

مدار الکتریکی ۲



مدار الکتریکی او ۲

فهرست مطالب

فصل اول.....	۲
فصل دوم.....	۳۲
فصل سوم.....	۶۱
فصل چهارم.....	۹۶
فصل پنجم.....	۱۴۲
فصل ششم.....	۱۷۸
فصل هفتم.....	۱۹۷
فصل هشتم.....	۲۵۶
فصل نهم.....	۲۹۰
فصل دهم.....	۳۱۲
فصل یازدهم.....	۳۳۳
فصل دوازدهم.....	۳۸۵
فصل سیزدهم.....	۴۱۸
فصل چهاردهم.....	۴۵۴
فصل پانزدهم.....	۴۷۱
فصل شانزدهم.....	۴۸۰

فصل اول: مبانی مدارهای الکتریکی

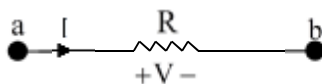
در این فصل سعی بر این است که مفاهیم اولیه و اجزای تشکیل دهنده مدارهای الکتریکی و ویژگی‌های آن‌ها مورد

بررسی قرار گیرد.

عناصر مداری

۱-۱-۱ مقاومت

مقاومت یک المان دو سر می‌باشد که رابطه ولتاژ و جریان آن توسط منحنی مشخصه ولتاژ - جریان قابل بیان است.



جهت قراردادی به این صورت است که آن سر المان که جریان به آن وارد می‌شود، دارای ولتاژ مثبت می‌باشد. به عبارت

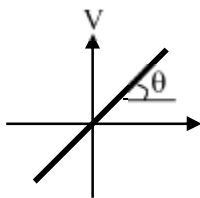
دیگر:

$$V = V_a - V_b, \quad I = \frac{V}{R} = \frac{V_a - V_b}{R}$$

معمولاً مقاومت‌ها به سه صورت وجود دارند:

1- مقاومت خطی و تغییرناپذیر با زمان: رابطه ولتاژ - جریان به صورت $V = RI$ می‌باشد که R مقدار مقاومت و ثابت

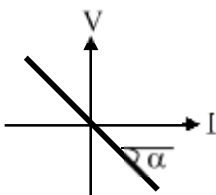
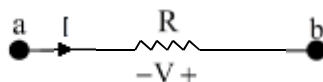
می‌باشد.



در این حالت مشخصه ولتاژ - جریان به صورت زیر است:

$$\text{شیب} = \tan \theta = R$$

اگر جهت‌های ولتاژ و جریان را به صورت زیر در نظر بگیریم:



در این صورت مشخصه ولتاژ - جریان آن به صورت زیر می‌باشد:

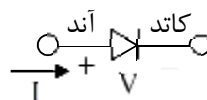
$$\text{شیب} = \tan \alpha = R$$

2- مقاومت خطی و تغییرپذیر با زمان: رابطه ولتاژ - جریان به صورت $V(t) = R(t)I(t)$ می باشد که $R(t)$ مقدار مقاومت و متغیر با زمان می باشد.

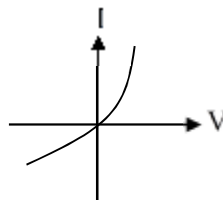
3- مقاومت غیرخطی: رابطه ولتاژ - جریان در این نوع مقاومت به صورت $V = f(I)$ می باشد. (ولتاژ تابع جریان است) در این صورت مقدار مقاومت در نقطه کار را می توان از رابطه $\left. \frac{dV}{dI} \right|_{I_0}$ به دست آورد.

۱-۱-۲- دیود

دیود یک المان دو سر می باشد که جریان را فقط در یک جهت عبور می دهد.



مشخصه جریان - ولتاژ یک دیود واقعی به صورت زیر است:



اگر دیود را به صورت ایده آل در نظر بگیریم:

هرگاه ولتاژ آند از کاتد بیش تر باشد، دیود اتصال کوتاه است یعنی: $V = 0$

هرگاه ولتاژ کاتد از آند بیش تر شود، دیود اتصال باز است یعنی: $I = 0$

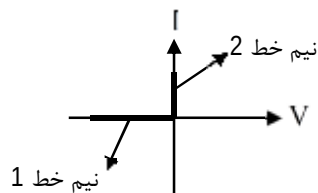
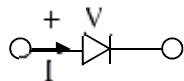
به عبارت ساده تر می توان گفت:

دیود وصل $\rightarrow$ (S.C) دیود اتصال کوتاه $\rightarrow$ ولتاژ کاتد $>$ ولتاژ آند

دیود قطع $\rightarrow$ (O.C) دیود اتصال باز $\rightarrow$ ولتاژ کاتد $<$ ولتاژ آند

بر این اساس و با توجه به جهت های ولتاژ و جریان هر دیود، می توان مشخصه جریان - ولتاژ را رسم کرد.

مثلاً برای دیود شکل زیر با جهت ولتاژ و جریان نشان داده شده خواهیم داشت:

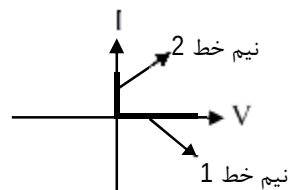
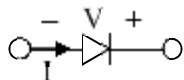


$V < 0 \rightarrow$ دیود قطع $\rightarrow I = 0$ (نیم خط 1)

$I > 0 \rightarrow$ دیود وصل $\rightarrow V = 0$ (نیم خط 2)

همان‌طور که دیده می‌شود این شکل، یک تقریب ایده‌آل برای مشخصه دیود واقعی است. در حالت کلی برای رسم مشخصه جریان - ولتاژ دیود، ابتدا حالت قطع را بررسی می‌کنیم، حالتی که $V_K > V_A$ در این حالت $I = 0$ است و نیم‌خط مربوطه را مشخص می‌کنیم و سپس حالت وصل که در آن $V = 0$ است را رسم می‌نماییم. برای این نیم‌خط، توجه به جهت جریان لازم است.

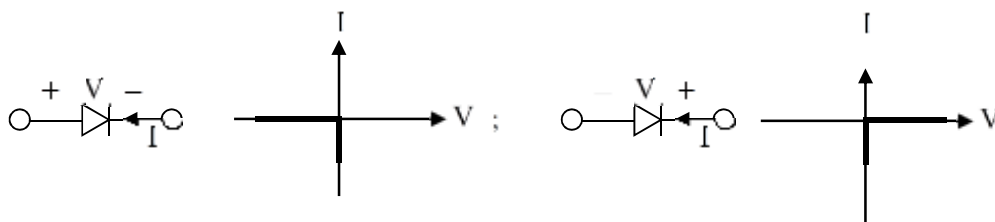
برای دیود شکل زیر می‌توان گفت:



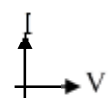
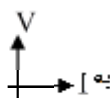
$V > 0 \rightarrow$ دیود قطع $\rightarrow I = 0$ (نیم خط 1)

$I > 0 \rightarrow$ دیود وصل $\rightarrow V = 0$ (نیم خط 2)

همچنین می‌توان نشان داد:



باید نمودار را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه نمود. در

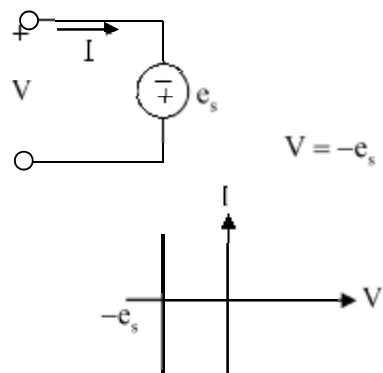
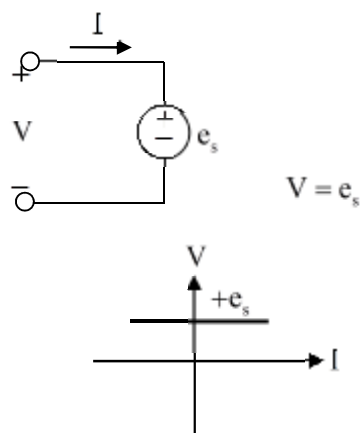


این حالت، شیب‌ها معکوس می‌شوند.

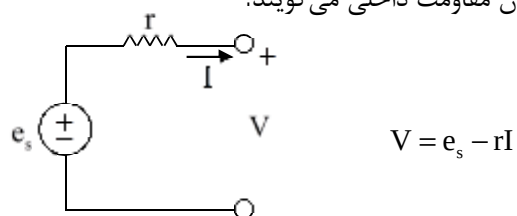
۱-۳-۱- منابع مستقل

الف - منبع ولتاژ $\leftarrow$ عنصری که ولتاژ دو سر آن مستقل از جریان گذرنده از آن باشد. منبع ولتاژ در اصل همان باتری است.

در حالت ایده‌آل داریم:



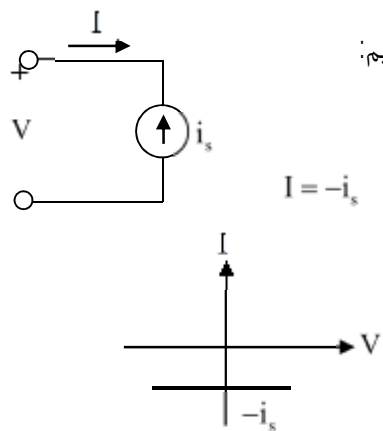
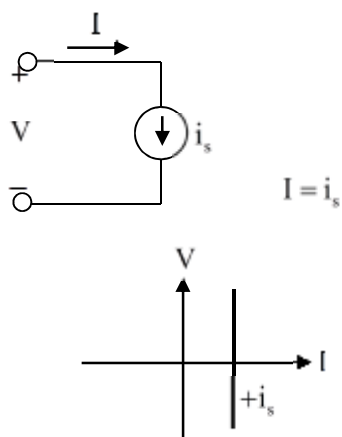
و در حالت واقعی یک مقاومت r با آن سری می‌شود که به آن مقاومت داخلی می‌گویند.



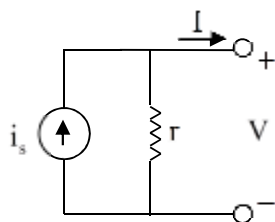
در این رابطه rI را افت ولتاژ مقاومت داخلی منبع می‌گویند.

ب- منبع جریان ← المانی که جریان گذرنده از آن مستقل از ولتاژ دو سرش باشد.

در حالت ایده‌آل داریم:



و در حالت واقعی یک مقاومت r با آن موازی می‌شود که به آن مقاومت داخلی می‌گویند.



$$I = i_s - \frac{V}{r}$$

در این رابطه $\frac{V}{r}$ را افت جریان منبع می‌گویند.

نکته: به‌طور کلی هر المانی (به جز اتصال کوتاه) موازی با منبع ولتاژ قابل حذف می‌باشد (یعنی تأثیری در سایر قسمت‌های مدار ندارد) و هر المانی (به جز اتصال باز) سری با منبع جریان قابل حذف است.

نکته: اگر اتصال کوتاه با منبع ولتاژ موازی شود، خود منبع ولتاژ حذف می‌شود و در صورتی که اتصال باز با منبع جریان سری گردد، منبع جریان حذف خواهد شد.

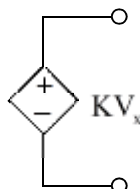
۱-۴-۱- منابع وابسته (کنترل شده)

منابعی که ولتاژ دو سر آن یا جریان خروجی از آن به ولتاژ یا جریان شاخه‌ای دیگر از مدار وابسته باشد را منابع وابسته می‌گویند.

منابع وابسته به یکی از چهار شکل زیر می‌باشند:

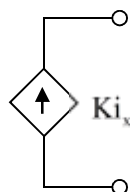
1- منبع ولتاژ وابسته به ولتاژ

در این حالت واحد ضریب K ، یک است.



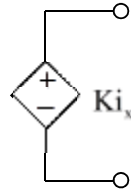
2- منبع جریان وابسته به جریان

در این حالت واحد ضریب K ، یک است.



3- منبع ولتاژ وابسته به جریان

در این حالت واحد ضریب K ، اهم (Ω) و از جنس مقاومت می‌باشد.



4- منبع جریان وابسته به ولتاژ

در این حالت واحد ضریب K ، مهو (J) و از جنس رسانایی است.

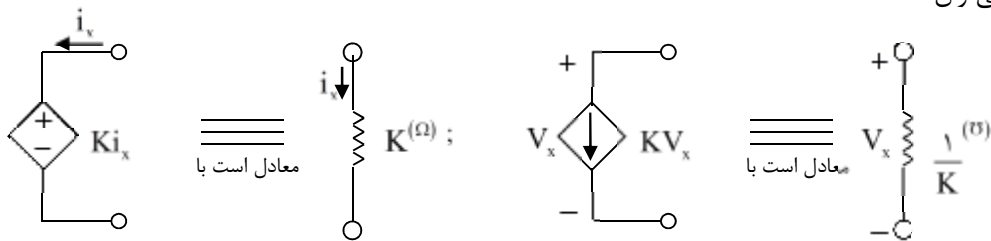
که در کلیه این منابع، i_x و V_x به ترتیب جریان و ولتاژ هر شاخه از مدار می‌توانند باشند.

نکته: حالت خاص: منابع وابسته به خود (قضیه جذب منبع)

اگر در منابع ولتاژ وابسته به جریان، i_x جریان خود منبع ولتاژ و یا در منابع جریان وابسته به ولتاژ، V_x ولتاژ خود منبع

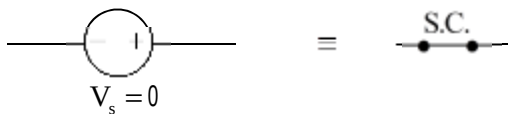
جریان باشد، در این صورت منابع وابسته در حکم یک مقاومت می‌باشد.

به عبارت دیگر می‌توان گفت:



در این حالت‌های خاص به جهت جریان و پلاریته ولتاژ دقت کنید.

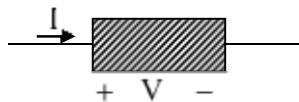
نکته: صفر کردن (خنثی کردن) منبع ولتاژ مستقل به معنای اتصال کوتاه کردن آن می‌باشد.



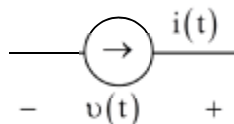
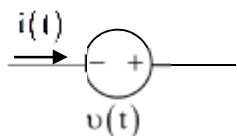
و صفر کردن (خنثی کردن) منبع جریان مستقل به معنای اتصال باز کردن آن است.



نکته: جهت قراردادی متناظر با المان‌های مداری (به جز منابع مستقل) به صورت زیر می‌باشد:



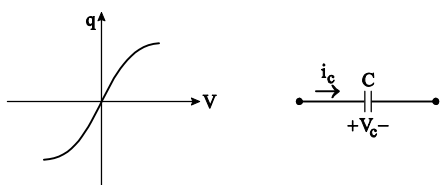
جهت‌های قراردادی متناظر در خصوص منابع مستقل به صورت زیر می‌باشد:



۱-۱-۵- خازن

خازن یک المان دو سر است که رابطه بین بار الکتریکی (q) و ولتاژ دو سر آن (V) توسط یک منحنی به صورت زیر

بیان می‌گردد:



خازن‌ها معمولاً به سه دسته تقسیم می‌شوند:

1- خازن خطی و تغییرناپذیر با زمان: رابطه بار الکتریکی و ولتاژ آن به صورت $q = C.V$ بیان می‌شود که در آن q بار

الکتریکی برحسب کولن، C ظرفیت خازن برحسب فاراد و V ولتاژ دو سر آن برحسب ولتاژ می‌باشد.

روابط ولتاژ و جریان در این حالت به صورت زیر می‌باشند:

$$i = \frac{dq}{dt} = c \frac{dv}{dt}$$

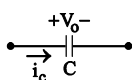
$$V = V_0 + \frac{1}{c} \int_0^t i \cdot dt \quad (V_0 \text{ ولتاژ اولیه خازن})$$

و در مورد انرژی آن داریم:

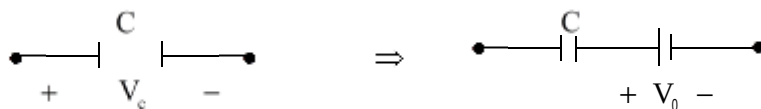
$$W = \frac{1}{2} qV = \frac{1}{2} cV^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{c}$$

بنابراین هر خازن با دو مشخصه معرفی می‌گردد، یکی ظرفیت خازن که مربوط به ساختمان آن می‌باشد و مقداری ثابت

است و دیگری ولتاژ اولیه آن که مربوط به مداری است که خازن در آن شارژ شده است.



نکته: هر خازن خطی تغییرناپذیر با زمان با ولتاژ اولیه V_0 را می‌توان به صورت زیر مدل‌سازی نمود:



در صورتی که $V_0 = V_c(t=0) = 0$ باشد، $V_c(t)$ تابعی خطی از $i_c(t)$ خواهد بود و تا زمانی که جریان خازن کراندارا باشد، ولتاژ خازن نمی‌تواند به صورت ناگهانی تغییر کند.

2- خازن خطی و تغییرپذیر با زمان: رابطه بار الکتریکی و ولتاژ خازن به صورت $q(t) = C(t) \cdot V(t)$ می‌باشد و $c(t)$ ظرفیت خازن است که با زمان تغییر می‌کند.

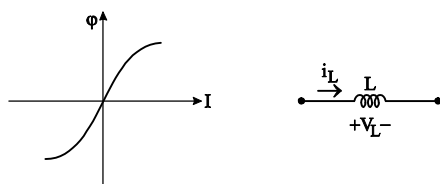
می‌توان گفت:

$$i = \frac{dq(t)}{dt} = C(t) \cdot \frac{dV(t)}{dt} + V(t) \cdot \frac{dC(t)}{dt}$$

3- خازن غیر خطی: رابطه ولتاژ با بار الکتریکی آن به صورت $q = f(V)$ می‌باشد که در این صورت می‌توان ظرفیت خازن را در نقطه کار V_0 به صورت $C = \frac{q}{V}|_{V_0}$ به دست آورد.

۱-۱-۶- سلف

سلف یک المان دو سر است که رابطه بین شار الکتریکی (Φ) و جریان آن (I) توسط یک منحنی به صورت زیر بیان می‌گردد:



سلف‌ها معمولاً به سه دسته تقسیم می‌شوند:

1- سلف خطی و تغییرناپذیر با زمان: رابطه شار الکتریکی و جریان آن به صورت $\Phi = L \cdot I$ بیان می‌شود که در آن Φ شار برحسب وبر، L اندوکتانس برحسب هانری و I جریان برحسب آمپر می‌باشد.
روابط ولتاژ و جریان در این حالت به صورت زیر می‌باشند:

$$V = \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

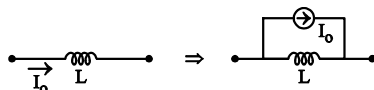
$$i = I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t V \cdot dt \quad (I_0 \text{ جریان اولیه سلف})$$

و در مورد انرژی آن داریم:

$$W = \frac{1}{2} \phi i = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\phi^2}{L}$$

پس هر سلف دو عامل مشخص کننده دارد، یکی اندوکتانس سلف که مربوط به ساختمان آن می باشد و مقداری ثابت است و دیگری جریان اولیه آن که مربوط به مداری است که سلف در آن شارژ شده است.

نکته: هر سلف خطی تغییرناپذیر با زمان با جریان اولیه I_0 را می توان به صورت زیر مدل سازی نمود:



در صورتی که $I_0 = i_L(t=0) = 0$ باشد، $i_L(t)$ تابعی خطی از $V_L(t)$ خواهد بود و تا زمانی که ولتاژ سلف کراندار باشد، جریان سلف نمی تواند به طور ناگهانی تغییر کند.

2- سلف خطی و تغییرپذیر با زمان: رابطه شار الکتریکی و جریان در آن به صورت $\phi(t) = L(t) \cdot I(t)$ می باشد و $L(t)$ مقدار سلف است که با زمان تغییر می کند.

می توان گفت:

$$V = \frac{d\phi(t)}{dt} = L(t) \cdot \frac{dI(t)}{dt} + I(t) \cdot \frac{dL(t)}{dt}$$

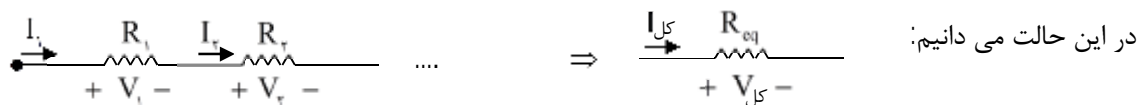
3- سلف غیرخطی: رابطه شار الکتریکی و جریان به صورت $\phi = f(I)$ می باشد که مقدار سلف در نقطه کار I_0 به صورت

$$\left. \frac{d\phi}{dI} \right|_{I_0} \text{ به دست می آید.}$$

به هم بستن عناصر

۱-۲-۱ اتصال سری عناصر

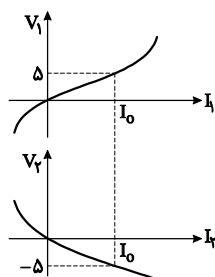
۱- مقاومت



$$\begin{cases} V_{kl} = V_1 + V_2 + \dots \\ I_{kl} = I_1 = I_2 = \dots \end{cases} \rightarrow R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots = \sum_{i=1} R_i$$

بنابراین در این حالت برای رسم مشخصه $V-I$ نهایی، به ازای جریان‌های یکسان، ولتاژهای متناظر را جمع می‌کنیم.

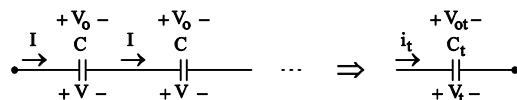
مثلاً برای دو عنصر سری در شکل زیر به ازای جریان I_o داریم:



$$I_1 = I_2 = I_o \rightarrow V_{\text{کل}} = V_1 + V_2 = 5 + (-5) = 0$$

۲- خازن

در این حالت داریم:



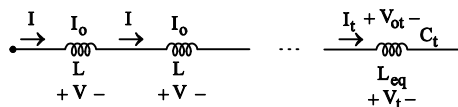
$$\begin{cases} V = V_1 + V_2 + K \\ I = I_1 = I_2 = K \end{cases} \rightarrow C_t = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + K \right)^{-1}$$

و برای ولتاژ اولیه کل، به دلیل این که خازن‌ها سری هستند خواهیم داشت:

$$V_{ot} = V_{o1} + V_{o2} + K$$

۳- سلف

در این حالت می‌توان گفت:



$$\begin{cases} V_t = V_1 + V_2 + \dots \\ I_t = I_1 = I_2 = \dots \end{cases} \rightarrow L_t = L_1 + L_2 + \dots = \sum_i L_i$$

و با توجه به اصل بقای شار برای جریان اولیه I_{ot} داریم:

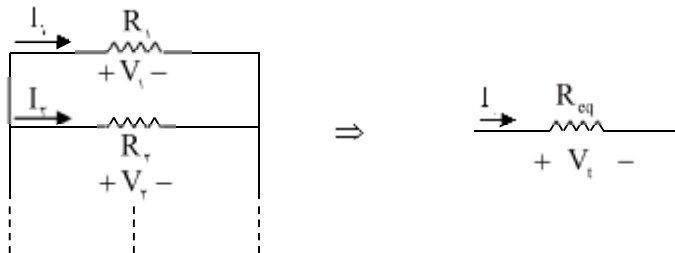
$$I_{ot} = \frac{\Phi_{ot}}{L_t} = \frac{L_1 I_{o1} + L_2 I_{o2} + K}{L_1 + L_2 + K}$$

در این رابطه علامت $+$ به معنای جمع جبری می‌باشد. (باید به جهت جریان‌ها توجه داشت).

۱-۲-۲- اتصال موازی عناصر

۱- مقاومت

در این حالت می‌دانیم:



$$\begin{cases} V_t = V_1 = V_2 = \dots \\ I_t = I_1 + I_2 + \dots \end{cases} \rightarrow R_{eq} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots \right)^{-1}$$

بنابراین در این حالت برای رسم مشخصه $V-I$ ، به ازای ولتاژهای یکسان، جریان‌های متناظر را با هم جمع می‌کنیم.

نکته: برای جمع کردن دو خط، شیب‌ها و عرض از مبدأ آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم. همچنین در جمع کردن خطوط:

- هر خط با شیب m وقتی با یک خط افقی جمع می‌شود، شیب آن تغییر نمی‌کند، بلکه تنها مقدار dc آن تغییر می‌کند و به بالا یا پایین شیف‌ت می‌یابد. به عبارت دیگر:

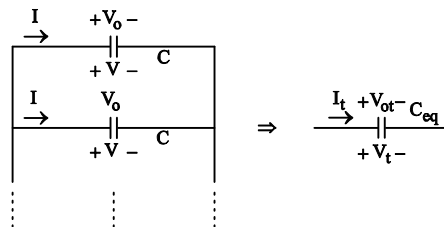
$$/m + \bar{0} = /m$$

- هر خط با شیب m هنگام جمع شدن با یک خط قائم، همان خط قائم با شیب بی‌نهایت می‌شود. به عبارت دیگر:

$$/m + |\infty| = |\infty|$$

۲- خازن

در این حالت داریم:



$$\begin{cases} V_t = V_1 = V_2 = \dots \\ I_t = I_1 + I_2 + \dots \end{cases} \rightarrow C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots = \sum_i C_i$$

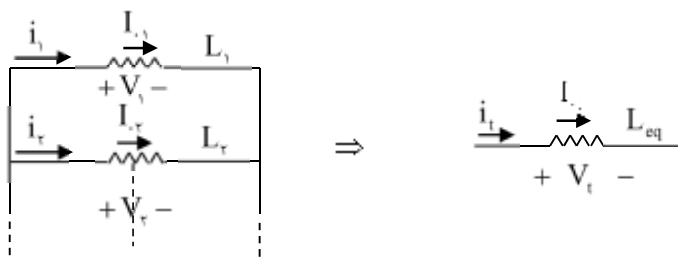
و با توجه به اصل بقای بار برای ولتاژ اولیه خازن معادل داریم:

$$V_{0t} = \frac{q_{0t}}{c_t} = \frac{c_1 V_{01} + c_2 V_{02} + \dots}{c_1 + c_2 + \dots}$$

علامت + در رابطه فوق به معنای جمع جبری است. (باید به پلاریته ولتاژها دقت نمود).

۳- سلف

در این حالت می‌توان گفت:



$$\begin{cases} V_t = V_1 = V_2 = \dots \\ I_t = I_1 + I_2 + \dots \end{cases} \rightarrow L_{eq} = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots \right)^{-1}$$

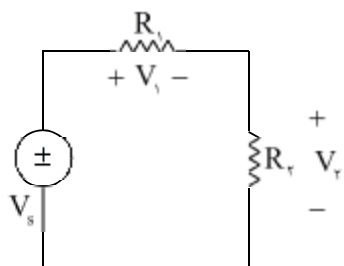
و برای جریان اولیه کل، با توجه به موازی بودن سلف‌ها داریم:

$$I_{0t} = I_{01} + I_{02} + \dots$$

روابط تقسیم (ولتاژ، جریان، شار و بار)

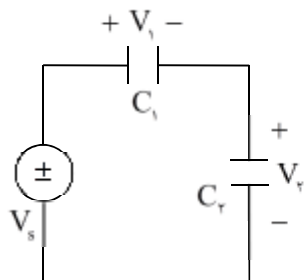
3-1- روابط تقسیم (جریان و شار) در حالت سری

۱- مقاومت



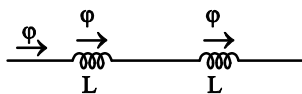
$$\begin{cases} V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \times V_s \\ V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times V_s \end{cases}$$

۲- خازن



$$\begin{cases} V_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \times V_s \\ V_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \times V_s \end{cases}$$

۳- سلف

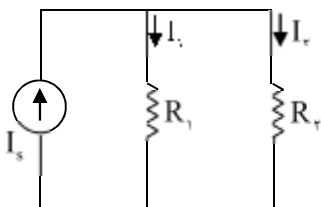


$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$\begin{cases} \Phi_1 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \times \Phi \\ \Phi_2 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \times \Phi \end{cases}$$

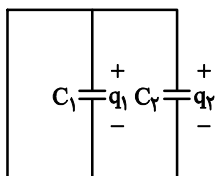
۱-۳-۲- روابط تقسیم (جریان و بار) در حالت موازی

۱- مقاومت



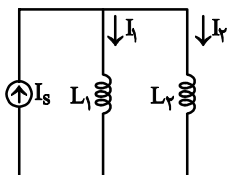
$$\begin{cases} I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times I_s \\ I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \times I_s \end{cases}$$

۲- خازن



$$\begin{cases} q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \times q \\ q_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \times q \end{cases}$$

۳- سلف



$$\begin{cases} I_1 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \times I_s \\ I_2 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \times I_s \end{cases}$$

توان الکتریکی

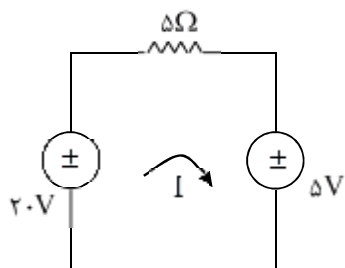
توان لحظه‌ای تحویل داده شده به هر المان برابر است با حاصل ضرب ولتاژ در جریان در آن لحظه خاص و به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$P(t) = V(t) \cdot I(t)$$

طبق جهت‌های قراردادی، اگر $P(t) > 0$ باشد، المان مربوطه توان جذب می‌کند که در این صورت المان را پسیو یا غیرفعال می‌گویند و اگر $P(t) < 0$ باشد، المان توان تولید می‌کند که المان را اکتیو یا فعال می‌نامیم. به عبارت دیگر اگر جریان از سر مثبت وارد شود، توان مصرفی و اگر جریان از سر منفی ولتاژ وارد شود (و یا از سر مثبت خارج شود)، توان تولیدی است.

بنابراین همه مقاومت‌ها مصرف کننده توان هستند و منابع مستقل (ولتاژ و جریان) بسته به شرایط می‌توانند مصرف کننده یا تولید کننده توان باشند.

مثلاً در مدار شکل زیر:



$$I = \frac{20-5}{5} = 3A$$

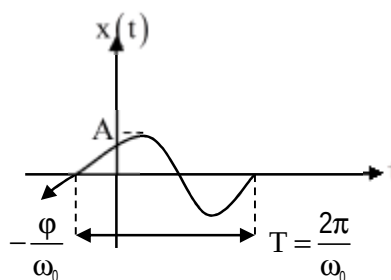
جریان I با جهت نشان داده شده برابر $3A$ است.

در این صورت مقاومت 5Ω به میزان $45W$ توان مصرف کرده است و منبع $20V$ به میزان $60W$ توان تولید می‌کند و $15W$ دیگر توسط منبع $5V$ مصرف شده است.

5-1- توابع تحریک مداری

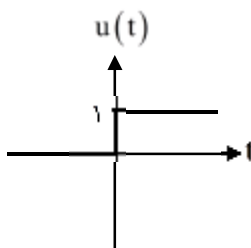
۱- تابع سینوسوئید

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$



۲- تابع پله واحد

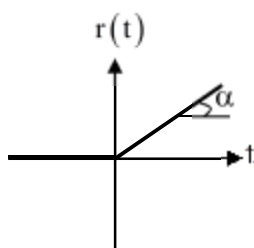
$$u(t) = \begin{cases} 1 & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases}$$



۳- تابع شیب واحد

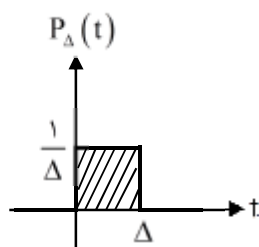
$$r(t) = \begin{cases} t & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases} = tu(t)$$

$$\tan \alpha = m = 1$$



۴- تابع پالس واحد

$$P_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & ; t < 0 \\ \frac{1}{\Delta} & ; 0 < t < \Delta \\ 0 & ; t > \Delta \end{cases}$$



سطح زیر این نمودار همیشه برابر یک است.

۵- تابع ضربه واحد

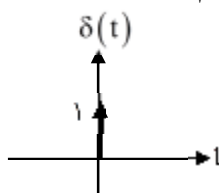
اگر در تابع پالس واحد، عرض پالس به سمت صفر میل کند $(\Delta \rightarrow 0)$ ، ارتفاع پالس در $t=0$ به سمت بی‌نهایت می‌رود

و در سایر نقاط $(t \neq 0)$ ، تابع برابر صفر می‌شود ولی مساحت زیر نمودار در هر صورت ثابت و برابر یک

است.

شکل حاصل را تابع ضربه واحد $\delta(t)$ می‌نامیم.

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & ; t = 0 \\ 0 & ; t \neq 0 \end{cases} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} P_{\Delta}(t)$$



این طرز نمایش یعنی سطح زیر این منحنی در لحظه وقوع تابع ضربه واحد، برابر یک است و ارتفاع آن برابر یک نمی‌باشد (چرا که ارتفاع به سمت بی‌نهایت میل می‌کند).

* خواص تابع ضربه

۱- انتگرال

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t-t_0) dt = 1$$

اگر تابع ضربه در محدوده انتگرال‌گیری قرار نداشته باشد، حاصل انتگرال صفر می‌شود.

۲- نمونه‌برداری

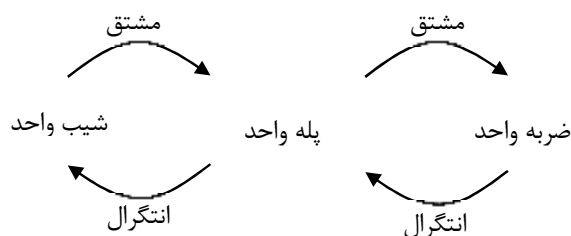
$$\begin{cases} f(t) \cdot \delta(t-t_0) = f(t_0) \delta(t-t_0) \\ f(t) \cdot \delta(t) = f(0) \cdot \delta(t) \end{cases}$$

۳- غربالی

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t-t_0) dt = f(t_0)$$

* روابط توابع تحریک با یکدیگر

به روابط زیر دقت کنید:



پس می‌توان گفت:

ضربه، مشتق پله است. یعنی در مدارهای خطی و تغییرناپذیر با زمان، پاسخ ضربه، مشتق پاسخ پله است.

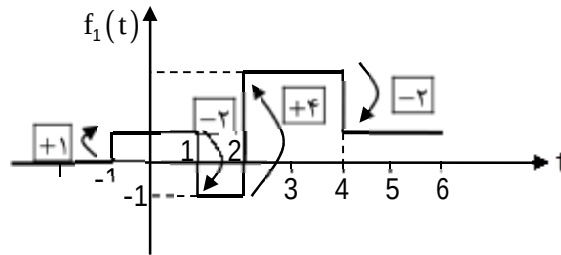
* بیان توابع پالسی و شیبی براساس توابع پله و شیب

برای تعیین ضابطه چنین نمودارهایی، در هر یک از نقاط پرش و نقاط زاویه‌دار، از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم:

(پرش ۱- t) $\times u$ مقدار علامت‌دار پرش $\rightarrow$ در نقاط پرش

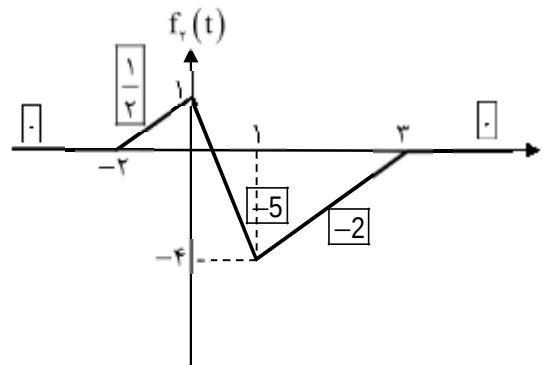
(تغییر شیب ۱- t) $\times r$ مقدار علامت‌دار تغییر شیب $\rightarrow$ در نقاط زاویه‌دار

مثلاً در شکل های زیر:



$$f_1(t) = u(t+1) - 2u(t-1) + 4u(t-2) - 2u(t-4)$$

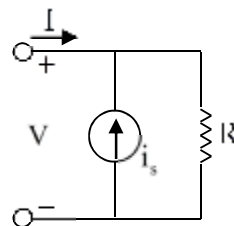
روی هر خط ??? را نوشته و در نقاط زاویه دار، تغییر شیبها را محاسبه می کنیم.



$$f_2(t) = \frac{1}{2}r(t+2) - \frac{11}{2}r(t) + 7r(t-1) - 2r(t-3)$$

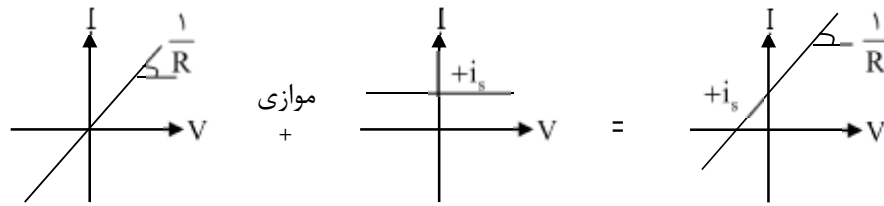
اکنون به بررسی چند نمونه سؤال می پردازیم.

سؤال ۱: در مدارهای زیر، مشخصه $I-V$ را رسم کنید.

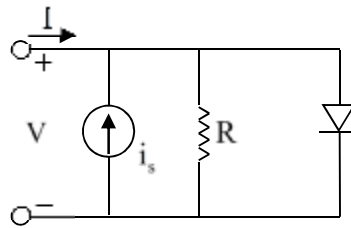


(الف)

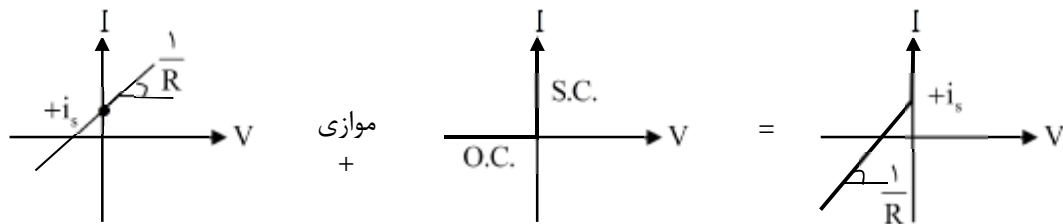
با توجه به موازی بودن مقاومت R و منبع جریان i_s ، به ازای ولتاژهای برابر، جریان‌ها را با هم جمع می‌کنیم.



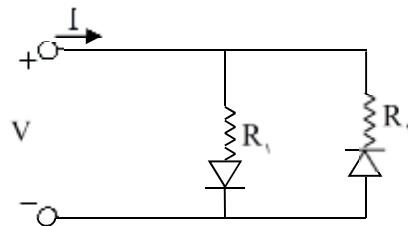
(ب)



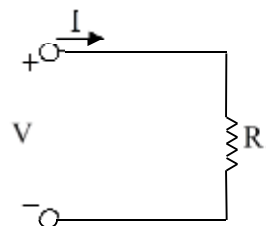
در این جا پاسخ قسمت قبل، با یک دیود موازی شده است، پس مشخصه آن‌ها جمع می‌شود.



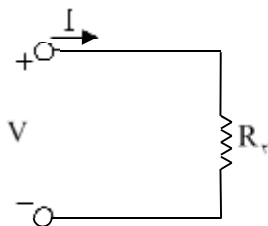
(ج)



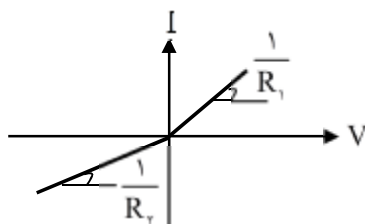
در این مدار با فرض ایده‌آل بودن دیودها، وقتی که $V > 0$ است، شاخه سمت چپ وصل و شاخه سمت راست قطع است و مدار به شکل زیر تبدیل می‌شود:



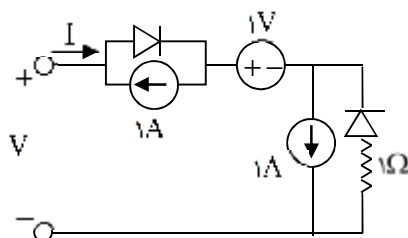
و هنگامی که $V < 0$ است، شاخه سمت راست وصل و شاخه سمت چپ قطع است. پس داریم:



بنابراین مشخصه جریان - ولتاژ به ازای دو ناحیه $V > 0$ و $V < 0$ به صورت زیر است:

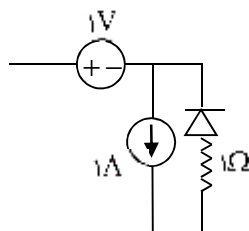


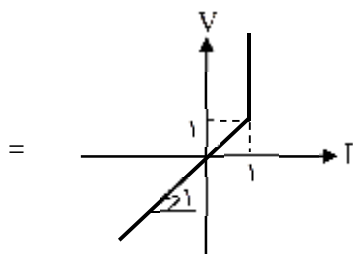
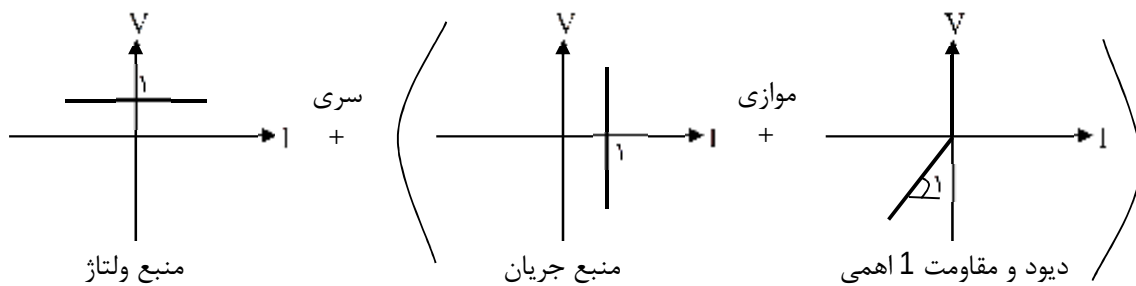
(د)



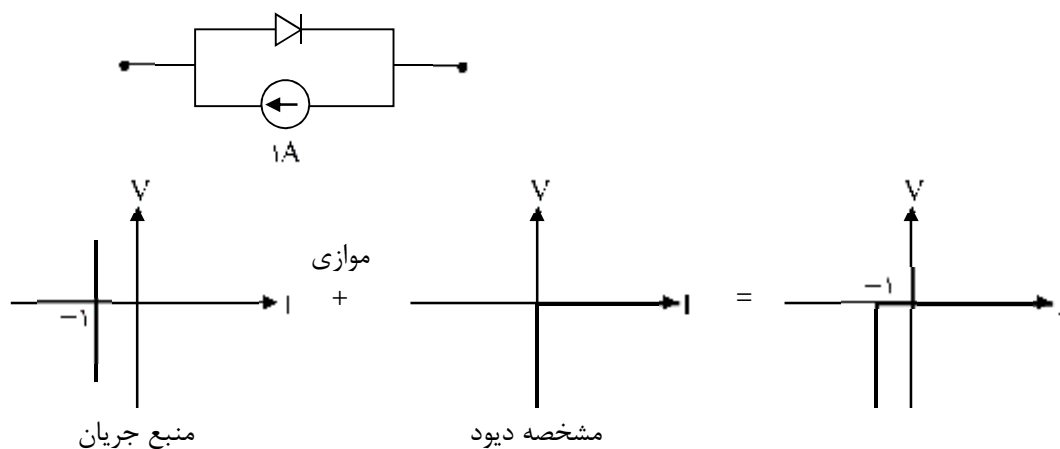
برای بررسی این مدار، ابتدا قسمت‌های مختلف آن را به صورت تکه تکه بررسی می‌کنیم و سپس نتیجه نهایی را به دست می‌آوریم.

برای قسمت سمت راست خواهیم داشت:

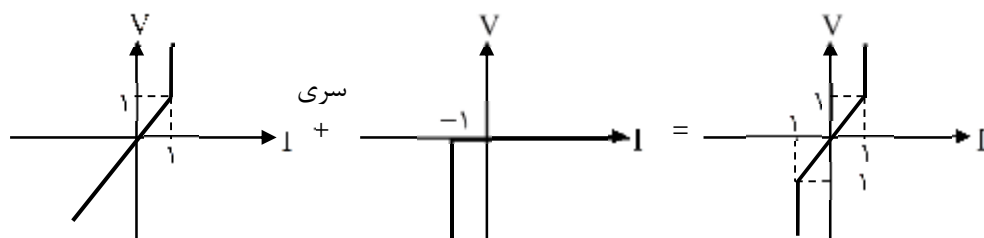




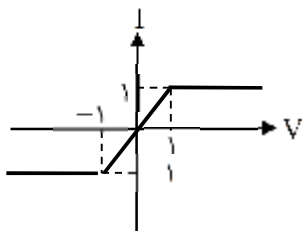
و برای مجموعه سمت چپ داریم:



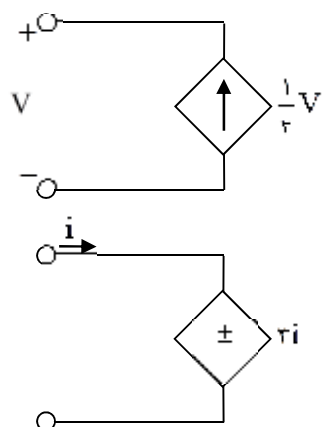
و در نهایت بخش سمت راست و چپ با هم سری می شوند:



و با تبدیل مشخصه $V-I$ به مشخصه $I-V$ داریم:



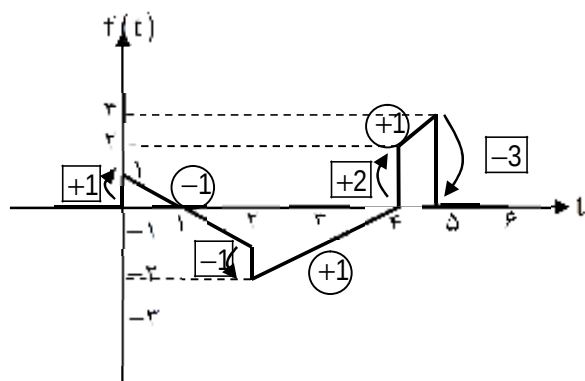
مثال ۲: مدارهای زیر معادل چه مدار دیگری می‌باشند؟



(الف) $\rightarrow R = \frac{V}{-1/V} = -2\Omega$

(ب) $\rightarrow R = \frac{3i}{i} = 3\Omega$

مثال ۳: ضابطه نمودار شکل زیر را برحسب توابع پالسی و شیبی بنویسید.



در این نمودار هم تغییر شیب داریم و هم پرش. بنابراین خواهیم داشت:

$$f(t) = u(t) - r(t) - 2r(t-2) - u(t-2) + 2u(t-4) - r(t-5) - 3u(t-5)$$

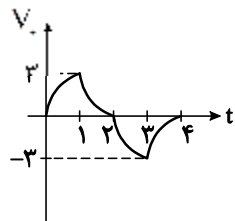
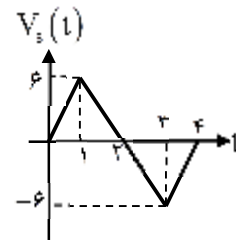
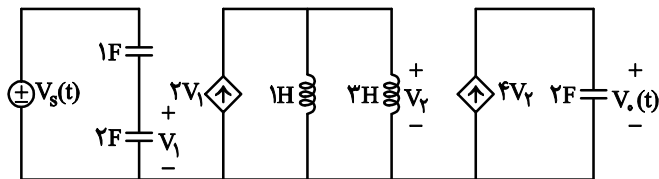
مثلاً در نقطه $t=+2$ ، هم شیب از -1 به $+1$ رسیده است (تغییر شیب برابر $+2$ واحد است) و هم یک پله رو به پایین

داریم ولی در نقطه $t=+4$ ، فقط دو پله رو به بالا رفته‌ایم و شیب تغییری نکرده است (شیب $+1$ بوده است و همان

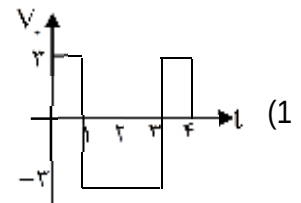
$+1$ باقی مانده است).

تست‌های طبقه‌بندی شده مبحث مبانی مدارهای الکتریکی

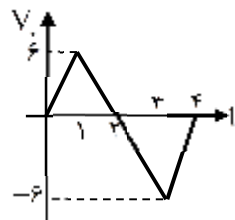
۱- شکل موج $V_s(t)$ مدار شکل مقابل به صورت زیر داده شده است. شکل موج ولتاژ خروجی $V_o(t)$ کدام است؟ (شرایط اولیه صفر)



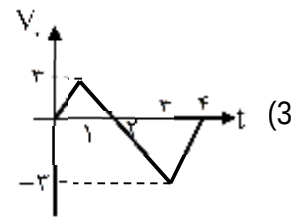
(2)



(1)

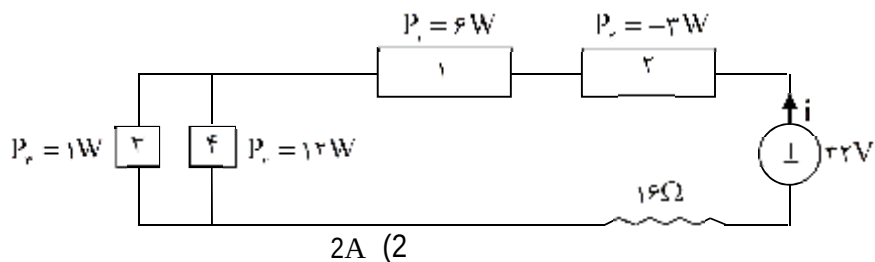


(4)



(3)

۲- در مدار مقاومتی شکل زیر توان هر یک از عناصر داده شده است. جریان i چقدر است؟



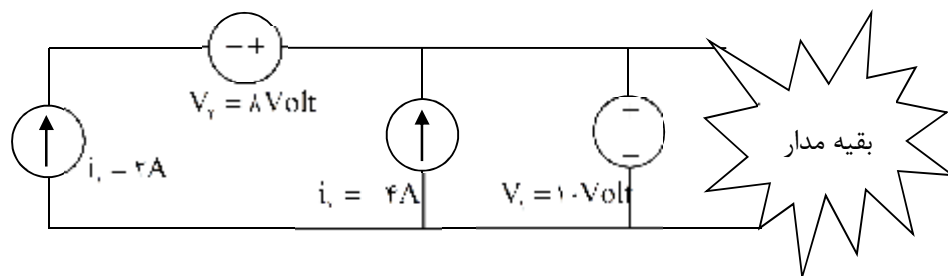
2A (2)

1A (1)

$\frac{1}{4}$ A (4)

$\frac{1}{2}$ A (3)

۳- کدام یک از چهار منبع در شکل زیر، توان جذب می کنند؟



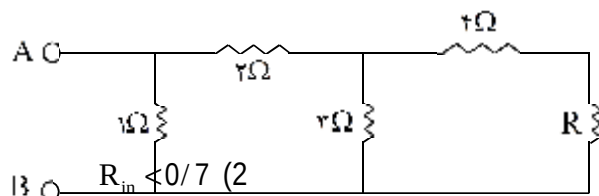
i_1 (2

i_2 (1

V_1 (4

V_2 (3

۴- در مورد مقاومت دیده شده R_{in} در دو سر A و B مدار شکل زیر، کدام رابطه همواره برقرار است؟



$R_{in} < 0/65$ (1

$R_{in} < 0/85$ (4

$R_{in} < 0/75$ (3

۵- مشخصه $V-i$ یک مقاومت به صورت زیر است:

$$V = 2i + e^{-t}i - \frac{1}{2}V \cos 2t$$

این مقاومت کدام ویژگی را دارا نیست؟

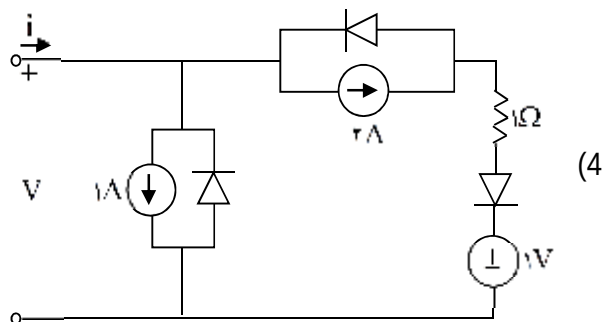
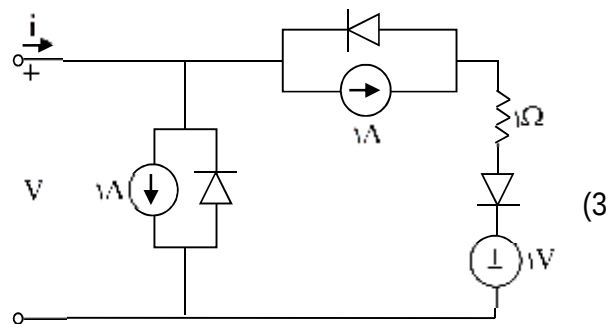
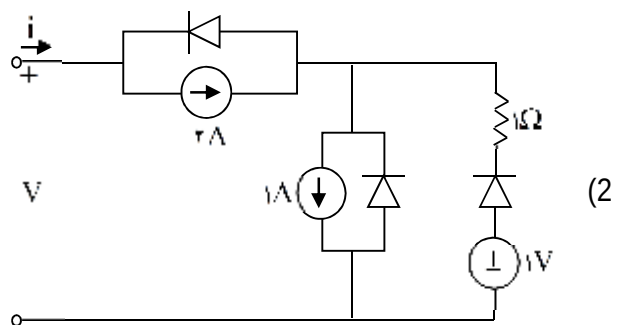
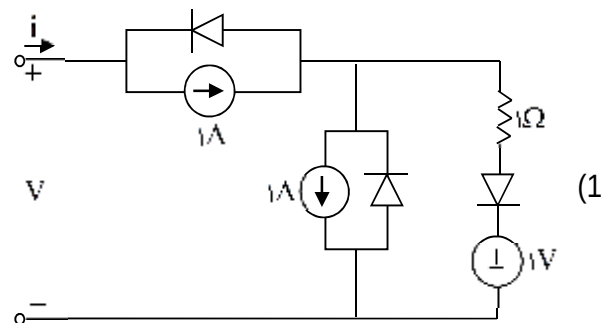
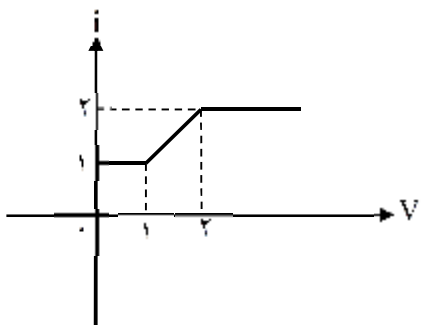
(4 تغییرپذیر با زمان

(3 دوطرفه

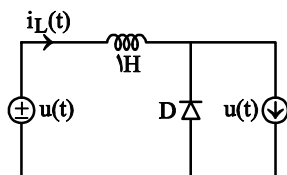
(2 فعال

(1 خطی

۶- مشخصه $V-i$ کدام یک قطبی، مطابق شکل زیر است؟ (دیودها ایده آل هستند).



۷- مدار شکل زیر در حالت صفر بوده و دیود D ایده آل فرض می شود. شکل موج جریان $i_L(t)$ کدام است؟



$$r(t) + r(t-1) \quad (2)$$

$$r(t) - r(t-1) \quad (1)$$

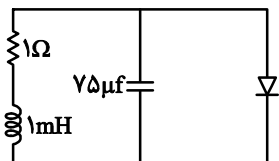
$$u(t-1) + r(t) \quad (4)$$

$$r(t-1) - r(t) \quad (3)$$

۸- در مدار شکل زیر مقاومت دیود تونلی باید برابر با $R = -\frac{40}{3}$ اهم باشد تا مدار به یک نوسان ساز تبدیل

شود. اگر معادله مشخصه دیود به صورت $i_D = 2/5V^3 - 1/5V^2 + 0/225V$ باشد با فرض این که شرایط

سیگنال کوچک برقرار است، ولتاژ نقطه کار مدار (V_D) در حالت نوسان ساز برابر است با:



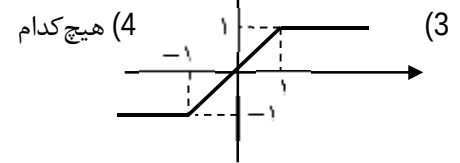
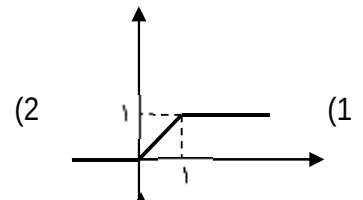
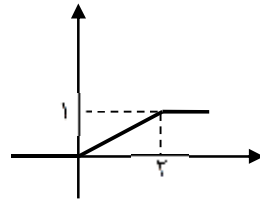
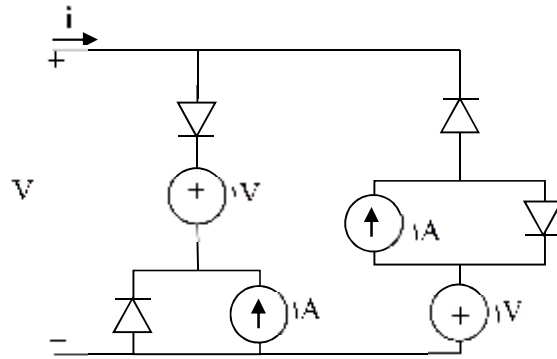
$$0/2 \quad (4)$$

$$0/18 \quad (3)$$

$$0/15 \quad (2)$$

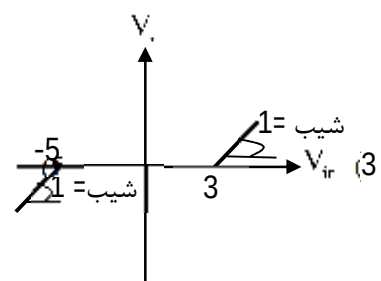
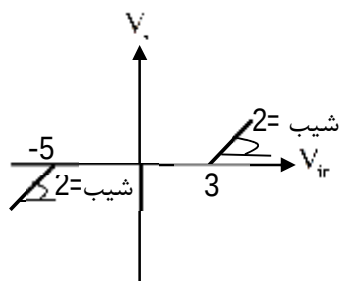
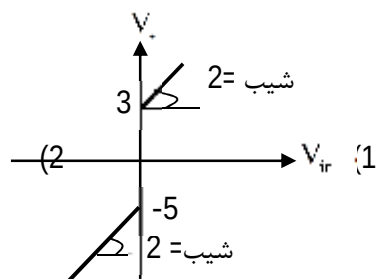
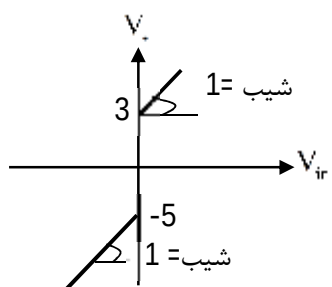
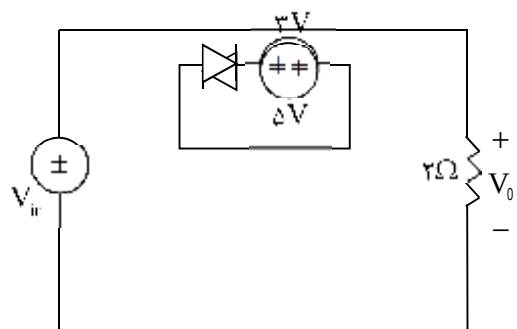
$$0/25 \quad (1)$$

۹- کدام یک از منحنی‌های زیر، منحنی مشخصه مدار مقابل است؟



(4) هیچ کدام

۱۰- در مدار شکل زیر دیودها ایده آل فرض می‌شوند. مشخصه $V_0 - V_{in}$ به چه صورت خواهد بود؟



پاسخ تشریحی

۱- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

$$V_1 = \frac{1}{1+2} V_s = \frac{1}{3} V_s(t)$$

$$V_2 = 3 \frac{di_{3H}}{dt} = 3 \frac{d\left(\frac{1}{1+3} \times 2V_1\right)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dV_s}{dt}$$

$$V_0 = \frac{1}{2} \int i_{2F} dt = \frac{1}{2} \int 4V_2 dt = \frac{1}{2} \int 4 \times \frac{1}{2} \frac{dV_s}{dt} dt = V_s \rightarrow V_0(t) = V_s(t)$$

یعنی شکل موج خروجی، همان شکل موج ورودی است.

۲- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

با استفاده از قانون بقای توان می‌توان گفت:

$$\sum_{i=1}^6 P_i = 0 \rightarrow 6 - 3 + 1 + 12 + 16i^2 - 32i = 0 \rightarrow i^2 - 2i + 1 = 0 \rightarrow i = 1A$$

در این رابطه $16i^2$ توانی است که مقاومت 16 اهمی مصرف می‌کند و $32i$ توانی است که باتری تولید می‌کند.

۳- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

منبع جریان i_2 با منبع ولتاژ V_1 موازی است، پس ولتاژ دو سر آن 10 ولت است. جریان i_2 در جهت متناظر با ولتاژ آن +4A است در نتیجه:

$$P_2 = V_1 i_2 = 10 \times 4 = 40W$$

بنابراین منبع i_2 توان جذب می‌کند.

۴- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

مقاومت دیده شده در سرهای A و B همواره بین دو حالت $R=0$ و $R \rightarrow \infty$ قرار دارد. برای $R=0$ داریم:

$$R_{in} = ((4 \parallel 3) + 2) \parallel 1 = \frac{26}{33} ; 0/7878$$

برای $R \rightarrow \infty$ می‌توان گفت:

$$R_{in} = (3 + 2) \parallel 1 = \frac{5}{6} ; 0/8333$$

بنابراین $0/7878 < R_{in} < 0/8333$ که فقط گزینه «4» در این شرط صدق می‌کند.

۵- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

اگر معادله مشخصه مقاومت را برحسب V حل کنیم داریم:

$$V = \frac{2 + e^{-t}}{1 + \frac{1}{2} \cos 2t} i = Ri$$

دیده می‌شود که این معادله یک مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان و دو طرفه است. دو طرفه بودن یعنی اگر پلاریته ولتاژ دو سر آن را عوض کنیم، جهت جریان آن هم عکس می‌شود ولی مقدار جریان تغییر نمی‌کند.

برای فعال بودن مقاومت باید شیب خط $V - i$ منفی باشد، یعنی $\frac{2 + e^{-t}}{1 + \frac{1}{2} \cos t}$ منفی شود که هرگز این اتفاق نمی‌افتد.

در نتیجه این مقاومت، یک مقاومت پسیو است.

۶- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

در گزینه‌ی «1» برای جریان‌های مثبت، i نمی‌تواند از یک بزرگ‌تر باشد (در این حالت دیود بالایی قطع است) در حالی که با توجه به مشخصه داده شده، i می‌تواند تا 2 آمپر باشد. در گزینه‌ی «2» نیز i نمی‌تواند بزرگ‌تر از یک باشد، زیرا برای i مثبت فقط یک آمپر از جریان منبع 2 آمپری می‌تواند عبور کند و یک آمپر دیگر از دیود موازی با منبع 2 آمپری برمی‌گردد، پس در این حالت نیز i نمی‌تواند از یک آمپر بزرگ‌تر باشد.

در گزینه‌ی «4» اگر i مثبت باشد، منبع جریان 2 آمپری در دیود موازی با آن می‌چرخد و بنابراین i نمی‌تواند از یک بزرگ‌تر باشد.

در نتیجه گزینه‌ی «3» فقط می‌تواند درست باشد.

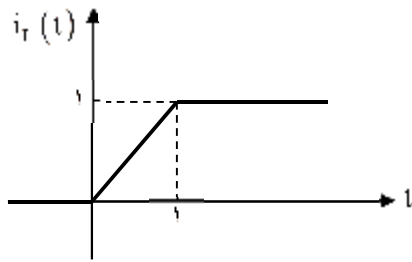
۷- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

به دلیل این که جریان اولیه سلف صفر است، در $t=0^+$ جریان منبع جریان $u(t)$ از دیود می‌گذرد و دیود مانند اتصال کوتاه عمل می‌کند. جریان سلف به تدریج شروع به افزایش می‌کند به‌طوری که:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t V_L(t) dt = \int_0^t u(t) dt = r(t)$$

یعنی جریان سلف به صورت شیب واحد افزایش می‌یابد.

در لحظه $t=1s$ ، مقدار جریان سلف به یک می‌رسد که برابر جریان منبع جریان $u(t)$ است. در نتیجه دیگر از دیود جریانی نمی‌گذرد و همهٔ جریان سلف از منبع جریان عبور می‌کند. به عبارت دیگر، جریان سلف در مقدار ثابت یک باقی می‌ماند و دیگر تغییر نمی‌کند. بنابراین شکل موج جریان گذرنده از سلف به‌صورت زیر است:



$$i_L(t) = r(t) - r(t-1)$$

۸- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

در نقطه کار، مقاومت دیود تونلی عکس شیب خط مماس بر مشخصه آن است. یعنی:

$$\frac{1}{R} = \frac{di_D}{dV} \Big|_{V_D} = 7/5 V_D^2 - 3V_D + 0/225 = -\frac{3}{40} \rightarrow$$

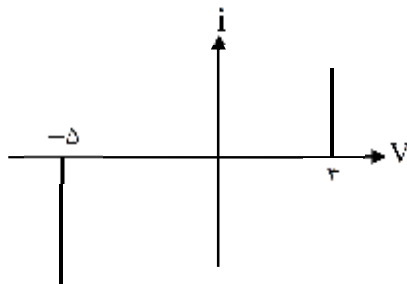
$$100V_D^2 - 40V_D + 4 = 0 \rightarrow (10V_D - 2)^2 = 0 \rightarrow V_D = 0/2 \text{ Volt}$$

۹- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

چون مدار فقط شامل دیود و منابع است، مشخصه آن نباید هیچ‌گونه شیبی داشته باشد زیرا خط مایل در اثر مقاومت خطی ایجاد می‌شود که مدار فاقد مقاومت است.

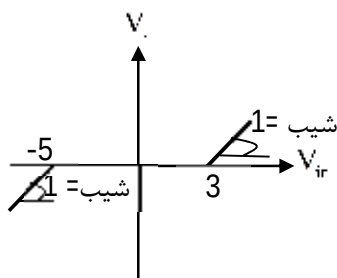
۱۰- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با سری کردن دیودها با منابع ولتاژ و سپس موازی شدن دو شاخه داریم:



و با سری شدن مجموعه فوق با مقاومت 2 اهمی داریم:

$$V_0 = 2i$$



فصل دوم: مدارهای مقاومتی و روش‌های تحلیل

در این فصل به بررسی روش‌های تحلیل مدارهای مقاومتی می‌پردازیم. این مبحث مبنای تمام فصول بعدی است، پس با دقت به مطالعه و یادگیری این فصل بپردازید.

2-1- قوانین کیرشهف

مبنای درس مدارهای الکتریکی در دو قانون زیر خلاصه شده است:

2-1-1- قانون جریان (KCL)

جمع جبری جریان‌های خروجی از هر گره برابر صفر است.

براساس این قانون می‌توان گفت در هر گره یا سوپرگره یا کات ست (مسیر بسته‌ای در مدار الکتریکی که هر المان مداری را تنها یک‌بار قطع کند) داریم:

$$\sum I_{\text{out}} = 0$$

2-1-2- قانون ولتاژ (KVL)

جمع جبری ولتاژهای عناصر در هر مسیر بسته برابر صفر است.

پس با توجه به این قانون می‌توان گفت در هر مش یا سوپرمش یا حلقه داریم:

$$\sum V_i = 0$$

نکته: در یک مدار الکتریکی با توجه به قوانین کیرشهف می‌توان گفت:

1 + تعداد گره - تعداد شاخه = تعداد متغیرهای مستقل جریان شاخه

1 - تعداد گره = تعداد متغیرهای مستقل ولتاژ شاخه

نکته: در KCL معمولاً جریان‌های وارد شونده به گره را منفی و جریان‌های خارج شونده از گره را مثبت در نظر

می‌گیریم. همچنین در KVL در مسیری که حلقه را دور می‌زنیم، اگر ابتدا به سر مثبت منبع ولتاژ برسیم، آن را مثبت در

نظر می‌گیریم و در غیر این صورت آن را منفی فرض می‌کنیم. در این حالت افت ولتاژ روی مقاومت‌ها را به صورت مثبت

در نظر می‌گیریم.

2-2- روش‌های تحلیل مدارهای مقاومتی

برای تحلیل مدارهای مقاومتی از روش‌های زیر استفاده می‌کنیم:

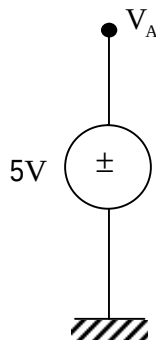
۲-۱- روش تجزیه و تحلیل گره

هدف از تجزیه و تحلیل گره، پیدا کردن ولتاژ گره‌ها (به جزء گره مبنا یا زمین که در آن $V=0$) می‌باشد. برای این

منظور KCL را در همه گره‌ها (به جزء گره زمین و گره‌های با ولتاژ معلوم) می‌نویسیم.

منظور از گره با ولتاژ معلوم این است که مثلاً اگر ولتاژ یک سر منبع ولتاژی معلوم باشد، ولتاژ سر دیگرش نیز معلوم

است و KCL زدن در آن گره‌ها غیرضروری می‌باشد مثلاً در شکل زیر $V_A = 5\text{Volt}$ است.



نکته: KCL یک قانون است و همواره درست می‌باشد ولی هدف از KCL زدن در گره‌ها، یافتن ولتاژ آن گره‌ها است. پس

KCL زدن در گره‌های با ولتاژ معلوم کار بیهوده‌ای می‌باشد.

در تجزیه و تحلیل گره باید به نکات زیر توجه نمود:

1- KCL را در حد امکان برحسب ولتاژ گره‌ها می‌نویسیم.

2- اگر گره مبنا یا زمین مشخص نبود، آن را یک سر منبع ولتاژ در نظر می‌گیریم تا نوشتن KCL در سر دیگر آن

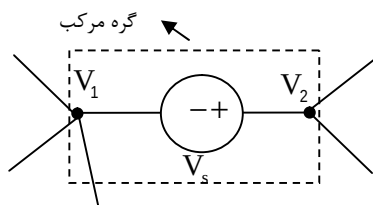
غیرضروری باشد و یک معادله از معادلات کاسته شود. همچنین می‌توان گره مبنا را گره‌ای در نظر بگیریم که تعداد

شاخه بیش‌تری به آن متصل شده است.

3- اگر بین دو گره با ولتاژ مجهول، منبع ولتاژی قرار گرفته باشد، KCL را در گره مرکب یا سوپرگره می‌نویسیم تا یک

معادله از معادلات کم شود.

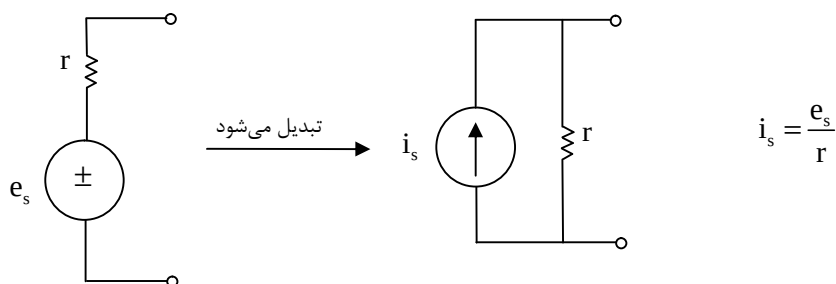
مثلاً در شکل زیر:



$$V_2 - V_1 = V_s$$

به کمک رابطه فوق، ولتاژ یکی از گره‌ها را برحسب دیگری می‌نویسیم و سپس کل نقطه‌چین نشان داده شده در شکل را به عنوان یک گره (گره مرکب) در نظر می‌گیریم و KCL را برای آن می‌نویسیم.

4- مبنای روش تجزیه و تحلیل گره، KCL می‌باشد. پس کار کردن با منبع جریان در KCL راحت‌تر است. بنابراین از تبدیل زیر برای منابع ولتاژ دارای مقاومت سری استفاده می‌نماییم:



5- در صورت امکان متغیرهای کنترلی (ولتاژها و جریان‌های وابسته) را برحسب متغیرهای مطلوب مسأله (ولتاژ گره‌ها) می‌نویسیم تا بی‌دلیل متغیر اضافی ایجاد نشود.

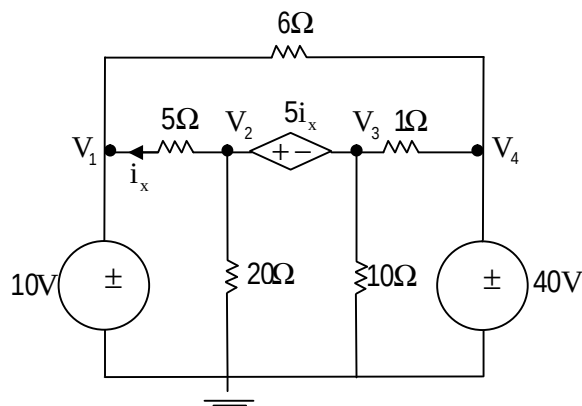
6- روش تجزیه و تحلیل گره را می‌توان برای هر مداری به کار برد. در این صورت تعداد معادلات ایجاد شده برابر است با:

$$1 - \text{تعداد سوپر گره‌ها} - \text{تعداد گره‌ها} = \text{تعداد معادلات روش گره}$$

7- هنگام KCL زدن جریان‌های وارد شونده به گره را منفی و جریان‌های خارج شونده از گره را مثبت در نظر می‌گیریم.

اکنون به بررسی چند مثلاً می‌پردازیم:

مثال ۱: در مدار شکل زیر با استفاده از روش تحلیل گره، ولتاژهای V_1, V_2, V_3, V_4 را به دست آورید.



با انتخاب گره مبنا در سر منفی منابع ولتاژ 10V و 40V خواهیم داشت:

$$V_1 = 10V \text{ و } V_4 = 40V$$

برای حذف متغیر کنترلی i_x و بیان آن برحسب متغیرهای موردنظر مسأله (ولتاژ گره‌ها) داریم:

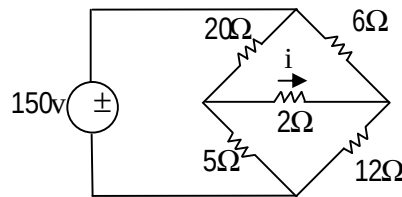
$$i_x = \frac{V_2 - V_1}{5}$$

اکنون منبع ولتاژ $5i_x$ بین دو گروه 2 و 3 را به عنوان گره مرکب در نظر گرفته و می‌توان نوشت:

$$V_2 - V_3 = 5i_x = 5 \times \frac{V_2 - V_1}{5} = V_2 - V_1 \rightarrow V_3 = V_1 = 10V$$

$$\text{KCL در گره مرکب: } \frac{V_2 - 10}{5} + \frac{V_2 - 0}{20} + \frac{10 - 0}{10} + \frac{10 - 40}{1} = 0 \rightarrow V_2 = 124V$$

مثال ۲: در مدار شکل زیر جریان i را به دست آورید.



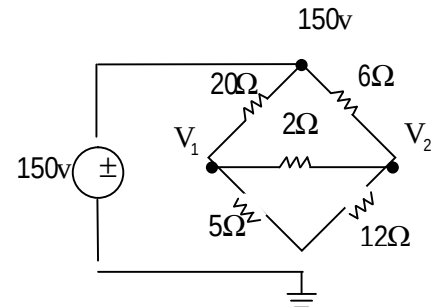
سر منفی منبع ولتاژ را به عنوان گره مبنا در نظر می‌گیریم، پس ولتاژ سر دیگر آن مشخص می‌شود و با KCL زدن در دو

گره مجهول دیگر داریم:

$$\text{KCL در گره 1: } \frac{V_1 - 150}{20} + \frac{V_1 - V_2}{2} + \frac{V_1 - 0}{5} = 0$$

$$\text{KCL در گره 2: } \frac{V_2 - 150}{6} + \frac{V_2 - V_1}{2} + \frac{V_2 - 0}{12} = 0$$

$$\rightarrow V_2 = 72V \text{ و } V_1 = 58V \Rightarrow i = \frac{V_1 - V_2}{2} = \frac{58 - 72}{2} \rightarrow i = -7A$$



۲-۲-۲ روش تجزیه و تحلیل مش

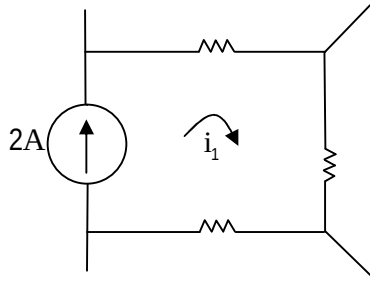
هدف از تجزیه و تحلیل مش، پیدا کردن جریان مش‌ها می‌باشد. برای این منظور KVL را در همه مش‌ها (به جزء مش

بیرونی و مش‌های با جریان معلوم) می‌نویسیم.

منظور از مش با جریان معلوم این است که اگر در یک مش، منبع جریان مستقل وجود داشته باشد، جریان آن مش

معلوم می‌باشد.

مثلاً در شکل زیر $i_1 = 2A$ می باشد.



نکته: KVL یک قانون است و همواره درست می باشد ولی هدف از KVL زدن در مش ها، یافتن جریان آن مش ها است.

پس KVL زدن در مش های با جریان معلوم کار بیهوده ای می باشد.

در تجزیه و تحلیل مش باید به نکات زیر توجه نمود:

1- KVL را در حد امکان برحسب جریان مش ها می نویسیم.

2- متغیرهای جریان را به هر یک از مش های مدار در جهت ساعتگرد نسبت می دهیم. به این ترتیب، جریان شاخه ای که

فقط در یک مش قرار دارد، برابر با جریان همان مش است و جریان شاخه ای که بین دو مش مشترک قرار دارد، برابر

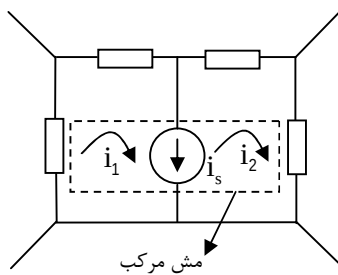
تفاضل جریان آن دو مش است.

3- اگر منبع جریانی در یک مش بیرونی قرار داشته باشد، جریان آن مش معلوم و برابر منبع جریان می باشد.

4- اگر بین دو مش با جریان مجهول، منبع جریانی قرار گرفته باشد، KVL را در مش مرکب یا سوپر مش می نویسیم تا

یک معادله از معادلات کم شود.

مثلاً در شکل زیر:



$$i_1 - i_2 = i_s$$

به کمک رابطه فوق، جریان یکی از مش ها را برحسب دیگری می نویسیم و سپس کل نقطه چین نشان داده شده در شکل

را به عنوان یک مش (مش مرکب) در نظر می گیریم و KVL را برای آن می نویسیم.

5- در صورت امکان متغیرهای کنترلی (ولتاژها و جریان های وابسته) را برحسب متغیرهای مطلوب مسأله (جریان

مش ها) می نویسیم تا بی دلیل متغیر اضافی ایجاد نشود.

6- روش تجزیه و تحلیل مش را فقط می توان برای مدارات صفحه ای (مدارهایی که شکل آن ها در یک صفحه قابل رسم

باشد البته بدون عبور کردن دو شاخه از روی همدیگر) به کار برد. در این صورت تعداد معادلات ایجاد شده برابر است با:

تعداد مش‌های مرکب - تعداد مش‌ها = تعداد معادلات روش مش

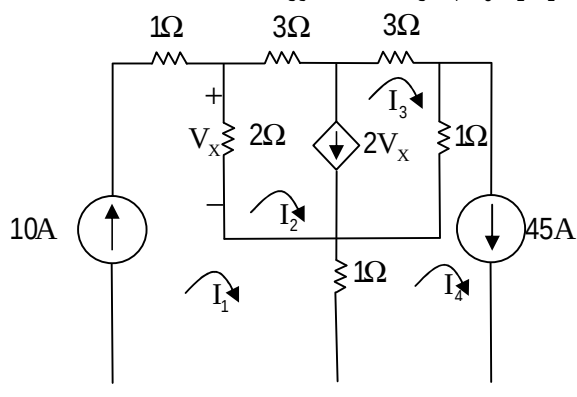
7- هنگام KVL زدن با حرکت در مش در جهت جریان آن، اگر از سر مثبت منبع ولتاژ وارد شویم، مقدار آن را $+e_s$ قرار

می‌دهیم و اگر از سر منفی منبع ولتاژ وارد شویم، $-e_s$ قرار می‌دهیم. در مورد مقاومت‌ها، اگر هنگام حرکت، هم جهت

جریان بودیم، مقدار $+RI$ را در نظر می‌گیریم و اگر در خلاف جهت جریان بودیم، $-RI$ قرار می‌دهیم.

اکنون به بررسی چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۳: در مدار شکل زیر با استفاده از تحلیل مش، جریان‌های I_1, I_2, I_3, I_4 را به دست آورید.



با توجه به جریان مش‌های بیرون می‌توان گفت:

$$I_1 = 10A \text{ و } I_4 = 45A$$

با KVL زدن در مش مرکب 2 و 3 و برای منبع جریان وابسته $2V_x$ داریم:

$$I_2 - I_3 = 2V_x \rightarrow I_2 - I_3 = 2(20 - 2I_2) \rightarrow I_3 = 5I_2 - 40$$

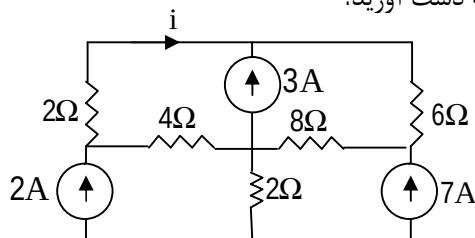
$$V_x = 2(I_1 - I_2)$$

$$\text{KVL در مش مرکب: } 3I_2 + 3I_3 + 1(I_3 - I_4) + 2(I_2 - I_1) = 0$$

$$\rightarrow 3I_2 + 3(5I_2 - 40) + (5I_2 - 40 - 45) + 2(I_2 - 10) = 0 \rightarrow I_2 = 9A$$

$$\text{و } I_3 = 5A$$

مثال ۴: در مدار شکل زیر جریان i را به دست آورید.

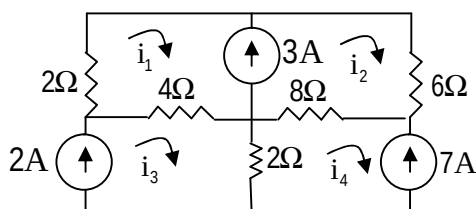


با استفاده از روش مش داریم:

$$i_3 = 2A \text{ و } i_4 = -7A$$

$$i_2 - i_1 = 3A \rightarrow i_2 = i_1 + 3$$

$$\text{KVL در مش مرکب: } 2i_1 + 6(i_1 + 3) + 8(i_1 + 3 + 7) + 4(i_1 - 2) = 0 \rightarrow i_1 = -\frac{9}{8}A$$



۲-۳- روش تجزیه و تحلیل هوشمندانه (روش ابتکاری) اول

در این روش ابتدا جریان کلیه شاخه‌های مدار را با KCL به دست می‌آوریم و سپس با KVL زدن در یک حلقه مناسب،

معادلات لازم برای تحلیل مدار را می‌نویسیم.

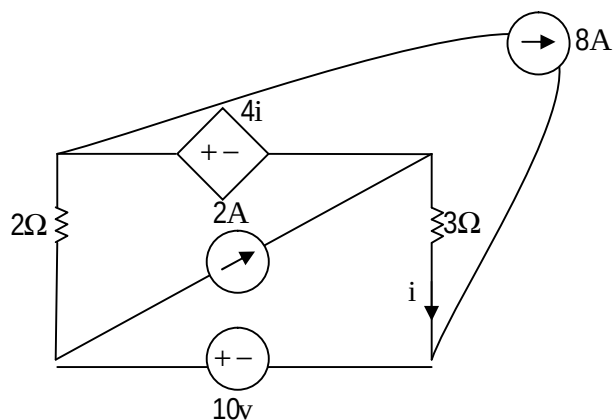
باید به این نکته توجه نمود که حلقه مناسب حلقه‌ای است که با KVL زدن در آن، جریان مجهول معلوم شود، یعنی

دارای کم‌ترین جریان مجهول باشد.

همچنین حلقه مناسب حلقه‌ای است که تا حد امکان منبع جریان در آن وجود نداشته باشد.

برای درک بهتر این روش، مثال زیر را دنبال کنید.

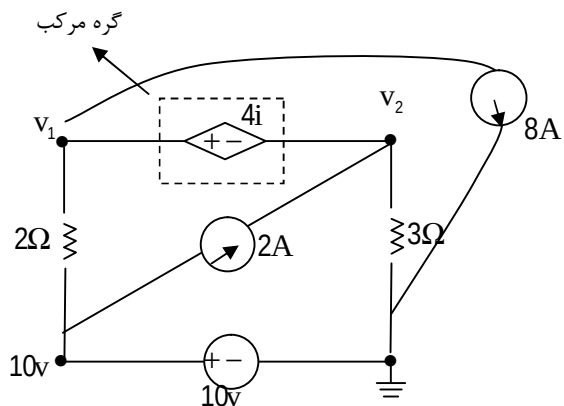
مثال ۵: در مدار شکل زیر جریان i را به دست آورید.



* راه حل اول: روش گره

با انتخاب گره مبنا در سمت راست منبع ولتاژ 10V، ولتاژ سمت چپ آن برابر 10V شده و دو گره با ولتاژ مجهول داریم

که بین آنها منبع ولتاژ قرار دارد.



بنابراین خواهیم داشت:

$$V_1 - V_2 = 4i$$

$$i = \frac{V_2 - 0}{3} = \frac{V_2}{3} \rightarrow V_1 - V_2 = \frac{4}{3} V_2 \rightarrow V_1 = \frac{7}{3} V_2$$

و با KCL زدن در گره مرکب داریم:

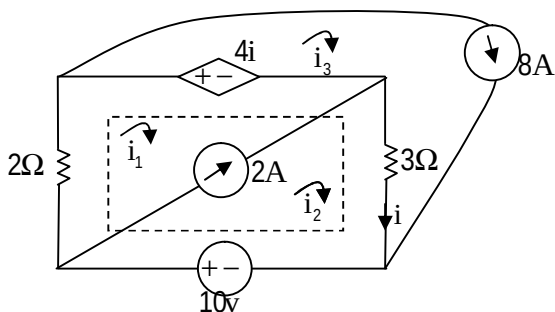
$$\text{KCL در گره مرکب: } \frac{\frac{7}{3} V_2 - 10}{2} + 8 + \frac{V_2}{3} - 2 = 0 \rightarrow V_2 = -\frac{2}{3} \text{ V}$$

و برای جریان i داریم:

$$i = \frac{V_2}{3} = -\frac{2}{9} \text{ A}$$

* راه حل دوم: روش مش

با توجه به شکل زیر جریان i_3 معلوم است و برای مش‌های 1 و 2 از KVL در مش مرکب استفاده می‌نماییم.



$$i_3 = 8A$$

$$i_2 - i_1 = 2A \rightarrow i_1 = i_2 - 2$$

$$i = i_2 - i_3 = i_2 - 8$$

$$\text{KVL در مش مرکب: } 2i_1 + 4i + 3i - 10 = 0 \rightarrow 2(i_2 - 2) + 7(i_2 - 8) - 10 = 0$$

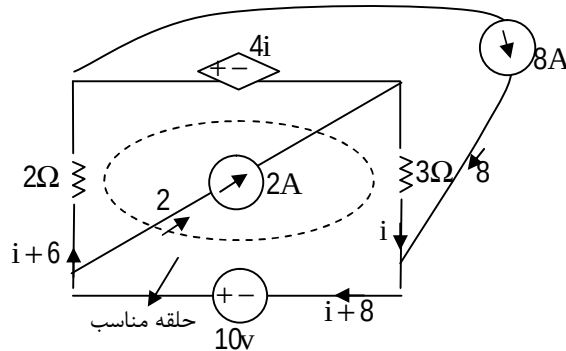
$$\rightarrow 9i_2 = 70 \rightarrow i_2 = \frac{70}{9} A$$

و برای جریان i داریم:

$$i = i_2 - 8 = \frac{70}{9} - 8 = -\frac{2}{9} A$$

* راه حل سوم: روش هوشمندانه

ابتدا روی شکل مدار، با جریان‌های واقعی KCL می‌زنیم و سپس در یک حلقه مناسب KVL را می‌نویسیم.



$$\text{KVL در حلقه مناسب: } 4i + 3i - 10 + 2(i + 6) = 0$$

$$\rightarrow 9i + 2 = 0 \rightarrow i = -\frac{2}{9} A$$

ملاحظه می‌شود که این روش چقدر کار تحلیل مدار را ساده می‌کند.

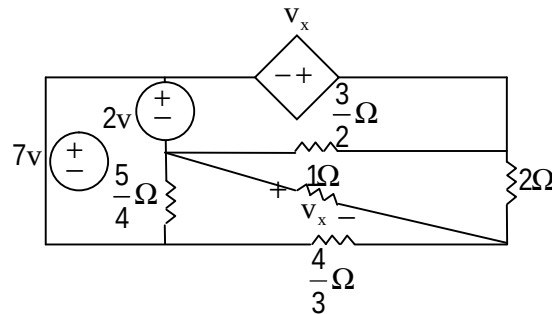
۲-۲-۴ روش تجزیه و تحلیل هوشمندانه (ابتکاری)

در این روش ابتدا ولتاژ گره‌های مدار را روی شکل آن مشخص می‌کنیم و سپس با KCL زدن در یک گره مناسب (که

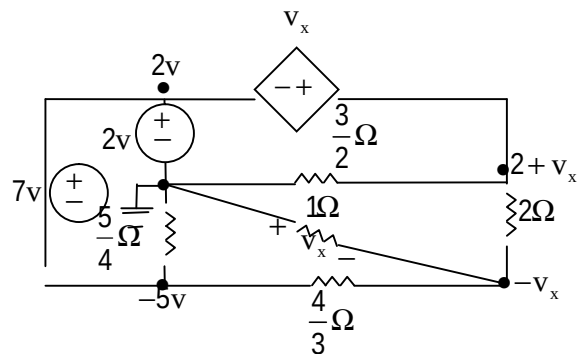
گاهی گره مرکب می‌باشد)، مجهولات مسأله را به دست می‌آوریم. (گره مناسب گره‌ای است که منبع ولتاژی به آن

متصل نباشد).

مثال ۶: در مدار شکل زیر مقدار V_x را به دست آورید.



با انتخاب گره مبدا در سر منفی منبع ولتاژ 2v و مشخص کردن ولتاژ گره‌های مدار خواهیم داشت:



با KCL زدن در گره با ولتاژ $-V_x$ داریم:

$$\text{KCL: } \frac{-V_x - (-5)}{\frac{4}{3}} + \frac{-V_x}{1} + \frac{-V_x - (2 + V_x)}{2} = 0 \rightarrow V_x = 1\text{Volt}$$

* روش بهینه

در مدارهای با گره کم‌تر، روش گره و در مدارهای با مش کم‌تر، روش مش، روش بهینه است. ولی در اکثر مسائل می‌توان از روش‌های تحلیل هوشمندانه استفاده نمود.

3-2- مدارهای متقارن

در تمام شبکه‌های مقاومتی که دارای شکل‌های هندسی منظم متقارن هستند و یا از جهت‌های متقارن تا بی‌نهایت امتداد دارند، می‌توان از خواص تقارن استفاده کرد. توجه به تقارن در تحلیل مدار، کار را بسیار ساده می‌کند و از تعداد مجهولات می‌کاهد. برای استفاده از تقارن در تحلیل مدار می‌توان از نکات زیر استفاده نمود:

1- در یک مدار متقارن، وقتی جریان i در محور تقارن مدار به n شاخه یکسان می‌رسد، سهم هر شاخه برابر $\frac{i}{n}$

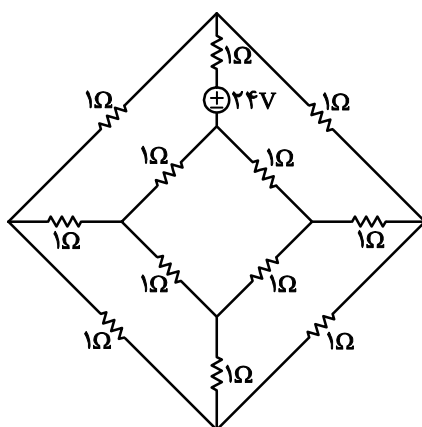
می‌شود.

2- در هر مدار متقارن، می‌توان گره‌های هم پتانسیل را روی هم دیگر قرار داد. یعنی می‌توان مدار را روی محور تقارنش تا کرد.

3- هنگام تا کردن مدار، عناصر روی محور تقارن ثابت باقی می‌مانند ولی سایر عناصر با جفت یکسان خود موازی می‌شوند، یعنی مقاومت‌ها و سلف‌ها نصف و خازن‌ها دو برابر می‌شوند. همچنین منابع جریان نیز دو برابر می‌شوند ولی منابع ولتاژ هیچ تغییری نمی‌کنند.

4- گره‌های متقارن (نسبت به محور تقارن)، دارای ولتاژ یکسان می‌باشند. برای درک بهتر این موضوع چند مدار را با استفاده از خاصیت تقارن مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم.

مثال ۷: در مدار شکل زیر جریان‌های i_1 ، i_2 را به دست آورید.

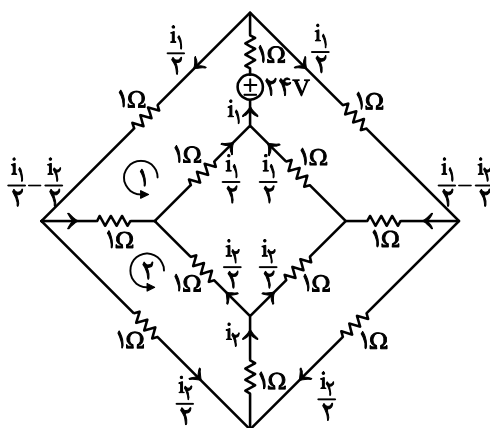


مدار نسبت به محور قائم وسطی متقارن است، پس جریان i_1 به دو جریان مساوی $\frac{i_1}{2}$ تقسیم می‌شود. همچنین در

پایین مدار دو جریان $\frac{i_2}{2}$ خواهیم داشت. پس در دو مش سمت راست یا سمت چپی، دو جریان i_1 و i_3 مجهول بوده که

با KVL به دست می‌آیند.



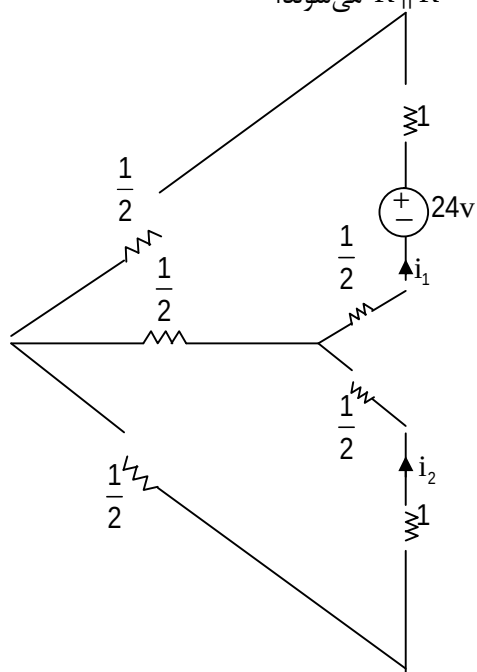


و داریم:

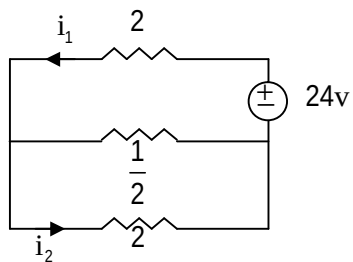
$$\begin{cases} \text{KVL}(1): i_1 + \frac{i_1}{2} + \frac{i_1}{2} - \frac{i_2}{2} + \frac{i_1}{2} = 24 \\ \text{KVL}(2): i_2 + \frac{i_2}{2} + \frac{i_2}{2} - \frac{i_1}{2} + \frac{i_2}{2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_1 = 10\text{A} \\ i_2 = 2\text{A} \end{cases}$$

همچنین می‌توان گفت چون مدار متقارن است، می‌توان آن را از روی محور تقارنش تا کرد و روی نیمه دیگر قرار دهیم.

واضح است که مقاومت‌های R متناظر که روی هم قرار می‌گیرند، برابر $R \parallel R = \frac{R}{2}$ می‌شوند.



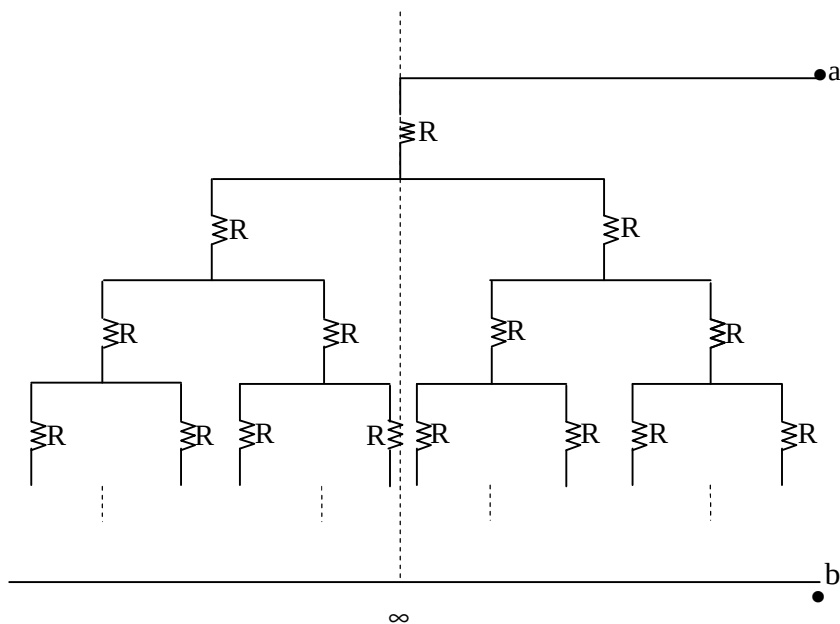
و باز می‌توان مدار را ساده‌تر کرد به‌طوری که:



$$i_1 = \frac{24}{2 + \left(2 \parallel \frac{1}{2}\right)} = 10A$$

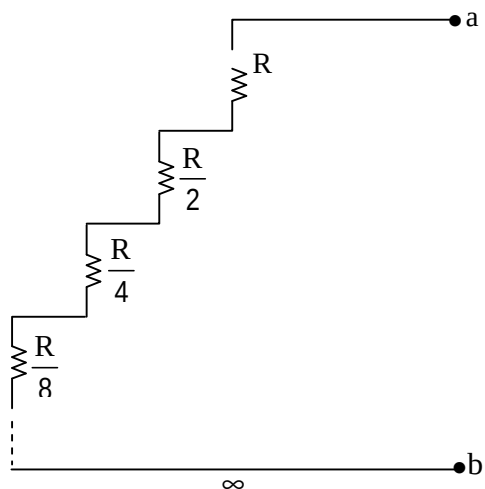
$$i_2 = \frac{\frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2}} \times i_1 = \frac{10}{5} = 2A$$

مثال ۸: در مدار شکل زیر مقاومت معادل از دو سر a, b چقدر است؟



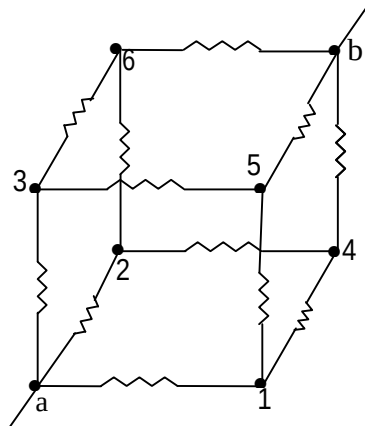
اگر مدار را روی محور وسطی (محور تقارنش) تا کنیم، باز یک مدار متقارن به‌وجود می‌آید و همین‌طور تا بی‌نهایت این

کار را تکرار می‌کنیم تا در نهایت به مدار شکل زیر برسیم:



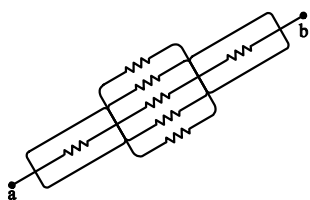
$$\begin{aligned} R_{ab} &= R + \frac{R}{2} + \frac{R}{4} + \frac{R}{8} + \dots \\ &= R \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) \\ &= R \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2R \end{aligned}$$

مثال ۹: اگر همهٔ مقاومت‌ها برابر R باشد، مقاومت معادل دو سر a و b را پیدا کنید.



با توجه به شکل می‌توان گفت گره‌های 1 و 2 و 3 با یکدیگر و گره‌های 4 و 5 و 6 نیز با یکدیگر هم پتانسیل می‌باشند.

پس آن‌ها را روی هم قرار می‌دهیم و خواهیم داشت:



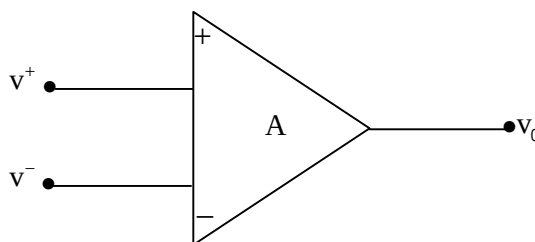
$$R_{ab} = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{5}{6}R$$

2-4- آپ امپ

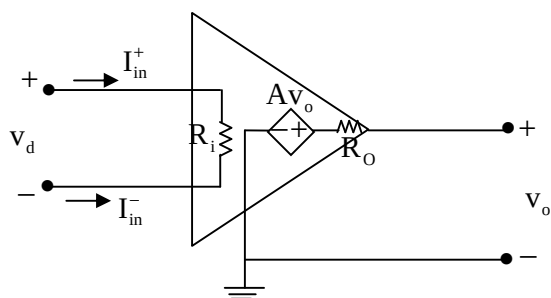
تقویت کننده عملیاتی یا آپ امپ عنصری سه سر است که تفاضل ورودی را A برابر می‌کند و در خروجی تحویل می‌دهد، یعنی:

$$V_0 = AV_d = A(V^+ - V^-)$$

که A بهره تقویت کننده است.



مدار داخلی آپ امپ به صورت زیر است:



در حالت ایده‌آل، $A \rightarrow \infty$ را خیلی بزرگ در نظر می‌گیریم، پس می‌توان گفت:

$$V_d = 0 \rightarrow V^+ = V^-$$

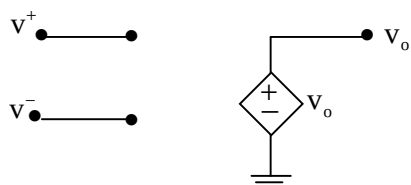
یعنی ولتاژ سرهای ورودی آپ امپ برابر است، به عبارت دیگر یک اتصال کوتاه مجازی در دو سر ورودی داریم.

همچنین مقاومت ورودی یک آپ امپ ایده‌آل خیلی بزرگ است ($R_i \rightarrow \infty$)، پس جریان ورودی آپ امپ صفر است، یعنی:

$$I_{in}^+ = I_{in}^- = 0$$

و مقاومت خروجی آن بسیار کوچک است. ($R_o \rightarrow 0$)

در نتیجه مدار معادل آپ امپ ایده‌آل به صورت زیر است:



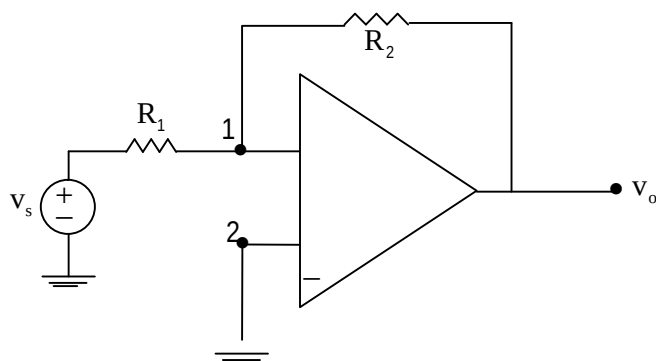
برای تحلیل مدارهای شامل آپ امپ:

1- ولتاژهای ورودی را برابر و جریان‌های ورودی را صفر قرار می‌دهیم.

2- در سرهای ورودی از KCL استفاده می‌کنیم.

3- از KCL در خروجی استفاده نمی‌کنیم.

مثال ۱۰: در مدار شکل زیر، v_o را برحسب v_s به دست آورید. (آپ امپ ایده آل است).



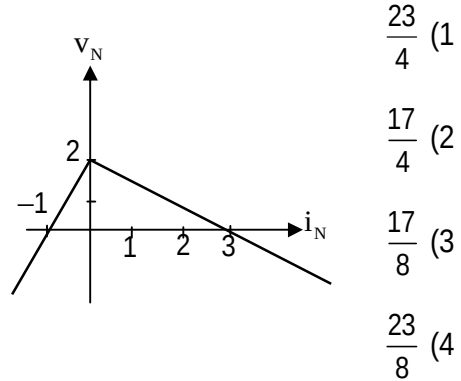
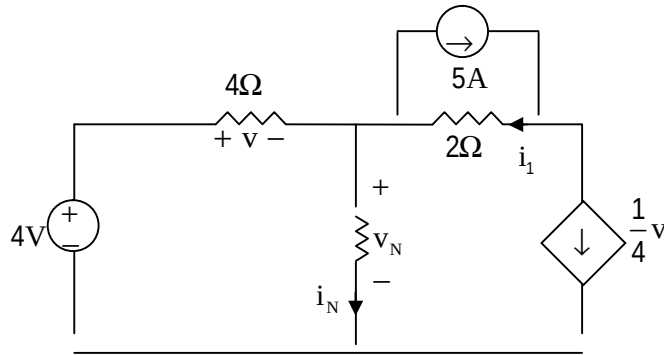
با توجه به ایده آل بودن آپ امپ و KCL زدن در گره 1 داریم:

$$V^+ = V^- = 0$$

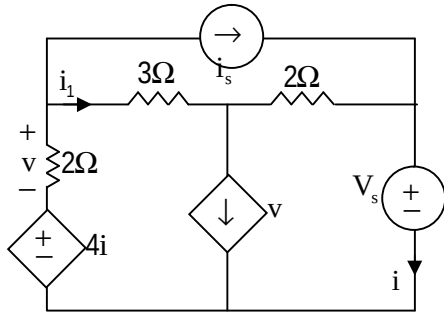
$$\text{KCL: } \frac{V_1 - V_s}{R_1} + \frac{V_1 - V_o}{R_2} = 0 \xrightarrow{V_1=0} V_o = -\frac{R_2}{R_1} V_s$$

تست‌های طبقه‌بندی شده مبحث مدارهای مقاومتی و روش‌های تحلیل

۱- در مدار شکل زیر اگر $i_N = \frac{3}{2} A$ باشد، i_1 چند آمپر است؟ (مدار دارای جواب یگانه است)

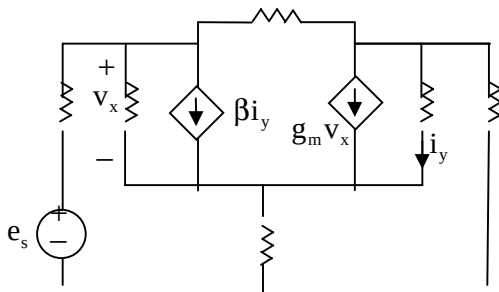


۲- اگر در مدار شکل زیر $i = 2i_1$ باشد، مقدار $\frac{V_s}{i_s}$ برابر است با:



- (1) $-\frac{1}{3}$
- (2) $-\frac{1}{2}$
- (3) 2
- (4) 3

۳- در مدار شکل زیر فرض کنید تمام مقاومت‌ها سه برابر شوند و مقدار β ثابت نگه داشته شود. مقدار g_m

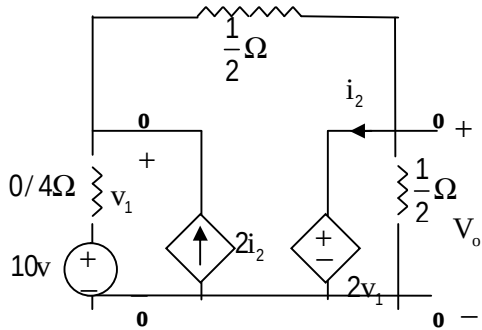


چگونه تغییر کند تا ولتاژ شاخه‌ها تغییر نکند؟

- (1) g_m تغییر نکند.
- (2) g_m در 3 ضرب شود.
- (3) g_m در $\frac{1}{3}$ ضرب شود.

(4) بدون داشتن مقادیر مقاومت‌ها نمی‌توان اظهار نظر قاطع کرد.

۴- ولتاژ خروجی V_o در مدار شکل زیر کدام است؟



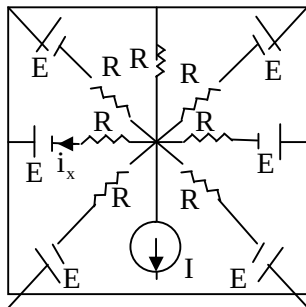
(1) 2

(2) 4

(3) 6

(4) 8

۵- مقدار جریان i_x را به دست آورید. ($I = 2A, R = 7\Omega, E = 14V$)



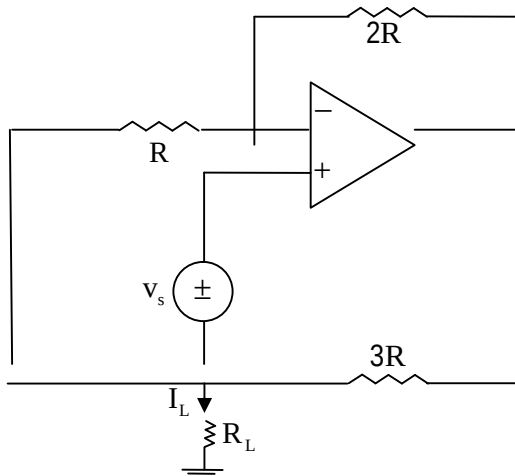
(1) 0

(2) 4A

(3) 2A

(4) 3/4A

۶- آپ امپ ایده آل مدار شکل زیر در ناحیه خطی عمل می کند. جریان I_L گذرنده از مقاومت R_L کدام است؟



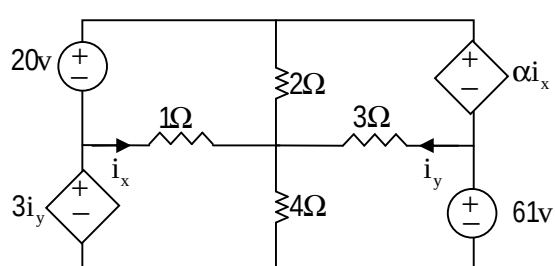
(1) $\frac{V_s}{2R}$

(2) $\frac{2V_s}{R}$

(3) $\frac{V_s}{3R}$

(4) $\frac{3V_s}{R}$

۷- به ازای چه مقدار α مدار شکل زیر دارای جواب یکتا است؟



(1) $\frac{1}{2}$

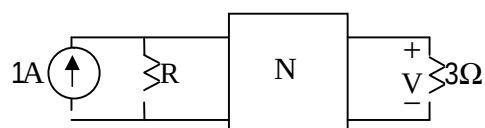
(2) 2

(3) 4

(4) تمام مقادیر α

۸- در مدار شکل زیر شبکه N متشکل از مقاوت‌های خطی مثبت است. کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند

ولتاژ v را نشان دهد؟ ($R \geq 0$)



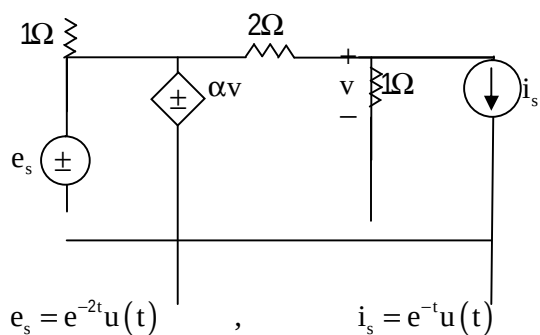
(2) $\frac{2R+1}{R+1}$

(1) $\frac{2R}{R+1}$

(4) $\frac{4R+1}{3R+1}$

(3) $\frac{7R}{2R+3}$

۹- در مدار شکل زیر α را چنان تعیین کنید که شدت جریان مقاومت ۲ اهمی $i_R = \frac{1}{2}e^{-t}u(t)$ باشد؟



(1) -3

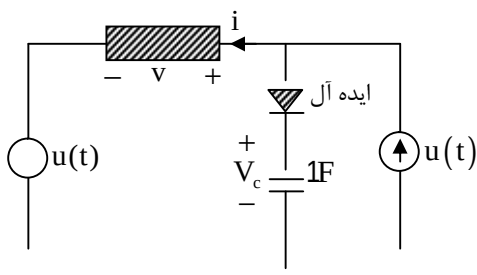
(2) -1

(3) 1

(4) 3

۱۰- اگر $V_c(0^-) = 1$ و مشخصه مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان به صورت $V = ti$ باشد، ولتاژ $V_c(t)$ در

زمان‌های مثبت کدام است؟



(1) $t+1$

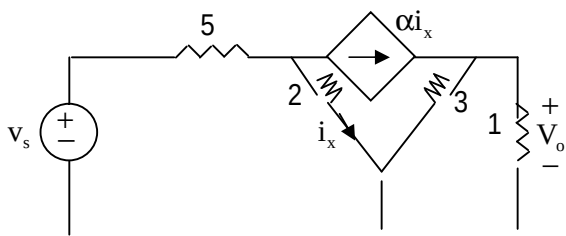
(2) $\frac{1}{2}t+1$

(3) t^2+t+1

(4) $\frac{1}{2}t^2+t+1$

۱۱- در مدار شکل زیر مقاومت‌ها برحسب مهو داده شده‌اند. حداقل مقدار α که به ازای آن مدار برای

خروجی V_o مانند یک تقویت کننده عمل می‌کند چیست؟



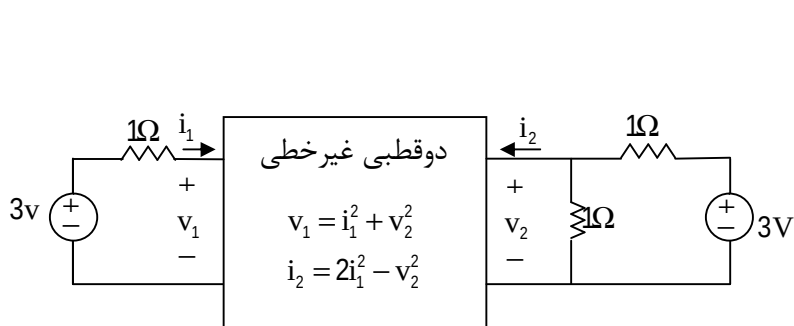
(1) 10

(2) 12

(3) 14

(4) به علت وجود منبع وابسته این مدار همواره به عنوان یک تقویت کننده عمل می‌کند.

۱۲- نقطه کار مدار شکل زیر برابر است با:



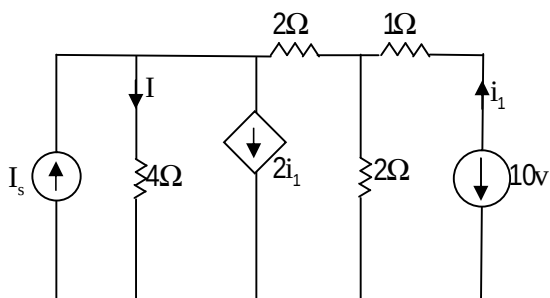
(1) $\begin{cases} i_1 = -1 \\ V_2 = 1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} i_1 = 1 \\ V_2 = 1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} i_1 = 1 \\ V_2 = -1 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} i_1 = 2 \\ V_2 = 1 \end{cases}$

۱۳- در مدار شکل زیر، مقدار منبع I_s (برحسب آمپر) در صورتی که $I = 0$ باشد، کدام است؟



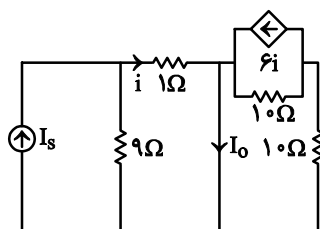
(1) 2/5

(2) 7/5

(3) 22/5

(4) 27/5

۱۴- در مدار شکل زیر نسبت $\frac{I_o}{I_s}$ برابر است با:

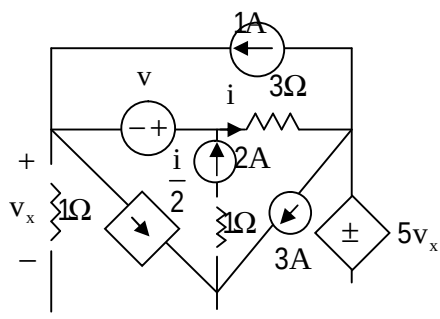


(1) 0/9 (2-1/8)

(3) 2/7

(4) 3/6

۱۵- در مدار شکل زیر، مقدار V چقدر باشد تا $V_x = 0$ شود؟



(1) 3

(2) 6

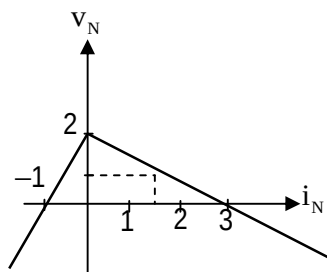
(3) 12

(4) 18

پاسخ تشریحی

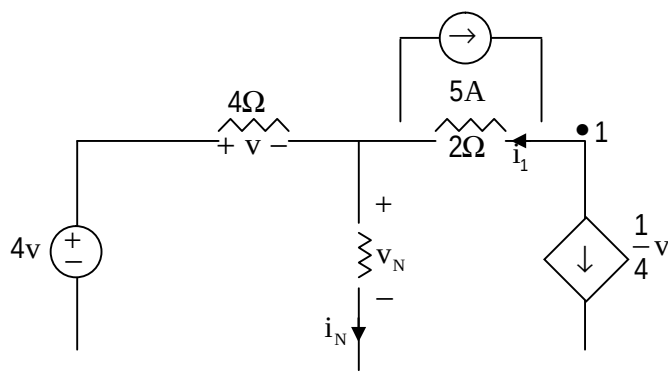
۱- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با توجه به مشخصه غیرخطی، اگر $i_N = \frac{3}{2} \text{ A}$ باشد برای V_N داریم:



$$i_N = \frac{3}{2} \text{ A} \rightarrow V_N = 1 \text{ V}$$

بنابراین با KVL در مش سمت چپ و KCL در گره ۱ داریم:

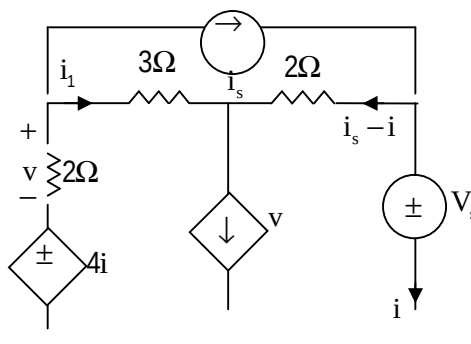


$$\text{KVL: } V_N + V - 4 = 0 \rightarrow V = 4 - 1 = 3 \text{ Volt}$$

$$\text{KCL: } i_1 + \frac{1}{4} V - 5 = 0 \rightarrow i_1 = 5 - \frac{V}{4} = 5 - \frac{3}{4} \rightarrow i_1 = \frac{17}{4} \text{ A}$$

۲- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با KCL زدن بر روی مدار و KVL در مش بیرونی داریم:



$$\text{KVL: } V_s = 2(i_s - i) - 3i_1 + V + 4i$$

با قرار دادن $i = 2i_1$ طبق فرض مسأله داریم:

$$V_s = 2i_s + V + i_1$$

و با KCL زدن در گره وسطی برای یافتن V خواهیم داشت:

$$\text{KCL: } V = i_1 + i_s - i = i_s - i_1$$

در نتیجه:

$$V_s = 2i_s + i_s - i_1 + i_1 = 3i_s \rightarrow \frac{V_s}{i_s} = 3$$

۳- گزینه ی «۳» صحیح است.

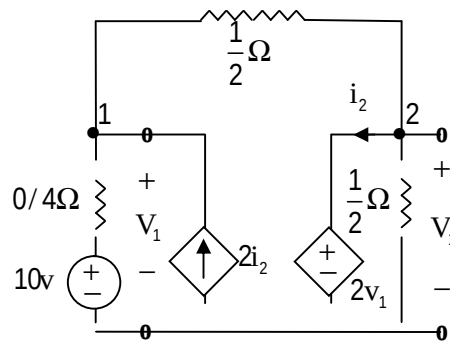
چون قرار است ولتاژ شاخه‌ها تغییر نکند و مقاومت‌ها سه برابر شود، پس جریان شاخه‌های مقاومتی $\frac{1}{3}$ می‌شود. حال اگر

در سر بالایی منبع جریان وابسته $g_m V_x$ ، KCL بزنیم، چون مقدار V_x نسبت به حالت اول تغییر نکرده است و جریان

سه شاخه دیگر $\frac{1}{3}$ برابر شده‌اند، پس g_m هم باید $\frac{1}{3}$ برابر شود تا معادله درست باشد.

۴- گزینه ی «۲» صحیح است.

با توجه به شکل مدار می‌توان گفت $V_o = 2V_1$ و با اعمال KCL در گره‌های 1 و 2 داریم:



$$\text{KCL (1): } \frac{V_1 - 10}{0.4} - 2i_2 + \frac{V_1 - 2V_1}{\frac{1}{2}} = 0 \rightarrow i_2 = \frac{1}{4}V_1 - \frac{25}{2}$$

$$\text{KCL (2): } \frac{2V_1}{\frac{1}{2}} + i_2 + \frac{2V_1 - V_1}{\frac{1}{2}} = 0 \rightarrow 6V_1 + i_2 = 0 \rightarrow 6V_1 + \frac{1}{4}V_1 - \frac{25}{2} = 0 \rightarrow V_1 = 2 \text{ Volt}$$

بنابراین $V_o = 2V_1 = 4 \text{ Volt}$ است.

۵- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

اگر ولتاژ نقطهٔ وسط را V در نظر بگیریم با اعمال KCL در این نقطه داریم:

$$\text{KCL: } 6\left(\frac{V+E}{R}\right) + \frac{V}{R} + I = 0 \rightarrow V = -\frac{RI+6E}{7} = -\frac{(2 \times 7) + (6 \times 14)}{7} = -14V$$

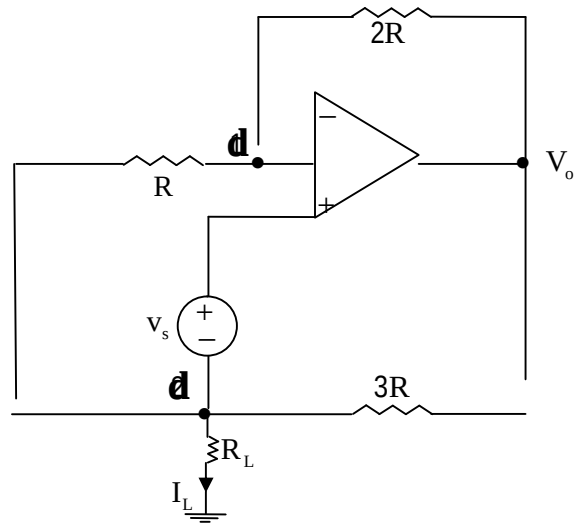
بنابراین برای i_x خواهیم داشت:

$$i_x = \frac{V+E}{R} = \frac{-14+14}{7} = 0 \rightarrow i_x = 0$$

۶- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با اعمال KCL در گره‌های 1 و 2 داریم:

$$\begin{cases} V_2 = V_L \\ V_+ = V_L + V_s \\ V_1 = V_- = V_+ = V_L + V_s \end{cases}$$



$$\text{KCL}(1): \frac{V_1 - V_2}{R} + \frac{V_1 - V_o}{2R} = 0 \rightarrow \frac{V_L + V_s - V_L}{R} + \frac{V_L + V_s - V_o}{2R} = 0 \rightarrow$$

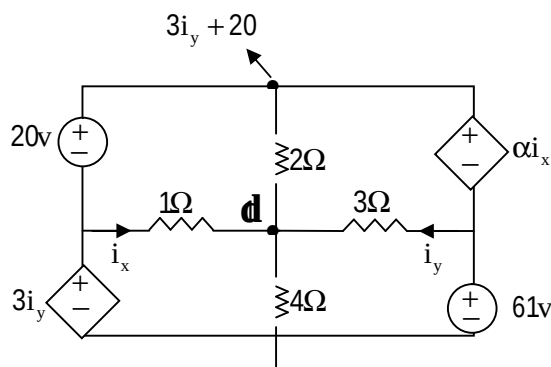
$$\frac{2V_s + V_L + V_s - V_o}{2R} = 0 \rightarrow V_o - V_L = 3V_s$$

$$\text{KCL}(2): I_L + \frac{V_2 - V_1}{R} + \frac{V_2 - V_o}{3R} = 0 \rightarrow I_L + \frac{V_L - V_L - V_s}{R} + \frac{V_L - V_o}{3R} = 0$$

$$\rightarrow I_L = \frac{V_o - V_L + 3V_s}{3R} = \frac{3V_s + 3V_s}{3R} = \frac{2V_s}{R}$$

۷- گزینه ی «۲» صحیح است.

با KCL زدن در گره وسط (گره 1) داریم:



$$V_1 = 3i_y - i_x = 61 - 3i_y$$

$$\text{KCL}(1): -i_x - i_y + \frac{3i_y - i_x}{4} + \frac{3i_y - i_x - (3i_y + 20)}{2} = 0$$

با حل این دو معادله $i_x = -7$ و $i_y = 9$ به دست می آیند.

با اعمال KVL در مش بیرونی داریم:

$$3i_y + 20 - \alpha i_x - 61 = 0 \rightarrow \alpha = \frac{(3 \times 9) + 20 - 61}{-7} = \frac{-14}{-7} \rightarrow \alpha = 2$$

۸- گزینه ی «۱» صحیح است.

به ازای $R = 0$ ، منبع جریان 1A اتصال کوتاه می شود و در نتیجه جریانی به مقاومت 3 اهمی نمی رسد، پس $V = 0$

است. یعنی گزینه «1» یا «3» درست است.

اگر بخواهیم V ماکزیمم شود باید بیش ترین جریان به مقاومت 3 اهمی برسد، یعنی R باید بی نهایت باشد تا جریانی

نکشد. در این صورت به ازای گزینه «1»، $V = 2$ و به ازای گزینه «3»، $V = 3/5$ است.

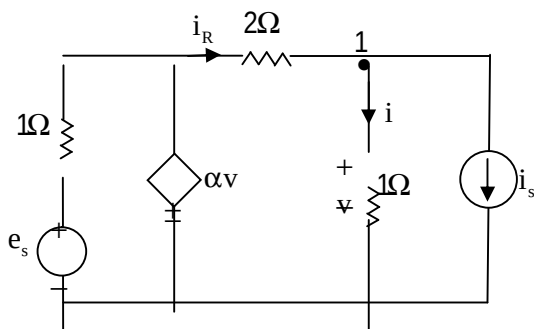
چون شبکه N مدار مقاومتی پیسو است، حداکثر جریان خروجی آن یک آمپر است و حداکثر V برابر

$V_{\max} = 1 \times 3 = 3V$ می باشد. پس گزینه «3» نیز نادرست است و فقط گزینه «1» می تواند مقدار ولتاژ V را نشان

دهد.

۹- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با نوشتن KCL در گره 1 داریم:



$$\text{KCL: } i = i_R - i_s = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) - e^{-t}u(t) = -\frac{1}{2}e^{-t}u(t)$$

$$V = 1 \times i = -\frac{1}{2}e^{-t}u(t)$$

و با اعمال KVL در مش وسطی داریم:

$$\text{KVL: } \alpha V = 2i_R + V \rightarrow (\alpha - 1)V = 2i_R \rightarrow (\alpha - 1)\left(-\frac{1}{2}e^{-t}u(t)\right) = e^{-t}u(t)$$

$$\rightarrow \alpha - 1 = -2 \rightarrow \alpha = -1$$

۱۰- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

اگر فرض کنیم دیود مدار باز باشد، با KVL زدن در مش سمت چپ داریم:

$$V_d = ti + u(t) - V_C(0)$$

که برای $t = 0^+$ داریم:

$$V_d(0^+) = (t \times 1) + 1 - 1 = t|_{t=0^+} > 0$$

پس دیود نمی‌تواند مدار باز باشد. یعنی از ابتدا دیود اتصال کوتاه است و با KCL زدن در گره بالایی داریم:

$$\text{KCL: } \frac{V_C - u(t)}{t} + \frac{dV_C}{dt} = u(t) \rightarrow t \frac{dV_C}{dt} + V_C = tu(t) + u(t)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}(tV_C(t)) = u(t)(t+1) \xrightarrow{\int} \int_0^t \frac{d}{dt}(tV_C(t)) dt = \int_0^t (t+1)u(t) dt$$

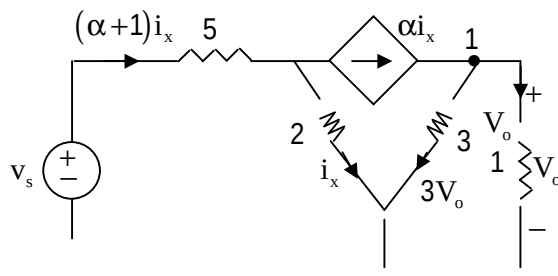
$$\rightarrow tV_C(t) = \left(\frac{t^2}{2} + t\right)u(t) \rightarrow V_C(t) = \left(\frac{t}{2} + 1\right)u(t)$$

بنابراین برای $t > 0$ داریم:

$$V_C(t) = \frac{1}{2}t + 1$$

۱۱- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

برای عملکرد به صورت تقویت کننده باید نسبت V_o به V_s بزرگ‌تر از یک باشد. $\left(\frac{V_o}{V_s} > 1\right)$ با KCL زدن و نوشتن



KVL در مدار داریم:

$$\text{KCL}(1): \alpha i_x = V_o + 3V_o = 4V_o \rightarrow V_o = \frac{\alpha}{4} i_x \rightarrow i_x = \frac{4}{\alpha} V_o$$

$$\text{KVL در مش سمت چپ}: V_s = \frac{(\alpha+1)i_x}{5} + \frac{i_x}{2} = \frac{4}{\alpha} V_o \left(\frac{\alpha+1}{5} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\rightarrow \frac{V_o}{V_s} = \frac{\alpha}{4} \cdot \frac{1}{\frac{\alpha+1}{5} + \frac{1}{2}} = \frac{5\alpha}{4\alpha+14} \geq 1 \rightarrow \alpha \geq 14$$

بنابراین حداقل مقدار α برابر 14 است.

۱۲- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با نوشتن KVL در مش سمت چپ داریم:

$$\text{KVL}: 3 = i_1 + V_1 = i_1 + i_1^2 + V_2^2$$

و با KCL زدن در گره سمت راست خواهیم داشت:

$$i_2 + V_2 + \frac{V_2 - 3}{1} = 0 \rightarrow i_2 = 3 - 2V_2 = 2i_1^2 - V_2^2$$

برای به دست آوردن نقطه کار باید معادلات فوق برحسب V_2 و i_1 حل شوند:

$$\begin{cases} i_1 + i_1^2 + V_2^2 = 3 \\ 2i_1^2 + 2V_2 - V_2^2 = 3 \end{cases}$$

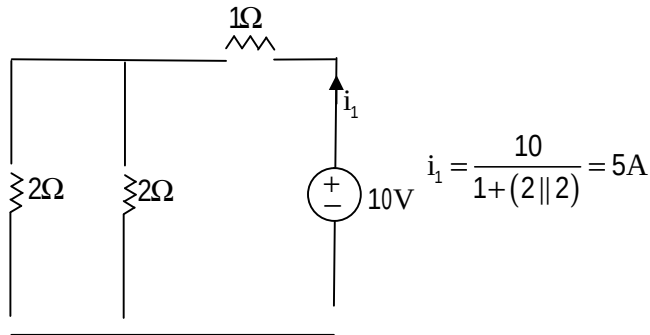
با توجه به غیرخطی بودن معادلات، گزینه‌ها را در این معادلات قرار می‌دهیم.

دیده می‌شود گزینه «2» در معادلات فوق صدق می‌کند.

۱۳- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با در نظر گرفتن $I=0$ ، ولتاژ دو سر منبع جریان I_s برابر است با ولتاژ دو سر مقاومت 4 اهمی، یعنی $4 \times I=0$. پس ولتاژ دو سر منبع جریان صفر است و شاخه مقاومت 4 اهمی هم مدار باز ($I=0$) و هم اتصال کوتاه ($V=0$) است. در نتیجه با اتصال کوتاه شدن مقاومت 4 اهمی، دو مقاومت 2 اهمی موازی می‌شوند.

به عبارت دیگر:



و جریان هر کدام از مقاومت‌های 2 اهمی برابر $i_2 = 2/5A$ است.

اکنون با KCL زدن در گره سمت چپ مدار اصلی داریم:

$$\text{KCL : } -I_s + I + 2i_1 - \frac{i_1}{2} = 0 \rightarrow I_s = I + \frac{3}{2}i_1 = 0 + \left(\frac{3}{2} \times 5\right) \rightarrow I_s = 7.5A$$

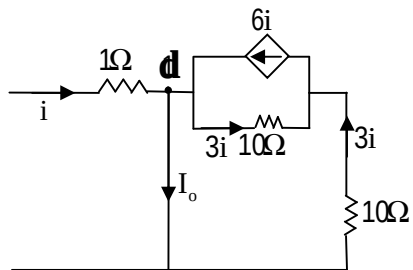
در این رابطه، $\frac{-i_1}{2}$ مربوط به جریان مقاومت 2 اهمی است که به گره موردنظر وارد می‌شود.

۱۴- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

چون شاخه‌ای که جریان I_o از آن می‌گذرد اتصال کوتاه است، پس مقاومت‌های یک اهمی و 9 اهمی موازی هستند و جریان I_s بین آن‌ها تقسیم می‌شود:

$$i = \frac{9}{9+1} I_s \rightarrow i = \frac{9}{10} I_s$$

از طرفی مقاومت‌های 10 اهمی نیز موازی‌اند و جریان گذرنده از هر کدام $3i$ است. پس با KCL زدن در گره 1 داریم:



$$\text{KCL} : i + 6i = I_o + 3i \rightarrow I_o = 4i = \frac{36}{10} I_s \rightarrow \frac{I_o}{I_s} = 3/6$$

۱۵- گزینه ی «۲» صحیح است.

با KCL و KVL زدن داریم:

$$\text{KCL} : -1 + \frac{V_x}{1} + \frac{i}{2} + i - 2 = 0 \xrightarrow{V_x=0} i = 2A$$

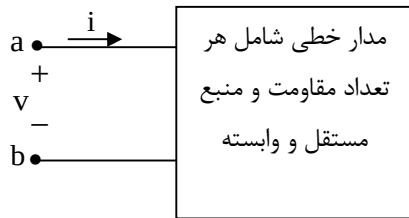
$$\text{KVL} : -V + 3i + 5V_x - V_x = 0 \rightarrow V = 3i = 6 \text{ Volt}$$

فصل سوم: مدارهای معادل

می‌توان هر شبکه خطی شامل هر تعداد مقاومت و منبع مستقل و وابسته را با یک شبکه شامل فقط یک مقاومت و یک منبع ولتاژ یا منبع جریان مدل‌سازی نمود. این مدل‌سازی تجزیه و تحلیل مدار را بسیار ساده و آسان می‌کند.

برای درک بهتر این موضوع، فرض کنید درون شبکه زیر یک مدار خطی شامل مقاومت‌ها و منابع وابسته و مستقل وجود

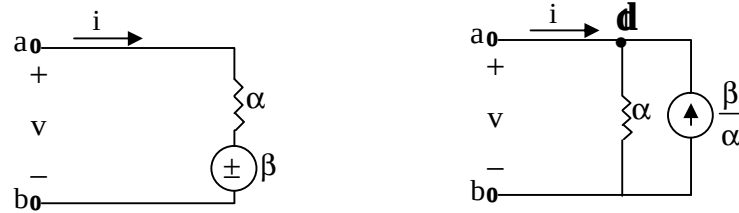
دارد.



با توجه به خطی بودن مدار می‌توان گفت رابطه ولتاژ و جریان در این شبکه به صورت زیر است:

$$V = \alpha i + \beta$$

با در نظر گرفتن رابطه فوق می‌توان مدارهای زیر را برای شبکه فوق مدل‌سازی نمود:

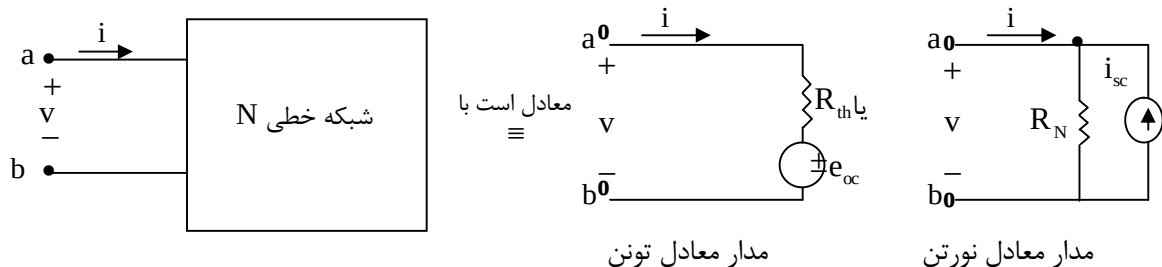


اگر در مدار اول KVL و در گره 1 از مدار دوم KCL بنویسیم به رابطه فوق می‌رسیم.

3-1- مدارهای معادل تونن و نورتن

معادل سازی‌های فوق را مدارهای معادل تونن و نورتن می‌نامیم.

پس برای هر مدار خطی، یک مدار معادل تونن (مدار اول) و یک مدار معادل نورتن (مدار دوم) داریم.



در این معادل‌سازی، α را با R_{th} یا R_{eq} یا R_N نشان می‌دهیم و مقدار منبع ولتاژ β را با V_{th} یا e_{oc} (ولتاژ مدار باز)

و مقدار منبع جریان $\frac{\beta}{\alpha}$ را با i_N یا i_{sc} (جریان اتصال کوتاه) مشخص می‌کنیم.

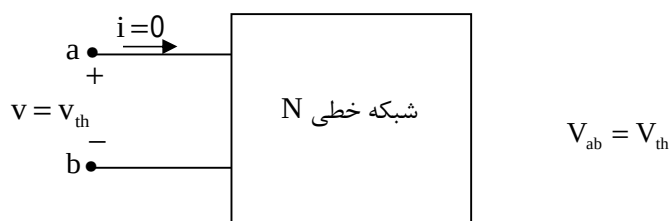
3-2- محاسبه‌ی پارامترهای معادل‌سازی

برای معادل‌سازی یک شبکه خطی با مدار معادل تونن یا نورتن آن، باید پارامترهای V_{th} ، i_N و R_{th} را محاسبه نمود.

۳-۲-۱- محاسبه V_{th} یا e_{oc} (ولتاژ مدار باز)

برای محاسبه‌ی V_{th} کافی است دو سر a و b را مدار باز کنیم (یعنی $i=0$) و سپس با تحلیل مدار، ولتاژ دو سر a و

b را به دست آوریم. در این صورت:

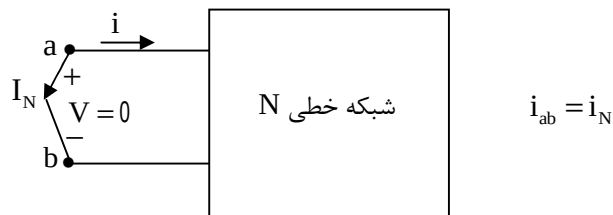


نکته: مداری که فاقد منابع مستقل (ولتاژ و جریان) باشد، $V_{th}=0$ دارد.

۳-۲-۲- محاسبه i_N یا i_{sc} (جریان اتصال کوتاه)

برای محاسبه i_N کافی است دو سر a و b را اتصال کوتاه کنیم. (یعنی $V=0$) و سپس با تحلیل مدار، جریان گذرنده

از a به b را به دست آوریم. در این صورت:



در این حالت به جهت I_N دقت کنید. I_N در خلاف جهت i می‌باشد.

نکته: مداری که فاقد منابع مستقل (ولتاژ و جریان) باشد، $I_N=0$ دارد.

۳-۲-۳- محاسبه R_{th} یا R_{eq} (مقاومت معادل)

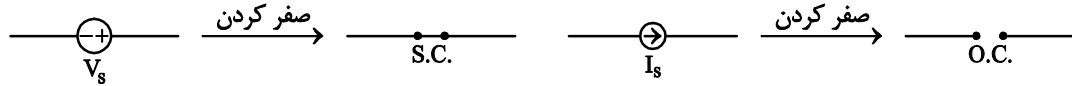
۱- روش اول

اگر شبکه دارای منابع وابسته نباشد، می‌توان در ابتدا منابع مستقل را صفر کرد و سپس با قواعد مقاومت‌های سری،

موازی، تقارن، شبکه‌های بی‌نهایت و، R_{eq} را محاسبه نمود.

نکته: صفر کردن منابع مستقل:

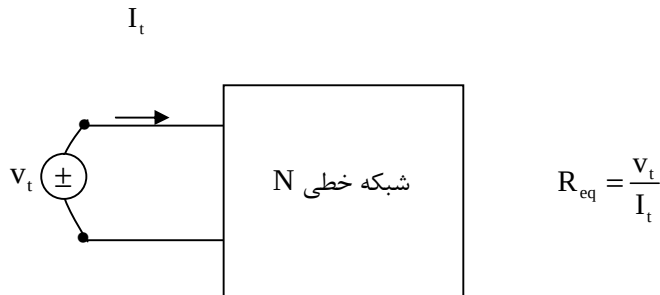
صفر کردن منبع ولتاژ یعنی اتصال کوتاه کردن آن و صفر کردن منبع جریان یعنی مدار باز نمودن آن.



