فاطمه سوداگری 90.1.27

سری اول تمرینات کنترل مدرن

(1):

$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\|x_1\|_1 = \sum_i |x_i| = 2+3+1 = 6$$

$$\|x_1\|_2 = \sqrt{x^T . x} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14} = 3.74$$

$$\|x_1\|_\infty = \max_i |x_i| = |-3| = 3$$

$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\|x_2\|_1 = 1+1+1 = 3$$

$$\|x_2\|_2 = \sqrt{[1\ 1\ 1]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \sqrt{3} = 1.7$$

$$\|x_2\|_\infty = 1$$

(2

$$A_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\xrightarrow{c_3+c_2+c_1 \to c_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2 \to c_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[+c_2+c_3]{-c_1+c_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow Rank(A_1) = 2$$

$$\nu(A) = n - Rank(A) = 3-2 = 1$$

$Ax = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \boxed{x_1 = 1}^{*} \end{cases} \Rightarrow N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

فرض می‌کنیم

$$A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 \to c_1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-r_1+r_3]{-2r_1+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{3}{5}r_1+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{4}{5}r_2+r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{2}{5}c_2+c_3]{-\frac{3}{5}c_1+c_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow[-5r_3]{-\frac{1}{5}r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$Rank(A_2) = 3$

$\nu(A) = n - Rank(A) = 3-3 = 0$ پوچی ندارد

$$A_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$det(A_3) = 0 \Rightarrow Rank(A_3) \leq 3$ ①

در این جا برعکس می‌توانیم حداقل یک ماتریس 3×3 که دترمینانش مخالف صفر است بدست آوریم. مثلاً

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \Rightarrow Rank(A_3) \geq 3 \quad ②$$

$$\xrightarrow{①,②} Rank(A) = 3$$

$$\nu(A_3) = n - Rank(A_3) = 4-3 = 1$$

$A_3 x = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$x_4 = 0$

$\boxed{x_1 = 1}$ * فرض می‌کنیم

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ -x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \end{matrix}$$

$$N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

(4) (الف)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -3x_1 + 3x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

★ معادلات سازگارند و دستگاه جواب دارد.

(ب)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -3x_1 + 3x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -3x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 2/3 \\ x_2 = 1/3 \end{matrix} \rightarrow$$

★ این دو ریشه در معادله سوم صدق نمی‌کند.
بنابراین معادلات سازگار نیستند و دستگاه جواب ندارد.

(5)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ -x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

$\boxed{x_1 = -1}$ فرض می‌کنیم★ $\Rightarrow \begin{cases} -x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x_2 = 0}\ \boxed{x_3 = 0}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$: (6)

$$(A_1 - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 & 10 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \ , \quad \lambda_2 = 2 \ , \quad \lambda_3 = 3$$

فرم جردن ندارد.

بلکه فرم قطری دارد.

$$\hat{A}_1 = T^{-1} . A . T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(A_2 - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_2 - \lambda I) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \ , \quad \lambda_3 = 2$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{Rank}(A_2 - \lambda I) = 1 \\ \nu(A_2 - \lambda I) = n - R = 2 = \alpha \\ k - \alpha = 2 - 2 = 0 \end{cases}$$

معادله تعمیم یافته نداریم

$$(A_2 - \lambda I) v_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A_2 - \lambda_3 I) V_3 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \Rightarrow x = z \\ y = 0 \end{cases} \quad V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$J = T^{-1}.A.T = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 20 & 16 \\ 0 & -25 & -20 \end{bmatrix}$$

$$(A_3 - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 4 & 3 \\ 0 & 20-\lambda & 16 \\ 0 & -25 & -20-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_3 - \lambda I) = -\lambda^3 = 0$$

$$\lambda_{1,2,3} = 0$$

$\lambda = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 20 & 16 \\ 0 & -25 & -20 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} Rank(A_3 - \lambda I) = 2 \\ \nu(A_3 - \lambda I) = 3 - 2 = 1 = \alpha \\ k - \alpha = 3 - 1 = 2 \end{cases}$$

دو معادله تعمیم یافته داریم.

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 20 & 16 \\ 0 & -25 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4y + 3z = 0 \\ 20y + 16z = 0 \\ -25y - 20z = 0 \end{cases}$$

if $x = 1$ $\quad V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 20 & 16 \\ 0 & -25 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4y + 3z = 1 \\ 20y + 16z = 0 \\ -25y - 20z = 0 \end{cases}$$

if $x = 1$ $\quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ +4 \\ -5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 20 & 16 \\ 0 & -25 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4y + 3z = 1 \\ 20y + 16z = -4 \\ -25y - 20z = 5 \end{cases}$$

if $x = 1$ $\quad V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -9 \end{bmatrix}$

$$J = T^{-1}.A.T = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A_4 - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_4 - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_{2,3} = 1$$

$$\lambda_{1,2,3} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Rank}(A_4 - \lambda I) = 2 \\ \nu(A_4 - \lambda I) = 3-2 = 1 = \alpha \\ k - \alpha = 3 - 1 = 2 \rightarrow \text{۲ دو معادله تعمیم یافته نیاز داریم.} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{if } z = 1 \quad V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{if } z = -1 \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 1 \\ -x + y = 1 \\ x = -1 \end{cases} \quad \text{if } z = -0.5 \quad V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$J = T^{-1} \cdot A_4 \cdot T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(7)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda I - A_1) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda+6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - A_1) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = -1 \ , \ \lambda_2 = -2 \ , \ \lambda_3 = -3$$

