

می باشد.

(ii) پاسخ ضربه آن در معادله دیفرانسیل زیر صادق است.

$$\frac{dh(t)}{dt} + 2h(t) = e^{-4t}u(t) + bu(t)$$

که در آن b یک عدد نامعلوم است. مطلوبست تابع تبدیل سیستم.

حل: ابتدا از طرفین معادله دیفرانسیل تبدیل لاپلاس می گیریم و نتیجه زیر را بدست می آوریم

$$sH(s) + 2H(s) = \frac{1}{s+4} + \frac{b}{s}$$

نتیجتاً

$$H(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)} + \frac{b}{s(s+2)}$$

و اما اکنون باید مجهول b را بدست آورد. با توجه به تعریف سیستم خطی چون پاسخ سیستم خطی به ورودی $e^{s_0 t}$ برابر $H(s_0)e^{s_0 t}$ می باشد می توان نوشت.

$$H(2) = \frac{1}{6}$$

بنابراین

$$H(2) = \frac{1}{4 \times 6} + \frac{b}{2 \times 4} = \frac{1}{6}$$

بنابراین

$$b = 1$$

در نتیجه

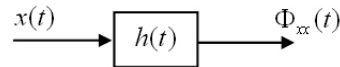
$$H(s) = \frac{2s + 4}{s(s+2)(s+4)} = \frac{2}{s(s+4)}$$

مثال (۶-۳۷): تابع همبستگی $\Phi_{xx}(\tau)$ مربوط به سیگنال $x(t)$ بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Phi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)dt$$

سیستمی را بیابید که اگر ورودی آن $x(t)$ باشد خروجی آن $\Phi_{xx}(\tau)$ باشد.

حل:



شکل (۶-۳۸) سیستمی با ورودی $x(t)$ و خروجی $\Phi_{xx}(\tau)$

جهت یافتن چنین سیستمی ساده‌تر است که ارتباط سیگنال‌های مذکور را در حوزه لاپلاس بیابیم. برای این کار از طرفین رابطه فوق تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

$$\int_{\tau=-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)e^{-s\tau}dtd\tau$$

طرف اول مساوی تبدیل لاپلاس $\Phi_{xx}(\tau)$ است که آنرا با $\Psi_{xx}(s)$ نشان می‌دهیم و با تغییر ترتیب انتگرالگیری در طرف دوم به رابطه زیر می‌رسیم.

$$\Psi_{xx}(s) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(t-\tau)e^{-s\tau}d\tau \right] dt$$

عبارت داخل کروشه مساوی $X(-s)e^{-st}$ می‌باشد، بنابراین

$$\Psi_{xx}(s) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)X(-s)e^{-st}dt$$

و یا

$$\Psi_{xx}(s) = X(s)X(-s)$$

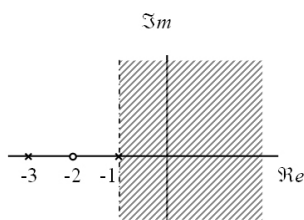
بنابراین سیستم مطلوب باید دارای تابع انتقالی بصورت $X(-s)$ باشد.

$$H(s) = X(-s)$$

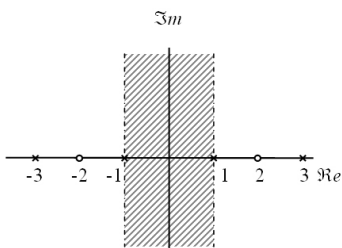
و در حوزه زمان

$$h(t) = x(-t)$$

مثال (۶-۳۸): اگر $x(t)$ دارای نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرایی بصورت شکل (۶-۳۹) باشد، نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرایی مربوط به $\Phi_{xx}(\tau)$ را رسم کنید.



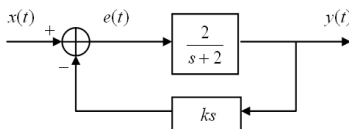
شکل (۳۹-۶) ناحیه همگرایی و نمودار صفر و قطب تبدیل $x(t)$ حل: چون -1 و -3 قطب‌های $X(s)$ هستند، 1 و 3 قطب‌های $X(-s)$ می‌باشند؛ و چون -2 صفر $X(s)$ است، 2 صفر $X(-s)$ می‌باشد. بنابراین نمودار صفر و قطب مربوط به حاصلضرب $X(s)X(-s)$ بصورت زیر است.



شکل (۴۰-۶) ناحیه همگرایی و نمودار صفر و قطب تبدیل $\Phi_{xx}(\tau)$ با توجه اینکه $x(t)$ راست‌رو است $x(-t)$ چپ‌رو است و ناحیه همگرایی آن $\Re\{s\} < -1$ می‌باشد. بنابراین ناحیه همگرایی حاصلضرب $X(-s)X(s)$ فصل مشترک دو ناحیه همگرایی مربوط به $x(t)$ و $x(-t)$ می‌باشد و یا

$$-1 < \Re\{s\} < 1$$

مثال (۳۹-۶): سیستم علی زیر را در نظر بگیرید



شکل (۴۱-۶) سیستم علی مربوط به مثال ۳۹-۶

تعیین کنید این سیستم به ازاء چه مقادیری از k پایدار است. حل: ابتدا لازم است تابع انتقال کل سیستم را بدست آورد.

$$E(s) = X(s) - ksY(s)$$

و

$$Y(s) = E(s) \frac{2}{s+2}$$

نتیجتاً

$$Y(s)(s+2) = 2X(s) - 2ksY(s)$$

و یا

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2}{s+2+2ks} = \frac{2}{(1+2k)s+2}$$

$$H(s) = \frac{2}{s + \frac{2}{1+2k}}$$

چون سیستم علی است شرط لازم و کافی جهت پایداری این است که تمام قطب‌ها در سمت چپ محور $j\omega$ قرار داشته باشند. بنابراین لازم است که

$$\frac{2}{1+2k} > 0$$

و یا

$$1+2k < 2$$

در نتیجه

$$\frac{1}{2} > k$$

مثال ۶-۴۰: مطلوبست $X(s)$ اگر $x(t) = \frac{-1}{t}u(t)$.

حل: می‌دانیم

$$-tx(t) \leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds}$$

بنابراین با توجه به صورت مسئله داریم.

$$-tx(t) = u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} = \frac{dX(s)}{ds} \Rightarrow X(s) = Ln(s) ; \operatorname{Re}(s) > 0$$

مثال ۶-۴۱: مطلوبست $x(t)$ اگر $X(s) = \frac{e^s}{s+1}$ با ناحیه همگرایی $\operatorname{Re}\{s\} > -1$.

حل: از قبل می‌دانیم که

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{\varphi} \frac{1}{s+1} \quad \operatorname{Re}\{s\} > -1$$

بنابراین با انتقال در حوزه زمان داریم.

$$e^{-(t-1)}u(t-1) \xleftrightarrow{\varphi} \frac{e^s}{s+1} \quad \operatorname{Re}\{s\} > -1$$

همانطور که دیدیم، همواره تلفیق خواص مختلف راهگشای محاسبات جالب در مورد تبدیل لاپلاس خواهد بود.

مسائل فصل ششم

۶-۱ تبدیل لاپلاس هر یک از سیگنال‌های زیر را یافته و ناحیه همگرایی‌اش را معلوم کنید.

الف) $t^2 e^{-at} u(t)$ و $a < 0$

ب) $\cos(\omega_0 t + \varphi) u(t)$

ج) $\sin(\omega_0 t + \varphi) u(t)$

د) $t^2 e^{-a|t|}$ و $a > 0$

هـ) $tu(t)$

و) $u(t)$

ز) $\delta(at+b)$ و a و b اعداد ثابت.

ح) $\sum_{i=0}^{\infty} k_i e^{-s_i t} u(t)$ و $s_i > 0$

ط) $\frac{d\delta(t)}{dt} = \delta'(t)$

ی) $\frac{k}{k+t^2}$ و k عدد ثابت مثبت.

ک) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \delta(t+kT)$ و a_k عدد ثابت.

ل) $[1 - e^{-t} + 3 + e^{-2t}]u(t)$

م) $t \cos(t)u(t)$

ن) $t \sin(t)u(t)$

س) $t^2 \cos(2t)u(t)$

ع) $t^2 u(t-2)$

ف) $te^{-at}u(t+1)$

۶-۲ پاسخ ضربه یک سیستم LTI بصورت زیر است.

$$h(t) = te^{-t}u(t)$$

پاسخ این سیستم را به ورودی‌های زیر بیابید.

الف) $x(t) = u(t)$

ب) $x(t) = e^{2t}$

ج) $x(t) = \cos(2t)$

د) $x(t) = 1$

۶-۳ ورودی یک سیستم مفروض به صورت زیر است.

$$x(t) = e^{2t}$$

اگر خروجی آن به صورت زیر باشد.

$$y(t) = \frac{2}{3}e^{2t} + e^{-2t}$$

تعیین کنید آیا سیستم فوق خطی است یا خیر.
۴-۶ ورودی یک سیستم مفروض به صورت زیر است.

$$x(t) = e^{-t} \cos 2t$$

اگر خروجی آن به صورت زیر باشد.

$$y(t) = e^{-t} \sin 2t$$

تعیین کنید آیا سیستم فوق خطی است یا خیر.
۵-۶ ورودی یک سیستم مفروض بصورت زیر است.

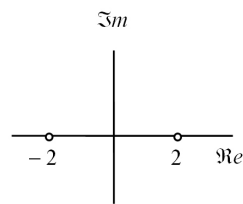
$$x(t) = e^t u(t)$$

اگر خروجی آن بصورت زیر باشد.

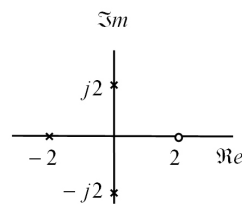
$$y(t) = 2e^t u(t)$$

تعیین کنید آیا سیستم فوق خطی است یا خیر.

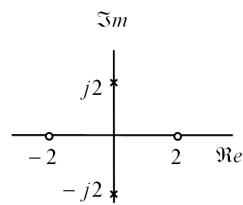
۶-۶ تعیین کنید کدامیک از نمودارهای صفر و قطب زیر می‌توانند احتمالاً امین یک سیگنال زوج، فرد و یا نه زوج و نه فرد باشد.



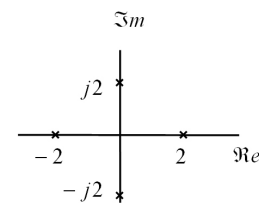
(a)



(b)



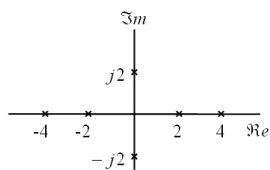
(c)



(d)

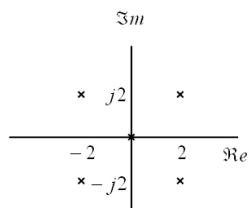
شکل (۴۲-۶) مربوط به مسئله ۶-۶

۷-۶ نمودار صفر و قطب زیر مربوط به یک سیگنال چپ‌رو می‌باشد؛ تعیین کنید که آیا تبدیل فوریه این سیگنال وجود دارد یا خیر.



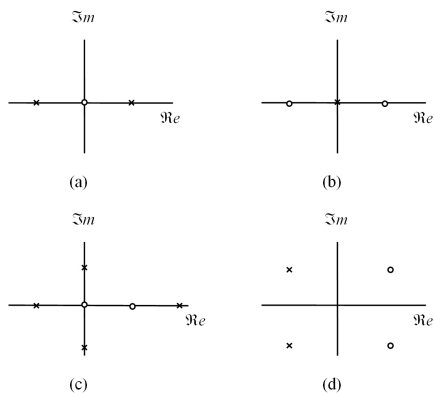
شکل (۴۳-۶) مربوط به مسئله ۷-۶

۶-۸ نمودار صفر و قطب زیر مربوط به یک سیستم علی می‌باشد؛ تعیین کنید که آیا این سیستم پایدار است یا خیر.



شکل (۴۴-۶) مربوط به مسئله ۸-۶

۶-۹ کدامیک از نمودارهای صفر و قطب زیر می‌تواند مربوط به یک سیستم علی پایدار باشد.



شکل (۴۵-۶) مربوط به مسئله ۹-۶

۶-۱۰ تبدیل لاپلاس معکوس را بیابید.

الف) $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ و $\Re[s] < -2$

ب) $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ و $\Re[s] > -1$

ج) $X(s) = \frac{s^2}{(s+1)(s-1)}$ و $\Re[s] > 1$

$$X(s) = \frac{s^2 + s - 1}{(s+1)^2} \text{ و } \Re[s] < -1 \quad (\text{د})$$

$$X(s) = \frac{e^{-2s}}{(s-1)^2} \text{ و } \Re[s] > 1 \quad (\text{ه})$$

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 1} \text{ و } \Re[s] < -1 \quad (\text{و})$$

$$X(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} \text{ و } \Re[s] > -1 \quad (\text{ز})$$

$$X(s) = e^s \frac{1}{s+1} + e^{-s} \frac{1}{s-1} \text{ و } \Re[s] < -1 \quad (\text{ح})$$

$$X(s) = e^s \frac{1}{s+1} + e^{-s} \frac{1}{s-1} \text{ و } \Re[s] < -1 \quad (\text{ط})$$

$$X(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} \text{ و } \Re[s] < -3 \quad (\text{ی})$$

$$a > 0 \text{ و } X(s) = \frac{s+a}{s-a} \text{ و } \Re[s] < a \quad (\text{ک})$$

$$a > 0 \text{ و } X(s) = \frac{s-a}{s+a} \text{ و } \Re[s] > -a \quad (\text{ل})$$

(م) تمام صفحه $s = ROC$ و $X(s) = \sum_{i=0}^N k_i e^{-a_i s}$ و a_i, k_i عدد ثابت

$$X(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s-1} e^{2s} \text{ و } \Re[s] > 1 \quad (\text{ن})$$

$$X(s) = 1 + \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1} \text{ و } \Re[s] < 0 \quad (\text{س})$$

$$X(s) = 1 + \frac{s^2 + 1}{s^2 - 1} \text{ و } \Re[s] < -1 \quad (\text{ع})$$

$$X(s) = \frac{s^2}{s^2 + 4} \text{ و } \Re[s] < 0 \quad (\text{ف})$$

$$X(s) = \frac{s}{s^2 - 4} + 1 \text{ و } \Re[s] < -2 \quad (\text{ص})$$

$$X(s) = \frac{s^2 - 1}{(s+1+j)(s+1-j)} \text{ و } \Re[s] < -1 \quad (\text{ق})$$

$$X(s) = \frac{2s-1}{(s^2+1)(s^2-1)s} \text{ و } \Re[s] > 1 \quad (\text{ح})$$

۶-۱۱ $H(s)$ مبین تابع انتقال یک سیستم علی و پایدار است. ورودی این سیستم شامل سه عبارت است. یکی از آنها یک ضربه و دیگری یک نمایی مختلط است. اما از جمله سوم ورودی اطلاعی در دست نداریم. خروجی این سیستم به ورودی فوق الذکر برابر است با

$$y(t) = -6e^{-t}u(t) + \frac{4}{34}e^{4t} \cos(3t) - \frac{18}{34}e^{4t} \sin(3t) + \delta(t)$$

مطلوبست تعیین $H(s)$.