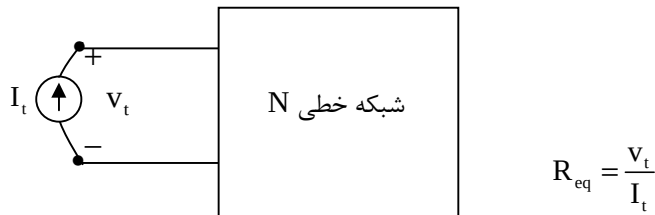
نکته: مقدار منابع مستقل، تأثیری روی R_{eq} ندارند. یعنی اگر در یک مدار مثلاً منبع ولتاژ 10V را به منبع ولتاژ 100V تبدیل کنیم، مقدار R_{eq} تغییری نمی‌کند و ثابت می‌ماند. پس در به دست آوردن R_{eq} می‌توان آن‌ها را صفر کرد.

۲- روش دوم

اگر شبکه دارای منابع وابسته باشد، در ابتدا منابع مستقل را صفر می‌کنیم و سپس یک منبع ولتاژ تست V_t به دو سر مدار اعمال می‌کنیم و با تحلیل مدار، جریان خارج شونده از منبع ولتاژ را محاسبه می‌کنیم (I_t) در این صورت می‌توان گفت:



همچنین می‌توان به دو سر مدار یک منبع جریان I_t اعمال نمود و با تحلیل آن، ولتاژ دو سر منبع جریان (V_t) را محاسبه کرده و خواهیم داشت:



مزیت این روش این است که یک مدار را تحلیل می‌کنیم.

نکته: در مدارهای با گره کمتر که روش KCL بهتر است، استفاده از منبع جریان و یافتن V_t راحت‌تر می‌باشد و در مدارهای با تعداد حلقه کمتر که روش KVL مناسب‌تر است، استفاده از منبع ولتاژ و یافتن I_t بهتر است.

۳- روش سوم

در این روش در ابتدا دو سر مدار را باز کرده، مدار را تحلیل می‌کنیم و ولتاژ مدار باز e_{oc} را به دست می‌آوریم. سپس دو سر مدار را اتصال کوتاه نموده و با تحلیل مدار، جریان گذرنده از آن i_{sc} را محاسبه کرده و با استفاده از رابطه زیر:

$$R_{eq} = \frac{e_{oc}}{i_{sc}}$$

مقاومت معادل دو سر مدار را به دست می‌آوریم.

در شرایط عادی، این روش مناسب نمی‌باشد زیرا برای محاسبه‌ی e_{oc} و i_{sc} باید دو مدار جداگانه را تحلیل کرد و تحلیل این دو مدار کاملاً متفاوت است زیرا این دو مدار هیچ ربطی به هم ندارند.

ولی گاهی این روش، بهترین روش می‌باشد!

۴- روش چهارم

در این روش V_{th} و R_{eh} به صورت همزمان محاسبه می‌شوند.

برای این منظور، منبع جریانی (یا منبع ولتاژی) با مقدار i (یا V) به دو سر مدار وصل می‌کنیم و سعی می‌کنیم ولتاژ V دو سر آن (جریان i دو سر آن) را به دست آوریم. در این صورت:

اگر بتوان ولتاژ را به صورت $V = \alpha i + \beta$ بیان کرد، ضریب α همان R_{eq} و β همان V_{th} می‌باشد.

اگر بتوان جریان را به صورت $i = \alpha' V + \beta'$ بیان نمود، ضریب α' همان $\frac{1}{R_{eq}}$ و β' همان i_N است.

نکته: رابطه $V = \alpha i + \beta$ بیان‌کننده رابطه‌ی خطی بین ولتاژ و جریان مدار است که α شیب خط برابر مقاومت معادل

(R_{eq}) و β عرض از مبدأ خط برابر ولتاژ مدار باز (e_{oc} یا V_{th}) می‌باشد.

برای رسیدن به این رابطه، بهترین راه، KCL زدن در گره‌های مدار و سپس KVL در حلقه‌های خاص برای حذف

جریان‌های اضافی و نهایتاً KVL در حلقه ورودی است.

3-3- رابطه بین i_{sc} ، e_{oc} و R_{eq}

در حالت کلی می‌توان گفت:

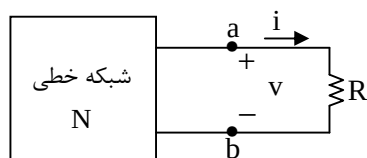
$$e_{oc} = R_{eq} \times i_{sc}$$

$$i_{sc} = \frac{e_{oc}}{R_{eq}}$$

این روابط بیان می‌کند که با داشتن دو پارامتر از سه پارامتر فوق، پارامتر دیگر به سادگی قابل محاسبه می‌باشد. به عبارت دیگر، به کمک روابط فوق می‌توان مدار معادل تونن و نورتن را به یکدیگر تبدیل نمود.

اکنون به بررسی چند مثال ساده می‌پردازیم.

مثال ۱: در مدار شکل زیر وقتی $R \rightarrow \infty$ ، ولتاژ V برابر 3 ولت و وقتی $R \rightarrow 0$ می‌رود، جریان عبوری i برابر 3 آمپر است. به ازای $R = 5\Omega$ ، جریان عبوری از مقاومت را به دست آورید.

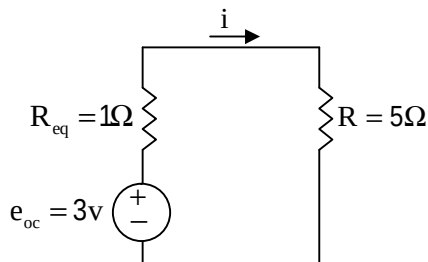


با توجه به مفاهیم مدار باز و اتصال کوتاه می‌توان گفت:

$$\begin{cases} R \rightarrow \infty & \xrightarrow{\text{مدار باز}} e_{oc} = 3V \\ V = 3V \end{cases} \Rightarrow R_{eq} = \frac{e_{oc}}{i_{sc}} = \frac{3}{3} = 1\Omega$$

$$\begin{cases} R \rightarrow 0 & \xrightarrow{\text{اتصال کوتاه}} i_{sc} = 3A \\ i = 3A \end{cases}$$

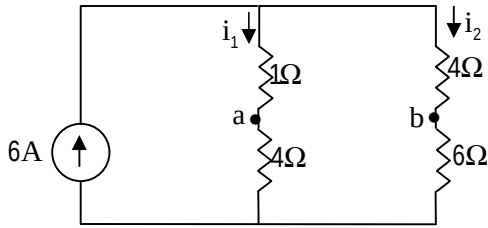
بنابراین مدار معادل تونن شبکه خطی از دو سر a, b به صورت زیر است:



و داریم:

$$i = \frac{e_{oc}}{R_{eq} + R} = \frac{3}{1 + 5} = 0.5A$$

مثال ۲: در مدار شکل زیر، مدار معادل تونن را از دو سر a و b به دست آورید.



با استفاده از تقسیم جریان داریم:

$$i_1 = \frac{6+4}{6+4+1+4} \times 6 = 4A$$

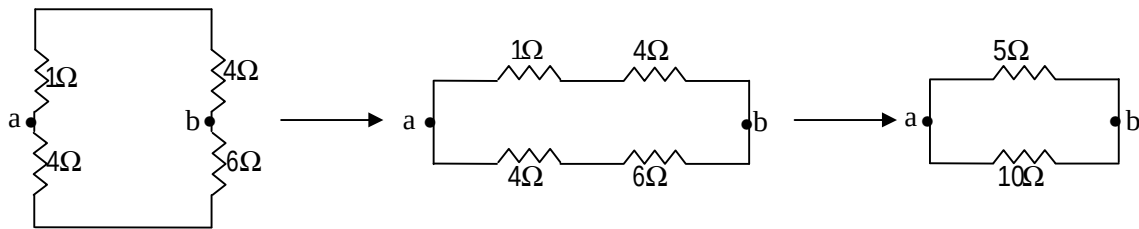
$$i_2 = \frac{1+4}{1+4+4+6} \times 6 = 2A$$

و برای ولتاژ مدار باز داریم:

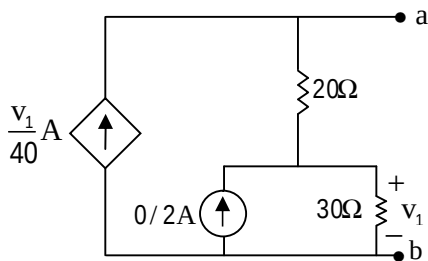
$$e_{oc} = V_a - V_b = 4i_1 - 6i_2 = 4 \times 4 - 6 \times 2 = 4 \text{ Volt}$$

برای محاسبه R_{eq} ، منبع جریان را صفر نموده (اتصال باز) و از دو سر a و b داریم:

$$R_{eq} = R_{ab} = (1+4) \parallel (4+6) = \frac{5 \times 10}{5+10} = \frac{10}{3} \Omega$$

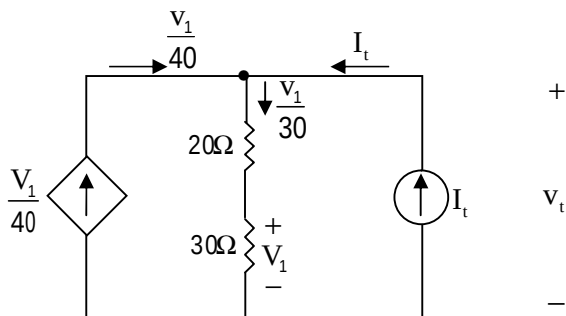


مثال ۳: در مدار شکل زیر، مقاومت معادل از دو سر a و b را به دست آورید.



در ابتدا منبع جریان مستقل $0/2A$ را اتصال باز می‌کنیم و سپس با قرار دادن یک منبع جریان I_t به دو سر a و b،

ولتاژ $V_{ab} = V_t$ را محاسبه می‌کنیم.



با KCL در گره بالایی داریم:

$$\text{KCL: } \frac{V_1}{40} + I_t - \frac{V_1}{30} = 0 \rightarrow V_1 = 120I_t$$

و با KVL در حلقه‌ی ورودی داریم:

$$\text{KVL: } V_t - \frac{2}{3}V_1 - V_1 = 0 \rightarrow V_t = \frac{5}{3}V_1 = \frac{5}{3} \times 120I_t = 200I_t$$

و در نتیجه:

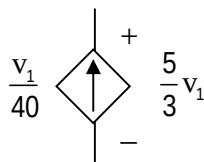
$$R_{eq} = \frac{V_t}{I_t} = 200\Omega$$

روش دوم:

در قسمت قبل دیدیم که ولتاژ دو سر منبع جریان وابسته برابر است با:

$$V_t = \frac{5}{3}V_1$$

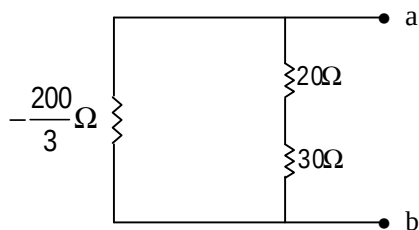
و با توجه به شکل زیر می‌توان گفت:



جریان منبع وابسته به ولتاژ دو سرش، وابسته شد و این منبع جریان معادل یک مقاومت است با مقدار:

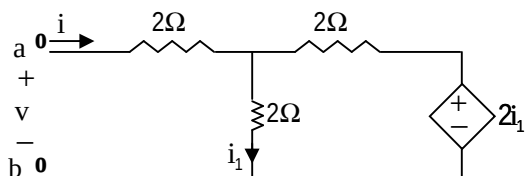
$$R = \frac{-\frac{5}{3}V_1}{\frac{V_1}{40}} = -\frac{200}{3}\Omega$$

و برای مدار اصلی داریم:



$$R_{eq} = (20 + 30) \parallel \left(-\frac{200}{3} \right) = \frac{-\frac{200}{3} \times 50}{-\frac{200}{3} + 50} = 200\Omega$$

مثال ۴: مدار معادل تونن شبکه زیر را به دست آورید.

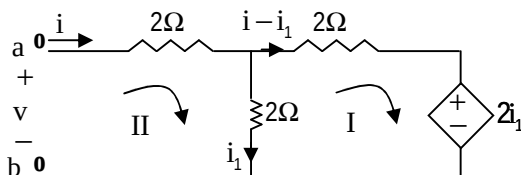


با توجه به شبکه دیده می شود که، شبکه به خودی خود منبع مستقل ندارد. بنابراین:

$$e_{oc} = i_{sc} = 0$$

و شبکه تنها معادل یک مقاومت است.

برای یافتن مقاومت معادل با KCL و KVL زدن در مدار داریم:



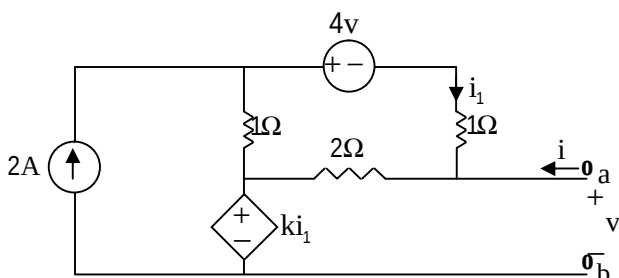
KVL در حلقه I : $2(i - i_1) + 2i_1 - 2i_1 = 0 \rightarrow i_1 = i$

KVL در حلقه II : $V - 2i - 2i_1 = 0 \rightarrow V = 2(i + i_1) = 2 \times 2i = 4i \rightarrow R_{eq} = \frac{V}{i} = 4\Omega$

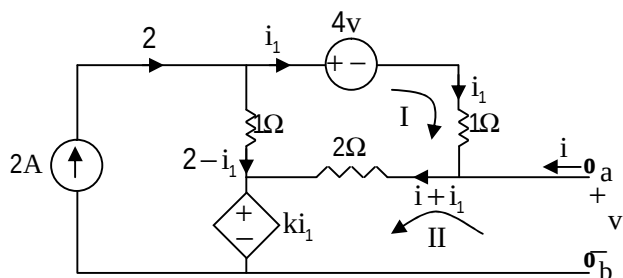
مثال ۵: در مدار شکل زیر مقدار K را به گونه‌ای تعیین کنید که:

الف) مدار معادل یک مقاومت خالص باشد.

ب) مدار معادل یک باتری بدون مقاومت داخلی باشد.



برای این منظور، روی شکل مدار اصلی KCL می‌زنیم و سپس در حلقه‌های I و II، KVL می‌زنیم.



$$\text{KVL در حلقه‌ی I: } 4 + i_1 + 2(i + i_1) - (2 - i_1) = 0 \rightarrow i_1 = -\frac{i+1}{2}$$

$$\text{KVL در حلقه‌ی II: } V = 2(i + i_1) + Ki_1 = \left(1 - \frac{K}{2}\right)i + \left(-1 - \frac{K}{2}\right)$$

بنابراین می‌توان گفت:

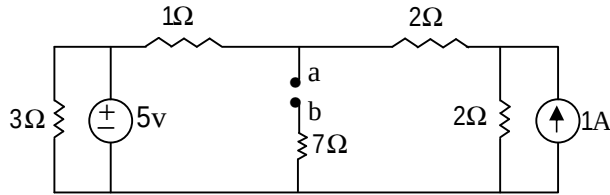
$$R_{eq} = \alpha = 1 - \frac{K}{2}, \quad e_{oc} = \beta = -1 - \frac{K}{2}$$

و در نتیجه:

$$\text{الف) } e_{oc} = 0 \rightarrow -1 - \frac{K}{2} = 0 \rightarrow K = -2$$

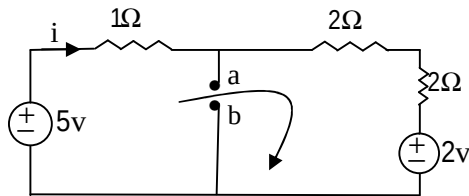
$$\text{ب) } R_{eq} = 0 \rightarrow 1 - \frac{K}{2} = 0 \rightarrow K = 2$$

مثال ۶: در مدار شکل زیر، ولتاژ مدار باز سر a و b را به دست آورید.



در مدار شکل فوق مقاومت 3Ω هیچ تأثیری ندارد زیرا موازی با منبع ولتاژ می‌باشد و به طور کلی هر المانی (به جز اتصال کوتاه) موازی با منبع ولتاژ، قابل حذف است و به همین ترتیب هر عنصری (به جز مدار باز) سری یا منبع جریان، قابل حذف می‌باشد.

همچنین با توجه به این که اتصال ab مدار باز است، مقاومت 7Ω نیز حذف می‌شود. با تبدیل نورتن به تونن برای منبع جریان یک آمپر و مقاومت 2Ω داریم:

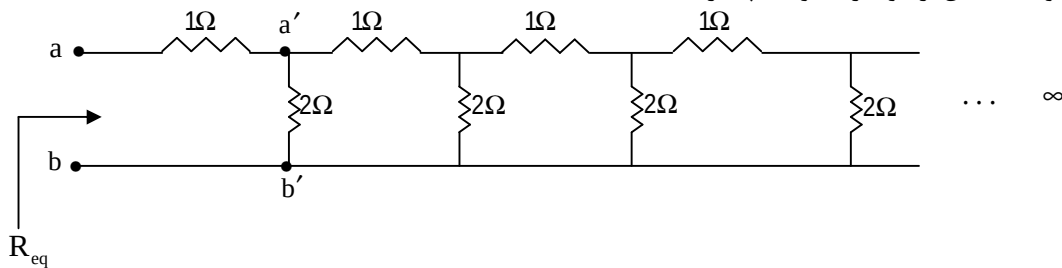


$$\text{KVL: } -5 + i + 2i + 2i + 2 = 0 \rightarrow i = \frac{3}{5} \text{ A}$$

و در نتیجه:

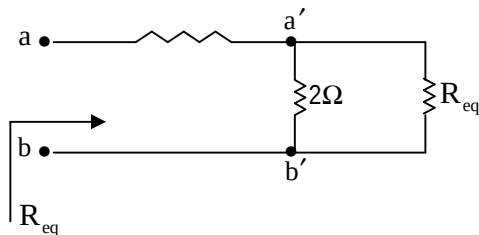
$$V_{ab} = 4i + 2 = \frac{22}{5} \text{ V} = 4.4 \text{ Volt}$$

مثال ۷: مقاومت معادل از دو سر a و b چقدر است؟



در این گونه مدارها نمی‌توان دو مقاومت سری یا موازی پیدا کرد و روش‌های معمول برای یافتن مقاومت معادل فایده‌ای ندارد.

در این مسائل از مفهوم بی‌نهایت استفاده می‌کنیم. اگر از سر a' و b' به مدار نگاه کنیم، به دلیل امتداد آن تا بی‌نهایت، دقیقاً همان چیزی دیده می‌شود که از سر a و b به مدار نگاه می‌کنیم. پس می‌توان مدار را به صورت زیر ساده نمود:



و در نتیجه داریم:

$$R_{eq} = 1 + (2 \parallel R_{eq}) = 1 + \frac{2R_{eq}}{2 + R_{eq}} \rightarrow R_{eq} = \frac{2 + 3R_{eq}}{2 + R_{eq}}$$

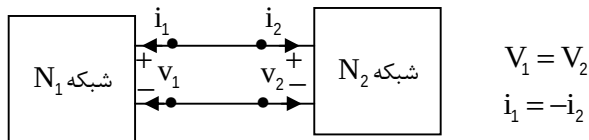
$$\rightarrow R_{eq}^2 - R_{eq} - 2 = 0 \rightarrow R_{eq} = 2\Omega$$

4-3- اتصال دو شبکه

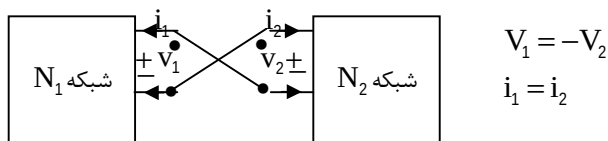
دو شبکه دلخواه به صورت‌های زیر به هم متصل می‌شوند:

۱- اتصال مستقیم

با توجه به شکل زیر می‌توان گفت:



۲- اتصال معکوس



براین اساس برای یافتن پاسخ ولتاژ V و جریان i ، در ابتدا باید به نوع اتصال توجه داشت. واضح است که:

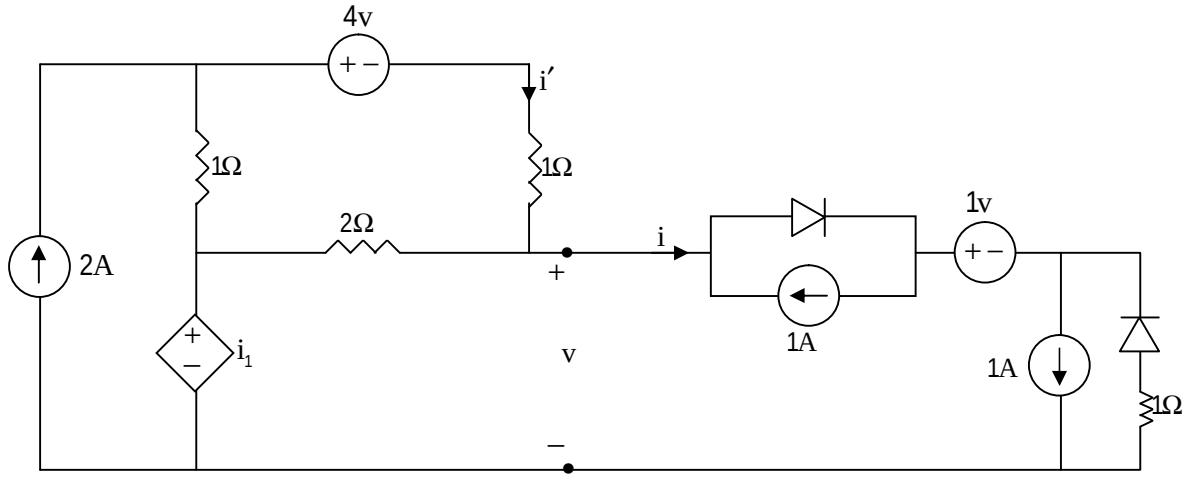
$$\text{در اتصال مستقیم} \begin{cases} V = V_1 = V_2 \\ i = i_1 = -i_2 \end{cases}$$

$$\text{در اتصال معکوس} \begin{cases} V = V_1 = -V_2 \\ i = i_1 = i_2 \end{cases}$$

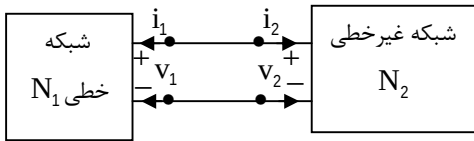
و با داشتن مشخصه ولتاژ و جریان در هر یک از شبکه‌ها (به صورت فرمولی یا به صورت نموداری)، از یافتن محل تلاقی

آن‌ها V و i به دست می‌آیند.

مثال ۸: در مدار شکل زیر، پاسخ‌های V و i را به دست آورید.



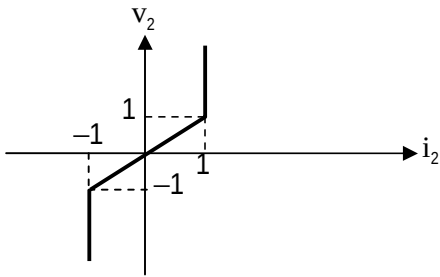
این شبکه را می‌توان اتصال سری دو شبکه N_1 و N_2 به صورت زیر در نظر گرفت:



در مثال 5 همین فصل دیدیم که به ازای $K = 1$ برای شبکه N_1 داریم:

$$V_1 = \frac{1}{2}i_1 - \frac{3}{2}$$

و برای شبکه غیرخطی N_2 در مثال 1 قسمت د فصل اول دیدیم که:



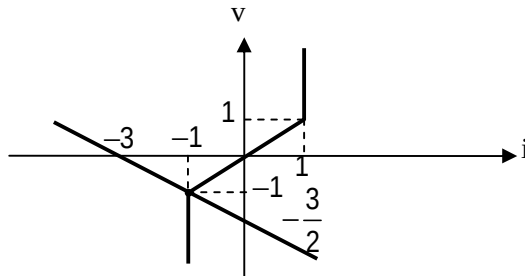
با توجه به اتصال مستقیم دو شبکه می‌توان گفت:

$$V = V_1 = V_2, \quad i = -i_1 = i_2$$

پس برای مدار شبکه N_1 داریم:

$$V = \frac{1}{2}i - \frac{3}{2}$$

با رسم مشخصه دو شبکه و تلاقی آنها:



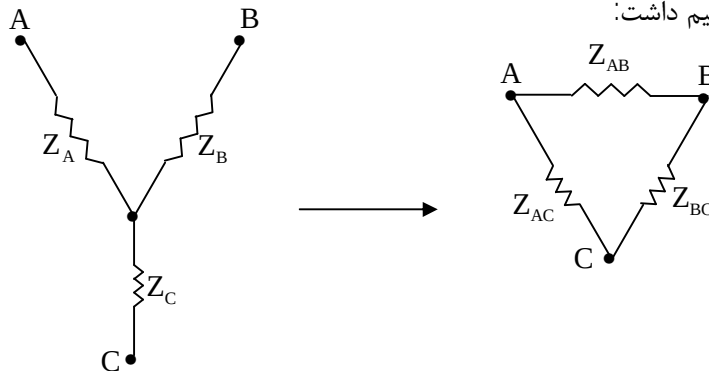
و با توجه به محل تلاقی داریم:

$$\begin{cases} V = V_1 = V_2 = -1 \text{ Volt} \\ i = -i_1 = i_2 = -1 \text{ A} \end{cases}$$

5-3- مدار معادل ستاره - مثلث (y/Δ)

یک روش ساده سازی برای حل شبکه های پیچیده، استفاده از تبدیل ستاره به مثلث و بالعکس است.

برای تبدیل ستاره به مثلث خواهیم داشت:



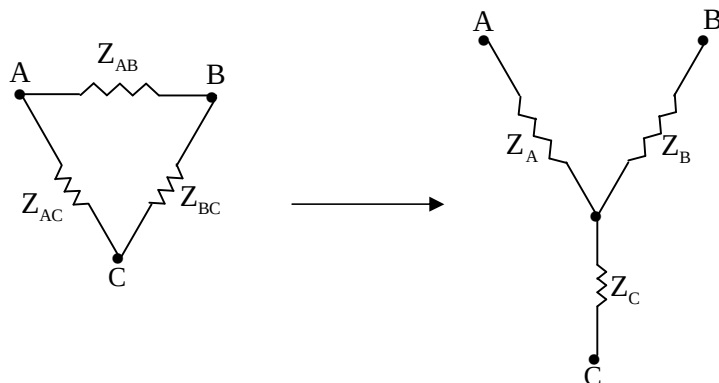
$$Z_{AB} = \frac{Z_A Z_B + Z_A Z_C + Z_B Z_C}{Z_C}$$

$$Z_{BC} = \frac{Z_A Z_B + Z_A Z_C + Z_B Z_C}{Z_A}, \quad Z_{AC} = \frac{Z_A Z_B + Z_A Z_C + Z_B Z_C}{Z_B}$$

در یک حالت خاص اگر $Z_A = Z_B = Z_C$ باشد آنگاه:

$$Z_{AB} = Z_{AC} = Z_{BC} = 3Z_A$$

و برای تبدیل مثلث به ستاره داریم:



$$Z_A = \frac{Z_{AB} \cdot Z_{AC}}{Z_{AB} + Z_{AC} + Z_{BC}}$$

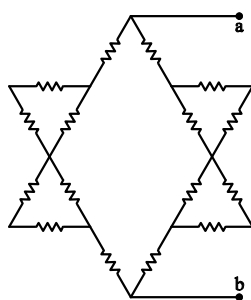
$$Z_B = \frac{Z_{AB} \cdot Z_{BC}}{Z_{AB} + Z_{AC} + Z_{BC}}$$

$$, \quad Z_C = \frac{Z_{AC} \cdot Z_{BC}}{Z_{AB} + Z_{AC} + Z_{BC}}$$

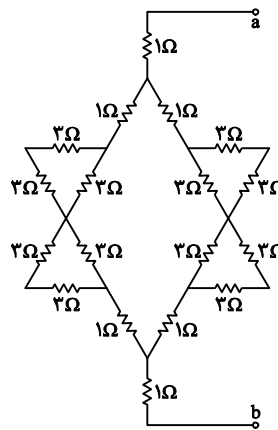
و در حالت خاصی که $Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA}$ باشد می توان گفت:

$$Z_A = Z_B = Z_C = \frac{1}{3} Z_{AB}$$

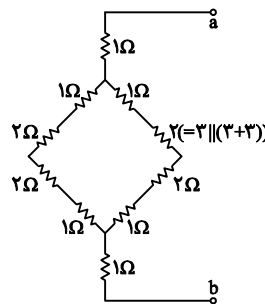
مثال ۹: در مدار شکل زیر اگر تمام مقاومت ها برابر 3Ω باشد، مقاومت معادل از دو سر a و b را به دست آورید.



دو مثلث بالا و پایین را به ستاره تبدیل می کنیم:

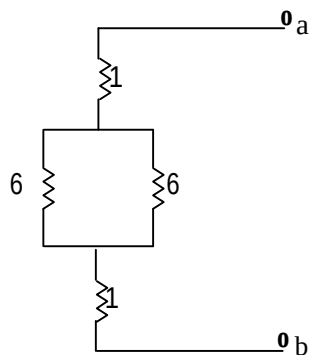


و مقاومت معادل شاخه‌های چپ و راست را به دست می‌آوریم:



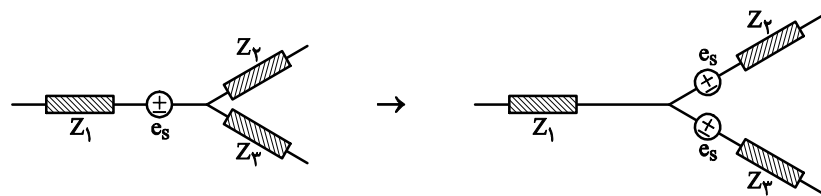
و در نهایت می‌توان گفت:

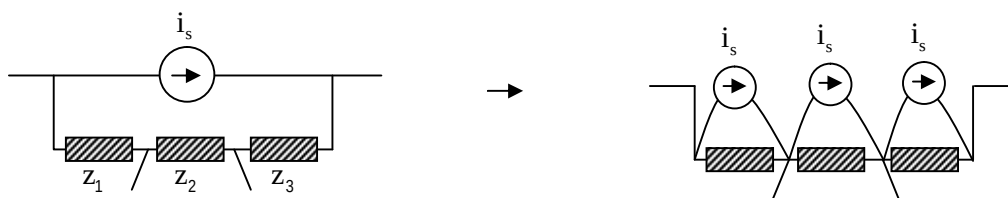
$$R_{ab} = 1 + (6 \parallel 6) + 1 = 5\Omega$$



6-3- تبدیل منابع

منابع مستقل ولتاژ و جریین را می‌توان به صورت زیر تبدیل نمود:

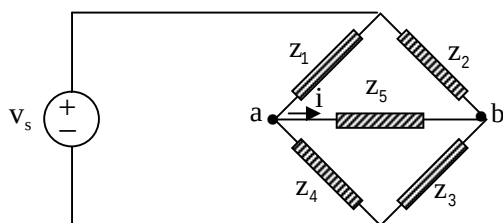




این تبدیل‌ها می‌تواند باعث کاهش تعداد مش‌های مستقل و تعداد گره‌های مستقل شود.

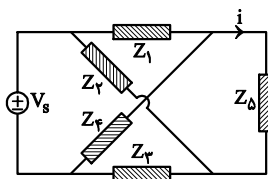
7-3- پل وتستون

بدون شرح!!!



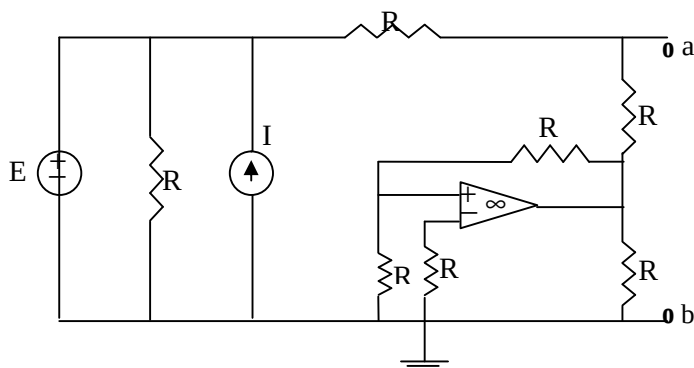
شاخه ab و امپدانس Z_5 قابل حذف است. $\rightarrow i=0 \rightarrow Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4$ اگر

پل وتستون همچنین به صورت زیر قابل نمایش است:



تست‌های طبقه‌بندی شده مبحث مدارهای معادل

۱- مدار معادل تونن از سرهای a, b کدام است؟ (آپ امپ ایده‌ال است)



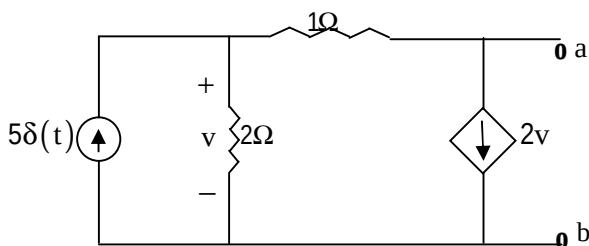
$$R_{th} = \frac{2}{3}R, V_{th} = E + RI \quad (1)$$

$$R_{th} = \frac{10}{11}R, V_{th} = \frac{E + RI}{2} \quad (2)$$

$$R_{th} = \frac{R}{2}, V_{th} = \frac{E}{2} \quad (3)$$

$$R_{th} = R, V_{th} = E \quad (4)$$

۲- مدار معادل تونن مدار زیر برابر است با:



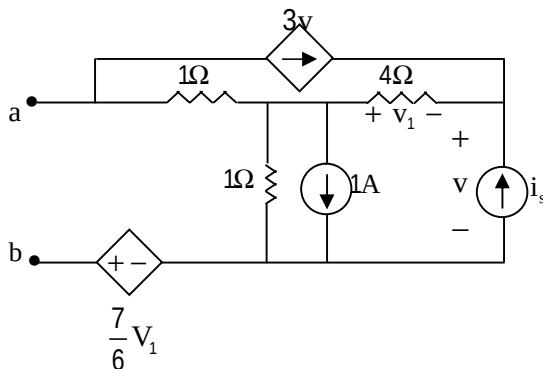
$$V_{th} = \delta(t), R_{th} = 2\Omega \quad (1)$$

$$V_{th} = 2\delta(t), R_{th} = 3\Omega \quad (2)$$

$$V_{th} = -2\delta(t), R_{th} = \frac{3}{5}\Omega \quad (3)$$

$$V_{th} = -\delta(t), R_{th} = \frac{3}{5}\Omega \quad (4)$$

۳- مقاومت معادل از دو سر a و b چند اهم است؟



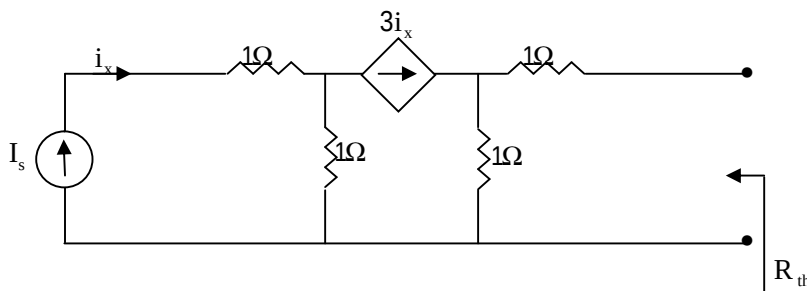
$$\frac{5}{11}\Omega \quad (1)$$

$$1\Omega \quad (2)$$

$$3\Omega \quad (3)$$

$$\frac{39}{11}\Omega \quad (4)$$

۴- مقاومت معادل تونن مدار شکل زیر کدام است؟



$$1\Omega \quad (1)$$

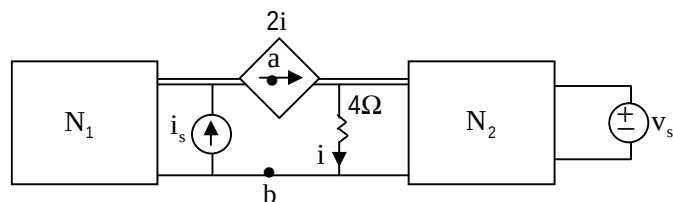
$$1\frac{1}{3}\Omega \quad (2)$$

$$1/5\Omega \quad (3)$$

$$2\Omega \quad (4)$$

۵- در مدار زیر (با فرض جواب یکتا)، N_1 و N_2 از مقاومت‌های خطی تشکیل شده‌اند و $i = \frac{2}{7}(V_s + i_s)$

می‌باشد. به جای مقاومت 4Ω چه مقاومتی را بگذاریم تا مقاومت کل مدار از دو سر a و b برابر $\frac{8}{9}\Omega$ شود؟



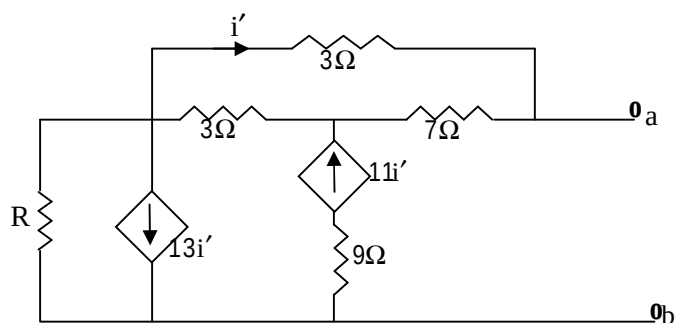
$\frac{8}{7}\Omega$ (1)

$\frac{8}{5}\Omega$ (2)

2Ω (3)

4Ω (4)

۶- مقاومت معادل بین دو سر a, b مدار داده شده در شکل زیر کدام است؟



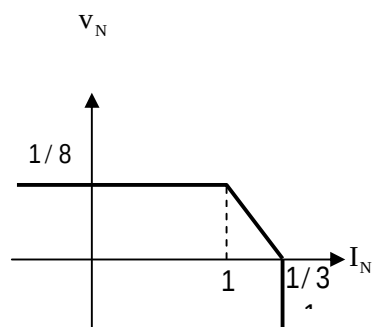
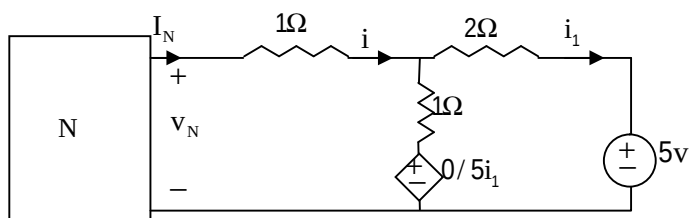
$3R + 3/2$ (1)

$2R - 1/5$ (2)

$1/4R + 3$ (3)

$2/4R + 2$ (4)

۷- مشخصه یک قطبی N در مدار شکل زیر داده شده است. جریان i برابر است با:



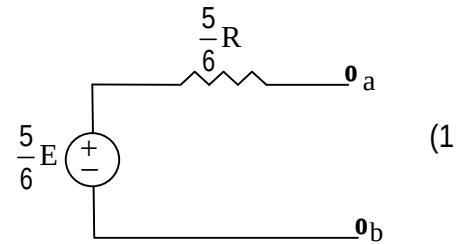
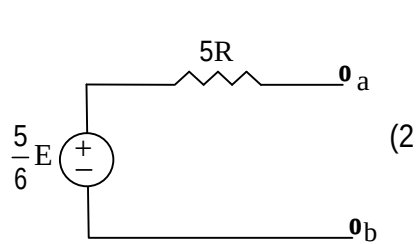
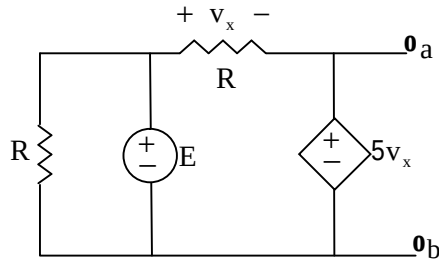
$-\frac{5}{9}A$ (1)

$-\frac{4}{9}A$ (2)

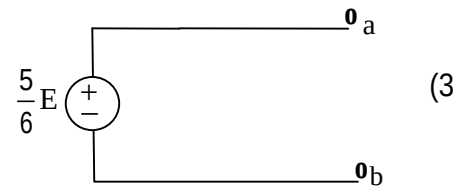
$\frac{5}{9}A$ (3)

$\frac{4}{9}A$ (4)

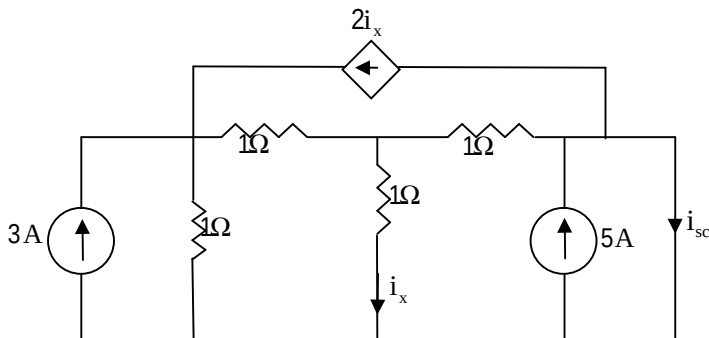
۸- مدار معادل تونن شکل زیر را به دست آورید.



(4) معادل تونن ندارد



۹- جریان اتصال کوتاه (i_{sc}) کدام است؟



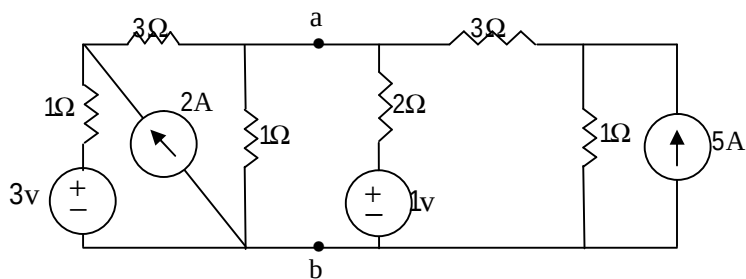
(1) 1A

(2) 2A

(3) 4A

(4) 8A

۱۰- در مدار زیر، V_{ab} چند ولت است؟



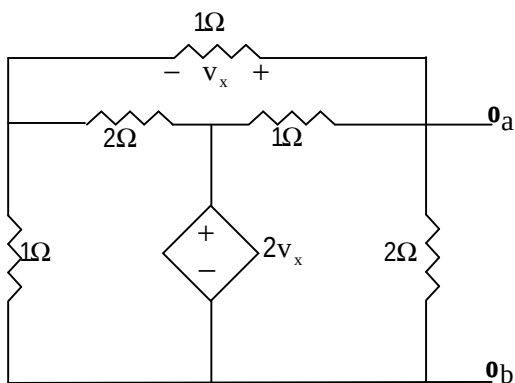
(1) 1

(2) 2

(3) $\frac{1}{2}$

(4) $\frac{1}{4}$

۱۱- مقاومت دیده شده در سرهای a, b مدار شکل زیر کدام است؟



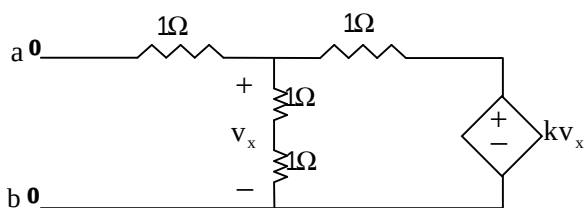
(1) $\frac{4}{7}\Omega$

(2) $\frac{15}{14}\Omega$

(3) $\frac{7}{4}\Omega$

(4) $\frac{14}{15}\Omega$

۱۲- در مدار شکل زیر به ازای چه مقدار K مقاومت دیده شده در سرهای a و b منفی است؟



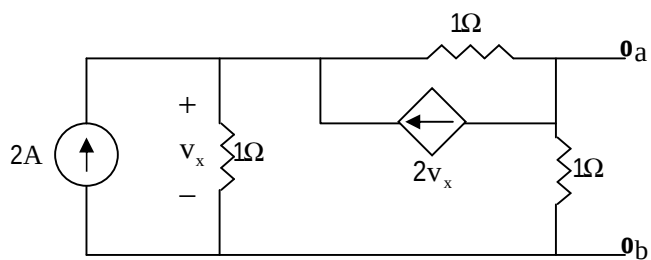
(1) 1

(2) 2

(3) 2/5

(4) 4

۱۳- در مدار شکل زیر مقاومت تونن از دو سر a و b کدام است؟



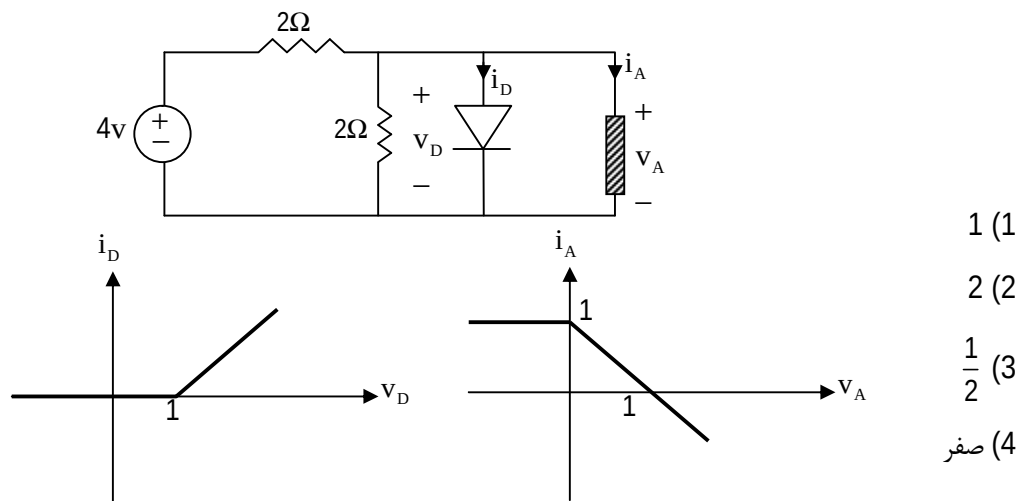
(1) صفر

(2) $\frac{2}{3}\Omega$

(3) 1Ω

(4) بی نهایت

۱۴- در مدار شکل زیر، توان مصرفی در دیود چند وات است؟



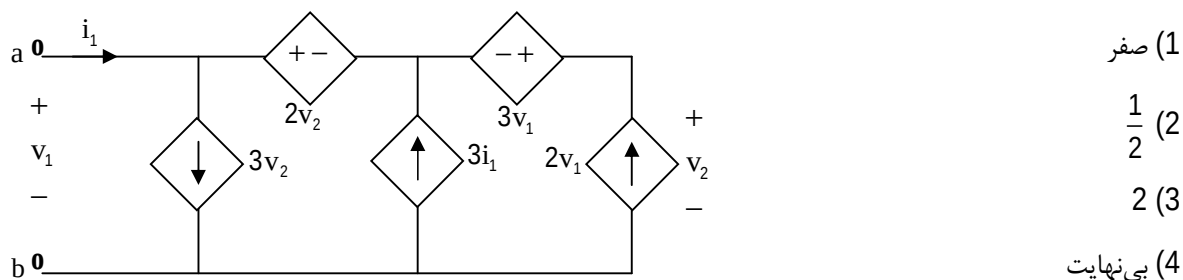
(1) 1

(2) 2

(3) $\frac{1}{2}$

(4) صفر

۱۵- مقاومت دیده شده در سرهای a و b مدار شکل زیر چند اهم است؟



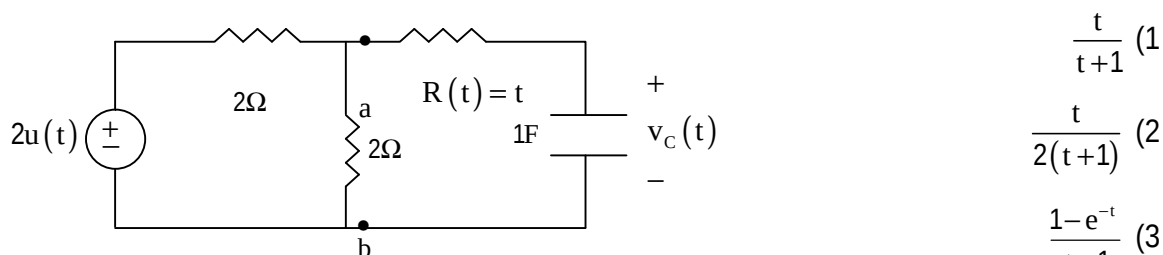
(1) صفر

(2) $\frac{1}{2}$

(3) 2

(4) بی نهایت

۱۶- برای مدار خطی تغییرپذیر با زمان شکل زیر، $V_C(t)$ برای $t \geq 0$ برابر کدام گزینه است؟ ($V_C(0^-) = 0$)



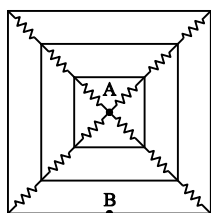
(1) $\frac{t}{t+1}$

(2) $\frac{t}{2(t+1)}$

(3) $\frac{1-e^{-t}}{t+1}$

(4) $\frac{1-e^{-t}}{2(t+1)}$

۱۷- در مدار شکل زیر تمام مقاومت‌ها یک اهم هستند. مقاومت دیده شده از سرهای A, B چند اهم است؟



(2) $\frac{1}{3}$

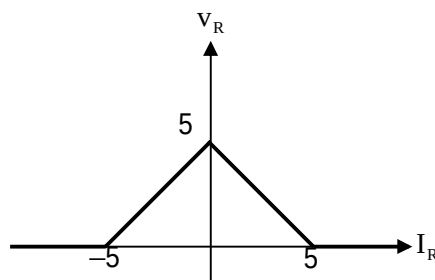
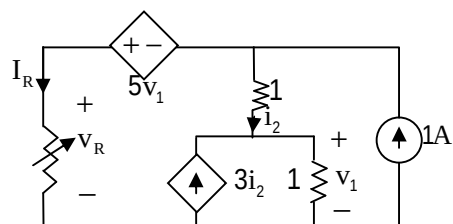
(1) $\frac{1}{4}$

(4) $\frac{3}{4}$

(3) $\frac{1}{2}$

۱۸- در مدار شکل زیر، R یک مقاومت غیرخطی با مشخصه داده شده می‌باشد. ولتاژ V_R در دو سر این

مقاومت غیرخطی کدام است؟



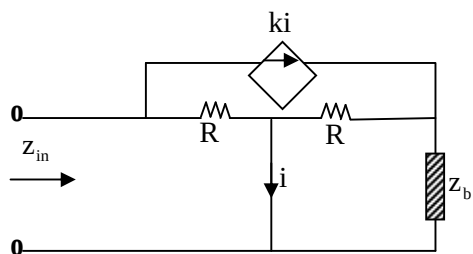
(1) $\frac{6}{25} \text{ v}$

(2) $\frac{24}{25} \text{ v}$

(3) $\frac{25}{24} \text{ v}$

(4) $\frac{25}{6} \text{ v}$

۱۹- در شبکه زیر $\lim_{k \rightarrow \infty} Z_{in}$ چقدر است؟



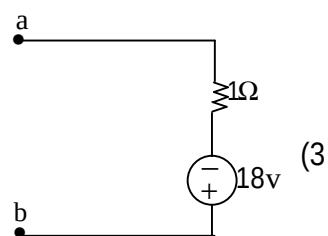
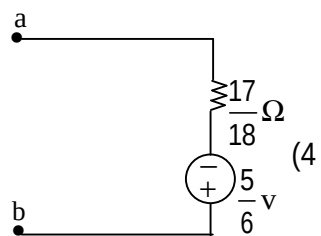
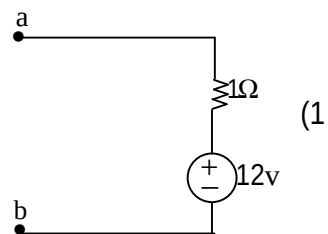
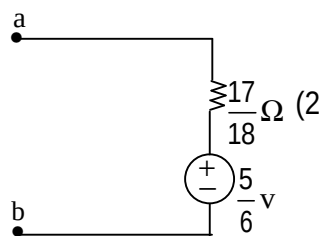
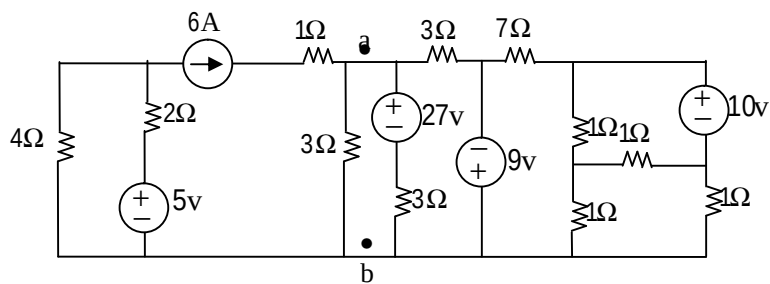
(1) $-Z_b$

(2) $Z_b - R$

(3) $Z_b + R$

(4) بی‌نهایت

۲۰- مدار معادل تونن از دید دو سر a و b در مدار شکل زیر کدام است؟

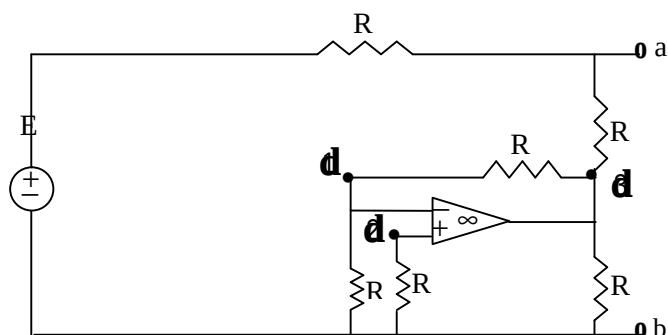


پاسخ تشریحی

۱- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

ا توجه به موازی قرار گرفتن منبع جریان I و مقاومت R با منبع ولتاژ E ، می‌توان منبع جریان و مقاومت R را حذف

شود و مدار به شکل زیر تبدیل شود:

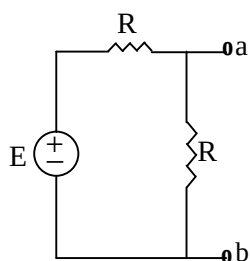


آپ امپ ایده‌آل است، پس جریان سرهای ورودی آن صفر است و در نتیجه ولتاژ گره‌های 1 و 2 صفر می‌شود:

$$V_+ = V_- = 0 \rightarrow V_1 = V_2 = 0$$

بنابراین ولتاژ گره 3 نیز برابر صفر است و عملاً آپ امپ نقشی در مدار ندارد و فقط یک تقسیم کننده ولتاژ است. در

نتیجه مدار به شکل زیر در می‌آید:

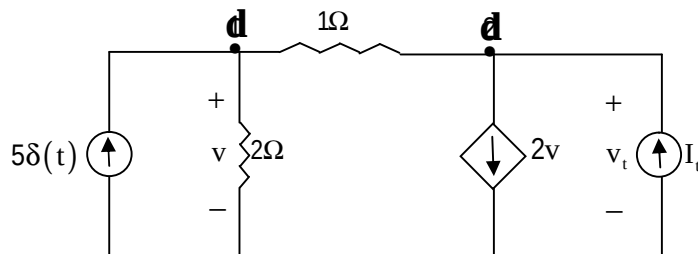


$$V_{th} = V_{ab} = \frac{R}{R+R} \times E = \frac{E}{2}$$

$$R_{th} = R \parallel R = \frac{R}{2}$$

۲- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با قرار دادن منبع جریان تست I_t در سرهای a و b و نوشتن KCL داریم:



$$\begin{aligned} \text{KCL (1): } \frac{V}{2} + \frac{V - V_t}{1} &= 5\delta(t) \\ \text{KCL (2): } \frac{V_t - V}{1} + 2V &= I_t \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}V - V_t = 5\delta(t) \\ V + V_t = I_t \end{cases}$$

با جایگذاری دو معادله به دست آمده در یکدیگر داریم:

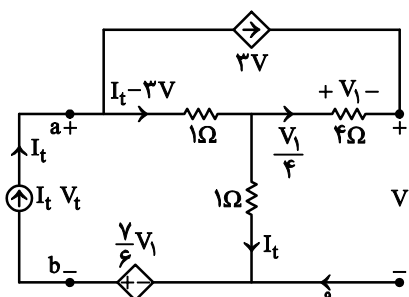
$$\frac{3}{2}(I_t - V_t) - V_t = 5\delta(t) \rightarrow V_t = \frac{3}{5}I_t - 2\delta(t)$$

بنابراین $R_{th} = \frac{3}{5}\Omega$ و $V_{th} = -2\delta(t)$ به دست می‌آید.

۳- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

برای به دست آوردن مقاومت معادل ابتدا منابع مستقل را صفر می‌کنیم و سپس با قرار دادن منبع جریان تست I_t به دو

سر a و b، با اعمال KCL و KVL خواهیم داشت:



$$\begin{cases} \text{KCL: } \frac{V_1}{4} = -3V \rightarrow V_1 = -12V \\ \text{KVL: } V = -V_1 + I_t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_1 = \frac{12}{11}I_t \\ V = -\frac{1}{11}I_t \end{cases}$$

و با KVL در مش سمت چپ می‌توان گفت:

$$\text{KVL: } V_t = 1 \times (I_t - 3V) + I_t - \frac{7}{6}V_1 \rightarrow V_t = I_t + \frac{3}{11}I_t + I_t - \left(\frac{7}{6} \times \frac{12}{11}\right)I_t = I_t$$

بنابراین برای مقاومت معادل از دو سر a و b داریم:

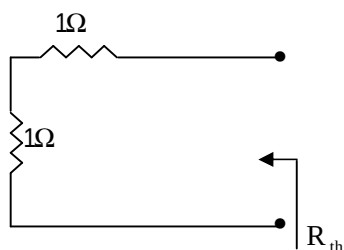
$$R_{eq} = \frac{V_t}{I_t} = 1\Omega$$

۴- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

برای به دست آوردن مقاومت معادل ابتدا منبع مستقل جریان را صفر می‌کنیم، در نتیجه:

$$I_s = 0 \rightarrow i_x = 0 \rightarrow 3i_x = 0$$

یعنی منبع جریان وابسته $3i_x$ نیز اتصال باز می‌شود و داریم:



$$R_{th} = 2\Omega$$

۵- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

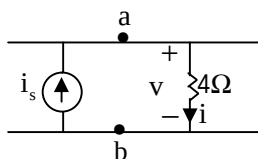
برای به دست آوردن مقاومت ورودی، مقدار منبع ولتاژ V_s تأثیری ندارد، پس $V_s = 0$ قرار می‌دهیم و داریم:

$$i = \frac{2}{7}(V_s + i_s) \xrightarrow{V_s=0} i = \frac{2}{7}i_s$$

اگر ولتاژ دو سر مقاومت 4 اهمی را V در نظر بگیریم داریم:

$$V = 4i = 4 \times \frac{2}{7}i_s = \frac{8}{7}i_s$$

پس مقاومت معادل دیده شده از دو سر منبع جریان برابر است با:



$$R_{th} = R_{ab} = \frac{V}{i_s} = \frac{8}{7}\Omega$$

حال اگر از دو سر مقاومت 4 اهمی به بقیه مدار نگاه کنیم و مقاومت آن را R بنامیم، اتصال موازی مقاومت R و مقاومت 4 اهمی برابر R_{th} می‌شود، یعنی:

$$R \parallel 4 = \frac{4R}{4+R} = R_{th} = \frac{8}{7}\Omega \rightarrow R = \frac{8}{5}\Omega$$

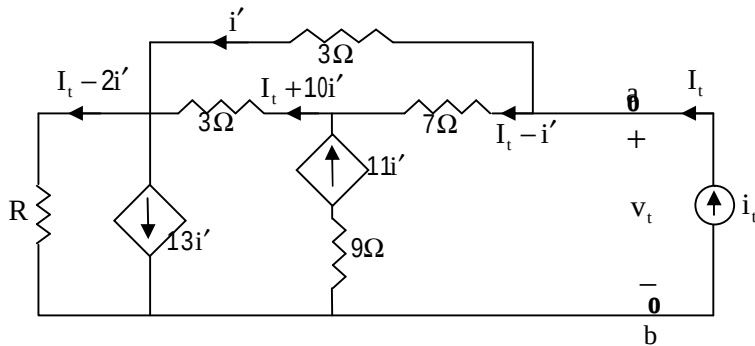
اگر مقاومت 4 اهمی را با مقاومت R' عوض کنیم، اتصال موازی مقاومت R' با R برابر $\frac{8}{9}$ خواهد بود (طبق فرض و خواسته مسأله) به عبارت دیگر:

$$R' \parallel R = \frac{\frac{8}{5}R'}{\frac{8}{5} + R'} = \frac{8}{9} \rightarrow R' = 2\Omega$$

یعنی اگر مقاومت 4 اهمی را با مقاومت 2 اهمی عوض کنیم، مقاومت معادل مدار از دو سر a و b برابر $\frac{8}{9}\Omega$ می‌شود.

۶- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با توجه به مدار، منبع مستقلى وجود ندارد كه صفر شود، پس منبع جريان I_t را به دو سر a, b قرار می‌دهیم و با KCL زدن بر روی مدار و سپس KVL زدن در حلقه بالایی و حلقه بیرونی داریم:



KVL در حلقه بالایی: $7(I_t - i') + 3(I_t + 10i') - 3i' = 0 \rightarrow i' = -\frac{I_t}{2}$

KVL در حلقه بیرونی: $V_t = 3i' + R(I_t - 2i') = \left(2R - \frac{3}{2}\right)I_t$

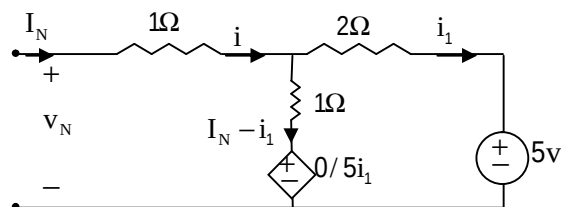
بنابراین:

$$R_{eq} = \frac{V_t}{I_t} = 2R - \frac{3}{2} = 2R - 1.5$$

۷- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

در این حالت باید مشخصه $V-I$ مدار سمت راست را نیز به دست آورده و با مشخصه شبکه N قطع دهیم تا جریان و ولتاژ مشترک از نقطه تقاطع به دست آید.

برای مدار سمت راست با KCL زدن روی مدار و سپس نوشتن KVL داریم:



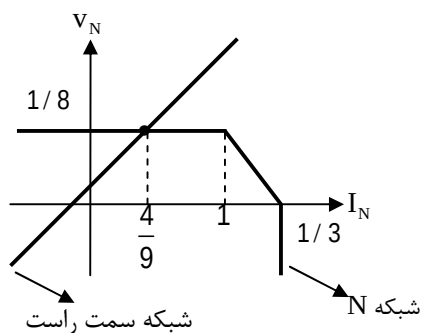
KVL در مش سمت راست: $2i_1 + 5 - 0/5i_1 - (I_N - i_1) = 0 \rightarrow i_1 = \frac{2}{5}I_N - 2$

KVL در مش ورودی: $V_N = I_N + I_N - i_1 + 0/5i_1 = 2I_N - 0/5i_1$

با استفاده از دو رابطه فوق داریم:

$$V_N = 2I_N - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}I_N - 2 \right) \rightarrow V_N = \frac{9}{5}I_N + 1$$

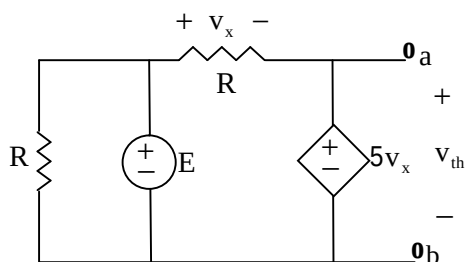
با رسم دو مشخصه $V-I$ در یک صفحه داریم:



$$V_N = \frac{9}{5} I_N + 1 = 1/8 \rightarrow I_N = \frac{4}{9} A$$

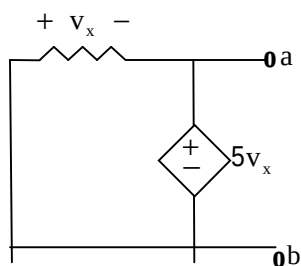
۸- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

برای محاسبه‌ی V_{th} با اعمال KVL در حلقه سمت راست داریم:



$$\begin{cases} \text{KVL: } E = V_x + 5V_x = 6V_x \\ V_{th} = 5V_x \end{cases} \rightarrow V_{th} = \frac{5}{6} E$$

برای محاسبه‌ی R_{th} منابع مستقل را صفر می‌کنیم و داریم:

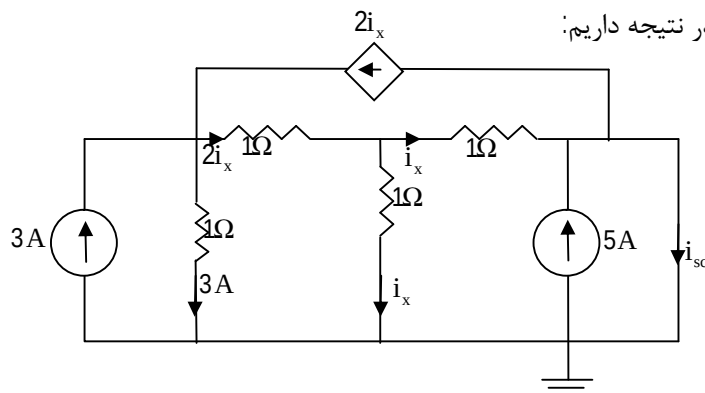


$$5V_x = -V_x \rightarrow V_x = 0 \rightarrow R_{th} = 0$$

۹- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

شاخه اتصال کوتاه شده باعث می‌شود دو مقاومت 1Ω سمت راست با هم موازی شوند، پس جریان مقاومت یک اهمی

سمت راست نیز i_x است. در نتیجه داریم:



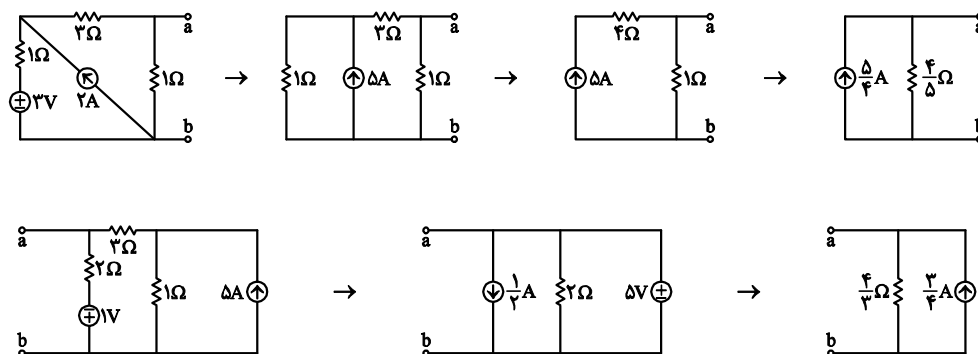
$$\text{KCL: } i_{sc} = 5 + i_x - 2i_x = 5 - i_x$$

$$\text{KVL: } 2i_x + i_x - 3 = 0 \rightarrow 3i_x = 3 \rightarrow i_x = 1\text{A}$$

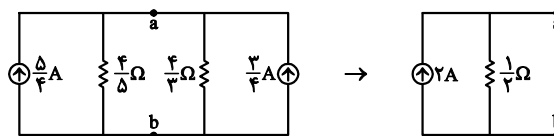
$$i_{sc} = 5 - i_x = 5 - 1 = 4\text{A}$$

۱۰- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

با استفاده از تبدیل تونن - نورتن برای سمت راست و چپ سرهای a و b داریم:



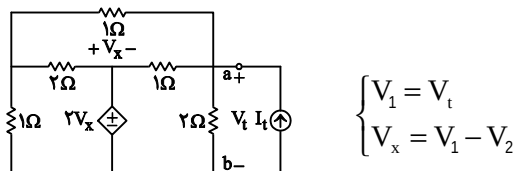
در نتیجه داریم:



$$V_{ab} = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \text{ Volt}$$

۱۱- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

اگر منبع جریان تست I_t را به دو سر a و b وصل کنیم و در گره‌های 1 و 2 معادلات KCL را بنویسیم داریم:



$$\begin{cases} V_1 = V_t \\ V_x = V_1 - V_2 \end{cases}$$

$$\text{KCL(1): } \frac{V_t}{2} + \frac{V_t - 2V_x}{1} + \frac{V_t - V_2}{1} = I_t \rightarrow V_t + 2V_2 = 2I_t$$

$$\text{KCL(2): } \frac{V_2}{1} + \frac{V_2 - 2V_x}{2} + \frac{V_2 - V_t}{1} = 0 \rightarrow 4V_t - 7V_2 = 0$$

با استفاده از دو معادله به دست آمده خواهیم داشت:

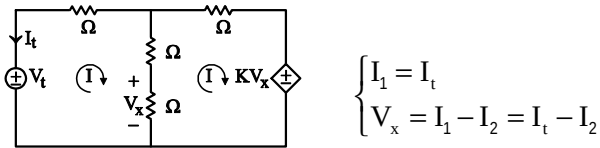
$$V_2 = \frac{4}{7} V_t$$

$$V_t + \left(2 \times \frac{4}{7} V_t \right) = 2I_t \rightarrow \frac{15}{7} V_t = 2I_t \rightarrow R_{ab} = \frac{V_t}{I_t} = \frac{14}{15} \Omega$$

۱۲- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

برای یافتن مقاومت معادل از دو سر a و b یک منبع ولتاژ تست V_t به دو سر آن وصل می‌کنیم و با نوشتن معادلات

مش داریم:



$$\begin{aligned} \text{KVL (1): } I_t + 2(I_t - I_2) &= V_t \\ \text{KVL: } I_2 + KV_x + 2(I_2 - I_t) &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} 3I_t - 2I_2 = V_t \\ (K-2)I_t + (3-K)I_2 = 0 \end{cases}$$

با استفاده از دو رابطه به دست آمده داریم:

$$I_2 = \frac{3I_t - V_t}{2}$$

$$(K-2)I_t + (3-K) \left(\frac{3I_t - V_t}{2} \right) = 0 \rightarrow 2(K-2)I_t + (3-K)(3I_t - V_t) = 0 \rightarrow (3-K)V_t = (5-K)I_t$$

بنابراین:

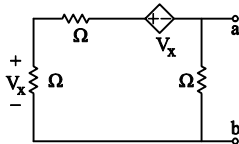
$$R_{ab} = \frac{V_t}{I_t} = \frac{5-K}{3-K} < 0 \rightarrow 3 < K < 5$$

در نتیجه به ازای $K = 4$ مقاومت دیده شده از دو سر a و b منفی است.

۱۳- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

با استفاده از تبدیل نورتن و تونن، منبع جریان وابسته را به منبع ولتاژ معادل آن تبدیل می‌کنیم و برای یافتن مقاومت

معادل از دو سر a و b منبع جریان مستقل را صفر می‌کنیم:



با توجه به این که ولتاژ دو سر مقاومت یک اهمی سمت چپ برابر V_x است پس جریان عبوری از آن نیز V_x می‌باشد و

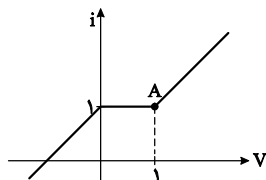
با اعمال KVL در مش فوق داریم:

$$\text{KVL: } V_{ab} = -2V_x + V_x + V_x = 0 \rightarrow V_{ab} = 0$$

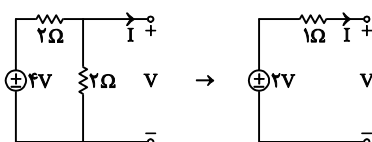
پس مدار مانند یک شاخه اتصال کوتاه است و مقاومت معادل آن برابر صفر می‌باشد.

۱۴- گزینه ی «۴» صحیح است.

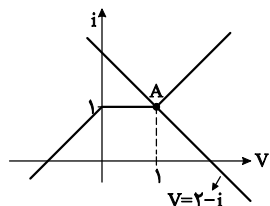
مشخصه اتصال موازی دو عنصر غیرخطی با توجه به جهت ولتاژها به صورت زیر به دست می آید: (به ازای ولتاژهای برابر، جریان ها با هم جمع می شوند).



مدار معادل تونن قسمت خطی دیده شده از دو سر قسمت غیرخطی به صورت زیر است:



معادله خط بار توصیف کننده آن با توجه به جهت جریان مربوط به قسمت غیرخطی به صورت $V = 2 - i$ است که با تلاقی آن با مشخصه اتصال موازی قسمت غیرخطی، نقطه کار مدار غیرخطی به دست می آید:

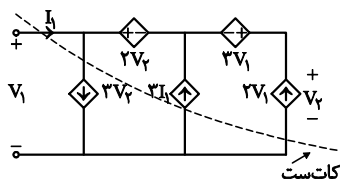


نقطه کار $A \Big|_{i=1}^{V=1}$

اگر ولتاژ دو سر دیود برابر یک ولت باشد، با توجه به مشخصه آن، جریان گذرنده از آن برابر صفر است. بنابراین توان مصرفی دیود برابر صفر است.

۱۵- گزینه ی «۳» صحیح است.

با نوشتن KVL در مش بیرونی و KCL زدن در کات است نشان داده شده داریم:



$$\text{KVL: } 2V_2 - 3V_1 + V_2 = V_1 \rightarrow 3V_2 = 4V_1$$

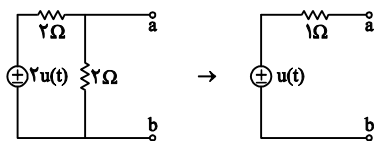
$$\text{KCL: } i_1 = 3V_2 - 3i_1 - 2V_1 \rightarrow 4i_1 = 3V_2 - 2V_1 = 4V_1 - 2V_1 = 2V_1 \rightarrow V_1 = 2i_1$$

در نتیجه:

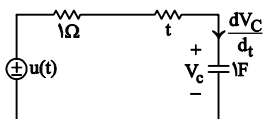
$$R_{in} = R_{ab} = \frac{V_1}{i_1} = 2\Omega$$

۱۶- گزینه ی «۱» صحیح است.

ابتدا مدار معادل تونن دیده شده از دو سر a, b را به جای طرف سمت چپ مدار قرار می دهیم:



در نتیجه با اعمال KVL در مدار شکل زیر داریم:



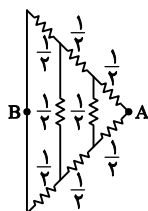
$$\text{KVL: } u(t) = (t+1) \frac{dV_c}{dt} + V_c \rightarrow u(t) = \frac{d}{dt} [(t+1) V_c(t)]$$

$$\xrightarrow{\int} \int_0^t u(t) dt = \int_0^t \frac{d}{dt} [(t+1) V_c(t)] dt \rightarrow t = (t+1) V_c(t) \Big|_0^t$$

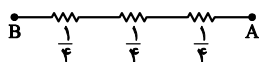
$$\rightarrow V_c(t) = \frac{t}{t+1}$$

۱۷- گزینه ی «۴» صحیح است.

اگر مدار را از روی محور تقارنی که از AB می گذرد تا کنیم، چون دو سر مقاومت های افقی روی همدیگر می افتد، این مقاومت ها حذف شده و داریم:



و اگر باز مدار را از روی محور تقارن که از AB می گذرد تا کنیم، با حذف مقاومت های عمودی که دو سر آن ها اتصال



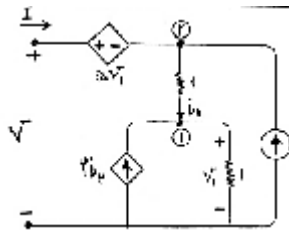
کوتاه می شود خواهیم داشت:

بنابراین:

$$R_{AB} = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Omega$$

۱۸- گزینه ی «۴» صحیح است.

ابتدا مدار معادل تونن دیده شده از دو سر مقاومت غیرخطی را به دست می آوریم:



$$\text{KCL}(1): 3i_2 + i_2 = V_1 \rightarrow V_1 = 4i_2$$

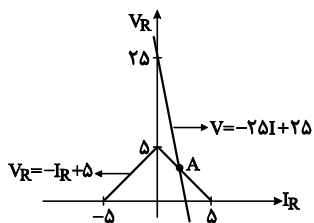
$$\text{KVL}: V = 5V_1 + i_2 + V_1 = 6V_1 + i_2 = 24i_2 + i_2 = 25i_2$$

$$\text{KCL}(2): i_2 = I + 1 \rightarrow V = 25(I + 1) = 25I + 25$$

در نتیجه مشخصه $V - I$ سمت راست مدار به صورت $V = 25I + 25$ می‌باشد که با توجه به نحوه به هم پیوستن مقاومت غیرخطی و طرف راست مدار می‌توان گفت:

$$\begin{cases} V = V_R \\ I = -I_R \end{cases}$$

یعنی در معادله مشخص دو سر مدار سمت راست، I را به $-I$ تبدیل می‌کنیم و خط $V = -25I + 25$ را با مشخصه مقاومت غیرخطی تلاقی می‌دهیم:



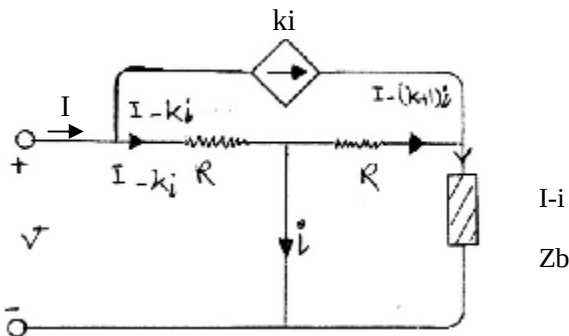
$$\begin{cases} V = V_R = -25I_R + 25 \\ V_R + I_R = 5 \end{cases}$$

بنابراین:

$$-25I_R + 25 = -I_R + 5 \rightarrow I_R = \frac{5}{6} \text{ A} \rightarrow V_R = 5 - \frac{5}{6} = \frac{25}{6} \text{ V}$$

۱۹- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

با KCL زدن و نوشتن KVL در مدار شکل زیر داریم:



$$\text{KVL در مش سمت راست: } R(I - (K+1)i) + Z_b(I - i) = 0 \rightarrow i = \frac{(R + Z_b)}{R(K+1) + Z_b} I$$

$$\text{KVL در مش سمت چپ: } V = R(I - K_i) = RI - \frac{RK(R + Z_b)}{R(K+1) + Z_b} I$$

$$\rightarrow V = \left(R - \frac{K(R + Z_b)}{R(K+1) + Z_b} \right) I = \frac{R^2 + R(1-K)Z_b}{R(K+1) + Z_b} I$$

بنابراین:

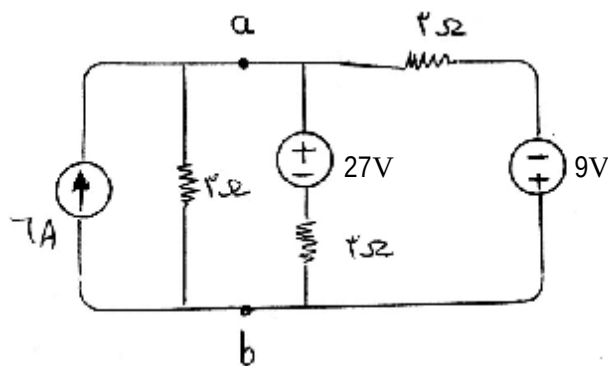
$$Z_{in} = \frac{V}{I} = \frac{R^2 + RZ_b(1-K)}{R(K+1) + Z_b} = \frac{-RZ_bK + (R^2 + RZ_b)}{RK + (R + Z_b)}$$

در نتیجه:

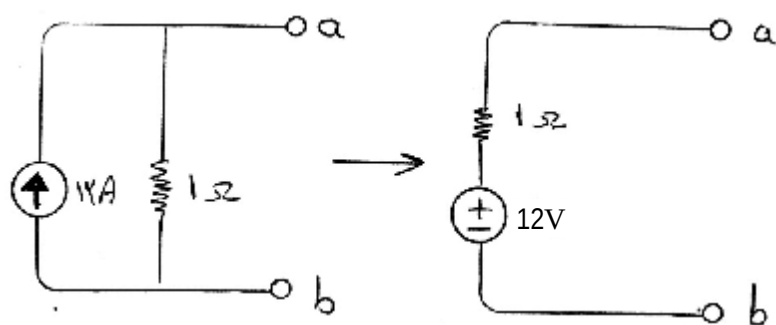
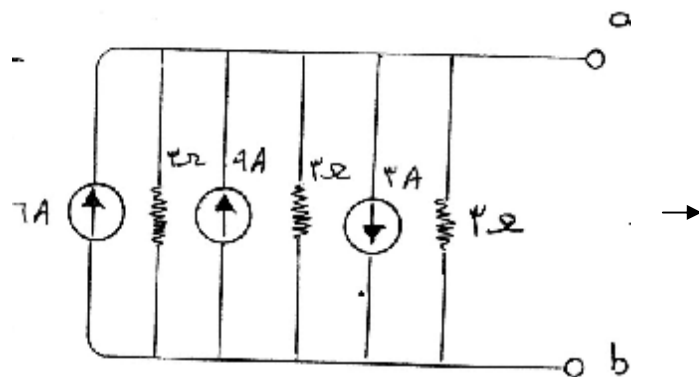
$$\lim_{K \rightarrow \infty} Z_{in} = -\frac{RZ_b}{R} = -Z_b$$

۲۰- گزینه ی «۱» صحیح است.

هر عنصری موازی با منبع ولتاژ و سری با منبع جریان قابل حذف است، پس مدار به صورت زیر ساده می شود.



با تبدیل منابع ولتاژ به جریان داریم:



فصل چهارم: مدارهای مرتبه اول

در فصل‌های قبل، روابط بین ولتاژ و جریان عناصر به صورت جبری بود بنابراین معادلات ناشی از KCL و KVL زدن همگی جبری می‌شدند. اما با ورود خازن و سلف به این مدارات، روابط به صورت معادلات دیفرانسیلی و انتگرالی تبدیل می‌شوند.

اگر معادله بیان کننده یک مدار به صورت معادله دیفرانسیل مرتبه اول باشد، به آن مدار، مرتبه اول گفته می‌شود.

ابتدا به معرفی دو عنصر خازن و سلف که دو عنصر حافظه‌دار می‌باشند، می‌پردازیم.

حافظه‌دار بودن خازن و سلف به این معنی است که مقدار ولتاژ (جریان) در آن‌ها به مقادیر گذشته جریان (ولتاژ) بستگی دارد.

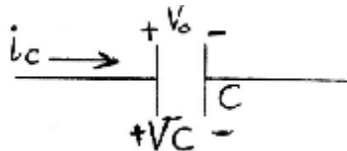
بر همین اساس است که برای خازن، ولتاژ اولیه و برای سلف، جریان اولیه بیان می‌شود. ولی در مقاومت چنین مفاهیمی نداشتیم.

4-1- خازن

در فصل اول به طور کامل به معرفی خازن پرداختیم. در این قسمت اشاره‌ای مختصر به روابط و اتصالات خازن‌ها داریم. برای هر خازن می‌توان گفت:

$$q = C.V$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV}{dt}$$



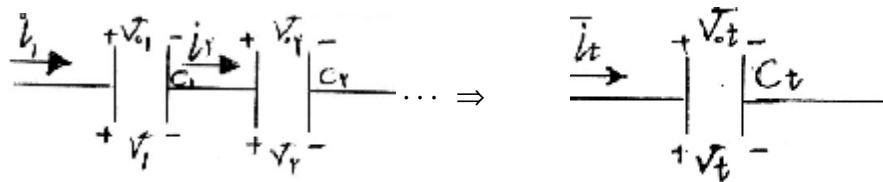
$$V = V_o + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$$

$$W = \frac{1}{2} q.V = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C}$$

که در این روابط q بار الکتریکی برحسب کولن، C ظرفیت خازن برحسب فاراد، V ولتاژ برحسب ولت، i جریان برحسب آمپر، V_o ولتاژ اولیه خازن برحسب ولت و W انرژی خازن برحسب ژول می‌باشند.

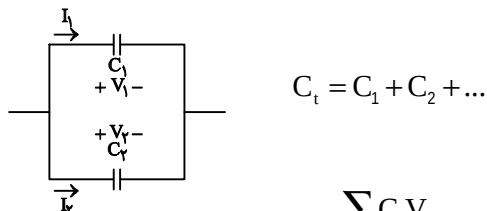
در اتصال سری خازن‌ها می‌توان گفت:

$$C_t = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \right)^{-1}$$



ولتاژ اولیه خازن معادل $V_{ot} = V_{o1} + V_{o2} + \dots$

و برای اتصال موازی خازن‌ها داریم:



$$C_t = C_1 + C_2 + \dots$$

ولتاژ اولیه خازن معادل $V_{ot} = \frac{q_{ot}}{C_t} = \frac{\sum_i C_i V_{ot}}{\sum_i C_i} = \frac{C_1 V_{o1} + C_2 V_{o2} + \dots}{C_1 + C_2 + \dots}$

اگر خازن‌های از قبل شارژ شده را با هم موازی کنیم، برای هم پتانسیل شدن خازن‌ها، بارها حرکت می‌کنند. اگر مجموع

انرژی خازن‌ها را قبل و بعد از اتصال به‌دست آوریم:

$$W_{\text{قبل از اتصال}} = \frac{1}{2} C_1 V_{o1}^2 + \frac{1}{2} C_2 V_{o2}^2 + \dots$$

$$W_{\text{بعد از اتصال}} = \frac{1}{2} C_t V_{ot}^2 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2 + \dots) \left(\frac{C_1 V_{o1} + C_2 V_{o2} + \dots}{C_1 + C_2 + \dots} \right)^2$$

دیده می‌شود که:

$$W_{\text{قبل از اتصال}} < W_{\text{بعد از اتصال}}$$

این اختلاف انرژی ΔW که به صورت گرما در سیم‌ها ظاهر می‌شود، صرف حرکت بارها جهت هم پتانسیل شدن

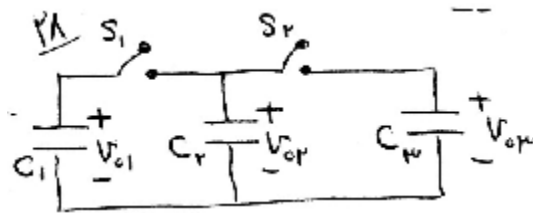
خازن‌ها می‌شود.

$$\Delta W = W_{\text{بعد از اتصال}} - W_{\text{قبل از اتصال}}$$

مثال ۱: در مدار شکل زیر، کلیدهای S_1 و S_2 در لحظه‌ی $t = t_0$ همزمان بسته می‌شوند. انرژی ذخیره شده در مدار در

$t = t_0^-$ تا $t = t_0^+$ چه تغییری می‌کند؟

$C_1 = 2F$	$V_{o1} = 2V$
$C_2 = 3F$	$V_{o2} = 4V$
$C_3 = 5F$	$V_{o3} = 3V$



$$W_1 = \frac{1}{2} (2 \times 2^2 + 3 \times 4^2 + 5 \times 3^2) = 50/5j \text{ در } t = t_0^- \text{ قبل از اتصال}$$

$$W_2 = \frac{1}{2} (2 + 3 + 5) \left(\frac{2 \times 2 + 3 \times 4 + 5 \times 3}{2 + 3 + 5} \right)^2 = 48/05j \text{ در } t = t_0^+ \text{ بعد از اتصال}$$

$$\Delta W = W_1 - W_2 = 50/5 - 48/05 = 2/45j$$

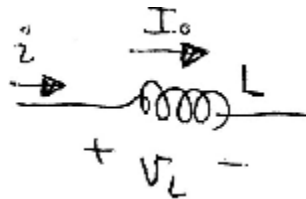
۴-۲- سلف

در فصل اول نیز به طور کامل به معرفی سلف پرداخته شده است. در این جا اشاره‌ای کوتاه به روابط و اتصالات سلف‌ها داریم.

برای هر سلف می‌توان گفت:

$$\phi = L.I$$

$$V = \frac{d\phi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$



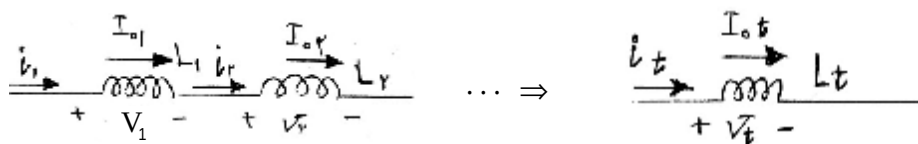
$$i = I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t V(t) dt$$

$$W = \frac{1}{2} \phi i = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{L}$$

که در این روابط ϕ شار الکتریکی برحسب وبر، L اندوکتانس سلف برحسب هانری، I جریان برحسب آمپر، V ولتاژ

برحسب ولت، I_0 جریان اولیه برحسب آمپر و W انرژی برحسب ژول است.

در اتصال سری سلف‌ها خواهیم داشت:



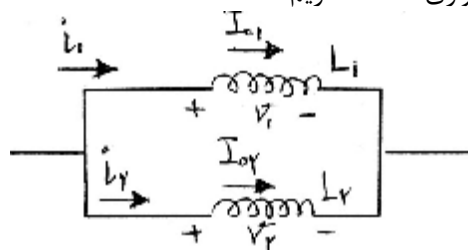
$$L_t = L_1 + L_2 + \dots$$

$$I_{ot} = \frac{\Phi_{ot}}{L_t} = \frac{L_1 I_{o1} + L_2 I_{o2} + \dots}{L_1 + L_2 + \dots}$$

و برای اتصال موازی سلف‌ها داریم:

$$L_t = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots \right)^{-1}$$

$$I_{ot} = I_{o1} + I_{o2} + \dots$$



اگر سلف‌های از قبل شارژ شده را با هم سری کنیم، یک اتلاف انرژی داریم که برای آن می‌توان گفت:

$$W_{\text{قبل از اتصال}} = \frac{1}{2} L_1 I_{o1}^2 + \frac{1}{2} L_2 I_{o2}^2 + \dots$$

$$W_{\text{بعد از اتصال}} = \frac{1}{2} L_t I_{ot}^2 = \frac{1}{2} (L_1 + L_2 + \dots) \left(\frac{L_1 I_{o1} + L_2 I_{o2} + \dots}{L_1 + L_2 + \dots} \right)^2$$

$$\Delta W = W_{\text{بعد از اتصال}} - W_{\text{قبل از اتصال}}$$

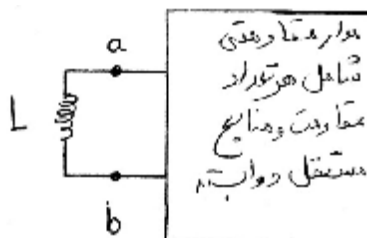
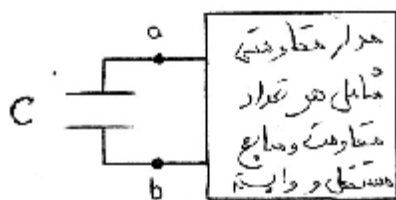
این اختلاف انرژی ΔW ، صرف حرکت شارهای الکتریکی جهت هم جریان شدن سلف‌ها می‌شود.

۳-۴- بررسی مدارهای مرتبه اول

همان‌طور که گفته شد، مداری مرتبه اول است که معادله دیفرانسیل توصیف کننده آن، مرتبه اول باشد. به عبارت دیگر، مداری شامل هر تعداد مقاومت و منابع مستقل و وابسته و فقط یک خازن مستقل (و یا فقط یک سلف مستقل) را مدار مرتبه اول می‌گویند.

اگر مداری شامل n تا خازن یا n تا سلف باشد، در شرایط خاصی (مخصوصاً در کلیدزنی) خازن‌ها یا سلف‌ها با هم سری یا موازی می‌شوند و در این حالت باز مدار مرتبه اول است و از قوانین مدارهای مرتبه اول پیروی می‌کند.

برای تحلیل و بررسی مدارهای مرتبه اول، خازن یا سلف را از آن بیرون آورده و مدار را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

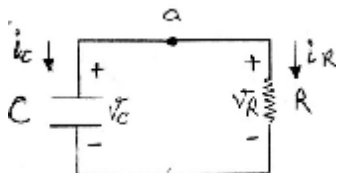


در هر یک از مدارهای فوق، برای تحلیل مدار مرتبه اول دو روش وجود دارد:

4-3-1- نوشتن معادله دیفرانسیل و حل آن

روش کلی تحلیل و حل مدارهای شامل خازن و سلف (از هر مرتبه‌ای)، نوشتن معادله دیفرانسیل و سپس حل آن است. برای مدارهای مرتبه اول خازنی یا سلفی نیز می‌توان با استفاده از روابط بخش 4-1 و 4-2، معادله دیفرانسیل مربوطه را تشکیل داده و سپس آن را حل کرد.

به عنوان مثال، برای مدار RC در شکل زیر داریم:



$$V_C(0^+) = V_0$$

$$\text{KCL در گره a: } i_C + i_R = 0 \rightarrow C \frac{dV_C}{dt} + \frac{V_R}{R} = 0$$

$$\xrightarrow{V_C = V_R} C \frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{R} = 0 \rightarrow \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{RC} V_C = 0$$

با حل این معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی همگن:

$$V_C(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t \geq 0$$

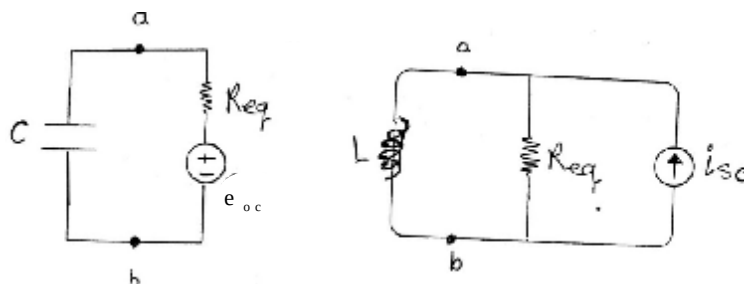
که منحنی آن به صورت زیر می‌باشد:



این روش حل، کار نسبتاً طولانی و زمان‌بری است. بنابراین از روش دیگری که ما را سریع‌تر به پاسخ می‌رساند، استفاده می‌کنیم.

4-3-2- روش نظری در تحلیل مدارهای مرتبه اول

در این حالت مدار معادل تونن یا نورتن از دو سر خازن (یا سلف) بیرون آورده شده از مدار، در شکل قبل را به دست می‌آوریم:



و با تحلیل این دو مدار، می‌توان پاسخ ورودی صفر، پاسخ حالت صفر و پاسخ کامل مدار مرتبه اول را به دست آورد. می‌دانیم که پاسخ ورودی صفر یعنی پاسخ، وقتی که ورودی صفر است؛ یعنی پاسخ فقط ناشی از شرایط اولیه است، و پاسخ حالت صفر، یعنی زمانی که شرایط اولیه صفر است و به عبارت دیگر، پاسخ فقط ناشی از ورودی است و پاسخ کامل، مجموع پاسخ‌های ورودی صفر و پاسخ حالت صفر می‌باشد. بر این اساس، در مدارهای مرتبه اول خطی و با ورودی DC، پاسخ کامل از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$y(t) = [y(0) - y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + y(\infty)$$

که y هر سیگنالی (ولتاژ یا جریان) از مدار مرتبه‌ی اول است.

برای استفاده از این رابطه باید اجرای آن را به طور کامل بشناسیم و نحوه‌ی به دست آوردن آن‌ها را بررسی نماییم:

۱- ثابت زمانی یا τ

ثابت زمانی فقط مربوط به مدارهای مرتبه اول می‌باشد به طوری که هر مدار مرتبه اول پس از مدت زمانی بین 4 تا 5 برابر آن به مقدار نهایی یا ماندگار خود می‌رسد.

ثابت زمانی مدارهای مختلف به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\tau = R_{eq} \times C \quad \text{برای مدارهای RC}$$

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} \quad \text{برای مدارهای RL}$$

که در آن R_{eq} مقاومت معادل دیده شده از دو سر سلف یا خازن است. پس به دست آوردن ثابت زمانی معادل است با

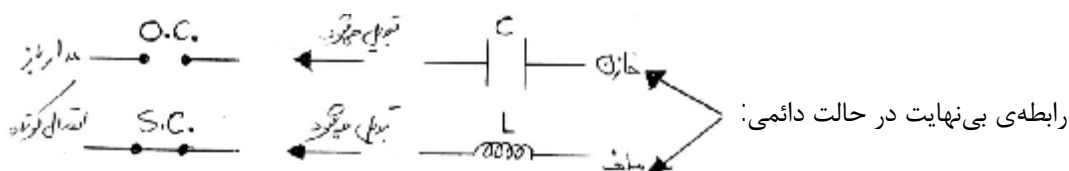
یافتن مقاومت معادل دیده شده از دو سر خازن یا سلف.

نکته: در مدارهای مرتبه اول، زمان‌های بزرگتر از 5τ را بی‌نهایت (از دید فیزیکی) در نظر می‌گیریم حتی اگر این بی‌نهایت کمتر از چند میلی ثانیه باشد!

$$y(\infty) - ۲$$

$y(\infty)$ یعنی مقدار سیگنال موردنظر (ولتاژ یا جریان) در حالت دائمی.

برای به دست آوردن مقدار ولتاژ یا جریان موردنظر در حالت دائمی از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

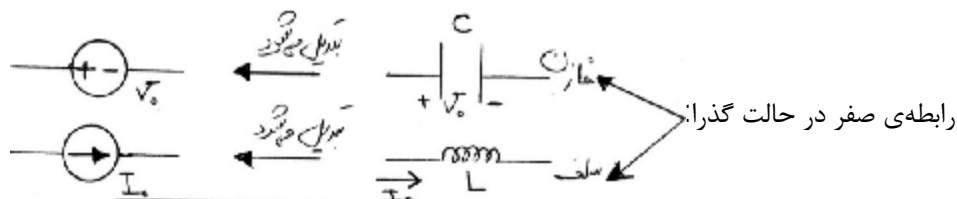


یعنی به جای خازن، مدار باز و به جای سلف، اتصال کوتاه قرار می‌دهیم و با این تغییرات مدار را تحلیل می‌کنیم تا $y(\infty)$ را در حالت دائمی به دست می‌آوریم.

$$y(0) - ۳$$

$y(0)$ یعنی مقدار سیگنال موردنظر در لحظه‌ی صفر که مربوط به حالت گذرا می‌باشد.

برای این منظور از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:



یعنی به جای خازن، یک منبع ولتاژ با مقدار V_0 (ولتاژ اولیه خازن) و به جای سلف، یک منبع جریان با مقدار I_0 (جریان اولیه سلف) قرار می‌دهیم و با این تغییرات مدار را تحلیل می‌کنیم تا $y(0)$ را به دست می‌آوریم.

نکته: اگر خازن یا سلف دارای شرایط اولیه نباشند، به جای خازن، اتصال کوتاه (منبع ولتاژ صفر شده) و به جای سلف، مدار باز (منبع جریان صفر شده) قرار می‌دهیم.

*** کلیدزنی**

یکی از زمان‌های بسیار مهم در تحلیل مدارهای مرتبه اول، زمان کلیدزنی یا لحظه‌ی صفر است. در اصل، زمانی که با

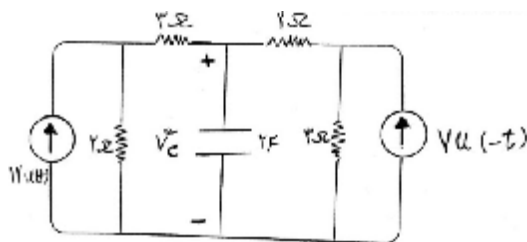
قطع یا وصل کردن کلیدی در مدار، شرایط مسأله تغییر می‌کند، این زمان را زمان کلیدزنی یا لحظه‌ی صفر $t=0$ می‌نامیم.

برای پیدا کردن مقدار سیگنال موردنظر در این زمان، باید توجه نمود که با دو جور صفر سر و کار داریم. یکی $t=0^-$ که بلافاصله قبل از کلیدزنی است و یکی $t=0^+$ که بلافاصله پس از کلیدزنی می‌باشد.

می‌توان گفت 0^+ از جنس صفر می‌باشد و برای یافتن $y(0^+)$ از رابطه‌ی صفر استفاده می‌کنیم و 0^- از جنس بی‌نهایت است (0^- یعنی بی‌نهایت ثانیه پس از $-\infty$) و برای به دست آوردن $y(0^-)$ از رابطه‌ی بی‌نهایت بهره می‌گیریم. پس به طور کلی می‌توان گفت:

$t=0^+ \leftarrow$ از جنس صفر $\leftarrow$ استفاده از رابطه صفر برای به دست آوردن $y(0^+)$
 لحظه کلیدزنی $t=0$
 $t=0^- \leftarrow$ از جنس بی‌نهایت $\leftarrow$ استفاده از رابطه بی‌نهایت برای به دست آوردن $y(0^-)$

مثال ۲: در مدار شکل زیر $V_C(t)$ را به دست آورید.

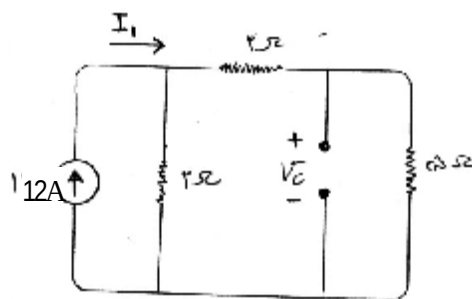


برای یافتن τ ، از دو سر خازن R_{eq} را پیدا می‌کنیم:

$$R_{eq} = (3+2) \parallel (2+3) = 2/5 \Omega$$

$$\tau = R_{eq} \times C = 2/5 \times 2 = 5S$$

برای محاسبه‌ی $y(\infty)$ ، با استفاده از رابطه‌ی بی‌نهایت و صفر بودن منبع $7u(-t)$ در آن زمان داریم:

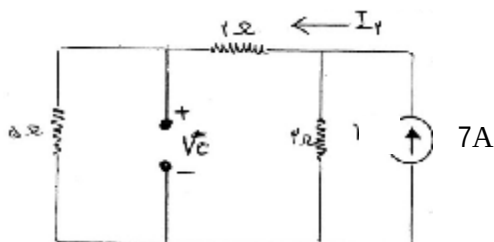


$$I_1 = \frac{2}{2+3+5} \times 12 = 2/4 \text{ A}$$

$$V_C(\infty) = 5I_1 = 5 \times 2/4 = 12 \text{ V}$$

برای محاسبه $y(0)$ از رابطه‌ی صفر نمی‌توان استفاده کرد بلکه با توجه به پیوسته بودن ولتاژ خازن، $V(0^-)$ را با استفاده

از رابطه‌ی بی‌نهایت به دست می‌آوریم و آن را با $V(0^+)$ برابر قرار می‌دهیم:



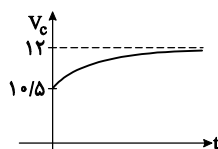
$$I_2 = \frac{3}{3+2+5} \times 7 = 2/1 \text{ A}$$

$$V_C(0^-) = 5I_2 = 10/5 \text{ V} \rightarrow V_C(0^+) = 10/5 \text{ V}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$V_C(t) = [V_C(0^+) - V_C(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} + V_C(\infty) = (10/5 - 12) e^{-\frac{t}{5}} + 12 \rightarrow V_C(t) = -1/5 e^{-\frac{t}{5}} + 12$$

که شکل آن به صورت زیر است:



همان‌طور که در حل این مثال دیدیم، از پیوستگی ولتاژ خازن استفاده نمودیم. در حالت کلی می‌توان گفت:

3-3-4- قضیه پیوستگی

در مدارهای مرتبه اول، ولتاژ خازن و جریان سلف نمی‌توانند به طور ناگهانی تغییر کنند (موارد استثنائی وجود دارد که

بعداً بررسی می‌کنیم)، پس در لحظه‌ی $t = t_0$ از رابطه صفر استفاده می‌کنیم. همچنین می‌توان با توجه به پیوسته بودن ولتاژ خازن و جریان سلف، با استفاده از رابطه‌ی بی‌نهایت در لحظه‌ی $t = t_0^-$ مدار را تحلیل نموده و مقادیر به دست آمده را برای زمان $t = t_0^+$ بکار برد.

نکته: در مدارهای مرتبه‌ی اول، هنگامی که سیگنالی را بلافاصله پس از کلیدزنی (مثلاً در $t = 0^+$) می‌خواهیم، در مرحله اول مدار را در $t = 0^-$ رسم می‌کنیم (با استفاده از رابطه‌ی بی‌نهایت) و مقادیر $V_C(0^-)$ یا $I_L(0^-)$ را به دست می‌آوریم.

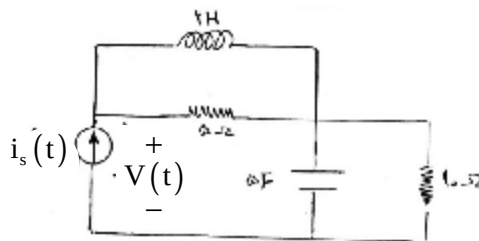
سپس با استفاده از قضیه پیوستگی می‌توان گفت:

$$V_C(0^+) = V_C(0^-)$$

$$I_L(0^+) = I_L(0^-)$$

و در مرحله دوم مدار را در $t = 0^+$ رسم می‌کنیم (با استفاده از رابطه صفر) و سپس با تحلیل مدار، هر سیگنالی را در $t = 0^+$ به دست می‌آوریم.

مثال ۳: در مدار شکل زیر، اگر $i_s(t) = 50u(-t)$ باشد، ولتاژ دو سر منبع جریان را در $t = 0^+$ به دست آورید.

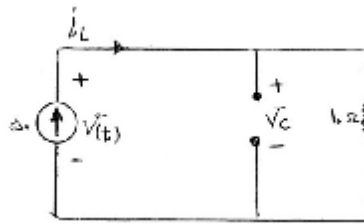


مدار فوق یک مدار مرتبه دوم می‌باشد ولی با اطلاعات مدارهای مرتبه اول نظیر رابطه‌ی صفر و رابطه‌ی بی‌نهایت، می‌توان این مدار را تحلیل نمود.

در حالت کلی روابط صفر و بی‌نهایت برای هر مدار مرتبه‌ی n صادق است.

با توجه به ورودی، مدار از زمان ∞ فعال است. پس برای بررسی آن در $t = 0^-$ از رابطه‌ی بی‌نهایت بهره می‌گیریم. در این حالت خازن اتصال باز و سلف اتصال کوتاه است.

$$V_C(0^-) = V(0^-) = 50 \times 10 = 500 \text{ V}$$



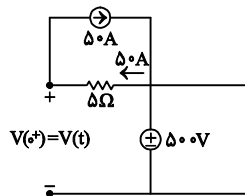
$$i_L(0^-) = 50 \text{ A}$$

بنابراین داریم:

$$V_C(0^+) = 500 \text{ V}$$

$$i_L(0^+) = 50 \text{ A}$$

و حالا برای بررسی مدار در لحظه‌ی $t = 0^+$ با استفاده از رابطی صفر خواهیم داشت:



$$\text{KVL: } V(0^+) = -250 + 500 \rightarrow V(0^+) = 250 \text{ V}$$

۴-۴- انواع پاسخ در مدارهای مرتبه اول

هر پاسخی در مدارهای مرتبه اول به صورت نمایی است. از دو دیدگاه می‌توان پاسخ در مدارهای مرتبه اول را بررسی نمود:

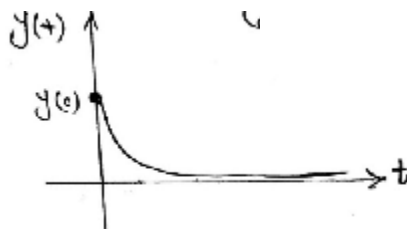
۱- دیدگاه اول

در این حالت پاسخ به سه دسته پاسخ ورودی صفر، پاسخ حالت صفر و پاسخ کامل تقسیم می‌شوند.

الف) پاسخ ورودی صفر: در این حالت کلیه منابع را صفر می‌کنیم، پس $y(\infty) = 0$ می‌شود. بنابراین پاسخ ورودی

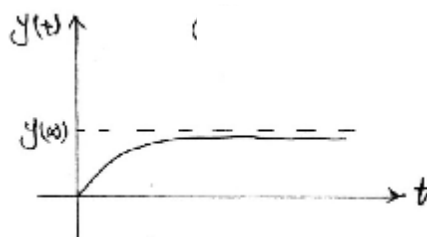
صفر برابر است با:

$$y(t) = y(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$



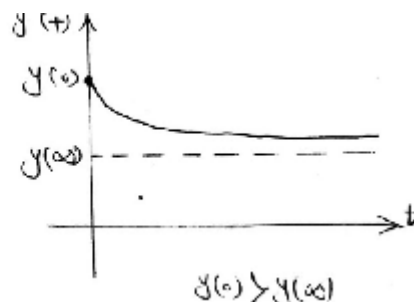
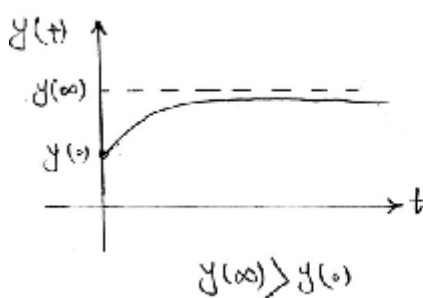
ب) پاسخ حالت صفر: در این حالت شرایط اولیه صفر است، پس $y(0) = 0$ است. بنابراین:

$$y(t) = y(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



ج) پاسخ کامل: مجموع دو پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر است.

$$y(t) = [y(0) - y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + y(\infty)$$



۲- دیدگاه دوم

در این حالت پاسخ به سه دسته پاسخ گذرا، پاسخ ماندگار و پاسخ کامل دسته‌بندی می‌شود.

الف) پاسخ گذرا: قسمتی از پاسخ که وقتی $t \rightarrow \infty$ میل می‌کند، صفر می‌شود.

$$y(t) = [y(0) - y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

ب) پاسخ ماندگار: حد پاسخ وقتی که $t \rightarrow \infty$ میل می‌کند.

$$y(t) = y(\infty)$$

ج) پاسخ کامل: مجموع دو پاسخ گذرا و پاسخ ماندگار را گویند.

$$y(t) = [y(0) - y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + y(\infty)$$

باید توجه داشت که پاسخ گذرا ناشی از ورودی و شرایط اولیه است و پاسخ ماندگار فقط ناشی از ورودی می‌باشد.

نکته: زمانی که $y(0) = y(\infty)$ باشد، در این حالت پاسخ گذرا وجود ندارد و برای پاسخ کامل خواهیم داشت:

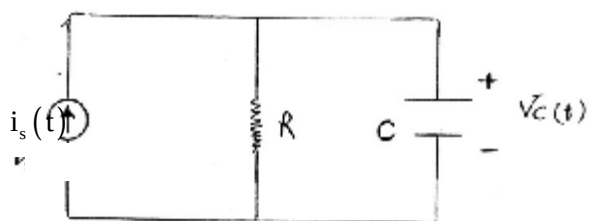
$$y(t) = y(\infty)$$

۴-۵- پاسخ پله در مدارهای مرتبه اول

در این حالت ورودی مدار را $u(t)$ در نظر می‌گیریم و پاسخ به ورودی پله را در حالت صفر، به دست می‌آوریم. پاسخ پله را با $S(t)$ نمایش می‌دهند.

مثلاً در مدار شکل زیر، برای پاسخ پله ولتاژ دو سر خازن داریم:

$$i_s(t) = u(t)$$

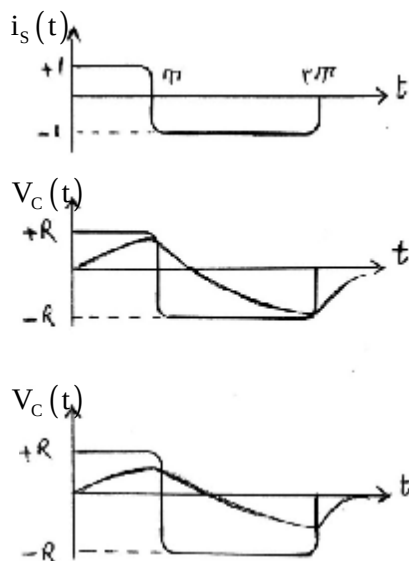


$$S(t) = V_C(t) = R(1 - e^{-\frac{t}{RC}})u(t)$$

نکته: زمان کافی برای شارژ و دشارژ خازن (یا سلف) زمانی است که مدت زمان اعمال پالس T به مدار، از 5τ (پنج

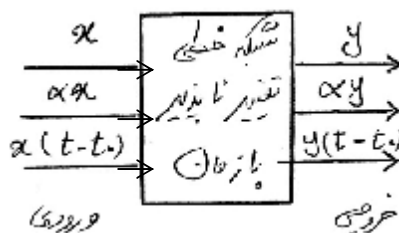
برابر ثابت زمانی مدار) بزرگتر باشد. در غیر این صورت خازن (یا سلف) به صورت ناقص شارژ و دشارژ می‌شوند.

مثلاً اگر به مدار شکل قبل، ورودی زیر که ترکیبی از توابع پله است اعمال شود، خروجی می‌تواند به دو صورت ظاهر شود:



در حالت اول با استفاده از قضیه جمع آثار، در T ثانیه اول عمل شارژ خازن و بعد تغییر پلاریته ولتاژ از $+R$ به $-R$ و در نهایت پس از زمان $3T$ خازن دشارژ می‌شود. در این حالت $T \geq 5\tau$ است. ولی در حالت دوم $T \leq 5\tau$ است و عمل شارژ و دشارژ خازن به طور کامل انجام نمی‌شود.

نکته: در مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان (شبکه‌های LTI که بعداً مفصلاً توضیح داده می‌شوند)، با اعمال هر تغییر خطی در ورودی (نظیر ضرب یک عدد، شیفت زمانی، مشتق، انتگرال، فوریه و ...)، همان تغییر عیناً در خروجی نیز اعمال می‌شود.



مثال ۴: در یک مدار RC ، به ازای دریافت سیگنال پله واحد، ولتاژ خازن برابر $V_C(t) = 1 - e^{-2t}$ است. اگر ولتاژ اولیه خازن یک ولت باشد و سیگنال ورودی $3u(t)$ اعمال شود، پاسخ $V_C(t)$ را به دست آورید.

حل: پاسخ ناشی از ورودی $3u(t)$ برابر شده است، پس خروجی نیز ۳ برابر می‌شود، یعنی:

$$V_C(t) = 3(1 - e^{-2t}) = 3 - 3e^{-2t}$$

خروج ناشی از ورودی:

پاسخ ناشی از شرایط اولیه $V_0 = 1V$: برای خروجی ناشی از شرایط اولیه داریم:

$$V_C(t) = 1e^{-2t}$$

خروجی ناشی از شرایط اولیه:

و در نتیجه پاسخ کامل برابر است با:

$$V_C(t) = 3 - 3e^{-2t} + 1e^{-2t} = 3 - 2e^{-2t}$$

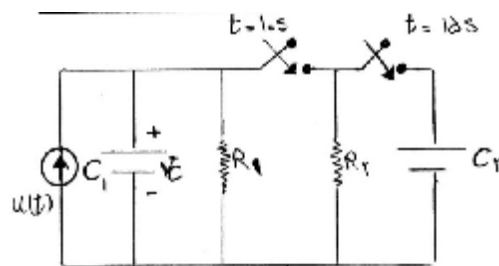
۴-۶- مدارهای مرتبه اول با چند ثابت زمانی

در این گونه مدارهای مرتبه اول، در لحظه‌های کلیدزنی، مقاومت یا خازنی (و یا سلفی) به مدار اضافه و یا از مدار کم می‌شود که این حالت باعث تغییر ثابت زمانی در زمان‌های بعد از کلیدزنی می‌شود.

شایان ذکر است که در معادلات مربوطه بعد از کلیدزنی باید به جای t مقدار $t = t_0$ را قرار دهیم (t_0 لحظه‌ی کلیدزنی)، به عبارت دیگر شیفت زمانی پاسخ را در نظر داشته باشیم.

با تحلیل یک مثال مفهوم مدارهای مرتبه اول با چند ثابت زمانی را بیش‌تر بررسی می‌کنیم.

مثال ۵: در مدار شکل زیر، ولتاژ خازن C_1 را به دست آورید و رسم نمائید. (به زمان قطع و وصل کلیدها دقت کنید).

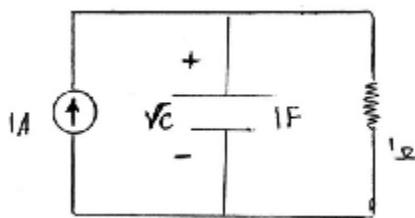


$$\begin{cases} R_1 = R_2 = 1\Omega \\ C_1 = C_2 = 1F \\ V_{C1}(0^-) = V_{C2}(0^-) = 0 \end{cases}$$

در هر بازه زمانی، مسأله را به صورت مجزا بررسی می‌کنیم. در هر قسمت مدار مرتبه اول است ولی ثابت زمانی تغییر می‌کند.

$$0 < t < 10s$$

(الف)

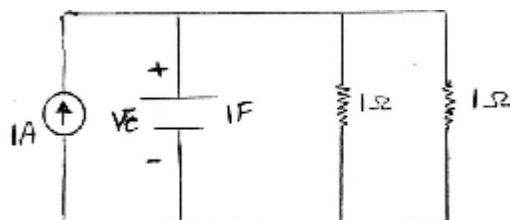


$$\begin{cases} \tau_1 = 1 \times 1 = 1s \\ V_C(0) = 0 \rightarrow V_C(t) = 1 - e^{-t} \\ V_C(\infty) = 1V \end{cases}$$

با توجه به این که $10s > 5\tau_1$ است، پس ولتاژ خازن به مقدار نهایی‌اش می‌رسد و کامل شارژ می‌شود.

$$10s < t < 15s$$

(ب)



$$\begin{cases} R_{eq} = 1 \parallel 1 = \frac{1}{2}\Omega \rightarrow \tau_2 = \frac{1}{2}s \\ C = 1F \end{cases}$$

در این قسمت، مقدار اولیه این بازه از مقدار نهایی بازه قبل به دست می‌آید. (پیوستگی ولتاژ خازن)

$$V_C(10s) = 1 - e^{-t} \Big|_{t=10s} = 1 - e^{-10} ; 1V$$

$$V_C(\infty) = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} V$$

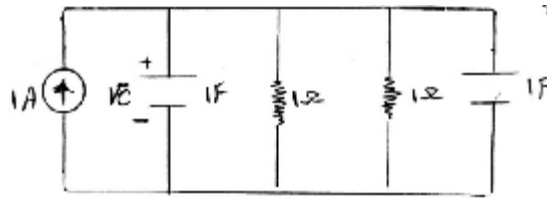
و در نتیجه داریم:

$$V_C(t) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) e^{\frac{t-10}{0.5}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} e^{-2(t-10)} + \frac{1}{2}$$

در این بازه زمانی نیز $5\tau_1 < 5s$ و زمان برای رسیدن ولتاژ به مقدار نهایی $\frac{1}{2} V$ کافی است.

$$t > 15s$$

(ج)



در این حالت به دلیل کلیدزنی، دو خازن C_1 و C_2 موازی می‌شوند.

یکی از این خازن‌ها دارای ولتاژ اولیه $0.5V$ (خازن C_1) و دیگری بدون ولتاژ اولیه می‌باشد. برای ولتاژ اولیه‌ی خازن

معادل می‌توان گفت:

$$V_C(0) = \frac{\frac{1}{2} \times 1 + 0 \times 1}{1+1} = \frac{1}{4} V$$

بنابراین ولتاژ خازن معادل یا V_C در لحظه‌ی $t = 15s$ برابر $\frac{1}{4} V$ است.

پس داریم:

$$R_{eq} = 1 \parallel 1 = \frac{1}{2} \Omega \rightarrow \tau_3 = \frac{1}{2} \times 2 = 1s$$

$$C_{eq} = 1 + 1 = 2F$$

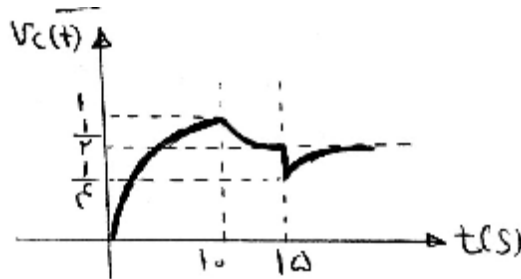
$$V_C(\infty) = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} V$$

$$V_C(t) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) e^{\frac{t-15}{1}} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} e^{-(t-15)} + \frac{1}{2}$$

بنابراین می‌توان بیان کرد که:

$$V_C(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & , \quad 0 < t < 10s \\ \frac{1}{2}e^{-2(t-10)} + \frac{1}{2} & , \quad 10s < t < 15s \\ -\frac{1}{4}e^{-(t-15)} + \frac{1}{2} & , \quad t > 15s \end{cases}$$

و نمودار آن به صورت زیر است:



ملاحظه می‌شود که در $t = 15s$ در ولتاژ خازن پیوستگی وجود ندارد.

پس استثنای قضیه پیوستگی به صورت زیر بیان می‌شود:

نکته: ولتاژ خازن و جریان سلف، سیگنال‌های پیوسته‌ای می‌باشند به جزء در موارد زیر:

1- «سری شدن سلف‌های از قبل شارژ شده» و «موازی شدن خازن‌های از قبل شارژ شده».

2- وجود منابع (ورودی) ضربه در مدار

3- «حلقه شامل فقط خازن و منبع ولتاژ» و «گره شامل فقط سلف و منبع جریان»

۴-۷- پاسخ ضربه

در مدارهای مرتبه اول، پاسخ ضربه یعنی پاسخ حالت صفر به ورودی ضربه.

در عمل با اعمال ورودی ضربه، در شرایط اولیه یک جهش ایجاد می‌شود و سپس ورودی از بین می‌رود، به عبارت دیگر،

پاسخ ضربه یک نوع پاسخ ورودی صفر است.

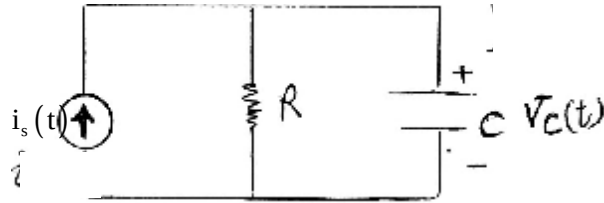
می‌توان گفت: پاسخ ضربه، مشتق پاسخ پله است.

مثلاً پاسخ ضربه در مدار شکل زیر برابر است با:

±

$$i_s(t) = \delta(t)$$

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$



در این مدار مشاهده می شود که:

$$V_C(0^-) = 0$$

$$V_C(0^+) = \frac{1}{C}$$

یعنی در اثر ورودی ضربه، در ولتاژ خازن یک جهش (ناپیوستگی) به میزان $\frac{1}{C}$ ایجاد شده است.

۴-۸- مدارهای مرتبه اول غیرخطی یا متغیر با زمان

برای تحلیل این دسته از مدارهای مرتبه اول، در ابتدا معادله دیفرانسیل حاکم بر متغیر موردنظر را می نویسیم و سپس معادله دیفرانسیل را حل می کنیم. معمولاً معادله دیفرانسیل از نوع جدایی پذیر است.

مثال ۶: در مدار شکل زیر $V_C(t)$ را به گونه ای پیدا کنید که:

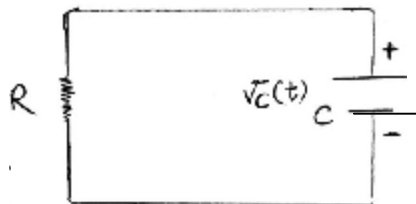
الف) $R = 1\Omega$ و خطی باشد.

ب) $R(t) = \frac{1}{1+2\cos t}$ و تغییرپذیر با زمان باشد.

ج) R یک مقاومت غیرخطی باشد به گونه ای که: $i_R = V_R^2$

$$C = 1F$$

$$V_C(0) = V_0$$



$$\tau = RC = 1 \times 1 = 1s$$

(الف)

$$V_C(0) = V_o \text{ , } V_C(\infty) = 0 \rightarrow V_C(t) = V_o e^{-t}$$

ب) با نوشتن معادله دیفرانسیل حاکم بر مدار:

$$i_C + i_R = 0 \rightarrow C \frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{R} = 0 \rightarrow \frac{dV_C}{dt} + (1 + 2 \cos t) V_C = 0 \rightarrow \int_{V_o}^{V_C} \frac{dV_C}{V_C} = \int_0^t -(1 + 2 \cos t)$$

$$\rightarrow \ln \frac{V_C}{V_o} = -(t + 2 \sin t) \rightarrow V_C(t) = V_o e^{-(t + 2 \sin t)}$$

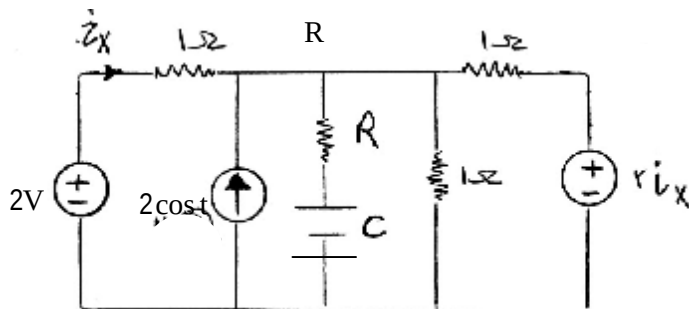
ج) با نوشتن معادله دیفرانسیل مربوطه داریم:

$$i_C + i_R = 0 \rightarrow C \frac{dV_C}{dt} + V_C^2 = 0 \rightarrow \frac{dV_C}{dt} + V_C^2 = 0 \rightarrow \int_{V_o}^{V_C} -\frac{dV_C}{V_C^2} = \int_0^t dt \rightarrow \frac{1}{V_C} - \frac{1}{V_o} = t \rightarrow V_C(t) = \frac{V_o}{1 + V_o t}$$

تست‌های طبقه‌بندی شده مبحث مدارهای مرتبه‌ی اول

۱- در مدار شکل زیر، مقاومت مثبت R را چنان بیابید که اگر به جای خازن C ، سلف $L = C$ قرار دهیم

ثابت زمانی مدار تغییری نکند.



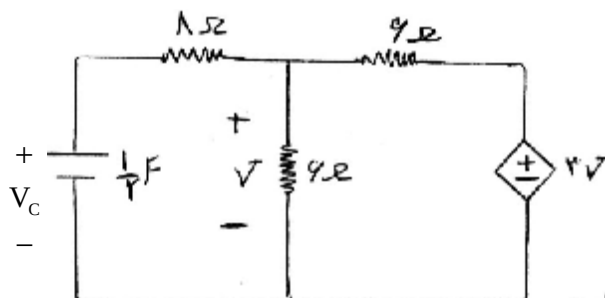
(1) $0/8\Omega$

(2) $0/6\Omega$

(3) $1/2\Omega$

(4) $1/5\Omega$

۲- در مدار شکل زیر، در لحظه‌ی $t = t_0$ ولتاژ خازن 2 ولت است. چند ثانیه بعد از $t = t_0$ ولتاژ V نصف می‌شود؟



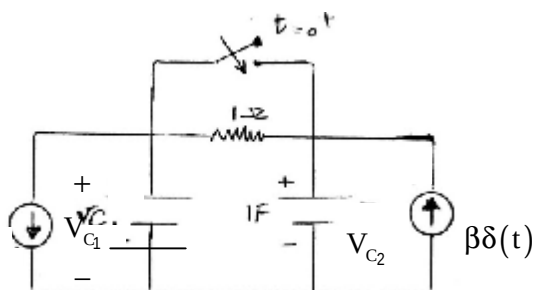
(1) $2\text{Ln}2$

(2) $t_0 + 2\text{Ln}2$

(3) $\text{Ln}2$

(4) $7\text{Ln}2$

۳- در مدار شکل زیر، کلید در $t = 0^+$ وصل می‌شود. بین ∞ و β چه رابطه‌ای برقرار باشد تا بلافاصله بعد از وصل کلید ولتاژ خازن 1F، برابر یک ولت شود؟ (ولتاژ هر دو خازن در $t = 0^-$ برابر صفر است.)



(1) $\beta = \frac{3}{2}\alpha + 1$

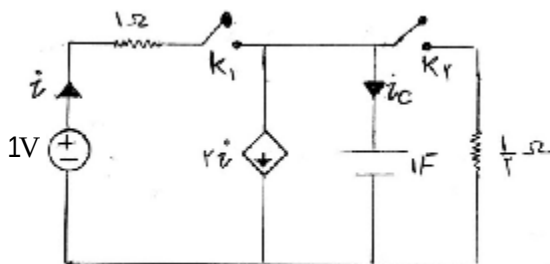
(2) $\beta = \frac{3}{2}\alpha - 1$

(3) $\beta = \alpha - \frac{3}{2}$

(4) $\beta = \alpha + \frac{3}{2}$

۴- در مدار شکل زیر، خازن بدون ولتاژ اولیه بوده و کلید K_1 در $t=0$ بسته می‌شود. پس از یک ثانیه، کلید

K_2 را نیز می‌بندیم. میزان تغییر i_C در لحظه‌ی $t=1\text{sec}$ چند آمپر است؟



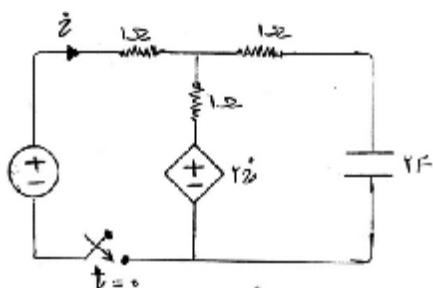
(1) $-2(e-1)$

(2) $-2e$

(3) $2(e-1)$

(4) $2e$

۵- در مدار شکل مقابل، کلید در $t=0$ بسته می‌شود. $i(t)$ کدام است؟



(1) $i(t) = 1 + 0/6e^{0/4t}$

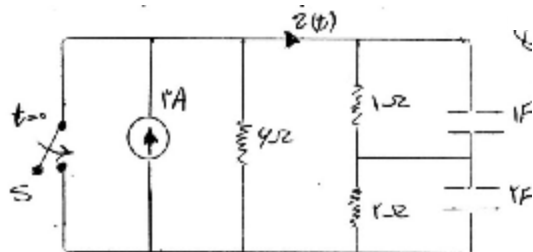
(2) $i(t) = 0/6 + e^{-2/5t}$

(3) $i(t) = 1 + 0/6e^{-2/5t}$

(4) $i(t) = 0/6 + e^{0/4t}$

۶- در مدار شکل زیر کلید S برای مدت زمان طولانی باز بوده و در $t=0$ بسته می‌شود. $i(t)$ برای زمان‌های

$t \geq 0$ مطابق کدام گزینه است؟



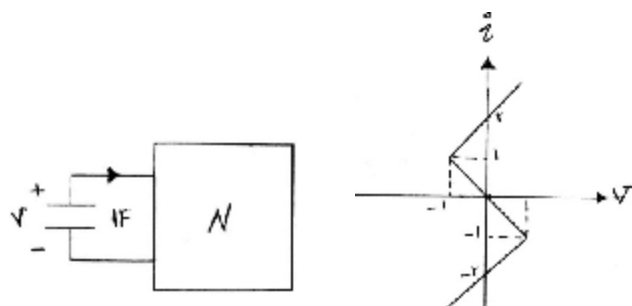
(1) $-4\delta(t) - e^{-t}$

(2) $-2\delta(t) - e^{-\frac{t}{2}}$

(3) $-2\delta(t) - e^{-t}$

(4) $-4\delta(t) - e^{-\frac{t}{2}}$

۷- در مدار شکل زیر، N یک قطبی مقاومتی غیرخطی است که مشخصه $V-i$ آن داده شده است. اگر ولتاژ اولیه خازن برابر -1 ولت باشد، چه مدت طول می کشد تا ولتاژ خازن صفر شود؟



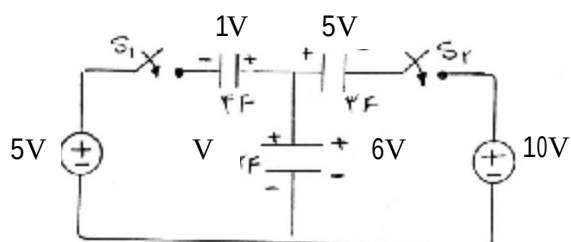
(1) $\ln \frac{4}{3} \text{ sec}$

(2) $\ln \frac{3}{2} \text{ sec}$

(3) $\ln 2 \text{ sec}$

(4) $\ln 3 \text{ sec}$

۸- کلیدهای S_1 و S_2 در مدار شکل زیر به طور همزمان بسته می شوند. ولتاژ V دو سر خازن $2 \mu\text{F}$ بعد از بسته شدن کلیدها کدام است؟



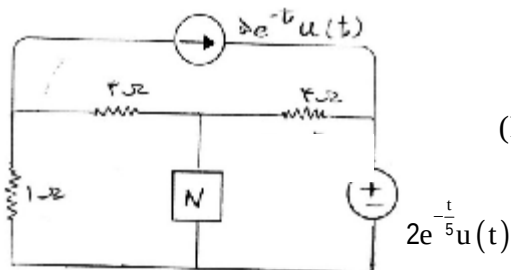
(1) 3

(2) 4

(3) 6

(4) 9

۹- در مدار شکل زیر، همه ی ولتاژها و جریان ها بعد از مدت زمان طولانی 20 ثانیه تقریباً صفر می شوند. اگر مدت زمان طولانی چهار برابر بزرگترین ثابت زمانی ولتاژها و جریان ها باشد، آنگاه:



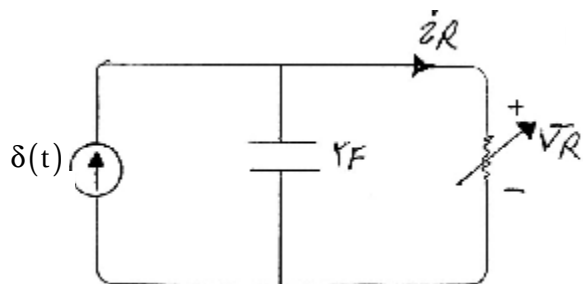
(1) N یک خازن با مقدار حداکثر $\frac{5}{2} \text{ F}$ است.

(2) یک مقاومت خطی با مقدار دلخواه R اهم است. ($R \neq -2$)

(3) N یک سلف با مقدار مینیمم 10 H است.

(4) مورد 1 و 2.

۱۰- در مدار شکل زیر، مقاومت غیرخطی با معادله‌ی $i_R = V_R^2 + 2V_R$ توصیف می‌شود. پاسخ ضربه V_R این



مدار کدام است؟

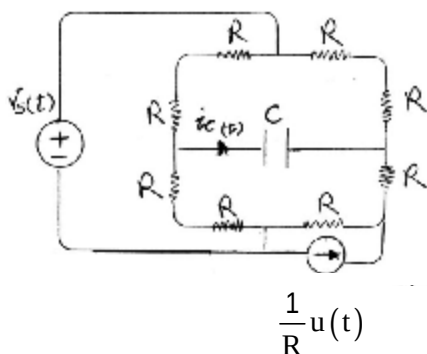
$$(1) \frac{2}{e^{t+Ln5} + 1}$$

$$(2) \frac{2}{e^{t+Ln5} - 1}$$

$$(3) \frac{2}{e^{t-Ln5} - 1}$$

$$(4) \frac{2}{e^{t-Ln5} + 1}$$

۱۱- مدار شکل زیر در $t=0$ در حالت صفر فرض می‌شود. جریان $i_C(t)$ گذرنده از خازن در این مدار عبارت



است از:

$$(1) -\frac{1}{4R} e^{\frac{t}{RC}} u(t)$$

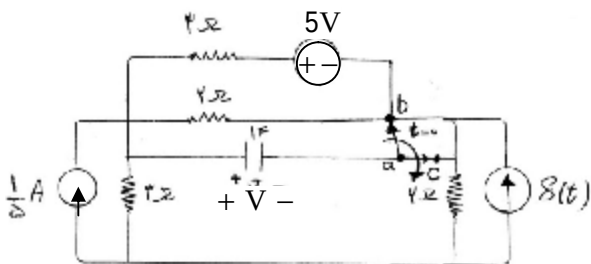
$$(2) -\frac{1}{2R} e^{\frac{t}{2RC}} u(t)$$

$$(3) -\frac{1}{4R} e^{\frac{t}{2RC}} u(t)$$

(4) بدون داشتن ورودی $V_s(t)$ این جریان قابل محاسبه نیست.

۱۲- در مدار شکل زیر کلید S برای مدت طولانی در وضعیت ab قرار دارد. در لحظه $t=0$ کلید را به

وضعیت ac می‌چرخانیم. ولتاژ $V(t)$ برای $t > 0$ برابر است با:



$$(1) e^{\frac{t}{5}} + \frac{3}{5}$$

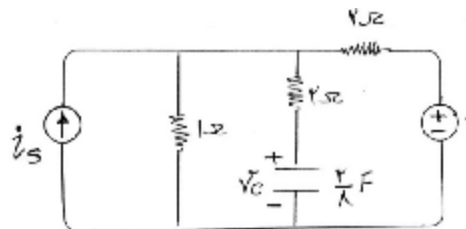
$$(2) \frac{12}{5} e^{\frac{t}{5}} + \frac{3}{5}$$

$$(3) 2e^{\frac{t}{5}} + \frac{3}{5}$$

$$(4) \frac{7}{5} e^{\frac{t}{5}} + \frac{3}{5}$$

۱۳- در مدار شکل زیر اگر ولتاژ اولیه خازن چهار ولت ($V_c(0^-) = 4V$) باشد به ازای چه رابطه‌ای بین منابع

ثابت i_s, V_s ، خازن در $t > 0^-$ هرگز شارژ و دشارژ نمی‌شود؟



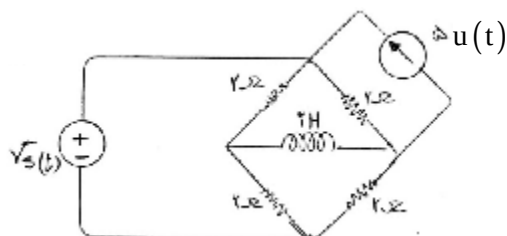
$$V_s = -2i_s \quad (1)$$

$$V_s + 2i_s > 4 \quad (2)$$

$$V_s + 2i_s > 12 \quad (3)$$

$$V_s + 2i_s = 12 \quad (4)$$

۱۴- در مدار شکل زیر $i_L(t)$ برای زمان‌های $t \geq 0$ از کدام گزینه به دست می‌آید؟



$$i_L(t) = 7/5 e^{-t} u(t) \quad (1)$$

$$i_L(t) = 2/5 (1 - e^{-t}) u(t) \quad (2)$$

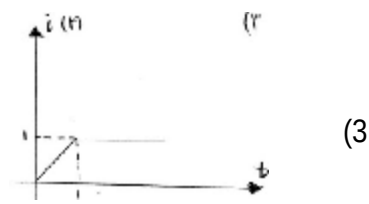
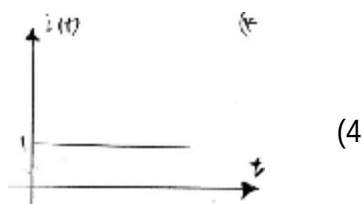
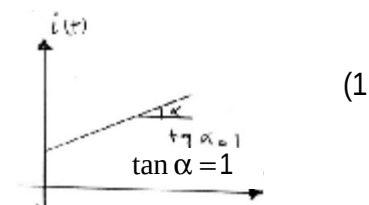
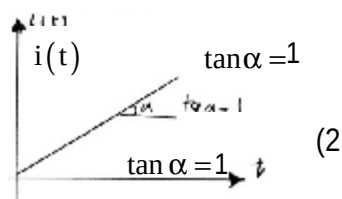
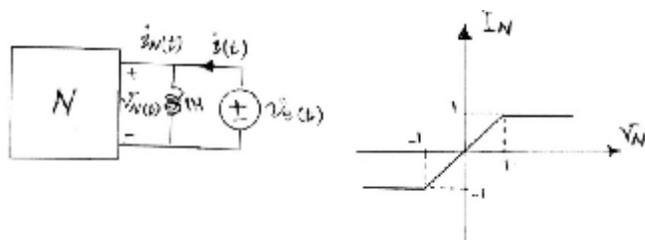
$$i_L(t) = (7/5 - 5e^{-t}) u(t) \quad (3)$$

$$i_L(t) = (7/5 - 2/5 e^{-t}) u(t) \quad (4)$$



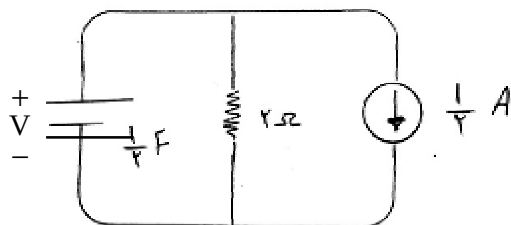
۱۵- منحنی مشخصه شبکه یک قطبی N به صورت زیر است. چنانچه ولتاژ ورودی $V_s(t)$ پله واحد باشد،

مقدار $i(t)$ به کدام صورت خواهد بود؟



۱۶- انرژی منبع جریان مدار شکل زیر در مدتی که ولتاژ خازن از مقدار اولیه ۴ ولت به مقدار ۱ ولت می‌رسد

کدام است؟ ($\ln 25$; 0/92)



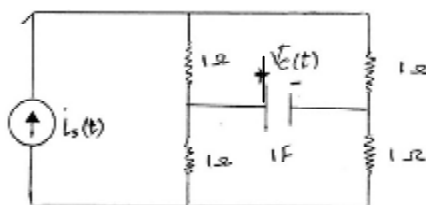
(1) $2/71$ ژول می‌دهد.

(2) $1/04$ ژول می‌دهد.

(3) $3/75$ ژول می‌گیرد.

(4) $1/04$ ژول می‌گیرد.