$$\lambda_1 = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & 11 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -v_1 - v_2 = 0 \\ -v_2 - v_3 = 0 \\ 6v_1 + 11v_2 + 5v_3 = 0 \end{cases} \quad \text{if } v_3 = -1 \quad V_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 6 & 11 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2v_1 - v_2 = 0 \\ -2v_2 - v_3 = 0 \\ 6v_1 + 11v_2 + 4v_3 = 0 \end{cases} \quad \text{if } v_3 = -1 \quad V_2 = \begin{bmatrix} -1/4 \\ +1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = -3 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 6 & 11 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -3v_1 - v_2 = 0 \\ -3v_2 - v_3 = 0 \\ 6v_1 + 11v_2 + 3v_3 = 0 \end{cases} \quad \text{if } v_3 = -1 \quad V_3 = \begin{bmatrix} -1/9 \\ +1/3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda I - A_2) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda+2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - A_2) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 9\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = -2 \ , \ \lambda_{2,3} = -1.5 \pm 0.8j$$

فرم قطری ندارد و فرم قطری بلوکی دارد.

$$\lambda_1 = -2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -v_1 - 2v_2 + v_3 = 0 \\ -v_1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{if } v_3 = 1 \quad V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{2,3} = -1.5 + 0.8i \Rightarrow \begin{bmatrix} -0.5+0.8i & -2 & 1 \\ 0 & 0.5+0.8i & 0 \\ -1 & 0 & 0.5+0.8i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} (-0.5+0.8i)v_1 - 2v_2 + v_3 = 0 \\ (0.5+0.8i)v_2 = 0 \quad \rightarrow v_2 = 0 \quad \Rightarrow V_{2,3} = \begin{bmatrix} -1-0.8i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ -v_1 + (0.5+0.8i)v_3 = 0 \end{cases}$$

$$\hat{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1.5 & 0.8 \\ 0 & -0.8 & -1.5 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -8 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda I - A_3) = \begin{bmatrix} \lambda-7 & -4 & 8 \\ -4 & \lambda+8 & 1 \\ 4 & 1 & \lambda+8 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - A_3) = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 15\lambda - 985 = 0$$

$$\lambda_1 = 9.8 \quad , \lambda_2 = -9.8 \quad , \lambda_3 = -9$$

فرم جردن دارد.

$$\lambda_1 = 9.8 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2.8 & -4 & 8 \\ -4 & 17.8 & 1 \\ 4 & 1 & 17.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2.8v_1 - 4v_2 + 8v_3 = 0 \\ -4v_1 + 17.8v_2 + v_3 = 0 \\ 4v_1 + v_2 + 17.8v_3 = 0 \end{cases}$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} -4.7 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -9.8 \Rightarrow \begin{bmatrix} -16.8 & -4 & 8 \\ -4 & -1.8 & 1 \\ 4 & 1 & -1.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.7 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow V_2 = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = -9 \Rightarrow \begin{bmatrix} -16 & -4 & 8 \\ -4 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4.12 \\ 0.88 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} 9.8 & 0 & 0 \\ 0 & -9.8 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

(8)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -13 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-4 & 13 \\ 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad , \lambda_2 = -1 \quad , \lambda_3 = 4$$

... قطری دارد .

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 13 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -4y + 13z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 13 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -z - y = 0 \\ -5y + 13z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \quad \text{if } x = 1 \Rightarrow V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 13 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ 13y = 0 \\ -y + 4z = 0 \end{cases} \quad V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = T^{-1} . A . T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(9

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A^{100} = ?$$

$$det(\lambda I - A) = det \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad , \lambda_{2,3} = 1$$

$$F(A) = A^{100}$$

$$h(\lambda) = \beta_2 \lambda^2 + \beta_1 \lambda + \beta_0 \quad , F(\lambda) = \lambda^{100}$$

$F^{l}(\lambda i) = h^{l}(\lambda i)$

$$F(\lambda_1 = 0) = h(\lambda_1 = 0) = (0)^{100} \Rightarrow \beta_0 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} F(\lambda_2) = h(\lambda_2) \rightarrow \beta_2 + \beta_1 = 1 \\ F'(\lambda_2) = h'(\lambda_2) \rightarrow 2\beta_2 + \beta_1 = 100 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta_1 = -98 \\ \beta_2 = 99 \end{array}\right.$$

$$F(A) = A^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{100} = h(A) = \beta_2 A^2 + \beta_1 A + \beta_0 \cdot I$$

$$= 99 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 - 98 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 99 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$e^{At} = ?$

$$F(A) = e^{At} \Rightarrow F(\lambda) = e^{\lambda t}$$

$$h(\lambda) = \beta_2 \lambda^2 + \beta_1 \lambda + \beta_0$$

$$F(\lambda_1 = 0) = h(\lambda_1 = 0) = e^0 = 1 = \beta_0$$

$$F'(\lambda_2) = h'(\lambda_2) \Rightarrow t e^{\lambda t} = te^t = 2\beta_2 + \beta_1 + 1$$

$$F(\lambda_2) = h(\lambda_2) \Rightarrow e^t = \beta_2 + \beta_1 + 1$$

$$\left\{\begin{array}{l} \beta_1 = e^t - 1 \\ \beta_2 = e^t(1-t) \end{array}\right.$$

$$e^{At} = \beta_2 A^2 + \beta_1 A + \beta_0 \cdot I$$

$$= e^t(1-t) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^t - 1) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^t - te^t & 2e^t - te^t - 1 & e^t - te^t \\ 0 & 1 & 2e^t - te^t - 1 \\ 0 & 0 & 2e^t - te^t \end{bmatrix}$$