۱۲-۶ سیگنال $y(t) = e^{-2t}u(t)$ خروجی یک سیستم LTI علی با تابع انتقالی بصورت زیر می‌باشد.

$$H(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

الف) تمام ورودی‌های ممکن را بیابید.

ب) کدامیک از این ورودی‌ها بطور مطلق انتگرالپذیر است؛ یعنی

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

۱۳-۶ سیستمی پایدار با تابع انتقال زیر مفروض است.

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2-3s+2}$$

خروجی این سیستم را به ورودی زیر بیابید.

$$x(t) = e^{-|t|} \quad -\infty < t < \infty$$

۱۴-۶ خروجی سیستم مذکور در مساله ۱۳-۶ را به ورودی زیر بیابید.

$$x(t) = e^{-|t|} \cos t \quad -\infty < t < \infty$$

۱۵-۶ خروجی یک سیستم علی با تابع انتقال

$$H(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$$

به ورودی مفروض $x(t)$ بصورت زیر است.

$$y(t) = e^{-2t}u(t)$$

اگر ورودی این سیستم $\frac{dx(t)}{dt} + \frac{d^3x(t)}{dt^3}$ باشد مطلوبست خروجی سیستم.

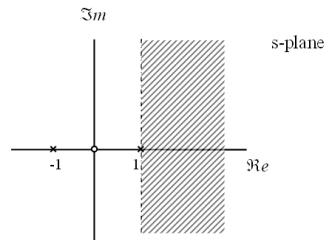
۱۶-۶ یک سیستم LTI علی که توسط معادله دیفرانسیل زیر توصیف می‌شود را در نظر بگیرید.

$$\frac{dy^2(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

اگر ورودی سیستم بصورت $\delta'(t) + \delta(t) + u(t)$ باشد مطلوبست خروجی سیستم.

۱۷-۶ نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرایی شکل (۴۶-۶) مربوط به یک سیستم با تابع تبدیل کسری

می‌باشد. پاسخ ضربه را بیابید. اگر پاسخ سیستم به ورودی e^{2t} برابر e^{2t} باشد.



شکل (۴۶-۶) مربوط به مسئله ۱۷-۶

۱۸-۶ پاسخ ضربه یک سیستم LTI علی بصورت زیر است.

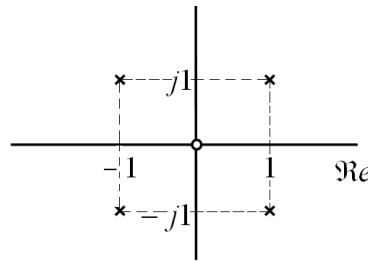
$$h(t) = (1 - e^{-t} - te^{-t})u(t)$$

مطلوبست خروجی سیستم اگر ورودی آن بصورت زیر باشد.

$$x(t) = (2 - 3e^{-t} + e^{-3t})u(t)$$

۱۹-۶ یک سیستم LTI دارای تابع تبدیل $H(s)$ با نمودار صفر و قطب بصورت زیر است.

$\tilde{s}m$



شکل (۴۷-۶) مربوط به مسئله ۱۹-۶

تمام حالت‌های ممکنه $h(t)$ را یافته و خواص سیستم را در هر یک از حالات بیان کنید.

۲۰-۶ اگر $\mathcal{X}(s)$ مبین تبدیل لاپلاس یکطرفه $x(t)$ باشد تبدیل لاپلاس یکطرفه هر یک از سیگنال‌های زیر را بیابید.

الف) $x(t - t_0)$

ب) $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

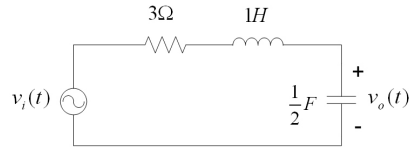
ج) $x(t + t_0)$

د) $\frac{dx(t)}{dt}$

ه) $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$

ز) $\frac{d^3x(t)}{dt^3}$

۲۱-۶ معادله دیفرانسیل مربوط کننده $v_o(t)$ به $v_i(t)$ در مدار زیر را بیابید و با فرض $v_i(t) = e^{-3t}u(t)$ خروجی را برای $t > 0$ بیابید.

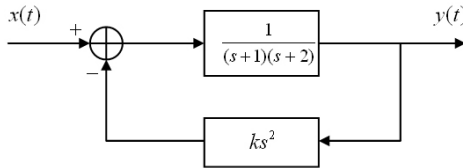


شکل (۴۸-۶) مربوط به مسئله ۲۱-۶

۲۲-۶ تابع انتقال فیلتر باتروث را پیدا کنید. اگر بدانیم این فیلتر علی و پایدار است و

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (j\omega/j\omega_c)^{2N}}$$

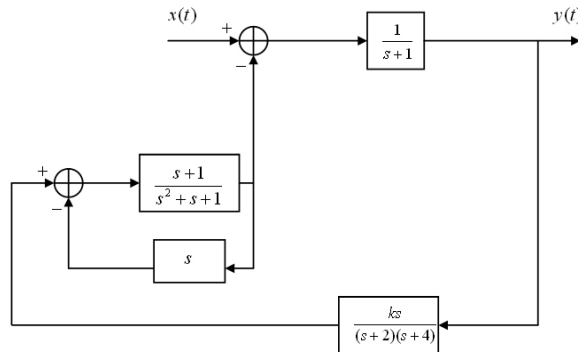
۲۳-۶ سیستم علی زیر را در نظر بگیرید.



شکل (۴۹-۶) مربوط به مسئله ۲۳-۶

تعیین کنید این سیستم به ازاء چه مقادیری از k احتمالا پایدار می‌شود.

۲۴-۶ سیستم علی زیر را از لحاظ پایداری به ازاء مقادیر مختلف k مورد بررسی قرار دهید.



شکل (۵۰-۶) مربوط به مسئله ۲۴-۶

فصل هفتم

Z تبدیل

مقدمه

در فصل قبلی، تبدیل لاپلاس را بعنوان تعمیمی منطقی از تبدیل فوریه پیوسته زمانی بررسی کردیم. این تعمیم باعث شد که تبدیل لاپلاس در دامنه وسیع‌تری از سیگنال‌ها، قابل کاربرد باشد (نسبت به تبدیل فوریه). چون بسیاری از سیگنال‌هایی که تبدیل فوریه ندارند تبدیل لاپلاس دارند. در این فصل تبدیل Z که معادل گسسته زمانی تبدیل لاپلاس و تعمیمی از تبدیل فوریه گسسته زمانی است را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همانگونه که خواهیم دید بسیاری خواص تبدیل Z مشابه خواص تبدیل لاپلاس خواهد بود. اما همانگونه که خواهیم دید علاوه بر تشابهات فراوان میان تبدیل لاپلاس و تبدیل Z، تفاوت‌های عمده‌ای نیز بین این دو وجود دارد. که ناشی از ماهیت کاملاً متفاوت این دو نوع تبدیل می‌باشد. البته پیش‌بینی این تفاوت‌ها با توجه به اینکه تبدیل Z یک عملگر گسسته زمان و تبدیل لاپلاس یک عملگر پیوسته زمان است کاملاً امکان پذیر می‌باشد.

۷-۱ تعریف تبدیل Z

همانگونه که در فصل چهارم دیدیم، برای سیستم LTI گسسته زمانی با پاسخ ضربه $h[n]$ ، پاسخ سیستم به ورودی نمایی مختلط $x[n] = z^n$ چنین است.

$$y[n] = H(z)z^n \quad (1-7)$$

که در آن

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n} \quad (2-7)$$

اگر $z = e^{j\Omega}$ باشد (یا $|z| = 1$) و اگر Ω نیز حقیقی باشد، مجموع (۲-۷) متناظر با تبدیل فوریه گسسته زمانی $h[n]$ خواهد بود. اما در حالت کلی اگر $|z|$ معین نباشد، مجموع (۲-۷)، تبدیل Z دنباله $h[n]$ است. پس تبدیل Z دنباله $x[n]$ بدینصورت تعریف می‌شود.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} \quad (3-7)$$

و این تناظر بطور مختصر با علامت زیر نمایش داده می‌شود.

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \quad (4-7)$$

همانگونه که تبدیل لاپلاس نقش مهمی در تحلیل سیستم‌های پیوسته زمان دارد تبدیل Z نیز ابزاری کارآمد در تجزیه و تحلیل سیستم‌های گسسته زمان بشمار می‌رود. در رابطه (۳-۷) چون Z یک عدد مختلط است می‌توان آنرا بصورت زیر نوشت.

$$z = re^{j\Omega} \quad (5-7)$$

با قرار دادن (۵-۷) در (۳-۷) داریم.

$$X(re^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](re^{j\Omega})^{-n}$$

یا بطور معادل

$$X(re^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{x[n]r^{-n}\}e^{-j\Omega n} \quad (۶-۷)$$

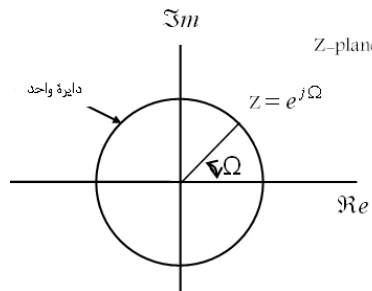
پس $X(re^{j\Omega})$ تبدیل فوریه گسسته زمان $x[n]r^{-n}$ است. یعنی

$$X(re^{j\Omega}) = F\{x[n]r^{-n}\} \quad (۷-۷)$$

جمله r^{-n} بسته به مقدار r ممکن است نسبت به n افزایشی یا میرا باشد. اگر r بزرگتر از واحد باشد، افزایشی و اگر کوچکتر از واحد باشد میرا است. از طرف دیگر می توان گفت تبدیل Z بازاء $|z|=1$ همان تبدیل فوریه خواهد بود، یعنی

$$X(|z|=1) = F\{x[n]\} \quad (۸-۷)$$

همانطور که قبلاً گفتیم، تبدیل لاپلاس وقتی که مقدار حقیقی "s" صفر باشد به تبدیل فوریه تبدیل می شود. بعبارت دیگر تبدیل لاپلاس روی محور موهومی مساوی تبدیل فوریه است. بطریق مشابه می توان گفت تبدیل Z وقتی که $|z|=1$ است به تبدیل فوریه گسسته زمانی تبدیل می شود. بنابراین تبدیل Z روی دایره واحد (ر.ک.ش. ۷-۱) با تبدیل فوریه گسسته زمانی برابر است. پس همانگونه که تبدیل لاپلاس تعمیمی از تبدیل فوریه پیوسته زمان است می توان تبدیل Z را تعمیمی از تبدیل فوریه گسسته زمان در نظر گرفت. بنابراین بسیاری از دنباله هائی که تبدیل فوریه ندارند دارای تبدیل Z خواهند بود.

شکل (۷-۱): نمایش متغیر مختلط Z در صفحه مختلط

دایره واحد در مورد تبدیل Z نقش مهمی مشابه نقش محور $j\omega$ در مورد تبدیل لاپلاس ایفا می کند. با توجه به معادله (۷-۷) می توان گفت که شرط وجود (همگرایی) تبدیل Z همگرایی تبدیل فوریه $x[n]r^{-n}$ است. برای هر سیگنال مشخص ممکن است این همگرایی بازاء مقادیر مشخصی از r میسر شود. همانند تبدیل لاپلاس، دامنه مقادیری از Z که تبدیل Z همگرا می شود محدود به ناحیه همگرایی^۱ (ROC) است. اگر (ROC) شامل دایره واحد شود می توان گفت تبدیل فوریه هم همگرا خواهد بود (وجود دارد) برای واضح شدن مطلب به مثال ۷-۱ توجه کنید.

مثال (۷-۱): فرض کنید $x[n] = a^n u[n]$ باشد در آنصورت تبدیل Z دنباله $x[n]$ برابر است با

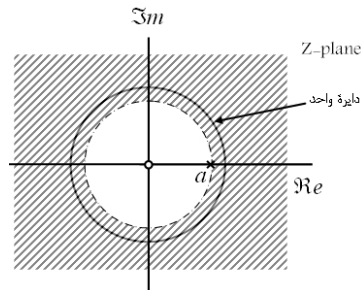
^۱ Region of convergence

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n \quad (9-7)$$

برای همگرایی $X(z)$ لازم است که طرف دوم تساوی همگرا شود. پس ناحیه همگرایی شامل مقادیری از z است که بازه آنها $|az^{-1}| < 1$ شود، یا $|z| > |a|$ بنابراین

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \quad |z| > |a| \quad (10-7)$$

بنابراین اگر a محدود باشد، $X(z)$ همگرا خواهد شد. اگر $|a| < 1$ باشد چون ناحیه همگرایی شامل دایره واحد می‌شود، پس تبدیل فوریه وجود خواهد داشت. اما اگر $|a| > 1$ باشد تبدیل فوریه وجود نخواهد داشت. نمودار صفر-قطب و ROC مثال (۱-۷) در شکل (۲-۷) ترسیم شده است.