۱۷- معادله دیفرانسیل $V_C(t)$ در مدار شکل زیر کدام است؟ (خازن دارای ولتاژ اولیه است)



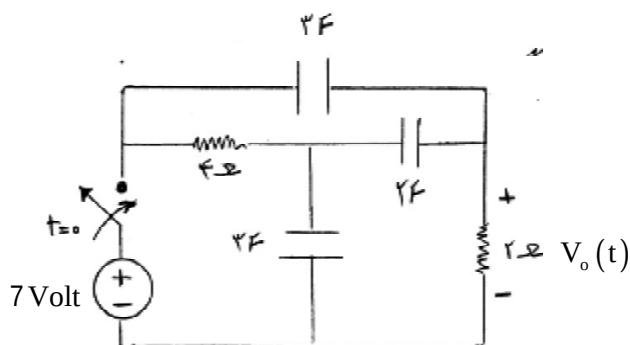
$$\frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{1}{2} V_C(t) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{1}{2} V_C(t) = i_s(t) \quad (3)$$

$$\frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) = i_s(t) \quad (4)$$

۱۸- در مدار شکل زیر کلید S در $t=0$ بسته می‌شود مقدار $V_o(0^+)$ کدام است؟ (خازن‌ها بدون ولتاژ اولیه هستند)



هستند)

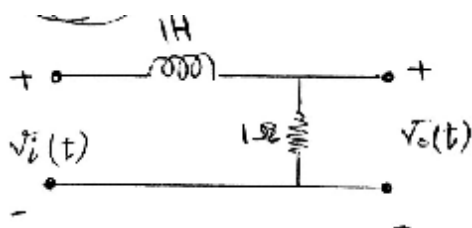
$$3 \quad (1)$$

$$4/5 \quad (2)$$

$$5 \quad (3)$$

$$6 \quad (4)$$

۱۹- در مدار شکل زیر، مقدار $V_o(t)$ کدام است؟

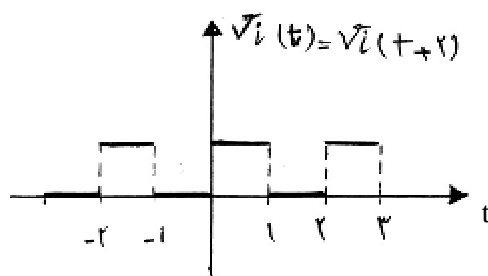


$$V_o(t) = \begin{cases} (1-e^{-1})e^{-t} & , \quad t > 0 \\ (1-e^{-2})e^{-2t} & , \quad t < 0 \end{cases} \quad (1)$$

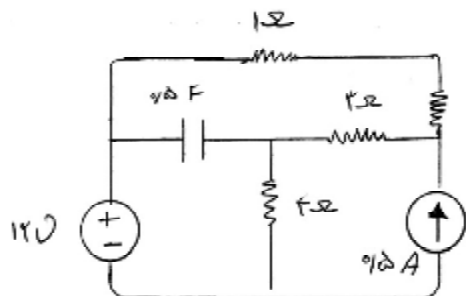
$$V_o(t) = \begin{cases} (1-e^{-1})e^{-t} & , \quad 0 < t < 1 \\ (1-e^{-2t})e^{-t} & , \quad 1 < t < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$V_o(t) = \begin{cases} \frac{e-1}{e^2-1} e^{-t} & , \quad 0 < t < 1 \\ 1 - \frac{e-1}{1-e^2} e^{-t} & , \quad 1 < t < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$V_o(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1-e^{-1}}{1-e^{-2}} e^{-t} & , \quad 0 < t < 1 \\ \frac{e-1}{1-e^{-2}} e^{-t} & , \quad 1 < t < 2 \end{cases} \quad (4)$$



۲۰- ثابت زمانی مدار شکل زیر چند ثانیه است؟



(1) $1/2$

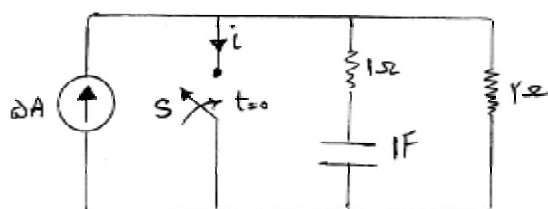
(2) 2

(3) $2/4$

(4) 5

۲۱- کلید S در مدار شکل زیر بعد از مدتی طولانی در $t=0$ بسته می‌شود. جریان گذرنده از این کلید در

$t=1\text{sec}$ چقدر است؟



(1) $5(1-e^{-1})$

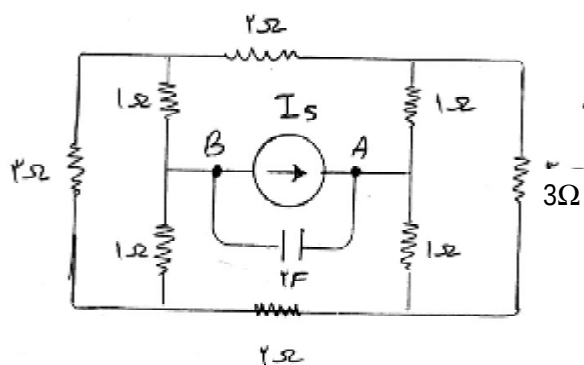
(2) $5(1+e^{-1})$

(3) $5(1-2e^{-1})$

(4) $5(1+2e^{-1})$

۲۲- در مدار شکل زیر ورودی I_s پله واحد بوده و خازن ۲ فارادی دارای ولتاژ اولیه صفر است. ولتاژ V_{AB} دو

سر خازن چقدر است؟



(1) $\frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{t}{2}} \right) u(t)$

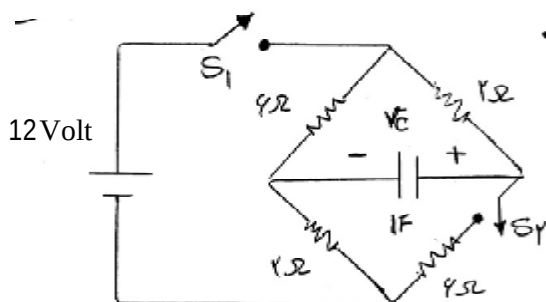
(2) $\frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{t}{4}} \right) u(t)$

(3) $2 \left(1 - e^{-\frac{t}{2}} \right) u(t)$

(4) $2 \left(1 - e^{-\frac{t}{4}} \right) u(t)$

۲۳- کلید S_1 در $t=0$ بسته می‌شود و کلید S_2 وقتی ولتاژ دو سرش ۹ ولت می‌شود، بسته خواهد شد. ولتاژ

$V_C(t)$ بعد از بسته شدن کلید S_2 کدام است؟ $(V_C(0^-)=0)$



$$6 + 1/8 e^{\frac{t-2/2}{3}} \quad (1)$$

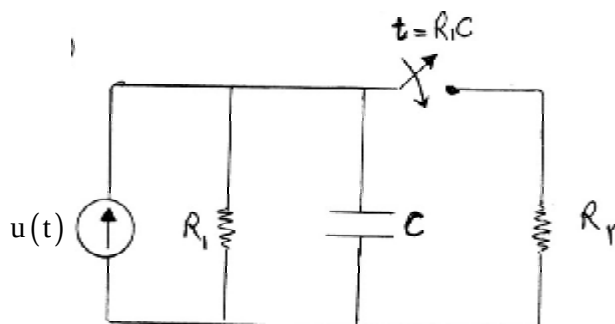
$$6 + 2/25 e^{\frac{t-1/89}{3}} \quad (2)$$

$$6 + 1/8 e^{\frac{t-2/2}{0.75}} \quad (3)$$

$$6 + 2/25 e^{\frac{t-1/89}{0.75}} \quad (4)$$

۲۴- چقدر باشد تا پس از وصل کلید در $t = R_1 C$ ، ولتاژ دو سر منبع جریان ثابت بماند؟ (ولتاژ اولیه

خازن صفر است)



$$\frac{R_1}{e-1} \quad (1)$$

$$\frac{R_1}{e} \quad (2)$$

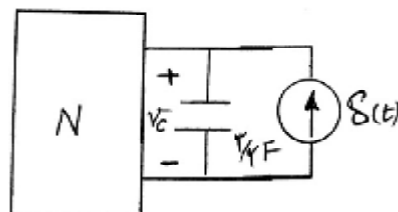
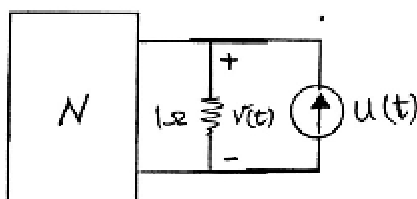
$$e R_1 \quad (3)$$

$$(e-1) R_1 \quad (4)$$

۲۵- در مدار شکل زیر N شامل عناصر خطی و تغییرناپذیر با زمان غیرفعال است. اگر ورودی منبع جریان

پله اعمال شود، پاسخ ولتاژ $V(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-4t})u(t)$ حاصل می‌شود. حال اگر مقاومت یک اهمی را با خازن

$\frac{3}{2}F$ تعویض کرده و ورودی ضربه اعمال کنیم، ولتاژ دو سر خازن برابر کدام خواهد بود؟



$$e^{-t}u(t) \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}e^{-t}u(t) \quad (2)$$

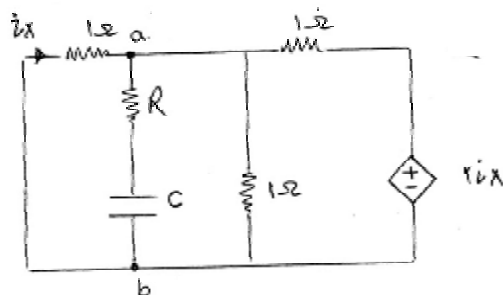
$$e^{-\frac{t}{2}}u(t) \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}u(t) \quad (4)$$

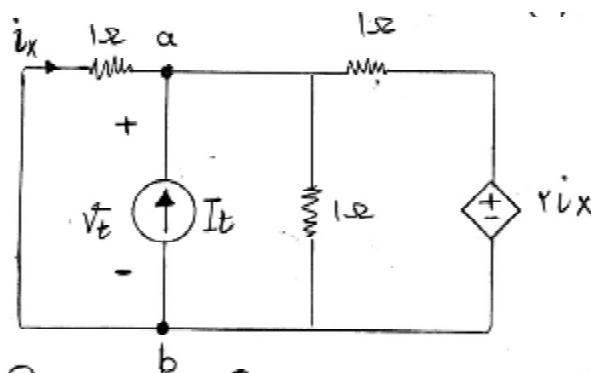
پاسخ تشریحی

۱- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

برای به دست آوردن ثابت زمانی مدار می‌توان منابع مستقل را برابر صفر قرار داد. در نتیجه شکل زیر به دست می‌آید:



برای یافتن مقاومت دیده شده از دو سر خازن می‌توان مقاومت معادل از دو سر a و b را به دست آورده و با مقاومت R جمع کرد. در نتیجه داریم:



$$\text{KCL}(a): I_t = \frac{V_t}{1} + \frac{V_t}{1} + \frac{V_t - 2i_x}{1} \xrightarrow{V_t = -i_x} I_t = 5V_t \rightarrow R_t = \frac{V_t}{I_t} = 0/2$$

بنابراین مقاومت معادل از دو سر خازن برابر است با:

$$R_{eq} = R + 0/2$$

ثابت زمانی مدار با خازن $\tau_1 = R_{eq}C$ و ثابت زمانی مدار با سلف $\tau_2 = \frac{L}{R_{eq}}$ است. چون $L = C$ می‌باشد، برای ثابت

ماندن ثابت زمانی باید:

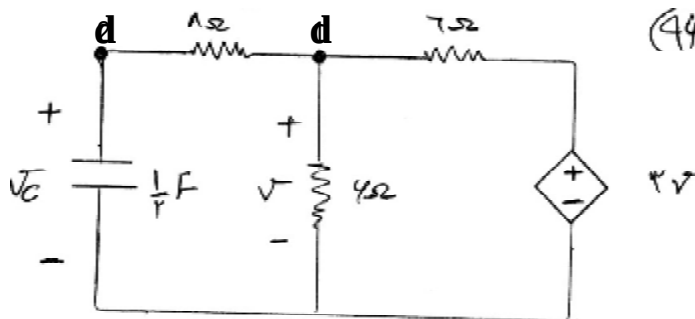
$$\tau_1 = \tau_2 \rightarrow R_{eq}C = \frac{L}{R_{eq}} \xrightarrow{L=C} R_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} \rightarrow R_{eq} = 1\Omega$$

بنابراین مقاومت R برابر است با:

$$R_{eq} = R + 0/2 = 1 \rightarrow R = 0/8\Omega$$

۲- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با KCL زدن در گره‌های مدار داریم:



$$KCL(1): \frac{V - V_C}{8} + \frac{V}{6} + \frac{V - 3V_C}{6} = 0 \rightarrow V = -3V_C$$

یعنی V و V_C دارای رابطه‌ی خطی هستند، پس می‌توان به جای V، نصف شدن V_C را در نظر گرفت. با KCL در گره 2 داریم:

$$KCL(2): \frac{1}{2} \frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C - V}{8} = 0 \xrightarrow{V = -3V_C} \frac{dV_C}{dt} + V_C = 0$$

اگر فرض کنیم $t_0 = 0$ است داریم:

$$V_C(t) = Ke^{-t} \rightarrow K = V_C(t=0) = 2 \rightarrow V_C(t) = 2e^{-t}$$

$$V_C(t=0) = 2$$

اگر t_1 زمانی باشد که $V_C(t)$ نصف می‌شود، یعنی:

$$V_C(t_1) = \frac{V_C(t=0)}{2} = 1 \rightarrow 2e^{-t_1} = 1 \rightarrow e^{-t_1} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{Ln}} t_1 = \text{Ln}2$$

۳- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با توجه به جهت منابع جریان، تغییر ولتاژ اولیه‌ی خازن‌ها برابر است با:

$$V_{C1} = \frac{1}{C_1} \int_{0^-}^{0^+} i_{C1}(t) dt = 2 \int_{0^-}^{0^+} -\alpha \delta(t) dt = -2\alpha$$

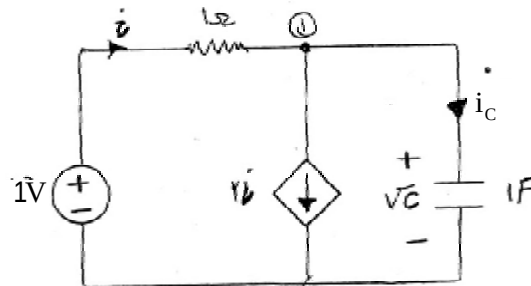
$$V_{C2} = \frac{1}{C_2} \int_{0^-}^{0^+} i_{C2}(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \beta \delta(t) dt = \beta$$

پس از بستن کلید دو خازن موازی می‌شوند و ولتاژ آن‌ها یکسان می‌شود. بنابراین:

$$V_{C_t} = \frac{C_1 V_{C_1} + C_2 V_{C_2}}{C_1 + C_2} = \frac{-\alpha + \beta}{0/5 + 1} = 1 \text{ Volt} \rightarrow \beta = \alpha + \frac{3}{2}$$

۴- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

در $t=0$ کلید K_1 بسته می‌شود و مدار به صورت زیر تبدیل می‌شود:



$$\text{KCL}(1): i_C + 2i - i = 0 \rightarrow C \frac{dV_C}{dt} + i = 0(I)$$

$$i = \frac{1 - V_C}{1} = 1 - V_C \xrightarrow{(I)} \frac{dV_C}{dt} + 1 - V_C = 0 \rightarrow \frac{dV_C}{dt} - V_C = -1$$

جواب این معادله با توجه به صفر بودن ولتاژ اولیه خازن به صورت زیر است:

$$V_C(t) = -e^t + 1$$

پس جریان گذرنده از خازن برابر است با:

$$i_C = C \frac{dV_C(t)}{dt} = -e^t$$

و در لحظه $t=1^-$ مقدار آن $i_C(1^-) = -e^1$ است.

در $t=1^+$ کلید K_2 بسته می‌شود، با توجه به پیوسته بودن ولتاژ خازن می‌توان گفت:

$$V_C(1^+) = 1 - e^1 = 1 - e$$

بنابراین جریان عبوری از مقاومت $\frac{1}{2}$ اهمی برابر است با:

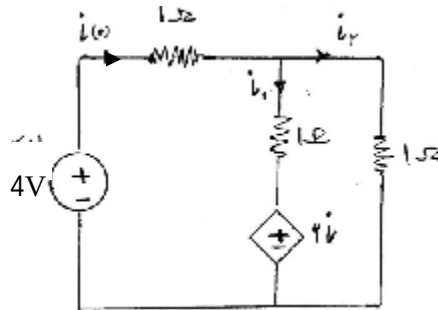
$$i_1 = \frac{V_C(1^+)}{\frac{1}{2}} = 2(1 - e)$$

این جریان فقط جریان خازن را تغییر می‌دهد. به عبارت دیگر، با توجه به ثابت ماندن ولتاژها، جریان شاخه‌های دیگر تغییر نمی‌کند. بنابراین جریان خازن به مقدار $2(e-1)$ کم می‌شود، یعنی:

$$i_C(1^+) - i_C(1^-) = -i_1 = 2(e-1)$$

۵- گزینه ی «۱» صحیح است.

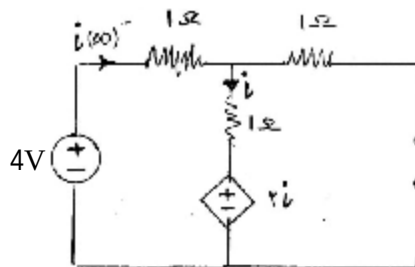
برای استفاده از رابطه پاسخ کامل در مدارهای مرتبه اول باید مقدار اولیه، مقدار نهایی و ثابت زمانی مدار را به دست آوریم. برای مقدار اولیه در $t=0$ ، خازن اتصال کوتاه است، پس داریم:



$$\begin{cases} \text{KCL: } i = i_1 + i_2 \\ \text{KVL: } i_2 = i_1 + 2i = 3i_1 + 2i_2 \rightarrow i_2 = -3i_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_1 = -\frac{1}{2}i \\ i_2 = \frac{3}{2}i \end{cases}$$

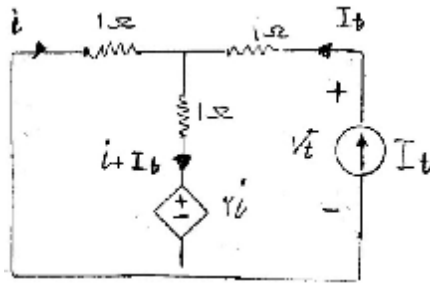
$$\text{KVL: } 4 = i + i_2 = \frac{5}{2}i \rightarrow i(0) = \frac{8}{5} = 1.6 \text{ A}$$

برای مقدار نهایی که خازن مدار باز است داریم:



$$\text{KVL: } 4 = i + i + 2i = 4i \rightarrow i(\infty) = 1 \text{ A}$$

برای ثابت زمانی هم مقاومت معادل از دو سر خازن را به دست می‌آوریم که برای این منظور از منبع تست I_1 استفاده می‌کنیم. در ابتدا منابع مستقل را صفر می‌کنیم، در نتیجه:



KVL در مش سمت چپ: $i + i + I_t + 2i = 0 \rightarrow i = -\frac{I_t}{4}$

KVL در مش بیرونی: $V_t = I_t - i = \frac{5}{4}I_t \rightarrow R_{eq} = \frac{V_t}{I_t} = \frac{5}{4}\Omega$

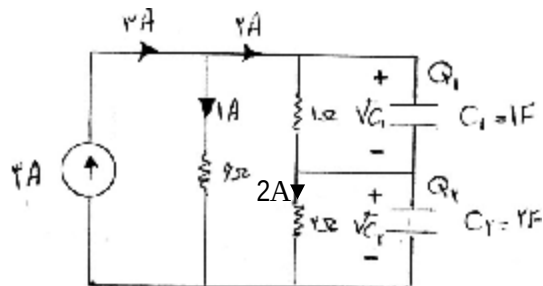
بنابراین:

$$\tau = R_{eq}C = \frac{5}{4} \times 2 = 2/5s \rightarrow i(t) = (1/6 - 1)e^{-\frac{t}{2/5}} + 1 = 1 + 0/6e^{-0/4t}$$

۶- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

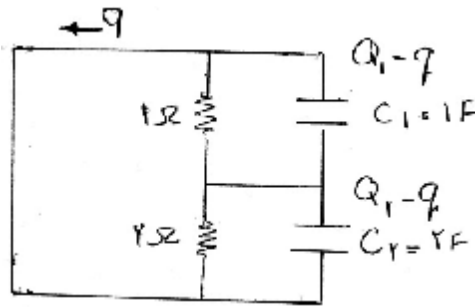
برای $t < 0$ مدار به صورت زیر است:

در این حالت خازن‌ها اتصال باز هستند.



$$\begin{cases} V_{C1} = 2 \times 1 = 2V \rightarrow Q_1 = C_1 V_{C1} = 1 \times 2 = 2C \\ V_{C2} = 2 \times 2 = 4V \rightarrow Q_2 = C_2 V_{C2} = 2 \times 4 = 8C \end{cases}$$

و در $t = 0$ با بسته شدن کلید S داریم:



بار q ، مقدار باری است که در $t=0$ بین دو خازن C_2 و C_1 جابه‌جا می‌شود تا قانون ولتاژ کیرشهف برقرار شود. در این زمان $t=0$ داریم:

$$\frac{Q_2 - q}{C_2} + \frac{Q_1 - q}{C_1} = 0 \rightarrow \frac{8 - q}{2} + \frac{2 - q}{1} = 0 \rightarrow q = 4C$$

گذشتن بار $q = 4C$ معادل جریان $i(t) = -4\delta(t)$ در لحظه صفر است. در نتیجه گزینه 1 یا 4 صحیح است.

برای $t > 0$ ثابت زمانی مدار با توجه به موازی شدن مقاومت‌ها و خازن‌ها برابر است با:

$$R_{eq} = 1 \parallel 2 = \frac{2}{3} \Omega \rightarrow \tau = R_{eq} C_{eq} = \frac{2}{3} \times 3 = 2 \text{ sec}$$

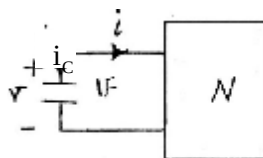
$$C_{eq} = 1 + 2 = 3F$$

بنابراین گزینه «4» صحیح است.

نکته: عبور بار q کولن در یک لحظه در یک مسیر خاص، معادل جریان $q\delta(t)$ می‌باشد.

۷- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با توجه به شکل مدار مرتبه اول غیرخطی است، پس باید معادله دیفرانسیل آن را بنویسیم و حل کنیم:

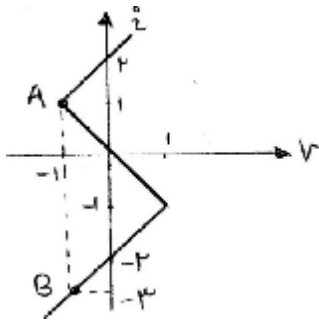


$$i_C + i = 0 \rightarrow \frac{dV}{dt} + i = 0 \rightarrow i = -\frac{dV}{dt}$$

براساس رابطه فوق می‌توان گفت، در جریان‌های مثبت، ولتاژ همواره کاهش می‌یابد و برای جریان‌های منفی، ولتاژ

افزایش می‌یابد. پس برای این که ولتاژ از مقدار 1- ولت به صفر افزایش پیدا کند، باید جریان مقداری منفی داشته باشد.

بنابراین از روی نمودار داده شده، مقدار $V = -1 \text{ Volt}$ به ازای دو مقدار جریان به دست می‌آید:



$$V = -1V \rightarrow \begin{cases} \text{نقطه A: } i = 1A \\ \text{نقطه B: } i = -3A \end{cases}$$

لذا نقطه B با شرایط فوق قابل قبول است.

پس از نقطه $(-1V, -3A)$ به $(0V, -2A)$ حرکت می‌کنیم و رابطه ولتاژ - جریان بین این دو نقطه کار عبارت است از:

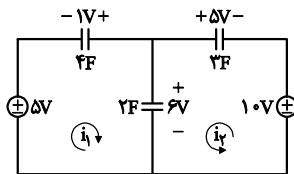
$$i = V - 2$$

بنابراین:

$$\frac{dV}{dt} + i = \frac{dV}{dt} + V - 2 = 0 \rightarrow \int_{V=-1}^{V=0} \frac{dV}{2-V} = \int_0^t dt \rightarrow t = -\ln(2-V) \Big|_{V=-1}^{V=0} = \ln 3 - \ln 2 \rightarrow t = \ln \frac{3}{2} \text{ sec}$$

۸- گزینه ی «۴» صحیح است.

اگر جریان مش‌ها i_1 و i_2 در نظر بگیریم و KVL را در آن‌ها بنویسیم داریم:



$$\text{KVL (1): } -1 + \frac{1}{4} \int_0^t i_1 dt + 6 + \frac{1}{2} \int_0^t (i_1 + i_2) dt = 5$$

$$\text{KVL (2): } -5 + \frac{1}{3} \int_0^t i_2 dt + 6 + \frac{1}{2} \int_0^t (i_1 + i_2) dt = 10$$

با فرض $q_2 = \int_0^t i_2 dt$, $q_1 = \int_0^t i_1 dt$ داریم:

$$\begin{cases} \frac{1}{4} q_1 + \frac{1}{2} q_1 + \frac{1}{2} q_2 = 0 \\ \frac{1}{3} q_2 + \frac{1}{2} q_1 + \frac{1}{2} q_2 = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} q_1 + \frac{1}{2} q_2 = 0 \\ \frac{1}{2} q_1 + \frac{5}{6} q_2 = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q_1 = -12 \\ q_2 = 18 \end{cases}$$

بنابراین برای V داریم:

$$V = V(0) + \frac{1}{2} \int_0^t (i_1 + i_2) dt = 6 + \frac{1}{2} (q_1 + q_2) = 6 + 3 = 9 \text{ Volt}$$

روش دوم: استفاده از قانون بقای بار

قبل از اتصال کلیدها، مجموعه بار سه خازن برابر است با:

$$Q = q_{o1} + q_{o2} + q_{o3} = C_1 V_1(0) + C_2 V_2(0) + C_3 V_3(0) = (4 \times 1) + (2 \times 6) + (3 \times 5) = 4 + 12 + 15 = 31C$$

بعد از اتصال کلیدها، مجموع بار سه خازن عبارت است از:

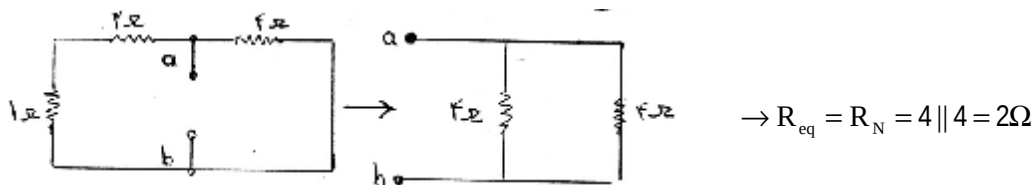
$$Q_2 = C_1 V_1 + C_2 V_2 + C_3 V_3 = 4(V - 5) + 2V + 3(V - 10) = 9V - 50$$

با توجه به قانون بقای بار:

$$Q_1 = Q_2 \rightarrow 9V - 50 = 31 \rightarrow 9V = 81 \rightarrow V = 9 \text{ Volt}$$

۹- گزینه ی «۴» صحیح است.

مقاومت معادل از دو سر N با صفر کردن منابع مستقل به صورت زیر به دست می آید:



مدت زمان طولانی 20 ثانیه چهار برابر بزرگترین ثابت زمانی مدار است، پس بزرگترین ثابت زمانی مدار 5 ثانیه است.

$$\tau_{\max} = 5 \text{ sec}$$

که این ثابت زمانی می تواند مربوط به مدار مرتبه اول خازنی یا سلفی باشد.

اگر مدار خازنی باشد:

$$\tau_{\max} = R_{eq} C_{\max} = 5 \rightarrow C_{\max} = \frac{5}{2} F$$

$$\tau_{\max} = \frac{L_{\max}}{R_{eq}} = 5 \rightarrow L_{\max} = 10H$$

همچنین اگر هیچ سلف یا خازنی هم در کار نباشد، N یک مدار مقاومتی است که ثابت زمانی مدار به وسیله بزرگترین

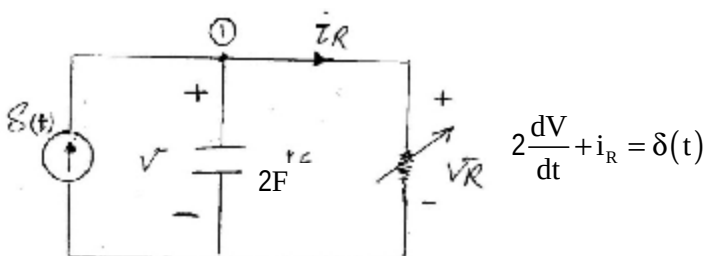
ثابت زمانی منابع ورودی تعیین می شود که منبع جریان دارای ثابت زمانی 1 ثانیه و منبع ولتاژ دارای ثابت زمانی 5 ثانیه

است در نتیجه بزرگترین ثابت زمانی مدار 5 ثانیه است و پس از 20 ثانیه (چهار برابر بزرگترین ثابت زمانی مدار) کلیه منابع مدار صفر می‌شوند و همه ولتاژها و جریان‌های مدار صفر خواهد شد.

در نتیجه موارد «1» و «2» صحیح است.

۱۰- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

روش اول: با نوشتن KCL در گره 1 داریم:



با توجه به این که $V = V_R$ است پس $i_R = V^2 + 2V$ داریم:

$$2 \frac{dV}{dt} + V^2 + 2V = \delta(t)$$

اثر ورودی ضربه، افزایش ولتاژ خازن در لحظه $t = 0^+$ است و پس از آن ورودی صفر می‌شود و پاسخ ضربه همان پاسخ ورودی صفر با شرایط اولیه $V(0^+)$ است.

با توجه به کران‌دار بودن ولتاژ خازن، اگر از طرفین رابطه فوق در فاصله 0^- تا 0^+ انتگرال بگیریم داریم:

$$2 \int_{0^-}^{0^+} \frac{dV}{dt} dt + \int_{0^-}^{0^+} V^2 dt + \int_{0^-}^{0^+} 2V dV = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt$$

$$\rightarrow 2 \left(V(0^+) - V(0^-) \right) = 1 \rightarrow V(0^+) = \frac{1}{2}$$

و برای $t > 0$ معادله دیفرانسیل بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} 2\frac{dV}{dt} + V^2 + 2V = 0 \\ V(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow 2\frac{dV}{V(V+2)} = -dt \rightarrow \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V+2}\right)dV = -dt$$

$$\xrightarrow{\int_0^t} \left[\ln V - \ln(V+2) \right]_{V(0)}^{V(t)} = -t \Big|_0^t = -t \rightarrow \ln \frac{V}{V+2} \Big|_{\frac{1}{2}}^{V(t)} = -t \rightarrow \ln \frac{5V(t)}{V(t)+2} = -t \rightarrow \frac{5V(t)}{V(t)+2} = e^{-t}$$

$$\rightarrow V(t) = \frac{2e^{-t}}{5+e^{-t}} = \frac{2}{5e^t-1} = \frac{2}{e^{t+\ln 5}-1}$$

روش دوم: جهش ولتاژ خازن به علت وجود ورودی ضربه برابر $\frac{1}{C}$ می باشد.

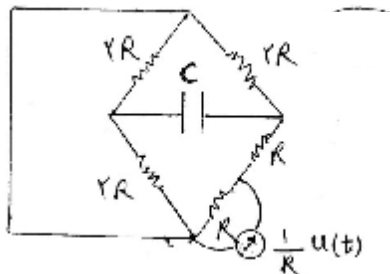
با توجه به $V_C(t) = V_R(t)$ می توان گفت:

$$V_R(t=0) = V_C(t=0) = \frac{1}{C} = \frac{1}{2} \text{ Volt}$$

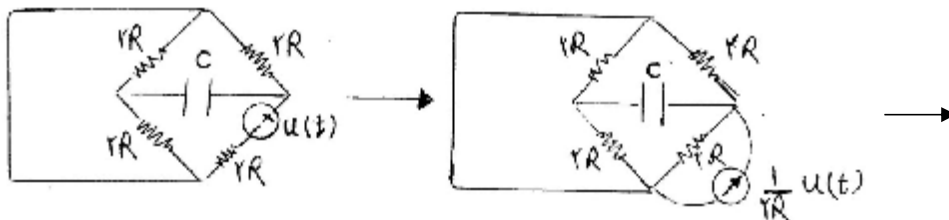
با قرار دادن $t=0$ در گزینه ها، فقط گزینه «2» در این شرط صدق می کند.

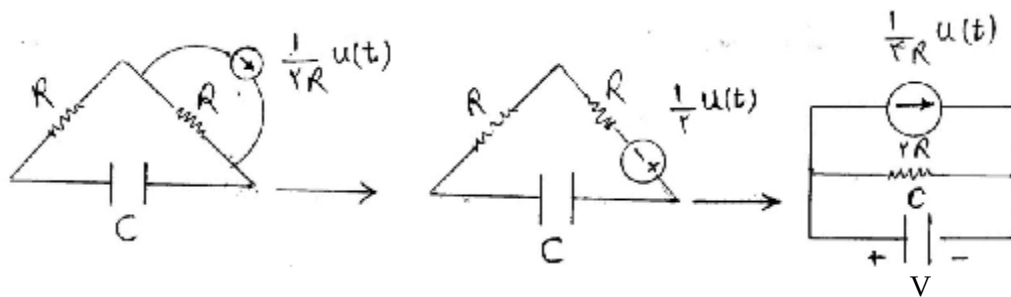
۱۱- گزینه ی «۳» صحیح است.

با استفاده از قضیه جمع آثار و باز کردن مدار جریان برای بررسی اثر منبع ولتاژ، به علت تقارن (پل و تستون) می توان گفت منبع ولتاژ V_s سهمی در جریان خازن ندارد، پس می توان آن را حذف کرد (اتصال کوتاه نمود) و مدار به شکل زیر در می آید:



با استفاده از تبدیل نورتن به تونن و بالعکس، مدار به صورت زیر ساده می شود:





در نهایت یک مدار RC داریم که ثابت زمانی آن $2RC$ است و ورودی ثابت آن $\frac{1}{4R}u(t)$ می باشد، بنابراین ولتاژ V

دو سر خازن با توجه به جهت منبع جریان چنین به دست می آید:

$$V = -(2R) \left(\frac{1}{4R} \right) \left(1 - e^{-\frac{t}{2RC}} \right) u(t) = -\frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{t}{2RC}} \right) u(t)$$

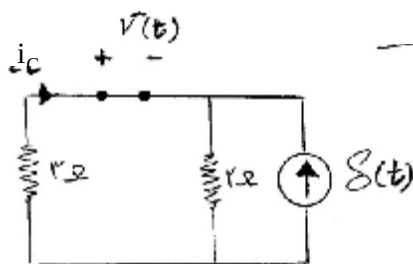
بنابراین جریان گذرنده از خازن برابر است با:

$$i_C(t) = C \frac{dV}{dt} = -\frac{C}{2} \left(\frac{1}{2RC} \right) \left(1 - e^{-\frac{t}{2RC}} \right) u(t) = -\frac{1}{4R} \left(1 - e^{-\frac{t}{2RC}} \right) u(t)$$

۱۲- گزینه ی «۱» صحیح است.

ورودی $\delta(t)$ شرایط پیوستگی ولتاژ خازن را ندارد، پس ورودی های غیر ضربه را صفر نموده و خازن را اتصال کوتاه

می کنیم تا جریانش را در $t=0^+$ به دست آوریم:



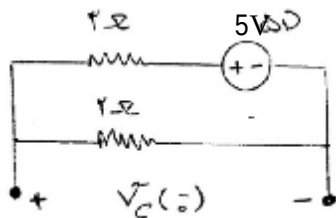
$$i_C(t=0^+) = \frac{-2}{3+2} \delta(t) = -\frac{2}{5} \delta(t)$$

بنابراین برای ولتاژ خازن در لحظه $t=0^+$ داریم:

$$V_C(0^+) = V_C(0^-) + \frac{1}{C} \int_0^{0^+} i_C(t) dt = \left(\frac{2}{2+3} \times 5 \right) + 1 \int_0^{0^+} -\frac{2}{5} \delta dt = \frac{8}{5}$$

که با استفاده از گزینه ها برای $t=0$ ، فقط در گزینه اول صادق است.

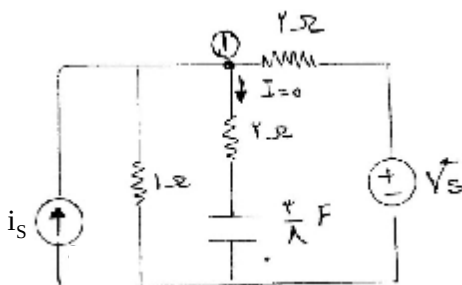
در محاسبات فوق، ولتاژ خازن در $t=0^-$ با توجه به مدار باز بودن خازن به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$V_C(0^-) = \frac{2}{2+3} \times 5 = 2 \text{ Volt}$$

۱۳- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

برای این که خازن شارژ و دشارژ نشود باید جریانی از آن نگذرد. برای این منظور ولتاژ نقطه 1 در شکل زیر باید همواره برابر ولتاژ اولیه خازن یعنی 4 ولت باشد. بنابراین با KCL زدن در گره 1 داریم:



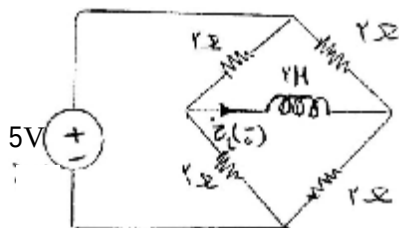
$$V_1 = 4 \text{ Volt}$$

$$\text{KCL: } -i_s + \frac{4}{1} + \frac{4 - V_s}{2} = 0 \rightarrow V_s + 2i_s = 12$$

۱۴- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با توجه به گزینه‌ها دیده می‌شود به ازای $t=0$ ، مقدار اولیه همه گزینه‌ها متفاوت است. پس می‌توان $i_L(0^+)$ را به دست آورد و در گزینه‌ها چک کرد.

به دلیل پیوسته بودن جریان سلف می‌توان گفت $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ پس مدار را در $t=0^-$ رسم می‌کنیم:



با توجه به تقارن موجود در مدار (پل وتستون)، جریان گذرنده از سلف در $t=0^-$ برابر صفر است ($i_L(0^-) = 0$) و این

شرط فقط در گزینه «2» صدق می‌کند.

۱۵- گزینهی «۱» صحیح است.

با توجه به مشخص نبودن جهت i_N ، طبق استاندارد جهت آن را به سمت چپ می‌گیریم. پس با KCL زدن در گره بالایی داریم:

$$i(t) = i_L(t) + i_N(t) = \left(i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t V_L(t) dt \right) + i_N(t)$$

به علت این که قبل از $t=0$ منبعی وجود نداشته تا سلف را شارژ کند پس $i_L(0)=0$ است. سلف با V_S موازی است، در نتیجه برای $t \geq 0$ ، $V_L(t) = u(t)$ می‌باشد. همچنین V_N با V_S موازی می‌باشد پس برای $t \geq 0$ ، $V_N = 1V$ است و از روی مشخصه، به ازای $V_N = 1V$ ، $i_N = 1A$ می‌شود. بنابراین:

$$i(t) = 0 + \int_0^t u(t) dt + 1 = r(t) + 1$$

۱۶- گزینهی «۴» صحیح است.

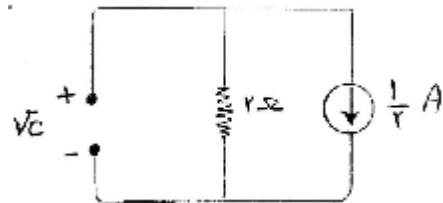
انرژی منبع جریان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$W = \int_0^t V(t) \cdot i(t) dt = \int_0^t \frac{1}{2} V_C(t) dt$$

برای ولتاژ خازن با توجه به این مقدار اولیه آن 4 ولت، مقدار نهایی 1- ولت و ثابت زمانی $\tau = 2 \times \frac{1}{2} = 1s$ است داریم:

$$V_C(t) = (4 - (-1))e^{-t} - 1 = 5e^{-t} - 1$$

مقدار نهایی ولتاژ خازن به صورت زیر به دست آمده است:



$$V_C(\infty) = -\frac{1}{2} \times 2 = -1V$$

اگر زمانی که ولتاژ خازن به یک ولت می‌رسد را t_1 در نظر بگیریم داریم:

$$V_C(t_1) = 5e^{-t_1} - 1 = 1 \rightarrow e^{-t_1} = \frac{2}{5} \xrightarrow{\text{Ln}} t_1 = \text{Ln} 2/5 = 0.92 \text{ sec}$$

بنابراین:

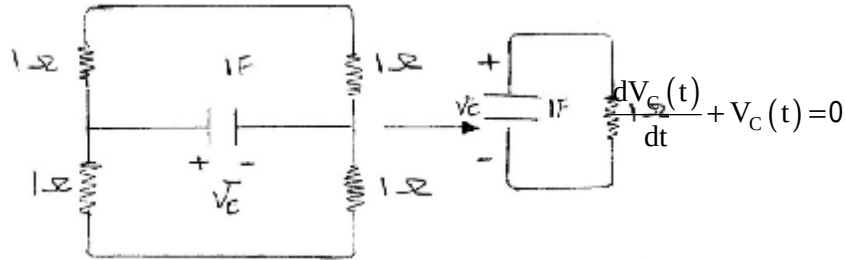
$$\begin{aligned} W &= \int_0^{t_1} \frac{1}{2} (5e^{-t} - 1) dt = \frac{1}{2} \int_0^{0.92} (5e^{-t} - 1) dt = \frac{1}{2} (-5e^{-t} - t) \Big|_0^{0.92} \\ &= -2/5 e^{-0.92} - \frac{0.92}{2} + \frac{5}{2} = -\frac{2/5}{2/5} + 2/5 - 0.46 = 1/4 \text{ J} \end{aligned}$$

که چون مثبت است یعنی 1/04 ژول انرژی گرفته است.

۱۷- گزینه ی «۲» صحیح است.

اگر منبع جریان $i_s(t)$ را در نظر بگیریم، به علت متعادل بودن مدار مقاومتی (پل وتستون) هیچ سهمی از منبع جریان $i_s(t)$ از خازن نمی‌گذرد، پس تغییر ولتاژ دو سر خازن ناشی از ولتاژ اولیه آن است. بنابراین یک مدار RC به صورت

زیر داریم:



۱۸- گزینه ی «۳» صحیح است.

در لحظه بسته شدن کلید S، خازن‌ها اتصال کوتاه می‌باشند پس در این لحظه خازن‌ها با منبع ولتاژ 7 ولتی سری می‌شوند و بار یکسان q از تمام خازن‌ها می‌گذرد و موجب افزایش ولتاژ خازن‌ها می‌شود. با اعمال KVL برای حلقه شامل سه خازن و منبع ولتاژ داریم:

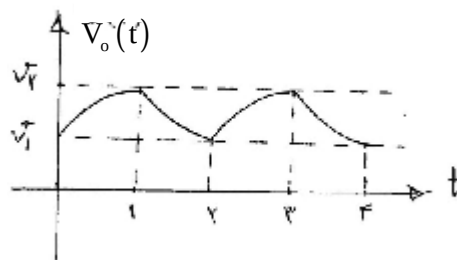
$$\text{KVL: } \frac{q}{3} + \frac{q}{2} + \frac{q}{3} = 7 \rightarrow \frac{7q}{6} = 7 \rightarrow q = 6$$

ولتاژ V_0 در لحظه $t = 0^+$ برابر مجموع ولتاژ دو خازن 2 و 3 فارادی است، در نتیجه:

$$V_0(0^+) = \frac{q}{3} + \frac{q}{2} = 2 + 3 = 5 \text{ Volt}$$

۱۹- گزینه ی «۴» صحیح است.

در حالت دائمی ولتاژ خروجی بین دو مقدار V_1 و V_2 نوسان می‌کند. اگر مبدأ زمان را در حالت دائمی وقتی که ولتاژ V_1 شروع می‌شود در نظر بگیریم داریم:



$$0 \leq t \leq 1 \rightarrow V_o(t) = (V_1 - 1)e^{-t} + 1 = V_1 e^{-t} + (1 - e^{-t})$$

$$1 \leq t \leq 2 \rightarrow V_o(t) = (V_2 - 0)e^{-(t-1)} = V_2 e^{-(t-1)}$$

با استفاده از پیوسته بودن شکل موج خروجی در زمان‌های $t=1$ و $t=2$ می‌توان گفت:

$$\begin{cases} V_o(t=1) = V_2 \rightarrow V_1 e^{-1} + 1 - e^{-1} = V_2 \\ V_o(t=2) = V_1 \rightarrow V_2 e^{-1} = V_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_1 = \frac{e^{-1}(1 - e^{-1})}{1 - e^{-2}} \\ V_2 = \frac{1 - e^{-1}}{1 - e^{-2}} \end{cases}$$

با جایگذاری مقادیر به دست آمده در روابط اولیه داریم:

$$0 \leq t \leq 1: V_o(t) = \frac{e^{-1}(1 - e^{-1})}{1 - e^{-2}} e^{-t} + 1 - e^{-t} = 1 - \frac{1 - e^{-1}}{1 - e^{-2}} e^{-t}$$

$$1 \leq t \leq 2: V_o(t) = \frac{1 - e^{-1}}{1 - e^{-2}} e^{-(t-1)} = \frac{e - 1}{1 - e^{-2}} e^{-t}$$

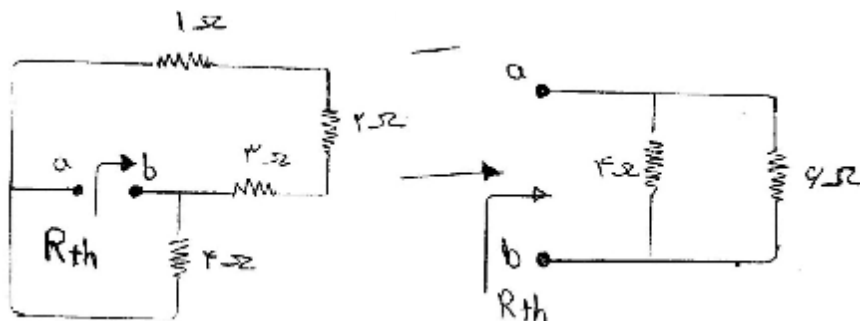
بنابراین:

$$V_o(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1 - e^{-1}}{1 - e^{-2}} e^{-t} & , 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{e - 1}{1 - e^{-2}} e^{-t} & , 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

۲۰- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

برای به دست آوردن مقاومت معادل از دو سر خازن، منبع ولتاژ را اتصال کوتاه و منبع جریان را اتصال باز می‌کنیم. در

نتیجه داریم:



$$R_{th} = 4 \parallel 6 = 2.4 \Omega$$

بنابراین ثابت زمانی برابر است با:

$$T = R_{th} C = 2.4 \times 0.5 = 1.2 \text{ sec}$$

۲۱- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

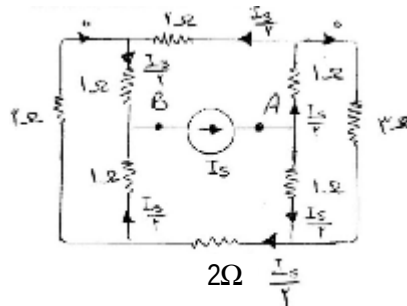
چون کلید برای مدت طولانی بسته بوده، پس مدار به حالت دائمی رسیده است و خازن با ولتاژ $2 \times 5 = 10 \text{ Volt}$ پر شده و مدار باز می‌شود. در لحظه $t = 0$ که کلید بسته می‌شود، مقاومت ۲ اهمی اتصال کوتاه می‌شود. همچنین خازن سری با مقاومت یک اهمی نیز اتصال کوتاه می‌گردد، پس جریان منبع جریان ۵ آمپر از کلید می‌گذرد و خازن یک فارادی با ولتاژ اولیه ۱۰ ولتی نیز در آن دشارژ می‌شود. بنابراین جریان کلید S برابر است با:

$$i = 5 + 10e^{-t}$$

که در $t = 1$ مقدار آن برابر $5 + 10e^{-1}$ است.

۲۲- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

مقاومت معادل از دو سر خازن را به دست می‌آوریم. با توجه به تقارن مدار، جریان I_s به‌طور مساوی بین مقاومت‌های یک اهمی تقسیم می‌شود و از مقاومت‌های ۳ اهمی نیز جریانی نمی‌گذرد. در نتیجه:



$$\text{KVL: } V_{AB} = \frac{I_s}{2} + 2 \times \frac{I_s}{2} + \frac{I_s}{2} = 2I_s \rightarrow R_{th} = \frac{V_{AB}}{I_s} = 2\Omega$$

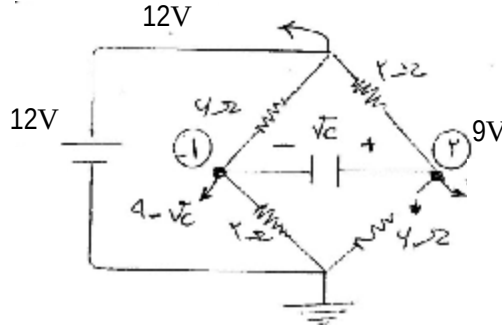
پس ثابت زمانی مدار $T = R_{th}C = 4 \text{ sec}$ است.

در این حالت مدار مانند یک مدار RC موازی با منبع جریان I_s است، پس:

$$V_{AB} = R_{th}I_s \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) = 2 \times 1 \left(1 - e^{-\frac{t}{4}} \right) = 2 \left(1 - e^{-\frac{t}{4}} \right)$$

۲۳- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

به دلیل پیوستگی ولتاژ خازن، ولتاژ اولیه‌ی خازن بعد از بسته شدن کلید S_2 برابر است با ولتاژ آن در لحظه‌ای قبل از بسته شدن کلید S_2 و زمانی که ولتاژ دو سر کلید S_2 برابر 9 ولت است. پس در شکل زیر داریم:



$$\text{KCL در گره مرکب 1 و 2: } \frac{9 - V_C}{2} + \frac{9 - V_C - 12}{6} + \frac{9 - 12}{2} = 0 \rightarrow V_C = 3/75 \text{ Volt}$$

اگر $t = t_1$ زمانی باشد که کلید S_2 بسته می‌شود، در این زمان توان e برابر صفر است و حاصل $V_C = 3/75 \text{ V}$ می‌باشد.

این شرط فقط در گزینه «2» برای $t_1 = 1/89 \text{ sec}$ برقرار است.

$$V_C(t = t_1) = 6 - 2/25 e^{\frac{t-1/89}{3}} \Big|_{t=1/89 \text{ sec}} = 3/75 \text{ Volt}$$

۲۴- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

این مدار دارای دو ثابت زمانی است. برای این که پس از وصل کلید در $t = R_1 C$ ، ولتاژ در سر منبع جریان که همان ولتاژ دو سر خازن است ثابت بماند، باید ولتاژ خازن در لحظه $t = R_1 C$ را با مقدار نهایی ولتاژ خازن برابر قرار دهیم، یعنی:

$$V_C(t = R_1 C) = V_\infty$$

ولتاژ دو سر خازن قبل از بسته شدن کلید برابر است با:

$$V_C(t) = [V(0) - V(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} + V(\infty) = V(\infty) \left[1 - e^{-\frac{t}{R_{eq} C}} \right] = R_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C}} \right)$$

در این حالت برای V_∞ می‌توان گفت:

$$V_\infty = (R_1 \parallel R_2) \times 1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

بنابراین در لحظه $t = R_1 C$ داریم:

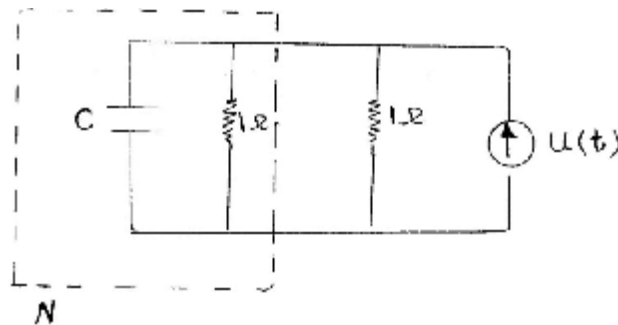
$$V(t = R_1 C) = R \left(1 - e^{-1}\right) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \rightarrow R_2 = (e - 1) R_1$$

در این محاسبات V_∞ مربوط به زمان‌های بعد از بسته شدن کلید است ($t > R_1 C$) و با $V(\infty)$ حاصل از $t < R_1 C$ متفاوت می‌باشد.

۲۵- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

در مدار اول، شبکه N باید فقط شامل مقاومت و خازن باشد، زیرا اگر شامل سلف نیز باشد، پاسخ مدار دوم به صورت معادله مرتبه دوم می‌شد در صورتی که گزینه‌ها به صورت پاسخ مدار مرتبه اول است.

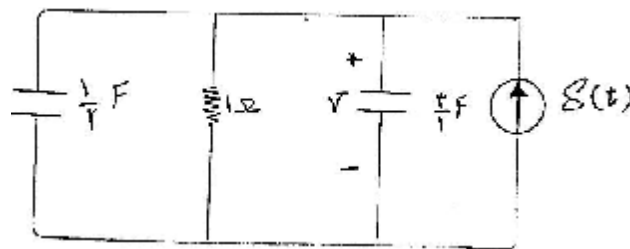
در مدار اولی، $V(t)$ در زمان بی‌نهایت که خازن مدار باز است برابر $\frac{1}{2}$ می‌شود پس در شبکه N یک مقاومت یک اهمی وجود دارد که با مقاومت بیرونی موازی شده و حاصل $\frac{1}{2} \Omega$ می‌شود، یعنی:



با استفاده از ثابت زمانی ولتاژ $V(t)$ می‌توان نوشت:

$$\tau = R_{eq} C = \frac{1}{4} \text{ sec} \rightarrow \frac{1}{2} \times C = \frac{1}{4} \rightarrow C = \frac{1}{2} \text{ F}$$

پس مدار دوم به صورت زیر است:



بنابراین ولتاژ دو سر خازن در اثر اعمال ورودی ضربه برابر است با:

$$\begin{cases} \tau = RC_{eq} = 1 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = 2 \text{ sec} \\ V(0^+) = \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{2} \text{ Volt} \end{cases} \rightarrow V_C(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}$$

فصل پنجم: مدارهای مرتبه دوم

در مدل سازی سیستم های الکتریکی، مکانیکی و... معمولاً از یک مدل ریاضی استفاده می شود که اغلب این مدل ریاضی توسط یک معادله دیفرانسیل بیان می گردد. سیستمی که از مرتبه n باشد دارای معادله دیفرانسیلی از مرتبه n است. پس می توان گفت مداری مرتبه دوم است که معادله دیفرانسیل توصیف کننده آن مرتبه دوم باشد.

به عبارت دیگر، هر مدار شامل یک خازن و یک سلف و هر تعداد مقاومت و منبع مستقل و وابسته یا دو سلف یا دو خازن (که غیرسری و غیرموازی هستند) و هر تعداد مقاومت و منبع، یک مدار مرتبه دوم است.

5-1- معادله دیفرانسیل مدارهای مرتبه دوم

می توان نشان داد معادله دیفرانسیل حاکم بر هر مدار مرتبه دومی به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \text{عبارتی بر حسب ورودی و مشتقاتش}$$

معادله مشخصه این معادله دیفرانسیل به صورت زیر است:

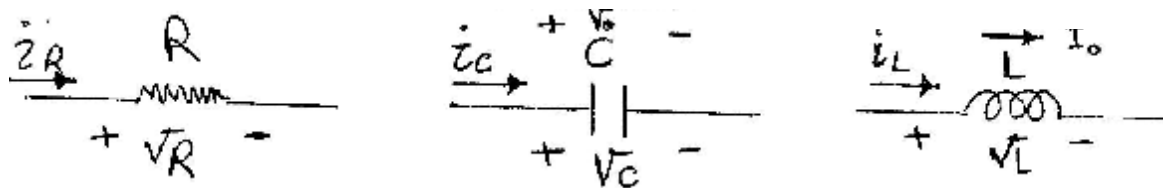
$$S^2 + 2\alpha S + \omega_0^2 = 0$$

که در آن α ضریب تضعیف و ω_0 فرکانس تشدید می باشد.

مانند مدارهای مرتبه اول، اساس کار در حل مدارهای مرتبه دوم، نوشتن معادله دیفرانسیل فوق و تحلیل آن به ازای شرایط و حالات مختلف است.

برای نوشتن معادله دیفرانسیل باید روابط ولتاژ و جریان عناصر را دانست و با استفاده از آن ها و KCL و KVL زدن و حذف متغیرهای اضافی، به معادله دیفرانسیل رسید.

روابط حاکم بر ولتاژ و جریان عناصر مداری (مقاومت، خازن و سلف) را که بارها بیان کرده ایم به صورت خلاصه مرور می کنیم:



$$V_R = R \times i_R \quad V_C = V_o + \frac{1}{C} \int i_C \cdot dt \quad V_L = L \frac{di_L}{dt}$$

$$i_R = \frac{V_R}{R} \quad i_C = C \frac{dV_C}{dt} \quad i_L = I_o + \frac{1}{L} \int V_L \cdot dt$$

یکی از پارامترهایی که مستقیماً از معادله دیفرانسیل مدارهای مرتبه دوم به دست می‌آید، ضریب کیفیت Q است.

۵-۱-۱- ضریب کیفیت Q

در حالت کلی برای ضریب کیفیت Q می‌توان گفت:

$$Q = 2\pi \times \frac{\text{توان راکتیو}}{\text{توان متوسط}}$$

طبق تعریف در هر مدار هر چه انرژی دیرتر تلف شود، Q یا ضریب کیفیت بالاتر است. برای مدارهای مرتبه دوم Q برابر است با:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

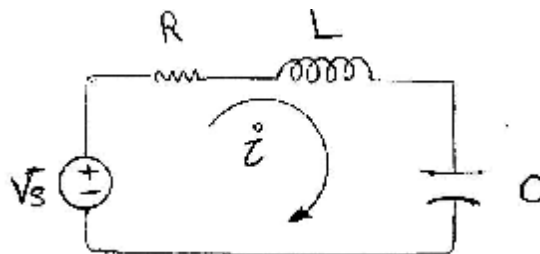
به عبارت دیگر، با تشکیل معادله دیفرانسیل مدارهای مرتبه دوم و تعیین ضرایب ω_0 و α ، ضریب کیفیت طبق رابطه فوق به دست می‌آید.

دو مدار خاص مرتبه دوم، مدار RLC سری و مدار RLC موازی، که همواره مورد توجه است را بررسی و تحلیل می‌کنیم.

اساس تجزیه و تحلیل این مدارات (و کلاً هر مدار مرتبه دومی) نوشتن معادله دیفرانسیل حاکم بر آن است.

۵-۱-۲- مدار RLC سری

با توجه به مدار شکل زیر داریم:



$$\text{KVL: } V_S = Ri + L \frac{di}{dt} + V_o + \frac{1}{C} \int i dt$$

با مشتق‌گیری خواهیم داشت:

$$\frac{dV_s}{dt} = R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} i \rightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{L} \frac{dV_s}{dt}$$

که معادله مشخصه آن برابر است با:

$$S^2 + \frac{R}{L}S + \frac{1}{LC} = 0$$

براین اساس می‌توان گفت:

$$2\alpha = \frac{R}{L} \rightarrow \alpha = \frac{R}{2L}$$

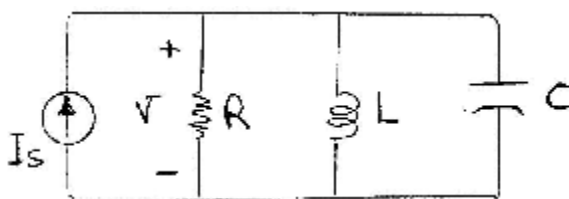
$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

برای ضریب کیفیت داریم:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\frac{R}{L}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

۵-۱-۳- مدار RLC موازی

با توجه به مدار شکل زیر داریم:



$$\text{KCL: } I_s = \frac{V}{R} + I_o + \frac{1}{L} \int V \cdot dt + C \frac{dV}{dt} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{dI_s}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dV}{dt} + \frac{V}{L} + C \frac{d^2V}{dt^2}$$

$$\rightarrow \frac{d^2V}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{LC} V = \frac{1}{C} \frac{dI_s}{dt}$$

$$2\alpha = \frac{1}{RC} \rightarrow \alpha = \frac{1}{2RC}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\frac{1}{RC}} = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

5-2- انواع پاسخ و روش‌های تحلیل در مدارهای مرتبه دوم

مانند هر معادله دیفرانسیلی، پاسخ کامل معادله دیفرانسیل مدارهای مرتبه دوم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$y(t) = \underbrace{y_h(t)}_{\text{پاسخ همگن}} + \underbrace{y_p(t)}_{\text{پاسخ خصوصی}} \quad \text{۵-۲-۱ پاسخ همگن (عمومی)}$$

(پاسخ حالت صفر) (پاسخ ورودی صفر)

برای یافتن پاسخ همگن یا پاسخ ورودی صفر، از ریشه‌های معادله مشخصه متناظر با معادله دیفرانسیل مدار مرتبه دوم استفاده می‌کنیم.

$$S^2 + 2\alpha S + \omega_0^2 = 0 \rightarrow S_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

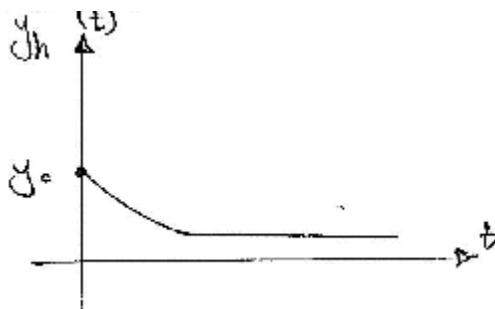
برحسب نوع ریشه‌ها، حالات مدار مرتبه دوم را نامگذاری می‌کنیم:

1- اگر $\alpha > \omega_0$ باشد، دو ریشه حقیقی منفی متمایز داریم ($\Delta > 0$) و فرم پاسخ همگن به صورت زیر است:

$$(S_1, S_2 < 0) \rightarrow y_h(t) = K_1 e^{S_1 t} + K_2 e^{S_2 t}$$

که ضرایب K_1 و K_2 با توجه به شرایط اولیه $y(0)$ و $y'(0)$ تعیین می‌شوند.

شکل پاسخ به صورت زیر است:



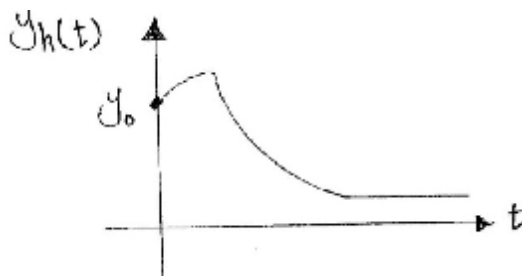
به این حالت، میرای شدید (over damped) گفته می‌شود.

2- اگر $\alpha = \omega_0$ باشد، دو ریشه مضاعف حقیقی منفی داریم ($\Delta = 0$) و برای پاسخ داریم:

$$(S_1 = S_2 < 0) \rightarrow y_h(t) = (K_1 + K_2 t) e^{S_1 t}$$

در این حالت نیز ضرایب K_1 و K_2 با استفاده از شرایط اولیه $y(0)$ و $y'(0)$ تعیین می‌شوند.

شکل پاسخ به صورت زیر است:



به این حالت، میرای بحرانی (critically damped) می‌گویند.

3- اگر $\alpha < \omega_0$ باشد، دو ریشه مزدوج مختلط ($\Delta < 0$) داریم. در این حالت روابط به فرم زیر تبدیل می‌شوند:

$$S_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

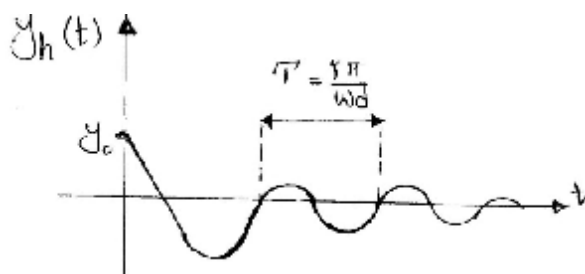
که ω_d را فرکانس میرا شونده می‌نامیم.

فرم کلی پاسخ به صورت زیر است:

$$y_h(t) = Ke^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \theta) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t)$$

در این حالت ضریب K و پارامتر θ یا ضرایب A و B با استفاده از شرایط اولیه $y(0)$ و $y'(0)$ تعیین می‌شوند.

شکل سیگنال خروجی در این حالت به صورت زیر است:

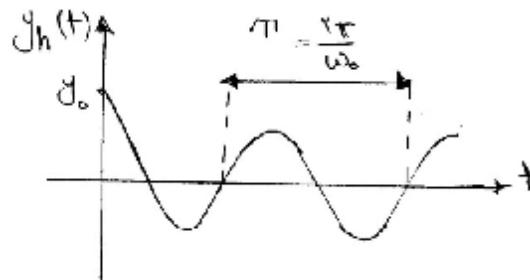


این حالت را میرای ضعیف (under damped) می‌گویند.

4- اگر $\alpha = 0$ باشد، دو ریشه مزدوج موهومی محض داریم. در این صورت:

$$S_{1,2} = \pm j\omega_0 \rightarrow y_h(t) = K \cos(\omega_0 t + \theta) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

نمودار در این حالت که به آن حالت نوسانی، بدون اتلاف یا Loss less می‌گویند به صورت شکل زیر است:



نکته: فرکانس نوسانات در حالت میرای ضعیف برابر ω_d است ولی در حالت نامیرا فرکانس نوسانات نامیرا برابر ω_0 می باشد.

نکته: منابع مستقل ولتاژ و جریان تأثیری در نوع مدار مرتبه دوم ندارند، پس می توان آن ها را صفر کرد.

در چهار حالت بیان شده فوق برای ضریب کیفیت Q می توان گفت:

$$Q < \frac{1}{2} : \text{میرای شدید}$$

$$Q = \frac{1}{2} : \text{میرای بحرانی}$$

$$Q > \frac{1}{2} : \text{میرای ضعیف}$$

$$Q \rightarrow \infty : \text{نامیرا (نوسانی)}$$

* نوسان ساز

شرط نوسانی بودن (نامیرا بودن) یک مدار مرتبه دوم این است که:

$$1- \alpha = 0 \text{ باشد.}$$

$$2- \omega_0^2 > 0 \text{ باشد.}$$

یادتان باشد که هر دو این شرط ها لازم اند.

نکته: در مدارهای RLC سری و موازی در حالت میرای بحرانی ($\Delta = 0$)، مقاومت بحرانی به صورت زیر به دست

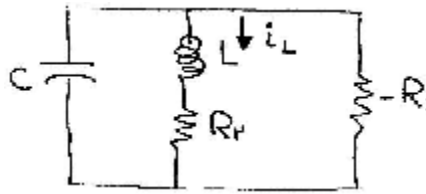
می آید:

$$\text{RLC سری} : R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\text{RLC موازی: } R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

برای درک بهتر مفاهیم مطرح شده به بررسی چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۱: برای مدار شکل زیر، معادله دیفرانسیلی برای i_L بنویسید. سپس مقدار R_1 را طوری تعیین کنید که مدار زیر یک نوسان‌ساز باشد.



با توجه به شکل ولتاژ دو سر خازن برابر است با:

$$V_C = L \frac{di_L}{dt} + R_2 i_L$$

با استفاده از KCL داریم:

$$\begin{aligned} \text{KCL: } i_C + i_L + i_{R1} &= 0 \rightarrow C \frac{dV_C}{dt} + i_L + \frac{V_C}{-R_1} = 0 \rightarrow CL \frac{d^2 i_L}{dt^2} + CR_2 \frac{di_L}{dt} + i_L - \frac{L}{R_1} \frac{di_L}{dt} - \frac{R_2}{R_1} i_L = 0 \\ \rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \underbrace{\left(R_2 C - \frac{L}{R_1}\right)}_{2\alpha} \frac{1}{LC} \frac{di_L}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC} \left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right)}_{\omega_0^2} i_L &= 0 \end{aligned}$$

و برای نوسان‌ساز بودن:

$$\alpha = 0 \rightarrow \frac{1}{LC} \left(R_2 C - \frac{L}{R_1}\right) = 0 \rightarrow R_2 C = \frac{L}{R_1} \rightarrow R_1 = \frac{L}{R_2 C}$$

$$\omega_0^2 > 0 \rightarrow \frac{1}{LC} \left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right) > 0 \rightarrow 1 - \frac{R_2}{R_1} > 0 \rightarrow R_1 > R_2$$

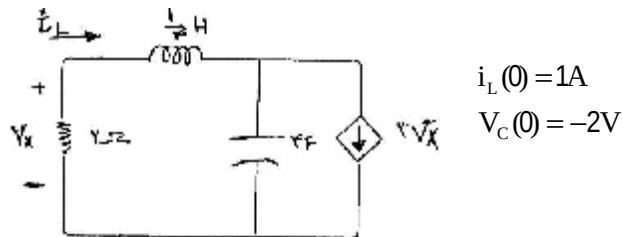
و پاسخ، اشتراک دو شرط بالا است.

مثلاً اگر قرار دهیم $C = 2\text{F}$ و $L = 1\text{H}$ و $R_2 = 1\Omega$ ، آنگاه $R_1 = \frac{1}{2}\Omega$ و شرط دوم نقص می‌شود ($R_1 = \frac{1}{2} < R_2 = 1$)

پس این مدار اصلاً نمی‌تواند یک نوسان‌ساز باشد.

بنابراین دو شرط فوق باید همزمان برقرار باشد.

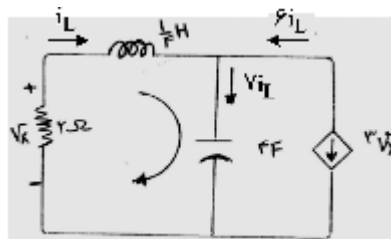
مثال ۲: در مدار شکل زیر، معادله دیفرانسیلی برای i_L تشکیل دهید و سپس پاسخ ورودی صفر $i_L(t)$ را به دست آورید.



با توجه به شکل می‌توان گفت:

$$v_x = -2i_L \rightarrow 3V_x = -6i_L$$

پس با KCL زدن روی شکل داریم:



$$\text{KVL: } 2i_L + \frac{1}{4} \frac{di_L}{dt} + V_C(0) + \int_0^t 7i_L dt = 0 \xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$\frac{1}{4} \frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2 \frac{di_L}{dt} + \frac{7}{4} i_L = 0 \rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} + 8 \frac{di_L}{dt} + 7 i_L = 0$$

و برای شرایط اولیه داریم:

$$i_L(0) = 1$$

$$t=0 \rightarrow 2i_L(0) + \frac{1}{4} \frac{di_L(0)}{dt} + V_C(0) + \int_0^0 7i_L(t) dt = 0 \rightarrow \frac{di_L(0)}{dt} = 0$$

پس معادله دیفرانسیل را با شرایط اولیه $i_L(0) = 1$ و $\frac{di_L(0)}{dt} = 0$ حل می‌کنیم.

$$S^2 + 8S + 7 = 0 \rightarrow S_1 = -1, S_2 = -7$$

پس مدار در حالت میرای شدید است.

$$i_L(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-7t}$$

و برای ضرایب K_1 و K_2 داریم:

$$\begin{cases} i_L(0) = 1 \\ \frac{di_L(0)}{dt} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_1 + K_2 = 1 \\ -K_1 - 7K_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_1 = \frac{7}{6} \\ K_2 = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

پس پاسخ نهایی برابر است با:

$$i_L(t) = \frac{7}{6}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-7t}$$

برای یافتن پاسخ در سؤالات تستی، نیاز به حل کامل و وقت گیر سؤال به صورتی که بیان شد نمی باشد. می توان با استفاده از «شرایط اولیه» و «شرایط اولیه مشتق»، پاسخ درست را پیدا کرد.

5-2-2- کاربرد شرایط اولیه و شرایط اولیه مشتق

معادله دیفرانسیل مدارهای مرتبه دوم دارای دو شرط اولیه می باشند، $y(0)$ و $\frac{dy(0)}{dt}$. در بسیاری از مسائل شرط اول به صورت $i_L(0)$ یا $V_C(0)$ داده می شود ولی معمولاً شرط دوم که به آن شرط اولیه مشتق گفته می شود، به صورت مستقیم بیان نمی شود.

بنابراین در بسیاری از تست ها و به خصوص برای رد گزینه، لازم است که $\frac{di_L}{dt}(0)$ یا $\frac{dV_C}{dt}(0)$ را به دست آوریم. برای این منظور به روش زیر عمل می کنیم:

1- رسم مدار در لحظه $t = 0^-$ به کمک رابطه ی بی نهایت و یافتن شرایط اولیه $i_L(0^-)$ و $V_C(0^-)$.

2- با استفاده از قضیه پیوستگی می توان گفت: $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ و $V_C(0^+) = V_C(0^-)$

3- رسم مدار در لحظه $t = 0^+$ به کمک رابطه ی صفر و یافتن $i_C(0^+)$ و $V_L(0^+)$

4- استفاده از روابط اساسی سلف و خازن برای یافتن شرایط اولیه مشتق:

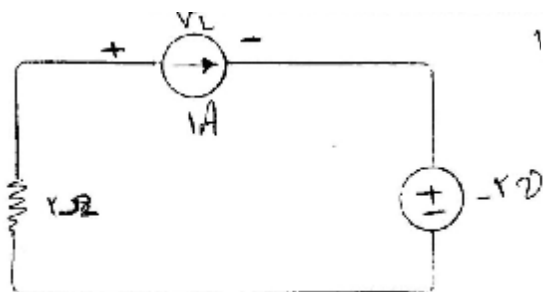
$$\frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{V_L(0^+)}{L} = \frac{\text{ولتاژ اولیه سلف}}{L}$$

$$\frac{dV_C(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = \frac{\text{جریان اولیه خازن}}{C}$$

5- استفاده از شرایط اولیه و شرایط اولیه مشتق در حل مسأله و رد گزینه ها

در مثال قبل، برای یافتن شرایط اولیه مشتق به روش بیان شده می توان گفت:

رسم مدار در $t=0^+$ به کمک رابطه صفر.

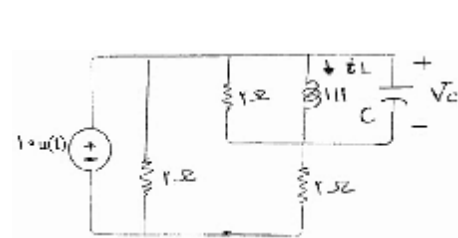


$$\text{KVL: } V_L = -2 - (2 \times -1) = 0 \rightarrow \frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{V_L(0^+)}{L} = 0$$

و با استفاده از شرایط اولیه و شرایط اولیه مشتق، می‌توان گزینه درست را انتخاب کرد.

اکنون به بررسی چند مثال می‌پردازیم.

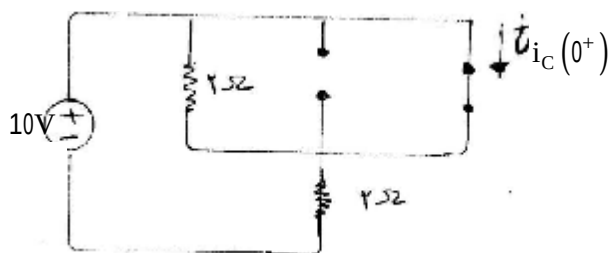
مثال ۳: در مدار شکل زیر، مقدار ظرفیت خازن چقدر است؟



$$\begin{cases} i_L(0^+) = V_C(0^+) = 0 \\ \frac{di_L(0^+)}{dt} = 0 \\ \frac{dV_C(0^+)}{dt} = 10V \end{cases}$$

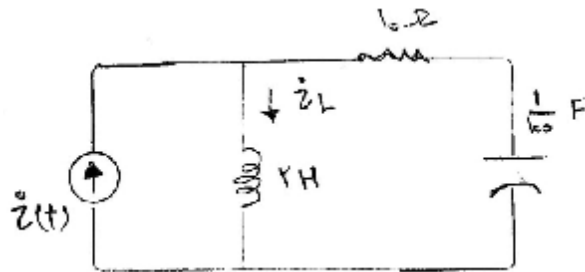
با توجه به شرایط اولیه داده شده، مدار را در $t=0^+$ رسم می‌کنیم:

$$i_C(0^+) = \frac{10}{2} = 5A$$



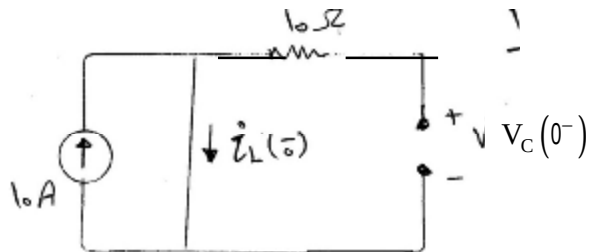
$$\frac{dV_C(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} \rightarrow C = \frac{5}{10} = 0.5F$$

4- در مدار شکل زیر، $\frac{di_L}{dt}(0^+)$ را به دست آورید.



$$i(t) = 10 + 10e^{-t} \cos t \text{ u}(t)$$

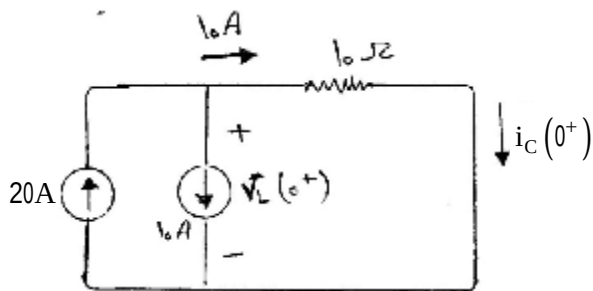
با توجه به معلوم نبودن شرایط اولیه، مدار را در $t = 0^-$ رسم می کنیم:



$$i_L(0^-) = 10\text{A}$$

$$V_C(0^-) = 0$$

اکنون مدار را در $t = 0^+$ رسم می کنیم:



$$V_L(0^+) = 10 \times 10 = 100\text{V}$$

$$i_C(0^+) = 10\text{A}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{V_L(0^+)}{L} = \frac{100}{2} = 50 \frac{\text{A}}{\text{S}}$$

$$\frac{dV_C(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = \frac{10}{\frac{1}{100}} = 1000 \frac{V}{S}$$

نکته: اگر در یک مسأله سیگنالی غیر از V_C و i_L خواسته شده باشد می توان گفت:

در یک مدار مرتبه ی دوم می توان هر متغیری را برحسب V_C ها و i_L ها نوشت.

به عبارت دیگر هر سیگنالی به کمک روابط KCL و KVL قابل بیان به صورت ترکیبی خطی از V_C ها و i_L ها است.

پس اگر از این رابطه مشتق بگیریم، $\frac{dy}{dt}$ سیگنال موردنظر برحسب $\frac{dV_C}{dt}$ ها و $\frac{di_L}{dt}$ ها به دست می آید و از این طریق

می توان شرایط اولیه و شرایط اولیه مشتق را پیدا کرد و حل مسأله مانند روال گفته شده انجام می شود.

5-2-2- پاسخ خصوصی مدارهای مرتبه دوم

پاسخ خصوصی ناشی از ورودی است و هم جنس با عبارت سمت راست معادله دیفرانسیل است.

مهمترین پاسخ های مدارهای مرتبه دوم، پاسخ پله و پاسخ ضربه است.

در این حالت، منظور فقط ورودی است و دیگر خبری از شرایط اولیه نمی باشد.

می توان گفت پاسخ کامل شامل دو بخش پاسخ گذرا (میرا شونده) و پاسخ دائمی (ماندگار) است. در نتیجه می توان گفت:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_p(t) \quad \text{پاسخ دائمی یا ماندگار}$$

یعنی پاسخ خصوصی همان پاسخ دائمی یا ماندگار است. این حالت خاص وقتی برقرار است که ورودی مدار فقط منابع

DC باشد.

به عبارت دیگر، می توان از روابط بی نهایت $(y(\infty))$ برای یافتن پاسخ خصوصی استفاده نمود.

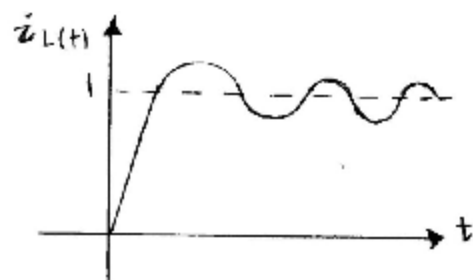
مثلاً برای مدار RLC موازی، پاسخ پله به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{cases} \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{1}{LC} u(t) \\ i_L(0) = 0, \quad \frac{di_L(0)}{dt} = 0 \end{cases}$$

پاسخ همگن (با فرض میرای ضعیف بودن مدار) و خصوصی برابرند با:

$$i_{Lh}(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t)$$

$$i_{LP}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} i_L(t) = 1$$

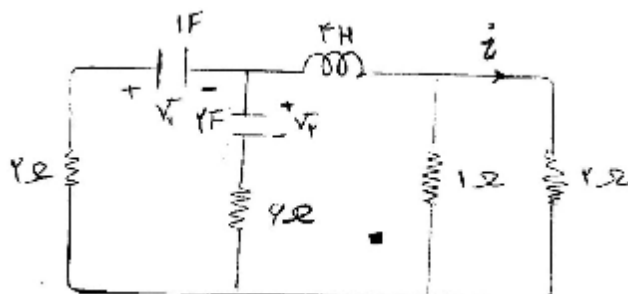


و برای پاسخ ضربه، می‌توان از پاسخ پله مشتق گرفت:

$$h(t) = \frac{dS(t)}{dt}$$

تست‌های طبقه‌بندی شده مبحث مدارهای مرتبه‌ی دوم

۱- در مدار شکل زیر، اگر $i(0^-) = 2A$ و $V_1(0^-) = 3V$ و $V_2(0^-) = 1V$ باشد، $\frac{di(0^+)}{dt}$ چقدر است؟



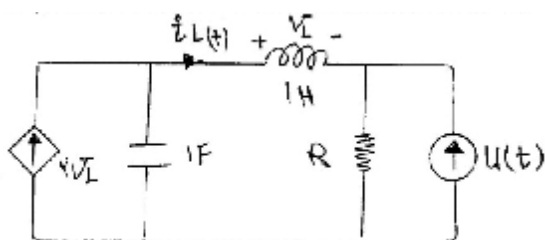
$$(1) -\frac{5}{4}$$

$$(2) -\frac{11}{2}$$

$$(3) \frac{11}{12}$$

$$(4) \frac{5}{4}$$

۲- در مدار مرتبه‌ی دوم شکل زیر، پاسخ حالت صفر $i_L(t)$ به ورودی پله واحد کدام مشخصه زیر را دارد؟



(1) به ازای $R = 2\Omega$ پاسخ مدار بی‌اتلاف خواهد بود.

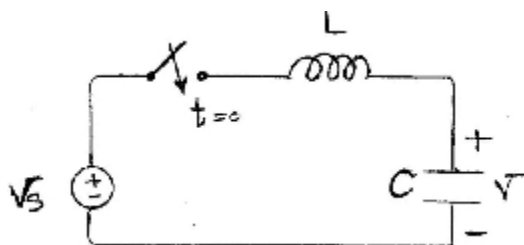
(2) به ازای $R = 2\Omega$ پاسخ مدار میرای بحرانی خواهد بود.

(3) به ازای $R = 4\Omega$ پاسخ مدار میرای شدید خواهد بود.

(4) به ازای $R > 4\Omega$ پاسخ مدار میرای ضعیف خواهد بود.

۳- در مدار شکل زیر، V_s یک منبع ولتاژ DC است. در چه زمانی ولتاژ دو سر خازن دو برابر V_s می‌شود؟

(ولتاژ اولیه خازن صفر است.)



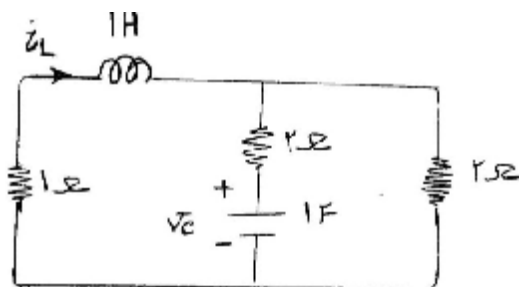
$$(1) t = \pi\sqrt{LC}$$

$$(2) t = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$(3) t = \frac{\sqrt{LC}}{\pi}$$

(4) امکان ندارد ولتاژ دو سر خازن دو برابر ولتاژ ورودی باشد.

۴- اگر در مدار زیر $i_L(0) = \frac{4}{15} \text{ A}$ و $i_L''(0) = 2$ باشد، $V_C(0)$ برابر چند ولت است؟



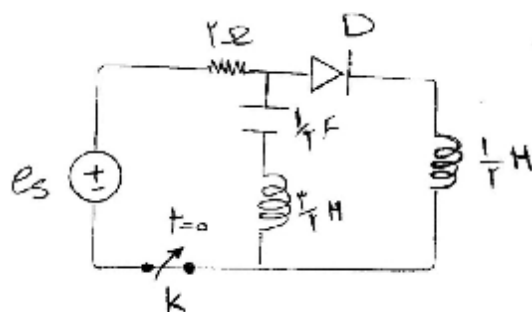
(1) -4

(2) $\frac{8}{9}$

(3) 4

(4) 8

۵- در مدار شکل زیر $e_s = u(-t)$ است. برای زمان‌های $t \geq 0$ دیود D چه مدت زمانی هادی خواهد بود؟



(1) π ثانیه

(2) $\frac{\pi}{2}$ ثانیه

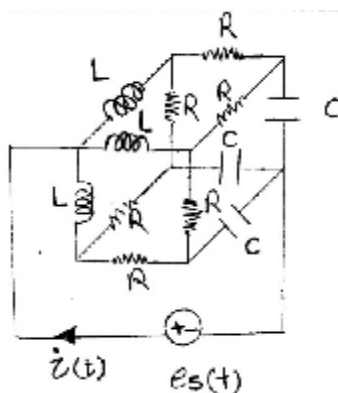
(3) $\frac{\pi}{4}$ ثانیه

(4) $\frac{2\pi}{3}$ ثانیه

۶- در مدار شکل زیر، سه سلف هر کدام به مقدار یک هانری، سه خازن هر کدام به مقدار دو فاراد و شش

مقاومت هر کدام به مقدار سه اهم روی یال‌های یک مکعب قرار دارند. پاسخ حالت صفر جریان i گذراننده از

منبع برای ورودی $e_s(t) = u(t)$ کدام است؟ ($C = 2\text{F}$, $L = 1\text{H}$, $R = 3\Omega$)



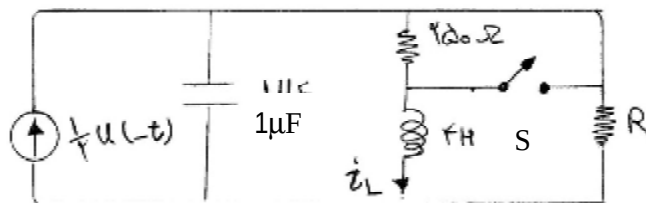
(1) $i = (2e^{-t} - 2e^{\frac{-t}{2}})u(t)$

(2) $i = (-2e^{-t} + 2e^{\frac{t}{2}})u(t)$

(3) $i = (-6e^{-t} + 6e^{\frac{t}{2}})u(t)$

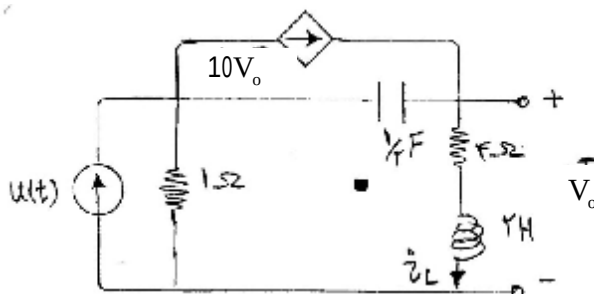
(4) $i = (6e^{-t} - 6e^{\frac{t}{2}})u(t)$

100



6/10

90



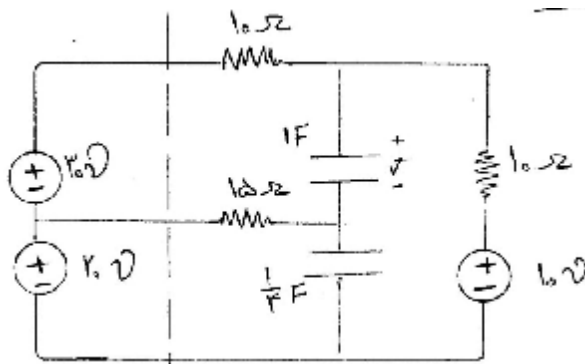
ریسک ریز بہ

• *Chlorophyll*

$4e^{-2}$

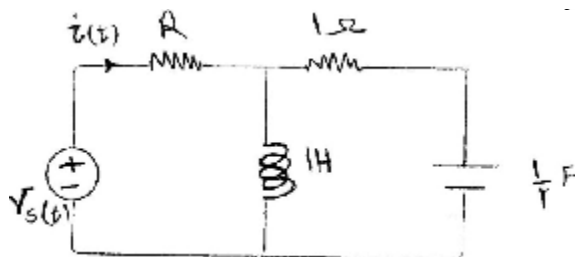
4c

oe



۱۰- در مدار شکل زیر مقدار R چقدر باشد تا برای ورودی ضربه $V_s(t) = \delta(t)$ جریان $i(t)$ گذرانده از R

جمله‌ای به صورت $\frac{2}{3}\delta(t)$ داشته باشد؟



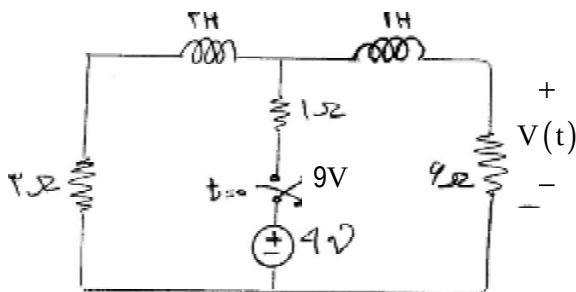
1 (1)

2 (2)

$\frac{1}{2}$ (3)

$\frac{1}{3}$ (4)

۱۱- کلید S زمانی طولانی بسته بوده و در لحظه $t=0$ باز می‌شود. $V(t)$ برای $t > 0$ کدام است؟



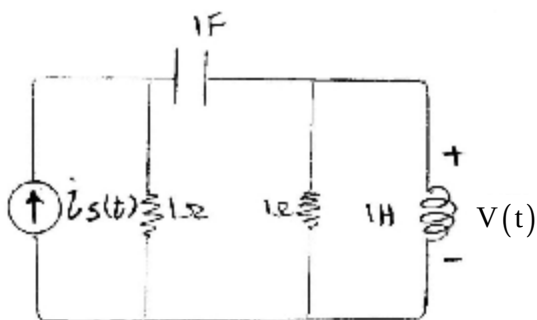
$12e^{-\frac{4}{9}t}$ (1)

$6e^{-\frac{4}{9}t}$ (2)

$-12e^{-\frac{4}{9}t}$ (3)

$-7/5e^{-\frac{4}{9}t}$ (4)

۱۲- در مدار زیر معادله دیفرانسیل مرتبط کننده $V(t)$ و $i_s(t)$ کدام است؟



$\frac{d^2V}{dt^2} + 2\frac{dV}{dt} + V = \frac{d^2i_s}{dt^2}$ (1)

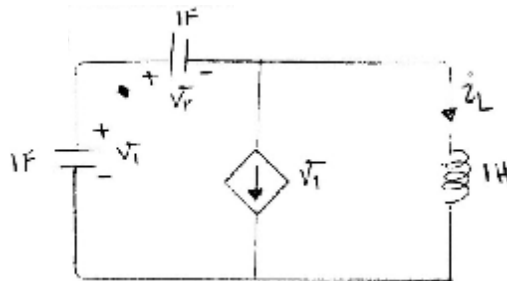
$2\frac{d^2V}{dt^2} + 2\frac{dV}{dt} + V = 2\frac{d^2i_s}{dt^2}$ (2)

$2\frac{d^2V}{dt^2} + 2\frac{dV}{dt} + V = \frac{d^2i_s}{dt^2}$ (3)

$\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{dV}{dt} + V = 2\frac{d^2i_s}{dt^2}$ (4)

۱۳- در مدار شکل زیر شرایط اولیه $(V_1(0), V_2(0), i_L(0))$ را به نحوی تعیین کنید که هیچ متغیر شبکه

تحریک نگردد؟



(1) $(1, 1, -1)$

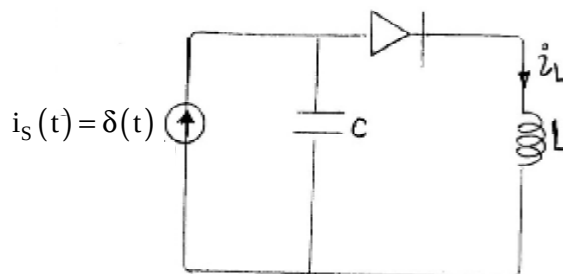
(2) $(1, 0, -1)$

(3) $(1, -1, 1)$

(4) $(1, 0, 0)$

۱۴- دیود D در مدار شکل زیر ایده آل است. شکل موج جریان گذرنده از سلف کدام است؟

(شرایط اولیه مدار صفر می باشد. $P_A(t)$ تابع پالس واحد و $\delta(t)$ تابع ضربه واحد است.)



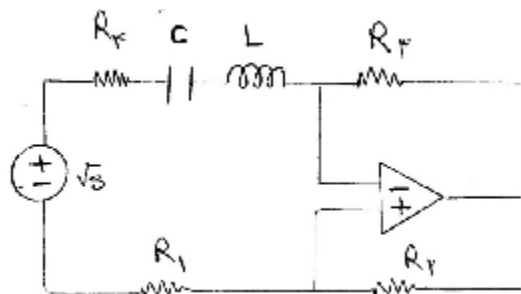
(1) $i_L = P_1(t) \cdot \text{Sint}$

(2) $i_L = P_1(t) \cdot \text{Cost}$

(3) $i_L = \pi P_\pi(t) \cdot \text{Sint}$

(4) $i_L = \pi P_\pi(t) \cdot \text{Cost}$

۱۵- مدار شکل زیر تحت چه شرایطی نوسان ساز می شود؟



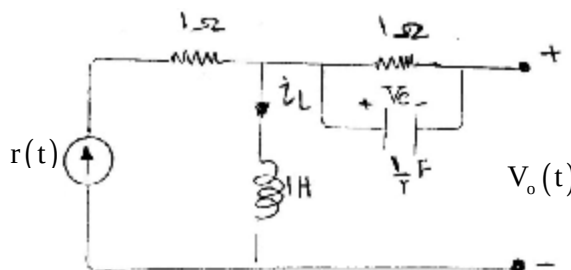
(1) $R_1 R_3 = R_2 R_4$

(2) $\frac{L}{R_1 R_3} = \frac{R_4 C}{R_2}$

(3) $R_1 R_2 = R_3 R_4$

(4) این مدار هرگز نمی تواند نوسان ساز باشد.

۱۶- در شکل زیر با فرض $i_L(0^-) = 1A$ و $V_C(0^-) = 1V$ ، ولتاژ $V_o(t)$ برای $t \geq 0$ کدام است؟



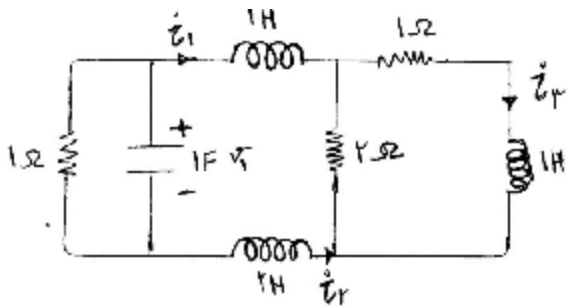
(1) $1 + e^{-t}$

(2) $1 - e^{-2t}$

(3) $e^{-t} - e^{-2t}$

(4) صفر

۱۷- در مدار شکل زیر مقدار $\frac{di_1(0)}{dt}$ بر حسب جریان اولیه سلف‌ها و ولتاژ اولیه خازن کدام است؟



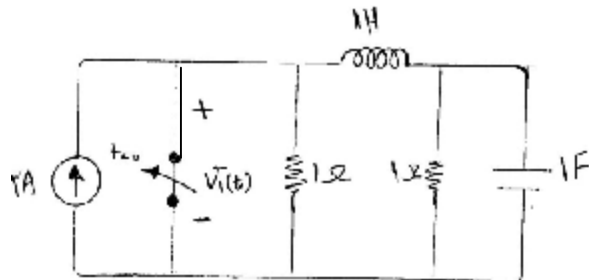
$$V(0) - 2i_1(0) + 2i_3(0) \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2}V(0) + i_1(0) - i_2(0) \quad (2)$$

$$\frac{1}{3}V(0) - \frac{2}{3}i_1(0) + \frac{2}{3}i_3(0) \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}V(0) - i_1(0) + i_2(0) - i_3(0) \quad (4)$$

۱۸- در مدار شکل زیر کلید در $t=0$ باز می‌شود و قبل از آن مدار به حالت دائمی رسیده است. $V_1(0^+)$ و



$$\frac{dV_1(0^+)}{dt} \text{ کدام‌اند؟}$$

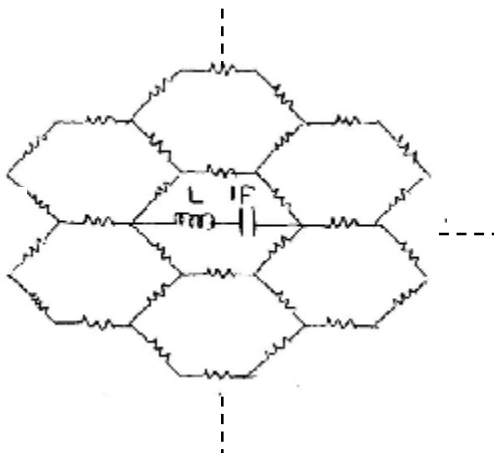
$$0 \text{ و } 3 \quad (1)$$

$$0 \text{ و } -3 \quad (2)$$

$$3 \text{ و } 3 \quad (3)$$

$$3 \text{ و } -3 \quad (4)$$

۱۹- تمام مقاومت‌ها یک اهم هستند و شبه از هر طرف به بی‌نهایت می‌رود. به ازای کدام مقدار L ، ضریب



کیفیت $Q=1/2$ خواهد بود؟

$$0/5H \quad (1)$$

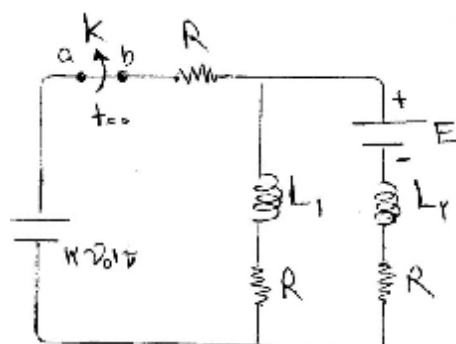
$$1H \quad (2)$$

$$1/2H \quad (3)$$

$$1/96H \quad (4)$$

۲۰- کلید K به مدت طولانی بسته بوده و در $t=0$ باز می‌شود. E چند ولت باشد تا در لحظه‌ی باز شدن

کلید، ولتاژ ضربه‌ای بین دو سر a و b ایجاد نشود؟



4 (1)

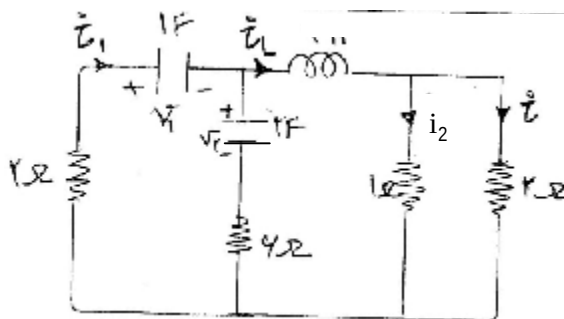
12 (2)

16 (3)

24 (4)

پاسخ تشریحی

۱- گزینه‌ی «۱» صحیح است.



در لحظه‌ی $t=0$ با استفاده از تقسیم جریان داریم:

$$i = \frac{1}{1+2} i_L \rightarrow i_L(0^-) = 3i(0^-) = 3 \times 2 = 6A$$

در لحظه‌ی $t=0^+$ ولتاژ خازن‌ها و جریان سلف تغییر نمی‌کند. پس با KVL زدن در مش سمت چپ داریم:

$$KVL: 2i_1 + V_1 + V_2 + 6(i_1 - i_L) = 0 \rightarrow 2i_1 + 3 + 1 + 6(i_1 - 6) = 0 \rightarrow 8i_1 = 32 \rightarrow i_1 = 4A$$

با اعمال KVL در حلقه‌ی وسط داریم:

$$KVL: V_L + 1(i_L - i) + 6(i_L - i_1) - V_2 = 0 \xrightarrow{t=0^+} 4 \frac{di_L(0^+)}{dt} + 4 + 12 - 1 = 0 \rightarrow \frac{di_L(0^+)}{dt} = -\frac{15}{4}$$

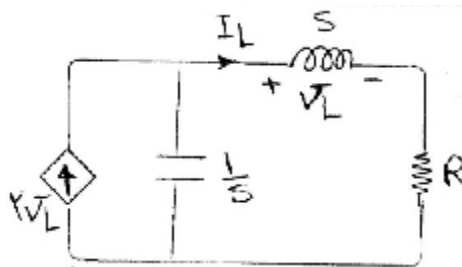
بنابراین:

$$i_L = 3i \rightarrow i = \frac{1}{3} i_L \rightarrow \frac{di(0^+)}{dt} = \frac{1}{3} \frac{di_L(0^+)}{dt} = -\frac{5}{4} 1$$

۲- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

برای مشخص کردن فرم پاسخ باید معادله مشخصه مدار را به دست آوریم. معادله‌ی مشخصه مستقل از ورودی است،

پس می‌توان منبع جریان $u(t)$ را صفر کرده و با انتقال مدار به حوزه لاپلاس داریم:



با KVL زدن در مش سمت راست داریم:

$$\text{KVL: } SI_L + RI_L + \frac{1}{S}(I_L - 2V_L) = 0$$

با قرار دادن $V_L = SI_L$ خواهیم داشت:

$$I_L \left(S + R + \frac{1}{S} - 2 \right) = 0 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} S^2 + \underbrace{(R - 2)}_{2\alpha} S + 1 = 0$$

بنابراین اگر $R = 2\Omega$ باشد، $2\alpha = 0$ و پاسخ مدار بی‌اتلاف خواهد بود.

۳- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

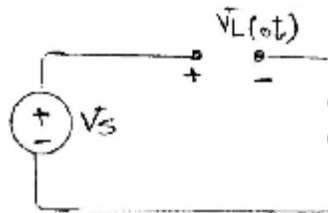
با توجه به شکل دیده می‌شود مدار LC سری و بی‌تلف است، پس فرم کلی پاسخ متغیرهای آن در حوزه زمان به صورت

$$A \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t + \varphi\right) \text{ است.}$$

استفاده از ولتاژ دو سر سلف راحت‌تر است (چرا؟). در زمان $t = 0^+$ با بسته شدن کلید، خازن اتصال کوتاه و سلف مدار

باز است، پس برای ولتاژ سلف در $t = 0^+$ داریم:

$$V_L(t) = A \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t + \varphi\right) \xrightarrow{t=0^+} V_L(0^+) = A \cos \varphi = V_S$$



در لحظه‌ی t_0 که ولتاژ دو سر خازن دو برابر V_S است با اعمال KVL در مدار داریم:

$$\text{KVL: } V_S = V_L(t_0) + \underbrace{V_C(t_0)}_{2V_S} \rightarrow V_L(t_0) = -V_S = A \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t_0 + \varphi\right)$$

در نتیجه با استفاده از دو رابطه به دست آمده خواهیم داشت:

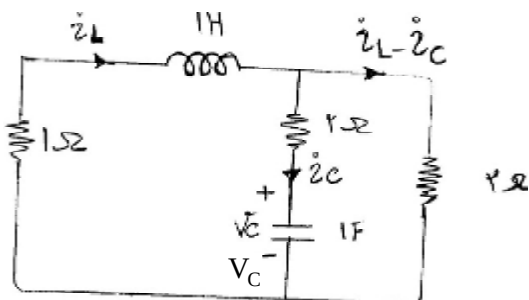
$$\begin{cases} A \cos \varphi = V_S \\ A \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t_0 + \varphi\right) = -V_S \end{cases} \rightarrow \cos \varphi = -\cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t_0 + \varphi\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{LC}} t_0 = \pi \rightarrow t_0 = \pi\sqrt{LC}$$

۴- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

ولتاژ خازن و جریان سلف پیوسته هستند، یعنی:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0 = \frac{4}{15} \text{ A} \text{ و } V_C(0^+) = V_C(0^-) = V_0$$

با KVL زدن در مدار شکل زیر و سپس اعمال KVL داریم:



KVL در مش سمت راست: $2i_C + V_C - 2(i_L - i_C) = 0 \rightarrow i_C = \frac{1}{4}(2i_L - V_C)$

KVL در مش بیرونی: $i_L + \frac{di_L}{dt} + 2(i_L - i_C) = 0$

با جایگذاری دو معادله‌ی فوق در یکدیگر داریم:

$$\frac{di_L}{dt} + 2i_L + \frac{1}{2}V_C = 0 \quad (1)$$

با مشتق‌گیری از معادله‌ی فوق و منظور کردن $i_C = \frac{dV_C}{dt}$ خواهیم داشت:

$$\frac{d^2i_L}{dt^2} + 2\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dV_C}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d^2i_L}{dt^2} + 2\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{2}i_C = 0 \rightarrow \frac{d^2i_L}{dt^2} + 2\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}(2i_L - V_C)\right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2i_L}{dt^2} + 2\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{4}i_L - \frac{1}{8}V_C = 0 \quad (2)$$

با محاسبه‌ی روابط (1) و (2) در $t=0^+$ داریم:

رابطه (1) در $t=0^+$: $\frac{di_L(0^+)}{dt} = -2i_L(0^+) - \frac{1}{2}V_C(0^+) = -2I_0 - \frac{1}{2}V_0$

رابطه (2) در $t=0^+$: $\frac{d^2i_L(0^+)}{dt^2} + 2\frac{di_L(0^+)}{dt} + \frac{1}{4}i_L(0^+) - \frac{1}{8}V_C(0^+) = 0$

$$\rightarrow \frac{d^2i_L(0^+)}{dt^2} + 2(-2I_0 - \frac{1}{2}V_0) + \frac{1}{4}I_0 - \frac{1}{8}V_0 = 0$$

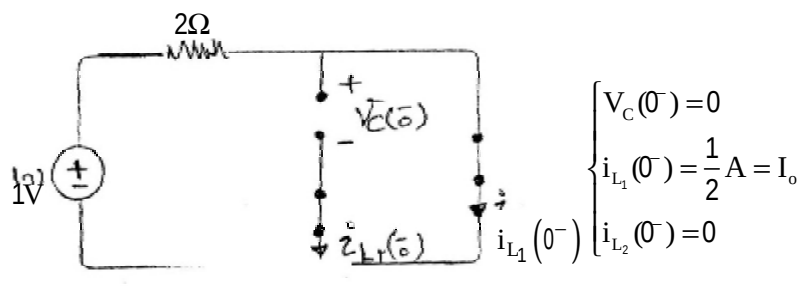
با قرار دادن $I_0 = \frac{4}{15} A$ و $i''(0^+) = 2$ داریم:

$$2 + 2\left(-\frac{8}{15} - \frac{1}{2}V_0\right) + \frac{1}{15} - \frac{1}{8}V_0 = 0 \rightarrow V_0 = V_C(0^-) = \frac{8}{9} \text{ Volt}$$

۵- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

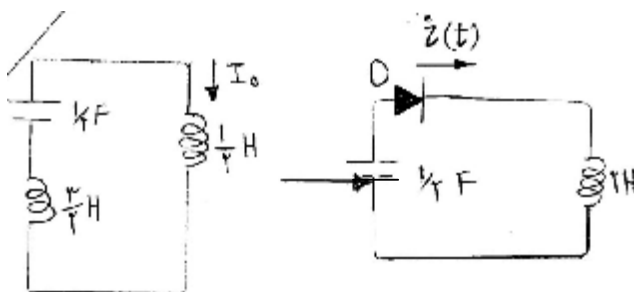
قبل از باز شدن کلید مدار در حالت دائمی قرار دارد، پس سلف‌ها اتصال کوتاه و خازن مدار باز است. در نتیجه برای

$t = 0^-$ داریم:



پس از باز شدن کلید، سلف‌ها سری می‌شوند و با توجه به متفاوت بودن جریان اولیه آن‌ها با استفاده از قانون بقای شار

داریم:



$$i(0^+) = i_L(0^+) = \frac{L_1 i_{L_1}(0^+) + L_2 i_{L_2}(0^+)}{L_1 + L_2} = \frac{\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} \times 0\right)}{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = \frac{1}{8} A$$

بنابراین در $t = 0^+$ دیود روشن و اتصال کوتاه است و هر وقت جریانش صفر شود، خاموش می‌شود، یعنی:

$$i_D(t) = i_L(t) = i(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2 \times \frac{1}{2}}} = 1 \text{ rad/s}$$

$$V_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = -2 \sin(t + \theta) \xrightarrow{t=0} V_L(t=0) = 0 \rightarrow \theta = 0$$

اگر t_0 زمان خاموش شدن دیود باشد داریم:

$$i_D(t_0) = A \cos(t) = 0 \rightarrow \cos t_0 = 0 \rightarrow t_0 = \frac{\pi}{2}$$

۶- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

مقدار اولیه و نهایی همه‌ی گزینه‌ها برابر صفر است، پس باید از شرایط اولیه مشتق استفاده کنیم.

با توجه به تقارن مدار، $\frac{1}{3}i(t)$ وارد هر سلف می‌شود و چون $L = 1H$ است، مشتق جریان سلف برابر ولتاژ سلف می‌شود.

به عبارت دیگر:

$$i_L(t) = \frac{1}{3}i(t) \rightarrow i(t) = 3i_L(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{di(t)}{dt} = 3 \frac{di_L(t)}{dt} \xrightarrow{V_L = L \frac{di_L}{dt}} \frac{di(t)}{dt} = 3V_L(t)$$

در لحظه‌ی صفر، خازن‌ها اتصال کوتاه هستند و چون جریان سلف نیز صفر است، در نتیجه جریان مقاومت هم صفر

می‌شود و کل ولتاژ $u(t) = 1V$ دو سر سلف می‌افتد، پس داریم:

$$\frac{di(0^+)}{dt} = 3V_L(0^+) = 3 \times 1 = 3$$

که با چک کردن مشتق گزینه‌ها، فقط گزینه‌ی 3 در این شرط صدق می‌کند.

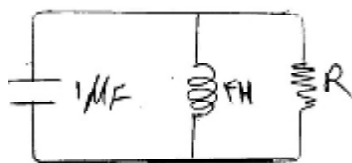
۷- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با توجه به گزینه‌ها، مقدار اولیه در همه‌ی آن‌ها یکسان و برابر $0/4$ است، پس:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0/4A$$

در حالت میرایی بحرانی جواب به صورت $(K_1 + K_2t)e^{-\alpha t}$ و $\alpha = \omega_0$ است.

وقتی کلید بسته می‌شود مقاومت 250 اهمی اتصال کوتاه شده و مدار به یک مدار RLC موازی تبدیل می‌شود، پس:



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{4 \times 10^{-6}}} = 500 \rightarrow \alpha = \omega_0 = 500$$

پس گزینه‌ی 1 یا 4 درست است.

حال $\frac{di_L}{dt}(0^+)$ را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{1}{L} V_L(0^+) = \frac{1}{L} V_C(0^+) = \frac{1}{L} V_C(0^-) = \frac{1}{4} V_C(0^-)$$

در $t=0^-$ مدار در حالت دائمی قرار دارد و خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه است، در نتیجه:

$$V_C(0^-) = 250i_L(0^-) = 250 \times 0/4 = 100V \rightarrow \frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{100}{4} = 25$$

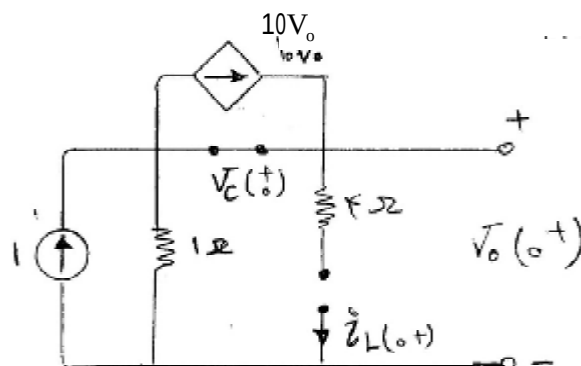
با مشتق‌گیری از گزینه‌ی 1 و 4، دیده می‌شود فقط در گزینه‌ی 4، $\frac{di_L(0^+)}{dt} > 0$ ، است.

۸- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

در لحظه‌ی $t=0$ سلف مدار باز و خازن اتصال کوتاه است، پس تمام جریان $u(t)=1$ از مقاومت یک اهمی می‌گذرد و

داریم:

$$\begin{cases} V_C(0^+) = 0 \\ i_L(0^+) = 0 \\ V_o(0^+) = 1 \times 1 = 1V_0 \end{cases}$$



از طرفی با توجه به شکل مدار می‌توان گفت:

$$V_o(t) = 4i_L(t) + 2 \frac{di_L(t)}{dt} \xrightarrow{t=0^+} 1 = 0 + 2 \frac{di_L(0^+)}{dt} \rightarrow \frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{1}{2}$$

با اعمال KVL در مش وسطی داریم:

$$4i_L + 2 \frac{di_L}{dt} + (i_L - u(t)) + 2 \int_2^+ (i_L - 10V_o) dt = 0$$

با مشتق‌گیری از معادله فوق:

$$5 \frac{di_L}{dt} + 2 \frac{d^2 i_L}{dt^2} - \delta(t) + 2i_L - 20V_o = 0$$

برای لحظه‌ی $t=0^+$ داریم:

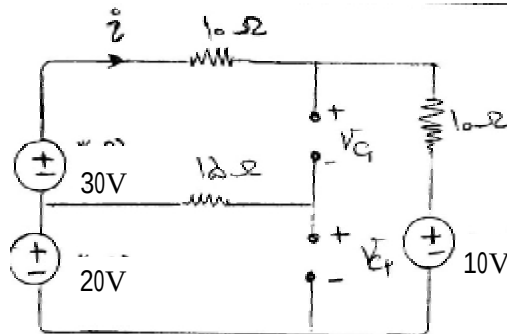
$$(5 \times \frac{1}{2}) + 2 \frac{d^2 i_L(0^+)}{dt^2} - (20 \times 1) = 0 \rightarrow \frac{d^2 i_L(0^+)}{dt^2} = \frac{17/5}{2} = 8.75$$

۹- گزینه ی «۱» صحیح است.

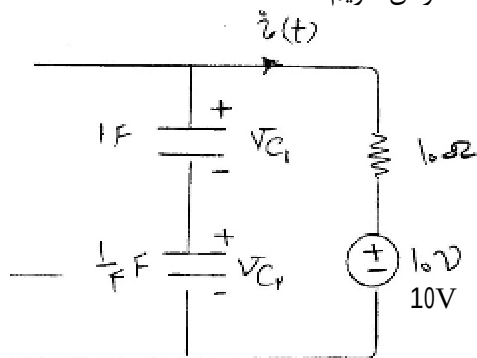
روش اول:

برای مدت طولانی مدار به حالت دائمی رسیده و مخازن ها پر شده اند و به صورت مدار باز در می آیند. در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} i(t=0) = \frac{20+30-10}{10+10} = 2A \\ V_{C_1}(0) = 10V_0 \\ V_{C_2}(0) = 20V_0 \end{cases}$$



در $t=0^+$ که مدار از محل نقطه چین قطع می شود با اعمال KVL در آن داریم:



$$i(t) = -i_{C_1}(t)$$



$$\text{KVL: } 10i(t) + 10 + (-20 + 4 \int_0^t i(t) dt) + (-10 + \int_0^t i(t) dt) = 0$$

$$\rightarrow 10i(t) + 5 \int_0^t i(t) dt = 20 \xrightarrow{\frac{d}{dt}} 2 \frac{di(t)}{dt} + i(t) = 0$$

با در نظر گرفتن $i(t=0) = 2A$ به معادله ی مرتبه اول زیر می رسیم:

$$\begin{cases} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{2}i(t) = 0 \rightarrow i(t) = K e^{-\frac{t}{2}} = 2e^{-\frac{t}{2}} \\ i(t=0) = 2A \end{cases}$$

بنابراین برای $V(t) = V_{C_1}(t)$ داریم:

$$V_{C_1}(t) = V_{C_1}(0) + \int_0^t i_{C_1}(t) dt = 10 - \int_0^t 2e^{-\frac{t}{2}} dt = 10 - (-4e^{-\frac{t}{2}}) \Big|_0^t \rightarrow V_{C_1}(t) = 6 + 4e^{-\frac{t}{2}}$$

روش دوم:

پس از قطع شدن مدار از روی خط چین، مداری مرتبه اول داریم که خازن‌ها سری می‌شوند، در نتیجه:

$$\begin{cases} C_{eq} = \frac{1 \times \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{5} F \rightarrow \tau = R_{eq} C_{eq} = 10 \times \frac{1}{5} = 2 \text{ sec} \\ R_{eq} = 10 \Omega \end{cases}$$

با استفاده از شرایط اولیه مشتق داریم:

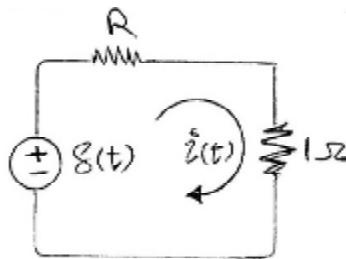
$$\frac{dV(0^+)}{dt} = i_{C_1}(0^+)$$

$$i_{C_1}(0^+) = \frac{10 - (V_{C_1}(0^+) + V_{C_2}(0^+))}{10} = \frac{10 - (10 + 20)}{10} = -2 \text{ A} \rightarrow \frac{dV(0^+)}{dt} = -2$$

بنابراین دو شرط $\tau = 2 \text{ sec}$ و $\frac{dV(0^+)}{dt} = -2$ فقط در گزینه‌ی ۱ صدق می‌کند.

۱۰- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

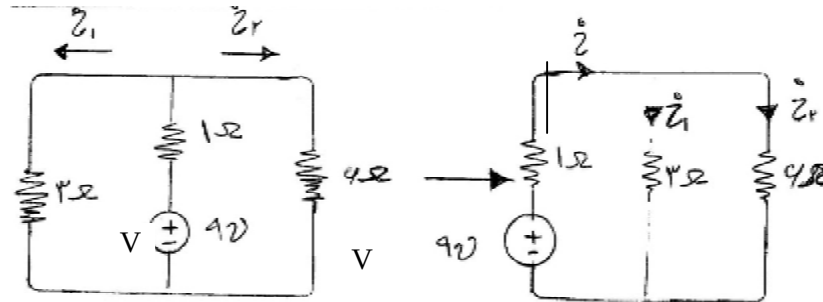
برای ورودی ضربه سلف رامدار باز و خازن را اتصال کوتاه می‌کنیم. در نتیجه داریم:



$$i(t) = \frac{\delta(t)}{R+1} = \frac{2}{3} \delta(t) \rightarrow R+1 = \frac{3}{2} \rightarrow R = \frac{1}{2}$$

۱۱- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

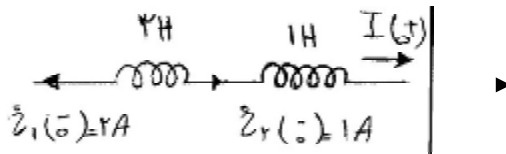
برای به دست آوردن شرایط اولیه، مدار را در $t = 0^-$ تحلیل می‌کنیم:



$$i = \frac{9}{2+1} = 3A, i_1 = \frac{6}{3+6} \times 3 = 2A, i_2 = 1A$$

$$i_L = 3H(0^-) = i_1(0^-) = 2A \text{ و } i_L = 1H(0^-) = i_2(0^-) = 1A$$

بعد از باز شدن کلید S، سلف‌ها با هم سری می‌شوند و مدار مرتبه اول است. چون جریان سلف‌ها متفاوت می‌باشد، از



قانون بقای شار جریان اولیه داریم:

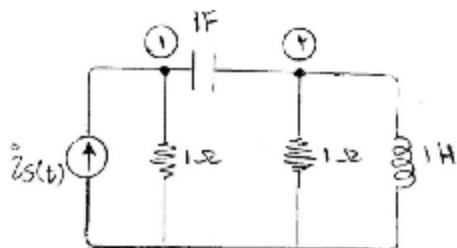
$$I(0^+) = \frac{L_1 i_1(0^-) + L_2 i_2(0^-)}{L_1 + L_2} = \frac{(3 \times (-2)) + (1 \times 1)}{3 + 1} = -\frac{5}{4}$$

$$V(0^+) = 6I(0^+) = -6 \times \frac{5}{4} = -7.5 \text{ Volt}$$

که در گزینه‌ی ۴ صدق می‌کند.

۱۲- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با نوشتن KVL در گره‌های **a** و **b** داریم:



$$V_2 = V$$

$$\text{KVL}(1): V_1 + \frac{d}{dt}(V_1 - V_2) = i_s(t)$$

$$\text{KVL}(2): V_2 + \frac{d}{dt}(V_2 - V_1) + \int_0^t V_2 dt = 0$$

از جمع این دو معادله داریم:

$$V_1 + V_2 + \int_0^t V_2 dt = i_s(t) \rightarrow V_1 = i_s(t) - V_2 - \int_0^t V_2 dt$$

با قرار دادن V_1 به دست آمده در رابطه‌ی دوم داریم:

$$V_2 + \frac{dV_2}{dt} - \frac{d}{dt}(i_s(t) - V_2 - \int_0^t V_2 dt) + \int_0^t V_2 dt = 0 \rightarrow V_2 + \frac{dV_2}{dt} - \frac{di_s(t)}{dt} + \frac{dV_2}{dt} + V_2 + \int_0^t V_2 dt = 0$$

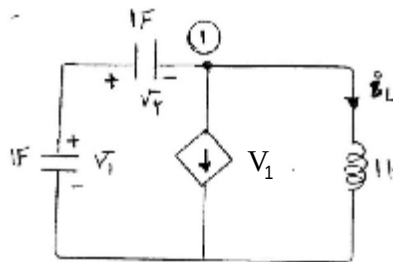
با مشتق‌گیری از این رابطه خواهیم داشت:

$$2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} + 2 \frac{dV_2}{dt} + V_2 = \frac{d^2 i_s(t)}{dt^2}$$

۱۳- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

برای این که هیچ متغیر شبکه تحریک نشود لازم است $\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV_2}{dt} = \frac{di_L}{dt} = 0$ باشد یعنی مقدار تمام متغیرهای V_1 ،

V_2 و i_L ثابت بماند. با نوشتن KVL و KCL داریم:



$$\text{KCLC}(1): \frac{dV_2}{dt} = V_1 + i_L = 0 \rightarrow i_L = -V_1$$

$$\text{در مش بیرونی: } V_1 = V_2 + \frac{di_L}{dt} \rightarrow \frac{di_L}{dt} = V_1 - V_2 = 0 \rightarrow V_1 = V_2$$

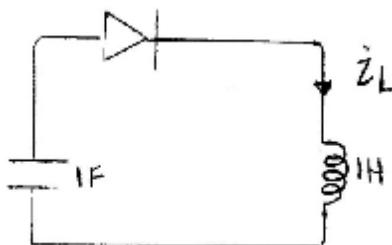
فقط گزینه‌ی ۱ است که در شرایط فوق صدق می‌کند.

۱۴- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

اعمال ورودی ضربه باعث افزایش ولتاژ اولیه خازن از صفر به $\frac{1}{C}$ می‌شود، یعنی ولتاژ خازن از صفر به یک ولت می‌رسد.

برای $t > 0$ منبع جریان ضربه حذف می‌شود و ولتاژ اولیه خازن باعث عبور جریان از مدار خازن، دیود و سلف می‌شود. با

اعمال KVL در این مدار داریم:



$$\text{KVL: } V_L + V_C = 0 \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + i_L(t) = 0$$

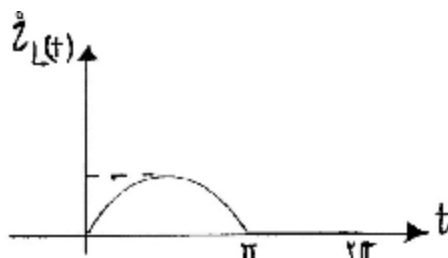
جواب کلی معادله به صورت $i_L(t) = A \sin t + B \cos t$ است که با استفاده از شرایط اولیه داریم:

$$\begin{cases} i_L(0^-) = 0 \\ \frac{di_L}{dt}(0^-) = V_C(0^-) = 1V \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_L(t) = \sin t \\ V_C(t) = \frac{di_L(t)}{dt} = \cos t \end{cases}$$

جریان گذرنده از سلف یعنی $\sin t$ ، در فاصله $0 < t < \pi$ مثبت است پس دیود اتصال کوتاه است و برای $\pi < t < 2\pi$ ،

جریان عبوری از سلف منفی شده و در نتیجه دیود اتصال باز است. بنابراین:

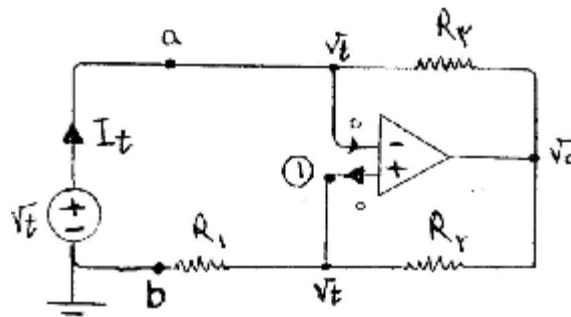
$$i_L(t) = \begin{cases} \sin t & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$



$$i_L(t) = \sin t [u(t) - u(t - \pi)] = \pi P_\pi(t) \sin t$$

۱۵- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

در ابتدا امپدانس ورودی مدار شکل زیر را با قرار دادن منبع ولتاژ تست V_t به دست می‌آوریم:



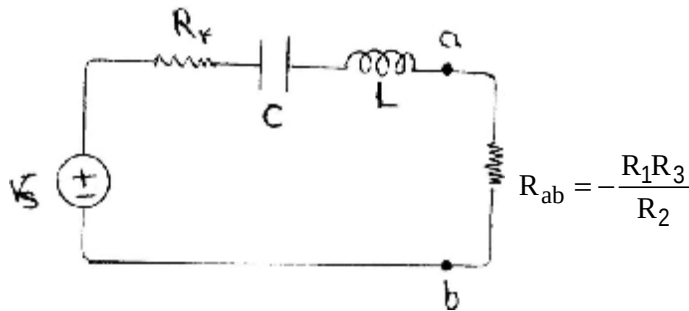
$$I_t = \frac{V_t - V_o}{R_3} \rightarrow V_t - V_o = R_3 I_t$$

با KVL زدن در گره d داریم:

$$V_+ = V_- = V_t$$

$$\text{KCL(1): } \frac{V_t - 0}{R_1} + \frac{V_t - V_o}{R_2} = 0 \rightarrow \frac{V_t}{R_1} + \frac{R_3 I_t}{R_2} = 0 \rightarrow V_t = \frac{R_1 R_3}{R_2} I_t \rightarrow R_{ab} = \frac{V_t}{I_t} = -\frac{R_1 R_3}{R_2}$$

در نتیجه برای مدار اصلی داریم:



برای این که مدار فوق نوسان کند باید مقاومت R_4 برابر $\frac{R_1 R_3}{R_2}$ باشد تا کل مدار مانند یک مدار LC رفتار کند.

بنابراین:

$$R_4 = \frac{R_1 R_3}{R_2} \rightarrow R_1 R_3 = R_2 R_4$$

۱۶- گزینه ی «۲» صحیح است.

این مدار در حقیقت دو مدار مرتبه ی اول است که به طور پشت سر هم وصل شده و هیچ ارتباطی با هم ندارند. برای

مدار RC در $t \geq 0$ داریم:

$$\begin{cases} \tau_1 = RC = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ sec} \rightarrow V_C(t) = e^{-2t} \\ V_C(0^-) = 1V \end{cases}$$

سلف یک هانری با منبع جریان $i(t)$ سری است، پس:

$$V_L = L \frac{di_L}{dt} = \frac{d}{dt} i(t) = u(t)$$

در نتیجه با KVL زدن داریم:

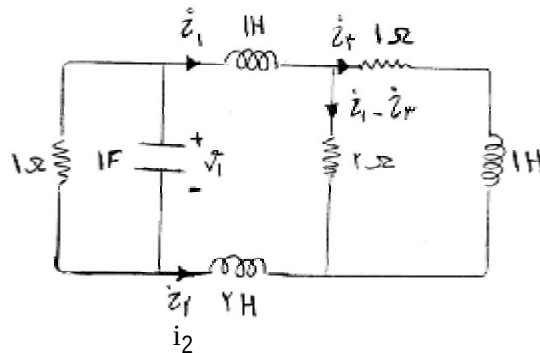
$$\text{KVL: } V_0(t) = -V_C(t) + V_L(t) = -e^{-2t} + u(t)$$

برای $t \geq 0$ خواهیم داشت:

$$V_0(t) = 1 - e^{-2t}$$

۱۷- گزینه ی «۳» صحیح است.

با توجه به شکل می توان گفت $i_1 = -i_2$ ، در نتیجه با نوشتن KVL در مش وسطی داریم:

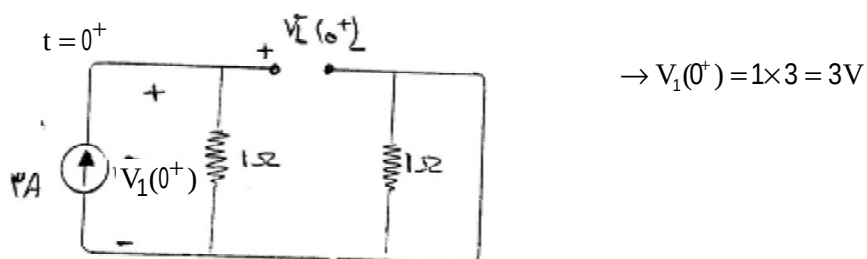
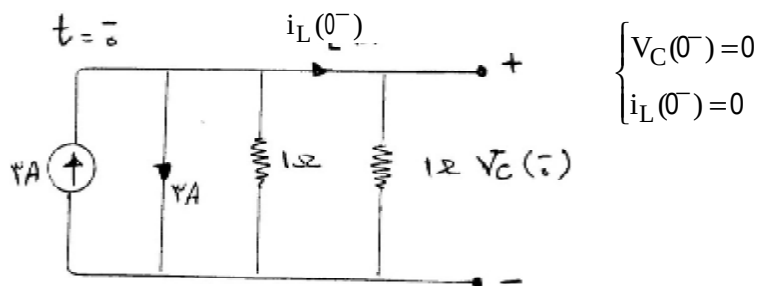


$$\text{KVL: } \frac{di_1}{dt} + 2(i_1 - i_3) - 2 \frac{di_2}{dt} - V = 0 \xrightarrow{\frac{di_2}{dt} = -\frac{di_1}{dt}} 3 \frac{di_1}{dt} + 2i_1 - 2i_3 - V = 0$$

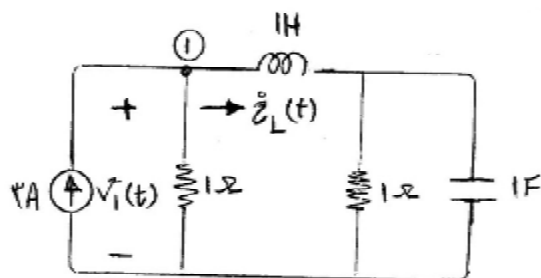
$$\xrightarrow{t=0} \frac{di_1(0)}{dt} = \frac{1}{3} V(0) - \frac{2}{3} i_1(0) + \frac{2}{3} i_3(0)$$

۱۸- گزینه ی «۴» صحیح است.

با رسم مدار در حالت دائمی برای $t=0^-$ و $t=0^+$ داریم:



با KCL زدن در گرهی **d** داریم:



$$\text{KCL(1)}: V_1(t) + i_L(t) = 3 \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{dV_1(t)}{dt} + \frac{di_L(t)}{dt} = 0$$

$$\xrightarrow{t=0^+} \frac{dV_1(0^+)}{dt} = -\frac{di_L(0^+)}{dt} = -V_L(0^+) = -V_1(0^+) \rightarrow \frac{dV_1(0^+)}{dt} = -3$$

۱۹- گزینه ی «۴» صحیح است.

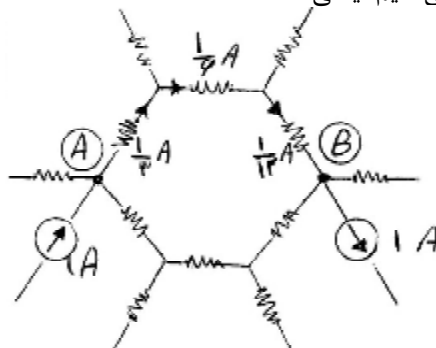
با توجه به شکل می توان گفت این مدار یک RLC سری است که برای آن داریم:

$$2\alpha \frac{R}{L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

پس کافی است مقاومت معادل از دو سر سلف و خازن را به دست آوریم.

برای این منظور یک منبع جریان یک آمپری را از بی‌نهایت به گره A وارد می‌کنیم و یک منبع جریان یک آمپری را از

گره B به سمت بی‌نهایت خارج می‌کنیم، یعنی:



در اثر منبع جریان یک آمپر ورودی داریم:

$$V_{AB} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right) \times 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$$

و در اثر منبع جریان یک آمپر خروجی داریم:

$$V_{AB} = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) \times 1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$$

با استفاده از قضیه‌ی جمع آثار داریم:

$$V_{AB} = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)$$

در نتیجه:

$$R_{eq} = V_{AB} = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right) = \frac{7}{6} \Omega$$

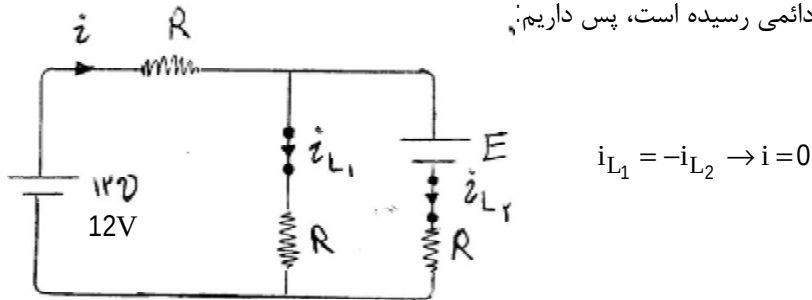
بنابراین برای Q داریم:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \rightarrow 1/2 = \frac{6}{7} \sqrt{\frac{4}{1}} \rightarrow L = 1/96H$$

۲۰- گزینه ی «۴» صحیح است.

مدار فاقد ورودی ضربه است، تنها اتفاقی که می تواند ولتاژ ضربه ایجاد کند، وجود جریان پله در سلفها به دلیل سری شدن آنها بعد از اعمال تغییراتی نظیر باز یا بسته کردن کلید است. برای جلوگیری از این اتفاق باید درست قبل از باز شدن کلید، $i_{L1} = -i_{L2}$ باشد تا بعد از باز شدن کلید و سری شدن سلفها مشکلی پیش نیاید.

قبل از باز شدن کلید مدار به حالت دائمی رسیده است، پس داریم:



$$\text{KVL: } 12 = Ri_{L1}$$

$$\text{KVL: } E = Ri_{L1} - Ri_{L2} = 2Ri_{L1} = 2 \times 12 \rightarrow E = 24 \text{ V}$$

فصل ششم: مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان از مرتبه‌ی n

سیستم‌های LTI که به آن‌ها مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان گفته می‌شود با یک معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی n توصیف می‌شوند. روش تجزیه و تحلیل این مدارها، همانند مدارهای مرتبه اول و دوم است که با استفاده از تجزیه و تحلیل گره و مش، یک معادله دیفرانسیل مرتبه n با ضرایب ثابت بدست می‌آید.

۶-۱- تجزیه و تحلیل مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI) مرتبه‌ی n ام

معادله دیفرانسیل این نوع مدارها به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m W}{dt^m} + \dots + b_0 W$$

که در آن W ورودی و y خروجی است.

همراه این معادله دیفرانسیل، n تا شرط اولیه لازم است. شرایط اولیه را می‌توان از معادلات اولیه گره یا مش در زمان $t=0$ بدست آورد.

6-1-1- پاسخ ورودی صفر

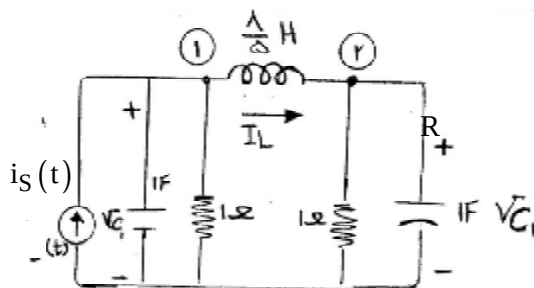
برای بدست آوردن پاسخ ورودی صفر، سمت راست معادله دیفرانسیل فوق را برابر صفر قرار می‌دهیم و در معادله‌ی همگن حاصل، با بدست آوردن ریشه‌های معادله مشخصه و استفاده از انواع پاسخ‌های مطرح شده در مدارهای مرتبه‌ی دوم، پاسخ ورودی صفر را مشخص می‌کنیم. در این حالت معادل هر دسته از ریشه‌های معادله مشخصه، یک دسته جواب خاص داریم.

با توجه به مرتبه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل بدست آمده (مرتبه‌ی n ام)، برای یافتن ضرایب پاسخ، از شرایط اولیه و شرایط اولیه مشتق (تا مشتق مرتبه‌ی $(n-1)$ ام) استفاده می‌کنیم.

برای درک بهتر و کامل این موضوع، مثال زیر را بررسی می‌نماییم.

مثال ۱: در مدار شکل زیر، معادله دیفرانسیلی برحسب V_{C_2} بنویسید و پاسخ ورودی صفر را برای آن بدست آورید.

$$V_{C_1}(0) = V_{C_2}(0) = i_L(0) = 1$$



با KCL زدن در گره‌های ۱ و ۲ داریم:

$$\text{KCL(1): } \frac{V_1}{1} + \frac{dV_{C_1}}{dt} + I_0 + \frac{5}{8} \int_0^t (V_1 - V_2) dt = i_S(t)$$

$$\text{KCL(2): } \frac{V_2}{1} + \frac{dV_{C_2}}{dt} - I_0 + \frac{5}{8} \int_0^t (V_2 - V_1) dt = 0$$

اگر دو رابطه‌ی فوق را با هم جمع کنیم:

$$V_1 + V_2 + \frac{dV_{C_1}}{dt} + \frac{dV_{C_2}}{dt} = i_S(t) \rightarrow V_1 + \frac{dV_1}{dt} + V_2 + \frac{dV_2}{dt} = i_S(t)$$

و با مشتق‌گیری از رابطه‌ی KCL در گره ۲ داریم:

$$\frac{dV_2}{dt} + \frac{d^2V_2}{dt^2} + \frac{5}{8}(V_2 - V_1) = 0$$

با توجه به دو رابطه‌ی آخر و با حذف V_1 و $\frac{dV_1}{dt}$ داریم:

$$\begin{cases} V_1 + \frac{dV_1}{dt} = i_S(t) - V_2 - \frac{dV_2}{dt} \\ \frac{dV_2}{dt} + \frac{d^2V_2}{dt^2} + \frac{5}{8}(V_2 - i_S(t) - V_2 - \frac{dV_2}{dt} - \frac{dV_1}{dt}) = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{d^3V_2}{dt^3} + 2\frac{d^2V_2}{dt^2} + \frac{9}{4}\frac{dV_2}{dt} + \frac{5}{4}V_2 = \frac{5}{8}i_S(t)$$

معادله مشخصه برابر است با:

$$S^3 + 2S^2 + \frac{9}{4}S + \frac{5}{4} = 0$$

با حل این معادله‌ی درجه ۳، ریشه‌های آن برابر است با:

$$S_1 = -1, \quad S_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm j$$

بنابراین فرم کلی پاسخ $V_2(t)$ به صورت زیر است:

$$V_2(t) = Ke^{-t} + e^{-\frac{t}{2}}(A \cos t + B \sin t)$$

برای یافتن ضرایب K ، A و B نیازمند سه شرط اولیه برای $V_2(t)$ هستیم.

با توجه به شرایط اولیه مطرح شده در سؤال:

$$V_{C_2}(0) = V_2(0) = 1V$$

دو شرط اولیه دیگر را باید از شرایط مشتق بدست آوریم:

برای بدست آوردن $\frac{dV_2(0)}{dt}$ ، در رابطه‌ی KCL در گره **d**، $t=0$ قرار می‌دهیم.

$$V_2(0) + \frac{dV_2(0)}{dt} - I_0 + \frac{5}{8} \int_0^0 (\dots) dt = 0 \rightarrow 1 + \frac{dV_2(0)}{dt} - 1 + 0 = 0 \rightarrow \frac{dV_2(0)}{dt} = 0$$

و برای $\frac{d^2V_2(0)}{dt^2}$ ، در رابطه‌ی مشتق KCL در گره **d**، $t=0$ قرار می‌دهیم.

$$\frac{dV_2(0)}{dt} + \frac{d^2V_2(0)}{dt^2} + \frac{5}{8}(V_2(0) - V_1(0)) = 0 \rightarrow 0 + \frac{d^2V_2(0)}{dt^2} + \frac{5}{8}(1-1) = 0 \rightarrow \frac{d^2V_2(0)}{dt^2} = 0$$

پس با توجه به شرایط اولیه بدست آمده داریم:

$$\begin{cases} V_2(0) = 1 \\ \frac{dV_2(0)}{dt} = 0 \\ \frac{d^2V_2(0)}{dt^2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K + A = 1 \\ -K - \frac{1}{2}A + B = 0 \\ K - \frac{3}{4}A - B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K = 1 \\ A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

و پاسخ نهایی به صورت زیر است:

$$V_2(t) = e^{-t} + e^{-\frac{t}{2}} \sin t$$

حل این دسته از مسائل به روش بیان شده، طولانی و وقت‌گیر است و در سؤالات تستی عاقلانه نمی‌باشد. پس باید به

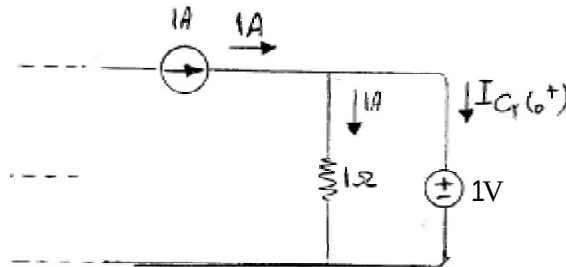
دنبال روشی بود که بدون حل مسأله به طریق فوق، با بدست آوردن شرایط اولیه و شرایط اولیه مشتق، جواب صحیح را

در مسائل تستی پیدا کرد. برای این منظور، از روش بیان شده در مدارهای مرتبه‌ی دوم در بخش 5-2-2 استفاده

می‌کنیم.