(10

$$A=\begin{bmatrix}2&3&2\\3&1&0\\2&0&2\end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda I)=\begin{bmatrix}2-\lambda&3&2\\3&1-\lambda&0\\2&0&2-\lambda\end{bmatrix}\Rightarrow \det(A-\lambda I)=-\lambda^3+5\lambda^2+5\lambda-18=0$$

$$\lambda_1=-2 \qquad \lambda_{2,3}=\frac{-7\pm\sqrt{13}}{-2}$$

نامعین است .

$$B=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\-1&0&2\end{bmatrix}$$

$$(B-\lambda I)=\begin{bmatrix}-\lambda&0&-1\\0&-\lambda&0\\-1&0&2-\lambda\end{bmatrix}\Rightarrow \det(B-\lambda I)=\lambda(\lambda^2-2\lambda-1)=0$$

$$\lambda_1=0 \qquad \lambda_{2,3}=1\pm\sqrt{2}$$

نامعین است .

(11

$$A_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix} \qquad \|A_1\|_\infty=6+11+6=23$$

$$\|A_1\|_2=\max\sqrt{\operatorname{eig}(A_1^T\cdot A_1)}$$

$$\begin{bmatrix}0&0&-6\\1&0&-11\\0&1&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}36&66&36\\66&122&66\\36&66&37\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}36-\lambda&66&36\\66&122-\lambda&66\\36&66&37-\lambda\end{bmatrix}\Rightarrow \det(A_1^TA_1-\lambda I)=0$$

$$\|A_1\|_1 = 1+0+11 = 12$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \|A_2\|_\infty = 2+2 = 4$$

$$\|A_2\|_1 = 1+2+1 = 4$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 8 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 8-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 5-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_2^T \cdot A_2 - \lambda I) = 0$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -8 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{bmatrix} \qquad \|A_3\|_\infty = 7+4+8 = 19$$

$$\|A_3\|_1 = 8+8+1 = 17$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -8 & -1 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 4 & -8 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 & 0 & -28 \\ 0 & 81 & -16 \\ -28 & -16 & 129 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 81-\lambda & 0 & -28 \\ 0 & 81-\lambda & -16 \\ -28 & -16 & 129-\lambda \end{bmatrix}$$

تمرینات کتاب :

: (8-1)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2 \to c_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2c_1+c_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Rank(A_1) = 2 \\ V(A_1) = 3-2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad V_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_1+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_3 - c_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{5}r_3]{\frac{1}{2}r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-6c_1+c_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Rank(A_2) = 3 \\ V(A) = 0 \end{cases}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-3r_1+r_4]{r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2C_2+C_3]{-2C_1+C_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{Rank}(A_3) = 2 \\ \nu(A_3) = 3 - 2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ -x + z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ 3x + 8y + z = 0 \end{cases}$$

if $z = 1$ $\quad V_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(A_4) \neq 0$

$$\begin{cases} \text{Rank}(A_4) = 3 \\ \nu(A_4) = 5 - 3 = 2 \end{cases}$$

با تشکیل دستگاه معادلات $AX=0$ خواهیم داشت :

$$V_1 = \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ 1 \\ -0.03 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad V_2 = \begin{bmatrix} -0.7 \\ 6 \\ 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(10-1) الف

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & -5 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2.5 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

if $x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{2}{5}$, $x_1 = \frac{6}{5}$

ب)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ \left.\begin{array}{l} -2x_3 = -2 \\ -8x_3 = -8 \end{array}\right\} \rightarrow x_3 = 1 \quad , \text{if } x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \end{cases}$$

دستگاه بیشمار جواب دارد و یک جواب آن $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ است .

: (2-2)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad , \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \; , \; x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+6 & -4 \\ 2 & s \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\underbrace{s(s+6)+8}_{A}} \begin{bmatrix} s & 4 \\ -2 & s+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{A} & \frac{4}{A} \\ \frac{-2}{A} & \frac{s+6}{A} \end{bmatrix} = \Phi(s)$$

$$x(s) = \Phi(s) \cdot x(0) + \Phi(s) \cdot B \cdot U(s)$$

$$x(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{A} & \frac{4}{A} \\ \frac{-2}{A} & \frac{s+6}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{s}{A} & \frac{4}{A} \\ \frac{-2}{A} & \frac{s+6}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{s}$$

$$x(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{2s^2+4}{s(s+4)(s+2)} \\ \dfrac{-3s+6}{s(s+4)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0.5 + 4.5e^{-4t} - 3e^{-2t} \\ 0.75 + 2.25e^{-4t} - 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

(5-2)

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-5 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}u(t) \quad , \quad y(t)=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}x(t)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=C(SI-A)^{-1}\cdot B+D$$

$$\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-5 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s+5 & 1\\ -3 & s+1\end{bmatrix}\Rightarrow \frac{1}{\underbrace{(s+5)(s+1)+3}_{A}}\begin{bmatrix}s+1 & -1\\ 3 & s+5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{s+1}{A} & \frac{-1}{A}\\ \frac{3}{A} & \frac{s+5}{A}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{s+1}{A} & \frac{-1}{A}\\ \frac{3}{A} & \frac{s+5}{A}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{12s+59}{s^2+6s+2}\end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{12s+59}{s^2+6s+2}$$

(6-2)