شکل (۲-۷): ROC مربوط به $x[n] = a^n u[n]$

با توجه به شکل اگر $|a| < 1$ باشد تبدیل فوریه سیگنال وجود خواهد داشت. مشخص کردن ROC علاوه بر عبارت جبری $X(z)$ بسیار مهم می‌باشد و در حقیقت شرط یکتا بودن تبدیل Z نیز همین است در این مورد مثال (۲-۷) را ببینید.

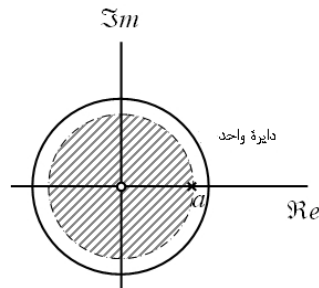
(۲-۷): اکنون فرص کنید

$$x[n] = -a^n u[-n-1]$$

بنابراین

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -a^n z^{-n} u[-n-1] \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n = -\sum_{n=1}^{\infty} (az^{-1})^{-n} \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^n = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \end{aligned} \quad (11-7)$$

اگر $|a^{-1}z| < 1$ باشد ($|z| \leq |a|$) تبدیل Z وجود دارد (ر.ک. ش. ۳-۷). در اینجا اگر $|a| > 1$ باشد تبدیل فوریه همگرا خواهد شد و اگر $|a| < 1$ باشد تبدیل فوریه وجود نخواهد داشت. با توجه به این دو مثال می‌توان قضاوت کرد که $X(z)$ همواره کسری خواهد بود اگر $x[n]$ ترکیب خطی از نمایی‌های حقیقی یا مختلط باشد.



شکل (۳-۷): ROC مربوط به $x[n] = -a^n u[-n-1]$

با توجه به شکل اگر $|a| > 1$ باشد تبدیل فوریه وجود نخواهد داشت.

مثال (۳-۷): اکنون دنباله زیر را در نظر بگیرید.

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad (۱۳-۷)$$

تبدیل Z چنین است.

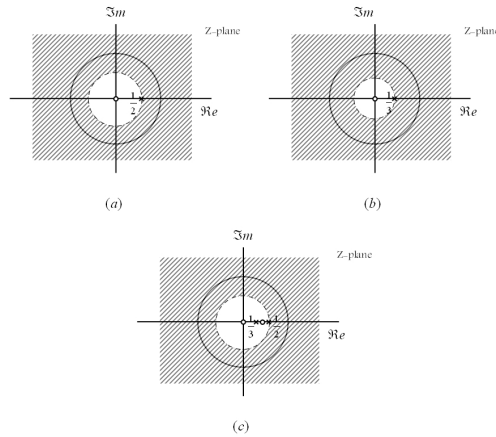
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} u[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} u[n] \quad (۱۴-۷)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3} z^{-1}\right)^n \\ &= \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)} + \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{3} z^{-1}\right)} = \frac{z(2z - \frac{5}{6})}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)} \end{aligned} \quad (۱۵-۷)$$

برای همگرا بودن $X(z)$ لازم است که هر دو مجموع (۱۵-۷) همگرا باشند. پس باید $\left|\frac{1}{2} z^{-1}\right| < 1$ و هم

$\left|z^{-1} \frac{1}{3}\right| < 1$ یا بطور معادل باید $|z| > \frac{1}{2}$ و $|z| > \frac{1}{3}$ شود، که بدین ترتیب ROC فصل مشترک این دو

می شود، یعنی $|z| > \frac{1}{2}$ (ر.ک.ش. ۴-۷).



شکل (۴-۷): (a) ناحیه همگرایی و نمودار صفر و قطب $x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ (b) ناحیه همگرایی و نمودار صفر و قطب $x_2[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ (c) ناحیه همگرایی و نمودار صفر و قطب $x_3[n] = x_1[n] + x_2[n]$

از مثال زیر می‌توان به خاصیت خطی بودن تبدیل Z پی برد، چون اگر داشته باشیم.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)}, \quad |z| > \frac{1}{2} \quad (۱۶-۷)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{3} z^{-1}\right)}, \quad |z| > \frac{1}{3} \quad (۱۷-۷)$$

در آنصورت

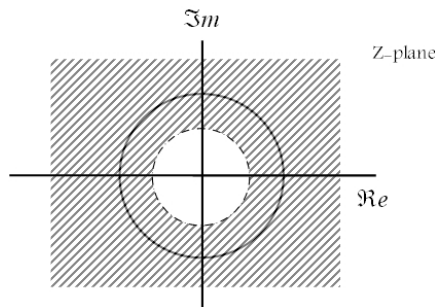
$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)} + \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{3} z^{-1}\right)}, \quad |z| > \frac{1}{2} \quad (۱۸-۷)$$

نکته جالبی دیگری که از این سه مثال به آن پی می‌بریم این است که برای دنباله‌هایی که در $n < 0$ مساوی صفر هستند، $X(z)$ فقط شامل توان‌های منفی Z است. پس برای اینگونه دنباله‌ها مناسب‌تر است که $X(z)$ را بر حسب چند جمله‌ای از توان z^{-1} بیان نمود (نه بر حسب Z). بدین ترتیب بررسی محل قطب‌ها و ناحیه همگرایی ساده‌تر خواهد بود.

۷-۲ ناحیه همگرایی تبدیل Z

در این قسمت مشابه فصل قبل خواصی برای ناحیه همگرایی ذکر می‌شود که در شناخت ناحیه همگرایی فقط با دانستن نمودار صفر و قطب کمک می‌کنند و همانند ناحیه همگرایی در تبدیل لاپلاس بسیاری از خواص سیستم‌ها و دنباله‌ها را می‌توان از شکل نواحی همگرایی آنها استخراج کرد.

خاصیت ۱: ناحیه همگرایی $X(z)$ شامل یک حلقه در صفحه Z است که مرکز آن مبدأ مختصات می‌باشد (به شکل (۵-۷) دقت کنید). همانطور که گفتیم ROC شامل مقادیری از $z = re^{j\Omega}$ است که بازاء آن تبدیل فوریه $x[n]r^{-n}$ همگرا می‌باشد. بنابراین ناحیه همگرایی فقط به $|z| = r$ بستگی دارد و به Ω بستگی ندارد. در نتیجه برای یک مقدار مشخص z_0 در ROC، تمام مقادیر Z که دارای دامنه‌ای برابر z_0 هستند در ROC قرار می‌گیرند.



شکل (۵-۷): ناحیه همگرایی در حالت کلی شامل یک حلقه در صفحه Z است.

خاصیت ۲: ROC شامل هیچ قطبی نمی‌شود.

همانند تبدیل لاپلاس این خاصیت نتیجه این واقعیت است که $X(z)$ در قطب بینهایت است و در قطب همگرا نمی‌شود.

خاصیت ۳: اگر $x[n]$ دارای دوره محدود باشد، ROC شامل تمام صفحه Z بجز احتمالاً $z = 0$ یا $z = \infty$ می‌شود. چون یک دنباله با دوره محدود دارای تعداد محدودی غیر صفر است. به عنوان مثال از $n = N_1$ تا $n = N_2$ محدودند. بنابراین تبدیل Z فقط شامل چند نقطه خواهد بود (رابطه ۱۹-۷).

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n} \quad (19-7)$$

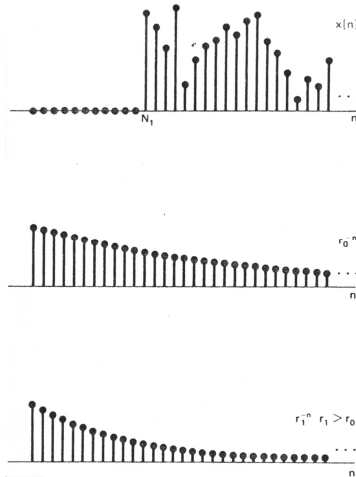
اگر Z مساوی صفر یا بینهایت نباشد هر جمله در مجموع فوق محدود و در نتیجه $X(z)$ همگرا خواهد شد. اگر N_1 منفی و N_2 مثبت باشد بگونه‌ای که $x[n]$ دارای مقادیر غیر صفر در هر دو طرف محور $(n < 0, n > 0)$ باشد، نتیجتاً مجموع (۱۹-۷) شامل توان‌های مثبت و منفی از Z خواهد بود. با میل کردن $|z|$ بسمت صفر جمله‌هایی که شامل توان‌های منفی Z هستند نامحدود می‌شوند و با میل کردن $|z|$ بسمت بینهایت جمله‌هایی که شامل توان‌های مثبت Z هستند نامحدود می‌شوند. بنابراین ROC نمی‌تواند شامل صفر یا بینهایت شود. اگر N_1 صفر یا مثبت شود در اینصورت فقط توان‌های منفی Z در معادله (۱۹-۷) ظاهر می‌شوند و در نتیجه ROC شامل $z = \infty$ خواهد بود. بالعکس اگر $N_2 = 0$ یا منفی باشد، فقط جمله‌های با توان مثبت Z در معادله (۱۹-۷) ظاهر می‌شوند و در نتیجه ROC شامل $z = 0$ می‌شود.

خاصیت ۴: اگر $x[n]$ یک دنباله راست‌رو و اگر $|z| = r_0$ در ROC واقع باشد، در آنصورت همه مقادیر Z که در نامعادله $|z| > r_0$ صدق می‌کنند، در ROC قرار خواهند گرفت. توضیح این خاصیت دقیقاً مشابه توضیح خاصیت ۴ در فصل قبل است. یک دنباله راست‌رو، بازاً مقادیر n که کوچکتر از یک مقدار مشخص n_0 باشند مساوی صفر است. اگر دایره $|z| = r_0$ در ROC قرار گیرد، $x[n]r_0^{-n}$ بطور مطلق جمع‌پذیر خواهد بود (تبدیل فوری $x[n]r_0^{-n}$ موجود است). از آنجائیکه دنباله $x[n]$ راست‌رو است حاصلضرب عبارت $x[n]$ در هر دنباله نمایی r_0^{-n} که با افزایش n با سرعتی بیش از r_0^{-n} کاهش یابد نیز بطور مطلق جمع‌پذیر خواهد بود (به شکل (۶-۷) توجه کنید). به عبارت ریاضی اگر فرض کنیم $|z| = r_1$

$$|X(z)| \leq \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| |z|^{-n} = \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_1^{-n} = \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| \frac{r_1^{-n}}{r_0^{-n}} r_0^{-n}$$

چون $r_1 > r_0$ است پس تابع $(\frac{r_1}{r_0})^{-n}$ یک تابع نمایی کاهنده است و بیشترین مقدارش را در فاصله وجود $x[n]$ در $n = N_1$ اتخاذ می‌کند. پس

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{-n} r_0^{-n} \leq \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{-N_1} \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} < \infty$$



شکل (۶-۷): اگر حاصلضرب $x[n]r_0^{-n}$ همگرا باشد حتماً حاصلضرب $x[n]r_1^{-n}$ ($r_1 > r_0$) همگراست.

برای یک دنباله راست‌رو، معادله (۳-۷) بصورت زیر در خواهد آمد.

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (۲۰-۷)$$

که N_1 محدود ولی ممکن است مثبت یا منفی باشد. اگر N_1 منفی باشد مجموع رابطه (۷-۲۰) شامل عبارتهایی با توان مثبت Z می باشد که با میل کردن $|Z|$ بسمت بینهایت بطور نامحدود بزرگ می شود. بنابراین برای یک دنباله راسترو در حالت عمومی ROC شامل بینهایت نخواهد شد.

خاصیت ۵: اگر $x[n]$ یک دنباله چپرو و اگر دایره $|z|=r_0$ در ROC قرار داشته باشد، در اینصورت همه مقادیر Z که در نامعادله $0 < |z| < r_0$ صدق کنند در ROC قرار خواهند گرفت.

از اثبات این خاصیت که مشابه خاصیت قبلی ثابت می شود صرف نظر می گردد.

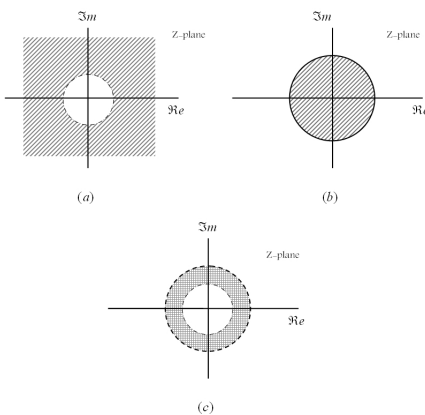
برای یک دنباله چپرو معادله (۷-۳) که بیانگر تبدیل Z است بصورت معادله (۷-۲۱) در می آید.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{N_2} x[n]z^{-n} \quad (۷-۲۱)$$

که در آن N_2 ممکن است مثبت و یا منفی باشد. اگر N_2 مثبت باشد معادله (۷-۲۱) شامل توان های منفی Z نیز خواهد بود که با میل کردن $|Z|$ بسمت صفر، بطور نامحدود بزرگ خواهند شد. نتیجتاً در حالت کلی برای دنباله های چپرو، ROC شامل $z=0$ نخواهد بود. البته در حالت خاص برای دنباله های "ضدعلی" ($x[n]=0$ برای $n \geq 0$) که برای آنها N_2 در معادله (۷-۲۱) کوچکتر یا مساوی صفر است، ROC شامل $z=0$ خواهد بود.