مثلاً در همین مثال، برای یافتن $\frac{dV_2(0)}{dt}$:

مدار را در $t=0^+$ به کمک رابطه‌ی صفر رسم می‌کنیم.



$$KCL: 1 = 1 + I_{C_2}(0^+) \rightarrow I_{C_2}(0^+) = 0$$

$$\frac{dV_2(0^+)}{dt} = \frac{I_{C_2}(0^+)}{C} = 0$$

پس می‌توان گفت گزینه‌ای درست است که اگر از آن مشتق بگیریم و $t=0$ قرار دهیم، حاصل آن صفر می‌شود.

در این سؤال، قسمتی از مدار که در سمت چپ منبع جریان قرار دارد و با آن سری شده است، اهمیتی ندارد زیرا هر چه که باشد، جریان خروجی‌اش $1A$ است و برای بررسی سمت راست مدار، همین اطلاع کافی می‌باشد.

به عبارت دیگر، در حل مسائل تستی، تنها همان بخش از مدار که لازم است را بررسی می‌کنیم و زمان را برای تحلیل سایر قسمت‌های مدار که نیازی به آن‌ها نیست، تلف نمی‌کنیم.

6-1-2- پاسخ حالت صفر

در این حالت شرایط اولیه وجود ندارند و هدف بدست آوردن خروجی، در اثر اعمال یک ورودی است.

برای این منظور می‌توان مدار را هم در حوزه زمان و هم در حوزه فرکانس تجزیه و تحلیل نمود.

$$X(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) \quad X(S) \rightarrow \boxed{H(S)} \rightarrow Y(S)$$

که $h(t)$ را پاسخ ضربه و $H(S)$ را تابع تبدیل می‌گویند.

در این قسمت به بررسی مدار در حوزه زمان می‌پردازیم و بررسی در حوزه فرکانس در فصل یازدهم بیان می‌شود.

در حوزه زمان دو نوع مسأله وجود دارد:

۱- ورودی و خروجی را داریم و پاسخ ضربه را می‌خواهیم.

در این نوع از مسائل، با مشتق‌گیری از طرفین ورودی و خروجی و استفاده از خواص جمع آثار و تغییرناپذیری با زمان،

در طرف ورودی توابع غیر ضربه را حذف می‌کنیم تا در طرف ورودی فقط ضربه داشته باشیم و در نتیجه پاسخ مربوط به ورودی ضربه (که همان پاسخ ضربه است) در خروجی ظاهر می‌شود.

برای درک بهتر این موضوع به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۲: با توجه به ورودی و خروجی داده شده، پاسخ ضربه را بدست آورید.

$$x(t) = e^{-2t} \cdot u(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) = (e^{-t} - e^{-2t}) \cdot u(t)$$

اگر یک بار از ورودی و خروجی مشتق بگیریم و یک بار آن‌ها را در ۲ ضرب کنیم و سپس طرفین را با هم جمع نماییم:

$$-2e^{-2t}u(t) + \delta(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow (-e^{-t} + 2e^{-2t})u(t)$$

$$2e^{-2t}u(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow 2(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

$$\delta(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow e^{-t}u(t)$$

بنابراین پاسخ ضربه بدست می‌آید:

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

مثال ۳: در سیستم زیر، پاسخ ضربه را پیدا کنید.

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \cdot u(t) \\ y(t) = e^{-t} \cdot u(t) \end{cases}$$

از طرفین ورودی و خروجی مشتق می‌گیریم:

$$\cos t \cdot u(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow e^{-t} \cdot u(t)$$

$$-\sin t \cdot u(t) + \delta(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow -e^{-t} \cdot u(t) + \delta(t)$$

یکبار دیگر هم مشتق می‌گیریم:

$$-\cos t \cdot u(t) + \delta'(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow e^{-t} \cdot u(t) - \delta(t) + \delta'(t)$$

با جمع رابطه‌ی اول و سوم داریم:

$$\delta'(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow 2e^{-t} \cdot u(t) - \delta(t) + \delta'(t)$$

و در نهایت با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه بدست آمده:

$$\delta(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow -2e^{-t}u(t) + \delta(t) - u(t)$$

بنابراین طرف راست رابطه بالا همان پاسخ به ورودی ضربه یا پاسخ ضربه است:

$$h(t) = (-2e^{-t} - 1)u(t) + \delta(t)$$

۲- ورودی و پاسخ ضربه را داریم و خروجی را می‌خواهیم.

در این نوع مسائل در حوزه زمان، از فرمول کانولوشن استفاده می‌کنیم:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau).h(t-\tau)d\tau = x * h$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau).x(t-\tau)d\tau = h * x$$

با جایگذاری در روابط فوق، $y(t)$ خروجی به دست می‌آید.

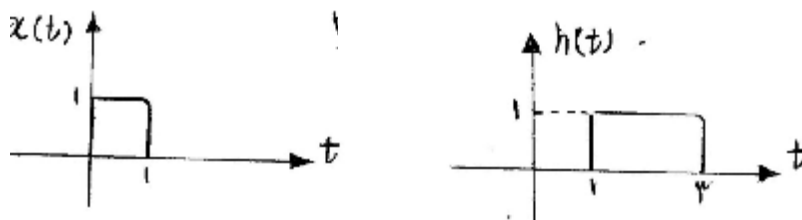
2-6- کانولوشن ترسیمی

هنگامی که شکل موج ورودی و پاسخ ضربه را داشته باشیم، نام محور افقی را τ گذاشته و یکی از $x(\tau)$ یا $h(\tau)$ را نسبت به محور قائم قرینه می‌کنیم تا $x(-\tau)$ یا $h(-\tau)$ حاصل شود. با حرکت دادن شکل حاصل به میزان t روی محور افقی به سمت راست به $x(t-\tau)$ یا $h(t-\tau)$ می‌رسیم. در بازه‌های هم‌فرم که قاعده‌ها یکسان هستند، حاصل ضرب $x(t-\tau).h(\tau)$ یا $x(\tau).h(t-\tau)$ را به دست می‌آوریم و سطح زیر منحنی حاصل را به دست می‌آوریم (یعنی از آن انتگرال می‌گیریم).

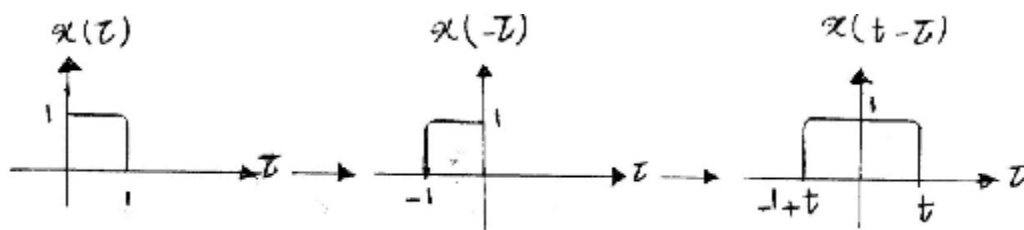
لازم به ذکر است با توجه به خاصیت انتگرال کانولوشن، شکل موجی را نسبت به محور قائم قرینه می‌کنیم که ساده‌تر باشد.

به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۴: با توجه به شکل موج‌های $x(t)$ ورودی و $h(t)$ پاسخ ضربه، خروجی $y(t)$ را به دست آورید.

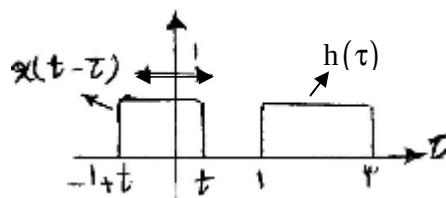


در ابتدا با توجه به ساده‌تر بودن شکل موج ورودی، $x(t-\tau)$ را به دست می‌آوریم:



و با رسم دو شکل موج $x(t-\tau)$ و $h(\tau)$ در بازه‌های زمانی مربوطه داریم:

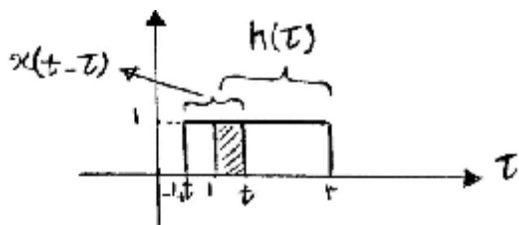
$$1) 0 \leq t < 1$$



در این بازه دو شکل موج هیچ تداخلی با یکدیگر ندارند، در نتیجه:

$$y(t) = 0$$

$$2) 1 \leq t < 2$$

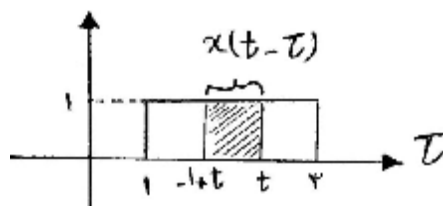


در این بازه با توجه به مقادیر t ، از زمان 1 تا t ثانیه تداخل داریم، در نتیجه:

$$y(t) = \int_1^t x(t-\tau) h(\tau) d\tau = \int_1^t 1 \times 1 d\tau = \tau \Big|_1^t = t - 1$$

که این مقدار برابر است با مساحت هاشور خورده در شکل.

$$3) 2 \leq t < 3$$

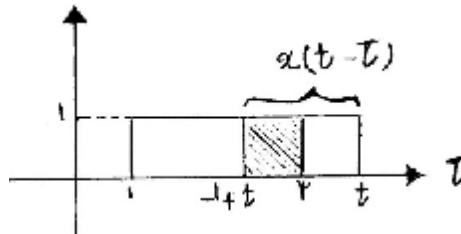


در این بازه زمانی کل شکل موج $x(t-\tau)$ با $h(t)$ تداخل دارد.

به عبارت دیگر، به ازای $t = 2/01$ تا $t = 2/99$ در پاسخ هیچ فرقی وجود ندارد. با توجه به مساحت ناحیه هاشور خورده که کل شکل موج $x(t-\tau)$ است داریم:

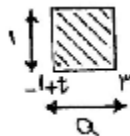
$$y(t) = 1$$

$$4) 3 \leq t < 4$$



در این بازه زمانی، شکل موج $x(t-\tau)$ از موج $h(\tau)$ خارج می‌شود.

انتگرال کانولوشن برابر است با مساحت قسمت هاشور خورده در شکل:



$$a = 3 - (-1+t) = 4-t \rightarrow y(t) = (4-t) \times 1 = 4-t$$

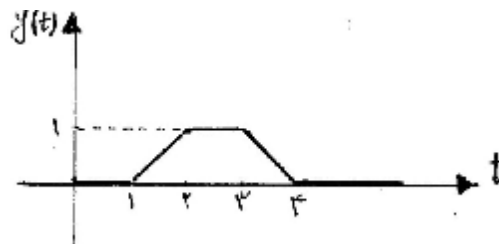
$$5) t \geq 4$$

در این بازه زمانی، شکل موج $x(t-\tau)$ کاملاً از موج $h(\tau)$ عبور می‌کند و هیچ تداخلی با یکدیگر ندارند. پس:

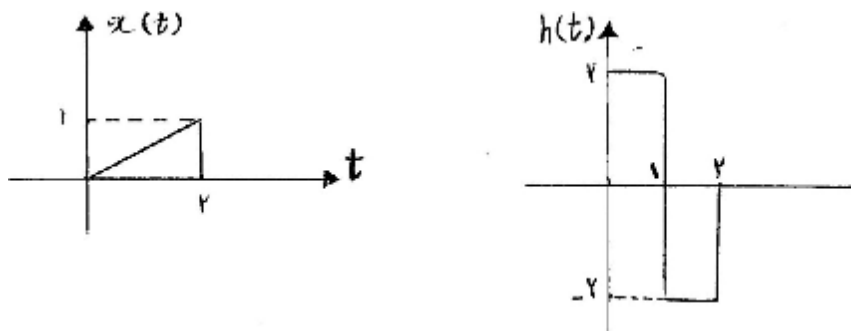
$$y(t) = 0$$

در نتیجه، پاسخ کل به صورت زیر است:

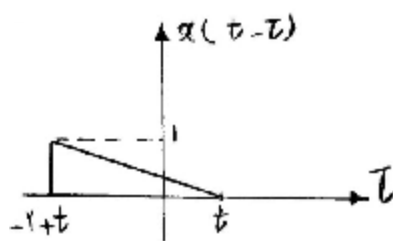
$$y(t) = \begin{cases} 0 & ; & 0 \leq t < 1 \\ t-1 & ; & 1 \leq t < 2 \\ 1 & ; & 2 \leq t < 3 \\ 4-t & ; & 3 \leq t < 4 \\ 0 & ; & t \geq 4 \end{cases}$$



مثال ۵: با توجه به شکل موج‌های ورودی و پاسخ ضربه، خروجی $y(t)$ را به دست آورید.

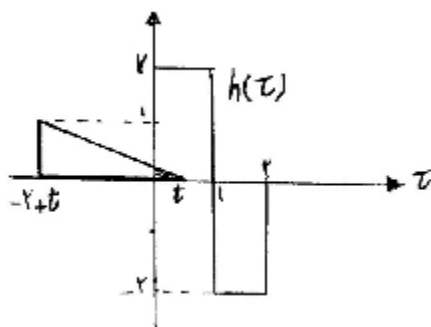


$h(\tau)$ را ثابت در نظر می‌گیریم و $x(t-\tau)$ را به دست می‌آوریم:



در بازه‌های زمانی هم فرم خواهیم داشت:

$$1) 0 \leq t < 1$$



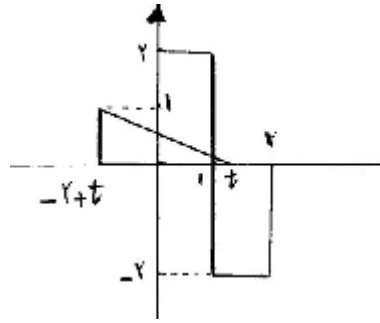
با توجه به تداخل شکل موج‌ها داریم:

$$y(t) = \int_{h(\tau)} \left(\frac{t}{2} \times \text{مساحت شکل} \right) d\tau = 2 \times \frac{t \times t}{2 \times 2} = \frac{t^2}{2}$$

$\begin{matrix} \updownarrow & \leftarrow & \text{شکل} & \rightarrow & \updownarrow \\ 1 & 4 & 4 & 4 & 2 & 4 & \dots \end{matrix}$

$x(t-\tau)$

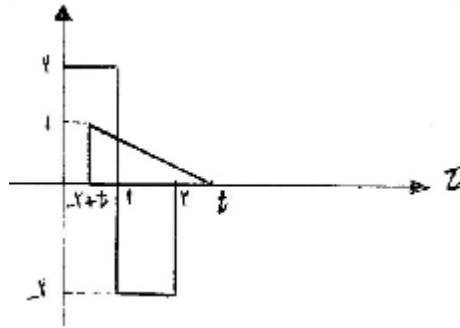
$$2) 1 \leq t < 2$$



$$y(t) = \left[2 \times \left(\frac{t}{2} \times \frac{t-1}{2} \right) \right] + \left[-2 \times \left(\frac{t-1}{2} \times \frac{t-1}{2} \right) \right]$$

$$\rightarrow y(t) = 2 \times \left(\frac{t+t-1}{2} \right) \times \frac{1}{2} - 2 \times \left(\frac{t-1}{2} \times \frac{t-1}{2} \right) = \frac{2t-1}{2} - \frac{(t-1)^2}{2}$$

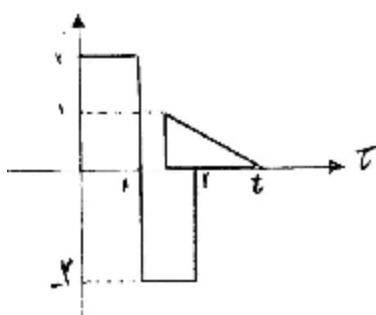
3) $2 \leq t < 3$



$$y(t) = \left[2 \times \left(1 \times \frac{t-1}{2} \right) \right] + \left[-2 \times \left(\frac{t-1}{2} \times \frac{t-2}{2} \right) \right]$$

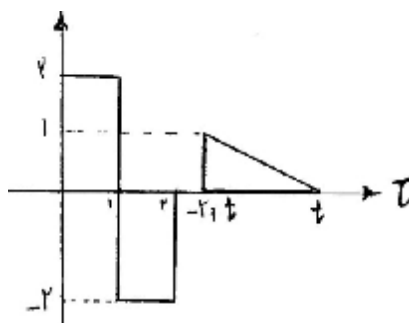
$$= 2 \left(\left(1 + \frac{t-1}{2} \right) \times \frac{3-t}{2} - 2 \times \left(\frac{t-1+t-2}{2} \right) \times \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} (t+1)(3-t) - (2t-3)$$

4) $3 \leq t < 4$



$$y(t) = -2 \times \left(1 + \frac{t-2}{4-t} \right) \times \frac{4-t}{2} = -2 \left(1 + \frac{t-2}{2} \right) \times \frac{4-t}{2} = \frac{t(t-4)}{2}$$

5) $t \geq 4$



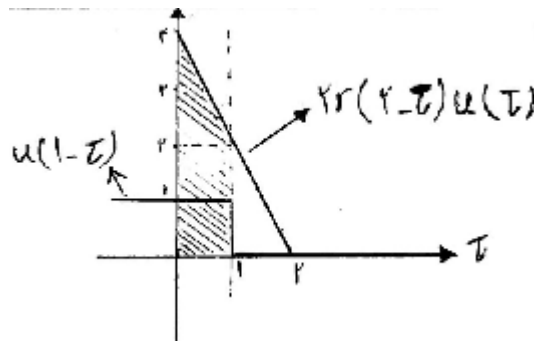
$$y(t) = 0$$

در تست‌ها معمولاً خروجی را در یک لحظه معلوم می‌خواهند. پس به جای چند مرحله محاسبات پارامتری، یک مرحله و به صورت عددی محاسبات را انجام می‌دهیم.

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t_0 - \tau) d\tau$$

مثال ۶: پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان به صورت $h(t) = 2r(2-t)u(t)$ است. مقدار پاسخ پله آن را در $t_0 = 1s$ به دست آورید.

در ابتدا $2r(2-t)u(t)$ را رسم می‌کنیم و شکل موج $u(t)$ را نسبت به محور قائم قرینه می‌کنیم. پس به میزان $t_0 = 1$ واحد به سمت راست شیفت می‌دهیم. داریم:



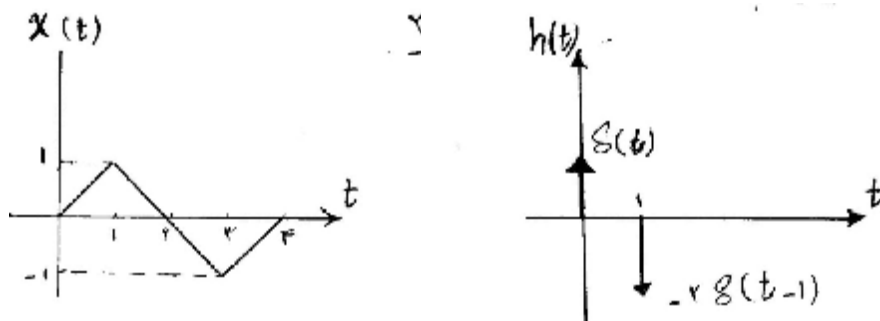
$$y(t)|_{t_0=1s} = \frac{4+2}{2} = 3$$

* حالت خاص

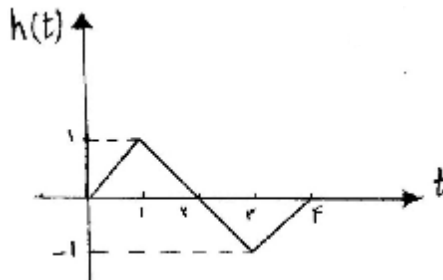
هرگاه یکی از توابع $x(t)$ یا $h(t)$ به صورت ترکیبی خطی از توابع ضربه باشد (فقط توابع ضربه)، با توجه به خاصیت جابه‌جایی، ورودی $x(t)$ را همان تابع می‌گیریم، پس آن تابع دیگر در حکم پاسخ ضربه می‌باشد و با توجه به پاسخ ضربه، خروجی به دست می‌آید.

برای درک بهتر این حالت خاص، مثال زیر را در نظر بگیرید:

مثال ۷: با توجه به ورودی و پاسخ ضربه، خروجی را به دست آورید.



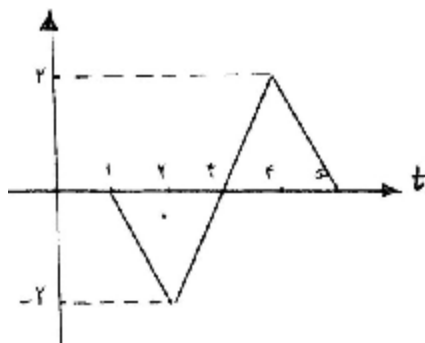
با توجه به توضیحات بیان شده، جای x و h را عوض می‌کنیم و پاسخ ضربه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:



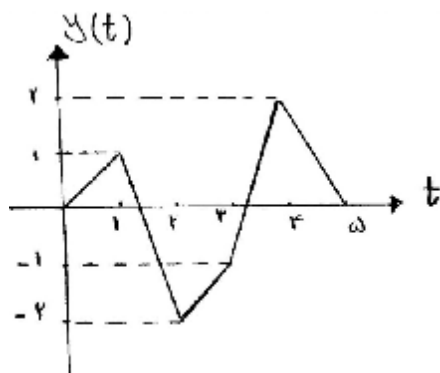
پس اگر $\delta(t)$ به عنوان ورودی باشد، خروجی آن $h(t)$ فوق است.

برای ورودی $-2\delta(t-1)$ ، خروجی $h(t)$ در -2 ضرب می‌شود و به میزان یک واحد به سمت راست شیفت پیدا می‌کند.

یعنی:



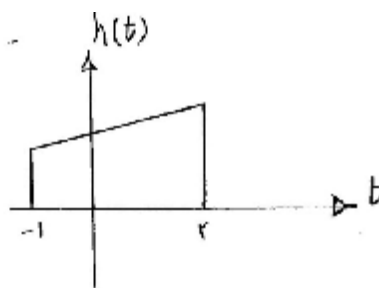
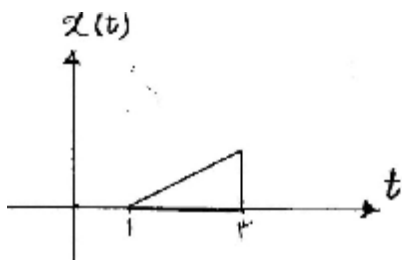
در نتیجه جواب کل، حاصل جمع دو شکل فوق است:



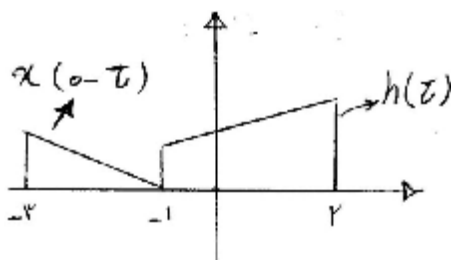
۶-۳- ناحیه پاسخ

در بعضی مواقع، فقط ناحیه پاسخ را می‌خواهیم. برای این منظور، یکی از شکل موج‌ها را نسبت به محور قائم قرینه می‌کنیم و می‌بینیم به ازای چه میزان شیفت t در آن، تداخل دو شکل موج شروع و در کجا پایان می‌پذیرد. این محدوده را ناحیه پاسخ می‌نامیم.

مثال ۸: در کانولوشن شکل موج‌های زیر، ناحیه پاسخ در چه بازه‌ای قرار دارد؟



با قرینه کردن $x(t)$ ، دیده می‌شود که تداخل از $t=0$ شروع می‌شود:



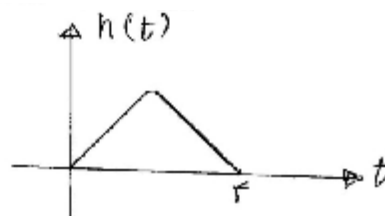
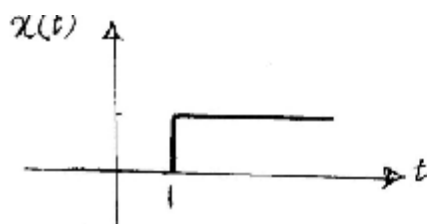
و وقتی شکل سمت چپ را 5 واحد به سمت راست شیفت دهیم، تداخل تمام می‌شود. پس ناحیه پاسخ برابر است با:

$$0 \leq t < 5$$

نکته: ناحیه پاسخ برابر است با:

جمع حدهای بالا $x(t)$ و $h(t) \leq$ ناحیه پاسخ $\leq$ جمع حدهای پایین $x(t)$ و $h(t)$

مثال ۹: ناحیه پاسخ را به دست آورید.



$$1+0 \leq \text{ناحیه پاسخ} \leq 4+\infty \rightarrow 1 \leq t$$

تست‌های طبقه‌بندی شده مبحث مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان

۱- کدام عبارت در مورد شبکه‌های LTI متشکل از فقط مقاومت‌ها و خازن‌ها و سلف‌ها (که مقادیر همه‌شان

مثبت است) همواره درست است؟

(1) در این شبکه‌ها، شرایط اولیه فقط در پاسخ گذرای شبکه تأثیر دارند.

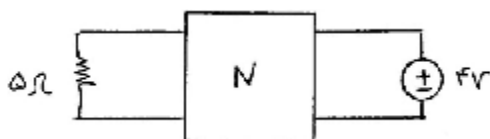
(2) در این شبکه‌ها، ورودی‌های کران‌دار همیشه خروجی‌های کران‌دار ایجاد می‌کنند.

(3) در این شبکه‌ها، پاسخ کامل شبکه تابعی خطی از شرایط اولیه است.

(4) هیچ‌کدام

۲- مدار داده شده در شکل زیر، مقاومتی و خطی و تغییرناپذیر با زمان است. ۸۰ درصد توان متوسط توسط

N جذب می‌شود. اندازه منبع ولتاژ ثابت را چند برابر کنیم تا ۳۰ درصد توان به مقاومت ۵ اهمی برسد؟



(1) $\frac{3}{2}$ برابر

(2) $\frac{9}{4}$ برابر

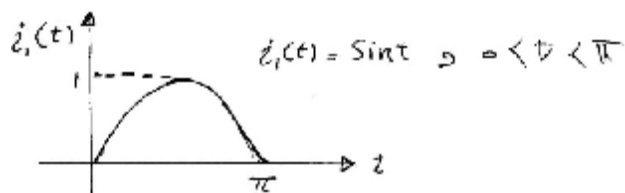
(3) ۸۰ درصد توان جذب شده توسط 5Ω فقط به مقدار مقاومت بستگی دارد و مستقل از منبع ولتاژ است.

(4) ۸۰ درصد توان جذب شده توسط 5Ω به مقدار مقاومت و N بستگی دارد و مستقل از اندازه منبع ولتاژ است.

۳- پاسخ حالت صفر یک مدار خطی و تغییرناپذیر با زمان به ورودی $i_1(t)$ به صورت

$$V_1(t) = \begin{cases} \sin t - e^{-t}, & 0 < t < \pi \\ e^{-(t-\pi)}, & t > \pi \end{cases}$$

در $i_2(t) = \cos t$ می‌باشد. پاسخ حالت صفر این مدار به ورودی $i_2(t)$ در



کدام است $t = \frac{3\pi}{2}$ ؟

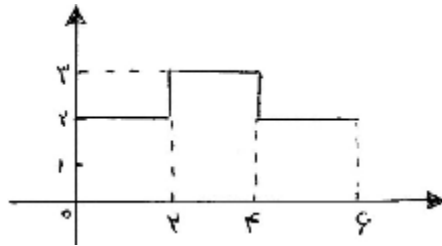
(1) $-2e^{-\frac{\pi}{2}}$

(2) $-e^{-\frac{3\pi}{2}}$

(3) $-\left(1 + e^{-\frac{3\pi}{2}}\right)$

(4) $-e^{-\frac{3\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}$

۴- پاسخ ضربه یک مدار خطی و تغییرناپذیر با زمان به صورت $h(t) = e^{-t}u(t)$ معلوم است. پاسخ حالت صفر این مدار به ورودی مقابل در $t = 3s$ کدام است؟



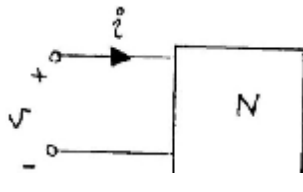
(1) $3 - e^{-1} - e^{-3}$

(2) $3 - e^{-1} - 2e^{-3}$

(3) $2 - 2e^{-1} - 3e^{-3}$

(4) $3 - 2e^{-1} - 3e^{-3}$

۵- یک قطبی N متشکل از مقاومت‌های خطی تغییرناپذیر با زمان و منابع وابسته DC و منابع وابسته از هر نوع می‌باشد. کدام یک از توصیف‌های زیر برای مشخص‌سازی آن همواره برقرار است؟



(1) $i = \alpha_1 V + \alpha_2$ و α_1 و α_2 ثابت‌های وابسته به N

(2) $V = k_1 i + k_2$ و k_1 و k_2 ثابت‌های وابسته به N

(3) $aV + Bi + C = 0$ و a و b و c ثابت‌های وابسته به N

(4) هر سه گزینه فوق صحیح است.

۶- پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان به صورت $h(t) = 2t(2-t)u(t)$ می‌باشد. مقدار پاسخ پله این مدار در $t = 1\text{sec}$ کدام است؟

(1) 4

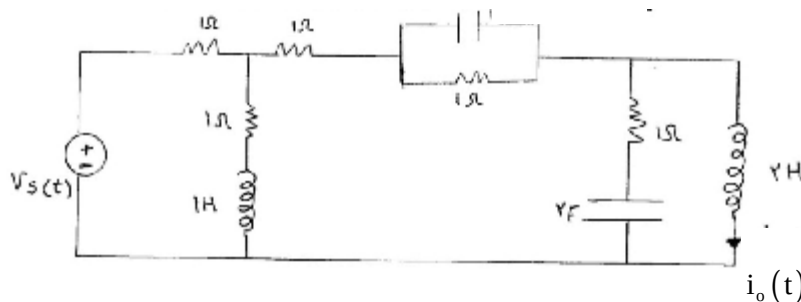
(2) 2/5

(3) 3

(4) 1

۷- شبکه خطی تغییرناپذیر با زمان شکل زیر در حالت صفر قرار دارد. اگر $V_s(t) = \delta(t)$ باشد، مقدار

$i_o(0^+)$ چقدر است؟



(1) $\frac{1}{3}A$

(2) $\frac{1}{4}A$

(3) $\frac{1}{6}A$

(4) $\frac{1}{8}A$

پاسخ تشریحی

۱- گزینه ی «۴» صحیح است.

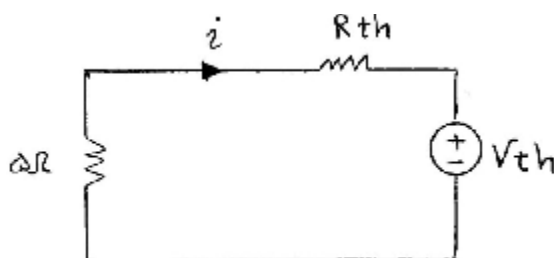
گزینه «1» نادرست است زیرا ممکن است شرایط اولیه در پاسخ حالت دائمی نیز تأثیر داشته باشد. مثلاً یک مدار LC با شرایط اولیه $V_C(0) = V_0$ و $i_L(0) = 0$ دارای پاسخ گذرا نیست ولی پاسخ حالت دائمی آن برحسب ولتاژ خازن به صورت $V_C(t) = CV_0 \cos \omega_0 t$ است که $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ و بنابراین شرایط اولیه روی پاسخ حالت دائمی نیز اثر داشته است.

گزینه «2» نادرست است زیرا اگر در مدار LC سیگنال ورودی با فرکانس $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ وجود داشته باشد، پاسخ با گذشت زمان افزایش می یابد و بنابراین کران دار نیست.

گزینه «3» نادرست است زیرا پاسخ کامل مجموع پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر است و با K برابر کردن شرایط اولیه، پاسخ کامل K برابر نمی شود.

۲- گزینه ی «۴» صحیح است.

با توجه به مقاومتی و تغییرناپذیر با زمان بودن شبکه N، می توان از دو سر مقاومت 5Ω یک مدار معادل تونن برای شبکه در نظر گرفت:



برای نسبت توان تحویلی به مقاومت 5Ω داریم:

$$\left| \frac{P_{5\Omega}}{P_t} \right| = \left| \frac{5i^2}{V_{th}i} \right| = \left| \frac{5i}{V_{th}} \right| = \left| \frac{5}{V_{th}} \times \frac{-V_{th}}{5 + R_{th}} \right| = \frac{5}{5 + R_{th}}$$

یعنی درصدی از توان کل که به مقاومت 5 اهمی می رسد به مقدار این مقاومت و همچنین مقدار R_{th} (مقدار مقاومت شبکه N) بستگی دارد و میزان V_{th} روی این درصد تأثیری ندارد.

۳- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

سیگنال ورودی $i_1(t)$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$i_1(t) = \sin t u(t) - \sin(t - \pi) u(t - \pi)$$

پس می‌توان برای $0 < t < 2\pi$ ، ورودی $i_2(t)$ را به صورت مشتق $i_1(t) - i_1(t - \pi)$ در نظر گرفت:

$$i_2(t) = \frac{d}{dt} [i_1(t) - i_1(t - \pi)]$$

با توجه به پاسخ داده شده برای ورودی $i_1(t)$ و خطی بودن مدار با استفاده از قضیه جمع آثار داریم:

$$V_2(t) = \frac{d}{dt} [V_1(t) - V_1(t - \pi)]$$

که به ازای $t = \frac{3\pi}{2}$ می‌توان گفت:

$$\begin{aligned} V_2(t) \Big|_{t=\frac{3\pi}{2}} &= \frac{d}{dt} \left[e^{-(t-\pi)} - (\sin(t-\pi) - e^{-(t-\pi)}) \right] \Big|_{t=\frac{3\pi}{2}} \\ &= \left[-e^{-(t-\pi)} - \cos(t-\pi) - e^{-(t-\pi)} \right] \Big|_{t=\frac{3\pi}{2}} = -2e^{-\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

۴- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

ورودی داده شده به صورت زیر قابل بیان است:

$$x(t) = 2u(t) + u(t-2) - u(t-4)$$

پاسخ ضربه مدار به صوت $h(t) = e^{-t}u(t)$ داده شده است. با توجه به این که پاسخ پله انتگرال پاسخ ضربه است، پاسخ

پله مدار برابر است با:

$$S(t) = \int_0^t e^{-t} u(t) dt = -e^{-t} \Big|_0^t = (1 - e^{-t}) u(t)$$

بنابراین با استفاده از قضیه جمع آثار، پاسخ حالت صفر مدار به ورودی $x(t)$ برابر است با:

$$y(t) = 2(1 - e^{-t})u(t) + (1 - e^{-(t-2)})u(t-2) - (1 - e^{-(t-4)})u(t-4)$$

که مقدار این پاسخ در $t = 3 \text{ sec}$ برابر است با:

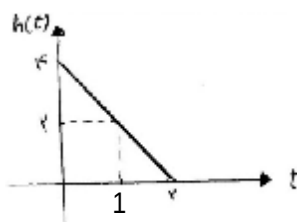
$$y(t=3) = 2(1 - e^{-3}) + (1 - e^{-1}) - 0 = 3 - e^{-1} - 2e^{-3}$$

۵- گزینه ی «۳» صحیح است.

در حالت کلی ممکن است ضریب i صفر باشد و نتوان معادله را برحسب i حل کرد. همچنین ممکن است ضریب V صفر باشد و معادله را نمی توان برحسب V حل نمود. ولی معادله $aV + bi + c = 0$ حالت کلی معادله است و می توان شبکه N را برحسب مدارهای معادل تونن یا نورتن بیان کرد.

۶- گزینه ی «۲» صحیح است.

شکل موج پاسخ ضربه به صورت زیر است:

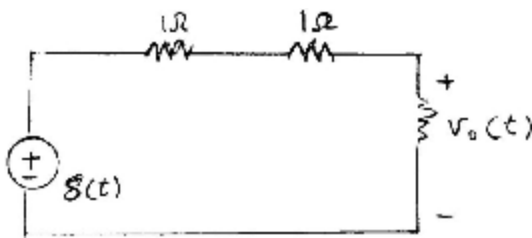


پاسخ پله، انتگرال پاسخ ضربه است و مقدار آن در $t=1$ برابر سطح زیر نمودار تا زمان یک ثانیه می باشد، پس:

$$s(t) \Big|_{t=1} = \left(\frac{2+4}{2} \right) \times 1 = 3$$

۷- گزینه ی «۳» صحیح است.

پس از اعمال ورودی ضربه در لحظه $t=0^+$ ، سلف ها مدار باز و خازن ها اتصال کوتاه می شوند. پس مدار به صورت شکل زیر تبدیل می شود:



در نتیجه:

$$V_o(t) = \frac{1}{1+2} \delta(t) = \frac{\delta(t)}{3}$$

از طرف دیگر:

$$V_o(t) = 2 \frac{di_o(t)}{dt} \rightarrow i_o(0^+) = \frac{1}{2} \int_{0^-}^{0^+} V_o(t) dt = \frac{1}{6} \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = \frac{1}{6} \text{ A}$$

فصل هفتم: تجزیه و تحلیل در حالت دائمی سینوسی

مدارهایی که تاکنون مورد بررسی و تحلیل قرار داده‌ایم دارای ورودی DC یا توابع تحریک بوده‌اند. در این جا می‌خواهیم به بررسی مدارهایی بپردازیم که ورودی آن‌ها از جنس AC است. به عبارت دیگر، مدارات با ورودی سینوسی را تجزیه و تحلیل کنیم.

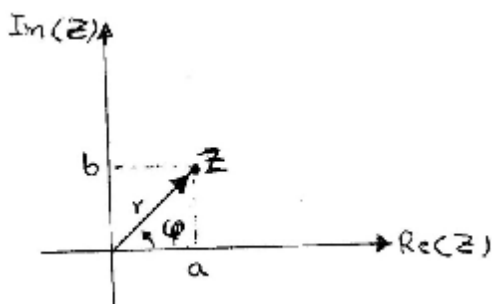
پیش نیاز بحث تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی، آشنایی با اعداد مختلط و مفهوم فازور است. در زیر اشاره‌ای مختصر به این موضوع داریم.

7-1- اعداد مختلط و مفهوم فازور

عدد مختلط Z در دستگاه دکارتی به صورت $Z = a + jb$ نمایش داده می‌شود که a را قسمت حقیقی یا $\text{Re}(Z)$ و b را قسمت موهومی یا $\text{Im}(Z)$ می‌نامیم.

در دستگاه قطبی Z به صورت $Z = r\mathbf{R}\varphi = re^{j\varphi}$ نمایش داده می‌شود که r را شعاع یا فاصله تا مبدأ مختصات و φ را زاویه یا فاز عدد مختلط می‌گوییم.

نمایش عدد مختلط Z در مختصات دکارتی و قطبی به صورت زیر است:



تبدیلات دستگاه‌های دکارتی به قطبی و بالعکس به صورت زیر است:

قطبی به دکارتی: $a = r \cos \varphi, b = r \sin \varphi$

دکارتی به قطبی: $r = \sqrt{a^2 + b^2}, \varphi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

7-1-1- عملیات به روی اعداد مختلط

جمع و تفریق اعداد مختلط به صورت زیر است:

در مختصات دکارتی: $Z_1 \pm Z_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$

در مختصات قطبی $Z_1 \pm Z_2 = r_1 e^{j\phi_1} \pm r_2 e^{j\phi_2}$

ضرب، تقسیم و توان به صورت زیر بیان می‌شوند:

در مختصات دکارتی:
$$\begin{cases} Z_1 \times Z_2 = (a_1 + jb_1) \times (a_2 + jb_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} \times \frac{a_2 - jb_2}{a_2 - jb_2} = \frac{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 - b_2^2} \end{cases}$$

در مختصات قطبی:
$$\begin{cases} Z_1 \times Z_2 = (r_1 \mathbf{R}\phi_1) \times (r_2 \mathbf{R}\phi_2) = (r_1 \times r_2) \mathbf{R}(\phi_1 + \phi_2) \\ \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1 \mathbf{R}\phi_1}{r_2 \mathbf{R}\phi_2} = \frac{r_1}{r_2} \mathbf{R}(\phi_1 - \phi_2) \\ Z^n = (r \mathbf{R}\phi)^n = r^n \mathbf{R}n\phi = r^n (\cos n\phi + j \sin n\phi) \end{cases}$$

همان‌طور که دیده می‌شود، جمع و ضرب در مختصات دکارتی و ضرب، تقسیم و توان در مختصات قطبی راحت‌تر است.

به عدد مختلط $\bar{Z}$ مزدوج عدد مختلط Z می‌گویند. مزدوج را با Z^* نیز نمایش می‌دهند.

$$Z = a + jb \rightarrow \bar{Z} = Z^* = a - jb$$

$$Z = r \mathbf{R}\phi \rightarrow \bar{Z} = r \mathbf{R} - \phi$$

در ساده‌سازی کسرها، ضرب در مزدوج مخرج به صورت زیر انجام می‌شود:

$$\frac{1}{a + jb} = \frac{1}{a + jb} \times \frac{a - jb}{a - jb} = \frac{a}{a^2 + b^2} + j \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

توجه به روابط زیر در ساده‌سازی عبارات و کسرهای مختلط مفید است:

$$ja = a \mathbf{R}90^\circ, -ja = a \mathbf{R}-90^\circ, a = a \mathbf{R}0^\circ, -a = a \mathbf{R}180^\circ$$

$$\frac{1}{j} = -j$$

۷-۱-۲- فازور

در تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی، با سیگنال‌های کسینوسی به فرم زیر سرو کار داریم:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

این سیگنال‌ها با سه کمیت اصلی مشخص و بیان می‌شوند:

1- دامنه سیگنال A

2- فرکانس سیگنال ω

3- فاز اولیه سیگنال ϕ

در مدارهای مورد بررسی، مقدار ω ثابت است. به عبارت دیگر، اگر ورودی یک سیگنال سینوسی با فرکانس ω باشد، تمام ولتاژها و جریان‌های مدار با همان فرکانس ω هستند. پس برای نمایش سیگنال $x(t)$ در حوزه فرکانس، فقط دامنه و فاز اولیه آن را بیان می‌کنیم:

$$X = \mathbf{AR}\phi = Ae^{j\phi} = A \cos \phi + jA \sin \phi$$

این کمیت جدید را با عنوان فازور می‌شناسیم. فازور یک کمیت مختلط است.

بنابراین در تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی، به ولتاژ، فازور ولتاژ و به جریان، فازور جریان می‌گوییم.

نکته: اگر سیگنالی به صورت سینوسی بیان شود، در تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی، باید آن را به کسینوسی تبدیل نمود و سپس به تجزیه و تحلیل مدار پرداخت.

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) = A \cos(\omega t + \phi - 90^\circ) \rightarrow X = \mathbf{AR}(\phi - 90^\circ)$$

۷-۲- تحلیل در حالت ماندگار سینوسی

برای تجزیه و تحلیل در حالت دائمی سینوسی، نیازمند ابزار و وسیله‌هایی هستیم که بتوانیم مدار را به حوزه فرکانس منتقل کرده و به تحلیل و بررسی آن بپردازیم.

در این قسمت به بیان قضیه‌ها و ابزار مناسب جهت تحلیل در حالت ماندگار سینوسی می‌پردازیم.

۷-۲-۱- بررسی پاسخ در حالت دائمی سینوسی

مهم‌ترین دلیل تحلیل در حالت دائمی سینوسی را می‌توان خاصیت ریاضی این توابع دانست. این خاصیت در قضیه زیر بیان می‌شود:

*** قضیه:** مجموع هر تعداد سیگنال سینوسی هم فرکانس و هر تعداد مشتق‌های آن‌ها (از هر مرتبه)، یک سیگنال سینوسی با همان فرکانس است.

به عبارت دیگر، در مدارهای خطی، اگر فرکانس ورودی ω_{in} باشد، فرکانس هر سیگنال دیگری در آن مدار برابر ω_{in} است.

براین اساس، معادله دیفرانسیل توصیف کننده چنین مدارهایی به صورت زیر است:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = A \cos(\omega_{in} t + \phi)$$

فرم کلی پاسخ کامل آن به صورت زیر است:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{s_i t} + B \cos(\omega_{in} t + \phi)$$

پاسخ خصوصی (پاسخ حالت صفر) + پاسخ عمومی (پاسخ ورودی صفر)

در تحلیل مدار به کمک فازورها، فقط پاسخ حالت ماندگار سینوسی محاسبه می‌شود و هیچ‌گونه اطلاعاتی در خصوص پاسخ حالت گذاری مدار به دست نمی‌آید.

به عبارت دیگر، در تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی، با بخش دوم این پاسخ سرو کار داریم. این پاسخ فقط در اثر ورودی سینوسی است و به شرایط اولیه و ورودی‌های DC کاری ندارد. بنابراین برای به دست آوردن پاسخ حالت دائمی سینوسی، اثر شرایط اولیه و ورودی‌های DC مدار را صفر می‌کنیم.

نکته: در بعضی از مواقع، پاسخ حالت دائمی سینوسی معنی ندارد. به عنوان نمونه می‌توان گفت:

1- زمانی که تعدادی از ریشه‌های معادله مشخصه در نیمه راست صفحه فرکانس مختلط باشند که باعث می‌شود مدار ناپایدار باشد.

2- زمانی که ریشه‌های معادله مشخصه به صورت موهومی محض $(\pm j\omega_0)$ باشند.

در این حالت پاسخ به فرم زیر است:

$$y(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta) + B \cos(\omega_{in} t + \phi)$$

پاسخ ورودی صفر + پاسخ حالت صفر

در این حالت پاسخ دائمی است ولی سینوسی نمی‌باشد که در آن ω_0 فرکانس تشدید و ω_{in} فرکانس ورودی است.

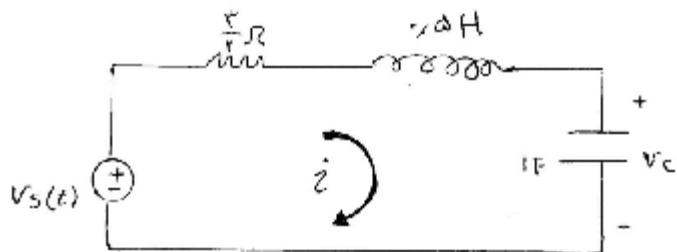
$$(\omega_0 \neq \omega_{in})$$

مثال ۱: در مدار شکل زیر، با توجه به شرایط اولیه، پاسخ کامل را برای ولتاژ دو سر خازن به دست آورید.

$$V_S(t) = \cos 2t u(t)$$

$$V_C(0) = 1V$$

$$i_L(0) = 2A$$



با KVL زدن در مدار داریم:

$$\text{KVL: } V_S = Ri + L \frac{di}{dt} + V_C$$

برای جریان i داریم:

$$i = C \frac{dV_C}{dt} = \frac{dV_C}{dt}$$

در نتیجه:

$$V_S = R \frac{dV_C}{dt} + L \frac{d^2V_C}{dt^2} + V_C \rightarrow \frac{1}{2} \frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{3}{2} \frac{dV_C}{dt} + V_C = V_S \rightarrow \frac{d^2V_C}{dt^2} + 3 \frac{dV_C}{dt} + 2V_C = 2V_S$$

با توجه به معادله مشخصه، برای پاسخ عمومی (همگن) خواهیم داشت:

$$S^2 + 3S + 2 = 0 \rightarrow S = -1, -2$$

$$V_{ch}(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t}$$

و برای پاسخ خصوصی:

$$V_S(t) = \cos 2t u(t) \rightarrow V_S = 1R0$$

$$(S^2 + 3S + 2)V_C = 2V_S \rightarrow V_S = \frac{2R0}{S^2 + 3S + 2} \xrightarrow{S=j\omega} \frac{2R0}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2}$$

$$= \frac{2R0}{-\omega^2 + 3j\omega + 2} = \frac{2R0}{(2 - 5^2) + j3\omega} \xrightarrow{\omega=2} \frac{2R0}{-2 + j6} = \frac{2R0}{\sqrt{40}108/4^0}$$

$$\rightarrow V_C = 0/316R - 108/4^0 \rightarrow V_{cp}(t) = 0/316 \cos(2t - 108/4^0)$$

بنابراین پاسخ کامل برابر است با:

$$V_C(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t} + 0/316 \cos(2t - 108/4^0)$$

با توجه به شرایط اولیه:

$$V_C(0) = 1V \rightarrow K_1 + K_2 + 0/316 \cos(-108/4^0) = 1 \rightarrow \boxed{K_1 + K_2 = 0/1} \quad (I)$$

$$i_L(0) = 2A \rightarrow i_C(0) = C \frac{dV_C(0)}{dt} = \frac{dV_C(0)}{dt} = 2$$

$$\rightarrow -K_1 - 2K_2 - 0/632 \sin(-108/4^0) = 2 \rightarrow \boxed{K_1 + 2K_2 = -1/4} \quad (II)$$

$$II \text{ و } I \Rightarrow K_1 = 1/6, K_2 = -1/5$$

بنابراین پاسخ کامل $V_C(t)$ برابر است با:

$$V_C(t) = 1/6 e^{-t} - 1/5 e^{-2t} + 0/316 \cos(2t - 108/4^0)$$

۷-۲-۲- امپدانس و ادمیتانس

امپدانس و ادمیتانس به صورت زیر تعریف می‌شوند:

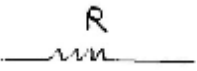
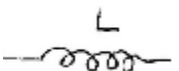
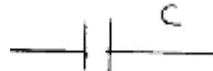
امپدانس Z برابر است با فازور ولتاژ دو سر المان تقسیم بر فازور جریان آن، یعنی:

$$Z = \frac{V}{I}$$

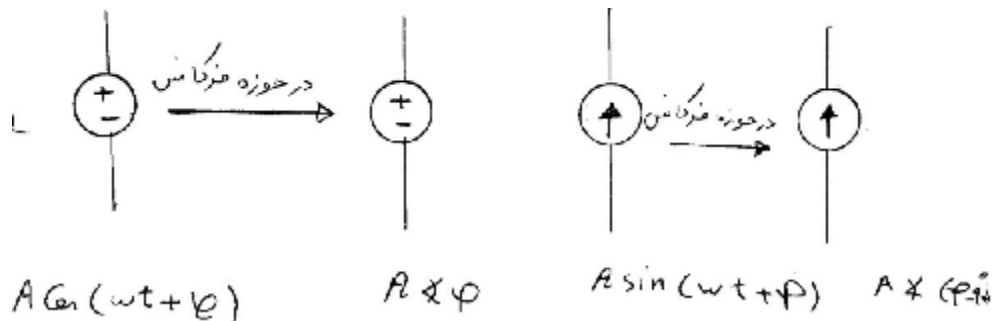
ادمیتانس Y برابر است با فازور جریان عبوری از المان تقسیم بر فازور ولتاژ آن، یعنی:

$$Y = \frac{I}{V}$$

بنابراین تمام المان‌های مداری از قبیل مقاومت، سلف و خازن در حوزه فرکانس به صورت زیر بیان می‌شوند:

			
امپدانس $Z(\Omega)$	R	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega C}$
ادمیتانس $Y(J)$	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{j\omega L}$	$j\omega C$

همچنین برای منابع ولتاژ و جریان سینوسی، فازور آن‌ها برابر است با:



پس با این دید، کلیه المان‌های مداری از قبیل مقاومت، سلف و خازن به صورت مقاومت (امپدانس) دیده می‌شوند و تمام قوانین مداری از جمله KCL و KVL صادق بوده و کلیه معادلات دیفرانسیل به روابط جبری تبدیل می‌شود. در این جا منظور از روابط جبری، جبر مختلط است.

بنابراین می‌توان گفت:

در مدار در حالت دائمی سینوسی با فرکانس ω ، تمامی ولتاژها و جریان‌ها سیگنال سینوسی با فرکانس ω هستند و تنها فازورها تغییر می‌کنند. پس برای بررسی مدار به تحلیل فازورها می‌پردازیم. به عبارت دیگر، برای تحلیل مدار در حالت دائمی سینوسی، ابتدا مدار را به حوزه فرکانس انتقال می‌دهیم و سپس با استفاده از روش‌های تحلیل مدارهای مقاومتی (گره، مش و...)، به بررسی و تحلیل مدار می‌پردازیم.

با این توصیف دیده می‌شود که همه چیز تکراری و مانند مدارهای مقاومتی است.

در این جا منظور از ضرب، ضرب مختلط است. یعنی دو معنی دارد:

$$V = Z \times I \rightarrow \begin{cases} |V| = |Z| \times |I| & \text{اندازه} \\ \angle V = \angle Z + \angle I & \text{زویه} \end{cases}$$

$$I = Y \times V \rightarrow \begin{cases} |I| = |Y| \times |V| \\ \angle I = \angle Y + \angle V \end{cases}$$

$$Y = \frac{1}{Z} \rightarrow \begin{cases} |Y| = \frac{1}{|Z|} \\ \angle Y = -\angle Z \end{cases}$$

در حالت کلی امپدانس و ادمیتانس عددی مختلط و تابع فرکانس ورودی است. یعنی:

$$Z^{(\Omega)}(j\omega) = \frac{V}{I} = R^{(\Omega)} + jX^{(\Omega)} = |Z| \angle \phi$$

$\swarrow$ $\swarrow$
 مقاومت راکتانس

$$Y^{(J)}(j\omega) = \frac{I}{V} = G^{(J)} + jB^{(J)} = |Y| \angle \theta$$

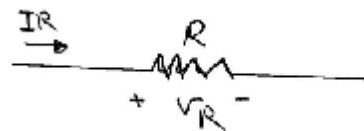
$\swarrow$ $\swarrow$
 سوسپتانس کندوکتانس

که در این روابط:

$$\phi = \angle Z = \angle V - \angle I, \quad \theta = -\phi$$

۷-۲-۳-رابط فازوری عناصر مداری

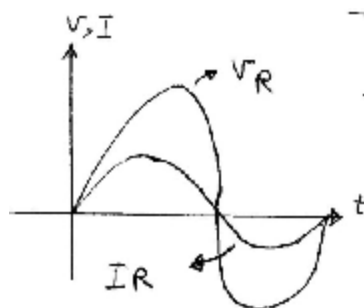
۱- مقاومت:



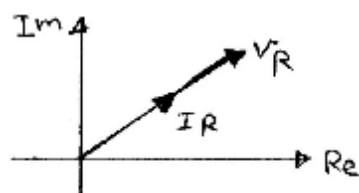
$$V_R = R \times I_R \rightarrow \begin{cases} |V_R| = R |I_R| \\ \angle V_R = \angle I_R \end{cases}$$

یعنی ولتاژ و جریان، با هم، هم فاز هستند.

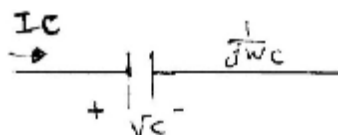
نمودار ولتاژ و جریان در حوزه زمان به صورت زیر است:



و دیاگرام فازوری ولتاژ و جریان در مقاومت:



۲- خازن

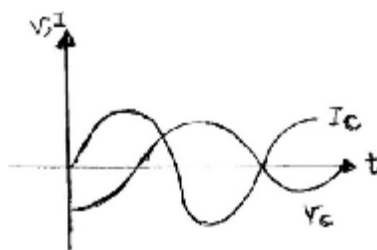


$$V_C = \frac{1}{j\omega C} \times I_C = -j \frac{1}{\omega C} \times I_C \rightarrow \begin{cases} |V_C| = \frac{1}{\omega C} |I_C| \\ \mathbf{RV}_C = \mathbf{RI}_C - 90^\circ \end{cases}$$

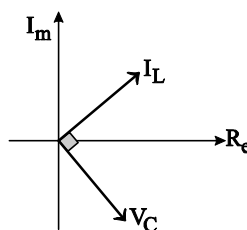
را $X_C = \frac{1}{\omega C}$ مقاومت ظاهری خازن می‌گویند. در این حالت ولتاژ نسبت به جریان، 90° عقب‌تر است، یعنی I_C نسبت

به V_C پیش فاز است. (V_C نسبت به I_C پس فاز است).

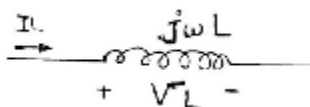
نمودار ولتاژ و جریان خازن در حوزه زمان به صورت زیر است:



و دیاگرام فازوری ولتاژ و جریان در خازن:



۳- سلف

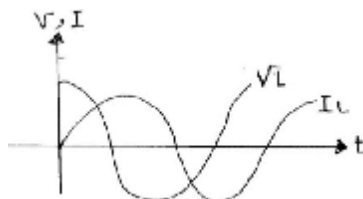


$$V_L = j\omega L \times I_L \rightarrow \begin{cases} |V_L| = \omega L |I_L| \\ \mathbf{RV}_L = \mathbf{RI}_L + 90^\circ \end{cases}$$

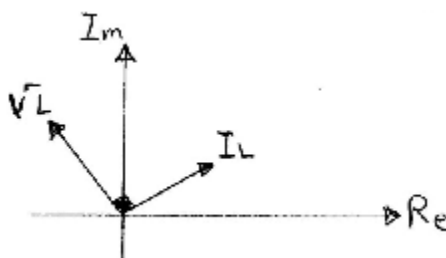
را $X_L = \omega L$ مقاومت ظاهری سلف می‌نامیم. در این حالت ولتاژ نسبت به جریان، 90° جلوتر است، یعنی I_L نسبت به

V_L پس فاز است. (V_L نسبت به I_L پیش فاز است).

نمودار ولتاژ و جریان در حوزه زمان در صورت زیر است:



و دیاگرام فازوری ولتاژ و جریان در سلف:



اگر ϕ را زاویه امپدانس در نظر بگیریم، حالت‌های مختلف برای امپدانس یک مدار پسیو به یکی از صورت‌های زیر است:

$$\phi = \mathbf{RZ} = \mathbf{RV} - \mathbf{RI}$$

مدار مقاومتی خالص $\rightarrow \phi = 0 \rightarrow Z = R$ یا $Y = G$ اگر

مدار سلفی خالص $\rightarrow \phi = 90^\circ \rightarrow Z = jX$ یا $Y = -j\frac{1}{X}$ اگر

مدار خازنی خالص $\rightarrow \phi = -90^\circ \rightarrow Z = -jX$ یا $Y = j\frac{1}{X}$ اگر

مدار مقاومتی سلفی $\rightarrow 0 < \phi < 90^\circ \rightarrow Z = R + jX$ یا $Y = G - jB$ اگر

مدار مقاومتی خازنی $\rightarrow -90^\circ < \phi < 0 \rightarrow Z = R - jX$ یا $Y = G + jB$ اگر

نکته: معادله $Z = \frac{1}{Y}$ نمی‌گوید:

$$R = \frac{1}{G} \text{ و } X = \frac{1}{B}$$

بلکه رابطه صحیح بین مؤلفه‌های Z و Y به صورت زیر است:

$$Z = \frac{1}{Y} \Rightarrow R = \frac{G}{B^2 + G^2}, X = \frac{-B}{B^2 + G^2}$$

۷-۲-۴- نکاتی در تحلیل حالت دائمی سینوسی

همان‌طور که گفته شد، تحلیل در حالت دائمی سینوسی عیناً مشابه مدارهای مقاومتی است با این تفاوت که در این‌جا برای فازورهای ولتاژ و جریان، روابط KCL و KVL را می‌نویسیم.

* به هم بستن عناصر

با توجه به این که همهٔ عناصر را به دید مقاومت (امپدانس) می‌بینیم، به هم بستن عناصر در این‌جا همانند مقاومت‌ها است، یعنی:

$$Z_{eq} = \sum_i Z_i \quad \text{به هم بستن سری}$$

$$Y_{eq} = \sum_i y_i \quad \text{به هم بستن موازی}$$

* امپدانس و ادمیتانس ورودی

برای یافتن امپدانس یا ادمیتانس ورودی یک مدار، همانند مدارهای مقاومتی، از منابع تست V_t و I_t استفاده می‌کنیم و با تحلیل مدار (البته در حوزه فرکانس) نسبت ولتاژ تست به جریان آن یا بالعکس را به دست می‌آوریم. یعنی:

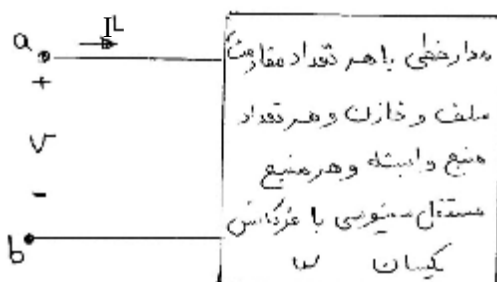
$$Z_{in}(j\omega) = \frac{V_t}{I_t}$$

$$Y_{in}(j\omega) = \frac{I_t}{V_t}$$

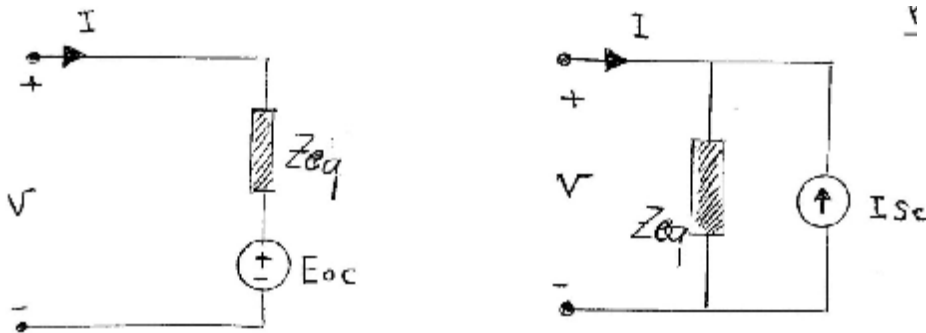
تنها تفاوت امپدانس یا ادمیتانس به دست آمده در این‌جا (تحلیل در حالت دائمی سینوسی) این است که اولاً مختلط هستند و ثانیاً تابع فرکانس ورودی ω می‌باشند.

* مدار معادل تونن – نورتن در حالت دائمی سینوسی

در حالت دائمی سینوسی می‌توان گفت:



این مدار معادل است با:



$$E_{oc} = Z_{eq} \times I_{sc}$$

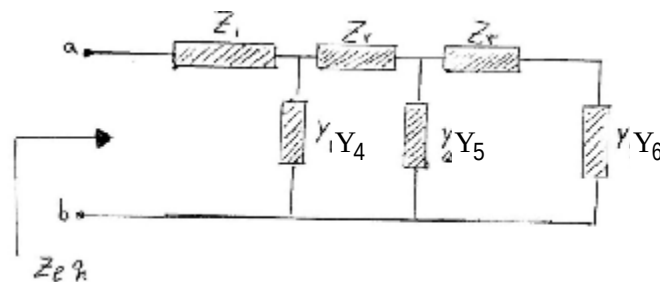
برای به دست آوردن مدار معادل تونن و نورتن یک شبکه در حالت دائمی سینوسی، همانند مدارهای مقاومتی عمل می‌کنیم البته با یک تفاوت‌های جزئی.

مثلاً قبلاً در مدارهای مقاومتی برای به دست آوردن R_{eq} منابع مستقل را صفر می‌کردیم، در این جا نیز برای یافتن Z_{eq} همین کار را انجام می‌دیم ولی فرکانس آن منبع را برای به دست آوردن امپدانس یا ادمیتانس‌های عناصر مداری در نظر می‌گیریم.

نکته: اگر منابع موجود در یک مدار غیر هم فرکانس باشند، در این صورت منابع را جداگانه در نظر می‌گیریم و پاسخ ناشی از هر یک را به دست می‌آوریم و سپس از قضیه جمع آثار استفاده می‌کنیم.
اکنون به بررسی چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۲: امپدانس ورودی مدارهای زیر را به دست آورید.

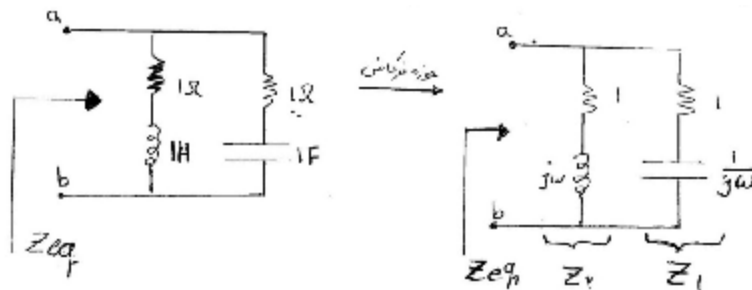
(الف)



در مدار نردبانی فوق داریم:

$$Z_{eq} = Z_1 + \frac{1}{Y_4 + \frac{1}{Z_2 + \frac{1}{Y_5 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{Y_6}}}}}$$

ب)



در این مدار داریم:

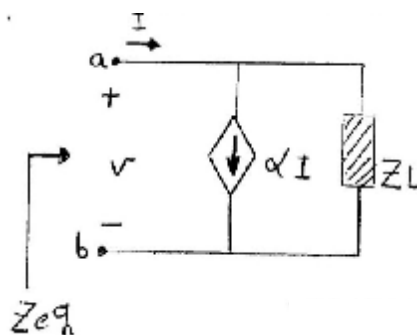
$$Z_1 = 1 + \frac{1}{j\omega} = \frac{1+j\omega}{j\omega}, \quad Z_2 = 1 + j\omega$$

$$Y_{eq} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{j\omega}{1+j\omega} + \frac{1}{1+j\omega} = \frac{1+j\omega}{1+j\omega} = 1 \rightarrow Z_{eq} = \frac{1}{Y_{eq}} = 1$$

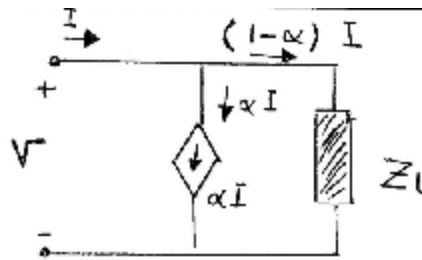
یعنی Z_{eq} مستقل از فرکانس است و به ازای هر ω ای، امپدانس ورودی 1Ω است. به این گونه مدارها، مدارهای مستقل

از فرکانس می‌گویند.

ج)



با KCL زدن در مدار داریم:



و با KVL زدن در حلقه بیرونی:

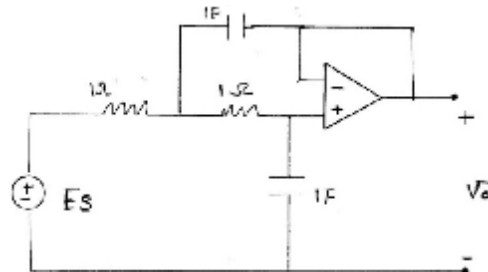
$$\text{KVL: } V = Z_L \times (1-\alpha)I = (1-\alpha)Z_L I \rightarrow Z_{eq} = \frac{V}{I} = (1-\alpha)Z_L$$

و برای $\alpha=2$ داریم:

$$\alpha=2 \rightarrow Z_{eq} = -Z_L$$

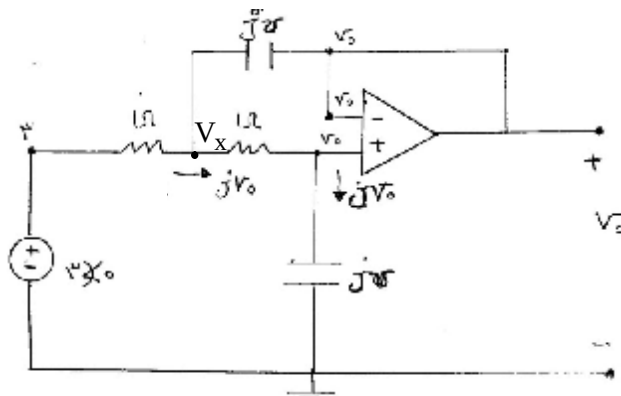
به این حالت مبدل منفی کننده امپدانس می‌گوییم.

مثال ۳: در مدار شکل زیر ولتاژ خروجی V_0 را به دست آورید. (آپ امپ ایده‌آل است).



$$E_s = 3 \cos t$$

با انتقال مدار در حوزه فرکانس ($\omega=1$) داریم: (مقادیر نوشته شده برحسب ادمیتانس است)

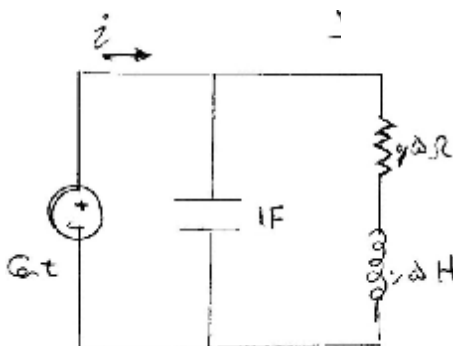


$$\text{KVL: } V_x = jV_o + V_o = (1+j)V_o$$

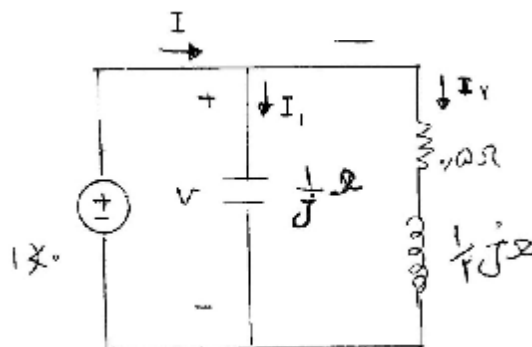
$$\text{KCL: } \frac{V_x - 3}{1} + jV_o + j(V_x - V_o) = 0 \rightarrow jV_o + V_o - 3 + jV_o + j(jV_o) = 0$$

$$\rightarrow V_o = \frac{3}{2j} = -\frac{3}{2}j \rightarrow V_o(t) = -1/5 \cos t = 1/5 \cos(t - 90^\circ) = 1/5 \sin t$$

مثال ۴: در مدار شکل زیر، جریان $i(t)$ را به دست آورید.



با تبدیل مدار به حوزه فرکانس ($\omega=1$) داریم:



برای جریان‌های I_1, I_2 داریم:

$$\text{KCL: } I = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{V}{\frac{1}{j}} = \frac{1 \angle 0^\circ}{\frac{1}{j}} = jA, \quad I_2 = \frac{V}{0.5 + 0.5j} = \frac{1 \angle 0^\circ}{\frac{1}{2}(1+j)} = 1 - jA$$

و در نتیجه:

$$I = j + 1 - j = 1A \rightarrow i(t) = \cos t$$

روش دوم: با پیدا کردن امپدانس ورودی مدار داریم:

$$Z_{in} = \frac{1}{j} \parallel (0.5 + j0.5) = (-j) \parallel (0.5 + j0.5) = \frac{-j(0.5 + j0.5)}{0.5 - j0.5} \times \frac{0.5 + j0.5}{0.5 + j0.5}$$

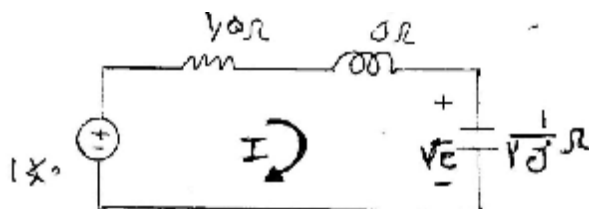
$$= \frac{-j(0.5 + j0.5)^2}{0.5^2 + 0.5^2} = \frac{(-j)(0.5)^2(1 - 1 + 2j)}{0.5} = 1\Omega$$

بنابراین:

$$I = \frac{V}{Z_{in}} = \frac{1\angle 0}{1} = 1\angle 0 \rightarrow i(t) = \cos t$$

مثال ۵: در مثال ۱، پاسخ حالت صفر را بدون تشکیل معادله دیفرانسیل به دست آورید.

با انتقال مدار به حوزه فرکانس داریم: ($\omega = 2$)



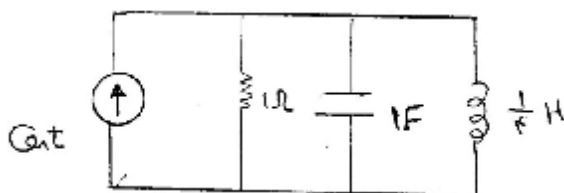
$$\text{KVL: } 1\angle 0 = \left(1/5 + j + \frac{1}{2j}\right) I$$

از طرفی داریم:

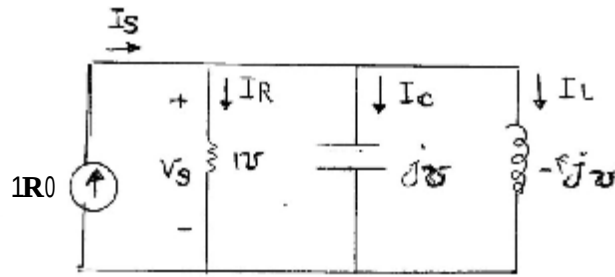
$$I = \frac{V_C}{Z_C} = \frac{V_C}{\frac{1}{2j}} = 2jV_C \rightarrow 1\angle 0 = (1/5 + j0.5) \times 2jV_C \rightarrow$$

$$V_C = \frac{1\angle 0}{2j(1/5 + j0.5)} = \frac{1\angle 0}{-1 + 3j} = 0.316\angle -108.4^\circ \rightarrow V_C(t) = 0.316 \cos(2t - 108.4^\circ)$$

مثال ۶: در مدار شکل زیر، برای I_C ، I_R و I_L دیاگرام فازوری رسم کنید.



با انتقال مدار به حوزه فرکانس و به دست آوردن ادمیتانس المان‌ها داریم:



$$Y_{eq} = 1 + j - 4j = 1 - 3j \text{ S}$$

$$V_S = \frac{I_S}{Y_{eq}} = \frac{1\angle 0}{1 - 3j} = \frac{1}{\sqrt{10}} \angle 71^\circ \text{ V}$$

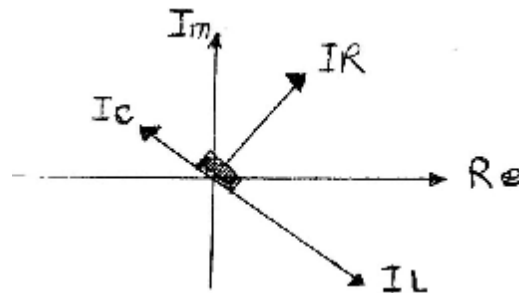
و برای جریان شاخه‌ها داریم:

$$I_R = 1 \times V_S = \frac{1}{\sqrt{10}} \angle 71^\circ \text{ A}$$

$$I_C = jV_S = \frac{1}{\sqrt{10}} \angle (71^\circ + 90^\circ) = \frac{1}{\sqrt{10}} \angle 161^\circ \text{ A}$$

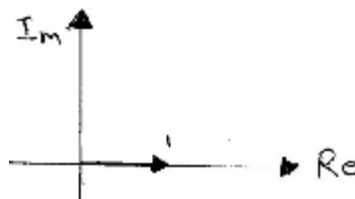
$$I_L = -4jV_S = \frac{4}{\sqrt{10}} \angle (71^\circ - 90^\circ) = \frac{4}{\sqrt{10}} \angle -19^\circ \text{ A}$$

دیاگرام فازوری به صورت زیر است:



در دیاگرام فازوری رسم شده، اگر مجموع سه بردار (سه فازور) را به دست آوریم، دیده می‌شود طبق قانون KCL،

مجموع $I_R + I_C + I_L$ برابر $I_S = 1\angle 0$ است و نیازی به حل و محاسبات طولانی نمی‌باشد.



3-7- تشدید

در تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی هرگاه جریان و ولتاژ دو سر مدار هم‌فاز شوند، می‌گوییم شبکه به حالت

تشدید یا رزونانس رفته است. فرکانسی که در آن شبکه به حالت تشدید درمی‌آید را فرکانس تشدید (رزونانس) می‌گوییم.

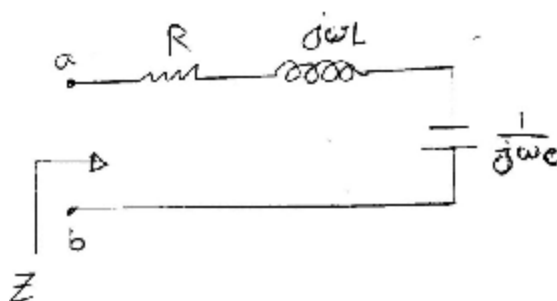
به عبارت دیگر، فرکانس تشدید فرکانسی است که در آن امپدانس یا ادمیتانس یک کمیت حقیقی باشد، یعنی:

$$\text{Im}(Z)=0 \quad \text{یا} \quad \text{Im}(Y)=0$$

$\text{Im}(Z)=0$ یعنی راکتانس صفر است و $\text{Im}(y)=0$ یعنی سوسپتانس برابر صفر است. به عنوان مثال، برای مدارهای

ساده RLC سری و موازی داریم:

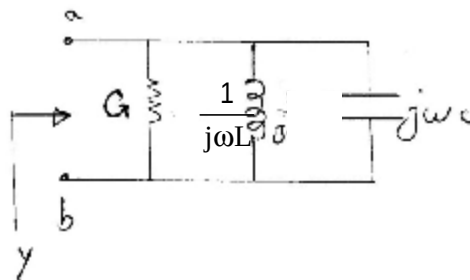
- RLC سری



$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\text{Im}(z) = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

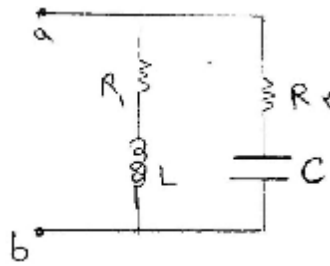
- RLC موازی



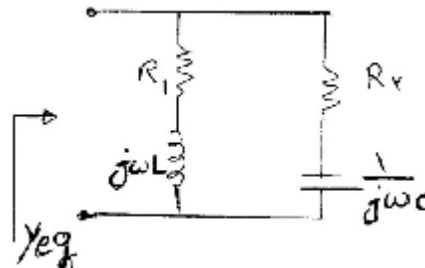
$$Y = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$\text{Im}(Y) = 0 \rightarrow \omega C - \frac{1}{\omega L} = 0 \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

مثال ۷: در مدار شکل زیر، فرکانس تشدید را پیدا کنید.



با انتقال مدار به حوزه فرکانس داریم:



$$Z_1 = R_1 + j\omega L$$

$$Z_2 = R_2 + \frac{1}{j\omega C}$$

$$Y_{eq} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_1 + j\omega L} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{R_1 + j\omega L} + \frac{j\omega C}{1 + j\omega C R_2}$$

برای به دست آوردن $\text{Im}(Y)$ ، قسمت موهومی هر بخش را جداگانه پیدا می‌کنیم و سپس آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$\text{Im}(Y_{eq}) = \frac{-\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{\omega C}{1 + \omega^2 C^2 R_2^2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} = \frac{C}{1 + \omega^2 C^2 R_2^2} \rightarrow R_1^2 C + \omega^2 L^2 C = L + \omega^2 C^2 L R_2^2 \rightarrow$$

$$\omega^2 (L^2 C - C^2 L R_2^2) = L - R_1^2 C \rightarrow \omega^2 (LC) (L - C R_2^2) = (L - R_1^2 C) \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{L - R_1^2 C}{L - R_2^2 C}}$$

در مدار شکل فوق، اگر $R_1 = R_2 = 0$ باشد، فرکانس تشدید $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ است که مربوط به فرکانس تشدید مدار

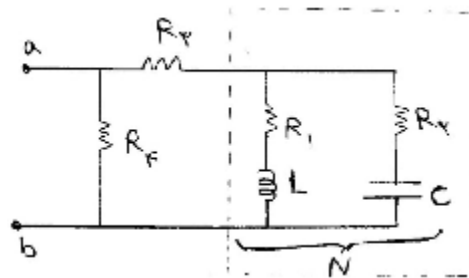
RLC موازی می‌باشد، پس می‌توان گفت:

نکته: مقاومت‌های سری یا موازی با کل مدار، تأثیری در فرکانس تشدید ندارند.



در شبکه‌های فوق، مقاومت R تأثیری در فرکانس تشدید شبکه N ندارند.

مثال ۸: در مدار شکل زیر، فرکانس تشدید را به دست آورید.



در این مدار، مقاومت‌های R_3 و R_4 با شبکه N سری و موازی هستند، پس تأثیری در فرکانس تشدید شبکه N ندارند. بنابراین فرکانس تشدید کل مدار برابر است با: (با توجه به مثال قبل)

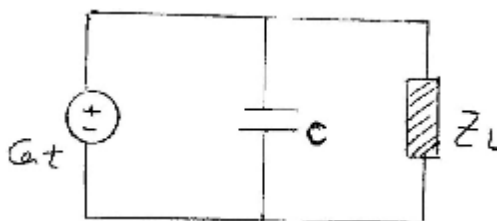
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{L - R_1^2 C}{L - R_2^2 C}}$$

به عبارت دیگر، مقاومت‌های R_3 و R_4 تأثیری در قسمت موهومی Z یا Y کل مدار ندارند، پس فرکانس تشدید مستقل از مقادیر این مقاومت‌ها است.

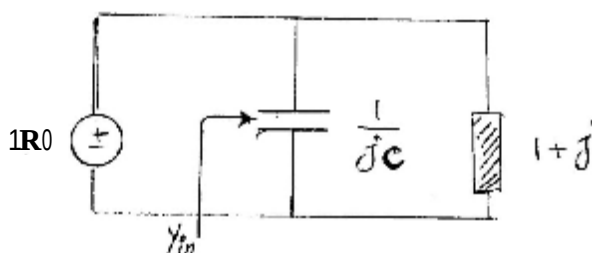
نکته: جملات زیر هم ارز تشدید هستند:

- ولتاژ و جریان هم فازاند.
- توان حقیقی ماکزیمم است.
- زاویه امپدانس یا ادمیتانس صفر است.
- ضریب توان $(\cos \phi)$ ماکزیمم است.
- توان راکتیو (مجازی) صفر است.
- سلف و خازن اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند.
- امپدانس، حقیقی است.
- توان متوسط ماکزیمم است.

مثال ۹: در مدار شکل زیر، $Z_L = 1 + j$ است. از طرفی جریان کشیده شده از منبع، هم فاز با ولتاژ منبع است. خازن C چند فاراد است؟



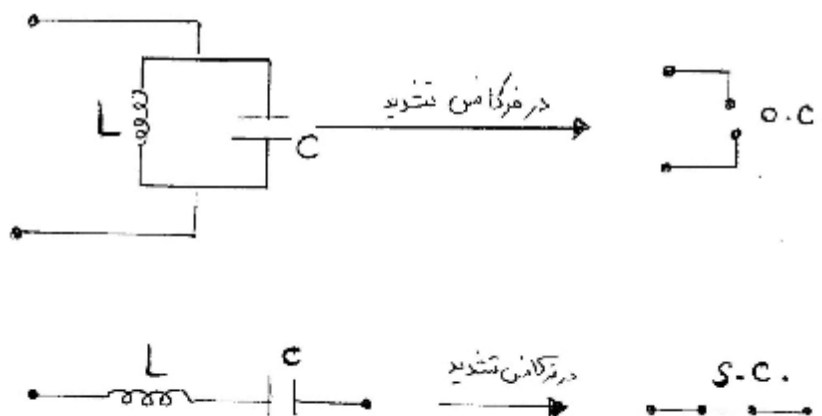
در حوزه فرکانس داریم:



$$Y_{in} = jC + \frac{1}{1+j} \rightarrow \text{Im}(Y_{in}) = C - \frac{1}{2}$$

$$\text{Im}(Y_{in}) = 0 \rightarrow C - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow C = \frac{1}{2} \text{ F}$$

نکته: در فرکانس تشدید، مدارات LC موازی، اتصال باز و مدارات LC سری، اتصال کوتاه می شوند. به عبارت دیگر:



4-7- مکان امپدانس و مکان ادمیتانس

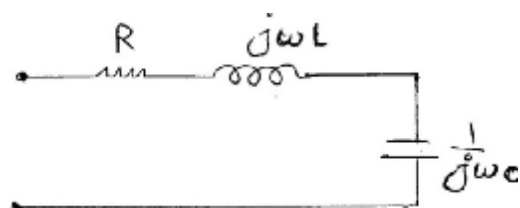
به محل تغییرات نقطه انتهایی بردار امپدانس یا ادمیتانس در صفحه مختلط، امپدانس یا ادمیتانس می گوئیم.

برای به دست آوردن مکان امپدانس، باید به نحوی اثر ω را حذف کنیم و رابطه ای بین $X = \text{Im}(Z)$ و $R = \text{Re}(Z)$

پیدا کنیم و سپس رابطه به دست آمده را رسم نماییم.

معمولاً برای حذف اثر ω ، از محاسبات جبری یا معادلات پارامتری یا... استفاده می‌کنیم. برای به دست آوردن مکان ادمیتانس نیز به همین صورت عمل می‌کنیم.

به عنوان مثال برای مکان امپدانس مدار RLC سری داریم:

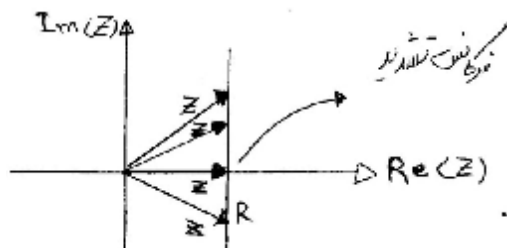


$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$R = \text{Re}(Z)$$

$$X = \text{Im}(z) = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

در این حالت قسمت حقیقی تابع ω نیست، پس مکان امپدانس به صورت زیر است:



در این شکل چندین بردار Z وجود دارد که هر یک به ازای یک ω خاص رسم شده‌اند. در فرکانس تشدید مدار

$$\left(\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right) \text{ فوق، } |Z| \text{ کمینه است.}$$

و برای مکان ادمیتانس مدار RLC سری خواهیم داشت:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{\underbrace{R^2 + X^2}_G} + j \frac{-X}{\underbrace{R^2 + X^2}_B}$$

در این حالت قسمت حقیقی (G) و موهومی (B) ادمیتانس هر دو تابع ω هستند، پس برای حذف اثر ω :

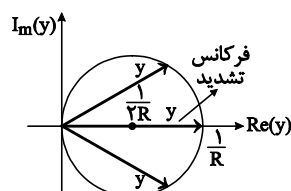
$$G^2 + B^2 = \frac{1}{R^2 + X^2} = \frac{G}{R}$$

و با تبدیل به مربع کامل داریم:

$$G^2 + B^2 - \frac{G}{R} = 0 \rightarrow G^2 - \frac{G}{R} + \left(\frac{1}{2R}\right)^2 + B^2 = \left(\frac{1}{2R}\right)^2 \rightarrow$$

$$\left(G - \frac{1}{2R}\right)^2 + B^2 = \left(\frac{1}{2R}\right)^2$$

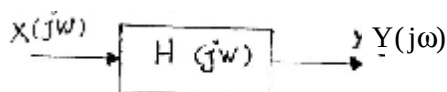
یعنی مکان ادمیتانس دایره‌ای به مرکز $\left(\frac{1}{2R}, 0\right)$ و شعاع $\frac{1}{2R}$ است.



نکته: در اکثر مسائل و به خصوص در سؤالات تستی، با بررسی مکان امپدانس و ادمیتانس در سه نقطه اساسی $\omega=0$ ، $\omega \rightarrow \infty$ و $\omega = \omega_0$ می‌توان مکان موردنظر را به راحتی پیدا کرد.

5-7- پاسخ فرکانسی

در یک سیستم دارای ورودی و خروجی، پاسخ فرکانسی به صورت زیر تعریف می‌شود:



$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

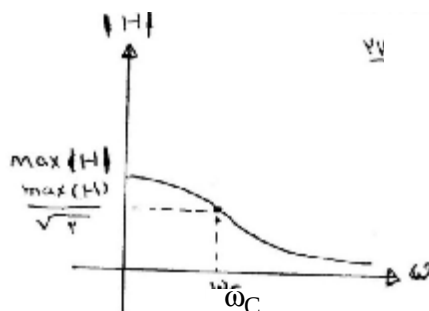
می‌توان گفت در هر فرکانسی (ω) با داشتن ورودی، خروجی معلوم است زیرا:

$$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)| \times |X(j\omega)|$$

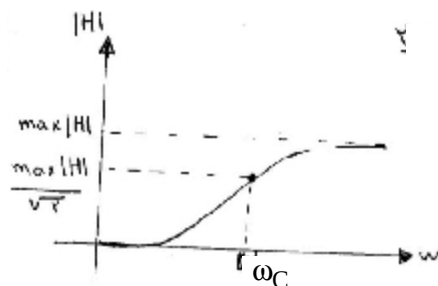
$$\mathbf{R}Y(j\omega) = \mathbf{R}H(j\omega) + \mathbf{R}X(j\omega)$$

براین اساس شکل تابع $|H(j\omega)|$ به یکی از صورت‌های زیر است:

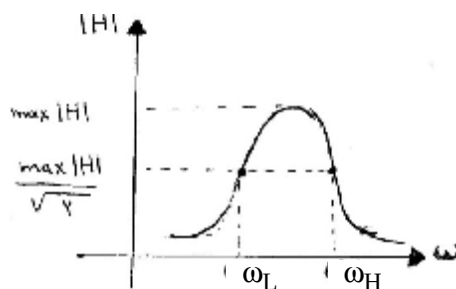
1- فیلتر پایین‌گذر (LPF)



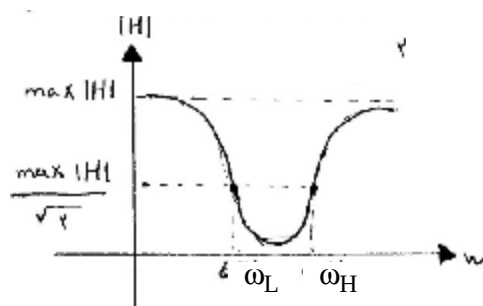
2- فیلتر بالاگذر (HPF)



3- فیلتر میان‌گذر (BPF)



4- فیلتر میان‌گذر (BSF)



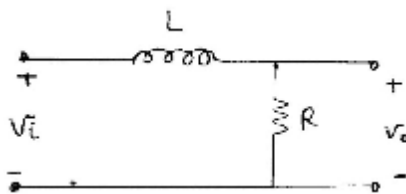
خاصیت این گونه مدارها (فیلترها) این است که سیگنال ورودی را در محدوده‌ای عبور می‌دهند و در ناحیه‌های دیگر عبور نمی‌دهند.

به این ناحیه عبور، پهنای باند (B.W.) و به فرکانس موردنظر، فرکانس قطع (ω_c) می‌گوییم. فرکانس قطع را در ناحیه‌ای در نظر می‌گیریم که $|H(j\omega)|$ برابر $\frac{1}{\sqrt{2}} \max |H(j\omega)|$ باشد. و برای به دست آوردن پهنای باند، با داشتن

پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ و به دست آوردن ماکزیمم $|H(j\omega)|$ ، با حل معادله زیر، عرض باند حاصل می‌شود:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \max |H(j\omega)|$$

مثال ۱۰: در مدار شکل زیر، نوع فیلتر و پهنای باند آن را مشخص کنید.



با توجه به وجود یک سلف و یک مقاومت در مدار مربوطه می‌توان گفت مدار فوق یک مدار مرتبه اول است و حداکثر یک فرکانس قطع دارد. پس شبکه پایین‌گذر یا بالاگذر است.

در فرکانس‌های بالا $(\omega \rightarrow \infty)$ ، امپدانس سلف بی‌نهایت (مدار باز) شده و سیگنالی از خود عبور نمی‌دهد. پس سیگنال‌های با فرکانس بالا را عبور نمی‌دهد، بنابراین فیلتر پایین‌گذر است.

برای یافتن پاسخ فرکانسی در حالت دائمی سینوسی داریم:

$$\frac{V_o}{V_i} = H(j\omega) = \frac{R}{R + j\omega L} \rightarrow |H(j\omega)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

ماکزیمم $|H(j\omega)|$ در $\omega = 0$ رخ می‌دهد پس:

$$\max |H(j\omega)| = 1$$

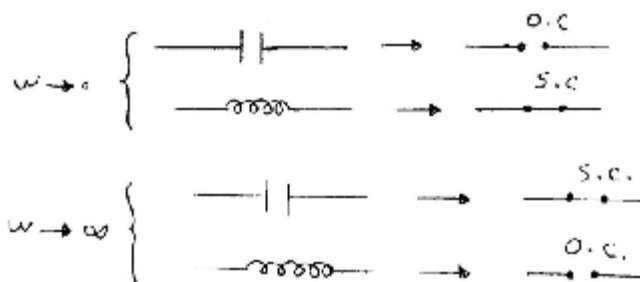
$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \max |H(j\omega)| \rightarrow \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 \rightarrow \omega_C = \frac{R}{L}$$

و پهنای باند برابر است با:

$$B.W. = \left(0, \frac{R}{L}\right)$$

نکته: کلیه مدارهای مرتبه اول، فیلتر بالاگذر یا پایین‌گذر هستند، برای تعیین بالاگذر یا پایین‌گذر بودن، حالت‌های

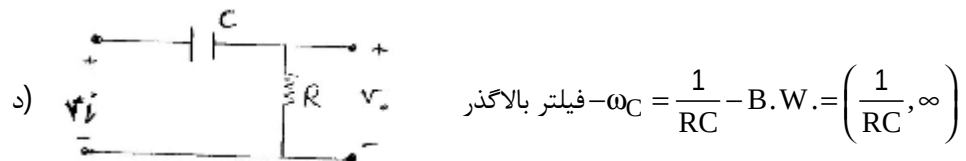
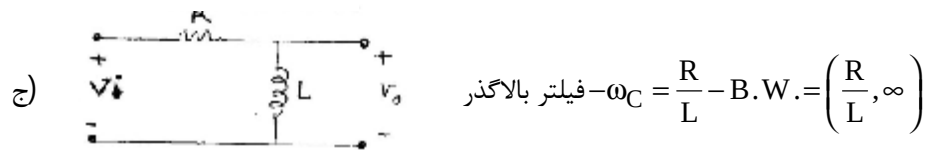
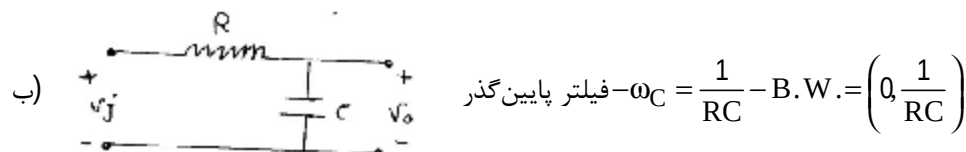
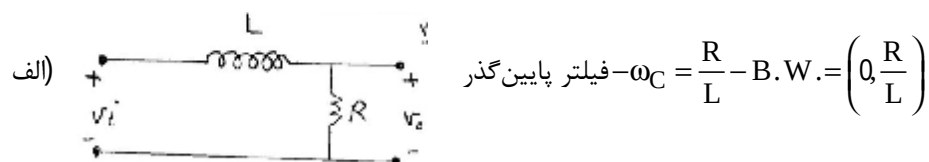
خازن و سلف را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:



با بررسی مدار در فرکانس‌های $\omega = 0$ و $\omega \rightarrow \infty$ و عبور یا عدم عبور سیگنال در این فرکانس‌ها، پایین‌گذر یا بالاگذر بودن شبکه مشخص می‌شود.

نکته: در مدارهای مرتبه اول شامل خازن و مقاومت، فرکانس قطع برابر $\omega_C = \frac{1}{RC}$ و در مدارهای مرتبه اول شامل سلف و مقاومت، فرکانس قطع برابر $\omega_C = \frac{R}{L}$ است.

مثال ۱۱: در مدارهای شکل زیر، نوع فیلتر، فرکانس قطع و پهنای باند را مشخص کنید.



نکته: کلیه مدارهای مرتبه دوم فیلتر میان‌گذر یا میان‌نگذر هستند. در این مدارها، فرکانس وسط همان فرکانس تشدید (ω_0) است و پهنای باند آن‌ها برابر 2α می‌باشد. (مقادیر ω_0 و 2α را می‌توان با تشکیل معادله دیفرانسیل مدار به دست آورد).

به عنوان مثال برای مدارهای RLC سری و موازی داریم:

- مدار RLC سری:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, B.W. = 2\alpha = \frac{R}{L}$$

- مدار RLC موازی:

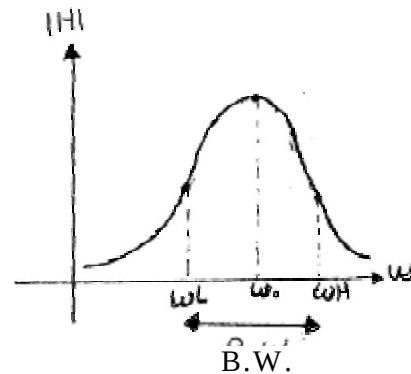
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, B.W. = 2\alpha = \frac{1}{RC}$$

نکته: در مدارهای مرتبه دوم، فرکانس قطع بالا (ω_H) و فرکانس قطع پایین (ω_L) به صورت زیر به دست می آیند:

$$\begin{cases} \omega_H = \omega_0 + \alpha \\ \omega_L = \omega_0 - \alpha \end{cases}$$

مثلاً برای مدارهای RLC سری و موازی داریم:

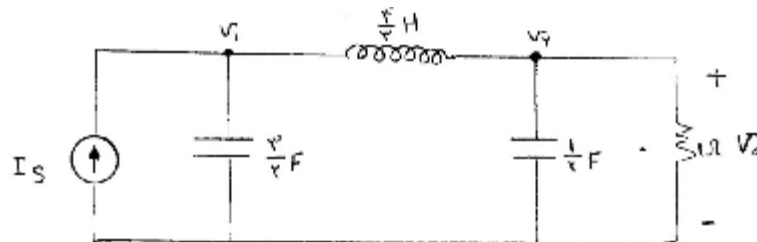
$$\begin{aligned} \text{سری RLC: } & \begin{cases} \omega_L = \frac{1}{\sqrt{LC}} - \frac{R}{2L} \\ \omega_H = \frac{1}{\sqrt{LC}} + \frac{R}{2L} \end{cases} \\ \text{موازی RLC: } & \begin{cases} \omega_L = \frac{1}{\sqrt{LC}} - \frac{1}{2RC} \\ \omega_H = \frac{1}{\sqrt{LC}} + \frac{1}{2RC} \end{cases} \end{aligned}$$



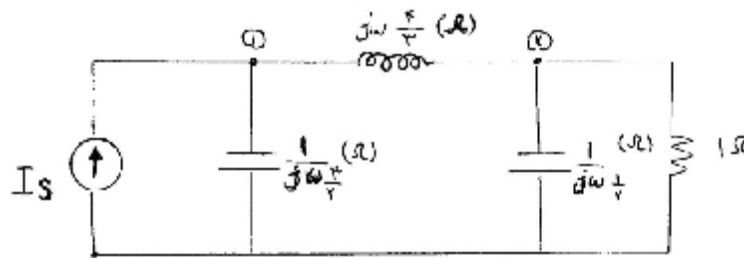
نکته: براساس مطالب بیان شده، ضریب کیفیت Q به صورت زیر نیز قابل بیان است:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{\omega_H - \omega_L} = \frac{f_0}{\Delta f}$$

مثال ۱۲: در مدار شکل زیر، تابع شبکه $H(j\omega) = \frac{V_o}{I_S}$ را پیدا کرده و رفتار فیلتری آن را مشخص کنید.



با KCL زدن در گره های 1 و 2 داریم:



$$\begin{cases} \text{KCL (1): } j\omega \frac{3}{2} V_1 + \frac{1}{j\omega \frac{4}{3}} (V_1 - V_2) = I_s \\ \text{KCL (2): } V_2 + j\omega \frac{1}{2} V_2 + \frac{1}{j\omega \frac{4}{3}} (V_2 - V_1) = 0 \end{cases}$$

$$V_o = V_2$$

با حل این دو معادله دو مجهول:

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{I_s} = \frac{1}{(1 - 2\omega^2) + j\omega(2 - \omega^2)}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - 2\omega^2)^2 + \omega^2(2 - \omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^6}}$$

برای تعیین نوع فیلتر:

$$\begin{cases} \omega = 0 \rightarrow |H(j\omega)| = 1 \\ \omega \rightarrow \infty \Rightarrow |H(j\omega)| = 0 \end{cases} \rightarrow \text{فیلتر پایین گذر}$$

و برای پهنای باند آن داریم:

$$\max |H(j\omega)| = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 \rightarrow \omega C = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow \text{B.W.} = (0.1)$$

نکته: اگر در مداری فرکانس از ω_1 به ω_2 تغییر کند، مقادیر المان‌های جدید برابر است با:

$$\begin{cases} R_2 = R_1 \\ L_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} L_1 \\ C_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} C_1 \end{cases}$$

مثلاً در مثال قبل، اگر پهنای باند از (0,1) به $(0,10^6)$ تبدیل شود، باید:

$$R : 1\Omega \rightarrow 1\Omega$$

$$C_1 : \frac{3}{2}F \rightarrow \frac{3}{2} \times \frac{1}{10^6} = 1/5\mu F$$

$$C_2 : \frac{1}{2}F \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{10^6} = 0/5\mu F$$

$$L : \frac{4}{3}H \rightarrow \frac{4}{3} \times \frac{1}{10^6} = 1/33\mu H$$

نکته: برای K برابر شدن سطح امپدانس یک مدار باید:

$$\begin{cases} R_{\text{new}} = K \times R_{\text{old}} \\ L_{\text{new}} = K \times L_{\text{old}} \\ C_{\text{new}} = \frac{1}{K} \times C_{\text{old}} \end{cases}$$

6-7- توان در حالت دائمی سینوسی

توان لحظه‌ای به صورت حاصل ضرب ولتاژ و جریان تعریف می‌شود:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t)$$

در حالت دائمی سینوسی اگر فرض کنیم ولتاژ و جریان به صورت زیر باشند:

$$V(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t)$$

آنگاه داریم:

$$P(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \phi) \cos(\omega t) = \frac{1}{2} V_m I_m [\cos \phi + \cos(2\omega t + \phi)]$$

و مقدار متوسط (یا مقدار DC) آن برابر است با:

$$P_{\text{av}} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \phi$$

از رابطه توان لحظه‌ای به دست آمده در حالت دائمی سینوسی می‌توان نتیجه گرفت که:

1- فرکانس توان لحظه‌ای، دو برابر فرکانس ولتاژ یا جریان است.

2- توان لحظه‌ای می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد.

3- در صورتی که $\cos \phi \geq 0$ باشد (به عبارت دیگر $-90^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$)، مقدار توان متوسط مثبت است. یعنی اگر مدار

پسیو باشد مقدار توان متوسط همواره مثبت است.

لازم به ذکر است مداری یا المانی پسیو است که $\text{Re}(z) \geq 0$ یا $-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ باشد.

* ضریب توان $(\cos \varphi)$

مقدار $\cos \varphi$ را اصطلاحاً ضریب توان می‌گویند. φ اختلاف زاویه ولتاژ و جریان است.

$$\varphi = \mathbf{RV} - \mathbf{RI}$$

بنابراین برای المان‌های مختلف مداری، ضریب توان به صورت زیر است:

$$1- \text{مدار مقاومتی خالص: } \varphi = 0 \leftarrow \cos \varphi = 1$$

$$2- \text{مدار در حالت تشدید: } \varphi = 0 \leftarrow \cos \varphi = 1$$

$$3- \text{مدار سلفی خالص: } \varphi = +90^\circ \leftarrow \cos \varphi = 0$$

$$4- \text{مدار خازنی خالص: } \varphi = -90^\circ \leftarrow \cos \varphi = 0$$

$$5- \text{مدار مقاومتی - سلفی: } 0 < \cos \varphi < 1 \leftarrow 0 \leq \varphi < 90^\circ$$

$$6- \text{مدار مقاومتی - خازنی: } 0 < \cos \varphi < 1 \leftarrow -90^\circ \leq \varphi < 0$$

$$7- \text{هر مدار شامل عناصر پسیو: } 0 < \cos \varphi \leq 1 \leftarrow -90^\circ \leq \varphi \leq +90^\circ$$

* توان مختلط

در تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی، کلیه کمیت‌ها و مقادیر به صورت فازور و مختلط بیان می‌شوند. توان نیز به صورت کمیتی مختلط با عنوان توان مختلط از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{1}{2} V_m I_m^*$$

که I_m^* مزدوج جریان I_m است.

توان مختلط به صورت فازوری نیز بیان می‌شود:

$$S = \frac{1}{2} V_m I_m \mathbf{R}\varphi = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \varphi + j \frac{1}{2} V_m I_m \sin \varphi$$

به عبارت دیگر توان مختلط یک بردار با اندازه $\frac{1}{2} V_m I_m$ و فاز φ است.

همچنین فازور امپدانس Z و فازور توان مختلط S با یکدیگر هم فاز هستند و فاز هر دوی آن‌ها برابر φ است.

در رابطه فوق V_m و I_m به ترتیب مقادیر ماکزیمم ولتاژ و جریان است و اگر در این رابطه مقادیر مؤثر ولتاژ و جریان

V_e و I_e جایگزین شود، ضریب $\frac{1}{2}$ حذف می‌شود. یعنی:

$$S = V_e I_e \angle \phi$$

در بیان توان مختلط به صورت فازوری:

$$S = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \phi + j \frac{1}{2} V_m I_m \sin \phi = P + jQ$$

که در این رابطه، P توان متوسط (P_{av}) یا حقیقی یا اکتیو یا مصرفی است و برحسب وات (w) بیان می‌شود.

Q توان مجازی یا راکتیو است و برحسب ولت آمپر راکتیو (VAR) سنجیده می‌شود. همچنین توان مختلط براساس

ولت آمپر (VA) تعریف می‌گردد.

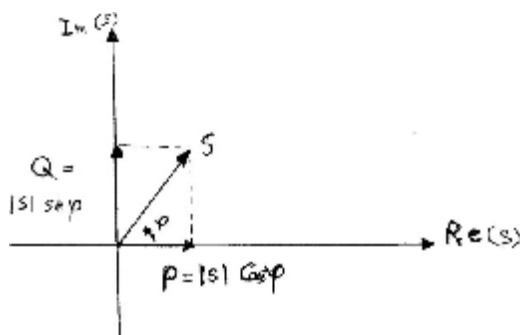
* توان ظاهری

اندازه توان مختلط را توان ظاهری می‌گویند.

$$|S| = \frac{1}{2} V_m I_m = V_e I_e = \text{توان ظاهری}$$

۷-۶-۱- مثلث توان

کلیه مطالب بیان شده در مورد توان در حالت دائمی سینوسی را می‌توان در یک شکل با عنوان مثلث توان خلاصه نمود:



براساس مثلث توان می‌توان گفت:

$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{Q}{P}$$

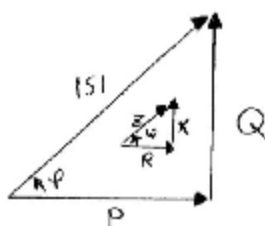
$$P = |S| \cos \phi$$

$$Q = |S| \sin \phi$$

$$\text{ضریب توان} = \cos \phi = \frac{P}{|S|} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

همچنین می‌توان گفت در مدارهای خازنی $Q < 0$ و در مدارهای سلفی $Q > 0$ است ولی در همه مدارهای پسیو $P_{av} \geq 0$ می‌باشد.

نکته: مثلث توان و مثلث امپدانس، متشابه هستند. به عبارت دیگر:

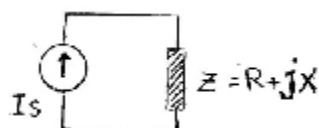


$$RZ = RS = \phi$$

نکته: در تحلیل حالت دائمی سینوسی، اگر بتوان مدار مورد بررسی را به یکی از شکل‌های زیر تبدیل نمود، برای

محاسبه‌ی P و Q داریم:

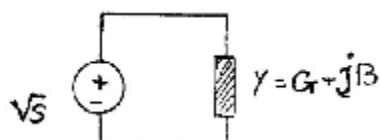
-1



$$P = P_{av} = \frac{1}{2} R |I_S|^2 = \frac{1}{2} R I_m^2 = R I_e^2 (w)$$

$$Q = \frac{1}{2} X |I_S|^2 = \frac{1}{2} X I_m^2 = X I_e^2 (VAR)$$

-2



$$P = P_{av} = \frac{1}{2} G |V_S|^2 = \frac{1}{2} G V_m^2 = G V_e^2 (w)$$

$$Q = \frac{-1}{2} B |V_S|^2 = \frac{-1}{2} B V_m^2 = -B V_e^2 (VAR)$$

و با داشتن P و Q ، هر پارامتر دیگری مشخص و معلوم است.

۷-۶-۲- توان و قضیه جمع آثار

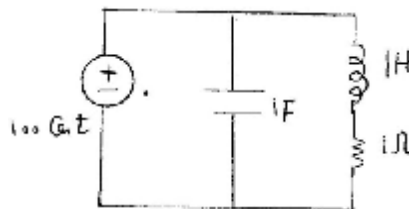
قضیه جمع آثار برای توان لحظه‌ای برقرار نیست.

جمع آثار به دو شرط می‌تواند برای توان متوسط برقرار باشد:

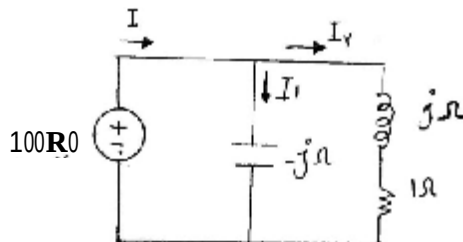
1- فرکانس منابع ورودی متفاوت باشد.

2- مدار در حالت دائمی قرار گرفته باشد.

مثال ۱۳: در مدار شکل زیر، توان مختلط، حقیقی و راکتیو را پیدا کنید.



روش اول: با انتقال مدار در حوزه فرکانس ($\omega=1$) داریم:



$$I_1 = \frac{100\angle 0}{-j} = 100j, \quad I_2 = \frac{100\angle 0}{1+j} = 50(1-j) = 50-50j$$

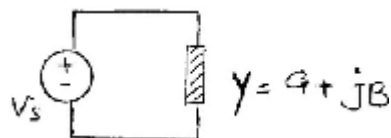
$$\text{KCL: } I = I_1 + I_2 = 100j + 50 - 50j = 50 + 50j$$

$$S = \frac{1}{2} V I^* = \frac{1}{2} \times 100 \times (50 - 50j) = 2500 - j2500$$

و در نتیجه:

$$P = 2500\text{W}, Q = -2500\text{VAR}, |S| = 2500\sqrt{2}\text{VA}$$

روش دوم: با تبدیل مدار به شکل زیر داریم:



$$Y = j + \frac{1}{1+j} = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2} \rightarrow G = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}$$

پس داریم:

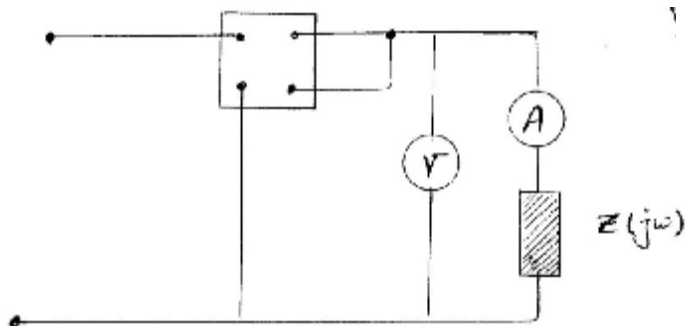
$$P = \frac{1}{2} G |V_S|^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (100)^2 = 2500W$$

$$Q = \frac{-1}{2} B |V_S|^2 = \frac{-1}{2} \times \frac{1}{2} \times (100)^2 = -2500VAR$$

$$|S| = \sqrt{(2500)^2 + (-2500)^2} = 2500\sqrt{2}VA$$

مثال ۱۴: در مدار شکل زیر، آمپر متر مقدار ۱۰ آمپر، ولت متر مقدار ۱۳۰ ولت و وات متر ۵۰۰ وات را نشان می‌دهد. در

این صورت $Z(j\omega)$ چقدر است؟



با توجه به این که دستگاه‌های اندازه‌گیری، مقادیر مؤثر را نشان می‌دهند داریم:

$$P = RI_e^2 \rightarrow R = \frac{P}{I_e^2} = \frac{50}{10^2} = 5\Omega$$

$$|Z| = \frac{V_e}{I_e} = \frac{130}{10} = 13\Omega$$

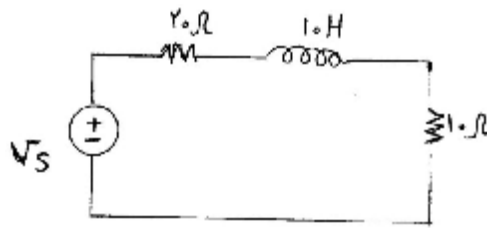
$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \rightarrow X = \sqrt{|Z|^2 - R^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\Omega$$

و در نتیجه:

$$Z = R \pm jX = 5 \pm j12$$

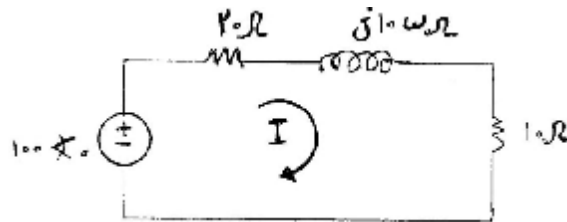
مثال ۱۵: در مدار شکل زیر، توان جذب شده توسط مقاومت ۱۰ اهمی برابر ۲۰ وات است. ضریب توان منبع V_s را به

دست آورید.



$$V_S = 100 \cos \omega t$$

با انتقال مدار به حوزه فرکانس داریم:



$$P_{10} = \frac{1}{2} R |I|^2 \rightarrow |I| = \sqrt{\frac{2 \times 20}{10}} = 2 \text{ A}$$

$$I = \frac{V_S}{20 + j10\omega + 10} = \frac{100 \angle 0^\circ}{30 + j10\omega} \rightarrow |I| = \frac{100}{\sqrt{900 + 100\omega^2}} = 2 \rightarrow 900 + 100\omega^2 = 2500 \rightarrow \omega = 4$$

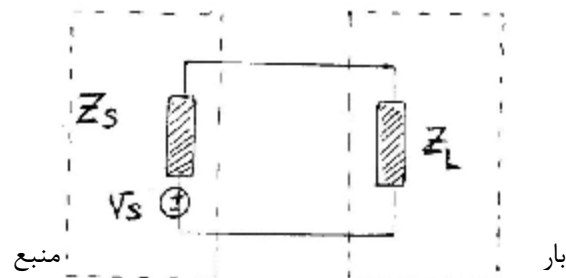
$$I = \frac{100 \angle 0^\circ}{30 + j40} = \frac{100 \angle 0^\circ}{50 \angle 53.1^\circ} = 2 \angle -53.1^\circ$$

و در نتیجه:

$$\cos \phi = \cos(\angle V_S - \angle I) = \cos 53.1^\circ = 0.6$$

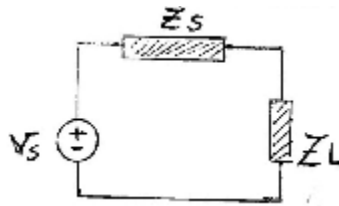
۷-۶-۳- قضیه انتقال توان ماکزیمم

در مدار شکل زیر:



برای انتقال بیشترین توان از منبع به بار پنج حالت داریم:

۱- هم‌بار و هم منبع مختلط باشند:



در این حالت شرط انتقال توان ماکزیمم از منبع به بار این است که:

$$Z_L = Z_s^*$$

و مقدار این توان مختلط انتقالی ماکزیمم برابر است با:

$$P_{\max} = \frac{1}{8} \cdot \frac{|V_s|^2}{R_L}$$

2- هم‌بار و هم منبع هر دو اهمی خالص باشند، در این صورت شرط انتقال توان ماکزیمم عبارت است از:

$$R_L = R_s$$

3- بار اهمی خالص و منبع مختلط باشد، در این صورت:

$$R_L = |Z_s| = \sqrt{R_s^2 + X_s^2}$$

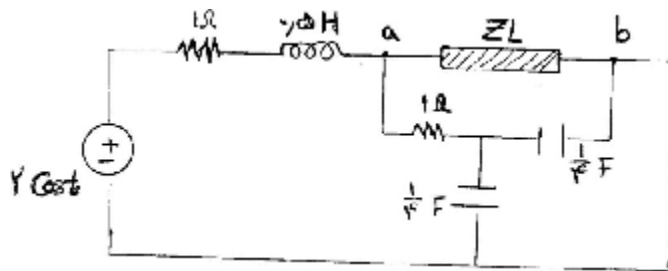
4- بار موهومی خالص و منبع مختلط باشد، آنگاه:

$$X_L = |Z_s| = \sqrt{R_s^2 + X_s^2}$$

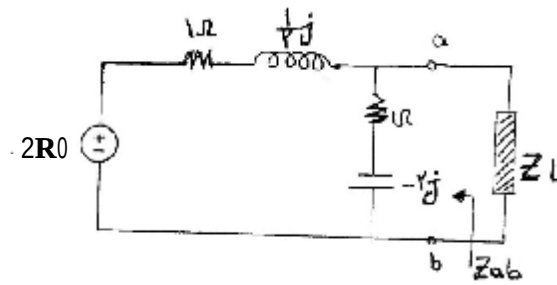
5- بار مختلط و منبع اهمی خالص باشد، پس داریم:

$$X_L = 0, R_L = R_s$$

مثال ۱۶: در مدار شکل زیر Z_L را به گونه‌ای تعیین کنید که توان انتقالی به آن ماکزیمم شود.



با انتقال مدار به حوزه فرکانس و مرتب‌سازی آن داریم: ($\omega=1$)



امپدانس ورودی از دو سر b, a را به دست می‌آوریم:

$$Z_{ab} = \frac{1}{Y_{ab}}, Y_{ab} = \frac{1}{1-2j} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}j} = \frac{2(2-j)}{5} + \frac{1+2j}{5} = 1j \rightarrow Z_{ab} = 1\Omega$$

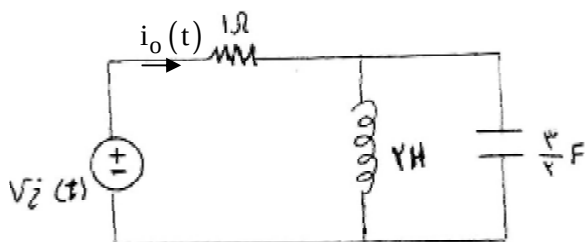
پس برای انتقال توان ماکزیمم باید $Z_L = Z_{ab}^* = 1\Omega$ باشد.



تست‌های طبقه‌بندی شده مبحث تحلیل در حالت دائمی سینوسی

۱- مدار شکل زیر در حالت دائمی سینوسی است. به ازای کدام مقدار φ پاسخ حالت دائمی سینوسی به

صورت $i_o(t) = I_m \cos t$ خواهد بود و مقدار I_m کدام است؟



$$I_m = \sqrt{2}, \varphi = -\frac{\pi}{4} \quad (1)$$

$$I_m = \frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi = -\frac{\pi}{4} \quad (2)$$

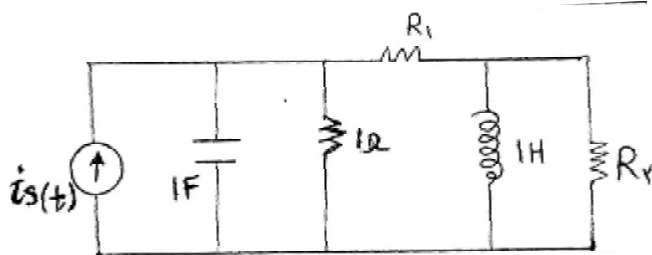
$$I_m = \sqrt{2}, \varphi = \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

$$I_m = \frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi = \frac{\pi}{4} \quad (4)$$

$$V_i(t) = \sin(t + \varphi)$$

۲- در مدار شکل زیر، توان متوسط (یا توان مصرفی) مقاومت R_1 برابر P_1 و توان مصرفی مقاومت R_2 برابر

P_2 است. مقاومت‌های R_1 و R_2 چند اهمی باشند تا $P_1 + P_2$ حداکثر باشد؟



$$R_2 = \frac{1}{2}, R_1 = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$R_2 = 0, R_1 = 1 \quad (2)$$

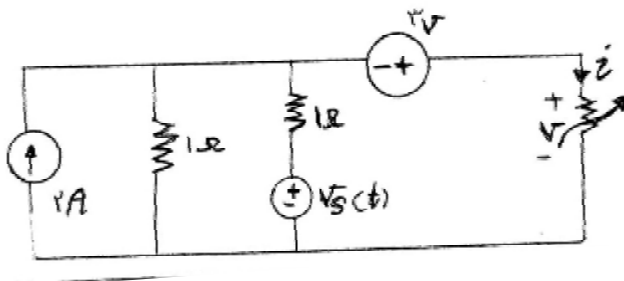
$$R_2 = 1, R_1 = 0 \quad (3)$$

$$R_2 = 2, R_1 = 2 \quad (4)$$

$$i_S(t) = 110 \cos t$$

۳- در مدار شکل زیر، ولتاژ $V(t)$ دو سر مقاومت غیرخطی به کدام جواب نزدیک‌تر است؟

$$V_s(t) = 0/18 \cos 2t \text{ و مشخصه مقاومت غیرخطی } i = \begin{cases} V^2, & V > 0 \\ 0, & V < 0 \end{cases} \text{ است.}$$



$$2 + 0/03 \cos 2t \quad (1)$$

$$2 + 0/06 \cos 2t \quad (2)$$

$$4 + 0/018 \cos 2t \quad (3)$$

$$4 + 0/036 \cos 2t \quad (4)$$

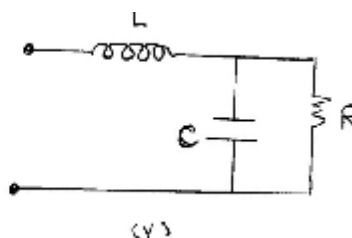
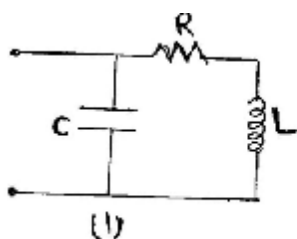
۴- برای آن که فرکانس تشدید دو مدار شکل زیر یکسان باشد، کدام شرط باید برقرار باشد؟

$$R = \frac{L}{C} \quad (1)$$

$$R = \frac{C}{L} \quad (2)$$

$$R = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (3)$$

$$R = \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (4)$$



۵- در مدار زیر عنصر غیرخطی توسط رابطه $i = V^3$ تعریف شده است. مقدار مقاومت R برای انتقال

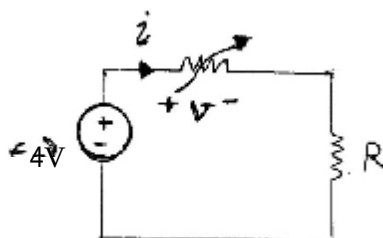
حداکثر توان به آن کدام گزینه است؟

$$27 \quad (1)$$

$$\frac{1}{9} \quad (2)$$

$$\frac{1}{27} \quad (3)$$

$$\frac{2}{27} \quad (4)$$



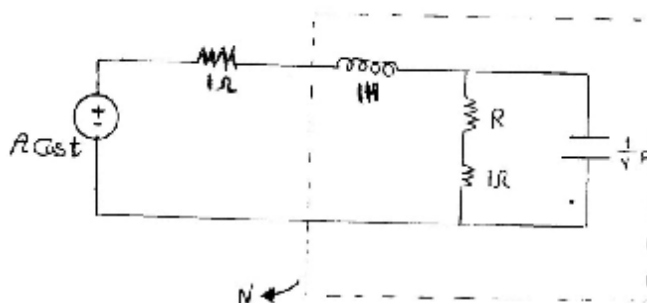
۶- در مدار حالت دائمی سینوسی زیر ماکزیمم توان N برابر $\frac{1}{8}$ وات است. آنگاه:

$$|A| = \frac{1}{2} \text{ Volt}, R = 1\Omega \quad (1)$$

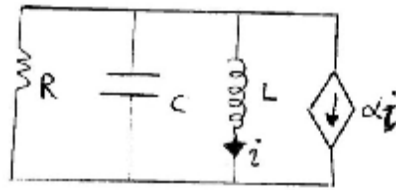
$$|A| = 1 \text{ Volt}, R = 1\Omega \quad (2)$$

$$|A| = 1 \text{ Volt}, R = 3\Omega \quad (3)$$

$$|A| = \frac{1}{2} \text{ Volt}, R = 3\Omega \quad (4)$$



۷- در مدار شکل زیر فرکانس تشدید کدام است؟



$$\sqrt{\frac{\alpha-1}{LC}} \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{LC}} \quad (2)$$

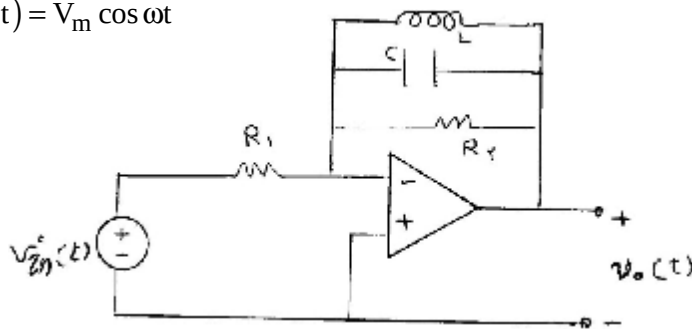
$$\sqrt{\frac{1-\alpha}{LC}} \quad (3)$$

$$\sqrt{\frac{1+\alpha}{LC}} \quad (4)$$

۸- مدار شکل زیر در حالت دائمی سینوسی است. در چه فرکانسی رابطه ورودی و خروجی به صورت

$V_o(t) = K V_{in}(t)$ در می آید (K یک مقدار ثابت) و مقدار K کدام است؟

$$V_{in}(t) = V_m \cos \omega t$$



$$K = \frac{-R_2}{R_1}, \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1)$$

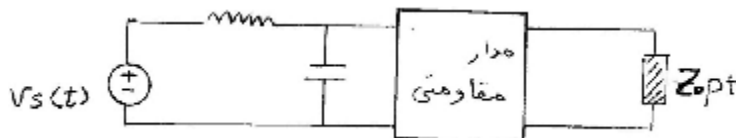
$$K = \frac{-R_1}{R_2}, \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2)$$

$$K = \frac{-R_2}{R_1}, \omega = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (3)$$

$$K = \frac{-R_1}{R_2}, \omega = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4)$$

۹- مدار شکل زیر در حالت دائمی سینوسی است. کدام گزینه به عنوان Z_{opt} (از حیث دریافت توان

ماکزیمم) می تواند قابل قبول باشد؟



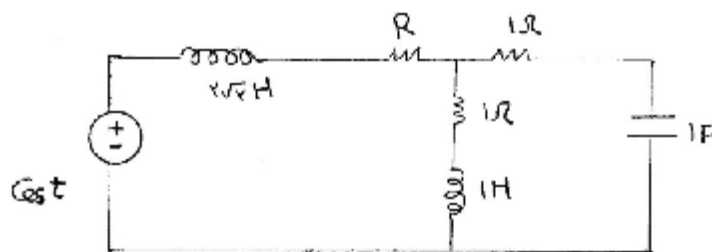
$$j\sqrt{2} \quad (1)$$

$$\sqrt{2} \quad (2)$$

$$1-j \quad (3)$$

$$1+j \quad (4)$$

۱۰- در مدار شکل زیر، به ازای چه مقدار R توان متوسط دریافتی آن حداکثر می‌شود؟



(1) 1

(2) 3

(3) 9

(4) $1+2\sqrt{2}$

۱۱- سه بار Z_{L1} و Z_{L2} و Z_{L3} به‌طور موازی به یک شبکه مطابق شکل زیر وصل هستند. بار Z_{L1} توان

25kw و 25kVAR را جذب می‌کند. بار Z_{L2} توان 15KVA را به ضریب توان پیش‌فاز 0.8 جذب می‌کند.

بار Z_{L3} توان 11kw را با ضریب توان یک جذب می‌کند. ضریب توان کل بارها کدام است؟



(1) $\frac{2}{\sqrt{10}}$ و پس‌فاز

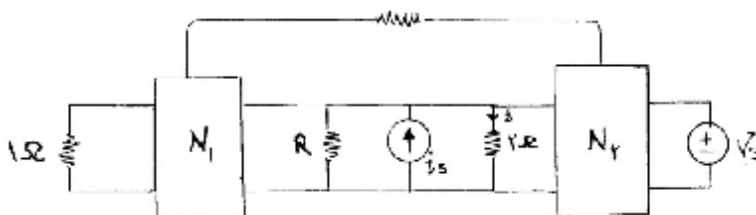
(2) $\frac{3}{\sqrt{10}}$ و پیش‌فاز

(3) $\frac{2}{\sqrt{10}}$ و پیش‌فاز

(4) $\frac{3}{\sqrt{10}}$ و پس‌فاز

۱۲- در شکل زیر مدارهای N_1 و N_2 از مقاومت‌های خطی مثبت تشکیل شده و به ازای $R = 2\Omega$ ،

$i = \frac{1}{3}i_s + \frac{1}{4}V_s$ است. به ازای چه مقدار R ، توان آن ماکزیمم است؟



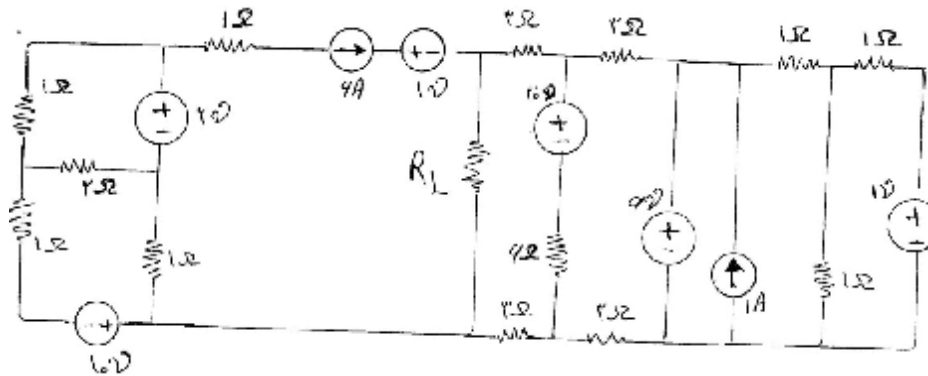
(1) -1Ω

(2) 1Ω

(3) 2Ω

(4) $\frac{2}{5}\Omega$

۱۳- در مدار زیر حداکثر توانی که به R_L می‌رسد کدام است؟



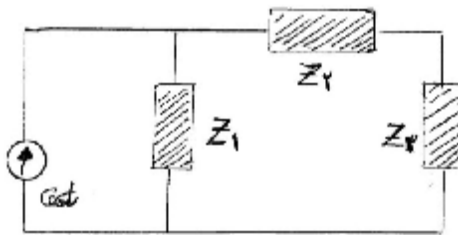
(1) 36w

(2) 144w

(3) 150w

(4) 225w

۱۴- مدار شکل زیر در حالت دائمی سینوسی است. کدام گزینه نادرست است؟



$$\begin{cases} Z_1 = 0/3 + j0/1\Omega \\ Z_2 = 0/4 - j0/2\Omega \\ Z_3 = 0/2 + j0/4\Omega \end{cases}$$

(1) توان ظاهری (اندازه توان مختلط) تحویل داده شده به Z_2 و Z_3 برابر است.

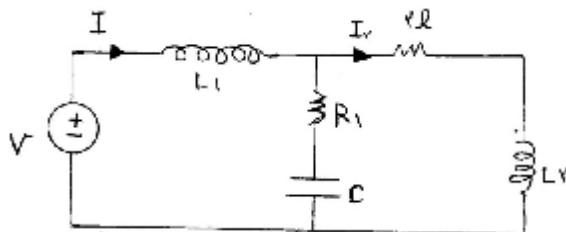
(2) توان متوسط تحویل داده شده به Z_2 دو برابر توان متوسط تحویل داده شده به Z_3 است.

(3) توان راکتیو تحویل داده شده به Z_1 ، (-2) برابر توان راکتیو تحویل داده شده به Z_2 است.

(4) توان راکتیو تحویل داده شده به Z_3 ، چهار برابر توان راکتیو تحویل داده شده به Z_1 است.

۱۵- در مدار در حالت دائمی سینوسی شکل زیر، $V = 10\angle 0^\circ$ و $I = \frac{1+j}{2}$ (با مقادیر ماکزیمم برحسب ولت و

آمپر) و توان متوسط R_1 برابر $1/5$ وات است. ماکزیمم جریان I_2 چند آمپر است؟



(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) 1

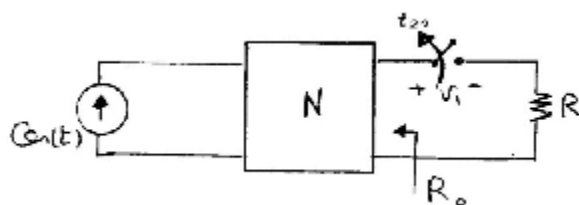
(3) $\sqrt{3/5}$

(4) نمی‌توان محاسبه کرد چون I_2 به مقادیر عناصر بستگی دارد.

۱۶- در مدار شکل زیر، N شبکه‌ای مقاومتی، خط و تغییرناپذیر با زمان است. وقتی کلید بسته است

ماکزیمم توان در مقاومت R برابر $\frac{1}{6}$ وات می‌باشد. اگر ولتاژ دو سر کلید (V_1) در $t = \frac{\pi}{4}$ برابر $\sqrt{2}$ ولت

باشد، R_0 چند اهم است؟



(1) 3

(2) $\frac{2}{3}$

(3) 6

(4) $\frac{3}{2}$

۱۷- ورودی یک مدار RL سری منبع ولتاژ $V_S(t) = V_0 \sin \omega t$ است. اگر $L = 1H$ ، $R = 2\Omega$ ،

$\omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ و $V_0 = 10\text{V}$ باشد، شرایط اولیه $i_L(0)$ را چنان تعیین کنید که مدار پاسخ گذرا داشته باشد.

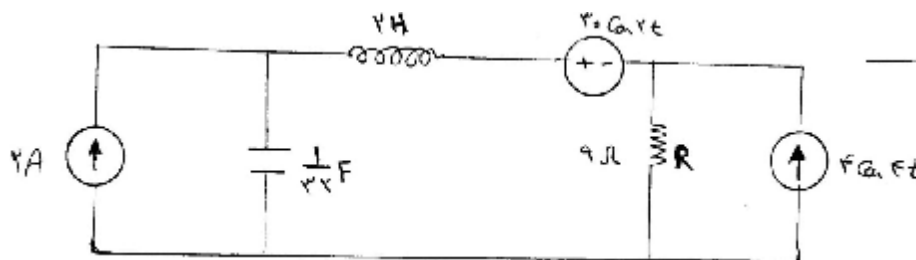
(4) هیچ کدام

(3) $-2A$

(2) $2A$

(1) $-1A$

۱۸- توان متوسط تحویل داده شده به مقاومت R در حالت دائمی در شبکه زیر چقدر است؟



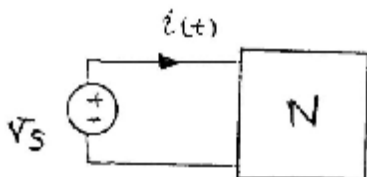
(1) 54w

(2) 36w

(3) 18w

(4) 72w

۱۹- معادله دیفرانسیل شکل زیر برای ورودی $V(t)$ و خروجی $i(t)$ به صورت زیر است:



$$\frac{d^4 i}{dt^4} + 10 \frac{d^3 i}{dt^3} + 40 \frac{d^2 i}{dt^2} + 60 \frac{di}{dt} + 784i = 10 \frac{dV_S}{dt} + 40V_S$$

در فرکانس $\omega = 4$ کدام مدار زیر دارای رفتار حالت دائمی سینوسی یکسان با این مدار است؟

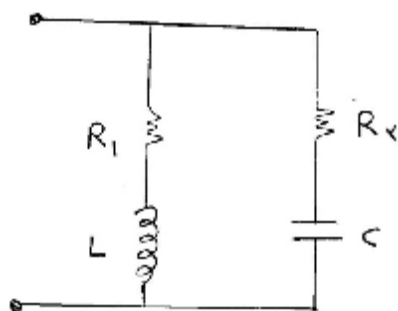
(1) یک سلف $\frac{1}{40}$ هانری

(2) یک خازن $\frac{1}{40}$ فارادی

(3) اتصال سری یک مقاومت و یک خازن

(4) اتصال سری یک مقاومت و یک سلف

۲۰- فرکانس تشدید مدار شکل زیر را به دست آورید.



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \frac{R_1}{R_2} \quad (1)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2)$$

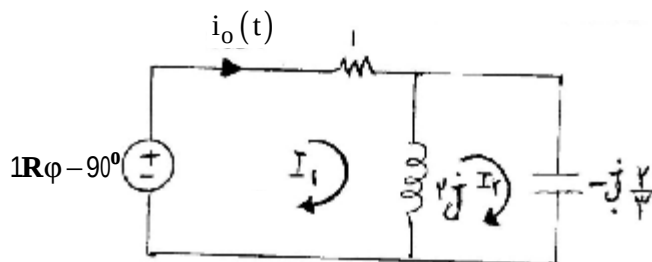
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{t - CR_1^2}{L - CR_2^2}} \quad (3)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{L - CR_2^2}{L - CR_1^2}} \quad (4)$$

پاسخ تشریحی

۱- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

مدار را در حالت دائمی سینوسی با $\omega=1$ رسم می‌کنیم و معادلات مش را به صورت فازوری می‌نویسیم:



$$\begin{aligned} \text{KVL: } 1\angle\phi-90^\circ &= I_1 + 2j(I_1 - I_2) \\ \text{KVL: } 2j(I_2 - I_1) - j\frac{2}{3}I_2 &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} 1+2j & -2j \\ -2j & 2j-\frac{2}{3}j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j\angle\phi \\ 0 \end{bmatrix}$$

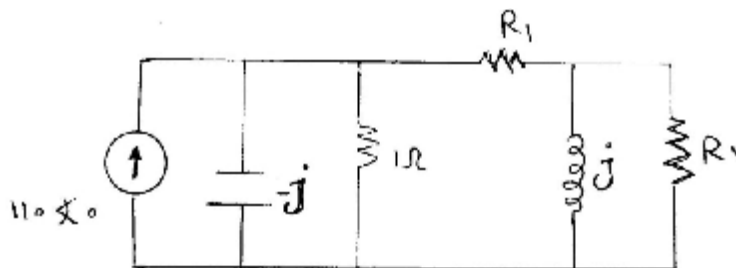
با حل این دستگاه معادلات برای I_1 داریم:

$$\begin{aligned} I_1 &= \left(\frac{1-j}{2} \right) \times (1\angle\phi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle\phi - \frac{\pi}{4} \rightarrow i_o(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left(\phi - \frac{\pi}{4} + \omega t \right) \\ &\rightarrow i_o(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left(t + \phi - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

بنابراین برای این که $i_o(t) = I_m \cos t$ باشد، باید $\phi = \frac{\pi}{4}$ بوده که در این صورت $I_m = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ خواهد بود.

۲- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

برای سادگی محاسبات R_1 و R_2 را کنار همدیگر قرار می‌دهیم. برای این منظور مدار را به حالت دائمی سینوسی تبدیل می‌کنیم ($\omega=1$):



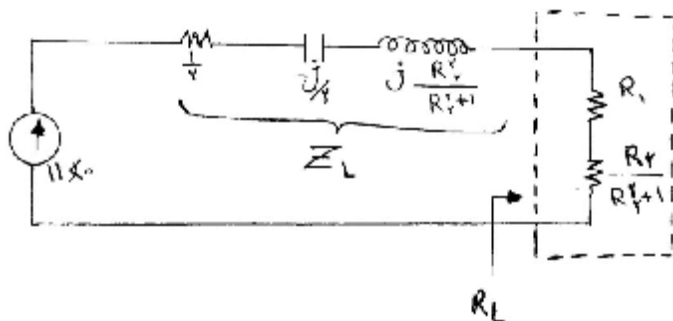
ابتدا شاخه R_2 موازی با سلف j را به سری تبدیل می‌کنیم:

$$Z_1 = R_2 \parallel j = \frac{R_2 j}{R_2 + j} \times \frac{R_2 - j}{R_2 - j} = \frac{R_2 j (R_2 - j)}{R_2^2 + 1} = \frac{R_2}{R_2^2 + 1} + j \frac{R_2^2}{R_2^2 + 1}$$

همچنین مقاومت یک اهمی موازی با خازن $-j$ را به سری تبدیل می‌کنیم:

$$Z_2 = 1P - j = \frac{-j}{1-j} \times \frac{1+j}{1+j} = \frac{-j(1+j)}{1+1} = \frac{1}{2} + \frac{-j}{2}$$

در نهایت مدار به صورت زیر تبدیل می‌شود:



$$R_L = R_1 + \frac{R_2}{R_2^2 + 1}$$

برای انتقال حداکثر توان به مقاومت R_L باید:

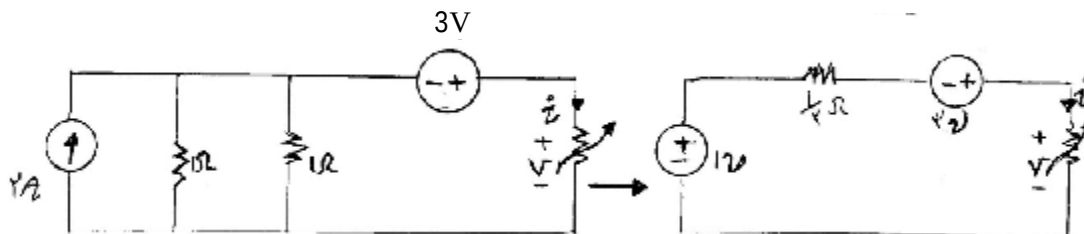
$$R_L = |Z_S| \rightarrow R_1 + \frac{R_2}{R_2^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{R_2^2}{R_2^2 + 1} - \frac{1}{2}\right)^2}$$

با استفاده از گزینه‌ها به سادگی دیده می‌شود که به ازای $R_1 = 0$ و $R_2 = 1$ ، رابطه‌ی فوق برقرار است.