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 4\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}x(t)$$

$$\Phi(s)=(sI-A)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix}s & 0 & 0\\ 0 & s & 0\\ 0 & 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 4\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s+1 & 0 & 0\\ 0 & s+4 & -4\\ 0 & 1 & s\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس ماتریس}}\ \Phi(s)=\begin{bmatrix}\frac{4}{s^3+5s^2-4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{-1}{s^3+5s^2-4} & \frac{4}{s^3+5s^2-4}\end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ (7-2)

$$\Phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \cdots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t & t \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & t^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t & (t + \frac{1}{2} t^2) \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = e^{At}$$

حل تمرین های فصل کنترل پذیری و رویت پذیری

(2-3) کنترل پذیری و رویت پذیری سیستم داده شده با معادلات حالت و خروجی زیر را بررسی کنید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$\Phi_c = \left[B \;\vdots\; AB \right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad Rank(\Phi_c) = 2 \quad \text{full Rank}$$

ماتریس کنترل پذیری سیستم full Rank است پس سیستم کنترل پذیر است.

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad Rank(\Phi_o) = 2 \quad \text{full Rank}$$

ماتریس رویت پذیری سیستم full Rank است پس سیستم رویت پذیر کامل حالت است.

(3-3) معادله حالت سیستم زیر را بصورت کانونیکال کنترل پذیری تبدیل کرده و مود کنترل ناپذیر را شناسایی کنید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -14 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \qquad Rank(\Phi_c) = 2$$

سیستم کنترل پذیر کامل حالت نیست و یک مود کنترل ناپذیر دارد.

$$T = \left[\, T_1 \;\vdots\; T_2 \,\right] \quad \Rightarrow \quad T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = T^{-1} \cdot B$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

فرم کانونیکال کنترل پذیری بصورت زیر است :

$$\dot{x} = \left[\begin{array}{cc:c} \overbrace{\begin{matrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{matrix}}^{A_{11}} & & \begin{matrix} 2 \\ -2 \end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & & \underbrace{1}_{A_{22}} \end{array}\right] x + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right] u$$

مد کنترل ناپذیر سیستم مقدار ویژه ماتریس A_{22} یعنی ($\lambda = 1$) است و پایدارناپذیر است. همچنین مدهای کنترل پذیر آن ($\lambda_{1,2} = 2$) است که همان مقادیر ویژه ماتریس A_{11} است.

(8-3) مدل فضای حالت سیستمی عبارت است از :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

آن مقدار از α که سیستم را رؤیت ناپذیر می‌کند پیدا کنید.

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha-2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ \alpha-3 & -2 & 0 \\ -\alpha-3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

برای اینکه ماتریس رویت پذیری FullRank باشد
دترمینان آن باید صفر نشود .

$$|\Phi_o| = 4\alpha - 28 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\alpha = 7}$$

(9-3) نشان دهید که سیستم توصیف شده با معادله حالت زیر کاملاً کنترل پذیر حالت است .

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\Phi_c = [\,B \quad AB\,] \quad \Rightarrow \quad \Phi_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{Rank}(\Phi_c) = 2$

سیستم کنترل پذیر کامل حالت است .

(12-3) سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} u$$

کنترل پذیری کامل حالت را برای مقادیر مختلف a و b و c بررسی کنید .

برای اینکه سیستم کنترل پذیر کامل حالت باشد سطر آخر بلوک جردن (تک بلوک جردن) را پیدا کرده و سطر متناظر با این سطر در ماتریس B باید ناصفر باشد و بقیه درایه‌ها در ماتریس B بی اهمیت اند .

$a, b \rightarrow$ هرچه می‌توانند باشند و $c \neq 0$

(3-16) معادله سیستمی عبارتست از

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

این سیستم کنترل پذیر نیست .

الف) بردارهایی که زیرفضای کنترل پذیر سیستم را span می کنند تعیین کنید .

ب) با بکارگیری بردارهای تعیین شده در (الف) و تعریف بردارهای مناسب اضافی، معادله حالت را جهت کنترل پذیری تبدیل کرده، مودهای کنترل پذیر و کنترل ناپذیر سیستم را شناسایی کنید .

پ) آیا این سیستم پایدارسازی پذیر است .

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Rank}(\Phi_c) = 1$$

سیستم کنترل ناپذیر است و دو مود کنترل ناپذیر و یک مود کنترل پذیر دارد .

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & \vdots & T_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\hat{B} = T^{-1} . B$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

فرم کانونیکال کنترل پذیری بصورت زیر است :

A_{11}

$$\dot{x} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

A_{22}

مد کنترل ناپذیر سیستم مقادیر ویژه ماتریس A_{22}

یعنی ($\lambda_{1,2} = -0.5 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} j$) است و پایدار پذیر است . همچنین مد کنترل پذیر سیستم

مقادیر ویژه ماتریس A_{11} یعنی ($\lambda = 1$) است .

حل تمرین های فصل چهارم (تحقق) :

(1-4) : برای تابع تبدیل داده شده زیر

$$g(s) = \frac{1}{s+3}$$

الف) یک تحقق کنترل پذیر و رویت ناپذیر پیدا کنید.

برای رویت ناپذیری باید صورت و مخرج تابع تبدیل را در عبارتی ضرب کنیم. در اینصورت سیستم دارای صفر و قطب یکسان است و در فرم کانونیکال کنترل پذیری، رویت ناپذیر می گردد.

$$g(s) = \frac{(s+A)}{(s+3)(s+A)} = \frac{s+A}{s^2+(3+A)s+3A}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3A & -(3+A) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} A & 1 \end{bmatrix} x$$

ب) یک تحقق کنترل ناپذیر و رویت پذیر پیدا کنید.