خاصیت ۶: اگر $x[n]$ دو طرفه و اگر دایره $|z|=r_0$ در ROC قرار داشته باشد، در اینصورت ROC شامل یک حلقه در صفحه Z است که شامل دایره $|z|=r_0$ خواهد بود.

مشابه خاصیت ۶ تبدیل لاپلاس (فصل قبل) می توان یک دنباله دو طرفه را، بصورت مجموع دو دنباله راسترو و چپرو تفکیک کرد. ROC برای قسمت راسترو ناحیه ای است که از داخل بوسیله یک دایره محدود می شود و از خارج تا بینهایت ادامه پیدا می کند. ولی ROC برای قسمت چپرو ناحیه ای است که از خارج بوسیله یک دایره محدود شده و تا صفر ادامه پیدا می کند. بنابراین فصل مشترک این دو ناحیه همگرایی یک حلقه خواهد بود (به شکل ۷-۷ توجه کنید).



شکل (۷-۷): ناحیه همگرایی یک دنباله با دوره محدود از فصل مشترک نواحی همگرایی دو دنباله راسترو و چپرو بدست می آید.

البته گاهی ممکن است یک یا دو ناحیه همگرایی فصل مشترک نداشته باشند که در آنصورت تبدیل Z وجود نخواهد داشت. اکنون خواص گفته شده را به کمک چندین مثال توضیح می‌دهیم.
مثال (۴-۷): دنباله دوره محدود زیر را در نظر بگیرید.

$$x[n] = \begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad a > 0 \quad (۲۲-۷)$$

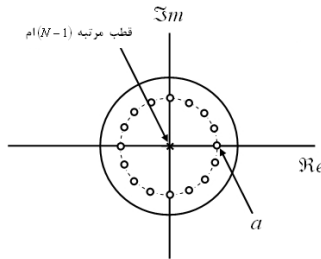
بنابر این

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n \quad (۲۳-۷)$$

وباستفاده از خاصیت تصاعد هندسی

$$X(z) = \frac{1 - (az^{-1})^N}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z - a} \quad (۲۴-۷)$$

چون $x[n]$ دارای طول محدود است، از خاصیت ۳ پی می‌بریم که ROC شامل همه صفحه Z است بجز احتمالاً مبدا و یا ∞ . در حقیقت چون $x[n]$ برای $n < 0$ مساوی صفر است ROC تا بینهایت امتداد پیدا می‌کند. اما چون $x[n]$ برای بعضی از مقادیر مثبت n غیر صفر است ROC نمی‌تواند شامل مبدا باشد. این مطلب از (۲۳-۷) هم کاملاً پیداست. اگر نمودار صفروقطب را برای $X(z)$ رسم کنیم می‌بینیم که $X(z)$ دارای یک قطب مرتبه $(N-1)$ ام در $z=0$ است و همچنین N ریشه صورت نیز در نقاط $\left(z_k = ae^{j\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}, k=0,1,\dots,N-1 \right)$ قرار دارند. صفر به از $k=0$ ، قطب در $z=a$ را خنثی می‌کند. در نتیجه تنها یک قطب در مبدا خواهیم داشت. پس ناحیه همگرایی همه صفحه Z بجز $z=0$ است.



شکل (۸-۷): نمودار قطب-صفر برای $X(z)$ مربوط به مثال (۴-۷)

مثال (۵-۷): دنباله دو طرفه فرض کنید.

$$x[n] = b^{|n|}, b > 0 \quad (۲۴-۷)$$

این دنباله در شکل (۹-۷) رسم شده است.

اگر بخواهیم تبدیل Z این دنباله دو طرفه را بدست آوریم باید ابتدا آنرا به دو دنباله چپ‌رو و راست‌رو تقسیم کنیم، بنابراین داریم.

$$x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1] \quad (۲۵-۷)$$

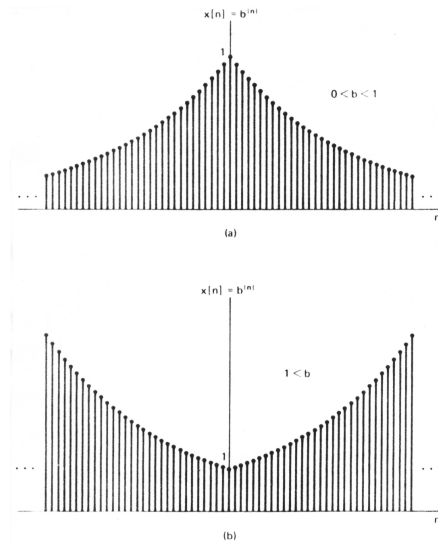
قبلاً؛ مثال (۱-۷) تبدیل Z دنباله راسترو را بدست آوردیم.

$$b^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-bz^{-1}} = X_1(z) \quad |z| > b \quad (۲۶-۷)$$

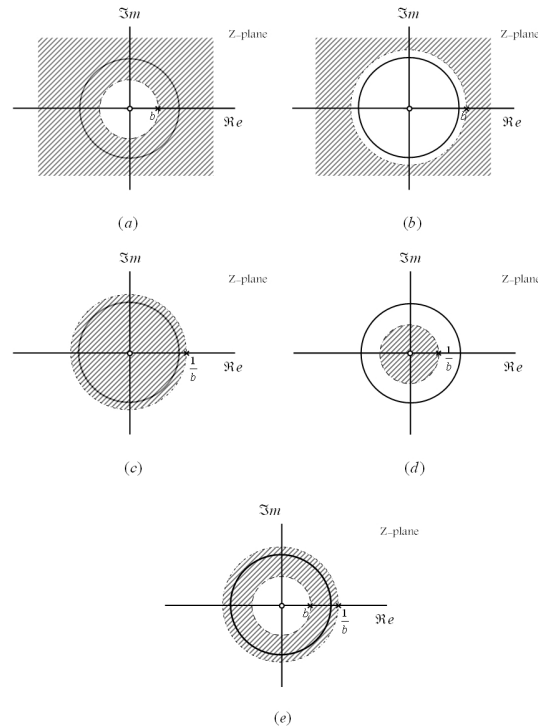
و از مثال (۲-۷) تبدیل Z دنباله چپرو را بدست آوردیم.

$$b^{-n} u[-n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{-1}{1-b^{-1}z^{-1}} = X_2(z) \quad |z| < \frac{1}{b} \quad (۲۷-۷)$$

در شکل (۱۰-۷) نمودار صفر و قطب و همچنین ROC را برای معادلات (۲۶-۷) و (۲۷-۷) رسم کرده‌ایم.



شکل (۹-۷): دنباله $x[n] = b^{|n|}$ (a) بازه $0 < b < 1$ بازه $1 < b$



شکل (۷-۱۰): نمودار صفر و قطب و همچنین ROC برای (a) $X_1(z)$ وقتی $0 < b < 1$ و (b) $X_1(z)$ وقتی $b > 1$ و (c) $X_2(z)$ وقتی $0 < b < 1$ و (d) $X_2(z)$ وقتی $b > 1$ و (e) فصل مشترک دو ناحیه وقتی $0 < b < 1$ است.

اگر $b > 1$ باشد هیچ ناحیه مشترک همگرایی وجود نخواهد داشت و بنابراین دنباله رابطه (۷-۲۴) دارای تبدیل Z نخواهد بود. ولی اگر $b < 1$ باشد، ROCهای معادلات (۷-۲۶) و (۷-۲۷) ناحیه مشترک خواهند داشت و بنابراین تبدیل Z برای دنباله مورد نظر چنین خواهد شد.

$$X(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}} - \frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}} \quad b < |z| < \frac{1}{b}$$

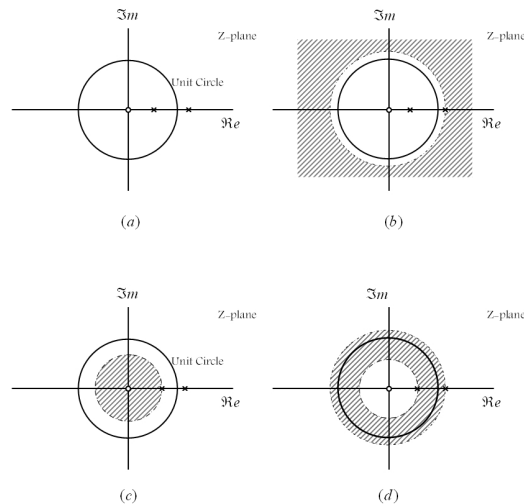
$$= \frac{b^2 - 1}{b} \frac{z}{(z-b)(z-b^{-1})} \quad (7-28)$$

نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرایی در شکل (۷-۱۰) نمایش داده شده‌اند. در فصل تبدیل لاپلاس گفتیم که برای تبدیل لاپلاس کسری، ناحیه همگرایی همیشه بوسیله قطب‌ها یا بینهایت محدود می‌شود. در مثال‌های قبلی نظیر چنین پیشامدی را نیز مشاهده کردیم. در مورد تبدیل Z نیز می‌توان گفت که ناحیه همگرایی هرگز شامل قطب نخواهد بود و همچنین ناحیه همگرایی بوسیله قطب‌ها یا بینهایت محدود خواهد شد. بنابراین برای یک نمودار صفر و قطب خاص (یا یک عبارت کسری تبدیل Z) تنها چند ناحیه همگرایی محدود می‌توان بدست آورد که اگر اطلاع دیگری از

نحوه رفتار دنباله در زمان داشته باشیم می توان بسادگی از میان آن چند ناحیه، یکی را بعنوان ناحیه همگرایی اصلی انتخاب کرد. برای روشن برای مطلب به مثال (۶-۷) توجه کنید. مثال (۶-۷): فرض کنید تبدیل Z یک دنباله به صورت زیر داده شده باشد.

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{5}{4}z^{-1}\right)} \quad (۲۹-۷)$$

کلیه نمودارهای صفر و قطب ممکن مربوط به این رابطه در شکل (۷-۱۱-a) رسم شده است.



شکل (۷-۱۱): نواحی همگرایی ممکن برای یک عبارت $X(z)$ (a) نمودار قطب-صفر مربوط به $X(z)$ در مثال (۶-۷) (b) ناحیه همگرایی $X(z)$ اگر $x[n]$ یک دنباله راست رو باشد (c) ناحیه همگرایی $X(z)$ اگر $x[n]$ یک دنباله چپ رو باشد (d) ناحیه همگرایی $X(z)$ اگر $x[n]$ یک دنباله دو طرفه باشد.

در این مثال سه ناحیه همگرایی محتمل را می توان بدست آورد که همه آنها مربوط به یک عبارت $X(z)$ می توانند باشند. (به شکل (۷-۱۱-b) توجه کنید) هر کدام از این سه ناحیه مربوط به یک دنباله در حوزه زمان هستند. ناحیه شکل (۷-۱۱-b) مربوط به دنباله زیر است.

$$x[n] = \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{5}{3} \left(\frac{5}{4}\right)^n \right] u[n] \quad (۳۰-۷)$$

این دنباله علی است ولی تبدیل فوریه ندارد چون ROC شامل دایره واحد نمی شود ناحیه شکل (۷-۱۱-c) مربوط به دنباله زیر است.

$$x[n] = \left[\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{5}{3} \left(\frac{5}{4}\right)^n \right] u[-n-1] \quad (۳۱-۷)$$

این دنباله ضد علی است و همچنین تبدیل فوریه ندارد. ناحیه شکل (۷-۱۱-d) مربوط به دنباله زیر است

$$x[n] = -\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{5}{3} \left(\frac{5}{4}\right)^n u[-n-1] \quad (۷-۳۲)$$

این دنباله ضد علی است ولی دارای تبدیل فوریه است چون ROC شامل دایره واحد می‌باشد.

۷- تبدیل معکوس Z

جهت استخراج رابطه معکوس Z ابتدا طرفین رابطه تبدیل Z را در z^{k-1} (k عدد صحیح دلخواه) ضرب کرده و از حاصل طرفین تساوی حول دایره C بشعاع r در درون ناحیه همگرایی و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت انتگرال می‌گیریم.

$$\oint_c X(z) z^{k-1} dz = \oint_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{k-n-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \oint_c z^{k-n-1} dz \quad (۷-۳۳)$$

اما باید توجه به قضیه انتگرال کوشی می‌دانیم که حاصل انتگرال طرف راست برابر است با

$$\oint_c z^{k-n-1} dz = 2\pi j \times \{ \text{مجموع مانده‌ها در قطب‌ها} \} \quad (۷-۳۴)$$

بسادگی می‌بینیم که حاصل این انتگرال به ازای تمام مقادیر n مساوی صفر است (چون مانده‌های مساوی صفر می‌شوند) بجز وقتی که $n = k$ می‌شود که در آن صورت

$$\oint_c z^{-1} dz = 2\pi j \quad \{z=0 \text{ قطب}\} \quad (۷-۳۵)$$

و اما

$$\{z=0 \text{ مانده در}\} = \lim_{z \rightarrow 0} z(z^{-1}) = 1 \quad (۷-۳۶)$$

بنابراین با جایگزینی (۷-۳۵) و (۷-۳۶) در (۷-۳۳) داریم:

$$\oint_c X(z) z^{k-1} dz = x[k] 2\pi j \quad (۷-۳۷)$$

و یا

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{k-1} dz \quad (۷-۳۸)$$

که این رابطه مبین تبدیل Z معکوس است.

توجه کنید که انتگرال روی دایره ای بشعاع r در درون ناحیه همگرایی، بمرکز مبدا مختصات و در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت باید گرفته شود. بدست آوردن تبدیل معکوس از روی رابطه فوق اغلب مشکل است، اما چند راه ساده‌تر برای بدست آوردن تبدیل معکوس Z وجود دارد که به وسیله چند مثال آنها را روشن می‌کنیم.