۳- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

ابتدا بخش DC مدار را در نظر می‌گیریم تا نقطه کار مقاومت غیرخطی را به دست آوریم.

با استفاده از تبدیل نورتن به تونن داریم:



$$\text{KVL: } -1 + \frac{1}{2}i - 3 + V = 0 \xrightarrow{i=V^2} \frac{1}{2}V^2 + V = 4 \rightarrow \begin{cases} V = 2 \text{ Volt} \\ V = -4 \text{ Volt} \end{cases}$$

که فقط جواب مثبت قابل قبول است.

بنابراین نقطه کار مقاومت غیرخطی برابر است با:

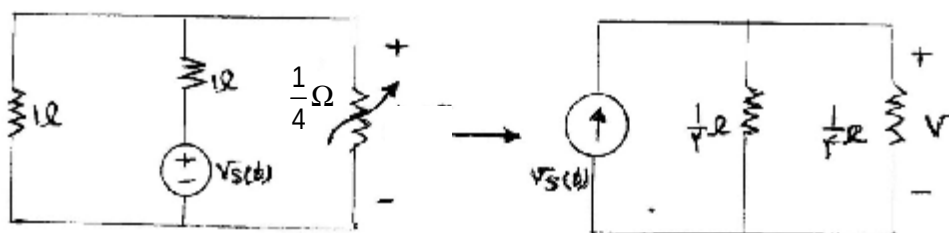
$$V = 2 \rightarrow i = V^2 = 4 \rightarrow \text{نقطه کار } (V = 2, i = 4)$$

اکنون با استفاده از تقریب سیگنال کوچک مقاومت غیرخطی را در نقطه کار خطی می‌کنیم.

به عبارت دیگر، مقاومت معادل آن را در نقطه کار به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{R} = \frac{di}{dV} = 2V = 2 \times 2 = 4 \rightarrow R = \frac{1}{4} \Omega$$

پس برای بخش ac (سیگنال کوچک) داریم:



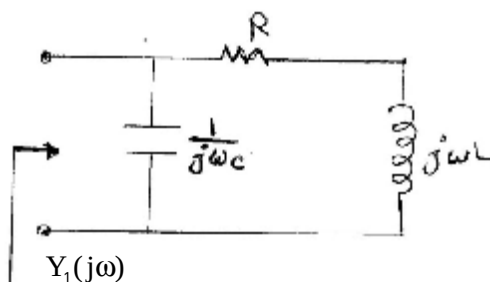
$$V = \left(\frac{1}{2} \parallel \frac{1}{4}\right) V_S(t) = \frac{1}{6} V_S(t) = \frac{1}{6} \times 0.18 \cos 2t = 0.03 \cos 2t$$

بنابراین ولتاژ دو سر مقاومت غیرخطی برابر است با:

$$V(t) = 2 + 0.03 \cos 2t$$

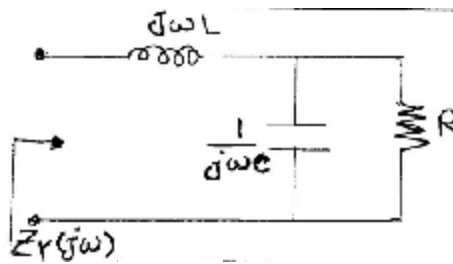
۴- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

برای یافتن فرکانس تشدید، باید امپدانس یا ادمیتانس را به دست آورده و بخش موهومی آن را برابر صفر قرار دهیم.



$$Y_1(j\omega) = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + (L\omega)^2}$$

$$\text{Im}(Y_1(j\omega)) = 0 \rightarrow C\omega - \frac{\omega L}{R^2 + L^2\omega^2} = 0 \rightarrow \omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$



$$Z_2(j\omega) = j\omega L + \frac{R \times \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = j\omega L + \frac{R}{Rj\omega C + 1} = j\omega L + \frac{R(1 - j\omega RC)}{1 + (R\omega C)^2}$$

$$\text{Im}(Z_2(j\omega)) = 0 \rightarrow \omega L - \frac{R\omega C}{1 + (R\omega C)^2} = 0 \rightarrow \omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{R^2 C^2}}$$

با مساوی قرار دادن فرکانس‌های تشدید داریم:

$$\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} = \frac{1}{LC} - \frac{1}{R^2 C^2} \rightarrow \frac{R^2}{L^2} = \frac{1}{R^2 C^2} \rightarrow R^4 = \frac{L^2}{C^2} \rightarrow R = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

۵- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

برای انتقال حداکثر توان به مقاومت R، باید مقاومت R با مقاومت معادل از دو سرش برابر باشد که در این جا این مقاومت به صورت غیرخطی است.

برای مقاومت‌های غیرخطی در نقطه کار می‌توان گفت:

$$R' = \frac{\partial V}{\partial i} \rightarrow \frac{1}{R'} = \frac{\partial i}{\partial V}$$

$$i = V^3 \rightarrow \frac{1}{R'} = \frac{\partial(V^3)}{\partial V} = 3V^2 \rightarrow R' = \frac{1}{3V^2} \rightarrow R = R' = \frac{1}{3V^2}$$

که برای یافتن V با KVL زدن در مدار داریم:

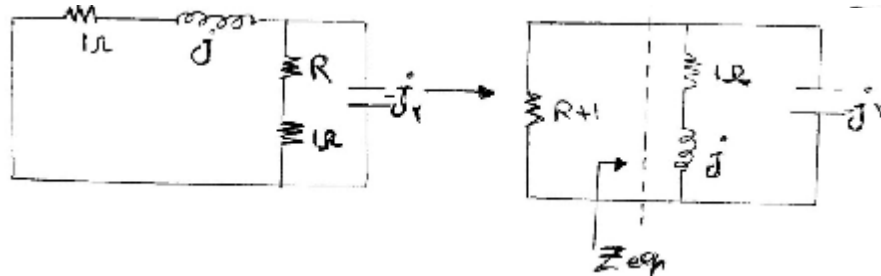
$$\text{KVL: } 4 = V + Ri = V + \frac{1}{3V^2} \times V^3 = V + \frac{V}{3} = \frac{4}{3}V \rightarrow V = 3\text{Volt}$$

بنابراین:

$$R = R' = \frac{1}{3V^2} \Big|_{V=3} = \frac{1}{27} \Omega$$

۶- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

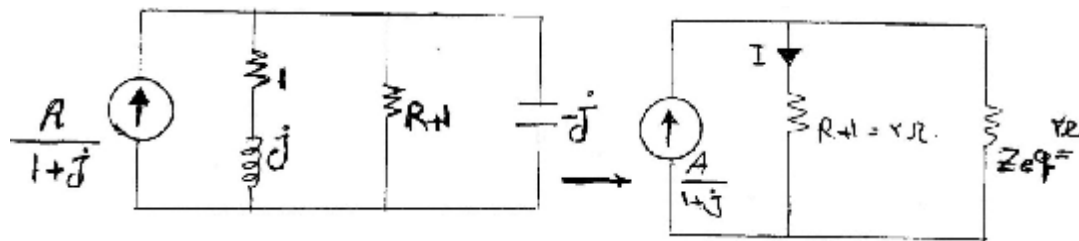
همان‌طور که دیده می‌شود ماکزیمم توان شبکه N برحسب وات است، یعنی این توان در قسمت مقاومتی شبکه N مصرف می‌شود و اگر بخواهیم توان مقاومت شبکه N ماکزیمم شود، باید مقدار آن با اندازه امپدانس معادل از دو سر آن برابر باشد. بنابراین داریم: ($\omega=1$)



$$Z_{eq} = (1+j) \parallel (-j) = \frac{-2j(1+j)}{1-j} = \frac{-2j(1+j)^2}{2} = -j(1+j)^2 = -j \times 2j = 2$$

$$R' = R + 1 = |Z_{eq}| = 2 \rightarrow R = 1\Omega$$

و برای به‌دست آوردن $|A|$ با استفاده از تبدیل تونن به نورتن و مقدار توان داده شده داریم:

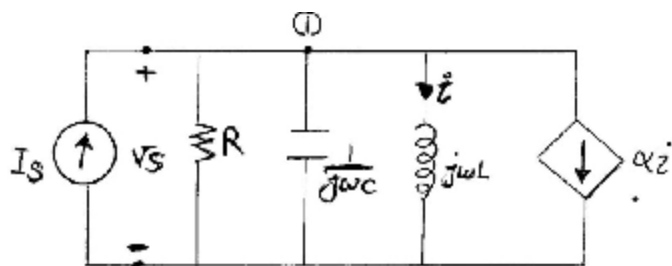


$$P = \frac{1}{2} R' |I|^2 = \frac{1}{2} (R+1) \left| \frac{A}{2(1+j)} \right|^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{|A|^2}{(2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{8} \rightarrow |A| = 1$$

۷- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

روش اول: امپدانس معادل مدار را به‌دست می‌آوریم و قسمت موهومی آن را برابر صفر قرار می‌دهیم. برای این منظور با

اعمال منبع جریان I_s به دو سر مدار و نوشتن KCL در گره d داریم:



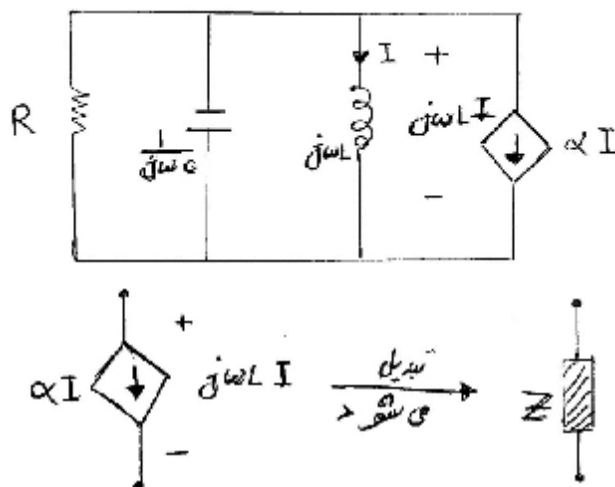
$$\text{KCL: } I_S = \frac{V_S}{R} + j\omega C V_S + \frac{V}{j\omega L} + \alpha \frac{V}{j\omega L}$$

$$\rightarrow I_S = V_S \left(\frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1+\alpha}{j\omega L} \right) \rightarrow Z_{in}(j\omega) = \frac{V_S}{I_S} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1+\alpha}{\omega L})}$$

برای حقیقی بودن $Z_{in}(j\omega)$ باید:

$$\omega C - \frac{1+\alpha}{\omega L} = 0 \rightarrow \omega C = \frac{1+\alpha}{\omega L} \rightarrow \omega^2 = \frac{1+\alpha}{LC} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1+\alpha}{LC}}$$

روش دوم: چون ولتاژ دو سر منبع جریان وابسته مشخص است می‌توان آن را به امپدانس تبدیل کرد.



$$Z = \frac{j\omega L I}{\alpha I} = j \frac{L}{\alpha} \omega$$

پس منبع جریان معادل یک سلف به اندازه $\frac{L}{\alpha}$ است که با سلف L موازی می‌باشد.

$$L_{eq} = \frac{L \times \frac{1}{\alpha}}{L + \frac{1}{\alpha}} = \frac{L}{\alpha + 1}$$

در نتیجه مدار به یک مدار RLC موازی تبدیل می‌شود که برای فرکانس تشدید آن داریم:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L_{eq}C}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{L}{\alpha+1} \times C}} = \sqrt{\frac{\alpha+1}{LC}}$$

۸- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

اگر بخواهیم گزینه‌ی «۴» صحیح است، $V_o(t) = KV_{in}(t)$ باشد، یعنی V_o با V_{in} هم فاز باشد، جریان LC موازی باید صفر باشد. به عبارت دیگر، مدار LC باید اتصال باز باشد که این اتفاق در حالت تشدید رخ می‌دهد و فرکانس آن

$$\text{برابر } \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ است.}$$

با مساوی گرفتن ولتاژ دو سر ورودی آپ امپ و جریان ورودی صفر، با نوشتن KCL در ورودی آپ امپ داریم:

$$\frac{0 - V_{in}}{R_1} + \frac{0 - V_o}{R_2} \Rightarrow V_o = \frac{R_2}{R_1} V_{in} \rightarrow K = -\frac{R_2}{R_1}$$

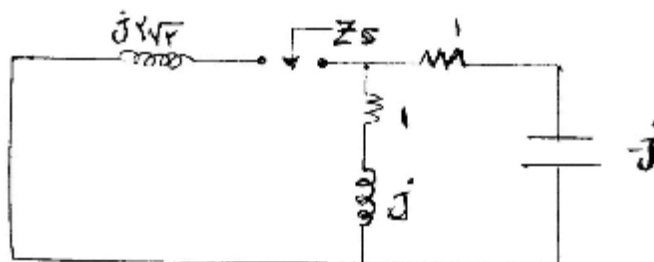
۹- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

طبق قضیه انتقال توان ماکزیمم Z_{opt} باید با Z_{in}^* از دو سرش برابر باشد. وقتی از دو سر Z_{opt} به بقیه مدار نگاه می‌کنیم، یک مدار RC دیده می‌شود که تنها المانی که در بخش موهومی آن وجود دارد یک خازن است که دارای امپدانس منفی می‌باشد، یعنی بخش موهومی Z_{in} منفی است و در نتیجه بخش موهومی Z_{in}^* مثبت خواهد بود و جزء حقیقی آن نیز مثبت است. این حالت فقط در گزینه ۴ وجود دارد.

۱۰- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

طبق قضیه انتقال توان ماکزیمم باید از دو سر R امپدانس دیده شده را به دست آورده و R را برابر اندازه این امپدانس در نظر بگیریم.

در حالت دائمی سینوسی با $\omega=1$ و صفر کردن منابع مستقل داریم:



$$Z_s = (1+j) \parallel (1-j) + j2\sqrt{2} = 1 + j2\sqrt{2}$$

بنابراین:

$$R = |Z_s| = \sqrt{1 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{9} = 3\Omega$$

۱۱- گزینه ی «۴» صحیح است.

توان متوسط هر بار را با هم جمع می کنیم تا توان متوسط کل به دست آید:

$$P_t = \sum |S| \cos \phi = 25 + (15 \times 0.8) + 11 = 48 \text{KW}$$

پس فاز یا پیش فاز بودن در توان متوسط تأثیری ندارد زیرا $\cos \phi = \cos(-\phi)$

در مورد توان راکتیو چون $\sin(-\phi) = -\sin \phi$ است، پیش فاز بودن را با فاز منفی (که نشان دهنده حالت خازنی است)

و پس فاز بودن را با فاز مثبت (که نشان دهنده حالت سلفی است) بیان می کنیم، در نتیجه:

$$Q_t = \sum |S| \sin \phi = 25 + (-15 \times 0.6) + 0 = 16 \text{KVAR}$$

بنابراین:

$$\cos \phi = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{48}{\sqrt{48^2 + 16^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

و چون Q مثبت است نشان دهنده سلفی بودن امپدانس و حالت پس فاز است.

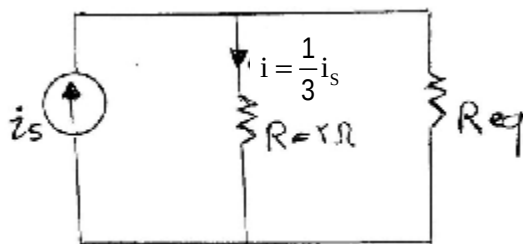
۱۲- گزینه ی «۲» صحیح است.

برای این که توان ماکزیمم به مقاومت R برسد باید با مقاومت معادل از دو سرش برابر باشد، از طرفی زمانی که $R = 2\Omega$

است، جریانش به دلیل تساوی دو مقاومت موازی با i_s برابر i است، یعنی جریان i نیز از مقاومت R می گذرد.

با توجه به این که مدارهای N_1 و N_2 مقاومتی هستند، برای بررسی اثر منبع i_s ، باید منبع ولتاژ V_s را صفر کرده در

نتیجه $i = \frac{1}{3} i_s$ است و یک مقاومت معادل از دو سر R و موازی با i_s در نظر می گیریم:



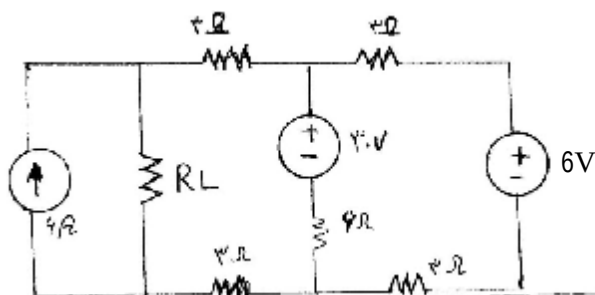
بنابراین:

$$i = \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R} = \frac{1}{3} i_s \rightarrow \frac{R_{eq}}{R_{eq} + 2} = \frac{1}{3} \rightarrow R_{eq} = 1\Omega$$

۱۳- گزینه ی «۲» صحیح است.

منبع جریان سری با منبع ولتاژ، معادل یک منبع جریان است. بنابراین به جای مدار سمت چپ مقاومت R_L ، می‌توان فقط منبع جریان 6 A آمپری را قرار داد.

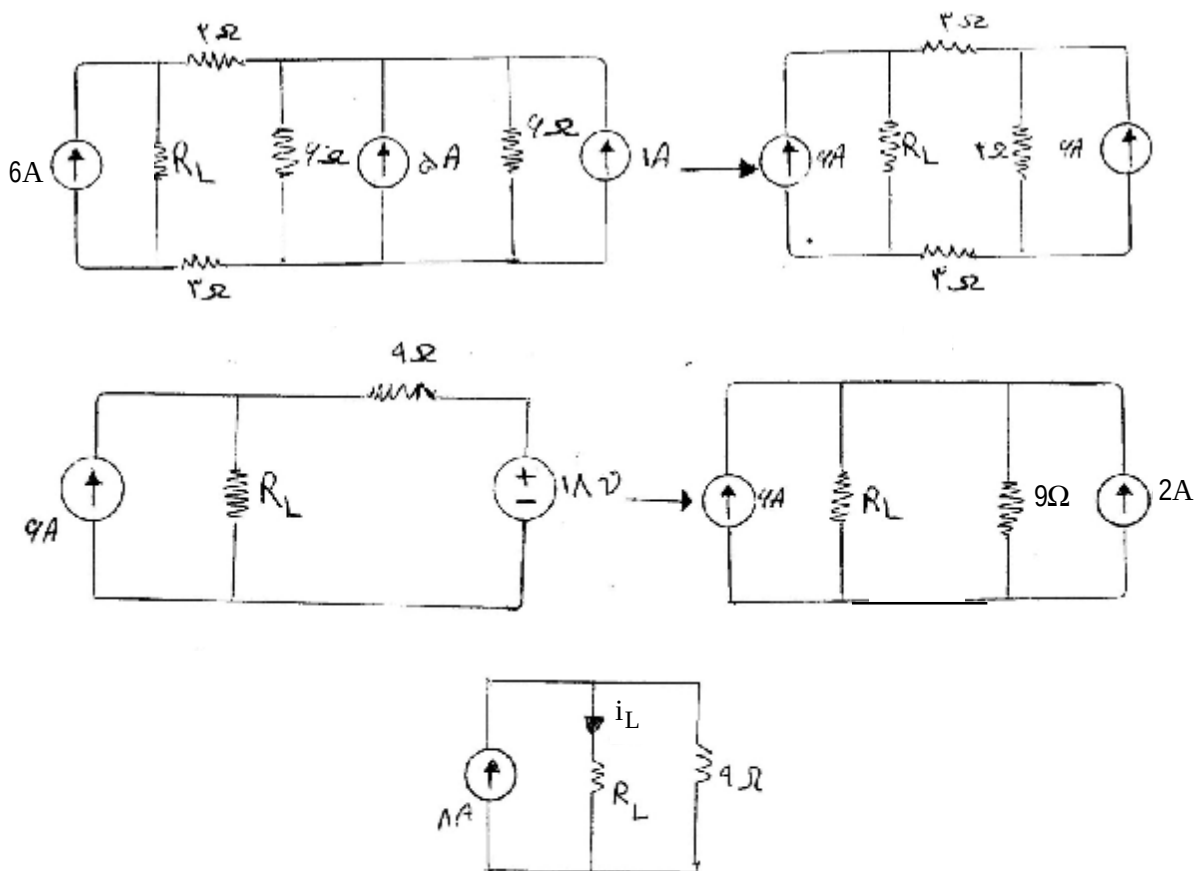
همچنین منبع ولتاژ موازی با هر مداری معادل همان منبع ولتاژ است. پس به جای منبع ولتاژ 6 V ولتی موازی با مدار سمت راست آن می‌توان فقط منبع ولتاژ 6 V ولتی را قرار داد. در نتیجه مدار به شکل زیر ساده می‌شود:



برای انتقال حداکثر توان به مقاومت R_L ، مقاومت معادل از دو سرش را به‌دست آورده و برابر R_L قرار می‌دهیم. برای این منظور با صفر کردن منابع مستقل داریم:

$$R_L = 3 + 3 + (6 \parallel 6) = 9\Omega$$

برای محاسبه توان تحویلی به R_L می‌توان گفت:



$$i_L = \frac{9}{9+9} \times 8 = 4A$$

بنابراین:

$$P_{\max} = R_L i_L^2 = 9 \times 16 = 144W$$

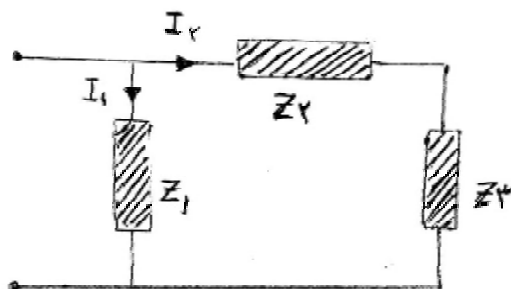
۱۴- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

Z_2 و Z_3 ، جریان یکسانی دارند. همچنین اندازه Z_2 و Z_3 برابر است، پس توان ظاهری آن‌ها برابر خواهد بود ←
 گزینه ۱ درست است.

Z_2 و Z_3 جریان یکسانی دارند و $R_2 = 2R_3$ است، پس توان متوسط Z_2 دو برابر توان متوسط Z_3 خواهد بود ←
 گزینه ۲ درست است.

جریان دو شاخه شامل Z_1 و $Z_2 + Z_3$ به صورت زیر است:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_1} = \frac{0/4 - j/2 + 0/2 + j/4}{0/3 + j/1} = \frac{0/6 + j/2}{0/3 + j/1} = 2 \rightarrow I_2 = \frac{I_1}{2}$$



پس توان راکتیو تحویل داده شده به Z_2 و Z_1 به صورت زیر است:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= 0/1 \times I_1^2 \\ Q_2 &= -0/2 \times I_2^2 = -0/2 \times \left(\frac{I_1}{2}\right)^2 = -0/1 \times \frac{I_1^2}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = -2$$

در نتیجه گزینه 3 درست است.

برای توان راکتیو تحویل داده شده به Z_3 داریم:

$$Q_3 = 0/4 \times I_2^2 = 0/4 \times \left(\frac{I_1}{2}\right)^2 = 0/1 \times I_1^2 \rightarrow Q_3 = Q_1$$

بنابراین گزینه 4 نادرست است.

۱۵- گزینه ی «۲» صحیح است.

توان مختلطی که منبع ولتاژ تحویل می‌دهد برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} VI^* = \frac{1}{2} (10) \times \left(\frac{1-j}{2}\right) = 2/5(1-j) = P + jQ$$

که توان حقیقی آن 2/5 وات است.

$$P = 2/5W$$

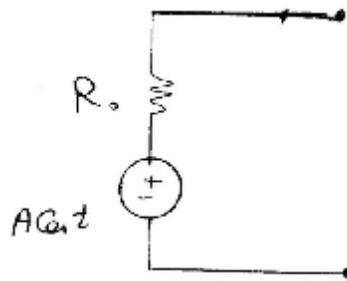
این توان حقیقی در مقاومت‌ها تلف می‌شود، چون توان تلف شده در مقاومت R_1 برابر 1/5W است، پس توان تلف شده

در مقاومت 2 اهمی برابر یک وات می‌باشد. برای این توان تلف شده داریم:

$$P_{2\Omega} = \frac{1}{2} R_2 I_2^2 = \frac{1}{2} \times 2 I_2^2 = 1 \rightarrow I_2^2 = 1 \rightarrow I_2 = 1A$$

۱۶- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

اگر به دو قطبی N از سمت راست نگاه شود، مدار معادل تونن آن به صورت زیر است:



چون مدار مقاومتی است، اختلاف فاز ولتاژ و جریان صفر است و ولتاژ مدار باز به فرم کلی $A \cos t$ بیان می‌گردد که در

$t = \frac{\pi}{4}$ برابر با ولتاژ دو سر کلید، یعنی $\sqrt{2}$ ولت می‌شود، در نتیجه:

$$A \cos t \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{A\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \rightarrow A = 2$$

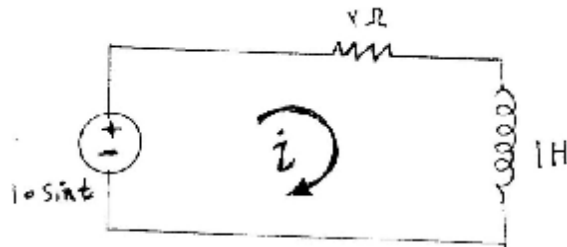
برای انتقال حداکثر توان به مقاومت R لازم است که $R = R_o$ باشد. ولتاژ دو سر R به صورت $\frac{2 \cos t}{2} = \cos t$ می‌باشد

و توان تحویلی به آن برابر $\frac{\cos^2 t}{R}$ است. در نتیجه مقدار توان متوسط برابر است با:

$$\frac{1}{2R} = \frac{1}{6} \rightarrow R_o = R = 3\Omega$$

۱۷- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

معادله دیفرانسیل جریان گذرنده از مدار به صورت زیر است:



$$\frac{di}{dt} + 2i = 10 \sin t$$

جواب عمومی آن به صورت Ke^{-2t} و جواب خصوصی آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left. \begin{aligned} i_p(t) &= A\sin t + B\cos t \\ \frac{di_p(t)}{dt} &= A\cos t - B\sin t \end{aligned} \right\} \rightarrow A\cos t - B\sin t + 2A\sin t + 2B\cos t = 10\sin t \rightarrow \begin{cases} 2A - B = 10 \\ A + 2B = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = -2 \end{cases} \Rightarrow i_p(t) = 4\sin t - 2\cos t$$

بنابراین پاسخ کامل آن برابر است با:

$$i(t) = Ke^{-2t} + 4\sin t - 2\cos t$$

برای این که پاسخ گذرای وجود نداشته باشد، باید به ازای $t = 0$ داشته باشیم:

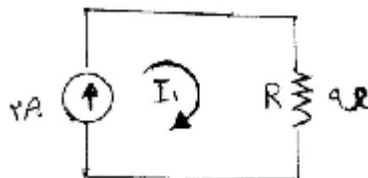
$$i_L(0) = i(0) = Ke^0 + 4\sin(0) - 2\cos(0) = -2 \rightarrow i_L(0) = -2A$$

شرط مسأله

۱۸- گزینه ی «۱» صحیح است.

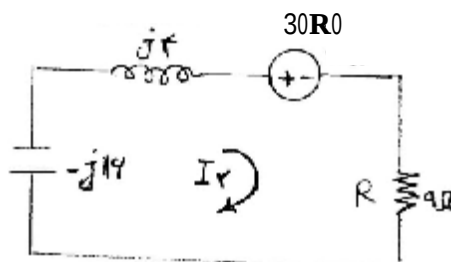
توان متوسط مقاومت را بر اثر هر یک از منابع به دست می آوریم و در نهایت با استفاده از قضیه جمع آثار، مقادیر به دست آمده را با هم جمع می کنیم.

برای منبع جریان $2A$ در حالت دائمی (سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز) داریم:



$$P_1 = RI_1^2 = 9 \times (2)^2 = 36W$$

برای منبع $30\cos 2t$ به ازای $W = 2$ در حالت دائمی داریم:



$$I_2 = \frac{30 \angle 0^\circ}{9 + 4j - 16j}$$

$$P_2 = \frac{1}{2} R |I_2|^2 = \frac{1}{2} \times 9 \times \left| \frac{30}{9+4j-16j} \right|^2 = 18W$$

و برای منبع جریان $4\cos 4t$ به ازای $\omega = 4$ خواهیم داشت:



در این فراکنس ($\omega = 4$) سلف و خازن همدیگر را خنثی می‌کنند، پس تشدید رخ می‌دهد و در نتیجه سلف و خازن سری اتصال کوتاه می‌شود و همهٔ جریان 4 آمپر وارد این شاخه شده و جریان مقاومت صفر است. در نتیجه توان مقاومت در این حالت برابر صفر می‌شود، یعنی: $P_3 = 0$

بنابراین توان متوسط تحویل داده شده به مقاومت R برابر است با:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 36 + 18 + 0 = 54W$$

۱۹- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

اگر با تبدیل $\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega$ ، معادله دیفرانسیل را به فرم فازوری بنویسیم داریم:

$$\left[(j\omega)^4 + 10(j\omega)^3 + 40(j\omega)^2 + 60(j\omega) + 784 \right] I = (10j\omega + 40) V_s$$

به ازای $\omega = 4$ داریم:

$$\frac{I}{V_s} = \frac{1+j}{10(1-j)} = \frac{\sqrt{2} \angle 45^\circ}{10\sqrt{2} \angle -45^\circ} = \frac{1}{10} \angle 90^\circ = \frac{1}{10} j$$

با استفاده از $\omega = 4$ می‌توان گفت:

$$\frac{I}{V_s} = \frac{1}{10} j = \frac{1}{10} \times \frac{j4}{4} = \frac{1}{40} j\omega \rightarrow I = \frac{1}{40} j\omega V_s$$

پس رابطهٔ بین جریان و ولتاژ به صورت فوق مربوط به یک خازن با ظرفیت $C = \frac{1}{40} F$ است. بنابراین رفتار حالت دائمی

سینوسی این مدار همانند رفتار یک خازن $\frac{1}{40}$ فارادی می‌باشد.

۲۰- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

برای به‌دست آوردن فرکانس تشدید، قسمت موهومی ادمیتانس را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$Y_{eq} = \frac{1}{R_1 + j\omega L} = \frac{1}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_1 - j\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} + \frac{R_2 - \frac{1}{j\omega C}}{R_2^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}$$
$$\text{Im}(Y_{eq}) = \frac{-\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = 0 \rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} \cdot \frac{L - CR_1^2}{L - CR_2^2} \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{L - CR_1^2}{L - CR_2^2}}$$

فصل هشتم: تجزیه و تحلیل مدارهای با القای متقابل (تزوید)

مدارهای الکتریکی که تاکنون بررسی و تحلیل نموده‌ایم دارای عناصری هستند که ولتاژشان به جریان خودشان بستگی دارد و جریانشان نیز به ولتاژ خودشان مربوط است.

در این فصل می‌خواهیم به بررسی عناصری بپردازیم که ولتاژشان علاوه بر جریان خودشان به جریان عنصر (یا عناصر) دیگری نیز بستگی دارد. همچنین جریانشان علاوه بر ولتاژ خودشان به ولتاژ المان (یا عناصر) دیگری مربوط است. به این دسته عناصر مدارهای با القای متقابل یا دارای تزوید می‌گویند.

8-1- القای متقابل

اگر جریان عبوری از یک سیم پیچ تغییر کند، آنگاه شارمغناطیسی گذرنده از آن تغییر می‌کند و بنابراین در آن ولتاژی القا می‌شود. حال اگر شارگذرنده از سیم‌پیچ اولی روی دومی اثر گذار باشد، تغییر جریان اولی، هم در خودش و هم در دومی ایجاد ولتاژ القایی می‌کند که به آن القای متقابل می‌گویند.

نیروی محرکه القایی طبق قانون القای فارادی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$E = -N \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -N \frac{d\phi}{dt}$$

می‌توان روابط عناصر تزوید را به صورت زیر نوشت:

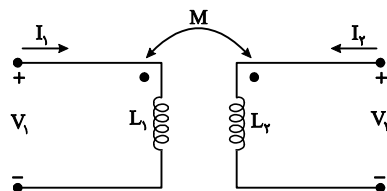
$$\phi_1 = f_1(i_1, i_2)$$

$$\phi_2 = f_2(i_1, i_2)$$

در این صورت روابط بیان شده به فرم ماتریسی خواهند بود.

۸-۱-۱- سلف‌های تزوید شده

با توجه به شکل زیر داریم:



$$\begin{cases} \Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2 \\ \Phi_2 = L_2 I_2 + M I_1 \end{cases}$$

L_1 اندوکتانس خودی سلف اول، L_2 اندوکتانس خودی سلف دوم و M ضریب القای متقابل بین آنهاست.

با بیان روابط فوق به فرم ماتریسی:

$$\Phi = LI \rightarrow \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

که Φ بردار شار سلفها و L ماتریس اندوکتانس و I بردار جریان سلفها است.

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}$$

همچنین برای ولتاژ و جریان سلفها خواهیم داشت:

$$V = L \frac{dI}{dt} \rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dI_1}{dt} \\ \frac{dI_2}{dt} \end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر:

$$\begin{cases} V_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \\ V_2 = M \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt} \end{cases}$$

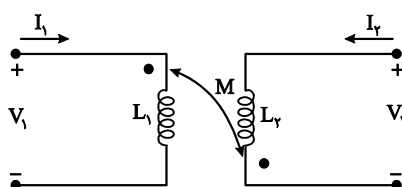
و در حالت فازوری داریم:

$$V = j\omega LI \rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

یعنی:

$$\begin{cases} V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \\ V_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 \end{cases}$$

اگر سر نقطه‌دار به صورت شکل زیر تغییر کند، داریم:



$$\begin{cases} \Phi_1 = L_1 I_1 - M I_2 \\ \Phi_2 = -M I_1 + L_2 I_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & -M \\ -M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

و سایر روابط به همین صورت به دست می‌آید.

در روابط فوق به ماتریس L ، ماتریس اندوکتانس یا ماتریس ضرائب القا می‌گویند.

برای به دست آوردن جریان سلف‌ها می‌توان نوشت:

$$\Phi = LI \rightarrow I = L^{-1}\Phi = \Gamma\Phi$$

که به ماتریس L^{-1} یا Γ ، ماتریس رلوکتانس یا ماتریس ضرائب القای معکوس می‌گویند و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Gamma = L^{-1} = \frac{1}{L_1 L_2 - M^2} \begin{bmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{bmatrix}$$

و در حالت کلی با محاسبه معکوس ماتریس اندوکتانس، ماتریس رلوکتانس به دست می‌آید.

۸-۱-۲- علامت ضریب القای متقابل (M)

برای تعیین علامت ضریب القای متقابل M دو روش وجود دارد:

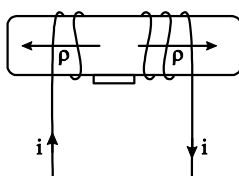
روش اول: استفاده از شارگذرنده از دو سلف

با استفاده از قاعده دست راست، جهت شارگذرنده از هر سلف را مشخص می‌کنیم. اگر شارگذرنده از دو سلف، هم جهت باشند (به عبارت دیگر اثر تقویت‌کنندگی داشته باشند) M مثبت است و اگر شارگذرنده از دو سلف در خلاف جهت یکدیگر باشند (یا اثر تضعیف‌کنندگی داشته باشند) M منفی است.

*** قاعده دست راست برای تعیین جهت شارگذرنده در سلف‌ها:**

اگر چهار انگشت دست راست در جهت جریان سیم‌پیچ (سلف) خم شود، انگشت شست دست راست جهت شارگذرنده از سلف را نشان می‌دهد.

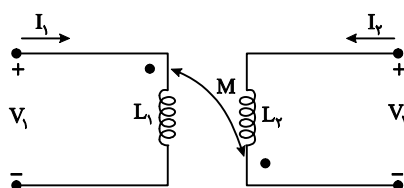
مثلاً در شکل زیر:



برای سیم‌پیچ سمت چپ، جهت شار به کمک قاعده دست راست به سمت چپ است و برای سیم‌پیچ سمت راست به سمت راست. پس ضریب القای متقابل بین دو سیم‌پیچ منفی است ($M < 0$).

روش دوم: استفاده از قرارداد نقطه:

اگر هر دو جریان از سر نقطه‌دار سلف وارد شوند یا هر دو جریان از سر نقطه‌دار خارج شوند در این صورت M مثبت است و اگر یکی از جریان‌ها به سر نقطه‌دار سلف وارد شود و دیگری از سر نقطه‌دار سلف خارج شود، M منفی است. مثلاً در شکل زیر:



$M < 0$ است زیرا جریان I_1 به سر نقطه‌دار سلف اول وارد می‌شود و جریان I_2 از سر نقطه‌دار سلف دوم خارج می‌شود.

2-8- به هم بستن سلف‌های دارای تزویج

سلف‌های دارای تزویج، پس از اتصال به یکدیگر، در حکم یک سلف تنها می‌باشند و باید مقدار L_{eq} را برای آن‌ها محاسبه کرد.

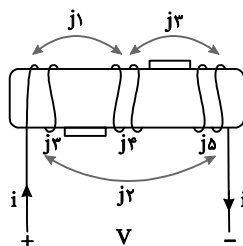
در حالت کلی برای محاسبه اندوکتانس و رلوکتانس معادل از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\phi = L_{eq} I$$

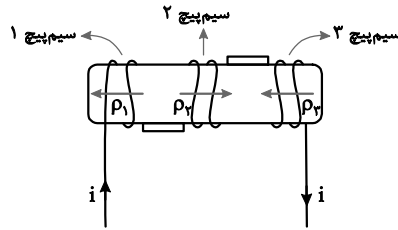
$$I = \Gamma_{eq} \phi$$

$$V = L_{eq} \frac{dI}{dt} = j\omega L_{eq} I$$

مثال ۱: در مدار شکل زیر، امپدانس معادل را به دست آورید.



با استفاده از قاعده دست راست و با توجه به جهت جریان i ، برای ضریب القای متقابل بین سیم‌پیچ‌ها داریم:



در خلاف جهت یکدیگر ϕ_2 و $\phi_1 \rightarrow M_{12} < 0 \rightarrow M_{12} = -j$

در جهت یکدیگر ϕ_3 و $\phi_1 \rightarrow M_{13} > 0 \rightarrow M_{13} = j2$

در خلاف جهت یکدیگر ϕ_3 و $\phi_2 \rightarrow M_{23} < 0 \rightarrow M_{23} = -j3$

و با KVL زدن داریم:

$$V_1 = \underbrace{1}_{\text{اندوکتانس خودی}} j3 i_1 \underbrace{-j4}_{\text{متقابل}} i_2 \underbrace{j2}_{\text{متقابل}} i_3$$

L_{11} خودی M_{12} متقابل M_{13} متقابل

$$V_2 = j4i_2 - j1i_1 - j3i_3$$

$$V_3 = j5i_3 + j2i_1 - j3i_2$$

$$\text{KVL : } V = V_1 + V_2 + V_3 = j3i_1 - j1i_2 + j2i_3 + j4i_2 - j1i_1 - j3i_3 + j5i_3 + j2i_1 - j3i_2$$

با توجه به سری بودن سلفها داریم:

$$i_1 = i_2 = i_3 = i$$

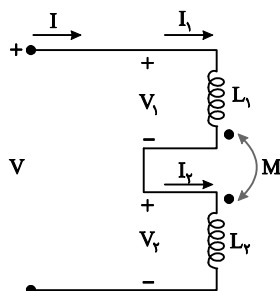
$$\rightarrow V = j8i \rightarrow Z_{eq} = \frac{V}{i} = j8\Omega$$

۸-۲-۱- اتصال سری سلفها

برای یافتن اندوکتانس معادل در اتصال سری سلفها، از جمع جبری شارها استفاده می‌کنیم. به عبارت دیگر، به جای

KVL، $K\phi L$ می‌زنیم. یعنی کلیه روابطی که برای ولتاژ V برقرار است برای شار ϕ نیز صادق است.

برای دو سلف سری به شکل زیر داریم:



با توجه به این که جریان I_1 از سر نقطه‌دار خارج می‌شود و جریان I_2 به سر نقطه‌دار سلف وارد می‌شود، $M < 0$ است.

پس داریم:

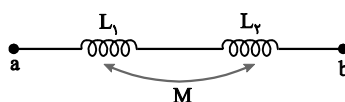
$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = L_1 I_1 - M I_2 + L_2 I_2 - M I_1$$

و با توجه به برابری جریان‌ها:

$$I_1 = I_2 = I$$

$$\varphi = (L_1 + L_2 - 2M) I \rightarrow L_{eq} = \frac{\varphi}{I} = L_1 + L_2 - 2M$$

بنابراین در حالت کلی برای اتصال سری سلف‌ها می‌توان گفت:



$$L_{eq} = L_{ab} = L_1 + L_2 \pm 2|M|$$

علامت $\oplus$ برای $M > 0$ (شارهای ایجاد شده هم‌جهت باشند).

علامت $\ominus$ برای $M < 0$ (شارهای ایجاد شده در خلاف جهت یکدیگر باشند).

۸-۲-۲- اتصال موازی سلف‌ها

برای یافتن رلوکتانس معادل در اتصال موازی سلف‌ها، از جمع جبری جریان‌ها یا KCL استفاده می‌کنیم.

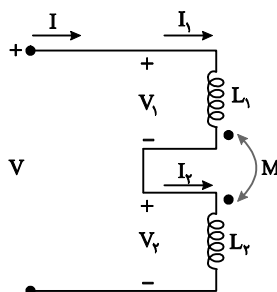
با توجه به ماتریس اندوکتانس و رلوکتانس به دست آمده در قسمت‌های قبل، مشاهده می‌شود که M و Γ_{12} مختلف

الهامه هستند زیرا:

$$\Gamma_{12} = \frac{-M}{L_1 L_2 - M^2}, \quad \det L = L_1 L_2 - M^2$$

و برای ماتریس L چون همواره $\det L > 0$ است می‌توان نتیجه گرفت M و Γ_{12} مختلف الهامه‌اند.

برای دو سلف موازی در شکل زیر داریم:



با توجه به این که جریان I_1 از سر نقطه‌دار سلف وارد می‌شود و جریان I_2 نیز از سر نقطه‌دار سلف وارد می‌شود، پس

$$M > 0 \text{ است و } \Gamma_{12} = \Gamma_{21} < 0 \text{ هستند.}$$

پس با KCL زدن داریم:

$$I = I_1 + I_2 = \Gamma_{11}\phi_1 - \Gamma_{12}\phi_2 + \Gamma_{22}\phi_2 - \Gamma_{21}\phi_1$$

و با توجه به برابری شارها داریم:

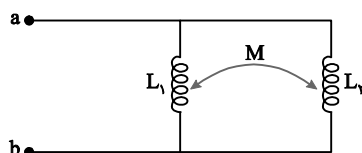
$$\phi_1 = \phi_2 = \phi$$

$$I = (\Gamma_{11} + \Gamma_{22} - 2\Gamma_{12})\phi \rightarrow L_{eq} = \frac{\phi}{I} = \frac{1}{\Gamma_{11} + \Gamma_{22} - 2\Gamma_{12}}$$

و با جایگذاری مقادیر Γ برحسب L ها خواهیم داشت:

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

بنابراین در حالت کلی برای اتصال موازی سلف‌ها می‌توان گفت:

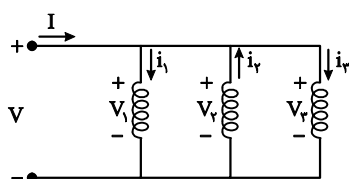


$$L_{eq} = L_{ab} = \frac{L_1 + L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2|M|}$$

علامت $-$ برای $M > 0$ (شارهای ایجاد شده هم جهت باشند)

علامت $+$ برای $M < 0$ (شارهای ایجاد شده در خلاف جهت هم باشند)

مثال ۲: با توجه به ماتریس رلوکتانس، اندوکتانس معادل مدار زیر را پیدا کنید:



$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

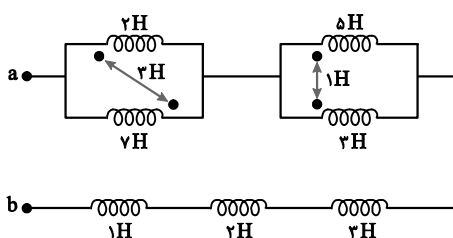
با توجه به ماتریس رلوکتانس و برابری ولتاژها و شارها داریم:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} i_1 = 2\phi \\ i_2 = \phi \\ i_3 = 3\phi \end{cases}$$

$$\text{KCL : } i = i_1 - i_2 + i_3 = 2\phi - \phi + 3\phi = 4\phi \rightarrow L_{eq} = \frac{\phi}{i} = 0.25H$$

مثال ۳: در مدار شکل زیر، هر سه سلف سری دارای القای متقابل $1H$ نسبت به یکدیگر هستند. اندوکتانس معادل از

دو سر a و b را به دست آورید.



در ابتدا برای سلف‌های موازی داریم:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow L_{eq1} = \frac{2 \times 7 - 3^2}{2 + 7 + 2 \times 3} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}H$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow L_{eq2} = \frac{5 \times 3 - 1^2}{5 + 3 - 2 \times 1} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}H$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow L_{eq3} = (1+1+1) + (1+2+1) + (1+1+3) = 12H$$

و در نتیجه:

$$L_{eq} = L_{eq1} + L_{eq2} + L_{eq3} = \frac{1}{3} + \frac{7}{3} + 12 = \frac{44}{3}H$$

8-3- انرژی مغناطیسی ذخیره شده در سلف‌های تزویج

انرژی ذخیره شده در یک سلف به تنهایی برابر است با:

$$W = \frac{1}{2} Li^2$$

و برای سلف‌های دارای تزویج برابر خواهد بود با:

$$W = \frac{1}{2} I'LI$$

که در این رابطه L ماتریس اندوکتانس، I بردار جریان‌ها و I' ترانزاده بردار جریان است.

مثلاً برای دو سلف داریم:

$$W = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_1 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

و با بسط دادن آن:

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + \frac{1}{2} M I_1 I_2 + \frac{1}{2} M I_1 I_2$$

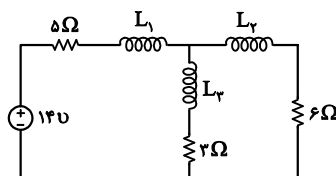
انرژی سلف اول به انرژی سلف دوم به انرژی سلف اول در اثر انرژی سلف دوم در اثر

تنهایی (همواره مثبت) تنهایی (همواره مثبت) تزویج (مثبت یا منفی) تزویج (مثبت یا منفی)

با توجه به مثبت یا منفی بودن جملات فوق، در مجموع $W \geq 0$ است.

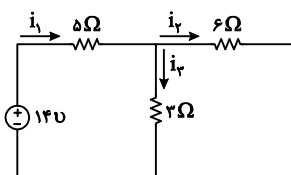
مثال ۴: در مدار شکل زیر، سلف‌های به کار رفته دارای ماتریس اندوکتانس ذیل هستند. اگر مدار در حالت پایدار باشد،

انرژی مغناطیسی ذخیره شده در سلف L_2 را به دست آورید.



$$L = \begin{bmatrix} 8 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

جریان سلف‌ها را در حالت پایدار به دست می‌آوریم. در حالت پایدار سلف‌ها اتصال کوتاه هستند.



$$i_1 = \frac{14}{5 + (6 \parallel 3)} = 2A$$

$$i_2 = \frac{3}{3+6} \times i_1 = \frac{3 \times 2}{3+6} = \frac{2}{3}, \quad i_3 = i_1 - i_2 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} A$$

پس برای انرژی ذخیره شده در سلف L_2 داریم:

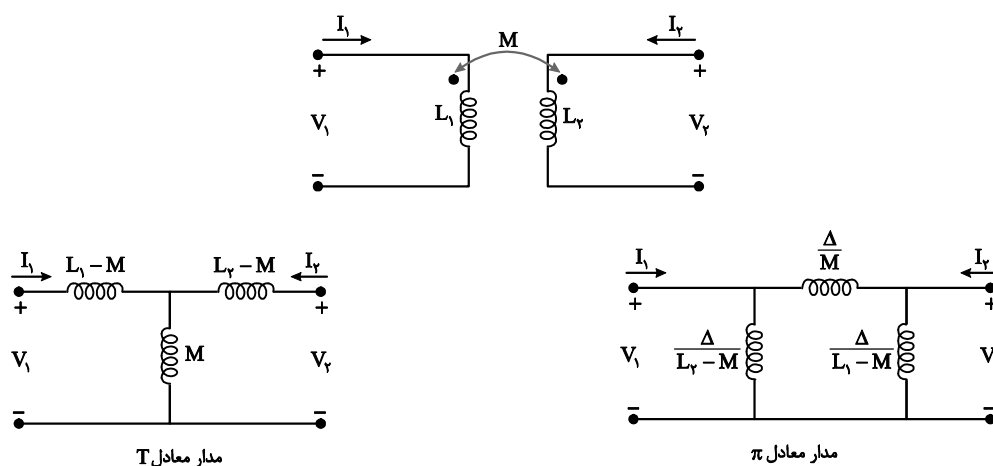
$$W_2 = \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M_{21}i_2 i_1 + M_{23}i_2 i_3 = \frac{1}{2} \times 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3 \times \frac{2}{3} \times 2 - 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3}$$

$$= \frac{8}{9} + 4 - \frac{16}{9} \rightarrow W_2 = \frac{28}{9} \text{ J}$$

نکته: هدف از نقطه‌دار بودن سلف‌های تزویج، تعیین علامت M است. بنابراین وقتی ماتریس L یا Γ را داریم، علامت M مشخص است و نیازی به قرار دادن نقطه و مشخص بودن آن نداریم.

4-8- مدار معادل سلف‌های تزویج

سلف‌های دارای تزویج دارای مدار معادل‌هایی به شکل T و π است:



که در مدار معادل π :

$$\Delta = \det(L) = L_1 L_2 - M^2$$

نکته: در محبت مرتبه مدار (که در فصل دوازدهم بررسی می‌شود)، دو سلف دارای تزویج هنگام شمارش در حکم سه سلف محسوب می‌شوند که به یکی از فرم‌های T یا π می‌باشد.

5-8- تجزیه و تحلیل مدارهای شامل سلف‌های تزویج

اگر سلفی تنها باشد، هنگام تحلیل آن برای ولتاژش می‌نویسیم:

$$V = j\omega L_{\text{خودش}} I_{\text{خودش}}$$

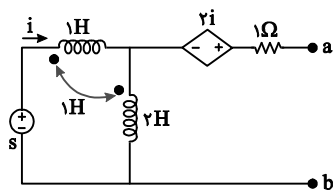
و برای سلف‌های دارای تزویج:

$$V = j\omega L_{\text{خودش}} I_{\text{خودش}} + j\omega M_{\text{متقابل}} I_{\text{دیگری}}$$

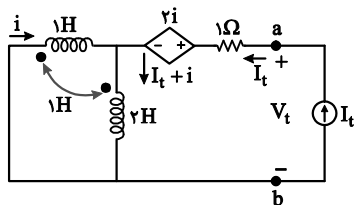
یعنی ولتاژ هر سلف دارای تزویج ناشی از دو امر است، یکی جریان خودش و یکی جریان سلف (یا جریان سلف‌هایی) که با آن در تزویج است.

همچنین می‌توان گفت جریان هر سلف تزویج هم به ولتاژ خودش مربوط است و هم به ولتاژ سلف‌هایی که با آن‌ها در تزویج است.

مثال ۵: امپدانس معادل دیده شده از دو سر a و b را به دست آورید.



منبع ولتاژ مستقل E_s را اتصال کوتاه نموده و با قرار دادن یک منبع جریان I_t به دو سر a و b داریم:



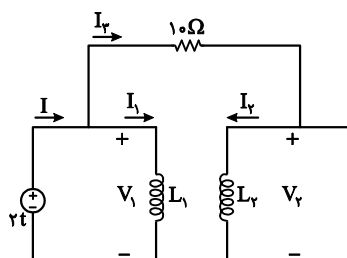
KVL در حلقه چپی: $j\omega i + j\omega(I_t + i) + j\omega 2(I_t + i) + j\omega i = 0 \rightarrow i = -\frac{3}{5}I_t$

KVL در حلقه راستی: $V_t = 1 \times I_t + 2 \left(-\frac{3}{5}I_t \right) + j\omega 2 \left(I_t - \frac{3}{5}I_t \right) + j\omega \left(-\frac{3}{5}I_t \right) \rightarrow V_t = \left(\frac{1}{5}j\omega - \frac{1}{5} \right) I_t$

و در نتیجه:

$$Z_{ab} = \frac{V_t}{I_t} = \frac{1}{5}j\omega - \frac{1}{5} = \frac{j\omega - 1}{5}$$

مثال ۶: توان مختلط تحویلی توسط منبع به شبکه را در مدار شکل زیر به دست آورید.



$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

با توجه به ماتریس L می توان گفت:

$$V = j\omega LI \rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = j2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1R0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} I_1 = -\frac{3}{10}jA \\ I_2 = -\frac{1}{10}jA \end{cases}$$

و جریان مقاومت بالایی 10Ω برابر است با:

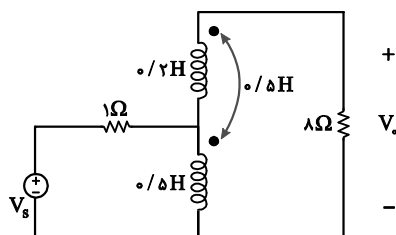
$$I_3 = \frac{V_1 - V_2}{10} = \frac{1R0 - 0}{10} = \frac{1}{10}A$$

بنابراین:

$$I = I_1 + I_3 = -\frac{3}{10}j + \frac{1}{10} = \frac{1-3j}{10}$$

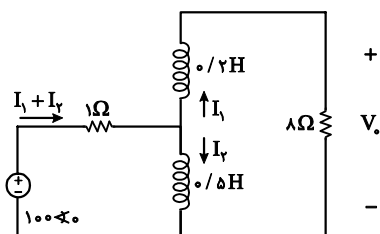
$$S = \frac{1}{2}VI^* = \frac{1}{2} \times 1 \times \left(\frac{1+3j}{10} \right) \rightarrow S = \frac{1+3j}{20}$$

مثال ۷: در مدار شکل زیر، اندازه فازور ولتاژ V_0 چند ولت است؟ ($V_s = 100\cos t$)



با توجه به قرار داد نقطه، $M < 0$ است.

با انتخاب جریان های I_1 و I_2 بر روی شکل داریم:



$$\text{KVL در حلقه راستی: } j\omega 2I_1 - j\omega 5I_2 + 8I_1 - j\omega 5I_2 + j\omega 5I_1 = 0 \rightarrow I_2 = (0/7 - j8)I_1$$

$$\text{KVL در حلقه چپی: } 100 = I_1 + I_2 + j\omega 5I_2 - j\omega 5I_1 = (1 - j0/5)I_1 + (1 + j0/5)I_2$$



$$= (1 - j0.5) I_1 + (1 + j0.5)(0.7 - j8) I_1 = (5.7 - j8/15) I_1$$

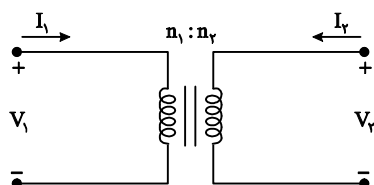
$$\rightarrow I_1 = \frac{100}{5.7 - j8/15} \rightarrow |I_1| = \frac{100}{\sqrt{5.7^2 + 8/15^2}} = 10A$$

و در نتیجه:

$$V_o = 8I_1 \rightarrow |V_o| = 8|I_1| = 8 \times 10 = 80V$$

8-6- ترانسفورماتور ایده‌آل

اگر دو سلف تزویج‌دار، دارای شرایط زیر باشند، به یک ترانسفورماتور ایده‌آل تبدیل می‌شوند:



1- هیچ شار نشتی نداشته باشیم.

2- هیچ انرژی ذخیره یا تلف نشود.

3- خود القایی هر سیم پیچ بی‌نهایت باشد.

روابط ولتاژ و جریان ترانسفورماتور ایده‌آل به صورت زیر بیان می‌شود:

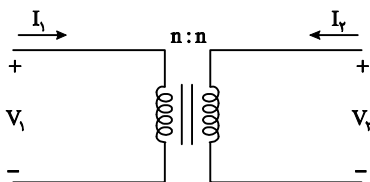
الف) اگر $M > 0$ باشد:

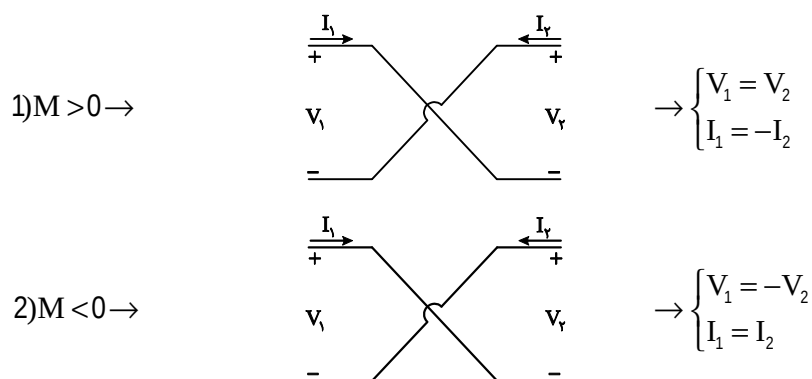
$$\begin{cases} \frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} \\ \frac{I_1}{I_2} = -\frac{n_2}{n_1} \end{cases}$$

ب) اگر $M < 0$ باشد:

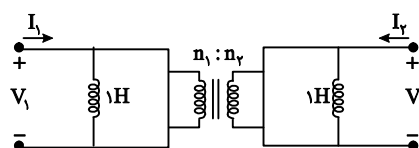
$$\begin{cases} \frac{V_1}{V_2} = -\frac{n_1}{n_2} \\ \frac{I_1}{I_2} = \frac{n_2}{n_1} \end{cases}$$

نکته: در ترانسفورماتور ایده‌آل اگر $n_1 = n_2$ باشد، ترانس به صورت زیر مدل می‌شود:

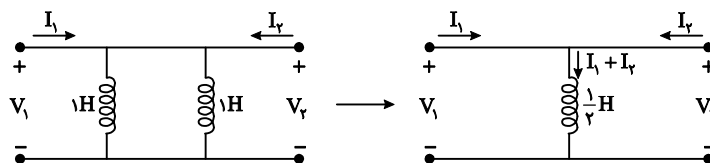




مثال ۸: در مدار شکل زیر، ماتریس اندوکتانس را به دست آورید.



با توجه به $n_1 = n_2$ داریم:



$$V_1 = V_2 = j\frac{1}{2}(I_1 + I_2) \rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = j\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

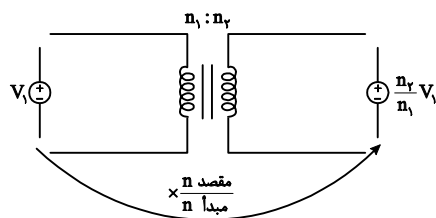
$$L = j\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

7-8- قضایای انتقال در ترانسفورماتورها

۸-۷-۱ انتقال ولتاژ

هرگاه ولتاژ یا منبع ولتاژی از یک طرف ترانس به طرف دیگر برود، در $\frac{n}{n}$ مقصد ضرب می‌شود. به عبارت دیگر، اگر

$M > 0$ باشد داریم:



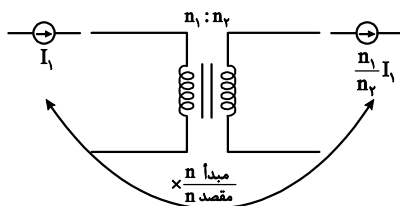
در صورتی که $M < 0$ باشد، پلاریته منبع انتقال یافته عکس می شود.



۸-۷-۲- انتقال جریان

هرگاه جریان یا منبع جریانی از یک طرف ترانس به طرف دیگر برود، در $\frac{n \text{ مبدأ}}{n \text{ مقصد}}$ ضرب می شود. به عبارت دیگر، اگر

$M > 0$ باشد داریم:

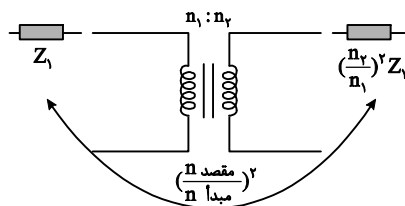


در صورتی که $M < 0$ باشد، پلاریته منبع انتقال یافته عکس می شود.



۸-۷-۳- انتقال امپدانس

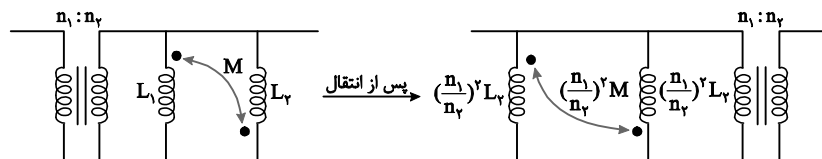
هرگاه امپدانسی از یک طرف ترانس به طرف دیگر برود، در $\left(\frac{n \text{ مقصد}}{n \text{ مبدأ}}\right)^2$ ضرب می شود. به عبارت دیگر داریم:



۸-۷-۴- انتقال سلف‌های تزویج‌دار

حالت اول: هر دو سلف در یک طرف ترانس باشند.

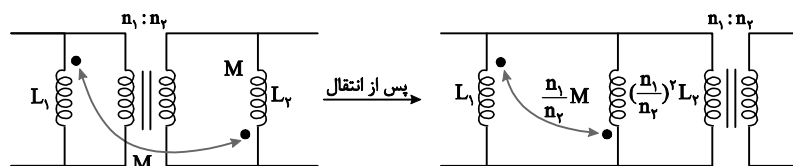
در این صورت هر سه مقدار L_1 و L_2 و M در $\left(\frac{n}{\text{مبدأ}} \frac{\text{مقصد}}{n}\right)^2$ ضرب می‌شوند.



حالت دوم: یک سلف در یک طرف ترانس و سلف دیگری در طرف دیگر ترانس باشد.

در این صورت، سلفی که در طرف انتقال قرار دارد ثابت می‌ماند و سلف دیگر که انتقال می‌یابد در $\left(\frac{n}{\text{مبدأ}} \frac{\text{مقصد}}{n}\right)^2$ ضرب

می‌شود و ضریب القای متقابل M در $\frac{n}{\text{مبدأ}} \frac{\text{مقصد}}{n}$ ضرب می‌شود.



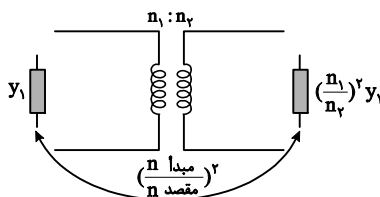
نکته: در ترانسفورماتور اگر سرهای نقطه‌دار به گونه‌ای باشد که $M > 0$ ترانس M باشد، محل نقطه‌های سلف‌های تزویج

هنگام انتقال تغییر نمی‌کند ولی اگر $M < 0$ ترانس M باشد، محل نقطه‌های سلف‌های تزویج هنگام انتقال تغییر می‌کند،

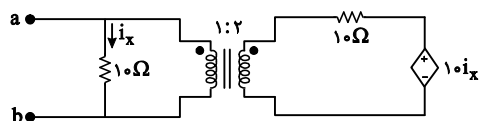
یعنی علامت تزویج M فرینه می‌شود.

۸-۷-۵- انتقال ادمیتانس

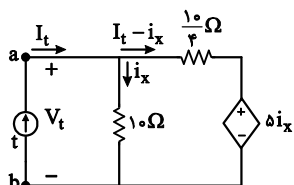
هرگاه ادمیتانسی از یک طرف ترانس به طرف دیگر برود، در $\left(\frac{n}{\text{مقصد}} \frac{\text{مبدأ}}{n}\right)^2$ ضرب می‌شود. به عبارت دیگر داریم:



مثال ۹: در مدار شکل زیر، مقاومت معادل از دید دو سر a و b را به دست آورید.



با انتقال قسمت سمت راست مدار به سمت چپ داریم:



با اعمال منبع جریان I_t به دو سر a و b و به دست آوردن ولتاژ V_t داریم:

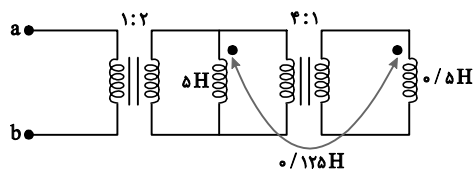
$$\text{KVL در حلقه راست: } \frac{10}{4}(I_t - i_x) + 5i_x - 10i_x = 0 \rightarrow i_x = \frac{1}{3}I_t$$

$$\text{KVL در حلقه چپ: } V_t = 10i_x = 10 \times \frac{I_t}{3} = \frac{10}{3}I_t$$

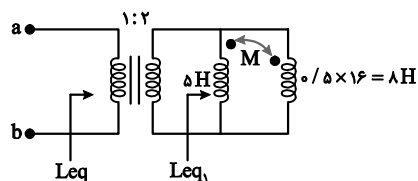
و در نتیجه:

$$R_{eq} = \frac{V_t}{I_t} = \frac{10}{3}\Omega$$

مثال ۱۰: در مدار شکل زیر، اندوکتانس معادل از دو سر ab را به دست آورید.



با انتقال سلف تزویج‌دار به طرف چپ ترانس دوم داریم:



$$M = 0/125 \times 4 = 0/5 H$$

پس برای دو سلف تزویج‌دار داریم:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0/5 \\ 0/5 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \Gamma_1 = L_1^{-1} = \frac{4}{159} \begin{bmatrix} 8 & -0/5 \\ -0/5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{eq1} = \frac{4}{159} (8 + 5 - 2 \times 0/5) = \frac{4 \times 12}{159} = \frac{16}{53} \rightarrow L_{eq1} = \frac{53}{16} H$$

و با انتقال آن به طرف چپ ترانس اول داریم:

$$L_{eq} = \frac{53}{16} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{53}{16 \times 4} = \frac{53}{64} \rightarrow L_{eq} = \frac{53}{64} H$$

8-8- مدار معادل ترانسفورماتور

ترانسفورماتور ایده‌آل را می‌توان به صورت‌های زیر مدل کرد:



که در این شکل‌ها:

$$a = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{N}$$

9-8- ضریب تزویج مغناطیسی K

نسبت شار مغناطیسی جاری شده یک سیم‌پیچ در سیم‌پیچ مقابل، به شار کل به وجود آمده را ضریب تزویج می‌گویند و

طبق رابطه زیر بیان می‌گردد:

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}, 0 \leq K \leq 1$$

نکته: با توجه به رابطه ضریب تزویج مغناطیسی می‌توان گفت:

(1) اگر دو سیم‌پیچ در فاصله خیلی دوری از هم باشند ($M \rightarrow 0$) داریم: $K \rightarrow 0$

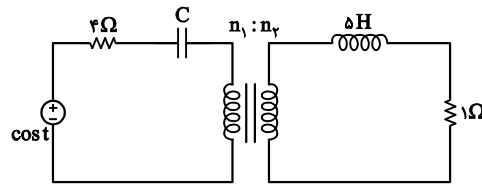
(2) اگر دو سیم‌پیچ در فاصله خیلی نزدیکی از هم باشند ($M \rightarrow \infty$) داریم: $K \rightarrow 1$

(3) در ترانسفورماتور ایده‌آل $K = 1$ است.

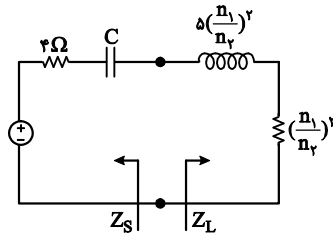
(4) K نامنفی است و به جهت‌های قراردادی جریان سلف‌ها ربطی ندارد.

(5) K معیاری برای سنجش درجه تزویج دو سلف است.

مثال ۱۱: در مدار شکل زیر، C را به گونه‌ای تعیین کنید که حداکثر توان به طرف دوم منتقل شود.



با انتقال مدار سمت راست ترانس به سمت چپ داریم:



و براساس قضیه انتقال حداکثر توان:

$$Z_S = 4 + \frac{1}{jC} \quad Z_L = Z_S^* \rightarrow \begin{cases} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = 4 \rightarrow \frac{n_1}{n_2} = 2 \\ 5\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = \frac{1}{C} \end{cases}$$

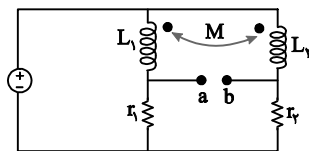
$$Z_L = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 + j5\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2$$

و در نتیجه:

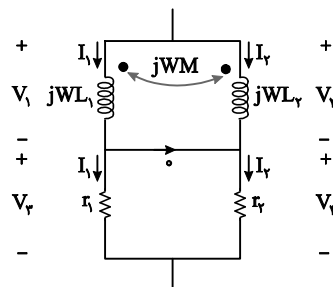
$$5 \times 2^2 = \frac{1}{C} \rightarrow C = \frac{1}{20} \text{ F}$$

مثال ۱۲: در مدار شکل زیر، مقدار M را به گونه‌ای تعیین کنید که اگر دو سر a و b را اتصال کوتاه کنیم، جریانی از

آن عبور نکند.



اگر دو سر a و b را اتصال کوتاه کنیم و جریان عبوری از آن را صفر کنیم، داریم:





می‌توان گفت:

$$V_1 = V_2 \rightarrow j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 = j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1 \rightarrow (L_1 - M) I_1 = (L_2 - M) I_2$$

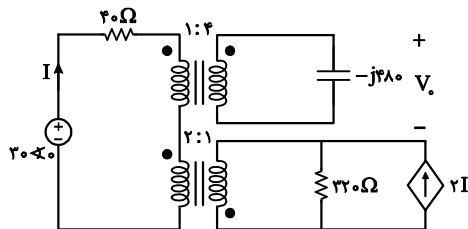
$$V_3 = V_4 \rightarrow r_1 I_1 = r_2 I_2$$

با تقسیم دو رابطه به دست آمده داریم:

$$\frac{L_1 - M}{r_1} = \frac{L_2 - M}{r_2} \rightarrow M = \frac{r_1 L_2 - r_2 L_1}{r_1 - r_2}$$

تست‌های طبقه‌بندی شده مبحث تجزیه و تحلیل مدارهای با القای متقابل

۱- در مدار شکل زیر، فازور ولتاژ V_0 کدام است؟



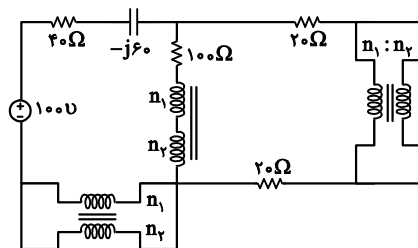
(1) $36e^{jR53^\circ}$

(2) $36e^{-jR53^\circ}$

(3) $72e^{-jR53^\circ}$

(4) $72e^{jR53^\circ}$

۲- در مدار شکل زیر نسبت $\frac{n_1}{n_2} = 5$ می‌باشد. مقدار توان مصرفی مدار چقدر خواهد بود؟



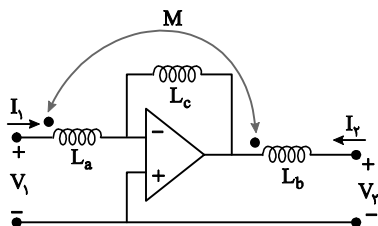
(1) 40W

(2) 80W

(3) $40\sqrt{2}W$

(4) $80\sqrt{2}W$

۳- ماتریس اندوکتانس دو قطبی شکل زیر کدام است؟ (آپ امپ ایده‌آل است).



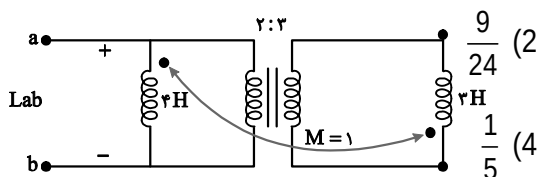
(1) $\begin{bmatrix} L_a & -M \\ -L_c - M & L_b \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} L_a & -M \\ L_c - M & L_b \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} L_a & M \\ -L_c - M & L_b \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} L_b & -M \\ -L_c - M & L_a \end{bmatrix}$

۴- در مدار شکل زیر سلف معادل دیده شده از دو سر a و b (L_{ab}) چند هانری است؟

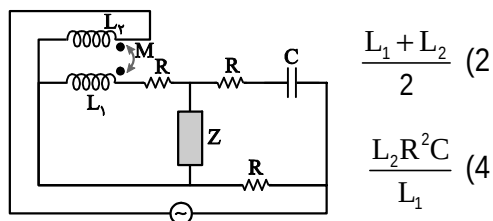


(1) $\frac{11}{15}$

(3) $\frac{3}{2}$

۵- در مدار شکل زیر جریان حالت دائمی عبوری از بار Z برابر با صفر است. مقدار ضریب اندوکتانس متقابل

M چقدر است؟



(2) $\frac{L_1 + L_2}{2}$

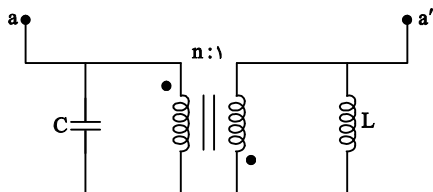
(1) $R^2 C$

(4) $\frac{L_2 R^2 C}{L_1}$

(3) $\frac{L_1 L_2}{R^2 C}$

۶- مدار زیر از سرهای aa' با چه فرکانسی به تشدید درخواهد آمد؟ (سلف، خازن و ترانس همه ایده آل

فرض می شوند).



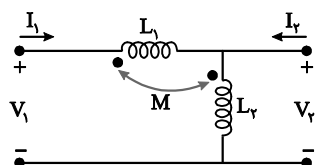
(1) $\frac{1}{\sqrt{LC}}$

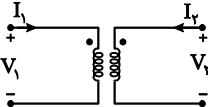
(2) $\frac{n}{\sqrt{LC}}$

(3) $\frac{1}{n\sqrt{LC}}$

(4) فرکانس تشدید ندارد.

۷- مدار شکل زیر را در نظر بگیرید که در آن $L_1 = 2H$ ، $L_2 = 3H$ و $|M| = 1H$.



اگر مدار مذکور معادل سلف‌های تزویج شده‌ای به صورت  باشد، ضریب تزویج سلف‌ها

در شکل اخیر تقریباً برابر است با:

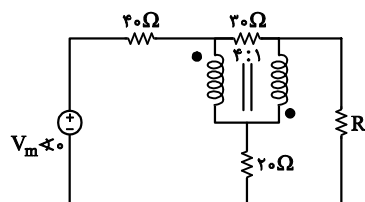
0/87 (4)

0/52 (3)

0/4 (2)

0/23 (1)

۸- در مدار شکل زیر مقاومت R را چقدر انتخاب کنیم تا بیش‌ترین توان به آن منتقل شود؟



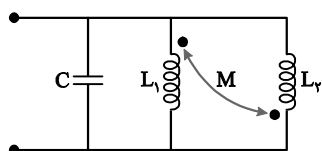
12/54Ω (1)

15/76Ω (2)

18/28Ω (3)

21/34Ω (4)

۹- فرکانس تشدید ω مدار شکل زیر چند رایان بر ثانیه است؟



7 (1)

$\sqrt{21}$ (2)

1/6 (3)

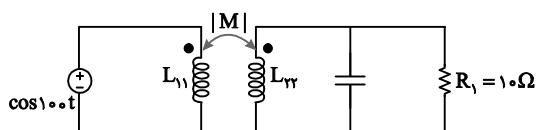
$\frac{5}{\sqrt{21}}$ (4)

$$\begin{cases} C = \frac{1}{7} F \\ L_1 = \frac{3}{5} H \\ L_2 = \frac{2}{5} H \\ |M| = \frac{1}{5} H \end{cases}$$

۱۰- مدار شکل زیر در حالت دائمی سینوسی است. با فرض این که ماتریس اندوکتانس معکوس برای دو سلف

تزوید شده به صورت $\Gamma = L^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ معلوم باشد، مقدار C چند میکرو فاراد باشد تا ولتاژ دو سر R_1

ماکزیمم شود؟



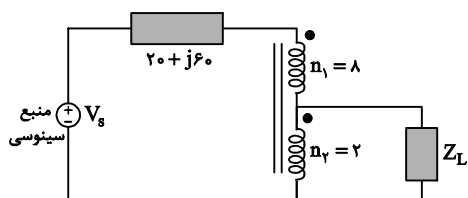
(1) 10

(2) 50

(3) 100

(4) 200

۱۱- در مدار شکل زیر امپدانس Z_L برای انتقال حداکثر توان، چند اهم باید باشد؟



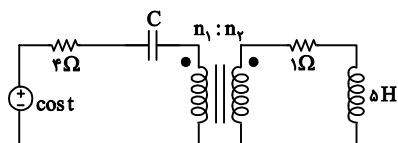
(1) $1/25 - j3/75$

(2) $0/8 - j2/4$

(3) $1/25 + j3/75$

(4) $0/8 + j2/4$

۱۲- در مدار شکل زیر نسبت $\frac{n_1}{n_2} = a$ و همچنین C را چنان تعیین کنید که حداکثر توان به طرف دوم



منتقل شود؟

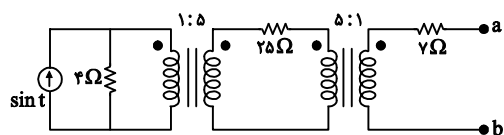
(1) $a = 2$ و $C = \frac{1}{20} F$

(2) $a = \frac{1}{2}$ و $C = \frac{1}{5} F$

(3) $a = 2$ و $C = 5F$

(4) $a = \frac{1}{2}$ و $C = 20F$

۱۳- مقادیر $i_{sc}(t)$ و R_{th} مدار معادل نورتن دیده شده از دو سر a و b مدار شکل زیر کدام است؟



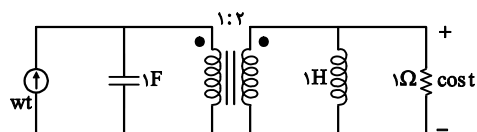
(1) 12Ω و $\sin t$

(2) 11Ω و $\sin t$

(3) 12Ω و $3\sin t$

(4) 11Ω و $3\sin t$

۱۴- در مدار شکل زیر، به ازای چه فرکانسی ولتاژ حالت دائمی $e_o(t)$ ماکزیمم است و در این فرکانس $e_o(t)$ چقدر است؟



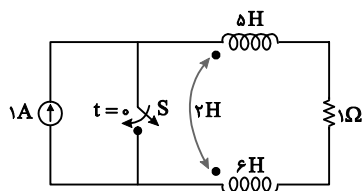
(1) $e_o(t) = \frac{1}{2} \cos 2t$ و $\omega = 2$

(2) $e_o(t) = \frac{1}{2} \cos 4t$ و $\omega = 4$

(3) $e_o(t) = \frac{1}{4} \cos 2t$ و $\omega = 2$

(4) $e_o(t) = \frac{1}{4} \cos 4t$ و $\omega = 4$

۱۵- در مدار شکل زیر کلید S باز است و مدار به حالت دائمی رسیده است. در $t=0$ کلید را می‌بندیم. پس از چه مدت زمانی، نصف انرژی ذخیره شده در لحظه $t=0$ در مقاومت ۱۰ اهمی تلف می‌شود؟



(2) $0/520s$

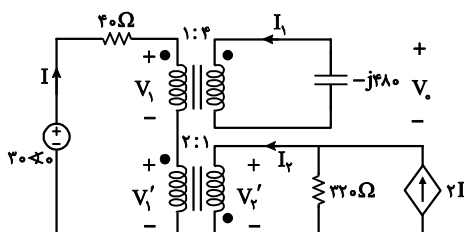
(1) $0/732s$

(4) $0/619s$

(3) $0/243s$

پاسخ تشریحی

۱- گزینه‌ی «۳» صحیح است.



در ترانس دوم با توجه به محل نقطه‌ها داریم:

$$\frac{I}{I_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{2} \rightarrow I_2 = 2I$$

با توجه به جریان منبع وابسته $2I$ می‌توان گفت از مقاومت 320Ω جریانی نمی‌گذرد، در نتیجه $V_2' = 0$ بنابراین

$$V_1' = 0 \text{ است.}$$

برای ترانس اول داریم:

$$\frac{I}{I_1} = -\frac{n_2}{n_1} = -4 \rightarrow I_1 = -\frac{1}{4}I$$

در نتیجه:

$$V_o = -j480 \times \frac{1}{4}I = -j120I$$

از طرفی:

$$\frac{V_1}{V_o} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{4} \rightarrow V_1 = \frac{1}{4}V_o = -j30I$$

با KVL زدن در حلقه ورودی داریم:

$$\text{KVL: } 30I = 40I + V_1 = 40I - j30I \rightarrow I = \frac{30}{4 - j3}$$

$$I = \frac{30}{5\angle -45^\circ} = \frac{3}{5}e^{j45^\circ} = \frac{3}{5}e^{j37^\circ}$$

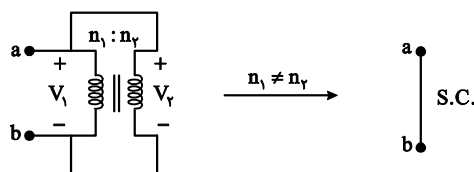
بنابراین برای V_o داریم:

$$V_o = -j120I = -j120 \times \frac{3}{5} e^{jR37^\circ} = 72e^{jR(37^\circ - 90^\circ)} \rightarrow V_o = 72e^{-jR53^\circ}$$

۲- گزینه ی «۲» صحیح است.

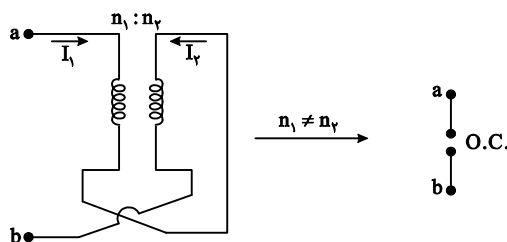
اگر سرهای یک ترانس را با هم موازی کنیم و $n_1 \neq n_2$ باشد، ترانس اتصال کوتاه می شود زیرا به خاطر اتصال موازی

$V_1 = V_2$ می شود در حالی که $\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} \neq 1$ است مگر در حالتی که $V_1 = V_2 = 0$ باشد.



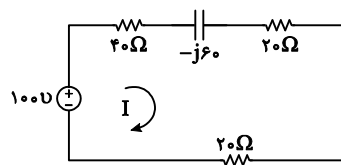
همچنین اگر سرهای یک ترانس را با هم سری کنیم و $n_1 \neq n_2$ باشد، ترانس اتصال باز می شود زیرا به دلیل اتصال

سری $I_1 = I_2$ است در حالی که $\frac{I_1}{I_2} = \frac{-n_1}{n_2} \neq 1$ می شود مگر در حالتی که $I_1 = I_2 = 0$ باشد.



پس در مدار مسأله، دو ترانس سرهایشان با هم موازی وصل شده اند و سرهای یک ترانس با هم سری وصل شده اند.

بنابراین مدار به شکل زیر در می آید:



با محاسبه جریان I داریم:

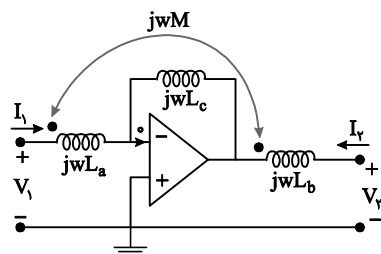
$$I = \frac{100}{80 - j60} = \frac{10}{8 - j6} = 0/8 + j0/6$$

بنابراین توان مصرفی مدار که مربوط به سه مقاومت سری است برابر است با:

$$P = R_{eq} |I|^2 = (40 + 20 + 20) \left((0/8)^2 + (0/6)^2 \right) = 80W$$

۳- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

با توجه به ایده‌آل بودن آپ امپ، جریان‌های سرهای آن برابر صفر است. در نتیجه جریان گذرنده از سلف‌های L_a و L_c برابر I_1 و جریان گذرنده از سلف L_b برابر I_2 است. بنابراین می‌توان گفت:

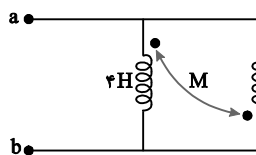


$$\begin{cases} V_1 = j\omega L_a I_1 - j\omega M I_2 \\ V_2 = j\omega L_b I_2 - j\omega M I_1 - j\omega L_c I_1 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} L_a & -M \\ -L_c - M & L_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس اندوکتانس دو قطبی به صورت $\begin{bmatrix} L_a & -M \\ -L_c - M & L_b \end{bmatrix}$ است.

۴- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

با انتقال مدار راست ترانس به سمت چپ داریم:



ماتریس اندوکتانس و در نتیجه ماتریس رلوکتانس به صورت زیر است:

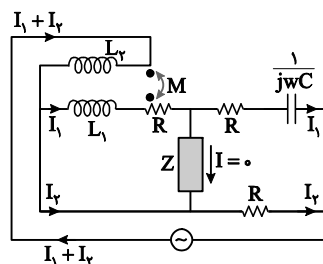
$$L = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \rightarrow \Gamma = L^{-1} = \frac{1}{\frac{16}{3} - \frac{4}{9}} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 4 \end{bmatrix}$$

بنابراین رلوکتانس معادل و در نتیجه اندوکتانس معادل برابر است با:

$$\Gamma_{ab} = \frac{9}{44} \left(\frac{4}{3} + 4 + \left(2 \times \frac{2}{3} \right) \right) = \frac{15}{11} \rightarrow L_{ab} = \frac{1}{\Gamma_{ab}} = \frac{11}{15} H$$

۵- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

با توجه به صفر بودن جریان عبوری از بار Z ، با نوشتن KVL در دو مش مدار داریم:



KVL : $j\omega L_1 I_1 - j\omega M (I_1 + I_2) + RI_1 = 0$ در مش سمت چپ

$$\rightarrow (j\omega L_1 - j\omega M + R) I_1 - j\omega M I_2 = 0$$

KVL : $RI_1 + \frac{1}{j\omega C} I_1 - RI_2 = 0 \rightarrow \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) I_1 - RI_2 = 0$ در مش سمت راست

با محاسبه I_2 از معادله دوم و قراردادن آن در معادله اول داریم:

$$I_2 = \left(1 + \frac{1}{j\omega CR} \right) I_1$$

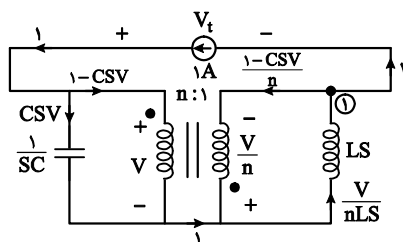
$$(j\omega L_1 - j\omega M + R) I_1 - j\omega M \left(1 + \frac{1}{j\omega CR} \right) I_1 = 0 \rightarrow$$

$$\left[\left(R - \frac{M}{RC} \right) + j(L_1 - 2M) \right] I_1 = 0 \rightarrow \begin{cases} R - \frac{M}{RC} = 0 \rightarrow M = R^2 C \\ L_1 - 2M = 0 \rightarrow M = \frac{L_1}{2} \end{cases}$$

۶- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با انتقال مدار به حوزه لاپلاس و قرار دادن منبع جریان $I_t = 1A$ به دو سر a, a' امپدانس ورودی مدار را به دست

می‌آوریم:



$$KCL(1): 1 + \frac{1}{n} (1 - CSV) - \frac{V}{nLS} = 0 \rightarrow V = \frac{(1+n)LS}{1 + LCS^2}$$

$$KVL: V_t = V + \frac{1}{n} V = \frac{n+1}{n} V = \frac{(n+1)^2 LS}{n(LCS^2 + 1)}$$

اگر به جای S قرار دهیم $j\omega$ داریم:

$$Z_{in} = \frac{V_t}{I_t} = \frac{V_t}{1} = \frac{(n+1)^2 LS}{n(LCS^2 + 1)} = \frac{j\omega L(n+1)^2}{n(1 - \omega^2 LC)} = j \frac{\omega L(n+1)^2}{n(1 - \omega^2 LC)}$$

بنابراین کل Z_{in} موهومی است و فقط به ازای $\omega = 0$ ، برابر صفر می‌شود. بنابراین مدار فرکانس تشدید ندارد.

۷- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

از سلف L_2 جریان $(i_1 + i_2)$ می‌گذرد، پس با اعمال KVL داریم:

$$V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{d}{dt}(i_1 + i_2) + L_2 \frac{d}{dt}(i_1 + i_2) + M \frac{di_1}{dt} \rightarrow$$

$$V_1 = (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di_1}{dt} + (M + L_2) \frac{di_2}{dt} = 7 \frac{di_1}{dt} + 4 \frac{di_2}{dt}$$

$$V_2 = L_2 \frac{d}{dt}(i_1 + i_2) + M \frac{di_1}{dt} = (M + L_2) \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \rightarrow V_2 = 4 \frac{di_1}{dt} + 3 \frac{di_2}{dt}$$

بنابراین با $L_{1t} = 7H$ ، $L_{2t} = 3H$ و $M_t = 4H$ داریم:

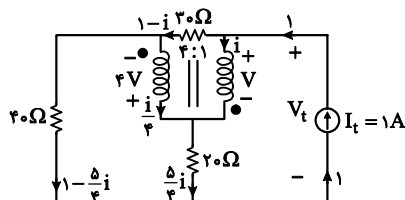
$$K = \frac{|M_t|}{\sqrt{L_{1t} L_{2t}}} = \frac{4}{\sqrt{3 \times 7}} = \frac{4}{\sqrt{21}} ; 0/873$$

۸- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

برای انتقال بیش‌ترین توان به مقاومت R باید مقاومت معادل از دو سر آن را به دست آورده و برابر با R قرار دهیم.

پس یک منبع جریان $I_t = 1A$ به جای مقاومت R قرار می‌دهیم و با اتصال کوتاه کردن منبع ولتاژ و اعمال KCL و

KVL داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \text{KVL در مش وسط: } V + 4V = 30(1-i) \rightarrow V = 6(1-i) \\ \text{KVL در مش مرکب سمت چپ: } V + 20\left(\frac{5}{4}i\right) = 30(1-i) + 40\left(1 - \frac{5}{4}i\right) \\ \text{KVL در مش سمت راست: } V_t = V + 20\left(\frac{5}{4}i\right) = 6 - 6i + 25i = 6 + 19\left(\frac{64}{99}\right) ; 18/28 \end{array} \right\} \rightarrow i = \frac{64}{99} A$$

بنابراین:

$$R = R_{in} = \frac{V_t}{I_t} = \frac{V_t}{1} = 18/28 \Omega$$

۹- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

اندوکتانس معادل اتصال موازی دو سلف L_1 و L_2 با تزویج متقابل M با توجه به محل نقطه‌ها به صورت زیر است:

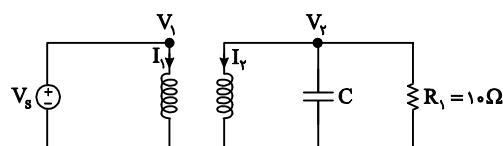
$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - |M|^2}{L_1 + L_2 + 2|M|} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{2}{5} - \frac{1}{25}}{\frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{1}{7} H$$

و فرکانس تشدید مدار LC موازی برابر است با:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L_{eq} C}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{7} \times \frac{1}{7}}} = \sqrt{49} = 7 \text{ rad/s}$$

۱۰- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با توجه به ماتریس اندوکتانس معکوس داده شده داریم:



$$\omega_0 = 100 \text{ rad/s}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} I_1 = \frac{5}{j\omega} V_1 - \frac{2}{j\omega} V_2 \\ I_2 = -\frac{2}{j\omega} V_1 + \frac{2}{j\omega} V_2 \end{cases}$$

با اعمال KCL در گروه 2 داریم:

$$\text{KCL}(2): I_2 + j\omega C V_2 + \frac{V_2}{10} = 0 \rightarrow -\frac{2}{j\omega} V_1 + \frac{2}{j\omega} V_2 + j\omega C V_2 + \frac{V_2}{10} = 0$$

با توجه به این که $V_s = V_1$ است داریم:

$$\frac{2}{j\omega} V_s = \left(\frac{2}{j\omega} + j\omega C + \frac{1}{10} \right) V_2 \rightarrow V_2 = \frac{2}{(j\omega)^2 C + \frac{1}{10} j\omega + 2} V_s$$

$$\rightarrow V_2 = \frac{\frac{2}{10C}}{(j\omega)^2 + \frac{1}{10C} j\omega + \frac{2}{C}} V_s$$

در نتیجه فرکانس تشدید این مدار برابر است با:

$$\omega_0^2 = \frac{2}{C} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2}{C}}$$

ولتاژ خروجی در فرکانس تشدید ($\omega_0 = 100 \text{ rad/s}$) حداکثر می‌شود، بنابراین:

$$C = \frac{2}{\omega_0^2} = \frac{2}{10^4} = 2 \times 10^{-4} = 200 \times 10^{-6} \rightarrow C = 200 \mu\text{F}$$

۱۱- گزینه ی «۲» صحیح است.

امپدانس معادل دیده شده از دو سر Z_L را به دست می‌آوریم و برای انتقال حداکثر توان لازم است که Z_L مزدوج

امپدانس دیده شده از دو سر آن باشد.

برای به دست آوردن امپدانس معادل، با انتقال امپدانس طرف اول به طرف دوم داریم:

$$Z_{in} = \left(\frac{n_{\text{مقصد}}}{n_{\text{مبدأ}}} \right)^2 (20 + j60) = \left(\frac{2}{8+2} \right)^2 (20 + j60) = 0/8 + j0/6$$

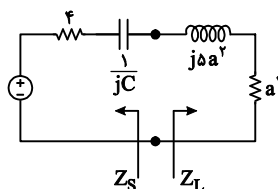
بنابراین:

$$Z_L = Z_{in}^* = 0/8 - j0/6$$

لازم به ذکر است در این حالت با توجه به شکل ترانس، $n_2 = 2 = n_{\text{مقصد}}$ و $n_1 + n_2 = 8 + 2 = 10 = n_{\text{مبدأ}}$ است.

۱۲- گزینه ی «۱» صحیح است.

با انتقال عناصر سمت راست ترانس به طرف چپ و در نظر گرفتن $\omega = 1$ داریم:



$$Z_S = 4 + \frac{1}{jC} = 4 - \frac{j}{C}$$

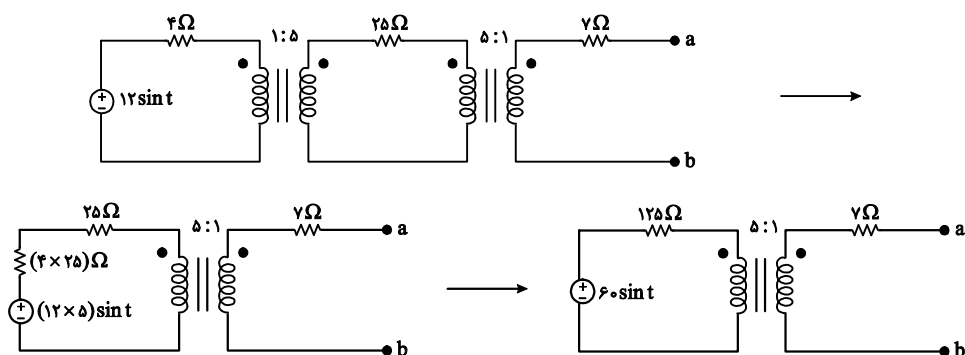
$$Z_L = a^2 + j5a^2 = a^2(1 + 5j)$$

برای انتقال حداکثر توان به بار Z_L داریم:

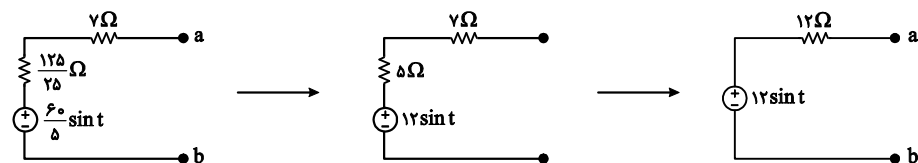
$$Z_L = Z_S^* \rightarrow a^2(1 + 5j) = 4 - \frac{j}{C} \rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \rightarrow a = 2 \\ 5a^2 = \frac{1}{C} \rightarrow C = \frac{1}{20} \text{ F} \end{cases}$$

۱۳- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

با تبدیل طرف چپ مدار به معادل تونن آن و سپس با انتقال به طرف دیگر ترانس داریم:



اکنون با انتقال طرف چپ ترانس به طرف راست و با در نظر گرفتن نسبت تبدیل داریم:

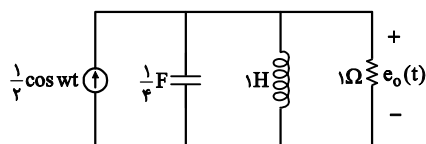


بنابراین:

$$\begin{cases} R_{th} = 12\Omega \\ e_{oc} = 12 \sin t \end{cases} \rightarrow i_{sc} = \frac{e_{oc}}{R_{th}} = \sin t$$

۱۴- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

با انتقال طرف چپ مدار به سمت راست داریم:



$e_o(t)$ زمانی ماکزیمم می‌شود که در LC موازی تشدید رخ دهد و این شاخه مدار باز شده و کل جریان منبع از مقاومت یک اهمی بگذرد.

در نتیجه:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1 \times \frac{1}{4}}} = 2 \text{ rad/s}$$

بنابراین:

$$e_o(t) = 1 \times \frac{1}{2} \cos \omega t \big|_{\omega=2} = \frac{1}{2} \cos 2t$$

۱۵- گزینه ی «۳» صحیح است.

اندوکتانس معادل سلف‌های سری دارای تزویج برابر است با:

$$L_{eq} = 5 + 6 - (2 \times 2) = 7H$$

قبل از بسته شدن کلید $i_L(0^-) = 10A$ است. پس انرژی ذخیره شده در سلف‌ها برابر است با:

$$W(0^-) = \frac{1}{2} L_{eq} i_L^2(0^-) = \frac{1}{2} \times 7 \times 10^2 = 350J$$

بعد از بسته شدن کلید ورودی نداریم و پاسخ در حالت ورودی صفر است، یعنی:

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L_{eq}}t} = 10e^{-\frac{10}{7}t}$$

حال اگر نصف انرژی اولیه سلف‌ها در مقاومت تلف شود، نصف دیگر آن در سلف‌ها باقی می‌ماند. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{W_t}{W_0} = \frac{\frac{1}{2} L i_t^2}{\frac{1}{2} L i_0^2} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \frac{I_0^2 e^{-2 \times \frac{10}{7}t}}{I_0^2} = \frac{1}{2} \rightarrow e^{-\frac{20}{7}t} = \frac{1}{2} \rightarrow t = \frac{7}{20} \ln 2 \rightarrow t ; 0/243 \text{ sec}$$

فصل نهم: روش‌های منظم تجزیه و تحلیل مدارهای الکتریکی

در این فصل به بررسی روش‌های منظم تحلیل مدار می‌پردازیم. هدف اصلی این روش‌ها، تحلیل مرحله به مرحله و به عبارتی تحلیل کامپیوتری مدار است. (تحلیل مدار به کمک نرم افزا Spice) در این روش‌ها با داشتن گراف مدار، معادلات شاخه‌ها، شرایط اولیه و ورودی‌های مدار، به تحلیل و بررسی آن می‌پردازیم. برای این منظور چهار روش وجود دارد که به بررسی آن‌ها می‌پردازیم.

9-1- روش منظم گره

در این روش ابتدا گراف مدار را رسم می‌کنیم، یک گره را به عنوان گره مبنا (زمین) در نظر می‌گیریم و بعد ماتریس گره که به آن ماتریس تلاقی A گفته می‌شود را تشکیل می‌دهیم. اگر n_t تعداد گره‌های گراف و b تعداد شاخه‌های آن باشد، ماتریس تلاقی A از مرتبه $(n_t - 1) \times b$ خواهد بود که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{(n_t-1) \times b}$$

شماره شاخه‌ها
↓
شماره گره‌ها

به طوری که:

$$a_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{اگر ژام به گره نام وصل باشد و جریانش از گره خارج شود.} \\ -1 & \text{اگر ژام به گره نام وصل باشد و جریانش به گره وارد شود.} \\ 0 & \text{اگر شاخه ژام به گره نام متصل نباشد.} \end{cases}$$

در این حالت معادلات اساسی ماتریسی به صورت زیر است:

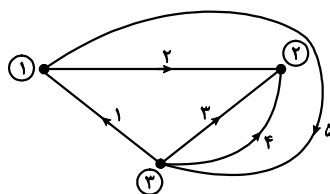
$$(1) \quad AJ = 0 \quad \text{که بیان کننده رابطه KCL است.}$$

$$(2) \quad V = A' \times e \quad \text{که بیان کننده رابطه KVL است.}$$

در این روابط، $J_{b \times 1}$ بردار جریان شاخه‌ها، $V_{b \times 1}$ بردار ولتاژ شاخه‌ها، $e_{(n_t-1) \times 1}$ بردار ولتاژ گره‌ها و

$$A'_{b \times (n_t-1)} = \text{ترانهاده ماتریس تلاقی } A \text{ است.}$$

مثال ۱: در گراف شکل زیر، ماتریس تلاقی A را به دست آورید و روابط KCL و KVL را بررسی نمایید.



اگر گره 3 را به عنوان گره مبنا در نظر بگیریم، گراف دارای 2 گره مستقل و 5 شاخه است. پس داریم:

$$n = n_t - 1 = 2 \rightarrow \text{تعداد گره‌های مستقل} = 3 = n_t: \text{تعداد گره‌ها}$$

$$b = 5: \text{تعداد شاخه‌ها}$$

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

برای رابطه KCL داریم:

$$AJ=0 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \end{bmatrix} = 0$$

که با بسط دادن آن:

$$\begin{cases} -J_1 + J_2 + J_5 = 0 \rightarrow \text{KCL در گره 1} \\ -J_2 + J_3 - J_4 = 0 \rightarrow \text{KCL در گره 2} \end{cases}$$

و برای KVL داریم:

$$V = A' \times e \rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

که نتیجه بسط دادن آن برابر است با:

$$\begin{cases} V_1 = -e_1 \\ V_2 = e_1 - e_2 \\ V_3 = -e_2 \\ V_4 = -e_2 \\ v_5 = e_1 \end{cases}$$

نکته: ماتریس تلافی A در روش منظم گره، ماتریس خلاصه شده است زیرا گره مبنا را در نظر نگرفته‌ایم. حال اگر گره مبنا را نیز در نظر بگیریم، ماتریس تلافی کامل A از مرتبه $n_t \times b$ است.

برای نوشتن ماتریس تلافی کامل A می‌توان از این نکته استفاده کرد که مجموع اعداد در هر ستون ماتریس تلافی کامل A برابر صفر است.

مثلاً در مثال قبل می‌توان گفت:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 5}$$

ماتریس تلافی خلاصه شده

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 5}$$

ماتریس تلافی کامل

سطر اضافه شده

رابطه نهایی در روش منظم گره به صورت زیر می‌باشد که با حل آن می‌توان مدار را تجزیه و تحلیل نمود:

$$Y_n \times e = I_s$$

در این رابطه، Y_n ماتریس ادمیتانس گره $(n = n_t - 1 \times n \times n)$ ، e بردار ولتاژ گره‌ها $(n \times 1)$ و I_s بردار منابع جریان گره‌ها $(n \times 1)$ است.

اگر مدار شامل عناصر تزویج و منابع وابسته نباشد، ماتریس Y_n و I_s به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$1- y_{ii} = \text{عناصر قطری} = \text{مجموع ادمیتانس‌های متصل به گره } i \text{ ام}$$

$$2- y_{ij} = \text{عناصر غیرقطری} = \text{منفی مجموع ادمیتانس‌های مشترک بین گره } i \text{ ام و } j \text{ ام}$$

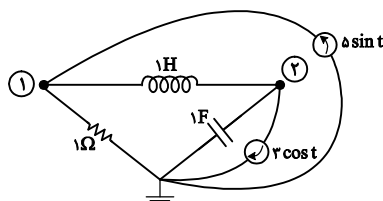
$$3- I_{sk} = \text{جمع جبری منبع جریان‌های ورودی به گره } k \text{ ام، یعنی منبع جریان‌های ورودی با علامت مثبت و منابع}$$

جریان خروجی با علامت منفی منظور می‌شوند.

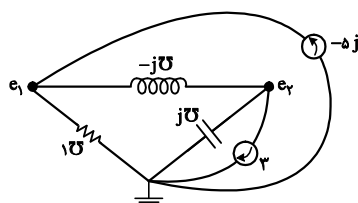
نکته: در روش منظم گره، کلیه منابع ولتاژ را به منابع جریان تبدیل می‌کنیم. (با استفاده از تبدیل تونن به نورتن).

همچنین اگر در مدار منبع وابسته‌ای وجود داشته باشد، ابتدا همانند منابع مستقل عمل نموده و در نهایت مقدار منبع را برحسب مجهولات جایگزین می‌کنیم.

مثال ۲: در مدار شکل زیر، معادلات ماتریسی گره را بنویسید.



در حالت دائمی سینوسی و با بیان مقادیر عناصر برحسب ادمیتانس داریم: ($\omega = 1$)



$$Y_n = \begin{bmatrix} 1-j & j \\ j & 0 \end{bmatrix}, I_s = \begin{bmatrix} -5j \\ -3 \end{bmatrix}$$

و در نتیجه:

$$Y_n \times e = I_s \rightarrow \begin{bmatrix} 1-j & j \\ j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5j \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (1-j)e_1 + je_2 = -5j \\ je_1 = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e_1 = 3j \\ e_2 = -8 + 3j \end{cases}$$

$$\rightarrow e_1 = 3 \cos(t + 90^\circ) = -3 \sin t, \quad e_2 = \sqrt{73} \cos\left(t + \pi - \tan^{-1} \frac{3}{8}\right)$$

9-2- روش منظم مش

در این روش نیز ابتدا گراف مدار را رسم می‌کنیم و سپس ماتریس مش M را تشکیل می‌دهیم. اگر l تعداد مش‌های مستقل و b تعداد شاخه‌های مدار باشد، ماتریس مش M از مرتبه $l \times b$ خواهد بود که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M = \begin{matrix} \text{شماره شاخه‌ها} \\ \text{شماره مش‌ها} \end{matrix} \downarrow \begin{bmatrix} m_{ij} \end{bmatrix}_{l \times b}$$

به طوری که:

اگر l ام در مش l ام بوده و با آن هم جهت باشد.

$$m_{ij} = \begin{cases} +1 \rightarrow & \text{اگر ژام در مش نام بوده و خلاف جهت آن باشد.} \\ -1 \rightarrow & \text{اگر شاخه ژام در مش نام نباشد.} \\ 0 \rightarrow & \end{cases}$$

برای این منظور، برای هر مش یک جهت قراردادی جریان در نظر می‌گیریم. (جهت حرکت عقربه‌های ساعت)

در این حال معادلات اساسی ماتریسی عبارت است از:

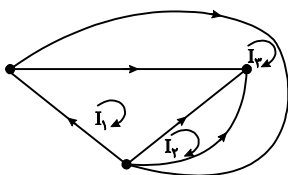
$$1- J = M' \times I \quad \text{که بیان‌کننده رابطه KCL است.}$$

$$2- MV = 0 \quad \text{که باینگر رابطه KVL است.}$$

در این روابط، $J_{b \times 1}$ = بردار جریان شاخه‌ها، $V_{b \times 1}$ = بردار ولتاژ شاخه‌ها، $I_{l \times 1}$ = بردار جریان مش‌ها و $M'_{b \times L}$

ترانهاده ماتریس مش است.

مثال ۳: برای گراف شکل زیر، ماتریس مش M را به دست آورید و روابط KCL و KVL را بررسی نمایید.



در این گراف، سه مش مستقل و پنج شاخه داریم. پس برای ماتریس M داریم:

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

و برای روابط KVL و KCL داریم:

$$\text{KVL: } MV = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} V_1 + V_2 - V_3 = 0 \\ V_3 - V_4 = 0 \\ -V_2 + V_4 + V_5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{KCL: } J = M' \times I \rightarrow \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} J_1 = I_1 \\ J_2 = I_1 - I_3 \\ J_3 = -I_1 + I_2 \\ J_4 = -I_2 + I_3 \\ J_5 = I_3 \end{cases}$$

رابطه نهایی در روش منظم مش به صورت زیر است:

$$Z_m \times I = E_s$$

که در آن، Z_m ماتریس امپدانس مش $(I \times I)$ ، I بردار جریان مش‌ها $(I \times 1)$ و E_s بردار منابع ولتاژ مش‌ها (1×1) است.

ماتریس‌های Z_m و E_s به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

1- Z_{ii} = عناصر قطری = مجموع امپدانس‌های موجود در مش i ام

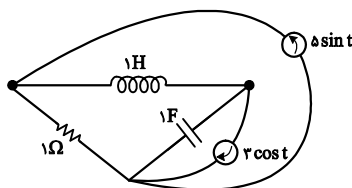
2- Z_{ij} = عناصر غیرقطری = منفی مجموع امپدانس‌های مشترک بین دو مش i ام و j ام

3- E_{sk} = جمع جبری منابع ولتاژ موجود در مش i ام، یعنی اگر جریان مش از سر منفی ولتاژ وارد شود، آن را با

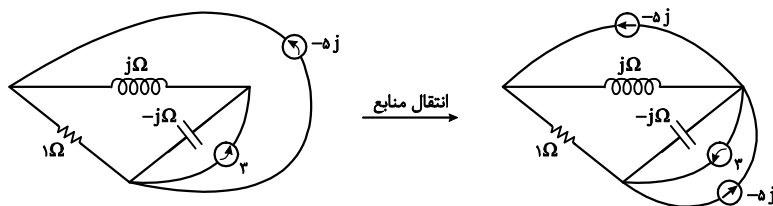
علامت مثبت و اگر از سر مثبت ولتاژ وارد شود، با علامت منفی لحاظ می‌کنیم.

نکته: در روش منظم مش، کلیه منابع جریان را به منابع ولتاژ تبدیل می‌کنیم.

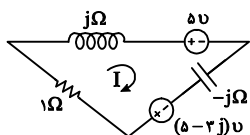
مثال ۴: در مدار شکل زیر، معادلات ماتریسی مش را بنویسید.



در حالت دائمی سینوسی و با تبدیل منابع و بیان مقادیر عناصر برحسب امپدانس داریم: ($\omega = 1$)



و با تبدیل منابع جریان به ولتاژ:



$$\text{KVL: } (1 + j - j)I = 5 - (5 - 3j) \rightarrow I = -3j \rightarrow i(t) = 3 \sin t$$

9-3- تحلیل مدارهای دارای منابع وابسته و سلف‌های تزویج با روش منظم گره مش

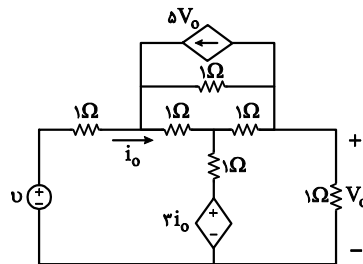
9-3-1- تحلیل مدارهای دارای منابع وابسته

اگر در مداری منبع وابسته‌ای وجود داشته باشد، در ابتدا همانند منابع مستقل عمل نموده و معادلات را عین قبل می‌نویسیم، سپس متغیرهای منبع وابسته را بر حسب ولتاژ گره‌ها یا جریان مش‌ها جایگزین نموده و در آخر مقادیر

مربوطه را به سمت چپ می‌بریم. (البته با تغییر علامت)

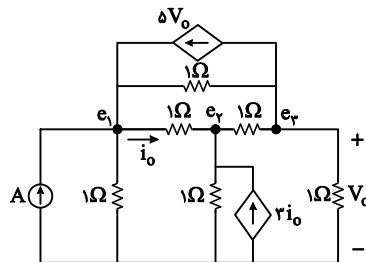
برای درک بهتر موضوع مثال زیر را بررسی می‌کنیم.

مثال ۵: در مدار شکل زیر، معادلات گره و مش را به دست آورید.



الف) روش منظم گره

در این روش با تبدیل منابع ولتاژ به جریان داریم:



$$Y_n \times e = I_s \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + 5V_o \\ 3i_o \\ -5V_o \end{bmatrix}$$

از طرفی داریم:

$$\begin{cases} V_o = e_3 \\ i_o = \frac{e_1 - e_2}{1} = e_1 - e_2 \end{cases}$$

بنابراین:

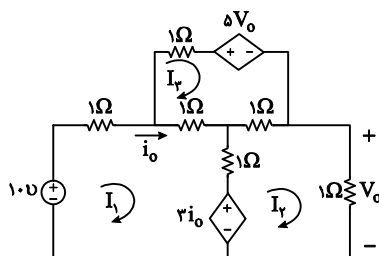
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+5e_3 \\ 3e_1-3e_2 \\ -5e_3 \end{bmatrix}$$

با انتقال e_1 ها از سمت راست به چپ:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1-5 \\ -1-3 & 3+3 & -1 \\ -1 & -1 & 3+5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -6 \\ -4 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(ب) روش منظم مش

در این روش با تبدیل منابع جریان به ولتاژ داریم:



$$Z_m \times I = E_S \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10-3i_o \\ 3i_o \\ -5V_o \end{bmatrix}$$

از طرفی داریم:

$$\begin{cases} V_o = I_2 \\ i_o = I_1 - I_3 \end{cases}$$

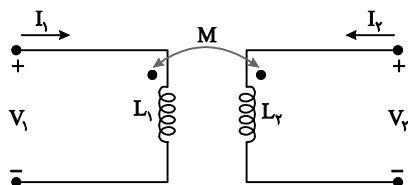
بنابراین:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10-3I_1+3I_3 \\ 3I_1-3I_3 \\ -5I_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3+3 & -1 & -1-3 \\ -1-3 & 3 & -1+3 \\ -1 & -1+5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

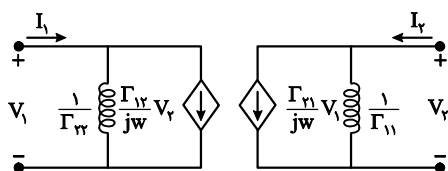
$$\rightarrow \begin{bmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -4 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

9-3-2- تحلیل مدارهای دارای سلف‌های تزویج

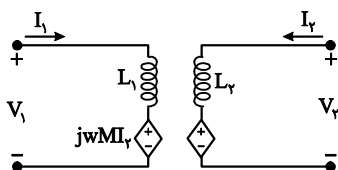
اگر در مداری سلف‌های تزویج وجود داشته باشد، بسته به نوع روش تحلیل، از مدار معادل سلف‌های تزویج استفاده می‌کنیم.



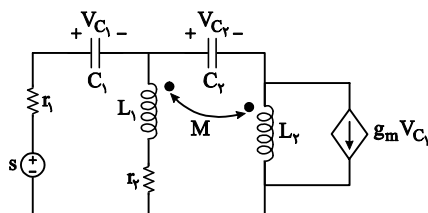
(1) مدار معادل سلف‌های تزویج در روش گره



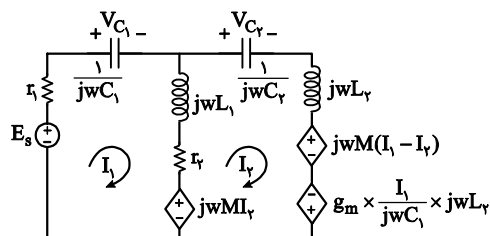
(2) مدار معادل سلف‌های تزویج در روش مش



مثال ۶: در مدار شکل زیر، معادلات ماتریسی مش را بنویسید.



با استفاده از تبدیل منابع جریان به ولتاژ و مدار معادل سلف‌های تزویج دار داریم:



و با کمک روش منظم مش داریم:

$$Z_m I = E_S \rightarrow \begin{bmatrix} r_1 + r_2 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} & -r_2 - j\omega L_1 \\ -r_2 - j\omega L_1 & j\omega L_1 + j\omega L_2 + r_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_S - j\omega M I_2 \\ j\omega M I_2 - j\omega M(I_1 - I_2) + \frac{g_m L_2}{C_1} I_2 \end{bmatrix}$$

و با انتقال عبارات سمت راست به ماتریس Z_m سمت چپ خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} r_1 + r_2 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} & -r_2 - j\omega L_1 + j\omega M \\ -r_2 - j\omega L_1 + j\omega M - \frac{g_m L_2}{C_1} & j\omega(L_1 + L_2) + r_2 + \frac{1}{j\omega C_2} - 2j\omega M \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_S \\ 0 \end{bmatrix}$$

۹-۴- تعریف درخت، کاتست و حلقه

۱- درخت

هر گرافی دارای تعداد زیادی زیرگراف است. زیر گرافی که دارای سه شرط زیر باشد را یک درخت می‌گوییم:

(1) شاخه‌هایش به هم متصل باشد.

(2) تمام گره‌های گراف اصلی را دربر بگیرد.

(3) هیچ حلقه‌ای نداشته باشد.

به شاخه‌های یک گراف که در درخت وجود داشته باشند، «شاخه درخت» و به شاخه‌هایی که در درخت نباشند،

«لینک» می‌گویند.

پس می‌توان گفت تعداد شاخه درخت‌ها در هر گراف، برابر است با تعداد گره‌های مستقل $(n = n_t - 1)$ و تعداد لینک‌ها

برابر است با تعداد مش‌ها (I) .

نکته: در هر گرافی، درخت یکتا نمی‌باشد.

می‌توان گفت برای هر گراف با ماتریس تلافی A ، به تعداد $\det(AA')$ درخت مستقل وجود دارد.

۲- حلقه و کاتست

هر برش از مدار را کاتست می‌گویند. در کاتست‌ها رابطه KCL صادق است. همچنین هر مسیر بسته‌ای در مدار را

حلقه می‌نامیم که در آن‌ها KVL حاکم است. هر گراف، تعدادی حلقه و کاتست دارد که بعضی از آن‌ها اساسی هستند.

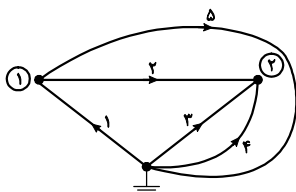
۱۱ حلقه اساسی: هر لینک از درخت به همراه تعدادی شاخه درخت، تشکیل یک حلقه اساسی می‌دهد که جهت حلقه اساسی، هم جهت با لینک متناظرش است.

۱۲ کاتست اساسی: هر شاخه درخت به همراه تعدادی لینک، تشکیل یک کاتست اساسی می‌دهد که جهت کاتست اساسی، هم جهت با شاخه درخت متناظرش است.

نکته: در هر گرافی، جمع تعداد گره‌های مستقل و تعداد مش‌ها برابر تعداد شاخه‌ها است.
یعنی:

$$b = l + n_t - 1 = l + n$$

همچنین مجموع تعداد کاتست‌های مستقل و حلقه‌های مستقل برابر تعداد شاخه‌ها است. به عبارت دیگر، تعداد کاتست‌های اساسی برابر است با تعداد گره‌های مستقل و تعداد حلقه‌های اساسی برابر است با تعداد مش‌ها.
مثال ۷: در گراف شکل زیر، دو درخت دلخواه انتخاب نموده و کاتست‌های اساسی و حلقه‌های اساسی آن را مشخص کنید.

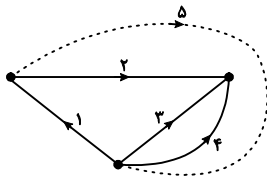


درخت اول:

در این حالت ۲ شاخه درخت (کاتست اساسی) و ۳ لینک (حلقه اساسی) داریم.

کاتست‌های اساسی: ۱۳۴۵ و ۲۳۴

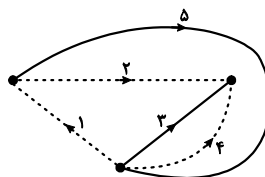
حلقه‌های اساسی: ۱۵ و ۱۲۳ و ۱۲۴



درخت دوم:

کاتست‌های اساسی: ۱۲۵ و ۲۳۴

حلقه‌های اساسی: 15 و 235 و 43



۹-۵- روش منظم کاتست

این روش تعمیم روش منظم گره است. برای ماتریس کاتست اساسی Q که از مرتبه $(n_t - 1) \times b$ است داریم:

$$Q = \begin{matrix} \text{شماره شاخه‌ها} \\ \downarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} q_{ij} \end{bmatrix}_{n \times b}$$

به طوری که:

$$q_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{اگر شاخه } i \text{ ام در کاتست } j \text{ ام بوده و با آن هم جهت باشد.} \\ -1 & \text{اگر شاخه } i \text{ ام در کاتست } j \text{ ام بوده و خلاف جهت آن باشد.} \\ 0 & \text{اگر شاخه } i \text{ ام در کاتست } j \text{ ام نباشد.} \end{cases}$$

و معادلات اساسی ماتریسی به صورت زیر است:

$$QJ = 0 \quad (1) \text{ که بیانگر رابطه KCL است.}$$

$$V = Q' \times E \quad (2) \text{ که بیانگر رابطه KVL است.}$$

که در این روابط، E بردار ولتاژ کاتست‌ها است.

رابطه نهایی در روش منظم کاتست به صورت زیر است:

$$Y_q \times E = I_s$$

در این حالت، Y_q ماتریس ادمیتانس کاتست $(n \times n)$ ، E بردار ولتاژ کاتست‌ها $(n \times 1)$ و I_s بردار منابع جریان کاتست‌ها $(n \times 1)$ است.

عناصر ماتریس Y_q و I_s به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y_{ii} = \text{عناصر قطری} = \text{مجموع ادمیتانس‌های موجود در کاتست } i \text{ ام} \quad (1)$$

$$y_{ij} = \text{عناصر غیرقطری} = \text{جمع جبری ادمیتانس‌های مشترک بین کاتست‌های } i \text{ ام و } j \text{ ام، یعنی اگر در آن شاخه،} \quad (2)$$

جهت کاتست‌ها یکسان بود، آن ادمیتانس با علامت مثبت و اگر جهت کاتست‌ها متفاوت بود، آن ادمیتانس با علامت

منفی لحاظ می‌شود

(3) $I_{SK} =$ جمع جبری جریان‌های عبوری از کاتست k ام. به عبارت دیگر، اگر جهت منبع جریان خلاف جهت کاتست

بود با علامت مثبت و اگر هم جهت با کاتست بود با علامت منفی منظور می‌کنیم.

مثال ۸: برای گراف مثال 7 و با توجه به درخت اول، ماتریس Q را مشخص کنید و برای مدار مثال 2، معادلات منظم

کاتست را بنویسید.

با توجه به گراف مربوطه داریم:

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$\underline{1}$ کاتست: $\{1, 3, 4, 5\}$

$\underline{2}$ کاتست: $\{2, 3, 4\}$

و برای معادلات منظم کاتست داریم:

$$Y_q \times E = I_s$$

$$\begin{bmatrix} 1-j & j \\ j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5j \\ 3 \end{bmatrix}$$

۹-۶- روش منظم حلقه

این روش نیز تعمیم روش مش است. ماتریس حلقه اساسی B که از مرتبه $I \times b$ است به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B = \begin{matrix} \text{شماره شاخه‌ها} \\ \downarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{I \times b}$$

شماره حلقه‌های اساسی

به طوری که:

$$b_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{اگر شاخه } j \text{ ام در حلقه } i \text{ ام بوده و با آن هم جهت باشد.} \\ -1 & \text{اگر شاخه } j \text{ ام در حلقه } i \text{ ام بوده و خلاف جهت آن باشد.} \\ 0 & \text{اگر شاخه } j \text{ ام در حلقه } i \text{ ام نباشد.} \end{cases}$$

و برای معادلات اساسی داریم:

$$J = B' \times I \quad (1) \text{ (بیان قانون KCL)}$$

$$BV = 0 \quad (2) \text{ (بیان قانون KVL)}$$

رابطه نهایی در روش منظم حلقه به صورت زیر است:

$$Z_L \times I = E_s$$

که Z_L ماتریس امپدانس حلقه (1×1) ، I بردار جریان حلقه‌ها (1×1) ، E_S بردار منابع ولتاژ حلقه‌ها (1×1) است.

عناصر ماتریس Z_L و E_S به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$(1) \quad Z_{ii} = \text{عناصر قطری} = \text{مجموع امپدانس‌های موجود در حلقه } i\text{ام}$$

$$(2) \quad Z_{ij} = \text{عناصر غیرقطری} = \text{جمع جبری امپدانس‌های مشترک میان حلقه‌های } i\text{ام و } j\text{ام، یعنی اگر در آن شاخه، جهت}$$

هر دو حلقه یکسان بود، آن امپدانس با علامت مثبت و اگر یکسال نبود، با علامت منفی منظور می‌شود.

$$(3) \quad E_{sk} = \text{جمع جبری منابع ولتاژ موجود در حلقه اساسی } k\text{ام که همانند روش مش است.}$$

مثال ۹: مثال قبل را برای ماتریس B و معادلات منظم حلقه بنویسید. (درخت دوم)

با توجه به گراف مربوطه داریم:

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

1 : {1,5} حلقه اساسی

2 : {2,3,5} حلقه اساسی

3 : {4,3} حلقه اساسی

و برای معادلات منظم حلقه:

$$Z_L I = E_S$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j \\ 0 & j & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5j \\ 5j \\ 3 \end{bmatrix}$$

تست‌های طبقه‌بندی شده مبحث روش‌های منظم تجزیه و تحلیل مدارهای الکتریکی

۱- ماتریس تلافی مختصر شده گرافی چنین است:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

کدام شاخه‌ها، درختی از این گراف را تشکیل می‌دهند؟

- (1) 1256 (2) 1269 (3) 1358 (4) 2345

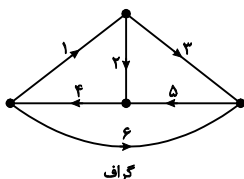
۲- اگر ماتریس تلافی A یک گراف سطح را به دو ماتریس A_t و A_e متناظر با شاخه درخت‌ها و لینک‌ها

تفکیک کنیم $A = [A_t \parallel A_e]$ ، کدام یک از خواص زیر همواره برقرار است؟

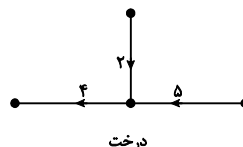
- (1) A_t همواره یک ماتریس ناویژه است. (2) دترمینان A_t همواره برابر ± 1 است.
(3) A_t همواره یک ماتریس مربعی است. (4) هر سه خاصیت برقرار است.

۳- گراف یک شبکه و درخت مربوط به آن در شکل‌های زیر داده شده‌اند. حلقه‌ها و کاتست‌های اساسی آن

کدام است؟



گراف



درخت

(1) کاتست‌های اساسی $\{2,1,3\}$ و $\{1,6,3\}$ و $\{4,1,6\}$

حلقه‌های اساسی $\{2,4,1\}$ و $\{1,5,3\}$ و $\{2,5,6\}$

(2) کاتست‌های اساسی $\{3,5,6\}$ و $\{5,6,4\}$ و $\{4,5,2\}$

حلقه‌های اساسی $\{2,4,1\}$ و $\{2,5,3\}$ و $\{4,5,6\}$

(3) کاتست‌های اساسی $\{2,1,3\}$ و $\{5,6,3\}$ و $\{4,1,6\}$

حلقه‌های اساسی $\{2,4,1\}$ و $\{2,5,3\}$ و $\{4,5,6\}$

(4) کاتست‌های اساسی $\{2,1,5,6\}$ و $\{5,6,3\}$ و $\{3,2,4,6\}$

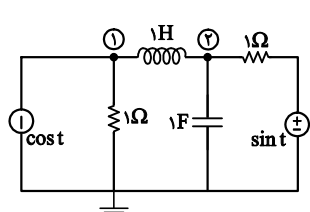
حلقه‌های اساسی $\{2,4,3\}$ و $\{2,5,3\}$ و $\{4,5,6\}$

۴- در یک مدار فشرده با گراف چهار شاخه‌ای، بردار ولتاژ شاخه‌ها به صورت $V_b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ است. جریان این

شاخه‌ها کدام یک می‌تواند باشد؟

$$i_b = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4) \quad i_b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3) \quad i_b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (2) \quad i_b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (1)$$

۵- ماتریس ادمیتانس گره $Y(j\omega)$ مدار شکل زیر کدام است؟



$$\begin{bmatrix} 1-j & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 1-j & j \\ j & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 1+j & -j \\ -j & j \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} 1+j & j \\ j & j \end{bmatrix} \quad (3)$$

۶- ماتریس تلاقی مختصر شده برای گراف جهت‌دار یک مدار به صورت زیر داده شده است:

شماره شاخه‌ها $\xrightarrow{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7}$

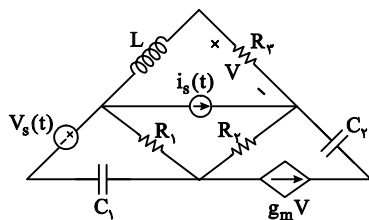
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ولتاژهای کدام یک از شاخه‌های زیر را می‌توان به عنوان متغیرهای مستقل انتخاب کرده و ولتاژ سایر شاخه‌ها

را برحسب آن‌ها بیان کرد؟

$$\{3, 5, 7\} \quad (4) \quad \{3, 4, 6\} \quad (3) \quad \{2, 5, 6\} \quad (2) \quad \{2, 4, 7\} \quad (1)$$

۷- در مدار شکل زیر کدام روش تحلیل به معادلاتی با کمترین تعداد متغیرهای مجهول می‌انجامد؟



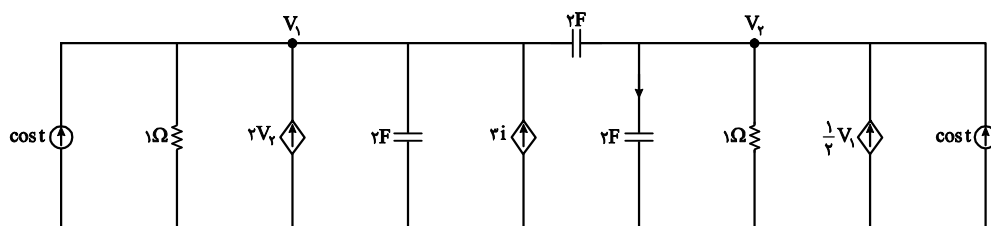
(1) کاتست

(2) گره

(3) مش

(4) معادلات حالت

۸- ولتاژ $V_1(t)$ در مدار شکل زیر برابر کدام است؟



$$(1 - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{4}})u(t) \quad (2)$$

$$(1 - 2t - e^{-\frac{t}{4}})u(t) \quad (1)$$

(4) هیچ جوابی نمی‌توان برای $V_1(t)$ بدست آورد.

(3) جواب‌های بی‌شماری برای $V_1(t)$ وجود دارد.

۹- ماتریس کاتست گرافی به صورت زیر است. دو حلقه اساسی متناظر با درخت این کاتست کدام گزینه

است؟

$$Q = \begin{array}{c|ccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \text{شماره شاخه‌ها} \rightarrow & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

(1) $\{3,4,8\}$ و $\{2,3,7\}$

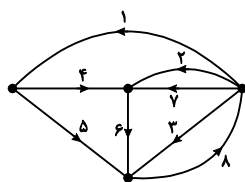
(2) $\{3,4,7\}$ و $\{2,3,8\}$

(3) $\{2,3,7\}$ و $\{1,2,7\}$

(4) $\{3,4,8\}$ و $\{1,2,8\}$

۱۰- در گراف شکل زیر، اگر ماتریس حلقه‌های اساسی متناظر با درختی با شاخه‌های ۱ و ۲ و ۳ را بنویسیم،

این ماتریس به فرم $B = [F, I]$ در می‌آید. زیر ماتریس F به کدام صورت است؟



$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

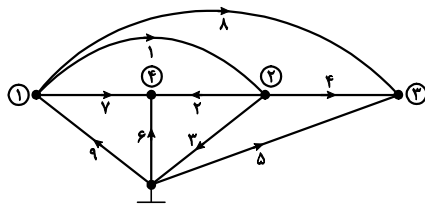
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

پاسخ تشریحی

۱- گزینه ی «۱» صحیح است.

با توجه به ماتریس تلاقی مختصر شده، گراف دارای 9 شاخه و چهار گره و یک گره مبنا است. می توان شکل گراف را به صورت زیر رسم کرد.



در گزینه 1 دیده می شود که شاخه های 1، 2، 5 و 6 تشکیل حلقه نمی دهند و یک درخت ایجاد می کنند. سایر گزینه ها ایجاد حلقه نموده، پس درخت تشکیل نمی دهند.

۲- گزینه ی «۴» صحیح است.

در ماتریس A، ستون ها معرف شاخه ها و سطرها معرف گره ها است، پس در A_i که معرف شاخه درخت ها است، چون شاخه ها باید به همه گره ها سر بزند و حلقه هم ایجاد نکند، تعداد شاخه ها و گره ها برابر بوده و A_i مربعی است. در مورد دترمینان A_i ، حتماً باید یک درایه غیر صفر داشته باشد و گرنه حلقه درست می شود و در این حالت دترمینان آن برابر ± 1 خواهد بود. که باعث می گردد ماتریس A_i ناویژه باشد. پس هر سه گزینه 1 تا 3 صحیح می باشند.

۳- گزینه ی «۳» صحیح است.

کاتست اساسی فقط یک شاخه درخت دارد و مابقی آن لینک ها هستند، در نتیجه:

$\{5, 3, 6\}$, $\{4, 1, 6\}$, $\{2, 1, 3\}$: کاتست های اساسی

حلقه اساسی فقط دارای یک لینک است و مابقی آن شاخه درخت ها هستند، بنابراین:

$\{6, 5, 4\}$, $\{3, 5, 2\}$, $\{1, 2, 4\}$: حلقه های اساسی

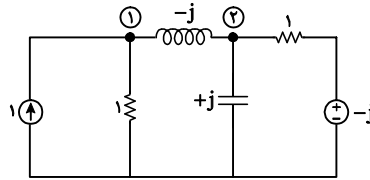
۴- گزینه ی «۱» صحیح است.

با استفاده از قضیه تلگان باید $\sum_{K=1}^4 V_K i_K = 0$ باشد که این حالت فقط در گزینه 1 صادق است.

$$\sum_{K=1}^4 V_K i_K = (1 \times -1) + (-1 \times -1) + (2 \times \frac{-1}{2}) + (3 \times \frac{1}{3}) = 0$$

۵- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

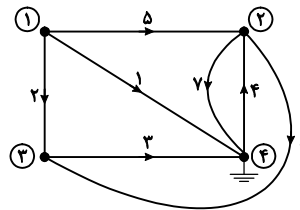
به ازای $\omega=1$ با استفاده از روش نظری داریم:



$$Y(j\omega) = y(j\omega) = \begin{bmatrix} 1-j & j \\ j & 1 \end{bmatrix}$$

۶- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با استفاده از ماتریس تلاقی A، گراف جهت‌دار متناظر را رسم می‌کنیم که در آن گره 4، گره مبنا است.



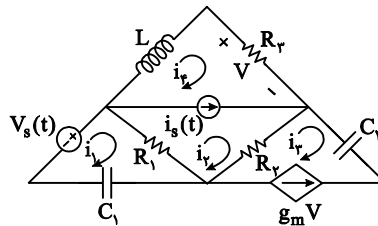
ملاحظه می‌شود که دسته شاخه‌های $\{2, 4, 7\}$ و $\{2, 5, 6\}$ و $\{3, 4, 6\}$ تشکیل حلقه می‌دهند، اما دسته شاخه‌های

$\{3, 5, 7\}$ تشکیل حلقه نمی‌دهد، پس ولتاژ آن‌ها را می‌توان به عنوان متغیرهای ولتاژ مستقل در نظر گرفت.

نکته: ولتاژ شاخه‌هایی را می‌توان به عنوان متغیرهای مستقل در نظر گرفت که تشکیل حلقه ندهند و از طرفی باید به

همه گره‌ها سر بزنند. پس باید شاخه‌هایی را انتخاب کرد که تشکیل درخت می‌دهند.

۷- گزینه‌ی «۳» صحیح است.



مدار دارای 6 گره است. اگر یکی از آن‌ها را به عنوان زمین در نظر بگیریم، یکی از مجهولات کم می‌شود. همچنین بخاطر

وجود منبع ولتاژ، یکی دیگر از مجهولات کم می‌گردد. پس در روش تحلیل گره 4 متغیر مجهول ظاهر می‌شود.

در روش کاتست نیز به دلیل وجود 6 گره، هر درخت آن شامل 5 شاخه خواهد بود.

در نتیجه در این روش به 5 متغیر مجهول می‌رسیم.

با توجه به شکل، مدار دارای 4 مش است که جریان مش سوم $i_3 = -g_m V$ و جریان مش چهارم $i_4 = \frac{V}{R_3}$ است. یعنی

جریان مش‌های سوم و چهارم به هم وابسته هستند.

همچنین $i_2 - i_4 = i_s(t)$ است. پس در روش تحلیل مش دو متغیر مجهول داریم.

مدار دارای دو خازن و یک سلف مستقل است، پس معادلات حالت به 3 متغیر مجهول منجر می‌شود. بنابراین تحلیل مش با 2 متغیر مجهول کمترین تعداد متغیرها را داراست.

۸- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با در نظر گرفتن $D = \frac{d}{dt}$ ، معادلات گره را به روش نظری می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} 4D+1 & -2D \\ -2D & 4D+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) + 2V_2 + 3i \\ u(t) + \frac{1}{2}V_1 \end{bmatrix}$$

از طرفی $i = 2DV_2$. پس با جایگذاری در ماتریس فوق و انتقال ولتاژها به سمت چپ داریم:

$$\begin{bmatrix} 4D+1 & -8D-2 \\ -2D-\frac{1}{2} & 4D+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

دترمینان دستگاه معادلات برابر است با:

$$\Delta(D) = (4D+1)^2 - (8D+2)(2D+\frac{1}{2}) = 0$$

با توجه به این که دترمینان دستگاه معادلات برابر صفر است و طرف دوم معادله ماتریسی غیرصفر است، معادلات ناسازگار هستند. بنابراین هیچ جوابی برای V_1 و V_2 وجود ندارد.

۹- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با توجه به ماتریس کاتست و زیر ماتریس واحد در آن می‌توان گفت شاخه‌های 1، 2، 3، 4 و 5 متناظر با شاخه

درخت‌ها و شاخه‌های 6، 7، 8 و 9 متناظر با لینک‌ها هستند. به عبارت دیگر $Q = [I \mid F]$. پس ماتریس حلقه‌های

اساسی به صورت $B = [-F^t \mid I]$ خواهد بود، یعنی:

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \text{شماره شاخه ها} \rightarrow & & & & & & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

پس حلقه‌های اساسی عبارت‌اند از:

$$\{1,2,6\} , \{3,4,7\} , \{2,3,8\} , \{2,3,5,9\}$$

بنابراین گزینه 2 بیان کننده 2 حلقه از 4 حلقه اساسی فوق است.

۱۰- گزینه ی «۱» صحیح است.

با نوشتن ماتریس حلقه‌های اساسی B متناظر با لینک‌های 4، 5، 6، 7 و 8 داریم:

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

پس گزینه 1 درست است.

فصل دهم: معادلات حالت

یکی از روش‌های بررسی و تحلیل مدارها و سیستم‌های پیچیده (مخصوصاً سیستم‌های غیرخطی)، استفاده از معادلات حالت و روش فضای حالت است.

معادلاتی به فرم $\dot{x} = F(x, \omega, t)$ که در آن $x = (x_1, \dots, x_n)$ بردار حالت و F در حالت کلی تابعی غیرخطی است را معادلات حالت می‌گویند.

بر این اساس می‌توان گفت با دانستن حالت یک شبکه در زمان t_0 و تمام ورودی‌ها که برای زمان t_0 به بعد مشخص می‌شوند، رفتار شبکه برای تمام $t > t_0$ کاملاً تعیین می‌گردد.

10-1 تعیین معادلات حالت برای شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان

می‌خواهیم معادلات حالت را به صورت ماتریسی به فرم زیر نمایش دهیم:

$$\dot{X} = AX + BW$$

X ، بردار حالت است که شامل عناصر مستقل ذخیره‌کننده انرژی می‌شود.

مدارهای الکتریکی خطی اصولاً دارای دو عنصر ذخیره‌کننده انرژی، خازن و سلف هستند و می‌توان گفت هر پاسخ این مدارها ارتباط نزدیکی با ولتاژ خازن V_C و جریان سلف i_L دارند. پس خواهیم داشت:

$$X = \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

و $\dot{X}$ هم مشتق زمانی این بردار است:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \frac{dV_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix}$$

در این رابطه، A ماتریس ضرایب حالت، W بردار منابع (ورودی‌ها) و B ماتریس ضرایب ورودی‌ها است.

بردار خروجی نیز به صورت زیر بیان می‌شود:

$$y = C^T X + DW$$

در حالت ورودی صفر، معادلات حالت به صورت زیر می‌باشد:

$$\dot{X} = AX$$

که پاسخ آن برابر است با:

$$X(t) = X_0 e^{At}$$

e^{At} را ماتریس انتقال حالت و X_0 را بردار حالت اولیه می‌گویند.

بنابراین با داشتن ماتریس ضرائب A و محاسبه ماتریس انتقال e^{At} ، می‌توان از هر حالت اولیه X_0 به بردار حالت در زمان t رسید.

اگر بتوان رابطه‌ای بین متغیرهای حالت (V_C, I_L) پیدا کرد به طوری که در این رابطه پارامتر زمان t وجود نداشته باشد، به رابطه فوق «مسیر حالت» می‌گویند. مثلاً اگر داشته باشیم:

$$\begin{cases} V_C = 3\cos 2t + 1 \\ I_L = 5\sin 2t \end{cases} \rightarrow \left(\frac{V_C - 1}{3}\right)^2 + \left(\frac{I_L}{5}\right)^2 = 1$$

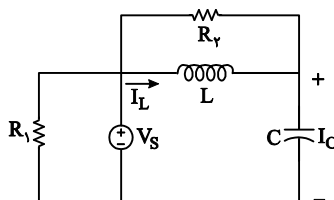
که نشان‌دهنده یک مسیر بیضوی است.