تحقق کنترل ناپذیر و رویت پذیر دوگان تحقق بالا است.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -3A \\ 1 & -(3+A) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} A \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

ج) تحقق کنترل ناپذیر و رویت ناپذیر پیدا کنید.

تحقق کنترل ناپذیر و رویت ناپذیر را می توان با تحقق سری موازی بدست آورد.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -A \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} x$$

$$\frac{s+A}{(s+3)(s+A)} = \frac{1}{s+3} + \frac{0}{s+A}$$

$$b_1 c_1 = k_1 \Rightarrow b_1 c_1 = 1 \Rightarrow b_1 = c_1 = 1$$

$$b_2 c_2 = k_2 \Rightarrow b_2 c_2 = 0 \Rightarrow b_2 = 0 \quad , \quad c_2 = 0$$

برای اینکه سیستم کنترل ناپذیر و رویت ناپذیر شود باید b_2 و c_2 هر دو صفر شوند.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

(3-4): الف) تحقق های کانونیکال کنترل کننده و کنترل پذیری تابع تبدیل زیر را بدست آورید.

$$g(s) = \frac{2}{(s+1)^2(s+3)}$$

$$g(s) = \frac{2}{s^3+5s^2+7s+3}$$

1) تحقق کانونیکال کنترل کننده :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -7 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

2) تحقق کانونیکال کنترل پذیری :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x$$

ب) تحقق های کانونیکال رویتگر و رویت پذیری تابع تبدیل زیر را بدست آورید.

$$g(s) = \frac{s^3+8s^2+17s+8}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$g(s) = \frac{s^3+8s^2+17s+8}{s^3+6s^2+11s+6}$$

۱) تحقق کانونیکال رویتگر :

$$g(s) = 1 + \frac{2s^2+6s+2}{s^3+6s^2+11s+6}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + 1.u$$

۲) تحقق کانونیکال رویت‌پذیری :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 18 \\ 36 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + 1.u$$

(5-4) : حداقل دو تحقق برای ماتریس های تابع تبدیل زیر بدست آورید .

الف)

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

(پ) :

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s^2+s+3} \\[2ex] \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{(s^2+s+3)(s+1)} \begin{bmatrix} (s+1) \\[1ex] (s^2+s+3) \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

(پ)

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{2s}{(s+1)(s+2)(s+3)} \\[2ex] \dfrac{s^2+2s+2}{s(s+1)^2(s+4)} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{s(s+1)^2(s+2)(s+3)(s+4)} \begin{bmatrix} 2s^2(s+1)(s+4) \\[2ex] (s^2+2s+2)(s+2)(s+3) \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{s^6+11s^5+45s^4+85s^3+74s^2+24s}\begin{bmatrix} 2s^4+10s^3+8s^2 \\ s^4+7s^3+18s^2+22s+12 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -24 & -74 & -85 & -45 & -11 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & 10 & 2 & 0 \\ 12 & 22 & 18 & 7 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)} & \frac{s^2+2s+2}{s(s+1)^2(s+4)} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{s(s+1)^2(s+3)(s+2)(s+4)}\begin{bmatrix} s(s+1)(s+4)(2s+3) & (s+2)(s+3)(s^2+2s+2) \end{bmatrix}$$

$$D(s) = s^6 + 11s^5 + 45s^4 + 85s^3 + 74s^2 + 24s$$

$$B_1(s) = 2s^4 + 13s^3 + 23s^2 + 12s$$

$$B_2(s) = s^4 + 7s^3 + 18s^2 + 22s + 12$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -74 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -85 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -11 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 22 \\ 23 & 18 \\ 13 & 7 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4-6) : یک تحقق مینیمال برای ماتریس های تابع تبدیل زیر بدست آورید .

الف)

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s+1} & \frac{1}{s+3} \\ \frac{s}{s+1} & \frac{s+1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{D} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+3} \\ \frac{-1}{s+1} & \frac{-1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+1)(s+3)} \begin{bmatrix} s+3 & s+1 \end{bmatrix} \\ \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} -(s+2) & -s+1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] x + \left[\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ \hline -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{array}\right] u$$

$$y = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u$$

ب)

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s^2+1}{s^2} & \dfrac{2s+1}{s^2} \\ \dfrac{s+3}{s^2} & \dfrac{2}{s} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s^2} & \dfrac{2s+1}{s^2} \\ \dfrac{s+3}{s^2} & \dfrac{2}{s} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s^2} \begin{bmatrix} 1 & 2s+1 \end{bmatrix} \\ \dfrac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s+3 & 2s \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] x + \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ \hline 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{array}\right] u$$

$$y=\left[\begin{array}{cc|cc}0&1&0&0\\0&0&0&1\end{array}\right]x+\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}u$$

(4-8): چهار تحقق کانونیکال برای $\frac{1}{s^4}$ بدست آورید.

الف) فرم کانونیکال کنترل کننده:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0&0&0\end{bmatrix}x$$

ب) فرم کانونیکال رویتگر:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0&0&0&1\end{bmatrix}x$$

ج) فرم کانونیکال رویت‌پذیری:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}\beta_3\\\beta_2\\\beta_1\\\beta_0\end{bmatrix}u$$

$$\begin{bmatrix}\beta_3\\\beta_2\\\beta_1\\\beta_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}u\quad,\quad y=\begin{bmatrix}1&0&0&0\end{bmatrix}x$$

۴) فرم کانونیکال کنترل پذیر :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

5) فرم سری ـ موازی :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

این تحقق کنترل پذیر و رویت پذیر است .