الف) بسط به کسور جزئی

مثال (۷-۷): مطلوب است $x[n]$ اگر،

$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} \quad |z| > \frac{1}{3} \quad (39-7)$$

دو قطب یکی در $z = \frac{1}{4}$ و دیگری در $z = \frac{1}{3}$ وجود دارد ولی چون ROC شامل ناحیه خارجی بزرگترین قطب است باید $x[n]$ یک دنباله راسترو باشد. برای بدست آوردن $x[n]$ یک روش این است که $X(z)$ را به کسرهای جزئی تبدیل کنیم، اما بهتر است کسرهای جزئی را بر حسب z^{-1} بدست آورد. بنابراین داریم

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad (40-7)$$

به این ترتیب دیده می شود که $x[n]$ شامل دو عبارت است که هر عبارت متناظر با یکی از کسرهای جزئی معادله (۴۰-۷) می باشد. برای بدست آوردن تبدیل معکوس Z مربوط به هر عبارت باید ابتدا ROC را برای هر عبارت بطور جداگانه بدست آورد. اما چون می دانیم ناحیه همگرایی $X(z)$ خارج از بزرگترین قطب قرار دارد، می توانیم بگوئیم که ناحیه همگرایی هر یک از کسرهای جزئی باید در خارج از قطبها ی مربوط به خودشان باشد. بنابراین

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] \quad (41-7)$$

که در آن

$$x_1[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{4} \quad (42-7)$$

$$x_2[n] \leftrightarrow \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{3} \quad (43-7)$$

بنابراین

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad (44-7)$$

$$x_2[n] = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad (45-7)$$

بنابراین از مجموع دو رابطه (۴۴-۷) و (۴۵-۷) به رابطه (۴۶-۷) می رسیم.

$$x[n] = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \right] u[n] \quad (46-7)$$

مثال (۷-۸): (بسط به کسور جزئی) اکنون عبارت $X(z)$ که در مثال (۷-۷) مطرح شد را در نظر بگیرید. اما ناحیه همگرایی را بصورت $\left(\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}\right)$ فرض کنید برای بدست آوردن $x[n]$ باید $X(z)$ را مشابه مثال قبلی به دو کسر جزئی تبدیل کنیم. اما ناحیه همگرایی این دو عبارت متفاوت خواهد بود. در این مثال ناحیه همگرایی هر یک از کسور جزئی چنین می شود.

$$x_1[n] \stackrel{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{4} \quad (۴۷-۷)$$

$$x_2[n] \stackrel{z}{\leftrightarrow} \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad |z| < \frac{1}{3} \quad (۴۸-۷)$$

و بنابراین داریم

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] \quad (۴۹-۷)$$

ب) استفاده از روش سری توانی

یکی دیگر از روش های مفید برای محاسبه تبدیل معکوس Z تجزیه $X(z)$ به سری توانی می باشد برای توضیح روش فوق به مثال زیر توجه کنید
مثال (۷-۹): مطلوبست $x[n]$ اگر،

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a| \quad (۵۰-۷)$$

این عبارت را بصورت سری توانی بکمک تقسیمات متوالی تجزیه می کنیم.

$$1 \quad \left. \begin{array}{l} 1 - az^{-1} \\ 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \dots \end{array} \right\} \\ \frac{1 - az^{-1}}{az^{-1}} \\ \frac{az^{-1} - a^2z^{-2}}{a^2z^{-2}}$$

بنابراین داریم.

$$\frac{1}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \dots \quad (۵۱-۷)$$

با مقایسه رابطه (۵۱-۷) با رابطه (۷-۳) و مساوی قرار دادن ضرائب می بینیم که

$$\begin{aligned}x[n] &= 0 & n < 0 \\x[0] &= 1 \\x[1] &= a \\x[2] &= a^2\end{aligned}$$

و در حالت کلی

$$x[n] = a^n u[n] \quad (۵۲-۷)$$

بسط سری توانی $\frac{1}{1-az^{-1}}$ که در رابطه (۵۱-۷) داده شده است برای $|az^{-1}| < 1$ صدق می کند با $|z| > |a|$. اگر ناحیه همگرایی بصورت $|z| < |a|$ باشد ($|az^{-1}| > 1$) باید $X(z)$ را باید بر حسب توان های مثبت Z بسط داد. در اینصورت داریم.

$$\begin{aligned}1 & \left(\frac{-az^{-1} + 1}{-a^{-1}z - a^{-2}z^2 + \dots} \right) \\ \frac{1 - a^{-1}z}{a^{-1}z} \\ \frac{a^{-1}z - a^{-2}z^2}{a^{-2}z^2}\end{aligned}$$

یا

$$\frac{1}{1-az^{-1}} = -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - \dots \quad (۵۳-۷)$$

در این حالت با مقایسه مجدد رابطه (۵۳-۷) با رابطه (۳-۷) و مساوی قرار دادن ضرایب داریم

$$\begin{aligned}x[n] &= 0 & n \geq 0 \\x[-1] &= -a^{-1} \\x[-2] &= -a^{-2}\end{aligned}$$

و در حالت کلی

$$x[n] = -a^n u[-n-1] \quad (۵۴-۷)$$

قدرت روش بسط سری توانی برای عبارات غیر کسری بیشتر نمود پیدا می کند چون اینگونه عبارات را نمی توان با تبدیل به کسرهای جزئی ساده کرد. برای توضیح بیشتر به مثال زیر توجه کنید

مثال (۱۰-۷): (بسط به سری توانی)

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a| \quad (۵۵-۷)$$

با $|az^{-1}| < 1$ می توان رابطه (۵۵-۷) را بکمک سری تیلور به سری توانی بسط داد (البته به شرط $|az^{-1}| < 1$).

$$\log(1+w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} w^n}{n} \quad |w| < 1 \quad (۵۶-۷)$$

بنابراین داریم.

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n} \quad (۵۷-۷)$$

که بکمک آن می‌توان $x[n]$ را بصورت زیر بدست آورد.

$$x[n] = \begin{cases} (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n} & n \geq 1 \\ 0 & n \leq 0 \end{cases} \quad (۵۸-۷)$$

یا بطور معادل

$$x[n] = \frac{-(-a)^n}{n} u[n-1] \quad (۵۹-۷)$$

۷-۴ خواص تبدیل Z

مانند تبدیل لاپلاس، تبدیل Z دارای خواص مهمی است که آنرا در تجزیه و تحلیل سیستم‌های LTI گسسته زمانی موفق نموده است. به تعدادی از این خواص فهرست‌وار و مختصراً اشاره خواهد شد.

۷-۴-۱ خطی بودن

اگر $X_1(Z)$ و $X_2(Z)$ بترتیب تبدیل‌های دنباله‌های $x_1[n]$ ، $x_2[n]$ باشند عبارت دیگر اگر

$$x_1[n] \xleftrightarrow{z} X_1(Z) \quad ROC = R_1 \quad (۶۰-۷)$$

و

$$x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_2(Z) \quad ROC = R_2 \quad (۶۱-۷)$$

در آنصورت تبدیل ترکیب خطی این دو دنباله برابر است با

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{z} aX_1(z) + bX_2(z) \quad ROC \text{ شامل } R_1 \cap R_2 \text{ است} \quad (۶۲-۷)$$

ناحیه همگرایی ترکیب خطی، حداقل شامل ناحیه مشترک R_1 و R_2 است برای دنباله‌هایی با تبدیل Zهای کسری، اگر قطب‌های $aX_1(z) + bX_2(z)$ همان قطب‌های $X_1(z)$ و $X_2(z)$ باشند (یعنی صفر و قطب‌ها همدیگر را خنثی نکنند)، ناحیه همگرایی دقیقاً همان ناحیه مشترک $R_1 \cap R_2$ خواهد بود. اما اگر در ترکیب خطی احتمال دارد تعدادی از صفرها بعضی از قطب‌ها را خنثی کنند، در آنصورت ناحیه همگرایی ممکن است بزرگتر شود. مثال ساده آن هنگامی است که $x_1[n]$ و $x_2[n]$ دارای دوره نامحدود باشند، اما ترکیب خطی آنها دارای دوره محدود است. در این حالت ناحیه همگرایی ترکیب خطی، تمام صفحه Z خواهد بود مگر احتمالاً صفر یا بینهایت. بعنوان مثال دنباله‌های $a^n u[n-1]$ و

$$a^n u[n] \quad \text{هر دو دارای ناحیه همگرایی } |z| > |a| \text{ هستند. اما ناحیه همگرایی دنباله زیر}$$

$$a^n u[n] - a^n u[n-1] = \delta[n] \quad (۶۳-۷)$$

شامل تمام صفحه Z است.

۷-۴-۲ انتقال در حوزه زمان

اگر

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \quad ROC = R_x$$

در آنصورت

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{z} z^{-n_0} X(z) \quad ROC = R_x \quad (۶۴-۷)$$

با این تفاوت که مبدا یا بینهایت را باید احتمالاً حذف و یا اضافه کرد. بخاطر ضرب در z^{-n_0} اگر $n_0 > 0$ باشد یک قطب در $z = 0$ بوجود می‌آید و اگر قطبی در بینهایت از قبل موجود باشد اکنون حذف می‌شود. بنابراین اگر R_x شامل مبدا باشد در اینصورت ناحیه همگرایی $x[n - n_0]$ شامل مبدا نخواهد بود. ولی اگر $n_0 < 0$ باشد یک صفر در $z = 0$ و یک قطب در بینهایت بوجود می‌آید که صفر در $z = 0$ می‌تواند یک قطب در $z = 0$ (اگر وجود داشته باشد) را حذف کند بنابراین اگر $X(z)$ شامل قطبی در مبدا باشد اکنون حذف می‌شود.

۷-۴- انتقال در حوزه فرکانس

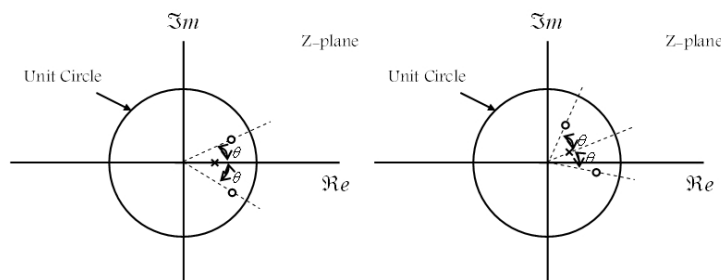
اگر

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \quad ROC = R_x$$

در آنصورت

$$e^{j\Omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{z} X(e^{-j\Omega_0} z) \quad ROC = R_x \quad (۶۵-۷)$$

سمت چپ رابطه (۶۵-۷) نمایانگر مدولاسیون دنباله با حامل نمایی مختلط است و سمت راست بیانگر چرخش در صفحه Z است. یعنی نمودار صفر و قطب در صفحه Z به اندازه زاویه Ω_0 می‌چرخد (به شکل (۷-۱۲) توجه کنید).



شکل (۷-۱۲): تاثیر بر نمودار قطب-صفر مدولاسیون حوزه زمانی با دنباله نمایی مختلط $e^{j\Omega_0 n}$

مثلاً اگر $X(z)$ کسری باشد و در صورت یا مخرج کسر دارای فاکتوری بصورت $1 - az^{-1}$ باشد، عبارت $X(e^{-j\Omega_0} z)$ دارای فاکتوری بصورت $1 - ae^{j\Omega_0} z^{-1}$ خواهد شد. بنابراین قطب یا صفر در $z = a$ در $X(z)$ اکنون تبدیل به قطب یا صفر در $z = ae^{j\Omega_0}$ در $X(e^{-j\Omega_0} z)$ خواهد شد. بنابراین ضرب دنباله در نمایی مختلط یا عمل مدولاسیون بیانگر انتقال در فرکانس (در تبدیل فوریه) دنباله خواهد بود. اگر $x[n]$ حقیقی باشد $e^{j\Omega_0 n} x[n]$ چنین نخواهد بود مگر اینکه Ω_0 مضرب صحیحی از π باشد. نتیجتاً

اگر قطب‌ها و صفرهای $X(z)$ بصورت جفت مزدوج مختلط باشند (در حالتی که $x[n]$ حقیقی است) ممکن است بعد از انتقال این تقارن از بین برود. در حالت کلی‌تر داریم.

$$z_0^n x[n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad ROC = z_0 R_x \quad (۶۶-۷)$$

اگر $|z_0| = 1$ باشد یا $z_0 = e^{j\Omega_0 n}$ معادله (۶۶-۷) به معادله (۶۵-۷) تبدیل می‌شود. اما اگر $z_0 = re^{j\Omega_0 n}$ باشد، مکان صفرها و قطب‌ها در صفحه Z ضمن آنکه باندازه زاویه Ω_0 می‌چرخند در مقدار r نیز ضرب می‌شوند، یا بعبارت دیگر در امتداد شعاع ثابتی حرکت می‌کنند. بنابراین ROC نیز بزرگتر یا کوچکتر می‌شود. یعنی اگر z_x در ناحیه همگرایی تبدیل $x[n]$ باشد، $z_0 z_x$ در ناحیه همگرایی تبدیل $z_0^n x[n]$ خواهد بود. اگر $|z_0| > 1$ باشد $|z_0 z_x|$ بزرگتر و اگر $|z_0| < 1$ باشد $|z_0 z_x|$ کوچکتر خواهد شد.

۷-۴-۴ معکوس کردن در حوزه زمان

اگر

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \quad ROC = R_x$$

در آنصورت

$$x[-n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{1}{z}\right) \quad ROC = \frac{1}{R_x} \quad (۶۷-۷)$$

معنی رابطه فوق این است که اگر z_0 در ناحیه همگرایی $x[n]$ باشد، $\frac{1}{z_0}$ در ناحیه همگرایی $x[-n]$ است.

تمرین: رابطه (۶۷-۷) را ثابت کنید.