برای به‌دست آوردن معادلات حالت، باید KCL و KVL زدن به معادلاتی برسیم که در آن‌ها فقط مشتق اول یکی از متغیرهای حالت وجود داشته باشد. برای این منظور، برای سلف‌ها در مش‌ها یا حلقه‌ها KVL می‌زنیم تا I_L ظاهر شود و برای خازن‌ها در گره‌ها یا کاتست‌ها KCL می‌زنیم تا V_C پیدا شود.

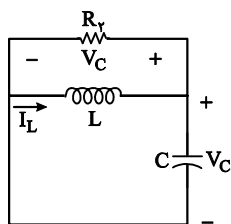
همچنین در مدارهای غیرخطی، از متغیرهای شار سلف (Φ) و بار خازن (q) استفاده می‌کنیم. برای درک بهتر این موضوع، مثال زیر را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱: در مدار شکل زیر، اگر معادلات حالت به فرم $\dot{X} = AX + BW$ باشد که در آن $X = \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix}$ و W ورودی

اسکالر باشد، ماتریس A را به‌دست آورید.



برای به‌دست آوردن ماتریس A ، چون با ماتریس B ارتباطی ندارد، می‌توان ورودی‌ها را صفر کرد ($W=0$) پس داریم:



برای خازن KCL: $-I_L + \frac{V_C}{R_2} + C \frac{dV_C}{dt} = 0 \rightarrow \dot{V}_C = \frac{1}{C} I_L - \frac{1}{R_2 C} V_C$

برای سلف KVL: $V_L + V_C = 0 \rightarrow L \frac{dI_L}{dt} + V_C = 0 \rightarrow \dot{I}_L = -\frac{1}{L} V_C$

و در نتیجه:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_L \\ \dot{V}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_2 C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_C \\ V_C \end{bmatrix}$$

1 4 2 4 3
A

10-2- روش منظم به دست آوردن معادلات حالت

برای به دست آوردن معادلات حالت می توان به روش زیر عمل کرد:

1- انتخاب متغیرهای حالت

در مدارهای خطی، ولتاژ خازن های مستقل (V_C) و جریان سلف های مستقل (I_L) و در مدارهای غیرخطی یا تغییرپذیر با زمان، شار سلف ها (Φ) و بار خازن ها (q) را به عنوان متغیرهای حالت انتخاب می کنیم.

2- انتخاب درخت مناسب

در مدار مربوطه درختی انتخاب می کنیم که شامل همه خازن ها باشد و هیچ یک از سلف ها را شامل نشود.

نکته: اگر مداری شامل حلقه خازنی (و حتی منبع ولتاژ) باشد و یا شامل کاتست سلفی (و حتی منبع جریان) باشد، درخت مناسب شامل حداکثر خازن ها و حداقل سلف ها خواهد بود.

3- معادلات اساسی

برای سلف ها، معادله حلقه اساسی و برای خازن ها، معادله کاتست اساسی را می نویسیم.

4- معادلات اضافی

اگر در معادلات اساسی، متغیرهای غیرحالت ظاهر شوند، با نوشتن معادلات اضافی، آن ها را حذف می کنیم. برای این

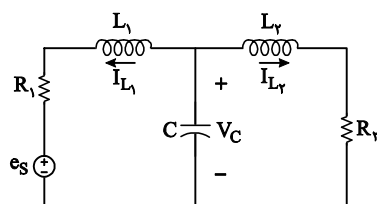
منظور، برای لینک‌های مقاومتی، معادله حلقه اساسی و برای شاخه‌های مقاومتی، معادله کاتست اساسی می‌نویسیم. این معادلات جبری هستند.

نکته: در یک مدار، هر سیگنالی به صورت یک ترکیب خطی از متغیرهای حالت و ورودی‌ها قابل بیان است.

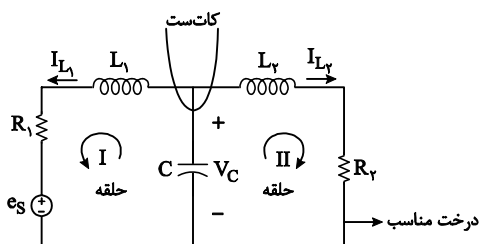
بنابراین با KCL و KVL زدن، می‌توان هر متغیر غیر حالتی را به متغیرهای حالت و ورودی‌ها تبدیل نمود.

برای درک بهتر این روش به بررسی و حل چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۲: در مدار شکل زیر، معادلات حالت را به‌دست آورید.



متغیرهای حالت را V_C ، I_{L1} و I_{L2} در نظر می‌گیریم. درخت مناسب به صورت زیر است:



و با نوشتن KCL در کاتست اساسی و KVL در حلقه‌های اساسی داریم:

$$\text{KCL: } I_{L1} + I_{L2} + I_C = 0 \rightarrow I_{L1} + I_{L2} + C \frac{dV_C}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dV_C}{dt} = -\frac{1}{C} I_{L1} - \frac{1}{C} I_{L2}$$

$$\text{KVL(I): } e_s + r_1 I_{L1} + V_{L1} - V_C = 0 \rightarrow e_s + r_1 I_{L1} + L_1 \frac{dI_{L1}}{dt} - V_C = 0 \rightarrow \frac{dI_{L1}}{dt} = \frac{1}{L_1} V_C - \frac{r_1}{L_1} I_{L1} - \frac{1}{L_1} e_s$$

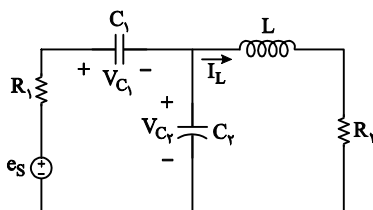
$$\text{KVL(II): } -V_C + V_{L2} + r_2 I_{L2} = 0 \rightarrow -V_C + L_2 \frac{dI_{L2}}{dt} + r_2 I_{L2} = 0 \rightarrow \frac{dI_{L2}}{dt} = \frac{1}{L_2} V_C - \frac{r_2}{L_2} I_{L2}$$

و در نتیجه:

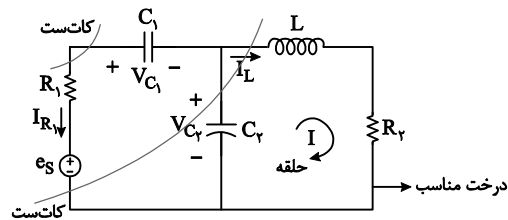
$$\begin{bmatrix} \dot{V}_C \\ I_{L1} \\ I_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L_1} & -\frac{r_1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{L_2} & 0 & -\frac{r_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C \\ I_{L1} \\ I_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot \\ -\frac{1}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix} e_s$$

A B

مثال ۳: در مدار شکل زیر، معادلات حالت را به فرم ماتریسی بیان کنید.



با توجه به متغیرهای حالت V_{C1} ، V_{C2} و I_L درخت مناسب به صورت زیر است:



با KCL زدن در کاتست‌ها و KVL در حلقه داریم:

$$KCL(1): I_{C1} + I_{R1} = 0 \rightarrow C_1 \dot{V}_{C1} + \frac{V_{C1} + V_{C2} - e_s}{R_1} = 0 \rightarrow$$

$$\dot{V}_{C1} = -\frac{1}{R_1 C_1} V_{C1} - \frac{1}{R_1 C_1} V_{C2} + \frac{1}{R_1 C_1} e_s$$

$$KCL(2): I_{C2} + I_L + I_{R1} = 0 \rightarrow C_2 \dot{V}_{C2} + I_L + \frac{V_{C1} + V_{C2} - e_s}{R_1} = 0$$

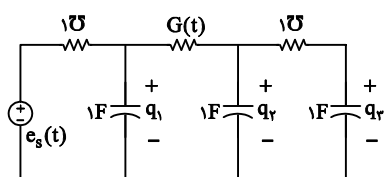
$$\rightarrow \dot{V}_{C2} = -\frac{1}{R_1 C_2} V_{C1} - \frac{1}{R_1 C_2} V_{C2} - \frac{1}{C_2} I_L + \frac{1}{R_1 C_2} e_s$$

$$KVL: V_L + r_2 I_L - V_{C2} = 0 \rightarrow \dot{I}_L = \frac{1}{L} V_{C2} - \frac{r_2}{L} I_L$$

و در نتیجه داریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{C1} \\ \dot{V}_{C2} \\ \dot{I}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1 C_1} & \frac{-1}{R_1 C_1} & 0 \\ \frac{-1}{R_1 C_2} & \frac{-1}{R_1 C_2} & \frac{-1}{C_2} \\ 0 & \frac{1}{L} & \frac{-R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \\ I_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1 C_1} \\ \frac{1}{r_1 C_2} \\ 0 \end{bmatrix} e_s$$

مثال ۴: در شبکه خطی و تغییرپذیر با زمان شکل زیر، اگر بردار حالت $X = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ فرض شود، ماتریس A مربوط به معادلات حالت را به دست آورید. (مقادیر مقاومت‌ها بر حسب مِهو است.)



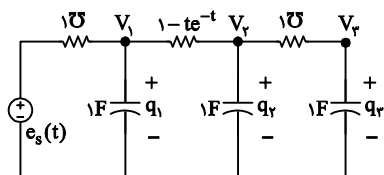
$$G(t) = 1 - te^{-t}$$

در شبکه‌های غیرخطی یا تغییرپذیر با زمان، از ϕ و q به عنوان متغیرهای حالت استفاده می‌شود و در این صورت معادلات اساسی به فرم زیر است:

$$V_L = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}, \quad I_L = \frac{\phi}{L}$$

$$I_C = \frac{dq}{dt} = \dot{q}, \quad V_C = \frac{q}{C}$$

با انتخاب درخت مناسب داریم:



$$\begin{cases} V_1 = q_1 \\ V_2 = q_2 \\ V_3 = q_3 \end{cases}$$

و با KCL زدن در کاتست‌های خازنی داریم:

$$\text{KCL(1): } \dot{q}_1 + 1(q_1 - e_s) + (1 - te^{-t})(q_1 - q_2) = 0$$

$$\text{KCL(2): } \dot{q}_2 + (1 - te^{-t})(q_2 - q_1) + 1(q_2 - q_3) = 0$$

$$\text{KCL(3): } \dot{q}_3 + 1(q_3 - q_2) = 0$$

با مرتب کردن این معادلات خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + te^{-t} & 1 - te^{-t} & 0 \\ 1 - te^{-t} & -2 + te^{-t} & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_s$$

نکته: در نوشتن معادلات حالت، اگر برای خازن‌ها KCL و برای سلف‌ها KVL بنویسیم، دو حالت رخ می‌دهد:

1- معادله به‌دست آمده به صورت «یک معادله یک مشتق» باشد. این رابطه بیانگر یکی از سطرهای معادلات حالت است.

2- معادله به‌دست آمده شامل بیش از یک مشتق باشد. در این حالت نمی‌توان از مطالب بیان شده در نوشتن معادلات

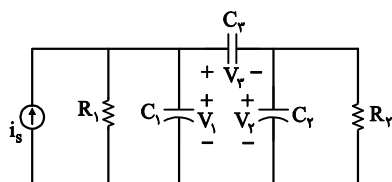
حالت استفاده کرد. بنابراین می‌توان به روش زیر عمل نمود:

معادله به‌دست آمده را مرتب کرده به طوری که مشتق‌ها در سمت چپ تساوی و بقیه عبارات در سمت راست باشند.

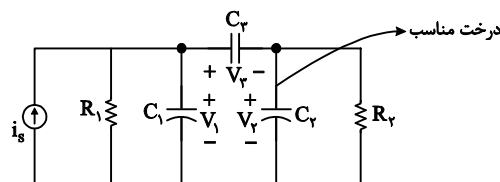
آنگاه سعی می‌کنیم این رابطه را به صورت ترکیب خطی از سطرهای معادله $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{W}$ بنویسیم و با استفاده از رد گزینه‌ها (در مسائل تستی)، جواب صحیح را پیدا کنیم.

به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۵: در مدار شکل زیر، معادلات حالت را به‌دست آورید.



در این حالت درخت مناسب شامل خازن‌های C_1 و C_2 است و C_3 جزء آن نیست زیرا سه خازن تشکیل حلقه خازنی می‌دهند. پس با KCL زدن در گره‌های 1 و 2 داریم:



$$V_3 = V_1 - V_2$$

$$\text{KCL(1): } C_3 \dot{V}_1 - C_3 \dot{V}_2 + C_1 \dot{V}_1 + \frac{1}{R_1} V_1 - i_s = 0$$

$$\text{KCL(2): } C_3 \dot{V}_2 - C_3 \dot{V}_1 + C_2 \dot{V}_2 + \frac{1}{R_2} V_2 = 0$$

اگر فرض کنیم معادلات حالت به فرم زیر باشند:

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} i_s$$

با جمع کردن در رابطه KCL فوق با یکدیگر داریم:

$$C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2 = -\frac{1}{R_1} V_1 - \frac{1}{R_2} V_2 + i_s$$

اگر این رابطه را به صورت ترکیب خطی از سطرهای معادلات حالت بنویسیم داریم:

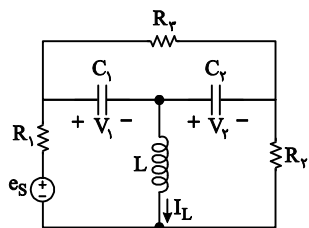
$$C_1 \times (\text{سطر اول}) + C_2 \times (\text{سطر دوم}) = -\frac{1}{R_1} V_1 - \frac{1}{R_2} V_2 + i_s$$

که می‌توان گفت:

$$\begin{cases} C_1 a + C_2 c = \frac{-1}{R_1} = \text{ضریب } V_1 \\ C_1 b + C_2 d = \frac{-1}{R_2} = \text{ضریب } V_2 \\ C_1 e + C_2 f = 1 = \text{ضریب } i_s \end{cases}$$

و گزینه‌ای درست خواهد بود که هر یک از سه رابطه فوق در آن صدق کند.

مثال ۶: در مدار شکل زیر، معادلات حالت را به دست آورید.



با نوشتن KCL در گره 1 داریم:

$$C_1 \Psi_1 - C_2 \Psi_2 = I_L$$

$$\rightarrow C_1 \times (\text{سطر اول}) - C_2 \times (\text{سطر دوم}) = 0V_1 + 0V_2 + 1I_L + 0e_s$$

و با توجه به معادلات حالت:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{I}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} e_s$$

$$\begin{cases} C_1 a - C_2 d = 0 \rightarrow & \text{ضریب } V_1 \\ C_1 b - C_2 e = 0 \rightarrow & \text{ضریب } V_2 \\ C_1 c - C_2 f = 1 \rightarrow & \text{ضریب } I_L \\ C_1 x - C_2 z = 0 \rightarrow & \text{ضریب } e_s \end{cases}$$

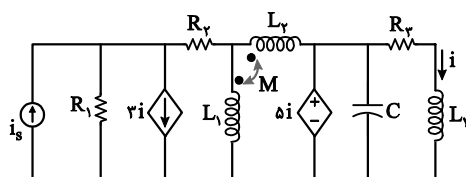
بنابراین گزینه‌ای درست است که هر یک از چهار رابطه فوق در آن صدق کند.

نکته: در یک شبکه، تعداد متغیرهای حالت برابر است با:

$$N = N_1 + N_2 - (n + n_1 + n_2)$$

که در این رابطه، N_1 تعداد خازن‌های شبکه، N_2 تعداد سلف‌های شبکه، n تعداد رابطه‌های خطی بین متغیرهای مستقل، n_1 تعداد حلقه‌های مستقل خازنی و n_2 تعداد کات‌ست‌های مستقل سلفی است. منظور از متغیرهای مستقل، همان متغیرهای حالت می‌باشد.

مثال ۷: در مدار شکل زیر، برای نوشتن معادلات حالت، چه متغیر حالت می‌توان انتخاب کرد؟



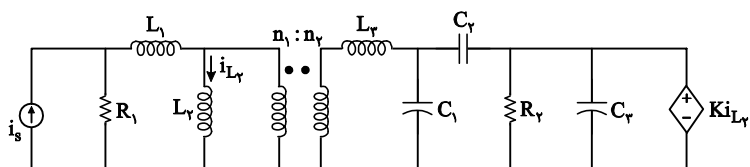
در این مدار داریم:

$$N_1 = 1, \quad N_2 = 3 \quad (\text{سلف‌های تزویج در حکم سه سلف‌اند}), \quad n = 1, \quad n_1 = 0, \quad n_2 = 0$$

با توجه به این که ولتاژ خازن C مساوی ولتاژ منبع وابسته $5i$ است، یک رابطه خطی بین V_C و i_{L3} وجود دارد بنابراین $n = 1$ است. و در نتیجه:

$$N = 1 + 3 - (1 + 0 + 0) = 3$$

مثال ۸: تعداد متغیرهای حالت مدار شکل زیر را پیدا کنید.



$$N_1 = 3 \text{ و } N_2 = 3 \text{ و } n = 1 \text{ و } n_1 = 1 \text{ و } n_2 = 1$$

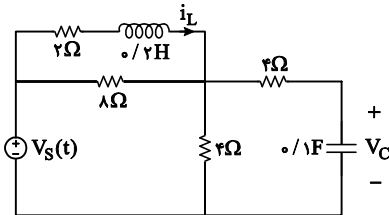
با توجه به مساوی بودن ولتاژ خازن C_3 با منبع ولتاژ ki_{L2} ، یک رابطه خطی بین V_C و i_{L2} وجود دارد. بنابراین:

$$N = 3 + 3 - (1 + 1 + 1) = 3$$

تست‌های طبقه‌بندی شده مبحث معادلات حالت

۱- اگر بردار حالت مدار شکل زیر به صورت $X = \begin{bmatrix} i_L \\ V_C \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A در معادلات حالت $\dot{X} = AX$ به

کدام صورت خواهد بود؟



$$\begin{bmatrix} -18 & 4 \\ -2 & -1/5 \end{bmatrix} \quad (1)$$

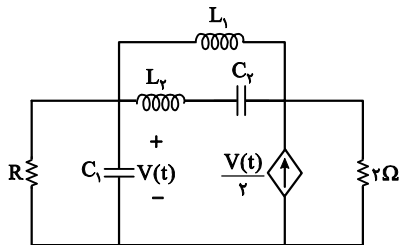
$$\begin{bmatrix} -2 & -1/5 \\ -18 & 4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1/5 \\ -18 & -2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} -18 & -2 \\ 4 & -1/5 \end{bmatrix} \quad (4)$$

۲- در مدار شکل زیر اگر $[V_{C1}, V_{C2}, i_{L1}, i_{L2}]$ بردار شرایط اولیه باشد، کدامیک از مقادیر داده شده

برای این بردار، یک بردار ویژه ماتریس حالت خواهد بود؟



$$[2 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (1)$$

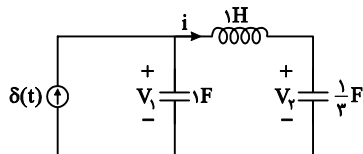
$$[0 \ 2 \ 0 \ 0] \quad (2)$$

$$[0 \ 0 \ 2 \ 0] \quad (3)$$

$$[0 \ 2 \ 2 \ -2] \quad (4)$$

۳- در مدار شکل زیر شرایط اولیه همگی صفر هستند. اگر $V = V_1 - V_2$ باشد، معادله مسیر حالت در صفحه

$V-i$ عبارت است از:



$$V^2 + 9i^2 = 1 \quad (1)$$

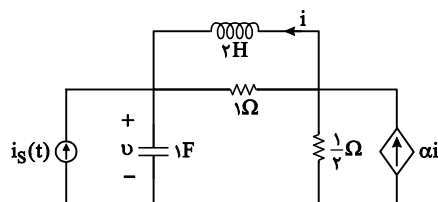
$$4V^2 + i^2 = 1 \quad (2)$$

$$V^2 + 4i^2 = 1 \quad (3)$$

$$9V^2 + i^2 = 1 \quad (4)$$

۴- اگر معادلات حالت مدار شکل زیر برحسب متغیرهای i و V به صورت $\dot{X} = AX + BW$ نوشته شود، بردار

B کدام است؟ $X = \begin{bmatrix} i \\ V \end{bmatrix}$



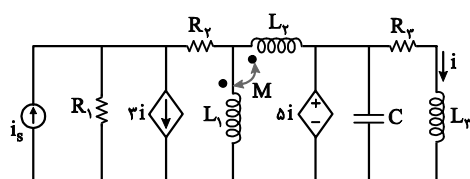
$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

۵- برای نوشتن معادلات حالت در مدار شکل زیر، چند متغیر حالت می‌توان انتخاب کرد؟



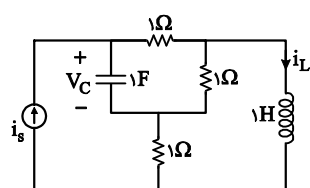
2 (1)

3 (2)

4 (3)

5 (4)

۶- در مدار شکل زیر بردار حالت $X = \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}$ است. هرگاه معادلات حالت به صورت $\frac{d}{dt}X = AX + BW$ نمایش داده شود، ماتریس A کدام است؟



$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -0/5 \\ 0/5 & 1/5 \end{bmatrix} \quad (1)$$

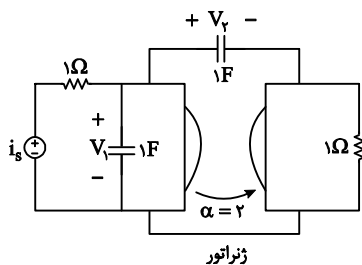
$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} -0/5 & -0/5 \\ 0/5 & -1/5 \end{bmatrix} \quad (3)$$



۷- در شکل زیر ضریب چرخش ژیراتور $\alpha = 2$ است. در صورتی که متغیرهای حالت مدار ولتاژ خازن‌ها

باشند، معادلات حالت مدار کدام گزینه است؟



$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & -1 \\ -2/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} V_s \quad (1)$$

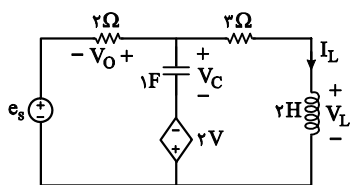
$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0/5 \\ 1/5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} V_s \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2/5 \\ -1 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} V_s \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 1 \\ 1/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} V_s \quad (4)$$

۸- در مدار شکل زیر، V_C و I_L متغیرهای حالت هستند. ولتاژ خروجی مطلوب V_O بر حسب متغیرهای

حالت به کدام صورت نوشته می‌شود؟



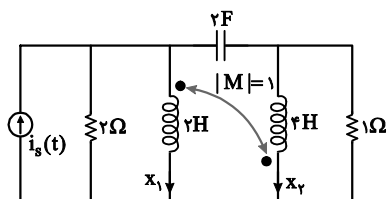
$$I_L + \frac{V_C}{6} - \frac{e_s}{2} \quad (1)$$

$$6I_L - V_C - e_s \quad (2)$$

$$3I_L - \frac{V_C}{2} - \frac{e_s}{2} \quad (3)$$

$$2I_L + \frac{V_C}{3} - e_s \quad (4)$$

۹- در مدار شکل زیر، معادله حالتی که $\frac{dx_3}{dt}$ را بر حسب بقیه متغیرهای حالت بیان می‌کند کدام است؟



$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{-1}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 - \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{3}i_s \quad (1)$$

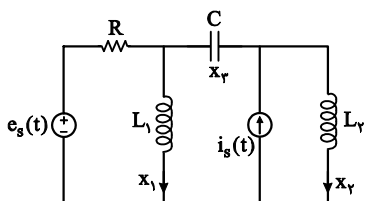
$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{3}i_s \quad (2)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{-1}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 - \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{3}i_s \quad (3)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{-1}{3}x_1 - \frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{3}i_s \quad (4)$$

۱۰- در مدار شکل زیر، بردار $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$ بردار حالت و $W = \begin{bmatrix} i_s \\ e_s \end{bmatrix}$ بردار ورودی است. اگر معادلات حالت

مدار به صورت $\dot{X} = AX + BW$ نوشته شود و ماتریس A به صورت زیر باشد:



$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس B کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

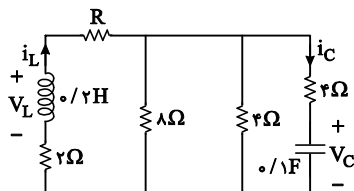
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

پاسخ تشریحی

۱- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

برای به‌دست آوردن فقط ماتریس A می‌توان ورودی‌های مستقل را صفر کرد، پس داریم:



با KVL در حلقه بیرونی داریم:

$$\text{KVL: } 2i_L + V_L + 4i_C + V_C = 0 \rightarrow 2i_L + 0/2 + 0/4 + V_C = 0$$

$$\rightarrow 0/2 + 0/4 = -2i_L - V_C$$

اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد می‌توان گفت:

$$0/2a + 0/4c = -2 \rightarrow \text{ضریب } i_L$$

$$0/2b + 0/4d = -1 \rightarrow \text{ضریب } V_C$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2a + 4c = -20 \\ 2b + 4d = -10 \end{cases}$$

که فقط ماتریس $A = \begin{bmatrix} -18 & -2 \\ 4 & -1/5 \end{bmatrix}$ در این معادلات صدق می‌کند.

۲- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

اگر بردار شرایط اولیه در امتداد بردار ویژه ماتریس A قرار گیرد، تنها فرکانس طبیعی متناظر با آن بردار ویژه در پاسخ ظاهر می‌شود.

با توجه به گزینه ۱، $V_{C1}(0) = 2$ و بقیه شرایط اولیه صفر است. در این صورت جریان یک آمپری از مقاومت ۲ اهمی

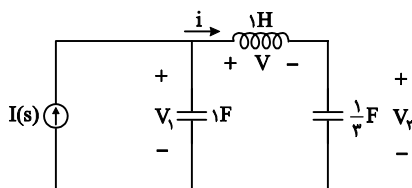
می‌گذرد و ولتاژ $V(t)$ در مقاومت R اهمی تخلیه می‌شود و پاسخی به صورت $V(t) = 2e^{-\frac{t}{RC_1}}$ داریم و بقیه متغیرهای

حالت صفر باقی می‌مانند. بنابراین بردار $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ می‌تواند بردار ویژه باشد، پس گزینه ۱ درست است.

سایر گزینه‌ها با دلایلی مشابه، نقص می‌شوند و درست نمی‌باشند.

۳- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

درختی متشکل از دو خازن $1F$ و $\frac{1}{3}F$ در نظر می‌گیریم:



معادلات کاتست اساسی و حلقه اساسی را می‌نویسیم:

$$\frac{dV_1}{dt} + i = i_s(t) \quad \text{و} \quad \frac{1}{3} \frac{dV_2}{dt} - i = 0$$

$$\frac{di}{dt} + V_2 - V_1 = 0 \quad \text{معادله حلقه اساسی}$$

با فرض $i_s(t) = \delta(t)$ در حوزه لاپلاس داریم:

$$\begin{cases} sV_1(S) + I(S) = 1 \\ \frac{1}{3} sV_2(S) - I(S) = 0 \\ sI(S) + V_2(S) - V_1(S) = 0 \end{cases}$$

با محاسبه‌ی $V_1(S)$ و $V_2(S)$ از معادله اول و دوم و جایگزینی آن‌ها در معادله سوم داریم:

$$sI(S) + \frac{3}{s} I(S) - \frac{1}{s} (1 - I(S)) = 0 \rightarrow (s^2 + 4)I(S) = 1$$

$$\rightarrow I(S) = \frac{1}{s^2 + 4} \xrightarrow{L^{-1}} i(t) = \frac{1}{2} \sin 2t u(t)$$

بنابراین:

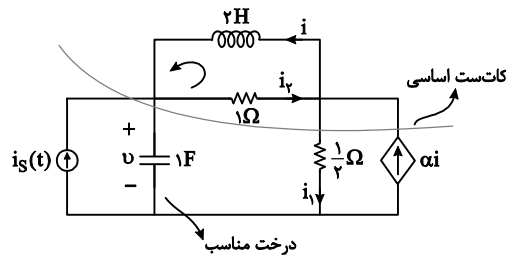
$$V(S) = V_1(S) - V_2(S) = sI(S) = \frac{s}{s^2 + 4} \xrightarrow{L^{-1}} V(t) = \cos 2t u(t)$$

و در نتیجه:

$$(2i(t))^2 + (V(t))^2 = 1 \rightarrow V^2 + 4i^2 = 1$$

۴- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

روش اول: درختی مناسب در نظر می‌گیریم و برای شاخه‌خازنی معادله کاتست اساسی و برای شاخه سلفی معادله حلقه اساسی را می‌نویسیم:



$$\text{KCL در کاتست اساسی: } \frac{dV}{dt} + i_1 - \alpha i = i_S(t)$$

$$\text{KVL در حلقه اساسی: } 2 \frac{di}{dt} + i_2 = 0$$

با اعمال KVL و KVL در مدار داریم:

$$\begin{aligned} \text{KCL: } i_2 - i_1 - i + \alpha i &= 0 \\ \text{KVL: } \frac{1}{2} i_1 - V + i_2 &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} i_2 - i_1 = (1 - \alpha)i \\ i_2 + \frac{1}{2} i_1 = V \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_1 = \frac{2}{3} V + \frac{2}{3} (\alpha - 1)i \\ i_2 = \frac{2}{3} V + \frac{1}{3} (1 - \alpha)i \end{cases}$$

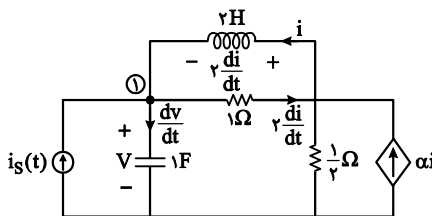
با جایگذاری روابط به‌دست آمده برای i_1 و i_2 در معادلات اساسی داریم:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} + \frac{2}{3} V + \frac{2}{3} (\alpha - 1)i - \alpha i = i_S(t) \\ 2 \frac{di}{dt} + \frac{2}{3} V + \frac{1}{3} (1 - \alpha)i = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{\alpha + 2}{3} i - \frac{2}{3} V + i_S(t) \\ \frac{di}{dt} = \frac{\alpha - 1}{6} i - \frac{1}{3} V \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{dV}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha - 1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{\alpha + 2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} i_S(t)$$

A B

روش دوم: با ساده‌سازی مدار توسط اعمال KCL و KVL می‌توان گفت:



$$\text{KCL}(1): 2 \frac{di}{dt} - \frac{dV}{dt} + i + i_s(t) = 0 \rightarrow 2 \frac{di}{dt} - \frac{dV}{dt} = -i - i_s(t)$$

اگر ماتریس B را به صورت $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ در نظر بگیریم، باید داشته باشیم:

$$B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \rightarrow 2a - b = -1$$

ضریب i_s ضریب $\frac{dV}{dt}$ ضریب $\frac{di}{dt}$

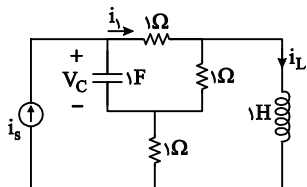
که این معادله تنها در گزینه 3 صدق می‌کند.

۵- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

متغیرهای حالت یک مدار جریان سلف‌ها و ولتاژ خازن‌هایی است که از هم مستقل باشند. در این مدار دو جریان سلف و یک ولتاژ خازن داریم ولی ولتاژ دو سر خازن برابر $5i$ یا پنج برابر جریان سلف L_3 است. پس ولتاژ خازن C و جریان سلف L_3 مستقل از یکدیگر نمی‌باشند و فقط یکی از آن‌ها را می‌توان جزء متغیرهای حالت در نظر گرفت. بنابراین سه متغیر حالت خواهیم داشت.

۶- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با انتخاب درخت مناسب مطابق شکل و نوشتن KCL برای کاتست خازنی و KVL زدن در حلقه اساسی سلف داریم:



$$\text{معادله کاتست اساسی: } \frac{dV_C}{dt} + i_1 = i_s$$

$$\text{معادله حلقه اساسی: } \frac{di_L}{dt} + 1(i_L - i_s) - V_C + i_1 = 0$$

برای حذف متغیر غیر حالت i_1 ، در مش وسطی KVL می‌زنیم:

$$\text{KVL: } i_1 + 1(i_1 - i_L) - V_C = 0 \rightarrow i_1 = \frac{V_C + i_L}{2}$$

با جایگذاری رابطه به‌دست آمده برای i_1 در دو معادله اول داریم:

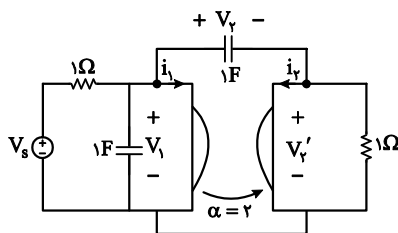
$$\begin{aligned} \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{2}V_C + \frac{1}{2}i_L &= i_s \\ \frac{di_L}{dt} + i_L - i_s - V_C + \frac{1}{2}V_C + \frac{1}{2}i_L &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} \frac{dV_C}{dt} = -\frac{1}{2}V_C - \frac{1}{2}i_L + i_s \\ \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{2}V_C - \frac{3}{2}i_L + i_s \end{cases}$$

و به فرم ماتریسی خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \frac{dV_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0/5 & -0/5 \\ 0/5 & -1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} i_s$$

۷- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

معادلات ژیراتور به صورت زیر است:



$$\begin{cases} V_1 = \alpha i_2 = 2i_2 \\ V_2' = -\alpha i_1 = -2i_1 \end{cases}$$

با KVL زدن در مش وسطی داریم:

$$\text{KVL: } V_2' + V_2 - V_1 = 0 \rightarrow -2i_1 + V_2 - V_1 = 0 \rightarrow i_1 = -\frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{2}V_2$$

از طرف با KCL زدن در گره‌های 1 و 2 خواهیم داشت:

$$\text{KCL(2): } \frac{V_2'}{1} + i_2 - \frac{dV_2}{dt} = 0 \rightarrow (V_1 - V_2) + \frac{V_1}{2} - \frac{dV_2}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dV_2}{dt} = 1/5V_1 - V_2$$

$$\text{KCL(1): } \frac{V_1 - V_s}{1} + i_1 + \frac{dV_1}{dt} + \frac{dV_2}{dt} = 0 \rightarrow V_1 - V_s + \frac{1}{2}V_2 - \frac{1}{2}V_1 + \frac{dV_1}{dt} + 1/5V_1 - V_2 = 0$$

$$\rightarrow \frac{dV_1}{dt} = -2V_1 + 0/5V_2 + V_s$$

بنابراین:

$$\begin{cases} \frac{dV_1}{dt} = -2V_1 + 0/5V_2 + V_S \\ \frac{dV_2}{dt} = 1/5V_1 - V_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0/5 \\ 1/5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} V_S$$

۸- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با KVL زدن در مش‌های سمت چپ و راست خواهیم داشت:

$$\text{KVL: } V_o = V_C - 2V_L - e_S \text{ مش سمت چپ}$$

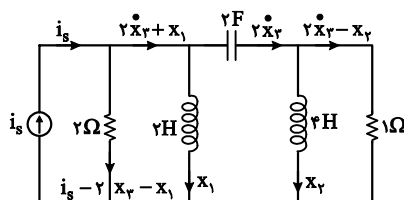
$$\text{KVL: } 2V_L - V_C + 3I_L + V_L = 0 \rightarrow V_L = \frac{V_C}{3} - I_L$$

با جایگذاری دو رابطه به‌دست آمده در یکدیگر داریم:

$$V_o = V_C - 2\left(\frac{V_C}{3} - I_L\right) - e_S \rightarrow V_o = 2I_L + \frac{V_C}{3} - e_S$$

۹- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با KCL زدن روی مدار داریم:



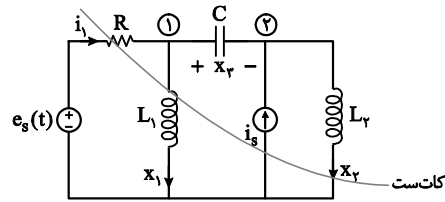
با توجه به گزینه‌ها می‌توان گفت در معادله $\frac{dx_3}{dt}$ ، مشتقات دیگر وجود ندارد، پس فقط باید از جریان سلف‌ها و ولتاژ

خازن استفاده کرد. بنابراین با KVL زدن در حلقه شامل مقاومت‌های ۲ اهمی و یک اهمی و خازن داریم:

$$\text{KVL: } x_3 + 1(2x_3 - x_2) - 2(i_s - 2x_3 - x_1) = 0 \rightarrow x_3 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 - \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{3}i_s$$

۱۰- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

معادلات حالت را به‌دست می‌آوریم:



KCL : $i_1 = x_1 + x_2 - i_s$ در کاتست

KVL : $e_s = Ri_1 + x_3 + L_2 \dot{x}_2 = R_1 x_1 + R_1 x_2 - R_1 i_s + x_3 + L_2 \dot{x}_2$ در حلقه بیرونی

KVL : $e_s = Ri_1 + L_1 \dot{x}_1 = R x_1 + R x_2 - R i_s + L_1 \dot{x}_1$ در مش سمت چپ

KCL : $C \dot{x}_2 = x_2 - i_s$ در گره d

با مرتب کردن معادلات فوق به فرم ماتریسی داریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R}{L_1} & -\frac{R}{L_1} & 0 \\ -\frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{R}{L_1} & \frac{1}{L_1} \\ \frac{R}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} i_s \\ e_s \end{bmatrix}$$

با مقایسه ماتریس A این معادلات با ماتریس A داده شده در صورت سؤال داریم:

$$\frac{R}{L_1} = 1, \quad \frac{R}{L_2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{C} = 1, \quad L_2 = 2, \quad L_1 = 1$$

بنابراین ماتریس B برابر است با:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{R}{L_1} & \frac{1}{L_1} \\ \frac{R}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

فصل یازدهم: تبدیل لاپلاس و کاربرد آن در تحلیل مدار

در تحلیل مدارهای الکتریکی خطی با ورودی‌های متفاوت که دارای عناصر ذخیره کننده انرژی (سلف و خازن) می‌باشند، در نهایت به یک معادله دیفرانسیل مرتبه n می‌رسیم. برای حل این معادله دیفرانسیل روش‌های متعددی وجود دارد که بعضی در حوزه زمان و بعضی در حوزه فرکانس مطرح می‌شوند. گاهی مواقع حل این معادله در حوزه زمان بسیار دشوار ولی در حوزه فرکانس راحت و ساده است و (بالعکس)، روشی که به وسیله آن می‌توان مدار را از حوزه زمان (t) به حوزه فرکانس (s) منتقل نمود، تبدیل لاپلاس است.

1-11- تبدیل لاپلاس

برای هر تابع در حوزه زمان $f(t)$ ، یک تابع متناظر در حوزه فرکانس $F(s)$ تعریف می‌شود و بالعکس. به عبارت دیگر، توسط تبدیل لاپلاس از حوزه زمان به حوزه فرکانس منتقل می‌شویم. مهم‌ترین مزیت تبدیل لاپلاس، سادگی تحلیل شبکه‌ها و معرفی تابع شبکه است که ارتباط نزدیکی با پاسخ ضربه در حوزه زمان دارد. همچنین تبدیل لاپلاس یک معادله دیفرانسیل را به یک معادله جبری تبدیل می‌نماید.

تبدیل لاپلاس تابعی مانند $f(t)$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

۱-۱-۱۱- خواص و قضایای تبدیل لاپلاس

۱- یکتایی

به ازای هر تابع $f(t)$ ، یک و فقط یک تابع $F(s)$ به عنوان تبدیل لاپلاس آن وجود دارد و بالعکس.

۲- خطی بودن

یعنی:

$$L\{K_1 f_1(t) + K_2 f_2(t)\} = K_1 F_1(s) + K_2 F_2(s)$$

۳- انتقال در حوزه فرکانس (غیر هم علامت)

$$e^{-at} f(t) \xrightarrow[L^{-1}]{L} F(s+a)$$

۴- انتقال در حوزه زمان (هم علامت)

$$f(t-a)u(t-a) \xLeftrightarrow[L^{-1}] e^{-as}F(s)$$

۵- مشتق گیری در حوزه زمان

در این حالت داریم:

$$f'(t) \xLeftrightarrow[L^{-1}] sF(s) - f(0)$$

$$f''(t) \xLeftrightarrow[L^{-1}] s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

⋮

$$f^{(n)}(t) \xLeftrightarrow[L^{-1}] s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

۶- انتگرال گیری در حوزه زمان

$$\int_0^t f(t) dt \xLeftrightarrow[L^{-1}] \frac{1}{s} F(s)$$

۷- مشتق گیری در حوزه فرکانس

$$-tf(t) \xLeftrightarrow[L^{-1}] F'(s)$$

$$t^2 f(t) \xLeftrightarrow[L^{-1}] F''(s)$$

⋮

$$(-1)^n t^n f(t) \xLeftrightarrow[L^{-1}] F^{(n)}(s)$$

۸- انتگرال گیری در حوزه فرکانس

$$\frac{f(t)}{t} \xLeftrightarrow[L^{-1}] \int_0^s F(s) ds$$

۹- تغییر مقیاس زمانی

$$f(at) \xLeftrightarrow[L^{-1}] \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad a>0$$

۱۰- قضیه مقدار اولیه

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

۱۱- قضیه مقدار نهایی

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

۱۲- تبدیل لاپلاس توابع نیمه متناوب

اگر $f(t)$ تابع نیمه متناوب (چون برای $t \geq 0$ تعریف شده است) با دوره تناوب T و ایجاد شده از تکرار $f_1(t)$ باشد، داریم:

$$f(t) \xleftrightarrow[L^{-1}]{L} \frac{1}{1-e^{-Ts}} F_1(s)$$

که در آن:

$$F_1(s) = L\{f_1(t)\}$$

به عبارت دیگر، وجود $\frac{1}{1-e^{-Ts}}$ در حوزه فرکانس، بیانگر تناوب در حوزه زمان با دوره تناوب T است.

۱۳- تبدیل لاپلاس کانولوشن

$$f(t) * g(t) \xleftrightarrow[L^{-1}]{L} F(s).G(s)$$

کانولوشن

۱۴- تبدیل لاپلاس ضرب

$$f(t) \cdot g(t) \xleftrightarrow[L^{-1}]{L} F(s) * G(s)$$

ضرب

۱۱-۱-۲- تبدیل لاپلاس توابع مهم

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$r(t) = tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^n}{n!} u(t)$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$e^{-at} \frac{t^n}{n!} u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$
$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$\sin \omega t \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t \cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sinh \omega t \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cosh \omega t \cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
$\delta^{(n)}(t)$	s^n
$e^{-at} \sin \omega t \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t \cdot u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}

۱۱-۱-۳- عکس تبدیل لاپلاس

هنگامی که برای تحلیل مداری از حوزه زمان به حوزه فرکانس می‌رویم و مدار را تحلیل می‌کنیم، برای بیان پاسخ زمانی،

باید از حوزه فرکانس به زمان برگردیم. به این عمل، عکس تبدیل لاپلاس می‌گویند که یا با قضایا و خواص گفته شده،

L^{-1} می‌گیریم و یا با روش «تجزیه به کسره‌های جزئی» به عکس تبدیل لاپلاس می‌رسیم.

روش تجزیه به کسره‌های جزئی و حالات مختلف آن را در قالب چند مثال توضیح می‌دهیم.

مثال ۱: عکس تبدیل لاپلاس تابع زیر را به دست آورید.

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 3)}$$

در این تابع، ریشه‌های مخرج به صورت «قطب‌های ساده» است. پس آن را به سه کسر جزئی تقسیم می‌کنیم:

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 3)} = \frac{1}{s(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+3)}$$

برای یافتن ضرایب A ، B و C داریم:

$$A = sF(s)|_{s=0} = \frac{1}{(s+1)(s+3)}|_{s=0} = \frac{1}{3}$$

$$B = (s+1)F(s)|_{s=-1} = \frac{1}{s(s+3)}|_{s=-1} = -\frac{1}{2}$$

$$C = (s+3)F(s)|_{s=-3} = \frac{1}{s(s+1)}|_{s=-3} = \frac{1}{6}$$

و در نتیجه:

$$F(s) = \frac{1}{3} + \frac{-\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{\frac{1}{6}}{s+3} \xrightarrow{L^{-1}} f(t) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \right) u(t)$$

مثال ۲: عکس تبدیل لاپلاس تابع زیر را پیدا کنید.

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)}$$

در این تابع، مخرج دارای ریشه‌ای به صورت «قطب مکرر» است. همچنین مخرج از مرتبه سه است، پس آن را به سه

کسر جزئی تقسیم می‌کنیم:

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{A}{(s+1)^2} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+2)}$$

برای ضرایب A ، B و C داریم:

$$A = (s+1)^2 F(s) \big|_{s=-1} = \frac{s+3}{s+2} \big|_{s=-1} = 2$$

$$B = \frac{d}{ds} \left((s+1)^2 F(s) \right) \big|_{s=-1} = \frac{d}{ds} \left(\frac{s+3}{s+2} \right) \big|_{s=-1} = \frac{-1}{(s+2)^2} \big|_{s=-1} = -1$$

$$C = (s+2) F(s) \big|_{s=-2} = \frac{s+3}{(s+1)^2} \big|_{s=-2} = 1$$

و در نتیجه داریم:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s+2} \xrightarrow{L^{-1}} f(t) = (2te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t})u(t)$$

مثال ۳: برای تابع زیر، عکس تبدیل لاپلاس را به دست آورید.

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

در این تابع که مخرج مرتبه سوم است، دارای یک قطب ساده و یک جفت قطب مزدوج می باشد. پس مخرج دارای

«قطب های مختلط» است و با تقسیم آن به سه کسر جزئی داریم:

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{Bs+C}{(s^2+s+1)}$$

برای محاسبه ضرایب A، B و C:

$$A = (s+1)F(s) \big|_{s=-1} = \frac{1}{s^2+s+1} \big|_{s=-1} = 1$$

برای یافتن B، $SF(s)$ را به ازای $S \rightarrow \infty$ محاسبه می کنیم:

$$SF(s) \big|_{s \rightarrow \infty} = 0 = A + B \rightarrow B = -1$$

و برای یافتن C، $F(s)$ را به ازای $S=0$ محاسبه می کنیم:

$$F(s) \big|_{s=0} = 1 = A + C \rightarrow C = 0$$

و در نتیجه داریم:

$$F(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{-s}{s^2+s+1} = \frac{1}{s+1} + \frac{-\left(s+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} f(t) = \left(e^{-t} - e^{-\frac{t}{2}} \left[\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right] \right) u(t)$$

اکنون به بررسی چند مثال پیرامون تبدیل لاپلاس می‌پردازیم.

مثال ۴: اگر $F(s) = \frac{-18S^2 - 12S + 1}{12S^3 + 17S^2 + 6S}$ باشد، مقدار $\frac{df}{dt}(0^+)$ را به دست آورید.

با توجه به قضیه مقدار اولیه داریم:

$$\frac{df}{dt}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sL \left\{ \frac{df}{dt} \right\}$$

برای یافتن $L \left\{ \frac{df}{dt} \right\}$ با استفاده از مشتق‌گیری در حوزه زمان

$$L \left\{ \frac{df}{dt} \right\} = sF(s) - f(0^+)$$

$f(0^+)$ از قضیه مقدار اولیه به دست می‌آید:

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{-18S^3 - 12S^2 + S}{12S^3 + 17S^2 + 6S} = -\frac{18}{12} = -\frac{3}{2}$$

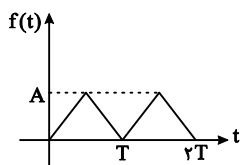
پس داریم:

$$L \left\{ \frac{df}{dt} \right\} = \frac{-18S^3 - 12S^2 + S}{12S^3 + 17S^2 + 6S} + \frac{3}{2} = \frac{\frac{27}{2}S^2 + 10S}{12S^3 + 17S^2 + 6S}$$

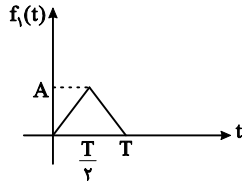
و در نتیجه:

$$\frac{df}{dt}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\frac{27}{2}S^2 + 10S}{12S^3 + 17S^2 + 6S} = \frac{27}{24} = \frac{9}{8}$$

مثال ۵: تبدیل لاپلاس موج متناوب شکل زیر را به دست آورید.



اگر قسمت تکرار شونده تابع $f(t)$ را $f_1(t)$ در نظر بگیریم، برای آن داریم:



$$f_1(t) = \frac{2A}{T}r(t) - \frac{4A}{T}r\left(t - \frac{T}{2}\right) + \frac{2A}{T}r(t - T)$$

و برای تبدیل لاپلاس آن خواهیم داشت:

$$F_1(s) = \frac{2A}{T} \left(\frac{1}{s^2} - 2e^{-\frac{T}{2}s} \cdot \frac{1}{s^2} + e^{-Ts} \cdot \frac{1}{s^2} \right)$$

و با ساده نمودن $F_1(s)$:

$$F_1(s) = \frac{2A}{T} \cdot \frac{1}{s^2} \left(1 - 2e^{-\frac{T}{2}s} + e^{-Ts} \right) = \frac{2A}{T} \cdot \frac{1}{s^2} \left(1 - e^{-\frac{T}{2}s} \right)^2$$

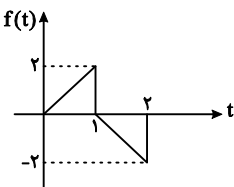
و با فرمول تبدیل لاپلاس توابع نیمه متناوب داریم:

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} F_1(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \times \frac{2A}{T} \cdot \frac{1}{s^2} \left(1 - e^{-\frac{T}{2}s} \right)^2$$

که پس از ساده سازی داریم:

$$F(s) = \frac{2A}{T} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{T}{2}s}}{1 + e^{-\frac{T}{2}s}}$$

مثال ۶: تبدیل لاپلاس شکل زیر را می توان این گونه نوشت:



$$F(s) = F_1(s) + F_2(s)e^{-s} + F_3(s)e^{-2s}$$

که در آن F_1 و F_2 و F_3 توابع گویایی از s هستند. این توابع گویا را پیدا کنید.

با نوشتن تابع $f(t)$ بر حسب توابع پله و شیب داریم:

$$f(t) = 2r(t) - 2u(t-1) - 4r(t-1) + 2r(t-2) + 2u(t-2)$$

و با تبدیل لاپلاس گرفتن:

$$F(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s} e^{-s} - \frac{4}{s^2} e^{-s} + \frac{2}{s^2} e^{-2s} + \frac{2}{s} e^{-2s}$$

$$= \underbrace{\frac{2}{s^2}}_{F_1(s)} + \underbrace{\left(-\frac{2}{s} - \frac{4}{s^2}\right)}_{F_2(s)} e^{-s} + \underbrace{\left(\frac{2}{s^2} + \frac{2}{s}\right)}_{F_3(s)} e^{-2s}$$

2-11- تحلیل مدار به کمک تبدیل لاپلاس

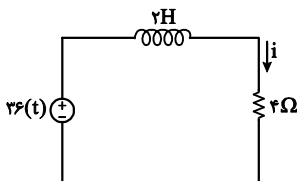
برای تحلیل مدار به کمک تبدیل لاپلاس دو روش وجود دارد:

روش اول:

ابتدا معادله دیفرانسیل مدار را در حوزه زمان می‌نویسیم و سپس معادله دیفرانسیل به دست آمده را به کمک تبدیل لاپلاس به حوزه فرکانس انتقال می‌دهیم. در این حالت معادله دیفرانسیل به یک معادله جبری در حوزه S تبدیل می‌شود. پس از حل آن و عکس لاپلاس گرفتن، به پاسخ مدار در حوزه زمان می‌رسیم.

به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال ۷: در مدار شکل زیر، جریان مقاومت را به ازای $t \geq 0$ به دست آورید.



با KVL زدن در مدار فوق داریم:

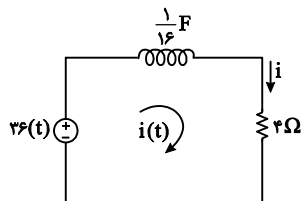
$$\text{KVL: } 2 \frac{di}{dt} + 4i = 3u(t) \xrightarrow{L} L \left\{ 2 \frac{di}{dt} + 4i \right\} = \frac{3}{s} \rightarrow$$

$$2 \left[sI(s) - i(0^-) \right] + 4I(s) = \frac{3}{s} \rightarrow I(s) = \frac{3}{2s(s+2)} = \frac{0.75}{s} - \frac{0.75}{s+2} \xrightarrow{L^{-1}} i(t) = 0.75(1 - e^{-2t})u(t)$$

در این سؤال با توجه به پیوستگی جریان در $t=0$ می‌توان گفت:

$$i(0^-) = i(0^+) = 0$$

مثال ۸: در مدار شکل زیر، جریان $i(t)$ را برای $t \geq 0$ پیدا کنید.



$$\text{KVL: } V_C + V_R = u(t) \rightarrow 16 \int_0^t i(t) dt + \underset{0}{\underset{1}{\underset{2}{3}}} V_C(0^-) + 4i(t) = u(t)$$

از طرفین تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$16 \frac{I(s)}{s} + 4I(s) = \frac{1}{s} \rightarrow I(s) = \frac{1}{4(s+4)} \xrightarrow{L^{-1}} i(t) = \frac{1}{4} e^{-4t} u(t)$$

روش دوم:

در این روش کلیه عناصر مدار را به حوزه فرکانس انتقال می‌دهیم. بنابراین یک مدار امپدانسی (مقاومتی) داریم و با روش‌های تحلیل مدارهای مقاومتی، مدار حاصله را تجزیه و تحلیل می‌نماییم و در نهایت از پاسخ به دست آمده، لاپلاس معکوس می‌گیریم.

مزیت این روش این است که دیگر خبری از معادله دیفرانسیل نیست و محاسبات ساده‌تر می‌شود.

تبدیل یافته عناصر مداری از حوزه زمان به حوزه فرکانس به صورت زیر است:

۱- مقاومت

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{i} & \text{R} & \xrightarrow{I} \\ + & \text{V} & + \\ - & & - \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{L} \\ \xleftarrow{L^{-1}} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \xrightarrow{I} & \text{R} & \xrightarrow{I} \\ + & \text{V} & + \\ - & & - \end{array}$$

$$v = Ri$$

$$V = RI$$

به عبارت دیگر، مقاومت‌ها نسبت به فرکانس هیچ حساسیتی ندارند.

۲- سلف

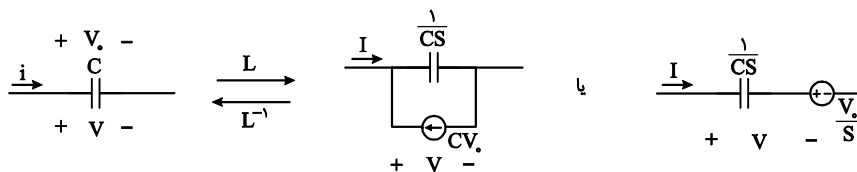
$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{i} & \text{L} & \xrightarrow{I_2} \\ + & \text{V} & + \\ - & & - \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{L} \\ \xleftarrow{L^{-1}} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \xrightarrow{I} & \text{LS} & \xrightarrow{LI_2} \\ + & \text{V} & + \\ - & & - \end{array} \quad \text{یا} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{I} \\ \text{LS} \\ \text{V} \\ \xrightarrow{I_2} \\ + \\ - \end{array}$$

$$v = L \frac{di}{dt}$$

$$v = LSI - LI_0$$

$$I = \frac{V}{LS} + \frac{I_0}{S}$$

۳- خازن

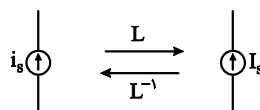
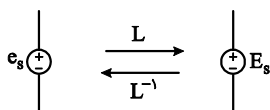


$$i = C \frac{dV}{dt}$$

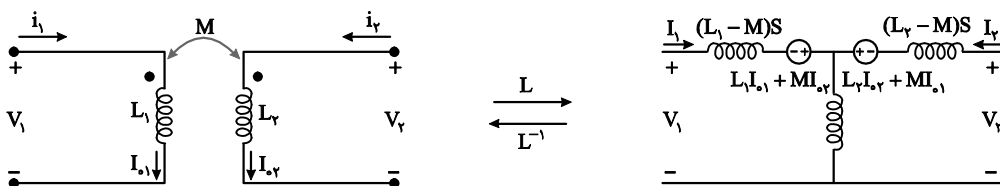
$$I = CSV - CV_0$$

$$V = \frac{I}{CS} + \frac{V_0}{S}$$

۴- منابع



۵- سلف‌های تزویج



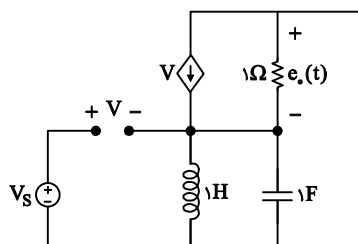
$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases} \quad \begin{cases} V_1 = SL_1 I_1 + SMI_2 - L_1 I_{01} - MI_{02} \\ V_2 = SL_2 I_2 + SMI_1 - L_2 I_{02} - MI_{01} \end{cases}$$

همچنین در حالت صفر، عناصر مداری در حوزه زمان و فرکانس به صورت زیر است:

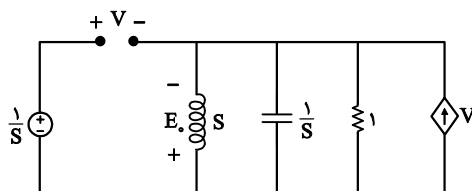
عنصر	امپدانس (z)	ادمیتانس (y)
شکل	R	$\frac{1}{R}$
شکل	LS	$\frac{1}{LS}$
شکل	$\frac{1}{CS}$	CS

به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۹: در مدار شکل زیر، پاسخ پله $e_o(t)$ را به دست آورید.



با انتقال مدار به حوزه فرکانس و مرتب کردن آن داریم:

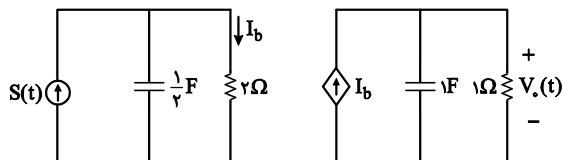


$$\text{KCL: } \left(\frac{1}{s} + s + 1 \right) E_o + V = 0$$

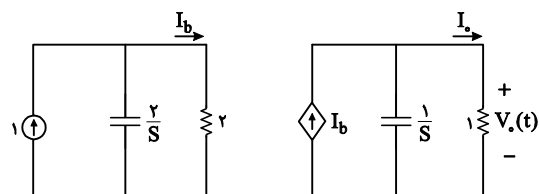
$$\text{KVL: } V = \frac{1}{s} + E_o$$

$$\rightarrow E_o = \frac{-1}{(s+1)^2} \xrightarrow{L^{-1}} e_o(t) = -te^{-t}u(t)$$

مثال ۱۰: در مدار شکل زیر، پاسخ ضربه $V_o(t)$ را به دست آورید.



با انتقال مدار به حوزه فرکانس (s) داریم:



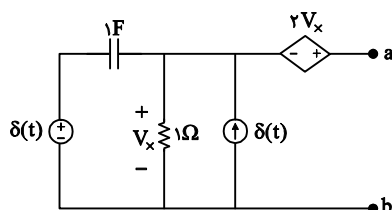
با استفاده از تقسیم جریان:

$$I_b = \frac{\frac{2}{s}}{\frac{2}{s} + 2} \times 1 = \frac{1}{s+1}$$

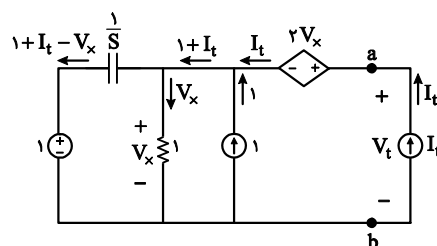
$$I_o = \frac{\frac{1}{s} I_b}{\frac{1}{s} + 1} = \frac{1}{s+1} \times \frac{1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$V_o = 1 \times I_o = \frac{1}{(s+1)^2} \rightarrow V_o(t) = te^{-t}u(t)$$

مثال ۱۱: در مدار شکل زیر، مدار معادل تونن دیده شده از سر a و b را به دست آورید. (در حوزه فرکانس)



با انتقال مدار به حوزه فرکانس و قرار دادن منبع تست I_t به دو سر a و b داریم:



با KCL زدن در مدار و نوشتن KVL ها داریم:

KVL در حلقه راستی: $V_t = 2V_x + V_x = 3V_x$

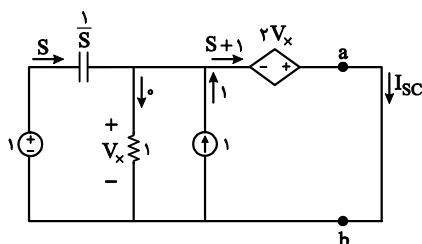
KVL در حلقه چپی: $1 + \frac{1}{s}(1 + I_t - V_x) - V_x = 0 \rightarrow V_x(s+1) = (s+1) + I_t$

$$\rightarrow V_x = \frac{I_t}{s+1} + 1$$

و در نتیجه:

$$V_t = 3V_x = \frac{3}{s+1} I_t + \frac{3}{s+1}$$

همچنین می‌توان جریان اتصال کوتاه I_{sc} را به صورت زیر به دست آورد:



$$\text{KVL: } V_x + 2V_x = 0 \rightarrow V_x = 0$$

پس جریان خازن $\frac{1}{s}$ برابر است با $s \times 1$ و با KCL زدن داریم:

$$I_{sc} = s + 1$$

11-3- کاربرد تبدیل لاپلاس در تحلیل سیستم‌های خطی

۱۱-۳-۱ تابع شبکه

تابع شبکه در حوزه فرکانس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\text{تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر}}{\text{تبدیل لاپلاس ورودی}}$$

همچنین تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه، همان تابع شبکه است یعنی:

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

بنابراین با مشخص بودن تابع شبکه و تبدیل لاپلاس ورودی، می‌توان تبدیل لاپلاس خروجی و از روی آن، خروجی را برحسب زمان تعیین نمود.

$$Y(s) = X(s).H(s)$$

نکته: تبدیل لاپلاس پاسخ کامل برابر است با تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر به اضافه تبدیل لاپلاس پاسخ ورودی صفر. به عبارت دیگر، اگر پاسخ کامل به ازای یک ورودی خاص، تحت یک شرایط اولیه معین، معلوم باشد، پاسخ کامل به ازای هر ورودی دیگر ولی تحت همان شرایط اولیه نیز قابل محاسبه است.

$$L\{\text{پاسخ کامل}\} = L\{\text{پاسخ حالت صفر}\} + L\{\text{پاسخ ورودی صفر}\}$$

مثال ۱۲: پاسخ حالت صفر یک مدار به ورودی $\delta(t)$ برابر $e^{-t}u(t)$ است. در صورتی که در شرایط اولیه معین، پاسخ کامل شبکه مذکور به ورودی $2u(t)$ به صورت زیر باشد:

$$y(t) = 2(1 - e^{-t})u(t) + 5e^{-2t}u(t)$$

پاسخ کامل تحت همان شرایط اولیه به ورودی $2e^{-3t}u(t)$ را به دست آورید.

پاسخ ضربه مشخص است، پس با انتگرال گیری از آن پاسخ پله به دست می آید:

$$S(t) = \int_0^t h(t) dt = \int_0^t e^{-t} dt = (1 - e^{-t})u(t)$$

پس می توان گفت خروجی ناشی از ورودی $2u(t)$ برابر است با:

$$2u(t) \Rightarrow \text{خروجی ناشی از فقط ورودی } 2(1 - e^{-t})u(t)$$

و با مقایسه رابطه داده شده برای پاسخ کامل شبکه با مقدار فوق، می توان گفت بخش $5e^{-2t}u(t)$ ناشی از فقط شرایط اولیه است که با تغییر ورودی، تغییری نمی کند.

حال برای ورودی $2e^{-3t}u(t)$ داریم:

$$x(t) = 2e^{-3t}u(t) \rightarrow X(s) = \frac{2}{s+3} \Rightarrow Y(s) = H(s)X(s) = \frac{2}{(s+1)(s+3)}$$

$$H(s) = L\{e^{-t}u(t)\} = \frac{1}{s+1}$$

که با تجزیه به کسرهای جزئی:

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} \rightarrow y(t) = (e^{-t} - e^{-3t})u(t)$$

بنابراین پاسخ کامل برابر است با:

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-3t} + 5e^{-2t})u(t)$$

نکته: در حالت خاصی که ورودی مدار تابعی سینوسی باشد و تمام قطب‌های تابع شبکه در نیم صفحه چپ باشد، می‌توان گفت:

پاسخ حالت ماندگار سینوسی = پاسخ حالت صفر ناشی از ورودی سینوسی

به عبارت دیگر، در تحلیل حالت دائمی سینوسی با ورودی $x(t) = A \cos(\omega t + \theta)$ با داشتن $H(s)$ ، اگر در تابع تبدیل قرار دهیم $S = j\omega$ ، پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ و در نتیجه $|H|$ و $\angle H$ را داریم. پس خروجی معلوم است:

$$y(t) = B \cos(\omega t + \phi)$$

به‌طوری که:

$$B = A \times |H(j\omega)|, \phi = \theta + \angle H(j\omega)$$

مثال ۱۳: پاسخ شبکه‌ای به ورودی پله واحد به صورت زیر است:

$$y(t) = (1 - e^{-t} - te^{-t})u(t)$$

پاسخ حالت دائمی شبکه فوق به ورودی زیر چیست؟

$$x(t) = 2 \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)u(t)$$

ابتدا تابع تبدیل را به دست می‌آوریم:

$$H(s) = \frac{L\{(1 - e^{-t} - te^{-t})u(t)\}}{L\{u(t)\}} = \frac{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}}{\frac{1}{s}} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

با قرار دادن $s = j\omega$ و $\omega = 1$ به پاسخ فرکانسی می‌رسیم:

$$H(j\omega) = H(j1) = \frac{1}{(j+1)^2} = \frac{1}{2j} = \frac{1}{2} \angle -90^\circ$$

پس برای خروجی داریم:

$$\begin{cases} |Y| = |H| \times |X| = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \\ \angle Y = \angle H + \angle X = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \end{cases} \rightarrow y(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

نکته: برای به دست آوردن پاسخ فرکانسی یک شبکه کافی است در تابع شبکه، به جای s ، $j\omega$ قرار دهیم، یعنی:

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{\text{فازور خروجی}}{\text{فازور ورودی}}$$

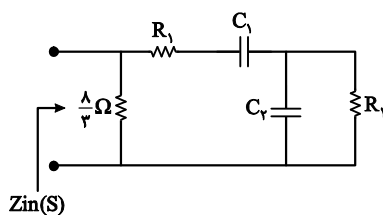
۱۱-۳-۲- رفتار عناصر مداری در کران‌های فرکانس

به ازای $s=0$ ، $s \rightarrow \infty$ عناصر مداری رفتارهای متفاوتی را از خود نشان می‌دهند. به جدول زیر دقت کنید:

عنصر	$s=0$	$s \rightarrow \infty$
		
		
		

مثال ۱۴: در مدار شکل زیر، امپدانس ورودی $Z_{in}(s)$ دارای قطب‌های $s=-1$ و $s=-3$ و صفرهای $s=-2$ و

$s=-4$ است. مقدار مقاومت R_1 را به دست آورید.



با توجه به اطلاعات داده شده $Z_{in}(s)$ به صورت زیر است:

$$Z_{in}(s) = K \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)}$$

در $s=0$ و $s \rightarrow \infty$ به مدار و رابطه $Z_{in}(s)$ نگاه می‌کنیم:

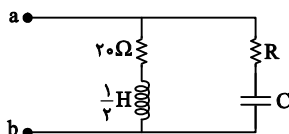
$$s=0 \Rightarrow \begin{cases} Z_{in}(0) = \frac{8}{3} \text{ از دید مداری} \\ Z_{in}(0) = K \frac{8}{3} \text{ از دید رابطه} \end{cases} \Rightarrow K=1$$

$$s \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} Z_{in}(\infty) = \frac{8}{3} \parallel R_1 \text{ از دید مداری} \\ Z_{in}(\infty) = K=1 \text{ از دید رابطه} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{8} + \frac{1}{R_1} = 1 \rightarrow R_1 = \frac{8}{5} \Omega$$

نکته: در مدارهای مستقل از فرکانس، چون با تغییر فرکانس، $Z_{in}(s)$ تغییری نمی‌کند می‌توان گفت:

$$Z_{in}(0) = Z_{in}(\infty)$$

مثال ۱۵: در مدار شکل زیر، R و C را چنان تعیین کنید که Z_{ab} مستقل از فرکانس باشد.



در این حالت Z_{ab} را به صورت کسری از S می‌نویسیم و برای مستقل بودن از فرکانس (حذف اثر S) کاری می‌کنیم که چند جمله‌ای صورت، ضربی از مخرج باشد:

$$Z_{ab} = \frac{\left(R + \frac{1}{CS}\right) \left(20 + \frac{S}{2}\right)}{R + \frac{1}{CS} + 20 + \frac{S}{2}} = \frac{0/5RCS^2 + (20RC + 0/5)S + 20}{0/5CS^2 + (20C + RC)S + 1}$$

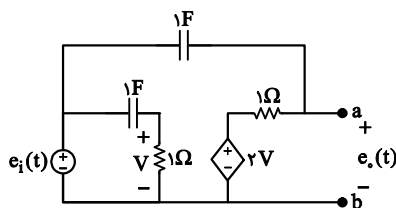
برای مستقل بودن از فرکانس باید:

$$\frac{0/5RC}{0/5C} = \frac{20RC + 0/5}{20C + RC} = \frac{20}{1} \rightarrow \begin{cases} R = 20\Omega \\ C = \frac{1}{800}F \end{cases}$$

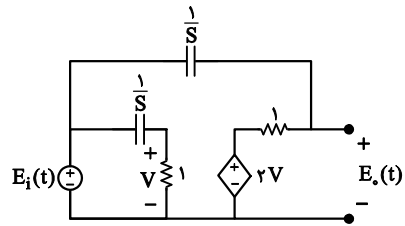
همچنین می‌توان گفت:

$$Z_{ab}(0) = Z_{ab}(\infty) \rightarrow 20 = R \rightarrow R = 20\Omega$$

مثال ۱۶: در شبکه زیر، تابع شبکه $H(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)}$ را به دست آورید.



با انتقال مدار در حوزه فرکانس داریم:



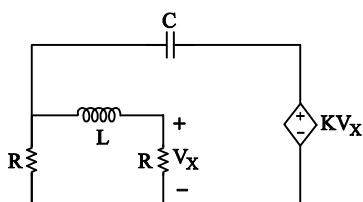
$$V = \frac{1}{1 + \frac{1}{s}} E_i = \frac{s}{s+1} E_i$$

6 ۷ 8

$$\text{KCL: } S(E_o - E_i) + E_o - 2\frac{s}{s+1} E_i = 0 \rightarrow H(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{s(s+3)}{(s+1)^2}$$

تست‌های طبقه‌بندی شده مبحث تبدیل لاپلاس و کاربرد آن در تحلیل مدار

۱- به ازای کدام مقدار k ، مدار شکل زیر نوسانی است و فرکانس نوسان آن کدام است؟



$$\omega = \sqrt{\frac{2}{LC}}, \quad k = 1 + \frac{L}{R^2 C} \quad (1)$$

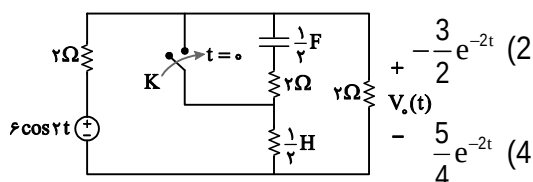
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad k = 1 + \frac{L}{R^2 C} \quad (2)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{LC}}, \quad k = 1 + \frac{C}{R^2 L} \quad (3)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad k = 1 + \frac{C}{R^2 L} \quad (4)$$

۲- در مدار شکل زیر که در حالت دائمی قرار دارد، کلید k در $t=0$ بسته می‌شود. بخش گذرای پاسخ

$V_o(t)$ برای $t \geq 0$ کدام است؟



$$-e^{-2t} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}e^{-2t} \quad (3)$$

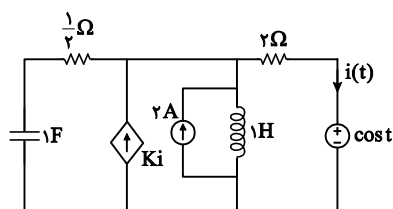
۳- در مدار شکل زیر با فرض $k=2$ ، حالت دائمی جریان $i(t)$:

(1) فرکانس‌های $\omega=1$ و $\omega=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ دارد.

(2) فرکانس‌های $\omega=1$ و $\omega=2\sqrt{3}$ دارد.

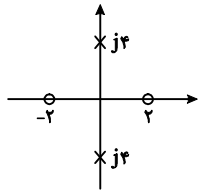
(3) فرکانس‌های $\omega=0$ و $\omega=1$ و $\omega=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ دارد.

(4) حالت دائمی ندارد.



۴- محل صفرها و قطب‌های یک تابع شبکه به صورت زیر است. اگر بهره DC این شبکه ۱- باشد، به ازای

کدام مقدار $a > 0$ ، ورودی به صورت $e^{-at}u(t)$ پاسخی به صورت ke^{-at} ایجاد نخواهد کرد؟



1 (1)

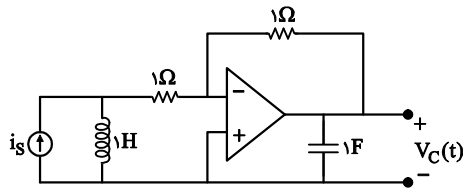
2 (2)

4 (3)

4) یافتن چنین مقدار a ممکن نیست.

۵- در مدار شکل زیر آپ آمپ ایده‌آل است. اگر i_s ورودی و $V_C(t)$ پاسخ باشد، پاسخ حالت صفر به ورودی

ضربه کدام مورد خواهد بود؟



$$V_C(t) = e^{-t}u(t) \quad (1)$$

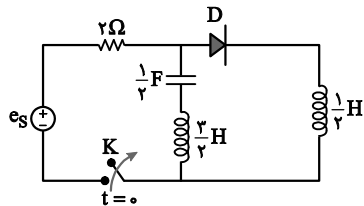
$$V_C(t) = \delta(t) - e^{-t}u(t) \quad (2)$$

$$V_C(t) = e^{-t}u(t) - \delta(t) \quad (3)$$

$$V_C(t) = e^{-t}u(t) + \delta(t) \quad (4)$$

۶- در مدار شکل زیر $e_s = u(-t)$ است. اگر کلید k را در لحظه $t = 0$ باز کنیم، حداکثر انرژی ذخیره شده

در خازن چقدر خواهد بود؟



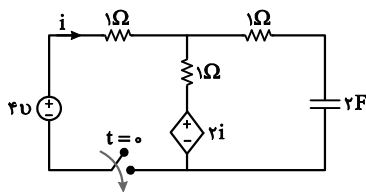
1) فقط در $t = \frac{\pi}{2} \text{ s}$ انرژی خازن حداکثر بوده و برابر $\frac{1}{2}$ ژول است.

2) فقط در $t = \frac{\pi}{2} \text{ s}$ انرژی خازن حداکثر بوده و برابر $\frac{1}{16}$ ژول است.

3) فقط در $t \geq \frac{\pi}{2} \text{ s}$ انرژی ذخیره شده در خازن ثابت و برابر $\frac{1}{32}$ ژول است.

4) فقط در $t \geq \frac{\pi}{2} \text{ s}$ انرژی ذخیره شده در خازن ثابت و برابر $\frac{1}{64}$ ژول است.

۷- در مدار شکل زیر کلید در $t=0$ بسته می‌شود. $i(t)$ کدام است؟



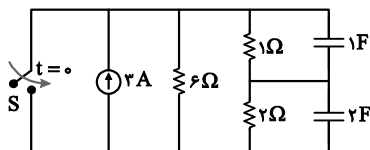
(1) $i(t) = 1 + 0.6e^{-0.4t}$

(2) $i(t) = 0.6 + e^{-2/5t}$

(3) $i(t) = 1 + 0.6e^{-2/5t}$

(4) $i(t) = 0.6 + e^{-0.4t}$

۸- در مدار شکل زیر کلید S برای مدت طولانی باز بوده و در $t=0$ بسته می‌شود. $i(t)$ برای زمان‌های $t \geq 0$



مطابق کدام گزینه است؟

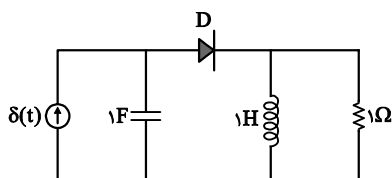
(1) $-4\delta(t) - e^{-t}$

(2) $-2\delta(t) - e^{-\frac{t}{2}}$

(3) $-2\delta(t) - e^{-t}$

(4) $-4\delta(t) - e^{-\frac{t}{4}}$

۹- در مدار شکل زیر شرایط اولیه همگی صفر می‌باشند و دیود D ایده‌آل می‌باشد. پس از چند ثانیه جریان



دیود D قطع می‌گردد؟

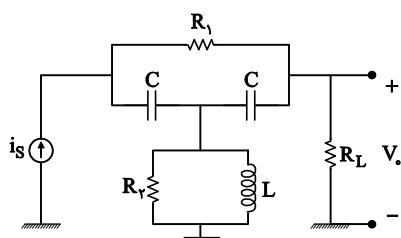
(1) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

(2) $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$

(3) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$

(4) $\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$

۱۰- در مدار زیر تحت چه شرطی ولتاژ خروجی، مستقل از فرکانس تحریک، برابر با صفر است؟



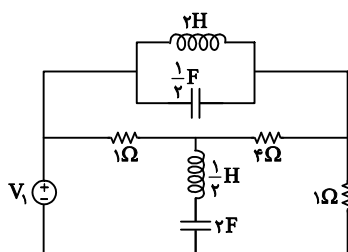
$$2R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{2L}{C}} \quad (1)$$

$$R_1 = 2R_2 = \sqrt{\frac{2L}{C}} \quad (2)$$

$$R_1 R_2 = \frac{2L}{C} \quad (3)$$

$$R_1 R_L = \frac{2L}{C} \quad (4)$$

۱۱- در مدار شکل زیر، تابع تبدیل ورودی- خروجی $H(s) = \frac{V_2}{V_1}$ کدام است؟



$$\frac{(s^2 + 1)}{(s + 2)^2} \quad (2)$$

$$\frac{2(s^2 + 1)}{(s + 1)^2} \quad (1)$$

$$\frac{s^2 + 1}{(s + 1)^2} \quad (4)$$

$$\frac{s^2 + 1}{s^2 + s + 1} \quad (3)$$

۱۲- معادلات حالت یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان به صورت زیر داده شده است. که $e(t)$ ورودی مدار و

V_C و i_L متغیرهای حالت مدار هستند.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e(t)$$

پاسخ ضربه واحد $V_C(t)$ کدام است؟

$$V_C(t) = \left(k_1 e^{-\frac{t}{2}} + k_2 e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t} \right) u(t) \quad (2)$$

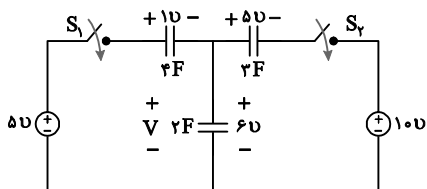
$$V_C(t) = (k_1 + k_2 t) e^{-\frac{t}{2}} u(t) \quad (1)$$

$$V_C(t) = k t \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t + \theta \right) (t) \quad (4)$$

$$V_C(t) = k e^{-\frac{t}{2}} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t + \theta \right) (t) \quad (3)$$

۱۳- کلیدهای S_1 و S_2 در مدار شکل زیر به طور همزمان بسته می‌شوند. ولتاژ V دو سر خازن 2 فارادی بعد

از بسته شدن کلیدها کدام است؟



3 (1)

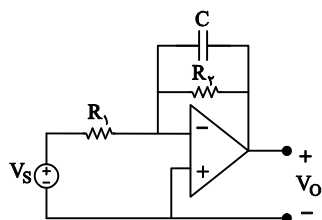
4 (2)

6 (3)

9 (4)

۱۴- در مدار شکل زیر مقادیر R_1 و R_2 را چنان انتخاب کنید که رفتار مدار فیلتر پایین گذری باشد که در

باند گذر دارای بهره 5 بوده و فرکانس قطع آن 1000Hz باشد. مقدار C را برابر $\frac{1}{\pi}$ میکرو فاراد بگیرید.



$R_2 = 500, R_1 = 100$ (1)

$R_2 = 100, R_1 = 100$ (2)

$R_2 = 1000\pi, R_1 = 200\pi$ (3)

$R_2 = 200\pi, R_1 = 1000\pi$ (4)

۱۵- عکس تبدیل لاپلاس $F(s) = \frac{2e^{-s}}{1+e^{-2s}}$ تابع $f(t)$ است. $f(2/5)$ کدام است؟

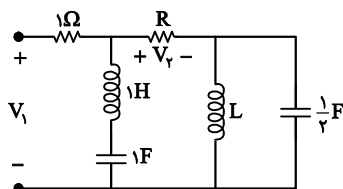
3 (4)

2 (3)

2 (2) صفر

-2 (1)

۱۶- تابع شبکه $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{s^4 + as^3 + 5s^2 + bs + c}{3s^4 + 5s^3 + 19s^2 + 8s + 12}$ در مدار شکل زیر داده شده است. مقادیر



مجهول a, b و c کدام‌اند؟

$(a, b, c) = (1, 1, 3)$ (1)

$(a, b, c) = (1, 0, 4)$ (2)

$(a, b, c) = (0, 1, 4)$ (3)

$(a, b, c) = (0, 0, 4)$ (4)

۱۷- در شکل زیر، N یک مدار مقاومتی خطی و بدون منابع مستقل است. اگر تابع انتقال

$$\frac{I}{V_S} = \frac{3(s^2 + s + 1)}{4s^2 + 4s + 3}$$

و شرایط اولیه $i_L(0^-) = 2A$ و $V_C(0^-) = 1V$ را داشته باشیم، شرایط اولیه $i(0^-)$

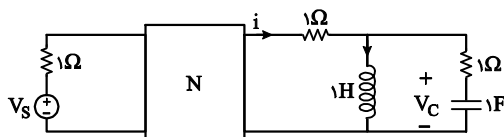
برابر است با:

(1) $-\frac{1}{3}$

(2) $-\frac{1}{4}$

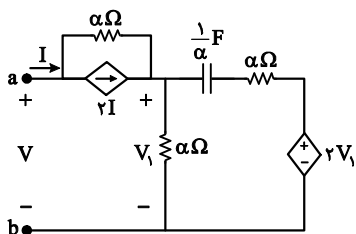
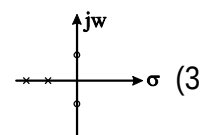
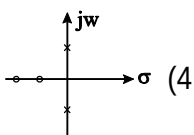
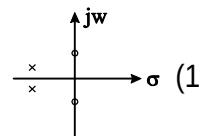
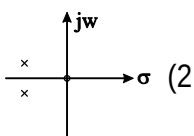
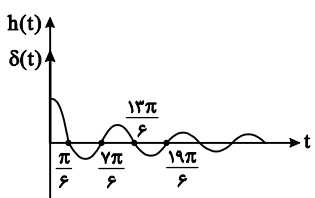
(3) $\frac{3}{4}$

(4) $\frac{1}{4}$



۱۸- در یک فیلتر میان گذر با پاسخ ضربه واحد داده شده $h(t)$ ، محل صفرها و قطب‌های مدار به کدام یک

از صورت‌های زیر می‌تواند باشد؟



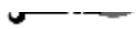
۱۹- در مدار شکل زیر کدام بیان درست است؟

(1) مدار از دو سر ab معادل یک اتصال کوتاه است.

(2) مدار از دو سر ab معادل یک خازن با ظرفیت α است.

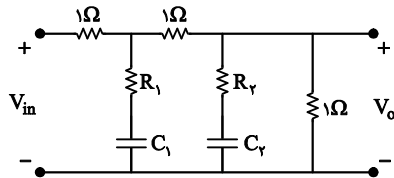
(3) مدار از دو سر ab معادل یک مقاومت برابر α اهم است.

(4) مدار از دو سر ab معادل یک سلف با اندوکتانس α هانری است.



$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{2s^2 + 3s + 1}{As^2 + Bs + C}$$

۲۰- تابع شبکه انتقال ولتاژ مدار زیر به صورت مقابل است:



مقادیر A، B و C کدام است؟

(1) $A = 8, B = 13, C = 3$

(2) $A = 13, B = 8, C = 1$

(3) $A = 13, B = 13, C = 3$

(4) $A = 8, B = 8, C = 1$

۲۱- پاسخ ضربه مداری به صورت $h(t) = \sqrt{2}e^{-t} \cos(t + 45^\circ)u(t)$ است. پاسخ حالت دائمی سینوسی این

مدار به ورودی $10\cos(2t - 23/4^\circ)u(t)$ برابر است با:

(2) $4/5 \cos(2t + 50^\circ)u(t)$

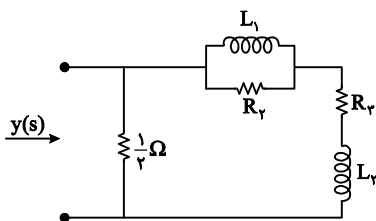
(1) $4/5 \cos(2t - 50^\circ)u(t)$

(4) $-4/5 \cos(2t + 50^\circ)u(t)$

(3) $-4/5 \cos(2t - 50^\circ)u(t)$

۲۲- در مدار شکل زیر، ادمیتانس ورودی دارای دو صفر در $s = -2$ و $s = -2/5$ و یک قطب مضاعف در

$s = -1$ است. مقاومت R_3 کدام است؟



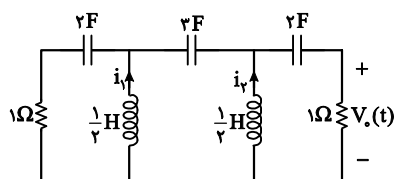
(1) $\frac{1}{4} \Omega$

(2) $\frac{1}{8} \Omega$

(3) 1Ω

(4) 2Ω

۲۳- در مدار شکل زیر، جریان اولیه سلف‌ها $i_1(0) = i_2(0) = 2A$ و ولتاژ اولیه خازن‌ها صفر است. $V_o(t)$ برای $t \geq 0$ کدام است؟



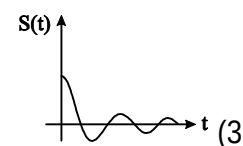
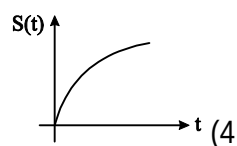
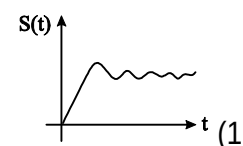
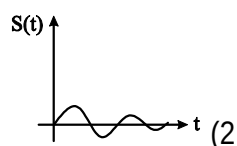
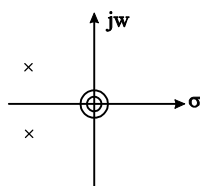
(1) $2e^{-t} - 2te^{-t}$

(2) $2e^{-t} + 2te^{-t}$

(3) $-2e^{-t} + 2te^{-t} + 4e^{-2t}$

(4) $-2e^{-t} - 2te^{-t} + 4e^{-2t}$

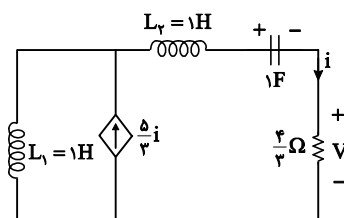
۲۴- اگر نمودار قطب و صفر شکل زیر، مربوط به تابع شبکه یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان باشد، پاسخ پله این مدار در حوزه زمان برابر با کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟



۲۵- پاسخ ورودی صفر متغیر V در مدار شکل زیر برای $t > 0$ چیست؟ (حالت اولیه مدار به قرار زیر است:

جریان اولیه سلف L_1 در جهت نشان داده شده ۲ آمپر و جریان اولیه سلف L_2 در جهت نشان داده شده ۳

آمپر و ولتاژ خازن با پلاریته روی شکل ۱ ولت است).



(1) $4e^{-t} - 8e^{-3t}$

(2) $-4e^{-t} + 8e^{-3t}$

(3) $3e^{-t} - 4e^{-3t}$

(4) $-3e^{-t} + 4e^{-3t}$

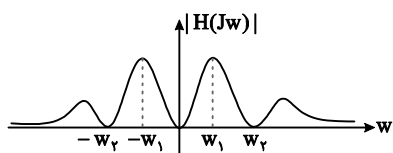
۲۶- تابع شبکه $H(s) = \frac{s(s-\alpha)}{(s+\alpha)(s^2+1)}$ مفروض است. ضریب $\alpha > 0$ را به نحوی تعیین کنید که فاز شبکه

در $\omega = 2 \text{ rad/s}$ برابر صفر باشد؟

- 1 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4)

۲۷- منحنی اندازه تابع شبکه مداری به صورت شکل زیر است. حداقل تعداد قطب‌ها و صفرهای تابع شبکه

کدام است؟



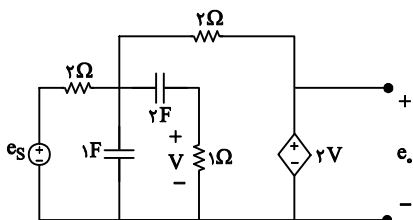
1) یک صفر و دو قطب

2) دو صفر و سه قطب

3) سه صفر و چهار قطب

4) چهار صفر و پنج قطب

۲۸- پاسخ ضربه $e_0(t)$ در مدار زیر کدام است؟



1) $\left(2e^{-t} - e^{-\frac{t}{2}}\right)u(t)$

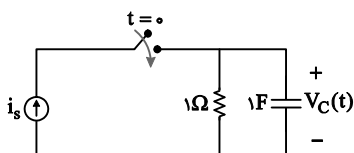
2) $2te^{-t}u(t)$

3) $\left(e^{-t} - e^{-\frac{t}{2}}\right)u(t)$

4) $2e^{-t}u(t)$

۲۹- اگر بخواهیم در مدار شکل زیر حالت گذرا در پاسخ $V_C(t)$ برای $t \geq 0$ حذف گردد، مقدار ϕ چند

درجه باید باشد؟ (شرایط اولیه ولتاژ دو سر خازن صفر است).



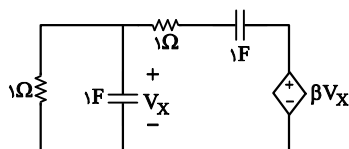
1) صفر

2) 45°

3) 90°

4) 135°

۳۰- در مدار شکل زیر، برای این که مدار در حالت نوسانی بی اتلاف قرار گیرد مقدار β کدام است؟

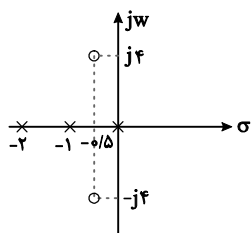


1 (1) 2 (2)

3 (3) 4 (4)

۳۱- دیاگرام صفر - قطب تابع شبکه‌ای به صورت $H(s) = \frac{\pi(s + z_i)}{\pi(s + p_i)}$ در شکل زیر داده شده است. کدام یک

از عبارتهای زیر در مورد دامنه و فاز تابع شبکه صحیح است؟



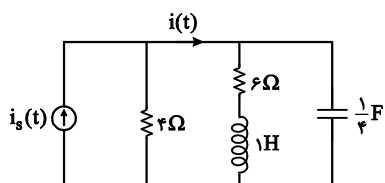
1) در $\omega = \infty$ دامنه صفر و فاز آن نیز صفر است.

2) در $\omega = 0$ دامنه نامحدود و فاز آن صفر است.

3) در $\omega = 0$ دامنه ثابت و فاز آن صفر است.

4) در $\omega = \infty$ دامنه صفر و فاز آن -90° است.

۳۲- در مدار شکل زیر، ورودی $i_s(t)$ و پاسخ مورد نظر جریان $i(t)$ است. پاسخ ضربه این مدار چیست؟



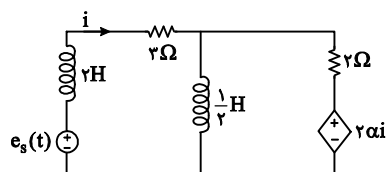
$$\left(\frac{1}{3} e^{-5t} - \frac{4}{3} e^{-2t} \right) u(t) - \delta(t) \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{3} e^{-5t} + \frac{4}{3} e^{-2t} \right) u(t) + \delta(t) \quad (2)$$

$$\left(\frac{1}{3} e^{-5t} - \frac{4}{3} e^{-2t} \right) u(t) + \delta(t) \quad (3)$$

$$\left(\frac{1}{3} e^{-5t} + \frac{4}{3} e^{-2t} \right) u(t) - \delta(t) \quad (4)$$

۳۳- به ازای کدام مقدار α ، مدار شکل زیر به حالت میرای بحرانی در می آید؟



1) فقط 1/6

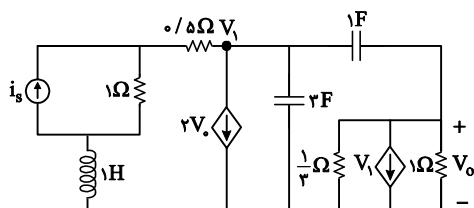
2) 1/6 و 11/4

3) فقط 11/4

4) هیچ کدام

۳۴- مدار شکل زیر یک مدار پایدار نمایی است. تابع شبکه $H = \frac{V_0}{I_s}$ را در نظر بگیرید. به ازای کدام

ورودی، $V_0(\infty) = 0$ است؟



(1) $e^t u(t)$

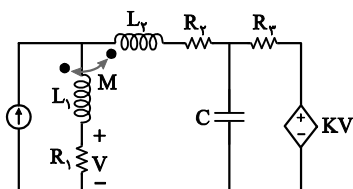
(2) $e^{2t} u(t)$

(3) $e^{3t} u(t)$

(4) $e^{\frac{t}{2}} u(t)$

۳۵- در مدار شکل زیر کدام عبارت درجه صورت و مخرج تابع شبکه $H = \frac{V}{I_s}$ را مشخص می کند؟ (مقادیر

المان ها مثبت و دلخواه و $M < \sqrt{L_1 L_2}$ است).



(1) درجه مخرج حداکثر 3 و درجه صورت مساوی درجه مخرج است.

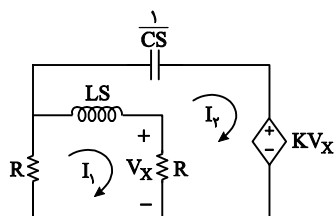
(2) درجه مخرج حداکثر 2 و درجه صورت کمتر از درجه مخرج است.

(3) درجه مخرج حداکثر 2 و درجه صورت مساوی درجه مخرج است.

(4) درجه مخرج حداکثر 2 و درجه صورت یکی بیش تر از درجه مخرج است.

۱- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

با انتقال مدار به حوزه لاپلاس و نوشتن معادلات مش داریم:



$$\begin{bmatrix} 2R + LS & -LS - R \\ -LS - R & LS + R + \frac{1}{CS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -KV_x \end{bmatrix}$$

با جایگذاری $V_x = R(I_1 - I_2)$ و انتقال ماتریس ولتاژ به طرف چپ داریم:

$$\begin{bmatrix} 2R + LS & -LS - R \\ -LS - R & LS + R + \frac{1}{CS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ RKI_2 - RKI_1 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 2R + LS & -LS - R \\ -LS + R(K-1) & LS + \frac{1}{CS} + R(1-K) \end{bmatrix}$$

ماتریس امپدانس

دترمینان ماتریس ضرائب را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \det(Z) &= (2R + LS) \left(LS + \frac{1}{CS} + R(1-K) \right) + (LS + R)(-LS + R(K-1)) \\ &= RLCS^2 + (R^2C(1-K) + L)S + 2R = 0 \end{aligned}$$

شرط نوسانی بودن این است که ضریب S در این معادله صفر باشد، یعنی:

$$R^2C(1-K) + L = 0 \rightarrow K = 1 + \frac{L}{R^2C}$$

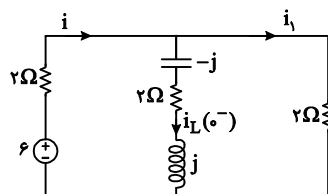
و فرکانس نوسانات به صورت زیر به دست می‌آید:

$$K = 1 + \frac{L}{R^2C} \rightarrow \det(Z) = RLCS^2 + 2R = 0 \rightarrow S^2 = \frac{-2R}{RLC}$$

$$\xrightarrow{s=j\omega} -\omega^2 = -\frac{2}{LC} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2}{LC}}$$

۲- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

در ابتدا مدار را قبل از بستن کلید k در نظر می‌گیریم و با استفاده از رابطه بی‌نهایت، مدار را در 0 رسم می‌کنیم:



با استفاده از تقسیم ولتاژ و جریان داریم:

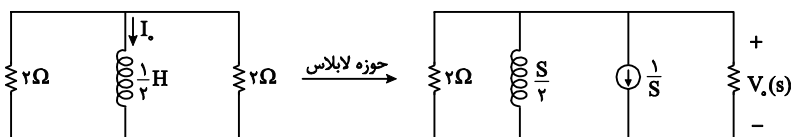
$$i = \frac{6}{2 + (2 \parallel 2)} = 2A$$

$$i_L(0^-) = \frac{2}{2+2}i = \frac{1}{2} \times 2 \rightarrow i_L(0^-) = 1A = I_0$$

حال برای $t > 0$ که کلید k بسته می‌شود، مدار را به حوزه لاپلاس منتقل می‌کنیم.

منبع $6\cos 2t$ حالت دائمی ایجاد می‌کند و تأثیری در پاسخ گذرا ندارد، پس می‌توان آن را حذف کرد. با استفاده از

شرایط اولیه سلف که ایجاد حالت گذرا می‌کند داریم:



بنابراین:

$$V_o(s) = \left(2 \parallel 2 \parallel \frac{s}{2} \right) \times \frac{1}{s} = \frac{\frac{s}{2}}{1 + \frac{s}{2}} \times \frac{-1}{s} = \frac{s}{s+2} \times \frac{-1}{s}$$

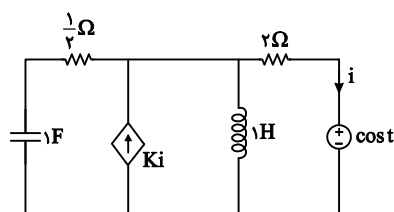
$$\rightarrow V_o(s) = \frac{-1}{s+2} \rightarrow V_o(t) = -e^{-2t}$$

۳- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

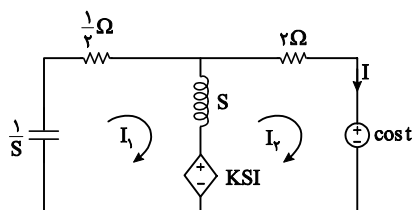
منبع جریان ثابت 2 آمپری تأثیری در حالت دائمی $i(t)$ ندارد زیرا در حالت دائمی سلف اتصال کوتاه است و همه

جریان 2A از آن می‌گذرد. بنابراین برای تعیین حالت دائمی جریان $i(t)$ می‌توان منبع جریان ثابت 2 آمپری را حذف

کرد. پس مدار به صورت زیر تبدیل می‌شود:



با انتقال مدار به حوزه لاپلاس و استفاده از تبدیل نورتن به تونن برای منبع جریان وابسته و سلف موازی با آن داریم:



با نوشتن معادلات مش:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s} + s + \frac{1}{2} & -s \\ -s & s + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -KSI_2 \\ KSI_2 - E(s) \end{bmatrix}$$

با انتقال ماتریس ولتاژ به طرف چپ داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s} + s + \frac{1}{2} & -s + KS \\ -s & s + 2 - KS \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -E(s) \end{bmatrix}$$

با فرض $K=2$ و $E(s) = L\{\cos t\} = \frac{s}{s^2 + 1}$ برای I_2 داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s} + s + \frac{1}{2} & s \\ -s & -s + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -E(s) \end{bmatrix}, \Delta(s) = \frac{3s^2 + 4}{2s}$$

$$I_2(s) = \frac{SE(s)}{\Delta(s)} = \frac{\frac{s^2}{s^2 + 1}}{\frac{3s^2 + 4}{2s}} = \frac{2s}{(s^2 + 1)(3s^2 + 4)}$$

$$\rightarrow \begin{cases} s^2 + 1 = 0 \rightarrow s^2 = -1 \rightarrow \omega = 1 \\ 3s^2 + 4 = 0 \rightarrow s^2 = -\frac{4}{3} \rightarrow \omega = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

بنابراین فرکانس‌های $\omega = 1$ و $\omega = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ در حالت دائمی در $i(t)$ وجود دارند.

۴- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با توجه به محل صفرها و قطب‌ها، تابع شبکه به صورت زیر است:

$$H(s) = \frac{K(s+2)(s-2)}{(s^2+16)}$$

با در نظر گرفتن بهره DC برابر 1- (به ازای $S=0$) داریم:

$$H(0) = \frac{-4K}{16} = -1 \rightarrow K = 4$$

بنابراین برای ورودی $e^{-at}u(t)$ داریم:

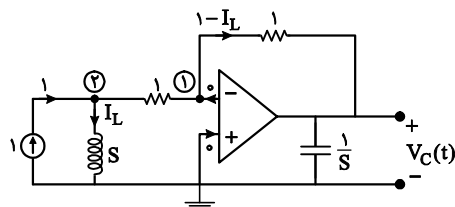
$$Y(s) = H(s) \times X(s) = \frac{4(s+2)(s-2)}{(s^2+16)} \times \frac{1}{s+a} = \frac{4(s+2)(s-2)}{(s+a)(s^2+16)}$$

برای این که جمله Ke^{-at} در خروجی ظاهر نشود، باید قطب $s = -a$ با یکی از صفرهای صورت تابع شبکه حذف شود.

با توجه به $a > 0$ ، باید $a = 2$ باشد.

۵- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با انتقال مدار به حوزه لاپلاس و KCL زدن در سرهای ورودی آپ امپ داریم:



$$I_+ = I_1 = 0$$

$$V_+ = V_- = 0$$

$$KCL(2): 1 = I_L + \frac{V_2 - V_1}{1} = I_L + \frac{SI_L - 0}{1} \Rightarrow 1 = I_L + SI_L$$

$$\rightarrow I_L = \frac{1}{S+1}$$

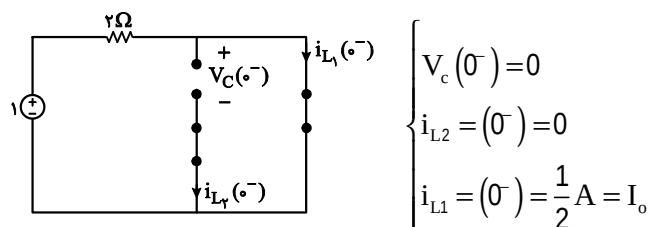
و با KVL زدن در خروجی داریم:

$$0 + (1 - I_L) \times 1 + V_c(S) = 0 \rightarrow V_c(S) = -(1 - I_L) = I_L - 1$$

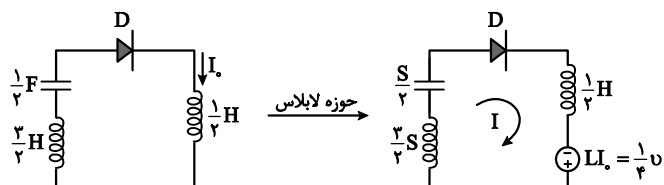
$$\rightarrow V_c(S) = \frac{1}{S+1} - 1 \xrightarrow{L^{-1}} V_c(t) = e^{-t}u(t) - \delta(t)$$

۶- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با تحلیل مدار قبل از باز شدن کلید با استفاده از رابطه‌ی بی‌نهایت داریم: ($t=0^-$)



پس از باز شدن کلید، با انتقال مدار به حوزه لاپلاس و نوشتن KVL داریم:



$$\text{KVL: } \frac{s}{2} I(s) - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} SI(s) + \frac{I(s)}{\frac{s}{2}} = 0$$

$$\rightarrow I(s) = \frac{\frac{1}{4}}{2s + \frac{2}{s}} = \frac{1}{8} \frac{s}{s^2 + 1} \rightarrow i(t) = \frac{1}{8} \cos t$$

بنابراین جریان سلف که همان جریان دیود هم هست در $t = \frac{\pi}{2} s$ صفر می‌شود و دیود خاموش می‌شود و به دلیل مدار

باز شدن حلقه و صفر شدن جریان خازن، ولتاژ خازن ثابت باقی می‌ماند. انرژی ذخیره شده در خازن برابر است با:

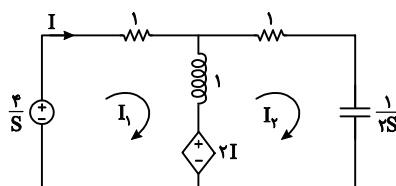
$$V_c\left(\frac{\pi^-}{2}\right) = V_L\left(\frac{\pi^-}{2}\right) = L_{eq} \frac{di_L}{dt} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = -\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{8} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$W_C = \frac{1}{2} C V_C^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \rightarrow W_C = \frac{1}{64} J$$

۷- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

با توجه به این که برای $t < 0$ کلید باز بوده است، ولتاژ اولیه‌ای در خازن وجود ندارد. با انتقال مدار به حوزه لاپلاس و

نوشتن معادلات مش داریم:



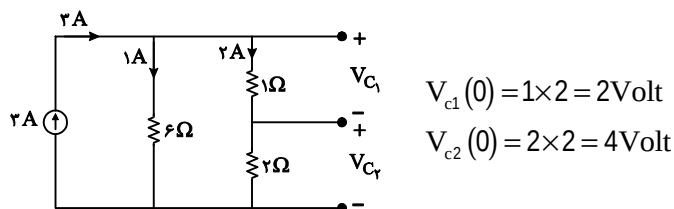
$$\begin{cases} I + (I - I_2) + 2I = \frac{4}{s} \\ I_2 + \frac{1}{2s}I_2 - 2I + (I_2 - I) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4I - I_2 = \frac{4}{s} \\ -3I + \left(2 + \frac{1}{2s}\right)I_2 = 0 \end{cases}$$

از حل این معادله نسبت به I داریم:

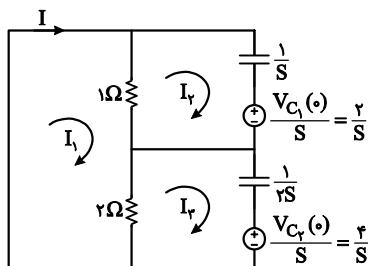
$$I(s) = \frac{8s+2}{s(5s+2)} = \frac{1/6s+0/4}{s(s+0/4)} = \frac{1}{s} + \frac{0/6}{s+0/4} \xrightarrow{L^{-1}} i(t) = (1 + 0/6e^{-0/4t})u(t)$$

۸- گزینه ی «۴» صحیح است.

برای $t < 0$ مدار به حالت دائمی رسیده است و خازن ها پر شده و مدار باز می شوند. بنابراین جریان گذرنده از مقاومت 6 اهمی برابر یک آمپر و جریان گذرنده از اتصال سری مقاومت های یک اهمی و 2 اهمی برابر 2 آمپر است. (تقسیم جریان) پس برای ولتاژ خازن ها داریم:



بنابراین در لحظه $t = 0$ با بسته شدن کلید S ، خازن ها دارای ولتاژ اولیه هستند و منبع جریان اتصال کوتاه می شود. با انتقال مدار حاصل به حوزه لاپلاس داریم:



با نوشتن معادلات مش خواهیم داشت:

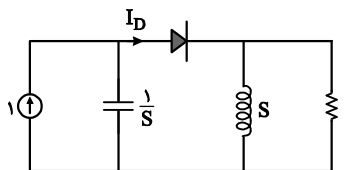
$$\begin{cases} (I_1 - I_2) + 2(I_1 - I_3) = 0 \\ (I_2 - I_1) + \frac{1}{s}I_2 + \frac{2}{s} = 0 \\ 2(I_3 - I_1) + \frac{1}{2s}I_3 + \frac{4}{s} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3I_1 - I_2 - 2I_3 = 0 \\ -I_1 + \left(1 + \frac{1}{s}\right)I_2 = -\frac{2}{s} \\ -2I_1 + \left(2 + \frac{1}{2s}\right)I_3 = -\frac{4}{s} \end{cases}$$

با حل این معادله برحسب I_1 به دست می‌آوریم:

$$I(s) = I_1(s) = \frac{-4s-3}{s+\frac{1}{2}} = -4 + \frac{-1}{s+\frac{1}{2}} \xrightarrow{L^{-1}} i(t) = -4\delta(t) - e^{-\frac{t}{2}}u(t)$$

۹- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

مدار را به حوزه لاپلاس منتقل می‌کنیم و جریان دیود را به دست می‌آوریم:



$$I_D(s) = \frac{\frac{1}{s}}{\frac{1}{s} + (s \parallel 1)} \times 1 = \frac{s+1}{s^2+s+1} = \frac{s+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{s^2+s+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{\left(s+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

و با عکس لاپلاس گرفتن داریم:

$$i_D(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right)$$

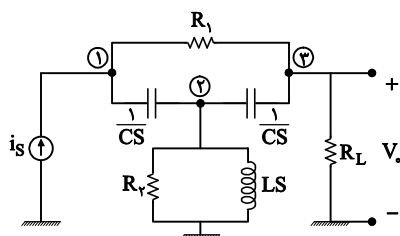
برای این که دیود قطع شود باید $i_D(t) = 0$ باشد. در نتیجه:

$$i_D(t) = 0 \rightarrow \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t = 0 \rightarrow \frac{\sin \frac{\sqrt{3}}{2}t}{\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t} = \tan \frac{\sqrt{3}}{2}t = -\sqrt{3}$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}t = \frac{2\pi}{3} \rightarrow t = \frac{4\sqrt{3}\pi}{3} \text{ sec}$$

۱۰- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با انتقال مدار به حوزه لاپلاس و نوشتن معادلات گره به فرم ماتریسی داریم:



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + CS & -CS & -\frac{1}{R_1} \\ -CS & 2CS + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{LS} & -CS \\ -\frac{1}{R_1} & -CS & CS + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

برای این که ولتاژ خروجی $V_o = E_3$ مستقل از فرکانس تحریک، برابر صفر باشد باید دترمینان حاصل از حذف سطر اول و ستون سوم برابر با صفر باشد، یعنی:

$$C^2 S^2 + \frac{1}{R_1} \left(2CS + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{LS} \right) = 0$$

با قرار دادن $S = j\omega$ داریم:

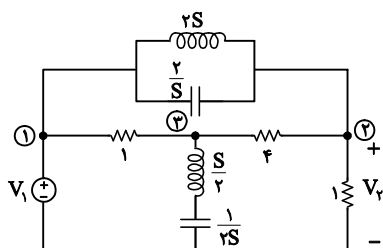
$$-C^2 \omega^2 + \frac{1}{R_1 R_2} + j \left(\frac{2C\omega}{R_1} - \frac{1}{R_1 L \omega} \right) = 0$$

با مساوی صفر قرار دادن جزء حقیقی و موهومی:

$$\begin{cases} \omega^2 = \frac{1}{R_1 R_2 C^2} \\ \omega^2 = \frac{1}{2LC} \end{cases} \rightarrow \omega^2 = \frac{1}{R_1 R_2 C^2} = \frac{1}{2LC} \rightarrow R_1 R_2 = \frac{2L}{C}$$

۱۱- گزینه ی «۴» صحیح است.

با انتقال مدار به حوزه لاپلاس و نوشتن معادلات گره داریم:



$$\text{KCL}(3): \frac{V_3 - V_1}{1} + \frac{V_3}{\frac{S}{2} + \frac{1}{2S}} + \frac{V_3 - V_2}{4} = 0$$

$$\text{KCL}(2): \frac{V_2}{1} + \frac{V_2 - V_3}{4} + \frac{V_2 - V_1}{2S} + \frac{V_2 - V_1}{\frac{2}{S}} = 0$$

با مرتب کردن این دو رابطه:

$$\begin{cases} \left(\frac{5}{4} + \frac{2s}{s^2 + 1} \right) V_3 - \frac{1}{4} V_2 = V_1 \\ -\frac{1}{4} V_3 + \left(\frac{5}{4} + \frac{S^2 + 1}{2S} \right) V_2 = \frac{S^2 + 1}{2S} V_1 \end{cases}$$

با حل این دو معادله و حذف V_3 و به دست آوردن V_2 داریم:

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{10}{s}(s+1)^2}{\frac{10(s+1)^4}{s(s^2+1)}} = \frac{s^2+1}{(s+1)^2}$$

۱۲- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

معادلات حالت به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{cases} \frac{dV_C}{dt} = i_L + e(t) \\ \frac{di_L}{dt} = -V_C - i_L - e(t) \end{cases}$$

با محاسبه‌ی $\dot{i}_L$ از معادله‌ی اول و قرار دادن آن در معادله دوم داریم:

$$\begin{aligned} i_L = \frac{dV_C}{dt} - e(t) &\rightarrow \frac{di_L}{dt} = \frac{d^2V_C}{dt^2} - \frac{de(t)}{dt} \\ \frac{d^2V_C}{dt^2} - \frac{de(t)}{dt} &= -V_C - \frac{dV_C}{dt} + e(t) - e(t) \rightarrow \frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{dV_C}{dt} + V_C = \frac{de(t)}{dt} \end{aligned}$$

با فرض $e(t) = \delta(t)$ و گرفتن لاپلاس از دو طرف معادله داریم:

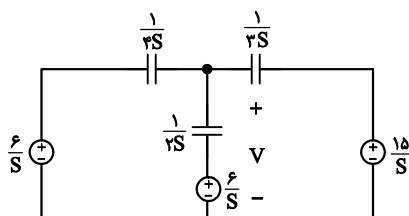
$$(s^2 + s + 1)V_C(s) = s \rightarrow V_C(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1} = \frac{\left(s + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

با گرفتن عکس لاپلاس خواهیم داشت:

$$V_C(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) = K e^{-\frac{t}{2}} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t + \theta \right) u(t)$$

۱۳- گزینه ی «۴» صحیح است.

مقادیر اولیه ولتاژ خازن ها را به صورت منابع ولتاژ سری با آن ها در نظر می گیریم و در گره 1، KCL می زنیم: (در حوزه لاپلاس)

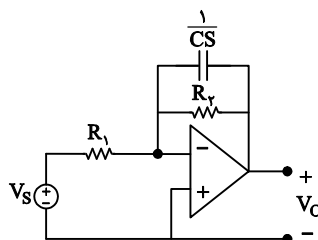


$$KCL(1): \left(V - \frac{6}{s}\right)4s + \left(V - \frac{6}{s}\right)2s + \left(V - \frac{15}{s}\right)3s = 0 \rightarrow 9sV = 81$$

$$\rightarrow V(s) = \frac{81}{9s} = \frac{9}{s} \xrightarrow{L^{-1}} V(t) = 9u(t) \rightarrow V(t=0^+) = 9\text{Volt}$$

۱۴- گزینه ی «۱» صحیح است.

با انتقال مدار به حوزه لاپلاس و نوشتن KCL در سر منفی ورودی آپ امپ، تابع تبدیل را به دست آوریم:



$$KCL: \frac{V_s}{R_1} + V_o \left(\frac{1}{R_2} + CS \right) \rightarrow \frac{V_o}{V_s} = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 + R_2 CS}$$

رابطه به دست آمده مشخص کننده فیلتری پایین گذر با بهره $\frac{R_2}{R_1}$ است. همچنین چون ذکر شده فیلتر پایین گذر

است، می توان به ازای $s \rightarrow 0$ ، بهره مدار را به دست آورد که داریم:

$$\left| \frac{V_o(s)}{V_s(s)} \right| = \lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 + R_2 C s} \right| = \left| \frac{-R_2}{R_1} \right| = \frac{R_2}{R_1} = 5$$

فرکانس قطع در مدارهای RC به صورت $\omega_c = \frac{1}{RC}$ بیان می شود، پس داریم:

$$\omega_c = \frac{1}{R_2 C} = \frac{1}{R_2 \times \frac{10^{-6}}{\pi}} = 2\pi f_c = 2\pi \times 1000 \rightarrow R_2 = 500\Omega$$

و در نتیجه داریم:

$$R_1 = \frac{R_2}{5} = 100\Omega$$

۱۵- گزینه ی «۲» صحیح است.

e^{-Ts} اگر در حوزه لاپلاس در تابعی ضرب شود، تابع را به اندازه T در حوزه زمان شیفت می دهد. همچنین اگر تابعی در

حوزه لاپلاس در $\frac{1}{1-e^{-Ts}}$ ضرب شود، به منزله متناوب شدن آن در حوزه زمان با دوره تناوب T است.

پس با ضرب صورت و مخرج $F(s)$ در مزدوج مخرج داریم:

$$F(s) = \frac{2e^{-s}}{1+e^{-2s}} \times \frac{1-e^{-2s}}{1-e^{-2s}} = \frac{2(e^{-s}-e^{-3s})}{1-e^{-4s}}$$

بنابراین عکس لاپلاس آن عبارت است از:

$$f(t) = 2(\delta(t-1) - \delta(t-3))$$

دوره تناوب $f(t)$ برابر $T = 4\text{sec}$ است. در نتیجه:

$$f(2/5) = 0$$

۱۶- گزینه ی «۴» صحیح است.

هر سه مجهول مربوط به صورت تابع تبدیل هستند، پس باید به دنبال صفرهای V_2 باشیم که این صفرها ناشی از

فرکانس تشدید مدارات LC سری و LC موازی هستند. برای مدار LC سری با خازن یک فاراد و سلف یک هانری داریم:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{1 \times 1}} = 1 \text{ rad/s} \rightarrow s = \pm j$$

و برای مدار LC موازی با خازن 0/5 فاراد و سلف L هانری خواهیم داشت:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \times L}} = \sqrt{\frac{2}{L}} \rightarrow s = \pm j\sqrt{\frac{2}{L}}$$

پس صورت تابع تبدیل به صورت زیر است:

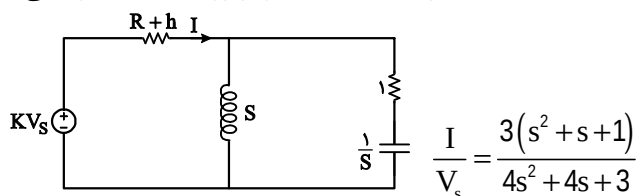
$$(s^2 + 1) \left(s^2 + \frac{2}{L} \right) = s^4 + \left(1 + \frac{2}{L} \right) s^2 + \frac{2}{L}$$

با توجه به این عبارت، ضریب عبارت‌های با توان فرد در صورت صفر می‌شود، پس $a = b = 0$ و برای c داریم:

$$1 + \frac{2}{L} = 5 \rightarrow L = \frac{1}{2} \text{ H} \rightarrow C = \frac{2}{L} = 4$$

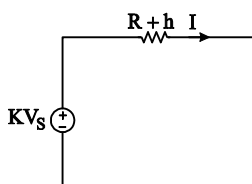
۱۷- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

چون شبکه N مقاومتی و بدون منبع مستقل است، می‌توان به جای سمت چپ مدار یک مدار معادل تونن قرار دهیم که به صورت یک مقاومت R_{th} و یک منبع ولتاژ kV_s است که k مقداری ثابت است و از روی N تعیین می‌شود.



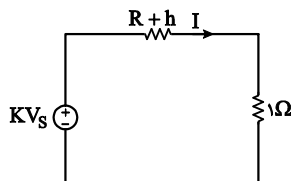
بنابراین مدار به صورت زیر تبدیل می‌شود:

در فرکانس صفر ($s=0$) سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز است، پس داریم:



$$\frac{I}{V_s} = \frac{k}{R_{th}} = \frac{3(s^2 + s + 1)}{4s^2 + 4s + 3} \Big|_{s=0} = \frac{3}{3} = 1$$

در فرکانس بی‌نهایت ($s \rightarrow \infty$) سلف مدار باز و خازن اتصال کوتاه است، در نتیجه:

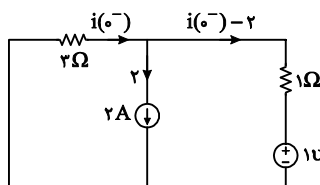


$$\frac{I}{V_s} = \frac{k}{R_{th} + 1} = \frac{3(s^2 + s + 1)}{4s^2 + 4s + 3} \Big|_{s \rightarrow \infty} = \frac{3}{4}$$

بنابراین برای k ، R_{th} داریم:

$$\begin{cases} \frac{k}{R_{th}} = 1 \\ \frac{k}{R_{th} + 1} = \frac{3}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ R_{th} = 3 \end{cases}$$

حال مدار را در لحظه $t = 0^-$ رسم می‌کنیم و با صفر کردن منبع ولتاژ مستقل و اعمال KVL در حلقه بیرونی داریم:



$$\text{KVL: } 3i(0^-) + 1(i(0^-) - 2) + 1 = 0 \rightarrow 4i(0^-) = 1 \rightarrow i(0^-) = \frac{1}{4} \text{ A}$$

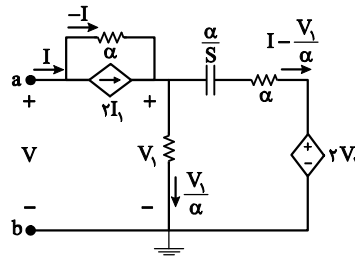
۱۸- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

چون پاسخ، نوسانی میراشونده است قطب‌های سیستم باید مختلط و دارای بخش حقیقی و موهومی باشند، در نتیجه گزینه‌ای «۳» و «۴» غلط هستند.

به علت وجود ضربه $\delta(t)$ در پاسخ $h(t)$ که لاپلاس آن یک می‌شود، درجه صورت و مخرج تابع تبدیل باید برابر باشد، پس باید به ازای دو قطب، دو صفر نیز داشته باشیم. بنابراین گزینه «۱» صحیح است.

۱۹- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

برای این منظور باید رابطه V و I را پیدا کنیم. با انتقال مدار به حوزه لاپلاس داریم:

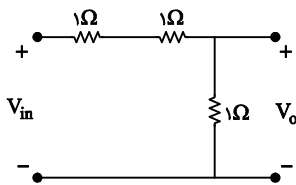


KVL در مش سمت راست: $V_1 = \left(\frac{\alpha}{s} + \alpha \right) \left(I - \frac{V_1}{\alpha} \right) + 2V_1 \rightarrow V_1 = \alpha(s+1)I$

KVL در مش سمت چپ: $V = -\alpha I + V_1 = -\alpha I + \alpha s I + \alpha I = \alpha s I \rightarrow Z = \frac{V}{I} = \alpha s$

یعنی مدار از دو سر ab معادل یک سلف با اندوکتانس α هانری است.

۲۰- گزینه‌ی «۳» صحیح است.



در فرکانس صفر ($s=0$) خازن‌ها مدار باز هستند. پس داریم:

$$\rightarrow \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{1}{3} = \frac{2s^2 + 3s + 1}{As^2 + Bs + C} \Big|_{s=0} = \frac{1}{C} \rightarrow C = 3$$

پس یا گزینه «1» یا «3» درست است که در آن‌ها A متفاوت است.

برای استفاده از $s \rightarrow \infty$ ابتدا باید R_1 و R_2 را به دست آوریم.

از روی تابع انتقال شبکه می‌توان صفرهای خروجی را به دست آورد:

$$2s^2 + 3s + 1 = 0 \rightarrow s = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \rightarrow s = -1, -\frac{1}{2}$$

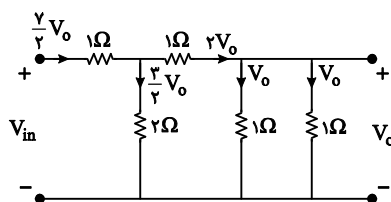
این صفرها معادل اتصال کوتاه شدن شاخه‌های RC است پس می‌توان گفت:

$$S_i = \frac{-1}{R_i C_i} \rightarrow R_i C_i = \frac{-1}{S_i} \rightarrow R_i C_i = 1, 2$$

برای سادگی یکی از این حالت‌ها را در نظر می‌گیریم:

$$R_1 C_1 = 2 \rightarrow \begin{cases} R_1 = 2\Omega \\ C_1 = 1F \end{cases}, \quad R_2 C_2 = 1 \rightarrow \begin{cases} R_2 = 1\Omega \\ C_2 = 1F \end{cases}$$

در نتیجه برای $s \rightarrow \infty$ داریم:



$$\text{KVL: } V_{in} = \frac{7}{2} V_o + 3V_o = \frac{13}{2} V_o \rightarrow \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{2}{13}$$

$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{2s^2 + 3s + 1}{As^2 + Bs + 3} \Big|_{s \rightarrow \infty} = \frac{2}{A} = \frac{2}{13} \rightarrow A = 13$$

۲۱- گزینه ی «۱» صحیح است.

با انتقال توابع به حوزه لاپلاس داریم:

$$h(t) = \sqrt{2}e^{-t} \cos(t + 45^\circ) u(t) = \sqrt{2}e^{-t} (\cos t \cos 45^\circ - \sin t \sin 45^\circ) u(t)$$

$$\rightarrow h(t) = e^{-t} (\cos t - \sin t) \xrightarrow{L} H(s) = \frac{(s+1)-1}{(s+1)^2 + 1} = \frac{s}{(s+1)^2 + 1}$$

برای ورودی $10\cos(2t - 23/4^\circ)$ به ازای $\omega = 2$ برای $H(j\omega)$ داریم:

$$H(j2) = \frac{j2}{(j2+1)^2 + 1} = \frac{j2}{-2+2j} = \frac{1}{j+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{R} - \text{tg}^{-1} \frac{1}{2}$$

پس برای خروجی داریم:

$$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)| |X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{5}} \times 10 = \frac{1}{\sqrt{5}} = 4/5$$

$$\mathbf{R}Y = \mathbf{R}X + \mathbf{R}H = -23/4^\circ - \text{tg}^{-1} \frac{1}{2}; -23/4 - 27^\circ; -50^\circ$$

بنابراین:

$$y(t) = 45 \cos(2t - 50^\circ) u(t)$$

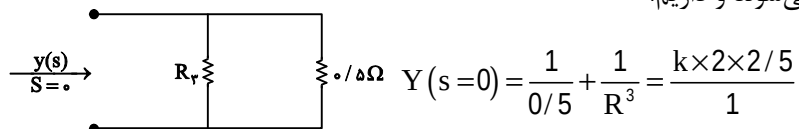
۲۲- گزینه ی «۲» صحیح است.

با استفاده از صفرها و قطب‌های داده شده، برای ادمیتانس ورودی داریم:

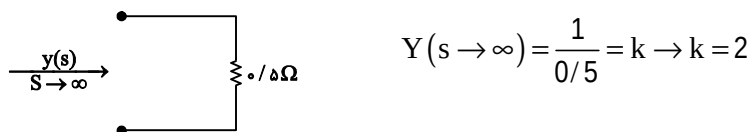
$$Y(s) = \frac{k(s+2)(s+2/5)}{(s+1)^2}$$

شرایط $s = 0$ و $s \rightarrow \infty$ را در تابع ادمیتانس و شکل مدار با هم تطبیق می‌دهیم:

در $s = 0$ سلف‌ها اتصال کوتاه می‌شوند و داریم:



و برای $s \rightarrow \infty$ سلف‌ها مدار باز هستند، در نتیجه:



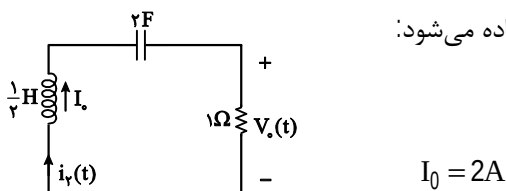
بنابراین:

$$2 + \frac{1}{R_3} = 2 \times 2 \times 2/5 = 10 \rightarrow \frac{1}{R_3} = 10 - 2 = 8 \rightarrow R_3 = \frac{1}{8} \Omega$$

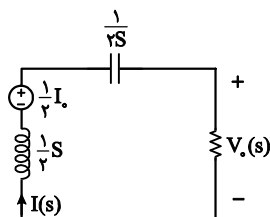
۲۳- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

با توجه به این که ولتاژ اولیه خازن‌ها صفر است و مدار متقارن می‌باشد، همچنین جریان اولیه سلف‌ها نیز یکسان است

در نتیجه از خازن $3F$ جریان نمی‌گذرد و مدار به صورت زیر ساده می‌شود:



با انتقال مدار به حوزه لاپلاس و نوشتن KVL داریم:



$$\text{KVL: } \frac{1}{2}sI_2(s) - \frac{1}{2}I_0 + \frac{1}{2s}I_2(s) + I_2(s) = 0 \rightarrow (s^2 + 2s + 1)I_2(s) = 2s \rightarrow I_2(s) = \frac{2s}{(s+1)^2}$$

با تجزیه کسرهای جزئی داریم:

$$I_2(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2} \xrightarrow{L^{-1}} i_2(t) = 2e^{-t} - 2te^{-t}$$

بنابراین:

$$V(t) = 1 \times i_2(t) = 2e^{-t} - 2te^{-t}, \quad t \geq 0$$

۲۴- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

از روی شکل دیده می‌شود که تابع شبکه دارای یک صفر مضاعف در مبدأ و یک جفت قطب مختلط مزدوج می‌باشد، پس تابع شبکه به صورت زیر است:

$$H(S) = \frac{KS^2}{(S+\alpha)^2 + \beta^2}$$

برای یافتن پاسخ پله می‌توان گفت:

$$Y(S) = H(S)X(S)$$

$$x(t) = u(t) \xrightarrow{L} X(S) = \frac{1}{S} \rightarrow y(S) = \frac{1}{S} \times \frac{KS^2}{(S+\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{KS}{(S+\alpha)^2 + \beta^2}$$

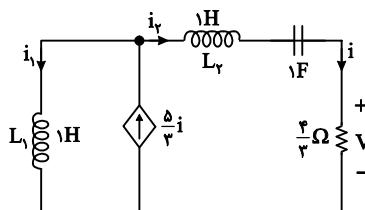
با استفاده از قضیه مقدار اولیه برای $t=0$ داریم:

$$y(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(S) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{KS^2}{(S+\alpha)^2 + \beta^2} = K$$

فقط گزینه «1» در $t=0$ دارای جواب غیر صفر است.

۲۵- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با نوشتن KCL در گره 1 داریم:



$$KCL(1): \frac{5}{3}i = i_1 + i_2 \xrightarrow{i=i_2} i_1 = \frac{2}{3}i_2$$

با KVL زدن در مش بیرونی برای $t > 0$ داریم:

$$KVL: L_1 \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + V_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_2(t) dt + \frac{4}{3}i_2$$

با در نظر گرفتن $V_C(0) = 1V$ ، $i_1(0^-) = 2A$ و $i_2(0^-) = 3A$ و لاپلاس گرفتن از دو طرف معادله فوق خواهیم داشت:

$$SI_1 - 2 = SI_2 - 3 + \frac{1}{S} + \frac{1}{S}I_2 + \frac{4}{3}I_2$$

با قرار دادن $I_1 = \frac{2}{3}I_2$ در رابطه فوق داریم:

$$\frac{2}{3}SI_2 - 2 = \left(S + \frac{1}{S} + \frac{4}{3}\right)I_2 + \frac{1}{S} - 3 \rightarrow I_2(S) = \frac{3(S-1)}{(S+1)(S+3)}$$

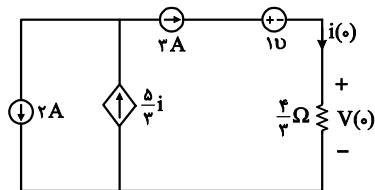
ولتاژ خروجی V به صورت زیر به دست می‌آید:

$$V = \frac{4}{3}I_2 \rightarrow V(S) = \frac{4(S-1)}{(S+1)(S+3)} = \frac{-4}{S+1} + \frac{8}{S+3}$$

با گرفتن عکس تبدیل لاپلاس داریم:

$$V(t) = -4e^{-t} + 8e^{-3t}$$

روش دوم: اگر مدار را در $t = 0^+$ رسم کنیم:



$$i(0^+) = 3A \rightarrow V(0^+) = \frac{4}{3} \times 3 = 4V$$

که با قرار دادن $t = 0$ در گزینه‌ها، فقط گزینه «2» برابر 4 ولت می‌شود.

۲۶- گزینه ی «۲» صحیح است.

با تبدیل S به $j\omega$ و به ازای $\omega = 2$ داریم:

$$H(j2) = \frac{j2(j2 - \alpha)}{(j2 + \alpha)((j2)^2 + 1)} = \frac{-4 - j2\alpha}{-3(\alpha + j2)} = \frac{4 + j2\alpha}{3\alpha + j6}$$

برای زاویه $H(j\omega)$ می‌توان نوشت:

$$\text{RH}(j2) = \text{tg}^{-1} \frac{2\alpha}{4} - \text{tg}^{-1} \frac{6}{3\alpha}$$

برای این که $\text{RH}(j\omega) = 0$ باشد لازم است که:

$$\frac{2\alpha}{4} = \frac{6}{3\alpha} \rightarrow \alpha^2 = 4 \rightarrow \alpha = \pm 2 \xrightarrow{\alpha > 0} \alpha = 2$$

۲۷- گزینه ی «۳» صحیح است.

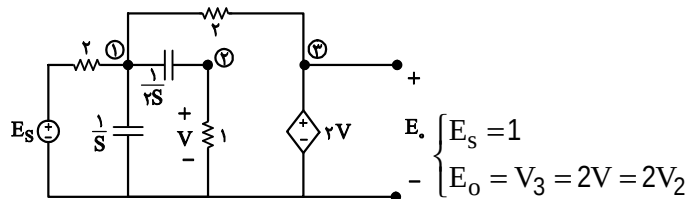
با توجه به منحنی داده شده می‌توان گفت صفرهای تابع شبکه در محل‌های $\omega = 0$ و $\omega = \pm\omega_2$ قرار دارند، یعنی تابع

شبکه حداقل سه صفر دارد. به دلیل این که وقتی $\omega \rightarrow \infty$ میل می‌کند، منحنی اندازه به سوی صفر میل می‌کند

بنابراین درجه مخرج حداقل یکی باید بیش‌تر از درجه صورت باشد. پس حداقل چهار قطب خواهد داشت.

۲۸- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

با انتقال مدار به حوزه فرکانس و نوشتن KVL و KCL داریم:



$$\text{KCL}(1): \frac{V_1 - E_s}{2} + sV_1 + 2s(V_1 - V_2) + \frac{V_1 - V_3}{2} = 0$$

$$\text{KCL}(2): V_2 + 2s(V_2 - V_1) = 0$$

از حل این معادلات نسبت به V_2 داریم:

$$V_2 = \frac{s}{(2s+1)(s+1)}$$

بنابراین داریم:

$$E_o = 2V_2 = \frac{2s}{(2s+1)(s+1)} = \frac{-1}{s + \frac{1}{2}} + \frac{2}{s+1}$$

و با عکس لاپلاس گرفتن داریم:

$$e_o(t) = \left(-e^{-\frac{t}{2}} + 2e^{-t} \right) u(t)$$

۲۹- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با KCL زدن در گره بالایی مدار داریم:

$$\frac{dV_C}{dt} + V_C = i_s(t) = \cos(t + \varphi) = \cos t \cos \varphi - \sin t \sin \varphi$$

با انتقال مدار به حوزه لاپلاس به دست می‌آوریم:

$$sV_C + V_C = \frac{s}{s^2+1} \cos \varphi - \frac{1}{s^2+1} \sin \varphi \rightarrow sV_C(s) + V_C(s) = \frac{s \cos \varphi - \sin \varphi}{s^2+1}$$

$$\rightarrow V_C(s) = \frac{s \cos \varphi - \sin \varphi}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{a}{(s+1)} + \frac{bs+c}{s^2+1}$$

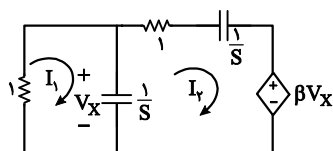
برای این که حالت گذرا حذف گردد باید مانده قطب $s = -1$ ، یعنی a ، در گسترش به کسرهای جزئی برابر صفر باشد،
در نتیجه:

$$a = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) V_C(s) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s \cos \varphi - \sin \varphi}{s^2+1} = \frac{-\cos \varphi - \sin \varphi}{2} = 0 \rightarrow \cos \varphi = -\sin \varphi$$

$$\rightarrow \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \tan \varphi = -1 \rightarrow \varphi = 135^\circ$$

۳۰- گزینه ی «۳» صحیح است.

با انتقال مدار به حوزه لاپلاس و نوشتن معادلات مش داریم:



$$\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & 1+\frac{2}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta V_x \end{bmatrix}$$

با در نظر گرفتن $V_x = \frac{1}{s}(I_1 - I_2)$ و انتقال جمله βV_x به درون ماتریس سمت چپ داریم:

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} + \frac{\beta}{s} & 1+\frac{2}{s} - \frac{\beta}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه سیستم، دترمینان ماتریس ضرائب است، در نتیجه:

$$\Delta(s) = \left(1 + \frac{1}{s}\right) \left(1 + \frac{2-\beta}{s}\right) + \left(\frac{\beta}{s} - \frac{1}{s}\right) \left(\frac{1}{s}\right) = 0 \rightarrow 2s^2 + (3-\beta)s + (1-\beta) = 0$$

برای این که مدار در حالت نوسانی بی‌اتلاف قرار گیرد باید ضریب جمله s صفر شود، یعنی:

$$3-\beta=0 \rightarrow \beta=3$$

۳۱- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با توجه به دیاگرام صفر و قطب، تابع شبکه به صورت زیر به دست می‌آید:

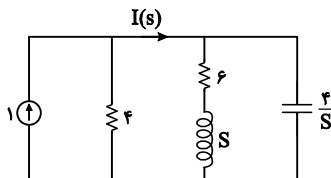
$$H(s) = \frac{K(s+0.5-j4)(s+0.5+j4)}{s(s+1)(s+2)}$$

به دلیل وجود s در مخرج، فاز آن در $\omega=0$ و $\omega=\infty$ برابر -90° است. همچنین در $\omega=0$ دامنه نامحدود و در

$\omega=\infty$ دامنه صفر است.

۳۲- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با انتقال مدار به حوزه لاپلاس و استفاده از تقسیم جریان داریم:



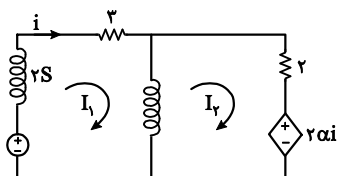
$$I(s) = \frac{4}{4 + \left[(6+s) \parallel \frac{4}{s} \right]} \times 1 = \frac{s^2 + 6s + 4}{s^2 + 7s + 10} = 1 + \frac{-s - 6}{s^2 + 7s + 10}$$

با تجزیه به کسرهای جزیی داریم:

$$I(s) = 1 + \frac{-\frac{4}{3}}{s+2} + \frac{\frac{1}{3}}{s+5} \xrightarrow{L^{-1}} i(t) = \delta(t) + \left(-\frac{4}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-5t} \right) u(t)$$

۳۳- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

با نوشتن معادلات مش به فرم ماتریسی داریم:



$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2}s+3 & -\frac{s}{2} \\ -\frac{s}{2} & \frac{s}{2}+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_s \\ -2\alpha I_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{5}{2}s+3 & -\frac{s}{2} \\ -\frac{s}{2} & \frac{s}{2}+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

برای این که مدار میرای بحرانی باشد، باید معادله مشخصه دارای ریشه‌های مکرر باشد. یعنی، دترمینان ماتریس مش را محاسبه کرده و دلتای آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\Delta(s) = \left(\frac{5}{2}s + 3 \right) \left(\frac{s}{2} + 2 \right) + \frac{1}{2}s \left(-\frac{s}{2} + 2\alpha \right) = 0 \rightarrow \Delta(s) = s^2 + (6/5 + \alpha)s + 6 = 0$$

$$\Delta = (6/5 + \alpha)^2 - 4 \times 6 = (65 + \alpha)^2 - 24 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = -1/6 \\ \alpha = -11/4 \end{cases}$$

جواب $\alpha = -11/4$ قابل قبول نیست زیرا به ازای این مقدار α ، مدار میرای بحرانی نمی‌شود پس جواب فقط $\alpha = -1/6$ است.

۳۴- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

پایدار نمایی یعنی تمام فرکانس‌های طبیعی مدار در نیم صفحه چپ صفحه مختلط قرار دارد. با توجه به این که ورودی‌های داده شده در هر چهار گزینه نمایی‌های افزایشی هستند، برای این که $V_0(\infty) = 0$ باشد باید اثر ورودی در پاسخ مدار حذف شود و این وقتی حاصل می‌شود که صفر تابع شبکه، قطب ناشی از ورودی نمایی افزایش را حذف کند.

با محاسبه‌ی تابع شبکه $H(s) = \frac{V_0}{I_s}$ داریم:

$$H(s) = \frac{2(s-1)}{6s^3 + 47s^2 + 55s + 2}$$

صفر تابع شبکه در $s=1$ است.

بنابراین اگر ورودی به صورت $i_s(t) = e^t u(t)$ باشد، اثر آن با صفر تابع شبکه حذف می‌شود.

۳۵- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

مرتبه‌ی مدار برابر است با:

$$3 - 1 - 0 = 2 = \text{تعداد حلقه خازنی} - \text{تعداد کات ست سلفی} - \text{تعداد عناصر ذخیره کننده انرژی} = \text{مرتبه مدار}$$

بنابراین مخرج حداکثر از درجه 2 خواهد بود.

با محاسبه‌ی تابع شبکه یا به دست آوردن پاسخ ضربه مدار دیده می‌شود که درجه صورت در حالت کلی حداکثر از مرتبه 2 است.

فصل دوازدهم: فرکانس‌های طبیعی مدار

به کمک فرکانس‌های طبیعی در مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان، می‌توان پاسخ شبکه را به ازای ورودی صفر به دست آورد. این مفاهیم برای درک رفتار مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان اهمیت فراوانی دارد. خواهیم دید که فرکانس‌های طبیعی یک مدار تنها به توپولوژی مدار و مقادیر اجزای آن بستگی دارد و به ورودی مدار وابسته نمی‌باشد.

12-1- فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه

فرکانس‌های طبیعی به ذات مدار بستگی دارد، یعنی به ورودی وابسته نیست و تابع گراف مدار، نوع عناصر و مقادیرشان و شرایط اولیه است. به عبارت دیگر، فرکانس‌های طبیعی به ورودی و روش تحلیل مدار بستگی ندارد.