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

حل تمرین های فصل پایداری

(5-1) مشخص کنید علامت صورت های درجه دوم $V(x)=x^T \cdot A \cdot x$ که در آن ماتریس A بصورت های زیر داده شده است را تعیین کنید.

الف)

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_{11} = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta_3 = |A| = 10$$

A مثبت نیمه معین است. $[\Delta_1 \geq 0 ، \Delta_2 \geq 0 \text{ و } \Delta_3 \geq 0]$

ب)

$$A=\begin{bmatrix} 10 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_{11} = 10$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 10 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 10 \quad , \quad \Delta_3 = |A| = 48$$

A مثبت معین است $(\Delta_1 > 0 ، \Delta_2 > 0 \text{ و } \Delta_3 > 0)$.

پ)

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \Delta_1 = a_{11} = 2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -12 \quad \text{و} \quad \Delta_3 = |A| = -30$$

A نامعین است.

(ت)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \Delta_1 = a_{11} = 4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8 \quad , \quad \Delta_3 = |A| = 0$$

A نامعین است.

(2-5): برای دو سیستم زیر

$$v(x) = 6k x_1^2 + 2k x_1 x_2 + 41 x_2^2 + 12 x_2 x_3 + x_3^2$$

نشان دهید که $v(x)$ برای همان مقادیری از k که $\dot{v}(x)$ منفی معین است مثبت معین باقی می‌ماند. همچنین نشان دهید که سیستم‌ها پایدار مجانبی فراگیر می‌باشند.

الف)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & -1 & -2 \end{bmatrix} x$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\dot{x}_3 = -k x_1 - x_2 - 2x_3$$

$$\dot{v}(x) = 12k x_1 \cdot x_2 + 2k x_2^2 + 2k x_1 \cdot x_3 + 82 x_2 \cdot x_3 + 12 x_3^2 + 12 x_2(-k x_1 - x_2 - 2x_3) + 2x_3(-k x_1 - x_2 - 2x_3)$$

$$\dot{v}(x) = (2k - 12) x_2^2 + 56 x_2 \cdot x_3 + 8 x_3^2$$

شرط پایداری مجانبی : $\dot{v}(x) < 0 \Rightarrow 2k - 12 < 0 \Rightarrow k < 6$

شرط پایداری مجانبی فراگیر : $\dot{V}(x) \leq 0 \Rightarrow 2k - 12 \leq 0 \Rightarrow \boxed{k \leq 6}$

$$\dot{V}(x) = 0 \Rightarrow (2k-12)x_2^2 + 56\,x_2 \cdot x_3 + x_3^2 = 0$$

$\dot{V}(x)$ به ازای $x_1 \neq 0$ و $x_2 = 0$ و $x_3 = 0$ دارای ریشه صفر است و پاسخ صفر
$\dot{V}(x)$ پاسخ (مسیر) سیستم نیست زیرا معادله $\dot{x}_3 = -kx_1 - x_2 - 2x_3$ تنها زمانی برقرار است
که x_1 صفر باشد پس سیستم پایدار مجانبی فراگیر است .

ب)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & -5 & -6 \end{bmatrix} x$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\dot{x}_3 = -kx_1 - 5x_2 - 6x_3$$

$$\dot{V}(x) = 12kx_1 \cdot x_2 + 2kx_2^2 + 2kx_1 \cdot x_3 + 82x_2 \cdot x_3 + 12x_3^2 + 12x_2(-kx_1 - 5x_2 - 6x_3) + 2x_3(-kx_1 - 5x_2 - 6x_3)$$

$$\dot{V}(x) = (2k - 60)x_2^2$$

شرط پایداری مجانبی : $\dot{V}(x) < 0 \Rightarrow 2k - 60 < 0 \Rightarrow \boxed{k < 30}$

شرط پایداری مجانبی فراگیر : $\dot{V}(x) \leq 0 \Rightarrow \boxed{k \leq 30}$

$$\dot{V}(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \\ \dot{x}_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$\dot{v}(x)$ به ازای $x_1 \neq 0$ و $x_3 \neq 0$ و $x_2 = 0$ ، صفر می‌شود. لذا پاسخ غیرصفر $\dot{v}(x)$ مسیری از سیستم نیست زیرا معادله $\dot{x}_3 = -kx_1 - 5x_2 - 6x_3$ تنها زمانی برقرار است که x_1 صفر باشد.

(3-5) سیستم و تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & -1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$v(x) = 2kx_1^2 + 2kx_1 \cdot x_2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\dot{x}_3 = -kx_1 - x_2$$

$$\dot{v}(x) = 4kx_1 \cdot \dot{x}_1 + 2k\dot{x}_1 \cdot x_2 + 2k\dot{x}_2 \cdot x_1 + 2x_2 \cdot \dot{x}_2 + 2x_3 \cdot \dot{x}_3$$

$$\dot{v}(x) = 4kx_1 \cdot x_2 + 2kx_2^2 + 2kx_1 \cdot x_3 + 2x_2 \cdot x_3 + 2x_3(-kx_1 - x_2)$$

$$\dot{v}(x) = 4kx_1 \cdot x_2 + 2kx_2^2$$

پایداری مجانبی : $\dot{v}(x) < 0 \Rightarrow 4kx_1 \cdot x_2 + 2kx_2^2 < 0 \Rightarrow k < 0$

پایداری مجانبی فراگیر : $\dot{v}(x) \leq 0 \Rightarrow k \leq 0$

(6-5) : یک تابع لیاپانوف برای سیستم زیر پیدا کرده و پایداری آن را تحقیق نمایید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} x$$

$$A^T \cdot P + P \cdot A = -I$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x + 4y = -1 \\ x - 4y + 2z = 0 \\ 2y - 6z = -1 \end{cases}$$

$$y = \frac{5}{16} \quad , \quad x = \frac{9}{8} \quad , \quad z = \frac{13}{48}$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{9}{8} & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{13}{48} \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_1 = \frac{9}{8} > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

P مثبت معین است

پس سیستم پایدار مجانبی است.