۷-۴-۵ خاصیت کانولوشن

اگر

$$x_i[n] \xleftrightarrow{z} X_i(z) \quad ROC = R_i, \quad i=1,2$$

در آنصورت

$$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z)X_2(z) \quad ROC = R_1 \cap R_2 \quad (۶۸-۷)$$

مشابه خاصیت کانولوشن در تبدیل لاپلاس ناحیه همگرایی $X_1(z)X_2(z)$ حداقل شامل ناحیه مشترک بین R_1, R_2 است، البته ممکن است بزرگتر هم بشود بشرطی که بعضی از قطب‌ها توسط تعدادی از صفرها خنثی شوند.

۷-۵-۶ مشتق‌گیری در حوزه Z

اگر

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \quad ROC = R_x$$

در آنصورت

$$nx[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz} \quad ROC = R_x \quad (۶۹-۷)$$

این خاصیت به روشی مشابه با تبدیل لاپلاس بدست می آید کاربرد خاصیت فوق را در مثال زیر شرح می دهیم.

مثال (۷-۱۱): می خواهیم تبدیل معکوس $X(z)$ را بیابیم اگر $X(z)$ بصورت زیر باشد.

$$X(z) = \ln(1 + az^{-1}) \quad |z| > |a| \quad (۷۰-۷)$$

در آنصورت با توجه به خاصیت (۷-۴-۶) می توان نوشت.

$$nx[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}} \quad |z| > |a| \quad (۷۱-۷)$$

با مشتق گیری از $X(z)$ آنرا تبدیل به عبارت کسری نمودیم. اکنون تبدیل معکوس Z بسادگی بدست می آید. می دانیم که

$$a(-a)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{a}{1+az^{-1}} \quad |z| > |a| \quad (۷۲-۷)$$

با کمک خاصیت (۷-۴-۲) داریم.

$$a(-a)^{n-1} u[n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}} \quad |z| > |a| \quad (۷۳-۷)$$

در نهایت به نتیجه زیر خواهیم رسید.

$$x[n] = \frac{-(-a)^n}{n} u[n-1] \quad (۷۴-۷)$$

مثال (۷-۱۲): تبدیل زیر را در نظر بگیرید.

$$X(z) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \quad |z| > |a| \quad (۷۵-۷)$$

از مثال (۷-۱) داریم.

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| > |a| \quad (۷۶-۷)$$

بنابراین

$$na^n u[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-az^{-1}} \right) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \quad (۷۷-۷)$$

۷-۴-۷ تئوری مقدار اولیه

اگر $x[n] = 0$ بازاء $n < 0$ ، در آنصورت خواهیم داشت.

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (۷۸-۷)$$

این خاصیت با حد گرفتن از دو طرف رابطه تبدیل Z بدست می آید. البته باید مد نظر داشت که $x[n]$ بازاء $n < 0$ مساوی صفر است.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[0] \quad (۷۹-۷)$$

چون وقتی $n=0$ است $z^{-n} = 1$ می‌شود و برای $n > 0$ تمام جملات در حد وقتی $z \rightarrow \infty$ صفر می‌شوند. اولین نتیجه‌ای که از تئوری مقدار اولیه می‌توان گرفت این است که برای یک دنباله علی اگر $x[0]$ محدود باشد، حد $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ نیز باید محدود باشد. نتیجتاً اگر $X(z)$ بصورت کسری بیان شود درجه صورت نمی‌تواند بزرگتر از درجه مخرج شود، یا بعبارت دیگر تعداد صفرها نمی‌تواند بیشتر از تعداد قطب‌ها شود.

۷-۵ تحلیل سیستم‌های LTI بکمک تبدیل z

تبدیل Z نقش مهمی را در تحلیل سیستم‌های LTI گسسته زمانی ایفا می‌کند. از خاصیت کانولوشن می‌توان رابطه ورودی و خروجی یک سیستم را چنین بیان کرد.

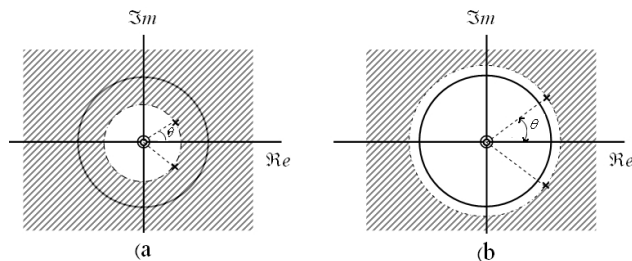
$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (۸۰-۷)$$

که در آن $X(z)$ ، $Y(z)$ و $H(z)$ بترتیب تبدیل Zهای ورودی، خروجی و پاسخ ضربه سیستم هستند. به $H(z)$ تابع سیستم یا ترابری تابع (تابع انتقال) می‌گویند. اگر $|z|=1$ باشد تبدیل Z به تبدیل فوریه گسسته تبدیل می‌شود. خواص سیستم مثل پایداری و علیت را بسادگی می‌توان از نمودار صفر-قطب و ناحیه همگرایی تابع سیستم تعیین کرد. اگر سیستم علی باشد از خاصیت‌های ۲ و ۴ می‌توان گفت که ناحیه همگرایی در خارج آخرین قطب قرار دارد. اگر سیستم پایدار باشد باید پاسخ ضربه بطور مطلق جمع‌پذیر باشد که در این حالت تبدیل فوریه وجود خواهد داشت، لذا باید ناحیه همگرایی شامل دایره $|z|=1$ شود. اگر سیستم هم علی و هم پایدار باشد تمام قطب‌ها درون دایره واحد قرار داشته باشند.

مثال (۷-۱۳): تابع سیستم یک سیستم مرتبه دوم با قطب‌های مختلط بصورت زیر است.

$$H(z) = \frac{1}{1 - (2r \cos \theta)z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (۸۱-۷)$$

قطب‌ها در $z_1 = re^{j\theta}$ ، $z_2 = re^{-j\theta}$ قرار دارند. اگر سیستم علی باشد ROC باید در خارج آخرین قطب قرار داشته باشد ($|z| > |r|$). نمودار قطب-صفر و ROC در شکل (۷-۱۳) به نمایش گذاشته شده‌اند.



شکل (۷-۱۳): نمودار قطب-صفر برای سیستم‌های مرتبه ۲ با قطب‌های مختلط (a) $r < 1$ (b) $r > 1$

در شکل (۷-۱۳-a) می بینیم که $|r| < 1$ و در اینصورت قطبها درون دایره واحد قرار می گیرند. در اینصورت سیستم پایدار است و در شکل (۷-۱۳-b) می بینیم $|r| > 1$ است و قطبها در خارج دایره واحد قرار می گیرند. پس سیستم در این حالت ناپایدار است.

۷-۵-۱ نمایش سیستم با معادلات تفاضلی با ضرائب ثابت

با کمک تبدیل Z می توان از روی معادلات تفاضلی با ضرائب ثابت بسادگی تابع سیستم را بدست آورد. برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید
مثال (۷-۱۴): فرض کنید سیستم LTI که ورودی آن $x[n]$ و خروجی آن $y[n]$ است بوسیله معادله تفاضلی زیر نمایش داده شده باشد.

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3}x[n-1] \quad (۷-۸۲)$$

با تبدیل Z گرفتن از دو طرف رابطه (۷-۸۲) داریم.

$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) = X(z) + \frac{1}{3}X(z)z^{-1} \quad (۷-۸۳)$$

$$Y(z) = X(z) \left[\frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \right]$$

و از رابطه (۷-۸۰) داریم.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (۷-۸۴)$$

رابطه (۷-۸۴) فقط عبارت جبری $H(z)$ است ولی ناحیه همگرایی را مشخص نمی کند. دو پاسخ ضربه متفاوت را می توان به معادله تفاضلی (۷-۸۲) مربوط کرد، یکی راسترو و دیگری چپرو. بنابراین دو انتخاب متفاوت برای ناحیه همگرایی امکان پذیر است.

الف: $|z| > \frac{1}{2}$ ، که مربوط به $h[n]$ راسترو است.

ب: $|z| < \frac{1}{2}$ که مربوط به $h[n]$ چپرو است.

برای حالت کلی معادله تفاضلی از مرتبه N نیز به همین ترتیب پیش می رویم. بعنوان مثال اگر معادله تفاضلی زیر نمایش دهنده یک سیستم LTI باشد.

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (۷-۸۵)$$

بنابراین:

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) \quad (۷-۸۶)$$

یا

$$Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \quad (۸۷-۷)$$

در نهایت می‌توان تابع انتقال را بصورت کسری نوشت.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (۸۸-۷)$$

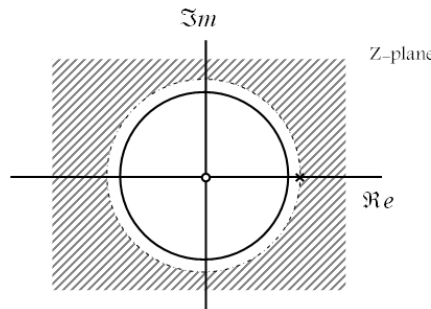
می‌بینیم که تابع انتقال یک سیستم که بوسیله معادله تفاضلی خطی با ضرائب ثابت بیان می‌شود همواره کسری است. اما می‌بینیم معادله تفاضلی به تنهایی برای تعیین پاسخ ضربه سیستم کافی نیست و باید یک خاصیت دیگر سیستم مثل علی بودن یا پایدار بودن سیستم نیز بعنوان راهنمایی داده شده باشد. بعنوان مثال اگر بدانیم سیستم علی است، ناحیه همگرایی باید خارج آخرین قطب در نظر گرفته شود و اگر بدانیم سیستم پایدار است ناحیه همگرایی باید شامل دایره $|z|=1$ نیز بشود. مثال (۷-۱۵): یک سیستم علی با معادله تفاضلی بصورت زیر داده شده است.

$$y[n] - \frac{5}{4} y[n-1] = x[n] \quad (۸۹-۷)$$

مطلوبست تابع انتقال و ناحیه همگرایی آن.

حل: مشابه مثال (۷-۱۴) می‌توان نوشت.

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{1}{1 - \frac{5}{4} z^{-1}} \quad (۹۰-۷)$$

ناحیه همگرایی بصورت $|z| > \frac{5}{4}$ بیان می‌گردد.

شکل (۷-۱۴): ناحیه همگرایی برای مثال (۷-۱۵)

می‌بینیم چنین سیستمی نمی‌تواند پایدار باشد مگر اینکه از اول فرض کنیم که سیستم غیرعلی است.

۷-۶ تبدیل سیستم‌های پیوسته زمان به گسسته زمان

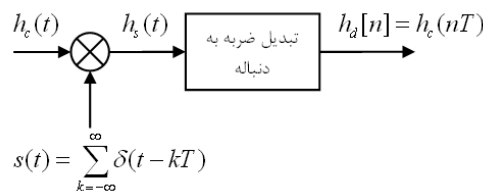
در بعضی از کاربردها بسیار مناسب است که یک سیستم پیوسته زمان بصورت یک سیستم گسسته زمان معادل تبدیل شود. بعنوان مثال در فصل پنجم مبحثی تحت عنوان پردازش گسسته زمان بر روی سیگنال‌های پیوسته زمان مورد بررسی قرار گرفت که مبنای آن استفاده از سیستم‌های گسسته زمان در پردازش سیگنال‌ها پیوسته زمان بود. این نوع پردازش به دلیل امکان استفاده از کامپیوتر در تحلیل نتایج، بسیار مهم و کاربردی می‌باشد. به همین خاطر روش‌های مختلفی جهت تبدیل سیستم‌های پیوسته زمان به گسسته زمان وجود دارد که در اینجا به دو روش مهم اشاره خواهیم کرد. در روش اول که بنام تبدیل ضربه^۲ معروف است سیستم پیوسته زمان بگونه‌ای به سیستم گسسته زمان تبدیل می‌شود که نمونه‌های پاسخ ضربه پیوسته زمان در لحظات متساوی الفاصله با پاسخ ضربه گسسته زمان برابر است. بنابراین چون پاسخ ضربه گسسته زمان از نمونه برداری از پاسخ ضربه پیوسته حاصل می‌شود این روش فقط برای سیستم‌هایی که از لحاظ فرکانسی باند محدود هستند کاربرد دارد. در روش دوم که بنام تبدیل دوجهته^۳ معروف است از نوعی نگاشت استفاده می‌شود که مستقیماً تابع انتقال سیستم در حوزه لاپلاسی را به حوزه تبدیل Z تبدیل می‌نماید.

۷-۶-۱ تبدیل ضربه

یک سیستم مفروض پیوسته زمان با پاسخ ضربه $h_c(t)$ را در نظر بگیرید. سیستم معادل گسسته زمانی که شامل نمونه‌های $h_c(t)$ در لحظات متساوی الفاصله می‌باشد بصورت زیر تعریف می‌گردد.

$$h_d[n] = h_c(nT) \quad (۹۱-۷)$$

که در آن T یک عدد مثبت است و باید بطور صحیح انتخاب گردد. رابطه (۹۱-۷) را بصورت سیستم زیر نیز می‌توان نمایش داد.