فرکانس طبیعی متغیری مانند x به صورت زیر تعریف می‌شود:

اگر برای شرایط اولیه معینی، پاسخ ورودی صفر x ، شامل جمله‌ای مانند $k_1 e^{s_1 t}$ باشد، s_1 یک فرکانس طبیعی متغیر x است.

برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه، از معادله دیفرانسیل مینی مال شبکه استفاده می‌کنیم. معادله دیفرانسیل مینی مال شبکه، یک معادله دیفرانسیل همگن با کم‌ترین درجه است که تمام پاسخ‌های ورودی صفر متناظر با هر حالت اولیه را پیش‌بینی می‌کند که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$Q(D).x = 0, \quad D = \frac{\partial}{\partial t}$$

که x یک متغیر شبکه و $Q(D)$ یک چندجمله‌ای به شکل معادله دیفرانسیل است.

حال فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه، ریشه‌های معادله مشخصه مینی مال متغیر مربوطه است. این فرکانس‌های طبیعی در پاسخ ورودی صفر ظاهر می‌شوند.

به تعداد جملاتی از پاسخ حالت صفر x که شامل جمله $e^{s_1 t}$ بوده و به طور خطی از هم مستقل باشند، مرتبه فرکانس طبیعی متغیر x می‌گویند. مثلاً در پاسخ زیر:

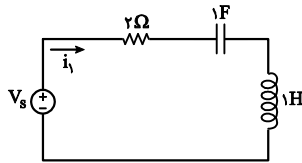
$$y(t) = 4e^{-2t} - 2te^{-2t} + 7e^{-t}$$

$s_1 = -1$ فرکانس طبیعی متغیر y از مرتبه یک و $s_2 = -2$ از مرتبه دو است.

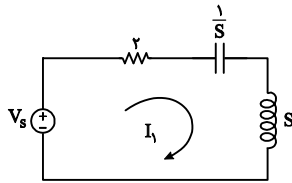
برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی یک متغیر مدار، ابتدا کلیه منابع مستقل مدار را صفر می‌کنیم و سپس پاسخ ورودی صفر را با داشتن شرایط اولیه برای متغیر مربوطه می‌نویسیم. در این صورت s_i ‌های به دست آمده، فرکانس‌های

طبیعی متغیر شبکه هستند.

مثال ۱: در مدار شکل زیر، فرکانس‌های طبیعی متغیر i_1 را به دست آورید.



با انتقال مدار به حوزه فرکانس s داریم:



$$\text{KVL: } \left(2 + \frac{1}{s} + s \right) I_1 = V_s$$

با اتصال کوتاه نمودن V_s داریم:

$$V_s = 0 \rightarrow \left(2 + \frac{1}{s} + s \right) I_1 = 0 \rightarrow (s+1)^2 I_1 = 0 \rightarrow s_{1,2} = -1$$

$s_{1,2} = -1$ فرکانس‌های متغیر i_1 بوده که از مرتبه دو می‌باشند.

در این حالت، با صفر کردن منابع مستقل و انتقال مدار به حوزه لاپلاس (بدون در نظر گرفتن شرایط اولیه)، مدار امپدانسی حاصل را تحلیل نموده و معادله مشخصه حاکم بر متغیر موردنظر را یافته که با حل آن، فرکانس‌های طبیعی متغیر مطلوب به دست می‌آید.

12-2- فرکانس‌های طبیعی یک شبکه

اجتماع یا مجموعه همه فرکانس‌های طبیعی تمامی متغیرهای یک شبکه را، فرکانس‌های طبیعی آن شبکه می‌گوییم. به عبارت دیگر، فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه، زیر مجموعه‌ای از فرکانس‌های طبیعی شبکه است. اگر معادله مشخصه یک شبکه به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \rightarrow \text{ریشه‌های معادله} = s_i$$

به ریشه‌های این معادله فرکانس‌های طبیعی متغیر مانند x می‌گویند. حال اگر تمام فرکانس‌های طبیعی تمام متغیرهای جریان و ولتاژ شبکه را به دست آوریم، به مجموعه به دست آمده، فرکانس‌های طبیعی شبکه می‌گویند.

۱۲-۲-۱ به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی یک شبکه

برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی یک شبکه، معمولاً از روش‌های منظم تحلیل مدار استفاده می‌شود. می‌توان از هر یک از روش‌های تحلیل نظیر روش منظم گره، روش منظم مش، روش منظم حلقه و یا روش منظم کات ست استفاده نمود.

ابتدا با تحلیل مدار ماتریس شبکه (مانند (Y_q, Y_n, Z_I, Z_m)) را به دست می‌آوریم و سپس دترمینان آن را محاسبه می‌کنیم ریشه‌های غیر صفر دترمینان ماتریس شبکه، برابر فرکانس‌های طبیعی (غیر صفر) شبکه هستند.

نکته: از این روش برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه نمی‌توان استفاده کرد زیرا ممکن است بعضی فرکانس‌های طبیعی شبکه در برخی از متغیرها ظاهر نشوند.

پس برای فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه، باید معادله دیفرانسیل آن متغیر را یافت و از ریشه‌های معادله مشخصه، به فرکانس‌های طبیعی آن متغیر دست یافت.

نکته: علاوه بر استفاده از ماتریس شبکه برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی یک شبکه، می‌توان از $\det(sI - A)$ نیز فرکانس‌های طبیعی (غیر صفر) شبکه را پیدا کرد. منظور از A ، ماتریس حالت شبکه است.

۱۲-۲-۲- فرکانس‌های طبیعی و تابع شبکه

هر قطب تابع شبکه هر متغیر مدار، یک فرکانس طبیعی متغیر مربوطه است:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \sum_i \frac{k_i}{(s - p_i)^n}$$

p_i فرکانس طبیعی مرتبه n ام است.

به عبارت دیگر، برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه، پس از صفر کردن منابع مستقل، قطب‌های

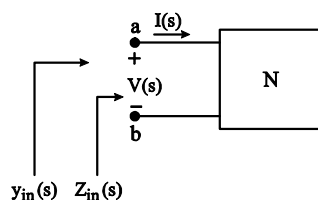
$$\text{تابع تبدیل } H = \frac{Y}{X} \text{ را پیدا کنیم.}$$

نکته قابل توجه این که، چون فرکانس‌های طبیعی مربوط به حالت ورودی صفر است، هنگام بررسی تابع تبدیل:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\text{تبدیل لاپلاس خروجی}}{\text{تبدیل لاپلاس ورودی}}$$

و در نظر گرفتن قطب‌های آن به عنوان فرکانس‌های طبیعی شبکه، مدار متناظر شبکه‌ای است که منابع در آن صفر شده‌اند. (منبع ولتاژ اتصال کوتاه و منبع جریان اتصال باز) بنابراین ورودی مستقل یک واسطه است برای به دست آوردن تابع تبدیل و در نتیجه فرکانس‌های طبیعی شبکه. به عبارت دیگر، تابع تبدیل مستقل از «مقدار ورودی» است ولی به «جنس ورودی» بستگی دارد. یعنی این که ورودی، منبع ولتاژ باشد یا منبع جریان در گراف شبکه مورد بررسی متفاوت است.

برای درک بهتر این موضوع، در یک شبکه دو تابع تبدیل متفاوت امپدانس ورودی و admittance ورودی را بررسی می‌کنیم.



تابع تبدیل $Z_{in}(s)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z_{in}(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$$

یعنی تابع تبدیلی که در آن ورودی از جنس «منبع جریان» است.

بنابراین قطب‌های تابع تبدیل $Z_{in}(s)$ یا امپدانس ورودی، برابر فرکانس‌های طبیعی شبکه است وقتی منبع در آن صفر شده است، یعنی دو سر ab مدار باز باشد.

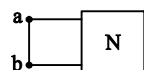
به عبارت دیگر، قطب‌های $Z_{in}(s)$ فرکانس‌های طبیعی هستند.

و تابع تبدیل $Y_{in}(s)$ به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$Y_{in}(s) = \frac{I(s)}{V(s)}$$

یعنی تابع تبدیلی که در آن ورودی از جنس «منبع ولتاژ» است.

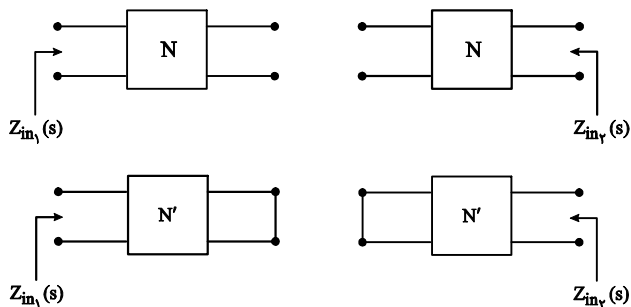
بنابراین قطب‌های تابع تبدیل $Y_{in}(s)$ یا ادمیتانس ورودی، برابر فرکانس‌ها طبیعی شبکه است وقتی منبع در آن صفر شده است، یعنی دو سر ab اتصال کوتاه باشد. به عبارت دیگر، قطب‌های $Y_{in}(s)$ فرکانس‌های طبیعی هستند.



هستند.

نکته قابل توجه این که، بین فرکانس‌های طبیعی دو شبکه فوق، هیچ ارتباطی وجود ندارد.

مثال ۲: در هر یک از شبکه‌های N و N' ، چه ارتباطی بین $Z_{in1}(s)$ و $Z_{in2}(s)$ وجود دارد؟



برای شبکه N می توان گفت:

قطب های $Z_{in1}(s)$ و $Z_{in2}(s)$ فرکانس های طبیعی شبکه هستند، یعنی با هم برابرند.

به عبارت دیگر، قطب های آن ها، همگی زیر مجموعه فرکانس های طبیعی شبکه هستند.

و برای شبکه N' می توان گفت:

قطب های $Z_{in1}(s)$ فرکانس های طبیعی و قطب های $Z_{in2}(s)$ فرکانس های طبیعی

هستند و این دو شبکه هیچ ارتباطی با یکدیگر ندارند.

به عبارت دیگر، قطب های $Y_{in1}(s)$ و $Y_{in2}(s)$ فرکانس های طبیعی شبکه هستند، یعنی ادمیتانس ها

دارای قطب های یکسانی اند. به عبارت دیگر، صفرهای $Y_{in1}(s)$ و $Y_{in2}(s)$ با هم یکسان بوده و برابر فرکانس های

طبیعی شبکه هستند.

۱۲-۲-۳ حذف فرکانس های طبیعی یک متغیر شبکه

از آن جایی که در جمله $k_i e^{s_i t}$ ، ضریب ثابت k_i تابعی از شرایط اولیه است، این امکان وجود دارد که به ازای برخی شرایط اولیه خاص، ضریب k_i صفر گردد و در نتیجه فرکانس طبیعی متناظر با این ضرایب، در خروجی ظاهر نگردد.

$$(0 \times e^{s_i t} = 0)$$

برای یافتن این شرایط اولیه خاص، کافی است هنگام انتقال مدار به حوزه لاپلاس، شرایط اولیه سلف ها و خازن ها را هم به حوزه لاپلاس منتقل کنیم.

همچنین می توان ورودی از جنس توابع ضربه را به گونه ای انتخاب کرد که یکی از فرکانس های طبیعی مدار حذف شود.

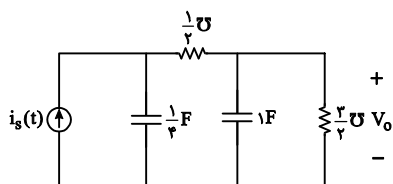
برای درک بهتر این موضوع به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳: در مدار شکل زیر:

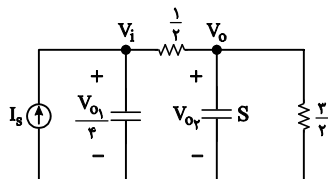
الف) فرکانس های طبیعی شبکه را به دست آورید.

ب) در حالت ورودی صفر، شرایط اولیه را طوری تعیین کنید که خروجی V_0 فقط شامل فرکانس 1- باشد.

ج) در شرایط حالت صفر، ورودی را طوری تعیین کنید که خروجی V_0 فقط شامل فرکانس 1- باشد.



الف) با انتقال مدار به حوزه لاپلاس داریم:



به ترتیب شرایط اولیه خازن های $\frac{1}{4}F$ و $1F$ است که با انتقال مدار به حوزه لاپلاس، همراه با آن‌ها منتقل شده‌اند.

با حل مدار به روش منظم گره داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{s}{4} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} V_{o1} \\ V_{o2} \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ Y_n ورودی شرایط اولیه

با حل این دستگاه:

$$V_o = \frac{2}{(s+1)(s+3)} I_s + \frac{(s+2)V_{o2} + \frac{1}{2}V_{o1}}{(s+1)(s+3)}$$

برای فرکانس‌های طبیعی شبکه داریم:

$$\det Y_n = 0 \rightarrow \left(\frac{s}{4} + \frac{1}{2} \right) (s+2) - \frac{1}{4} = 0 \rightarrow s = -1, -3$$

ب) برای حذف فرکانس طبیعی $s = -3$ در حالت ورودی صفر داریم: ($I_s = 0$)

$$V_o = \frac{(s+2)V_{o2} + \frac{1}{2}V_{o1}}{(s+1)(s+3)}$$

باید صورت عبارت ضریبی از $(s+3)$ باشد، پس خواهیم داشت:

$$(s+2)V_{o2} + \frac{1}{2}V_{o1} = k(s+3)$$

اگر $k = V_{o2}$ در نظر بگیریم:

$$k = V_{o2} \rightarrow 3V_{o2} = 2V_{o2} + \frac{1}{2}V_{o1} \rightarrow V_{o1} = 2V_{o2}$$

یعنی هرگاه ولتاژ اولیه خازن $(V_{o1})\frac{1}{4}F$ دو برابر ولتاژ اولیه خازن $(V_{o2})1F$ باشد، خروجی $V_o(t)$ عبارت e^{-3t} را ندارد و فقط شامل e^{-t} است.

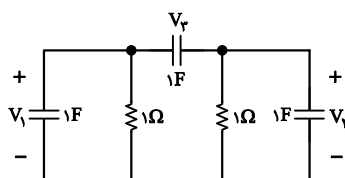
(ج) در شرایط حالت صفر نیز داریم: ($V_{o1} = V_{o2} = 0$)

$$I_s = K(s+3) \xrightarrow{L^{-1}} i_s(t) = K\delta'(t) + 3K\delta(t)$$

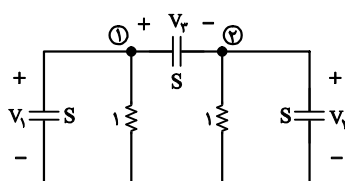
مثال ۴: در مدار شکل زیر:

الف) فرکانس‌های طبیعی متغیرهای V_1 و V_3 را به دست آورید.

ب) شرایط اولیه را به گونه‌ای تعیین کنید که فقط فرکانس $-\frac{1}{3}$ ظاهر شود.



الف) با انتقال مدار به حوزه لاپلاس و بیان مقادیر عناصر برحسب ادمیتانس داریم:



با تحلیل مدار به روش منظم گره داریم:

$$Y_n = \begin{bmatrix} 2s+1 & -s \\ -s & 2s+1 \end{bmatrix}$$

$$\det(Y_n) = (2s+1)^2 - s^2 = 0 \rightarrow 3s^2 + 4s + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} s_1 = -1 \\ s_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$



ب) با KCL از زدن در گره‌های 1 و 2 داریم:

$$\text{KCL (1): } V_1' + V_1 + V_3' = 0$$

$$\text{KCL (2): } V_2' + V_2 - V_3' = 0$$

با تفاضل این دو معادله و با توجه به این که $V_3 = V_1 - V_2$ است خواهیم داشت:

$$\begin{cases} V_1 - V_2 + V_1' + V_2' + 2V_3' = 0 \\ V_3 = V_1 - V_2 \rightarrow V_3' = V_1' - V_2' \end{cases} \rightarrow 3V_3' + V_3 = 0$$

با حل این معادله داریم:

$$3V_3' + V_3 = (3s+1)V_3 = 0 \rightarrow 3s+1=0 \rightarrow s = -\frac{1}{3}$$

بنابراین به خودی خود و بدون تأثیر شرایط اولیه، در متغیر $V_3(t)$ فقط فرکانس $-\frac{1}{3}$ ظاهر می‌شود.

با در نظر گرفتن شرایط اولیه و تبدیل لاپلاس گرفتن از معادلات به دست آمده داریم:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} V_1' + V_1 + V_3' = 0 \\ V_2' + V_2 - V_3' = 0 \end{cases} \xrightarrow{V_3 = V_1 - V_2} \begin{cases} 2V_1' + V_1 - V_2' = 0 \\ 2V_2' + V_2 - V_1' = 0 \end{cases} \xrightarrow{L} \\ &\begin{cases} 2L(V_1') + L(V_1) - L(V_2') = 0 \\ 2L(V_2') + L(V_2) - L(V_1') = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{نکات لاپلاس مشتق}} \begin{cases} (2s+1)V_1 - sV_2 = 2V_{01} - V_{02} \\ -sV_1 + (2s+1)V_2 = -V_{01} + 2V_{02} \end{cases} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 2s+1 & -s \\ -s & 2s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2V_{01} - V_{02} \\ -V_{01} + 2V_{02} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

با حل این دستگاه معادله برای V_1 داریم:

$$V_1(s) = \frac{(3s+2)V_{01} - V_{02}}{(3s+1)(s+1)}$$

و برای حذف فرکانس $s = -1$ داریم:

$$(3s+2)V_{01} - V_{02} = k(s+1)$$

با در نظر گرفتن $k = 3V_{01}$ داریم:

$$k = 2V_{01} \rightarrow 2V_{01} - V_{02} = 3V_{01} \rightarrow V_{01} = -V_{02}$$

یعنی اگر ولتاژ اولیه دو خازن سمت راست و چپ قرینه یکدیگر باشند، فقط فرکانس $s = -\frac{1}{3}$ در ولتاژ $V_1(t)$ ظاهر

می‌شود.

نکته: اگر $s_i \neq 0$ فرکانس طبیعی ولتاژ یک شاخه باشد، فرکانس طبیعی جریان شاخه نیز است و برعکس. در مورد بار و شار نیز همین طور می باشد.

نکته قابل توجه این که $s_i \neq 0$ بودن مهم است، زیرا ممکن است ولتاژ یک شاخه، فرکانس صفر داشته باشد ولی جریان شاخه دارای فرکانس صفر نباشد و برعکس.

مثلاً در شکل زیر:

$$\begin{array}{l} \text{Inductor: } + V_L - \\ I_L = \text{ثابت} \rightarrow V_L = L \frac{dI_L}{dt} = 0 \\ \text{Capacitor: } + V_C = \text{ثابت} - \\ I_C \rightarrow V_C = C \frac{dV_C}{dt} = 0 \end{array}$$

سلف دارای جریان DC (ثابت I_L) است پس فرکانس آن صفر است ولی ولتاژ آن صفر می‌شود ($V_L=0$) یعنی اصلاً دارای مؤلفه‌ای در $s=0$ نمی‌باشد.

به طریق مشابه، خازن دارای ولتاژ DC (ثابت $V_C =$) است پس فرکانس آن صفر است ولی جریان آن صفر می‌شود ($I_C = 0$) به عبارت دیگر، جریان خازن اصلاً مؤلفه‌ای در $s=0$ ندارد.

12-3- مرتبه مدار و تعیین فرکانس‌های طبیعی یک شبکه

کلیه تعاریف زیر معادل مرتبه مدار هستند:

1- تعداد خازن‌ها و سلف‌های مستقل، مدار

2- تعداد متغیرهای حالت مدار

3- تعداد فرکانس‌های غیر صفر و صفر شبکه

4- حداکثر تعداد فرکانس‌های طبیعی، یک متغیر شبکه

5- حداکثر تعداد قطب‌های تابع تبدیل یک متغیر شبکه

به عبارت دیگر، تعداد عناصر مستقل ذخیره کننده انرژی یعنی مجموع تعداد سلف‌ها و خازن‌های مستقل مدار را مرتبهٔ مدار می‌گوییم.

برای به دست آوردن مرتبه مدار، در ابتدا به جای هر تعداد سلف یا خازن سری و یا موازی، یک سلف یا یک خازن که

معادل با کل آنها است را قرار می‌دهیم. سپس تعداد سلف‌ها و خازن‌ها را می‌شماریم و به ازای هر یک از شرایط زیر در مدار، یک واحد از مرتبهٔ مدار کم می‌کنیم:

- 1- اگر در مدار، حلقه خازنی (و احياناً همراه با منابع ولتاژ) وجود داشته باشد.
- 2- اگر در مدار، کات ست سلفی (و احياناً همراه با منابع جریان) وجود داشته باشد.
- 3- اگر ولتاژ دو سر خازنی و یا جریان عبوری از سلفی از طریق (مثلاً یک منبع وابسته)، به یک یا تعدادی از سایر متغیرهای حالت وابسته باشد. به عبارت دیگر، هرگونه ترکیب خطی بین متغیرهای حالت (I_L, V_C) و مقادیر معلوم (مثل منابع)، یک واحد از مرتبهٔ مدار کم می‌کند.

بنابراین به‌طور خلاصه داریم:

تعداد متغیرهای حالت وابسته - تعداد حلقهٔ خازنی - تعداد کات ست سلفی - تعداد عناصر ذخیره کننده انرژی = تعداد فرکانس‌های طبیعی یک شبکه (مرتبه مدار)

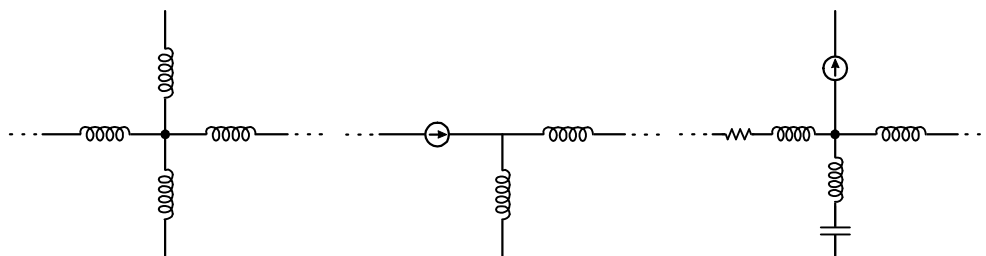
تعداد حلقه سلفی + تعداد کات ست خازنی = تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر یک شبکه

تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر شبکه - تعداد فرکانس‌های طبیعی شبکه (مرتبه مدار) = تعداد فرکانس‌های طبیعی

غیرصفر یک شبکه

برای درک بهتر پارامترهای فوق به نمونه‌های زیر توجه کنید:

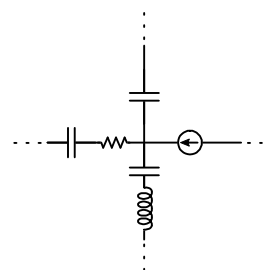
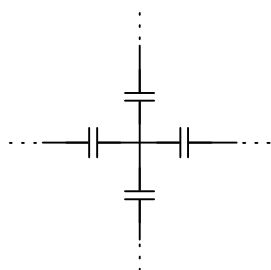
- نمونه‌های کات ست سلفی



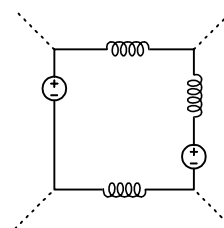
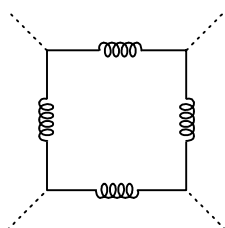
- نمونه‌های حلقه‌های خازنی:



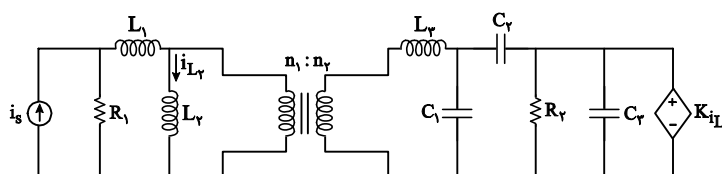
- نمونه‌های کات ست‌های خازنی



- نمونه‌های حلقه‌های سلفی



مثال ۵: در مدار شکل زیر، تعداد متغیرهای حالت را تعیین کنید.



با توجه به مدار، سلف‌ها و یا خازن‌های سری یا موازی نداریم که بخواهیم معادل آن‌ها را قرار دهیم پس مجموع سلف‌ها و خازن‌ها برابر $3+3=6$ است.

با دقت در مدار دیده می‌شود که یک کات ست سلفی و یک حلقه خازن داریم. همچنین ولتاژ دو سر خازن C_3 برابر ولتاژ منبع وابسته $K i_{L_2}$ است، پس یک رابطه خطی بین ولتاژ خازن C_3 و جریان سلف L_2 وجود دارد و یک واحد از مرتبه مدار کم می‌کند بنابراین:

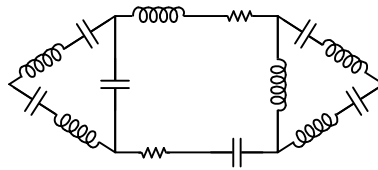
$$مرتبه\ مدار = 6 - 1 - 1 - 1 = 3$$

$\swarrow$ کات ست سلفی $\swarrow$ حلقه خازنی $\swarrow$ وابستگی متغیرهای حالت

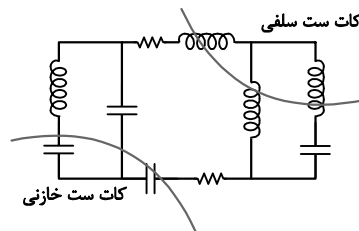
نکته: ترانسفورماتور در مقدار فرکانس‌های طبیعی مؤثر است ولی در تعداد فرکانس‌های طبیعی و مرتبه مدار نقشی ندارد، زیرا می‌توان اجزای مدار را از ترانسفورماتور انتقال داد. با این انتقال مقادیر عناصر عوض می‌شود ولی شکل گراف

مدار تغییری نمی‌کند.

مثال ۶: در مدار شکل زیر، تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار را به دست آورید.



با مرتب کردن سلف‌ها و خازن‌های سری و تغییر چیدمان مدار داریم:

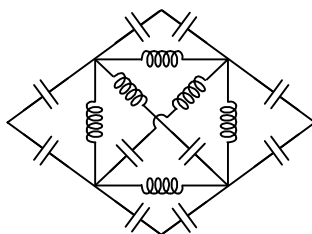


$$مرتبهٔ مدار = 4 + 4 - 1 - 0 - 0 = 7$$

$$تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر = 1 + 0 = 1$$

$$تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار = 7 - 1 = 6$$

مثال ۷: تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار شکل زیر را به دست آورید.



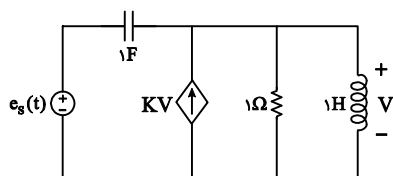
در ابتدا به جای هریک از جفت خازن‌های چهار طرف، یک خازن می‌گذاریم. پس داریم:

$$11 = 6 + 6 - 0 - 1 - 0$$

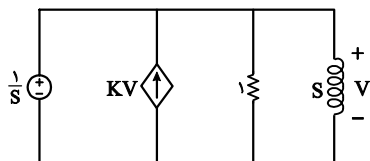
$\nwarrow$ وابستگی متغیرهای حالت
 $\swarrow$ تعداد حلقه خازنی
 $\searrow$ تعداد کات ست سلفی
 $\nearrow$ تعداد سلف
 $\nwarrow$ تعداد خازن
 مرتبه مدار

منظور از حلقه خازنی، حلقه بیرونی است.

مثال ۸: در مدار شکل زیر، مقدار k را چنان تعیین کنید که تمام فرکانس‌های طبیعی مدار، روی محور موهومی قرار بگیرند.



با انتقال مدار به حوزه فرکانس و KCL زدن در گره بالایی داریم:

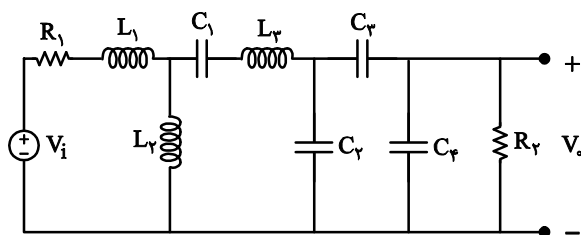


$$\text{KCL: } \left(s + \frac{1}{s} + 1 - k \right) V = 0 \xrightarrow[\text{مشخصه}]{\text{معادله}} s^2 + (1 - K)s + 1 = 0$$

برای این که ریشه‌ها موهومی محض (روی محور موهومی) باشند باید ضریب s صفر باشد:

$$1 - k = 0 \rightarrow k = 1$$

مثال ۹: در مدار شکل زیر، تابع تبدیل $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ حداکثر چند قطب دارد؟

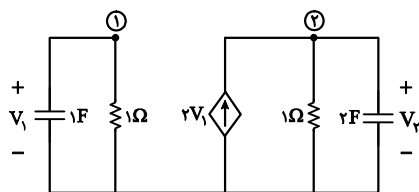


همان‌طور که در ابتدای بخش سوم گفته شد: حداکثر تعداد قطب‌های هر متغیر شبکه برابر مرتبهٔ مدار است، بنابراین:

$$5 = 3 + 4 - 1 - 1 - 0$$

$\swarrow$ تعداد سلف $\swarrow$ تعداد خازن $\swarrow$ حلقه خازنی $\swarrow$ کات ست سلفی

مثال ۱۰: در مدار شکل زیر، معادلات فضای حالت را نوشته و با استفاده از آن فرکانس‌های طبیعی مدار را به دست آرئید.



با KCL زدن در گره‌های 1 و 2 داریم:

$$\text{KCL}(1): \frac{dV_1}{dt} + \frac{V_1}{1} = 0 \rightarrow \dot{V}_1 = -V_1$$

$$\text{KCL}(2): 2 \frac{dV_2}{dt} + \frac{V_2}{1} - 2V_1 = 0 \rightarrow \dot{V}_2 = V_1 - \frac{1}{2}V_2$$

و در نتیجه:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

A

با توجه به این که «مقادیر ویژه ماتریس A» همان «فرکانس‌های طبیعی شبکه» است داریم:

$$sI - A = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

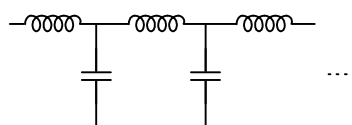
$$\det(sI - A) = (s+1)\left(s+\frac{1}{2}\right) - 0 = 0 \rightarrow s = -\frac{1}{2}, -1$$

12-4- عملکرد فیلتری شبکه‌ها

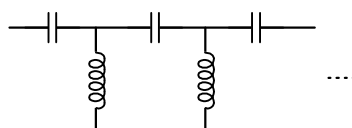
در شبکه‌های مداری، اگر در شاخه‌های سری، مدار باز (O.C.) ایجاد شود و یا در شاخه‌های موازی اتصال کوتاه (S.C.) قرار بگیرد، سیگنالی از ورودی به خروجی نمی‌رسد. پس در تابع تبدیل یک صفر ایجاد می‌شود. به‌طور مشابه چنانچه در شاخه‌های سری اتصال کوتاه ایجاد شود و یا در شاخه‌های موازی مدار باز واقع شود، ماکزیمم سیگنال از ورودی به خروجی می‌رسد. پس در تابع تبدیل یک قطب ایجاد می‌کند.

براین اساس می‌توان گفت:

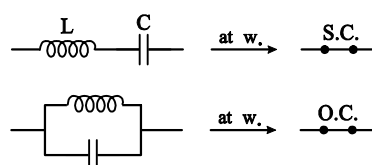
1- شبکه‌های نردبانی شامل سلف‌های سری و خازن‌های موازی، مانند یک فیلتر پایین گذر عمل می‌کند.



2- شبکه‌های نردبانی شامل سلف‌های موازی و خازن‌های سری، مانند یک فیلتر بالاگذر عمل می‌کنند.



همچنین دیدیم که مدارهای تشدید LC سری در فرکانس تشدید در حکم اتصال کوتاه بوده و مدارهای تشدید LC موازی در فرکانس تشدید در حکم مدار باز عمل می‌کنند.



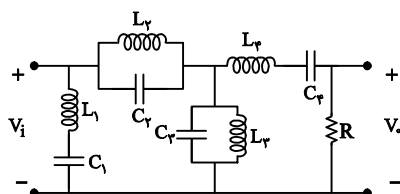
با توجه به این مطلب می‌توان گفت:

3- در توابع شبکه، صفرهای پایان‌دار در اثر مدارهای تشدید سری در شاخه‌های عمودی و یا مدارهای تشدید موازی در شاخه‌های افقی، به وجود می‌آید. (در فرکانس تشدید)

4- در توابع شبکه، قطب‌های پایان‌دار در اثر مدارهای تشدید سری در شاخه‌های افقی و یا مدارهای تشدید موازی در

شاخه‌های عمودی، به وجود می‌آید. (در فرکانس شبکه)

مثال ۱۱: در مدار شکل زیر، صفرها و قطب‌ها تابع تبدیل $\frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ را بیان کنید.



با توجه به نکات گفته شده داریم:

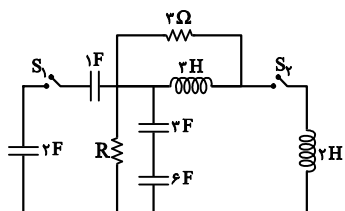
$\frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ یک صفر پایان‌دار است. $\frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$ یک صفر پایان‌دار است.

$\frac{1}{\sqrt{L_3 C_3}}$ یک قطب پایدار است. $\frac{1}{\sqrt{L_4 C_4}}$ یک قطب پایدار است.

تست‌های طبقه‌بندی شده مبحث فرکانس‌های طبیعی مدار

۱- در مدار شکل زیر، R بر حسب اهم چقدر باشد تا در حالت باز بودن کلیدها، مقاداریکی از فرکانس‌های

طبیعی مخالف صفر، $\frac{1}{10}$ تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر مدار باشد؟



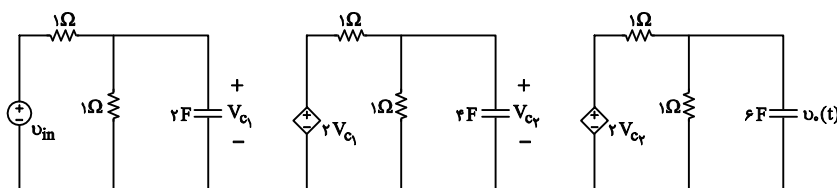
$$\frac{5}{3} \quad (2)$$

$$\frac{5}{2} \quad (1)$$

$$\frac{10}{27} \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

۲- فرکانس‌های طبیعی متغیر خروجی $V_o(t)$ در مدار شکل زیر کدام است؟



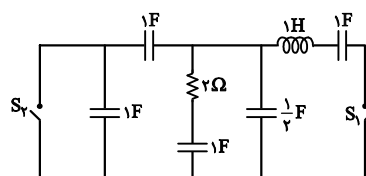
$$-3, -\frac{1}{2}, -1 \quad (1)$$

$$-3, -2, -1 \quad (2)$$

$$-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1 \quad (3)$$

$$-\frac{1}{3}, -2, -1 \quad (4)$$

۳- در مدار شکل زیر، دو حالت باز بودن و بسته بودن کلیدها را در نظر بگیرید. کدام ادعا درست است؟



(1) تعداد فرکانس‌های طبیعی در هر دو حالت برابر 5 است.

(2) تنها فرکانس طبیعی غیر صفر در یک حالت برابر 1- است.

(3) تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر در یک حالت برابر تعداد فرکانس‌های طبیعی غیر صفر در حالت دیگر است.

(4) مورد «2» و «3» صحیح است.

۴- معادلات حالت دائمی سینوسی یک مدار به صورت زیر است: (ω فرکانس منبع و I_1 فازور i_1 و i_2 فازور i_2):

$$\begin{cases} \left(j\omega - j\frac{2}{\omega}\right)I_1 + \left(1 - j\frac{1}{\omega}\right)I_2 = 0 \\ \left(-j\omega + j\frac{2}{\omega}\right)I_1 + \left(1 + j\omega - j\frac{3}{\omega}\right)I_2 = 1 \end{cases}$$

این مدار:

(1) با $\omega = \sqrt{2}$ حالت دائمی سینوسی دارد.

(2) با $\omega \neq \sqrt{2}$ حالت دائمی سینوسی با فرکانس ω دارد.

(3) با $\omega \neq \sqrt{2}$ حالت دائمی سینوسی با فرکانس‌های $\sqrt{2}$ و ω دارد.

(4) به ازای هر ω حالت دائمی سینوسی دارد.

۵- در مداری از مرتبه ۶ (یعنی با شش فرکانس طبیعی) توابع انتقال $H_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ و

$H_2(s) = \frac{s^2}{(s+1)^2(s+3)}$ و پاسخ ورودی صفر $V = Ae^{-\frac{t}{2}}$ معلوم است. کدام دسته از اعداد زیر فرکانس‌های

طبیعی معلوم مدار را نشان می‌دهند؟

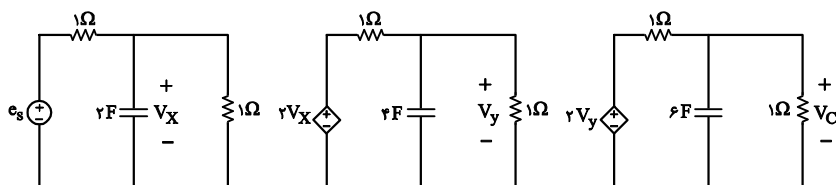
(2) $-1, -1, -2, -3, -\frac{1}{2}$

(1) $-1, -1, -1, -3, -2, -\frac{1}{2}$

(4) موارد «1» یا «2»

(3) $-1, -3, -2, -\frac{1}{2}$

۶- فرکانس‌های طبیعی مدار شکل زیر کدام است؟



(1) $-3, -2, -1$

(2) $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1$

(3) $-3, -\frac{1}{2}, -1$

(4) 1- مکرر مرتبه سوم

۷- در یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان تابع تبدیل $H(s) = \frac{V_0}{I_s}$ قطب‌های $s = \pm j2$ را دارد. تمام

فرکانس‌های طبیعی مدار به جز $\pm j2$ در نیمه چپ صفحه مختلط است. کدام بیان در این مدار درست است؟

(1) مدار به ازای هیچ ورودی، پاسخ حالت دائمی سینوسی ندارد.

(2) مدار به ازای i_s با فرکانس $\omega = 2$ پاسخ حالت دائمی سینوسی دارد.

(3) مدار به ازای $i_s = \cos t$ به شرط $H(\pm j) = 0$ ، پاسخ حالت دائمی سینوسی با فرکانس $\omega = 2$ دارد.

(4) مدار به ازای $i_s = \cos t$ به شرط $H(\pm j) = 0$ ، پاسخ حالت دائمی سینوسی با فرکانس $\omega = 1$ دارد.

۸- فرکانس‌های طبیعی کل یک مدار عبارت است از فرکانس‌های طبیعی:

(1) جریان‌های مستقل مدار

(2) ولتاژهای مستقل مدار

(3) ولتاژها و جریان‌های مستقل مدار

(4) موارد «1» و «2» صحیح است.

۹- اگر پاسخ ضربه واحد یک مدار خطی تغییرناپذیر زمان به صورت زیر باشد:

$$h(t) = (2e^{-2t} - e^{-t})u(t)$$

و معادلات حالت این مدار به صورت $\dot{X} = AX + BW$ باشد، ماتریس A کدام یک از صورت‌های زیر می‌تواند

باشد؟

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} (1) & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} (2) & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} (3) & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} (4) \end{matrix}$$

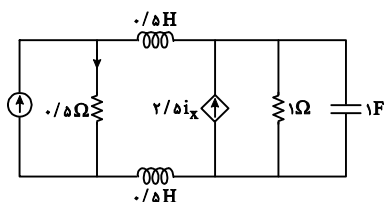
۱۰- ماتریس امپدانس مش یک مدار LTI متشکل از عناصر RLC و منابع مستقل در حالت دائمی سینوسی

به صورت $Z_{in} = \begin{bmatrix} 1+j & -1 \\ -1 & 2-j \end{bmatrix}$ است. کدام یک از ماتریس‌های زیر نمی‌تواند ماتریس ادmittانس گره این مدار

باشد؟

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 2-j & -1 \\ -1 & 1+j \end{bmatrix} (1) & \begin{bmatrix} 2-j & j \\ j & 1 \end{bmatrix} (2) & \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & 1+j \end{bmatrix} (3) & \begin{bmatrix} 2-j & -1+j \\ -1+j & 1 \end{bmatrix} (4) \end{matrix}$$

۱۱- فرکانس‌های طبیعی مدار زیر کدام است؟



(1) $-0.5, 2$

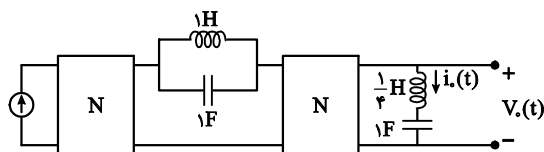
(2) $0.5, -2$

(3) $-0.75 + j, -0.75 - j$

(4) $-1/5 + j2, -1/5 - j2$

۱۲- شبکه N از مقاومت‌های خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده است. اگر $i_s(t) = \cos t + \cos 2t$ باشد،

آنگاه در حالت دائمی کدام یک از متغیرهای $V_o(t)$ و $i_o(t)$ برابر صفر می‌باشد؟



(1) فقط $t_o(t)$

(2) فقط $V_o(t)$

(3) هم $V_o(t)$ و هم $i_o(t)$

(4) نه $i_o(t)$ و نه $V_o(t)$

۱۳- ماتریس ادمیتانس گره یک شبکه LTI به صورت زیر است. اگر گره‌های ۲ و ۳ به یکدیگر اتصال کوتاه

شوند، فرکانس‌های طبیعی شبکه جدید چقدر خواهد بود؟

$$Y_s = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+3 & -1 \\ 0 & -1 & s+4 \end{bmatrix}$$

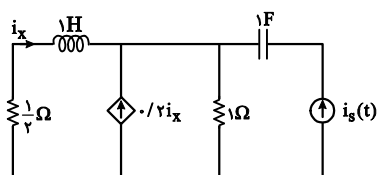
(2) $-1, -3$

(1) $-1, -2/5$

(4) $-3, -2/5$

(3) $\frac{-7+\sqrt{5}}{2}, \frac{-7-\sqrt{5}}{2}$

۱۴- فرکانس‌های طبیعی مدار شکل زیر کدام است؟



(1) -0.5

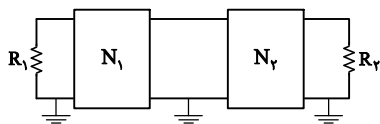
(2) $-1/5$

(3) $-1/7$ و صفر

(4) $+j, -j$

۱۵- در شکل زیر N_1 منحصرأ از خازن‌های مثبت و N_2 منحصرأ از سلف‌های مثبت خطی و تغییرناپذیر با

زمان تشکیل یافته‌اند. حداکثر تعداد فرکانس‌های طبیعی غیر صفر شبکه چند است؟



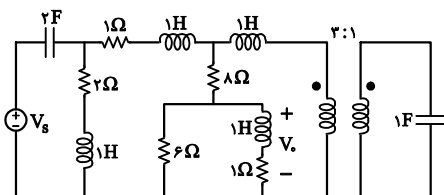
4 (2

2 (1

5 (4

6 (3

۱۶- صفرهای انتقال تابع شبکه $H(s) = \frac{V_o}{V_s}$ کدام است؟



0, -1, -7, ±j (1

0, -1, -2, ±j (2

0, -1, -7, ±3j (3

0, -1, -2, ±3j (4

۱۷- در مدار شکل زیر، L_1 و L_2 را چنان انتخاب کنید که برای ورودی $i_s(t) = 2\sin t + 3\cos 2t$ ولتاژ

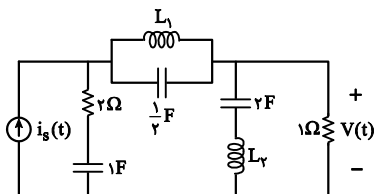
خروجی $V(t)$ ، جمله سینوسی با فرکانس ۱ یا ۲ نداشته باشد؟

$L_1 = \frac{1}{2}, L_2 = \frac{1}{4}$ (1

$L_1 = \frac{1}{2}, L_2 = \frac{1}{2}$ (2

$L_1 = \frac{1}{4}, L_2 = \frac{1}{2}$ (3

$L_1 = \frac{1}{4}, L_2 = \frac{1}{4}$ (4



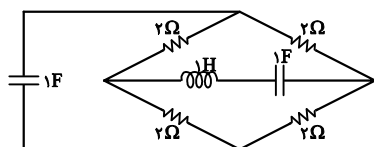
۱۸- فرکانس‌های طبیعی مدار زیر کدام است؟

-1 و -1 (1

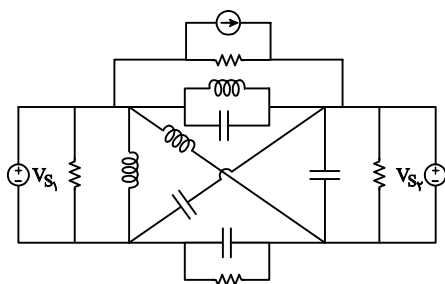
$-\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$ (2

-2 و -1 و -1 (3

$-\frac{1}{2}$ و -1 و -1 (4



۱۹- فرکانس‌های طبیعی غیر صفر شبکه خطی تغییرناپذیر با زمان شکل زیر کدام‌اند؟ (تمامی مقادیر عناصر



برابر واحدند)

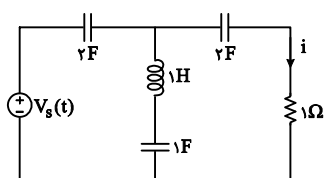
$$(1) -\frac{1}{3}(1 \pm j\sqrt{5})$$

$$(2) \pm j \text{ و } (-1 \pm j\sqrt{5})$$

$$(3) -1 \text{ و } (-1 \pm j\sqrt{5})$$

$$(4) -1 \text{ و } \pm j \text{ و } -\frac{1}{3}(1 \pm j\sqrt{5})$$

۲۰- در تابع شبکه $H(s) = \frac{I(s)}{V_s(s)}$ مدار شکل زیر، تعداد قطب‌های تابع شبکه



(1) 3 است که یکی از آن‌ها صفر است.

(2) 4 است و هیچ یک از آن‌ها صفر نیست.

(3) 3 است و هیچ یک از آن‌ها صفر نیست.

(4) 4 است که یکی از آن‌ها صفر است.

۱- گزینه ی «۲» صحیح است.

در حالت باز بودن کلیدها، فرکانس طبیعی مخالف صفری که به مقدار R وابسته باشد، مربوطه به شاخه RC موازی

است. در این صورت مقدار فرکانس طبیعی غیر صفر برابر است با:

$$\begin{array}{c} \text{Circuit 1: } R \text{ in series with } 2F \text{ and } 6F \text{ in parallel.} \\ \text{Circuit 2: } R \text{ in series with } \frac{2 \times 6}{2+6} = 1.5F \end{array} \quad R + \frac{1}{CS} = 0 \rightarrow R + \frac{1}{2S} = 0 \rightarrow |S| = \frac{-1}{2R} = \frac{1}{2R}$$

تعداد فرکانس های طبیعی صفر مدار برابر است با:

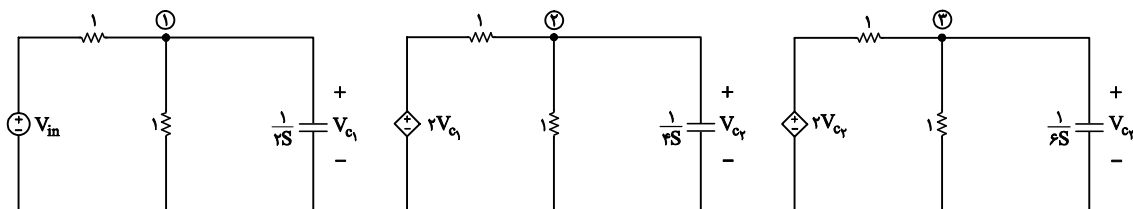
$$3 + 0 = 3 = \text{تعداد کات ست خازنی} = \text{تعداد فرکانس های طبیعی صفر مدار}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{1}{2R} = \frac{1}{10} \times 3 = \frac{1}{5} \rightarrow R = \frac{5}{3} \Omega$$

۲- گزینه ی «۳» صحیح است.

با اعمال KCL به گره های مدار شکل زیر داریم: (در حوزه لاپلاس)



$$\text{KCL (1): } (2+2s)V_{c1} = V_{in} \rightarrow \frac{V_{c1}}{V_{in}} = \frac{1}{2(s+1)}$$

$$\text{KCL (2): } (2+4s)V_{c2} = 2V_{c1} \rightarrow \frac{V_{c2}}{V_{c1}} = \frac{1}{1+2s}$$

$$\text{KCL (3): } (2+6s)V_o = 2V_{c2} \rightarrow \frac{V_o}{V_{c1}} = \frac{1}{1+3s}$$

بنابراین برای متغیر خروجی $V_o(s)$ نسبت به ورودی $V_{in}(s)$ می توان گفت:

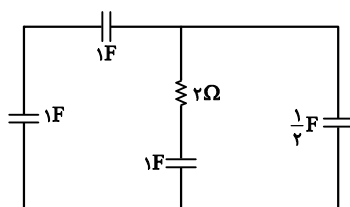
$$\begin{aligned} \frac{V_o(s)}{V_{in}(t)} &= \frac{V_o}{V_{c2}} \times \frac{V_{c2}}{V_{c1}} \times \frac{V_{c1}}{V_{in}} = \frac{1}{1+3s} \times \frac{1}{1+2s} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{s+1} \\ \rightarrow \frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} &= \frac{1}{2(s+1)(2s+1)(3s+1)} \end{aligned}$$

بنابراین فرکانس‌های طبیعی متغیر خروجی $V_o(t)$ عبارت‌اند از:

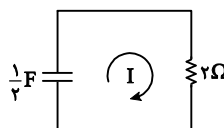
$$\begin{cases} s+1=0 \rightarrow s=-1 \\ 2s+1=0 \rightarrow s=-\frac{1}{2} \\ 3s+1=0 \rightarrow s=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

۳- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

وقتی کلیدها باز هستند، مدار شکل زیر به دست می‌آید:

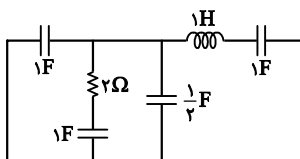


این مدار دارای چهار عنصر ذخیره‌کننده انرژی و یک حلقه خازنی است پس دارای سه فرکانس طبیعی است. دو کات ست خازنی، دو فرکانس طبیعی صفر ایجاد می‌کند. بنابراین مدار دارای دو فرکانس طبیعی صفر و یک فرکانس طبیعی غیر صفر است که مقدار آن برابر است با:



$$\text{KVL: } \left(\frac{1}{s} + 2\right)I(s) = 0 \rightarrow \frac{2}{s} + 2 = 0 \rightarrow s = -1$$

وقتی کلیدها بسته می‌شوند داریم:



این مدار دارای پنج عنصر ذخیره‌کننده انرژی، یک حلقه خازنی و یک کات ست خازنی است. پس یک فرکانس طبیعی صفر و سه فرکانس طبیعی غیر صفر دارد. بنابراین تعداد فرکانس‌های طبیعی غیر صفر حالت قبل با تعداد فرکانس طبیعی صفر این حالت برابر است. در نتیجه گزینه‌های «2» و «3» صحیح هستند.

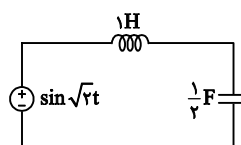
۴- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

دترمینان ماتریس ضرائب به صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} j\omega - j\frac{2}{\omega} & 1 - j\frac{1}{\omega} \\ -j\omega + j\frac{2}{\omega} & 1 + j\omega - j\frac{3}{\omega} \end{vmatrix} = (\omega^2 - 2)(4 - \omega^2 + j2\omega) = 0$$

بنابراین $\omega = \sqrt{2}$ یک فرکانس طبیعی مدار است. یعنی مدار یک پاسخ سینوسی با فرکانس $\sqrt{2}$ دارد.

مثلاً در مدار زیر که فرکانس طبیعی مدار $\omega = \frac{1}{\sqrt{1 \times \frac{1}{2}}} = \sqrt{2}$ و فرکانس ورودی مدار هم $\omega = \sqrt{2}$ است داریم:



$$V_L(s) = \frac{s}{s + \frac{2}{s}} \times \frac{\sqrt{2}}{s^2 + 2} = \frac{\sqrt{2}s^2}{(s^2 + 2)^2}$$

با عکس لاپلاس گیری دیده می شود در حوزه زمان مدار پاسخی به صورت $t \cos \sqrt{2}t$ دارد که ناپایدار است و حالت دائمی پیدا نمی کند.

حال اگر فرکانس ورودی را غیر از $\sqrt{2}$ در نظر بگیریم (مثلاً ω)، در مخرج $V_L(s)$ عبارات $(s^2 + 2)$ و $(s^2 + \omega^2)$ دیده می شوند، یعنی فرکانس طبیعی مدار و فرکانس ورودی، که باید مخالف آن باشد، هر دو در خروجی دیده می شوند. پس گزینه «3» صحیح است.

۵- گزینه ی «۲» صحیح است.

چون پاسخ ورودی صفر به صورت $V = Ae^{-\frac{t}{2}}$ است، پس یک فرکانس طبیعی مدار $s = -\frac{1}{2}$ می باشد. قطب های توابع

شبکه $H_1(s)$ و $H_2(s)$ فرکانس های طبیعی مدار هستند، پس:

$$H_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \rightarrow s = -1, -2$$

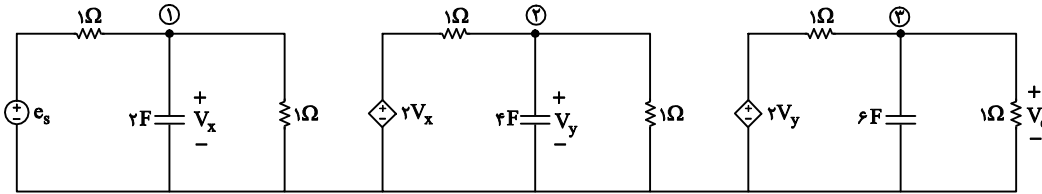
$$H_2(s) = \frac{s^2}{(s+1)^2(s+3)} \rightarrow s = -1, -1, -3$$

بنابراین $-1, -1, -3, -2$ جزء فرکانس های طبیعی هستند.

از طرفی مدار از مرتبه 6 است، پس یک فرکانس دیگر هم دارد که می تواند $-1, -2, -3$ و یا هر فرکانس دیگری باشد و چون هدف فرکانس طبیعی معلوم مدار است، فرکانس ششم معلوم نیست و در نتیجه فقط گزینه «2» صحیح است.

۶- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

KCL را در گره‌های 1 و 2 و 3 می‌نویسیم:



$$\text{KCL}(1): 2 \frac{dV_x}{dt} + V_x + V_x = e_s \rightarrow 2(s+1)V_x = E_s \rightarrow s = -1$$

$$\text{KCL}(2): 4 \frac{dV_y}{dt} + V_y + V_y = 2V_x \rightarrow 2(2s+1)V_y = V_x \rightarrow s = -\frac{1}{2}$$

$$\text{KCL}(3): 6 \frac{dV_o}{dt} + V_o + V_o = 2V_y \rightarrow 2(3s+1)V_o = V_y \rightarrow s = -\frac{1}{3}$$

بنابراین فرکانس‌های طبیعی مدار -1 ، $-\frac{1}{2}$ ، $-\frac{1}{3}$ هستند.

۷- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

قطب‌های $s = \pm j2$ روی محور موهومی قرار دارند و ایجاد تشدید می‌کنند، یعنی مدار دارای فرکانس تشدید $\omega = 2$ است. بنابراین اگر فرکانس ورودی مدار هم $\omega = 2$ باشد، پاسخ حالت دائمی سینوسی وجود نخواهد داشت و پاسخ ناپایدار خواهد شد.

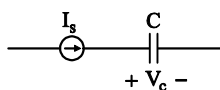
پس گزینه «2» نادرست است و مدار با بقیه فرکانس‌های مشکلی ندارد، بنابراین گزینه «1» نیز غلط است.

در گزینه «3» فرکانس ورودی مدار $\omega = 1$ است و با توجه به این که $H(\pm j) = 0$ ، این فرکانس صفر تابع تبدیل هم است. پس این فرکانس در خروجی ظاهر نمی‌شود و فقط $\omega = 2$ که فرکانس طبیعی مدار است در خروجی وجود خواهد داشت. پس این گزینه درست است.

در گزینه «4» چون $\omega = 1$ صفر تابع تبدیل است نمی‌تواند در خروجی ظاهر شود، پس این گزینه نیز غلط است.

۸- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

ممکن است جریان یک شاخه دارای فرکانس صفر باشد ولی ولتاژ آن شاخه فرکانس صفر نداشته باشد. همچنین امکان دارد ولتاژ یک شاخه فرکانس صفر داشته باشد ولی جریان آن شاخه فرکانس صفر نداشته باشد. به مثال زیر دقت کنید:



V_C دارای فرکانس صفر است ولی I_C این فرکانس را ندارد.

$$\frac{V_C}{I_S} = \frac{1}{CS}$$

بنابراین برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی صفر و در نتیجه کل فرکانس‌های طبیعی مدار باید جریان‌ها و ولتاژهای مستقل مدار با هم در نظر گرفته شوند.

۹- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

از پاسخ ضربه مشخص است که مدار دارای فرکانس‌های طبیعی 1- و 2- است که این فرکانس‌ها مقادیر ویژه ماتریس A هستند، یعنی ریشه‌ها $|SI - A| = 0$ می‌باشند. مقادیر ویژه ماتریس‌های قطری، همان عناصر روی قطر اصلی هستند. پس گزینه‌های «1» و «3» غلط هستند.

مقادیر ویژه دو ماتریس دیگر را حساب می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow |SI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{vmatrix} = s^2 + 3s + 2 = 0 \rightarrow s = -1, -2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow |SI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 3 & s+2 \end{vmatrix} = s^2 + 2s + 3 = 0 \rightarrow s = -1 \pm j\sqrt{2}$$

پس گزینه «2» صحیح است.

۱۰- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

روش اول: دترمینان ماتریس امپدانس مش و ماتریس ادمیتانس گره، هر دو معادله مشخصه مدار را می‌دهند. پس دترمینان این دو ماتریس باید با هم برابر باشد. در نتیجه داریم:

$$|Z_m| = \begin{vmatrix} 1+j & -1 \\ -1 & 2-j \end{vmatrix} = 2+j$$

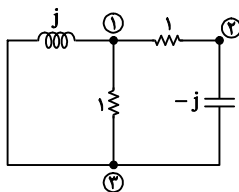
برای گزینه‌ها 1 تا 4 خواهیم داشت:

$$|Y_1| = \begin{vmatrix} 2-j & -1 \\ -1 & 1+j \end{vmatrix} = 2+j \quad |Y_1| = \begin{vmatrix} 2-j & j \\ j & 1 \end{vmatrix} = 3-j$$

$$|Y_1| = \begin{vmatrix} 1 & -j \\ -j & 1+j \end{vmatrix} = 2+j \quad |Y_1| = \begin{vmatrix} 2-j & -1+j \\ -1+j & 1 \end{vmatrix} = 2+j$$

بنابراین دترمینان ماتریس گزینه «2» برابر دترمینان ماتریس امپدانس مش نیست.

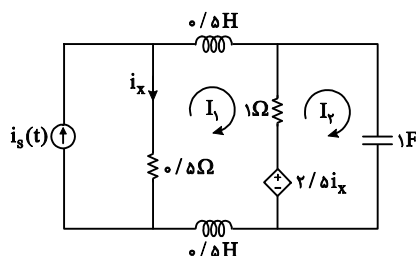
روش دوم: با رسم مدار مربوطه به وسیله ماتریس امپدانس مش داریم:



اگر گره 3 را زمین در نظر بگیریم، ماتریس ادمیتانس گره به صورت گزینه «1» است و اگر گره 1 را زمین فرض کنیم، ماتریس ادمیتانس به صورت گزینه «3» می‌باشد و اگر گره 2 را زمین بگیریم، ماتریس ادمیتانس به صورت گزینه «4» خواهد بود.

۱۱- گزینه «۲» صحیح است.

روش اول: با استفاده از تبدیل نورتن و تونن، منبع جریان وابسته موازی با مقاومت یک اهمی را به منبع ولتاژ سری با مقاومت یک اهم تبدیل می‌کنیم و در دو مش ایجاد شده، KVL می‌زنیم:



$$\text{KVL (1): } \frac{1}{2}sI_1 + 1(I_1 - I_2) + 2/5(I_s - I_1) + \frac{1}{2}sI_1 + \frac{1}{2}(I_1 - I_s) = 0 \rightarrow (s-1)I_1 - I_2 = 2I_s$$

$$\text{KVL (2): } \frac{1}{s}I_2 - 2/5(I_s - I_1) + 1(I_2 - I_1) = 0 \rightarrow \frac{3}{2}I_1 + \left(1 + \frac{1}{s}\right)I_2 = \frac{5}{2}I_s$$

به فرم ماتریسی داریم:

$$\begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ 1/5 & 1+\frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2/5 \end{bmatrix} I_s$$

فرکانس‌های طبیعی مدار، ریشه‌های دترمینان ماتریس امپدانس شبکه است، در نتیجه:

$$(s-1)\left(1+\frac{1}{s}\right) + 1/5 = 0 \rightarrow s^2 + 1/5s - 1 = 0 \rightarrow s = -2, 0/5$$

روش دوم: تنها متغیر شبکه i_x است، پس منابع مستقل را صفر می‌کنیم و معادله‌ای برای i_x می‌نویسیم:

$$\text{KVL: } (0/5 + 0/5)sI_x + 0/5I_x = \frac{1 \times \frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s}} \times (2/5 - 1)i_x$$

$$\rightarrow \left(s + 0/5 - \frac{1/5}{s+1} \right) I_x = 0 \rightarrow (s^2 + 1/5s - 1)I_x = 0$$

بنابراین فرکانس‌های طبیعی مربوط به I_x برابر است با:

$$s^2 + 1/5s - 1 = 0 \rightarrow s = -2, 0/5$$

به دلیل این که تنها متغیر شبکه i_x است، فرکانس‌های طبیعی مدار با فرکانس‌های طبیعی مربوط به i_x برابر است.

یعنی مدار دارای فرکانس‌های طبیعی $s = -2, 0/5$ است.

۱۲- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

مدار LC موازی دارای فرکانس تشدید $\omega = \frac{1}{\sqrt{1 \times 1}} = 1 \text{ rad/s}$ است که مدار باز می‌شود و ورودی را از $i_0(t)$ و $V_0(t)$

جدا می‌کند و هر دو برابر صفر می‌شوند، یعنی هیچ مؤلفه فرکانسی با فرکانس $\omega = 1$ در خروج ظاهر نمی‌شود.

مدار LC سری در خروجی دارای فرکانس تشدید $\omega = \frac{1}{\sqrt{1 \times \frac{1}{4}}} = 2 \text{ rad/s}$ است که اتصال کوتاه می‌شود و $V_0(t)$

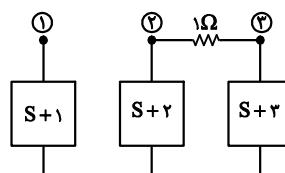
برابر صفر می‌شود.

در نتیجه $V_0(t)$ به ازای $\cos t$ و $\cos 2t$ صفر است ولی $i_0(t)$ فقط به ازای $\cos t$ صفر می‌شود. بنابراین $V_0(t)$ به

ازای $i_s(t)$ صفر می‌شود.

۱۳- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

با توجه به ماتریس ادمیتانس گره دیده می‌شود که مقاومت یک اهمی بین گره‌های ۲ و ۳ قرار دارد، یعنی:



اگر گره‌های ۲ و ۳ را به یکدیگر اتصال کوتاه کنیم، مقاومت یک اهمی بین آن‌ها حذف می‌شود و ماتریس ادمیتانس گره

به فرم 2×2 تبدیل می‌شود، در نتیجه:

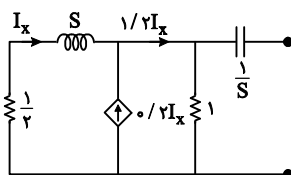
$$Y_{\text{new}} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & 2s+5 \end{bmatrix}$$

بنابراین فرکانس‌های طبیعی مدار جدید، ریشه‌های دترمینان ماتریس Y جدید هستند:

$$\Delta(s) = (s+1)(2s+5) = 0 \rightarrow s = -1, -2/5$$

۱۴- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با توجه به این که فرکانس‌های طبیعی مستقل از ورودی هستند، با صفر کردن $i_s(t)$ و انتقال مدار به حوزه لاپلاس داریم:



$$\text{KVL: } \frac{1}{2}I_x + SI_x + 1/2I_x = 0 \rightarrow (S+1/7)I_x = 0 \rightarrow S = -1/7$$

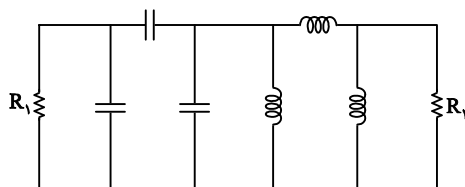
خازن با منبع جریان سری است و اگر منبع جریان i_s را صفر کنیم، خازن از بقیه مدار جدا می‌شود و اگر ولتاژ اولیه‌ای در دو سر آن باشد، این ولتاژ اولیه همان‌طور باقی می‌ماند. پس $s=0$ فرکانس طبیعی شاخه خازن است یعنی:

$$\frac{V_C(s)}{I_s(s)} = \frac{1}{Cs} \rightarrow s=0$$

بنابراین مدار دارای دو فرکانس طبیعی $s=0, -1/7$ است.

۱۵- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

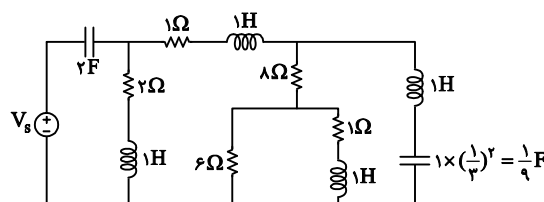
با توجه به این که شبکه‌های N_1 و N_2 دارای زمین‌های مشترک برای ورودی و خروجی هستند، می‌توان به جای آن‌ها از معادل‌های T یا π استفاده کرد. اگر از مدل معادل π استفاده کنیم، مدار به شکل زیر تبدیل می‌شود:



در نتیجه مدار دارای 6 عنصر ذخیره کننده انرژی، یک حلقه خازنی و یک حلقه سلفی است. پس تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر آن برابر $6-1-1=4$ است.

۱۶- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

اگر خازن یک فارادی را از سمت راست ترانس به سمت چپ آن منتقل کنیم داریم:



در نتیجه صفرهای انتقال به صورت زیر می‌باشند:

1- خازن $\frac{1}{9}$ فارادی سری با سلف یک هانری: $s + \frac{9}{s} = 0 \rightarrow s = \pm j3$

2- سلف یک هانری سری با مقاومت 2 اهمی: $s + 2 = 0 \rightarrow s = -2$

3- سلف یک هانری سری با مقاومت یک اهمی در بازوی موازی: $s + 1 = 0 \rightarrow s = -1$

4- خازن 2 فارادی سری با منبع ولتاژ ایجاد صفر در $s = 0$ می‌نمایند.

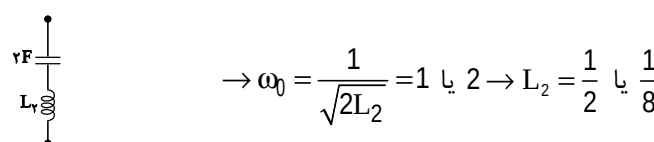
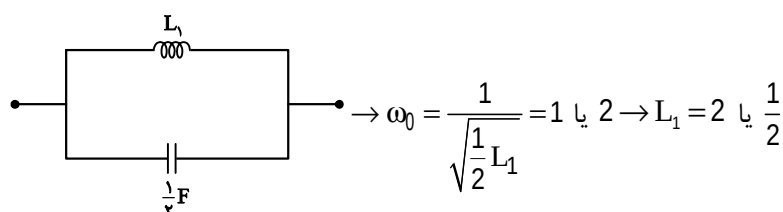
بنابراین صفرهای انتقال تابع شبکه $H(s) = \frac{V_o}{V_s}$ عبارتند از: $0, -1, -2, -\pm j3$.

۱۷- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

برای این که فرکانس‌های مورد نظر که فرکانس‌های ورودی مدار هستند، در خروجی ظاهر نشوند، باید این فرکانس‌ها صفرهای تابع انتقال خروجی باشند.

صفرهای این خروجی $V(t)$ ، یکی فرکانس تشدید شاخه LC موازی است که آن را مدار باز می‌کند و دیگری فرکانس تشدید شاخه LC سری است که آن را اتصال کوتاه می‌کند.

بنابراین:

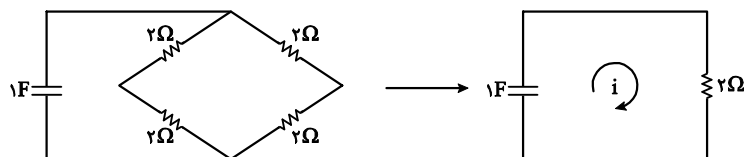


که حالت $L_1 = \frac{1}{2}H$ و $L_2 = \frac{1}{2}H$ در گزینه‌ها موجود است.

۱۸- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

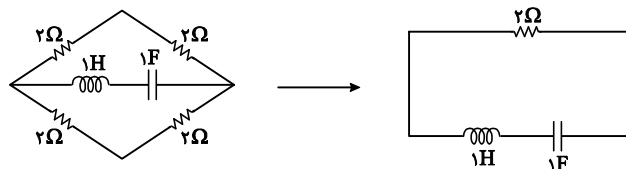
با توجه به شکل می‌توان گفت پل وتستون متقارن است، پس می‌توان برای جریان خازن، شاخه وسطی که LC سری

است را حذف کرد. در نتیجه:



$$\left(R + \frac{1}{s}\right)I = 0 \rightarrow s = -\frac{1}{R} = -\frac{1}{2}$$

بار دیگر با حذف خازن 1F داریم:



که یک مدار مرتبه دوم است.

در نتیجه: (مدار مرتبه دوم)

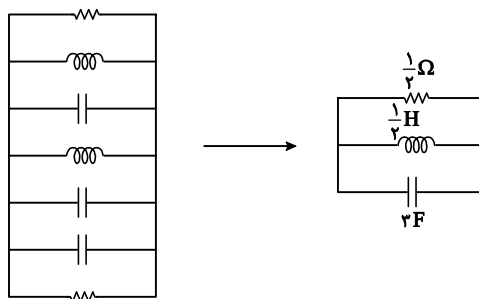
$$\begin{cases} 2\alpha = \frac{R}{L} = \frac{2}{1} = 2 \\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{1} = 1 \end{cases} \rightarrow s^2 + 2s + 1 = 0 \rightarrow s = -1, -1$$

$\swarrow \quad \searrow$
 $2\alpha \quad \omega_0^2$

بنابراین فرکانس‌های طبیعی مدار -1 و -1 و $-\frac{1}{2}$ است.

۱۹- گزینه‌ی «۱» صحیح است. ω_0^2

چون فرکانس‌های طبیعی غیر صفر شبکه خواسته شده است، می‌توان منابع را صفر کرد. در نتیجه داریم:



و برای مدار RLC موازی داریم:

$$\begin{cases} 2\alpha = \frac{1}{RC} = \frac{2}{3} \\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow s^2 + \frac{2}{3}s + \frac{2}{3} = 0 \rightarrow s = -\frac{1}{3}(1 \pm j\sqrt{5})$$

$\swarrow \quad \searrow$
 $2\alpha \quad \omega_0^2$

۲۰- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

مدار دارای ۳ خازن و یک سلف مستقل است و با توجه به یک کات ست خازنی، یکی از قطب‌های آن صفر است.

ولی در فرکانس صفر، خازن مدار باز است و I برابر صفر می‌شود. پس این فرکانس، صفر متغیر $I(s)$ است و نه قطب آن.

بنابراین مدار دارای ۳ فرکانس (قطب‌های تابع شبکه) است که هیچ یک از آن‌ها صفر نیست.

فصل سیزدهم: دوقطبی‌ها

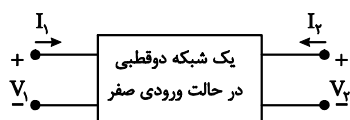
در مدارهای الکتریکی به هر دو سرکه به یک شبکه متصل است، یک قطب گفته می‌شود. به هر قطب یک ولتاژ و یک جریان نسبت می‌دهیم مانند مقاومت، سلف، خازن و

در نتیجه می‌توان برای معرفی یک قطبی‌ها فقط از یک عدد استفاده کرد. مثلاً امپدانس گویای نسبت ولتاژ به جریان

$$\left(\frac{V}{I}\right) \text{ است و یا مشخصه ولتاژ - جریان معرف دقیق یک تک قطبی است.}$$

اکنون به بررسی شبکه‌هایی می‌پردازیم که دارای دو قطب هستند، بنابراین دو ولتاژ V_1, V_2 و دو جریان I_1, I_2 داریم. در

نتیجه برای معرفی دوقطبی‌ها از چهار عدد استفاده می‌شود مانند ترانسفورماتورها، سلف‌های تزویج، خطوط انتقال و



دوقطبی شکل فوق می‌تواند به روش‌های مختلفی توصیف شود.

1-13- پارامترهای امپدانس Z (مدار باز)

رابطه ماتریسی برای دوقطبی به صورت زیر است:

$$V = Z \times I \rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

که با بسط آن داریم:

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}$$

در نتیجه تعریف تک تک پارامترها به صورت زیر است:

امپدانس ورودی سر اول، وقتی سر دوم مدار باز است:

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0}$$

امپدانس ورودی سر دوم، وقتی سر اول مدار باز است:

$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0}$$

امپدانس انتقالی معکوس:

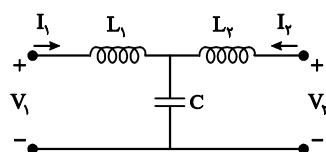
$$Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0}$$

امپدانس انتقال مستقیم:

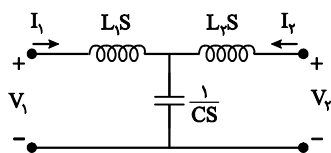
$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}$$

اگر در سرهای 1 و 2 منابع V_{s1} و V_{s2} را قرار دهیم و روابط ماتریسی حلقه $(V = Z.I)$ را به دست آوریم، در مدارهای دو حلقه‌ای، پارامترهای امپدانس دوقطبی Z برابر با همان ماتریس امپدانس حلقه خواهد بود. اگر مدار دارای بیش از دو حلقه باشد، باید جریان متغیر آن حلقه را به گونه‌ای حذف کرد و برحسب جریان‌های I_1 و I_2 بیان کرد.

مثال ۱: در مدار شکل زیر، ماتریس امپدانس شبکه را به دست آورید.

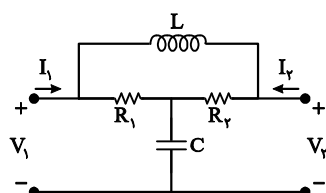


با توجه به دو حلقه‌ای بودن مدار و با انتقال آن به حوزه لاپلاس داریم:

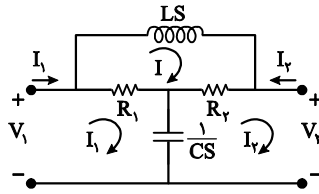


$$Z = \begin{bmatrix} L_1s + \frac{1}{Cs} & \frac{1}{Cs} \\ \frac{1}{Cs} & L_2s + \frac{1}{Cs} \end{bmatrix}$$

مثال ۲: در مدار شکل زیر، ماتریس امپدانس Z را پیدا کنید.



با انتقال مدار به حوزه لاپلاس و حذف جریان مش بالایی داریم:



با KVL زدن در مش بالایی، جریان I را برحسب I_1 و I_2 بیان می‌کنیم:

$$\text{KVL} : LS I + R_2 (I + I_2) + R_1 (I - I_2) = 0 \rightarrow I = \frac{R_1 I_1 - R_2 I_2}{LS + R_1 + R_2}$$

با KVL زدن در حلقه‌های راستی و چپی داریم:

$$V_1 = R_1 (I_1 - I) + \frac{1}{C_S} (I_1 + I_2)$$

$$V_2 = R_2 (I_2 + I) + \frac{1}{C_S} (I_1 + I_2)$$

با جایگذاری مقدار I به دست آمده و مرتب کردن معادلات:

$$V_1 = R_1 + \frac{1}{C_S} - \frac{R_1^2}{LS + R_1 + R_2} I_1 + \left(\frac{1}{C_S} + \frac{R_1 R_2}{LS + R_1 + R_2} \right) I_2$$

Z_{11} Z_{12}

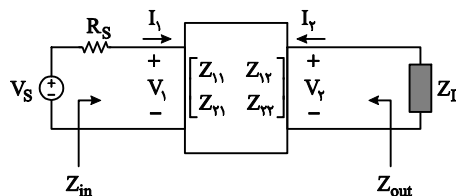
$$V_2 = \left(\frac{1}{C_S} + \frac{R_1 R_2}{LS + R_1 + R_2} \right) I_1 + \left(R_2 + \frac{1}{C_S} - \frac{R_2^2}{LS + R_1 + R_2} \right) I_2$$

Z_{21} Z_{22}

همچنین برای یافتن پارامترهای Z، مثلاً Z_{11} را می‌توان با مدار باز کردن طرف دوم و نوشتن امپدانس ورودی به دست آورد:

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = Z_{in1} = \left[(R_2 + L_s) \parallel R_1 \right] + \frac{1}{C_S}$$

مثال ۳: در مدار شکل زیر Z_{in} و Z_{out} را برحسب Z_L ، R_S و پارامترهای امپدانس Z به دست آورید.



برای به دست آوردن امپدانس ورودی از دو سر دوقطبی، یعنی نسبت $\frac{V_1}{I_1}$ داریم:

KVL: $V_2 = -Z_L I_2$ در حلقه راستی

براساس فرم ماتریسی امپدانس Z داریم:

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$$

و در نتیجه:

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 = -Z_L I_2 \rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{-Z_{21}}{Z_{22} + Z_L}$$

از طرفی:

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 = Z_{11}I_1 - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_L}I_1 = \left(Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_L} \right) I_1$$

پس در نهایت:

$$Z_{in1} = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_L}$$

$$Z_{in} = R_s + Z_{in1} = R_s + Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_L}$$

و به طریق مشابه، برای محاسبه Z_{out} نسبت $\frac{V_2}{I_2}$ را به دست می آوریم:

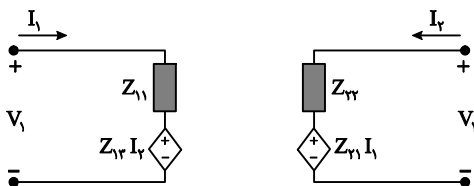
$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 = -R_s I_1 \rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{-Z_{12}}{Z_{11} + R_s}$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 = Z_{22}I_2 - \frac{Z_{21}Z_{12}}{Z_{11} + R_s}I_2 \rightarrow \frac{V_2}{I_2} = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11} + R_s}$$

$$\rightarrow Z_{out} = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11} + R_s}$$

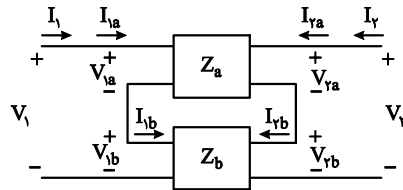
۱۳-۱-۱- مدار معادل

مدار معادل یک شبکه دوقطبی برحسب پارامترهای Z به صورت زیر است:



۱۳-۱-۲- به هم بستن دوقطبی‌ها

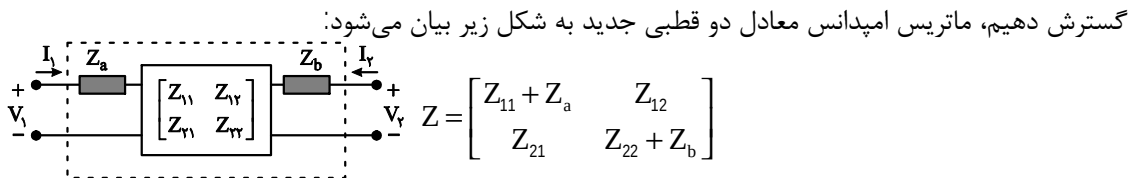
اگر دوقطبی‌ها با هم سری شده باشند، پارامترهای ماتریس امپدانس Z آن‌ها، نظیر به نظیر با هم جمع می‌شوند:



در این حالت:

$$\begin{cases} I = I_a = I_b \\ V = V_a + V_b \end{cases} \rightarrow Z = Z_a + Z_b$$

نکته: اگر دوقطبی داده شده با پارامترهای ماتریس Z را با وصل کردن سری امپدانس‌های Z_a و Z_b به صورت زیر



2-13- ماتریس ادمیتانس Y (اتصال کوتاه)

رابطه ماتریسی برای دوقطبی به شکل زیر است:

$$I = Y \times V \rightarrow \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

و با بسط دادن آن داریم:

$$\begin{cases} I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{cases}$$

تعریف تک تک پارامترها به صورت زیر است:

ادمیتانس ورودی سر اول وقتی سر دوم اتصال کوتاه است:

$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \bigg|_{V_2=0}$$

ادمیتانس ورودی سر دوم وقتی سر اول اتصال کوتاه است:

$$y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \bigg|_{V_1=0}$$

ادمیتانس انتقال معکوس:

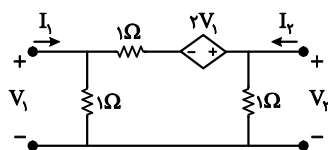
$$y_{12} = \frac{I_2}{V_1} \big|_{V_2=0}$$

ادمیتانس انتقالی مستقیم:

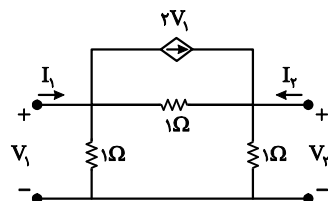
$$y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \big|_{V_1=0}$$

اگر در سرهای 1 و 2 منابع I_{s1} و I_{s2} قرار دهیم و روابط ماتریسی گره $(I = Y.V)$ را به دست آوریم، در مدارهای دو گره‌ای، پارامترهای ادمیتانس دوقطبی Y برابر با همان ماتریس ادمیتانس گره است. اگر مدار دارای بیش از دو گره باشد، باید ولتاژ متغیر آن گره را به گونه‌ای حذف کرد و برحسب ولتاژهای V_1 و V_2 نوشت.

مثال ۴: در مدار شکل زیر، ماتریس ادمیتانس Y دوقطبی را به دست آورید.

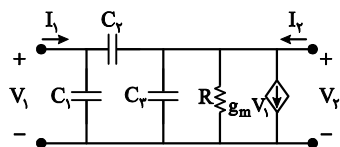


با تبدیل منبع وابسته ولتاژ به جریان و انتقال مدار به حوزه لاپلاس داریم:

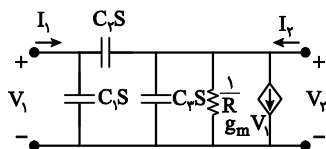


$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2V_1 \\ 2V_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow Y = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

مثال ۵: در مدار شکل زیر، ماتریس ادمیتانس را به دست آورید.



با انتقال مدار به حوزه لاپلاس و بیان مقادیر بر حسب ادمیتانس داریم:



$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \big|_{V_2=0} = C_1 s + C_2 s = s(C_1 + C_2)$$

$$y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \big|_{V_1=0} = -C_2 s$$

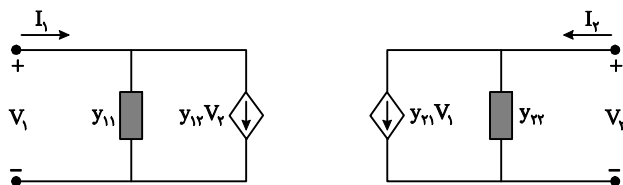
$$y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \big|_{V_2=0} = g_m - C_2 s$$

$$y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \big|_{V_1=0} = \frac{1}{R} + (C_2 + C_3)s$$

$$\rightarrow Y = \begin{bmatrix} (C_1 + C_2)s & g_m - C_2 s \\ -C_2 s & \frac{1}{R} + (C_2 + C_3)s \end{bmatrix}$$

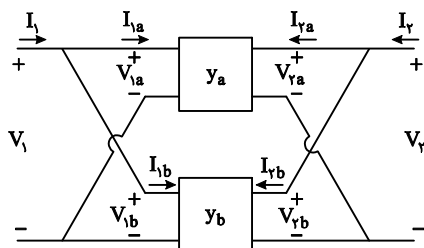
۱۳-۲-۱- مدار معادل

مدار معادل دوقطبی بر حسب پارامترهای ادمیتانس Y به صورت زیر است:



۱۳-۲-۲- به هم بستن دوقطبی‌ها

اگر دوقطبی‌ها با هم موازی شده باشند، پارامترهای ماتریس ادمیتانس Y آنها نظیر به نظیر به هم جمع می‌شوند.

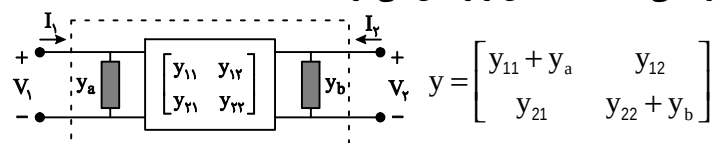


در این حالت:

$$\begin{cases} V = V_a = V_b \\ I = I_a = I_b \end{cases} \rightarrow Y = Y_a + Y_b$$

نکته: اگر دوقطبی داده شده با پارامترهای ماتریس Y را با وصل کردن موازی ادمیتانس‌های Y_a و Y_b به صورت زیر

گسترش دهیم، ماتریس ادمیتانس معادل دوقطبی جدید به شکل زیر بیان می‌گردد:



نکته: ماتریس‌های Z و Y معکوس یکدیگرند، یعنی:

$$Y = Z^{-1}$$

$$Y = \frac{1}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$$

نکته: اگر دترمینان ماتریس Z (یا ماتریس Y) صفر باشد، ماتریس Y (ماتریس Z) تعریف نمی‌شود. به عبارت دیگر،

شرط این که یک دوقطبی ماتریس Z (یا ماتریس Y) نداشته باشد این است که $\det Z = 0$ باشد.

3-13- ماتریس ترکیبی H

در این حالت سر اول دوقطبی مانند Z و سر دوم آن مانند Y است. یعنی در سر اول V_1 برحسب I_1 و در سر دوم I_2

برحسب V_2 نوشته می‌شود.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

و با بسط آن داریم:

$$\begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases}$$

تعریف تک تک پارامترها به صورت زیر است:

امپدانس ورودی سر اول وقتی سر دوم اتصال کوتاه است:

$$h_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{V_2=0}$$

امپدانس ورودی سر دوم وقتی سر اول اتصال کوتاه است:

$$h_{22} = \frac{I_2}{V_2} \big|_{I_1=0}$$

بهره ولتاژ معکوس مدار باز:

$$h_{12} = \frac{V_1}{V_2} \big|_{I_1=0} = H_V$$

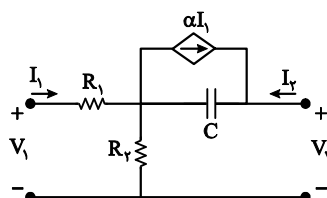
بهره جریان مستقیم اتصال کوتاه:

$$h_{21} = \frac{I_2}{I_1} \big|_{V_2=0} = H_I$$

نکته: براساس تعاریف انجام شده مشخص است که:

$$h_{11} = \frac{1}{y_{11}} \quad , \quad h_{22} = \frac{1}{Z_{22}}$$

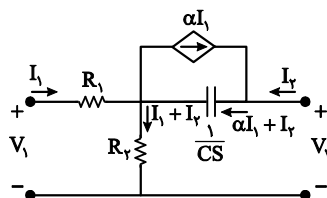
مثال ۶: در مدارش کل زیر، پارامتر h_{21} را به دست آورید.



طبق تعریف داریم:

$$h_{21} = \frac{I_2}{I_1} \big|_{V_2=0}$$

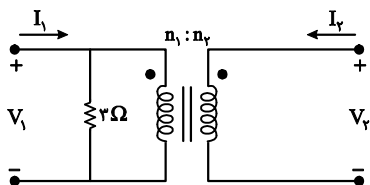
پس با اتصال کوتاه کردن سمت راست ($V_2=0$) و انتقال مدار به حوزه لاپلاس داریم:



$$\text{KVL: } \frac{1}{Cs}(\alpha I_1 + I_2) + R_2(I_1 + I_2) = 0 \rightarrow \left(\frac{1}{Cs} + R_2 \right) I_2 = - \left(\frac{\alpha}{Cs} + R_2 \right) I_1$$

$$\rightarrow \frac{I_2}{I_1} = h_{21} = - \frac{\left(\frac{\alpha}{Cs} + R_2 \right)}{\frac{1}{Cs} + R_2} = - \frac{\alpha + sR_2C}{1 + sR_2C}$$

مثال ۷: ماتریس H دوقطبی شکل زیر را به دست آورید.



با توجه به تعاریف ماتریس H:

$$h_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{V_2=0} = 3 \parallel 0 = 0$$

$$h_{12} = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{n_1}{n_2} = 2$$

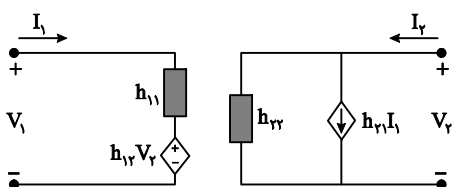
$$h_{21} = \frac{I_2}{I_1} \Big|_{V_2=0} = -\frac{n_1}{n_2} = -2$$

$$\rightarrow H = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$h_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{1}{3} \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{1} \right)^2 = \frac{4}{3}$$

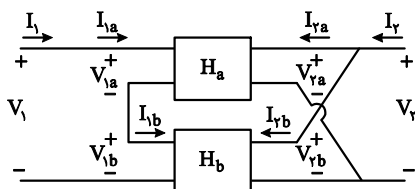
۱۳-۳-۱- مدار معادل

در مدار معادل هیبرید H، سر ورودی مثل Z و سر خروجی مانند Y است.



۱۳-۳-۲- به هم بستن دوقطبی ها

اگر دوقطبی ها به صورت «ورودی سری - خروجی موازی» بسته شوند، پارامترهای H آنها نظیر به نظیر با هم جمع می شوند.

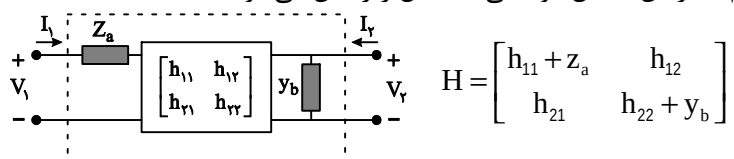


در این حالت:

$$H = H_a + H_b$$

نکته: اگر دوقطبی داده شده با پارامترهای ماتریس H را با وصل کردن سری امپدانس Z_a و وصل کردن موازی

ادمیتانس y_b به صورت زیر گسترش دهیم، ماتریس معادل دوقطبی به شکل زیر بیان می‌شود:



13-4- ماتریس ترکیبی G

در این حالت سر اول دوقطبی مانند Y و سر دوم آن مانند Z است یعنی دوگان ماتریس H است.

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

بنابراین پارامترهای H و G وارون یکدیگرند:

$$G = H^{-1}$$

به عبارت دیگر:

$$g_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{I_2=0}$$

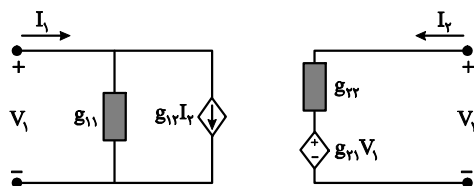
$$g_{21} = \frac{V_2}{V_1} \Big|_{I_2=0}$$

$$g_{12} = \frac{I_1}{I_2} \Big|_{V_1=0}$$

$$g_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{V_1=0}$$

۱۳-۴-۱- مدار معادل

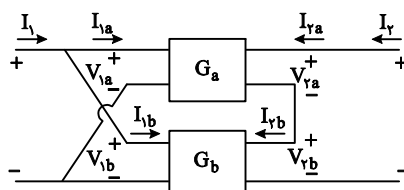
مدار معادل هیبرید G به صورت زیر است:



۱۳-۴-۲- به هم بستن دوقطبی‌ها

اگر دوقطبی‌ها به صورت «ورودی موازی - خروجی سری» بسته شوند، پارامترهای G آن‌ها نظیر به نظیر با هم جمع

می‌شوند.

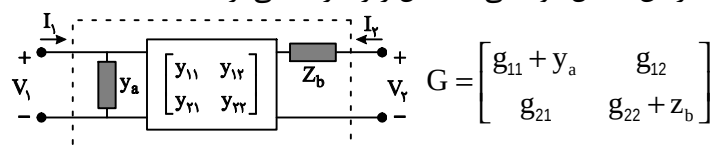


در این حالت:

$$G = G_a + G_b$$

نکته: اگر دوقطبی داده شده با پارامترهای ماتریس G را با وصل کردن موازی ادمیتانس y_a و وصل کردن سری

امپدانس Z_b به صورت زیر گسترش دهیم، ماتریس معادل دوقطبی به شکل زیر تعریف می گردد:



5-13- ماتریس انتقال T

در این حالت، ورودی را بر حسب خروجی می نویسیم به عبارت دیگر، V_1 و I_1 بر حسب V_2 و $-I_2$ بیان می شوند.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

و با بسط آن داریم:

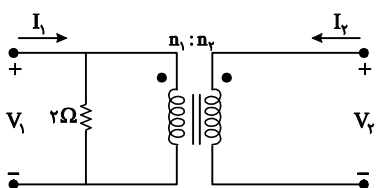
و پارامترهای آن به صورت زیر تعریف می شوند:

$$A = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2=0}$$

$$B = -\frac{V_1}{I_2} \Big|_{V_2=0}$$

$$C = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2=0}$$

$$D = -\frac{I_1}{I_2} \Big|_{V_2=0}$$



مثال ۸: در مدار شکل زیر، ماتریس T را به دست آورید.

$$\begin{cases} V_1 = AV_2 - BI_2 \\ I_1 = CI_2 - DI_2 \end{cases}$$

$$A = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2=0} = \frac{n_1}{n_2} = 5$$

$$B = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{V_2=0} = 0$$

$$C = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2=0} = \frac{I_1}{V_1} \times \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$$

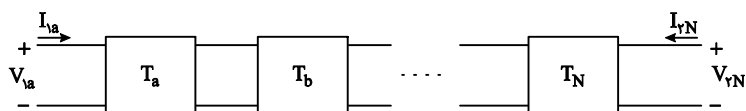
$$D = -\frac{I_1}{I_2} \Big|_{V_2=0} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{5}$$

و در نتیجه:

$$T = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

۱۳-۵-۱- به هم بستن دوقطبی‌ها

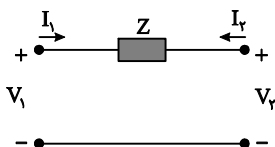
اگر دوقطبی‌ها به صورت پشت سر هم (Tandem) بسته شده باشند، ماتریس‌های T آن‌ها در هم ضرب می‌شود.



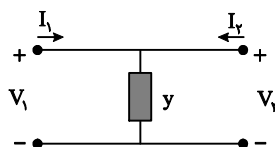
در این صورت:

$$T = T_a \times T_b \times \dots \times T_N$$

نکته: ماتریس T دوقطبی‌های زیر را در نظر بگیرید:



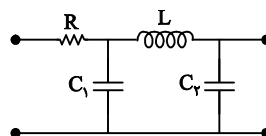
$$T = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$$

در بعضی شبکه‌های دوقطبی پیچیده می‌توان دوقطبی را به صورت اتصال پشت سر هم این دوقطبی‌ها در نظر گرفت و در نهایت ماتریس T را محاسبه کرد.

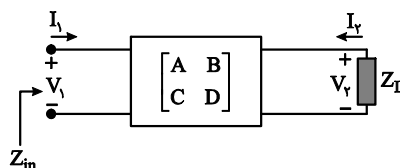
مثال ۹: در دوقطبی زیر، ماتریس انتقال T را به دست آورید.



با تبدیل دوقطبی به چهار دوقطبی ساده پشت سر هم داریم:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C_1 s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Ls \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C_2 s & 1 \end{bmatrix}$$

مثال ۱۰: در مدار شکل زیر، Z_{in} را برحسب عناصر ماتریس انتقال T به دست آورید.



برای امپدانس ورودی داریم:

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{AV_2 - BI_2}{CV_2 - DI_2}$$

و با KVL در حلقه راستی:

$$V_2 = -Z_L I_2$$

بنابراین:

$$Z_{in} = \frac{AZ_L I_2 - BI_2}{-CZ_L I_2 - DI_2} \rightarrow Z_{in} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D}$$

نکته: وقتی یک دوقطبی:

1- ماتریس Z دارد که بتوان V_1 و V_2 را برحسب I_1 و I_2 بیان کرد.

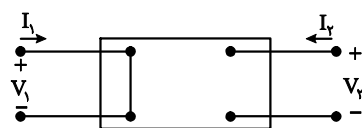
2- ماتریس Y دارد که بتوان I_1 و I_2 را برحسب V_1 و V_2 بیان کرد.

3- ماتریس H دارد که بتوان V_1 و I_2 را برحسب I_1 و V_2 بیان کرد.

4- ماتریس G دارد که بتوان I_1 و V_2 را برحسب I_2 و V_1 بیان کرد.

5- ماتریس T دارد که بتوان V_1 و I_1 را برحسب V_2 و I_2 بیان کرد.

مثال ۱۱: دوقطبی شکل زیر کدام ماتریس‌ها را دارد؟

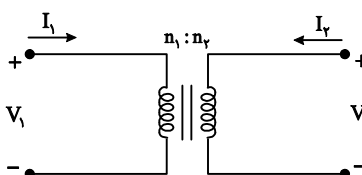


برای اتصال کوتاه و مدار باز داریم:

$$\begin{aligned} V_1 = 0 &\rightarrow V_1 = 0I_1 + 0V_2 \\ I_2 = 0 &\rightarrow I_2 = 0I_1 + 0V_2 \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

پس دوقطبی فقط ماتریس H دارد.

مثال ۱۲: ترانسفورماتور شکل زیر کدام ماتریس‌ها را دارد:



با توجه به روابط ترانسفورماتور داریم:

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} &\rightarrow V_1 = 0I_1 + \frac{n_1}{n_2} V_2 \\ \frac{I_1}{I_2} = -\frac{n_2}{n_1} &\rightarrow I_2 = -\frac{n_1}{n_2} I_1 + 0V_2 \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{n_1}{n_2} \\ -\frac{n_1}{n_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

با توجه به این که $\det H \neq 0$ است پس ماتریس G نیز مشخص است ($G = H^{-1}$) و برای ماتریس T داریم:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{n_1}{n_2} V_2 + 0(-I_2) \\ I_1 &= 0V_2 + \frac{n_2}{n_1} (-I_2) \end{aligned} \rightarrow T = \begin{bmatrix} \frac{n_1}{n_2} & 0 \\ 0 & \frac{n_2}{n_1} \end{bmatrix}$$

نکته: ترانسفورماتور ماتریس‌های Z و Y را ندارد و فقط ماتریس‌های H، G و T را می‌توان برای آن بیان کرد.

نکته: دوقطبی را متقابل (شرط هم پاسخی) می‌گویند که:

$$g_{12} = g_{21} \quad \text{یا} \quad Z_{12} = Z_{21} \quad \text{یا} \quad y_{12} = y_{21} \quad \text{یا} \quad \Delta T = AD - BC = 1 \quad \text{یا} \quad h_{12} = -h_{21}$$

و دوقطبی را متقارن می‌گویند که:

$$Z_{11} = Z_{22} \quad \text{یا} \quad y_{11} = y_{22} \quad \text{یا} \quad A = D \quad \text{یا} \quad h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = 1$$

نکته: هر دوقطبی را می‌توان به صورت مدار معادل T یا π مدل کرد.

در دوقطبی‌های متقابل (هم پاسخ) این مدارها به صورت زیر است:

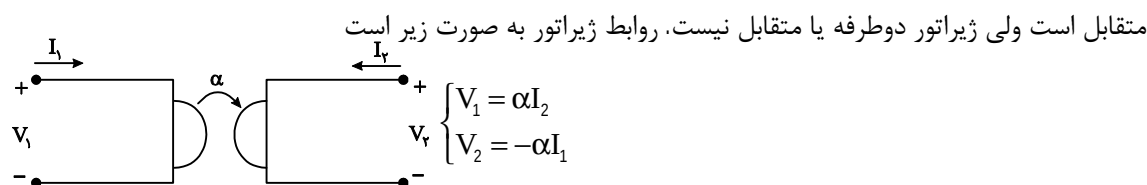


برای تعیین مرتبه مدار، هرگاه به دوقطبی رسیدیم معمولاً تبدیلات مدار معادل T و π ، محاسبات را ساده‌تر می‌کند.

مثلاً سلف‌های تزویج را در حکم سه سلف در نظر می‌گیریم.

6-13- ژیراتور

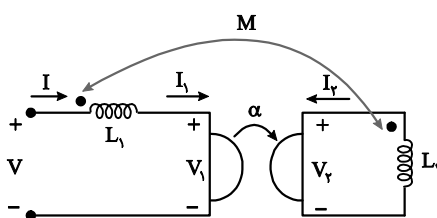
ژیراتور یک مبدل شبیه ترانسفورماتور است با این تفاوت که، ترانسفورماتور ولتاژ را به ولتاژ و جریان را به جریان تبدیل می‌کند ولی در ژیراتور جریان به ولتاژ و یا ولتاژ به جریان تبدیل می‌شود. همچنین ترانسفورماتور یک عنصر دوطرفه و



متقابل است ولی ژیراتور دوطرفه یا متقابل نیست. روابط ژیراتور به صورت زیر است

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ -\frac{1}{\alpha} & 0 \end{bmatrix}$$

مثال ۱۳: در مدار شکل زیر، امپدانس ورودی $Z_{in}(s)$ را به دست آورید.



با KVL زدن در حلقه راستی داریم:

$$V_2 = -SL_2 I_2 + SMI_1$$

که با توجه به روابط ژیراتور:

$$V_2 = -\alpha I_1 \rightarrow SL_2 I_2 = SM I_1 + \alpha I_1 \rightarrow I_2 = \frac{(SM + \alpha)}{SL_2} I$$

با KVL زدن در حلقه ورودی داریم:

$$V = SL_1 I_1 - SM I_2 + V_1 = SL_1 I + (\alpha - SM) I_2$$

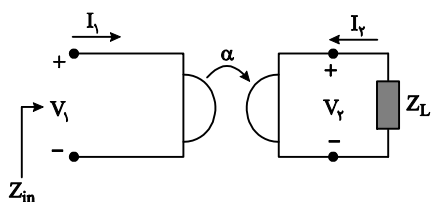
$$\rightarrow V = SL_1 I + (\alpha - SM) \frac{(SM + \alpha)}{SL_2} I$$

و در نتیجه:

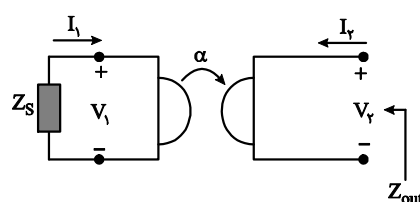
$$Z_{in} = \frac{V}{I} = SL_1 + \frac{\alpha^2 - (SM)^2}{SL_2}$$

۱۳-۶-۱- امپدانس ورودی و خروجی ژیراتور

به کمک معادلات ژیراتور، امپدانس ورودی و خروجی به صورت زیر بیان می شود:

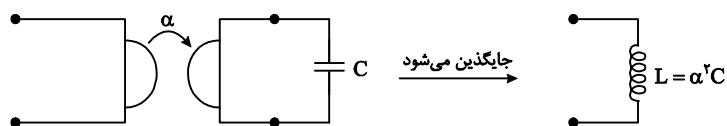


$$Z_{in} = \frac{\alpha^2}{Z_L}$$

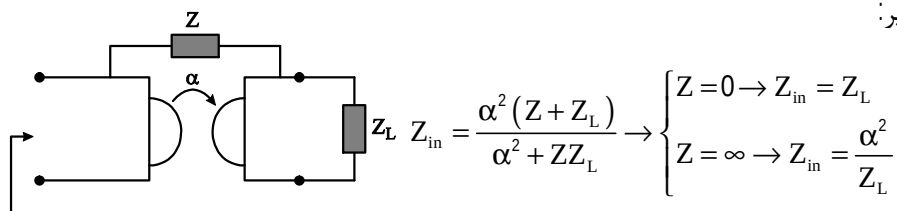


$$Z_{out} = \frac{\alpha^2}{Z_S}$$

نکته: ژیراتور ختم شده به خازن را می توان با یک سلف جایگزین نمود.



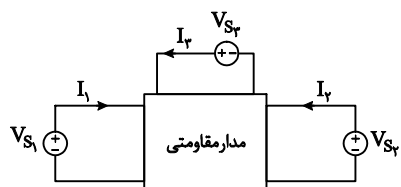
نکته: در مدار شکل زیر:



تست‌های طبقه‌بندی شده مبحث دوقطبی‌ها

۱- مدار شکل زیر با معادلات
$$\begin{bmatrix} 10a & 1 & -a \\ a & 0/5 & 0 \\ -1 & 0 & 0/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{s1} \\ V_{s2} \\ V_{s3} \end{bmatrix}$$
 توصیف می‌شود. امپدانس دیده شده در دو

سر منبع V_{s1} کدام است؟



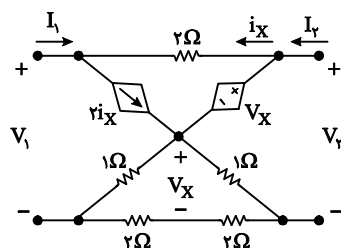
6a (2)

3a (1)

$\frac{2}{3a}$ (4)

$\frac{3}{2a}$ (3)

۲- پارامتر هیبرید h_{11} کدام است؟



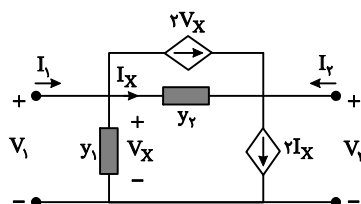
-3 (1)

-1 (2)

1 (3)

3 (4)

۳- پارامترهای y دوقطبی شکل زیر کدام است؟



$\begin{bmatrix} y_1 + y_2 & -y_2 \\ y_2 - y_1 & -y_2 \end{bmatrix}$ (1)

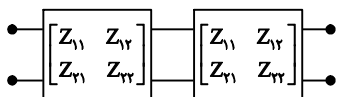
$\begin{bmatrix} y_1 + y_2 + 2 & -y_2 \\ y_2 + 2 & -y_2 \end{bmatrix}$ (2)

$\begin{bmatrix} y_1 + y_2 - 2 & -y_2 \\ y_2 - 2 & -y_2 \end{bmatrix}$ (3)

$\begin{bmatrix} y_1 + y_2 + 2 & -y_2 \\ y_2 - 2 & -y_2 \end{bmatrix}$ (4)

۴- دو شبکه دوقطبی مشابه (با پارامترهای Z) به طور متوالی به یکدیگر متصل شده‌اند. پارامتر Z_{11} شبکه

معادل کدام است؟



$$(1) \quad \frac{Z_{12}}{Z_{11} + Z_{22} + Z_{12}}$$

$$(2) \quad \frac{Z_{11} Z_{12}}{Z_{11} + Z_{22}}$$

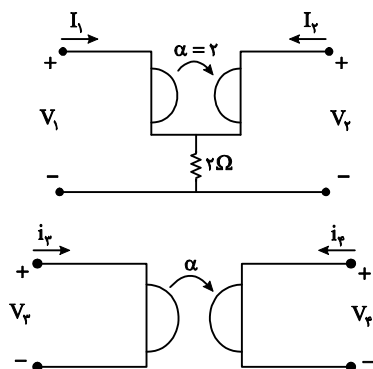
$$(3) \quad \frac{Z_{22}}{Z_{11} + Z_{22}}$$

$$(4) \quad \frac{(Z_{12})^2}{Z_{11} + Z_{22}}$$

۵- در دوقطبی شکل زیر، ماتریس انتقال T کدام است؟

تعریف ژیراتور به صورت زیر است:

$$\begin{cases} i_3 = \alpha V_4 \\ i_4 = -\alpha V_3 \end{cases}$$



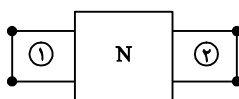
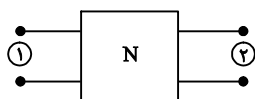
$$(1) \quad \begin{bmatrix} 0/8 & 0/1 \\ 0/4 & 0/8 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

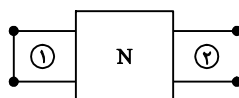
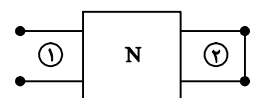
$$(3) \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(4) \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

۶- معادله مشخصه یک دوقطبی در حالت‌های زیر مشخص شده است. ادمیتانس y_{22} کدام است؟



$$(1) \frac{s^2 + 4s + 3}{s + 5}$$



$$(2) \frac{s + 5}{s^2 + 6s + 8}$$

$$(3) \frac{s + 5}{s^2 + 2s + 6}$$

$$(4) \frac{s^2 + 6s + 8}{s + 5}$$

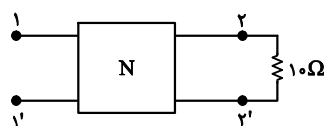
۷- دوقطبی N دارای ماتریس پارامترهای امپدانس $Z = \frac{10s}{s^2 + 25} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ است. این دوقطبی را به مقاومت ۱۰ اهمی ختم می‌کنیم. Q مدار را تعیین کنید.

$$(1) 1$$

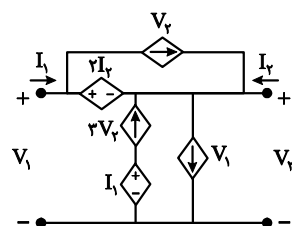
$$(2) 5$$

$$(3) 10$$

$$(4) \frac{1}{5}$$



۸- ماتریس پارامترهای هایبرید H دوقطبی شکل زیر کدام است؟



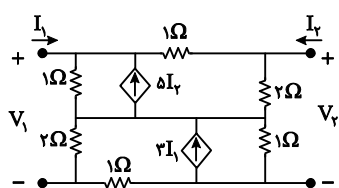
$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

۹- ماتریس پارامترهای Z دوقطبی شکل زیر کدام است؟



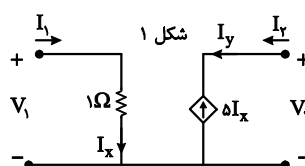
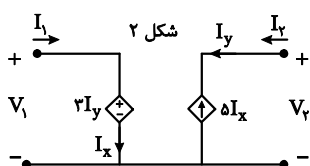
$$(1) \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 13 & 19 \\ 13 & 17 \end{bmatrix}$$

$$(2) \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 13 & 19 \\ 17 & 13 \end{bmatrix}$$

$$(3) \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 13 & 17 \\ 13 & 19 \end{bmatrix}$$

$$(4) \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 13 & 17 \\ 19 & 13 \end{bmatrix}$$

۱۰- برای مدارهای دوقطبی شکل زیر کدام یک از عبارات داده شده درست است؟



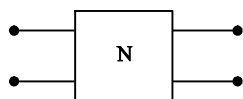
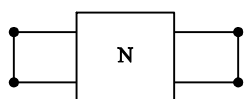
(1) برای هر دو شکل مدل امپدانسی وجود دارد ولی مدل ادمیتانسی وجود ندارد.

(2) برای هر دو شکل ادمیتانسی وجود دارد ولی مدل امپدانسی وجود ندارد.

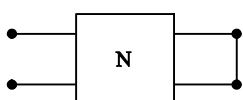
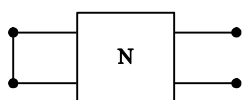
(3) مدار شکل 2 مدل ادمیتانسی و امپدانسی ندارد ولی مدار 1 مدل امپدانسی دارد.

(4) مدار شکل 1 مدل امپدانسی ندارد ولی ادمیتانسی دارد و مدار شکل 2 مدل امپدانسی و ادمیتانسی ندارد.

۱۱- معادله مشخصه یک دوقطبی در حالت‌های زیر مشخص شده است. $Z_{11}(s)$ کدام است؟



$$(1) \frac{s+2}{s^2+4s+3}$$

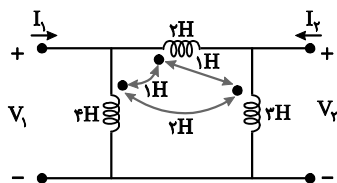


$$(2) \frac{s^2+6s+2}{s+2}$$

$$(3) \frac{s^2+6s+2}{s^2+6s+8}$$

$$(4) \frac{s^2+4s+3}{s^2+6s+8}$$

۱۲- ماتریس پارامترهای Z دوقطبی شکل زیر کدام است؟



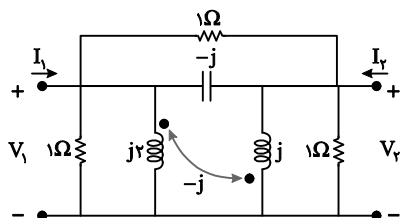
$$\begin{bmatrix} 3/8s & 2/4s \\ 2/4s & 2/2s \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 3/2s & 2/2s \\ 2/2s & 3/8s \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 3/8s & 2/4s \\ 2/4s & 3/2s \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 3/2s & 2/4s \\ 2/4s & 2/2s \end{bmatrix} \quad (4)$$

۱۳- در دوقطبی شکل زیر، پارامتر ادمیتانس y_{12} در حالت دائمی سینوسی کدام است؟



$$2 \quad (1)$$

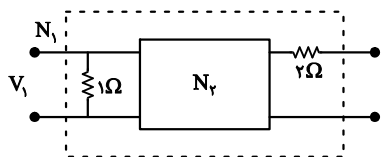
$$-(1+2j) \quad (2)$$

$$1-2j \quad (3)$$

$$2-j \quad (4)$$

۱۴- ماتریس امپدانس دوقطبی N_2 به صورت $Z = \begin{bmatrix} s+3 & s \\ s & s+1 \end{bmatrix}$ معلوم است. پارامتر y_{11} دوقطبی N_1

نشان داده شده در درون نقطه چین کدام است؟



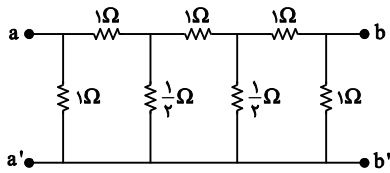
$$\frac{7s+12}{6s+9} \quad (1)$$

$$\frac{s+4}{s+3} \quad (2)$$

$$\frac{s+6}{3s+5} \quad (3)$$

$$\frac{3s+4}{2s+3} \quad (4)$$

۱۵- ماتریس انتقال دوقبیطی شکل زیر کدام است؟



$$\begin{bmatrix} 26 & 15 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \quad (1)$$

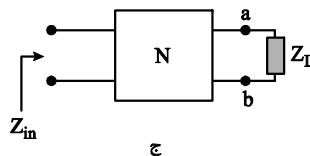
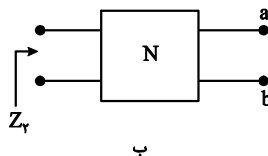
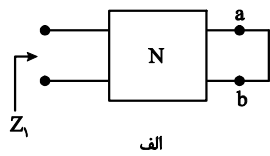
$$\begin{bmatrix} 26 & 15 \\ 40 & 20 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 26 & 15 \\ 21 & 20 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 26 & 15 \\ 45 & 26 \end{bmatrix} \quad (4)$$

۱۶- دوقبیطی N متقارن و متقابل است در آزمایش شکل الف، $Z_1 = \frac{1}{2s(s+1)}$ و در آزمایش ب، $Z_2 = \frac{s+1}{2s}$

می‌باشد. چه امپدانسی باید به دو سر a و b در شکل ج وصل شود تا $Z_{in} = Z_L$ گردد؟



$$1 \quad (1)$$

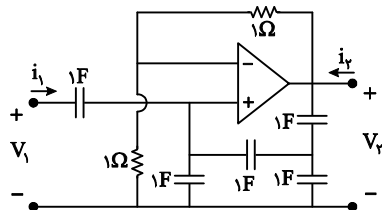
$$\frac{2s}{s+1} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2s} \quad (3)$$

$$\frac{s+1}{2s^2} \quad (4)$$

۱۷- ماتریس پارامترهای Z دوقبیطی شکل زیر کدام است؟ (تقویت کننده عملیاتی ایده آل است و در ناحیه

خطی عمل می‌کند).



$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{s} \\ \frac{2}{s} & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

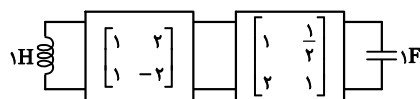
$$\begin{bmatrix} \frac{2}{s} & 0 \\ 0 & \frac{2}{s} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{s} & \frac{2}{s} \\ 0 & \frac{2}{s} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{s} & 0 \\ \frac{2}{s} & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

۱۸- در مدار شکل زیر، دوقطبی‌ها با پارامترهای انتقال توصیف شده‌اند. فرکانس‌های طبیعی کل شبکه کدام

است؟



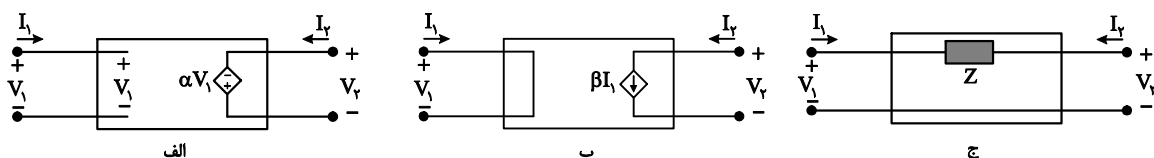
(1) 2 و -1

(2) 2 و $-\frac{5}{3}$

(3) -2 و 1

(4) -2 و $\frac{5}{3}$

۱۹- کدام دوقطبی دارای پارامترهای H نیست؟



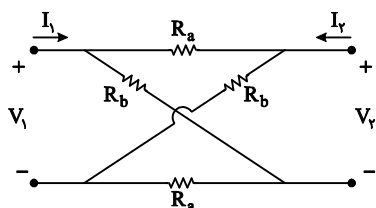
(4) ج و ب

(3) الف و ج

(2) ب

(1) الف

۲۰- شرط این که دوقطبی شکل (ب) معادل دوقطبی شکل (الف) باشد، آن است که:

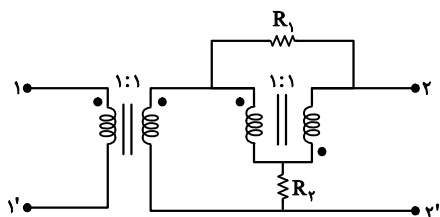


(1) $R_2 = 2R_b$, $R_1 = \frac{1}{2}R_a$

(2) $R_2 = \frac{1}{2}R_b$, $R_1 = 2R_a$

(3) $R_2 = 2R_a$, $R_1 = \frac{1}{2}R_b$

(4) $R_2 = \frac{1}{2}R_a$, $R_1 = 2R_b$



پاسخ تشریحی

۱- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

برای محاسبهٔ امپدانس دیده شده در دو سر منبع V_{s1} باید منابع V_{s2} و V_{s3} را برابر صفر قرار دهیم بنابراین:

$$\begin{bmatrix} 10a & 1 & -a \\ a & 0/5 & 0 \\ -1 & 0 & 0/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

از حل این معادلات:

$$\begin{cases} 10aI_1 + I_2 - aI_3 = V_{s1} \\ aI_1 + 0/5I_2 = 0 \\ -I_1 + 0/5I_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10aI_1 + I_2 - aI_3 = V_{s1} \\ I_2 = -2aI_1 \\ I_3 = 2I_1 \end{cases}$$

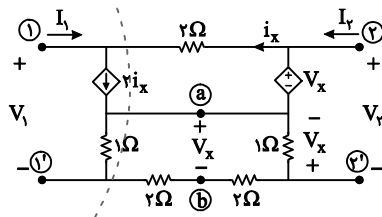
$$\rightarrow 10aI_1 - 2aI_1 - 2aI_1 = 6aI_1 = V_{s1} \rightarrow Z_{11} = \frac{V_{s1}}{I_1} = 6a$$

۲- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با توجه به تعریف h_{11} که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$h_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{V_2=0}$$

V_2 را اتصال کوتاه می‌کنیم:



با توجه به اتصال کوتاه شدن سرهای 2 و 2' می‌توان گفت ولتاژ دو سر مقاومت یک اهمی بین سرهای 2' و a برابر V_x است.

در سر 1 داریم:

$$KCL(1): I_1 + i_x - 2i_x = 0 \rightarrow I_1 = i_x$$

با توجه به شکل می‌توان گفت:

$$V_{b2'} = V_{ba} + V_{a2'} = V_x + V_x = 2V_x$$

و جریان گذرنده از مقاومت 2 اهمی بین سرهای b و 2' برابر $V_x = \frac{2V_x}{2}$ است. پس $V_{1'b} = 2V_x$ و در نتیجه

$V_{a1'} = 3V_x$ ، یعنی جریان گذرنده از مقاومت یک اهمی بین a و 1' برابر $3V_x$ است.

با اعمال KCL در کات ست نشان داده شده با نقطه چین داریم:

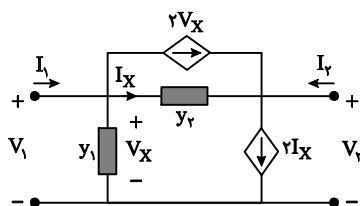
$$\text{KCL: } i_x - 2i_x + 3V_x + V_x = 0 \rightarrow V_x = \frac{i_x}{4} = \frac{I_1}{4}$$

و با KVL در حلقه بیرونی داریم:

$$\text{KVL: } V_1 = -2i_x + V_x - V_x + 2V_x + 2V_x = -2I_1 + I_1 = -I_1$$

$$\rightarrow \frac{V_1}{I_1} = h_{11} = -1$$

۳- گزینه‌ی «۴» صحیح است.



با KCL زدن در گره‌ها داریم:

$$\text{KCL}(1): I_1 = y_1 V_1 + y_2 (V_1 - V_2) + 2V_x \rightarrow I_1 = (y_1 + y_2 + 2) V_1 - y_2 V_2$$

$$\text{KCL}(2): I_2 = -2V_x - I_x + 2I_x = -2V_1 + y_2 (V_1 - V_2)$$

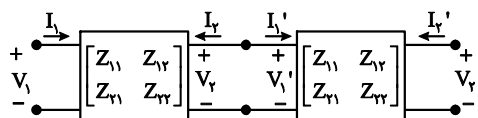
$$\rightarrow I_2 = (y_2 - 2) V_1 - y_2 V_2$$

بنابراین داریم:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + 2 & -y_2 \\ 1 & y_2 - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

۴- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با نامگذاری سرهای دو قطبی به صورت شکل زیر داریم:



با توجه به تعریف ماتریس Z می‌توان گفت:

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}$$

همچنین با توجه به نحوه اتصال دوقطبی‌ها، $V_2 = V_1'$ و $I_2 = -I_1'$ است.

Z_{12} شبکه معادل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z_{12t} = \frac{V_1}{I_2'} \Big|_{I_1=0}$$

با اعمال $I_1 = 0$ داریم:

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{22}I_2 \end{aligned}$$

از طرفی:

$$\begin{aligned} V_2 &= V_1' \rightarrow Z_{22}I_2 = Z_{11}I_1' + Z_{12}I_2' = Z_{11}(-I_2) + Z_{12}I_2' \\ \rightarrow I_2 &= \frac{Z_{12}I_2'}{Z_{11} + Z_{22}} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$Z_{12t} = \frac{V_1}{I_2'} \Big|_{I_1=0} = \frac{V_1}{I_2} \times \frac{I_2}{I_2'} = Z_{12} \times \frac{Z_{12}}{Z_{11} + Z_{22}} = \frac{(Z_{12})^2}{Z_{11} + Z_{22}}$$

۵- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

از مقاومت 1 اهمی جریان $(I_1 + I_2)$ می‌گذرد. براساس تعریف ژیراتور می‌توان گفت:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= I_3 \text{ و } I_2 = I_4 \\ V_3 &= \frac{-I_4}{2} = \frac{-I_2}{2} \text{ و } V_4 = \frac{I_3}{2} = \frac{I_1}{2} \end{aligned} \right\}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} V_1 = V_3 + 2(I_1 + I_2) = -\frac{I_2}{2} + 2I_1 + 2I_2 = 2I_1 + \frac{3}{2}I_2 \\ V_2 = V_4 + 2(I_1 + I_2) = \frac{I_1}{2} + 2I_1 + 2I_2 = \frac{5}{2}I_1 + 2I_2 \end{cases}$$

برای ماتریس T خواهیم داشت:

$$I_1 = \frac{2}{5}(V_2 - 2I_2) = \frac{2}{5}V_2 + \frac{4}{5}(-I_2) \rightarrow I_1 = 0/4V_2 + 0/8(-I_2)$$

و با جایگذاری در رابطه اول داریم:

$$V_1 = 0/8V_2 + 1/6(-I_2) - 1/5(-I_2) \rightarrow V_1 = 0/8V_2 + 0/1(-I_2)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} V_1 &= 0/8V_2 + 0/1(-I_2) \\ I_1 &= 0/4V_2 + 0/8(-I_2) \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/8 & 0/1 \\ 0/4 & 0/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

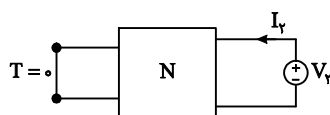
T

۶- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

ادمیتانس y_{22} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$

که مدار آن به صورت زیر است:



مخرج y_{22} معادله مشخصه‌ای است که با صفر قرار دادن V_2 به دست می‌آید، یعنی مخرج $(s+5)$ است.

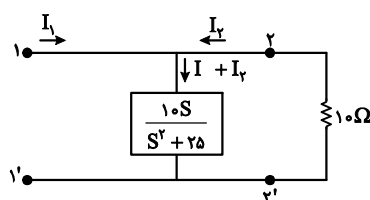
صورت y_{22} نیز معادله مشخصه‌ای است که با صفر قرار دادن I_2 به دست می‌آید، یعنی صورت $(s^2 + 6s + 8)$ می‌باشد.

بنابراین:

$$y_{22} = \frac{s^2 + 6s + 8}{s + 5}$$

۷- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با توجه به این که هر چهار عنصر ماتریس Z یکسان است، پس داخل شبکه دوقطبی N مشخص است و داریم:



پس ادمیتانس ورودی این دوقطبی برابر است با:

$$y_{in} = \frac{1}{10} + \frac{s^2 + 25}{10s} = \frac{s^2 + s + 25}{10s}$$

و امپدانس ورودی به صورت زیر است:

$$Z_{in} = \frac{1}{y_{in}} = \frac{10s}{s^2 + s + 25}$$

معادله مشخصه مدار (مخرج امپدانس ورودی) به صورت $s^2 + s + 25 = 0$ است. و در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} \omega_0^2 = 25 \rightarrow \omega_0 = 5 \\ 2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = 5$$

۸- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

معادله ماتریس هیبرید H به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

با KVL زدن در کل حلقه داریم:

$$V_1 = 2I_2 + V_2 \rightarrow V_1 - 2I_2 = V_2 \rightarrow \begin{cases} h_{11} - 2h_{21} = 0 \\ h_{12} - 2h_{22} = 1 \end{cases}$$

با چک کردن گزینه‌ها، دیده می‌شود فقط گزینه «4» این شرایط را ارضا می‌کند.

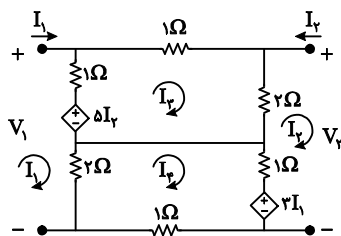
همچنین با نوشتن KCL در گره پایین شبکه داریم:

$$I_1 + 3V_2 - V_1 + I_2 = 0 \rightarrow I_1 + 3V_2 - (2I_2 + V_2) + I_2 = 0 \rightarrow I_2 = I_1 + 2V_2$$

که سطر دوم ماتریس H می‌باشد.

۹- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

با تبدیل منابع وابسته جریان به ولتاژ و اعمال KVL در مش‌های درونی داریم:



$$\text{KVL}(3): I_3 + 2(I_3 + I_2) - 5I_2 + (I_3 - I_1) = 0 \rightarrow I_3 = \frac{I_1 + 3I_2}{4}$$

$$\text{KVL}(4): (I_4 + I_2) + 3I_1 + I_4 + 2(I_4 - I_1) = 0 \rightarrow I_4 = \frac{-I_1 - I_2}{4}$$

با نوشتن KVL در مش‌های ورودی و خروجی داریم:

$$\text{KVL}(1): V_1 = (I_1 - I_3) + 5I_2 + 2(I_1 - I_4) = 3I_1 + 5I_2 - I_3 - 2I_4$$

$$\text{KVL}(2): V_2 = 2(I_2 + I_3) + (I_2 + I_4) + 3I_1 = 3I_1 + 3I_2 + 2I_3 + 2I_4$$

با جایگذاری I_3 و I_4 در این معادلات:

$$V_1 = 3I_1 + 5I_2 - \frac{I_1}{4} - \frac{3}{4}I_2 + \frac{2}{4}I_1 + \frac{2}{4}I_2 = \frac{13}{4}I_1 + \frac{19}{4}I_2$$

$$V_2 = 3I_1 + 3I_2 + \frac{2}{4}I_1 + \frac{6}{4}I_2 - \frac{1}{4}I_1 - \frac{1}{4}I_2 = \frac{13}{4}I_1 + \frac{17}{4}I_2$$

بنابراین:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{4} & \frac{19}{4} \\ \frac{13}{4} & \frac{17}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

۱۰- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

برای مدار شکل زیر داریم:

$$\begin{cases} V_1 = I_1 = I_x \\ I_2 = -5I_x = -5I_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_1 = V_1 \\ I_2 = -5V_1 \end{cases} \rightarrow Y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

پس مدار شکل 1 مدل ادمیتانسی دارد ولی چون $|Y_1| = 0$ است مدل امپدانسی ندارد.

همچنین برای مدار شکل 2 داریم:

$$\begin{cases} V_1 = 3I_y = 3I_2 \\ I_2 = -5I_x = -5I_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_2 = \frac{1}{3}V_1 \\ I_1 = \frac{-1}{15}V_1 \end{cases} \rightarrow y_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{15} & 0 \end{bmatrix}$$

یعنی مدار شکل 2 نیز مدل ادمیتانسی دارد ولی به علت صفر بودن دترمینان ماتریس Y_2 ($|Y_2| = 0$) مدل امپدانسی

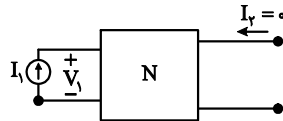
ندارد. بنابراین گزینه‌ی «2» درست است.

۱۱- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

امپدانس Z_{11} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0}$$

مدار آن به صورت زیر تعریف می‌شود:



صورت Z_{11} معادله مشخصه‌ای است که با صفر قرار دادن V_1 به دست می‌آید، یعنی طرف اول اتصال کوتاه باشد. پس

صورت $(s^2 + 4s + 3 = 0)$ است.

مخرج Z_{11} معادله مشخصه‌ای است که با صفر قرار دادن I_1 حاصل می‌شود، یعنی طرف اول اتصال باز باشد. در نتیجه

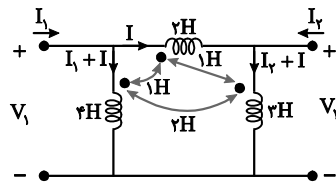
مخرج $(s^2 + 6s + 8 = 0)$ می‌باشد. بنابراین:

$$Z_{11} = \frac{s^2 + 4s + 3}{s^2 + 6s + 8}$$

۱۲- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

اگر جریان گذرنده از سلف $2H$ را برابر i در نظر بگیریم، جریان‌های سلف‌های $4H$ و $3H$ به ترتیب $i_1 - i$ و $i_2 + i$

خواهند بود. پس با نوشتن KVL در مش وسط داریم:



$$\text{KVL: } 2 \frac{dI}{dt} + 1 \frac{d}{dt}(I_1 - I) + 1 \frac{d}{dt}(I_2 + I) + 3 \frac{d}{dt}(I_2 + I) + 1 \frac{dI}{dt}$$

$$+ 2 \frac{d}{dt}(I_1 - I) - 4 \frac{d}{dt}(I_1 - I) - 1 \frac{dI}{dt} - 2 \frac{d}{dt}(I + I_2) = 0$$

$$\rightarrow 5 \frac{dI}{dt} - \frac{dI_1}{dt} + 2 \frac{dI_2}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{1}{5} \left(\frac{dI_1}{dt} - 2 \frac{dI_2}{dt} \right)$$

با اعمال KVL در مش سمت چپ و راست داریم:

$$V_1 = 4 \frac{d}{dt}(I_1 - I) + 1 \frac{dI}{dt} + 2 \frac{d}{dt}(I_2 + I) = 4 \frac{dI_1}{dt} + 2 \frac{dI_2}{dt} - \frac{dI}{dt}$$

$$V_2 = 3 \frac{d}{dt}(I_2 + I) + 1 \frac{dI}{dt} + 2 \frac{d}{dt}(I_1 - I) = 2 \frac{dI_1}{dt} + 3 \frac{dI_2}{dt} + 2 \frac{dI}{dt}$$

با قرار دادن رابطه به دست آمده برای $\frac{dI}{dt}$ در دو معادله فوق خواهیم داشت:

$$\begin{cases} V_1 = 4 \frac{dI_1}{dt} + 2 \frac{dI_2}{dt} - 0/2 \frac{dI_1}{dt} + 0/4 \frac{dI_2}{dt} \\ V_2 = 2 \frac{dI_1}{dt} + 3 \frac{dI_2}{dt} + 0/4 \frac{dI_1}{dt} - 0/8 \frac{dI_2}{dt} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_1 = 3/8 \frac{dI_1}{dt} + 2/4 \frac{dI_2}{dt} \\ V_2 = 2/4 \frac{dI_1}{dt} + 2/2 \frac{dI_2}{dt} \end{cases}$$

اگر $\frac{d}{dt} = s$ قرار دهیم:

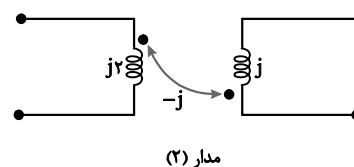
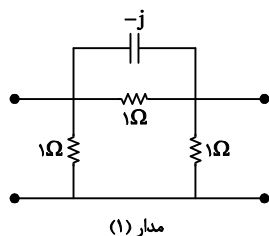
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/8s & 2/4s \\ 2/4s & 2/2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

۱۳- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

روش اول: مدار را می‌توان به صورت دو مدار موازی در نظر گرفت، ماتریس Y هر کدام را به دست آورده و در نهایت با

هم جمع نمود.

مدار را می‌توان به صورت دو دوقطبی موازی به شکل زیر در نظر گرفت:



برای مدار (۱) داریم:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 2+j & -(1+j) \\ -(1+j) & 2+j \end{bmatrix}$$

و برای مدار (۲) می‌توان نوشت:

$$Z_2 = \begin{bmatrix} 2j & -j \\ -j & j \end{bmatrix} \rightarrow Y_2 = Z_2^{-1} = \begin{bmatrix} -j & -j \\ -j & -2j \end{bmatrix}$$

و با جمع دو ماتریس Y_1 و Y_2 داریم:

$$Y = Y_1 + Y_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1-2j \\ -1-2j & 2-j \end{bmatrix} \rightarrow y_{12} = -(1+2j)$$

روش دوم: با توجه به این که مقاومت 1 اهمی بین گره‌های 1 و 2 وصل است، اثر آن در جمله غیرقطری ماتریس ادمیتانس گره، یک جمله 1- در پارامتر y_{12} خواهد بود. در گزینه‌های داده شده فقط گزینه «2» دارای جمله 1- است.

۱۴- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

برای دو قطبی N_2 ، اگر مقاومت 2 اهمی را به صورت سری در طرف راست آن اضافه کنیم فقط Z_{22} به اندازه 2 اهم افزایش می‌یابد، یعنی:

$$Z_1 = \begin{bmatrix} s+3 & s \\ s & s+1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+3 & s \\ s & s+3 \end{bmatrix}$$

ماتریس ادمیتانس دوقطبی حاصل، عکس ماتریس فوق می‌باشد. بنابراین:

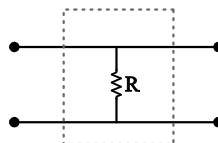
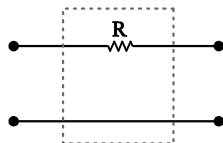
$$Y_1 = Z_1^{-1} = \frac{1}{6s+9} \begin{bmatrix} s+3 & -s \\ -s & s+3 \end{bmatrix}$$

اضافه کردن مقاومت یک اهمی به صورت موازی در طرف چپ دوقطبی به دست آمده در مرحله قبل، باعث افزایش Y_{11} به میزان یک اهم می‌شود. در نتیجه:

$$Y_{11} = \frac{s+3}{6s+9} + 1 = \frac{7s+12}{6s+9}$$

۱۵- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

شبکه به صورت نردبانی است. ماتریس انتقال دو قطبی را می‌توان به صورت حاصل ضرب هفت ماتریس ساده در نظر گرفت:



بنابراین:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 15 \\ 45 & 26 \end{bmatrix}$$

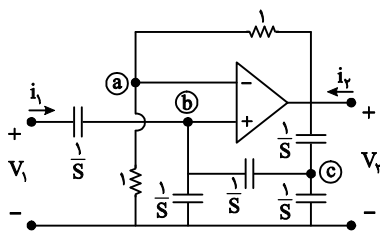
۱۶- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

برای این که $Z_{in} = Z_L$ باشد باید $Z_L = \sqrt{Z_1 Z_2}$ ، بنابراین:

$$Z_L = \sqrt{Z_1 Z_2} = \sqrt{\frac{1}{2s(s+1)} \times \frac{s+1}{2s}} = \frac{1}{2s}$$

۱۷- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با انتقال مدار به حوزه لاپلاس و KCL زدن در گره‌های مدار داریم:



$$\text{KCL}(a): \frac{V_a}{1} + \frac{V_a - V_2}{1} = 0 \rightarrow V_a = \frac{1}{2} V_2 \rightarrow V_a = V_b = \frac{1}{2} V_2$$

$$\text{KCL}(b): s(V_b - V_1) + s(V_b - V_c) + sV_b = 0 \rightarrow 3V_b = V_1 + V_c$$

$$\text{KCL}(c): s(V_c - V_2) + sV_c + s(V_c - V_b) = 0 \rightarrow 3V_c = V_2 + V_b$$

با استفاده از سه رابطه به دست آمده می‌توان گفت:

$$3V_c = V_2 + V_b = V_2 + \frac{1}{2} V_2 = \frac{3}{2} V_2 \rightarrow V_c = \frac{1}{2} V_2$$

$$3V_b = V_1 + V_c \rightarrow \frac{3}{2} V_2 = V_1 + \frac{1}{2} V_2 \rightarrow V_1 = V_2$$

پس خواهیم داشت:

$$I_1 = s(V_1 - V_b) = s\left(V_1 - \frac{1}{2} V_1\right) = \frac{s}{2} V_1 \rightarrow V_1 = \frac{2}{s} I_1$$

$$\rightarrow \begin{cases} Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{2}{s} \\ Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} = 0 \end{cases}$$

$$V_2 = V_1 = \frac{2}{s} I_1 \rightarrow \begin{cases} Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = \frac{2}{s} \\ Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} = 0 \end{cases}$$

بنابراین:

$$Z = \begin{bmatrix} \frac{2}{s} & 0 \\ 2 & 0 \\ s & \end{bmatrix}$$

۱۸- گزینه ی «۴» صحیح است.

پارامترهای انتقال دو دوقطبی که پشت سر هم قرار گرفته‌اند به صورت زیر به دست می‌آید:

$$T = T_1 \times T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & \frac{5}{2} \\ -3 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

امپدانس دیده شده از دو سر دوقطبی با پارامترهای انتقال ABCD وقتی که به امپدانس Z_L ختم می‌شود برابر

$$Z_{in} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D} \text{ است، در نتیجه:}$$

$$Z_{in} = \frac{\frac{5}{s} + \frac{5}{2}}{-\frac{3}{s} - \frac{3}{2}} = \frac{5s+10}{-3s-6}$$

بنابراین امپدانس حلقه تشکیل یافته از سلف یک هانری و امپدانس Z_{in} برابر است با:

$$Z = s + \frac{5s+10}{-3s-6} = \frac{-3s^2 - s + 10}{-3s - 6}$$

پس معادله مشخصه مدار برابر است با:

$$Z=0 \rightarrow -3s^2 - s + 10 = 0 \rightarrow 3s^2 + s - 10 = 0 \rightarrow \begin{cases} s = -2 \\ s = \frac{5}{3} \end{cases}$$

بنابراین فرکانس‌های طبیعی مدار که ریشه‌های معادله مشخصه است برابر -2 ، $\frac{5}{3}$ می‌باشند.

۱۹- گزینه ی «۱» صحیح است.

در مدار (الف) با توجه به این که $I_1 = 0$ است، ضرائب آن یعنی h_{11} و h_{21} نامشخص خواهند بود.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

برای مدار (ب) داریم:

$$\begin{cases} V_1 = 0 \\ I_2 = \beta I_1 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

و برای مدار (ج) داریم:

$$\begin{cases} V_1 = ZI_1 + V_2 \\ I_2 = -I_1 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

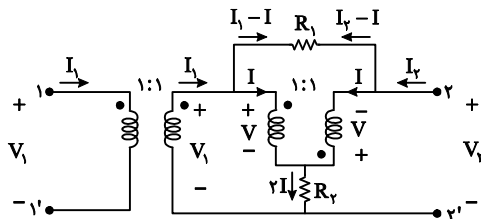
بنابراین فقط مدار (الف) ماتریس H ندارد.

۲۰- گزینه ی «۲» صحیح است.