حل مسائل فصل فیدبک حالت

(4-6) یک هلیکوپتر در حال توقف در آسمان را می‌توان توسط معادلات زیر توصیف کرد:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.02 & -1.4 & 9.8 \\ -0.01 & -0.4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 9.8 \\ 6.3 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

الف) قطب‌های حلقه باز را تعیین کنید.

$$\det(SI - A) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} S+0.02 & 1.4 & -9.8 \\ 0.01 & S+0.4 & 0 \\ 0 & -1 & S \end{bmatrix} = 0$$

$$S^3 + 0.42S^2 + 0.02S + 0.09 = 0$$

$$S_1 = -0.65 \quad , \quad S_2 = 0.11 + 0.36j \quad , \quad S_3 = 0.11 - 0.36j$$

ب) قانون فیدبک حالت را برای جابجایی قطب‌ها در $S=-2$ و $S=-1\pm j$ بدست آورید.

$$\Delta(S)_{\text{مطلوب}} = (S+2)(S+1-j)(S+1+j)$$

$$\Delta(S)_{\text{مطلوب}} = S^3 + 4S^2 + 6S + 4$$

$$\det(SI - A + BK) = 0$$

$$\det\left\{ \begin{bmatrix} S+0.02 & 1.4 & -9.8 \\ 0.01 & S+0.4 & 0 \\ 0 & -1 & S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9.8 \\ 6.3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.06 & 0.47 & 1 \end{bmatrix}$$

8-6): سیستم های زیر را در نظر گرفته، با بکارگیری فیدبک حالت و روش های ارائه شده برای تعیین بهره فیدبک قطب های حلقه بسته را در مکان های مطلوب جایگزین نمایید:

(الف)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad \text{قطبها مطلوب}: \{-2, -2, -3\}$$

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ -1 & s+2 & 0 \\ -2 & -1 & s+3 \end{bmatrix} = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

$$\Delta(s)_{\text{سیستم اصلی}} : s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

$$\Delta(s)_{\text{مطلوب}} = (s+2)^2(s+3) \Rightarrow \Delta(s)_{\text{مطلوب}} = s^3 + 7s^2 + 16s + 12$$

$$\det(sI - A + BK)$$

$$\det\left\{ \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ -1 & s+2 & 0 \\ -2 & -1 & s+3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.22 & -5.2 & 3.5 \end{bmatrix}$$

(ب)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad \text{قطبها مطلوب}: \{-1 \pm 2j, -6\}$$

$$\Delta(s)_{\text{سیستم اصلی}} = s^3 - 3s^2 + s + 2$$

مطلوب $\Delta(s) = (s+1+2j)(s+1-2j)(s+6)$

مطلوب $\Delta(s) = s^3 + 8s^2 + 17s + 30$

$$K = [\,\beta - \alpha\,] = [\,(30-2) \quad (17-1) \quad (8+3)\,]$$

$$K = [\,28 \quad 16 \quad 11\,]$$

(ب) قطب‌های مطلوب : $\{-1\ ,\ \pm j\}$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$\det(sI - A) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} s+2 & -1 & -2 \\ -1 & s+2 & -2 \\ 2 & 0 & s-2 \end{bmatrix} = \Delta(s)$$ سیستم اصلی

سیستم اصلی $\Delta(s) = s^3 + 2s^2 - s + 6$

مطلوب $\Delta(s) = (s+1)(s-j)(s+j) = s^3 + s^2 + s + 1$

$$\det(sI - A + BK)$$

$$\det\left\{ \begin{bmatrix} s+2 & -1 & -2 \\ -1 & s+2 & -2 \\ 2 & 0 & s-2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \end{bmatrix} \right\}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -1.2 & 0.6 \\ 0 & -1.6 & 0.8 \end{bmatrix}$$

(ج) :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

قطب‌های مطلوب $= \{ \pm j , -2 \}$

$\Delta(s)$ سیستم اصلی $= \det(sI - A) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} s+2 & -1 & 0 \\ 1 & s+2 & -2 \\ 2 & 0 & s-2 \end{bmatrix}$

$\Delta(s)$ سیستم اصلی $= s^3 + 2s^2 - 3s - 6$

$\Delta(s)$ مطلوب $= (s+j)(s-j)(s+2) = s^3 + 2s^2 + s + 2$

$$\det(sI - A + BK) = 0$$

$$\det\left\{ \begin{bmatrix} s+2 & -1 & 0 \\ 1 & s+2 & -2 \\ 2 & 0 & s-2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \\ K_4 & K_5 & K_6 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad K = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

9-6 : معادلات فضای حالت سیستم عبارتند از :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 9 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

الف) معادلات حالت و خروجی این سیستم را به فرم کانونیکال کنترل کننده تبدیل کنید.