شکل (۷-۱۵): سیستم معادل رابطه (۹۱-۷)

با توجه به آنچه در فصل پنجم بیان گردید می‌توان نوشت.

$$H_s(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\omega - j\frac{2\pi k}{T}\right) \quad (۹۲-۷)$$

و

² Impulse Invariance

³ Bilinear Transformation

$$H_d(e^{j\Omega}) = H_s\left(j\frac{\Omega}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\left(\frac{\Omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right) \quad (۹۳-۷)$$

بنابراین سیستم گسسته زمانی $H_d(e^{j\Omega})$ که توسط این روش بدست می‌آید بوسیله رابطه (۹۳-۷) به تابع انتقال سیستم $H_c(j\omega)$ مربوط می‌شود. به همین خاطر لازم است \mathbf{T} به گونه‌ای انتخاب شود که از تداخل طیف‌های انتقال یافته $H_c(j\omega)$ جلوگیری شود. در اینصورت $H_d(e^{j\Omega})$ در یک دوره تناوب هم شکل $H_c(j\omega)$ می‌شود. در حوزه زمان نیز داریم.

$$h_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_c(nT)\delta(t-nT) \quad (۹۴-۷)$$

بنابراین با توجه به اینکه تبدیل لاپلاس $\delta(t-nT)$ مساوی e^{-snT} است داریم.

$$H_s(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_c(nT)e^{-snT} \quad (۹۵-۷)$$

اما از طرف دیگر داریم.

$$H_d(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n]z^{-n} \quad (۹۶-۷)$$

و چون

$$h_c(nT) = h_d[n] \quad (۹۷-۷)$$

می‌توان نوشت.

$$H_d(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_c(nT)z^{-n} \quad (۹۸-۷)$$

با مقایسه دو رابطه (۹۵-۷) و (۹۸-۷) داریم.

$$H_d(z)\Big|_{z=e^{sT}} = H_s(s) \quad (۹۹-۷)$$

بنابراین با جایگزینی s بجای $j\omega$ در رابطه (۹۲-۷) داریم.

$$H_s(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(s - j\frac{2\pi k}{T}\right) \quad (۱۰۰-۷)$$

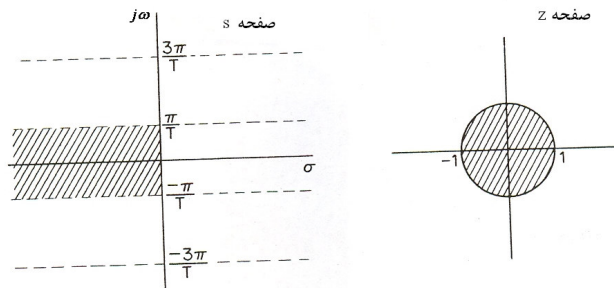
و یا بطور معادل

$$H_d(z)\Big|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(s - j\frac{2\pi k}{T}\right) \quad (۱۰۱-۷)$$

بنابراین روش تبدیل ضربه در حقیقت تبدیل $H_s(s)$ به $H_d(z)$ توسط نگاشت $z = e^{sT}$ از صفحه s به صفحه z می‌باشد.

این نگاشت در شکل (۱۶-۷) نمایش داده شده است. نوارهاشور خورده در شکل (۷-۱۶-a) به تمام صفحه z نگاشته می‌شود.

با توجه به رابطه $z = e^{sT}$ سمت چپ محور $j\omega$ به داخل دایره نگاشته می‌شود و سمت راست محور $j\omega$ به خارج دایره واحد نگاشته می‌شود. واضح است که محور $j\omega$ روی دایره واحد نگاشته می‌شود.



شکل (۷-۱۶): نگاشت از صفحه s به صفحه z توسط تبدیل $z = e^{sT}$

اگر $H_c(s)$ بصورت کسری باشد رابطه $H_d(z)$ بصورت ساده‌تری بدست می‌آید. بعنوان مثال اگر فقط قطب‌های مرتبه اول را برای $H_c(s)$ در نظر بگیریم، یعنی اگر

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \quad (۷-۱۰۲)$$

در آنصورت

$$h_c(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t) \quad (۷-۱۰۳)$$

و یا

$$\begin{aligned} h_d[n] &= h_c(nT) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k nT} u[nT] \\ &= \sum_{k=1}^N A_k (e^{s_k T})^n u[nT] \end{aligned} \quad (۷-۱۰۴)$$

و در نهایت

$$H_d(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \quad (۷-۱۰۵)$$

مثال (۷-۱۶): بکمک روش تبدیل ضربه سیستم گسسته زمانی معادل سیستم زیر را بیابید.

$$H_c(s) = \frac{4}{s+2} \quad \Re\{s\} > -2 \quad (۷-۱۰۶)$$

حل: با توجه به ناحیه همگرایی می‌توان نوشت.

$$h_c(t) = 4e^{-2t} u(t) \quad (۷-۱۰۷)$$

بنابراین معادل گسسته زمانی سیستم فوق برابر است با

$$h_d[n] = h_c(nT) = 4e^{-2nT} u[n] \quad (۷-۱۰۸)$$

و تبدیل z آن برابر است با

$$H_d(z) = \frac{4}{1 - e^{-2T} z^{-1}} \quad \Re\{z\} > e^{-2T} \quad (۷-۱۰۹)$$

۷-۶-۲ تبدیل دو جهته

اساس این تبدیل نگاشت از صفحه S به صفحه Z توسط رابطه زیر می‌باشد.

$$z = \frac{1 + \left(\frac{T}{2}\right)s}{1 - \left(\frac{T}{2}\right)s} \quad (110-7)$$

بنابراین ارتباط سیستم گسسته زمان معادل با سیستم پیوسته زمان متناظر به صورت زیر است.

$$H_d(z) = H_c(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad (111-7)$$

با قرار دادن $s = \sigma + j\omega$ در رابطه (۱۱۰-۷) داریم.

$$z = \frac{\left[1 + \frac{T}{2}\sigma\right] + j\omega\frac{T}{2}}{\left[1 - \frac{T}{2}\sigma\right] - j\omega\frac{T}{2}} \quad (112-7)$$

بنابراین هنگامی که $\sigma < 0$ است $|z|$ کوچکتر از واحد است و نتیجتاً سمت چپ محور $j\omega$ در صفحه S بداخل دایره واحد نگاشته می‌شود و به همین ترتیب می‌توان نشان داد که سمت راست محور $j\omega$ در صفحه S به خارج دایره واحد نگاشته می‌شود. اما اگر $z = e^{j\Omega}$ باشد.

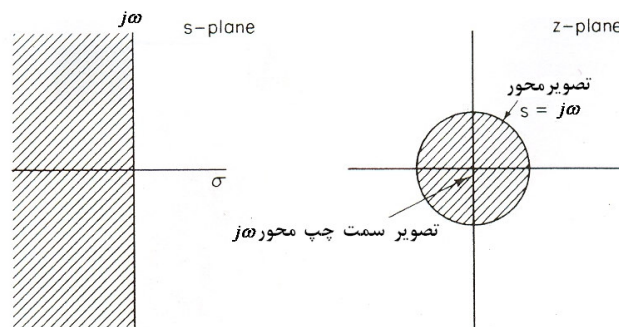
$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\Omega}}{1 + e^{-j\Omega}} = j \frac{2}{T} \text{tg}\left(\frac{\Omega}{2}\right) \quad (113-7)$$

بنابراین دایره واحد روی محور $j\omega$ نگاشته می‌شود. بنابراین توسط تبدیل دوجته رابطه زیر بین فرکانس‌ها پیوسته و گسسته زمانی وجود دارد.

$$\omega = \frac{2}{T} \text{tg}\left(\frac{\Omega}{2}\right) \quad (114-7)$$

$$\Omega = 2 \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad (115-7)$$

خواص نگاشت مذکور در شکل زیر نمایش داده شده است.



شکل (۱۷-۷): نگاشت از صفحه S به صفحه Z توسط رابطه (۱۱۰-۷)

با توجه به اینکه تمام محور $j\omega$ از $-\infty$ تا ∞ روی یک دایره از π تا $-\pi$ نگاشته می‌شود می‌توان مطمئن شد که این تبدیل هر گونه تداخلی را از بین می‌برد. نکته مهمی که باید بدان اشاره کرد این است که با استفاده از تبدیل دوجهته یک سیستم پیوسته زمانی پایدار همواره به یک سیستم پایدار گسسته زمانی تبدیل می‌شود. مثال (۷-۱۷): سیستم زیر را توسط تبدیل دو جهته به سیستم گسسته زمانی معادل تبدیل کنید.

$$H_c(s) = \frac{4}{s+2} \quad \Re[s] > -2$$

حل: با قراردادن $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ در رابطه فوق داریم.

$$\begin{aligned} H_d(z) &= \frac{4}{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 2} \\ &= \frac{4T(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1}) + 2T(1+z^{-1})} \end{aligned}$$

و یا

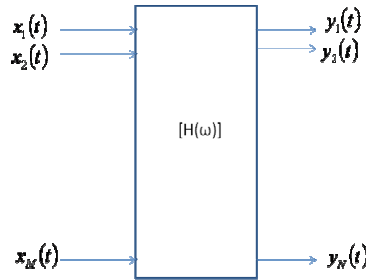
$$\begin{aligned} H_d(z) &= \frac{2T(1+z^{-1})}{(1+T) - (1-T)z^{-1}} \\ &= \frac{2T}{1+T} \frac{(1+z^{-1})}{1 - \frac{1-T}{1+T}z^{-1}} \end{aligned}$$

نهایتاً ناحیه همگرایی بصورت $|z| > \frac{1-T}{1+T}$ بدست می‌آید.

۷-۷ سیستم های چند ورودی و چند خروجی^۴ (کاربرد الکترومغناطیسی)

سیستم های چند ورودی و چند خروجی مدل مناسبی برای بسیاری از سیستم های کاربردی که در مسائل روزمره با آنها مواجه می شویم هستند. تابع انتقال این سیستم ها بصورت یک ماتریس است. در حالت کلی تعداد ورودیها و خروجیها لازم نیست برابر باشند. یک نمونه سیستم با \mathbf{M} ورودی و \mathbf{N} خروجی در شکل زیر نشان داده شده است.

⁴ Multi Input- Multi Output



شکل ۷-۱۸ نمایشی از یک سیستم چند ورودی چند خروجی

رابطه ارتباط دهنده بردارهای ورودی و خروجی این سیستم در حوزه زمان به صورت زیر است.

$$[y(t)] = [h(t)] * [x(t)] \quad (۷-۱۱۶)$$

که در آن

$$[x(t)] = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_M(t) \end{bmatrix} \quad (۷-۱۱۷)$$

$$[y(t)] = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_N(t) \end{bmatrix} \quad (۷-۱۱۸)$$

$$[h(t)] = \begin{bmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & \dots & h_{1(M-1)}(t) & h_{1M}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) & \dots & h_{2(M-1)}(t) & h_{2M}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{(N-1)1}(t) & h_{(N-1)2}(t) & \dots & h_{(N-1)(M-1)}(t) & h_{(N-1)M}(t) \\ h_{N1}(t) & h_{N2}(t) & \dots & h_{N(M-1)}(t) & h_{NM}(t) \end{bmatrix} \quad (۷-۱۱۹)$$

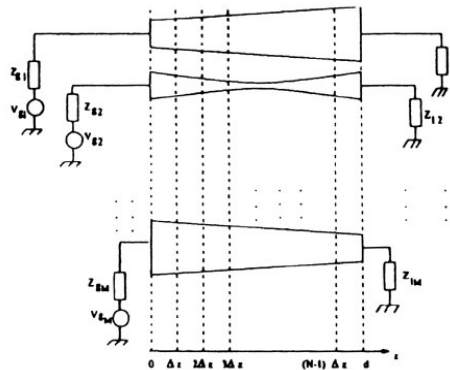
باید توجه داشت که عملیات کانولوشن ماتریسی همانند ضرب ماتریسی تعریف می شود با این تفاوت که به جای ضرب درآیه ها باید آنان را با هم کانوال نمود. مثلا برای یک سیستم با دو ورودی و دو خروجی داریم.

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}(t) * x_1(t) + h_{12}(t) * x_2(t) \\ h_{21}(t) * x_1(t) + h_{22}(t) * x_2(t) \end{bmatrix} \quad (120-7)$$

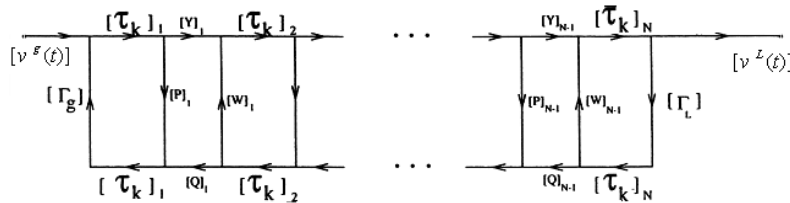
این رابطه در حوزه فرکانس به صورت ضرب ساده ماتریسی تبدیل می شود.

$$[Y(\omega)] = [H(\omega)][X(\omega)] \quad (121-7)$$

یک کاربرد الکترومغناطیسی از این سیستم ها خطوط انتقال تزویج شده غیر یکنواخت می باشد. یک نمونه این خطوط در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل (۷-۱۹) یک سیستم خطوط انتقال تزویج شده به عنوان مثالی از یک سیستم چند ورودی و چند خروجی در مقاله ای که توسط نویسنده به چاپ رسیده است^۵ این سیستم توسط یک سیستم خطی چند ورودی و چند خروجی به صورت شکل زیر مدل شده است.



شکل (۷-۲۰) مدل معادل سیستم نشان داده شده در شکل ۷-۱۹

کلید پارامترهای این مدل به المانهای سیستم اصلی از جمله ماتریس های اندوکتانس و ظرفیت سیستم اصلی مربوط می شوند. آنچه که در این جا مهم است نحوه ارتباط پارامترهای این مدل به سیستم اصلی نیست (علاقمندان به تفصیل بیشتر در این مورد به مقاله مراجعه نمایند). بلکه آنچه مهم است ارتباط کلی ورودی و خروجی در حوزه لاپلاس یا حوزه فرکانس است. همانگونه که مشاهده می شود ورودی و خروجی سیستم بردار هستند و تابع انتقال سیستم یک ماتریس است. ارتباط بردارهای ورودی و خروجی توسط رابطه زیر بدست می آید.