ماتریس امپدانس Z شکل (الف) به صورت زیر است:

$$Z = \begin{bmatrix} \frac{R_a + R_b}{2} & \frac{R_b - R_a}{2} \\ \frac{R_b - R_a}{2} & \frac{R_a + R_b}{2} \end{bmatrix}$$

برای مدار شکل (ب) می توان گفت:



$$I_1 - I = -(I_2 - I) \rightarrow I = \frac{I_1 + I_2}{2}$$

$$\text{KVL در مش وسطی: } V + V = R_1(I_1 - I) \rightarrow V = \frac{R_1(I_1 - I)}{2} = \frac{R_1}{2} \left(\frac{I_1 - I_2}{2} \right)$$

با نوشتن KVL در حلقه (1,1') داریم:

$$V_1 = V + (R_2 \times 2I) = \frac{R_1}{4}(I_1 - I_2) + R_2(I_1 + I_2) = \left(\frac{R_1}{4} + R_2 \right) I_1 + \left(R_2 - \frac{R_1}{4} \right) I_2$$

که برابر است با سطر اول ماتریس Z. با مساوی قرار دادن سطر اول دو ماتریس داریم:

$$\begin{cases} \frac{R_a + R_b}{2} = \frac{R_1}{4} + R_2 \\ \frac{R_b - R_a}{2} = R_2 - \frac{R_1}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R_1 = 2R_a \\ R_2 = \frac{1}{2}R_b \end{cases}$$

فصل چهاردهم: قضایای شبکه

در این فصل به بررسی قضایای شبکه که در تجزیه و تحلیل مدارهای الکتریکی مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌پردازیم و به مدارات از دید شبکه‌ها نگاه می‌کنیم.

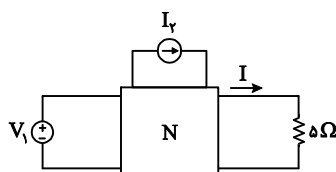
14-1- قضیه جمع آثار

اگر شبکه‌ای خطی و دارای پاسخ یکتا باشد می‌توان گفت:

«پاسخ حالت صفر ناشی از اعمال همزمان چند ورودی برابر است با مجموع پاسخ‌های حالت صفر ناشی از اعمال تک تک منابع».

البته باید منابع از همدیگر مستقل باشند.

مثال ۱: در شکل زیر، شبکه N مقاومتی و خطی تغییرناپذیر با زمان است. اگر $V_1 = 3V$ و $I_2 = 3A$ انتخاب شود، $I = 6A$ می‌شود. اگر V_1 اتصال کوتاه شود و $I_2 = -2A$ باشد، مقدار $I = 2A$ است. حال اگر $V_1 = -2V$ و I_2 مدار باز باشد، مقدار I را به دست آورید.



با استفاده از قضیه جمع آثار می‌توان گفت، خروجی I ترکیب خطی از ورودی‌های V_1 و I_2 است، به عبارت دیگر،

$$I = \alpha V_1 + \beta I_2$$
پس با استفاده از اطلاعات مسئله داریم:

$$\begin{cases} V_1 = 3V \\ I_2 = 3A \end{cases} \rightarrow I = 6A \rightarrow 3\alpha + 3\beta = 6$$

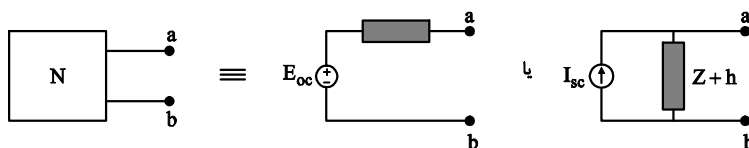
$$\begin{cases} V_1 = 0 \\ I_2 = -2 \end{cases} \rightarrow I = 2A \rightarrow 0\alpha + (-2)\beta = 2 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

بنابراین برای $V_1 = -2V$ و $I_2 = 0$ داریم:

$$\begin{cases} V_1 = -2V \\ I_2 = 0 \end{cases} \rightarrow I = 3V_1 - I_2 = 3(-2) - 0 \rightarrow I = -6A$$

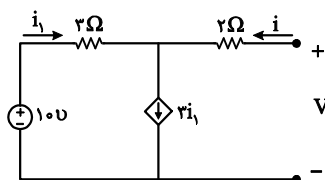
14-2- قضیه تونن – تورنن

هر شبکه خطی را می‌توان با یک منبع ولتاژ سری با یک امپدانس و یا یک منبع جریان موازی با یک ادمیتانس جایگزین کرد.



$$E_{oc} = Z_{th} \times I_{sc}$$

مثال ۲: در مدار شکل زیر، مدار معادل تونن را از دو سر a و b به دست آورید.



$$\text{KCL} : i_1 + i - 3i_1 = 0 \rightarrow i_1 = \frac{1}{2}i$$

$$\text{KVL} : V = 2i - 3i_1 + 10 = 2i - \frac{3}{2}i + 10 \Rightarrow V = \underbrace{\frac{1}{2}}_{R_{th}} i + \underbrace{10}_{e_{oc}}$$

14-3- قضیه جانشینی

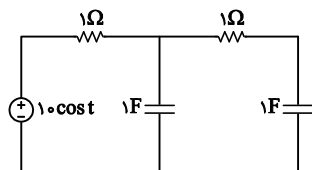
این قضیه برای کلیه مدارات خطی و غیرخطی، تغییرپذیر با زمان و تغییرناپذیر با زمان به کار می‌رود به شرطی که شبکه دارای جواب یکتا باشد.

براین اساس می‌توان شاخه‌ای را که با شاخه‌های دیگر تزویج ندارد، با یک منبع ولتاژ و یا یک منبع جریان با همان شکل موج‌های ولتاژ و جریان شاخه جایگزین کرد.

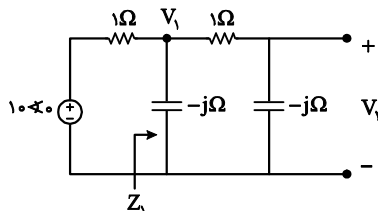
به عبارت دیگر، در هر مداری می‌توان به ازای شاخه‌های بدون تزویج، ولتاژ یا جریان دو سر آن را به جای آن شاخه قرار داد.

مثال ۳: در مدار شکل زیر، اگر بخواهیم هیچ پاسخی از مدار تغییر نکند، به جای خازن سمت راست چه منبع ولتاژی

قرار دهیم؟



با انتقال مدار به حوزه فرکانس داریم: ($\omega=1$)



$$Z_1 = (1-j) \parallel (-j) = \frac{(1-j)(-j)}{1-j-j} = \frac{-j-1}{-2j+1} = \frac{1+j}{-1+2j}$$

با توجه به تقسیم ولتاژ داریم:

$$V_1 = \frac{Z_1}{Z_1+1} \times 10 \angle 0^\circ = \frac{\frac{1+j}{-1+2j}}{\frac{1+j}{-1+2j}+1} \times 10 = \frac{1+j}{3j} \times 10 = \frac{10}{3}(1-j)$$

$$V_2 = \frac{-j}{1-j} \times V_1 = \frac{-j}{1-j} \times \frac{10}{3}(1-j) = -\frac{10}{3}j \rightarrow V_2(t) = \frac{10}{3} \sin t$$

14-4- قضیه هم پاسخی (شبکه‌های متقابل)

این قضیه برای شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان به کار می‌رود که منبع مستقل و وابسته و ژنراتور و شرایط اولیه نداشته باشند.

براین اساس، این قضیه اگر محل اعمال ورودی و پاسخ را عوض کنیم، پاسخ تغییری نمی‌کند اما در محل اعمال ورودی و خروجی و نوع ورودی و خروجی باید دقت کرد.

اگر خروجی جریان بود، در سر خروجی اتصال کوتاه داریم. به عبارت دیگر آمپرسنج ایده‌آل با مقاومت صفر.

و اگر خروجی ولتاژ بود، در سر خروجی مدار باز داریم. به عبارت دیگر ولت سنس ایده‌آل با مقاومت بی‌نهایت.

۱۴-۴-۱- بیان اول قضیه هم پاسخی (ولتاژ مدار باز)



اگر محل منبع جریان I_1 را با ولت متری با امپدانس بی نهایت عوض کنیم، عدد ولت متر تغییری نخواهد کرد. یعنی هرگاه $I_1 = I_2$ باشد، آنگاه $V_1 = V_2$ می شود.

در حالت کلی تر می توان گفت نسبت $\frac{V_2}{I_1}$ با $\frac{V_1}{I_2}$ برابر است، یعنی:

$$\frac{V_2}{I_1} = \frac{V_1}{I_2}$$

در نتیجه می توان گفت:

$$Z_{21} = Z_{12}$$

این حالت در مدارهای متقابل یا هم پاسخ برقرار است.

۱۴-۴-۲- بیان دوم قضیه هم پاسخی (جریان اتصال کوتاه)



اگر محل منبع ولتاژ V_1 را با آمپر متری با امپدانس صفر عوض کنیم، عدد آمپر متر تغییری نخواهد کرد. یعنی هرگاه $V_1 = V_2$ باشد، آنگاه $I_1 = I_2$ می شود.

در حالت کلی تر می توان گفت نسبت $\frac{I_2}{V_1}$ با $\frac{I_1}{V_2}$ برابر است یعنی:

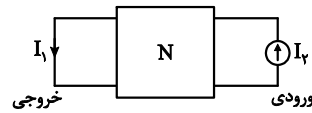
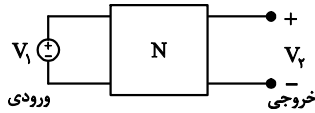
$$\frac{I_2}{V_1} = \frac{I_1}{V_2}$$

و در نتیجه می توان گفت:

$$Y_{21} = Y_{12}$$

این حالت در مدارهای متقابل یا هم پاسخ وجود دارد.

14-4-3- بیان سوم قضیه هم پاسخی (نسبت انتقال جریان و ولتاژ)



به شرط این که منبع ولتاژ V_1 و منبع جریان I_2 دارای شکل موج یکسانی باشند، یعنی $V_1(t) = I_2(t)$ ، آن گاه ولتاژ

خروجی V_2 و جریان خروجی I_1 با یکدیگر برابرند یعنی $V_2(t) = I_1(t)$.

در حالت کلی تر می توان گفت:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{I_1}{I_2}$$

و در نتیجه:

$$h_{21} = -h_{12}$$

و به عبارتی:

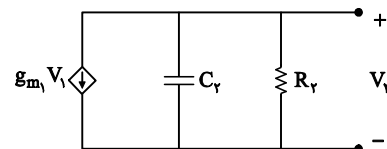
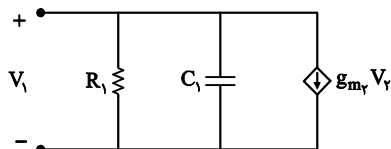
$$H_V = H_I$$

این حالت در مدارهای متقابل یا هم پاسخ صادق است.

نکته: اگر مداری یکی از حالات بیان شده را داشته باشد حتماً هم پاسخ است ولی اگر این شرایط را نداشت، باید هم

پاسخی آن بررسی شود.

مثال ۴: در مدار شکل زیر، تحت چه شرایطی هم پاسخی برقرار است؟



با توجه به قضیه دوم هم پاسخی، برای هم پاسخ بودن مدار باید $y_{12} = y_{21}$ باشد، پس با نوشتن ماتریس ادمیتانس گره

داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + C_1 S & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} + C_2 S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_{m2} V_2 \\ -g_{m1} V_1 \end{bmatrix}$$

با انتقال ماتریس جریان به طرف چپ داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + C_1 S & g_{m2} \\ g_{m1} & \frac{1}{R_2} + C_2 S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

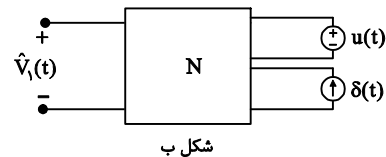
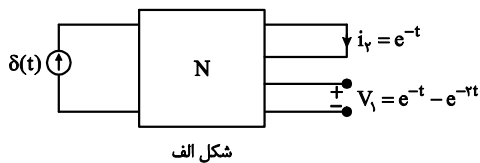
ملاّیس ادمیتانس

برای هم پاسخ بودن باید:

$$y_{12} = y_{21} \rightarrow g_{m1} = g_{m2}$$

در این مثال دیدیم که شبکه دارای منابع وابسته بود ولی با شرط $g_{m1} = g_{m2}$ ، این شبکه هم پاسخ است. بنابراین می‌توان گفت: شبکه‌های LTI که منبع مستقل و وابسته و ژنراتور و ژیراتور و شرایط اولیه ندارند حتماً هم پاسخ هستند ولی برای شبکه‌هایی که شامل این عناصر هستند، باید هم پاسخی آن‌ها بررسی شود.

مثال ۵: با توجه به اطلاعات موجود در شکل الف، ولتاژ Ψ_1 را در شکل ب به دست آورید.



در ابتدا با توجه به بیان اول قضیه هم پاسخی می‌توان گفت:

$$\delta(t) \text{ پاسخ در اثر ورودی منبع جریان } \hat{V}_1(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

از طرفی پاسخ منبع جریان $\delta(t)$ برابر e^{-t} است. با انتگرال‌گیری می‌توان گفت، پاسخ $u(t)$ برابر انتگرال آن است یعنی:

$$\int_0^t e^{-t} dt = 1 - e^{-t}$$

و با توجه به بیان سوم قضیه هم پاسخی داریم:

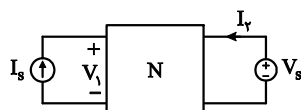
$$u(t) \text{ پاسخ در اثر ورودی منبع ولتاژ } \Psi_1(t) = 1 - e^{-t}$$

و در نهایت با استفاده از قضیه جمع آثار:

$$\hat{V}_1(t) = e^{-t} - e^{-2t} + 1 - e^{-t} = 1 - e^{-2t}$$

مثال ۶: در دو قطبی شکل زیر که متقابل است، سه آزمایش انجام داده‌ایم، که نتایج آن در جدول زیر آمده است. مقادیر

جاهای خالی جدول را به دست آورید.



آزمایش	I_s	V_1	V_s	I_2
1	6	16	0	-4
2	0		30	2
3	-3	12	15	

ابتدا با توجه به بیان سوم قضیه هم پاسخی و دقت به جهت جریان خروجی داریم:

$$1 \text{ آزمایش} \rightarrow H_1 = \frac{-I_2}{I_s} = -\frac{-4}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow H_v = \frac{2}{3}$$

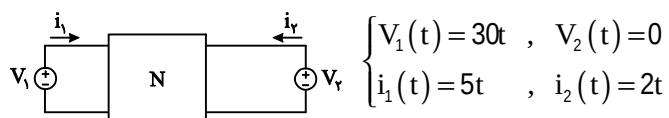
$$2 \text{ آزمایش} \rightarrow H_v = \frac{V_1}{V_2} \rightarrow V_1 = \frac{2}{3} \times 30 = 20 \text{ Volt}$$

و برای I_2 با توجه به آزمایش‌های 1 و 2 داریم:

اندیس آزمایش

$$\text{جمع آثار: } I_{23} = \frac{I_{s3}}{I_{s1}} \times I_{21} + \frac{V_{s3}}{V_{s2}} \times I_{22} = \left(-\frac{3}{6}\right) \times (-4) + \left(\frac{15}{30}\right) \times 2 = 2 + 1 = 3 \text{ A} \rightarrow I_2 = 3 \text{ A}$$

مثال ۷: در شبکه مقاومتی N در شکل زیر، این اطلاعات داده شده است:



به ازای $V_1(t) = 30t + 60$ و $V_2(t) = 60t + 15$ ، مقدار $i_1(t)$ را به دست آورید.

امپدانس ورودی شبکه برابر است با:

$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{5t}{30t} = \frac{1}{6} \text{ J}$$

پس خروجی i_1 در اثر V_1 برابر است با:

$$V_1(t) \text{ در } i_1(t) = \frac{1}{6} \times (30t + 60) = 5t + 10$$

با توجه به بیان دوم قضیه هم پاسخی داریم:

$$y_{12} = y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = \frac{2t}{30t} = \frac{1}{15} \text{ J}$$

و خروجی i_1 در اثر V_2 نیز برابر است با:

$$V_2(t) \text{ در } i_1(t) = \frac{1}{15}(60t+15) = 4t+1$$

و در نهایت با استفاده از قضیه جمع آثار داریم:

$$i_1(t) = 5t+10+4t+1 = 9t+11$$

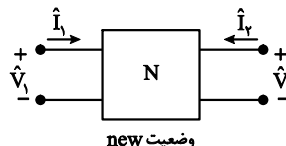
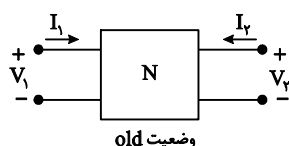
14-5- قضیه تلگان

برای هر شبکه فشرده‌ای که روابط KCL و KVL در آن صادق است، می‌توان گفت: اگر V_k و I_k به ترتیب ولتاژ و جریان شاخه k از مدار طبق جهت‌های قراردادی متناظر باشند داریم:

$$\sum_{k=1}^b V_k I_k = 0$$

این رابطه در اصل بیانگر اصل بقای انرژی است.

نکته: اگر شبکه N را در دو وضعیت زیر قرار بگیریم، بین ولتاژها و جریان‌های دو قطب آن‌ها رابطه زیر برقرار است؟



$$V_{1,old} \hat{I}_{1,new} + V_{2,old} \hat{I}_{2,new} = \hat{V}_{1,new} I_{1,old} + \hat{V}_{2,new} I_{2,old}$$

مثال ۸: مثال 6 را با استفاده از قضیه تلگان حل کنید.

با استفاده از آزمایش‌های 1 و 2 داریم:

$$16 \times 0 + 0 \times 2 = \hat{V}_1 \times 6 + 30 \times (-4) \rightarrow \hat{V}_1 = \frac{30 \times 4}{6} = 20 \text{ Volt}$$

و با توجه به آزمایش‌های 2 و 3 می‌توان گفت:

$$20 \times (-3) + 30 \times \hat{I}_2 = 12 \times 0 + 15 \times 2 \rightarrow \hat{I}_2 = \frac{30+60}{30} = 3 \text{ A}$$

مثال ۹: مثال 7 را با استفاده از قضیه تلگان حل کنید.

در این حالت داریم:

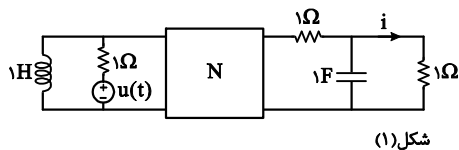
$$V_1(t) \times \hat{i}_1(t) + V_2(t) \times \hat{i}_2(t) = \hat{V}_1(t) \times i_1(t) + \hat{V}_2(t) \times i_2(t) \rightarrow$$

$$30t \times \hat{i}_1(t) + 0 \times \hat{i}_2(t) = (30t+60) \times 5t + (60t+15) \times 2t \rightarrow \hat{i}_1(t) = 9t+11$$

تست‌های طبقه‌بندی شده مبحث قضایای شبکه

۱- در مدار شکل (۱) جریان حالت صفر $i(t) = (2e^{-t} - e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$ است. جریان حالت صفر $i_1(t)$ را

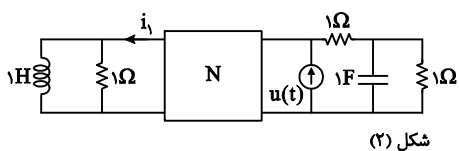
در شکل (۲) بیابید. (N شبکه هم پاسخ است)



$$(1) (4e^{-2t} - e^{-3t} + 1)u(t)$$

$$(2) \left(5 - e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-t} \right) u(t)$$

$$(3) \frac{2}{3}e^{-3t}u(t)$$

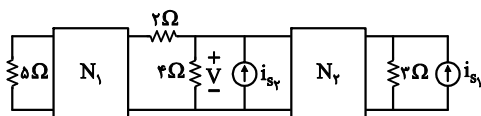


$$(4) \frac{1}{3}(7 + 2e^{-3t})u(t)$$

۲- در مدار شکل زیر N_1 و N_2 مدارهای مقاومتی خطی و هم پاسخ و بدون منابع ناپسته هستند. برای

$i_{s1} = 1$ و $i_{s2} = 2 + 3\cos t$ به دست می‌آوریم $V = 8 + 9\cos t$. برای $i_{s1} = 0$ و $i_{s2} = \cos t$ توان متوسط مقاومت

۳ اهمی چند وات است؟

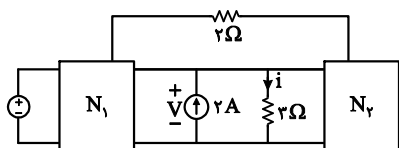


$$(1) \frac{2}{3} \quad (2) \frac{1}{6}$$

$$(3) \frac{4}{3} \quad (4) 6$$

۳- در مدار زیر N_1 و N_2 از مقاومت‌های خطی مثبت تشکیل شده و $V = \frac{1}{6}\cos t + \frac{1}{2}$ است. اگر منبع ولتاژ

۱۲ ولت را با مقاومت ۳ اهمی سری کنیم، جریان i به اندازه:



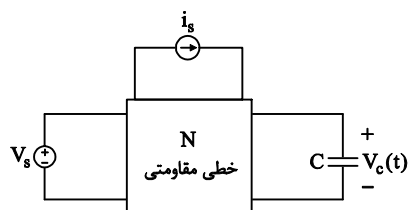
$$(1) \frac{11}{3} \text{ آمپر کم می‌شود.}$$

$$(2) 3 \text{ آمپر کم می‌شود.}$$

$$(3) 4 \text{ آمپر کم می‌شود.}$$

$$(4) 4 \text{ آمپر اضافه می‌شود.}$$

۴- در مدار شکل زیر خازن دارای ولتاژ اولیه V_0 است. اگر $i_s = 2A$ و $V_s = 4V$ باشد، $V_C(t) = 4 + 2e^{-\frac{t}{T}}$ می‌شود. اگر $i_s = 4A$ و $V_s = 8V$ شوند، ولتاژ $V_C(t)$ کدام خواهد بود؟



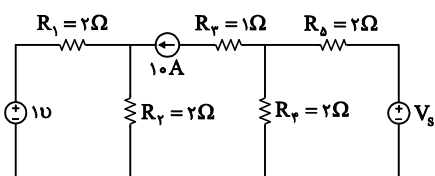
(1) $8 + 2e^{-\frac{t}{T}}$

(2) $8 - 2e^{-\frac{t}{T}}$

(3) $8 - 4e^{-\frac{t}{T}}$

(4) $8 + 4e^{-\frac{t}{T}}$

۵- در مدارهای شکل زیر در صورتی که ولتاژ و جریان مقاومت‌های مشابه در دو مدار دقیقاً یکسان باشند، مقدار V_s چند ولت است؟

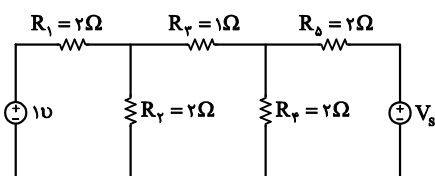


(1) 18

(2) 51

(3) 69

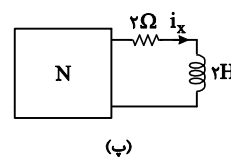
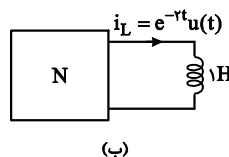
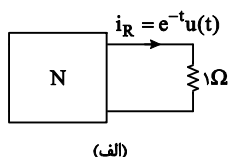
(4) 72



۶- یک قطبی N متشکل از عناصر خطی تغییرناپذیر با زمان و منابع وابسته و ناپسته است. در شکل‌های

(الف) و (ب) نتایج آزمایش‌ها بر روی این یک قطبی داده شده است. (پاسخ‌های حالت صفر) در آزمایش (پ)

i_x برابر است با:



(2) $\frac{1}{2}(3e^{-2t} + 1)u(t)$

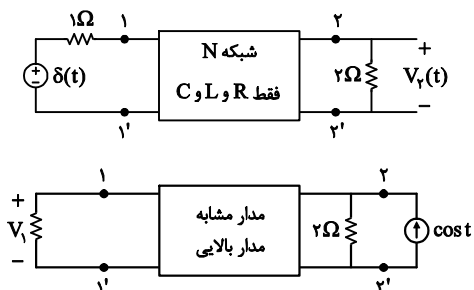
(1) $\frac{1}{2}(3e^{-2t} - 1)u(t)$

(4) $(3e^{-2t} + 2e^{-t})u(t)$

(3) $(3e^{-2t} - 2e^{-t})u(t)$

۷- در مدار زیر وقتی که ورودی در قطب $(1,1')$ برابر $\delta(t)$ باشد، ولتاژ خروجی در قطب $(2,2')$ برابر با $V_2(t) = 2e^{-t}$ است. حال اگر منبع تغذیه ورودی را اتصال کوتاه کنیم و در خروج یک منبع جریان برابر

$\cos t$ قرار دهیم، ولتاژ $V_1'(t)$ در قطب $(1,1')$ چه می‌شود؟



$$(1) \quad \frac{2}{\sqrt{2}} \cos(t + 30^\circ)$$

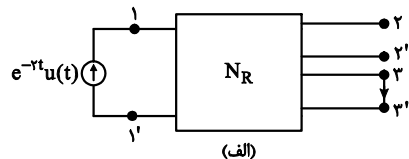
$$(2) \quad \frac{2}{\sqrt{2}} \cos(t + 45^\circ)$$

$$(3) \quad \frac{2}{\sqrt{2}} \cos(t - 45^\circ)$$

$$(4) \quad \frac{2}{\sqrt{2}} \cos(t - 30^\circ)$$

۸- نتایج یک آزمایش بر روی سه قطبی متقابل N_R در شکل (الف) داده شده است. (پاسخ‌های حالت صفر)

در آزمایش (ب) ولتاژ V_{oc} برابر است با:

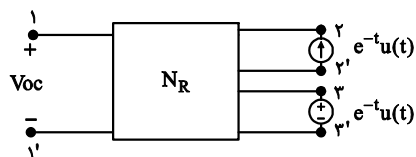


$$(1) \quad e^{-t}u(t)$$

$$(2) \quad (te^{-t} - e^{-t})u(t)$$

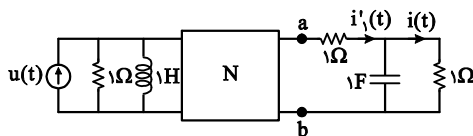
$$(3) \quad (te^{-t} - 2e^{-t})u(t)$$

$$(4) \quad (te^{-t} + e^{-t})u(t)$$



۱- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

در شکل (1) منبع ولتاژ سری با مقاومت یک اهمی را به منبع جریان موازی با مقاومت یک اهمی تبدیل می‌کنیم.



امپدانس دیده شده در سمت راست سرهای a و b برابر است با: (در حوزه لاپلاس)

$$Z = 1 + \frac{1}{s+1} = \frac{s+2}{s+1}$$

بنابراین ولتاژ دو سر a و b برابر است با:

$$V_{ab}(s) = Z \times I'(s) = \frac{s+2}{s+1} \times (s+1)I(s) = (s+2)I(s)$$

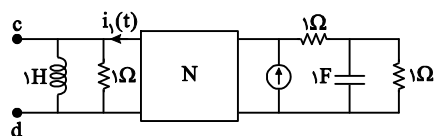
پس با تبدیل لاپلاس داریم:

$$i(t) = (2e^{-t} - e^{-2t} - e^{-3t})u(t) \rightarrow I(t) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \rightarrow I(t) = \frac{3s+7}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

و در نتیجه:

$$V_{ab}(s) = (s+2)I(s) = \frac{3s+7}{(s+1)(s+3)}$$

با توجه به قضیه هم پاسخی اگر منبع جریان $u(t)$ را در سرهای a و b شکل زیر اعمال کنیم، ولتاژ سرهای c و d



برابر $V_{ab}(s)$ خواهد شد، یعنی:

$$V_{cd}(s) = V_{ab}(s)$$

پس برای $I_1(s)$ داریم:

$$I_1(s) = \frac{V_{cd}(s)}{\frac{s}{s+1}} = \frac{s+1}{s} \times V_{ab}(s) = \frac{3s+7}{s(s+3)} = \frac{7}{3s} + \frac{2}{s+3}$$

و با عکس تبدیل لاپلاس گرفتن داریم:

$$i_1(t) = \left(\frac{7}{3} + \frac{2}{3} e^{-3t} \right) u(t)$$

۲- گزینه ی «۱» صحیح است.

با توجه به خطی بودن مدار، قضیه جمع آثار برقرار است براین اساس می توان گفت: برای $i_{s1} = 1$ و $i_{s2} = 2 + 3 \cos t$

پاسخ $V = 8 + 9 \cos t$ است، یعنی قسمت سینوسی ناشی از i_{s2} است و تابع شبکه مربوطه $\left(\frac{V}{i_{s2}} \right)$ برابر 3 است. با این

تابع شبکه، قسمت غیرسینوسی i_{s2} نیز در 3 ضرب می شود و سهم آن در V برابر $2 \times 3 = 6$ است، پس مقدار 2 باقی مانده در V مربوط به ورودی i_{s1} است، یعنی تابع شبکه آن 2 است. پس می توان گفت:

$$V = 2i_{s1} + 3i_{s2}$$

با استفاده از بیان اول قضیه هم پاسخی، برای $i_{s2} = 0$ ولتاژ $V = 2$ است پس برای $i_{s1} = 0$ و $i_{s2} = \cos t$ ولتاژ دو سر

مقاومت 3 اهمی برابر $2 \cos t$ خواهد بود و توان متوسط آن برابر است با:

$$P_{3\Omega} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|V|^2}{R} = \frac{1}{2} \times \frac{2^2}{3} = \frac{2}{3} W$$

۳- گزینه ی «۱» صحیح است.

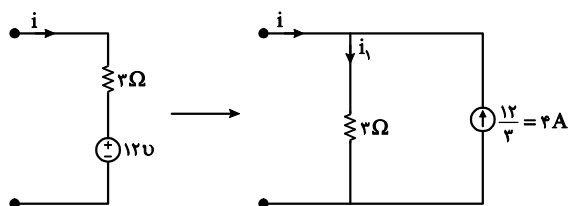
در حالت اول از روی V داده شده، جریان i برابر است با:

$$i_1 = \frac{V}{3} = \frac{1}{18} \cos t + \frac{1}{6}$$

که اثر منبع جریان 2A، قسمت $\frac{1}{6}$ می باشد. یعنی:

$$i_{old} = \frac{1}{6} A$$

وقتی منبع ولتاژ 12 ولت با مقاومت 3 اهمی سری می شود، با تبدیل تونن به نورتن می توان گفت:



یعنی منبع جریان 2 آمپر قبلی به منبع $2+4=6A$ تبدیل می‌شود، یعنی جریان نسبت به قبل 3 برابر شده است. بنابراین جریان مقاومت 3 اهمی نیز سه برابر می‌شود، یعنی:

$$i_{1,new} = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} A$$

پس جریان i که مربوط به مقاومت سری با منبع ولتاژ است برابر می‌شود با:

$$i_{new} = i_{1,new} - 4 = \frac{1}{2} - 4 = -\frac{7}{2} A$$

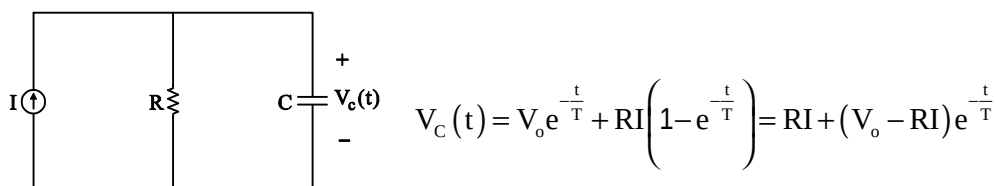
بنابراین تغییر جریان i برابر است با:

$$\Delta i = i_{new} - i_{old} = -\frac{7}{2} - \frac{1}{6} = -\frac{11}{3} A$$

پس جریان i به اندازه $\frac{11}{3}$ آمپر کم می‌شود.

۴- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

اگر مدار معادل نورتن از دو سر خازن را در نظر بگیریم، پاسخ کامل مدار برابر است با:



با مقایسه این جواب با $V_c(t) = 4 + 2e^{-\frac{t}{T}}$ داریم:

$$\begin{cases} RI = 4 \\ V_o - RI = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} RI = 4 \\ V_o = 6 \end{cases}$$

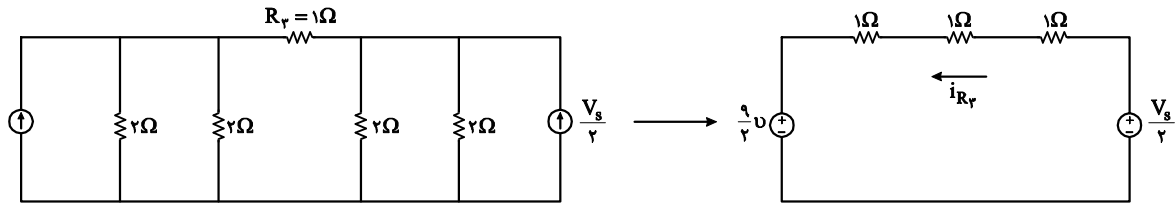
اگر i_s و V_s دو برابر شوند، در مدار معادل نورتن فقط T دو برابر می‌شود.

بنابراین پاسخ کامل برای $i_s = 4A$ و $V_s = 8V$ و $V_o = 6V$ برابر است با:

$$V_c(t) = RI + (V_o - RI)e^{-\frac{t}{T}} = (4 \times 2) + (6 - (4 \times 2))e^{-\frac{t}{T}} \\ \rightarrow V_c(t) = 8 - 2e^{-\frac{t}{T}}$$

۵- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

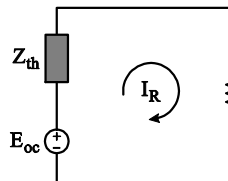
با وجه به معادل بودن دو مدار، باید جریان مقاومت R_3 در مدار پایینی نیز 10 آمپر باشد. اگر مدار معادل تونن طرفین R_3 را به دست آوریم، جریان عبوری از آن برابر است با:



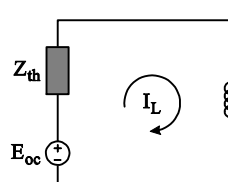
$$i_{R_3} = \frac{\frac{V_s}{2} - 9}{\frac{2}{3} + \frac{2}{6}} = \frac{V_s - 9}{6} = 10A \rightarrow V_s = 69Volt$$

۶- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

با استفاده از دو مدار (الف) و (ب) و انتقال آن‌ها به حوزه لاپلاس داریم:



(الف)

$$E_{oc}(s) = (Z_{th} + 1) \times \frac{1}{s + 1}$$


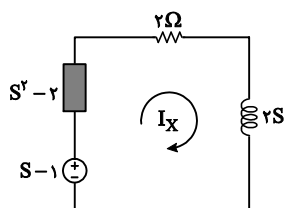
(ب)

$$E_{oc}(s) = (Z_{th} + s) \times \frac{1}{s + 2}$$

با حل این دو معادله دو مجهول داریم:

$$\begin{cases} E_{oc} = \frac{Z_{th} + 1}{s + 1} \\ E_{oc} = \frac{Z_{th} + s}{s + 2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E_{oc} = s - 1 \\ Z_{th} = s^2 - 2 \end{cases}$$

پس مدار (پ) به صورت زیر خواهد بود:



$$I_x = \frac{s-1}{s^2-2+2+2s} = \frac{s-1}{s(s+2)} = \frac{-\frac{1}{2}}{s} + \frac{\frac{3}{2}}{s+2} \xrightarrow{L^{-1}} i_x(t) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-2t} \right) u(t)$$

۷- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با استفاده از بیان سوم قضیه هم پاسخی داریم:

$$H_v = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{2}{s+1}}{1} = \frac{2}{s+1} = H_I = \frac{I'_1}{I'_2}$$

با تبدیل $s \rightarrow j\omega$ و قرار دادن $\omega=1$ که مربوط به فرکانس i'_2 است داریم:

$$H_I = \frac{2}{j\omega+1} = \frac{2}{j+1} \rightarrow |H_I| = \frac{2}{\sqrt{2}}, \quad \angle H_I = -45^\circ$$

بنابراین:

$$i'_1(t) = |H_I| \cos(t + \angle H_I) = \frac{2}{\sqrt{2}} \cos(t - 45^\circ)$$

۸- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

در این مسأله از بیان‌های قضیه هم پاسخی استفاده می‌کنیم.

ابتدا ارتباط بین قطب‌های $(1,1')$ و $(2,2')$ به صورت زیر است:

$$Z_{21} = \frac{\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}}{\frac{1}{s+2}} = \frac{1}{s+1}$$

طبق قضیه هم پاسخی می‌توان گفت:

$$Z_{21} = Z_{12} = \frac{1}{s+1} = \frac{V_1}{I_2} = \frac{V_1}{\frac{1}{s+1}} \rightarrow V_1 = \left(\frac{1}{s+1} \right)^2$$

و ارتباط بین قطب‌های $(1,1')$ و $(3,3')$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$H_I = \frac{I_3}{I_1} = \frac{\frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+1}}{\frac{1}{s+2}} = \frac{s}{s+1}$$

طبق بیان سوم قضیه هم پاسخی می‌توان نوشت:

$$H_I = H_V = \frac{s}{s+1} = \frac{V_1}{V_3} = \frac{\frac{V_1}{\frac{1}{s+1}}}{V_3} \rightarrow V_1 = \frac{s}{(s+1)^2}$$

اکنون با استفاده از قضیه جمع آثار داریم:

$$V_{oc} = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{s}{(s+1)^2} = \frac{s+1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1}$$

بنابراین:

$$V_{oc}(t) = e^{-t}u(t)$$

فصل پانزدهم: مدار دوگان – مقدار متوسط و مقدار مؤثر

در این فصل به بررسی نکات مفید در تحلیل مدارهای الکتریکی می‌پردازیم.

15-1- مدار دوگان

دو مدار وقتی دوگان هستند که متغیرهای دوگان آن‌ها دارای معادلات دیفرانسیل یکسانی باشند. برای به دست آوردن مدار دوگان، ابتدا گراف دوگان را رسم می‌کنیم و سپس عناصر را به دوگان متناظرشان تبدیل می‌کنیم.

۱۵-۱-۱ مراحل یافتن دوگان

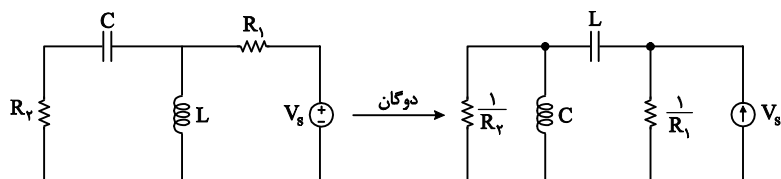
در هر گراف مسطح و متصل، مراحل زیر را برای رسیدن به مدار دوگان دنبال می‌کنیم:

- 1- در هر مش یک گره در نظر می‌گیریم.
- 2- در بیرون مدار یک گره مبنا متناظر با مش بیرونی در نظر می‌گیریم.
- 3- برای هر شاخه‌ای که فقط متعلق به یک مش است، شاخه‌ای در مدار دوگان بین گره متناظر و گره مبنا قرار می‌دهیم.
- 4- برای هر شاخه‌ای که متعلق به دو مش است، شاخه‌ای در مدار دوگان بین دو گره متناظر قرار می‌دهیم.
- 5- به جای عناصر و مقادیرشان، عناصر و مقادیر دوگان آن‌ها طبق جدول زیر قرار می‌دهیم.
- 6- جهت هر شاخه در مدار دوگان با چرخش همان شاخه در مدار اصلی به میزان 90° در جهت عقربه‌ ساعت حاصل می‌شود.

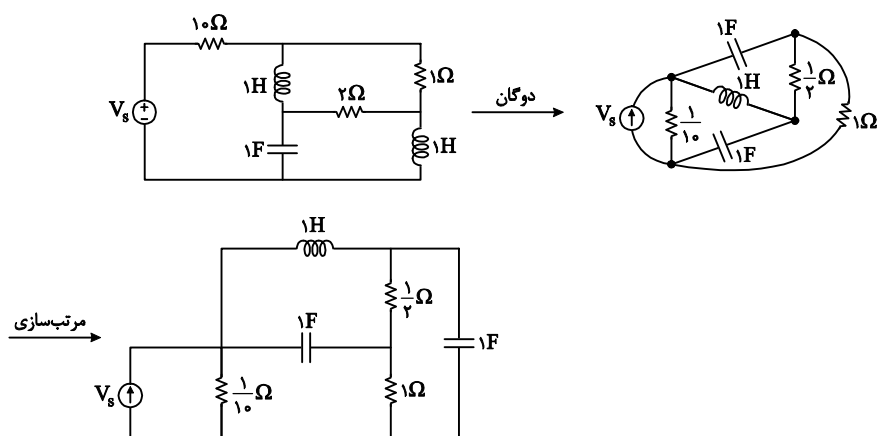
KCL	KVL
سری	موازی
موازی	سری
$R(\Omega)$	$\frac{1}{R}(\Omega)$
$L(H)$	$L(F)$
$C(F)$	$C(H)$
$i_s(A)$	$i_s(v)$
$v_s(V)$	$v_s(A)$

مثال ۱: دوگان مدارهای زیر را به دست آورید.

الف)



ب)



15-2- مقدار متوسط و مقدار مؤثر

اگر $f(t)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب T باشد، مقدار متوسط آن برابر است با:

$$f_{av} = f_{dc} = \frac{1}{T} \int_T f(t).dt = \frac{1}{T} (\text{مساحت } f(t) \text{ در یک دوره})$$

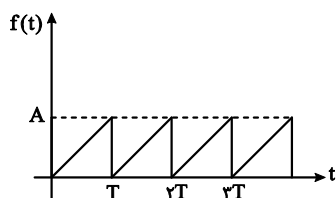
و برای مقدار مؤثر آن داریم:

$$f_{rms} = f_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_T f^2(t).dt}$$

به عبارت دیگر، برای به دست آوردن مقدار مؤثر ابتدا تابع زمانی را به توان 2 می‌رسانیم، سپس مقدار متوسط تابع

حاصل را پیدا می‌کنیم و در نهایت از آن جذر می‌گیریم.

مثال ۲: مقدار متوسط و مؤثر شکل موج زیر را به دست آورید.



$$f_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \times \frac{AT}{2} = \frac{A}{2}$$

$$f_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{A^2}{T^2} t^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \times \frac{A^2}{T^2} \times \frac{T^3}{3}} = \frac{A}{\sqrt{3}}$$

همان‌طور که دیده می‌شود، مقدار مؤثر و متوسط، مستقل از دوره تناوب T و فرکانس موج است.

نکته: برای یک موج با چند فرکانس مختلف داریم:

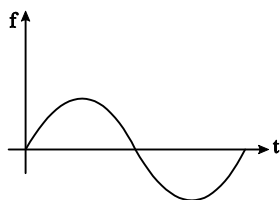
$$f(t) = a_0 + (a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots) + (b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots)$$

$$f_{av} = a_0$$

$$f_{rms} = \sqrt{a_0^2 + \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + b_1^2 + b_2^2 + \dots}{2}}$$

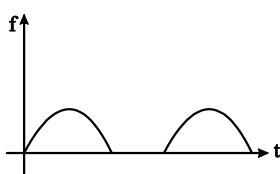
نکته: اگر دو تابع دارای قدرمطلق‌های یکسانی باشند، مقدار مؤثرشان با همدیگر برابر است. مثلاً برای شکل موج

سینوسی و نیم موج و تمام موج داریم:



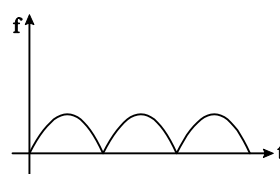
$$f_{av} = 0$$

$$f_{rms} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$



$$f_{av} = \frac{A}{\pi}$$

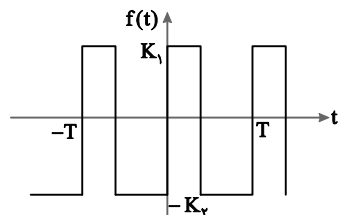
$$f_{rms} = \frac{A}{2}$$



$$f_{av} = \frac{2A}{\pi}$$

$$f_{rms} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

نکته: برای تابع متناوب موج مربعی شکل زیر داریم:



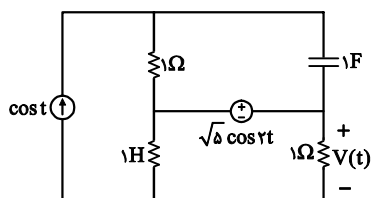
$$f_{av} = \frac{k_1 - k_2}{2}$$

$$f_{rms} = \sqrt{\frac{k_1^2 + k_2^2}{2}}$$



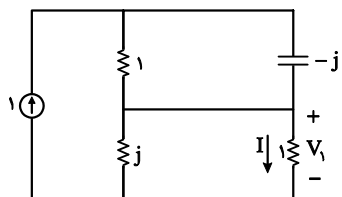
و اگر $k_1 = -k_2 = k$ باشد:

$$f_{av} = 0, \quad f_{rms} = k$$



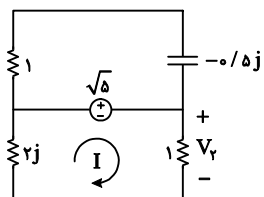
مثال ۳: در مدار شکل زیر، مقدار مؤثر $V(t)$ را به دست آورید.

با استفاده از قضیه جمع آثار در حوزه فرکانس داریم:



$$V_1 = 1 \times I = 1 \times \frac{j}{j+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle \frac{\pi}{4}$$

$$\rightarrow V_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$



$$V_2 = 1 \times I = \frac{\sqrt{5}}{1+2j} = 1 \angle -\tan^{-1} 2$$

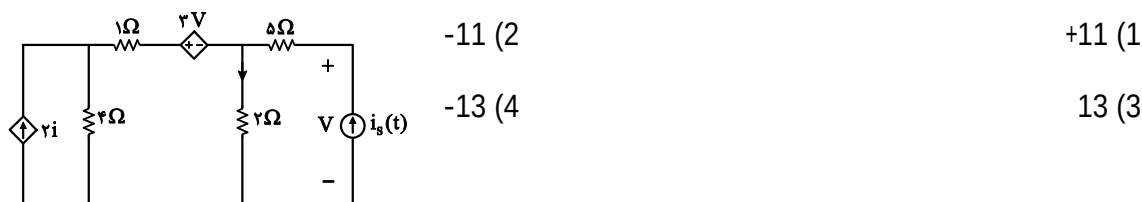
$$\rightarrow V_2(t) = \cos(2t - \tan^{-1} 2)$$

و در نتیجه:

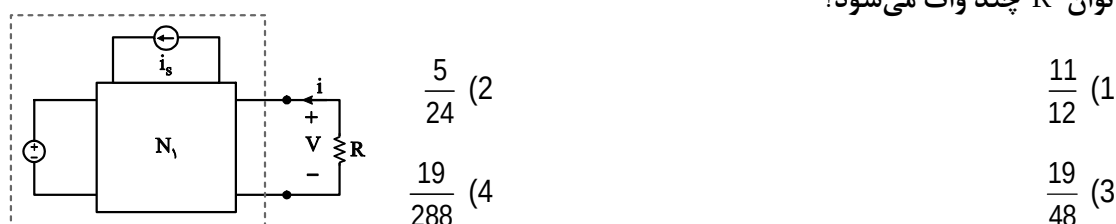
$$V_{rms} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} + 1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

تست‌های طبقه‌بندی شده مبحث مدار دوگان - مقدار متوسط و مقدار مؤثر

۱- اگر $i_s(t) = 1 + \frac{2\cos t}{3}$ باشد، توان متوسط منبع ولتاژ وابسته چند وات است؟



۲- در مدار شکل زیر، N_1 شامل مقاومت‌های خطی مثبت دو سر بوده و رابطه ولتاژ - جریان برای N با $V_s = 2\cos t$ و $i_s = 2A$ به صورت $2V - 3i - 1 + 3\cos t = 0$ است. اگر $i_s = 2\cos t$ و $V_2 = 2V$ شود، ماکزیمم توان R چند وات می‌شود؟

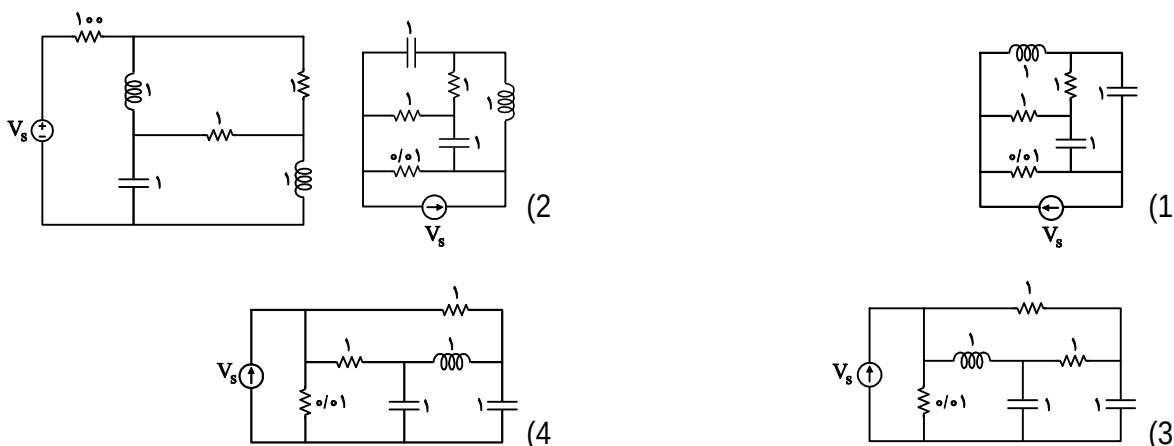


۳- مقدار مؤثر سیگنال $f(t) = 2\cos(2t + 30^\circ) + 3\cos(t + 45^\circ) + 4\cos(2t + 60^\circ)$ کدام است؟

- 1) 4/628 (2) 3/808 (3) 5/385 (4) 6/544

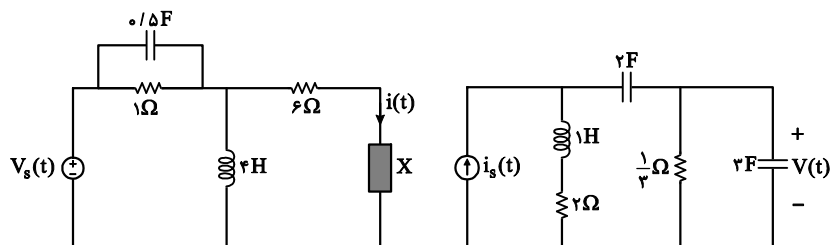
۴- کدام یک از مدارهای زیر دوگان مدار مقابل است؟

(مقاومت‌ها بر حسب اهم، سلف‌ها بر حسب هانری و خازن بر حسب فاراد است).



۵- در صورت یکسان بودن شکل موج‌های $i_s(t)$ و $V_s(t)$ در شکل‌های نشان داده شده، به جای X چه

عنصری قرار دهیم تا پاسخ‌های حالت صفر $i(t)$ و $V(t)$ متناسب شود؟



(1) سلف 3 هانری

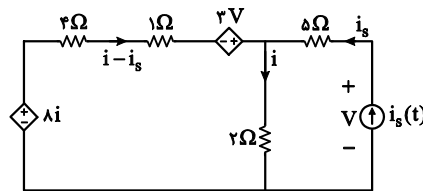
(2) خازن $\frac{3}{2}$ فاراد

(3) سلف 6 هانری

(4) خازن 3 فاراد

۱- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با استفاده از تبدیل نورتن به تونن داریم:



KVL در مش سمت راست: $V = 5i_s(t) + 2i$

KVL در مش سمت چپ: $-8i + 5(i - i_s) + 3V + 2i = 0 \rightarrow$

$$-8i + 5(i - i_s) + 3(5i_s + 2i) + 2i = 0 \rightarrow i = -2i_s(t)$$

پس برای توان منبع وابسته داریم:

$$p = 3V \times (i - i_s) = 3(5i_s + 2i)(i - i_s) = 3(5i_s - 4i_s)(-2i_s - i_s) \rightarrow p = -9i_s^2$$

با $i_s(t) = 1 + \frac{2\cos t}{3}$ داریم:

$$p = -9 \left(1 + \frac{2}{3} \cos t \right)^2 = -9 - 4\cos^2 t - 12\cos t$$

مقدار متوسط $\cos t$ برابر صفر و مقدار متوسط $\cos^2 t$ برابر $\frac{1}{2}$ است. پس مقدار متوسط p برابر است با:

$$p_{av} = -9 - 4 \times \frac{1}{2} = -9 - 2 = -11W$$

علامت منفی به این معنی است که منبع وابسته توان تحویل می‌دهد.

۲- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

مدار مقاومتی N_1 با رابطه زیر توصیف می‌شود:

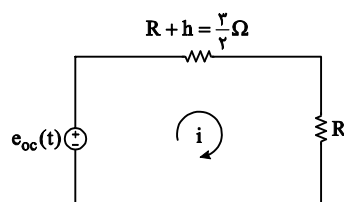
$$2V - 3i - 1 + 3\cos t = 0 \rightarrow V = \frac{3}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cos t$$

یعنی وقتی از دو سر این مدار مقاومتی به آن نگاه می‌کنیم دیده می‌شود که $R_{th} = \frac{3}{2}\Omega$ و $e_{oc} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cos t$ است.

در نتیجه با توجه به ورودی‌های $i_s = 2A$ و $V_s = 2\cos t$ می‌توان گفت:

$$e_{oc}(t) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cos t = \left(\frac{1}{4} \times 2 \right) - \left(\frac{3}{4} \times 2 \cos t \right) = \frac{1}{4} i_s - \frac{3}{4} V_s$$

بنابراین مدار معادل به صورت زیر است:



توان متوسط حداکثر زمانی به R منتقل می‌شود که $R = R_{th} = \frac{3}{2} \Omega$ باشد، پس:

$$i = \frac{e_{oc}(t)}{R_{th} + R} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} i_s - \frac{3}{4} V_s \right) = \frac{1}{12} i_s - \frac{1}{4} V_s$$

به ازای $i_s = 2 \cos t$ و $V_s = 2$ داریم:

$$i(t) = \frac{1}{6} \cos t - \frac{1}{2}$$

توان مقاومت R و مقدار متوسط آن برابر است با:

$$P(t) = Ri^2(t) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{6} \cos t - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{24} \cos^2 t - \frac{1}{4} \cos t + \frac{3}{8}$$

$$\rightarrow P_{av} = \left(\frac{1}{24} \times \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} \times 0 \right) + \frac{3}{8} = \frac{1}{48} + \frac{3}{8} = \frac{19}{48} W$$

لازم به ذکر است توان متوسط $\cos^2 t$ برابر $\frac{1}{2}$ و توان متوسط $\cos t$ برابر صفر است.

۳- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

جمله اول و سوم سیگنال $f(t)$ دارای فرکانس ۲ هستند و باید آن‌ها را با هم جمع کنیم:

$$2R30^\circ + 4R60^\circ = 2 \cos 30^\circ + j2 \sin 30^\circ + 4 \cos 60^\circ + j4 \sin 60^\circ = \left(2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \times \frac{1}{2} \right)$$

$$+ j \left(2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = (2 + \sqrt{3}) + j(1 + 2\sqrt{3}) = 3.73 + j4.46 ; 5.81R50^\circ$$

پس $f(t)$ برابر است با:

$$f(t) = 3 \cos(t + 45^\circ) + 5.81 \cos(2t + 50^\circ)$$

بنابراین مقدار مؤثر آن برابر است با:

$$f_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3^2}{2} + \frac{(5/81)^2}{2}} ; 4/629$$

۴- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

قسمت‌هایی از مدار را بررسی می‌کنیم.

مثلاً در مدار اصلی دو سلف موجود گره مشترکی ندارند، پس در مدار دوگان آن نیز، دو خازن نباید حلقه مشترکی داشته باشند. این حالت فقط در گزینه «2» صادق است.

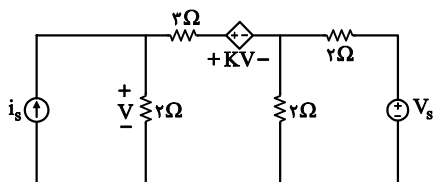
۵- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با توجه به شکل مدارهای نشان داده شده به نظر می‌رسد دو مدار دوگان یکدیگر هستند. با این تفاوت که در مدار سمت چپ مقدار مقاومت‌ها و سلف‌ها ضرب در 2 و خازن‌ها تقسیم بر 2 شده است. در نتیجه دوگان خازن 3 فارادی، سلف 3 هانری است که باید در 2 ضرب شود. بنابراین به جای X باید یک سلف 6 هانری قرار دهیم.

نکته: با K برابر شدن امپدانس یک مدار، مقاومت‌ها و سلف‌ها K برابر و خازن‌ها $\frac{1}{K}$ برابر می‌شوند.

فصل شانزدهم: مجموعه تست

۱- در مدار زیر به ازای چه مقدار k ، ولتاژ v ناشی از i_s ، برابر نصف آن می‌شود؟



$$(1) \frac{1}{2}$$

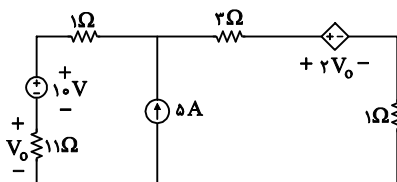
$$(2) -5$$

$$(3) 1$$

(4) هیچ مقدار k ، چون این مدار جواب یگانه ندارد.

۲- در مدار شکل زیر منبع جریان ۵ آمپری را با چه عنصری می‌توان جایگزین نمود به گونه‌ای که جریان و

ولتاژ شاخه‌ها هیچ تغییری نکنند؟



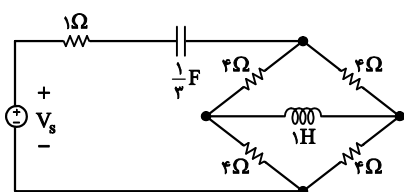
(1) مقاومت 2 اهمی

(2) مقاومت 6 اهمی

(3) منبع ولتاژ 5 اهمی

(4) منبع ولتاژ 15 اهمی

۳- در مدار زیر با تبدیل مقاومت 4Ω به 2Ω بیش‌ترین ثابت زمانی مدار چند ثانیه کم می‌شود؟



$$(1) \frac{1}{2}$$

$$(2) 1$$

$$(3) \frac{2}{3}$$

$$(4) 2$$

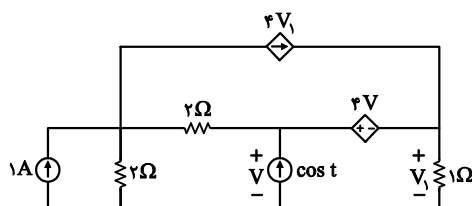
۴- در چه لحظاتی $v(t)=0$ است؟ (در گزینه‌ها 1 عددی صحیح است.)

(1) $2l\pi + \frac{\pi}{4}$

(2) $2l\pi + \frac{\pi}{2}$

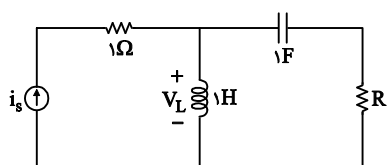
(3) $2l\pi + \frac{\pi}{3}$

(4) $2l\pi + \frac{2}{3}\pi$



۵- در مدار شکل زیر با تغییر آنی i_s به اندازه $\frac{2}{3}$ آمپر، ولتاژ V_L به اندازه ۲ ولت تغییر آنی می‌کند. مقاومت

R چند اهم است؟



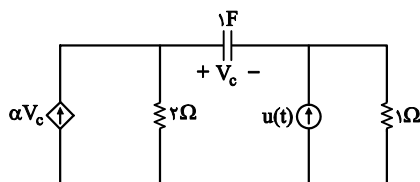
(2) $\frac{4}{3}$

(1) $\frac{1}{2}$

(4) 3

(3) $\frac{3}{2}$

۶- در مدار شکل زیر ولتاژ اولیه خازن V_0 می‌باشد کدام یک از پاسخ‌های زیر صحیح است؟



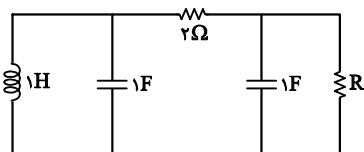
(1) به ازای $\alpha = \frac{1}{8}$ مدار ناپایدار است.

(2) به ازای $\alpha = 1$ مدار ناپایدار است.

(3) به ازای $\alpha = \frac{1}{4}$ مدار ناپایدار است.

(4) به ازای تمامی مقادیر α مدار پایدار است.

۷- اگر در پاسخ ورودی صفر مدار زیر جمله Ae^{-t} وجود داشته باشد (A ثابت)، مقدار R برابر چند اهم



است؟

(2) 2

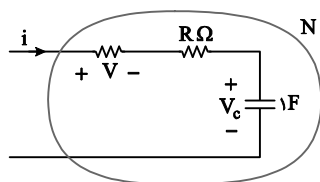
(1) -3

(4) 3

(3) 1

۸- در مدار زیر با مقاومت غیر خطی $v = i^2$ و ولتاژ خازن $v_c = \cos t$ به ازای چه مقدار R بر حسب اهم، توان

توسط N برابر یک وات می شود؟



$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

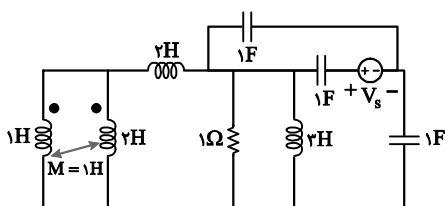
$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (3)$$

$$4 \quad (4)$$

۹- معادله مشخصه مدار زیر کدام است؟ (معادله مشخصه مدار معادله ای است که تمام فرکانس های طبیعی

مدار را می دهد)



$$s^2(s^2 + s + 1) = 0 \quad (1)$$

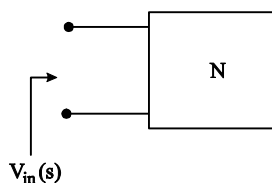
$$s^3(s^2 + s + 1) = 0 \quad (2)$$

$$s^2(2s^2 + 3s + 2) = 0 \quad (3)$$

$$s^3(s^2 + 3s + 2) = 0 \quad (4)$$

۱۰- امپدانس ورودی یک دهنه (یک قطبی) خطی و تغییرناپذیر با زمان به صورت $z_{in}(s) = \frac{s + \alpha}{s^2 + 4s + 8}$

است. به ازای کدام مقادیر α این یک دهنه دارای فرکانس تشدید حقیقی است؟



$$\alpha > 4 \quad (1)$$

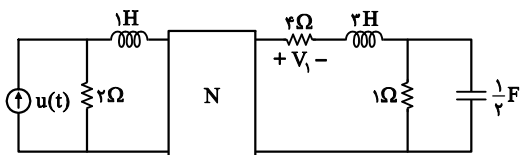
$$2 < \alpha < 4 \quad (2)$$

$$\alpha < 2 \quad (3)$$

(4) به ازاء هیچ مقدار α مدار دارای فرکانس تشدید حقیقی نمی باشد.

۱۱- مدار زیر یک مدار هم پاسخ است. اگر در شکل (الف) پاسخ حالت صفر V_1 به صورت

$V_1 = u(t)(3 - e^{-t} - 2e^{-3t})$ باشد در مدار شکل (ب)، $V_2(t)$ برابر با کدام گزینه است؟

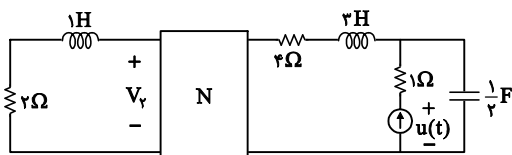


(1) $u(t)[3 - e^{-t} - 2e^{-3t}]$

(2) $\frac{1}{4}u(t)[3 + e^{-3t} - 4e^{-t}]$

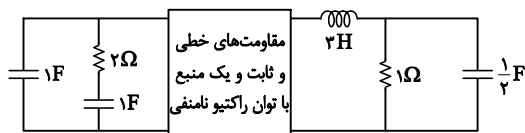
(3) $u(t)[-4e^{-t} + e^{-3t} + 3]$

(4) $\frac{1}{4}u(t)[3 - e^{-t} - 2e^{-3t}]$



۱۲- فرض کنید مدار زیر در فرکانس $\omega = 2 \text{ rad/s}$ در وضعیت دائمی سینوسی است. اگر توان متوسط مقاومت

۱ اهمی برابر دو وات باشد، مجموع توان‌های راکتیو خازن‌ها حداکثر چند وار (VAR) یا ولت آمپر راکتیو (است؟



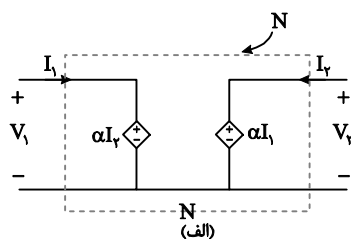
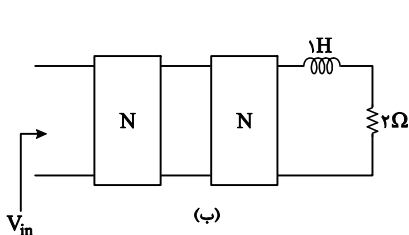
(1) -24

(2) -12

(3) -48

(4) -6

۱۳- با فرض دو دهنه N به صورت شکل (الف) امپدانس ورودی مدار شکل (ب) کدام است؟



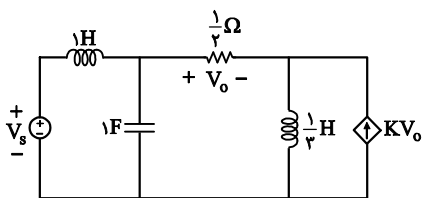
(1) $2s + 1$

(2) s

(3) $s + 1$

(4) $s + 2$

۱۴- در مدار شکل زیر محدوده مقادیر k چگونه باشد تا مدار همواره پایدار نمایی باقی بماند؟



(1) $k < -8$

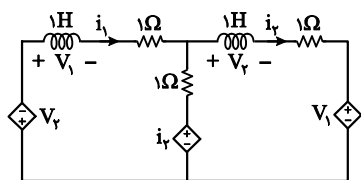
(2) $k > -2$

(3) $-8 < k < -2$

(4) مدار همواره ناپایدار است.

۱۵- در مدار شکل مقابل، با انتخاب جریان سلف و یا سلف‌ها (i_1 و یا i_2) به عنوان متغیرهای حالت A در

معادلات حالت ($\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x}$) برابر کدام گزینه زیر است؟



(1) $\underline{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

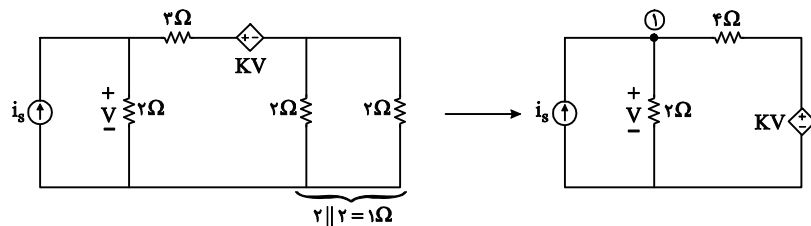
(2) $\underline{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(3) $\underline{A} = (-2)$

(4) $\underline{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

۱- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

چون ولتاژ v ناشی از منبع جریان i_s خواسته شده است، می‌توان منبع ولتاژ v_s را حذف نمود. در این صورت مدار به شکل زیر در می‌آید:



با KCL گره 1 داریم:

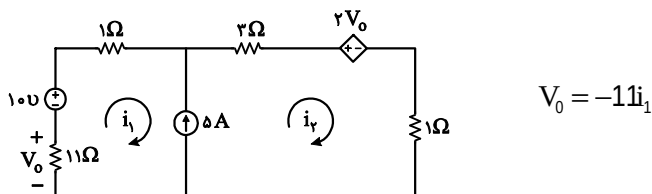
$$\text{KCL: } i_s = \frac{v - kv}{4} + \frac{v}{2} \rightarrow i_s = \frac{(3 - k)v}{4} \rightarrow v = \frac{4}{3 - k} i_s$$

بنابراین برای این که $v = \frac{1}{2} i_s$ باشد باید:

$$\frac{4}{3 - k} = \frac{1}{2} \rightarrow 3 - k = 8 \rightarrow k = -5$$

۲- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

ابتدا ولتاژ دو سر منبع جریان 5 آمپری را به دست می‌آوریم. با توجه به شکل زیر داریم:



$$\text{KVL: } i_1 + 3i_2 + 2V_0 + i_2 + 11i_1 - 10 = 0 \xrightarrow{V_0 = -11i_1} -10i_1 + 4i_2 = 10$$

$$\text{در مش مرکب: } i_1 - i_2 = -5$$

پس دو معادله دو مجهول زیر را داریم:

$$\begin{cases} -10i_1 + 4i_2 = 10 \\ i_1 - i_2 = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_1 = \frac{5}{3} \text{ A} \\ i_2 = \frac{20}{3} \text{ A} \end{cases}$$

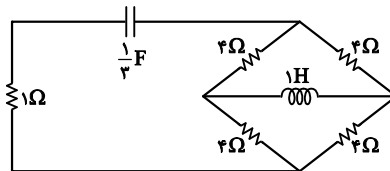
بنابراین ولتاژ دو سر منبع جریان برابر است با:

$$v = 4i_2 + 2V_o = 4i_2 - 22i_1 = 4\left(\frac{20}{3}\right) - 22\left(\frac{5}{3}\right) = -10 \text{ Volt}$$

پس می‌توان گفت عنصری که ولتاژ دو سر آن -10V و جریان عبوری از آن 5A است، یک مقاومت 2 اهمی است که با توجه به قضیه جانشینی می‌تواند جایگزین منبع جریان 5A شود به‌طوری که ولتاژ و جریان بقیه شاخه‌ها تغییر نکند.

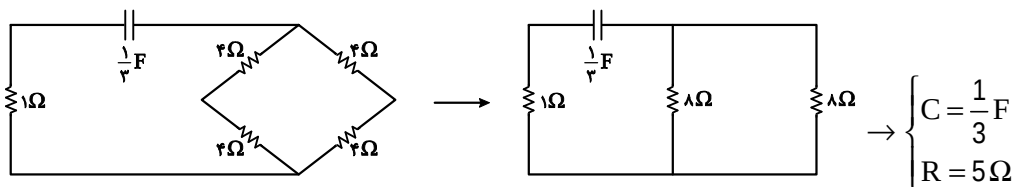
۳- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با توجه به وجود سلف و خازن می‌توان گفت مدار دارای دو ثابت زمانی است. از طرفی چون ورودی v_s تأثیری در ثابت زمانی ندارد، می‌توان آن را حذف کرد. بنابراین:



در این شرایط دو حالت وجود دارد:

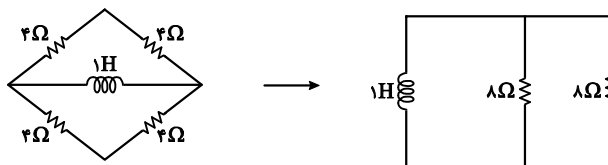
1- اگر خازن دارای ولتاژ اولیه‌ای باشد، با توجه به تقارن پل وتستون می‌توان گفت جریانی از سلف عبور نمی‌کند. پس می‌توان سلف را اتصال باز در نظر گرفت و مدار مانند یک مدار RC عمل می‌کند. در این صورت:



و ثابت زمانی $T_1 = RC = \frac{5}{3} \text{ s}$ است.

2- اگر سلف دارای جریان اولیه باشد، با توجه به تقارن پل، جریانی از خازن نمی‌گذرد پس می‌توان خازن را اتصال باز در

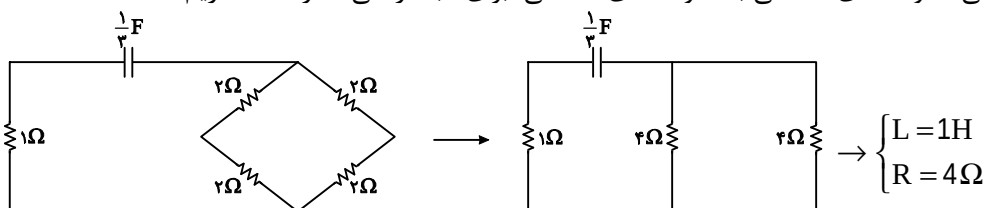
نظر گرفت و مدار مانند یک مدار RL عمل می‌کند. در این صورت:



و ثابت زمانی $T_2 = \frac{L}{R} = \frac{1}{4} \text{ s}$ است.

بنابراین بزرگ‌ترین ثابت زمانی مربوط به مدار RC است.

حال با جایگزینی مقاومت‌های 4 اهمی با مقاومت‌های 2 اهمی، برای ثابت زمانی مدار RC داریم:



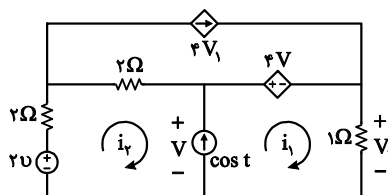
$$T_1' = R'C = \frac{3}{3} = 1 \text{ s}$$

بنابراین بزرگ‌ترین ثابت زمانی به میزان Δt ثانیه کم می‌شود:

$$\Delta t = T_1 - T_1' = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3} \text{ s}$$

۴- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با استفاده از تبدیل تونن - نورتن برای منبع جریان یک آمپری و مقاومت دو اهم، مدار به شکل زیر تبدیل می‌شود:



با توجه به شکل داریم:

در مش مرکب $i_1 - i_2 = \cos t$

KVL : $-V + 4V + V_1 = 0 \xrightarrow{V_1=i_1} v = -\frac{1}{3}v_1 = -\frac{1}{3}i_1$ در مش سمت راست

KVL : $-2 + 2i_2 + 2(i_2 - 4v_1)4v + i_1 = 0$ در مش مرکب

با جایگذاری روابط فوق در یکدیگر خواهیم داشت:

$$-2 + 4i_1 - 4\cos t - 8i_1 - \frac{4}{3}i_1 + i_1 = 0 \rightarrow i_1 = -\frac{3}{13}(4\cos t + 2)$$

برای این که $v(t) = 0$ باشد، لازم است $i_1 = 0$ شود. در نتیجه:

$$V(t) = 0 \rightarrow i_1 = 0 \rightarrow 4\cos t + 2 = 0 \rightarrow \cos t = -\frac{1}{2} \rightarrow t = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$$

۵- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

می‌دانیم که جریان گذرنده از سلف و ولتاژ خازن همواره پیوسته است. بنابراین با تغییر آنی جریان i_s ، به دلیل پیوسته بودن جریان سلف، همهٔ این تغییر آنی جریان از خازن می‌گذرد و به دلیل این که ولتاژ خازن پیوسته است، خازن مانند اتصال کوتاه عمل می‌کند تا این تغییر جریان $\frac{2}{3}$ آمپری از مقاومت R بگذرد. بنابراین افزایش آنی ولتاژ v_L ناشی از

افزایش ولتاژ دو سر مقاومت R می‌باشد که برابر است با $\frac{2}{3}R$.

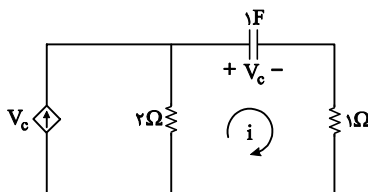
یعنی:

$$\frac{2}{3}R = v_L = 2 \rightarrow R = 3\Omega$$

۶- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

منبع جریان $u(t)$ نقشی در پایداری مدار ندارد، پس می‌توان آن را حذف کرد، یعنی اتصال باز کنیم. بنابراین مدار به

شکل زیر در می‌آید:



با KVL در مش سمت راست داریم:

$$\text{KVL: } v_C + i_C + 2(i_C - \alpha v_C) = 0 \xrightarrow{i_C = \frac{dv_C}{dt}} 3 \frac{dv_C}{dt} + (1 - 2\alpha) v_C = 0$$

$$\rightarrow \frac{dv_C}{dt} + \left(\frac{1 - 2\alpha}{3} \right) v_C = 0$$

برای پایدار بودن مدار باید ریشه‌های معادله مشخصه در نیم صفحه چپ باشد. به عبارت دیگر:

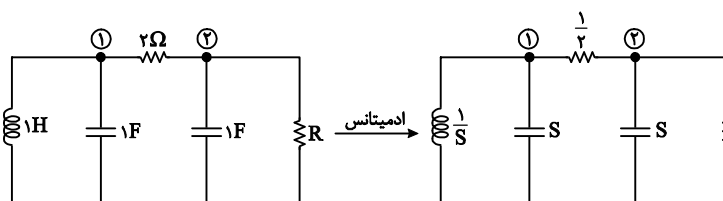
$$s + \left(\frac{1 - 2\alpha}{3} \right) = 0 \rightarrow s = \frac{2\alpha - 1}{3} < 0 \rightarrow 2\alpha - 1 < 0 \rightarrow \alpha < \frac{1}{2}$$

بنابراین برای $\alpha < \frac{1}{2}$ مدار ناپایدار است و با توجه به گزینه‌ها، به ازای $\alpha = 1$ مدار حتماً ناپایدار می‌باشد.

۷- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

برای این که جمله Ae^{-t} در پاسخ ورودی صفر مدار وجود داشته باشد، باید $s = -1$ فرکانس طبیعی مدار باشد. به

عبارت دیگر، $s = -1$ ریشه دترمینان ماتریس ادمیتانس گراف است. ماتریس ادمیتانس مدار به صورت زیر است:



$$Y = \begin{bmatrix} s + \frac{1}{s} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{R} \end{bmatrix}$$

در ماتریس فوق، دترمینان را به ازای $s = -1$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{R} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -\frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{4} = 0 \rightarrow R = 3$$

۸- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با توجه به مقادیر داده شده برای ولتاژ خازن و مقاومت غیرخطی می‌توان گفت، جریان گذرنده از خازن برابر است با:

$$v_C = \cos t \rightarrow i_C = \frac{dv_C}{dt} = -\sin t$$

که این جریان از مقاومت‌های خطی و غیرخطی نیز می‌گذرد. بنابراین ولتاژ مقاومت‌ها برابر است با:

ولتاژ مقاومت خطی: $v_1 = R(-\sin t) = -R \sin t$

ولتاژ مقاومت غیرخطی: $v_2 = i^2 = \sin^2 t$

پس توان تلف شده در مقاومت‌ها برابر است با:

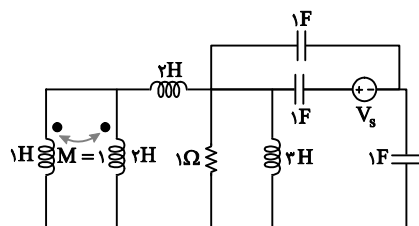
$$p = v i = v_1 i + v_2 i = R \sin^2 t - \sin^3 t$$

که مقدار متوسط جمله اول $\frac{R}{2}$ و مقدار متوسط جمله دوم برابر صفر است، یعنی:

$$p_{av} = \frac{R}{2} + 0 = \frac{R}{2} = 1W \rightarrow R = 2\Omega$$

۹- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با توجه به شکل مدار می‌توان گفت:



مدار دارای دو حلقه سلفی و یک کات ست خازنی است، پس تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر برابر است با:

$$2 + 1 = 3$$

$\nwarrow$ کات ست خازنی $\swarrow$ حلقه سلفی

بنابراین در معادله مشخصه ضرب s^3 وجود دارد. (گزینه‌های «2» و «4»)

ماتریس اندوکتانس سلف‌های تزویج‌دار به صورت زیر است:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \Gamma = L^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

پس اندوکتانس معکوس معادل و اندوکتانس معادل برابر است با:

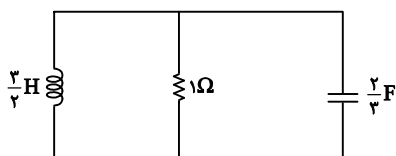
$$\Gamma_{eq} = \Gamma_{11} + \Gamma_{22} - 2\Gamma_{12} = 2 + 1 - 2 = 1 \rightarrow L_{eq} = \frac{1}{\Gamma_{eq}} = 1H$$

یعنی سلف‌های تزویج معادل یک سلف یک هانری است که با سلف 2 هانری سری و نتیجه آن با سلف 3 هانری موازی

است. پس کلاً معادل سلف $\frac{3}{2}$ هانری است.

از طرفی، منبع ولتاژ در فرکانس‌های طبیعی تأثیری ندارد، پس می‌توان آن را حذف کرد. بنابراین دو خازن یک فارادی با هم موازی شده و حاصل آن با خازن یک فارادی سمت راست سری می‌شود، پس خازن معادل $\frac{2}{3}$ فارادی است.

در نتیجه مدار به صورت یک مدار RLC موازی به شکل زیر تبدیل می‌شود:



ادمیتانس این مدار برابر است با:

$$y_{eq} = \frac{2}{3}s + 1 + \frac{2}{3s} = \frac{2s^2 + 3s + 2}{3s}$$

بنابراین معادله مشخصه به صورت زیر بیان می‌شود:

$$s^3(2s^2 + 3s + 2) = 0$$

۱۰- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

برای به دست آوردن فرکانس تشدید، s را به $j\omega$ تبدیل می‌کنیم و قسمت موهومی $Z_{in}(j\omega)$ را پیدا کرده و برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$z_{in}(j\omega) = \frac{j\omega + \alpha}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 8} = \frac{j\omega + \alpha}{(8 - \omega^2) + j4\omega} \times \frac{(8 - \omega^2) - j4\omega}{(8 - \omega^2) - j4\omega}$$

$$= \frac{(\alpha + j\omega)(8 - \omega^2 - j4\omega)}{(8 - \omega^2)^2 + 16\omega^2}$$

$$\text{Im } z_{in}(j\omega) = \omega(8 - \omega^2) - 4\alpha\omega = 0 \rightarrow \omega^2 = 8 - 4\alpha$$

که باید $\omega^2 > 0$ باشد، بنابراین:

$$\omega^2 = 8 - 4\alpha > 0 \rightarrow \alpha < 2$$

پس برای داشتن فرکانس تشدید حقیقی ($\omega^2 > 0$) باید $\alpha < 2$ باشد.

۱۱- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

جریان گذرنده از مقاومت 4 اهمی شکل الف به صورت زیر است:

$$I_1(s) = \frac{v_1(s)}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+3} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{7s+9}{s(s+1)(s+3)}$$

امپدانس حاصل از اتصال موازی مقاومت یک اهمی و خازن $\frac{1}{2}$ فارادی برابر $\frac{2}{s+2}$ است، پس ولتاژ خروجی $v_{o1}(s)$ در مدار شکل الف برابر است با:

$$v_{o1}(s) = \frac{2}{s+2} I_1(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7s+9}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

اگر منبع ولتاژ $u(t)$ سری با مقاومت یک اهمی در شکل ب را به صورت منبع جریان $u(t)$ موازی با مقاومت یک اهم در نظر بگیریم (تبدیل تونن به نورتن)، با توجه به قضیه هم پاسخی می‌توان گفت:

$$v_{o2}(s) = v_{o1}(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7s+9}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

و جریان گذرنده از مقاومت 2 اهمی در شکل ب برابر است با:

$$I_2(s) = \frac{v_{o2}(s)}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{7s+9}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

بنابراین ولتاژ خروجی $v_2(s)$ در شکل ب به صورت زیر به دست می‌آید:

$$v_2(s) = (s+2) I_2(s) = \frac{1}{4} \cdot \frac{7s+9}{s(s+1)(s+3)}$$

و با عکس لاپلاس‌گیری داریم:

$$v_2(t) = \frac{1}{4} (3 - e^{-t} - 2e^{-3t}) u(t)$$

۱۲- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

مقدار توان متوسط مقاومت یک اهمی برابر 2 وات است، یعنی:

$$p_{av} = R I_{eff}^2 = \frac{v_{eff}^2}{R} = 2 \rightarrow I_{eff} = V_{eff} = \sqrt{2}$$

به عبارت دیگر، حداکثر مقدار ولتاژ و جریان مقاومت یک اهمی برابر 2 است.

$$v = I = 2$$

پس می‌توان گفت، جریان گذرنده از خازن $\frac{1}{2} F$ برابر است با:

$$I_C = j\omega C V = j2 \times \frac{1}{2} \times 2 = j2$$

و جریان گذرنده از سلف چنین است:

$$I_L = I_R + I_C = 2 + j2$$

ولتاژ دو سر سلف و توان راکتیو آن برابر است با:

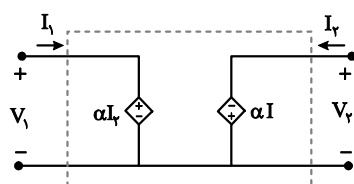
$$V_L = j\omega I_L = j2 \times 3 \times (2 + j2) = 6(-2 + j2)$$

$$Q_L = \frac{1}{2} V_L I_L^* = \frac{1}{2} \times 6(-2 + j2)(2 - j2) = -12(1 - j)^2 = j24$$

بنابراین توان راکتیو سلف 24 وار است و چون منبع داخل شبکه دارای توان راکتیو نامنفی است، پس مجموع توان‌های راکتیو خازن‌ها حداکثر 24- وار است.

۱۳- گزینه ی «۴» صحیح است.

دو قطبی شکل الف در واقع یک ژیراتور است. با نوشتن معادلات آن به صورت پارامترهای دوقطبی انتقال داریم:



$$\begin{cases} V_1 = \alpha I_2 \\ V_2 = -\alpha I_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_1 = -\alpha(-I_2) \\ I_1 = -\frac{1}{\alpha} V_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \frac{-1}{\alpha} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

T_1

در شکل ب دو تا دوقطبی پشت سر هم قرار گرفته‌اند، پس ماتریس پارامترهای انتقال آن به صورت زیر است:

$$T' = T_1 \times T_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \frac{-1}{\alpha} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \frac{-1}{\alpha} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

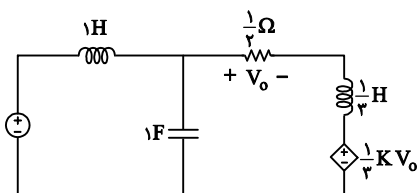
و برای امپدانس ورودی شکل ب داریم:

$$Z_L = s + 2$$

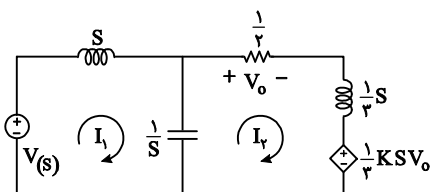
$$Z_{in} = \frac{A Z_L + B}{C Z_L + D} = \frac{1(s+2) + 0}{0+1} = s + 2$$

۱۴- گزینه ی «۲» صحیح است.

با استفاده از تبدیل نورتن به تونن مدار به صورت زیر در می آید:



با انتقال مدار به حوزه لاپلاس و نوشتن معادلات مش داریم:



$$\begin{bmatrix} s + \frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & \frac{1}{3}s + \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(s) \\ -\frac{1}{3} k s v_o \end{bmatrix}$$

با انتقال جمله $-\frac{1}{3} k s v_o$ به طرف چپ داریم:

$$\begin{bmatrix} s + \frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & \frac{1}{3}s + \frac{1}{s} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} k s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس امپدانس مش، معادله مشخصه مدار است:

$$\Delta s = \left(s + \frac{1}{s} \right) \left(\frac{1}{3}s + \frac{1}{s} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} k s \right) - \frac{1}{s^2} = 0$$

$$\rightarrow \Delta(s) = (2+k)s^4 + 3s^3 + (8+k)s^2 + 3s = 0$$

با استفاده از معیار پایداری راث داریم:

s^3	$2+k$
s^2	3
s^1	18
s^0	3

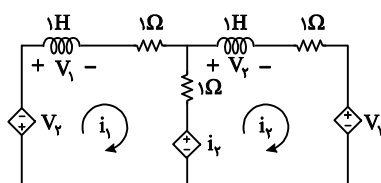
$8+k$
3

$\xrightarrow{\text{برای پایداری}}$

$2+k > 0 \rightarrow k > -2$

۱۵- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

در مدار شکل زیر با KVL زدن در دو مش مدار داریم:



KVL در مش سمت چپ: $v_2 + v_1 + i_1 + i_1 - i_2 + i_2 = 0$

KVL در مش سمت راست: $v_2 + i_2 + v_1 - i_2 + i_2 - i_1 = 0$

با جایگذاری $v_1 = \frac{di_1}{dt}$ و $v_2 = \frac{di_2}{dt}$ و ساده کردن معادلات داریم:

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + 2i_1 = 0 \\ \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0 \end{cases}$$

با تفریق این دو معادله به دست می‌آوریم:

$$3i_1 - i_2 = 0 \rightarrow i_2 = 3i_1$$

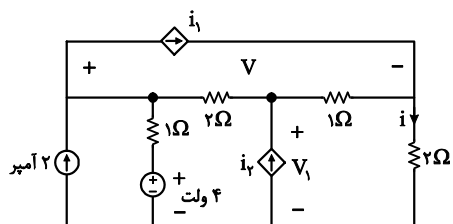
یعنی جریان‌های سلف‌ها وابسته به یکدیگرند. بنابراین فقط یک متغیر حالت داریم. با جایگذاری $i_2 = 3i_1$ در معادله اول داریم:

$$4\frac{di_1}{dt} + 2i_1 = 0 \rightarrow \frac{di_1}{dt} = -\frac{1}{2}i_1$$

پس ماتریس A به صورت اسکالر $A = \frac{-1}{2}$ بیان می‌شود.

مجموعه تست

۱- در مدار زیر منابع جریان وابسته به صورت $i_1 = V$ و $i_2 = V$ است. جریان i چند آمپر است؟



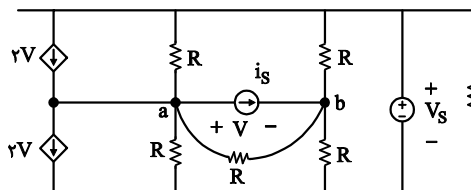
(1) 4-

(2) 2-

(3) 1

(4) 2

۲- چه مقاومتی از دو سر منبع جریان مستقل i_s (از دو نقطه a و b) دیده می‌شود؟



(1) $\frac{R}{2}$

(2) R

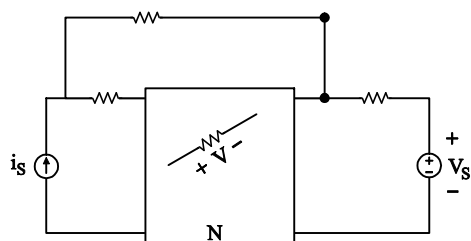
(3) 2R

(4) 3R

۳- در مدار مقاومتی خطی با جواب یگانه و با منابع مستقل $v_s = 2 + \cos t$ و آمپر $i_s = 3$ ، ولتاژ v در داخل

N برابر $3 + \frac{1}{2} \cos t$ است. بدون تغییر v_s ، مقدار i_s را چند برابر کنیم تا بیش‌تری مقدار v برابر ۵ ولت

شود؟



(1) $\frac{1}{2}$

(2) $\frac{3}{4}$

(3) $\frac{7}{4}$

(4) 2

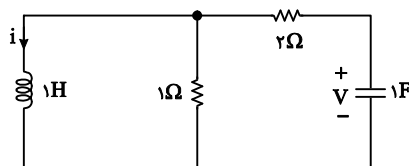
۴- در مدار زیر اگر $v(0^-) = i(0^-) = 1$ باشد، مقدار $i''(0^-)$ برابر است با:

(1) $-\frac{2}{3}$

(2) $-\frac{1}{3}$

(3) صفر

(4) 1



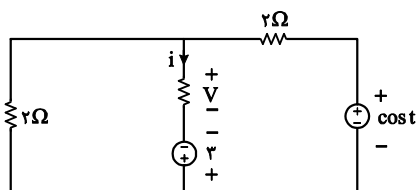
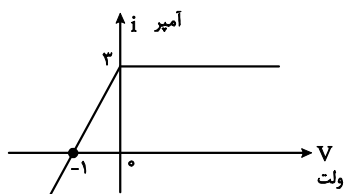
۵- در مدار زیر وقتی جریان مقاومت غیرخطی $i-v$ برابر ۳ آمپر است، بیشترین مقدار v چند ولت است؟

(1) صفر

(2) $\frac{1}{2}$

(3) 1

(4) 2



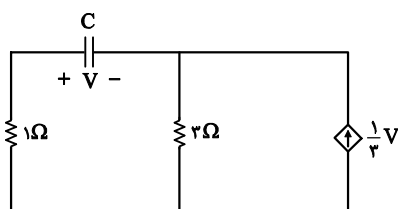
۶- در مدار زیر انرژی اولیه خازن در مدت $t = \ln \sqrt{2}$ ثانیه نصف می‌شود. مقدار C چند فاراد است؟

(1) 3

(2) 2

(3) 1

(4) $\frac{1}{2}$



۷- مدار زیر در وضعیت دائمی سینوسی است. N_1 در حالت تشدید و بیشترین توان آن برابر سه وات است.

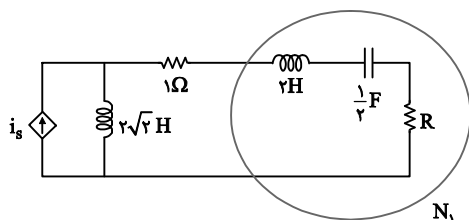
توان راکتیو مدار چند وار (چند آمپر راکتیو) است؟

(1) -4

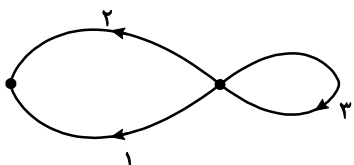
(2) $-4\sqrt{2}$

(3) $4\sqrt{2}$

(4) 8



۸- در مدار سه شاخه‌ای با گراف داده شده، کدام ادعا درست است؟



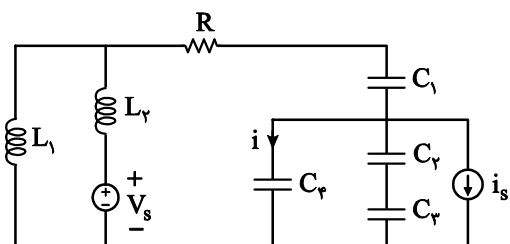
(1) ولتاژها روی خط موازی صفحه جریان‌ها قرار دارند.

(2) ولتاژها روی یک صفحه گذرنده از مبدأ قرار دارند.

(3) جریان‌ها روی یک خط گذرنده از مبدأ قرار دارند.

(4) ولتاژها روی خط عمود بر صفحه جریان قرار دارند.

۹- در مدار زیر مقادیر المان‌ها مثبت است. جریان i چند فرکانس طبیعی دارد؟



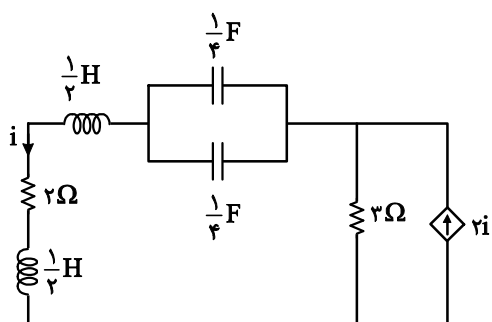
(1) دو فرکانس طبیعی مخالف صفر

(2) دو فرکانس طبیعی مخالف صفر و یک فرکانس طبیعی صفر

(3) دو فرکانس طبیعی مخالف صفر و دو فرکانس طبیعی صفر

(4) دو فرکانس طبیعی مخالف صفر و سه فرکانس طبیعی صفر

۱۰- در مدار زیر اگر معادلات حالت مدار به صورت $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ باشد، ماتریس $\mathbf{A}$ کدام است؟



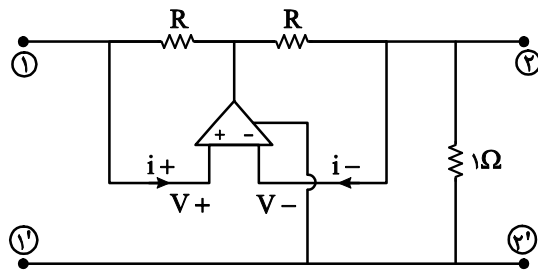
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

۱۱- ماتریس انتقال دو قطبی زیر کدام است؟ (آپ امپ ایده آل یعنی $v_+ = v_-$ و $i_+ = i_- = 0$)



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

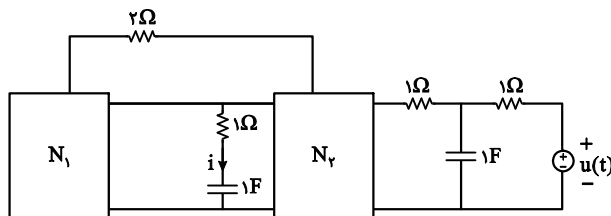
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} R & R \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

۱۲- در مدار هم پاسخ زیر در شکل (۱)، پاسخ حالت صفر i به صورت $i = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})u(t)$ است. در مدار

شکل (۲)، i_2 کدام است؟ ($u(t)$ تابع پله واحد)

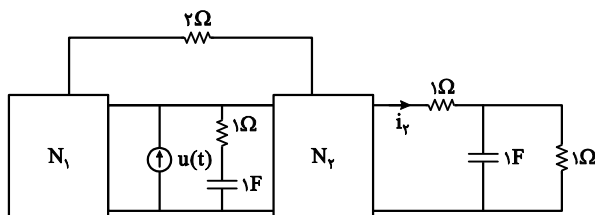


$$\frac{1}{3}(1 + 2e^{-3t})u(t) \quad (1)$$

$$(e^{-3t} + e^{-t})u(t) \quad (2)$$

$$(3e^{-3t} - 3e^{-t} + 1)u(t) \quad (3)$$

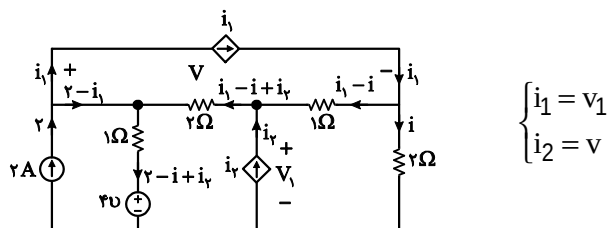
$$(e^t + 1 - 2e^{-3t})u(t) \quad (4)$$



پاسخ تشریحی

۱- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

در ابتدا با KCL زدن در گره‌های مدار داریم:



با KVL زدن در حلقه‌های مدار:

$$\text{KVL در حلقه سمت راست: } i_1 - i + v_1 - 2i = 0 \rightarrow v_1 + v_1 = 3i \rightarrow v_1 = \frac{3}{2}i$$

$$\text{KVL در حلقه وسطی: } 2(i_1 - i + i_2) + (2 - i + i_2) + 4 - v_1 = 0 \rightarrow$$

$$2v_1 - 2i + 2v + 2 - i + v + 4 - v_1 = 0 \rightarrow v_1 + 3v - 3i + 6 = 0 \rightarrow$$

$$\frac{3}{2}i + 3v - 3i + 6 = 0 \rightarrow v = \frac{1}{2}i - 2$$

$$\text{KVL در حلقه بالایی: } v = -2(i_1 - i + i_2) - (i_1 - i) = -3i_1 + 3i - 2i_2$$

$$\rightarrow v = -3v_1 + 3i - 2v \rightarrow 3v = -\frac{9}{2}i + 3i = -\frac{3}{2}i \rightarrow v = -\frac{1}{2}i$$

در نتیجه خواهیم داشت:

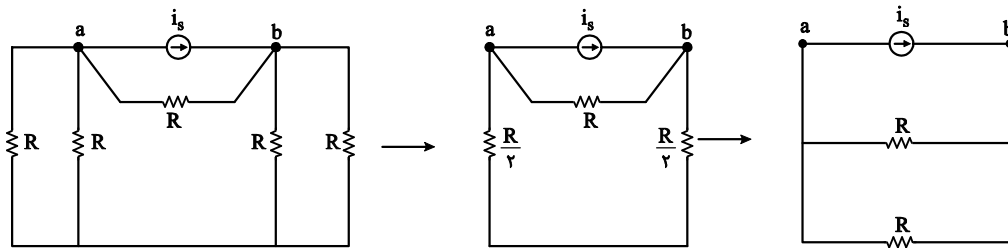
$$v = \frac{1}{2}i - 2 = -\frac{1}{2}i \rightarrow i = 2A$$

۲- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

برای محاسبه‌ی مقاومت معادل، منابع مستقل را باید حذف کرد. یعنی منبع v_s اتصال کوتاه می‌شود. بنابراین نقاط بالا و

پایین مدار هم پتانسیل می‌شوند، پس مقاومت R سمت راست به خاطر اتصال کوتاه حذف می‌شود و منابع جریان

وابسته تأثیری در محاسبات مقاومت معادل نداشته و می‌توان آن‌ها را حذف کرد. در نتیجه:



$$R_{th} = R_{ab} = R \parallel R = \frac{R}{2}$$

۳- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با توجه به این که مدار مقاومتی خطی با جواب یگانه (یکتا) است، می‌توان ولتاژ و جریان هر قسمت مدار را به صورت ترکیب خطی ورودی‌های مدار بیان کرد، یعنی:

$$v = \alpha v_s + \beta i_s$$

در حالت اول بیان شده برای منابع ولتاژ و جریان داریم:

$$\begin{cases} v_{s1} = 2 + \cos t \\ i_{s1} = 3 \\ v_1 = \frac{1}{2} \cos t + 3 \end{cases} \Rightarrow v_1 = \alpha v_{s1} + \beta i_{s1} \rightarrow \frac{1}{2} \cos t + 3 = 2\alpha + \alpha \cos t + 3\beta$$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ 2\alpha + 3\beta = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow v = \frac{1}{2} v_s + \frac{2}{3} i_s$$

بنابراین برای حالت دوم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} v_{s2} = 2 + \cos t \\ i_{s2} \end{cases} \rightarrow v_2 = \frac{1}{2} (2 + \cos t) + \frac{2}{3} i_{s2} = 1 + \frac{1}{2} \cos t + \frac{2}{3} i_{s2}$$

حداکثر مقدار v_2 برابر 5 ولت است، پس:

$$\max v_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} i_{s2} = 5 \rightarrow i_{s2} = \frac{21}{4} \text{ A}$$

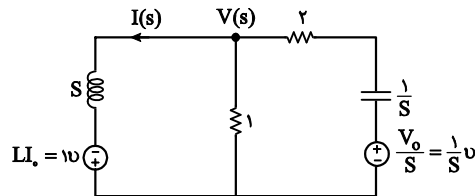
در نتیجه:

$$\frac{i_{s2}}{i_{s1}} = \frac{\frac{21}{4}}{3} = \frac{7}{4}$$

بنابراین باید i_{s2} را $\frac{7}{4}$ برابر کنیم.

۴- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با انتقال مدار به حوزه لاپلاس و استفاده از قضیه مقدار اولیه داریم:



با KCL زدن در گره بالایی:

$$\text{KCL: } \frac{v+1}{s} + \frac{v}{1} + \frac{v - \frac{1}{s}}{2 + \frac{1}{s}} = 0 \rightarrow v(s) = -\frac{s+1}{3s^2 + 3s + 1}$$

و در نتیجه:

$$I(s) = \frac{v(s)+1}{s} = \frac{3s+2}{3s^2 + 3s + 1}$$

با استفاده از قضیه مقدار اولیه و تبدیل لاپلاس داریم:

$$i(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sI(s) = 1A$$

$$i'(t) = f(t) \rightarrow F(s) = sI(s) - i(0^+) = \frac{3s^2 + 2s}{3s^2 + 3s + 1} - 1 = \frac{-s-1}{3s^2 + 3s + 1}$$

$$i'(0^+) = f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = -\frac{1}{3}$$

$$i''(t) = f'(t) \rightarrow L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^+) = \frac{-s^2 - s}{3s^2 + 3s + 1} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3(3s^2 + 3s + 1)}$$

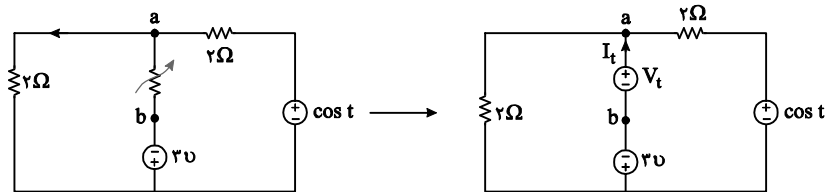
$$i''(0^+) = g'(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF'(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{3(3s^2 + 3s + 1)} = 0$$

و با توجه به پیوسته بودن جریان سلف می‌توان گفت:

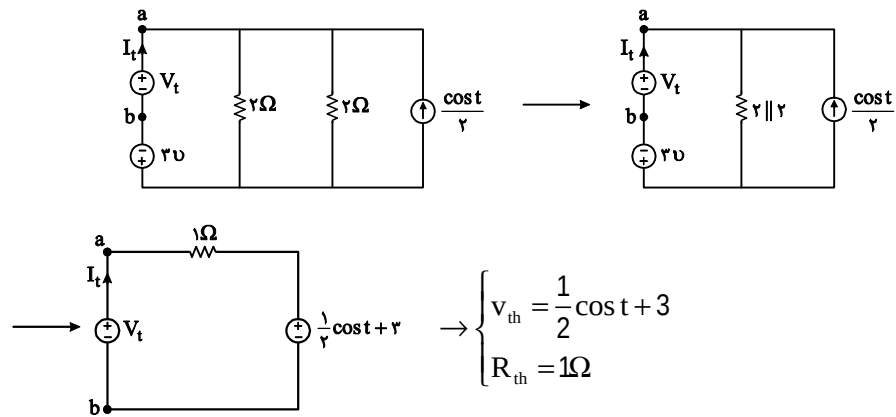
$$i''(0^-) = i''(0^+) = 0$$

۵- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

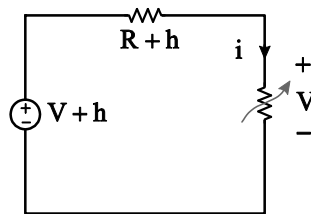
ابتدا مدار معادل تونن را از دو سر مقاومت غیرخطی به دست می‌آوریم:



با استفاده از تبدیل تونن به نورتن داریم:



بنابراین می توان گفت:



و به ازای $i = 3A$ داریم:

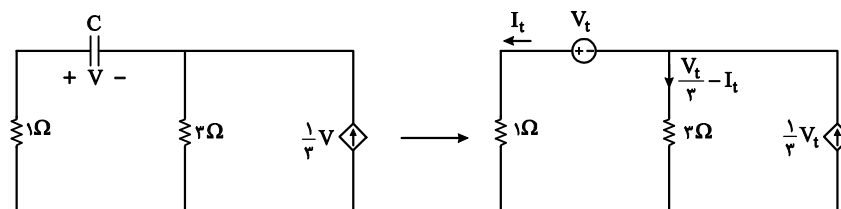
$$\text{KVL: } v_{th} = R_{th}i + v \rightarrow \frac{1}{2} \cos t + 3 = i + v = 3 + v \rightarrow v = \frac{1}{2} \cos t$$

که بیشترین مقدار v برابر است با:

$$v_{\max} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \text{ Volt}$$

۶- گزینه ی «۴» صحیح است.

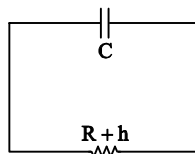
در ابتدا مقاومت معادل را از دو سر خازن پیدا می کنیم:



$$\text{KVL: } -v_t + I_t - 3\left(\frac{v_t}{3} - I_t\right) = 0 \rightarrow v_t = 2I_t$$

$$R_{th} = \frac{v_t}{I_t} = 2\Omega$$

بنابراین داریم:



$$\tau = R_{th}C = 2C \rightarrow v_c(t) = v_c(0)e^{-\frac{t}{2C}}$$

انرژی خازن در لحظه صفر و در زمان t برابر است با:

$$w_c(0) = \frac{1}{2}Cv_c^2(0)$$

$$w_c(t) = \frac{1}{2}Cv_c^2(t) = \frac{1}{2}Cv_c^2(0)e^{-\frac{t}{C}}$$

انرژی اولیه خازن در زمان $t = \ln\sqrt{2}$ نصف می‌شود، یعنی:

$$\frac{1}{2}Cv_c^2(0)e^{-\frac{t}{C}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}Cv_c^2(0) \rightarrow e^{-\frac{t}{C}} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\ln} -\frac{t}{C} = \ln\frac{1}{2}$$

$$= -\ln 2 \rightarrow \frac{t}{C} = \ln 2 \rightarrow C = \frac{t}{\ln 2} = \frac{\ln\sqrt{2}}{\ln 2} = \frac{1}{2} \rightarrow C = \frac{1}{2}F$$

۷- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

شبکه N_1 یک مدار RLC سری است و فرکانس تشدید آن برابر است با:

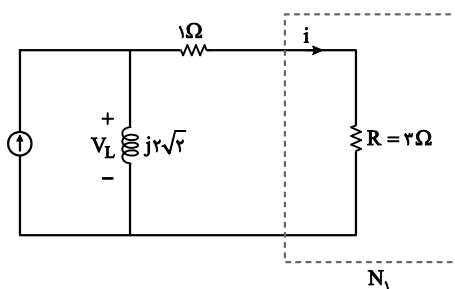
$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2 \times \frac{1}{2}}} = 1 \text{ rad/s}$$

با توجه به این که L و C سری در حالت تشدید هستند، اتصال کوتاه می‌شوند و شبکه N_1 فقط شامل بار مقاومتی

خالص است که شرط انتقال ماکزیمم توان به آن این است که:

$$R = |Z_s| = \sqrt{R_s^2 + X_s^2} = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{2} \times 1)^2} = 3\Omega$$

در نتیجه:



$$p_{\max, N_1} = Ri^2 = 3i^2 = 3w \rightarrow i = 1A$$

$$v_L = (1+3)i = 4 \times 1 = 4V$$

پس توان راکتیو سلف برابر است با:

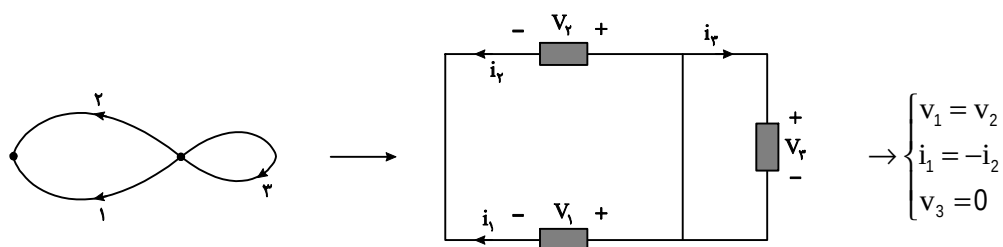
$$Q_L = \frac{v_L^2}{X_L} = \frac{v_L^2}{L\omega} = \frac{4^2}{2\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}VAR$$

و در نتیجه توان راکتیو مدار:

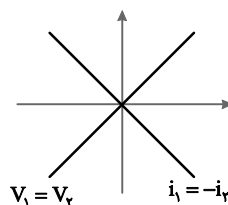
$$Q_s = -Q_L = -4\sqrt{2}VAR$$

۸- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با توجه به گراف داده شده می‌توان گفت:



با رسم نمودارهای ولتاژ و جریان داریم:



بنابراین ولتاژها روی خط عمود بر صفحه جریان‌ها قرار دارد.

۹- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

برای این که جریان خازن فرکانس طبیعی صفر داشته باشد، باید جریان آن ثابت باشد، یعنی:

$$i_C = k = \text{cte}$$

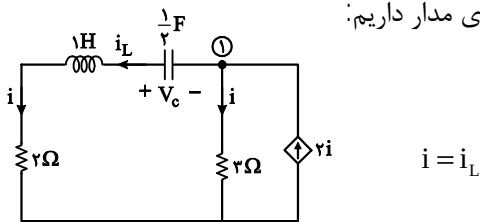
در نتیجه ولتاژ خازن برابر است با:

$$v_C = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt = \frac{k}{C} t$$

به عبارت دیگر، ولتاژ خازن به صورت خطی افزایش پیدا می‌کند که این حالت در مدارهای LTI غیرممکن است پس جریان خازن نمی‌تواند فرکانس طبیعی صفر داشته باشد، بنابراین فقط گزینه «۱» صحیح است.

۱۰- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

اگر v_C, i_L را به عنوان متغیرهای حالت در نظر بگیریم، با ساده‌سازی مدار داریم:



$$\text{KCL در گره ۱: } 2i - i + i_C = 0 \rightarrow i_C = -i \rightarrow \frac{1}{2} \frac{dv_C}{dt} = -i_L \rightarrow \dot{v}_C = -2i_L$$

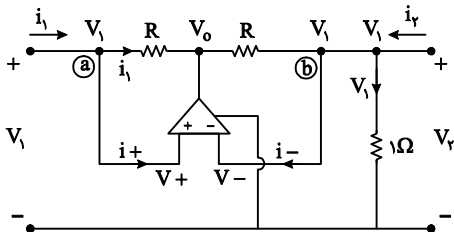
$$\text{KVL در مش سمت چپ: } -v_C + v_L + 2i - 3i = 0 \rightarrow -v_C + \frac{di_L}{dt} - i_L = 0 \rightarrow \dot{i}_1 = v_C + i_L$$

بنابراین:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۱- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با KCL زدن در سرهای ورودی آپ‌امپ داریم:



$$v_1 = v_+ = v_- = v_2$$

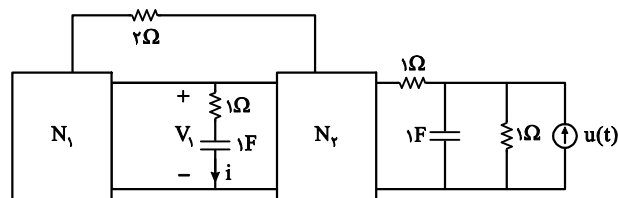
$$\text{KCL(a)}: \frac{v_1 - v_o}{R} = i_1$$

$$\text{KCL(b)}: \frac{v_1 - v_o}{1} + \frac{v_1}{1} = i_2 \rightarrow i_2 = i_1 + v_1 \rightarrow \begin{cases} v_1 = v_2 + 0 \\ i_1 = -v_1 - (-i_2) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \rightarrow T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

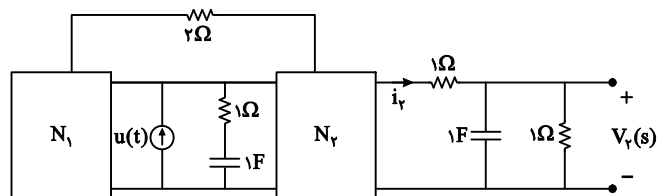
۱۲- گزینه ی «۱» صحیح است.

در شکل (1) منبع ولتاژ $u(t)$ سری با مقاومت یک اهمی را به منبع جریان تبدیل می کنیم:



$$v_1(s) = \left(1 + \frac{1}{s}\right) I(s) = \frac{s+1}{s} \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} \right) = \frac{1}{s(s+3)}$$

حال منبع جریان $u(t)$ در شکل 1 را به سمت چپ در شکل 2 منتقل می کنیم:



طبق قضیه هم پاسخی بیان دوم، $v_1(s) = v_2(s)$. بنابراین:

$$I_2(s) = \frac{v_2(s)}{1} + \frac{v_2(s)}{\frac{1}{s}} = (s+1)v_2(s) = (s+1)v_1(s)$$

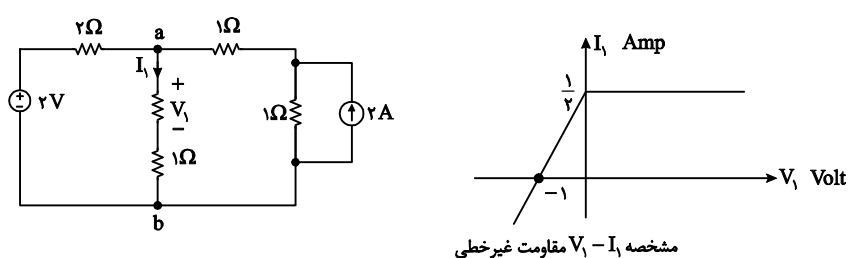
$$\rightarrow I_2(s) = \frac{s+1}{s(s+3)} = \frac{1}{s} + \frac{2}{s+3} \rightarrow i_2(t) = \frac{1}{3}(1 + e^{-3t})u(t)$$

مجموعه تست

۱- گراف مداری پنج گره و نه شاخه دارد. تعداد ولتاژهای مستقل از هم مدار برابر کدام است؟

- (1) تعداد معادلات KCL مستقل از هم مدار
(2) تعداد جریان‌های مستقل از هم مدار
(3) تعداد معادلات KVL مستقل از هم مدار
(4) $\frac{5}{4}$ تعداد معادلات KVL مستقل از هم مدار

۲- ولتاژ V_{ab} در مدار زیر، چند ولت است؟



(1) $\frac{1}{2}$

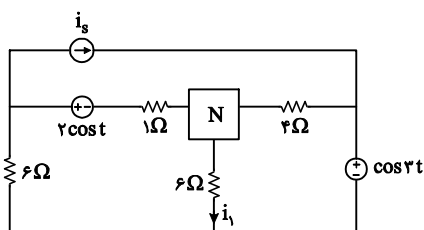
(2) 1

(3) $\frac{3}{2}$

(4) $\frac{5}{2}$

۳- در مدار مقاومتی خطی با جواب یگانه زیر، اگر $i_s = 5\sin 2t + 4$ آمپر باشد، در جریان i_1 یکی از جملات

برابر $-\frac{1}{5}\cos t$ است. جمله ثابت در i_1 کدام است؟ (N_1 بدون منابع مستقل است)



(1) -6

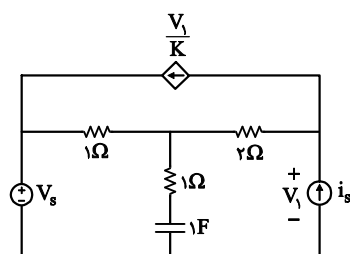
(2) -2/4

(3) -0/4

(4) 4

۴- فرکانس طبیعی مدار زیر، برابر $-\frac{1}{3}$ است. وقتی خازن اتصال باز است، چه مقاومتی از دو سر منبع جریان

مستقل دیده می‌شود؟ (k ثابت)



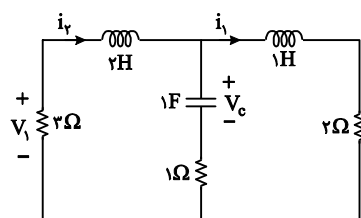
(2) 3Ω

(1) -4Ω

(4) 12Ω

(3) 8Ω

۵- در مدار زیر اگر $i_1(0^-) = i_2(0^-) = 1$ آمپر و $v_c(0^-)$ ولت باشد، مقدار $v_1'(0^+)$ برابر کدام است؟



3 (1)

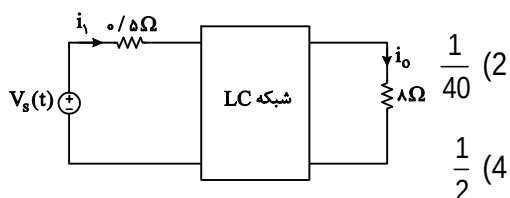
6 (2)

9 (3)

12 (4)

۶- در مدار روبه‌رو، که در وضعیت دائمی سینوسی قرار دارد، اگر $v_s(t) = \cos \omega t$ ولت و

$i_1(t) = \frac{1}{2} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$ آمپر باشد، دامنه جریان $i_o(t)$ چند آمپر است؟



$\frac{1}{8}$ (1)

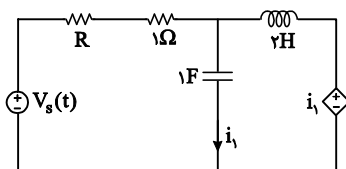
$\frac{1}{40}$ (2)

$\frac{1}{4}$ (3)

$\frac{1}{2}$ (4)

۷- وقتی در وضعیت دائمی سینوسی با فرکانس $\omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ بیش‌ترین توان متوسط مقاومت R برابر $2\sqrt{5}$

وات است، مجموع توان‌های متوسط منابع ولتاژ چند وات است؟



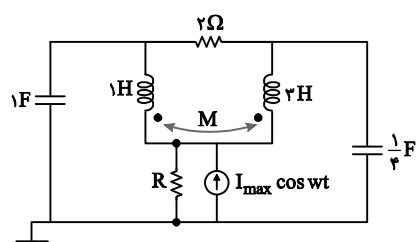
$-2(\sqrt{5}+1)$ (1)

$-2\sqrt{5}$ (2)

$+2(\sqrt{5}+1)$ (3)

$3\sqrt{5}$ (4)

۸- در مدار زیر، در وضعیت دائمی سینوسی جریان مقاومت 2Ω صفر است، مقدار M چند هانری است؟



$\frac{1}{3}$ (2)

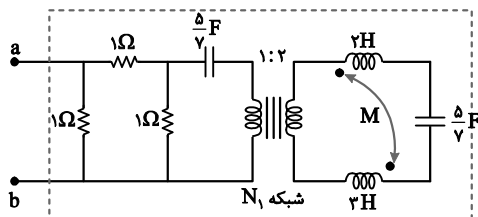
$\frac{1}{6}$ (1)

$\frac{2}{3}$ (4)

$\frac{1}{2}$ (3)

۹- ضریب تزویج متقابل M را به نحوی تعیین کنید که ضریب توان حقیقی N_1 در فرکانس $\omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ برابر

یک باشد؟



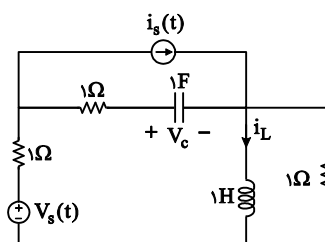
$$M = \frac{1}{3} H \quad (1)$$

$$M = \frac{1}{2} H \quad (2)$$

$$M = 2H \quad (3)$$

$$M = 1H \quad (4)$$

۱۰- در مدار زیر، با انتخاب $\underline{x} = \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix}$ به عنوان بردار حالت، ماتریس $\underline{A}$ در معادلات حالت برابر کدام است؟



$$(\underline{\dot{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}w)$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

۱۱- در مدار مرتبه سوم A، تابع انتقال $\frac{v_o}{v_s} = \frac{10}{(s+1)(s+2)}$ و در مدار مرتبه سوم B تابع انتقال

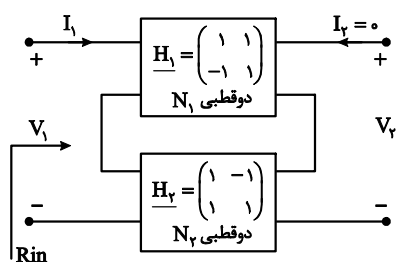
$\frac{v_o}{v_s} = \frac{5}{(s+1)^2(s+2)}$ را داریم. در کدام مدار با $v_s = \cos t$ حتماً $v_o(t)$ را داریم و با کدام دامنه سینوسی؟

(1) در موارد B با دامنه $\frac{1}{4}$ (2) در مدار A با دامنه $\frac{1}{4}$

(3) در مدار A با دامنه $\sqrt{10}$ (4) در مدار B با دامنه $\frac{\sqrt{5}}{2}$

۱۲- در اتصال دو تا دوقطبی روبه‌رو، مقاومت ورودی کل با $I_2 = 0$ چند اهم است؟ (H_1 و H_2 ماتریس‌های

هایبرید هستند و بعد از اتصال دوقطبی‌ها تغییر نمی‌کنند)



(1) $\frac{1}{4}$

(2) $\frac{1}{2}$

(3) 4

(4) 2

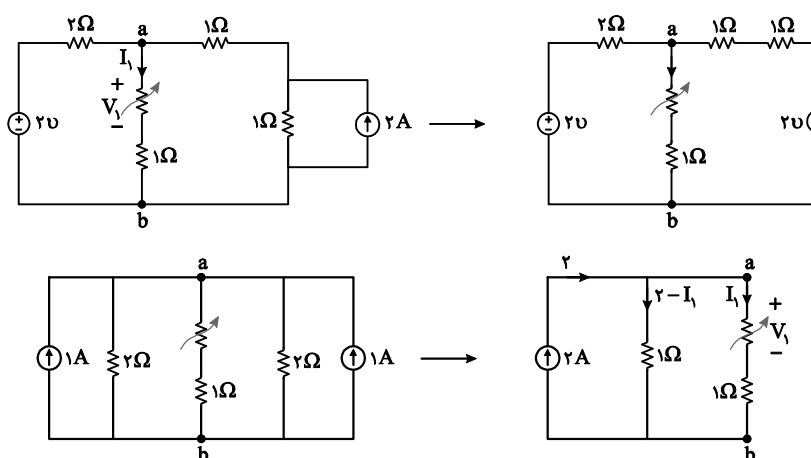
پاسخ تشریحی

۱- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

در هر گراف مداری، تعداد ولتاژهای مستقل از هم مدار برابر است با تعداد معادلات KCL مستقل از هم آن مدار. این رابطه مستقل از تعداد گره‌ها و شاخه‌های گراف مدار است.

۲- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

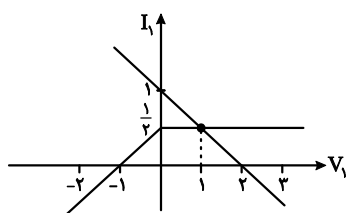
با استفاده از تبدیل تونن - نورتن، قسمت خطی مدار را ساده می‌کنیم:



با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases} v_{ab} = v_1 + 1 \times I_1 \\ v_{ab} = (2 - I_1) \times 1 \end{cases} \rightarrow v_1 + I_1 = 2 - I_1 \rightarrow I_1 = -\frac{1}{2}v_1 + 1$$

با تلاقی معادله قسمت خطی و مشخصه $(I-v)$ مقاومت غیرخطی، محل تلاقی را به دست می‌آوریم:



$$\text{محل تلاقی: } \begin{cases} v_1 = 1\text{V} \\ I_1 = \frac{1}{2}\text{A} \end{cases}$$

بنابراین v_{ab} برابر است با:

$$v_{ab} = v_1 + I_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\text{ Volt}$$

۳- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

در این سؤال، به دست آوردن ضریب هم پاسخی حقیقی موردنظر بوده است.

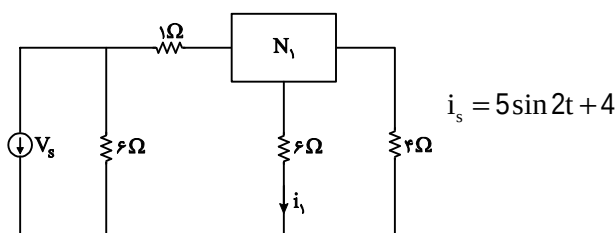
همان طور که در شکل مسأله دیده می شود، منبع ولتاژ $2\cos t$ باعث ایجاد جمله $-\frac{1}{5}\cos t$ در جریان i_1 می شود. به

عبارت دیگر، منبع ولتاژ $2\cos t$ در $-\frac{1}{10}$ ضرب شده و حاصل آن در جریان i_1 قرار گرفته است. به این ضریب $-\frac{1}{10}$

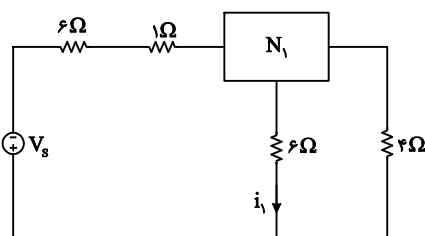
ضریب هم پاسخی گفته می شود.

حال برای بررسی اثر منبع جریان i_s (که شامل $\sin 2t$ است) بر روی جریان i_1 ، اثر منابع $2\cos t$ و $\cos 3t$ را حذف

می کنیم (آن ها را اتصال کوتاه می کنیم) در نتیجه، منبع جریان i_s با مقاومت 6 اهمی موازی می شود:



با استفاده از تبدیل نورتن به تونن داریم:



$$v_s = 6i_s = 6(5\sin 2t + 4) = 30\sin 2t + 24$$

با توجه به ضریب هم پاسخی، جریان i_1 ناشی از v_s (و متعاقباً ناشی از i_s) برابر است با:

$$i_1 = (30\sin 2t + 24) \times \left(\frac{-1}{10}\right) = -3\sin 2t - 2/4$$

بنابراین جمله ثابت در i_1 برابر $-2/4$ می باشد.

۴- گزینه ی «۴» صحیح است.

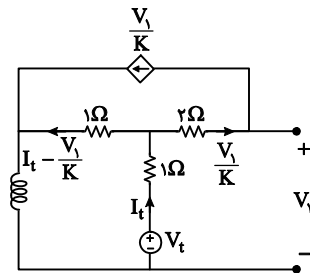
با توجه به این که فرکانس طبیعی مدار مرتبه اول برابر $s = -\frac{1}{3}$ است می توان گفت:

$$s = -\frac{1}{3} \rightarrow \tau = \left|\frac{1}{s}\right| = 3s$$

$$\tau = R_{eq} \times C = R_{eq} \times 1 = 3 \rightarrow R_{eq} = 3\Omega$$

یعنی مقاومت معادل دیده شده از دو سر خازن برابر 3Ω است. پس با محاسبه R_{eq} داریم:

(منابع ولتاژ مستقل اتصال کوتاه و منابع جریان مستقل اتصال باز می‌شوند).



$$\text{KVL در مش سمت چپ: } v_t = I_t + I_t - \frac{v_1}{k} \rightarrow v_t = 2I_t - \frac{v_1}{k}$$

$$\text{KVL در مش ورودی: } v_1 = -2\frac{v_1}{k} - I_t + v_t \rightarrow v_1 \left(1 + \frac{2}{k}\right) = v_t - I_t$$

$$\rightarrow \frac{v_1}{k} = \frac{v_t - I_t}{k+2}$$

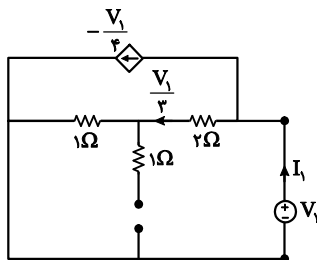
با استفاده از دو رابطه به دست آمده داریم:

$$v_t = 2I_t - \frac{v_t - I_t}{k+2} \rightarrow v_t \left(1 + \frac{1}{k+2}\right) = I_t \left(2 + \frac{1}{k+2}\right)$$

$$\rightarrow v_t (k+3) = I_t (2k+5) \rightarrow R_{eq} = \frac{v_t}{I_t} = \frac{2k+5}{k+3} = 3 \rightarrow k = -4$$

بنابراین برای مقاومت دیده شده از دو سر منبع جریان مستقل خواهیم داشت: (در این حالت طبق فرض مسأله خازن

اتصال باز است)

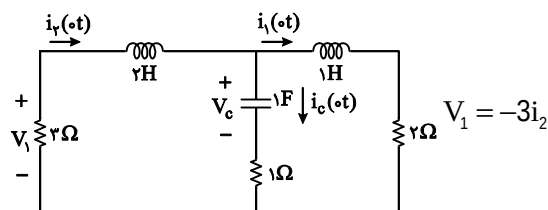


$$\text{KCL: } I_1 = \frac{v_1}{3} - \frac{v_1}{4} = \frac{v_1}{12} \rightarrow R = \frac{v_1}{I_1} = 12\Omega$$

۵- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با توجه به پیوسته بودن جریان سلف و ولتاژ خازن می‌توان گفت:

$$\begin{cases} i_1(0^+) = i_1(0^-) = 1A \\ i_2(0^+) = i_2(0^-) = 1A \\ v_c(0^+) = v_c(0^-) = 1V \end{cases}$$



با تحلیل مدار در لحظه $t=0^+$ می توان گفت:

$$KCL: i_2(0^+) = i_1(0^+) + i_c(0^+) \rightarrow i_c(0^+) = 1 - 1 = 0$$

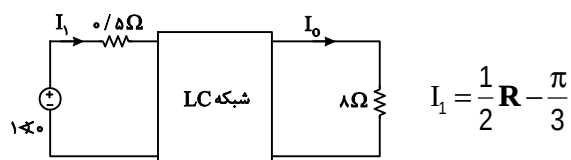
$$KVL: -v_1(0^+) + 2 \frac{di_2(0^+)}{dt} + v_c(0^+) + i_c(0^+) = 0 \rightarrow \frac{di_2(0^+)}{dt} = -2$$

بنابراین:

$$v_1 = -3i_2 \rightarrow v_1' = -3i_2' \rightarrow v_1'(0^+) = -3 \frac{di_2(0^+)}{dt} = -3 \times -2 = 6$$

۶- گزینه ی «۱» صحیح است.

در حالت دائمی سینوسی داریم:



با توجه به این که شبکه LC فاقد مقاومت است، کل توان حقیقی منبع ولتاژ در مقاومت های 0.5 اهمی و 8 اهمی

تلف می شود، یعنی:

توان حقیقی مقاومت 8 اهمی + توان حقیقی مقاومت 0.5 اهمی = توان حقیقی منبع ولتاژ

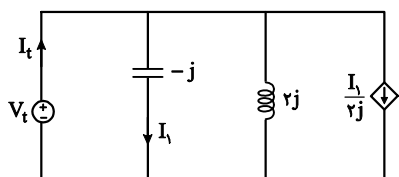
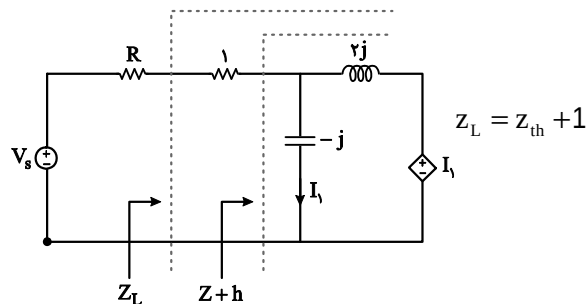
$$\rightarrow \frac{1}{2} v_m I_m \cos \varphi = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times 8 \times (I_0)^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{16} + 4I_0^2 \rightarrow I_0^2 = \frac{1}{4 \times 16} \rightarrow I_0 = \frac{1}{8} A$$

۷- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

در حالت دائمی سینوسی ($\omega=1$) امپدانس دیده می‌شود از دو سر مقاومت R را به دست می‌آوریم. با استفاده از

تبدیل تونن به نورتن داریم:



$$\begin{cases} \text{KVL: } I_t = I_1 + \frac{v_t}{2j} + \frac{I_1}{2j} \rightarrow I_t = jv_t - j\frac{v_t}{2} + \frac{v_t}{2} = v_t \left(\frac{1}{2} + \frac{j}{2} \right) \\ v_t = -jI_1 \rightarrow I_1 = jv_t \end{cases}$$

$$\rightarrow I_t = \left(\frac{j+1}{2} \right) v_t \rightarrow z_{th} = \frac{v_t}{I_t} = \frac{2}{j+1} \rightarrow z_L = \frac{2}{j+1} + 1 = \frac{3+j}{1+j}$$

برای انتقال ماکزیمم توان به مقاومت R داریم:

$$R = |z_L| = \left| \frac{3+j}{1+j} \right| = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5} \rightarrow R = \sqrt{5}\Omega$$

بیشترین توان مقاومت R برابر است با:

$$p_{R,\max} = \frac{1}{2} R I^2 \rightarrow \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times I^2 = 2\sqrt{5} \rightarrow I = 2A$$

توان حقیقی مدار که همان توان مقاومت‌هاست به صورت زیر به دست می‌آید:

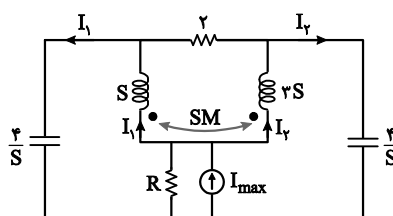
$$p_R = \frac{1}{2} R_{eq} I^2 = \frac{1}{2} (\sqrt{5} + 1) (2)^2 = 2(\sqrt{5} + 1)$$

بنابراین توان متوسط منابع، منفی توان متوسط مقاومت‌ها است یعنی:

$$p_s = -p_R = -2(\sqrt{5}+1)w$$

۸- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

در حالت دائمی سینوسی و با توجه به این که جریان مقاومت ۲ اهمی برابر صفر است داریم:



$$\text{KVL در مش وسطی: } sI_1 + sMI_2 = 3sI_2 + sMI_1 \rightarrow (M-3)I_2 = (M-1)I_1$$

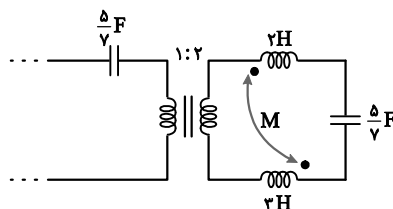
$$\text{KVL در مش بیرونی: } \frac{1}{s}I_1 - \frac{4}{s}I_2 = 0 \rightarrow I_1 = 4I_2$$

بنابراین داریم:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{M-3}{M-1} = 4 \rightarrow 4M-4 = M-3 \rightarrow 3M=1 \rightarrow M = \frac{1}{3}$$

۹- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

این که ضریب توان شبکه N_1 در فرکانس $\omega=1$ برابر یک است یعنی شبکه N_1 در حالت تشدید با فرکانس $\omega=1$ قرار دارد. با انتقال عناصر سمت راست ترانس ایده‌آل به طرف چپ (و حذف ترانس) داریم:



$$\text{امپدانس معادل سلف‌های طرف دوم: } L_{eq2} = 2 + 3 + 2M = 5 + 2M$$

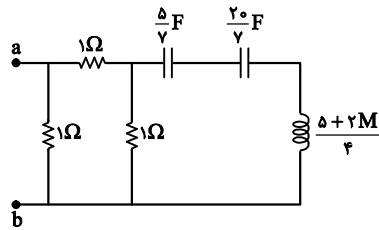
این امپدانس با نسبت $\left(\frac{n}{n}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ مقصد می‌یابد، یعنی: به طرف اول انتقال می‌یابد، یعنی:

$$L_{eq1} = (5 + 2M) \times \frac{1}{4} = \frac{5 + 2M}{4}$$

خازن (ادمیتانس) $\frac{5}{7}F$ نیز با نسبت $=2^2 = \left(\frac{n \text{ مبدأ}}{n \text{ مقصد}}\right)^2$ به طرف اول منتقل می‌شود، یعنی:

$$\frac{5}{7} \times 4 = \frac{20}{7} F$$

در نتیجه داریم:



پس یک مدار RLC داریم که مقادیر مقاومت‌ها در فرکانس تشدید تأثیری ندارند. بنابراین:

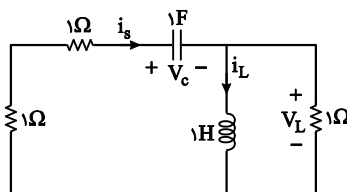
$$\begin{cases} \omega_r = \frac{1}{\sqrt{L_{eq} C_{eq}}} \\ L_{eq} = \frac{5+2M}{4} \\ C_{eq} = \frac{\frac{5}{7} \times \frac{20}{7}}{\frac{5}{7} + \frac{20}{7}} = \frac{4}{7} F \end{cases} \rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{7} \times \frac{5+2M}{4}}} = \sqrt{\frac{7}{5+2M}}$$

$$\omega_r = 1 \text{ rad/s} \rightarrow \frac{7}{5+2M} = 1 \rightarrow M = 1H$$

۱۰- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با توجه به این که فقط ماتریس A خواسته شده است، می‌توان ورودی‌ها را صفر کرد. در نتیجه با KCL و KVL زدن

در مدار زیر داریم:



$$KCL: i_c = i_L + v_L \rightarrow v_c = i_L + i_L$$

$$KVL: 2i_c + v_c + v_L = 0 \rightarrow 2v_c + v_c + i_L = 0$$

با جایگذاری دو رابطه در یکدیگر داریم:

$$2(i_L + i_L) + v_c + i_L = 0 \rightarrow i_L = \frac{1}{3}v_c - \frac{2}{3}i_L$$

$$v_c = i_L - 2v_c - v_c \rightarrow v_c = -\frac{1}{3}v_c + \frac{1}{3}i_L$$

بنابراین:

$$\begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

۱۱- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با توجه به ورودی مسأله می‌توان گفت:

$$v_s(t) = \cos t \rightarrow v_s(s) = 1, \omega = 1$$

برای مدار A داریم:

$$v_o(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} s v_o(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10s}{(s+1)(s+2)} = 0$$

و برای مدار B داریم:

$$v_o(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} s v_o(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5s}{(s+1)^2(s+2)} = 0$$

ولی باید از تابع انتقالی استفاده کرد که همه فرکانس‌های طبیعی را دارد، یعنی تابع B.

بنابراین:

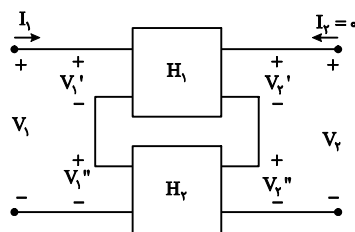
$$v_o(j\omega) = v_o(j) = \frac{5}{(j+1)^2(j+2)} \rightarrow |v_o| = \frac{5}{(\sqrt{2})^2 \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

۱۲- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

روش اول: با استفاده از تعریف ماتریس هیبرید H می‌توان گفت:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

بنابراین برای دوقطبی زیر داریم:



$$\text{برای } H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} v'_1 \\ I_2 = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ v'_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} v'_1 = I_1 + v'_2 \\ I_1 = v'_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow v'_1 = I_1 + I_1 \rightarrow v'_1 = 2I_1$$

$$\text{برای } H_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} v''_1 \\ I_2 = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ v''_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} v''_1 = I_1 - v''_2 \\ I_1 = -v''_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow v''_1 = I_1 + I_1 \Rightarrow v''_1 = 2I_1$$

در نتیجه در ورودی دو قطبی داریم:

$$v_1 = v'_1 + v''_1 = 2I_1 + 2I_1 = 4I_1$$

$$\rightarrow R_{in} = \frac{v_1}{I_1} = 4\Omega$$

روش دوم: با استفاده از تعریف ماتریس امپدانس Z می‌توان گفت:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

با توجه به ماتریس‌های H داریم:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} v'_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ v'_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} v'_1 = I_1 + v'_2 \\ I_2 = -I_1 + v'_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} v'_1 = 2I_1 + I_2 \\ v'_2 = I_1 + I_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \rightarrow z_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} v''_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ v''_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} v''_1 = I_1 - v''_2 \\ I_2 = I_1 + v''_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} v''_1 = 2I_1 - I_2 \\ v''_2 = -I_1 + I_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} v''_1 \\ v''_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \rightarrow z_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

با توجه به سری بودن ماتریس‌های z_1 و z_2 داریم:

$$z = z_1 + z_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

در نتیجه برای امپدانس ورودی کل دوقطبی، یعنی z_{11} داریم:

$$z_{11} = \frac{v_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = 4\Omega$$