$\Delta(s)$ سیستم اصلی $= |(sI - A)| = 0$

$$\det \begin{bmatrix} s+4 & 4 & 2 \\ -1 & s & -1 \\ -6 & -9 & s-2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \underset{\text{سیستم اصلی}}{\Delta(s)} = s^3 + 2s^2 - s - 2$$

$$T = \Phi_c \cdot W$$

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{B} = T^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

ب) بهره فیدبک حالت K را چنان تعیین کنید تا قطب ناپایدار سیستم را به -3 انتقال داده و سایر قطب ها را تغییر ندهد.

قطب های سیستم : $S_1 = 1$, $S_2 = -1$, $S_3 = -2$

قطب ناپایدار

$\Delta(s)$ مطلوب $= (s+1)(s+2)(s+3) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$

$$\det(sI - A + BK) = 0$$

$$\det\left\{ \begin{bmatrix} s+4 & 4 & 2 \\ -1 & s & -1 \\ -6 & -9 & s-2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$K = \begin{bmatrix} 20 & 28 & 12 \end{bmatrix}$$

حل مسائل فصل طراحی جبران کننده

(7-1) معادلات حالت و خروجی سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \end{bmatrix} x$$

الف) به ازاء چه مقادیری از α نمی توان یک رویتگر برای این سیستم طراحی کرد.

برای طراحی یک رویتگر شرط لازم و کافی این است که سیستم رویت پذیر باشد.

پس برای مقادیری از α که سیستم را رویت ناپذیر کند نمی توان رویتگر طراحی نمود.

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha+2 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\det(\Phi_o) = 0 \Rightarrow \alpha^2 - \alpha - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -1 , 2}$$

ب) برای $\alpha = 0$ یک بردار رویتگر L چنان پیدا کنید که خطای تخمین با مقادیر ویژه -1 و -2 به سمت صفر میل کند.

$$\alpha = 0 \Rightarrow y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$\Delta(s)_{\text{سیستم اصلی}} = |sI - A| = \det \begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ -2 & s \end{bmatrix} = s^2 - s - 2$$

$$\Delta(s)_{\text{مطلوب}} = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$$

$$\det(sI - A + LC)$$

$$\det\left\{ \begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ -2 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = (s-1)(s+L_2) - (2 - 2L_1) = 0$$

$$s^2 + (L_2 - 1)s + (-L_2 + 2L_1 - 2) = 0$$

$$L_2 - 1 = 3 \Rightarrow \boxed{L_2 = 4} \qquad -L_2 + 2L_1 - 2 = 2 \Rightarrow \boxed{L_1 = 4}$$

(2-7): برای سیستم زیر:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

یک رویتگر با مقادیر ویژه در 6- و 5- طراحی کنید.

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow Rank(\Phi_o) = full = 2$$

سیستم رویت پذیر کامل حالت است

پس می توان رویتگر طراحی نمود.

$\Delta(s)$ سیستم اصلی $= |SI - A| = 0 \Rightarrow \Delta(s) = s^2 - 4$

$\Delta(s)$ مطلوب $= (s+6)(s+5) = s^2 + 11s + 30$

$$\det(SI - A + LC) = 0$$

$$\det\left\{ \begin{bmatrix} s & -1 \\ -4 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow s^2 + L_1 s + L_2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} L_1 = 11 \\ L_2 = 34 \end{cases}$$

اگر بجای معادله خروجی بالا معادله زیر را داشتیم:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \end{bmatrix} x$$

به ازای چه مقادیری از α میتوانستیم رویتگری برای سیستم طراحی کنیم.

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 4\alpha & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\Phi_o) = 1 - 4\alpha^2$$

برای اینکه بتوانیم رویتگر طراحی کنیم سیستم باید رویت پذیر باشد و برای اینکه رویت پذیر باشد باید $\det(\Phi_o) \neq 0$ شود.

$$1 - 4\alpha^2 \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq \pm 1/2$$

به ازای هر مقداری از α غیر از $\pm 1/2$ سیستم رویت پذیر است و می توان برای آن رویتگر طراحی نمود.

(۳-۷) : سیستم توصیف شده با معادله زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} x$$

یک رویتگر طراحی کنید که خطای تخمین را حداقل با سرعت e^{-10t} به سمت صفر میل کند.

چون می‌خواهیم حداقل سرعت تخمین e^{-10t} باشد لذا قطب‌های مطلوب برای رویتگر را $s=-10$ و $s=-12$ در نظر می‌گیریم.

$$\Delta(s)_{\text{مطلوب}} = (s+10)(s+12) = s^2 + 22s + 120$$

$$\det(sI - A + LC)$$

$$= \det\left\{ \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= s^3 + (2L_1 - 1 - L_2)s + 2L_1L_2$$

$$L_2 = \begin{cases} -15 \\ -8 \end{cases} \quad , \quad L_1 = \begin{cases} -19 \\ -15.5 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 \\ -15 \end{bmatrix} \quad OR \quad \begin{bmatrix} -15.5 \\ -8 \end{bmatrix}$$

(۸-۷) : سیستم داده شده با معادلات حالت و خروجی زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$\Delta(s)_{\text{سیستم اصلی}} = \det(sI - A)$

$$= \det\begin{bmatrix} s+1 & 2 & 2 \\ 0 & s+1 & -1 \\ -1 & 0 & s+1 \end{bmatrix} = s^3 + 3s^2 + s - 3 = \Delta(s)_{\text{سیستم اصلی}}$$

$\Delta(s)_{\text{مطلوب}} = (s+2)^2(s+3) = s^3 + 7s^2 + 16s + 12$

$$\det[sI - A + LC] =$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} s+1 & 2 & 2 \\ 0 & s+1 & -1 \\ -1 & 0 & s+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$