⁵ "Discrete Time Domain Analysis of Nonuniform Lossless Coupled Transmission Lines" Journal of Circuits, Systems, and Computers Vol. 14, No. 5 (2005) 1-14

$$[V^L(s)] = [H^L(s)][V^g(s)] \quad (۱۲۲-۷)$$

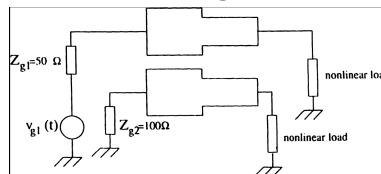
که در آن

$$[V^g(s)] = \mathfrak{S}\{[v^g(t)]\} = \begin{bmatrix} v_{g1}(t) \\ v_{g2}(t) \\ \vdots \\ v_{gM}(t) \end{bmatrix} \quad (۱۲۳-۷)$$

$$[V^L(s)] = \mathfrak{S}\{[v^L(t)]\} = \begin{bmatrix} v_{L1}(t) \\ v_{L2}(t) \\ \vdots \\ v_{LM}(t) \end{bmatrix} \quad (۱۲۴-۷)$$

$$[H^L(s)] = \begin{bmatrix} H_{11}^L(s) & H_{12}^L(s) & \dots & H_{1(M-1)}^L(s) & H_{1M}^L(s) \\ H_{21}^L(s) & H_{22}^L(s) & \dots & H_{2(M-1)}^L(s) & H_{2M}^L(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{(M-1)1}^L(s) & H_{(M-1)2}^L(s) & \dots & H_{(M-1)(M-1)}^L(s) & H_{(M-1)M}^L(s) \\ H_{M1}^L(s) & H_{M2}^L(s) & \dots & H_{M(M-1)}^L(s) & H_{MM}^L(s) \end{bmatrix} \quad (۱۲۵-۷)$$

برای تبدیل این سیستم به یک سیستم گسسته زمان کافی است از تبدیل ضربه استفاده می کنیم. به عنوان مثال برای یک سیستم خطوط انتقال تزویج شده با دو پله به صورت شکل زیر



شکل (۲۱-۷) یک مثال الکترومغناطیسی از سیستم های چند ورودی چند خروجی

و مقادیر اندوکتانس و ظرفیت هر پله به صورت

$$[L]_1 = \begin{bmatrix} 250 & 120 \\ 120 & 347 \end{bmatrix} nH/m,$$

$$[C]_1 = \begin{bmatrix} 205 & -75 \\ -75 & 150 \end{bmatrix} pF/m$$

$$[L]_2 = \begin{bmatrix} 660 & 73 \\ 73 & 490 \end{bmatrix} nH/m,$$

$$[C]_2 = \begin{bmatrix} 65.8 & -5 \\ -5 & 75.8 \end{bmatrix} pF/m.$$

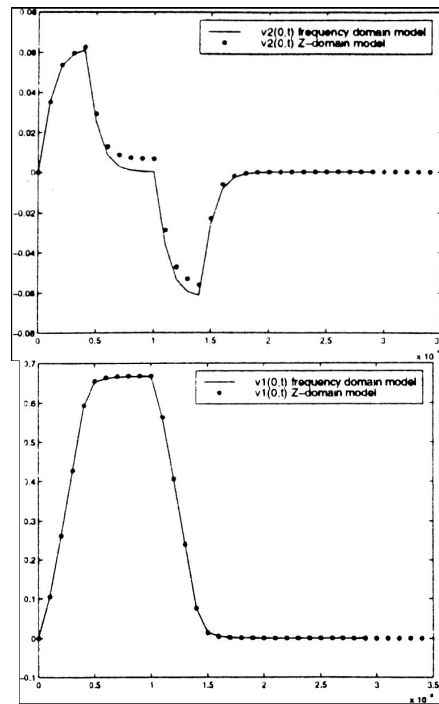
ماتریس تابع انتقال در حوزه گسسته زمان به صورت زیر بدست می آید.

$$H^L(Z) = \frac{\begin{bmatrix} -2.3Z^3 + 0.353Z^2 + 0.026Z & -0.114Z^3 + 0.2Z^2 + 0.009Z \\ -0.435Z^3 + 0.45Z^2 + 0.0122Z & -1.7Z^3 + 0.22Z^2 + 0.004Z \end{bmatrix}}{-3.9Z^4 + 0.99Z^3 + 0.057Z^2 - 0.0007Z + 0.000004}$$

بردار ورودی که در اینجا بردار ولتاژ ورودی است به صورت زیر است.

$$[x(t)] = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

نتیجه محاسبه ولتاژ پایانه ها حاصل از مدل پیوسته و گسسته زمان در شکل های زیر باهم مقایسه شده اند.



شکل ۷-۲۲ مقایسه نتایج حاصل از مدل گسسته زمان با نتایج حاصل از تحلیل پیوسته زمان

دیده می شود که دقت روش گسسته زمان بسیار خوب است و با توجه به سرعت زیاد این روش نسبت به روش پیوسته زمان اهمیت عملی تبدیل سیستم های پیوسته زمان به سیستم های گسسته زمان واضحتر می شود. تبدیل سیستم های پیوسته زمان به سیستم های گسسته زمان علاوه بر الکترومغناطیس در رشته های دیگر علوم نیز کاربرد فراوانی دارد.

۷-۸ مثالهای حل شده

مثال (۷-۱۸): تبدیل Z هر یک از دنباله های زیر را بیابید و ناحیه همگرایی را مشخص کنید.

(الف) $\delta[n]$

(ب) $\delta[n+1]$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \quad (\text{ج})$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] u[n] \quad (\text{د})$$

حل:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = 1 \quad (\text{الف})$$

ناحیه همگرایی تمام صفحه Z خواهد بود.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n+1] z^{-n} = z \quad (\text{ب})$$

فقط یک قطب در بینهایت موجود است پس ناحیه همگرایی تمام صفحه Z است.

(ج)

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} u[-n-1] \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n \\ &= -\left(\frac{1}{1-2z} - 1\right) = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right) \end{aligned}$$

تنها یک قطب در $z = \frac{1}{2}$ و یک صفر در $z = 0$ داریم ناحیه همگرایی بصورت زیر است.

$$|z| < \frac{1}{2}$$

(د) باتوجه به خطی بودن تبدیل Z می توان تبدیل Z مجموع را به مجموع تبدیل Zها تبدیل کرد.

$$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

ناحیه همگرایی فصل مشترک دو ناحیه همگرایی است یعنی $|z| > \frac{1}{2}$.

مثال (۷-۱۹): تبدیل Z دنباله زیر و ناحیه همگرایی آنرا بیابید.

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \{u[n] - u[n-10]\}$$

حل: چون دنباله فوق یک دنباله دوره محدود است داریم.

$$X(z) = \sum_{n=0}^9 \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^9 \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n$$

باتوجه به اینکه رابطه فوق یک سری هندسی است داریم.

$$X(z) = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

اگر توجه کنیم قطب در $z = \frac{1}{2}$ توسط صفر در $z = \frac{1}{2}$ حذف می‌شود، بنابراین $X(z)$ هیچ قطبی نخواهد داشت. بنابراین ناحیه همگرایی تمام صفحه Z خواهد بود.
مثال (۷-۲۰): تبدیل معکوس $X(z)$ را بیابید اگر $x[n]$ راسترو باشد.

$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{z^{-2} - 3z^{-1} + 2}$$

حل: جهت سادگی فرض می‌کنیم $z^{-1} = x$ باشد. در آنصورت می‌توان $X(z)$ را به کسور جزئی برحسب x تجزیه کرد.

$$\frac{1 - 2x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{a}{(x-2)} + \frac{b}{(x-1)}$$

نتیجتاً

$$a = -3$$

$$b = 1$$

بنابراین

$$X(z) = \frac{-3}{z^{-1} - 2} + \frac{1}{z^{-1} - 1}$$

و یا

$$X(z) = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

و ناحیه همگرایی باید شامل خارج دایره واحد شود. چون فرض بر این است که $x[n]$ راسترو است بنابراین ناحیه همگرایی بصورت زیر است.

$$|z| > 1$$

بنابراین

$$x[n] = \left[\frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n - (-1)^n \right] u[n]$$

مثال (۷-۲۱): تبدیل معکوس Z را بیابید اگر

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

و اگر $x[n]$ راسترو باشد.
حل: بسادگی می‌توان $X(z)$ را بصورت زیر نوشت.

$$X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

بنابراین با توجه به اینکه $x[n]$ راسترو است.

$$x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

مثال (۷-۲۲): تبدیل معکوس Z را بیابید اگر

$$X(z) = \log(1 - 2z) \quad |z| < \frac{1}{2}$$

حل: با توجه به ناحیه همگرایی باید سیگنال چپرو باشد. با استفاده از بسط سری توانی داریم.

$$\log(1 - w) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{w^m}{m} \quad |w| < 1$$

بنابراین

$$X(z) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2z)^m}{m} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m}{m} z^m$$

بنابراین

$$x[n] = \frac{2^{-n}}{n} u[-n-1]$$

مثال (۷-۲۳): مطلوبست تبدیل معکوس Z اگر

$$X(z) = \log\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right), \quad |z| > \frac{1}{2}$$

حل: مشابه مثال (۷-۲۲) با استفاده از بسط سری توانی داریم.

$$X(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} z^{-n}$$

بنابراین

$$x[n] = \frac{-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} u[n-1]$$

مثال (۷-۲۴): یک دنباله حقیقی مانند $x[n]$ که دارای تبدیل $X(z)$ است را در نظر بگیرید و نشان دهید که

$$X(z) = X^*(z^*)$$

حل: از تعریف تبدیل Z شروع می‌کنیم.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

نتیجتاً

$$X^*(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](z^*)^{-n}$$

بنابراین

$$X^*(z^*) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = X(z)$$

مثال (۷-۲۵): دو دنباله $x_1[n]$ و $x_2[n]$ توسط رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند.

$$x_2[n] = x_1[-n]$$

مطلوبست رابطه تبدیل Z دو دنباله

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]z^{-n}$$

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[-n]z^{-n}$$

بنابراین با تغییر متغیر $m = -n$ در مجموع دوم داریم.

$$X_2(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]z^m$$

بنابراین

$$X_2(z) = X_1(z^{-1})$$

تمرین های حل نشده

۱. دو دنباله $x_1[n]$ و $x_2[n]$ توسط رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند.

$$x_2[n] = (j2)^{n-1} x_1[-n]$$

مطلوبست ارتباط تبدیل Z دو دنباله.

۲. اگر نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرایی تبدیل سیگنال $x_1[n]$ دارای سه قطب در $z = 0.5$ و $z = \pm j1.5$ و یک صفر در $z = -1$ باشد مطلوبست نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرایی مربوط به

$$x_2[n] = (-3)^n x_1[-n]$$

۳. چگونه می‌توان از فقط محل صفر و قطب های یک تبدیل به حقیقی بودن سیگنال در حوزه زمان پی برد.

۴. تبدیل Z دنباله های زیر را بگیرید.

$$x[n] = (1/2)^{2n} \cos(2n)u[n]$$

$$x[n] = (1/8)^{2n} (2n)u[n]$$

$$x[n] = (1/4)^n \{u[n] - u[n-100]\}$$

۵. تبدیل معکوس Z بگیرید.

$$X(z) = \frac{z-0.5}{(z+0.5)^2} \quad |z| > 0.5$$

$$X(z) = \log[z(z-0.25)] \quad |z| > 0.25$$

$$X(z) = \frac{2z-0.5}{(z/2-0.5)^2} \quad |z| > 1$$

۶. تمام سیگنالهای $x_1[n]$ ممکن برای نمودار صفر و قطبی که در سوال دوم مطرح شده است را بنویسید.

۷. تبدیل معکوس $X(z)$ را بیابید اگر $x[n]$ راست و باشد

$$X(z) = \frac{1-2z^{-1}}{z^{-2}-z^{-1}+1}$$

۸. اگر

$$\varphi_{xx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]x[n+k]$$

مطلوبست تبدیل Z سیگنال $\varphi_{xx}[n]$.

۹. مطلوبست تبدیل Z سیگنال های زیر بر حسب تبدیل Z دنباله $x[n]$.

$$y[n] = \begin{cases} x[n/2] & n, \text{ even} \\ 0 & n, \text{ odd} \end{cases}$$

$$y[n] = x[2n]$$

۱۰. یک دنباله راست رو دارای تبدیل Z زیر است.

$$X(z) = \frac{3z^{-10} + z^{-7} - 5z^{-2} + 4z^{-1} + 1}{z^{-10} - 5z^{-7} + z^{-3}}$$

مطلوبست $x[n]$ برای $n > 0$.

۱۱. $H(z)$ مبین تابع انتقال یک سیستم علی و پایدار غیر همانی است ($H(z) \neq 1$). ورودی این سیستم شامل چهار عبارت است. یکی از آنها یک ضربه و دیگری یک نمایی مختلط به صورت $(r_0 e^{j\Omega_0})^n$ و r_0 و Ω_0 اعداد ثابت حقیقی غیر صفر هستند) است. اما از جملات سوم و چهارم ورودی اطلاعی در دست نداریم. شکل کلی ورودی به صورت زیر است.

$$x[n] = \delta[n] + (r_0 e^{j\Omega_0})^n + f_1[n] + f_2[n]$$

که در آن $f_1[n]$ و $f_2[n]$ توابع مجهولی هستند که باید تعیین شوند. خروجی این سیستم به ورودی فوق الذکر برابر است با

$$y[n] = -6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + k_1 e^{4n} \cos[3n] - k_2 e^{4n} \sin[3n] + \delta[n] + 7\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

که در آن k_1 و k_2 ضرایب مجهول با دامنه غیر واحد ($|k_1| \neq 1, |k_2| \neq 1$) هستند که باید تعیین شوند. مطلوبست تعیین دقیق ورودی، ضرایب مجهول خروجی و $H(z)$.
۱۲. دنباله های $x[n]$ و $y[n]$ با تبدیلات \mathbf{Z} و نواحی همگرایی داده شده مفروضند.

$$X(z); R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$$

$$Y(z); R_{y^-} < |z| < R_{y^+}$$

مطلوبست تبدیل \mathbf{Z} و ناحیه همگرایی سیگنال $r[n] = x[n]y[n]$ برحسب تبدیلات و نواحی همگرایی داده شده برای $x[n]$ و $y[n]$.

